D I P L O M A R B E I T

Mathematische Methoden zeitraffender Lebensdaueranalysen

Thema

Ausgeführt am Institut für

Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von O. Univ.-Prof. Dr. Reinhard Viertl

durch

Mag. Werner Dirschmid BSc
Name

Siebenbürgerstr. 16-26/53/5, 1220 Wien
Anschrift

9.11.2011
Datum

Unterschrift (Student)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **2**

I Zeitraffende Lebensdauermodelle **3**
1 Das verallgemeinerte Sedyakin-Modell 3
2 Zeitraffende Ausfallzeitmodelle 8
3 Das Cox-Modell 11
4 Verallgemeinerungen des Cox-Modells 19
5 GAH- und GAMH-Modelle 29
6 Form- und skalenverändernde Modelle 30
7 Axiomatischer Ansatz zur Modellbildung 31

II Maximum-Likelihood-Schätzung bei Lebensdauerdaten **33**
8 Zensierte Lebensdauerdaten 33
9 Die Plausibilitätsfunktion für rechtszensierte Lebensdauerdaten 34
10 Die Score-Funktionen 36
11 Asymptotische Eigenschaften plausibler Schätzer 37
12 Approximative Konfidenzintervalle 38

III Das parametrische AFT-Modell **41**
13 Parametrisierung des AFT-Modells 41
14 FTR-Datenanalyse bei Verteilungen mit Skalen- und Formparameter 45
15 FTR-Datenanalyse bei der verallgemeinerten Weibull-Verteilung 50
16 FTR-Datenanalyse bei der Exponentialverteilung 54
17 ALT bei Verteilungen mit Skalen- und Formparameter 56

IV Das semiparametrische Cox-Modell **60**
18 Parametrisierung des Cox-Modells 60
19 Semiparametrische FTR-Datenanalyse 62

Abkürzungsverzeichnis **65**

Literatur **66**

Einleitung

Die vorliegende Arbeit möchte einen Überblick über Modelle geben, die in der zeitraffenden Lebensdaueranalyse eingesetzt werden. Bei zeitraffenden Lebensdaueranalysen versucht man, die Lebensdauer technischer Geräte zu schätzen, indem man sie einer erhöhten Belastung aussetzt. Hintergrund dieser Vorgangsweise ist, dass viele Geräte eine lange Lebensdauer haben und daher Lebensdauerdaten nur langfristig zur Verfügung stehen. Bei zeitraffenden Verfahren stehen Lebensdauerdaten deutlich schneller zur Verfügung, mit denen die Verteilung der Lebensdauer geschätzt werden kann.

Ziel einer Lebensdaueranalyse ist es, mit den durch erhöhte Belastung x gewonnenen Lebensdauerdaten eine Funktion $r(x)$ zu schätzen, mit deren Hilfe die Daten auf das Niveau der Gebrauchsbelastung gebracht werden können. Mit Hilfe von *accelerated life testing (ALT)* und *failure time regression (FTR)* können die entsprechenden Schätzung durchgeführt werden. Bei ALT werden technische Objekte einer höheren als gewöhnlichen Belastung ausgesetzt. Anschließend wird mit den dadurch gewonnenen Ausfalldaten die Zuverlässigkeit unter Gebrauchsbelastung geschätzt. Bei FTR werden die Ausfälle von technischen Objekten in Abhängigkeit von erklärenden Größen - wie z.B. Temperatur, Spannung oder Druck - beobachtet. Das Ziel einer FTR-Datenanalyse ist die Untersuchung der Zuverlässigkeit der technischen Objekte bei bestimmten Werten der erklärenden Variablen.

Es gibt unterschiedliche Modelle, in deren Rahmen die Schätzungen durchgeführt werden können. Ausgangspunkt ist das *verallgemeinerte Sedyakin-Modell*, das eine Beziehung zwischen Ausfallraten bei konstanten und zeitabhängigen Belastungen zulässt, aber nicht zwischen Ausfallraten bei unterschiedlichen Belastungen. Letzteres kann durch *zeitraffende Ausfallzeitmodelle* erreicht werden. Ein wichtiges Modell ist das *Cox-Modell*. Beim *Cox-Modell* ist die Ausfallrate proportional zu einer Basis-Ausfallrate. Im Anschluss an diese beiden Modelltypen werden Verallgemeinerungen des *Cox-Modells* diskutiert. Eine weitere Modellgruppe, die vorgestellt wird, setzt sich aus Modellen zusammen, die additive und multiplikative Einflüsse auf die Funktion $r(x)$ berücksichtigen. Zum Schluss werden Modelle präsentiert, die nicht nur skalen-, sondern auch formverändernd in Bezug auf die Zuverlässigkeitsfunktion sind.

Im Anschluss an die Präsentation der Modelle wird für die zeitraffenden Modelle die Funktion $r(x)$ parametrisiert. Die Schätzung der dabei auftretenden Parameter erfolgt über eine Plausibilitätsschätzung unter besonderer Berücksichtigung von rechtszensierten Daten. Beim Cox-Modell wird eine semiparametrische Schätzung der Parameter vorgestellt.

I Zeitraffende Lebensdauermodelle

Zeitraffende Lebensdauermodelle setzen die Verteilung der Lebensdauer zu erklärenden Variablen - wie z.B. bestimmten Materialbelastungen - in Beziehung. Die Lebensdauerverteilung kann dabei über die Zuverlässigkeitsfunktion, über die Verteilungsfunktion oder über die Dichte definiert werden. Die Bedeutung von Lebensdauermodellen wird aber am besten durch die Ausfallrate ausgedrückt.

Die erklärende Variable $x(\cdot)$ ist eine nichtstochastische, von der Zeit abhängige Funktion:

$$x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_m(\cdot))^T : [0, \infty) \to B \in \mathbb{R}^m$$

Wenn $x(\cdot)$ konstant ist, dann wird in den nachfolgenden Formeln nur x für die erklärende Variable geschrieben.

$T_{x(\cdot)}$ ist die Lebensdauer unter $x(\cdot)$. Die nachfolgenden Funktionen sind die Zuverlässigkeits-, die Verteilungs- und die Dichtefunktion der Lebensdauer $T_{x(\cdot)}$:

$$\begin{aligned} S_{x(\cdot)}(t) &= \mathbb{P}(T_{x(\cdot)} \geq t) \\ F_{x(\cdot)}(t) &= \mathbb{P}(T_{x(\cdot)} < t) \\ p_{x(\cdot)}(t) &= -S'_{x(\cdot)}(t) \end{aligned}$$

Die Ausfallrate unter $x(\cdot)$ ist

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(T_{x(\cdot)} \in [t, t+h) | T_{x(\cdot)} \geq t) = -\frac{S'_{x(\cdot)}(t)}{S_{x(\cdot)}(t)}.$$

Mit

$$A_{x(\cdot)}(t) = \int_0^t \alpha_{x(\cdot)}(u) du = -\ln S_{x(\cdot)}(t)$$

soll die kumulative Ausfallrate unter $x(\cdot)$ beschrieben werden.

1 Das verallgemeinerte Sedyakin-Modell

Ein erster Ansatz für zeitraffende Lebensdauermodelle wäre, nur über die Zeit konstante Belastungen beim Modellbau zu berücksichtigen. Die Struktur der bedeutenden Modelle in der Lebensdaueranalyse ist aber besser verständlich, wenn zuerst von Modellen ausgegangen wird, die Belastungen berücksichtigen, die sich über die Zeit ändern.

Nach dem *physikalischen Prinzip in der Zuverlässigkeit* von *Sedyakin* werden zwei Populationen von identischen Einheiten unterschiedlichen Stressniveaus x_1 und x_2 ausgesetzt. Zwei Zeitpunkte t_1 und t_2 sind in dieser Versuchsanordnung äquivalent, wenn die Überlebenswahrscheinlichkeiten gleich sind:

$$\mathbb{P}(T_{x_1} \geq t_1) = S_{x_1}(t_1) = S_{x_2}(t_2) = \mathbb{P}(T_{x_2} \geq t_2).$$

Wenn nach diesen äquivalenten Zeitpunkten beide Gruppen von Einheiten unter dem Stressniveau x_2 beobachtet werden, d.h die erste Population unterliegt der Stufenbelastung

$$x(t) = \begin{cases} x_1, & 0 \le t < t_1 \\ x_2, & t \ge t_1, \end{cases}$$

und die zweite Gruppe unterliegt weiterhin der Belastung x_2, dann gilt für alle $s > 0$

$$\alpha_{x(\cdot)}(t_1 + s) = \alpha_{x_2}(t_2 + s).$$

Das Modell von *Sedyakin* kann nun auf alle zeitabhängigen Belastungen verallgemeinert werden, indem angenommen wird, dass die Ausfallrate $\alpha_{x(\cdot)}$ zu jedem Zeitpunkt t eine Funktion vom Stressniveau und von der Überlebenswahrscheinlichkeit ist.

Definition 1.1 *Das verallgemeinerte Sedyakin-Modell (generalized Sedyakin's model (GS)) ist für eine Menge E von Belastungen anwendbar, wenn es auf $E \times \mathbb{R}^+$ eine positive Funktion g gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = g(x(t), S_{x(\cdot)}(t))$$

gilt. Eine äquivalente Formulierung für das Modell ist

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = g_1(x(t), A_{x(\cdot)}(t)) \tag{1.1}$$

mit $g_1(x, s) = g(x, exp\{-s\})$.

Das GS-Modell ist auch auf der Menge E_1 der konstanten Stressniveaus gültig:

Proposition 1.1 *Wenn die Ausfallraten $\alpha_x(t) > 0,\ t > 0$, auf einer Menge E_1 konstanter Stressniveaus existieren, dann ist das GS-Modell auf E_1 gültig.*

Beweis: Für alle $x \in E_1$ gilt

$$\alpha_x(t) = \alpha_x\big(A_x^{-1}(A_x(t))\big) = g_1(x, A_x(t))$$

mit $g_1(x, s) = \alpha_x(A_x^{-1}(s))$. $\diamondsuit$

Mit dem GS-Modell kann auch eine Beziehung zwischen zeitabhängigen und konstanten Belastungen hergestellt werden. Ausfallraten unter variierenden zeitlichen Belastungen lassen sich durch Ausfallraten unter unterschiedlichen konstanten Belastungen darstellen.

Proposition 1.2 *Wenn das GS-Modell auf einer Menge $E \supset E_1$ von Belastungen $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to E_1$ gültig ist, dann gilt für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = \alpha_{x_t}\big(A_{x_t}^{-1}(A_{x(\cdot)}(t))\big), \tag{1.2}$$

wobei x_t eine konstante Belastung ist, die gleich dem Wert von $x(\cdot)$ zum Zeitpunkt t ist.

Beweis: Falls das GS-Modell für E_1 anwendbar ist, gilt nach Definition 1.1 für alle $x \in E_1$

$$\begin{aligned} g_1(x,s) &= g_1\big(x, A_x(A_x^{-1}(s))\big) \\ &= g(x, \exp\{A_x(A_x^{-1}(s))\}) \\ &= g\big(x, S_x(A_x^{-1}(s))\big) = \alpha_x(A_x^{-1}(s)). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \alpha_{x(\cdot)}(t) &= g_1(x(t), A_{x(\cdot)}(t)) \\ &= g_1\big(x_t, A_{x_t}(A_{x_t}^{-1}(A_{x(\cdot)}(t))\big) = \alpha_{x_t}\big(A_{x_t}^{-1}(A_{x(\cdot)}(t))\big). \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

Zu den am meisten eingesetzten, zeitabhängigen Belastungen zählen *Stufenbelastungen*. Dabei werden zu testende Einheiten zu Beginn einem geringen Stress ausgesetzt. Wenn sie bis zu einem festgesetzten Zeitpunkt t_1 nicht ausfallen, wird der Stress erhöht. Funktionieren sie bis zu einem Zeitpunkt $t_2 > t_1$, wird die Belastung wiederum erhöht. In dieser Art wird die Belastung weiter gesteigert. Stufenbelastungen haben demnach die Form

$$x(t) = \begin{cases} x_1, & 0 \le t < t_1 \\ x_2, & t_1 \le t < t_2 \\ \dots & \dots \\ x_m, & t_{m-1} \le t < t_m, \end{cases} \tag{1.3}$$

wobei $x_1, \dots, x_m$ konstante Belastungen sind. Für $m = 1$ ist die Stufenbelastung *einfach*. Mengen von Stufenbelastungen der Form (1.3) sollen mit E_m bezeichnet werden.

Im folgenden soll die Bedeutung der Gleichung (1.2) für Stufenbelastungen dargestellt werden. Sei E_1 eine Menge von konstanten Belastungen und E_2 eine Menge von einfachen Stufenbelastungen der Form

$$x(t) = \begin{cases} x_1, & 0 \le t < t_1 \\ x_2, & t \ge t_1, \end{cases} \tag{1.4}$$

wobei $x_1, x_2 \in E_1$. Im GS-Modell werden die Zuverlässigkeitsfunktionen unter einfacher Stufenbelastung von den Zuverlässigkeitsfunktionen unter konstanter Belastung mittels der *Regel von der Zeitverschiebung* ermittelt:

Proposition 1.3 *Wenn das GS-Modell auf E_2 gültig ist, dann erfüllen die Zuverlässigkeitsfunktionen und die Ausfallraten unter dem Stress $x(\cdot) \in E_2$ die Gleichungen*

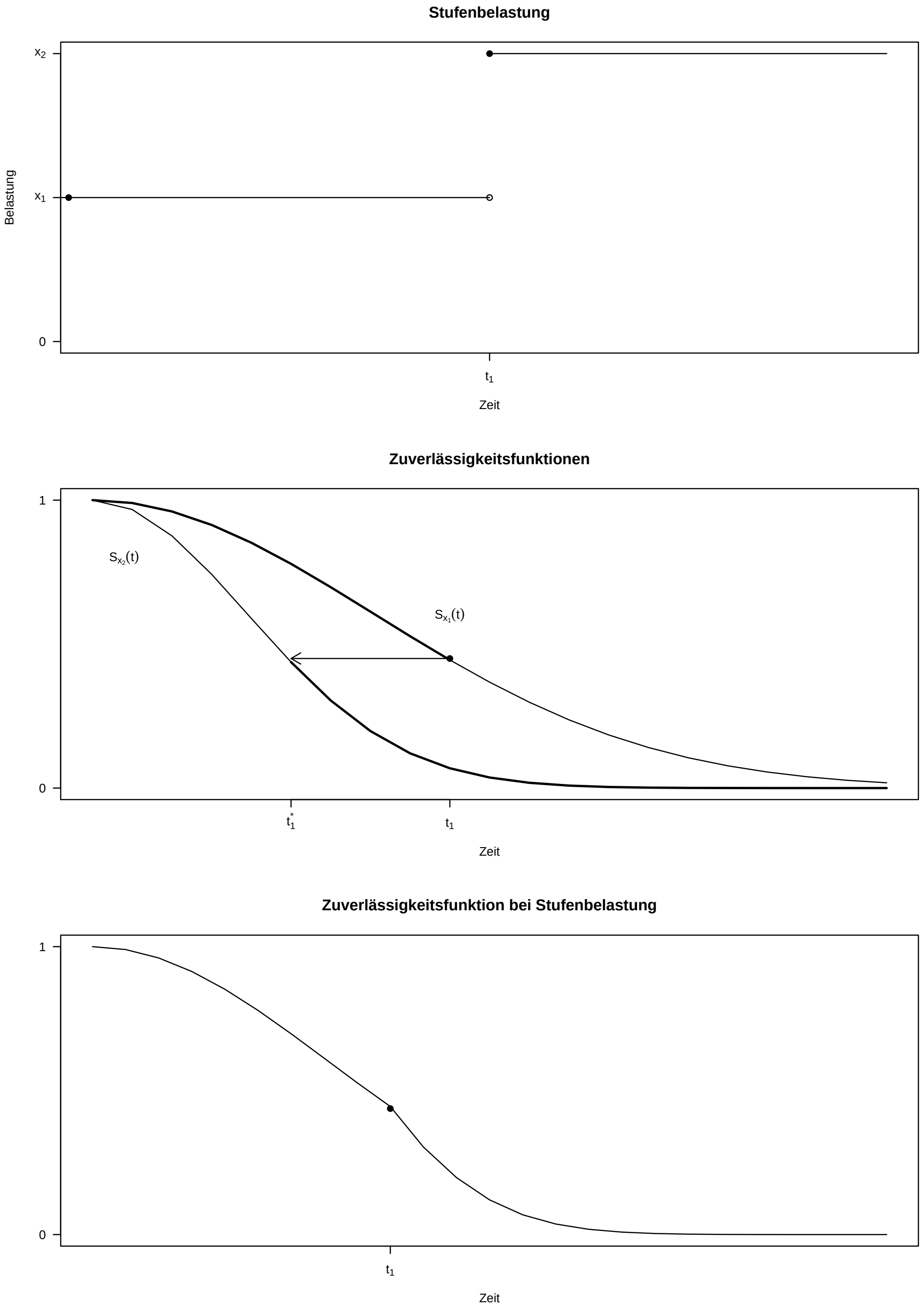
$$S_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} S_{x_1}(t), & 0 \le t < t_1 \\ S_{x_2}(t - t_1 + t_1^*), & t \ge t_1 \end{cases} \tag{1.5}$$

und

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} \alpha_{x_1}(t), & 0 \le t < t_1 \\ \alpha_{x_2}(t - t_1 + t_1^*), & t \ge t_1; \end{cases} \tag{1.6}$$

der Zeitpunkt t_1^* wird dabei durch die Gleichung $S_{x_1}(t_1) = S_{x_2}(t_1^*)$ bestimmt.

Abbildung 1: Stufenbelastung und Zuverlässigkeitsfunktion



Beweis: Aus der Bedingung am Schluss der Proposition folgt $a = A_{x_1}(t) = A_{x(\cdot)}(t_1) = A_{x_2}(t_1^*)$. Mit Gleichung (1.1) lässt sich die kumulative Ausfallrate als Integralgleichung

$$A_{x(\cdot)}(t) = \int_0^t g_1(x(u), A_{x(\cdot)}(u))du$$

darstellen. Es folgt für alle $t \geq t_1$

$$A_{x(\cdot)}(t) = a + \int_{t_1}^t g_1(x_2, A_{x(\cdot)}(u))du$$

und

$$A_{x_2}(t - t_1 + t_1^*) = a + \int_{t_1}^t g_1(x_2, A_{x_2}(u - t_1 + t_1^*))du.$$

Das bedeutet, dass die Funktionen $A_{x(\cdot)}(t)$ und $A_{x_2}(t - t_1 + t_1^*)$ für alle $t \geq t_1$ die Integralgleichung

$$h(t) = a + \int_{t_1}^t g_1(x_2, h(u))du$$

mit der Anfangsbedingung $h(t_1) = a$ erfüllen. Da die Lösung der Gleichung eindeutig ist, folgt

$$A_{x(\cdot)}(t) = A_{x_2}(t - t_1 + t_1^*) \qquad \forall t \geq t_1.$$

Damit sind die Gleichungen (1.5) und (1.6) erfüllt. $\diamondsuit$

Eine Verallgemeinerung auf die Menge E_m der Form (1.3) bringt folgende Proposition:

Proposition 1.4 *Wenn das GS-Modell auf E_m gültig ist, dann gilt*

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_{x_i}(t - t_{i-1} + t_{i-1}^*), \quad t \in [t_{i-1}, t_i),\ t_0 = 0, i = 1, 2, \ldots, m,$$

wobei t^* die Gleichungen

$$S_{x_1}(t_1) = S_{x_2}(t_1^*), \ldots, S_{x_i}(t_i - t_{i-1} + t_{i-1}^*) = S_{x_{i+1}}(t_i^*), \quad i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

erfüllt.

Beweis: siehe [1]

Beziehungen zwischen den Ausfallraten bzw. den Zuverlässigkeitsfunktionen bei unterschiedlichen Stressniveaus können durch das GS-Modell nicht dargestellt werden. Daher eignet sich dieses Modell auch nicht für die Schätzung der Zuverlässigkeit bei Gebrauchsbelastung, die im Rahmen von zeitraffenden Experimenten erfolgt. Schränkt man indes das Modell ein, indem Beziehungen zwischen Zuverlässigkeitsfunktionen bei unterschiedlichen konstanten Belastungen zugelassen werden bei gleichzeitiger Gültigkeit von Proposition (1.2), dann gelangt man zum *zeitraffenden Ausfallzeitmodell (accelerated failure time model (AFT))*.

2 Zeitraffende Ausfallzeitmodelle

Das einfachste AFT-Modell geht von Zuverlässigkeitsfunktionen unter *konstanter Belastung* aus, die sich in der Skalierung unterscheiden. Für jedes $x \in E_1$ gilt

$$S_x(t) = G(r(x)t), \tag{2.1}$$

wobei die Zuverlässigkeitsfunktion G nicht von x abhängt. Die Zuverlässigkeitsfunktionen unter $x_1, x_2 \in E_1$ stehen durch

$$S_{x_2}(t) = S_{x_1}(\rho(x_1, x_2)t)$$

miteinander in Beziehung, wobei $\rho(x_1, x_2) = r(x_2)/r(x_1)$.

Das AFT-Modell mit konstanten Belastungen kann auf die Menge der *zeitabhängigen Belastungen* verallgemeinert werden, indem das GS-Modell - und damit Proposition 1.2 - angewendet wird.

