Diplomarbeit

Mathematische Analyse der "Fraktalen Tonalität" des Komponisten T. H. Schuler

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Reinhard Winkler

eingereicht an
der Technischen Universität Wien

durch

Ambros Berger
Schloßweg 1
7434 Bernstein

Datum

Unterschrift

An dieser Stelle möchte ich Thomas Schuler meinen großen Dank aussprechen. Erstens dafür, dass er seine Dissertation geschrieben und damit die Grundlage für diese Arbeit geschaffen hat; vor allem aber dafür, dass er einen beträchtlichten Teil seiner Freizeit dafür aufgewendet hat, mir in Diskussionen und per email die Inhalte der "Fraktalen Tonalität" näherzubringen.

Auch meinem Betreuer, Professor Reinhard Winkler, gebührt aufrichtiger Dank. Trotz seines übervollen Terminkalenders hatte er immer Zeit und ein offenes Ohr für meine Anliegen.

Ich danke natürlich auch meinen Eltern, die mir nicht zuletzt durch ihre finanzielle Unterstützung dieses Studium überhaupt erst ermöglicht haben.

Abstract

Das Ziel dieser Diplomarbeit war es, die Musiktheorie “Fraktale Tonalität“, die Thomas Herwig Schuler in seiner Dissertation vorgestellt hat, auf zugrunde liegende mathematische Strukturen zu untersuchen. Ein fundamentaler Unterschied der Fraktalen Tonalität zur traditionellen Musik ist, dass die komplette Obertonreihe verwendet wird. Dadurch hat man sämtliche rationalen Intervalle zur Verfügung. Dementsprechend kommt den mikrotonalen Klängen eine große Bedeutung zu. Die Tonschritte können viel kleiner als in der traditionellen Musik werden - bis hin zur Wahrnehmungsgrenze und in der Theorie auch darüber hinaus.

Da es eine größere Vielfalt von Intervallen gibt, existieren neuartige Leittöne und damit neuartige Kadenzen. Die Analyse dieser Kadenzen bildet den größten Teil der Arbeit. Zuerst wird gezeigt, wie solche Kadenzen aufgebaut sind, und dass sie von jedem Subsystem - die Subsysteme lösen in Schulers Theorie die Tonarten aus der traditionellen Musik ab - in jedes Subsystem existieren.

Dann werden aus den Kadenzen Schleifen gebildet. Das sind Abfolgen von Kadenzen, die wieder zum Ausgangsakkord zurückführen und daher endlos weiterlaufen können. Sie sind ein wichtiges Element in Schulers Modell.

In der Fraktalen Tonalität kann der Komponist Tonleitern nach seinen Vorstellungen konstruieren. Mit den Konstruktionsvorschriften kann man die herkömmlichen siebentönigen Tonleitern aus der reinen Stimmung erhalten, aber man muss sich nicht darauf beschränken, sondern hat eine viel größere Auswahl zur Verfügung. Die Erstellung und die Analyse einer zwölftönigen Tonleiter mit Mikrointervallen bilden den Abschluss der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein Hauptelement der Musik ist das (auch zeitlich versetzte) Zusammenklingen verschiedener Töne. Das wichtigste Merkmal eines Tones ist seine Tonhöhe, seine Frequenz. Es gibt unendlich viele Töne, doch auf vielen Instrumenten lässt sich nur eine endliche Anzahl realisieren und das menschliche Gehör kann kleine Unterschiede ohnehin nur über einer gewissen Grenze wahrnehmen.

Wenn ein Ton doppelt so hoch wie ein anderer Ton ist (also eine doppelt so hohe Frequenz hat), dann sagt man, es ist der gleiche Ton eine Oktave höher. Eine Oktave ist also ein Intervall und alle Töne lassen sich durch (eventuell mehrfaches) Verdoppeln oder Halbieren der Frequenz in dieselbe Oktave transponieren. Der Einfachheit halber betrachten wir daher oft das Intervall $[1, 2)$.

Ein Ton braucht immer mindestens einen anderen Ton, auf den er sich beziehen kann. Ein Ton allein hängt sozusagen in der Luft, erst durch einen zweiten Ton kann Musik entstehen. Das Wichtige sind nicht die absoluten Tonhöhen, sondern deren Verhältnis zueinander. Als Faustregel gilt: Je einfacher das Verhältnis, desto konsonanter der Klang.

Ein Ton ist nicht nur eine Sinusschwingung, sondern seine Teiltöne - das sind Sinusschwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache jener der Grundschwingung sind - schwingen je nach Instrument unterschiedlich stark mit. Theoretisch gibt es unendlich viele Teiltöne, in der Praxis geht es hingegen selten über den vierzigsten hinaus. Das bedeutet aber nicht, dass bis zu einer gewissen Grenze alle Teiltöne lückenlos auftreten (siehe [3], Seite 22). Stehen nun die Frequenzen zweier Töne im Verhältnis $p : q$, dann ist der q-te Teilton des ersten Tons gleich dem p-ten Teilton des zweiten Tons. Je einfacher das Verhältnis $p : q$ ist, desto mehr Teiltöne überschneiden sich.

Betrachten wir nun die Teiltöne eines (Grund-)Tons. Der Ton selber ist sein erster Teilton. Dann hat der n-te Teilton die n-fache Frequenz des Grundtons. 1:1 ist derselbe Ton, 2:1 ist immer noch der gleiche; ebenso alle ganzzahligen Potenzen der 2. Das menschliche Ohr hört nämlich logarithmisch mit Basis 2. Das bedeutet: Jedes Mal wenn man die Frequenz mit derselben Zahl multipliziert, erscheint der Ton um denselben 'Abstand' höher als der vorige. Bei einer Verdoppelung der Frequenz (Multiplikation mit 2) klingt der neue Ton dem alten sehr ähnlich. Deswegen bezeichnet man ihn als denselben Ton eine Oktave höher.

Den 'einfachsten' neuen Ton erhält man aus dem dritten Teilton. Zum Grundton hat er das Verhältnis 3:2 (3:1 wäre in der nächsthöheren Oktave) und man nennt das Intervall eine Quint. Geht man nun von diesem Ton aus und wiederholt dasselbe, erhält man den Ton 9:4 beziehungsweise 9:8. Man sieht sofort aus der eindeutigen Primzahlzerlegung einer natürlichen Zahl, dass auf diese Art in jedem Schritt ein neuer Ton getroffen wird. Es gibt nämlich keine Lösungen ungleich 0 für die Gleichung

$$3^x = 2^y \qquad x, y \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

und damit kommt man mit Quintschritten[1] nie auf eine Zweierpotenz/Oktavierung des Grundtons:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \neq 2^y \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{N}$$

Man kann also ausgehend von einem Grundton beliebig viele Töne erzeugen. Man kann sogar jeden Ton beliebig genau annähern, das sagt der folgende

Satz 1.1. *Die Menge* $M := \{p_1^y p_2^z \mid p_i \in \mathbb{P}$ *fest,* $y, z \in \mathbb{Z}\}$ *liegt dicht in* $\mathbb{R}_+$.

Beweis:[2] M ist offenbar isomorph zu

$$M' := \{y \log p_1 + z \log p_2 \mid p_i \in \mathbb{P} \text{ fest, } y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

Es ist zu zeigen, dass M' dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Sei oBdA die Basis des Logarithmus p_1 und $p_1 < p_2$. Dann ist

$$M' = \{y + z \log_{p_1} p_2 \mid p_i \in \mathbb{P} \text{ fest, } y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass man mit $y + z \log_{p_1} p_2$ jede beliebig kleine positive reelle Zahl ϵ von unten approximieren kann, also dass für geeignete y, z gilt:

$$0 < y + z \underbrace{\log_{p_1} p_2}_{=:L} < \epsilon$$

[1] Das gilt auch für andere Schritte. Man kann 3 durch jede beliebige natürliche Zahl ersetzen, die nicht die Form 2^n hat.

[2] vgl. [4] Seiten 304 und 311

Zum Beweis wird eine Folge von Paaren $(y_i, z_i)_i$ konstruiert, für die gilt:

$$0 < y_s + z_s L < \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

Als Startwerte wählen wir $(y_0, 1)$ und $s = 0$. $z_0 L = L$ ist positiv und irrational. Daher setzen wir $y_0 = -\lfloor L \rfloor$. Damit gilt die obige Gleichung, denn sie lautet $0 < L - \lfloor L \rfloor < 1$. Sei nun das s-te Paar bereits gefunden. Das $(s+1)$-te Paar konstruiert man dann folgendermaßen: Zu (y_s, z_s) existiert ein größtes $k \in \mathbb{Z}_+$ mit

$$k(y_s + z_s L) < 1.$$

Dann ist $(k+1)(y_s + z_s L) > 1$, denn $y_s + z_s L \notin \mathbb{Q}$. Daher ist entweder

$$(k+1)(y_s + z_s L) - 1 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

$$\text{oder} \quad 1 - k(y_s + z_s L) < \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

Damit ist entweder

$$(y_{s+1}, z_{s+1}) = ((k+1)y_s - 1, (k+1)z_s)$$

$$\text{oder} \quad (y_{s+1}, z_{s+1}) = (1 - k y_s, -k z_s)$$

■

Seien nun $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ beliebig. Dann gibt es ein $m \in M'$ mit

$$0 < m < b - a$$

Daraus folgt:

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \underbrace{km}_{\in M'} \in (a, b)$$

Damit ist M' dicht in $\mathbb{R}$.

□

Im konkreten Fall sind p_1 und p_2 gleich 2 und 3.

Die ersten 12 Töne, die man durch Quintsprünge erhält, sind der Ausgangspunkt für das traditionelle westliche Musiksystem. Schon die Alten Griechen arbeiteten damit. Diese Töne wurden im Lauf der Zeit immer wieder modifiziert, wie noch beschrieben wird, aber die heutzutage verwendeten Töne weichen nicht allzu stark davon ab. Die Musikinstrumente werden dafür gebaut und die Notation ist darauf ausgerichtet. Es gibt auch andere tonale Systeme, eines davon ist der Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit.

Warum ausgerechnet zwölf Töne? Das ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$\frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \approx 1,014 \approx 1 \tag{1.2}$$

Dieses Verhältnis von circa $1 : 1,014$ wird Pythagoreisches Komma genannt. Wie bereits festgestellt, erreicht man durch Quintsprünge nie wieder genau den Grundton. Aber nach 12 Quintsprüngen erhält man einen Ton, der nur sehr knapp über der 7. Oktave des Grundtons liegt. In Tabelle 1.1 sieht man, welche anderen derart gebauten Systeme noch in Frage kommen.

Töne pro Oktave	Ungenauigkeit
5	$\frac{(\frac{3}{2})^5}{2^3} = \frac{243}{256} \approx 0,949$
7	$\frac{(\frac{3}{2})^7}{2^4} = \frac{2187}{2048} \approx 1,068$
12	$\frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^7} = \frac{531441}{524288} \approx 1,014$
17	$\frac{(\frac{3}{2})^{17}}{2^{10}} = \frac{129140163}{134217728} \approx 0,962$
24	$\frac{(\frac{3}{2})^{24}}{2^{14}} = \frac{282429536481}{274877906944} \approx 1,027$
53	$\frac{(\frac{3}{2})^{53}}{2^{31}} \approx 1,002$

Tabelle 1.1: auf Quinten basierende Systeme

Das System mit 12 Tönen ist also ein guter Kompromiss zwischen überschaubar wenigen Tönen und möglichst kleinem Fehler. Mit der Zeit erkannte man, dass $81 : 64$ sehr nahe an dem viel einfacheren Verhältnis $5 : 4 = 80 : 64$ liegt[3] und deswegen wurde $81 : 64$ durch $5 : 4$ ersetzt, denn das erste Intervall ist dissonant, das zweite hingegen konsonant. $5 : 4$ nennt man die große Terz und man erhält sie offenbar aus dem fünften Teilton wie die Quint aus dem dritten. Ausgehend von Quint und großer Terz lassen sich die zwölf Töne wie in Tabelle 1.2 definieren.

c	des	d	es	e	f	fis	g	as	a	b	h	c
1:1	16:15	9:8	6:5	5:4	4:3	45:32	3:2	8:5	5:3	16:9	15:8	2:1

Tabelle 1.2: reine Stimmung

[3]Das Verhältnis $\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$ nennt man Syntonisches Komma.

Dieses System heißt reine Stimmung. Die ersten beiden Quintsprünge nach oben und nach unten werden direkt übernommen. Das heißt, c, g, d und f, b bleiben gleich. e ist die neu eingeführte große Terz. as ist die große Terz nach unten. h ist die große Terz von g, also

$$h = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}.$$

a ist analog die große Terz von f und fis von d. es ist die Terz nach unten von g und des von f.

In der reinen Stimmung kann man sich die Töne in einem zweidimensionalen Gitter angeordnet vorstellen. Dieses Gitter hat eine Quintkoordinate und eine Terzkoordinate. Jeder Ton t lässt sich bis auf Oktavierung in Abhängigkeit vom Grundton G schreiben als:

$$t = G \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^y \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

Die pythagoreische Stimmung erhält man, wenn man in diesem Gitter die Terzkoordinate gleich null setzt. Hier gibt es nur die Quintkoordinate und jeder Ton hat die Form:

$$t = G \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \qquad x \in \mathbb{Z}$$

Daher bezeichnet man die pythagoreische Stimmung als eindimensionales, die reine Stimmung als zweidimensionales System.

Mit beiden Systemen gibt es ein großes Problem: Die Abstände der Töne zueinander sind nicht gleich. Wenn man also wie oben von einem Grundton ausgehend die 12 Töne konstruiert, erhält man ein System, in dem man ein Musikstück komponieren kann. Man muss es aber in der Tonart des Grundtons schreiben. Möchte man nun einen anderen dieser zwölf Töne als Grundton verwenden, so entsteht auf Basis dieses Tons ein neues System, dessen Töne ähnliche, aber nicht die gleichen wie die des ursprünglichen Systems sind. Spielt man ein Stück, das nicht in der Tonart geschrieben ist, in der das Instrument gestimmt ist, dann klingt es falsch.

Beispiel: Die reine Quint von d wäre:

$$a := \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$$

Dieser Ton wird aber in der reinen Stimmung durch $\frac{5}{3}$ ersetzt. Dadurch ist das Verhältnis von d zu a nicht mehr 3:2 sondern 40:27 $\approx 1,48$, was deutlich als Verstimmung wahrgenommen wird und deswegen auch als Wolfsquint bezeichnet wird. In der pythagoreischen Stimmung hat man in einer Quint das pythagoreische Komma. Diese Verstimmung hat dieselbe Größenordnung.

Da man weder alle Stücke in derselben Tonart schreiben noch ständig umstimmen wollte (beziehungsweise konnte), entstanden die temperierten Stimmungen. Hierbei werden die reinen Intervalle ein bisschen verstimmt, sodass zwar keine Tonart mehr optimal klingt, aber dafür möglichst alle gut genug klingen. Das menschliche Gehör hat nämlich einen gewissen Toleranzbereich, in dem es Verstimmungen nicht als solche erkennt, sondern sich den Klang zurechthört. Dieses Zurechthören kann von Person zu Person stark variieren und hängt deutlich von der Schulung des Gehörs ab.

Ein Art der temperierten Stimmung ist die Aufteilung der Oktave in 12 identische Schritte. Dann ist jeder Ton genau das $\sqrt[12]{2}$-fache des nächstniedrigeren Tons. Man nennt das gleichschwebend temperiert und es ist zur Zeit die übliche Stimmung. In diesem System gibt es wieder nur eine Koordinate. Sie basiert auf dem Intervall $\sqrt[12]{2} : 1$ und alle Töne dieses Systems haben die Form:

$$t = G \cdot \left(\sqrt[12]{2} \right)^x \qquad x \in \mathbb{Z}$$

Die Besonderheit dieses Systems ist sein simpler Aufbau. Jedes Stück kann in jeder Tonart gespielt werden, ohne dass es bis auf die Tonhöhe des Grundtons irgendwie verändert wird. Das bedeutet allerdings, dass die Charakteristik der einzelnen Tonarten verloren geht. Dadurch, dass die Oktave gleichmäßig aufgeteilt wird, entstehen irrationale Zahlenverhältnisse. Das einzige rationale Intervall ist die Oktave. Rein rechnerisch bedeutet ein irrationales Verhältnis zwischen den Frequenzen zweier Töne, dass kein Teilton des einen Tons gleich einem Teilton des anderen Tons ist. Doch es gibt kein Messgerät (das schließt das Ohr mit ein), das zwischen rational und irrational unterscheiden kann.

Ein größeres Problem ist, dass die Intervalle teilweise hörbar von den reinen Intervallen abweichen und damit einen unangenehmeren Klang haben. Das betrifft vor allem die kleine und die große Terz.

Zusammenfassend kann man sagen, dass es kein perfektes, fehlerfreies und auch kein bestes tonales System gibt. Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden das tonale System und die Musiktheorie, die Thomas Herwig Schuler in seiner Dissertation “Fraktale Tonalität“ ([1]) vorgestellt hat, auf zugrundeliegende Strukturen untersucht.

Kapitel 2

Das Schulersche Modell

In der pythagoreischen Stimmung schließt man unter dem fünften Teilton keinen aus. Der fünfte Teilton selber ist nicht mehr enthalten und deswegen existiert der Ton $\frac{5}{4}$ nicht. In der reinen Stimmung nimmt man den fünften Teilton noch dazu. Der sechste Teilton ist als Oktavierung des dritten ebenfalls enthalten. Bei dem siebten ist auch hier Schluss und das ist der momentan übliche Standpunkt in der europäischen Musik. In der nordamerikanischen Musik kommt oft noch der siebte Teilton dazu und wird als “blue note“ bezeichnet. Höhere Primzahlen kommen gewöhnlich nicht vor.

Im Schulerschen System verwendet man die gesamte Teiltonreihe. Jede Zahl in $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ entspricht einem Ton und damit werden alle Töne dieses Systems abgedeckt. Wenn man die Teiltöne der Reihe nach von unten nach oben betrachtet, so sind die geradzahligen Teiltöne immer 'nur' Oktavierungen (das Doppelte) von bereits bekannten Tönen[1]. Nach derselben Überlegung sind alle ungeraden neue Töne. Die Primzahlen haben eine besondere Rolle: Die primzahligen Teiltöne sind nicht nur neue Töne, durch sie erhält man auch neue Dimensionen, wie sie in der Einleitung beschrieben wurden. In Tabelle 2.1 werden die ersten 10 Teiltöne von c angeführt. Wenn nicht anders angegeben ist der Ton 1 immer ein c.

