TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna | Austria

DIPLOMARBEIT

Reinsurance with Regime Switching

ausgeführt am 20. Oktober 2022

Institut für
Financial and Actuarial Mathematics
TU Wien

unter der Anleitung von

Privatdoz. Dr. Julia Eisenberg

durch

Yvonne Kißler
[redacted]

Wien, am 20. Oktober 2022

Kurzfassung

In dieser Arbeit suchen wir eine optimale Rückversicherungsstrategie, die die zu erwartenden Kapitalzuführungen minimiert.Da sich die wirtschaftliche Lage ständig verändert und eine große Unsicherheitsquelle darstellt, betrachten wir unser Modell unter Regime Switching. Dazu führen wir eine Markov Kette ein, die zwischen zwei Zuständen hin und her springt und lassen den Rückversicherungspreis von dem aktuellen Regime abhängen. Im Gegensatz zu [8, Eisenberg, Fabrykoski und Schmeck (2021)] wollen wir explizit, dass der den Selbstbehalt in einen Zustand konstant Eins ist. Die HJB Gleichung ist in unseren Fall ein System zweier gewöhnlichen Differentialgleichungen, was es schwierig macht eine optimale Lösung zu finden. Mittels Rekursion können wir eine monotone Funktionenfolge ermitteln, wobei die Grenzfunktion die HJB Gleichungen erfüllt. Mit einem Verifikationssatz zeigen wir, dass die gefundene Funktion die Wertefunktion ist, wobei wir die Ito Formel verwenden.

Abstract

In this work, we are looking for an optimal reinsurance strategy that minimizes the expected capital injections. Since the economic situation is constantly changing and represents a major source of uncertainty, we consider our model under regime switching. We introduce a Markov chain that jumps between two states and let the reinsurance price depend on the current regime. In contrast to [8, Eisenberg, Fabrykoski and Schmeck (2021)] we explicitly want the retention level to be constant one in one regime. The HJB equation in our case is a system of two ordinary differential equations, which makes it difficult to find an optimal solution. Using recursion we can find a monotonic sequence of functions where the limit function satisfies the HJB equation. Using a verification theorem, we show that the function found is the value function using the Ito formula.

Danksagung

Ich möchte mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, die mich während meines Studiums immer unterstützt haben. Besonders hervor heben möchte ich meinen Freund, der immer ein offenes Ohr für mich hat und meine Launen ertragen hat.

Außerdem möchte ich Privatdoz. Dr. Julia Eisenberg für die Möglichkeit danken, meine Masterarbeit unter ihrer Betreuung zu schreiben. Sie hat mir Tag und Nacht weitergeholfen und mich immer in die richtige Richtung gelotst.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 20. Oktober 2022

Yvonne Kißler

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ein beliebtes Modell der Risikotheorie ist das Cramer Lundberg Modell. Es beschreibt ein Versicherungsunterunternehmen, das ein Startkapital hat, kontinuierlich Prämien erhält und im Schadensfall zahlen muss. Die Schadensanzahl ist durch einen Possionprozess beschrieben und die Schadenhöhen sind unabhängig und identisch verteilt mit gleichen Erwartungswert und gleichen zweiten Moment. Das Ziel des Modells ist es, die Wahrscheinlichkeit zu untersuchen, dass der Überschuss des Versicherers unter Null fällt, diese Wahrscheinlichkeit wird auch Ruinwahrscheinlichkeit genannt.

Da die Ruinwahrscheinlichkeit weder den Zeitpunkt noch die Schwere des Ruins berücksichtigt, wurde in Pafumi (1998),[2], in der Diskussion von Gerber und Shiu (1998), [10], das verwandte Konzept der Kapitalzufuhr vorgeschlagen, das beide Merkmale beinhaltet. Das Risiko wird hier anhand der erwarteten diskontierten Kapitalzufuhr gemessen, die erforderlich ist, um den Überschuss nicht negativ zu halten. Dabei wird nur so viel Kapital zugeführt, wie nötig ist, um den Überschuss auf Null aber nicht darüber zu verschieben und gerade dann zuzuführen wenn der Überschuss negativ wird, aber nicht vorher, in Erwartung eines möglichen Ruins, siehe zB [9, Eisenberg und Schmidli (2009)]. Dort ist die optimale Rückversicherungsstrategie durch eine Konstante gegeben. Das bedeutet, dass das Versicherungsunternehmen zu Beginn des Versicherungsvertrags einen Selbstbehalt wählt und diesen bis Ende des Vertrages nicht verändert. Eisenberg und Schmidli haben dieses Ergebnis unter der Annahme erzielt, dass die Parameter, die die Kapitalprozesse beschreiben, konstant sind.

In der Realität sieht dies jedoch anders aus. Die Wirtschaftslage hat einen enormen Einfluss auf die Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen und liefert eine exogene Unsicherheitsquelle. Eisenberg, Fabrykowski und Schmeck haben in [1] deshalb Regime Switching durch eine Markov Kette hinzugefügt und eine optimale Rückversicherungsstrategie ungleich Eins gefunden. Sie haben außerdem gezeigt, dass ein konstanter Selbstbehalt, außer in dem Fall "keine Rückversicherung", nicht optimal sein kann.

Wir setzen an dieser Arbeit an und untersuchen den Fall, im der der optimale Selbstbehalt in einem Regime immer kleiner Eins und im anderen konstant Eins ist. Dazu stellen wir die HJB Gleichung auf, die in unseren Fall ein Gleichungssystem ist. Wir konstruieren den in [1, Eisenberg, Fabrykowski und Schmeck (2021)] vorgestellten Algorithmus so um, dass er für unsere gefundenen Gleichungen funktioniert. Weiters wählen wir eine Startfunktion und ersetzen die unbekannte Funktion in unserer ersten HJB-Gleichung dadurch. Unter Verwendung der Methode von [5, Højgaard, Bjarne, und Michael Taksar (1998)] zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Die dadurch erhaltene Funktion setzen wir die unbekannte Funktion in der zweiten Gleichung des HJB Gleichungssystems ein. Mit der gleichen Methode zeigen wir, dass auch diese Lösung existiert und eindeutig ist. Durch wiederholtes Durchführen dieser Abläufe erhalten wir monotone Funktionenfolgen und können auch zeigen, dass sie gleichmäßig auf kompakten Intervallen konvergieren, wobei die Grenzfunktionen das HJB System lösen. Mit Hilfe der Ito Formel zeigen wir zum Schluss, dass die konstruierte Lösung die Wertefunktion ist.

In der folgenden Arbeit stellen wir in Kapitel 2 das Modell vor und stellen die HJB Gleichung, was im Falle des Regime Switchings ein Gleichungssystem ist, auf. In Abschnitt 3 konstruieren wir, wie in [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck (2021)] mittels Algorithmus eine Funktion, die die HjB Gleichung löst und zeigen in Kapitel 4 mittels Verifikationssatz, dass es tatsächlich die Wertefunktion ist. Danach zeigen wir noch in Abschnitt 5 dass der Grenzwert Λ existiert und eindeutig ist. Zuletzt zeigen wir in Kapitel 6 noch ein kurzes Beispiel mit expliziten Zahlen und schließen in Kapitel 7 ab.

2 Motivation

In diesen Abschnitt geben wir eine Einführung in das Modell und zeigen was die Motivation hinter unseren Problem war.

Im klassischen Risikomodell ist der Überschussprozess eines Versicherungsunternehmens in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ gegeben als:

$$X_t := x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i,$$

wobei $\{N_t\}$ ein Poissonprozess mit Intensität λ ist und die Schadenhöhen Z_i unabhängig und identisch verteilt (iid) mit $\mathbb{E}[Z_1] = \mu$ und $\mathbb{E}[(Z_1)^2] = \mu_2$ sind. Die Schadenhöhen sind zudem unabhängig vom Poissonprozess. Außerdem beschreibt x das Anfangskapital und $c > 0$ ist die Prämienrate. Mehr Informatio zu den klassischen Risikomodell findet man zum Beispiel in Kapitel 5.1 in [4, Schmidli (2017)].

Der Versicherer kann eine proportionale Rückversicherung mit einem Selbstbehalt $0 \leq b \leq 1$ kaufen. Der Erstversicherer zahlt in diesen Fall für einen Schadensfall Z_i nur noch bZ_i und der Rückversicherer zahlt den Rest in Höhe von $(1-b)Z_i$. Nehmen wir das Erwartungswertprinzip für die Berechnung der Versicherungs- und Rückversicherungsprämien mit Sicherheitszuschlägen $\eta > 0$ bzw. $\theta > 0$ an, so wird der Überschussprozess des Versicherers nun durch

$$X_t^b := x + c(b)t - \sum_{i=1}^{N_t} bZ_i \tag{2.1}$$

beschrieben, wobei $\eta < \theta$, siehe [4, Kapitel 1.10 Schmidli (2017)]. Die neue Prämienrate $c(b) = (b(1+\theta) - (\theta - \eta))\lambda\mu$ hängt vom Selbstbehalt ab und die Altprämie wird um die an den Rückversicherer gezahlten Prämien reduziert.

Ein beliebtes Konzept bei Optimierungsproblemen in der Versicherung ist die Diffusionsapproximation, wobei der Überschussprozess durch eine Brownsche Bewegung gegeben ist. Eine Diffusionsapproximation von (2.1) ist gegeben durch:

$$X_t^B := x + \theta \int_0^t b_s ds - \lambda\mu(\theta - \eta)t + \sqrt{\lambda\mu_2} \int_0^t b_s dW_s \tag{2.2}$$

wobei die ersten zwei Momente von (2.1) und (2.2) übereinstimmen, siehe [3, Schmidli (2008)]. Außerdem verwenden wir nun eine dynamischen Rückversicherungsstrategie $B = \{b_t\}$, dh. der Selbstbehalt ändert sich kontinuierlich mit der Zeit. Zusätzlich zum Kauf von einer Rückversicherung muss das Versicherungsunternehmen Kapital zuführen um den Überschuss nicht negativ zu halten. Mit $Y^B = Y_t^B$ beschreiben wir den Prozess der kumulierten Kapitalzuführungen bis zum Zeitpunkt t im Rahmen einer Rückversicherungsstrategie

B. Der Überschussprozess bei einer Rückversicherungsstrategie B und Kapitalzuführungen Y^B kann also als Summe von X_t^B und Y_t^B;

$$X_t^{B,Y} = X_t^B + Y_t^B$$

geschrieben werden. Des weiteren führen wir eine zeitkontinuierliche, von W unabhängige Markovkette $J = \{J_t\}$ mit Zustandsraum $S = \{1, 2\}$ und irreduziblen Generator

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

wobei die Diagonaleinträge $q_{ii} < 0$ und $q_{ij} = -q_{ii}$ für $i \neq j$ sind. Unsere Markovkette springt von einen Zustand in den anderen nach der durch die Haltezeiten festgelegten Zeitspannen. Diese Haltezeiten E_1 und E_2 sind exponentialverteilt, genauer gilt $E_1 \sim Exp(-q_{11})$ bzw. $E_2 \sim Exp(-q_{22})$. Das bedeutet, dass die Wirtschaft in zwei verschiedenen Zuständen sein kann und zwischen ihnen hin und her springt, was auch "Regime Switching"genannt wird. Wir lassen nur den Sicherheitskoeffizienten des Rückversicherers vom aktuellen Zustand abhängen um die Abhängigkeit vom Rückversicherungspreis zu betonen. Alle anderen Parameter bleiben unabhängig vom Zustand. Für (2.2) können wir nun folgende Gleichung schreiben:

$$X_t^B = x + \int_0^t \theta_{J_s} b_s - \lambda\mu(\theta_{J_s} - \eta) ds + \int_0^t \sqrt{\lambda\mu_2} b_s dW_s, \tag{2.3}$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}$ die Menge der zulässigen Rückversicherungsstrategien, die wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{B} = \Big\{ B = \{b_t\}, b_t \in [0,1], b_t\, \mathcal{F}_t\text{-adaptiert} \Big\},$$

wobei $\{\mathcal{F}_t\}$ die Filtration ist, die durch das Paar (W, J) erzeugt wurde.