Proposition 2.1 *Das GS-Modell mit den Zuverlässigkeitsfunktionen (2.1) auf E_1 ist genau dann auf $E \supset E_1$ gültig, wenn es auf E eine positive Funktion r und auf $[0, \infty)$ eine positive Funktion q gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$ gilt:*

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)q\big(S_{x(\cdot)}(t)\big) \tag{2.2}$$

Beweis: Zuerst soll vom GS-Modell mit der Zuverlässigkeitsfunktion $S_x(t) = G(r(x)t)$ ausgegangen werden. x_t bezeichne das konstante Stressniveau, das dem Wert des zeitabhängigen Stressniveaus $x(\cdot)$ zum Zeitpunkt t entspricht. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\alpha_{x_t}(s) &= -\frac{S'_{x_t}(s)}{S_{x_t}(s)} \\
&= -\frac{G'(r(x_t)s)r(x_t)}{G(r(x_t)s)} \\
&= -\frac{G'\big(r(x(t))s\big)r\big(x(t)\big)}{G\big(r(x(t))s\big)} = \alpha\big(r(x(t))s\big)r(x(t))
\end{aligned}$$

mit $\alpha = -\frac{G'}{G}$.
Weiters gilt aufgrund der Zuverlässigkeitsfunktion

$$A_{x_t}^{-1}(s) = \frac{1}{r(x(t))}H(e^{-s})$$

mit $H = G^{-1}$. Gleichung (1.2) kann nun geschrieben werden als

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)q\big(S_{x(\cdot)}(t)\big),$$

wobei $q(p) = \alpha(H(p))$.

In der anderen Beweisrichtung zeigt man, dass Gleichung (2.2) ein Sonderfall des GS-Modells mit der Zuverlässigkeitsfunktion (2.1) ist. Für $x \in E_1$ gilt

$$\alpha_x(t) = r(x)q(S_x(t))$$

oder

$$-\frac{S'_x(t)}{S_x(t)q(S_x(t))} = r(x).$$

Bildet man auf beiden Seiten das Integral über das Intervall $[0,t]$ und substituiert auf der linken Seite $u = S_x(t)$, so erhält man

$$\int_0^{S_x(t)} \frac{du}{uq(u)} = \int_0^t r(x)du = r(x)t. \tag{2.3}$$

Setzt man $G = H^{-1}$ und $H(p) = -\int_0^p \frac{du}{uq(u)}$, so resultiert

$$S_x(t) = G(r(x)t). \quad \diamondsuit \tag{2.4}$$

Das GS-Modell kann mit der Zuverlässigkeitsfunktion (2.1) auf E_1 eingeschränkt werden. Daraus ergibt sich folgende Definition:

Definition 2.1 *Das AFT-Modell ist auf E anwendbar, wenn es auf E eine positive Funktion r und auf $[0,\infty)$ eine positive Funktion q gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$ die Gleichung (2.2) gilt.*

Gleichung (2.1) gibt die Zuverlässigkeitsfunktion unter konstanter Belastung wieder. Es fehlt noch der Ausdruck der Zuverlässigkeitsfunktion unter zeitabhängigem Stress.

Proposition 2.2 *Angenommen, das Integral*

$$\int_0^x \frac{dv}{vq(v)}$$

existiert für alle $x \geq 0$. Dann ist das AFT-Modell auf einer Menge von Belastungen E genau dann anwendbar, wenn es eine Zuverlässigkeitsfunktion G gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$ gilt:

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\Big(\int_0^t r\big(x(u)\big)du\Big) \tag{2.5}$$

Beweis: Nach Proposition (2.1) ist Gleichung (2.2) äquivalent zu

$$H(S_{x(\cdot)}(t)) = -\int_0^{S_{x(\cdot)}(t)} \frac{dv}{vq(v)} = \int_0^t r\big(x(u)\big)du$$

mit $G = H^{-1}$ und $H(p) = -\int_0^p \frac{d\nu}{\nu q(\nu)}$. Daraus ergeben sich beide Beweisrichtungen. $\diamondsuit$

Die nächste Proposition behandelt Zuverlässigkeitsfunktionen im AFT-Modell bei Stufenbelastung:

Proposition 2.3 *Falls das AFT-Modell auf E_2 gültig ist, dann gilt für die Zuverlässigkeitsfunktion unter jeder Belastung $x(\cdot) \in E_2$ in der Form (1.4)*

$$S_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} S_{x_1}(t), & 0 \leq t < t_1 \\ S_{x_2}(t - t_1 + t_1^*), & t \geq t_1, \end{cases}$$

wobei

$$t_1^* = \frac{r(x_1)}{r(x_2)} t_1. \tag{2.6}$$

Beweis: Da das AFT-Modell aus einer Einschränkung des GS-Modells hervorgeht, kann die angeführte Form der Stufenbelastung über Proposition 1.3 hergeleitet werden. Für $t_1^* = \frac{r(x_1)}{r(x_2)} t_1$ folgt aus Gleichung (2.1)

$$G(r(x_1)t) = S_{x_1}(t) = S_{x_2}(\alpha t) = G(r(x_2)\alpha t).$$

Ist G invertierbar, dann ergibt sich

$$\alpha = \frac{r(x_1)}{r(x_2)}$$

und

$$S_{x_1}(t) = S_{x_2}\Big(\frac{r(x_1)}{r(x_2)} t\Big).$$

Das bedeutet, dass t_1^* in Proposition 1.3 durch Gleichung (2.6) gegeben ist. $\diamondsuit$

Abschließend sollen noch einige Beziehungen zwischen dem Erwartungswert von im AFT-Modell verwendeten Zufallsvariablen und den Quantilen dargestellt werden. Sei $x(\cdot)$ wieder die zeitabhängige Belastung und $t_{x(\cdot)}(p)$ das p-Quantil der Zufallsvariablen $T_{x(\cdot)}$. Mit $x_\tau = x(\tau)$ sei der konstante Stress bezeichnet, der dem Wert der zeitabhängigen Belastung zum Zeitpunkt τ entspricht.

Proposition 2.4 *Das AFT-Modell sei auf E gültig und $x(\cdot), x_t \in E$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt*

$$\int_0^{t_{x(\cdot)}(p)} \frac{d\tau}{t_{x_\tau}(p)} = 1.$$

Weiters gilt, wenn die Mittelwerte $\mathbb{E}(T_{x(\cdot)})$ und $\mathbb{E}(T_{x_\tau})$ existieren und positiv sind,

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^{T_{x(\cdot)}} \frac{d\tau}{T_{x_\tau}}\Big) = 1.$$

Beweis: Wenn das AFT-Modell anwendbar ist, dann folgt aus Gleichung (2.5), dass für alle $x(\cdot) \in E$ die Verteilungsfunktion G der Zufallsvariablen

$$\int_0^{T_{x(\cdot)}} r\big(x(u)\big)du \tag{2.7}$$

nicht von $x(\cdot)$ abhängt. Sei m der Mittelwert dieser Zufallsvariablen. Für die konstante Belastung x_τ gilt

$$\int_0^{T_{x_\tau}} r(x_\tau)du = r(x_\tau)T_{x_\tau} = r\big(x(\tau)\big)T_{x_\tau}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Erwartung, so erhält man

$$m = r\big(x(\tau)\big)\mathbb{E}(T_{x_\tau}). \tag{2.8}$$

Aus den Gleichungen (2.7) und (2.8) folgt

$$\begin{aligned} m &= \mathbb{E}\Big(\int_0^{T_{x(\cdot)}} r(x(\tau))d\tau\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\int_0^{T_{x(\cdot)}} \frac{m}{\mathbb{E}(T_{x_\tau})}d\tau\Big) \\ &= m\mathbb{E}\Big(\int_0^{T_{x(\cdot)}} \frac{d\tau}{\mathbb{E}(T_{x_\tau})}\Big), \end{aligned}$$

und damit ist der zweite Teil der Proposition bewiesen. Es handelt sich dabei um das *Modell von Miner.*

Für den Beweis des ersten Teils der Proposition sei $t(p)$ das p-Quantil der Zufallsvariablen (2.7). Falls τ fix ist, folgt aus Gleichung (2.1)

$$t(p) = r\big(x(\tau)\big)t_{x_\tau}(p). \tag{2.9}$$

Es gilt

$$p = \mathbb{P}(T_{x(\cdot)} \leq t_{x(\cdot)}(p)) = \mathbb{P}\Big(\int_0^{T_{x(\cdot)}} r\big(x(\tau)\big)d\tau \leq \int_0^{t_{x(\cdot)}(p)} r\big(x(\tau)\big)d\tau\Big).$$

Daraus ergibt sich

$$t(p) = \int_0^{t_{x(\cdot)}(p)} r\big(x(\tau)\big)d\tau,$$

und mit Gleichung (2.9) ist der erste Teil der Proposition bewiesen. $\diamondsuit$

3 Das Cox-Modell

In der Lebensdaueranalyse wird das Cox- oder *proportional hazards (PH)*-Modell am häufigsten verwendet, wenn es darum geht, den Einfluss von erklärenden Variablen auf die Lebensdauerverteilung zu untersuchen. Ausgangspunkt für das Modell unter *konstanter Belastung* $x \in E_1$ ist, dass die Ausfallraten proportional sind zu einer Basis-Ausfallrate:

$$\alpha_x(t) = r(x)\alpha_0(t) \tag{3.1}$$

Daraus ergibt sich

$$r(x) = \frac{[\ln S_x(t)]'}{[\ln S_0(t)]'}, \tag{3.2}$$

und die Zuverlässigkeitsfunktionen haben die Form

$$S_x(t) = S_0^{r(x)}(t) = \exp\{-r(x)A_0(t)\}, \tag{3.3}$$

wobei

$$S_0(t) = \exp\Big\{-\int_0^t \alpha_0(u)du\Big\} \quad \text{und} \quad A_0(t) = \int_0^t \alpha_0(u)du = -\ln S_0(t).$$

Für alle $x_0 \in E_1$ bedeutet das Modell, dass bei konstanten Belastungen

$$\alpha_x(t) = \rho(x_0, x)\alpha_{x_0}(t) \quad \text{und} \quad S_x(t) = S_{x_0}^{\rho(x_0,x)}(t)$$

mit $\rho = r(x)/r(x_0)$ gilt.

Für *zeitabhängige Belastungen* wird das PH-Modell folgendermaßen definiert:

Definition 3.1 *Das PH-Modell ist auf der Menge E gültig, wenn für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)\alpha_0(t) \tag{3.4}$$

gilt.

Aus Definition 3.1 folgt, dass

$$A_{x(\cdot)}(t) = \int_0^t r\big(x(u)\big)dA_0(u)$$

und

$$S_{x(\cdot)}(t) = \exp\Big\{-\int_0^t r\big(x(u)\big)dA_0(u)\Big\}. \tag{3.5}$$

Das Modell (3.4) ist ungeeignet, wenn die zu untersuchenden Einheiten unter konstanter Belastung altern. Denn wenn x_t die konstante Belastung bezeichnet, die der zeitabhängigen Belastung $x(\cdot)$ zum Zeitpunkt t entspricht, dann folgt

$$\alpha_{x_t}(t) = r\big(x(t)\big)\alpha_0(t)$$

und

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = \alpha_{x_t}(t). \tag{3.6}$$

Für jedes t hängt die Ausfallrate unter der zeitabhängigen Belastung $x(\cdot)$ zum Zeitpunkt t nicht von den Belastungswerten vor t, sondern nur vom Wert zum jeweiligen Zeitpunkt t ab. Daher sollte die Ausfallrate unter konstanter Belastung konstant sein. Das bedeutet, dass die Lebensdauer exponentiell verteilt sein sollte.

Eine Verallgemeinerung des PH-Modells bei zeitabhängigem Stress kann - wie beim AFT-Modell in Proposition 2.1 - durch eine Einschränkung des GS-Modells erreicht werden. Das eingeschränkte Modell entspricht dann dem PH-Modell auf der Menge der konstanten Belastungen.

Proposition 3.1 *Das GS-Modell mit den Zuverlässigkeitsfunktionen (3.3) auf E_1 ist auf $E \supset E_1$ genau dann gültig, wenn für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)\alpha_0\left(A_0^{-1}\Big(\frac{A_{x(\cdot)}(t)}{r\big(x(t)\big)}\Big)\right) \tag{3.7}$$

gilt.

Beweis: Zuerst soll von Gleichung (3.7) ausgegangen werden. Gleichung (3.1) bedeutet, dass

$$\alpha_{x_t}(s) = r(x_t)\alpha_0(s) = r\big(x(t)\big)\alpha_0(s).$$

Weiters ergibt sich, dass

$$A_0(t) = \frac{-\ln S_x(t)}{r(x)} = \frac{A_x(t)}{r(x)}.$$

Daraus folgt

$$A_0^{-1}\Big(\frac{A_{x_t}(t)}{r\big(x(t)\big)}\Big) = t = A_{x_t}^{-1}(A_{x_t}(t))$$

oder

$$A_0^{-1}\Big(\frac{s}{r\big(x(t)\big)}\Big) = A_{x_t}^{-1}(s).$$

Nun kann Gleichung (1.2) in der Form (3.6) geschrieben werden.

In der anderen Beweisrichtung wird vom GS-Modell ausgegangen. Es wird gezeigt, dass Gleichung (3.7) ein Sonderfall des GS-Modells ist. Denn für $x \in E_1$ gilt

$$\alpha_x(t) = r(x)\alpha_0\left(A_0^{-1}\Big(\frac{A_x(t)}{r(x)}\Big)\right)$$

oder

$$t = A_0^{-1}\Big(\int_0^t \alpha_0(u)du\Big) = A_0^{-1}\Big(\frac{A_x(t)}{r(x)}\Big).$$

Es folgt

$$A_x(t) = r(x)A_0(t) \quad \text{und} \quad \alpha_x(t) = r(x)\alpha_0(t).$$

Das GS-Modell ist somit mit den Zuverlässigkeitsfunktionen 3.3 auf E_1 beschränkt. $\diamondsuit$

Das PH-Modell im Rahmen der Stufenbelastung $x(\cdot) \in E_2$ soll anhand der Ausfallrate und der Zuverlässigkeitsfunktion dargestellt werden:

Proposition 3.2 *Wenn das PH-Modell auf E_2 anwendbar ist, dann gilt für alle $x(\cdot) \in E_2$:*

$$\begin{aligned} \alpha_{x(\cdot)}(t) &= \begin{cases} \alpha_{x_1}(t), & 0 \le t < t_1 \\ \alpha_{x_2}(t), & t \ge t_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} r(x_1)\alpha_0(t), & 0 \le t < t_1 \\ r(x_2)\alpha_0(t), & t \ge t_1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{x(\cdot)}(t) &= \begin{cases} S_{x_1}(t), & 0 \le t < t_1 \\ S_{x_1}(t_1)\frac{S_{x_2}(t)}{S_{x_2}(t_1)}, & t \ge t_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} S_0^{r(x_1)}(t), & 0 \le t < t_1 \\ S_0^{r(x_1)}(t_1)\left(\frac{S_0(t)}{S_0(t_1)}\right)^{r(x_2)}, & t \ge t_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis: Die in Form der Ausfallrate ausgedrückte Stufenbelastung ergibt sich direkt aus Gleichung (3.1). Die Stufenbelastung in Form der Zuverlässigkeitsfunktionen ergibt sich mit der Regel der Zeitverschiebung, die bereits in Proposition 1.3 angewendet wurde. Es gilt

$$A_{x_2}(t - t_1 + t_1^*) = \underbrace{A_{x_2}(t_1^*)}_{=A_{x_1}(t_1)} \int_{t_1}^{t} r(x_2)\alpha_0(u)du.$$

Daraus resultiert

$$S_{x_2}(t - t_1 + t_1^*) = S_{x_1}(t_1)\frac{S_{x_2}(t)}{S_{x_2}(t_1)}. \quad \diamondsuit$$

Aus Proposition 3.2 folgt, dass für $x_0 \in E_1$ gilt:

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} \rho(x_0, x_1)\alpha_{x_0}(t), & 0 \le t < t_1 \\ \rho(x_0, x_2)\alpha_{x_0}(t), & t \ge t_1 \end{cases}$$

$$S_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} S_{x_0}^{\rho(x_0,x_1)}(t), & 0 \le t < t_1 \\ S_{x_0}^{\rho(x_0,x_1)}(t_1)\left(\frac{S_{x_0}(t)}{S_{x_0}(t_1)}\right)^{\rho(x_0,x_2)}, & t \ge t_1 \end{cases}$$

Nimmt man $x_0 = x_1$, so erhält man

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} \alpha_{x_1}(t), & 0 \leq t < t_1 \\ \rho(x_1, x_2)\alpha_{x_1}(t) & t \geq t_1 \end{cases}$$

und

$$S_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} S_{x_1}(t), & 0 \leq t < t_1 \\ S_{x_1}(t_1)\left(\frac{S_{x_1}(t)}{S_{x_1}(t_1)}\right)^{\rho(x_1,x_2)}, & t \geq t_1. \end{cases}$$

In den nächsten beiden Propositionen soll untersucht werden, wann das AFT-Modell mit dem PH-Modell übereinstimmt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Menge $r(E_1)$ einen inneren Punkt hat, wenn das AFT-Modell (oder das PH-Modell) auf E_1 definiert ist.

Proposition 3.3 *Das PH-Modell und das AFT-Modell sind auf E_1 genau dann äquivalent, wenn die Lebensdauerverteilung für alle $x \in E_1$ eine Weibull-Verteilung ist.*

Beweis: Sei zuerst angenommen, dass die Lebensdauerverteilung eine Weibull-Verteilung ist und dass das PH-Modell auf E_1 definiert ist. Dann gilt für alle $x \in E$

$$S_x(t) = e^{-(\frac{t}{\theta(x)})^{\alpha(x)}} = S_0(t)^{r(x)}.$$

Logarithmiert man auf beiden Seiten zweimal, dann erhält man für alle $t > 0$

$$\alpha(x)(\ln t - \ln \theta(x)) = \ln r(x) + \ln(-\ln S_0(t)).$$

Die Funktion $\ln(-\ln S_0(t))$ hängt nicht von x ab. Damit die Gleichung erfüllt ist, muss $\alpha(x)$ für alle $x \in E_1$ konstant sein. Es folgt

$$S_x(t) = e^{-(\frac{t}{\theta(x)})^{\alpha}}.$$

Das bedeutet, dass das AFT-Modell auf E_1 definiert ist.
Wenn die Lebensdauerverteilung eine Weibull-Verteilung und das AFT-Modell auf E_1 definiert ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} S_x(t) &= e^{-(\frac{t}{\theta(x)})^{\alpha}} \\ A_x(t) &= \left(\left(\frac{t}{\theta(x)}\right)^{\alpha}\right) \\ \alpha_x(t) &= r(x)\alpha_0(t) \end{aligned}$$

Dabei ist - aufgrund von $A_x(t) = \int_0^t r(x)\alpha_0(u)du$ - $r(x) = \alpha\theta(x)^{-\alpha}$ und $\alpha_0(t) = t^{\alpha-1}$. Somit ist auch das PH-Modell auf E_1 definiert.

Sei nun angenommen, dass sowohl das AFT- als auch das PH-Modell auf E_1 definiert sind und dass die beiden Modelle äquivalent sind. Das bedeutet, dass Funktionen S_0, S_1, r und ρ existieren, sodass für alle $x \in E_1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
S_x(t) &= S_0(t)^{r(x)} \\
S_x(t) &= S_1(\rho(x)t) = S_0(t)^{r(x)}
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, dass

$$S_1(\rho(x)t) = S_0(t)^{r(x)}$$

gilt. Logarithmiert man auf beiden Seiten zweimal, dann erhält man für alle $t > 0$

$$\ln(-\ln S_1\big(\rho(x)t\big)) = \ln r(x) + \ln(-\ln S_0(t)).$$

Setzt man

$$
\begin{gathered}
g_1(v) = \ln(-\ln S_1(e^v)), \quad g_0(v) = \ln(-\ln S_0(e^v)), \\
\alpha(x) = \ln \rho(x), \quad \beta(x) = \ln r(x),
\end{gathered}
$$

so kann die letzte Gleichung für alle $u \in \mathbb{R}$ und $x \in E_1$ geschrieben werden als

$$g_1(u + \alpha(x)) = \beta(x) + g_0(u).$$

Die Menge $r(E_1)$ hat einen inneren Punkt, d.h. die Menge enthält ein Intervall. Dann hat auch die Menge $\rho(E_1)$ einen inneren Punkt. Sei $x_1, x_2, x_3 \in E_1$ mit

$$\rho(x_2)/\rho(x_1) \neq \rho(x_3)/\rho(x_2).$$

Dann ist für alle $i, j = 1, 2, 3$

$$g_1(u + \alpha(x_i)) - g_1(u + \alpha(x_j)) = \beta(x_i) - \beta(x_j).$$

Setzt man

$$
\begin{gathered}
k_1 = \alpha(x_2) - \alpha(x_1), \quad k_2 = \alpha(x_3) - \alpha(x_2) \\
l_1 = \beta(x_2) - \alpha(x_1), \quad l_2 = \beta(x_3) - \beta(x_2),
\end{gathered}
$$

so kann die letzte Gleichung für $u = v - \alpha(x_j), v \in \mathbb{R}$ geschrieben werden als

$$g_1(v + k_i) = g_1(v) + l_i, \quad i = 1, 2.$$

Das bedeutet, dass die Funktion $g_1(\cdot)$ affin ist. Aus

$$g_1(v) = av + b$$

folgt

$$S_1(t) = \exp\{-e^b t^a\}$$

und damit

$$S_x(t) = \exp\{-e^b(\rho(x)t^a)\}.$$

Die Lebensdauerverteilung ist somit eine Weibull-Verteilung für alle $x \in E_1$. $\diamondsuit$

Es sei E_1 wieder die Menge der konstanten Belastungen und $x_1, x_2 \in E_1$. Die Stufenbelastung $x_s(\cdot)$ hat die Form

$$x_s(t) = \begin{cases} x_1, & 0 \le t < s \\ x_2, & t \ge s, \end{cases}$$

wobei s eine konstante positive Zahl ist.