Teilton	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ton	c	c	g	c	e	g	b	c	d	e

Tabelle 2.1: die ersten 10 Teiltöne von c

In dieser Tabelle ist 9 die einzige ungerade Zahl, die nicht prim ist. $9 = 3^2$. Das bedeutet, dass man 9 durch zwei Schritte in Quintrichtung[2] erhält, wie

[1] siehe auch Abbildung 2.1 in Abschnitt 2.3

[2] zur Erinnerung: die Quint konstruiert man aus dem dritten Teilton

es schon in der pythagoreischen Stimmung der Fall ist. Doch statt sich wie dort auf eine oder wie in der reinen Stimmung auf zwei Koordinaten zu beschränken, verwendet man im Schulerschen System sämtliche Primzahlen und hat damit unendlich viele linear unabhängige Koordinaten. Man könnte daher sagen, dass es ein unendlichdimensionales System ist. In der Praxis treten natürlich nur endlich viele Töne und damit endliche viele Dimensionen auf, doch das System lässt dem Komponisten deutlich mehr Freiheiten. Da man ganz $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ zur Verfügung hat, kann man theoretisch jedes rationale Intervall bilden.

Man kann aber nicht jedes Intervall mit jedem Ton bilden. Zum Beispiel gibt es keinen Ton, der zu einem Ton der Form $2^n,\ n \in \mathbb{N}$ im Verhältnis $5:3$ steht, da 2^n nicht durch 3 teilbar ist. Allgemein gilt: Zu einem Ton t_1 gibt es genau dann einen Ton t_2 im Verhältnis $n:k$, wenn t_1 durch k teilbar ist.

Allerdings kann man das Verhältnis oder den Ton beliebig genau annähern. So ist zum Beispiel $425:256 \approx 5:3$ beziehungsweise $425:255 = 5:3$ und $255 \approx 256 (= 2^8)$. Das Verhältnis $256:255$ ist so nahe an 1, dass es weit unter der Wahrnehmungsgrenze liegt, die ungefähr $81:80$ beträgt.

Der Tonvorrat kann also mit $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ identifiziert werden und in weiterer Folge ist mit einer Zahl jeweils der entsprechende Ton gemeint. Dabei können die Zahlen durchaus als Frequenz der Töne verstanden werden. Am Ende muss dann nur das ganze Musikstück in den hörbaren Bereich transponiert werden. Das verändert nichts am Klang des Stücks selbst, denn wenn alle Töne mit derselben Zahl multipliziert werden, bleiben die Verhältnisse untereinander gleich.

2.1 Subsysteme

$(\mathbb{N}\backslash\{0\}, +, \cdot)$ mit der herkömmlichen Addition und Multiplikation ist ein Halbring und lässt sich kanonisch in den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ einbetten.

S ist ein Ideal von $\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

1. S ist Unterring von $\mathbb{Z}$

2. $\forall z \in \mathbb{Z}, \forall s \in S: \ sz \in S$

Bekanntlich haben alle Ideale von $\mathbb{Z}$ die Form $S_n = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ein Ideal von $\mathbb{Z}$ ist also die Menge aller ganzzahligen Vielfachen einer natürlichen Zahl n.[3] Man sagt, das Ideal wird von n erzeugt.

[3] siehe [2] Seite 42

Analog lassen sich Teilmengen von $\mathbb{N}$ definieren. Man erhält diese Teilmengen, indem man alle nichtpositiven Elemente der soeben definierten Ideale weglässt. Diese Teilmengen heißen Subsysteme des tonalen Systems und sind im Schulerschen System sehr wichtig. Jeder Ton n des Systems hat nämlich selber eine ganze Teiltonreihe und ist damit Grundton eines zu dem ursprünglichen System isomorphen Subsystems, das im ursprünglichen System enthalten ist. Dieses Subsystem wird von n erzeugt und man spricht dann vom $n$er-System. Die Isomorphie zwischen System und Subsystem ist eine skalierte Selbstähnlichkeit und damit eine grundlegende Eigenschaft der Fraktale.

Statt der Subsysteme kann man auch übergeordnete Systeme betrachten. Diese Systeme basieren auf den Untertönen des Grundtons, also auf den Zahlen $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Geht man vom Ton $\frac{1}{n}$ aus, so ist das Hauptsystem bezüglich dieses neuen Grundtons das n-te Subsystem. Daher besteht auch zwischen diesen Systemen eine Isomorphie. Betrachtet man zwei Untertöne $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{k}$, dann setzt man den neuen Grundton auf $\frac{1}{nk}$ und erhält dieselbe Struktur wie vorher. Nimmt man hingegen alle Untertöne, dann erzeugt man ganz $\mathbb{Q}_+$. Es gibt zwar nur abzählbar unendlich viele rationale Zahlen, aber im Gegensatz zu $\mathbb{N}$ liegt $\mathbb{Q}_+$ dicht in $\mathbb{R}_+$ und damit ist der Abschluss überabzählbar.

Offenbar ist jeder Ton ungleich 1 in mehreren Systemen enthalten, nämlich zumindest im 1er-System und in dem Subsystem, dessen Grundton er ist. Die primzahligen Töne sind in genau diesen beiden Systemen enthalten, alle anderen in mehr Subsystemen. Das hängt von den in der jeweiligen Zahl enthaltenen Primfaktoren ab: Ein Ton ist in k verschiedenen Systemen enthalten, wenn man seine Primfaktoren auf k verschiedene Arten kombinieren kann. Dabei ist das leere Produkt eine mögliche Kombination und steht für das 1er-System. Bei n Primfaktoren gilt

$$n + 1 \leq k \leq 2^n.$$

$k = n + 1$, wenn alle Primfaktoren gleich sind und $k = 2^n$, wenn alle Primfaktoren verschieden sind. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ und kann daher auf folgende Arten gesehen werden:

$$12 = 12_1 = 6_2 = 4_3 = 3_4 = 2_6 = 1_{12}$$

Die tiefgestellte Zahl gibt an, in welchem System man sich befindet. Welche der obigen Möglichkeiten die 'richtige' ist, wird aus dem Kontext - zum Beispiel in welchem System die anderen Töne des Akkords sind - klar oder kann auch vom Komponisten bewusst offen gelassen werden.

Die Subsysteme lösen die Tonarten aus der üblichen westlichen Musik ab. Hier wählt man für eine Dur-Tonleiter sieben der vorhandenen zwölf

Töne aus und hat dann sieben Stufen, die jede einen eigenen Grundakkord hat. Die Grundakkorde der ersten, der vierten und der fünften Stufe sind in Dur, die der zweiten, der dritten und der sechsten Stufe in Moll, und der Grundakkord der siebenten Stufe ist vermindert. Im Schulerschen System sieht es grundlegend anders aus: Sei die 1 ein c. Dann ist das Hauptsystem in C-Dur. Nach Tabelle 2.1 ist das 3er-System G-Dur. Befindet man sich im 5er-System, dann ist man in E-Dur, etc. Es gibt unendlich viele Subsysteme. Die Systeme stehen alle in Dur, denn die ersten drei verschiedenen Töne eines Systems ergeben immer den reinen Dur-Akkord[4] zum Grundton des Systems. Moll kann zwar auch erzeugt werden, aber das ist komplizierter und dazu später (Abschnitt 2.6).

Das 2er-System ist die Menge aller geraden Zahlen. Es enthält insbesondere alle Potenzen der 2 und damit alle Oktavierungen des Grundtons. Nach Schulers Theorie sind sie das ruhende, starre Grundgerüst. Im Gegensatz dazu sind die ungeraden Zahlen (mit Ausnahme der 1) der aktive Teil, wobei die Primzahlen $\neq 2$ am aktivsten sind. Für die Primzahlen gilt: Je höher desto aktiver.

2.2 Die Rolle der 1

Die 1 ist in diesem Modell die Einheit/die Gesamtheit, die in die Vielheit der anderen Zahlen aufgespaltet wird. Dieses Aufbrechen der Einheit ist der Namensgeber von Schulers Dissertation "Fraktale Tonalität". Die 1 kommt selber als Ton nie vor. Dafür wird oft direkt oder indirekt auf die 1 verwiesen. Ein direkter Verweis ist ein Einserschritt in der Melodie, also wenn auf einen Ton t der Ton $t+1$ oder der Ton $t-1$ folgt. Wenn so ein Einserschritt von einem ungeraden Ton zu einem seiner geraden Nachbarn erfolgt, dann ist das ein Wechsel von aktiv zu passiv. Schuler nennt das in seiner Dissertation auch einen Schritt auf ein niedrigeres Energieniveau. Das soll ausdrücken, dass ein derartiger Schritt von sich aus geschieht und als Entspannung empfunden wird.

Einen weniger direkten Verweis auf die 1 gibt es über das psychoakustische Phänomen des Residualtons. Wenn man einen Ton hört, dann hört man bekanntlich mehrere Sinusschwingungen: Die Grundschwingung und Schwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung sind. Lässt man die Grundschwingung weg, dann wird sie im Ohr wieder hinzugefügt und man hört das gleiche wie vorher. Wenn das menschliche Ohr mehrere Frequenzen innerhalb einer gewissen Bandbreite hört, dann hört es

[4] Der Dur-Akkord besteht aus den Tönen 1, $\frac{5}{4}$ und $\frac{3}{2}$; die letzten beiden sind Oktavierungen der Töne 5 und 3

den größten gemeinsamen Teiler dieser Frequenzen dazu. Sind also zwei Töne teilerfremd, dann ist ihr größter gemeinsamer Teiler 1 und damit 'erzeugen' sie die 1. Anders gesagt: Wenn es kein Subsystem gibt, in dem beide Töne enthalten sind, verweisen sie auf die 1. Gerade die Primzahlen, die ja besonders aktiv sind, verweisen damit am häufigsten auf die 1, die Einheit, den Ruhepol der Systematik. Nur wenn alle anderen Töne des Akkords Vielfache der Primzahl sind, tritt der Effekt nicht auf. Dann kann dieser Akkord aber in dem von der Primzahl erzeugten Subsystem betrachtet werden und in diesem Subsystem ist die Primzahl selber die 1.

2.3 Die längste Folge zur 2

Jedem Ton, also jeder natürlichen Zahl $t > 1$, wird ein Energieniveau zugeordnet. Die Zahlen 2^n, $n \in \mathbb{N}$, haben das Niveau 0, auf das sozusagen alle Zahlen zurückfallen wollen. Es stellt sich nun die Frage, auf welchem Weg das möglich ist. Es gibt im Allgemeinen mehrere Möglichkeiten, aber genau eine längste Folge von Tönen, bei der in jedem Schritt das Energieniveau fällt. Diese längste Folge ist interessant, weil sie erstens von sich aus abläuft und zweitens das Erreichen des Nullniveaus möglichst lange hinauszögert. Man "macht also möglichst viel aus dem, was man hat" - aus dem Energieniveau des Anfangstons.

Wie schon erwähnt sind die ungeraden Zahlen aktiver als die geraden Zahlen; sie haben ein höheres Energieniveau und streben zu ihren geraden Nachbarn. Folgende Schritte seien erlaubt:

$$t_{i+1} = t_i \pm 1 \qquad \text{für } t_i \text{ ungerade und}$$

$$t_{i+1} = \frac{t_i}{2} \qquad \text{für } t_i \text{ gerade}$$

Man hat also nur dann eine Wahl, wenn die Zahl ungerade ist. Jede ungerade Zahl hat einen Nachbarn, der durch 4 teilbar ist, und einen, der nicht durch 4 teilbar ist. Wenn man die längste Folge erhalten will, muss man die Nachbarzahl wählen, die nicht durch 4 teilbar ist, damit man im übernächsten Schritt nicht ebenfalls durch 2 teilen muss und so die Folge möglichst langsam fällt. Damit ist die Eindeutigkeit der Folge klar.

Für $t = 2^n$ beträgt die Folgenlänge $n - 1$. Doch alle Elemente dieser Folge befinden sich auf dem Niveau 0. Das bedeutet, dass sich von einem gewissen Standpunkt aus betrachtet nichts tut und der Startpunkt schon Endpunkt ist. Für jedes ungerade t mit $2^n < t < 2^{n+1}$ hat die Folge zur 2 maximal $2n - 1$ Schritte. Das sieht man daran, dass man abwechselnd Einserschritte und Halbierungen vornimmt. Bei den Einserschritten bleibt man im Bereich $(2^n, 2^{n+1})$, denn dessen Randpunkte möchte man vermeiden. Bei den Halbierungen wechselt man in den Bereich $(2^{n-1}, 2^n)$. Die einzigen Ausnahmen sind die Schlusssequenzen $3 \to 4$ und $3 \to 2$. Jede Folge gelangt irgendwann zur 3 und muss auf eine der beiden genannten Arten enden. Siehe dazu Abbildung 2.1.

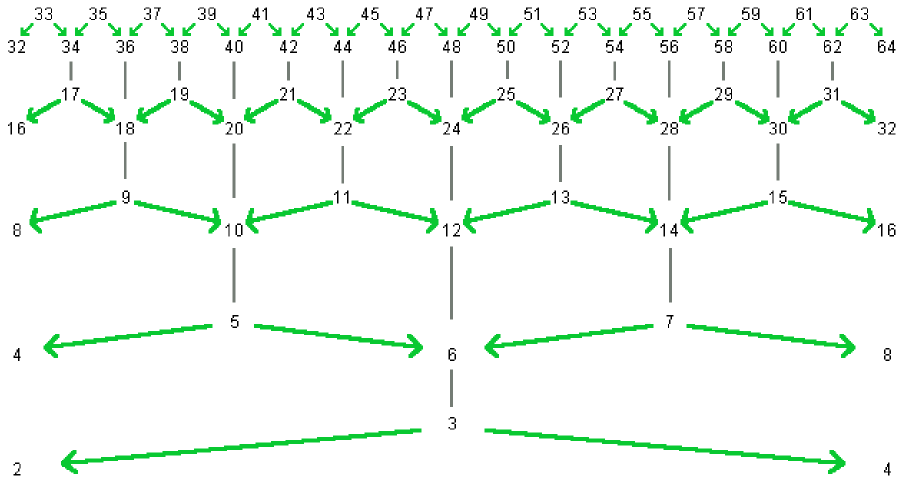

Abbildung 2.1: Einserschritte

Da jede natürliche Zahl t ein Produkt von Primfaktoren ist und alle Primzahlen außer der 2 ungerade sind, lässt sich t in der Form

$$t = 2^k u \tag{2.1}$$

mit u ungerade schreiben. Für $2^n < u < 2^{n+1}$ hat die längste Folge von t zur 2 genau $k + 2n - 1$ Schritte, wenn $u \neq 1$ ist.

Eine Division durch 2 ist aber nur eine Oktavierung. Das Interessante sind die Einserschritte. Nehmen wir als Beispiel die Folgen

$$11 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 2 \text{ und}$$

$$11 \to 10 \to 12 \to 8.$$

In beiden passiert im Prinzip das gleiche, denn

$$11 \to 10 = 5_{(2)} \to 12 = 6_{(2)} = 3_{(4)} \to 8 = 2_{(4)}$$

Die zweite Folge besteht aus oktavierten Einserschritten. Die Schrittweite des n-ten Schritts beträgt dabei 2^{n-1}, denn der erste ist ein Einserschritt im 1er-System, der zweite im 2er-System, ... , der n-te im 2^{n-1}er-System.

Abschließend kann man sagen: Startet man von einer ungeraden Zahl $u \in (2^n, 2^{n+1})$, dann kann man maximal n bezüglich des Energieniveaus fallende Einserschritte machen, bis man bei einer Potenz der 2 ankommt.

In der westlichen Musik verlangen die Leittöne nach einer Auflösung. Diese Auflösung ist in der traditionellen Tonalität entweder ein Schritt der Größe $16 : 15$ oder $25 : 24$. Diese Schritte kommen im Schulerschen Modell auch vor, aber es gibt auch viel größere und viel kleinere. Für große Töne t wird das Verhältnis $t+1 : t$ klein und verschwindet unter die Wahrnehmungsgrenze, die ungefähr bei $81 : 80$ liegt. Die 3 hingegen strebt zu den Tönen 2 und 4. Damit kann die Auflösung sogar ein Quintschritt sein. In Abbildung 2.1 wird die Idee veranschaulicht, aber die Schritte werden nicht nur von unten nach oben, sondern auch von links nach rechts kleiner.

Da die ungeraden Zahlen zu ihren geraden Nachbarn streben, geht die 1 in die 2 über. Das ist ein Oktavschritt nach oben und ebenso streben im Schulerschen Modell alle Potenzen der 2 nach oben. Dabei steigt zwar die Tonhöhe, aber man bleibt auf einer Oktavierung des Grundtons und damit auf dem Niveau 0. Die Zahlen der Form 2^n fallen also nicht nur nicht, wie vorher geschrieben, sondern innerhalb des Null-Niveaus existiert eine dem Fall der anderen Zahlen entgegengerichtete Aufwärtsbewegung.

2.3.1 Anzahl der unterschiedlichen Folgen

Im Intervall $(2^n, 2^{n+1}]$ gibt es 2^n natürliche Zahlen, die Hälfte davon ist ungerade. Es gibt also 2^{n-1} mögliche Startwerte. Von diesen Startwerten aus gibt es im Allgemeinen unterschiedlich viele verschiedene Folgen zu einer Potenz der 2. Aus der Abbildung 2.1 sieht man sofort, dass man ausgehend von den Startwerten $2^n + 1$ und $2^{n+1} - 1$ die wenigsten Möglichkeiten hat. Wie alle Startwerte haben sie genau 2 längste Folgen. Im Gegensatz zu den anderen Zahlen führt aber jede Abweichung von diesen Folgen (die sich ja nur im letzten Schritt unterscheiden) sofort auf eine Potenz der 2, denn

$$(2^n + 1) - 1 = 2^n$$

$$\frac{(2^n + 1) + 1}{2} = 2^{n-1} + 1.$$

Analog für $2^{n+1} - 1$. Es existieren also für jeden dieser beiden Startwerte jeweils eine Folge der Länge k für $k = 1, ..., n-1$ und zwei Folgen der Länge n, insgesamt $n + 1$ Folgen.

Da man von unterschiedlichen Startwerten im Bereich $(2^n, 2^{n+1})$ ausgehend im Allgemeinen unterschiedlich viele verschiedene Folgen zur 2 zur

Verfügung hat, ist diese Anzahl keine Funktion von n. Man kann aber zeigen, dass die Summe w_n der möglichen Folgen von sämtlichen Startwerten aus $(2^n, 2^{n+1})$ zur 2 oder einer ihrer Potenzen genau $2 \cdot 3^{n-1}$ ist.

Offensichtlich ist $w_1 = 2$. Seien nun $w_1, ..., w_n$ bekannt. Aus $(2^{n+1}, 2^{n+2})$ führen genau 2 Einserschritte (+ jeweils eine Oktavierung) zu jedem Startwert aus $(2^n, 2^{n+1})$. Genau so gibt es jeweils 2 bis auf Oktavierungen direkte Einserschritte zu jedem Startwert aus den Bereichen $(2^k, 2^{k+1}),\ \ k \leq n-1$ und es existieren noch die beiden Folgen $2^{n+1}+1 \to 2^{n+1}$ und $2^{n+2}-1 \to 2^{n+2}$ mit Länge 1. (vgl. Abbildung 2.1) Dann ist

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} 2w_i + 2 = 2w_n + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} 2w_i + 2}_{=w_n} = 3w_n = 3^n w_1 = 2 \cdot 3^n$$

Das scheint in Anbetracht der Tatsache, dass man meistens mit kleinen n arbeitet, eine eher beschränkte Auswahl zu sein. Doch die Schritte in der Folge müssen nicht aus nur zwei Tönen bestehen. Man kann sie ausbauen und verzieren, umspielen und wiederholen. Außerdem steht es dem Komponisten frei, jederzeit neue Impulse zu setzen und diese vorgefertigten Folgen wieder zu verlassen.