Nehmen wir an, dass wir ein Anfangskapital der Höhe x haben und uns in Zustand i befinden, so suchen wir den kleinsten Wert erwarteter diskontierter Kapitalzuführungen. Dh. wir minimieren

$$V^B(i,x) := \mathbb{E}_{i,x}\left[\int_0^\infty e^{-\delta t} dY_t^B \right] := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta t} dY_t^B \mid X_0 = x, J_0 = i \right],$$

mit $(i,x) \in \{1,2\} \times [0,\infty)$. Unser Ziel ist es eine zulässige Rückversicherungsstrategie B^* zu finden, so dass die Wertefunktion

$$V(i,x) = \inf_{B \in \mathcal{B}} V^B(i,x)$$

als Rückgabefunktion dieser Strategie B^*, also $V(i,x) = V^{B^*}(i,x)$ geschrieben werden kann. Gemäß der stochastischen Kontrolltheorie löst die Wertefunktion die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung, kurz HJB Gleichung. Im Falle des Regime Switchings sieht die HJB Gleichung, vgl. [3, Schmidli (2008)] oder [6, Jiang und Pistorius (2012)], so aus:

$$\inf_{b \in [0,1]} \frac{\lambda\mu_2 b^2}{2} V''(i,x) + \lambda\mu(\theta_i b - \theta_i + \eta) V'(i,x) - (\delta - q_{ii}) V(i,x) - q_{ii} V(j,x) = 0, \tag{2.4}$$

Da wir den Überschussprozess niemals negativ werden lassen, erfüllt die Wertefunktion für negatives Anfangskapital $x < 0$, $V(i,x) = -x + V(i,0)$. Wir führen also sofort so viel Kapital wie benötigt wird zu, um den Prozess auf Null zu verschieben. Das heißt also, dass $V'(i,x) = -1$ für $x < 0$ und somit muss die Randbedingung $V'(i,0) = -1$ erfüllen, damit die Wertefunktion $V(i,x)$ die stetige Differenzierbarkeit erfüllt.

Die zweite Randbedingung $\lim_{x\to\infty} V(i,x) = 0$ kommt von der Eigenschaft der Brownschen Bewegung mit positiven Drift, die fast sicher gegen Unendlich konvergiert, was bedeutet, dass die Menge der zu erwarteten diskontierten Kapitalzuführungen gegen Null konvergiert, vgl [7, Rolski et al. (1999)].

Schauen wir uns die HJB Gleichung (2.4) genauer an, sehen wir, wenn wir die Gleichung nach b ableiten, dass

$$b^*(i,x) = -\frac{\mu\theta_i V'(i,x)}{\mu_2 V''(i,x)} \wedge 1.$$

Wie schon erwähnt, haben Eisenberg, Fabrykowski und Schmeck, siehe [1], echte Rückversicherungsstrategien kleiner Eins gesucht. Sie haben also den Fall $b^* = 1$, heißt "keine Rückversicherung", ausgeschlossen und genau diesen Fall wollen wir in dieser Arbeit behandeln. Wir interessieren uns dafür, dass der Selbstbehalt in einem Zustand immer kleiner Eins bleibt und in dem anderen Zustand konstant Eins ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass in Zustand 1 unser $b^*(1,x) = -\frac{\mu\theta_1 V'(1,x)}{\mu_2 V''(1,x)} < 1$ und in Zustand 2 $b^*(2,x) = 1$ gilt. Unsere HJB Gleichung (2.4) ist technisch gesehen ein System aus zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die durch die Übergangsraten der Markov Kette gekoppelt sind. So erhalten wir das System:

$$\begin{aligned} &-\frac{\mu^2\theta_1^2 V'(1,x)^2}{2\mu_2 V''(1,x)} - \lambda\mu(\theta_1 - \eta)V'(1,x) - (\delta - q_{11})V(1,x) - q_{11}V(2,x) = 0, \\ &\frac{\lambda\mu_2}{2}V''(2,x) + \lambda\mu(\theta_2 - \theta_2 + \eta)V'(2,x) - (\delta - q_{22})V(2,x) - q_{22}V(1,x) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Es ist eine schwierige Aufgabe, dieses Gleichungssystem explizit zu lösen und zu zeigen, dass die Lösungen fallende und konvexe Funktionen des Anfangskapitals sind. Wie [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck] werden wir daher eine rekursive Methode, in Form des folgenden Algorithmus, verwenden, um die Wertefunktion als Grenzwert erhalten.

3 Der Algorithmus

In diesen Abschnitt stellen wir einen Algorithmus auf, der es uns erlaubt, die Wertefunktion als Grenzwert einer Folge von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen zu berechnen. Der Einfachheit halber definieren wir:

$$\Delta_1 := \frac{\lambda\mu^2\theta_1^2}{2\mu_2} + \delta - q_{11}, \qquad B_1 := \frac{\Delta_1}{\lambda\mu(\theta_1 - \eta)}, \qquad \tilde{B}_1 := \frac{\Delta_1 + q_{11}}{\lambda\mu(\theta_1 - \eta)}.$$
$$\mathfrak{B}_2 := \frac{\lambda\mu\eta + \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2(\delta - q_{22})}}{\lambda\mu_2}, \qquad \tilde{\mathfrak{B}}_2 := \frac{\lambda\mu\eta + \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2\delta}}{\lambda\mu_2} \tag{3.1}$$

Wir werden in Lemma 4.5 sehen, dass das Verhalten der optimalen Rückversicherungsstrategie sehr von den Beziehungen zwischen B_1, $\tilde{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_2$ abhängen werden. Wir interessieren uns für den Fall, wenn der Selbstbehalt in Zustand 1 kleiner Eins ist und in Zustand 2 gleich Eins ist, dh. $b^*(1,x) < 1$ und $b^*(2,x) = 1$.

Wir nehmen an, dass folgende Ungleichungen gelten:

$$B_1 > \mathfrak{B}_2 > \tilde{B}_1 > \tilde{\mathfrak{B}}_2 \text{ wobei } \tilde{B}_1 < \frac{\mu\theta_2}{\mu_2} \text{ und } \frac{\mu\theta_1}{\mu_2} < \tilde{\mathfrak{B}}_2 \tag{3.2}$$

bzw.

$$\frac{1}{B_1} < \frac{1}{\mathfrak{B}_2} < \frac{1}{\tilde{B}_1} < \frac{1}{\tilde{\mathfrak{B}}_2} \text{ wobei } \frac{1}{\tilde{B}_1} > \frac{\mu_2}{\mu\theta_2} \text{ und } \frac{\mu_2}{\mu\theta_1} > \frac{1}{\tilde{\mathfrak{B}}_2}$$

Wir gehen hier vor, wie [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck, 2021, Kapitel 4]. Das Verfahren besteht darin, eine Startfunktion $W_0(x)$ zu wählen, beispielsweise $i = 1$ festzulegen und die unbekannte Funktion $V(2,x)$ in die erste Gleichung von (2.5) durch die gewählte Startfunktion zu ersetzen. Unter Verwendung der Methode von [5, Højgaard und Taksar, 1998] zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. In Schritt 2, nun gilt $i = 2$, wird die unbekannte Funktion $V(1,x)$ in der zweiten Gleichung von (2.5) durch erhaltene Funktion ersetzt.

Wenn wir die Anzahl der Schritte gegen unendlich gehen lassen, erhalten wir eine Lösung für (2.4). Wir werden sehen, dass der Startwert der Rekursion eine entscheidende Rolle spielt, um eine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten: Konvexität und Monotonie. Daher erklären wir zunächst wie unsere Startfunktion aussieht.

3.1 Schritt 0

Wie man in Kapitel 3 von [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck, 2021, Kapitel 3] nachsehen kann, kann die optimale Strategie bei zwei Regimen nicht konstant sein, außer konstant 1.

Wir nehmen ebenfalls an, dass das Verhältnis der ersten Ableitung zur zweiten Ableitung gegen denselben Wert konvergiert egal in welchen Zustand wir starten, dh.

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{V'(1,x)}{V''(1,x)} = \lim_{x\to\infty} -\frac{V'(2,x)}{V''(2,x)} \in [1/\tilde{B}_1, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2].$$

Wenn wir von zwei Ein-Regime Fällen ausgehen und im ersten das optimale Rückversicherungslevel niedrig ist und zweiten hoch, bedeutet das, dass im Zwei-Regime Fall die optimale Rückversicherungsstrategie im ersten Zustand steigen wird und im zweiten fallen wird. Unsere Startfunktion definieren wir wie folgt

$$W_0(x) := \frac{1}{\Lambda} e^{-\Lambda x},$$

wobei Λ das folgende System erfüllt

$$\begin{aligned} \lambda\mu(\theta_2 - \eta)\big(B_2 - \Lambda\big) + q_{22}e^{-\alpha} &= 0, \\ \frac{-\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{11}) + q_{11}e^{\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wobei α eine positive feste Zahl ist, insbesondere gilt $\lim_{x\to\infty}(-\Lambda g_1(x) + x) = \alpha$. Wir können α und Λ leider nicht explizit ausrechnen aber wir werden in Die Wertefunktion zeigen, dass Λ und somit auch α eine eindeutige Lösung besitzt. Wir werden durch Aufstellen des nachstehenden Algorithmus sehen, dass Gleichung (3.3) für Λ entscheidend ist, um eine wohldefinierte Lösung von (2.5) zu erhalten. In nächsten zwei Abschnitten, werden wir zeigen, warum das Gleichungssystem (3.3) so aussehen muss.

3.2 Schritt 1

Wir gehen davon aus, dass die optimale Rückversicherungsstrategie $b^*(1,x) = -\frac{\mu\theta_1^2 V'(1,x)}{\mu_2 V''(1,x)} < 1$ ist und betrachten deswegen die erste Gleichung von (2.5), wobei wir $-q_{11}V(2,x)$ durch $-q_{11}W_0(x)$ ersetzten und $f(x)$ für $V(1,x)$ schreiben:

$$-\frac{\lambda\mu^2\theta_1 f'(x)^2}{\mu_2 f''(x)} - \lambda\mu(\theta_1 - \eta)f'(2,x) - (\delta - q_{11})f(x) - q_{11}W_0(x) = 0 \tag{3.4}$$

Obwohl wir die Funktion W_0 kennen, kann die Differentialgleichung (3.4) nicht gelöst werden und gezeigt werden, dass die Lösung strickt fallend und konvex ist. Deswegen wenden wir eine Technik an, die in [5, Højgaard and Taksar, 1998] eingeführt wurde. Wir nehmen an, dass eine streng monoton steigende, auf $\mathbb{R}_+$ bijektive Funktion g existiert, so dass die Ableitung der Lösung f von Gleichung (3.4) $f'(g(x)) = -e^{-x}$ erfüllt. Daraus folgt:

$$f''(g(x)) = \frac{e^{-x}}{g'(x)} \quad und \quad f'''(g(x)) = -\frac{e^{-x}}{g'(x)^2} - \frac{e^{-x}g''(x)}{g'(x)^3}.$$

Ableiten der Gleichung (3.4) führt uns zu:

$$-\frac{\lambda\mu^2\theta_1^2}{2\mu_2}\left(2f'(x) - \frac{f'(x)^2 f'''(x)}{(f''(x))^2}\right) - \lambda\mu(\theta_1 - \eta)f''(x) - (\delta - q_{11})f'(x) - q_{11}W_0'(x) = 0$$

Wir tauschen nun die Variable x zu $g(x)$ und erhalten so eine Differential-Gleichung in g:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\lambda\mu^2\theta_1^2}{2\mu_2}\left(2f'(g(x)) - \frac{f'(g(x))^2 f'''(g(x))}{(f''(g(x)))^2}\right) - \lambda\mu(\theta_1-\eta)f''(g(x))& \\
-(\delta - q_{11})f'(g(x)) - q_{11}W_0'(g(x)) &= 0 \\
\frac{\lambda\mu^2\theta_1^2}{2\mu_2}\left(2e^{-x} + \frac{-\frac{e^{-3x}}{(g'(x))^2}\left(1+\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)}{e^{-2x}/(g'(x))^2}\right) - \lambda\mu(\theta_1-\eta)\frac{e^{-x}}{g'(x)}& \\
+(\delta - q_{11})e^{-x} - q_{11}W_0'(g(x)) &= 0
\end{aligned}
$$

Multiplizieren der Gleichung mit $e^x g'(x)$ ergibt unter der Berücksichtigung der Definition von $W_0(x) = \frac{1}{\Lambda}e^{-\Lambda x} \Rightarrow W_0'(g(x)) = -e^{-\Lambda g(x)}$ und der Definition von $B_1 = \frac{\frac{\lambda\mu^2\theta_1^2}{2\mu_2}+\delta-q_{11}}{\lambda\mu(\theta_1-\eta)}$:

$$
\frac{\lambda\mu^2\theta_1^2}{2\mu_2}g''(x) = \lambda\mu(\theta_1-\eta)\big(g'(x)B_1 - 1\big) + q_{11}g'(x)e^{-\Lambda g(x)+x} \tag{3.5}
$$

Da die Funktion g bijektiv sein soll, beweisen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (3.5) auf $\mathbb{R}_+$ mit den Randbedingungen, die $g(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ und $g' > 0$ garantieren. Insbesondere liefert der Term $e^{-\Lambda g(x)+x}$ die eindeutige Bedingung $\lim_{x\to\infty} g'(x) = \frac{1}{\Lambda}$, die $g'(x) > 0$ und $\lim_{x\to\infty} g'(x) \neq \infty$ liefert.