Proposition 3.4 *Die Menge E möge E_1 und $x_s(\cdot)$ für $s > 0$ enthalten. Das AFT- und PH-Modell sind auf E genau dann gleich, wenn die Lebensdauer für alle $x \in E_1$ exponentiell verteilt ist.*

Beweis: Es sei zuerst angenommen, dass das AFT- und PH-Modell auf E definiert und gleich sind. Aus der vorangegangenen Proposition folgt für alle $x \in E_1$, dass

$$S_x(t) = \exp\left\{ -\left(\frac{t}{\theta(x)}\right)^{\alpha}\right\}.$$

Sei $\theta_i = \theta(x_i), i = 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S_{x_i}(t) &= \exp\left\{ -\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\alpha}\right\} \text{ und} \\ \alpha_{x_i}(t) &= \frac{\alpha}{\theta_i^{\alpha}} t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Nach Proposition 3.2 gilt für das PH-Modell

$$\alpha_{x_s(\cdot)}(t) = \begin{cases} \alpha_{x_1}(t), & 0 \le t < s \\ \alpha_{x_2}(t), & t \ge s, \end{cases}$$

und für alle $t > s$ ergibt sich

$$\begin{aligned} S_{x_s(\cdot)}(t) &= \exp\left\{ -\int_0^t \alpha_{x_s(\cdot)}(u)du\right\} \\ &= \exp\left\{ -\int_0^s \alpha_{x_1}(u)du - \int_s^t \alpha_{x_2}(u)du\right\} \\ &= \exp\left\{ -\left(\frac{s}{\theta_1}\right)^{\alpha} - \left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\alpha} + \left(\frac{s}{\theta_2}\right)^{\alpha}\right\}. \end{aligned}$$

Nach Proposition 2.3 hat die Zuverlässigkeitsfunktion des AFT-Modells bei Stufenbelastung die Form

$$S_{x_s(\cdot)}(t) = S_{x_2}(t - s + s^*),\ t \ge s,$$

wobei $s^* = \big(r(x_1)/r(x_2)\big)s$ mit $r(x_1)/r(x_2) = \theta_2/\theta_1$. Daraus resultiert

$$\begin{aligned} S_{x_s(\cdot)}(t) &= \exp\Big\{-\int_0^{t-s+\frac{\theta_2}{\theta_1}s} \alpha_{x_2}(u)du\Big\} \\ &= \exp\Big\{-\Big(\frac{s}{\theta_1}+\frac{t-s}{\theta_2}\Big)^\alpha\Big\}. \end{aligned}$$

Laut Annahme sind die Zuverlässigkeitsfunktionen des AFT- und PH-Modells gleich. Daraus resultiert für $t > s$

$$\Big(\frac{s}{\theta_1}\Big)^\alpha + \Big(\frac{t}{\theta_2}\Big)^\alpha - \Big(\frac{s}{\theta_2}\Big)^\alpha = \Big(\frac{s}{\theta_1}+\frac{t-s}{\theta_2}\Big)^\alpha. \tag{3.8}$$

Für $\alpha = 1$ stimmt die Gleichung. Angenommen, $\alpha \neq 1$. Für alle $t > s$ sei

$$g(t) = \Big(\frac{s}{\theta_1}\Big)^\alpha + \Big(\frac{t}{\theta_2}\Big)^\alpha - \Big(\frac{s}{\theta_2}\Big)^\alpha - \Big(\frac{s}{\theta_1}+\frac{t-s}{\theta_2}\Big)^\alpha.$$

Die Ableitung von $g(t)$ ist

$$g'(t) = \frac{\alpha}{\theta_2^\alpha} t^{\alpha-1}\bigg(1 - \Big(\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1}\frac{s}{t}+1\Big)^{\alpha-1}\bigg) \neq 0$$

und hat für alle $t > s$ das gleiche Vorzeichen für festgehaltene $\theta_1 \neq \theta_2$ und $\alpha \neq 1$. Die Funktion ist somit steigend oder fallend, aber nicht konstant in t. Das widerspricht aber Gleichung (3.8), und die Annahme $\alpha \neq 1$ ist falsch. Mit $\alpha = 1$ wird die vorausgesetzte Weibull-Verteilung zur Exponentialverteilung, und es gilt

$$S_x(t) = \exp\Big\{-\Big(\frac{t}{\theta(x)}\Big)\Big\},\ t > 0.$$

Sei nun angenommen, dass die Lebensdauerverteilung für alle $x \in E_1$ exponentiell ist und dass das PH-Modell auf E definiert ist. Aus Gleichung (3.3) folgt für alle $x \in E_1$

$$S_x(t) = \exp\{-r(x)A_0(t)\}.$$

Da die Lebensdauer unter $x \in E_1$ exponentialverteilt ist, bedeutet die letzte Gleichung, dass $A_0(t) = ct$. Die Konstante c kann mit $r(x)$ zusammengefasst werden, und man erhält $A_0(t) = t$. Das ergibt mit Gleichung (3.5)

$$S_{x(\cdot)}(t) = \exp\Big\{-\int_0^t r\big(x(u)\big)du\Big\}$$

und damit das AFT-Modell auf E.
Sei angenommen, dass das AFT-Modell auf E definiert ist und dass die Lebensdauerverteilung für alle $x \in E$ exponentiell ist, d.h. $\alpha_x(t) = r(x)$. Es folgt $q \equiv 1$ und mit Gleichung (2.2) daher

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big),$$

d.h. das PH-Modell mit $\alpha_0(t) = 1$ ist auf E definiert. $\diamondsuit$

4 Verallgemeinerungen des Cox-Modells

Das AFT- und das PH-Modell sind eher restriktive Modelle. Bei einem AFT-Modell führt eine veränderte Belastung lokal nur zu einer Skalenveränderung, während bei PH-Modellen das Verhältnis der Ausfallraten bei unterschiedlichen Stressniveaus konstant bleibt.

Verallgemeinerungen der beiden Modelle führen einerseits zu Modellen, die bei Belastungsänderungen neben einer Skalen- auch eine Formveränderung aufweisen, andererseits zu Modellen, bei denen sich das Verhältnis der Ausfallraten auch bei konstanter Belastung ändert. Dazu werden Modelle diskutiert, die sowohl das AFT- als auch das PH-Modell als Spezialfälle enthalten. Die Ausfallraten dieser Modelle sind nicht nur proportional zu einer Funktion, deren Argument den momentanen Stress darstellt, sondern auch zu einer Funktion, die die Zuverlässigkeitsfunktion bzw. die kumulierte Ausfallsrate als Argument hat.

Definition 4.1 *Das erste verallgemeinerte PH-Modell (first generalized proportional hazards model (GPH1)) ist auf E gültig, wenn für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big) q\big(A_{x(\cdot)}(t)\big) \alpha_0(t) \tag{4.1}$$

gilt.

Die Spezialfälle des GPH1-Modells sind mit $q(u) \equiv 1$ das PH-Modell und mit $\alpha_0(t) \equiv \alpha_0 = \textit{konstant}$ das AFT-Modell.

Definition 4.2 *Das zweite verallgemeinerte PH-Modell (second generalized proportional hazards model (GPH2)) ist auf E gültig, wenn für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = u\big(x(t), A_{x(\cdot)}(t)\big) \alpha_0(t)$$

gilt.

Die Spezialfälle des GPH2-Modells sind das GS-Modell mit $\alpha_0(t) \equiv \alpha_0 = \textit{konstant}$ und das GPH1-Modell mit $u(x, s) = r(x) q(s)$.

Proposition 4.1 *Das GPH1-Modell ist auf E genau dann gültig, wenn es Zuverlässigkeitsfunktionen G und S_0 gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$*

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\left(\int_0^t r\big(x(\tau)\big) dH\big(S_0(\tau)\big) \right) \tag{4.2}$$

gilt. Dabei ist $H = G^{-1}$.

Beweis: Als erstes soll vom GPH1-Modell ausgegangen werden. Man definiert eine Funktion $H(u)$ durch

$$H(u) = \int_0^{-\ln u} \frac{dv}{q(v)}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial H\big(S_{x(\cdot)}(t)\big)}{\partial t} = \frac{1}{q\big(A_{x(\cdot)}(t)\big)}\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)\alpha_0(t).$$

Das bedeutet, dass

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\bigg(\int_0^t r\big(x(\tau)\big)dA_0(\tau)\bigg),$$

wobei

$$A_0(t) = \int_0^t \alpha_0(u)du.$$

Setzt man $S_0(u) = G\big(A_0(u)\big)$, kommt man zu Gleichung (4.2).

In der anderen Beweisrichtung gilt Gleichung (4.2) für alle $x(\cdot) \in E$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\alpha_{x(\cdot)}(t) &= -\frac{S'_{x(\cdot)}(t)}{S_{x(\cdot)}(t)} \\
&= -G'\bigg(\underbrace{\int_0^t r\big(x(\tau)\big)d\tau}_{=H(S_{x(\cdot)}(t))}\bigg) r(x(t))H'(S_0(t))S'_0(t)\big(S_{x(\cdot)}(t)\big)^{-1} \\
&= \alpha\big(H(S_{x(\cdot)}(t))\big)r(x(t))H'(S_0(t))S'_0(t)
\end{aligned}$$

mit $\alpha = -G'/G$. Setzt man

$$q(u) = \alpha\big(H(e^{-u})\big) \text{ und } \alpha_0(t) = -H'\big(S_0(t)\big)S'_0(t),$$

so gelangt man für alle $x(\cdot) \in E$ zu

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)q\big(A_{x(\cdot)}(t)\big)\alpha_0(t).$$

Das GPH1-Modell ist somit auf E gültig. $\diamondsuit$

Bei konstanter Belastung $x \in E_1$ ergeben sich für das GPH1-Modell aus Gleichung (4.1) die Formeln

$$\alpha_x(t) = r(x)q\big(A_x(t)\big)\alpha_0(t) \text{ und } S_x(t) = G\big(r(x)H(S_0(t))\big). \tag{4.3}$$

Für $x_1, x_2 \in E_1$ gilt

$$S_{x_2}(t) = G\big(\rho(x_1, x_2)H(S_{x_1}(t))\big) \tag{4.4}$$

mit $\rho(x_1, x_2) = r(x_2)/r(x_1)$.

Für das GPH2-Modell folgt bei konstanter Belastung

$$\alpha_x(t) = u\big(x, A_x(t)\big)\alpha_0(t).$$

△ Exkurs: Ressourcenverbrauch und zeitraffende Lebensdauermodelle

AFT- und PH-Modelle können auch im Hinblick auf den *Ressourcenverbrauch* interpretiert werden. Sei Ω eine Population von Einheiten und sei $T_{x(\cdot)} = T_{x(\cdot)}(\omega),\ \omega \in \Omega$, eine nichtnegative, absolut stetige Zufallsvariable, die die Lebensdauer einer Einheit ω unter der Belastung $x(\cdot)$ anzeigt. Die dazugehörige Zuverlässigkeitsfunktion sei $S_{x(\cdot)}(t)$. Die Verteilungsfunktion bezeichne $F_{x(\cdot)}(t)$.

Der Anteil $F_{x(\cdot)}(t)$ von Einheiten von Ω, die unter der Belastung $x(\cdot)$ bis zum Zeitpunkt t ausfallen, wird *einheitlicher Ressourcenverbrauch der Population bis zum Zeitpunkt t* genannt. Die gleiche Population Ω von Einheiten , die unterschiedlichen Belastungen $x_1(\cdot)$ und $x_2(\cdot)$ unterworfen ist, verbraucht unterschiedliche Ressourcen bis zum Zeitpunkt t, wenn $F_{x_1(\cdot)}(t) \neq F_{x_2(\cdot)}(t)$. Falls für zwei Momente t_1 und t_2 $F_{x_1(t_1)}(t) = F_{x_2(t_2)}(t)$ gilt, dann sind die beiden Zeitpunkte äquivalent.

Die Zufallsvariable

$$R^U = F_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)}) = 1 - S_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)})$$

wird *einheitliche Ressource* genannt. Für jede Belastung $x(\cdot)$ besteht eine eindeutige Beziehung zwischen der Menge, die die Werte der Zufallsvariablen $T_{x(\cdot)}$ enthält, und der Menge, in der die Werte der Zufallsvariablen R^U zusammengefasst sind. Die Verteilung der Zufallsvariablen R^U hängt nicht von $x(\cdot)$ ab, und sie entspricht der Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1)$.

Neben der Gleichverteilung sind andere Verteilungen möglich, die den Ressourcenverbrauch abbilden. Jede fallende und stetige Funktion $H : (0, 1] \to \mathbb{R}$ ist dazu geeignet, wobei die Inverse $G = H^{-1}$ von H die Zuverlässigkeitsfunktion ist. Dann existiert wiederum eine eindeutige Beziehung zwischen den Werten der Zufallsvariablen $T_{x(\cdot)}$ und den Werten der Zufallsvariablen $R^G = H\big(S_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)})\big)$. Z.B. ist für die einheitliche Ressource $H(p) = 1 - p,\ p \in (0, 1]$.

Die Verteilung der Zufallsvariablen R^G hängt nicht von $x(\cdot)$ ab, und die Zuverlässigkeitsfunktion von R^G ist G. Die Zufallsvariable R^G wird *G-Ressource* genannt, und

$$f^G_{x(\cdot)}(t) = H\big(S_{x(\cdot)}(t)\big)$$

ist die *verbrauchte G-Ressource bis zum Zeitpunkt t*.

Zeitraffende Lebensdauermodelle können auch über den Ressourcenverbrauch definiert werden. Alle bisherigen Lebensdauermodelle wurden im Rahmen des *exponentiellen Ressourcenverbrauchs* mit $G(t) = e^{-t},\ t \geq 0$, formuliert. Dann ist $H(p) = G^{-1}(p) = -\ln p$. Mit $p = S_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)})$ kommt man zu der Zufallsvariablen

$$R = A_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)}).$$

Für jedes t ist $A_{x(\cdot)}(t) \in [0, \infty)$ die *exponentiell verbrauchte Ressource bis zum Zeitpunkt t.* Die Veränderung des exponentiellen Ressourcenverbrauchs ist die Ausfallrate.

Der Ressourcenverbrauch der GPH1- und AFT-Modelle kann anders als exponentiell verlaufen. Es sei x_0 eine konstante Belastung - wie z.B. die Gebrauchsbelastung - und $G = S_{x_0}$. Es bezeichne für jedes $x(\cdot) \in E \supset E_1$

$$f_{x(\cdot)}(t) = S_{x_0}^{-1}\big(S_{x(\cdot)}(t)\big).$$

Dann ist der Zeitpunkt t unter jeder Belastung $x(\cdot) \in E$ gleich dem Zeitpunkt $f_{x(\cdot)}(t)$ unter der Gebrauchsbelastung x_0. Die Zuverlässigkeitsfunktion der Ressource R ist S_{x_0}.

Unter dem AFT-Modell gilt

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_{x_0}\left(\int_0^t r(x(u))du\right),$$

und die Veränderung des Ressourcenverbrauchs ist

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big).$$

Wenn $x \in E_1$ konstant ist, dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} f_x(t) = r(x),$$

und der Ressourcenverbrauch ist über die Zeit konstant.

Geht man allgemein von einer Zuverlässigkeitsfunktion G aus, die nicht unbedingt gleich S_{x_0} sein muss, ergibt sich folgende Definition:

Definition 4.3 *Das verallgemeinerte multiplikative Modell (generalized multiplicative model (GM)) ist auf E mit der Zuverlässigkeitsfunktion G gültig, wenn es eine positive Funktion r und eine Zuverlässigkeitsfunktion S_0 gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$ folgt*

$$\frac{\partial f_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = r\big(x(t)\big)\frac{\partial f_0^G(t)}{\partial t}$$

mit $f_0^G(t) = H(S_0(t))$.

Aus der Definition folgt, dass für alle $x(\cdot) \in E$ Gleichung (4.2) gilt. Das bedeutet wiederum, dass nach Proposition 4.1 das GPH1-Modell genau dann auf E definiert ist, wenn es eine Zuverlässigkeitsfunktion G gibt, sodass das GM-Modell auf E gültig ist. Daraus folgt für das GPH1-Modell, dass die G-Ressourcenverbrauchsrate zum Zeitpunkt t proportional ist zu einer Basisrate, wobei der Proportionalitätsfaktor von der Belastung zum Zeitpunkt t abhängt. $\triangle$

Nun kann das GPH1-Modell mit konstanter Belastung verallgemeinert werden. Ausgangspunkt ist eine Zuverlässigkeitsfunktion G, die nicht nur die klassische exponentielle

Ressourcenverteilung darstellt, sondern jede exponentielle und auch die zweiparametrische Weibull-Verteilung umfasst.
Die Funktion G sei stetig und streng monoton fallend auf $[0, \infty)$. Man setzt

$$G_1(u) = G((u/\theta)^\nu, \gamma).$$

$E_1 = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall von konstanten, eindimensionalen Belastungen, und $\{S_x, x \in [x_0, x_1]\}$ ist eine Klasse von stetigen Zuverlässigkeitsfunktionen, sodass $S_x(t) > S_y(t)$ für alle $x, y \in E_1,\ x < y,\ t > 0$.
Mit

$$H = G^{-1} : (0, 1] \to [0, \infty) \text{ und } H_1 = G_1^{-1}$$

werden die inversen Funktionen von G und G_1 bezeichnet. Wenn das GPH1-Modell mit der Zuverlässigkeitsfunktion G auf E_1 definiert ist, dann folgt aus Gleichung (4.4)

$$H(S_x(t)) = \lambda(x) H(S_{x_0}(t)),\ t > 0,\ x \in [x_0, x_1],$$

wobei $\lambda(x) = \rho(x_0, x_1)$. Aus

$$S_{x_0}(t) = G\big(H(S_{x_0}(t))\big) = G_1(H(S_{x_0}(t))^{1/\nu})$$

folgt

$$H_1(S_{x_0}(t)) = H(S_{x_0}(t))^{1/\nu}. \tag{4.5}$$

Nun resultiert aus

$$S_x(t) = G\big(\lambda(x) H(S_{x_0}(t))\big) = G_1\big(\lambda(x)^{1/\nu} H(S_{x_0}(t))^{1/\nu}\big)$$

mit Gleichung (4.5) das Ergebnis für G_1 mit

$$H_1(S_x(t)) = \lambda(x)^{1/\nu} H_1(S_{x_0}(t)). \tag{4.6}$$

Das bedeutet, dass das GPH1-Modell bei konstanter Belastung nicht auf eine exponentielle Ressourcenverteilung reduziert bleiben muss. Die Anwendungsmöglichkeiten nehmen dadurch zu. Man kann aber auch von den letzten beiden Gleichungen ausgehen und auf die Funktionen G und G_1 schließen, wie die folgende Proposition zeigt:

Proposition 4.2 *Die Funktion G sei stetig und streng monoton fallend auf $[0, \infty)$, und die Gleichung (4.5) gelte. Dann gilt Gleichung (4.6) genau dann, wenn*

$$G_1(u) = G((u/\theta)^\nu, \gamma),\ u \in [0, \infty)$$

für positive Konstanten θ und ν.

Beweis: Es wurde oben gezeigt, dass das GPH1-Modell für die Zuverlässigkeitsfunktion G_1 gilt, wenn das Modell bereits für die Funktion G gilt mit $G_1(t) = G((t/\theta)^\nu)$.

Für die andere Beweisrichtung führt man eine Funktion $D : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ein, für die $D(u) = H_1(G(u)),\ u \in [0, \infty)$ gilt. Dann folgt $H_1(p) = D(H(p)),\ p \in (0, 1]$, und Gleichung (4.6) kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$D\big(H(S_x(t))\big) = \lambda(x)^{1/\nu} D(H(S_{x_0})),\ t > 0,\ x \in [x_0, x_1]$$

Mit Gleichung (4.5) erhält man

$$D\big(\lambda(x)H(S_{x_0}(t)\big) = \lambda(x)^{1/\nu} D(H(S_{x_0})),\ t > 0,\ x \in [x_0, x_1]$$

mit $D(0) = 0$ und $\lim_{u\to\infty} D(u) = \infty$. Setzt man $y = H(S_{x_0}(t))$, so resultiert

$$D(\lambda(x)y) = \lambda(x)^{1/\nu} D(y),\ y \in [0, \infty),\ x \in [x_0, x_1],$$

oder mit $v = \ln y$

$$Q(\ln \lambda(x) + v) = \frac{1}{v} \ln \lambda(x) + Q(v),\ v \in \mathbb{R},\ x \in [x_0, x_1],$$

wobei $Q(v) = \ln(D(e^v))$. Diese Gleichung führt zu

$$Q(v) = av + b,\ a = \frac{1}{v}.$$

Es folgt, dass $D(y) = \theta y^a$ mit $\theta = e^b$. Daraus ergibt sich

$$G(y) = G_1(D(y)) = G_1(\theta y^a) \text{ und } G_1(u) = G((u/\theta)^\nu, \gamma),\ u \in [0, \infty).\ \diamondsuit$$

Bestimmte Klassen von GPH-Modellen spielen bei zeitraffenden Lebensdaueranalysen eine herausragende Rolle. Die empirische Evidenz zeigt, dass das Verhältnis der Ausfallraten $\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t)$ bei unterschiedlichen Belastungen x_1 und x_2 über die Zeit wachsen oder fallen kann. Bei einem herkömmlichen PH-Modell kann nur ein konstantes Verhältnis modelliert werden, während von GPH-Modellen abgeleitete Modelle in dieser Hinsicht flexibler sind. Im folgenden sollen einige GPH-Submodelle mit dieser Eigenschaft vorgestellt werden.

Als erstes werden GPH1-Modelle dargestellt, bei denen das Verhältnis der Ausfallraten monoton ist. Das zugrundeliegende Modell ist jenes von Definition 4.1. Die Belastungen x werden als konstant angenommen. Für die im Modell enthaltene Funktion q stehen drei Funktionen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} q_1(u) &= (1+u)^\gamma \\ q_2(u) &= e^{\gamma u} \\ q_3(u) &= (1+\gamma u)^{-1} \end{aligned}$$

$\gamma \in \mathbb{R}$ ist ein unbekannter Parameter.