Eine wichtige Art der Verzierung ist das Umspielen. Dabei wechselt die Stimme von einer ungeraden Zahl u nicht direkt zu einem ihrer geraden Nachbarn g. Stattdessen bewegt sie sich zuerst um 2 zur anderen ungeraden Zahl, die ebenfalls zu g strebt. Erst danach erfolgt die Auflösung zu g. Das wäre zum Beispiel

$$7 \to 5 \to 6 \ \text{ statt } \ 7 \to 6.$$

Nach einem Wechsel von ungerade zum nächsten ungeraden Ton verlangt das Ohr laut Schuler den Ausgleich zum dazwischen liegenden geraden Ton. Dieser Sachverhalt wird noch bei der Seitenbewegung gebraucht. (Abschnitt 2.5.8)

2.4 Sonanzmessung

Die Sonanz gibt an, wie gut/angenehm/einfach ein Klang zu hören ist. Je höher die Sonanz ist, desto dissonanter ist der Klang. Am konsonantesten ist der Einklang mit dem Verhältnis $1:1$.

2.4.1 Gradus Suavitatis

Leonhard Euler (1707 - 1783) definierte die Gradus Suavitatis Funktion Γ, um die Sonanz des Zusammenklangs zweier Töne zu messen. Stehen die Töne im

Γ	Intervalle
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$
4	$\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$
5	$\frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}$
6	$\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{32}$

Tabelle 2.2: Die konsonantesten Intervalle nach Euler

Verhältnis $q : r$ (q, r teilerfremd), dann definiert man $n := kgV(q, r) = q \cdot r$. Jedes n lässt sich eindeutig in der Form

$$n = \prod_i p_i^{e_i}, \qquad p_i \in \mathbb{P}, e_i \in \mathbb{N}$$

darstellen[5] und Γ ist dann definiert als

$$\Gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto 1 + \sum_i e_i(p_i - 1) \tag{2.2}$$

In Tabelle 2.2 stehen alle Intervalle, deren Gradus Suavitatis ≤ 6 ist.

$\Gamma(n)$ wächst zwar mit n, aber nur sehr unregelmäßig. Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{P}$ gilt $\Gamma(p) = p$. So ist $\Gamma(31) = 31$, $\Gamma(32)$ hingegen nur 6. Offenbar ist das Verhältnis

$$\frac{\Gamma(n)}{n}$$

besonders groß, wenn n eine Primzahl ist, und besonders klein, wenn n eine Potenz der 2 ist. Damit lässt sich $\Gamma(n)$ abschätzen: Für $n \in [2^{k-1}, 2^k]$ gilt $k \leq \Gamma(n) < 2^k$. Dass diese Abschätzung scharf ist, sieht man zum Beispiel an $\Gamma(31)$ und $\Gamma(32)$.

Wie man an der Definition sieht, verändert jede Oktavierung eines Tones den Gradus Suavitatis um 1, obwohl es dabei die gleichen Töne bleiben. Zwei Töne haben nach Euler also genau einen 'Abstand', in dem sie am wenigsten dissonant klingen. Das ist genau dann der Fall, wenn n den Primfaktor 2 nicht enthält.

Eulers Funktion berücksichtigt nicht das Zurechthören. Gerade die kleinen, für das menschliche Ohr nicht wahrnehmbaren Verstimmungen resultieren oft in einem besonders hohen Γ. Die leicht falsche Quint 1000:1499[6] ist

[5] Ab einem bestimmten i_0 sind alle $e_i = 0$. Die p_i durchlaufen ganz $\mathbb{P}$. Daher können auch e_i mit $i < i_0$ gleich 0 sein.

[6] 1499 ist prim.

von 1000:1500 $\equiv$ 2:3 akustisch nicht zu unterscheiden, aber das erste Intervall liefert 1514, das zweite nur 4.

2.4.2 Martin Vogel

Martin Vogel hat eine eigene Methode zur Berechnung von Intervallen vorgestellt (siehe [7]), um Eulers Funktion zu verbessern. Auch sie basiert auf den Primzahlen und liefert ähnliche Werte. Vogel erklärt aber auch, wie sie zur Berechnung von Mehrklängen verwendet werden kann. Für Intervalle der Form $1 : n$ lautet die Formel in Anlehnung an die von Euler

$$\Gamma_V(n) := \sum_i e_i p_i - e_1 \tag{2.3}$$

Vogel bildet also die Summe über alle enthaltenen Primfaktoren. Nur von den Faktoren 2 wird jeweils 1 abgezogen. Euler hingegen zieht von jedem außer dem ersten Faktor 1 ab. In Tabelle 2.3 werden die jeweiligen Werte für die ersten 16 Intervalle der Form $1 : n$ angegeben.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\Gamma(n)$	1	2	3	3	5	4	7	4	5	6	11	5	13	8	7	5
$\Gamma_V(n)$	0	1	3	2	5	4	7	3	6	6	11	5	13	8	8	4

Tabelle 2.3: Vergleich Euler-Vogel

Für Akkorde geht Vogel folgendermaßen vor: Erst werden diejenigen Primzahlen 'gekürzt', die in jedem Ton vorkommen. Dann wird die Sonanz jedes Tones zur 1 ermittelt und abschließend das arithmetische Mittel dieser Werte berechnet.

Auch Vogels Methode lässt das Zurechthören außer Acht und versagt hier wie Eulers Gradus Suavitatis. Leider lässt sich dafür keine allgemeingültige Formel angeben, weil es stark von der Schulung des Gehörs abhängt, ob man komplizierte Tonverhältnisse als solche wahrnimmt oder sie durch einfachere ersetzt.

Diese Sonanzmessung sollte allenfalls als grobe qualitative Analyse gesehen werden, auf die man sich nicht hundertprozentig verlassen kann. Betrachten wir zum Beispiel die Klänge

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der erste Klang ist die Naturseptime. Der zweite Klang ist ein reiner Dur-Grundakkord mit der Naturseptime. Der zweite Akkord klingt für das Ohr angenehmer, aber beide haben nach Vogels Berechnungsmethode eine Sonanz von 4,5.

Nimmt man hingegen Eulers Funktion für die Berechnung der Sonanz der Intervalle der Form $1 : n$, dann erhält man für den ersten Klang 5 und für den zweiten 4,75. In diesem Fall liefert also der Gradus Suavitatis bessere Werte.

Die Berechnungen von Euler und Vogel beziehen die Lage das Klangs im Tonraum nicht mit ein. Tiefe Töne sollten größere Abstände zueinander haben, wenn man Rauhigkeit im Klang vermeiden möchte. Auch Verdeckungsphänomene (laut/leise) und die sogenannte Kritische Bandbreite werden nicht beachtet.

2.4.3 Sonanz als Norm

Die beiden Methoden kann man als eine Art modifizierte Norm über der Menge der Töne auffassen, wenn man die Sonanz eines Tones n mit der Sonanz des Intervalls $1 : n$ identifiziert. Beide obigen Funktionen ordnen jedem Ton eine Zahl aus $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ zu. Die Axiome für eine Norm sind:

1. $||n|| = 0 \Leftrightarrow n = 0$
2. $||\lambda n|| = \lambda ||n||$
3. $||n_1 + n_2|| \leq ||n_1|| + ||n_2||$

Der Gradus Suavitatis erfüllt das Axiom 1. Dass 0 kein Ton ist, soll dabei nicht weiter stören. Man könnte sagen, dass nur die Stille keine Sonanz hat. Bei Vogels Funktion gilt $\Gamma_V(1) = 0$. Das Intervall $1 : 1$ ist aber die Prim und hat 'Distanz' 0. Daher scheint auch das durchaus gerechtfertigt. Wenn man bei Eulers Funktion das '1+' weglässt und

$$\overline{\Gamma}(n) := \sum_i e_i(p_i - 1) \tag{2.4}$$

definiert, kann man gleich argumentieren. Ein anderes Argument wäre, dass man nicht additiv, sondern multiplikativ hört. Daher müssen die Axiome entsprechend abgeändert werden:

1. $||n|| = 0 \Leftrightarrow n = 1$
2. $||n^\lambda|| = \lambda ||n||$

3. $||n_1 n_2|| \leq ||n_1|| + ||n_2||$

Sei wieder
$$n = \prod_i p_i^{e_i}.$$
Dann ist
$$n^\lambda = \prod_i p_i^{\lambda e_i}.$$
Setzt man das in $\overline{\Gamma}$ ein, erhält man
$$||n^\lambda||_{\overline{E}} = \overline{\Gamma}(n^\lambda) = \sum_i \lambda e_i(p_i - 1) = \lambda \sum_i e_i(p_i - 1) = \lambda\overline{\Gamma}(n) = \lambda||n||_{\overline{E}}.$$

Das zweite Axiom gilt also für $\overline{\Gamma}$, aber nicht für Γ. Das dritte beweist man durch
$$n_1 n_2 = \prod_{i_1} p_{i_1}^{e_{i_1}} \prod_{i_2} p_{i_2}^{e_{i_2}} = \prod_i p_i^{e_{i_1}+e_{i_2}} \qquad \text{da } p_{i_1} = p_{i_2}.$$
Damit kann man nachrechnen, dass gilt:
$$||n_1 n_2||_{\overline{E}} = \overline{\Gamma}(n_1 n_2) = \sum_i (e_{i_1} + e_{i_2})(p_i - 1) =$$
$$\sum_i e_{i_1}(p_i - 1) + \sum_i e_{i_2}(p_i - 1) = \overline{\Gamma}(n_1) + \overline{\Gamma}(n_2) = ||n_1||_{\overline{E}} + ||n_2||_{\overline{E}}$$
Daraus sieht man sofort, dass $\Gamma(n_1) + \Gamma(n_2) = \Gamma(n_1 n_2) + 1$ ist.

Das zweite Axiom gilt auch für Γ_V, denn
$$||n^\lambda||_V = \Gamma_V(n^\lambda) = \sum_i \lambda e_i p_i - \lambda e_1 = \lambda\left(\sum_i e_i p_i - e_1\right) = \lambda\Gamma_V(n) = \lambda||n||_V.$$
Wie für $\overline{\Gamma}$ kann man auch das dritte Axiom nachrechnen:
$$||n_1 n_2||_V = \Gamma_V(n_1 n_2) = \sum_i (e_{i_1} + e_{i_2})p_i - (e_{1_1} + e_{1_2}) =$$
$$\sum_i e_{i_1} p_i - e_{1_1} + \sum_i e_{i_2} p_i - e_{1_2} = \Gamma_V(n_1) + \Gamma_V(n_2) = ||n_1||_V + ||n_2||_V$$

Man könnte auch herkömmliche Normen zur Berechnung der Sonanz verwenden. Dazu schreibt man die im Ton n enthaltenen Primfaktoren ihren Häufigkeiten entsprechend in einen Zeilenvektor:
$$(\underbrace{p_1, \ldots, p_1}_{e_1}, \underbrace{p_2, \ldots, p_2}_{e_2}, \ldots, \underbrace{p_k, \ldots, p_k}_{e_k})$$

p_k ist der größte enthaltene Primfaktor. Von diesem Vektor kann man wie gewohnt die Norm berechnen. Beispiele für die Normen sind:

- Maximumsnorm: $||n||_\infty = p_k$
- euklidische Norm: $||n||_2 = \sqrt{\sum_i e_i p_i^2}$
- Summennorm: $||n||_1 = \sum_i e_i p_i$

Dabei ist die Summennorm den Funktionen von Euler und Vogel am ähnlichsten, vgl. vor allem (2.4)

Analog zur Sonanz eines Tones kann man auch die Sonanz eines Subsystems definieren. Man sagt, dass die Sonanz eines Subsystems gleich der Sonanz des dieses Subsystem erzeugenden Tons ist. Das ist plausibel, weil mit einem Ton t_1 auch seine ersten Teiltöne und damit die ersten Töne des t_1-Systems mitklingen.

2.5 Übergänge zwischen Systemen (Kadenzen)

Der Wechsel von einem System in ein anderes hat eine starke musikalische Wirkung. Im folgenden Abschnitt wird untersucht, wie solche Wechsel aufgebaut sein können und welche Gestaltungsmöglichkeiten und Freiheiten ein Komponist hat.

Wir betrachten teilerfremde Systeme, denn wenn sie nicht teilerfremd sind, dann kann man den Übergang als einen Übergang zwischen teilerfremden Systemen in einem Subsystem interpretieren. Der Grundton dieses Subsystems ist der größte gemeinsame Teiler der Grundtöne der beiden Systeme.

Möchte man von einem System in ein anderes wechseln, dann muss man hintereinander zwei Akkorde spielen, von denen der erste aus dem ersten und der zweite aus dem zweiten System ist. Diese Akkorde sollen harmonisch sein. Ein Akkord ist harmonisch, wenn seine Töne die Gleichung $\frac{a+b}{2} = c$ erfüllen.[7]

Ein harmonischer Akkord hat idealerweise drei Stimmen. Jedes Intervall kann mit Hilfe der obigen Gleichung zu einem harmonischen Akkord vervollständigt werden. In weiterer Folge betrachten wir zuerst Dreiklänge und dann Akkorde mit mehr Tönen.

Akkorde können sich auf drei Arten 'bewegen' (hier anhand von Dreiklängen beschrieben):

[7] siehe [1] Seite 46

1. **Gegenbewegung:** Die Mittelstimme bleibt liegen und die Außenstimmen bewegen sich um die gleiche Zahl zu- oder auseinander. Meistens bewegen sie sich dabei um 1, um auf die 1 zu verweisen.

2. **Seitenbewegung:** Eine Außenstimme bleibt liegen und die anderen Stimmen bewegen sich entweder beide zu ihr oder beide von ihr weg. Damit ein Akkord dabei harmonisch bleibt, muss sich die zweite Außenstimme offenbar doppelt so viel wie die Mittelstimme bewegen. Eine 'Seitenbewegung um 1' bedeutet, dass sich die Stimme neben der Liegestimme um 1 bewegt; die andere Stimme um entsprechend mehr.[8]

3. **Rückung:** Bei der Rückung bewegen sich alle Stimmen um den gleichen Betrag (wieder meistens 1) in dieselbe Richtung.

2.5.1 Existenz der Übergänge

Wir betrachten zunächst die Gegenbewegung in Dreiklängen. Hier bleibt die Mittelstimme auf einem Verschmelzungston liegen während sich die Außenstimmen um 1 bewegen. Ein Verschmelzungston ist ein Ton, der in beiden Systemen enthalten ist. Der kleinste Verschmelzungston von zwei Systemen ist das kleinste gemeinsame Vielfache der jeweiligen Grundtöne, bei teilerfremden Systemen also ihr Produkt. Dass es für einen Übergang zwischen zwei beliebigen Systemen immer passende Akkorde gibt, folgt aus der Existenz des erweiterten euklidischen Algorithmus. Dieser Algorithmus berechnet zu zwei natürlichen Zahlen t_1 und t_2 den größten gemeinsamen Teiler und außerdem zwei ganze Zahlen n_1 und n_2, für die gilt:

$$ggT(t_1, t_2) = n_1 t_1 + n_2 t_2$$

Da wir teilerfremde Zahlen t_1 und t_2 betrachten, steht auf der linken Seite 1. Das ist notwendig, weil wir einen Ton $n_1 t_1$ aus dem t_1-System suchen, der sich um 1 von einem Ton $n_2 t_2$ aus dem t_2-System unterscheidet. Eigentlich wollen wir diophantische Gleichungen der Form

$$1 = n_1 t_1 - n_2 t_2 \;\text{ und }\; 1 = n_2 t_2 - n_1 t_1$$

mit $n_i \in \mathbb{N}$ lösen, aber diese Abänderungen ändern nichts an der Lösbarkeit der Gleichung.

[8] Hat der Akkord n Stimmen und beginnt man bei der liegenden Außenstimme zu zählen, dann bewegt sich die n-te Stimme um $n-1$.

Der erweiterte euklidische Algorithmus

Die induktive Variante funktioniert folgendermaßen: In jedem Schritt wird eine Division mit Rest ausgeführt. Sei $t_2 > t_1,\ a := t_2,\ b := t_1$.

$$a = q \cdot b + r$$

Wenn man q und r bestimmt hat, setzt man $a_{neu} := b$ und $b_{neu} := r$. Das wird so lange wiederholt, bis man schließlich auf $r = 0$ kommt. Das passiert nach endlich vielen (in der Größenordnung von $c \cdot \log(r)$) Schritten, weil die Reste streng monoton fallen. Durch Rückeinsetzen in die Gleichungen erhält man dann die gesuchten n_i.

Beispiel: $t_1 = 5,\ t_2 = 7$

$$7 = 1 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Mit dem Rückeinsetzen beginnt man bei der vorletzten Gleichung und geht von unten nach oben. Zuerst bringt man die Gleichungen auf die Form $r = a - q \cdot b$:

$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$$2 = 7 - 1 \cdot 5$$

Einsetzen liefert:

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (7 - 1 \cdot 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$$

Daraus kann man ablesen: $n_1 = 3,\ n_2 = 2$ und der Algorithmus ist beendet.

Die erhaltene Lösung ist eine Partikularlösung der linearen diophantischen Gleichung $n_1 t_1 - n_2 t_2 = 1$. Für die homogene Gleichung $n_1 t_1 - n_2 t_2 = 0$ gilt offenbar $n_1 = p \cdot t_2$ und $n_2 = p \cdot t_1,\ p \in \mathbb{N}$, weil t_1 und t_2 teilerfremd sind. p wäre eigentlich $\in \mathbb{Z}$, aber es gibt keine negativen Töne. Deswegen sind nur die Lösungen interessant, bei denen beide n_i positiv sind. Alle Lösungen dieser Gleichung sind also:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad p \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

Der folgende Satz liefert auch einen Beweis für die Existenz der n_i, aber keine Methode zur Berechnung. Er sei trotzdem mit Beweis angeführt, da die Ergebnisse in weiterer Folge gebraucht werden.

Satz 2.1. *Wenn t_1 und t_2 teilerfremd sind, ist die Menge* $M := \{nt_1 \mod t_2 \mid n = 0, \ldots, t_2 - 1\} = \{0, \ldots, t_2 - 1\}$.

Indirekter Beweis: Die Menge M hat offenbar maximal t_2 Elemente. Angenommen sie hat weniger Elemente. Dann gibt es zwei Zahlen n, m aus $\{0, \ldots, t_2 - 1\}$, $n > m$, mit

$$nt_1 \equiv mt_1 \mod t_2$$

Das bedeutet aber $\exists\ j, k \in \mathbb{N}$ mit

$$nt_1 + jt_2 = mt_1 + kt_2, \text{ also}$$

$$(n - m)t_1 = (k - j)t_2$$

Da t_1 und t_2 teilerfremd sind, müsste $(n - m)$ nach dem Lemma von Euklid ein Vielfaches von t_2 sein. $(n - m)$ ist aber kleiner als t_2, Widerspruch.