- Als erstes zeigen wir wenn (3.5) eine Lösung, sagen wir g, auf $[0, n]$ hat, die die Randbedingungen $g(0) = 0$ und $g'(n) = \frac{1}{\Lambda}$, für ein $n \in \mathbb{N}$, erfüllt, dann gilt $g'(0) \in \big(1/\tilde{B}_1, 1/\Lambda\big)$.
- Dann zeigen wir, dass (3.5) eine eindeutige Lösung ζ_n mit Randbedingungen $\zeta_n(0) = 0$ und $\zeta_n'(n) = 1/\Lambda$ besitzt.
- Wir beweisen die Existenz einer Lösung g_1 von (3.5) mit $g_1(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g_1'(x) = 1/\Lambda$.
- Es gilt $g_1'(0) \in \big(1/\tilde{B}_1, 1/\Lambda\big)$ und $g_1'(x) > 0$.
- Die inverse Funktion h_1 von g_1 erfüllt $h_1' \in \big(\Lambda, \tilde{B}_1\big)$ und $h_1''(x) < 0$.
- $h_1(x) \in \big(\Lambda x, \tilde{B}_1 x\big) \forall x > 0$ und $\lim_{x\to\infty}(h_1(x) - \Lambda x) = \alpha$ mit α aus (5.5).

Die Beweise findet man in [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck, Step 1 bzw. Appendix A.1].

Lassen wir x gegen ∞ gehen in Gleichung (3.5), ergibt dies die erste Gleichung von (3.3):

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda\mu(\theta_1-\eta)\left(\frac{B_1}{\Lambda} - 1\right) + \frac{q_{11}}{\Lambda}e^{\alpha} \\
\Rightarrow 0 &= \lambda\mu(\theta_1-\eta)\Big(B_1 - \Lambda\Big) + q_{11}e^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Korollar 1, siehe [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck, S. 11], besagt, dass eine steigende, konkave, inverse Funktion von g_1 auf $\mathbb{R}_+$ $g_1^{-1}(x) = h_1(x)$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

- h_1 erfüllt $h_1' > 0$, $h_1' \in (\Lambda, B_1)$, $\lim_{x\to\infty} h_1'(x) = \Lambda$ und $h_1''(x) < 0$
- $h_1'(x) - \Lambda = \frac{1}{g_1'(h_1(x))} - \Lambda > 0$, i.e., $h_1(x) - \Lambda x$ ist streng monoton steigend mit $h_1(x) > \Lambda x$ für $x > 0$.

Definiere

$$W_1(x) := \int_x^\infty e^{h_1(y)}\,dy$$
$$\Rightarrow W_1'(x) = -e^{-h_1(x)}$$

W_1 ist wegen Korollar 1 wohldefiniert und löst die Differentialgleichung (3.4) mit Randbedingungen $W_1'(0) = -1$ und $\lim_{x\to\infty} W_1(x) = 0$.

Im Folgenden konstruieren wir auf ähnliche Weise eine Funktion g_2.

3.3 Schritt 2

Wir nehmen an das $b^*(2,x) = 1$ gilt und ersetzen in der zweiten Gleichung von (2.5) $-q_{22}V(1,x)$ durch $-q_{22}W_1(x)$, schreiben $f(x)$ statt $V(2,x)$. So erhalten wir:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2} f''(x) + \lambda\mu\eta f'(x) - (\delta - q_{22})f(x) - q_{22}W_1(x) = 0. \tag{3.7}$$

Wir wenden dieselbe Technik, wie in Schritt 1, an. Wir nehmen wieder an, dass eine streng monoton steigende, auf $\mathbb{R}_+$ bijektive Funktion g existiert, so dass die Ableitung der Lösung f von Gleichung (3.7) $f'(g(x)) = -e^{-x}$ erfüllt. Daraus folgt:

$$f''(g(x)) = \frac{e^{-x}}{g'(x)} \quad \text{und} \quad f'''(g(x)) = -\frac{e^{-x}}{g'(x)^2} - \frac{e^{-x}g''(x)}{g'(x)^3}. \tag{$*$}$$

Ableiten der Gleichung (3.7) führt uns zu:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2} f'''(x) + \lambda\mu\eta f''(x) - (\delta - q_{22})f'(x) - q_{22}W_1'(x) = 0.$$

Wir tauschen nun die Variable x zu $g(x)$ und erhalten so eine Differential-Gleichung für g:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2} f'''(g(x)) + \lambda\mu\eta f''(g(x)) - (\delta - q_{22})f'(g(x)) - q_{22}W_1'(g(x)) = 0$$

Einsetzen von ($*$) ergibt:

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\lambda\mu_2}{2}\left(\frac{-e^{-x}}{g'(x)^2} - \frac{e^{-x}g''(x)}{g'(x)^3}\right) + \lambda\mu\eta\frac{e^{-x}}{g'(x)} + (\delta - q_{22})e^{-x} - q_{22}W_1'(g(x)) = 0.$$

Multiplizieren der Gleichung mit $e^x g'(x)^2$ ergibt unter Berücksichtigung der Definition von $W_1(x) = \int_x^\infty e^{-h_1(y)dy} \Rightarrow W_1'(g(x)) = -e^{-h_1(g(x))}$:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2}\left(-1-\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)+\lambda\mu\eta g'(x)+(\delta-q_{22})g'(x)^2+q_{22}g'(x)^2e^{-h_1(g(x))+x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(x)}{g'(x)}=-\frac{\lambda\mu_2}{2}+\lambda\mu\eta g'(x)+(\delta-q_{22})g'(x)^2+q_{22}g'(x)^2e^{-h_1(g(x))+x}. \tag{3.8}$$

Bemerke, dass $h_1(x) \in C^\infty$, was Lipschitzstetigkeit auf kompakten Mengen impliziert. Die Existenz einer Lösung $g_2(x)$ mit Randbedingungen $g_2(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g_2'(x) = 1/\Lambda$ kann ähnlich wie im Abschnitt davor gezeigt werden.

- Als erstes zeigen wir wenn (3.8) eine Lösung, sagen wir g, hat, die die Randbedingungen $g(0) = 0$ und $g'(n) = \frac{1}{\Lambda}$, für ein $n \in \mathbb{N}$, erfüllt, dann gilt $g'(0) \in \big(1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2\big)$.
- Dann zeigen wir, dass (3.8) eine eindeutige Lösung ζ_n mit Randbedingungen $\zeta_n(0) = 0$ und $\zeta_n'(n) = 1/\Lambda$ besitzt.
- Wir beweisen die Existenz einer Lösung g_2 von (3.8) mit $g_2(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g_2(x) = 1/\Lambda$.
- Es gilt $g_2'(0) \in \big(1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2\big)$ und $g_2''(x) < 0$.
- Die inverse Funktion h_2 von g_2 erfüllt $h_2' \in \big(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \Lambda\big)$ und $h_2''(x) > 0$.
- $h_2(x) \in \big(\tilde{\mathfrak{B}}_2 x, \Lambda x\big) \forall x > 0$ und $\lim_{x\to\infty}(-h_1(g_2(x)) + x) = \beta = -\alpha$ mit α aus (5.5).

Lemma 3.1. *Wenn eine Lösung g für Gleichung (3.8) mit Randbedingungen $g(0) = 0$ und $g'(n) = 1/\Lambda$ für ein $n \geq 1$ existiert, dann gilt:*

$$g'(0) \in \big(1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2\big)$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma mit einem Widerspruch. Sei g eine Lösung der Gleichung (3.8) mit Randbedingungen $g(0) = 0$ und $g'(n) = 1/\Lambda$. Setze in Gleichung (3.8) $x = 0$ ein, verwende $g(0) = 0$ und nehme an, dass $g'(0) = 1/\Lambda$ gilt.

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(0)}{g'(0)} &= -\frac{\lambda\mu_2}{2}+\lambda\mu\eta g'(0)+(\delta-q_{22})g'(0)^2+q_{22}g'(0)^2e^{-h_1(0)+0}\\
\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(0)}{g'(0)} &= -\frac{\lambda\mu_2}{2}+\lambda\mu\eta g'(0)+\delta g'(0)^2\\
\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(0)}{g'(0)} &< 0
\end{aligned}$$

Letzte Gleichung gilt, da $-\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta g'(0) + \delta g'(0)^2$ eine Parabel ist, die nach oben geöffnet ist und für $0 < g'(0) < \frac{-\lambda\mu\eta+\sqrt{(\lambda\mu\eta)^2+2\lambda\mu_2\delta}}{2\delta}$ negativ ist. Durch Umformen erhalten wir

$$\frac{-\lambda\mu\eta+\sqrt{(\lambda\mu\eta)^2+2\lambda\mu_2\delta}}{2\delta}=\frac{\lambda\mu_2}{\lambda\mu\eta+\sqrt{(\lambda\mu\eta)^2+2\lambda\mu_2\delta}}=:\frac{1}{\tilde{\mathfrak{B}}_2}$$

und $1/\Lambda < 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2$. Außerdem gilt $-h_1'(0)g'(0) + 1 < 0$. Daraus folgt, dass $g'(x) < 1/\Lambda$ auf $(0, \epsilon)$ gilt und

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(x)}{g'(x)} &= -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta g'(x) + (\delta - q_{22})g'(x)^2 + q_{22}g'(x)^2 e^{-h_1(g(x))+x} \\ &= -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta g'(x) + (\delta - q_{22})g'(x)^2 + q_{22}g'(x)^2 e^{-h_1(g(x))+\Lambda g(x)-\Lambda g(x)+x}\end{aligned}$$

Aus $h_1'(x) > \Lambda$ folgt $-h_1'(x) + \Lambda < 0$. (3.10) liefert $\lim_{x\to\infty}(-h_1(x) + \Lambda x) = -\alpha$ infolgedessen gilt $-h_1(x)+\Lambda x > -\alpha$. Darüber hinaus gilt solange $0 < g'(x) \leq 1/\Lambda$, ist $e^{-\Lambda g(x)+x}$ steigend und größer als 1. Daher gilt auf $(0, \epsilon)$:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(x)}{g'(x)} &< -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta g'(x) + (\delta - q_{22})g'(x)^2 + q_{22}g'(x)^2 e^{-\alpha} e^{-\Lambda g(x)+x} \\ &\leq -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta g'(x) + (\delta - q_{22})g'(x)^2 + q_{22}g'(x)^2 e^{-\alpha}\end{aligned}$$

Da wir bereits wissen, dass $\alpha > 0$ ist, siehe (5.5), folgt daraus $\delta - q_{22} + q_{22}e^{-\alpha} > 0$. Die rechte Seite der oberen Gleichung ist eine Parabel, die nach oben geöffnet ist, und strikt steigend in $g'(x)$ für $x \in (0, \infty)$ ist. Mit Randbedingung $g'(n) = 1/\Lambda$ und (3.3) erhalten wir:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(x)}{g'(x)} < -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta\frac{1}{\Lambda} + (\delta - q_{22})\frac{1}{\Lambda^2} + q_{22}e^{-\alpha}\frac{1}{\Lambda^2} = 0$$

Dies zeigt, dass $g''(x)$ für alle $x \in (0, n]$ negativ bleibt und der Randwert $g'(n) = 1/\Lambda$ niemals erreicht wird, wenn $g'(0) = 1/\Lambda$ gilt.