Das vielversprechendste Modell ergibt sich mit der Funktion q_1, wobei γ durch $-\gamma + 1$ ersetzt wird:

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)\big(1 + A_{x(\cdot)}(t)\big)^{-\gamma+1} \alpha_0(t) \tag{4.7}$$

Um das Verhältnis der Ausfallraten interpretieren zu können, wird zuerst die Zuverlässigkeitsfunktion $G = H^{-1}$ für $x \in E_1$ berechnet. Aus Proposition 4.1 folgt, dass

$$H(u) = \int_0^{-\ln u} \frac{1}{(1+v)^{-\gamma+1}} dv = \frac{1}{\gamma}\big((1-\ln u)^\gamma - 1\big).$$

Daraus ergibt sich, dass $u = G\big(\frac{1}{\gamma}((1-\ln u)^\gamma - 1)\big)$. Setzt man $t = \frac{1}{\gamma}\big((1-\ln u)^\gamma - 1\big)$, so erhält man durch Umformung

$$G(t) = \exp\{1 - (1+\gamma t)^{\frac{1}{\gamma}}\}.$$

Wieder unter Anwendung von Proposition 4.1 kann man allgemein die Zuverlässigkeitsfunktion für $x(\cdot) \in E$ nun anschreiben als

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\Bigg(\underbrace{\int_0^t r\big(x(\tau)\big) dA_0(\tau)}_{=H(S_{x(\cdot)}(t))}\Bigg) = \exp\{1 - \big(1 + \gamma H(S_{x(\cdot)}(t))\big)^{\frac{1}{\gamma}}\},$$

und für konstante Belastungen $x \in E_1$ ergibt sich

$$S_x(t) = G\big(r(x)A_0(t)\big) = \exp\{1 - \big(1+\gamma r(x)A_0(t)\big)^{\frac{1}{\gamma}}\}.$$

Für $x_1, x_2 \in E$ und $c_0 = r(x_2)/r(x_1) > 1$ folgt

$$\begin{aligned} \alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t) &= \frac{S'_{x_2}(t)S_{x_1}(t)}{S'_{x_1}(t)S_{x_2}(t)} \\ &= c_0\left\{\frac{1+\gamma r(x_2)A_0(t)}{1+\gamma r(x_1)A_0(t)}\right\}^{-1+\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

mit

$$A_0(t) = \int_0^t \alpha_0(u) du.$$

Aus $t \to \infty$ resultiert $A_0(t) = -\ln S_0(t) \to -\infty$. Nach Anwendung der Regel von de l'Hospital folgt

$$\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t) \to c_0^{\frac{1}{\gamma}} \text{ für } t \to \infty.$$

Das Verhältnis $\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t)$ hat die folgenden Eigenschaften:

- Falls $0 < \gamma < 1$, dann wächst $\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t)$ von $c_0 > 1$ zum Wert

  $$c_\infty = c_0^{\frac{1}{\gamma}} \in (c_0, \infty).$$

- Falls $\gamma = 1$, dann ist $\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t)$ konstant und es liegt das Cox-Modell vor.
- Falls $\gamma > 1$, dann fällt $\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t)$ von $c_0 > 1$ zum Wert $c_\infty \in (1, c_0)$.

Das Modell (4.7) kann somit in den Fällen angewendet werden, in denen die Ausfallraten unter verschiedenen konstanten Belastungen sich annähern bzw. sich auseinander entwickeln. Es lässt sich mit Proposition 4.2 in die Familie der verallgemeinerten Weibull-Verteilungen

$$G(t;\theta,\nu,\gamma) = \exp\left\{1 - \left(1 + (\frac{t}{\theta})^{\nu}\right)^{1/\gamma}\right\},\ \theta,\nu,\gamma > 0,\ t \geq 0.$$

einordnen.

Nimmt man für das GPH1-Modell die Funktion $q_2(u) = e^{\gamma u}$, so erhält man

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)e^{\gamma A_{x(\cdot)}(t)}\alpha_0. \tag{4.8}$$

Wie im vorherigen Modell berechnet man mit Proposition 4.1 die entsprechende Zuverlässigkeitsfunktion. Sie hat die Form

$$G(t) = (1 - \gamma t)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Daraus ergibt sich für $\gamma < 0$

$$\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t) = c_0\left\{\frac{1 - \gamma r(x_1)A_0(t)}{1 - \gamma r(x_2)A_0(t)}\right\} \to 1 \text{ für } t \to \infty$$

mit $c_0 = r(x_2)/r(x_1)$. Das Verhältnis $\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t)$ fällt vom Wert $c_0 > 1$ zu 1 ab. Dieses Modell bietet im Vergleich zum vorherigen Modell weniger Möglichkeiten, da hier nur sich annähernde Ausfallraten dargestellt werden können.

Aus Proposition 4.2 folgt, dass das Modell (4.8) zur Familie der Log-logistischen Verteilungen mit

$$G(t) = (1 - (t/\theta)^{\nu})^{1/\gamma}$$

als Zuverlässigkeitsfunktion gehört.

Das dritte GPH1-Modell hat mit der Funktion $q_3(u) = (1 + \gamma u)^{-1}$ und $\gamma > 0$ die Form

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)\frac{\alpha_0}{1 + \gamma A_{x(\cdot)}(t)}. \tag{4.9}$$

Mit Proposition 4.1 folgt

$$H(u) = -\ln u + \frac{\gamma}{2}(\ln u)^2 = G^{-1}(u)$$

und daraus

$$u = G(-\ln u + \frac{\gamma}{2}(\ln u)^2).$$

Setzt man

$$
\begin{aligned}
t &= -\ln u + \frac{\gamma}{2}(\ln u)^2 \\
&= \frac{1}{2\gamma}(1 + 2\gamma \ln u - \gamma^2(\ln u)^2 - 1) \\
&= \frac{1}{2\gamma}\big((1 + \gamma \ln u)^2 - 1\big),
\end{aligned}
$$

so erhält man

$$u = \exp\Big\{\frac{1}{\gamma}(1 - \sqrt{1 + 2\gamma t})\Big\}.$$

Die Zuverlässigkeitsfunktion hat somit die Form

$$G(t) = \exp\Big\{\frac{1}{\gamma}(1 - \sqrt{1 + 2\gamma t})\Big\}.$$

Unter konstanter Belastung fällt das Modell (4.9) nach Proposition 4.2 unter die Familie der Zuverlässigkeitsfunktionen der Form

$$G(t) = \exp\left\{\frac{1}{\gamma}\left(1 - \sqrt{1 + (\frac{t}{\theta})^{\nu}}\right)\right\}.$$

Es folgt

$$\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t) = c_0 \frac{\big(1 + \gamma r(x_1)A_0(t)\big)^{1/2} - 1}{\big(1 + \gamma r(x_2)A_0(t)\big)^{1/2} - 1},$$

wobei $c_0 = r(x_2)/r(x_1)$ ist. Angenommen, $c_0 > 0$. Dann folgt für $t \to 0$ mit der Regel von de l'Hospital, dass das Verhältnis der Ausfallraten zu Beginn gleich 1 ist. Mit $t \to \infty$ geht $\alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t)$ gegen $\sqrt{c_0} > 1$. Die Ausfallraten entwickeln sich somit auseinander, wenn t zunimmt.

Für das PH-Modell wurde gezeigt, dass Gleichung (3.6) nur sinnvoll ist, wenn die Lebensdauer exponentiell verteilt ist. Das Gleiche gilt für das GPH1-Modell. Das GS-Modell kann dahingehend eingeschränkt werden, dass das GPH1-Modell bei konstanter Belastung daraus abgeleitet werden kann. Damit ist dann auch Gleichung (1.2) gültig, bei der die Ausfallrate unter zeitabhängigen Belastungen von der Ausfallrate unter konstanten Belastungen hergeleitet wird.

Proposition 4.3 *Das GS-Modell mit der Zuverlässigkeitsfunktion (4.3) auf E_1 ist auf $E \supset E_1$ genau dann definiert, wenn für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big)\alpha\big(A^{-1}(A_{x(\cdot)}(t))\big)\alpha_0\left(A_0^{-1}\Big(\frac{A^{-1}(A_{x(\cdot)}(t))}{r(x(t))}\Big)\right) \tag{4.10}$$

gilt, wobei $A = -\ln G$ und $\alpha = A'$.

Beweis: Es sei zuerst angenommen, dass das GS-Modell mit der Zuverlässigkeitsfunktion $S_x(t) = G\big(r(x)H(S_0(t))\big)$ gilt. Die Ausfallrate für die zeitunabhängige Belastung x ist

$$\begin{aligned}\alpha_x(t) &= -\frac{S_x'(t)}{S_x(t)} = -\frac{G'\big(r(x)H(S_0(t))\big)H'(S_0(t))S_0'(t)r(x)}{G\big(r(x)H(S_0(t))\big)} \\ &= \alpha\big(r(x)H(S_0(t))\big)H'(S_0(t))S_0'(t)r(x).\end{aligned}$$

Aus

$$A_{x_t}(t) = -\ln G\big(r(x)H(S_0(t))\big) = A\big(r(x)H(S_0(t))\big)$$

folgt

$$A^{-1}(A_{x_t}(t)) = r(x)H(S_0(t))$$

und daraus

$$H(S_0(t)) = \frac{A^{-1}(A_{x_t}(t))}{r(x)}.$$

Mit $H(S_0(t)) = A_0(t)$ ergibt sich

$$A_0^{-1}\big(H(S_0(t))\big) = t = A_0^{-1}\left(\frac{A^{-1}(A_{x_t}(t))}{r(x)}\right).$$

Mit $\alpha_0(t) = H'(S_0(t))S_0'(t)$ ist die Ausfallrate nun

$$\alpha_x(t) = r(x)\alpha(A^{-1}(A_{x_t}(t)))\alpha_0\left(A_0^{-1}\left(\frac{A^{-1}(A_{x_t}(t))}{r(x)}\right)\right),$$

und mit $t = A_x^{-1}(A_{x(\cdot)}(t))$ erhält man aufgrund von Proposition 1.2 die zeitabhängige Ausfallrate $\alpha_{x(\cdot)}(t)$.

Geht man umgekehrt von der zeitabhängigen Belastung $\alpha_{x(\cdot)}(t)$ aus, so kann aufgrund von

$$A^{-1}(A_{x(\cdot)}(t)) = e^{-A_{x(\cdot)}(t)} = S_{x(\cdot)}(t)$$

die Funktion $q(u) = \alpha(e^{-u})$ definiert werden. Mit $\alpha_0(t) = \alpha_0\left(A_0^{-1}\left(\frac{A^{-1}(A_{x_t}(t))}{r(x)}\right)\right)$ erhält man das GS-Modell mit der entsprechenden Ausfallrate bzw. Zuverlässigkeitsfunktion aus Gleichung (4.3). $\diamondsuit$

Aus der vorhergehenden Proposition ergibt sich folgende Definition eines weiteren Modells:

Definition 4.4 *Das erste modifizierte und verallgemeinerte PH-Modell (first modified generalized proportional hazards model (MGPH1)) ist auf E definiert, wenn es eine positive Funktion r auf E und Ausfallraten α_0 und α gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$ die Gleichung (4.10) mit*

$$A(t) = \int_0^t \alpha(u)du \textit{ und } A_0(t) = \int_0^t \alpha_0(u)du$$

erfüllt ist.

5 GAH- und GAMH-Modelle

Belastungen können auf unterschiedliche Weise auf die Ressourcenverbrauchsrate Einfluss nehmen. Bei der Definition des GM-Modells in Definition 4.3 verändern die Belastungen durch $r(x(\cdot))$ die Ressourcenverbrauchsrate multiplikativ. Daneben gibt es Modelle mit additiven oder mit additiven und multiplikativen Einfluss.

Definition 5.1 *Das verallgemeinerte additive Ausfallmodell (generalized additive hazards model (GAH)) ist auf E definiert, wenn es eine Funktion a auf E und eine Zuverlässigkeitsfunktion S_0 gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\frac{\partial f^G_{x(\cdot)}(t)}{\partial t} = \frac{\partial f^G_0(t)}{\partial t} + a(x(t))$$

mit den Anfangsbedingungen $f^G_0(0) = f^G_{x(\cdot)}(0) = 0$ gilt. Hier ist $f^G_0(t) = H(S_0(t))$.

Die Belastungen beeinflussen die Ressourcenverbrauchsrate somit additiv. Mit der letzten Gleichung folgt

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\left(H(S_0(t)) + \int_0^t a(x(\tau))d\tau\right).$$

Nimmt man $G(t) = e^{-t}$, so erhält man den exponentiellen Ressourcenverbrauch. Es gilt

$$G(\left(H(S_0(t)) + \int_0^t a(x(\tau))d\tau\right) = \exp\Big\{ - H\big(S_0(t)\big) - \int_0^t a\big(x(\tau)\big)d\tau\Big\}.$$

Mit $H\big(S_0(t)\big) = -\ln S_0(t) = A_0(t)$ folgt

$$H\big(S_{x(\cdot)}(t)\big) = -A_0(t) - \int_0^t a\big(x(\tau)\big)d\tau = f^G_{x(\cdot)}(t)$$

und

$$\frac{\partial f^G_{x(\cdot)}(t)}{\partial t} = -\big(\alpha_0(t) + a(x(t))\big) = \alpha_{x(\cdot)}(t),$$

oder als Modellerweiterung

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = q\big(A_{x(\cdot)}(t)\big)(\alpha_0(t) + a(x(t))\big).$$

Die Parametrisierung der Funktion q erfolgt dabei wie beim GPH1-Modell.

Das GPH1- und das GAH-Modell können im folgenden Modell integriert werden:

Definition 5.2 *Das verallgemeinerte additiv-multiplikative Ausfallmodell (generalized additive-multiplicative hazards model (GAMH)) ist auf E definiert, wenn es eine Funktion a und eine positive Funktion r auf E und eine Zuverlässigkeitsfunktion S_0 gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\frac{\partial f^G_{x(\cdot)}(t)}{\partial t} = r(x(t))\frac{\partial f^G_0(t)}{\partial t} + a(x(t))$$

mit den Anfangsbedingungen $f^G_0(0) = f^G_{x(\cdot)}(0) = 0$ gilt. Hier ist $f^G_0(t) = H(S_0(t))$.

Die Belastungen beeinflussen die Ressourcenverbrauchsrate sowohl additiv als auch multiplikativ. Mit der letzten Gleichung folgt

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\bigg(\int_0^t r(x(\tau))dH(S_0(\tau)) + \int_0^t a(x(\tau))d\tau\bigg).$$

Als exponentieller Ressourcenverbrauch lässt sich das GAMH-Modell schreiben als

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = q\big(A_{x(\cdot)}(t)\big)\big(r(x(t))\alpha_0(t) + a(x(t))\big).$$

Die Parametrisierung von a und q erfolgt mit der Funktion $\ln r$ in den GM-Modellen und mit der Funktion q in den GPH1-Modellen.

6 Form- und skalenverändernde Modelle

Eine Verallgemeinerung des AFT-Modells besteht darin, dass man davon ausgeht, dass unterschiedliche konstante Belastungen $x \in E_1$ nicht nur die Werteskala, sondern auch die Form der Zuverlässigkeitsfunktion $S_x(\cdot)$ verändern. Dazu gibt es positive Funktionen $\theta(x)$ und $\nu(x)$ auf E_1, sodass für alle $x \in E_1$

$$S_x(t) = S_{x_0}\Bigg(\bigg(\frac{t}{\theta(x)}\bigg)^{\nu(x)}\Bigg) \tag{6.1}$$

gilt, wobei x_0 die Gebrauchsbelastung ist. Setzt man für jedes $x(\cdot) \in E \supset E_1$

$$f_{x(\cdot)}(t) = S^{-1}_{x_0}\big(S_{x(\cdot)}(t)\big),$$

so erhält man die S_{x_0}-Ressource, die bis zum Zeitpunkt t verbraucht wurde. Die Ressourcenverbrauchsrate unter $x \in E$ ist

$$\frac{\partial}{\partial t} f_x(t) = r(x)t^{\nu(x)-1},$$

wobei $r(x) = \nu(x)/\theta(x)^{\nu(x)-1}$.

Die Ressourcenverbrauchsrate für das Modell (6.1) unter der Belastung $x \in E_1$ ist für $\nu(x) > 1$ steigend, für $0 < \nu(x) < 1$ fallend und für $\nu(x) = 1$ konstant. Im Fall der konstanten Ressourcenverbrauchsrate liegt das AFT-Modell vor, wie im Exkurs über den Ressourcenverbrauch bereits gezeigt wurde.

Für zeitabhängige Belastungen lässt sich folgende Definition formulieren:

Definition 6.1 *Das form- und skalenverändernde Modell (changing shape and scale model (CHSS)) ist auf E definiert, wenn es positive Funktionen r und ν auf E gibt, sodass für alle $x(\cdot) \in E$*

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big) t^{\nu(x(t))-1}$$

gilt.

Die letzte Gleichung bedeutet, dass

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_{x_0}\Big(\int_0^t r(x(\tau))\tau^{\nu(x(\tau))-1} d\tau \Big).$$

Die entsprechende Ausfallrate hat die Form

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = r\big(x(t)\big) q\big(A_{x(\cdot)}(t)\big) t^{\nu(x(t))-1}.$$

7 Axiomatischer Ansatz zur Modellbildung

Die bisher vorgestellten Modelle können auch über einen axiomatischen Ansatz aufgebaut werden.

Proposition 7.1 *Es sei ein Funktional*

$$a : E \times E \times [0, \infty) \to [0, \infty)$$

gegeben, sodass für $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in E$ folgende Eigenschaften gelten:

- *Das Funktional ist differenzierbar und steigend in t*
- $a\big(x_1(\cdot), x_2(\cdot), 0\big) = 0$
- *Die Zufallsvariable T_{x_2} hat die gleiche Verteilung wie $a\big(x_1(\cdot), x_2(\cdot), T_{x_1}\big)$*

Dann existiert für jede auf $[0, \infty)$ differenzierbare Verteilungsfunktion F ein Funktional $b : E \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, sodass für alle $x(\cdot) \in E$

$$F_{x(\cdot)}(t) = F\left(\int_0^t b\big(x(\cdot), u\big) du \right) \tag{7.1}$$

gilt.

Beweis: Sei $x_0(\cdot) \in E$ fest und für alle $x(\cdot) \in E$ setze man

$$a_0\big(x(\cdot), t\big) = F^{-1}\big(F_{x_0}(a(x(\cdot), x_0(\cdot), t))\big).$$

Die Verteilung der Zufallsvariablen $R = a_0(x(\cdot), T_{x(\cdot)})$ hängt nicht von der Belastung $x(\cdot)$ ab, und die Verteilungsfunktion ist F. Nun setzt man

$$b(x(\cdot), t) = \frac{\partial}{\partial t} a_0(x(\cdot), t).$$

Dann gilt

$$a_0(x(\cdot), t) = \int_0^t b\big(x(u), u\big) du,$$

und es folgt

$$F_{x(\cdot)}(t) = \mathbb{P}(T_{x(\cdot)} < t) = \mathbb{P}(R < a_0(x(\cdot), t)) = F\bigg(\int_0^t b(x(u), u) du\bigg). \quad \diamondsuit$$

Der axiomatische Ansatz lässt sich mit dem Ansatz über den Ressourcenverbrauch verbinden. Sei $G(t) = 1 - F(t), S_{x(\cdot)}(t) = 1 - F_{x(\cdot)}(t), H = G^{-1}$ und $f^G_{x(\cdot)}(t) = H(S_{x(\cdot)}(t))$. Dann folgt aus Gleichung (7.1), dass

$$\frac{\partial}{\partial t} f^G_{x(\cdot)}(t) = b(x(\cdot), t).$$

Das bedeutet, dass die Rate des G-Ressourcenverbrauchs ein Funktional von Belastung und Zeit ist.

Die bisher diskutierten Modell können alle aus dem axiomatischen Ansatz hergeleitet werden:

- Wenn $b(x(\cdot), t) = r\big(x(t)\big)$ ist, dann handelt es sich um das AFT-Modell.
- Wenn $b(x(\cdot), t) = r\big(x(t)\big)\alpha_0(t)$ ist, dann liegt das GPH1-Modell vor.
- Wenn $b(x(\cdot), t) = r\big(x(t)\big)$ und $G(t) = e^{-t}$ ist, dann handelt es sich um das Cox-Modell.
- Wenn $b(x(\cdot), t) = r\big(x(t)\big)^{\nu(x(t))-1}$ ist, dann handelt es sich um das CHSS-Modell.

II Maximum-Likelihood-Schätzung bei Lebensdauerdaten

8 Zensierte Lebensdauerdaten

Typischerweise sind Lebensdauerdaten rechtszensiert. Das bedeutet, dass die Lebensdauer T bekannt ist, wenn sie nicht den Zensurzeitpunkt C überschreitet. Ansonsten weiß man nur, dass die Lebensdauer T größer als C ist. Eine Rechtszensur kann unterschiedliche Formen annehmen:

1. Wenn n Einheiten eine vorgegebene Zeit t getestet werden, dann liegt eine *Typ I-Zensur* vor. Für alle Einheiten ist der Zensurzeitpunkt $C = t$.

2. Wenn ein Lebensdauertest abgebrochen wird, nachdem r Einheiten ausgefallen sind, wobei $r < n$, dann spricht man von *Typ II-Zensur*. Für alle Einheiten ist der Zensurzeitpunkt C gleich dem Zeitpunkt, an dem die r-te Einheit ausfällt.

3. Falls der Test für die Einheiten zu unterschiedlichen Zeitpunkten $t_1, \dots, t_n$ anfängt und die Daten zu einem bestimmten Zeitpunkt t, $t \geq \max t_i$, ausgewertet werden, dann ist die Zensurzeit $C_i = t - t_i$ nicht mehr stochastisch. Diese Zensur wird *progressive Rechtszensur* genannt.

4. Wenn die Ausfallzeiten $T_1, \dots, T_n$ und die Zensurzeiten $C_1, \dots, C_n$ paarweise unabhängige Zufallsvariablen sind, dann nennt man die Zensur *unabhängige Rechtszensur*. Es kann zum Beispiel mehrere Ursachen für einen Ausfall geben, von Interesse ist aber nur eine Ausfallursache. Der Ausfall bei den anderen Ursachen führt zu zufälligen Zensurzeitpunkten.