□

M ist demnach genau $\{0, \ldots, t_2 - 1\}$. Es gibt also t_2 verschiedene Reste und n läuft von 0 bis $t_2 - 1$. Dadurch gibt es nach dem Schubfachprinzip zu jedem Rest genau ein n. Das bedeutet, dass es zu jedem teilerfremden Paar (t_1, t_2) im Bereich $[0, t_1 t_2]$ genau ein Paar $(n_1 t_1, n_2 t_2)$ gibt, für das

$$n_1 t_1 = n_2 t_2 + 1 \tag{2.6}$$

gilt und ebenfalls genau ein Paar mit

$$n_3 t_1 = n_4 t_2 - 1. \tag{2.7}$$

Nach diesem Satz kann man Übergänge mit beliebiger Schrittweite finden. Das wird bei der Seitenbewegung (Abschnitt 2.5.8) gebraucht. Doch wie gesagt sind die Einserschritte wegen des Verweises auf die 1 musikalisch besonders interessant und daher wird in weiterer Folge hauptsächlich damit gearbeitet.

Seien zum Beispiel $t_1 = 3$ und $t_2 = 5$. Dann gilt

$$\begin{aligned} n_1 &= 2 \qquad & n_1 t_1 &= 6 \\ n_2 &= 1 \qquad & n_2 t_2 &= 5 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} n_3 &= 3 \qquad & n_3 t_1 &= 9 \\ n_4 &= 2 \qquad & n_4 t_2 &= 10 \end{aligned}$$

n_1 und n_2 erhält man wie gesagt mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus. n_3 und n_4 berechnet man dann sofort aus den noch zu beweisenden Zusammenhängen $n_1 + n_3 = t_2$ und $n_2 + n_4 = t_1$. Bisher wurde nur gezeigt, dass es solche Übergänge für die Unterstimme gibt. Die Oberstimme erhält man sofort, wenn man die Töne bezüglich des Verschmelzungstons $t_1 t_2$ symmetrisch zur Unterstimme wählt. Wenn $n_1 t_1 = n_2 t_2 + 1$ gilt, dann definiert man [9]

$$k_1 := t_2 - n_1 \tag{2.8}$$

$$k_2 := t_1 - n_2. \tag{2.9}$$

Die k_i sind leichter zu handhaben, weil sie den Abstand der Außenstimmen vom Verschmelzungston angeben, die n_i hingegen den Abstand der Unterstimme zur 0. Einsetzen der n_i liefert

$$t_1 t_2 - k_1 t_1 = t_1 t_2 - k_2 t_2 + 1,$$

also

$$-k_1 t_1 = -k_2 t_2 + 1$$

und damit auch

$$t_1 t_2 + k_1 t_1 = t_1 t_2 + k_2 t_2 - 1.$$

Die so gewonnenen Akkorde haben also die Form

$$\begin{pmatrix} t_1 t_2 + k_1 t_1 \\ t_1 t_2 \\ t_1 t_2 - k_1 t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t_2 + k_1) t_1 \\ t_1 t_2 \\ (t_2 - k_1) t_1 \end{pmatrix}$$

und sie sind harmonisch, denn ihre drei Töne erfüllen die Gleichung $\frac{a+b}{2} = c$:

$$\frac{t_1 t_2 - k_1 t_1 + t_1 t_2 + k_1 t_1}{2} = \frac{2 t_1 t_2}{2} = t_1 t_2$$

Analog für den zweiten Akkord. Im vorigen Beispiel sind

$$k_1 = 3 \qquad k_2 = 2$$

beziehungsweise

$$k_3 = 2 \qquad k_4 = 1.$$

Das liefert die beiden Übergänge

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

[9] analog $k_3 := t_2 - n_3$ und $k_4 := t_1 - n_4$

und

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Wie schon in Abschnitt 2.1 geschrieben wurde, sind die ungeradzahligen die aktiven Töne, die zu ihren benachbarten geradzahligen passiven Tönen streben. Damit ein Übergang von einem System in ein anderes als von sich aus ablaufend wahrgenommen wird, sollten die Töne der Akkorde also von ungeraden zu geraden werden.[10] Das bedeutet, dass die obigen Übergänge eigentlich

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

sind. Der erste Übergang ist also aus dem 5er- in das 3er-System und der zweite aus dem 3er- in das 5er-System. Man kann zeigen, dass es zwischen zwei beliebigen teilerfremden ungeradzahligen Systemen jeweils genau einen Übergang in jede Richtung gibt. Dafür genügt es zu zeigen, dass

$$n_1 + n_3 = t_2.$$

Da t_2 ungerade ist, folgt nämlich, dass von n_1 und n_3 jeweils eine Zahl gerade und eine ungerade ist. n_1 und n_3 bestimmen jeweils die Unterstimme des Akkordes. Also ist ein Akkord aktiv und einer passiv. Damit geht ein Übergang in das t_1-System und einer kommt aus dem t_1-System.

Lemma 2.2. $n_1 + n_3 = t_2$

Beweis: Es wurde schon gezeigt, dass

$$n_1 t_1 = n_2 t_2 + 1$$

$$n_3 t_1 = n_4 t_2 - 1.$$

Addieren der beiden Gleichungen liefert

$$(n_1 + n_3) t_1 = (n_2 + n_4) t_2$$

[10] In weiterer Folge werden immer entspannende Übergänge untersucht. Möchte man bei einem Übergang hingegen Spannung aufbauen, kehren sich die Richtungen um.

Auf der rechten Seite steht ein ganzzahliges Vielfaches von t_2. Also gilt

$$(n_1 + n_3)t_1 \equiv 0 \mod t_2$$

t_1 und t_2 sind teilerfremd, daher ist

$$t_1 \not\equiv 0 \mod t_2,$$

also muss

$$(n_1 + n_3) \equiv 0 \mod t_2$$

sein. Da aber auch gilt

$$0 < n_1, n_3 < t_2,$$

ist

$$0 < n_1 + n_3 < 2t_2$$

und damit

$$n_1 + n_3 = t_2. \tag{2.10}$$

□

Analog erhält man $n_2 + n_4 = t_1$. Daraus folgt auch, dass man sich nicht aussuchen kann, ob sich die Außenstimmen bei dem Übergang auseinander oder zueinander bewegen, wenn man den kleinsten Verschmelzungston verwendet. Es lässt sich zeigen, dass sich die Außenstimmen entweder bei beiden Übergängen auseinander oder bei beiden zueinander bewegen:

Dafür betrachten wir die Unterstimme. Wir gehen wieder von den Gleichungen (2.6) und (2.7) aus. Sei n_1 gerade. Dann ist n_1t_1 ebenfalls gerade und n_2t_2 ungerade. Hier handelt es sich also um einen Übergang aus dem t_2-System in das t_1-System. n_2t_2 ist um 1 kleiner als n_1t_1. Die Unterstimme geht also beim Übergang um 1 nach oben. Daher bewegen sich die Außenstimmen zueinander.

Wenn n_1 gerade ist, muss n_3 ungerade sein. Dann ist n_3t_1 ebenfalls ungerade und n_4t_2 gerade. Hier handelt es sich um einen Übergang aus dem t_1-System in das t_2-System. n_3t_1 ist um 1 kleiner als n_4t_2. Die Außenstimmen bewegen sich also wiederum zueinander.

Wenn n_1 hingegen ungerade ist, folgt analog, dass sich die Außenstimmen bei beiden Übergängen voneinander entfernen. Das Verhalten der Außenstimmen um den kleinsten Verschmelzungston ist durch die beiden Systeme fix bestimmt. Daher ist es charakteristisch für die Wechselwirkung zwischen den jeweiligen Systemen und musikalisch von großer Relevanz. In Tabelle 2.4 wird das für die ersten sechs ungeradzahligen Systeme aufgelistet. a bedeutet, dass sich die Außenstimmen auseinander bewegen, z zueinander. Zwischen 3 und 9 gibt es keine derartigen Übergänge, weil das 9er-System ein Subsystem des 3er-Systems ist.

	3	5	7	9	11	13
3		z	a		z	a
5	z		a	z	a	z
7	a	a		z	z	z
9		z	z		a	a
11	z	a	z	a		z
13	a	z	z	a	z	

Tabelle 2.4: Außenstimmen bei den Übergängen um t_1t_2

2.5.2 Größere Verschmelzungstöne

Es gibt noch andere Verschmelzungstöne, nämlich alle Vielfachen lt_1t_2, $l \in \mathbb{N}$ des kleinsten Verschmelzungstons, sozusagen das t_1t_2-System. Der kleinste Verschmelzungston von zwei ungeradzahligen Systemen ist ungerade. Damit sind die der Größe nach sortierten Verschmelzungstöne abwechselnd gerade und ungerade. Oben wurde gezeigt, dass

$$t_1t_2 - k_1t_1 = t_1t_2 - k_2t_2 + 1$$

gilt, also auch

$$2t_1t_2 - k_1t_1 = 2t_1t_2 - k_2t_2 + 1$$

und allgemein

$$lt_1t_2 - k_1t_1 = lt_1t_2 - k_2t_2 + 1 \qquad \forall\ l \in \mathbb{N}.$$

t_1t_2 ist ungerade, $2t_1t_2$ ist gerade. Wenn k_1t_1 ungerade ist, dann ist die linke Seite der ersten Gleichung gerade (und damit $t_1t_2 - k_2t_2$ ungerade) und die linke Seite der zweiten Gleichung ungerade (und damit $2t_1t_2 - k_2t_2$ gerade). Wenn k_1t_1 gerade ist, ist alles genau umgekehrt.

Insgesamt erhält man: Existiert um einen Verschmelzungston $v_l := lt_1t_2$ ein Übergang vom t_1-System in das t_2-System, bei dem sich die Außenstimmen auseinander bewegen, dann existiert ein Übergang vom t_2-System in das t_1-System um den nächsthöheren Verschmelzungston v_{l+1} (und um den nächstniedrigeren, falls $l \geq 2$), bei dem sich die Außenstimmen zueinander bewegen. Zusätzlich gilt aber: Existiert um v_l ein Übergang vom t_1-System in das t_2-System, bei dem sich die Außenstimmen auseinander bewegen, dann existiert um v_l auch ein Übergang vom t_2-System in das t_1-System, bei dem sich die Außenstimmen auseinander bewegen. Damit lässt sich die erste Aussage verbessern zu:

Existiert um v_l ein Übergang vom t_1-System in das t_2-System, bei dem sich die Außenstimmen auseinander bewegen, dann existiert um v_{l+1} (und um v_{l-1}, falls $l \geq 2$) ein Übergang vom t_1-System in das t_2-System, bei dem sich die Außenstimmen zueinander bewegen.

Man kann also zwischen zwei beliebigen ungeradzahligen teilerfremden Systemen Übergänge in beide Richtungen finden und sich auch aussuchen, wie sich die Außenstimmen dabei verhalten, wenn man bei der Wahl des Verschmelzungstons und damit auch bei der Lage der Akkorde im Klangraum flexibel ist. Es hängt also von l ab, ob die Richtung des Übergangs für k_1 erhalten bleibt oder nicht. Für ungerade l bleibt die Richtung gleich, für gerade l wird sie umgekehrt.

Bei der Wahl von l muss man beachten, dass sich für große l die Außenstimmen zwar weiterhin um 1 bewegen, der Tonschritt aber kleiner wird. Das sieht man daran, dass $\frac{n+1}{n}$ für wachsendes n immer kleiner wird und für große n gegen 1 geht, also gegen die Prim.

Die nun betrachteten Akkorde haben im Prinzip die gleiche Form wie die um den kleinsten Verschmelzungston, nämlich

$$\begin{pmatrix} lt_1t_2 + k_1t_1 \\ lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - k_1t_1 \end{pmatrix}.$$

Zur Veranschaulichung des oben Geschriebenen seien hier Beispiele mit dem 3er- und dem 5er-System mit $l = 1, 2, 3$ angeführt: Aus dem Übergang

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

erhält man die Übergänge

$$\begin{pmatrix} 36 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 51 \\ 45 \\ 39 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Bei den Übergängen haben die Außenstimmen jeweils die Abstände $k_1t_1 = 6$ und $k_2t_2 = 5$ zum Verschmelzungston. Aus dem zweiten Übergang

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

konstruiert man schnell

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 39 \\ 30 \\ 21 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 55 \\ 45 \\ 35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 54 \\ 45 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Die obige Aussage über die Existenz von Übergängen bezieht sich nur auf Akkorde, zwischen deren Außenstimmen nur ein Verschmelzungston liegt. Ab dem zweiten Verschmelzungston existieren auch größere Akkorde. Diese umfassen ein Intervall, das größer als 2 Oktaven ist.

Allgemein gilt: Aus

$$t_1t_2 - k_1t_1 = t_1t_2 - k_2t_2 + 1$$

folgt

$$lt_1t_2 - (k_1 + jt_2)t_1 = lt_1t_2 - (k_2 + jt_1)t_2 + 1$$
$$l \in \mathbb{N},\ j = 0, \ldots, l-1$$

Das ist klar, denn die letzte Gleichung lässt sich auch anschreiben als

$$(l-j)t_1t_2 - k_1t_1 = (l-j)t_1t_2 - k_2t_2 + 1$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dass die Richtung des Übergangs nicht mehr von l, sondern von $l - j$ abhängt. Diese Akkorde haben die Form

$$\begin{pmatrix} lt_1t_2 + (k_1 + jt_2)t_1 \\ lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - (k_1 + jt_2)t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (l+j)t_1t_2 + k_1t_1 \\ lt_1t_2 \\ (l-j)t_1t_2 - k_1t_1 \end{pmatrix}$$

Zur Veranschaulichung wieder Beispiele mit dem 3er- und dem 5er-System mit $l \leq 3$: Aus dem Übergang

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

erhält man für $j = 0$ dieselben Übergänge wie im vorigen Beispiel, für $j = l-1$ die Übergänge

$$\begin{pmatrix} 51 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 81 \\ 45 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 80 \\ 45 \\ 10 \end{pmatrix},$$

und für $0 < j < l-1$ die übrigen, die in diesem Fall aus nur einem Übergang mit $l = 3,\ j = 1$ bestehen:

$$\begin{pmatrix} 66 \\ 45 \\ 24 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 65 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Theoretisch kann man beliebig hohe Verschmelzungstöne verwenden, physiologisch sind dem aber Grenzen gesetzt. Der im Beispiel vorkommende Tonschritt $81 \to 80$ ist ohne Übung nicht zu hören und mit kleineren Schritten haben auch gut trainierte Ohren Probleme.

Für $l \to \infty,\ j = l - 1$ [11] geht das Intervall vom unteren Ton zum Verschmelzungston gegen unendlich. Das obere Intervall vom Verschmelzungston zur oberen Außenstimme geht aber gegen die Oktave. Das sieht man daran, dass die Akkorde folgendermaßen aufgebaut sind:

$$\begin{pmatrix} (l+j)t_1t_2 + k_1t_1 \\ lt_1t_2 \\ (l-j)t_1t_2 - k_1t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2l-1)t_1t_2 + k_1t_1 \\ lt_1t_2 \\ t_1t_2 - k_1t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2lt_1t_2 - t_1t_2 + k_1t_1 \\ lt_1t_2 \\ n_1t_1 \end{pmatrix}$$

Für $l \to \infty$ gelten

$$\frac{lt_1t_2}{n_1t_1} \to \infty$$

und

$$\frac{2lt_1t_2 - t_1t_2 + k_1t_1}{lt_1t_2} \to 2.$$

k_1 ist laut Definition kleiner als t_2. Deswegen konvergiert das Intervall von unten gegen 2. Mathematisch geht das obere Intervall erst im Unendlichen gegen die Oktave, doch das Ohr hört sich das Intervall schon ab einer gewissen Grenze im Endlichen zu einer Oktave zurecht.

Da man die Oktave auf diese Weise konstruieren kann, sagt Schuler, dass sie durch die "harmonische Teilung der Unendlichkeit" entsteht.

2.5.3 Akkorde mit mehr als drei Tönen

Da die Intervalle in den Akkorden insbesondere für $j = l-1$ sehr groß werden, kann man sie mit zusätzlichen Stimmen ausfüllen. Für derartige Füllstimmen hat man mehrere Optionen. Die einfachste ist, einige oder alle im Bereich

[11] allgemeiner für $j = l - \lambda,\ \lambda$ fest

des Akkordes liegende Verschmelzungstöne in den Akkord aufzunehmen. Das liefert Akkorde der Form

$$\begin{pmatrix} (2l-1)t_1t_2 + k_1t_1 \\ (2l-1)t_1t_2 \\ \vdots \\ lt_1t_2 \\ \vdots \\ t_1t_2 \\ t_1t_2 - k_1t_1 \end{pmatrix}$$

Damit solche Akkorde beim Füllen harmonisch bleiben, muss mit dem Ton $(l-j)t_1t_2$ auch der Ton $(l+j)t_1t_2$ in den Akkord aufgenommen werden. Der Akkord soll also weiterhin bezüglich der Mittelstimme (lt_1t_2) symmetrisch sein. Ein Übergang mit derartigen Akkorden wäre zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 55 \\ 45 \\ 30 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 54 \\ 45 \\ 30 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Eine andere Möglichkeit ist, für die Füllstimmen die Außenstimmen von kleineren[12] Akkorden um denselben Verschmelzungston lt_1t_2 zu verwenden. Dadurch erhält man

$$\begin{pmatrix} (2l-1)t_1t_2 + k_1t_1 \\ (l+j)t_1t_2 + k_1t_1 \\ lt_1t_2 \\ (l-j)t_1t_2 - k_1t_1 \\ t_1t_2 - k_1t_1 \end{pmatrix}$$

Doch wie bereits festgestellt wurde, hängt die Richtung des Übergangs von $(l-j)$ ab. Wenn $(l-j)$ gerade ist, wird die Richtung umgekehrt. Um die Richtung auch für gerade $(l-j)$ beizubehalten, muss man an diesen Stellen k_3 statt k_1 verwenden. Das bedeutet, dass sich die entsprechende Füllstimme gegenläufig zur Außenstimme bewegt. Das sieht man an den wechselnden Vorzeichen vor der 1 im mittleren Akkord in der folgenden Darstellung. Sei $(l \pm g)$ gerade und $(l \pm j)$ ungerade. Dann haben die Übergänge den folgenden

[12] kleiner im Sinn von einen kleineren Bereich umfassend

Aufbau:

$$\begin{pmatrix} (2l-1)t_1t_2+k_1t_1 \\ (l+g)t_1t_2+k_3t_1 \\ (l+j)t_1t_2+k_1t_1 \\ lt_1t_2 \\ (l-j)t_1t_2-k_1t_1 \\ (l-g)t_1t_2-k_3t_1 \\ t_1t_2-k_1t_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} (2l-1)t_1t_2+k_1t_1+1 \\ (l+g)t_1t_2+k_3t_1-1 \\ (l+j)t_1t_2+k_1t_1+1 \\ lt_1t_2 \\ (l-j)t_1t_2-k_1t_1-1 \\ (l-g)t_1t_2-k_3t_1+1 \\ t_1t_2-k_1t_1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2l-1)t_1t_2+k_2t_2 \\ (l+g)t_1t_2+k_4t_2 \\ (l+j)t_1t_2+k_2t_2 \\ lt_1t_2 \\ (l-j)t_1t_2-k_2t_2 \\ (l-g)t_1t_2-k_4t_2 \\ t_1t_2-k_2t_2 \end{pmatrix}$$

Das ist zwar simpel, sieht aber unübersichtlich und unhandlich aus. Deutlicher wird es an einem Beispiel[13]:

$$\begin{pmatrix} 84 \\ 66 \\ 54 \\ 45 \\ 36 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 85 \\ 65 \\ 55 \\ 45 \\ 35 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Je nachdem, welche Füllstimmen man in den Akkord aufnimmt, erhält man gleiche oder gegenläufige Bewegungen.