Nehmen wir nun an, dass $g'(0) = 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2$. Leiten wir Gleichung (3.8) ab und setzen wieder $x = 0$ ein, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g'''(0)g'(0) - g''(0)}{(g'(0))^2} &= \lambda\mu\eta g''(0) + (\delta - q_{22})2g'(0)g''(0) + q_{22}2g'(0)g''(0)e^{-h_1(g(0))+0} \\ &\quad + q_{22}(g'(0))^2 e^{-h_1(g(0))+0}(-h_1'(g(0))g'(0) + 1)\end{aligned}$$

Für $g'(0) = 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2$ gilt $g''(0) = 0$ und wir erhalten wegen $h_1'(0) > \Lambda$:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g'''(0)}{g'(0)} = q_{22}(g'(0))^2(-h_1'(0)g'(0) + 1) > 0.$$

Wir schließen daraus, dass $g'' > 0$ und $g'(x) > 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2$ auf $(0, \epsilon)$. Definiere $\hat{x} := \inf(x > \epsilon : g''(0) = 0) \in (\epsilon, \infty)$. Dann gilt $g''(\hat{x}) > 0$, was im Widerspruch zu $g''(\hat{x}) = 0$ steht. Daher gilt $g' > 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2$ und g' wird $1/\Lambda$ niemals erreichen.

Nach dem Satz von Hirsch, siehe [11, Walter 1998, S.112], gilt für $g'(0) \notin \big(1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2\big)$ dass $g'(n) \neq 1/\Lambda$, was die Aussage beweist. □

Lemma 3.2. *Für jedes $n \geq 1$ existiert zu Gleichung (3.8) im Intervall $[0, n]$ eine eindeutige Lösung $\xi_n(x)$, die $\xi_n(0) = 0$ und $\xi_n'(n) = 1/\Lambda$ erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten die Differentialgleichung (3.8) auf dem Intervall $[0, n]$, wobei $n \in \mathbb{N}$, mit den Randbedingungen $g(0) = 0$ und $g'(0) = \nu$ für ein $\nu > 0$.

- Zur Veranschaulichung schreiben wir noch einmal Gleichung (3.8) auf:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(x)}{g'(x)} = -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta g'(x) + (\delta - q_{22})g'(x)^2 + q_{22}g'(x)^2 e^{-h_1(g(x))+x}$$

Multiplizieren mit $g'(x)$ bringt uns zu:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\mu_2}{2}g''(x) &= -\frac{\lambda\mu_2}{2}g'(x) + \lambda\mu\eta g'(x)^2 + (\delta - q_{22})g'(x)^3 + q_{22}g'(x)^3 e^{-h_1(g(x))+x} \\ &=: f(x, g', g'') \\ &\text{mit } g(0) = 0 \,\text{und}\, g'(0) = \nu \end{aligned} \tag{3.9}$$

Schreiben wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2) = f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} &= -q_{22}y_2^3 e^{-h_1(y_1)+x} h_1'(y_1) \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} &= -\frac{\lambda\mu_2}{2} + 2\lambda\mu\eta y_2 + 3(\delta - q_{22})y_2^2 + 3q_{22}y_2^2 e^{-h_1(y_1)+x} \end{aligned}$$

stetig auf $D := \mathbb{R}_+ \times (1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2) \times \mathbb{R}$ sind, besagen das Peano Existence Theorem und das Uniqueness Theorem, siehe [11, Walter S.127], dass das Anfangswertproblem (3.9) eine eindeutige Lösung hat. Von Lemma (3.1) wissen wir, dass

$$\xi_n'(n, 1/\Lambda) < 1/\Lambda \,\text{und}\, \xi_n'(n, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2) > 1/\Lambda$$

Dem Zwischenwertsatz zufolge existiert ein $\nu_n \in (1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2)$ was zu einer Lösung $\xi_n(x, \nu_n)$ mit $\xi_n(0, \nu_n) = 0$ und $\xi_n'(n, \nu_n) = 1/\Lambda$.

- Schreiben wir unser $\mathbf{f}(x, y_1, y_2)$ noch einmal auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, y_1, y_2) &= \Big(f_1(x, y_1, y_2), f_2(x, y_1, y_2) \Big) \\ &= \left(y_2, -\frac{\lambda\mu_2}{2}y_2 + \lambda\mu\eta y_2^2 + (\delta - q_{22})y_2^3 + q_{22}y_2^3 e^{-h_1(y_1)+x} \right) \end{aligned}$$

Die Jacobi Matrix $\mathbf{J} = (c_{ij}) = (\partial f_i / \partial y_j)$ ist gegeben durch:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q_{22}y_2^3 e^{-h_1(y_1)+x} h_1'(y_1) & -\frac{\lambda\mu_2}{2} + 2\lambda\mu\eta y_2 + 3(\delta - q_{22})y_2^2 + 3q_{22}y_2^2 e^{-h_1(y_1)+x} \end{pmatrix}$$

Auf D ist die Jacobi Matrix essentiell positiv, dh. $c_{ij} \geq 0$ für alle $i \neq j$, und irreduzibel. Mit dem Satz von Hirsch, siehe [11, Walter 1998, S.112], können wir schließen, dass für ein $\nu < \tilde{\nu}$ für alle $x \in (0, n]$:

$$\xi_n(x, \nu) < \xi_n(x, \tilde{\nu}) \,\text{und}\, \xi_n'(x, \nu) < \xi_n'(x, \tilde{\nu})$$

gilt. Also ist $\xi_n(x, \nu_n)$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung (3.8) mit den Randbedingungen $\xi_n(0, \nu_n) = 0$ und $\xi_n'(n, \nu_n) = 1/\Lambda$. Aus Gründen der Einfachheit werden wir für diese eindeutige Lösung $\xi_n(x)$ schreiben. □

Lemma 3.3. *Sei ξ_n die eindeutige Lösung der Gleichung* (3.8) *mit den Randbedingungen $\xi_n(0) = 0$ und $\xi_n'(n) = 1/\Lambda$. Dann gilt:*

$$\xi_n''(x) < 0 \,\textit{für}\, x \in (0, \infty).$$

Beweis. Wir wissen von Lemma 3.1, dass $\xi_n'(0) \in \big(1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2\big)$ gilt. Daraus folgt, $\xi_n''(0) < 0$. Nehmen wir an, dass $\hat{x} := \inf(x > 0 : \xi_n''(x) = 0)$, dann gilt $\xi_n'(\hat{x}) \in (1/\Lambda, \tilde{\mathfrak{B}}_2)$, weil wenn $\xi_n'(x) = 1/\Lambda$ und $\xi_n''(x) < 0$ gilt, dann liefert Lemma 3.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \xi_n'(x) \neq 1/\Lambda$. Zusätzlich gilt:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{\xi_n'''(\hat{x})}{\xi_n'(\hat{x})} = q_{22}\xi_n'(\hat{x})^2 e^{-h_1(\xi_n(\hat{x}))+\hat{x}}(-h_1'(\xi_n(\hat{x}))\xi_n'(\hat{x}) + 1) > 0$$

weil $h_1' > \Lambda$ gilt. Daraus folgt, dass ξ_n'' positiv wird, was bedeutet, dass ξ_n' steigend wird und steigend bleibt für $\xi_n' > 1/\Lambda$. Das würde bedeuten, dass ξ_n' nach oben nicht begrenzt ist, was einen Widerspruch zu $\lim\limits_{x\to\infty} \xi_n'(x) = 1/\Lambda$ ergibt. □

Proposition 3.4. *Es existiert eine eindeutige Lösung g_2 zu Gleichung* (3.8) *mit den Randbedingungen $g_2(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g_2'(x) = 1/\Lambda$, $g_2' \in \big(1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2\big)$ und $g_2'' < 0$ auf $(0, \infty)$.*

Beweis.
- Als erstes zeigen wir, dass die Folgen (ξ_n) und (ξ_n') steigend sind.

  Da $\xi_n'(n) = 1/\Lambda$ für alle $n \geq 1$ gilt, folgt mit Lemma 3.3 $\xi_n'(x) < 1/\Lambda$ für $x > n$. Das bedeutet insbesondere:

  $$\xi_{n+1}'(n+1) = 1/\Lambda > \xi_n'(n+1)$$

  Wir wissen, dass $\xi_n(0) = 0 = \xi_{n+1}(0)$. Nehmen wir nun, dass $\xi_{n+1}'(0) \leq \xi_n'(0)$. Die Funktion:

  $$F(x, y_1, y_2) = \frac{2}{\lambda\mu_2} y_2\Big(-\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta y_2 + (\delta - q_{22})y_2^2 + q_{22}y_2^2 e^{-h_1(y_1)+x}\Big)$$

  ist steigend in y_1, weil h_1 steigend ist, e^{-h_1} damit fallend aber positiv ist und $q_{22}y_2^2 e^{-h_1(y_1)+x}$ somit größer wird. Wir definieren $Pf := f'' - F(x, f', f'')$. Dann kann Gleichung (3.8) als $P\xi_n = 0 = P\xi_{n+1}$ geschrieben werden.

  Vergleichssatz, siehe [11, Walter 1998, S.139], besagt, dass dann $\xi_n'(x) \geq \xi_{n+1}'(x)$ auf dem Intervall $[0, n+1]$ gilt, was zu einem Widerspruch führt.

Also gilt $\xi'_n(0) < \xi'_{n+1}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit demselben Vergleichssatz folgt:

$$\xi_n(x) \leq \xi_{n+1}(x)$$
$$\xi'_n(x) \leq \xi'_{n+1}(x)$$

auf kompakten Intervallen für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher können wir schlussfolgern, dass die Folgen (ξ_n) und (ξ'_n) steigend sind und $\xi_n(0) = 0$ und $\xi'_n(n) = 1/\Lambda$ erfüllen. Daher konvergieren (ξ_n) und (ξ'_n) punktweise gegen Funktionen, nennen wir sie, g_2 bzw. w. Wegen Differentialgleichung (3.8) konvergiert die Folge (ξ''_n) punktweise gegen eine Funktion u.

- Im nächsten Absatz zeigen wir, dass die Folgen $(\xi_n), (\xi'_n)$ und (ξ''_n) kompakt konvergieren.

  Aus Lemma 3.3 wissen wir, dass $\xi'_n > 0$ und $\xi''_n < 0$ für alle $n \geq 1$ und $x \geq 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
-\frac{\lambda\mu_2}{2}\xi''_n(x) &= +\frac{\lambda\mu_2}{2}\xi_n(x) - \lambda\mu\eta\xi'_n(x)^2 - (\delta - q_{22})\xi'_n(x)^3 - q_{22}\xi'_n(x)^3 e^{-h_1(\xi_n(x))+x} \\
&< +\frac{\lambda\mu_2}{2}\xi'_n(x) - \lambda\mu\eta\xi'_n(x)^2 - (\delta - q_{22})\xi'_n(x)^3 - q_{22}\xi'_n(x)^3 \\
&= +\frac{\lambda\mu_2}{2}\xi'_n(x) - \lambda\mu\eta\xi'_n(x)^2 - \delta\xi'_n(x)^3 \\
&< +\frac{\lambda\mu_2}{2}\xi'_n(x)
\end{aligned}$$

  Integrieren beider Seiten obiger Ungleichung und Verwendung von $\xi'_n \leq \xi'_{n+1}$ führt uns zu:

$$-\xi'_n(x) + \xi'_n(0) = -\int_0^x \xi''_n(y)dy < \frac{2}{\lambda\mu_2}\int_0^x \frac{\lambda\mu_2}{2}\xi'_n(y)dy = \xi_n(x)$$

  was bedeutet, dass die Folge (ξ''_n) von einer lokal integrierbaren Funktion dominiert wird. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue konvergiert $\int_0^x \xi''_n(y)dy$ punktweise gegen $\int_0^x u(y)dy$.