Die Typ I-Zensur ist ein Spezialfall der progressiven Rechtszensur. Beide Verfahren sind wiederum ein Spezialfall der unabhängigen Rechtszensur. Im folgenden soll angenommen werden, dass die Daten rechtszensiert sind. T_i und C_i sind Ausfall- und Zensurzeitpunkte. Man definiert

$$X_i = T_i \wedge C_i, \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C_i\}},$$

wobei $a \wedge b = \min(a, b)$ und $\mathbb{I}_A$ der Indikator des Ereignisses A ist.

Rechtszensierte Daten werden normalerweise in der folgenden Form dargestellt:

$$(X_1, \delta_1), \dots, (X_n, \delta_n).$$

Wenn $\delta_i = 1$, dann wird ein Ausfall zum Zeitpunkt $T_i = X_i$ angezeigt. Andererseits bedeutet $\delta_i = 0$, dass der Ausfall nach dem Zeitpunkt X_i eintritt, d.h. die entsprechende Einheit wird zum Zeitpunkt $C_i = X_i$ zensiert.

Eine andere Möglichkeit, rechtszensierte Daten darzustellen, besteht darin, dass man mit

$$N_i(t) = \mathbb{I}_{\{X_i \leq t\}} = \mathbb{I}_{\{T_i \leq t, T_i \leq C_i\}}$$

die Anzahl der Ausfälle der i-ten Einheit im Intervall $[0, t]$ darstellt. $N_i(t) = 1$, wenn ein Ausfall im vorgegebenen Intervall eintritt, oder $N_i(t) = 0$, falls kein Ausfall verzeichnet wird.

Sei

$$Y_i(t) = \mathbb{I}_{\{X_i \geq t\}}.$$

Wenn $Y_i(t) = 1$, dann ist die i-te Einheit zum Zeitpunkt t weder ausgefallen, noch wird sie zensiert.

Die Anzahl aller ausgefallenen Einheiten ist $N(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)$, und die Anzahl aller Einheiten, die weder ausgefallen sind, noch zensiert werden, ist $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)$.

Die Daten können nun in der Form

$$(N_1(t), Y_1(t); t \geq 0), \ldots, (N_n(t), Y_n(t); t \geq 0)$$

geschrieben werden. Ein Vorteil dieser Schreibweise besteht darin, dass die Prozesse N_i und Y_i die Ausfälle und die Zensur über die Zeit anzeigen.

Die beiden Darstellungen der Daten sind äquivalent. Wenn (X_i, δ_i) gegeben ist, dann kann die entsprechende Definition für $(N_i(t), Y_i(t); t \geq 0)$ verwendet werden. Umgekehrt ist der Zeitpunkt X_i der Moment, in dem $Y_i(t)$ von 1 auf 0 springt. Wenn $N_i(t)$ zum Zeitpunkt X_i von 0 auf 1 springt, dann ist $X_i = T_i$ und $\delta_i = 1$. Falls $N_i(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, dann ist $X_i = C_i$ und $\delta_i = 0$.

9 Die Plausibilitätsfunktion für rechtszensierte Lebensdauerdaten

Mit Hilfe der vorherigen Darstellung der Lebensdauerdaten soll die Plausibilitätsfunktion für Lebensdauerdaten erklärt werden. Dazu wird von n Einheiten ausgegangen, die einem Test unterzogen werden. Die i-te Einheit wird unter einer - unter Umständen zeitabhängigen erklärenden Variable $x^{(i)}(\cdot)$ - getestet. Die Verteilungen aller Einheiten sollen absolutstetig sein mit der Zuverlässigkeitsfunktion $S_i(t; \theta)$, der Dichte $p_i(t; \theta)$ und der Ausfallrate $\alpha_i(t; \theta)$ mit $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$. Die Daten

$$(X_1, \delta_1, \ldots, X_n, \delta_n)$$

sollen rechtszensiert sein. Mit G_i soll die Zuverlässigkeitsfunktion des Zensurzeitpunkts C_i bezeichnet werden. G_i hängt dabei nicht von θ ab. Weiters sind $T_1, \ldots, T_n$ und $C_1, \ldots, C_n$ paarweise unabhängig. Für eine konkrete Stichprobe von Lebensdauerdaten soll nun ein plausibler Schätzer für θ gefunden werden.

Für $i = i_1, \ldots, i_k$ werden die Realisationen t_i der Ausfallzeiten T_i beobachtet, und für $i \neq i_1, \ldots, i_k$ sind die Realisationen c_i der Zensurzeitpunkte C_i bekannt. Dann weiß man auch, dass $C_i \geq t_i$ für $i = i_1, \ldots, i_k$ und $T_i > c_i$ für $i \neq i_1, \ldots, i_k$. Damit lässt sich die Funktion, die in Bezug auf θ maximiert werden soll, unter unabhängiger Rechtszensur schreiben als

$$
\begin{aligned}
\lim_{h_1,\ldots,h_n \downarrow 0} \frac{1}{h_1,\ldots,h_n} \quad & \mathbb{P}(t_i \le T_i \le t_i + h_i, T_i \le C_i, i = i_1, \ldots, i_k, \\
& c_i \le C_i \le c_i + h_i, C_i < T_i, i \ne i_1, \ldots, i_k) \\
= & \prod_{i=i_1,\ldots,i_k} p_i(t_i,\theta) G_i(t_i) \prod_{i \ne i_1,\ldots,i_k} g_i(c_i) S_i(c_i,\theta),
\end{aligned}
$$

wobei die Zensurzeitpunkte absolutstetig und die Zuverlässigkeitsfunktionen S_i und G_i bei t_i und c_i differenzierbar sind und $g_i = -G_i'$.

G_i und g_i enthalten nicht θ und können somit weggelassen werden. Ersetzt man t_i durch X_i, wenn $\delta_i = 1$, und c_i durch X_i, wenn $\delta_i = 0$, so erhält man die Plausibilitätsfunktion

$$
L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\delta_i}(X_i,\theta) S_i^{1-\delta_i}(X_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\delta_i}(X_i,\theta) S_i(X_i,\theta), \tag{9.1}
$$

mit $\alpha_i(X_i,\theta) = p_i(X_i,\theta)/S_i(X_i,\theta)$.

Bei Typ I-Zensur und progressiver Rechtszensur sind die C_i konstant. Man erhält als Plausibilitätsfunktion

$$
\begin{aligned}
\lim_{h_{i_1},\ldots,h_{i_k} \downarrow 0} \frac{1}{h_{i_1},\ldots,h_{i_k}} \quad & \mathbb{P}(t_i \le T_i \le t_i + h_i, T_i < C_i, i = i_1, \ldots, i_k, \\
& C_i < T_i, i \ne i_1, \ldots, i_k) \\
= & \prod_{i=i_1,\ldots,i_k} p_i(t_i,\theta) \prod_{i \ne i_1,\ldots,i_k} S_i(c_i,\theta).
\end{aligned}
$$

Die Funktionen G_i hängen wiederum nicht von θ ab und sind weggelassen worden. Die Form der Plausibilitätsfunktion bleibt somit unverändert.

Die Typ II-Zensur kommt in der Anwendung selten vor, da die Testzeit bis zum r-ten Ausfall nicht bekannt ist. Es gilt $p_i = p, S_i = S$ und $\alpha_i = \alpha$. Eine Realisation $t_1 \le \ldots \le t_r$ der ersten r Ordnungsstatistiken $T_{1n} \le \ldots \le T_{rn}$ wird beobachtet. Die zu maximierende Funktion lautet

$$
\begin{aligned}
\lim_{h_1,\ldots,h_n \downarrow 0} \frac{1}{h_1,\ldots,h_n} \quad & \mathbb{P}(t_1 \le T_{1n} \le t_1 + h_1, \ldots t_1 \le T_{rn} \le t_r + h_r) \\
= & \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} p(t_i,\theta) S^{n-r}(t_r,\theta).
\end{aligned}
$$

Die Konstante $n!/(n-r)!$ hängt nicht von θ ab und kann weggelassen werden. Die Plausibilitätsfunktion ist somit

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^{r} p(T_{in},\theta) S^{n-r}(T_{rn},\theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p^{\delta_i}(X_i,\theta) S^{1-\delta_i}(X_i,\theta).
\end{aligned}
$$

Auch hier hat die Plausibilitätsfunktion die Form der vorangegangenen Plausibilitätsfunktionen. Der Inex in der letzten Gleichung läuft bis n. Das lässt sich folgendermaßen erklären: wenn $T_j = T_{in}$ $(i = 1, \ldots, r)$, dann gilt $X_i = T_j \wedge T_{rn} = T_{in}$ und $\delta_j = \mathbb{I}_{T_j \leq T_{rn}} = 1$; wenn $T_j > T_{rn}$, dann ist $X_j = T_j \wedge T_{rn} = T_{rn}$ und $\delta_j = \mathbb{I}_{T_j \leq T_{rn}} = 0$.

Der plausible Schätzer $\hat{\theta}$ des Parameters θ maximiert die Plausibilitätsfunktion (9.1). Zur Berechnung des Schätzers sind die Score-Funktionen notwendig.

10 Die Score-Funktionen

Um die Score-Funktionen herzuleiten, wird die Plausibilitätsfunktion (9.1) logarithmiert. Man erhält

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln \alpha_i(X_i, \theta) + \sum_{i=1}^{n} \ln S_i(X_i, \theta). \tag{10.1}$$

Die Score-Funktion U erhält man durch Ableitung nach dem Parameter:

$$U(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = \Big(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln L(\theta), \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_s} \ln L(\theta) \Big),$$

wobei der plausible Schätzer $\hat{\theta}$ die Gleichung $U(\hat{\theta}) = 0$ erfüllt. Setzt man

$$U_j(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta)$$

so kommt man zum Vektor $U(\theta) = (U_1(\theta), \ldots, U_s(\theta))^T$.

Gleichung (10.1) führt zu

$$U_j(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln \alpha_i(X_i, \theta) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln S_i(X_i, \theta). \tag{10.2}$$

Nun sollen $\ln L(\theta)$ und $U(\theta)$ mit den Prozessen N_i und Y_i ausgedrückt werden.

Die Trajektorien von N_i haben die Form

$$N_i(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < X_i \\ 1, & t \geq X_i, \end{cases}$$

wenn $\delta_i = 1$, und $N_i(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, wenn $\delta_i = 0$.
Nun gilt mit Y als stochastischen Prozess, dessen Pfade rechtsstetige Stufenfunktionen sind, für ein stochastisches Integral des stochastischen Prozesses X

$$\int_0^t X(u) dY(u) = \sum_{i: \tau_i \leq t} X(\tau_i) \Delta Y(\tau_i)$$

mit $\tau_1 < \ldots < \tau_m$ als Sprungstellen von Y und $\Delta Y(\tau_i) = Y(\tau_i) - Y(\tau_{i-1})$. Nimmt man den Prozess N_i als Integrationsintervall des stochastisches Integral, so kommt man zu

$$\int_0^\infty \ln \alpha_i(u, \theta) dN_i(u) = \ln \alpha_i(X_i, \theta) \text{ für } \delta_i = 1,$$

und für $\delta_i = 0$ ist $\int_0^\infty \ln \alpha_i(u,\theta) dN_i(u) = 0$. Das Ergebnis kann zusammengefasst werden zu

$$\int_0^\infty \ln \alpha_i(u,\theta) dN_i(u) = \delta_i \ln \alpha_i(X_i,\theta). \tag{10.3}$$

Die Trajektorien von Y_i haben die Form

$$Y_i(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le X_i \\ 0, & t > X_i. \end{cases}$$

Man erhält

$$\int_0^{X_i} \alpha_i(u) du = \int_{-\infty}^\infty \underbrace{\mathbb{I}_{\{0 \le t \le X_i\}}}_{=Y_i(u)} \alpha_i(u) du = -\ln S_i(X_i,\theta). \tag{10.4}$$

Die Gleichungen (10.1),(10.2)-(10.4) führen zu

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \ln \alpha_i(u,\theta) dN_i(u) - \sum_{i=1}^n \int_0^\infty Y_i(u) \alpha_i(u,\theta) du$$

und

$$U_j(\theta) = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln \alpha_i(u,\theta) dN_i(u) - \sum_{i=1}^n \int_0^\infty Y_i(u) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \alpha_i(u,\theta) du. \tag{10.5}$$

11 Asymptotische Eigenschaften plausibler Schätzer

Die asymptotischen Eigenschaften des plausiblen Schätzers $\hat\theta$ sind eng verknüpft mit den asymptotischen Eigenschaften der Score-Funktion $U(\theta)$. Um das zu zeigen, sei θ_0 der wahre Wert des Parameters θ. Die Taylorentwicklung von $U_j(\theta)$ um θ_0 für $\theta = \hat\theta$ ergibt

$$-U(\theta_0) = \underbrace{U(\hat\theta)}_{=0} - U(\theta_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{j'}} U_j(\theta^{(j)}) \right)_{s \times s} (\hat\theta - \theta_0), \tag{11.1}$$

wobei $\theta^{(j)}$ zwischen $\hat\theta$ und θ_0 liegt. Es sei

$$\mathbb{I}(\theta) = (I_{jj'})_{s \times s} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{j'}} U_j(\theta) \right)_{s \times s} = \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_{j'}} \right)_{s \times s}.$$

Gleichung (11.1) ergibt

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\hat\theta - \theta_0) &= \left(-\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta_{j'}} U_j(\theta^{(j)}) \right)^{-1} n^{-1/2} U(\theta_0) \\ &= \left(-\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta_{j'}} U_j(\theta_0) \right)^{-1} n^{-1/2} U(\theta_0) + \Delta \\ &= \left(\frac{1}{n} \mathbb{I}(\theta_0) \right)^{-1} n^{-1/2} U(\theta_0) + \Delta. \end{aligned}$$

Falls $\Delta \xrightarrow{W} 0$, dann sind die asymptotischen Verteilungen der Zufallsvariablen

$$n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta_0) \text{ und } \left(\frac{1}{n}\mathbb{I}(\theta_0)\right)^{-1} n^{-1/2}U(\theta_0)$$

gleich. Wenn $\left(\frac{1}{n}\mathbb{I}(\theta_0)\right)^{-1}$ in Wahrscheinlichkeit gegen eine nichtstochastische Matrix konvergiert, dann können die asymptotischen Eigenschaften des plausiblen Schätzers $\hat{\theta}$ von den asymptotischen Eigenschaften der Score-Funktion $U(\theta)$ abgeleitet werden. Folgender Satz formuliert diese Aussage:

Satz 11.1 *Bei unabhängiger Rechtszensur und unter Einhaltung gewisser Regularitätsbedingungen hat die Gleichung $U(\theta)=0$ mit $\hat{\theta}$ eine Lösung, sodass $\hat{\theta} \xrightarrow{W} \theta_0$ gilt und*

$$n^{-1/2}U(\theta_0) \rightharpoonup N(0,\Sigma_0) \textit{ und } n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta_0) \rightharpoonup N(0,\Sigma_0^{-1}).$$

Die Matrix Σ_0 kann mit $n^{-1}\mathbb{I}(\hat{\theta})$ konsistent geschätzt werden.

Beweis und Regularitätsbedingungen: siehe [2].

12 Approximative Konfidenzintervalle

Approximative Konfidenzintervalle für Zuverlässigkeitscharakteristiken können über die *Delta-Methode* konstruiert werden:

Satz 12.1 (Delta-Methode) *Sei X_n eine Folge von Zufallsvariablen, für die*

$$X_n \xrightarrow{W} X \textit{ und } \sqrt{n}(X_n - X) \rightharpoonup N(0,\sigma^2)$$

gilt. Dann folgt für eine stetig differenzierbare Funktion g

$$g(X_n) \xrightarrow{W} g(X) \textit{ und } \sqrt{n}(g(X_n)-g(X)) \rightharpoonup N(0,\sigma^2(g'(X))^2).$$

Beweis: Die erste Behauptung ist der Satz von Slutsky (siehe [3]). Zum Beweis der zweiten Behauptung verwendet man die Taylorentwicklung

$$g(X_n) = g(X) + g'(X)(X_n - X) + \frac{1}{2}g''(\xi)(X_n - X)^2$$

mit ξ zwischen X_n und X. Durch Umformung erhält man

$$\sqrt{n}(g(X_n)-g(X)) = g'(X)\sqrt{n}(X_n - X) + \frac{1}{2\sqrt{n}}g''(\xi)\big(\sqrt{n}(X_n - X)\big)^2,$$

wobei $g'(X)\sqrt{n}(X_n - X) \rightharpoonup N(0,\sigma^2(g'(X))^2)$ und $\frac{1}{2\sqrt{n}}g''(\xi) \xrightarrow{W} 0$. $\diamondsuit$

Eine multivariate Version der Delta-Methode lässt sich mit X_n als $s \times 1$ und g als $p \times 1$ Vektor formulieren als

$$\sqrt{n}(g(X_n)-g(X)) \rightharpoonup N_p(0, \frac{\partial g(X)}{\partial X'}\Sigma\frac{\partial g(X)}{\partial X}),$$

wobei $\sqrt{n}(X_n - X) \rightharpoonup N_s(0, \Sigma)$.

Zur Bildung von Konfidenzintervallen sei $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_s)^T$ ein Schätzer für $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)^T$. Es gilt

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightharpoonup N_s(0, \Sigma_0^{-1}(\theta)). \tag{12.1}$$

Die Funktion $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, für die gilt

$$\sqrt{n}(g(\theta) - g(\hat{\theta})) \rightharpoonup N(0, J_g^T(\theta)\Sigma_0^{-1}(\theta)J_g(\theta)) \tag{12.2}$$

mit

$$J_g(\theta) = \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_s} \right)^T. \tag{12.3}$$

Wenn n groß ist, folgt aus Gleichung (12.1)

$$\hat{\theta} \approx N_s(\theta, \Sigma^{-1}(\theta))$$

mit $\Sigma(\theta) = n\Sigma_0(\theta)$. Die Konvergenz in Gleichung (12.2) führt zu

$$g(\hat{\theta}) \approx N_s(g(\theta), J_g^T(\theta)\Sigma^{-1}(\hat{\theta})J_g(\theta)).$$

Sei $n^{-1}\mathbb{I}(\hat{\theta})$ ein konsistenter Schätzer von $\Sigma_0(\theta)$. Dann folgt

$$\frac{g(\hat{\theta}) - g(\theta)}{\sigma_g(\hat{\theta})} \approx N(0, 1) \tag{12.4}$$

mit $\sigma_g^2(\hat{\theta}) = J_g^T(\hat{\theta})\mathbb{I}^{-1}(\hat{\theta})J_g(\hat{\theta})$.

Dieses Ergebnis kann dazu verwendet werden, um approximative Konfidenzintervalle für $g(\theta)$ zu berechnen. Im Zusammenhang mit Aspekten der Zuverlässigkeit werden die am meisten dazu verwendeten Indikatoren durch die Funktionen

$$g(\theta) = S(t, \theta),\ g(\theta) = t_p(\theta) \text{ und } g(\theta) = m(\theta)$$

verwendet. Es sind dies die Zuverlässigkeitsfunktion, das p-Quantil und der Mittelwert. Die Zuverlässigkeitsfunktion nimmt Werte im Intervall $(0, 1]$ an. Eine Approximation durch die Normalverteilung kann dadurch verbessert werden, indem die Transformation

$$Q(t, \theta) = \ln \frac{S(t, \theta)}{1 - S(t, \theta)} \tag{12.5}$$

verwendet wird. Berücksichtigt man $(\ln \frac{u}{1-u})' = \frac{1}{u(1-u)}$, so folgt mit Gleichung (12.4)

$$\frac{Q(t, \hat{\theta}) - Q(t, \theta)}{\sigma_Q(\hat{\theta})} \approx N(0, 1),$$

wobei unter Anwendung der Delta-Methode

$$\sigma_Q(\hat{\theta}) = \frac{1}{S(t,\hat{\theta})(1 - S(t,\hat{\theta}))}\sigma_g(\hat{\theta}) \tag{12.6}$$

gilt. Daraus folgt

$$\mathbb{P}(Q(t,\hat{\theta}) - \sigma_Q(\hat{\theta})u_{1-\alpha/2} \leq Q(t,\theta) \leq Q(t,\hat{\theta}) + \sigma_Q(\hat{\theta})u_{1-\alpha/2}) \approx 1 - \alpha,$$

wobei $u_{1-\alpha/2}$ das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Standardnormalverteilung ist. Löst man die Ungleichungen nach $S(t,\theta)$ auf, dann erhält man ein approximatives $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für die Zuverlässigkeitsfunktion:

$$\left(\left(1 + \frac{1 - S(t,\hat{\theta})}{S(t,\hat{\theta})}e^{\sigma_Q(\hat{\theta})u_{1-\alpha/2}}\right)^{-1}, \left(1 + \frac{1 - S(t,\hat{\theta})}{S(t,\hat{\theta})}e^{-\sigma_Q(\hat{\theta})u_{1-\alpha/2}}\right)^{-1}\right) \tag{12.7}$$

Analog verfährt man beim p-Quantil und beim Mittelwert. Die entsprechenden Funktionen g nehmen nur positive Werte an. Die Approximation wird daher durch

$$K(\theta) = \ln g(\theta)$$

verbessert. Mit $(\ln u)' = 1/u$ und Gleichung (12.4) erhält man

$$\frac{K(\hat{\theta}) - K(\theta)}{\sigma_K(\hat{\theta})} \approx N(0,1)$$

mit

$$\sigma_K(\hat{\theta}) = \frac{1}{g(\hat{\theta})}\sigma_g(\hat{\theta}).$$

Das approximative $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für $g(\hat{\theta})$ ist dann

$$\left(g(\hat{\theta})e^{-\sigma_K(\hat{\theta})u_{1-\alpha/2}}, g(\hat{\theta})e^{\sigma_K(\hat{\theta})u_{1-\alpha/2}}\right). \tag{12.8}$$

III Das parametrische AFT-Modell

13 Parametrisierung des AFT-Modells

Sei

$$x(\cdot) = (x_0(\cdot), \ldots, x_m(\cdot))$$

eine zeitabhängige und mehrdimensionale erklärende Variable, wobei $x_0(t) \equiv 1$, und $x_1(\cdot), \ldots, x_m(\cdot)$ sind univariate erklärende Variablen.