Ein Übergang wird vor allem durch die Außenstimmen[14] bestimmt. Möchte man die Art des Überganges beibehalten, aber gleichzeitig Spannung aufbauen, dann kann man ganz bewusst die Richtungsumkehr bei geraden $(l-j)$ ignorieren und die Füllstimmen von passiven zu aktiven Tönen wechseln lassen. Zwei Übergänge dieser Art wären zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 66 \\ 51 \\ 45 \\ 39 \\ 24 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 80 \\ 65 \\ 50 \\ 45 \\ 40 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 81 \\ 66 \\ 54 \\ 45 \\ 36 \\ 24 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 80 \\ 65 \\ 55 \\ 45 \\ 35 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Beim ersten Übergang bewegen sich alle Außen- und Füllstimmen in die gleiche Richtung, nämlich zum Verschmelzungston. Die inneren Füllstimmen verhalten sich genau wie die zugehörigen Außenstimmen, denn sie wechseln

[13] $t_1 = 3,\ t_2 = 5,\ l = 3,\ g = 1,\ j = 0,\ k_1 = 3,\ k_3 = 2,\ k_2 = 2,\ k_4 = 1$

[14] besonders durch die tiefste Stimme, den Bass.

von ungerade zu gerade. Beim zweiten Übergang verhalten sie sich komplett konträr. Auch hier gilt: Wenn ein Ton in den Akkord aufgenommen wird, muss der bezüglich des Verschmelzungstons lt_1t_2 symmetrische Ton ebenfalls aufgenommen werden, damit der Akkord harmonisch bleibt.

Alle beschriebenen Methoden können beliebig kombiniert werden. Der Komponist hat also eine große Auswahl an Gestaltungsmöglichkeiten für die Übergänge.

Jedes Mal, wenn man vom Ton t_1 auf den Ton t_2 wechselt, ist das auch ein Übergang vom t_1-System in das t_2-System, weil mit jedem Ton auch seine ersten Teiltöne (und damit ein Teil des von ihm erzeugten Systems) mitschwingen. Allerdings hört man diese Übergänge gar nicht bis nicht so gut, wie wenn sie explizit gespielt werden. Das hat mehrere Gründe:

1. Die Obertöne von t_i klingen leiser t_i selbst.
2. Es finden alle Übergänge statt, die mit den erklingenden Obertönen möglich sind - auch die, die Übergänge in die andere Richtung wären, die also eine Anspannung verursachen.
3. Es schwingen nicht nur die Obertöne mit, die für die Übergänge gebraucht werden. Welche Obertöne tatsächlich vorhanden sind, hängt vom Instrument ab.

2.5.4 Sonanz der Akkorde

Anstatt die Töne nur einzeln zu betrachten, kann man wie Martin Vogel die Akkorde als Ganzes untersuchen und in Bezug auf deren Sonanz analysieren. Als erstes wird so weit wie möglich gekürzt. Man betrachtet die Akkorde also im entsprechenden Subsystem und damit unabhängig vom Subsystem. Als Beispiel ein Übergang aus dem 3er-System in das 5er-System:

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}_3 =: a_3$$

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_5 =: a_5$$

Dann wird wie in Abschnitt 2.4 beschrieben die Sonanz berechnet, zum Beispiel mit Vogels Formel:

$$\Gamma_V(a_3) = 5 \qquad \Gamma_V(a_5) = 2$$

Der Übergang

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}_3 \to \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_5$$

hat also einen harmonisch entspannenden Charakter. Gleichzeitig ist es aber ein Übergang aus dem 3er- in das 5er-System. Wie für Töne gilt auch für Systeme, dass ungeradzahlige aktiver als geradzahlige sind, dass primzahlige besonders aktiv sind, und dass diese um so aktiver sind, je höher die Primzahl ist. Es handelt sich also um einen entspannenden Wechsel in ein aktiveres System. Dieser Gegensatz verleiht dem Übergang einen schwebenden und musikalisch interessanten Klang.

Wenn dieser Gegensatz groß wird, beginnt das Ohr, das aktivere System fälschlicherweise als das passivere zu hören und der schwebende Eindruck weicht einem eindeutigen. Hier gibt es einen grundlegenden Unterschied zur herkömmlichen abendländischen Musik: Da der Wechsel in ein aktiveres System als entspannend empfunden werden kann, gibt es Kadenzen, die "nach oben fallen"! Man sagt, sie fallen harmonisch (in ihrem Zusammenklang), aber sie steigen systemisch.

Als Beispiel dazu folgender Übergang aus dem 3er-System in das 13er-System:

$$a_3 := \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 51 \\ 39 \\ 27 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 52 \\ 39 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{13} =: a_{13}$$

Vogels Berechnungsmethode liefert:

$$\Gamma_V(a_3) = 12 \qquad \Gamma_V(a_{13}) = 2$$

a_3 hat durch die Töne 13 und 17 einen sehr aktiven Klang, a_{11} hingegen einen sehr passiven. Dieser Effekt kommt dadurch zustande, dass man, wenn man nur Töne aus einem Subsystem hört, nicht wissen kann, in welchem Subsystem man sich befindet. Wie in der Einleitung gesagt, ist die absolute Tonhöhe irrelevant und nur die Verhältnisse der Töne untereinander sind interessant. Wenn eine Zahl (hier die 13) in jedem Ton vorhanden ist, hört man sie also nicht.

Die 39 wird zuerst als 13_3 verwendet. Durch den Wechsel in das 13er-System wird sie zur 3_{13} und damit verschwindet die in 39 enthaltene 13 gewissermaßen aus der Wahrnehmung. Der sehr aktive Ton wird zu einem relativ passiven, obwohl es noch immer derselbe Ton ist. Das ist offenbar immer zu einem gewissen Grad der Fall, denn bei jedem Übergang vom t_1-System in das t_2-System um den kleinsten Verschmelzungston $t_1 t_2$ wird dieser

Verschmelzungston zuerst als $(t_2)_{t_1}$ und dann als $(t_1)_{t_2}$ verwendet. Ist nun t_2 ein aktiverer Ton als t_1, so enthält der erste Akkord mit dem Verschmelzungston einen relativ aktiven Ton und im zweiten Akkord nimmt dieser Ton eine eher passive Rolle ein. Da die Sonanz eines Akkordes das arithmetische Mittel der Sonanzen der einzelnen Töne ist, beeinflusst dieser Effekt den Übergang entsprechend.

Um dem entgegenzuwirken und um dem Hörer eine Orientierungshilfe zu verschaffen, kann der Komponist die 2 einsetzen. Wenn die systemische 2 im Bass real erklingt, hört man nicht mehr ausschließlich Töne aus dem 13er-System. Dadurch wird die 13 in den Tönen von a_{13} wieder hörbar. Wichtig ist dabei, dass die 2 im Bass verwendet wird, weil sich das Gehör immer am tiefsten Ton orientiert.

Bei den anderen Stimmen kommt man zu keinem so aussagekräftigen Ergebnis, weil sie sich bewegen. Durch den Übergang $n \to n \pm 1$ von ungerade zu gerade lässt sich aber folgendes sagen: Der erste Ton kann als größten Primfaktor maximal n enthalten. Der zweite Ton ist gerade und daher $2k$, $k = \frac{n \pm 1}{2}$. Der größte enthaltene Primfaktor kann also maximal k und damit nur ungefähr halb so groß sein. Deswegen enthalten die geraden Töne bei diesen Übergängen tendenziell kleinere Primfaktoren. Da es hier aber nur darum geht, wie groß sie maximal sein können, kommt es auch vor, dass es umgekehrt ist - vor allem bei Übergängen zu Zahlen der Form $2p,\ p \in \mathbb{P}$. Im letzten Beispiel wird das bei dem Übergang

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \to 26 = 2 \cdot 13$$

deutlich. Melodisch ist der oben stehende Schritt entspannend, doch vom harmonischen Standpunkt aus ist der zweite Ton aktiver, weil er ein Ton des 13er-Systems ist, der erste Ton hingegen nur den Primfaktor 3 enthält. Klarerweise muss man bei einem Wechsel in ein aktiveres System mit aktiven Tönen arbeiten. Das bedeutet, dass dieser Kontrast immer mehr oder weniger stark vorhanden ist. Wenn man diesen Kontrast klein halten möchte, sollte man auf einen möglichst kleinen Systemunterschied achten. An das vorige Beispiel anschließend ist der Wechsel in die andere Richtung

$$\overline{a_{13}} := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{13} = \begin{pmatrix} 65 \\ 39 \\ 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 66 \\ 39 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}_{3} =: \overline{a_3}.$$

Mit Vogels Methode berechnet man wieder die Sonanzen:

$$\Gamma_V(\overline{a_{13}}) = \frac{8}{3} \qquad \Gamma_V(\overline{a_3}) = 9$$

Aus den oben genannten Gründen hat $\overline{a_3}$ mehr Spannung. Diese Kadenz fällt systemisch und melodisch ist sie entspannend, aber sie steigt harmonisch. Der Unterschied der Sonanzen ist nicht mehr so groß wie vorher, aber immer noch sehr deutlich. Betrachtet man die einzelnen Tonschritte im Hinblick auf die in den Tönen enthaltenen Primfaktoren, dann wird die Entspannung deutlicher als bei der Richtung $3 \rightsquigarrow 13$, besonders bei

$$13 \to 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Aber auch bei

$$5 \cdot 13 = 65 \to 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$$

kommen im zweiten Ton die niedrigeren Primfaktoren vor.

Wie man sieht, kann es schwierig sein, einen Übergang von einem sehr aktiven (hohe Primzahl) in ein passives System zu finden, der harmonisch fällt. Vor allem die Tatsache, dass der Grundton des aktiven Systems im Verschmelzungston und damit auch im Akkord im passiven System enthalten ist, macht die Suche schwierig. Eine mögliche Herangehensweise ist die Suche nach Übergängen, bei denen die Außenstimmen (oder wenigstens eine der beiden) im aktiven System auf Primzahlen liegen. Mit dem obigen Beispiel wäre so ein Übergang:

$$\overline{a_{13}} := \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}_{13} = \begin{pmatrix} 143 \\ 117 \\ 91 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 144 \\ 117 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 39 \\ 30 \end{pmatrix}_{3} =: \overline{a_3}.$$

$\overline{a_3}$ ist besonders konsonant, denn er ist auch im 9er-System enthalten:

$$\begin{pmatrix} 144 \\ 117 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}_{9}$$

Die Akkorde dieses Übergangs haben die Sonanzen:

$$\Gamma_V(\overline{a_{13}}) = 8 \qquad > \qquad \Gamma_V(\overline{a_3}) = \frac{23}{3}$$

$\overline{a_3}$ ist also ein bisschen weniger dissonant. Das letzte Beispiel liefert bereits einen neuen Ansatz: Wenn das t_2-System viel aktiver als das t_1-System ist, dann sucht man einen Übergang vom t_2-System in ein Subsystem des t_1-Systems. Man dreht die Situation um, wenn das Subsystem des t_1-Systems aktiver als das t_2-System ist, also wenn man zum Beispiel einen Übergang vom 13er-System in das $3 \cdot 17 = 51$er-System sucht. Doch hier wäre der Verschmelzungston 663 und auch bei dem obigen Beispiel sind die Schritte unter der Wahrnehmungsgrenze. Daher sind die beschriebenen Methoden nur bedingt praxistauglich.

Es liegt nahe, den Quotienten der Sonanzen von zwei Akkorden a und b

$$Q(a,b) := \frac{\Gamma_V(a)}{\Gamma_V(b)} \tag{2.11}$$

als Maß der Entspannung beim Übergang von a nach b zu verwenden, weil beim Klang Verhältnisse relevanter als absolute Höhen sind. Jedoch gilt auch hier, dass Q nicht hundertprozentig aussagekräftig und nur zur qualitativen Analyse brauchbar ist. Bei $Q < 1$ handelt es sich um eine Anspannung.

Man kann für die obigen Berechnungen natürlich auch Γ, $\overline{\Gamma}$, ein Mittel dieser Funktionen oder eine der in Abschnitt 2.4.3 definierten Normen verwenden.

2.5.5 Schleifen

Eine wichtige Eigenschaft des Schulerschen Systems ist die Existenz von Schleifen. Hier wird besonders deutlich, *“dass ein harmonischer Prozess sich nicht unbedingt ins 2er-System “verlaufen“ muss, sondern in einer Art Pendelbewegung um einen Verschmelzungston sich selbst harmonisch aktiv “ewig am Leben“ erhält. Dieses musikalische Phänomen ist einem Schwebezustand vergleichbar, in dem sich der Werdegang des Grundtons entledigt und somit andauernd aktiv bleibt. Dies bestätigt die Ansicht des Autors, dass für eine lang tragende Musikentwicklung das 2er-System unbedingt zu vermeiden ist.“*[15] Das 2er-System hat offensichtlich keine ungeradzahligen, aktiven Töne. Deswegen existiert nach dem beschriebenen Schema kein Übergang aus dem 2er-System in andere Systeme. Die Übergänge mit dem 2er-System werden später in Abschnitt 2.5.7 behandelt.

Eine Schleife hat folgenden Aufbau: Man beginnt mit einem Übergang vom t_1-System in das t_2-System. Dann bleibt man im t_2-System und wechselt dort auf einen aktiven Akkord, der Ausgangspunkt von einem Übergang in das t_1-System ist. Darauf folgt ebendieser Übergang und dort wechselt man zum ersten Akkord zurück. Dabei bleibt die Mittelstimme immer auf demselben Verschmelzungston liegen. Nach den vorangegangen Abschnitten ist eine Schleife um den kleinsten Verschmelzungston mit dem ersten Akkord eindeutig bestimmt. Für ein Beispiel werden wieder das 3er- und das

[15] [1], Seite 189

5er-System herangezogen:

$$\begin{pmatrix}21\\15\\9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20\\15\\10\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}25\\15\\5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}24\\15\\6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}21\\15\\9\end{pmatrix}$$

Wenn die Schleife um einen größeren Verschmelzungston konstruiert wird, braucht man für die Eindeutigkeit Zusatzvoraussetzungen. Wenn man den dritten Akkord angibt, stehen alle Töne fest. Hinreichend ist aber auch die Bedingung, dass sich die einzelnen Stimmen nicht aus ihrem jeweiligen Bereich (v_l, v_{l+1}) bewegen dürfen, weil es zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verschmelzungstönen nur einen Übergang in jede Richtung gibt. Ohne diese Bedingung gibt es um $v_2 = 30$ nicht nur

$$\begin{pmatrix}39\\30\\21\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}40\\30\\20\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}35\\30\\25\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}36\\30\\24\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}39\\30\\21\end{pmatrix},$$

sondern auch

$$\begin{pmatrix}39\\30\\21\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}40\\30\\20\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}55\\30\\5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}54\\30\\6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}39\\30\\21\end{pmatrix}.$$

Da die Außenstimmen innerhalb der Systeme sehr große Sprünge machen, werden in der Praxis ein paar zusätzliche Akkorde eingefügt, sodass die Sprünge auf mehrere kleine Schritte aufgeteilt werden. Generell sind die hier angeführten Beispiele nur als Grundgerüste zu verstehen.

Da die Schleifen eine Abfolge von Übergängen sind, lassen sie sich wie die Übergänge modifizieren und ausbauen. Wieder gibt es zu den Außenstimmen gleich- und gegenläufige Füllstimmen, die optional bei den Übergängen Spannung aufbauen und dafür bei den Schritten innerhalb der Systeme entspannen.

Die ersten beiden Beispiele sind Sonderfälle: Auf eine gewisse Art bestehen sie nämlich nur aus Einserschritten. Betrachten wir das erste Beispiel. Bei dem ersten Übergang sind die Einserschritte wie gehabt. Mit dem zweiten Schritt bleibt man im 5er-System. Diesen Schritt kann man daher anders anschreiben:

$$\begin{pmatrix}20\\15\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}_5 \to \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}_5 = \begin{pmatrix}25\\15\\5\end{pmatrix}$$

Die Außenstimmen bewegen sich also im 5er-System um 1 auseinander. Der dritte Schritt ist wieder klar und der vierte ist analog zum zweiten:

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lemma 2.3. *Derartige Schleifen existieren genau dann, wenn* $|t_1 - t_2| = 2$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass

$$n_1 + 1 = n_3 \wedge n_2 + 1 = n_4,$$

gilt, denn nur, wenn die Übergänge so eng beieinander liegen, genügt ein Einserschritt im jeweiligen System, um vom Endpunkt des einen Übergangs zum Ausgangspunkt des zweiten zu gelangen. Sei oBdA $t_1 = t_2 - 2$. Wir wissen, dass es n_1, n_2 mit der Eigenschaft

$$n_1 t_1 = n_2 t_2 + 1$$

gibt. Nun addieren wir auf beiden Seiten t_1. Das liefert:

$$\underbrace{(n_1 + 1)}_{n_3} t_1 = n_2 t_2 + t_1 + 1 = n_2 t_2 + t_2 - 2 + 1 = \underbrace{(n_2 + 1)}_{n_4} t_2 - 1$$

Die Außenstimmen müssen sich also um t_1 beziehungsweise um t_2 bewegen um von einem Übergang den anderen zu erreichen und das entspricht genau einem Einserschritt in dem jeweiligen System.

Die Übergänge lassen sich direkt berechnen:

$$n_1 + 1 = n_3 \wedge n_1 + n_3 = t_2 \;\Rightarrow\; 2n_1 + 1 = t_2$$

Daraus folgt:

$$n_1 = \frac{t_2 - 1}{2} \quad \text{und} \quad n_3 = \frac{t_2 + 1}{2}.$$

Analog für n_2 und n_4.