  Da das Integral $\int_0^x u(y)dy$ eine stetige Funktion von x ist, und der punktweise Grenzwert eindeutig ist, konvergiert (ξ'_n) punktweise gegen $w = \int_0^x u(y)dy$. Das heißt, da (ξ'_n) eine steigende Folge ist, folgt mittels Satz von Dini die gleichmäßige Konvergenz von (ξ'_n) gegen w auf kompakten Intervallen. Mit demselben Argument erhalten wir, dass (ξ_n) kompakt gegen g_2 konvergiert und $w = g'_2$ gilt. Als Folge der Differentialgleichung (3.8) konvergiert (ξ''_n) kompakt gegen g''_2.

- Im letzten Teil des Beweises zeigen wir, dass $g_2 \lim_{x\to\infty} g'_2(x) = 1/\Lambda$ erfüllt. Bemerke, dass g_2 die Differentialgleichung (3.8) löst. Die Funktion g_2 erfüllt aufgrund der Eigenschaften von (ξ_n) und (ξ'_n):

$$g_2(0) = 0, g'_2(x) \leq 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2 \text{ und } g''_2(x) \leq 0 \text{ für alle } x \geq 0.$$

Das bedeutet, dass $\lim_{x\to\infty} g_2'(x) \in [0, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2)$.

Wenn $\lim_{x\to\infty} g_2'(x) < 1/\Lambda$ dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so dass $g_2'(m) < 1/\Lambda$. Für ξ_n mit $n > m$ gilt jedoch $\xi_n'(m) > 1/\Lambda$, also $g_2'(m) \geq 1/\Lambda$. Daraus können wir folgern, dass $\lim_{x\to\infty} g_2'(x) \geq 1/\Lambda$.

Nehmen wir an $\lim_{x\to\infty} g_2'(x) = A$ für ein $A \in \mathbb{R}_+$ wobei $A > 1/\Lambda$ gilt. Des weiteren gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-h_1(g_2(x))+x}\right) = \big(-h_1'(g_2(x))g_2'(x) + 1\big)e^{-h_1(g_2(x))+x}.$$

Da $\lim_{x\to\infty} h_1'(g_2(x)) = \Lambda$ folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \big(-h_1'(g_2(x))g_2'(x) + 1\big) = -\Lambda A + 1 < 0.$$

Dh. $e^{-h_1(g_2(x))+x}$ ist asymptotisch strikt fallend und daraus folgt:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-h_1(g_2(x))+x} = 0.$$

Die Differentialgleichung (3.8) für g_2' ergibt somit:

$$\frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g_2''(x)}{g_2'(x)} = -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta A + (\delta - q_{22})A^2$$

Wenn $\lim_{x\to\infty} g_2'(x) = A$, muss $g_2''(x) \to 0$ gelten. Die rechte Seite der oberen Gleichung ist aber für

$$A_1 = \frac{-\lambda\mu\eta + \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2(\delta - q_{22})}}{2(\delta - q_{22})} = \frac{\lambda\mu_2}{\lambda\mu\eta + \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2(\delta - q_{22})}} = \frac{1}{\mathfrak{B}_2}$$

gleich Null. Es gilt aber:

$$\Lambda \overset{(5.2)}{<} \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \frac{1}{\mathfrak{B}_2} < \frac{1}{\Lambda}$$

Das heißt, dass in diesem Fall $\lim_{x\to\infty} g_2''(x) \neq 0$, was zu einem Widerspruch führt. Somit können wir schließen, dass $\lim_{x\to\infty} g_2'(x) = 1/\Lambda$. $\square$

Korollar 3.5. *Sei $h_2(x)$ die Inverse von $g_2(x)$. Dann gilt $h_2' \in (\tilde{\mathfrak{B}}_2, \Lambda)$, $h_2'' > 0$, $\lim_{x\to\infty} h_2'(x) = \Lambda$ und $h_2(x) \in (\tilde{\mathfrak{B}}_2 x, \Lambda x)$.*

Beweis. Die Funktion g_2 erfüllt $g_2(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ und $g_2'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, d.h. g_2 ist eine bijektive Funktion, was die Existenz einer Umkehrfunktion h_2 impliziert. Alle anderen Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften von g_2. $\square$

Bemerkung 3.6. Wir definieren

$$\beta := \lim_{x\to\infty} (-h_1(g_2(x)) + x)$$

Wegen Gleichung (3.3) gilt $\beta = -\alpha$. Außerdem folgt daraus:

$$\begin{aligned}\beta = \lim_{x\to\infty} (-h_1(g_2(x)) + x) &= \lim_{x\to\infty} (-h_1(g_2(h_2(x))) + h_2(x)) \\ &= \lim_{x\to\infty} (-h_1(x) + \Lambda x - \Lambda x + h_2(x)),\end{aligned}$$

unter der Verwendung von $\lim_{x\to\infty} (-\Lambda g_1(x) + x) = \alpha$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (-h_1(x) + \Lambda x) &= \lim_{x\to\infty} (-h_1(g_1(x)) + \Lambda g_1(x)) \\ &= \lim_{x\to\infty} (-x + \Lambda g_1(x)) \\ &= -\alpha\end{aligned}$$

Daraus können wir folgern, dass

$$\lim_{x\to\infty} (-\Lambda x + h_2(x)) = \beta + \alpha = 0, \tag{3.10}$$

da $h_2(x) \leq \Lambda x$, siehe Korollar 3.5.

Lassen wir nun in Gleichung (3.8) x gegen ∞ gehen, so erhalten wir die zweite Gleichung von (3.3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\lambda\mu_2}{2} \frac{g''(x)}{g'(x)} \right) &= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta g'(x) + (\delta - q_{22}) g'(x)^2 + q_{22} g'(x)^2 e^{-h_1(g(x))+x} \right) \\ 0 &= -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + (\delta - q_{22})\left(\frac{1}{\Lambda}\right)^2 + q_{22}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)^2 e^{-\alpha} \\ \Rightarrow 0 &= -\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22}) + q_{22} e^{-\alpha}.\end{aligned}$$

3.4 Schritt 2m+1

In diesen Kapitel suchen wir die Inverse Funktion h_{2m+1} der Lösung g_{2m+1} der Differentialgleichung $\mathcal{U}_m(g) = 0$ wobei

$$\mathcal{U}_m(g) := \frac{\lambda\mu^2\theta_1^2}{2\mu_2} g''(x) - \lambda\mu(\theta_1 - \eta)(g'(x)B_1 - 1) - q_{11} g'(x) e^{-h_{2m}(g(x))+x}. \tag{3.11}$$

Die Existenz einer Lösung g_{2m+1} mit den Randbedingungen $g_{2m+1}(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g'_{2m+1}(x) = 1/\Lambda$ kann ähnlich wie in Schritt 1 gezeigt werden. Wir wollen zeigen, dass die erhaltenen Funktionsfolgen (g_{2m+1}), (g'_{2m+1}) und (h_{2m+1}) monoton sind. Den Beweis führen wir per Induktion, indem wir als Induktionsschritt $h_2(x) < \Lambda x$ auf $(0, \infty)$ verwenden, siehe Korollar 3.5. Die wichtigsten Erkenntnisse sind in der folgenden Bemerkung zusammengefasst.

Bemerkung 3.7. Ähnlich wie in Schritt 1 erhalten wir für g_{2m+1} und ihre Inverse h_{2m+1}:

- $g_{2m+1}(0) = h_{2m+1}(0) = 0$;
- $g'_{2m+1} \in \left(1/\tilde{B}_1, 1/\Lambda\right)$, $h'_{2m+1} \in \left(\Lambda, \tilde{B}_1\right)$;
- $g''_{2m+1} > 0$, $h''_{2m+1} < 0$; und
- $\lim\limits_{x\to\infty} g'_{2m+1}(x) = 1/\Lambda$, $\lim\limits_{x\to\infty} h'_{2m+1}(x) = \Lambda$.

In Lemma 8, siehe [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck, Appendix A.3], wird gezeigt:

- $g'_{2m+1} > g'_{2m-1}$ auf $\mathbb{R}_+$
- $g_{2m+1} > g_{2m-1}$ und $h_{2m+1} < h_{2m-1}$ auf $(0, \infty)$.

Bemerkung 3.8. Ähnlich zu Schritt 2, Gleichung (3.10) schließen wir per Induktion von $\lim\limits_{x\to\infty}(-h_{2m}(g_{2m}(x)) + x) = \alpha$ auf:

$$\lim_{x\to\infty}(-\Lambda x + h_{2m+1}(x)) = m\beta + (m+1)\alpha = \alpha$$

mit α gegeben in (5.5).

3.5 Schritt 2m+2

Nun suchen wir die Funktion h_{2m+2} als Inverse der Lösung g_{2m+2} zur Differentialgleichung $\mathcal{G}_m(g) = 0$, wobei

$$\mathcal{G}_m(g) := \frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{g''(x)}{g'(x)} + \frac{\lambda\mu_2}{2} - \lambda\mu\eta g'(x) - (\delta - q_{22})g'(x)^2 - q_{22}g'(x)^2 e^{-h_{2m+1}(g(x))+x}. \tag{3.12}$$

Die wichtigsten Erkenntnisse sind in der folgenden Bemerkung zusammengefasst.

Bemerkung 3.9. Ähnlich wie in Schritt 2m+1 erhalten wir für g_{2m+2} und ihre Inverse h_{2m+2}:

- $g_{2m+2}(0) = h_{2m+2}(0) = 0$;
- $g'_{2m+2} \in \left(1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2\right)$, $h'_{2m+1} \in \left(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \Lambda\right)$;
- $g''_{2m+2} < 0$, $h''_{2m+2} > 0$; und
- $\lim\limits_{x\to\infty} g'_{2m+2}(x) = 1/\Lambda$, $\lim\limits_{x\to\infty} h'_{2m+2}(x) = \Lambda$.

In Lemma 3.10 zeigen wir:

- $g'_{2m+2} > g'_{2m}$ auf $\Re_+$
- $g_{2m+2} > g_{2m}$ und $h_{2m+2} < h_{2m}$ auf $(0, \infty)$.

Lemma 3.10. *Nehme an, dass die aus den Schritten 2k+1, $0 \leq k \leq m$, erhaltenen Funktionen h_{2k+1} folgende Eigenschaften erfüllen:*

1. $h_{2k+1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+, h_{2k+1}(0) = 0, h'_{2k+1} \in \left(\Lambda, \tilde{B}_1\right), h_{2k+1}(x) \geq \Lambda x, \lim_{x\to\infty} h'_{2k+1} = \Lambda$ $h''_{2k+1}(x) < 0$*; und*
2. $h_{2k+1}(x) < h_{2k-1}(x)$ *für* $x > 0$.

Dann gilt $g'_{2m+2} > g'_{2m}$ *auf* $\mathbb{R}_+$ *und* $g_{2m+2} > g_{2m}, h_{2m+2} < h_{2m}$ *auf* $(0, \infty)$.

Beweis. Bemerke, dass h_1 und h_3 die obigen Eigenschaften erfüllen.

- Um das Lemma für ein allgemeines m zu beweisen, definieren wir zunächst:

  $$\begin{aligned} Pv &= v'' - f(x, v, v') \\ &= g'' + \frac{2}{\lambda\mu_2}\left(\frac{\lambda\mu_2}{2}v' - \lambda\mu\eta(v')^2 - (\delta - q_{22})(v')^3 - q_{22}(v')^3 e^{-h_{2m+1}(v)+x}\right) \end{aligned}$$

  $f(x, v, v')$ ist steigend in v, weil h_{2m+1} steigend ist und somit $e^{-h_{2m+1}}$ fallend aber positiv ist und $q_{22}v'^3 e^{-h_{2m+1}(v)+x}$ größer wird.

  Außerdem verwenden wir wieder die in Lemma (3.2) eingeführten Hilfsfunktionen. Wir bezeichnen mit $\xi_{m-1,n}$ die Lösung zu $\mathcal{G}_{m-1}(\xi_{m-1,n}) = 0$ mit den Randbedingungen $\xi_{m-1,n}(0) = 0$ und $\xi'_{m-1,n}(n) = 1/\Lambda$ und mit $\xi_{m,n}$ die Lösung zu $\mathcal{G}_m(\xi_{m,n}) = 0$ mit Randbedingungen $\xi_{m,n}(0) = 0$ und $\xi'_{m,n}(n) = 1/\Lambda$, für $n \in \mathbb{N}$.