Im AFT-Modell ist die Zuverlässigkeitsfunktion unter $x(\cdot)$

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\Big(\int_0^t r\big(x(\tau)\big)d\tau\Big). \tag{13.1}$$

$S_0(\cdot)$ ist dabei die Zuverlässigkeitsfunktion unter Gebrauchsbelastung.

Falls die erklärenden Variablen über die Zeit konstant sind, dann wird das Modell (13.1) geschrieben als

$$S_x(t) = S_0(r(x)t). \tag{13.2}$$

Die Funktion r wird folgendermaßen parametrisiert:

$$r(x) = e^{-\beta^T z},$$

wobei $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_m)^T$ ein Vektor mit unbekannten Parametern ist und

$$z = (z_0, \ldots, z_m)^T = (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x))^T$$

ein Vektor mit speziellen Funktionen φ_i ist mit $\varphi_0(t) \equiv 1$.

Daraus folgt, dass im parametrischen AFT-Modell die Zuverlässigkeitsfunktion unter $x(\cdot)$

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\Big(\int_0^t e^{-\beta^T x(\tau)}d\tau\Big) \tag{13.3}$$

ist und $x_j(\cdot)$ nicht unbedingt die beobachteten erklärenden Variablen sein müssen, sondern auch spezifische Funktionen $\varphi_j(x)$. Beispiele dazu folgen weiter unten.

Falls die erklärenden Variablen über die Zeit konstant sind, dann schreibt man das Modell (13.3) als

$$S_x(t) = S_0\Big(e^{-\beta^T x}t\Big), \tag{13.4}$$

und der Logarithmus der Lebensdauer T_x unter x ist

$$\ln T_x = \beta^T x + \epsilon.$$

Die Zuverlässigkeitsfunktion der Zufallsvariablen ϵ hängt nicht von x ab und ist $S(t) = S_0(\ln t)$. Falls es sich um eine lognormale Lebensdauerverteilung handelt, dann ist die Verteilung von ϵ eine Normalverteilung und es liegt ein multiples lineares Regressionsmodell vor.

Für zeitabhängige erklärende Variablen ist die Verteilung der Zufallsvariablen

$$R = \int_0^{T_{x(\cdot)}} e^{-\beta^T x(\tau)} d\tau$$

parameterfrei mit der Zuverlässigkeitsfunktion $S_0(t)$.

Die Wahl der Funktionen φ_i hängt von den erklärenden Variablen ab. Erklärende Variablen wie elektrische Spannung, Temperatur oder Druck sind intervallskaliert. Für das Modell (13.2) ergibt sich daraus, dass für alle x_1 und x_2, die in der Menge der Gebrauchsbelastung E_0 enthalten sind, die Gleichung

$$S_{x_2}(t) = S_{x_1}\big(\rho(x_1, x_2)t\big) \tag{13.5}$$

gilt. Die Funktion $\rho(x_1, x_2) = r(x_2)/r(x_1)$ zeigt dabei den Grad der Skalenvariation an. Es gilt $\rho(x, x) = 1$.

Sei x eindimensional. Dann ist die Veränderung der Skalenvariation durch die *infinitesimale Charakteristik* bestimmt:

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho(x, x+\Delta x) - \rho(x, x)}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{r(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(x+\Delta x) - r(x)}{\Delta x} \\
&= [\ln r(x)]'
\end{aligned}$$

Für alle $x \in E_0$ ist die Funktion $r(x)$ gegeben durch

$$r(x) = r(x_0) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \delta(v) dv \right\},$$

wobei $x_0 \in E_0$ eine konstante erklärende Variable ist.

Nun sei angenommen, dass $\delta(x)$ *proportional* zu einer Funktion $u(x)$ ist:

$$\delta(x) = \alpha u(x).$$

In diesem Fall gilt mit $\varphi_1(x)$ als Stammfunktion von $u(x)$ und mit zwei unbekannten Parametern $\beta_0,\ \beta_1$

$$\begin{aligned}
r(x) &= r(x_0) \exp\left\{ \alpha \int_{x_0}^{x} u(\nu) d\nu \right\} \\
&= r(x_0) \exp\big\{ -\alpha\varphi_1(x_0)\big\} \exp\big\{ -\alpha\varphi_1(x)\big\} \\
&= e^{-\beta_0 - \beta_1 \varphi_1(x)}.
\end{aligned}$$

Im folgenden werden einige parametrische Modelle vorgestellt.

Beispiel 13.1 (log-lineares Modell) *Sei $\delta(x) = \alpha$ und $\varphi_1(x) = x$, d.h. die Skalenveränderung ist konstant. Dann gilt*

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 x}.$$

Beispiel 13.2 (Power Rule Modell) *Sei $\delta(x) = \alpha/x$ und $\varphi_1(x) = \ln x$. Dann gilt*

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln x} = \alpha_1 x^{-\beta_1}.$$

Beispiel 13.3 (Arrhenius Modell) *Sei $\delta(x) = \alpha/x^2$ und $\varphi_1(x) = -1/x$. Dann gilt*

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1/x} = \alpha_1 e^{-\beta_1/x}.$$

Beispiel 13.4 (Meeker-Luvalle Modell) *Sei $\delta(x) = \alpha/x(1-x)$ und $\varphi_1(x) = \ln \frac{x}{1-x}$. Dann gilt*

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln \frac{x}{1-x}} = \alpha_1 \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{-\beta_1}, \quad 0 < x < 1.$$

Das *Arrhenius Modell* wird verwendet, wenn die erklärende Variable Temperatur ist. Das *Power Rule Modell* kommt bei elektrischer Spannung und mechanischer Belastung zur Anwendung. Das *log-lineare Modell* eignet sich für die Analyse von Ausdauer- und Ermüdungsdaten und beim Testen von elektronischen Komponenten. Beim *Meeker-Luvalle Modell* ist x der Feuchtigkeitsanteil.

Die ersten drei Modelle sind Spezialfälle einer größeren Klasse von Modellen, die durch

$$\delta(x) = \alpha x^\gamma$$

mit unbekanntem γ ausgedrückt werden. Mit der Funktion $r(x)$ stellt sich diese Klasse folgendermaßen dar:

$$r(x) = \begin{cases} e^{-\beta_0 - \beta_1 (x^\epsilon - 1)/\epsilon} & : \ \epsilon \neq 0 \\ e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln x} & : \ \epsilon = 0 \end{cases}$$

Der Parameter ϵ muss in diesem Fall geschätzt werden.

Das Modell (13.5) kann weiter verallgemeinert werden, indem $\delta(x)$ als lineare Kombination von mehreren Funktionen der erklärenden Variable dargestellt wird:

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(x)$$

Es folgt

$$r(x) = \exp\Big\{ -\beta_0 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i z_i(x) \Big\},$$

wobei $z_i(x)$ Funktionen der erklärenden Variable und $\beta_0, \ldots, \beta_k$ unbekannte Parameter sind.

Beispiel 13.5 (Eyring Modell) *Sei $\delta(x) = 1/x + \alpha/x^2$. Dann gilt*

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln x - \beta_2/x} = \alpha_1 x e^{-\beta_2/x},$$

wobei $\beta_1 = -1$. Dieses Modell wird verwendet, wenn als erklärende Variable Temperatur auftritt.

Beispiel 13.6 (Verallgemeinertes Eyring Modell) *Sei $\delta(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i/x^i$. Dann gilt*

$$r(x) = \exp\Big\{ - \beta_0 - \beta_1 \ln x - \sum_{i=1}^k \beta_i/x^i \Big\}.$$

Wenn die erklärende Variable $x = (x_1, \ldots, x_m)$ mehrdimensional ist, ist eine Modellbildung ebenfalls möglich. Wenn zwischen $x_1, \ldots, x_m$ keine Interaktionen bestehen, dann kann das Modell

$$r(x) = \exp\Big\{\beta_0 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} z_{ij}(x_i)\Big\}$$

verwendet werden. Die z_{ij} sind dabei wieder spezielle Funktionen, und die β_{ij} sind unbekannte Parameter.

Beispiel 13.7 *Wenn der Einfluss der ersten erklärenden Variablen durch das Power Rule Modell und der Einfluss der zweiten Variablen durch das Arrhenius Modell erklärt wird, dann bietet sich das Modell*

$$r(x_1, x_2) = \exp\Big\{ - \beta_0 - \beta_1 \ln x_1 - \beta_2/x_2 \Big\}$$

an mit $k_1 = k_2 = 1$.

Beispiel 13.8 *Wenn es zwischen den erklärenden Variablen des Beispiels 13.7 Wechselwirkungen gibt, bietet sich folgendes Modell an:*

$$r(x_1, x_2) = \exp\Big\{ - \beta_0 - \beta_1 \ln x_1 - \beta_2/x_2 - \beta_3(\ln x_1)/x_2 \Big\}$$

Neben den erklärenden, intervallskalierten Variablen gibt es auch *diskrete erklärende Variablen.* Dazu zählen z.B. die Anzahl der Nutzer, die ein System gleichzeitig in Anspruch nehmen, oder die Anzahl von Härtebehandlungen. Die Form der Funktionen, mit denen sie abgebildet werden, bleibt gegenüber den Intervall-gemessenen Variablen gleich, d.h. $\varphi_j(x) = x, \varphi_j(x) = \ln x$ oder $\varphi_j(x) = 1/x$. Falls die j-te Variable eine Dummy-Variable ist - z.B. Lokation, Erzeuger, Design - und k_j unterschiedliche Werte annimmt, dann ist $x_j(\cdot)$ ein $(k_j - 1)$-dimensionaler Vektor der Form

$$x_j(\cdot) = (x_{j1}(\cdot), \ldots, x_{j,k_j-1}(\cdot))^T,$$

der k_j unterschiedliche Werte

$$(0,0,\dots,0)^T, (1,0,\dots,0)^T, (0,1,0,\dots,0)^T, \dots, (0,0,\dots,0,1)^T$$

annimmt, und β_j ist (k_j-1)-dimensional:

$$\beta_j = (\beta_{j1}, \dots, \beta_{j,k_j-1})^T$$

Falls die j-te erklärende Variable eine Dummy-Variable ist und die restlichen Variablen diskret oder intervallskaliert, dann bietet sich folgendes Modell an:

$$\beta^T x = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{j-1}x_{j-1} + \sum_{l=1}^{k_j-1} \beta_{jl}x_{jl} + \beta_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \beta_m x_m$$

Das so erhaltene Modell ist gleich dem Modell (13.4) mit $m+k_j-2$ erklärenden univariaten Variablen.

14 FTR-Datenanalyse bei Verteilungen mit Skalen- und Formparameter

Bei *failure time regression (FTR)* werden Ausfälle von technischen Objekten in Abhängigkeit von erklärenden Größen - wie z.B. Temperatur, Spannung oder Druck - beobachtet. Das Ziel einer FTR-Datenanalyse ist die Untersuchung der Zuverlässigkeit der technischen Objekte bei bestimmten Werten der erklärenden Variablen.

Ausgangspunkt für eine Regressionsanalyse von Lebensdauerdaten ist das AFT-Modell

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\bigg(\int_0^t e^{-\beta^T x(\tau)} d\tau\bigg).$$

S_0 gehört zu einer Klasse von Zuverlässigkeitsfunktionen mit Skalen- und Formparameter. Sie hat die Gestalt

$$S_0(t) = G_0\big((t/\eta)^\nu\big), \quad \eta, \nu > 0.$$

Für $t > 0$ können beispielhaft die Funktionenklassen

$$G_0(t) = e^{-t},\ G_0(t) = (1+t)^{-1} \text{ und } G_0(t) = 1 - \Phi(\ln t)$$

angeführt werden. Es handelt sich um die Familie der Weibull-, der Loglogistik- und der Lognormal-Verteilung. Φ ist dabei die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Der Parameter η kann mit dem Koeffizienten β_0 zusammengefasst werden, sodass die Zuverlässigkeitsfunktion geschrieben werden kann als

$$S_0(t;\sigma) = G_0(t^{1/\sigma}), \quad \sigma = 1/\nu.$$

Bei einem Experiment werden n Einheiten beobachtet. Die i-te Einheit wird der Belastung

$$x^{(i)}(\cdot) = (x_0^{(i)}(\cdot), \dots, x_m^{(i)}(\cdot))^T$$

einer zeitabhängigen und mehrdimensionalen erklärenden Variablen

$$x(\cdot) = (x_0(\cdot), \ldots, x_m(\cdot))^T$$

ausgesetzt. Die entsprechenden Daten sollen dabei unabhängig rechtszensiert sein. T_i und C_i seien die zufälligen Ausfall- und Zensurzeitpunkte der i-ten Einheit mit

$$X_i = T_i \wedge C_i \text{ und } \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C_i\}}.$$

Mit S_i soll die Zuverlässigkeitsfunktion $S_{x^{(i)}}(\cdot)$ bezeichnet werden. Das parametrische AFT-Modell (13.3) kann nun geschrieben werden als

$$S_i(t;\beta,\sigma) = G_0\Big(\Big(\int_0^t e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\Big)^{1/\sigma}\Big)$$

Falls $x^{(i)}$ konstant ist, ergibt sich

$$S_i(t) = G\Big(\frac{\ln t - \beta^T x^{(i)}}{\sigma}\Big),$$

wobei $G(u) = G_0(e^u)$ mit $u \in \mathbb{R}$.

Nun lassen sich die Plausibilitätsschätzer für die Regressionsparameter berechnen. Nach Gleichung (9.1) lässt sich die Plausibilitätsfunktion - unter Anwendung des Transformationssatzes für Dichten - schreiben als

$$\begin{aligned} L(\beta,\sigma) &= \prod_{i=1}^n \Big(\frac{1}{\sigma} e^{-\beta^T x^{(i)}(X_i)}\Big(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\Big)^{-1} h\Big(\frac{1}{\sigma}\ln\big(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\big)\Big)\Big)^{\delta_i} \times \\ & \quad G\Big(\frac{1}{\sigma}\ln\big(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\big)\Big), \end{aligned}$$

wobei $h(u) = \frac{g(u)}{G(u)}$ und $g(u) = -G'(u)$.
Für konstante $x^{(i)}$ ist die Plausibilitätsfunktion gleich

$$L(\beta,\sigma) = \prod_{i=1}^n \Big(\frac{1}{\sigma X_i} h\Big(\frac{\ln X_i - \beta^T x^{(i)}}{\sigma}\Big)\Big)^{\delta_i} G\Big(\frac{\ln X_i - \beta^T x^{(i)}}{\sigma}\Big).$$

Die Score-Funktionen sind

$$\begin{aligned} U_l(\beta;\sigma) &= \frac{\partial \ln L(\beta,\sigma)}{\partial \beta_l} \\ &= \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^n z_l^{(i)}(\beta) a_i(\beta,\sigma) + \sum_{i=1}^n \delta_i \Big(z_l^{(i)}(\beta) - x_l^{(i)}(X_i)\Big), \quad l = 0,1,\ldots,m, \end{aligned}$$

und

$$U_{m+1}(\beta;\sigma) = \frac{\partial \ln L(\beta,\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\Big(v_i(\beta,\sigma)a_i(\beta,\sigma) - \delta_i\Big).$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}
v_i(\beta,\sigma) &= \frac{1}{\sigma}\ln\Big(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du\Big),\\
a_i(\beta,\sigma) &= h(v_i(\beta,\sigma)) - \delta_i(\ln h)'(v_i(\beta,\sigma)) \text{ und}\\
z_l^{(i)}(\beta) &= \frac{\int_0^{X_i} x_l^{(i)}(u)e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du}{\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du}.
\end{aligned}$$

Im Fall von konstanten erklärenden Variablen sind die Score-Funktionen

$$U_l(\beta;\sigma) = \frac{\partial \ln L(\beta,\sigma)}{\partial \beta_l} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} x_l^{(i)} a_i(\beta,\sigma), \quad l = 0,1,\dots,m,$$

und

$$U_{m+1}(\beta;\sigma) = \frac{\partial \ln L(\beta,\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\Big(v_i(\beta,\sigma)a_i(\beta,\sigma) - \delta_i\Big),$$

wobei

$$\begin{aligned}
v_i(\beta,\sigma) &= \frac{\ln X_i - \beta^T x^{(i)}}{\sigma} \text{ und}\\
a_i(\beta,\sigma) &= h(v_i(\beta,\sigma)) - \delta_i(\ln h)'(v_i(\beta,\sigma)).
\end{aligned}$$

Die Plausibilitätsschätzer $\hat{\beta}_j$ und $\hat{\sigma}$ erhält man durch Lösen des Gleichungssystems

$$U_l(\beta,\sigma) = 0, \quad l = 0,1,\dots,m+1.$$

Mit den Parametern $\hat{\beta}$ und $\hat{\sigma}$ kann nun die Zuverlässigkeitsfunktion geschätzt werden. Sei $x(\cdot) = \big(x_1(\cdot),\dots,x_n(\cdot)\big)$ eine beliebige erklärende Variable, die mit $x^{(i)},\ i = (1,\dots,n)$, nicht ident sein muss. Dann folgt

$$\hat{S}_{x(\cdot)}(t) = G_0\bigg(\Big(\int_0^t e^{-\hat{\beta}^T x(u)}du\Big)^{1/\hat{\sigma}}\bigg) \tag{14.1}$$

und für konstantes x

$$\hat{S}_{x(\cdot)}(t) = G\Big(\frac{\ln t - \hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}}\Big). \tag{14.2}$$

Die Verteilung der Plausibilitätsschätzer $(\hat{\beta},\hat{\sigma})^T$ können nach Satz 11.1 für große n durch die Normalverteilung angenähert werden, d.h.

$$(\hat{\beta}, \hat{\sigma})^T \approx N_{m+2}((\beta, \sigma)^T, \Sigma^{-1}(\beta, \sigma)).$$

Die Kovarianzmatrix $\Sigma^{-1}(\beta, \sigma)$ wird nach Satz 11.1 geschätzt durch

$$\mathbb{I}^{-1}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}) = (I^{ls}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}))_{(m+2)\times(m+2)},$$

wobei

$$\mathbb{I}(\beta, \sigma) = (I_{ls}(\beta, \sigma))_{(m+2)\times(m+2)}$$

eine Matrix mit den folgenden Elementen ist:

$$\begin{aligned}
I_{ls}(\beta, \sigma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta, \sigma)}{\partial \beta_l \partial \beta_s} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} y_l^{(i)}(\beta) y_s^{(i)}(\beta) c_i(\beta, \sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} y_{ls}^{(i)}(\beta)(a_i(\beta, \sigma) + \sigma\delta_i), \\
I_{l,m+1}(\beta, \sigma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta, \sigma)}{\partial \beta_l \partial \sigma} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} y_l^{(i)}(\beta) \big(v_i(\beta, \sigma) c_i(\beta, \sigma) + a_i(\beta, \sigma)\big), \quad l, s = 0, 1, \ldots, m, \text{ und} \\
I_{m+1,m+1}(\beta, \sigma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta, \sigma)}{\partial \sigma^2} \\
&= \frac{1}{\sigma} U_{m+1}(\beta, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} v_i(\beta, \sigma) \big(v_i(\beta, \sigma) c_i(\beta, \sigma) + a_i(\beta, \sigma)\big),
\end{aligned}$$

wobei $a_i(\beta, \sigma)$ und $v_i(\beta, \sigma)$ oben bereits erläutert wurden und

$$\begin{aligned}
c_i(\beta, \sigma) &= h'(v_i(\beta, \sigma)) - \delta_i (\ln h)''(v_i(\beta, \sigma)), \\
y_{ls}^{(i)}(\beta) &= \frac{\int_0^{X_i} x_l^{(i)}(u) e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du \int_0^{X_i} x_s^{(i)}(u) e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du}{\left(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\right)^2} \\
&- \frac{\int_0^{X_i} x_l^{(i)}(u) x_s^{(i)}(u) e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du}{\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du}.
\end{aligned}$$

Falls $x^{(i)}$ konstant ist, dann gilt

$$\begin{aligned}
I_{ls}(\beta, \sigma) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_l^{(i)} x_s^{(i)} c_i(\beta, \sigma), \\
I_{l,m+1}(\beta, \sigma) &= \frac{1}{\sigma} U_l(\beta, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_l^{(i)} v_i(\beta, \sigma) c_i(\beta, \sigma), \\
I_{m+1,m+1}(\beta, \sigma) &= \frac{1}{\sigma} U_{m+1}(\beta, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} v_i(\beta, \sigma) \big(v_i(\beta, \sigma) c_i(\beta, \sigma) + a_i(\beta, \sigma)\big).
\end{aligned}$$

Die Varianz des Schätzers $\hat{\beta}_j$ ist demnach

$$Var(\hat{\beta}_j) = I^{jj}(\hat{\beta}, \hat{\sigma})$$

und

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{Var(\hat{\beta}_j)^{1/2}} \approx N(0,1), \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