Man sieht schnell, dass es für $|t_1 - t_2| > 2$ keine derartigen Schleifen gibt. Sei $t_1 > t_2$. Wir gehen von

$$n_3 t_1 - n_4 t_2 = -1$$

aus. Dann ist

$$(n_3 + 1)t_1 - (n_4 + 1)t_2 > 1$$

und

$$(n_3 - 1)t_1 - (n_4 - 1)t_2 < -3.$$

Kurz:

$$(n_3 \pm 1)t_1 - (n_4 \pm 1)t_2 \neq 1$$

$\square$

Mindestens eine Zahl von n_1 und n_2 unterscheidet sich also um mehr als 1 von n_3 beziehungsweise n_4. Beide Fälle existieren: Es gibt Paare (t_1, t_2), bei denen alle n_i weiter als 1 auseinander liegen, wie zum Beispiel $(5, 11)$. Hier ist:

$$n_1 = 9,\ n_3 = 2$$

$$n_2 = 4,\ n_4 = 1$$

Bei anderen Paaren lässt sich einer der beiden Schritte innerhalb eines Systems aus Einserschritten zusammensetzen. Die n_i des Paares $(5, 13)$ sind:

$$n_1 = 8,\ n_3 = 5$$

$$n_2 = 3,\ n_4 = 2$$

Wenn $t_1 = 3$, dann sind in den Schleifen die Schritte im t_2-System Einserschritte. Das ist leicht zu sehen, denn wir wissen, dass $n_2 + n_4 = t_1$ und $n_2, n_4 < t_1$. Daher ist entweder

$$n_2 = 1,\ n_4 = 2$$

oder umgekehrt. Das bedeutet, dass man mit Einserschritten aus dem 3er-System in jedes System und wieder zurück wechseln kann. Das ist dann aber keine Schleife, weil man zwar in das Ausgangssystem, aber nicht zum Ausgangsakkord zurückkommt. 3 und 7 haben um v_1 die Halbschleife[16]

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 28 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 36 \\ 21 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Die Halbschleifen mit dem 3er-System lassen sich leicht berechnen, denn die beiden mittleren Akkorde haben immer die Form

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{t_2} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{t_2}.$$

Das ist klar, denn der einzige geradzahlige Ton des t_2-Systems unter v_1 ist $2t_2$. Daher muss die Unterstimme beim Übergang aus dem 3er-System in diesen Ton übergehen. Für den Einserschritt innerhalb des Systems bleibt dann nur noch der Schritt auf t_2.

[16]Der Begriff Halbschleife ist so zu verstehen, dass man nach vier Einserschritten keine komplette Schleife erhält. Mit zusätzlichen Akkorden kann man die Halbschleife zu einer Schleife ergänzen.

2.5.6 Schleifen über mehrere Systeme

Das Prinzip der Schleifen kann von zwei auch auf mehrere Systeme ausgeweitet werden. Der kleinste Verschmelzungston von n teilerfremden Systemen t_i ist wieder deren Produkt, also

$$\prod_{i=1}^{n} t_i$$

Diese Produkte werden offenbar schnell sehr groß. Zumindest theoretisch haben solche Schleifen aber eine interessante Eigenschaft: Man kann Schleifen finden, die nur aus Einserschritten bestehen, obwohl sich die einzelnen Systeme um mehr als 2 unterschieden. Als Beispiel eine Schleife durch die Systeme 3, 7 und 11:[17]

$$\begin{pmatrix} 441 \\ 231 \\ 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 440 \\ 231 \\ 22 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 451 \\ 231 \\ 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 450 \\ 231 \\ 12 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 447 \\ 231 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 448 \\ 231 \\ 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 441 \\ 231 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Dass es sich hier nur um Einserschritte handelt, sieht man an der Unterstimme. Dass sich die Oberstimme gleich verhält, wurde schon bewiesen.

$$3_7 \to 2_{11} \to 1_{11} \to 4_3 \to 5_3 \to 2_7 \to 3_7$$

Der größte Schritt in der Oberstimme ist $451 : 440 = 41 : 40$. Dieser Schritt ist nur für geübte Ohren hörbar und die anderen - vor allem die Einserschritte - liegen unter der Wahrnehmungsgrenze. Auch wenn man die Außenstimmen näher an den Verschmelzungston setzen würde, wären die Einserschritte in der Oberstimme nicht wahrnehmbar. Die Schrittweite von $231 : 230$ ist nur circa ein Drittel der benötigten. Daher kann man diese Schleifen in der Praxis nicht einsetzen - zumindest nicht ohne sie stark zu modifizieren.

Die einzelnen Übergänge innerhalb dieser Schleife für sich betrachtet sind Übergänge zwischen 2 Systemen um einen 'hohen' Verschmelzungston. Allgemein ist es ein Wechsel vom t_i-System in das t_j-System um v_k. Bei einer Schleife über n Systeme ist

$$k := \prod_{l \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i,j\}} t_l.$$

[17] $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$

Der erste Übergang in der obigen Schleife ist ein Übergang vom 7er-System in das 11er-System um v_3.

Hat man die Unterstimme einer Schleife um v_1 mit den Tönen $n_i t_j$ gefunden, dann existiert automatisch auch eine Schleife mit einer Unterstimme aus den Tönen $v_1 - n_i t_j$. Dabei bleiben klarerweise die Einserschritte erhalten. Die beiden Unterstimmen bewegen sich auf zwei Arten gegenläufig: Erstens bewegen sie sich immer zu- oder auseinander, niemals parallel. Zweitens durchläuft die neue Unterstimme die Schleife in entgegengesetzter Richtung. Denn da v_1 als Produkt ungerader Zahlen ungerade ist, ist $v_1 - n_i t_j$ genau dann ungerade, wenn $n_i t_j$ gerade ist und umgekehrt. Damit werden die Richtungen der einzelnen Übergänge umgedreht. Angewandt auf das Beispiel mit 3, 7 und 11 ergibt das:

$$\begin{pmatrix} 252 \\ 231 \\ 210 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 253 \\ 231 \\ 209 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 242 \\ 231 \\ 220 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 243 \\ 231 \\ 219 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} 246 \\ 231 \\ 216 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 245 \\ 231 \\ 217 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 252 \\ 231 \\ 210 \end{pmatrix}$$

2.5.7 Übergänge in das 2er-System

Das 2er-System besteht nur aus passiven Tönen. Daher kann es keine Übergänge nach den oben beschriebenen Regeln aus dem, sondern nur in das 2er-System geben. Einige der obigen Eigenschaften bleiben aber erhalten. Sei also $t_1 = 2$ und t_2 ungerade. Dann ist jeder zweite Ton des t_2-Systems ein Verschmelzungston. Es gibt wie gehabt unter dem ersten Verschmelzungston für die Außenstimme 2 Möglichkeiten für einen Übergang. Es existieren die n_i aus den Gleichungen (2.6) und (2.7), aber es gilt

$$n_2 = n_4 = 1.$$

Damit erhält man sofort

$$n_1 = \frac{t_2 + 1}{2} \text{ und } n_3 = \frac{t_2 - 1}{2}.$$

Die beiden Übergänge um den kleinsten Verschmelzungston sind also

$$\begin{pmatrix} 2t_1 t_2 - n_2 t_2 \\ t_1 t_2 \\ n_2 t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t_2 \\ 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3t_2 - 1 \\ 2t_2 \\ t_2 + 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 3t_2 \\ 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3t_2+1 \\ 2t_2 \\ t_2-1 \end{pmatrix}$$

Mit $t_2 = 7$ sind das

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 22 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Man kann sich zwar nicht mehr aussuchen, in welche Richtung der Übergang geht, aber ganz gleichwertig sind diese Übergänge nicht. Man kann bestimmen, ob sich die Außenstimmen zueinander oder auseinander bewegen. 22 und 6 sind aktivere Töne als 20 und 8. Die Fortsetzungsmöglichkeiten sind daher unterschiedlich.

Da n_2 und n_4 zusammenfallen, n_1 und n_3 aber nicht, bietet sich hier eine neue Art des Übergangs: Man kann beide Übergänge kombinieren und die Außenstimmen aufspalten. Allgemein hat das die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 3t_2 \\ 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3t_2+1 \\ 3t_2-1 \\ 2t_2 \\ t_2+1 \\ t_2-1 \end{pmatrix}$$

und wieder konkret mit $t_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 14 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Natürlich kann man all das wieder um größere Verschmelzungstöne konstruieren und Füllstimmen einfügen. Da das keine neuen Ergebnisse liefert und bereits ausführlich beschrieben wurde, wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

Ein wenig anders können die Übergänge aber aussehen, wenn man direkt aus einer Schleife in das 2er-System wechseln möchte. Wenn die Mittelstimme auf einem geradzahligen Verschmelzungston liegt, bleibt alles beim Alten und an die Stelle eines Übergangs in das andere System der Schleife wird einfach ein Übergang in das 2er-System gesetzt. Sei zum Beispiel $t_1 = 3$ und $t_2 = 7$. Dann könnte man eine Schleife um $v_2 = 42$ folgendermaßen beenden:

$$\begin{pmatrix} 57 \\ 42 \\ 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 56 \\ 42 \\ 28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 49 \\ 42 \\ 35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 50 \\ 42 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Hier fällt auf, dass der zweite Akkord auch schon im 2er-System liegt, denn

$$\begin{pmatrix} 56 \\ 42 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}_7 = \begin{pmatrix} 28 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix}_2 .$$

Das ist offenbar in jeder Schleife mit dreitönigen Akkorden um einen geradzahligen Verschmelzungston so. Hier muss aus dem Kontext klar werden, dass der zweite Akkord als Akkord aus dem 7er-System gemeint ist. Um das deutlicher zu machen, kann man Füllstimmen hinzufügen, die von passiv zu aktiv wechseln. Dann sind auch ungeradzahlige Töne im zweiten Akkord und er ist dadurch eindeutig aus dem 7er-System. Hier ein Beispiel dazu:

$$\begin{pmatrix} 69 \\ 48 \\ 42 \\ 36 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 70 \\ 49 \\ 42 \\ 35 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 77 \\ 56 \\ 42 \\ 28 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 76 \\ 56 \\ 42 \\ 28 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die Schlussakkorde der letzten beiden Beispiele sind nur aus dem 2er-System und in keinem anderen Subsystem enthalten.

Die vorher erwähnte Änderung tritt auf, wenn es sich um eine Schleife um einen ungeradzahligen Verschmelzungston handelt. Dann kann die Mittelstimme nicht liegen bleiben. Wenn der Schlussakkord harmonisch sein soll, darf sie sich aber auch nicht nach oben oder nach unten bewegen. Die Lösung für dieses Problem ist, dass sich die Mittelstimme aufspaltet und einen Einserschritt nach oben und nach unten macht. Dieser Einserschritt kann entweder ein absoluter oder ein Einserschritt in dem System sein, aus dem man in das 2er-System wechselt. Mit dieser Aufspaltung erhält man erstmals Akkorde mit einer geraden Anzahl von Tönen. Zur Veranschaulichung wieder ein Beispiel mit 3 und 7:

$$\begin{pmatrix} 27 \\ \\ 21 \\ \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 28 \\ \\ 21 \\ \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 35 \\ \\ 21 \\ \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 34 \\ 22 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder} \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 34 \\ 28 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die gefundenen Möglichkeiten lassen sich wie gehabt ausbauen und miteinander kombinieren.

Generell kann man von jedem Akkord in das 2er-System wechseln, weil jeder Ton entweder in das 2er-System strebt (alle ungeraden Zahlen) oder bereits im 2er-System enthalten ist (alle geraden Zahlen).

2.5.8 Übergänge durch Seitenbewegung

Bei der Seitenbewegung wird eine Außenstimme zur Liegestimme und daher muss sie auf einem Verschmelzungston liegen. Wir betrachten im folgenden Abschnitt Seitenbewegungen mit einer festen Oberstimme. Für die Seitenbewegungen mit fester Unterstimme gilt alles analog, mit einer Ausnahme: Mit einer festen Unterstimme kann es nicht passieren, dass man einen Ton kleiner als 1 erhält. Dieser Sonderfall wird gleich behandelt und stellt keine große Einschränkung dar.

Wie bei der Gegenbewegung sucht man zuerst die n_i und damit die k_i. Ausgehend von den beiden Tönen t_1t_2 und $t_1t_2 - k_1t_1$ wird der Dreiklang harmonisch vervollständigt - diesmal aber nach unten. Man erhält also:

$$\begin{pmatrix} t_1t_2 \\ t_1t_2 - k_1t_1 \\ t_1t_2 - 2k_1t_1 \end{pmatrix}$$

t_1t_2 und k_1t_1 sind beides Töne aus dem t_1-System. Daher ist auch ihre Differenz und allgemein

$$T_1 := \{lt_1t_2 \pm jk_1t_1 = t_1(lt_2 \pm jk_1) \mid j, l \in \mathbb{N}\} \quad (= \{zt_1 \mid z \in \mathbb{Z}\})$$

im t_1-System, wenn man alle nichtpositiven Elemente weglässt. Dann ist diese Menge das ganze t_1-System. Falls man bei der Berechnung der Unterstimme eine negative Zahl erhält, genügt es, zu jedem Ton des Übergangs jv_2 zu addieren. j wird so gewählt, dass alle Töne positiv sind. Die Richtung des Übergangs und die Harmonie der Akkorde bleiben dabei erhalten. Würde man jv_1 addieren, dann würde sich die Richtung bei ungeradem j umkehren, wie wir noch sehen werden.

Die Mittelstimme verhält sich wie die Unterstimme aus der Gegenbewegung. Die neue Unterstimme muss sich um das Doppelte, also um 2 bewegen. Dass so eine Unterstimme existiert, ist leicht zu zeigen, denn aus

$$t_1t_2 - k_1t_1 = t_1t_2 - k_2t_2 + 1$$

folgt

$$t_1t_2 - 2k_1t_1 = t_1t_2 - 2k_2t_2 + 2.$$

Es existiert also ein Ton aus dem t_2-System, der um 2 kleiner als ein Ton aus dem t_1-System ist, und der den Dreiklang im t_2-System harmonisch vervollständigt.[18]

Da sich die Unterstimme um 2 bewegt, bleibt sie ungerade. Sie ist ungerade, weil man sie erhält, indem man eine gerade Zahl $(2k_it_j)$ von v_1 abzieht und v_1 immer ungerade ist. Die Unterstimme eines Dreiklangs ist also genau dann ungerade, wenn das l in v_l ungerade ist. Der Einserschritt und damit ein Wechsel von ungerade zu gerade erfolgt in der Mittelstimme. Dadurch bestimmt die Mittelstimme die Richtung des Übergangs mit. Mit dem 3er- und dem 5er-Systen erhält man folgende Übergänge unter v_1:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Es gibt also unter dem kleinsten Verschmelzungston nicht mehr Übergänge in beide Richtungen. Da nämlich gilt, dass $n_1 + n_3 = t_2$, ist entweder n_1 oder n_3 kleiner als $\frac{t_2}{2}$. Sei $n_1 < \frac{t_2}{2}$. Dann ist $k_1 > \frac{t_2}{2}$ und damit $t_1t_2 - 2k_1t_1 < 0$. Ab v_2 findet man aber sicher dreistimmige Übergänge in jede Richtung, denn

$$k_1 < t_2 \Rightarrow 2k_1t_1 < 2t_1t_2 \text{ und } k_2 < t_1 \Rightarrow 2k_2t_2 < 2t_1t_2.$$

Analog k_3 und k_4.

Im ersten Übergang des letzten Beispiels macht die Unterstimme den Schritt $3 \to 5$. Nach Abschnitt 2.3.1 umspielt sie damit die 4 und das Ohr erwartet die 4 als nächsten Ton. Diese Erwartung kann man übergehen. Möchte man sie erfüllen, kann man dazu eine Gegenbewegung oder eine Rückung verwenden. Mit einer Gegenbewegung erhält man:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[18] analog erhält man mit k_3 und k_4 einen Ton, der um 2 größer ist

Die Rückung hingegen liefert:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dabei ist die erste Variante besser, weil die Mittelstimme auf der 10 liegen bleibt. Erstens ist die 10 ein Ton des 5er-Systems, in das wir ja wechseln wollen, und zweitens bleibt die Mittelstimme damit auf einem geraden Ton liegen. Bei der Rückung ist der Schritt auf die 9 wieder eine Anspannung.

Bei beiden Akkordfolgen ist der letzte Akkord nicht im 5er-System. Man kann noch einen Akkord anhängen, um wieder in das 5er-System zurückzukommen. Die erste Variante wird dann zu:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die gesamte Akkordfolge ist nun ein Übergang vom 3er-System in das 5er-System, bei dem die Regel des Umspielens befolgt wird. Wie schon gesagt, sind die hier angeführten Übergänge nicht notwendigerweise als aus zwei Klängen bestehend zu verstehen, sondern können auch ausgebaut werden. Doch das Anhängen des letzten Akkords ändert nichts an der Tatsache, dass der nun vorletzte Akkord weder aus dem 3er- noch aus dem 5er-System ist. Diese Fremdheit kann sehr störend sein.

Addiert man in dem obigen Übergang mit negativen Zahlen zu jeder Zahl $v_1 = 15$, dann wird er zu

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Wie oben behauptet hat er die Richtung gewechselt. Das muss so sein, weil zu jeder Zahl eine ungerade Zahl addiert wird und damit alle geraden Zahlen zu ungeraden werden und umgekehrt. Es ist derselbe Übergang, den man erhält, wenn man von v_2 ausgeht und wieder k_1 verwendet. Die Richtung ändert sich also wie in Abschnitt 2.5.2 beschrieben, wenn man zum nächstgrößeren Verschmelzungston wechselt. Offenbar kann man auch bei der Seitenbewegung wieder größere Verschmelzungstöne verwenden.

Beim letzten Übergang macht die Mittelstimme einen Einserschritt von ungerade zu gerade und die Unterstimme bleibt gerade. Doch wie in Abschnitt 2.3 bereits festgestellt wurde, ist $12 \rightarrow 10$ eine Oktavierung von

$6 \to 5$. Also ist es ein Wechsel von gerade zu ungerade - die Mittelstimme fällt, die Unterstimme steigt.

Einen eindeutigen Übergang findet man ausgehend von v_4:

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 51 \\ 42 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Hier gehen die Mittelstimme und die Unterstimme von ungerade zu gerade. (die Unterstimme ist $21 \to 20$ oktaviert)

Wie schon gesagt, ist die Unterstimme genau dann gerade, wenn der Verschmelzungston gerade ist. Das bedeutet: Wenn man einen ungeraden Verschmelzungston verwendet, umspielt die Unterstimme einen geraden Ton und man kann die dadurch aufgebaute Spannung wie beschrieben auflösen. Konstruiert man den Übergang hingegen mit einem geraden Verschmelzungston, dann bleibt die Unterstimme gerade und durchläuft einen oktavierten Wechsel, entweder von ungerade zu gerade oder umgekehrt. Das ist so, weil jede zweite gerade Zahl durch 4 teilbar ist. Betrachtet man also zwei benachbarte gerade Zahlen, dann ist eine durch vier teilbar und eine nicht. Das bedeutet, dass eine Zahl eine Oktavierung einer geraden Zahl und die andere eine Oktavierung einer ungeraden Zahl ist. Dabei gilt:

Lemma 2.4. *Bei einer dreistimmigen Seitenbewegung um 1 mit v_{2n} als Liegestimme wechselt die Unterstimme oktaviert von gerade zu ungerade, wenn n ungerade ist, und von ungerade zu gerade, wenn n gerade ist.*

Beweis: Laut Definition gilt: $v_{2n} = 2nv_1$. Die Mittelstimme im ersten Akkord soll ungerade sein, daher ist sie $2nv_1 - u$, u ungerade. Daraus berechnet man die Unterstimme des ersten Akkords. Sie hat die Form

$$2nv_1 - 2u = 2(nv_1 - u).$$

Das bedeutet, dass die Unterstimme die Oktavierung von $(nv_1 - u)$ ist. Da v_1 bekanntlich ungerade ist, ist $(nv_1 - u)$ genau dann ungerade, wenn n gerade ist.