  Für $\xi_{m,n}$ und $\xi_{m-1,n}$ gilt:

  $$P\xi_{m,n} < P\xi_{m-1,n},$$

  da $h_{2m+1} < h_{2m-1}$ und $P\xi_{m,n} = 0$ gilt. Nehmen wir nun an, dass für ein beliebiges $z < n$ $\xi'_{m,n}(z) \leq \xi'_{m-1,n}(z)$ und $\xi_{m,n}(z) \leq \xi_{m-1,n}(z)$ gilt, so können wir den Vergleichssatz, siehe [11, Walter(1998), S.138], anwenden. Dieser besagt, dass $\xi'_{m,n}(x) < \xi_{m-1,n}(x)$ auf dem Intervall $[z, n]$ gilt, was aber ein Widerspruch zu $\xi'_{m,n}(n) = 1/\Lambda = \xi'_{m-1,n}(n)$ ist. Somit können wir schließen, dass wenn $\xi_{m,n} \leq \xi_{m-1,n}$ gilt, gleichzeitig $\xi'_{m,n} > \xi'_{m-1,n}$ gelten muss.

- Für z, die $\xi_{m,n}(z) \leq \xi_{m-1,n}(z)$ und somit auch $\xi'_{m,n}(z) > \xi'_{m-1,n}(z)$ erfüllen gilt

  $$(-h'_{2m+1}(\xi_{m,n})(z))' > (-h_{2m-1}(\xi_{m-1,n})(z))',$$

  weil $-h'_{2m+1} > -h'_{2m-1}$ und die Ableitungen h'_{2m+1}, h'_{2m-1} monoton fallend sind.

  Außerdem gilt für $\hat{z} := \inf\{z > 0 : \xi_{m,n}(z) < \xi_{m-1,n}(z)\}$:

  $$-h_{2m+1}(\xi_{m,n}(\hat{z})) \geq -h_{2m-1}(\xi_{m-1,n}(\hat{z}))$$

Nun können wir die Differenz $\xi''_{m,n} - \xi''_{m-1,n}$ mittels der Differentialgleichung $\mathcal{G}_m(\xi_{m,n}) - \mathcal{G}_{m-1}(\xi_{m-1,n}) = 0$ abschätzen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\mu_2}{2}(\xi''_{m,n}(\hat{z}) - \xi''_{m-1,n}(\hat{z})) &= \frac{\lambda\mu_2}{2}(\xi'_{m,n}(\hat{z}) - \xi'_{m-1,n}(\hat{z})) + \lambda\mu\eta(\xi'_{m,n}(\hat{z})^2 - \xi'_{m-1,n}(\hat{z})^2)\\ &\quad + (\delta - q_{22})(\xi'_{m,n}(\hat{z})^3 - \xi'_{m-1,n}(\hat{z})^3)\\ &\quad + q_{22}\xi'_{m,n}(\hat{z})^3 e^{-h_{2m+1}(\xi_{m,n}(\hat{z}))+\hat{z}}\\ &\quad - q_{22}\xi'_{m-1,n}(x)^3 e^{-h_{2m-1}(\xi_{m-1,n}(\hat{z}))+\hat{z}}\\ &\leq \frac{\lambda\mu_2}{2}(\xi'_{m,n}(\hat{z}) - \xi'_{m-1,n}(\hat{z})) + \lambda\mu\eta(\xi'_{m,n}(\hat{z})^2 - \xi'_{m-1,n}(\hat{z})^2)\\ &\quad + (\delta - q_{22})(\xi'_{m,n}(\hat{z})^3 - \xi'_{m-1,n}(\hat{z})^3)\\ &\quad + q_{22}\xi'_{m,n}(\hat{z})^3 e^{-h_{2m+1}(\xi_{m,n}(\hat{z}))+\hat{z}}\\ &\quad - q_{22}\xi'_{m-1,n}(x)^3 e^{-h_{2m+1}(\xi_{m,n}(\hat{z}))+\hat{z}}\\ &\leq \Big(\xi'_{m,n}(\hat{z}) - \xi'_{m-1,n}(\hat{z})\Big) A\end{aligned}$$

Wobei der Faktor A positiv ist und wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned}A := \Big(&\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta(\xi'_{m,n}(\hat{z}) + \xi'_{m-1,n}(\hat{z}))\\ &+ (\delta - q_{22})(\xi'_{m,n}(\hat{z})^2 + \xi'_{m,n}(\hat{z})\xi'_{m-1,n}(\hat{z}) + \xi'_{m-1,n}(\hat{z})^2)\\ &+ q_{22}e^{-h_2 m+1(\xi_{m,n}(\hat{z})+\hat{z})}(\xi'_{m,n}(\hat{z})^2 + \xi'_{m,n}(\hat{z})\xi'_{m-1,n}(\hat{z}) + \xi'_{m-1,n}(\hat{z})^2)\Big)\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Differenz der zweiten Ableitungen $\xi''_{m,n}(\hat{z}) - \xi''_{m-1,n}(\hat{z})$ negativ wird und die Differenz der ersten Ableitungen $\xi'_{m,n}(\hat{z}) - \xi'_{m-1,n}(\hat{z})$ negativ bleibt. Jedes Mal, wenn die Differenz $\xi'_{m,n} - \xi'_{m-1,n}$ versucht Null zu werden, wird die Ableitung dort negativ und verhindert es. Damit können die Ableitungen nie gleichzeitig den Wert $1/\Lambda$ annehmen, womit wir einen Widerspruch haben. Wir können also schließen, dass $\xi'_{m,n} > \xi'_{m-1,n}$ gilt und mittels gleichmäßiger Konvergenz erhalten wir $g'_{2m+2} > g'_{2m}$.
$\square$

4 Die Wertefunktion

In diesem Abschnitt konstruieren wir zunächst einen Kandidaten für die Wertefunktion, indem wir $m \to \infty$ für die Folgen (g_{2m+1}), (g_{2m+2}), (g'_{2m+1}), (g'_{2m+2}), (h_{2m+1}) und (h_{2m+2}). Dann beweisen wir mit einem Verifikationssatz, dass der Kandidat tatsächlich die Wertefunktion ist.

Lemma 4.1. *Die Folgen* (g_{2m+1}), (g_{2m+2}), (g'_{2m+1}), (g'_{2m+2}), (g''_{2m+1}), (g''_{2m+2}), (h_{2m+1}), (h_{2m+2}) *konvergieren kompakt gegen* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $(\mathfrak{g}_1)'$, $(\mathfrak{g}_2)'$, $(\mathfrak{g}_1)''$, $(\mathfrak{g}_2)''$, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_1^{-1}$ *bzw.* $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{g}_2^{-1}$.

Beweis. Lemma 8 aus [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck, S.12] und Lemma (3.10) zeigen die Monotonie der Folgen (g_{2m+1}), (g_{2m+2}), (g'_{2m+1}), (g'_{2m+2}), h_{2m+1} und h_{2m+2}. Daher konvergieren diese Folgen punktweise, was die punktweise Konvergenz von (g''_{2m+1}) und (g''_{2m+2}) impliziert. Die gleichmäßige Konvergenz von (g_{2m+1}), (g'_{2m+1}), (g''_{2m+1}) und (h_{2m+1}) gegen $\mathfrak{g}_1$, $(\mathfrak{g}_1)'$, $(\mathfrak{g}_1)''$ bzw. $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_1^{-1}$ auf kompakten Intervallen wird bereits in Lemma 9 von [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck, S.13] gezeigt.

Im Folgenden zeigen wir, dass (g_{2m+2}), (g'_{2m+2}), (g''_{2m+2}) und h_{2m+2} gleichmäßig auf kompakten Intervallen konvergieren. Nehmen wir an (g_{2m+2}), (g'_{2m+2}), (g''_{2m+2}) und h_{2m+2} konvergieren punktweise gegen $\mathfrak{g}_1$, w, u bzw. χ. Per Definition von g_{2m+2} gilt: $\mathcal{G}_m(g_{2m+2}) = 0$, wobei $\mathcal{G}_m$ in (3.11) definiert ist. Da $g''_{2m+2} < 0$ und $g'_{2m+2} > 0$, siehe Proposition (3.4), gilt:

$$-\frac{\lambda\mu_2}{2} g''_{2m+2}(x) < \frac{\lambda\mu_2}{2} g'_{2m+2}(x)$$

Integrieren beider Seiten obiger Ungleichung liefert:

$$-g'_{2m+2}(x) + g'_{2m+2}(x) = -\int_0^x g''_{2m+2}(y)dy < \frac{2}{\lambda\mu_2}\int_0^x \frac{\lambda\mu_2}{2} g'_{2m+2}(y)dy = g_{2m+2}(x).$$

Das heißt, dass die Folge (g''_{2m+2}) von einer lokal integrierbaren Funktion dominiert wird. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue konvergiert $\int_0^x g''_{2m+2}(y)dy$ punktweise gegen das Integral $\int_0^x u(y)dy$. Da $\int_0^x u(y)dy$ eine stetige Funktion von x ist und der punktweise Grenzwert eindeutig ist, konvergiert (g'_{2m+2}) punktweise gegen $w = \int_0^x u(y)dy$. Mit dem Satz von Dini folgt die gleichmäßige Konvergenz von (g'_{2m+2}) gegen w auf kompakten Intervallen, da (g'_{2m+2}) eine fallende Folge ist. Mit demselben Argument erhalten wir, dass (g_{2m+2}) kompakt gegen $\mathfrak{g}_2$ konvergiert und $w = \mathfrak{g}'_2$ gilt. Als Folge der Differentialgleichung (3.8) konvergiert (g''_{2m+2}) kompakt gegen $\mathfrak{g}''_2$. □

Lemma 4.2. *Die Grenzfunktionen* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_1$ *und* $\mathfrak{h}_2$ *erfüllen auf* $(0; \infty)$*:*

- $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i = 0$;

- $\mathfrak{g}_1' \in (1/\tilde{B}_1, 1/\Lambda)$, $\mathfrak{h}_1' \in (\Lambda, \tilde{B}_1)$;
- $\mathfrak{g}_2' \in (1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2)$, $\mathfrak{h}_2' \in (\tilde{\mathfrak{B}}_2, \Lambda)$;
- $(\mathfrak{g}_1)'' > 0$ *und* $(\mathfrak{g}_2)'' < 0$;
- $(\mathfrak{h}_1)'' > 0$ *und* $(\mathfrak{h}_2)'' < 0$;
- $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ *erfüllen auf* $(0, \infty)$:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\mu^2\theta_1^2}{2\mu_2}\mathfrak{g}_1'' &= \lambda\mu(\theta_1-\eta)\big(\mathfrak{g}_1'(x)B_1 - 1\big) + q_{11}\mathfrak{g}_1'(x)e^{-\mathfrak{h}_2(\mathfrak{g}_1(x))+x},\\ \frac{\lambda\mu_2}{2}\frac{\mathfrak{g}_2''(x)}{\mathfrak{g}_2'(x)} &= -\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu\eta\mathfrak{g}_2'(x) + (\delta - q_{22})\mathfrak{g}_2'(x)^2 + q_{22}\mathfrak{g}_2'(x)^2e^{-\mathfrak{h}_1(\mathfrak{g}_2(x))+x}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Beweis. Aus Lemma 4.1 und Differentialgleichung (4.1) erhält man sofort die obigen Ungleichungen mit $\geq$ und $\leq$ anstelle von $>$ und $<$. Die strikten Ungleichungen folgen mit den in Schritt 1 bzw. Schritt 2 vorgestellten Methoden. □

Lemma 4.3. *Für* $i \in 1,2$ *gilt* $\lim_{x\to\infty} \mathfrak{g}_i'(x) = 1/\Lambda$ *und* $\lim_{x\to\infty} \mathfrak{g}_i''(x) = 0$.