In Gleichung (12.7) wird das approximative Konfidenzintervall für die Zuverlässigkeitsfunktion dargestellt. Mit der geschätzten Zuverlässigkeitsfunktion (14.1) und der erklärenden Variablen $x(\cdot) = \big(x_0(\cdot), \ldots, x_m(\cdot)\big) \in E_0$ mit $x_0(\cdot) = 1$ ergibt sich ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall der Form

$$\left(1 + \frac{1 - \hat{S}_{x(\cdot)}(t)}{\hat{S}_{x(\cdot)}(t)} \exp\{\pm \hat{\sigma}_{Q_{x(\cdot)}}(t) u_{\{1-\alpha/2\}}\}\right)^{-1},$$

wobei $u_{\{1-\alpha/2\}}$ das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist. Die Varianz $\hat{\sigma}^2_{Q_{x(\cdot)}}(t)$ der geschätzten transformierten Größe (12.5) ist

$$\hat{\sigma}^2_{Q_{x(\cdot)}}(t) = \frac{J^T_{\hat{S}_{x(\cdot)}(t)} \mathbb{I}^{-1}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}) J_{\hat{S}_{x(\cdot)}(t)}}{\hat{S}^2_{x(\cdot)}(t)(1 - \hat{S}_{x(\cdot)}(t))^2}.$$

Die Elemente des Vektors

$$J^T_{\hat{S}_{x(\cdot)}(t)} = \Big(\frac{\partial \hat{S}_{x(\cdot)}(t)}{\partial \hat{\beta}}, \frac{\partial \hat{S}_{x(\cdot)}(t)}{\partial \hat{\sigma}}\Big)$$

sind mit der geschätzten Zuverlässigkeitsfunktion (14.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{S}_{x(\cdot)}(t)}{\partial \hat{\beta}} &= -G'\Big(\underbrace{\frac{1}{\hat{\sigma}_{Q_{x(\cdot)}}(t)} \ln\Big(\int_0^t e^{-\hat{\beta}^T x(u)} du\Big)}_{=G^{-1}(\hat{S}_{x(\cdot)}(t))}\Big) \frac{1}{\hat{\sigma}_{Q_{x(\cdot)}}(t)} \frac{\int_0^t x^T(u) e^{-\hat{\beta}^T x(u)} du}{\int_0^t e^{-\hat{\beta}^T x(u)} du} \quad \text{und} \\
\frac{\partial \hat{S}_{x(\cdot)}(t)}{\partial \hat{\sigma}} &= -G'\big(G^{-1}(\hat{S}_{x(\cdot)}(t))\big) \frac{1}{\hat{\sigma}^2_{Q_{x(\cdot)}}(t)} \ln\Big(\int_0^t e^{-\hat{\beta}^T x(u)} du\Big).
\end{aligned}$$

Falls die erklärenden Variablen konstant sind, gilt

$$J^T_{S_x(t)} = -\frac{G'\big(G^{-1}(\hat{S}_x(t))\big)}{\hat{\sigma}^2_{Q_x(t)}} \times \Big(\hat{\sigma}_{Q_x(t)} x^T, \ln t - \hat{\beta}^T x\Big).$$

15 FTR-Datenanalyse bei der verallgemeinerten Weibull-Verteilung

Der Vorteil der verallgemeinerten Weibull-Verteilung liegt darin, dass mit ihr der Verlauf der Ausfallrate sehr flexibel modelliert werden kann. Die Zuverlässigkeitsfunktion ist

$$S_0(t) = \exp\{1 - (1 + (t/\theta)^\nu)^\gamma\}, \quad (\gamma, \theta, \nu > 0).$$

Falls das AFT-Modell mit der verallgemeinerten Weibull-Verteilung verwendet wird, dann kann der Skalenparameter θ in den Koeffizienten β_0 integriert werden und man erhält

$$S_0(t) = \exp\left\{1 - \left(1 + t^\nu\right)^\gamma\right\}, \quad (\gamma, \nu > 0).$$

Die entsprechende Ausfallrate ist dann

$$\alpha(t; \gamma, \nu) = \nu\gamma(1 + t^\nu)^{\gamma-1} t^{\nu-1}.$$

Im AFT-Modell hat die Zuverlässigkeitsfunktion $S_{x^{(i)}(\cdot)}$ die Gestalt

$$S_i(t; \beta, \nu, \gamma) = \exp\left\{1 - \left(1 + \left(\int_0^t e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\right)^\nu\right)^\gamma\right\}$$

und für konstantes $x^{(i)}$

$$S_i(t; \beta, \nu, \gamma) = \exp\left\{1 - \left(1 + \left(e^{-\beta^T x^{(i)}} t\right)^\nu\right)^\gamma\right\}.$$

Es sei

$$f_i(t, \beta, \gamma) = \int_0^t e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du.$$

Die Regressionsparameter werden wieder über die Plausibilitätsfunktion berechnet. Die entsprechende Funktion lautet für zeitabhängige Belastungen $x^{(i)}$

$$\begin{aligned} L(\beta, \nu, \gamma) &= \prod_{i=1}^n \left(\nu\gamma(1 + (f_i(X_i, \beta, \gamma))^\nu)^{\gamma-1} e^{-\beta^T x^{(i)}(X_i)} (f_i(X_i, \beta, \gamma))^{\nu-1}\right)^{\delta_i} \\ &\times \exp\{1 - (1 + (f_i(X_i, \beta, \gamma))^\nu)^\gamma\}. \end{aligned}$$

Falls $x^{(i)}$ konstant ist, dann lautet die Plausibilitätsfunktion

$$\begin{aligned} L(\beta, \nu, \gamma) &= \prod_{i=1}^n \left(\nu\gamma e^{-\nu\beta^T x^{(i)}} X_i^{\nu-1} \left(1 + (e^{-\beta^T x^{(i)}} X_i)^\nu\right)^{\gamma-1}\right)^{\delta_i} \\ &\times \exp\left\{1 - \left(1 + (e^{-\beta^T x^{(i)}} X_i)^\nu\right)^\gamma\right\}. \end{aligned}$$

Für konstante erklärende Variablen sind die Score-Funktionen

$$
\begin{aligned}
U_l(\beta,\nu,\gamma) &= \frac{\partial \ln L(\beta,\nu,\gamma)}{\partial \beta_l} \\
&= \nu \sum_{i=1}^{n} x_l^{(i)} (\gamma\omega(\beta,\nu,\gamma) - \delta_i u_i(\beta,\nu,\gamma)), \quad l = 0,1,\ldots,m, \\
U_{m+1}(\beta,\nu,\gamma) &= \frac{\partial \ln L(\beta,\nu,\gamma)}{\partial \nu} \\
&= \frac{D}{\nu} - \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{n} \big(\gamma\omega(\beta,\nu,\gamma) - \delta_i u_i(\beta,\nu,\gamma)\big) \ln z_i(\beta,\nu), \\
U_{m+2}(\beta,\nu,\gamma) &= \frac{\partial \ln L(\beta,\nu,\gamma)}{\partial \gamma} \\
&= \frac{D}{\gamma} - \sum_{i=1}^{n} \big((1+z_i(\beta,\gamma))^{\gamma} - \delta_i \ln(1+z_i(\beta,\nu))\big),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i, \\
z_i(\beta,\nu) &= \left(e^{-\beta^T x^{(i)}} X_i\right)^{\nu}, \\
u_i(\beta,\nu,\gamma) &= 1 + (\gamma-1)\frac{z_i(\beta,\nu)}{1+z_i(\beta,\nu)}, \\
\omega_i(\beta,\nu,\gamma) &= (1+z_i(\beta,\nu))^{\gamma-1} z_i(\beta,\nu).
\end{aligned}
$$

Bei zeitabhängigen erklärenden Variablen nehmen die Formeln für die Score-Funktionen eine kompliziertere Gestalt an. Wiederum berechnen sich die Plausibilitätsschätzer $\hat{\beta}, \hat{\nu}$ und $\hat{\gamma}$ durch Lösen des Gleichungssystems

$$
U_l(\beta,\nu,\gamma) = 0, \quad l = 0,1,\ldots,m+2.
$$

Die Schätzung der Zuverlässigkeitsfunktion $S_{x(\cdot)}(t)$ ergibt nun für eine beliebige erklärende Variable $x(\cdot)$

$$
\hat{S}_{x(\cdot)}(t) = \exp\left\{1 - \left(1 + \left(\int_0^t e^{-\hat{\beta}^T x^{(i)}(u)} du\right)^{\hat{\nu}}, \right)^{\hat{\gamma}}\right\}
$$

und bei konstanter Belastung x folgt

$$
\hat{S}_x(t) = \exp\left\{1 - \left(1 + \left(e^{-\hat{\beta}^T x^{(i)}} t\right)^{\hat{\nu}}\right)^{\hat{\gamma}}\right\}.
$$

Die Verteilung der Plausibilitätsschätzer $(\hat{\beta}, \hat{\nu}, \hat{\gamma})^T$ wird für große n wieder über die Normalverteilung approximiert:

$$(\hat{\beta}, \hat{\nu}, \hat{\gamma})^T \approx N_{m+3}((\beta, \nu, \gamma)^T, \Sigma^{-1}(\beta, \nu, \gamma)).$$

Die Kovarianzmatrix $\Sigma^{-1}(\beta, \nu, \gamma)$ wird geschätzt durch

$$\mathbb{I}^{-1}(\hat{\beta}, \hat{\nu}, \hat{\gamma}) = (I^{ls}(\hat{\beta}, \hat{\nu}, \hat{\gamma}))_{(m+3)\times(m+3)}$$

mit

$$\mathbb{I}(\beta, \nu, \gamma) = (I_{ls}(\beta, \nu, \gamma))_{(m+3)\times(m+3)}.$$

als Matrix mit negativen zweiten Ableitungen von $\ln L(\beta, \nu, \gamma)$ nach den Argumenten. Unter konstanten erklärenden Variablen besteht die Matrix aus folgenden Elementen:

$$\begin{aligned}
I_{ls}(\beta, \nu, \gamma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta, \nu, \gamma)}{\partial \beta_l \partial \beta_s} \\
&= \nu^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_l^{(i)} x_s^{(i)}}{1 + z_i(\beta, \nu)} \big(\gamma \omega_i(\beta, \nu, \gamma)(1 + z_i(\beta, \nu)) \\
&- \delta_i(u_i(\beta, \nu, \gamma) - 1)\big), \\
I_{l,m+1}(\beta, \nu, \gamma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta, \nu, \gamma)}{\partial \beta_l \partial \nu} \\
&= -\frac{1}{\nu} U_l(\beta, \nu, \gamma) - \sum_{i=1}^{n} x_l^{(i)} \frac{\ln z_i(\beta, \nu)}{1 + z_i(\beta, \nu)} \big(\gamma \omega_i(\beta, \nu, \gamma)(1 + z_i(\beta, \nu)) \\
&- \delta_i(u_i(\beta, \nu, \gamma) - 1)\big), \\
I_{l,m+2}(\beta, \nu, \gamma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta, \nu, \gamma)}{\partial \beta_l \partial \gamma} \\
&= -\nu \sum_{i=1}^{n} x_l^{(i)} \Big(\omega_i(\beta, \nu, \gamma)(1 + \gamma \ln(1 + z_i(\beta, \nu))) - \delta_i \frac{z_i(\beta, \nu)}{1 + z_i(\beta, \nu)}\Big), \\
& \quad l, s = 0, 1, \ldots, m, \text{ und} \\
I_{m+1,m+1}(\beta, \nu, \gamma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta, \nu, \gamma)}{\partial \nu^2} \\
&= \frac{1}{\nu} U_{m+1}(\beta, \nu, \gamma) + \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\ln z_i(\beta, \nu))^2}{1 + z_i(\beta, \nu)} (\gamma \omega_i(\beta, \nu, \gamma)(1 + z_i(\beta, \nu)) \\
&- \delta_i(u_i(\beta, \nu, \gamma) - 1)) + \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{n} (\ln z_i(\beta, \nu)) \big(\gamma \omega_i(\beta, \nu, \gamma) - \delta_i u_i(\beta, \nu, \gamma)\big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{m+1,m+2}(\beta,\nu,\gamma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta,\nu,\gamma)}{\partial\nu\partial\gamma} \\
&= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i(\beta,\nu)\ln z_i(\beta,\nu)}{1+z_i(\beta,\nu)}\Big((1+z_i(\beta,\nu))^\gamma \\
&+ \gamma(1+z_i(\beta,\nu))^\gamma \ln\left(1+z_i(\beta,\nu)\right)-\delta_i\Big), \\
I_{m+2,m+2}(\beta,\nu,\gamma) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta,\nu,\gamma)}{\partial\gamma^2} \\
&= \frac{D}{\gamma^2}\sum_{i=1}^{n}(1+z_i(\beta,\nu))^\gamma\Big(\ln\left(1+z_i(\beta,\nu)\right)\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Die Varianzen der Schätzer $\hat{\beta}, \hat{\nu}$ und $\hat{\gamma}$ sind demnach

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}) &= I^{jj}(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma}), \\
Var(\hat{\nu}) &= I^{m+1,m+1}(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma}), \\
Var(\hat{\gamma}) &= I^{m+2,m+2}(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma}).
\end{aligned}
$$

Für $x = (x_0,\ldots,x_m) \in E_0, x_0 = 1$, lässt sich ebenfalls ein approximatives $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für die Zuverlässigkeitsfunktion $S_x(t)$ konstruieren. Es ist definiert durch die Formel

$$
\left(1+\frac{1-\hat{S}_x(t)}{\hat{S}_x(t)}\exp\{\pm\hat{\sigma}_{Q_x}(t)u_{\{1-\alpha/2\}}\}\right)^{-1},
$$

wobei $u_{\{1-\alpha/2\}}$ das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist. Die Varianz ist

$$
\hat{\sigma}^2_{Q_x}(t) = \frac{1}{(1-\hat{S}_x(t))^2}\sum_{l=0}^{m+2}\sum_{s=0}^{m+2} a_l(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma})I^{ls}(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma})a_s(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma})
$$

mit

$$
\begin{aligned}
a_l(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma}) &= -a_{m+1}(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma})\nu x_l/(\ln t-\hat{\beta}^T x), \quad l = 0,1,\ldots,m, \\
a_{m+1}(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma}) &= -\gamma(e^{-\hat{\beta}^T x}t)^{\hat{\nu}}\Big(1+(e^{-\hat{\beta}^T x}t)^{\hat{\nu}}\Big)^{\hat{\gamma}-1}(\ln t-\hat{\beta}^T x), \\
a_{m+2}(\hat{\beta},\hat{\nu},\hat{\gamma}) &= -\big(1-\ln S_x(t)\big)\ln\big(1+(e^{-\hat{\beta}^T x}t)^{\hat{\nu}}\big).
\end{aligned}
$$

16 FTR-Datenanalyse bei der Exponentialverteilung

Die Zuverlässigkeitsfunktion bei Gebrauchsbelastung mit der Exponentialverteilung hat die Gestalt

$$S_0(t) = e^{-t/\theta}.$$

Der Parameter θ kann wieder mit dem Koeffizienten β_0 zusammengefasst werden, und man erhält

$$S_0(t) = e^{-t}.$$

Im Rahmen eines AFT-Modells sind die Zuverlässigkeitsfunktion $S_i = S_{x^{(i)}(\cdot)}$ und die Ausfallrate $\alpha_i = \alpha_{x^{(i)}(\cdot)}$

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \exp\Big(- \int_0^t \exp\{-\beta^T x^{(i)}(u)\} du\Big), \\ \alpha_i(t) &= e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}. \end{aligned}$$

Wenn $x^{(i)}$ konstant ist, dann folgt

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \exp\big\{ - \exp\big\{ - \beta^T x^{(i)}(u)\big\}\big\}, \\ \alpha_i(t) &= e^{-\beta^T x^{(i)}}. \end{aligned}$$

Die Plausibilitätsfunktion ist

$$L(\beta) = \exp\Big\{ - \sum_{i=1}^n \Big(\delta_i \beta^T x^{(i)}(X_i) + \int_0^{X_i} \exp\{\beta^T x^{(i)}(u)\} du\Big)\Big\}$$

und für konstante $x^{(i)}$

$$L(\beta) = \exp\Big(- \sum_{i=1}^n (\delta_i \beta^T x^{(i)} + e^{-\beta^T x^{(i)}} X_i)\Big).$$

Die Score-Funktionen sind

$$\begin{aligned} U_l(\beta) &= \frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta_l} \\ &= -\sum_{i=1}^n \Big(\delta_i x_l^{(i)}(X_i) - \int_0^{X_i} x_l^{(i)}(u) \exp\{-\beta^T x^{(i)}(u)\} du\Big). \end{aligned}$$

Für konstante $x^{(i)}$ gilt

$$U_l(\beta) = \frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta_l} = -\sum_{i=1}^n x_l^{(i)}(\delta_i - e^{-\beta^T x^{(i)}} X_i).$$

Mit dem Plausibilitätsschätzer $\hat{\beta}$ lautet die geschätzte Zuverlässigkeitsfunktion für zeitabhängige und konstante erklärende Variablen

$$\begin{aligned}\hat{S}_{x(\cdot)} &= \exp\Big\{-\int_0^t \exp\{-\hat{\beta}^T x(u)\}du\Big\} \text{ und}\\ \hat{S}_x &= e^{-\hat{\beta}^T xt}.\end{aligned}$$

Die Verteilung von $\hat{\beta}$ für große n wird wieder durch die Normalverteilung angenähert:

$$\hat{\beta} \approx N(\beta, \Sigma^{-1}(\beta))$$

Die Kovarianzmatrix $\Sigma^{-1}(\beta)$ wird geschätzt durch

$$\mathbb{I}^{-1}(\hat{\beta}) = (I^{ls}(\hat{\beta}))_{(m+1)\times(m+1)},$$

mit

$$\mathbb{I}(\hat{\beta}) = I_{ls}(\hat{\beta})_{(m+1)\times(m+1)}, \quad l,s = 0,1,\ldots,m,$$

und

$$\begin{aligned}I_{ls}(\beta) &= -\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_l \partial\beta_s}\\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^{X_i} x_l^{(i)}(u) x_s^{(i)}(u) \exp\{-\beta^T x^{(i)}(u)\}du\end{aligned}$$

für zeitabhängige erklärende Variablen. Für konstante $x^{(i)}$ folgt

$$I_{ls}(\beta) = \sum_{i=1}^n x_l^{(i)} x_s^{(i)} \exp\{-\beta^T x^{(i)}\} X_i.$$

Für $x = (x_0,\ldots,x_m) \in E_0, x_0 = 1$, lässt sich ein approximatives $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für die Zuverlässigkeitsfunktion $S_x(t)$ berechnen. Es ist

$$\left(1 + \frac{1-\hat{S}_x(t)}{\hat{S}_x(t)} \exp\{\pm\hat{\sigma}_{Q_x}(t) u_{\{1-\alpha/2\}}\}\right)^{-1},$$

wobei $u_{\{1-\alpha/2\}}$ das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist. Zur Berechnung der Varianz $\hat{\sigma}^2_{Q_x}(t)$ muss der Vektor $J_{\hat{S}_x(t)}$ - wie in Gleichung (12.3) definiert - berechnet werden. Die Elemente des Vektors $J_{\hat{S}_x(t)}$ sind

$$\frac{\partial \hat{S}_x(t)}{\partial \hat{\beta}_l} = x_l e^{-\hat{\beta}x} t \exp\big\{-\exp\{-\hat{\beta}^T x\}\big\}.$$

Sei

$$\hat{u}^2 = \sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} x_l x_s I^{ls}(\hat{\beta}).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2_{Q_x}(t) &= \frac{J^T_{\hat{S}_x(t)}\mathbb{I}^{-1}(\hat{\beta},\hat{\sigma})J_{\hat{S}_x(t)}}{\hat{S}^2_x(t)(1-\hat{S}_x(t))^2} \\
&= \frac{1}{\hat{S}^2_x(t)(1-\hat{S}_x(t))^2}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} x_l x_s \underbrace{\left(e^{-\hat{\beta}^T x}t\right)^2}_{=(\ln \hat{S}_x(t))^2} \hat{S}^2_x(t) I^{ls}(\hat{\beta}) \\
&= \frac{(\ln \hat{S}_x(t))^2}{(1-\hat{S}_x(t))^2}\hat{u}^2.
\end{aligned}$$

17 ALT bei Verteilungen mit Skalen- und Formparameter

Bei zeitraffenden Lebensdaueruntersuchungen (*accelerated life testing (ALT)*) werden technische Objekte einer höheren als gewöhnlichen Belastung ausgesetzt. Anschließend werden mit den dadurch gewonnenen Ausfalldaten die wichtigsten Zuverlässigkeitscharakteristiken unter Gebrauchsbelastung geschätzt.

Das bereits bekannte AFT-Modell mit Belastungen $x(\cdot) \in E$ lautet

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\Big(\int_0^t r\big(x(\tau)\big)d\tau\Big).$$

Wenn $x(\tau) \equiv x$, dann gilt

$$S_x(t) = S_0(r(x)t).$$

Im folgenden soll ein spezieller Versuchsplan in ALT vorgestellt werden. In [1] werden weitere Experimentanordnungen ausführlich diskutiert.

Die Ausgangslage für die Versuchsanordnung ist, dass die Klasse, aus der die Zuverlässigkeitsfunktion stammt, bekannt ist, und dass der Variationskoeffizient der Ausfallzeiten nicht zu groß ist. Die Funktion $r(x)$ ist dagegen unbekannt. Es soll angenommen werden, dass die Ausfallzeiten unter Gebrauchsbelastung x_0 große Werte annehmen, und dass die meisten Ausfälle nach einem für das Experiment festgesetzten Zeitpunkt t_2 passieren. Nun werden zwei Gruppen getestet:

- Die erste Gruppe mit n_1 Einheiten wird unter der Belastung x_1 getestet.
- Die zweite Gruppe mit n_2 Einheiten wird einer Stufenbelastung ausgesetzt. Bis zum Zeitpunkt t_1 wird die Belastung x_1 eingesetzt, und nach diesem Zeitpunkt wird bis zum Zeitpunkt t_2 die Gebrauchsbelastung x_0 ausgeübt:

$$x_2(\tau) = \begin{cases} x_1, & 0 \le \tau \le t_1 \\ x_0, & t_1 < \tau \le t_2. \end{cases}$$

Diese Versuchsanordung verfolgt einen bestimmten Zweck. Die Einheiten verbrauchen bis zum Zeitpunkt t_1 unter der erhöhten Belastung x_1 einen Großteil ihrer Ressourcen auf. Das führt dazu, dass im Intervall $[t_1, t_2]$ selbst unter Gebrauchsbelastung die meisten Ausfälle eintreten.