□

Das bedeutet, dass der kleinste Verschmelzungston, mit dem man eine eindeutige Seitenbewegung konstruieren kann, v_4 ist. u kann jede ungerade Zahl sein, für die gilt, dass von $v_{2n} - u$ ein Übergang vom t_1-System in das t_2-System existiert, und dass

$$u < \frac{v_{2n}}{2},$$

damit die Unterstimme nicht negativ wird. Im obigen Beispiel gibt es noch genau ein solches u, nämlich 21. Das liefert den Übergang

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 39 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Wie bereits festgestellt gibt es zwischen zwei Verschmelzungstönen genau einen Übergang in jede Richtung. Mit v_4 als liegende Oberstimme kommen für die Mittelstimme nur der Übergang zwischen v_4 und v_3 und der Übergang zwischen v_3 und v_2 in Frage. Es wurde bereits gezeigt, dass sich die Stimmen in aufeinanderfolgenden Bereichen entgegengesetzt bewegen. Daher gibt es unter v_4 genau einen Übergang, bei dem sich die Stimmen auseinander bewegen, und genau einen, bei dem sie sich zueinander bewegen.

Betrachtet man den Übergang, bei dem die Stimmen möglichst nahe beieinander liegen, kann man sagen: Da man die Mittelstimme der Seitenbewegung so wie die Unterstimme der Gegenbewegung konstruiert, gilt auch bei der Seitenbewegung die Tabelle 2.4 am Ende von Abschnitt 2.5.1 über das Verhalten der einzelnen Stimmen untereinander. Sucht man die kleinsten eindeutigen Übergänge, muss man statt mit v_1 mit v_4 arbeiten und daher werden die Richtungen umgedreht, also a und z vertauscht.

Im Gegensatz zur Gegenbewegung kann man die Verschmelzungstöne hier nicht als liegende Füllstimmen verwenden, weil es bei der Seitenbewegung nur eine Liegestimme gibt. Es gibt aber mehrstimmige Übergänge der Form

$$\begin{pmatrix} lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - k_1t_1 \\ lt_1t_2 - 2k_1t_1 \\ \vdots \\ lt_1t_2 - nk_1t_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - k_2t_2 \\ lt_1t_2 - 2k_2t_2 \\ \vdots \\ lt_1t_2 - nk_2t_2 \end{pmatrix}$$

mit n so klein, dass keine negativen Zahlen vorkommen. Bei einem Übergang dieser Art bewegt sich die Stimme in der j-ten Zeile um $j-1$. Hier ein fünfstimmiges Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 45 \\ 36 \\ 27 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 45 \\ 35 \\ 25 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Offenbar wechselt nur jede zweite Stimme von ungerade zu gerade und die anderen Stimmen bleiben je nach Verschmelzungston ungerade beziehungsweise gerade.

Der Verschmelzungston 15 kommt hier zwar vor, aber nicht in seiner Eigenschaft als Verschmelzungston, sondern nur als Ton des 5er-Systems. Er bleibt nicht liegen, sondern wird zur 18.

Man kann die Stimme unter der Liegestimme auf v_l statt im Bereich (v_{l-1}, v_l) auch weiter unten setzen, aber dann wird die Unterstimme schnell sehr tief beziehungsweise dann muss man die Liegestimme sehr hoch wählen. Wenn die Stimme unter der Liegestimme im Bereich (v_{l-j-1}, v_{l-j}) ist, dann sehen die Übergänge folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - (k_1 + jt_2)t_1 \\ lt_1t_2 - 2(k_1 + jt_2)t_1 \\ \vdots \\ lt_1t_2 - n(k_1 + jt_2)t_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - (k_2 + jt_1)t_2 \\ lt_1t_2 - 2(k_2 + jt_1)t_2 \\ \vdots \\ lt_1t_2 - n(k_2 + jt_1)t_2 \end{pmatrix}$$

Bei $n + 1$ Stimmen muss man also nj Verschmelzungstöne höher beginnen, damit man negative Töne vermeidet. Als Beispiel sei $j = 1$, $n = 2$ und $l = 3$ statt 1:

$$\begin{pmatrix} 45 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ statt } \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ab v_2 existieren natürlich auch wieder Schleifen, die analog zu vorher konstruiert werden. An dem Beispiel

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

erkennt man gut den Unterschied zur Gegenbewegung: Die Unterstimme besteht aus lauter Zweierschritten. Bei den Übergängen sind es 'echte' Zweierschritte, dazwischen sind es Zweierschritte innerhalb eines Systems.

Schleifen mit nur Einserschritten in der Mittelstimme und nur Zweierschritten in der Unterstimme existieren wieder genau dann, wenn $|t_1 - t_2| = 2$.

Auch über mehrere Systeme lassen sich Schleifen bauen. Es gelten alle Ergebnisse aus dem Kapitel 2.5.6. Als Beispiel wieder eine Schleife über die Systeme 3, 7 und 11:

$$\begin{pmatrix} 231 \\ 133 \\ 35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 231 \\ 132 \\ 33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 231 \\ 143 \\ 55 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 231 \\ 144 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 231 \\ 141 \\ 51 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 231 \\ 140 \\ 49 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 231 \\ 133 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Der Vorteil gegenüber der Gegenbewegung ist, dass hier keine Stimme über dem Verschmelzungston liegt. Alle Stimmen, die sich bewegen, liegen sogar deutlich darunter. Einige Schritte der Mittelstimme sind zwar noch unter der Wahrnehmungsgrenze, aber die Situation hat sich deutlich gebessert.

Wie am Anfang dieses Abschnitts behauptet, kann man analog auch Übergänge mit liegender Unterstimme konstruieren. In der dreistimmigen Variante haben sie die Form

$$\begin{pmatrix} t_1t_2 + 2k_1t_1 \\ t_1t_2 + k_1t_1 \\ t_1t_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} t_1t_2 + 2k_2t_2 \\ t_1t_2 + k_2t_2 \\ t_1t_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Übergänge kann man mit den Übergängen mit liegender Oberstimme kombinieren. Am einfachsten geht das, wenn die beiden Liegestimmen identisch sind. Dann erhält man etwas Ähnliches wie die Gegenbewegung. Die drei mittleren Stimmen ergeben genau die dreistimmigen Übergänge der Gegenbewegung. Meistens wird man die Liegestimme auf einem größeren Verschmelzungston als v_1 legen, damit die Übergänge in beide Richtungen existieren. Allgemein hat das die Form

$$\begin{pmatrix} lt_1t_2 + 2k_1t_1 \\ lt_1t_2 + k_1t_1 \\ lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - k_1t_1 \\ lt_1t_2 - 2k_1t_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} lt_1t_2 + 2k_2t_2 \\ lt_1t_2 + k_2t_2 \\ lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - k_2t_2 \\ lt_1t_2 - 2k_2t_2 \end{pmatrix}.$$

Im konkreten Fall mit dem 3er- und dem 5er-Systen sind die Übergänge um v_2:

$$\begin{pmatrix} 48 \\ 39 \\ 30 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ 30 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 30 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Wenn man wie in Kapitel 2.5.2 symmetrisch um den Verschmelzungston andere Verschmelzungstöne hinzufügt, bleibt die Harmonie der Akkorde erhalten. Allerdings sind das dann wieder Liegestimmen, die den Gesetzen der Seitenbewegung nicht gehorchen. Damit das nicht so stört, wie wenn man zum Beispiel die Töne 15 und 45 zum letzten Beispiel hinzufügt, kann man mehrere Verschmelzungstöne zwischen die Seitenbewegungen einfügen. Das liefert die Form

$$\begin{pmatrix} (l+j)t_1t_2 + 2k_1t_1 \\ (l+j)t_1t_2 + k_1t_1 \\ (l+j)t_1t_2 \\ \vdots \\ lt_1t_2 \\ lt_1t_2 - k_1t_1 \\ lt_1t_2 - 2k_1t_1 \end{pmatrix}.$$

Mit $l = 1$, $j = 2$, $t_1 = 3$ und $t_2 = 5$ erhält man den Übergang:

$$\begin{pmatrix} 57 \\ 51 \\ 45 \\ 30 \\ 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 \\ 50 \\ 45 \\ 30 \\ 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bei diesen kombinierten Seitenbewegungen kann man analog zu vorher mehrere Stimmen hinzufügen. Wichtig ist nur, dass man mit jeder Unterstimme die entsprechende Oberstimme ebenfalls in den Akkord aufnimmt.

Der Vorteil gegenüber der mehrstimmigen Gegenbewegung ist, dass die oberen Stimmen größere Schritte als Einserschritte machen und daher nicht so schnell unter die Wahrnehmungsgrenze fallen. Den kleinsten Schritt macht die Stimme über der Liegestimme, denn für die a-te Stimme über der Liegestimme gilt:

$$\frac{lt_1t_2 + ak_1t_1 + a}{lt_1t_2 + ak_1t_1} = 1 + \frac{a}{lt_1t_2 + ak_1t_1} > 1 + \frac{a}{alt_1t_2 + ak_1t_1} =$$

$$1 + \frac{1}{lt_1t_2 + k_1t_1} = \frac{lt_1t_2 + k_1t_1 + 1}{lt_1t_2 + k_1t_1} \qquad \forall a > 1$$

Damit sind die Schritte aller höheren Stimmen größer und auch die Stimmen unter der Liegestimme machen größere Schritte, denn die Schritte dieser Stimmen sind offensichtlich größer als die der ihnen bezüglich des Verschmelzungstons gegenüberliegenden Stimmen.

2.5.9 Übergänge durch Rückung

Bei der Rückung bewegen sich alle Stimmen parallel (um 1).[19] Wir suchen also drei ungeradzahlige Töne aus dem t_1-System, die alle die Eigenschaft

[19]Nach Satz 2.1 kann man Rückungen mit beliebiger Schrittweite finden.

haben, um 1 größer (oder alle um 1 kleiner) als Töne aus dem t_2-System. Sei $v_0 := 0$. Dann gilt: Hat der Ton $v_l + n_i t_1$ die gewünschte Eigenschaft, dann hat der gesuchte Akkord die Form:

$$\begin{pmatrix} v_{l+4j} + n_i t_1 \\ v_{l+2j} + n_i t_1 \\ v_l + n_i t_1 \end{pmatrix} \qquad l \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

j ist in der Praxis meist 1. Die Töne $v_{l+2j+1} + n_i t_1$ sind gerade und werden nur verwendet, wenn der Komponist einen Kontrast einbauen möchte. Die Töne $v_{l+2j+1} + n_j t_1$ $(i \neq j)$ sind zwar ungeradzahlig, aber wenn man diese Töne verwendet, ist der Akkord nicht mehr harmonisch. Der obige Akkord ist harmonisch, denn

$$\frac{v_{l+4j} + n_i t_1 + v_l + n_i t_1}{2} = \frac{v_{2l+4j} + 2n_i t_1}{2} = v_{l+2j} + n_i t_1.$$

Die dreistimmige Rückung aus dem 3er-System in das 5er-System mit den kleinsten Tönen ist:

$$\begin{pmatrix} 69 \\ 39 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Es gilt wieder die Tabelle 2.4 in Abschnitt 2.5.1, aber statt 'zueinander' heißt es jetzt 'nach oben' und 'nach unten' statt 'auseinander'. Dementsprechend ändern sich beide Richtungen, wenn man von v_{l+1} statt von v_l ausgeht. Die Rückung

$$\begin{pmatrix} 84 \\ 54 \\ 24 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 85 \\ 55 \\ 25 \end{pmatrix}$$

geht nach unten und vom 5er-System in das 3er-System.

Wie man an diesen beiden Beispielen sieht, werden die Töne sehr groß. Die niedrigstmögliche Oberstimme eines dreistimmigen Übergängs liegt bereits im Bereich (v_4, v_5). Rein rechnerisch kann man natürlich beliebig große Akkorde erstellen, doch die Schritte in den oberen Stimmen fallen dabei schnell unter die Wahrnehmungsgrenze, wie man am letzten Beispiel sieht. Wenn nur die oberste Stimme unter der Wahrnehmungsgrenze liegt, dann hört man so etwas Ähnliches wie eine Seitenbewegung: Die oberste Stimme ist (vermeintlich) fest und die anderen Stimmen bewegen sich alle nach oben oder alle nach unten, wobei die Stimmen, die von der Oberstimme weiter entfernt sind, größere Intervallschritte machen. Denn $55 \rightarrow 54$ und $25 \rightarrow 24$ sind zwar beides Einserschritte, aber $\frac{25}{24}$ ist größer als $\frac{55}{54}$. Bei der Seitenbewegung unterscheiden sich die Intervallschrittgrößen aber noch stärker.

Die Verschmelzungstöne kann man nicht als Füllstimmen verwenden, weil es bei einer Rückung keine Liegestimme gibt. Das Hinzufügen von einem oder mehreren Verschmelzungstönen würde die Harmoniebedingung verletzen.

Analog zu vorher kann man Schleifen konstruieren. Deren Existenz folgt daraus, dass man eine Stimme wie die Unterstimme in Abschnitt 2.5.5 konstruiert. Die anderen Stimmen der Schleife erhält man durch Addition von jv_2, $j \in \mathbb{Z}$ so, dass alle Töne positiv sind. Da man die Schleifen direkt aus Abschnitt 2.5.5 erhält, gilt auch hier, dass es Schleifen komplett aus Einserschritten genau dann gibt, wenn $|t_1 - t_2| = 2$. So eine Schleife ist zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 69 \\ 39 \\ 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 65 \\ 35 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 66 \\ 36 \\ 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 69 \\ 39 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Theoretisch kann man auch eine Gegenbewegung aus Rückungen konstruieren. Eine dreistimmige Bewegung setzt sich ja auch zwei einstimmigen Rückungen und einem Verschmelzungston dazwischen zusammen. Mit dreistimmigen Rückungen lautet die allgemeine Form mit möglichst niedrigen Tönen:

$$\begin{pmatrix} v_{10} - n_1 t_1 \\ v_8 - n_1 t_1 \\ v_6 - n_1 t_1 \\ v_5 \\ v_4 + n_1 t_1 \\ v_2 + n_1 t_1 \\ v_0 + n_1 t_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} v_{10} - n_2 t_2 \\ v_8 - n_2 t_2 \\ v_6 - n_2 t_2 \\ v_5 \\ v_4 + n_2 t_2 \\ v_2 + n_2 t_2 \\ v_0 + n_2 t_2 \end{pmatrix}$$

Das kleinstmögliche Beispiel dieser Art mit den Systemen 3 und 5 ist:

$$\begin{pmatrix} 141 \\ 111 \\ 81 \\ 75 \\ 69 \\ 39 \\ 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 140 \\ 110 \\ 80 \\ 75 \\ 70 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Das Problem ist, dass man einerseits mindestens sieben Stimmen benötigt und diese andererseits relativ weit auseinander liegen müssen. Deswegen ist es auch mit den kleinsten ungeraden Subsystemen nicht möglich, einen derartigen Übergang zu finden, bei dem alle Intervallschritte der Stimmen oberhalb der Wahrnehmungsgrenze liegen.

2.5.10 Allgemeines zu den Akkordbewegungen

Durch Gegenbewegung, Seitenbewegung und Rückung um t_1 verlässt man das t_1-System offenbar nicht. Die Operationen kommutieren, denn sie sind einfache Additionen von Vielfachen von t_1. Die Verkettung von Gegenbewegungen ist wieder eine Gegenbewegung. Ebenso ist eine Verkettung von Rückungen wieder eine Rückung, und zwar um die Summe der Werte, um die in den einzelnen Schritten gerückt wurde. Die Verkettung von Seitenbewegungen ist nur dann eine Seitenbewegung, wenn immer dieselbe Stimme festgehalten wird. Die Hintereinanderausführung von zwei Seitenbewegung kann auch einer Gegenbewegung oder einer Rückung entsprechen. Wir betrachten zunächst dreistimmige Akkorde. Bewegt man die Mittelstimme jeweils um $z \in \mathbb{Z}$ und verwendet einmal die Unterstimme und einmal die Oberstimme als Liegestimme, dann entspricht das einer Rückung um $2z$. Dabei ist es egal, welche Stimme zuerst liegen bleibt.

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 + z \\ x_1 + 2z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_3 + 2z \\ x_2 + 2z \\ x_1 + 2z \end{pmatrix}$$

Bewegt man die Mittelstimme hingegen erst um z und dann um $-z$, so entspricht das einer Gegenbewegung, bei der sich die Außenstimmen um $2z$ bewegen:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 + z \\ x_1 + 2z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_3 - 2z \\ x_2 \\ x_1 + 2z \end{pmatrix}$$

Für positive z gilt: Hält man erst die Oberstimme und dann die Unterstimme fest, bewegen sich die Außenstimmen zueinander. Sie bewegen sich auseinander, wenn zuerst die Unterstimme und dann die Oberstimme liegen bleibt. Für negative z ist es genau umgekehrt. Auffallend ist, dass man die Stimmen auf diese Art nur um geradzahlige Werte verschieben kann.

Kombiniert man zwei Seitenbewegungen zu einer Rückung, dann gilt allgemein: Hat der Akkord n Stimmen, dann bewegen sich die Stimmen um $(n-1)z$.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_n + (n-1)z \\ x_{n-1} + (n-2)z \\ \vdots \\ x_2 + z \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_n + (n-1)z \\ x_{n-1} + (n-2+1)z \\ \vdots \\ x_2 + (1+n-2)z \\ x_1 + (n-1)z \end{pmatrix}$$

Bei der anderen Kombination wird mit mehr als drei Stimmen deutlich, dass es sich eigentlich um eine wie am Ende von Abschnitt 2.5.8 beschriebene zweifache Seitenbewegung handelt. Bei einer ungeraden Anzahl n von Stimmen gibt es eine 'Liegestimme'[20]. Sei $j := \frac{n+1}{2}$.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{j+1} \\ x_j \\ x_{j-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_n + (n-1)z \\ \vdots \\ x_{j+1} + jz \\ x_j + (j-1)z \\ x_{j-1} + (j-2)z \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_n + (n-1)z \\ \vdots \\ x_{j+1} + 2z \\ x_j \\ x_{j-1} - 2z \\ \vdots \\ x_1 - (n-1)z \end{pmatrix}$$

Wieder bewegen sich die Stimmen nur um gerade Werte. Dazu ein fünfstimmiges Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 24 \\ 21 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 39 \\ 33 \\ 27 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 39 \\ 30 \\ 21 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ist die Anzahl der Stimmen gerade, dann gibt es keine Stimme, die fest bleibt. Das Resultat sind zwei entgegengesetzte Seitenbewegungen, bei denen die Liegestimme fehlt. Eine Verkettung mit $2k$ Stimmen hat die Form

$$\begin{pmatrix} x_{2k} \\ \vdots \\ x_{k+1} \\ x_k \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{2k} + (2k-1)z \\ \vdots \\ x_{k+1} + kz \\ x_k + (k-1)z \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{2k} + (2k-1)z \\ \vdots \\ x_{k+1} + z \\ x_k - z \\ \vdots \\ x_1 - (2k-1)z \end{pmatrix}$$

Hier bewegen sich die Stimmen also nur um ungeradzahlige Vielfache von z. In beiden Fällen bewegt sich jede Stimme um $2z$ weiter oder weniger weit als ihre Nachbarstimme(n). Lässt man beim letzten Beispiel die oberste Stimme weg, dann erhält man:

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 33 \\ 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

[20]Sie liegt im Sinn von: Sie ist am Ende auf dem gleichen Ton wie am Anfang. Der Ausdruck ist gerechtfertigt, da die Verknüpfung der Seitenbewegungen als ein Schritt betrachtet wird.