Beweis. Wir wissen aus Lemma 4.1, dass $\mathfrak{g}_1'$ steigend und $\mathfrak{g}_2'$ fallend ist, wobei $\mathfrak{g}_1' \leq 1/\Lambda$, $\mathfrak{g}_2' \geq 1/\Lambda$, $\mathfrak{h}_1' \geq 1/\Lambda$ und $\mathfrak{h}_2' \leq 1/\Lambda$ gilt. Daraus folgt

$$-\mathfrak{h}_2'(\mathfrak{g}_1(x))\mathfrak{g}_1'(x) + 1 \geq 0 \quad \text{und} \quad -\mathfrak{h}_1'(\mathfrak{g}_2(x))\mathfrak{g}_2'(x) + 1 \leq 0,$$

was bedeutet, dass $e^{-\mathfrak{h}_2(\mathfrak{g}_1(x))+x}$ steigend und $e^{-\mathfrak{h}_1(\mathfrak{g}_2(x))+x}$ fallend ist.

Wenn $\lim_{x\to\infty} \mathfrak{g}_1'(x) < 1/\Lambda$ gilt, dann folgt $\lim_{x\to\infty} e^{-\mathfrak{h}_2(\mathfrak{g}_1(x))+x} = \infty$, was einen Widerspruch zu $\mathfrak{g}_1'' \geq 0$ liefert. Wenn $\lim_{x\to\infty} \mathfrak{g}_2'(x) > 1/\Lambda$ gilt, folgt wegen $\lim_{x\to\infty} e^{-\mathfrak{h}_1(\mathfrak{g}_2(x))+x} = 0$ der Widerspruch zu $\lim_{x\to\infty} \mathfrak{g}_2''(x) < 0$. Somit folgt, dass für $i \in 1,2$ der Grenzwert von $\mathfrak{g}_i'$ gleich $1/\Lambda$ ist. Daraus folgt direkt $\lim_{x\to\infty} \mathfrak{g}_i''(x) = 0$, was das Lemma beweist. □

Korollar 4.4. *Für* $i \in 1,2$ *gilt* $\int_x^\infty e^{-\mathfrak{h}_i(y)}\, dy < \infty$.

Beweis. Aus $\mathfrak{h}_1(0) = 0 = \mathfrak{h}_2(0)$, $\mathfrak{h}_1' \in (\Lambda, \tilde{B}_1)$ und $\mathfrak{h}_2' \in (\tilde{\mathfrak{B}}_2, \Lambda)$ können wir schleißen, dass $\mathfrak{h}_1 \in (\Lambda x, \tilde{B}_1 x)$ und $\mathfrak{h}_2 \in (\tilde{\mathfrak{B}}_2, \Lambda x)$. Daraus folgt:

$$\int_x^\infty e^{-\mathfrak{h}_i(y)}\, dy < \int_x^\infty e^{-\tilde{\mathfrak{B}}_2 y}\, dy < \infty. \qquad \square$$

Definition. Definiere für $i \in 1,2$

$$\tilde{V}(i,x) := \int_x^\infty e^{-\mathfrak{h}_i(y)}\, dy \tag{4.2}$$

und

$$b^*(i,x) := \frac{\mu\theta_i}{\mu_2\mathfrak{h}_i'(x)} \wedge 1. \tag{4.3}$$

Lemma 4.5. *Die oben definierten Funktionen $\tilde{V}$ und b^* erfüllen:*

1. $\tilde{V}(i,x) = e^{-\mathfrak{h}_i(x)}$, $b^*(1,x) \in (0,1)$, $b^*(2,x) = 1$.
2. $\tilde{V}(i,x)$ *löst das System von Differentialgleichungen für* $i,j \in 1,2$ *wobei* $i \neq j$
$$\frac{\lambda\mu_2 b^*(i,x)^2}{2}\tilde{V}''(i,x) + \lambda\mu(\theta_i b^*(i,x) - \theta_i + \eta)\tilde{V}'(i,x) - (\delta - q_{ii})\tilde{V}(i,x) - q_{ii}\tilde{V}(j,x) = 0$$
mit Randbedingungen $\tilde{V}'(i,0) = -1$ *und* $\lim_{x\to\infty} \tilde{V}(i,x) = 0$.
3. $\tilde{V}(i,x)$ *ist die Rückgabefunktion entsprechend der Strategie* $b^*(i,x)$.

Beweis. 1. $\tilde{V}(i,x) = e^{-\mathfrak{h}_i(x)}$ folgt direkt aus der Definition (4.2). Von (3.2) wissen wir
$$B_1 > \mathfrak{B}_2 > \tilde{B}_1 > \tilde{\mathfrak{B}}_2 \text{ wobei } \tilde{B}_1 < \frac{\mu\theta_2}{\mu_2} \text{ und } \frac{\mu\theta_1}{\mu_2} < \tilde{\mathfrak{B}}_2$$
beziehungsweise
$$\frac{1}{B_1} < \frac{1}{\mathfrak{B}_2} < \frac{1}{\tilde{B}_1} < \frac{1}{\tilde{\mathfrak{B}}_2} \text{ wobei } \frac{1}{\tilde{B}_1} > \frac{\mu_2}{\mu\theta_2} \text{ und } \frac{\mu_2}{\mu\theta_1} > \frac{1}{\tilde{\mathfrak{B}}_2}$$
mit $\mathfrak{h}_1'(x) \in (\Lambda, \tilde{B}_1)$ und $\mathfrak{h}_2'(x) \in (\tilde{\mathfrak{B}}_2, \Lambda)$ erhalten wir:
$$b^*(1,x) = \frac{\mu\theta_1}{\mu_2 \mathfrak{h}_1'(x)} < \frac{\mu\theta_1}{\mu_2}\frac{1}{\Lambda} < \frac{\mu\theta_1}{\mu_2}\frac{1}{\tilde{\mathfrak{B}}_2} < \frac{\mu\theta_1}{\mu_2}\frac{\mu_2}{\mu\theta_1} = 1,$$
bzw.
$$b^*(2,x) = \frac{\mu\theta_2}{\mu_2 \mathfrak{h}_2'(x)} > \frac{\mu\theta_2}{\mu_2}\frac{1}{\Lambda} > \frac{\mu\theta_2}{\mu_2}\frac{1}{\tilde{\mathfrak{B}}_1} > \frac{\mu\theta_2}{\mu_2}\frac{\mu_2}{\mu\theta_2} = 1.$$

2. Die Funktionen $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ lösen das System von Differentialgleichungen (4.1) mit Randbedingungen $\mathfrak{g}_1(0) = \mathfrak{g}_2(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \mathfrak{g}_1'(x) = \lim_{x\to\infty} \mathfrak{g}_2'(x) = 1/\Lambda$ und $\mathfrak{g}_1(\mathfrak{h}_1(x)) = x$, $\mathfrak{g}_2(\mathfrak{h}_2(x)) = x$. Außerdem gilt:
$$\tilde{V}'(1,\mathfrak{g}_i(x)) = -e^{-x},$$
$$\tilde{V}''(1,\mathfrak{g}_i(x)) = \frac{e^{-x}}{\mathfrak{g}_i'(x)},$$
$$\tilde{V}'''(1,\mathfrak{g}_i(x)) = -\frac{e^{-x}}{\mathfrak{g}_i'(x)^2} - \frac{e^{-x}\mathfrak{g}_i''(x)}{\mathfrak{g}_i'(x)^3}.$$
Substituieren wir nun $\mathfrak{g}_i$ mit $\tilde{V}(i,x)$ in (4.1) und bemerken, dass $b^*(2,x) = 1$ gilt, so bekommen das gewünschte Ergebnis.

3. Ähnlich zu [8, Shreve et al. 1984] und [1, Eisenberg, Fabrykowski, Schmeck : Kapitel 3] erhalten wir:
$$\tilde{V}(i,x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta t} dY_t^{b^*}\right],$$
wobei $\Upsilon_t^{B^*}$ den der Strategie $B^* = b^*$, b^* definiert in (4.3), entsprechenden Kapitalzuführungsprozess beschreibt. □

Proposition 4.6. *Die Funktion $\tilde{V}(i,x)$ definiert in (4.2) ist streng monoton fallend, konvex, erfüllt $V'(i,0) = -1$, $\lim_{x\to\infty} V(i,x) = 0$ und löst die HJB-Gleichung (4).*

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Lemma 4.5. □

Satz 1 (Verifikationssatz). *Die Strategie $B^* = b^*$ mit*

$$b^*(i,x) = \frac{\mu\theta_i}{\mu_2 \mathfrak{h}_i'(x)} \leq 1$$

ist die optimale Strategie und die entsprechende Rückgabefunktion $\tilde{V}$, gegeben in (4.2), ist die Wertefunktion.

Beweis. Sei $B = \{b_t\}$ eine beliebige zulässige Rückversicherungsstrategie und X^B der Überschussprozess unter B nach den Kapitalzuführungen. Unter Verwendung einer verallgemeinerten Form der Itô-Formel, wie es zum Beispiel in (Eisenberg, Lemma1, S.5) gemacht wurde, erhalten wir:

$$\begin{aligned} e^{-\delta_t}\hat{V}(J_t, X_t^B) =& \hat{V}(J_0, X_t^B) + \int_0^t e^{-\delta_s}\hat{V}'(J_s, X_s^B)dW_s + M_t \\ &+ \int_0^t e^{-\delta_s}\Big(\frac{\lambda\mu_2 b_{s,J_s}^2}{2}\hat{V}''(J_s, X_s^B) + \lambda\mu(\theta_{J_s} b_{s,J_s} - \theta_{J_s} + \eta)\hat{V}'(J_s, X_s^B) \\ &- (\delta - q_{J_s,J_s})\hat{V}(J_s, X_s^B) - q_{J_s,J_s}\hat{V}(\mathbb{1}_{[J_s=1]} + 1, X_s^B)\Big)ds \\ &+ \int_0^t e^{-\delta_s}\hat{V}'(J_s, X_s^B)dY_s^B \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei M wieder ein Martingal mit Erwartungswert 0 ist, weil M beschränkt ist. Außerdem gilt:

$$|\tilde{V}(X_{s-}^B, j) - \tilde{V}(X_{s-}^B, J_{s-})| \leq \max_{i\in\{1,2\}} V^1(X_{s-}^B, i),$$

wobei V^1 die Rückgabefunktion entsprechend der Strategie "Keine Rückversicherung", $b \equiv 1$, ist. Wir können also daraus schließen, dass das stochastische Integral ein Martingal mit Erwartungswert 0 ist. Da $\tilde{V}$ konvex, mit $V'(i,0) = -1$, ist und die HJB-Gleichung erfüllt folgt, dass:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\mu_2 b_{s,J_s}^2}{2}\tilde{V}''(J_s, X_s^B) + \lambda\mu(\theta_{J_s} b_{s,J_s} - \theta_{J_s} + \eta)\tilde{V}'(J_s, X_s^B) - (\delta - q_{J_s,J_s})\tilde{V}(J_s, X_s^B) \\ -q_{J_s,J_s}\tilde{V}(\mathbb{1}_{[J_s=1]} + 1, X_s^B) \geq 0 \end{aligned}$$

und $\tilde{V}'(i,x) \geq -1$. Bilden wir in Gleichung (4.4) die Erwartungswerte so erhalten wir:

$$\mathbb{E}[e^{-\delta_t}\tilde{V}(J_t, X_t^B)] \geq \tilde{V}(i,x) - \mathbb{E}\Big[\int_0^t e^{-\delta_s} dY_s^B\Big].$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz können wir den Limes $t \to \infty$ und Erwartungswert vertauschen und bekommen:

$$\tilde{V}(i,x) \leq \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty e^{-\delta_s} dY_s^B\Big].$$

Die Rückversicherungsstrategie $B^* = b^*(J_s, X_s)$ liefert die Gleichheit in obiger Ungleichung. $\square$

5 Die Eindeutigkeit von Λ und α

Um zu zeigen, dass Λ und α eindeutig sind, betrachten wir folgendes Gleichungssystem aus Kapitel (3.1):

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 0 = \lambda\mu(\theta_1 - \eta)\big(B_1 - \Lambda\big) + q_{11}e^{\alpha} \\ \text{II.} \quad & 0 = -\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22}) + q_{22}e^{-\alpha} \end{aligned}$$

Löse II nach α auf (ACHTUNG: $e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$):

$$\alpha = \ln\left(\frac{-q_{22}}{-\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22})}\right)$$