Das AFT-Modell impliziert, dass

$$S_{x_1}(u) = S_{x_0}(ru)$$

mit $r = r(x_1)/r(x_0)$, und dass

$$S_{x_2}(u) = \begin{cases} S_{x_0}(ru), & 0 \leq u \leq t_1 \\ S_{x_0}(rt_1 + u - t_1), & t_1 < u \leq t_2, \end{cases}$$

oder kürzer

$$S_{x_2}(t) = S_{x_0}\big(r(u \wedge t_1) + (u - t_1) \vee 0\big)$$

mit $a \wedge b = \min(a, b)$ und $a \vee b = \max(a, b)$.

Es sei nun angenommen, dass die Lebensdauerverteilung unter Gebrauchsbelastung der Klasse der Verteilungen mit Skalen- und Formparameter angehört:

$$S_{x_0}(t) = S_0((t/\theta)^\nu).$$

Das entsprechende AFT-Modell lautet

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\bigg(\Big(\int_0^t r(x(\tau))d\tau/\theta\Big)^\nu\bigg),$$

wobei $r(x_0) = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} S_{x_1}(t) &= S_0\bigg(\Big(\frac{rt}{\theta}\Big)^\nu\bigg) \text{ und} \\ S_{x_2(\cdot)}(t) &= S_0\big(((r(t_1 \wedge t) + (t - t_1) \vee 0)/\theta)^\nu\big) \end{aligned}$$

mit $r = r(x_1)$.
Setzt man

$$\rho = \ln r,\ \phi = \ln\theta,\ S(t) = S_0(e^t),\ f(t) = -S'(t) \text{ und } \alpha(t) = f(t)/S(t),$$

so kann man die Zuverlässigkeitsfunktionen schreiben als

$$\begin{aligned} S_{x_1}(t) &= S\big(\nu(\ln t + \rho - \phi)\big) \text{ und} \\ S_{x_2(\cdot)}(t) &= \begin{cases} S\big(\nu(\ln t + \rho - \phi)\big), & t \leq t_1 \\ S\big(\nu(\ln(e^\rho t_1 + t - t_1) - \phi)\big), & t > t_1. \end{cases} \end{aligned}$$

T_{1j} bezeichne die zufälligen Ausfalldaten der ersten und T_{2j} die zufälligen Ausfalldaten der zweiten Versuchsgruppe. Die Anzahl der Ausfälle in der zweiten Gruppe n_2 bis zum Zeitpunkt t_1 soll mit r_2 bezeichnet werden. Die Plausibilitätsfunktion ist nun

$$
\begin{aligned}
L(\nu,\rho,\phi) &= \prod_{j=1}^{n_1} f(\nu(\ln T_{1j}+\rho-\phi))\frac{\nu}{T_{1j}}\prod_{j=1}^{r_2} f(\nu(\ln T_{2j}+\rho-\phi))\frac{\nu}{T_{2j}} \\
&\times \prod_{j=r_2+1}^{m_2} f(\nu(\ln(e^\rho t_1+T_{2j}-t_1)-\phi))\frac{\nu}{e^\rho t_1+T_{2j}-t_1} \\
&\times S^{n_2-m_2}(\nu(\ln(e^\rho t_1+t_2-t_1)-\phi)).
\end{aligned}
$$

Die Plausibilitätsschätzer lösen das Gleichungssystem

$$
U_i = (\nu,\rho,\phi) = 0, \quad i = 1,2,3,
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
U_1(\nu,\rho,\phi) &= \frac{\partial L(\nu,\rho,\phi)}{\partial\nu} = \sum_{j=1}^{n_1}(\ln f)'(c(T_{1j}))\frac{c(T_{1j})}{\nu}+\frac{n_1+m_2}{\nu} \\
&+ \sum_{j=1}^{r_2}(\ln f)'(c(T_{2j}))\frac{c(T_{2j})}{\nu}+\sum_{j=r_2+1}^{m_2}(\ln f)'(d(T_{2j}))\frac{d(T_{2j})}{\nu} \\
&- (n_2-m_2)\alpha(d(t_2))\frac{d(t_2)}{\nu}, \\
U_2(\nu,\rho,\phi) &= \frac{\partial L(\nu,\rho,\phi)}{\partial\rho} = \sum_{j=1}^{n_1}(\ln f)'(c(T_{1j}))\nu+\sum_{j=1}^{r_2}(\ln f)'(c(T_{2j}))\nu \\
&+ \sum_{j=r_2+1}^{m_2}(\ln f)'(d(T_{2j}))\frac{\nu e^\rho t_1}{e^\rho t_1+T_{2j}-t_1}-\sum_{j=r_2+1}^{m_2}\frac{e^\rho t_1}{e^\rho t_1+T_{2j}-t_1} \\
&- (n_2-m_2)\alpha(d(t_2))\frac{\nu e^\rho t_1}{e^\rho t_1+t_2-t_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_3(\nu,\rho,\phi) &= \frac{\partial L(\nu,\rho,\phi)}{\partial\phi} = -\nu\Bigg(\sum_{j=1}^{n_1}(\ln f)'(c(T_{2j}))+\sum_{j=1}^{r_2}(\ln f)'(c(T_{2j})) \\
&+ \sum_{j=1}^{m_2}(\ln f)'(d(T_{2j}))-(n_2-m_2)\alpha(d(t_2))\Bigg)
\end{aligned}
$$

mit $c(u) = \nu(\ln u+\rho-\phi)$ und $d(u) = \nu(\ln(e^\rho t_1+u-t_1)-\phi)$.

Mit den Plausibilitätsschätzern $\hat{\nu}, \hat{\rho}$ und $\hat{\phi}$ ist die geschätzte Zuverlässigkeitsfunktion gleich

$$
\hat{S}_{x_0}(t) = S(\hat{\nu}(\ln t-\hat{\phi})).
$$

Die Verteilung der Plausibilitätsschätzer $(\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\phi})$ wird für große n durch die Standardnormalverteilung angenähert:

$$(\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\phi})^T \approx N_3((\nu, \rho, \phi), \Sigma^{-1}(\nu, \rho, \phi)).$$

Die Kovarianzmatrix $\Sigma^{-1}(\nu, \rho, \phi)$ wird durch

$$\mathbb{I}^{-1}(\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\phi}) = I^{ls}(\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\phi})_{3\times 3}$$

geschätzt mit

$$\mathbb{I}(\nu, \rho, \phi) = I_{ls}(\nu, \rho, \phi)_{3\times 3}.$$

Die Elemente der symmetrischen Matrix $\mathbb{I}(\nu, \rho, \phi)$ stellen umfangreiche Formeln dar. Sie finden sich in [1].

Ein approximatives $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für $S_{x_0}(t)$ ist

$$\left(1 + \frac{1 - \hat{S}_{x_0}(t)}{\hat{S}_{x_0}(t)} \exp\{\mp \hat{\sigma}_{Q_{x_0}}(t) u_{\{1-\alpha/2\}}\}\right)^{-1},$$

wobei $u_{\{1-\alpha/2\}}$ das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist. Zur Berechnung der Varianz $\hat{\sigma}^2_{Q_{x_0}}(t)$ muss der Vektor $J_{\hat{S}_{x_0}(t)}$ - wie in Gleichung (12.3) definiert - berechnet werden. Die Elemente des Vektors $J_{\hat{S}_{x_0}(t)}$ sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{S}_{x_0}(t)}{\partial \hat{\nu}} &= S'(\underbrace{\hat{\nu}(\ln t - \hat{\phi})}_{=S^{-1}(\hat{S}_{x_0}(t))})(\ln t - \hat{\phi}), \\
\frac{\partial \hat{S}_{x_0}(t)}{\partial \hat{\rho}} &= 0, \\
\frac{\partial \hat{S}_{x_0}(t)}{\partial \hat{\phi}} &= -S'(S^{-1}(\hat{S}_{x_0}(t)))\hat{\nu}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{Q_{x_0}}(t) &= \frac{\left(J^T_{\hat{S}_{x_0}(t)} \mathbb{I}^{-1}(\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\phi}) J_{\hat{S}_{x_0}(t)}\right)^{1/2}}{\hat{S}_{x_0}(t)(1 - \hat{S}_{x_0}(t))} \\
&= -\frac{S'(S^{-1}(\hat{S}_{x_0}(t)))}{\hat{S}_{x_0}(t)(1 - \hat{S}_{x_0}(t))} \\
&\times \left((\ln t - \hat{\phi})^2 I^{11}(\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\phi}) - 2\hat{\nu} I^{13}(\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\phi}) + \hat{\nu}^2 I^{33}(\hat{\nu}, \hat{\rho}, \hat{\phi})\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

IV Das semiparametrische Cox-Modell

18 Parametrisierung des Cox-Modells

Die Parametrisierung erfolgt durch

$$r(x) = e^{\beta^T z},$$

wobei $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)^T$ ein Vektor von unbekannten Parametern und

$$z = (z_1, \ldots, z_m)^T = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))^T$$

ein Vektor mit speziellen Funktionen ϕ_i ist. Im folgenden wird x_j für $z_j = \phi_j(x)$ verwendet.

Das parametrische PH-Modell hat demnach die Form

$$\alpha_{x(\cdot)}(t) = e^{\beta^T x(t)} \alpha(t), \tag{18.1}$$

wobei die Basis-Ausfallrate $\alpha(t)$ unbekannt ist.

Es sollen nun einige Modelle mit konstanten und intervallskalierten erklärenden Variablen diskutiert werden. Ausgehend vom Modell (18.1) ist das Verhältnis der Ausfallraten bei $x_1, x_2 \in E_0$ gleich

$$\rho(x_1, x_2) = \alpha_{x_2}(t)/\alpha_{x_1}(t) = r(x_2)/r(x_1).$$

Bei eindimensionalen x ist die Veränderung des Verhältnisses der Ausfallraten wiederum definiert durch die *infinitesimale Charakteristik*:

$$\delta(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\rho(x, x + \delta x) - \rho(x, x)}{\delta x} = [\ln r(x)]'.$$

Für alle $x \in E_0$ ist die Funktion $r(x)$ gegeben durch

$$r(x) = r(x_0) \exp\Big(\int_{x_0}^{x} \delta(\nu) d\nu \Big),$$

wobei $x_0 \in E_0$ eine konstante erklärende Variable ist.

Wenn $\delta(x)$ *proportional* zu einer Funktion $u(x)$ ist, d.h.

$$\delta(x) = \gamma u(x),$$

dann folgt

$$r(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 \phi_1(x)}$$

mit $\phi_1(x)$ als Stammfunktion von $u(x)$ und β_0, β_1 als unbekannte Parameter. Daraus folgt das Modell

$$\alpha_x(t) = e^{\beta_0 + \beta_1 \phi_1(x)} \alpha(t)$$

bzw., wenn der Parameter β_0 und die unbekannte Funktion $\alpha(t)$ zusammengefasst werden,

$$\alpha_x(t) = e^{\beta_1 \phi_1(x)} \alpha(t).$$

Beispiel 18.1 (log-lineares Modell) *Wenn $\delta(x) = \gamma$ und $\phi_1(x) = x$, dann resultiert*

$$r(x) = e^{\beta_1 x}.$$

Beispiel 18.2 *Wenn $\delta(x) = \gamma/x$ und $\phi_1(x) = \ln x$, dann kommt man zu*

$$r(x) = e^{\beta_1 \ln x} = x^{\beta_1}.$$

Beispiel 18.3 *Wenn $\delta(x) = \gamma/x^2$ und $\phi_1(x) = 1/x$, dann folgt*

$$r(x) = e^{\beta_1/x}.$$

Beispiel 18.4 *Wenn $\delta(x) = \gamma/x(1-x)$ und $\phi_1(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, dann resultiert*

$$r(x) = e^{\beta_1 \ln \frac{x}{1-x}} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta_1}, \quad 0 < x < 1.$$

Die infinitesimale Charakteristik $\delta(x)$ kann auch als Linearkombination von speziellen Funktionen der erklärenden Variablen dargestellt werden:

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i u_i(x).$$

In diesem Fall folgt

$$r(x) = \exp\Big\{\sum_{i=1}^{k} \beta_i z_i(x)\Big\},$$

wobei $z_i(x)$ spezielle Funktionen von x und $\beta_1, \ldots, \beta_k$ unbekannte Parameter sind.

Beispiel 18.5 *Für $\delta(x) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i/x^i$ bekommt man*

$$\begin{aligned}
r(x) &= \exp\Big\{\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i/\nu^i d\nu\Big\} \\
&= \exp\Big\{\int_{x_0}^{x} \frac{\gamma_1}{\nu} d\nu + \sum_{i=2}^{k} \int_{x_0}^{x} \gamma_i/\nu^i d\nu\Big\} \\
&= \exp\Big\{\gamma_1(\ln x - \ln x_0) + \sum_{i=2}^{k} \gamma_i \frac{1}{1-i}(x^{1-i} - x_0^{1-i})\Big\} \\
&= \underbrace{\exp\Big\{-\gamma_1 \ln x_0 - \sum_{i=2}^{k} \gamma_i \frac{1}{1-i} x_0^{1-i}\Big\}}_{\textit{wird zusammengefasst mit } \alpha(t)} \exp\Big\{\gamma_1 \ln x - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{i+1}/ix^i\Big\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$r(x) = \exp\Big\{\beta_1 \ln x + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i/x^i\Big\}.$$

19 Semiparametrische FTR-Datenanalyse

Die Darstellung der Schätzung des PH-Modells wird auf die semiparametrische Schätzung beschränkt. Denn die Klassenzugehörigkeit einer Zuverlässigkeitsfunktion bei parametrischer Schätzung ändert sich, wenn von einer erklärenden Variablen $x \in E_1$ zu einer erklärenden Variablen $y \in E_1$ gewechselt wird. Das betrifft nicht die Familie der Exponential- und Weibullverteilungen. Bei konstanter erklärender Variablen entspricht das PH-Modell dem AFT-Modell.

Mit der Zuverlässigkeitsfunktion ausgedrückt erhält man das PH-Modell als

$$S_{x(\cdot)}(t) = \exp\Big\{ -\int_0^t e^{\beta^T x(u)} dA(u) \Big\}$$

mit

$$A(t) = \int_0^t \alpha(u) du.$$

Der Parameter $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)^T$ und der Vektor der erklärenden Variablen $x(\cdot) = \big(x_1(t), \ldots, x_m(t)\big)^T$ haben m Koordinaten. n Einheiten werden beobachtet. Die i-te Einheit wird unter der Belastung $x^{(i)}(\cdot) = \big(x_1^{(i)}(t), \ldots, x_m^{(i)}(t)\big)^T$ getestet. Es wird davon ausgegangen, dass die Daten rechtszensiert sind. T_i und C_i sind die Ausfall- und Zensurzeitpunkte der i-ten Einheit, und es gilt

$$X_i = T_i \wedge C_i \text{ und } \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C_i\}}(X_i).$$

Mit S_i und α_i sollen die Zuverlässigkeitsfunktion und die Ausfallrate unter $x^{(i)}(\cdot)$ bezeichnet werden.

Wenn die Basis-Ausfallrate $\alpha(\cdot)$ im PH-Modell spezifiziert ist, dann wird der Plausibilitätsschätzer des Parameters β über die Lösung des Gleichungssystems

$$U_j(\beta) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

errechnet. Nach Gleichung (10.5) lässt sich $U_j(\beta)$ schreiben als

$$U_j(\beta) = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \beta_j} \ln\big(\alpha_i(u,\beta)\big)\big(dN_i(u) - Y_i(u)\alpha_i(u,\beta)du\big).$$

Im Fall des PH-Modells bekommt man

$$\begin{aligned} \ln \alpha_i(t,\beta) &= \beta^T x^{(i)}(t) + \ln \alpha(t), \\ \frac{\partial}{\partial \beta_j} \ln \alpha_i(u,\beta) &= x_j^{(i)}(t). \end{aligned}$$

Damit können die Funktionen $U_j(\beta)$ geschrieben werden als

$$U_j(\beta) = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty x^{(i)}(u)\big(dN_i(u) - Y_i(u)e^{\beta^T x^{(i)}(u)} dA(u)\big). \tag{19.1}$$

Falls $\alpha(\cdot)$ unbekannt ist, hängen die Score-Funktionen nicht nur von β, sondern auch von der unbekannten Funktion $A(\cdot)$ ab. $A(\cdot)$ muss daher geschätzt werden.

Es gilt

$$\mathbb{E}(N_i(t)) = \mathbb{E}(\int_0^t Y_i(u)\alpha_i(u,\beta)du) = \mathbb{E}(\int_0^t Y_i(u)e^{\beta^T x^{(i)}}dA(u)). \tag{19.2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_i(t)) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{T_i \le t, T_i \le C_i\}}) \\
&= \mathbb{P}(T_i \le t, T_i \le C_i) = \mathbb{P}(T_i \le t)\mathbb{P}(T_i \le C_i) \\
&= \int_{(0,t]} \mathbb{P}(C_i \ge u) p_{T_i}(u) du
\end{aligned}$$

mit $p_{T_i}(\cdot)$ als Dichte von T_i.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^t Y_i(u)\alpha_i(u,\beta)du) &= \int_\Omega \int_{(0,t]} \mathbb{I}_{\{X_i \ge t\}} \alpha_i(u,\beta) du d\mathbb{P} \\
&= \int_{(0,t]} \mathbb{P}(C_i \ge u, T_i \ge u)\alpha_i(u,\beta)du \\
&= \int_{(0,t]} \mathbb{P}(C_i \ge u) \underbrace{\mathbb{P}(T_i \ge u)\alpha_i(u,\beta)}_{=-S'_{T_i}(u)=p_{T_i}} du. \quad \diamondsuit
\end{aligned}$$

Setzt man

$$S^{(0)}(\nu,\beta) = \sum_{i=1}^n Y_i(\nu)e^{\beta^T x^{(i)}(\nu)}$$

so ändert sich Gleichung (19.2) durch $N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t)$ zu

$$\mathbb{E}(N(t)) = \mathbb{E}\big(\int_0^t S^{(0)}(u,\beta)dA(u)\big).$$

Der Schätzer $\tilde{A}(t,\beta)$ für $A(t)$ ergibt sich nun durch

$$N(t) = \int_0^t S^{(0)}(u,\beta)d\tilde{A}(u,\beta)$$

oder

$$\tilde{A}(t,\beta) = \int_0^t \frac{dN(u)}{S^{(0)}(u,\beta)}.$$

Setzt man den Schätzer für A in Gleichung (19.1) ein, so resultiert die modifizierte Score-Funktion

$$\tilde{U}_j(\beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{(i)}(u)\big(dN_i(u) - Y_i e^{\beta^T x^{(i)}(u)} \frac{dN(u)}{S^{(0)}(u,\beta)}\big)$$

oder kürzer

$$\tilde{U}_j(\beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \big(x^{(i)}(u) - E(u,\beta)\big) dN_i(u)$$

mit

$$\begin{aligned} E(u,\beta) &= \frac{S^{(1)}(\nu,\beta)}{S^{(0)}(\nu,\beta)}, \\ S^{(1)}(\nu,\beta) &= \sum_{i=1}^{n} x^{(i)}(\nu) Y_i e^{\beta^T x^{(i)}(\nu)}. \end{aligned}$$

Die Score-Funktion ist eine Summe von stochastischen Integralen. Die Berechnung der Funktion erfolgt durch

$$\tilde{U}_j(\beta) = \sum_{i:\delta_i=1} \left(x^{(i)}(X_i) - \frac{\sum_{j:X_j \geq X_i} x_j(X_i) e^{\beta^T x_j(X_i)}}{\sum_{l:X_l \geq X_i} e^{\beta^T x_l(X_i)}} \right).$$

Für konstante $x^{(i)}$ resultiert

$$\tilde{U}_j(\beta) = \sum_{i:\delta_i=1} \left(x^{(i)} - \frac{\sum_{j:X_j \geq X_i} x_j(X_i) e^{\beta^T x_j}}{\sum_{l:X_l \geq X_i} e^{\beta^T x_l}} \right).$$

Abkürzungsverzeichnis

AFT-Modell	zeitraffendes Ausfallzeitmodell (accelerated failure time model)
ALT	zeitraffende Lebensdaueruntersuchung (accelerated life testing)
CHSS-Modell	form- und skalenveränderndes Modell (changing shape and scale model)
FTR	failure time regression
GAH-Modell	verallgemeinertes additives Ausfallmodell (generalized additive hazards model)
GAMH-Modell	verallgemeinertes additiv-multiplikatives Ausfallmodell (generalized additive-multiplicative hazards model)
GM-Modell	verallgemeinertes multiplikatives Modell (generalized multiplicative model)
GPH1-Modell	erstes verallgemeinertes PH-Modell (first generalized proportional hazards model)
GPH2-Modell	zweites verallgemeinertes PH-Modell (second generalized proportional hazards model)
GS-Modell	verallgemeinertes Sedyakin-Modell (generalized Sedyakin's model)
MGPH1-Modell	erstes modifiziertes und verallgemeinertes PH-Modell (first modified generalized proportional hazards model)
PH-Modell	Cox-Modell (proportional hazards model)

Literatur

[1] V. Bagdonavičius, M. Nikulin: *Accelerated Life Models - Modeling and Statistical Analysis*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2002

[2] O. Borgan: Maximum likelihood estimation in parametric counting process models, with applications to censored failure time data, *Scandinavian Journal of Statistics* 11 (1984)

[3] M. Fisz: *Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 1963

[4] N. Mann, R. Schafer, N. Singpurwalla: *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley & Sons, New York, 1974

[5] A.W. Marshall, I. Olkin: *Life Distributions*, Springer-Verlag, New York, 2007

[6] R. Viertl: *Statistical Methods in Accelerated Life Testing*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1988