Der natürliche Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert. Da q_{22} negativ ist, ist der Zähler positiv. Deshalb muss der Nenner auch positiv sein. Die Nullstellen der quadratischen Gleichung im Nenner lassen sich leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\lambda\mu\eta + \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2(\delta - q_{22})}}{\lambda\mu_2} > 0 \\ \Lambda_2 &= \frac{\lambda\mu\eta - \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2(\delta - q_{22})}}{\lambda\mu_2} < 0 \end{aligned}$$

Da die Parabel nach unten geöffnet ist, ist der Nenner nur zwischen den Nullstellen positiv. Das heißt α existiert nur für $\Lambda \in (\Lambda_2, \Lambda_1)$. Uns interessiert nur $\Lambda > 0$, also muss

$$0 < \Lambda < \frac{\lambda\mu\eta + \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2(\delta - q_{22})}}{\lambda\mu_2}$$

gelten. Setzen wir α in I ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 =& \lambda\mu(\theta_1 - \eta)(B_1 - \Lambda) - \frac{q_{11}q_{22}}{-\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22})} \\ 0 =& \bigg(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)(B_1 - \Lambda)\bigg)\bigg(-\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22})\bigg) - q_{11}q_{22} \qquad (5.1) \\ 0 =& + \lambda\mu(\theta_1 - \eta)\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^3 - \lambda\mu(\theta_1 - \eta)\lambda\mu\eta\Lambda^2 - \lambda\mu(\theta_1 - \eta)(\delta - q_{22})\Lambda \\ & - \lambda\mu(\theta_1 - \eta)B_1\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu(\theta_1 - \eta)B_1\lambda\mu\eta\Lambda + \lambda\mu(\theta_1 - \eta)B_1(\delta - q_{22}) - q_{11}q_{22} \end{aligned}$$

Ordnen der letzten Gleichung liefert uns folgende kubische Gleichung in Λ:

$$
\begin{aligned}
0 = &+ \left(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)\frac{\lambda\mu_2}{2}\right)\Lambda^3 \\
&- \left(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)B_1\frac{\lambda\mu_2}{2} + \lambda\mu(\theta_1 - \eta)\lambda\mu\eta\right)\Lambda^2 \\
&+ \left(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)B_1\lambda\mu\eta - \lambda\mu(\theta_1 - \eta)(\delta - q_{22})\right)\Lambda \\
&+ \left(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)B_1(\delta - q_{22}) - q_{11}q_{22}\right)
\end{aligned}
$$

Zur Vereinfachung normieren wir die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
0 = &+ \Lambda^3 \\
&+ \left(-B_1 - \frac{2\mu\eta}{\mu_2}\right)\Lambda^2 \\
&+ \left(B_1\frac{2\mu\eta}{\mu_2} - \frac{2(\delta - q_{22})}{\lambda\mu_2}\right)\Lambda \\
&+ \left(B_1\frac{2(\delta - q_{22})}{\lambda\mu_2} - \frac{2q_{11}q_{22}}{\lambda\mu(\theta_1 - \eta)\lambda\mu_2}\right)
\end{aligned}
$$

Eine kubische Gleichung hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau drei Lösungen, wobei immer zumindest eine Lösung reell ist. Wir interessieren uns für eine positive eindeutige Lösung von Λ.

Aus Lemma 3.1 wissen wir, dass $g'(0) \in (1/\Lambda, 1/\tilde{\mathfrak{B}}_2)$. Daraus können wir schließen, dass $\tilde{\mathfrak{B}}_2 < \Lambda$. Damit folgt, dass für uns nur

$$
\Lambda \in \left(\frac{\lambda\mu\eta + \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2\delta}}{\lambda\mu_2}, \frac{\lambda\mu\eta + \sqrt{(\lambda\mu\eta)^2 + 2\lambda\mu_2(\delta - q_{22})}}{\lambda\mu_2}\right) =: (\tilde{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{B}_2) \qquad (5.2)
$$

interessant ist. Wir setzen die Schranken von Λ in α ein, um zu zeigen, dass $\alpha > 0$ wenn Λ innerhalb der Schranken ist.

$$
\alpha = \ln\left(\frac{-q_{22}}{-\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22})}\right)
$$

α ist größer Null, wenn das Argument des natürlichen Logarithmus größer als Eins ist. Dazu betrachten wir:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\lambda\mu}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22}) &= -q_{22} \\
-\frac{\lambda\mu}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22}) + q_{22} &= 0 \\
-\frac{\lambda\mu}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + \delta &= 0 \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Die untere Schranke von Λ löst die quadratische Gleichung (5.3). Das heißt $\alpha = 0$ für $\Lambda = \tilde{\mathfrak{B}}_2$. Setzen wir die obere Schranke $\mathfrak{B}_2$ ein, ist der Nenner des Arguments Null. Die Parabel ist nach unten geöffnet und fällt ab $\Lambda = \frac{\lambda\mu\eta}{\lambda\mu_2}$. Daraus folgt, dass

$$0 < -\frac{\lambda\mu}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22}) < -q_{22} \qquad \text{für} \quad \Lambda \in \Big(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{B}_2\Big) \tag{5.4}$$

$$\left(\frac{-q_{22}}{-\frac{\lambda\mu}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22})}\right) > 1 \qquad \text{für} \quad \Lambda \in \Big(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{B}_2\Big)$$

$$\alpha = \ln\left(\frac{-q_{22}}{-\frac{\lambda\mu}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22})}\right) > 0 \qquad \text{für} \quad \Lambda \in \Big(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{B}_2\Big) \tag{5.5}$$

Setzen wir nun die Schranken von Λ in die rechte Seite der Gleichung (5.1) (aufgefasst als Gleichung von Λ) ein:

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}(\Lambda) :=& \Big(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)(B_1 - \Lambda)\Big)\Big(-\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22})\Big) - q_{11}q_{22} \\
\mathrm{III}(\tilde{\mathfrak{B}}_2) =& \Big(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)(B_1 - \tilde{\mathfrak{B}}_2)\Big)(-q_{22}) - q_{11}q_{22} > 0 \\
\text{für}& \Big(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)(B_1 - \tilde{\mathfrak{B}}_2)\Big) > -q_{11} \\
\Leftrightarrow& \Big(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)(\tilde{B}_1 - \tilde{\mathfrak{B}}_2)\Big) \overset{(3.2)}{>} 0 \\
\mathrm{III}(\mathfrak{B}_2) =& - q_{11}q_{22} < 0
\end{aligned}$$

Betrachten wir $\mathrm{III}(\Lambda)$ noch einmal genauer, so sehen wir, dass $\big(\lambda\mu(\theta_1 - \eta)(B_1 - \Lambda)\big)$ streng monoton fallend in Λ ist. $\big(-\frac{\lambda\mu_2}{2}\Lambda^2 + \lambda\mu\eta\Lambda + (\delta - q_{22})\big)$ ist positiv und ebenfalls streng monoton fallend in Λ, wenn $\Lambda \in \big(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{B}_2\big)$, siehe (5.5). Somit ist $\mathrm{III}(\Lambda)$ streng monoton fallend in Λ, für $\Lambda \in \big(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{B}_2\big)$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es ein $\Lambda_0 \in \big(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{B}_2\big)$ mit $\mathrm{III}(\Lambda_0) = 0$ geben und wegen der strengen Monotonie kann III in $\big(\tilde{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{B}_2\big)$ keine weitere Nullstelle haben. Das bedeutet, dass Λ und damit auch $\alpha > 0$ eindeutig ist. $\square$

6 einfaches Beispiel

Lösen wir die HJB-Gleichung (2.4) direkt mit $\eta = 0.38$, $\mu = 1.9$, $\lambda = 1$, $\mu_2 = 2$, $\delta = 0.4e{-}1$, $q_{11} = -0.2$, $q_{22} = -0.6$, $\theta_1 = 0.5$ und $\theta_2 = 1,25$ so erhalten wir für Λ drei potenzielle Lösungen:

$$\Lambda_1 = 0.9126880565$$
$$\Lambda_2 = 2.234360082$$
$$\Lambda_3 = -0.3828332269$$

Λ_3 fällt weg, da wir ein Λ größer Null suchen. Für Λ_1 und Λ_2 gilt:

$$\frac{\mu\theta_2}{\mu_2\Lambda_1} = 1.30110172 > 1$$
$$\frac{\mu\theta_2}{\mu_2\Lambda_2} = 0.53147208 < 1$$

wodurch also nur Λ_1 infrage kommt und somit unsere eindeutige Lösung $\Lambda = \Lambda_1 = 0.9126880565$ ist. Außerdem gilt:

$$\tilde{\mathfrak{B}}_2 = 0.7737 < \Lambda < \mathfrak{B}_2 = 1.2387$$

7 Schlussworte

Zum Abschluss möchte ich noch einmal die wichtigsten Methoden und Ergebnisse wiedergeben. Unser Ziel war es eine optimale Rückversicherungsstrategie unter Regime Switching zu finden. Dazu haben wir eine Markov Kette eingeführt, die den Wechsel zwischen zwei Zuständen simuliert. Um die Abhängigkeit des Rückversicherungspreises zu betonen, haben wir nur die Sicherheitskoeffizienten des Rückversicherers vom aktuellen Zustand abhängen lassen. Im Gegensatz zu [1, Eisenberg, Fabrykowski und Schmeck (2021)] wollten wir explizit, dass der Selbstbehalt in Zustand 2 konstant Eins ist. Dadurch hat sich natürlich die HJB-Gleichung verändert und so konnten wir für Λ keine explizite Lösung mehr angeben aber trotzdem beweisen, dass es eine eindeutige Lösung gibt.

Im wesentlichen haben wir den in [1, Eisenberg, Fabrykowski und Schmeck (2021)] vorgestellten Algorithmus verwendet und so verändert, dass er für unsere Gleichungen funktioniert. Wir haben eine Startfunktion gewählt und die unbekannte Funktion $V(2,x)$ in unserer ersten HJB-Gleichung dadurch ersetzt. Unter Verwendung der Methode von [5, Højgaard, Bjarne, und Michael Taksar (1998)] haben wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gezeigt. Im zweiten Schritt haben wir die unbekannte Funktion $V(1,x)$ in der zweiten Gleichung des HJB Gleichungssystems durch die in Schritt 1 erhaltene Funktion ersetzt. Wieder mit der gleichen Methode haben wir gezeigt, dass die Lösung existiert und eindeutig ist. Des Weiteren haben wir gezeigt, dass die gewonnenen Funktionenfolgen monoton sind und gleichmäßig auf kompakten Intervallen konvergieren, wobei die Grenzfunktionen das HJB System lösen.

Mittels Verifikationssatz, wobei wir die Ito Formel verwenden, zeigen wir, dass die konstruierte Lösung tatsächlich die Wertefunktion ist.

Literaturverzeichnis

[1] Eisenberg J., Fabrykowski L. und Schmeck M. *Optimal Surplus-Dependent Reinsurance under Regime-Switching in a Brownian Risk Model*. Risks 9: 73., 2021.

[2] Pafumi Gérard. *"On the time value of ruin", Hans U. Gerber and Elias S. W. Shiu, January 1998*. North American Actuarial Journal 2: 75–76., 1998.

[3] Schmidli Hanspeter. *Stochastic Control in Insurance*. London: Springer, 2008.

[4] Schmidli Hanspeter. *Risk theory*. London: Springer, 2017.

[5] Højgaard, Bjarne, and Michael Taksar. *Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models*. Scandinavian Actuarial Journal 1998: 166–80, 1998.

[6] und Martijn Pistorius Jiang Zhengjun. *Optimal dividend distribution under Markov regime switching*. Finance and Stochastics 16: 449–76, 2012.

[7] Rolski Tomasz, Schmidli Hanspeter, Schmidt Volker und Teugels Jozef L. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Hoboken: John Wiley and Sons Ltd.

[8] Shreve Steven E., John P. Lehoczky, and Donald P. Gaver. *Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers*. Siam Journal on Control and Optimization 22, S. 55-75, 1984.

[9] Eisenberg Julia und Schmidli Hanspeter. *Optimal control of capital injections by reinsurance in a diffusion approximation*. Blätter DGVFM 30: 1–13., 2009.

[10] Gerber Hans U. und Shiu Elias S. W. *On the time value of ruin*. North American Actuarial Journal 2: 48–78, 1998.

[11] Walter Wolfgang. *Ordinary Differential Equations*. New York: Springer, 1998.