Im dreistimmigen Fall kann man umgekehrt aus einer Rückung und einer Gegenbewegung eine Seitenbewegung konstruieren:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_3 + z \\ x_2 + z \\ x_1 + z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 + z \\ x_1 + 2z \end{pmatrix}$$

Durch eine Seitenbewegung kann man mehrere Stimmen zusammenfallen lassen, wenn diese untereinander denselben Abstand a haben. Eine Seitenbewegung um a wirkt dann folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_4 = x_2 + 2a \\ x_3 = x_2 + a \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_5 - 4a \\ x_2 + 2a - 3a \\ x_2 + a - 2a \\ x_2 - a \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_5 - 4a \\ \\ x_2 - a \\ \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Dabei bleibt die Harmonie erhalten, denn

$$\frac{x_1 + x_5}{2} = x_3 \Rightarrow \frac{x_1 + x_5 - 4a}{2} = \frac{x_1 + x_5}{2} - \frac{4a}{2} = x_3 - 2a = x_2 - a.$$

Das bedeutet umgekehrt, dass man einen n-stimmigen Akkord als einen Akkord mit mehr als n Stimmen sehen kann, bei dem mehrere Stimmen auf demselben Ton liegen und die man durch eine Seitenbewegung wieder trennen kann.

2.5.11 Wechsel von Schleife zu Schleife

Wenn man sich in einer Schleife befindet, möchte man meistens nicht in das 2er-System wie in Abschnitt 2.5.7 beschrieben auflösen, sondern zum Beispiel in eine andere Schleife wechseln. In diesem Fall gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ein System kommt in beiden Schleifen vor, oder die beiden Schleifen haben kein System gemeinsam.

Wenn ein System in beiden Schleifen vorkommt, liegt es nahe, innerhalb dieses Systems von einem Akkord der ersten Schleife in einen Akkord der zweiten Schleife überzugehen. Im Allgemeinen wird das in mehreren Schritten geschehen. Betrachten wir zunächst nur dreistimmige Schleifen mit Gegenbewegungen.

Sei die erste Schleife $S(t_1, t_2, k_i, v, j)$ [21] [22] und die zweite $\overline{S}(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{k_i}, \overline{v}, \overline{j})$, $i = 1, \ldots, 4$. Kommt ein System in beiden Schleifen vor, dann ist oBdA

[21] j ist das j aus Abschnitt 2.5.2 und gibt an, wieviele Verschmelzungstöne zwischen der Mittelstimme und den Außenstimmen liegen.

[22] Die k_i sind durch t_1 und t_2 eindeutig bestimmt. Daher genügt es, die Schleifen in der Form $S(t_1, t_2, v, j)$ anzugeben.

$t_1 = \overline{t_1}$. Im einfachsten Fall gilt eine der vier Gleichungen

$$\underbrace{k_\mu + jt_2}_{:=\kappa_\mu} = \underbrace{\overline{k_\eta} + \overline{j}\,\overline{t_2}}_{:=\overline{\kappa_\eta}} \qquad \mu, \eta = 1, 3 \tag{2.12}$$

Dann haben die Außenstimmen in einem Akkord im t_1-System in S den gleichen Abstand zur Mittelstimme wie in einem Akkord im t_1-System in $\overline{S}$ und daher kann man mit Rückungen innerhalb des t_1-Systems von einem Akkord zum anderen wechseln. Sei $\kappa_\mu = \overline{\kappa_\eta}$ für ein μ und ein η. Dann kommen in der jeweiligen Schleife folgende Akkorde vor:

$$a := \begin{pmatrix} v + \kappa_\mu t_1 \\ v \\ v - \kappa_\mu t_1 \end{pmatrix} \text{ in } S \text{ und } \overline{a} := \begin{pmatrix} \overline{v} + \overline{\kappa_\eta} t_1 \\ \overline{v} \\ \overline{v} - \overline{\kappa_\eta} t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v} + \kappa_\mu t_1 \\ \overline{v} \\ \overline{v} - \kappa_\mu t_1 \end{pmatrix} \text{ in } \overline{S}$$

Die Töne in a unterscheiden sich also alle um $\overline{v} - v$ von den Tönen in $\overline{a}$. v und $\overline{v}$ sind Töne aus dem t_1-System. Daher ist deren Differenz ein Vielfaches von t_1. Daraus folgt, dass man a durch eine Rückung um $\overline{v} - v$ in $\overline{a}$ überführen kann. Diese Rückung kann man auf $\frac{|\overline{v}-v|}{t_1}$ Rückungen aufteilen und diese Rückungen bestehen aus Einserschritten im t_1-System.

Als Beispiel betrachten wir die Schleifen $S(3, 5, 3, 2, 2, 1, 15, 0)$[23] und $\overline{S}(3, 7, 2, 1, 5, 2, 21, 0)$. Man sieht: $k_3 = \overline{k_1} = 2$. Daher gibt es den Wechsel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\in S} \to \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}.$$

Ist die erste Schleife eine Schleife um v_2, also $S(3, 5, 30, 0)$, dann gibt es ebenfalls so einen Wechsel, nämlich

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 36 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix}}_{\in S} \to \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \\ 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}.$$

$\overline{v}$ liegt immer in einem Bereich $[v_i, v_{i+1})$. Der Spezialfall $\overline{v} = v_i$ wurde bereits im Abschnitt 2.5.6 behandelt. Sei also $v_i < \overline{v} < v_{i+1}$. Da $v_{i+1} - v_i = t_1 t_2$, braucht man t_2 Einserschritte im t_1-System, um von einem Verschmelzungston auf den nächsten zu kommen. Das bedeutet, dass es zu jeder Schleife

[23] Das bedeutet $t_1 = 3,\ t_2 = 5,\ k_1 = 3,\ k_2 = 2,\ k_3 = 2,\ k_4 = 1,\ v = 15,\ j = 0$, analog für $\overline{S}$

$\overline{S}(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{v}, \overline{j})$ eine Schleife $S(t_1, t_2, v, j)$ mit v so gibt, dass man für den Wechsel weniger als $\frac{t_2}{2}$ Schritte innerhalb des t_1-Systems braucht. Für $t_2 = 3$ gibt es also immer einen direkten Wechsel! Von $S(5, 3, 30, 0)$ zu $\overline{S}(5, 7, 35, 0)$ ist dieser Wechsel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 39 \\ 30 \\ 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}}_{\in S} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 50 \\ 35 \\ 20 \end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}$$

Falls keine der Gleichungen (2.12) erfüllt ist, kann man mit Hilfe von Seitenbewegungen oder Gegenbewegungen die Abstände innerhalb eines Akkordes anpassen und dann wie oben mit Rückungen zu $\overline{S}$ überführen. Falls ein Ton der Unterstimme in S auch ein Ton der Unterstimme in $\overline{S}$ ist, kann man den Wechsel rein aus Seitenbewegungen konstruieren. Dieser gemeinsame Ton muss aber aus dem t_1-System sein. Bei der Seitenbewegung bleibt die Unterstimme liegen und die Mittelstimme bewegt sich in Einserschritten im t_1-System von v zu $\overline{v}$. Dadurch bewegt sich die Oberstimme ebenfalls im t_1-System (aber in Zweierschritten) und erreicht den passenden Ton der Oberstimme in $\overline{S}$. Man kann also auch umgekehrt zuerst mit Rückungen eine Außenstimme anpassen und dann mit Seitenbewegungen die anderen Tönen 'nachziehen'. Analog kann die Oberstimme festgehalten werden, falls es in den Schleifen einen gemeinsamen Ton gibt.

Sei nun ein Ton der Unterstimme in beiden Schleifen enthalten. Dann muss der Akkord a in den Akkord $\overline{a}$ übergeführt werden.

$$a := \begin{pmatrix} v + \kappa_\mu t_1 \\ v \\ v - \kappa_\mu t_1 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{a} := \begin{pmatrix} \overline{v} + \overline{\kappa_\eta} t_1 \\ \overline{v} \\ \overline{v} - \overline{\kappa_\eta} t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\overline{v} - (v - \kappa_\mu t_1) \\ \overline{v} \\ v - \kappa_\mu t_1 \end{pmatrix}$$ [24]

Bei diesem Wechsel addiert man zur Mittelstimme insgesamt $\overline{v} - v$. Bei der Seitenbewegung bewegt sich die Oberstimme doppelt so viel wie die Mittelstimme.

$$v + \kappa_\mu t_1 + 2(\overline{v} - v) = 2\overline{v} - v + \kappa_\mu t_1 = 2\overline{v} - (v - \kappa_\mu t_1)$$

Die Oberstimme macht also tatsächlich das von ihr Verlangte. Ein Übergang aus Seitenbewegungen mit fester Unterstimme von $S(3, 5, 15, 0)$ zu $\overline{S}(3, 7, 21, 0)$ ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\in S} \to \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 36 \\ 21 \\ 6 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 28 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}$$

[24] Die Oberstimme berechnet man so: 2 Mal die Mittelstimme minus die Unterstimme

Das nächste Beispiel zeigt den Wechsel mit zuerst einer Seitenbewegung und dann einer Rückung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}25\\15\\5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}24\\15\\6\end{pmatrix}}_{\in S} \to \begin{pmatrix}24\\18\\12\end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix}27\\21\\15\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}28\\21\\14\end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}$$

Führt man zuerst die Rückung und dann die Seitenbewegung durch, sieht das folgendermaßen aus:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}24\\15\\6\end{pmatrix}}_{\in S} \to \begin{pmatrix}27\\18\\9\end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix}27\\21\\15\end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}$$

Wenn man statt der Seitenbewegung die Gegenbewegung verwendet, um die Abstände der Töne im Akkord zu verändern, dann erhält man die Wechsel

$$\underbrace{\begin{pmatrix}24\\15\\6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}21\\15\\9\end{pmatrix}}_{\in S} \to \begin{pmatrix}24\\18\\12\end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix}27\\21\\15\end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}$$

und

$$\underbrace{\begin{pmatrix}24\\15\\6\end{pmatrix}}_{\in S} \to \begin{pmatrix}27\\18\\9\end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix}30\\21\\12\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}27\\21\\15\end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}$$

Der vorletzte Akkord ist in $\overline{S}$, obwohl er nicht die Form

$$\begin{pmatrix}\overline{v} + \overline{\kappa_\eta} t_1\\ \overline{v}\\ \overline{v} - \overline{\kappa_\eta} t_1\end{pmatrix}$$

hat. Das kommt daher, dass die Schleife $\overline{S}(3, 7, 21, 0)$ nicht ausschließlich aus Einserschritten besteht, wie in Abschnitt 2.5.5 beschrieben wurde. Der letzte Schritt in der Schleife

$$\begin{pmatrix}27\\21\\15\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}28\\21\\14\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}35\\21\\7\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}36\\21\\6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}27\\21\\15\end{pmatrix}$$

ist groß (über eine Oktave in der Unterstimme) und wird daher auf mehrere Schritte aufgeteilt, zum Beispiel lauter Einserschritte innerhalb des 3er-Systems:

$$\begin{pmatrix} 36 \\ 21 \\ 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 33 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 30 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Die Unterstimme durchläuft hier alle Werte

$$\overline{v} - \max(\overline{k_1}, \overline{k_3})t_1,\ \overline{v} - (\max(\overline{k_1}, \overline{k_3}) - 1)t_1, \ldots,\ \overline{v} - \min(\overline{k_1}, \overline{k_3})t_1,$$

analog die Oberstimme. Allgemein kann daher die Bedingung für die Existenz eines Wechsels mittels Rückung gelockert werden: Statt einer Gleichung aus (2.12) genügt es, wenn

$$\{\min(\kappa_1, \kappa_3), \ldots, \max(k_1, k_3)\} \cap \{\min(\overline{\kappa_1}, \overline{\kappa_3}), \ldots, \max(\overline{\kappa_1}, \overline{\kappa_3})\} \neq \emptyset$$

erfüllt ist.

Wenn der gemeinsame Ton bei einem Wechsel mit Seitenbewegung nicht aus dem t_1-System stammt, dann bleibt die Mittelstimme zwar im t_1-System, aber die zweite Außenstimme springt durch andere Systeme. Zieht man $S(3, 5, 30, 0)$ heran und verwendet den gemeinsamen Ton 35, der aus dem t_2-System ist, dann erhält man den Wechsel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}}_{\in S} \to \begin{pmatrix} 35 \\ 27 \\ 19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 35 \\ 24 \\ 13 \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 36 \\ 21 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\in \overline{S}}.$$

Im Fall eines direkten Wechsels hat man dieses Problem aber nicht. Da es keine Zwischenschritte gibt, kann die zweite Außenstimme auch nicht auf systemfremde Töne fallen. So ein Wechsel existiert zum Beispiel von $S(5, 3, 30, 0)$ zu $\overline{S}(5, 7, 35, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 39 \\ 30 \\ 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 49 \\ 35 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Das ist eine Seitenbewegung um t_1 (5) aus dem t_2-System (3) in das $\overline{t_2}$-System (7). Bei diesem Wechsel fällt es nicht ins Gewicht, dass das 5er-System in beiden Schleifen vorkommt.

Allgemein kann man sagen: Haben die beiden Unterstimmen oder die beiden Oberstimmen zweier Schleifen einen gemeinsamen Ton, so kann man mittels einer Seitenbewegung direkt von einem Akkord der ersten Schleife zu einem Akkord der zweiten Schleife übergehen. Die Größe der Schritte in dieser Seitenbewegung hängt vom jeweiligen Fall ab und lässt sich nicht allgemein angeben. Setzt man den Zahlen nach oben keine Grenze, kann man natürlich wie in Abschnitt 2.5.6 den gemeinsamen Verschmelzungston der vier Systeme $(t_1 \cdot t_2 \cdot \overline{t_1} \cdot \overline{t_2})$ verwenden und um diesen eine Gegenbewegung mit Einserschritten für den Wechsel finden. Doch erstens liegen diese wie gesagt meist weit unter der Wahrnehmungsgrenze und zweitens wäre das der Spezialfall einer Schleife über vier Systeme.

Man kann aber wie folgt vorgehen, um einen brauchbaren direkten Wechsel mittels Seitenbewegung zu finden: Sei oBdA $\overline{t_1}\,\overline{t_2} > t_1 t_2$. Dann existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$m := |\overline{t_1}\,\overline{t_2} - l t_1 t_2| = \min_{i \in \mathbb{N}}(|\overline{t_1}\,\overline{t_2} - i t_1 t_2|)$$

Man sucht also den Verschmelzungston v_l, der am nächsten an $\overline{v_1}$ liegt. Die Mittelstimme wechselt nämlich vom Verschmelzungston der ersten Schleife zu dem der zweiten Schleife und bewegt sich deshalb um m. Die andere Außenstimme bewegt sich also um $2m$ und deswegen möchte man m klein halten. Über m kann man nur sagen, dass

$$m \leq \frac{t_1 t_2}{2}$$

und deswegen können die Schritte der Stimmen groß werden. Hat man also ein l gefunden, dann überprüft man, ob es zu der Schleife $\overline{S}(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{v_1}, 0)$ eine Schleife $S(t_1, t_2, v_l, j),\ j = 0, \ldots, l-1$ gibt, die mit $\overline{S}$ einen gemeinsamen Ton T in einer Außenstimme hat. Angenommen T ist in der Unterstimme. Dann ist der Wechsel:

$$\begin{pmatrix} 2\overline{v_1} - T \\ \overline{v_1} \\ T \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2\overline{v_1} - T + 2m \\ \overline{v_1} + m \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_l - T \\ v_l \\ T \end{pmatrix}$$

Beim Wechsel von $\overline{S}(7, 11, 77, 0)$ zu $S(3, 5, 75, 1)$ findet man den gemeinsamen Ton 55. Damit konstruiert man:

$$\begin{pmatrix} 99 \\ 77 \\ 55 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 95 \\ 75 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Findet man hingegen keinen gemeinsamen Ton oder ist m zu groß, dann verwendet man $\overline{v_2}$ statt $\overline{v_1}$ und beginnt von vorne. Allerdings hat man auch hier wieder das Problem, dass die $\overline{v_l}$ schnell groß werden.

Ein großes Problem bei diesen direkten Übergängen mittels Seitenbewegung ist, dass die Schritte in den einzelnen Stimmen im Allgemeinen keine Schritte in Subsystemen sind. Der Anfangston und der Endton haben nichts gemeinsam, es fehlt eine Verbindung wie im letzten Beispiel: $77 = 7 \cdot 11,\ 75 = 5 \cdot 5 \cdot 3$. Daher sind diese Schritte sehr schwer zu hören und oft nicht einsetzbar.

Falls S und $\overline{S}$ kein gemeinsames System haben und die beschriebene Methode zu keinem gewünschten Ergebnis führt, kann man auch über eine Schleife $S'(t_x, \overline{t_y}, v', j')$ mit zwei Wechseln von S zu $\overline{S}$ kommen. Das letzte Beispiel könnte dann so aussehen: Als Verbindung von $\overline{S}(7, 11, 77, 0)$ zu $S(3, 5, 75, 1)$ nimmt man $S'(7, 5, 70, 0)$ und erhält die Übergänge:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 99 \\ 77 \\ 55 \end{pmatrix}}_{\in \overline{S}} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 85 \\ 70 \\ 55 \end{pmatrix}}_{\in S'} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 95 \\ 75 \\ 55 \end{pmatrix}}_{\in S}$$

In diesem Fall geht der Wechsel nur deshalb so schnell, weil 55 in allen drei Schleifen enthalten ist. Deswegen kann man ihn mit nur zwei Seitenbewegungen realisieren. Um den Wechsel weniger abrupt zu gestalten, könnte man S' ein Mal komplett durchlaufen. Man kann auch den zweiten gemeinsamen Ton von S' und S verwenden und damit folgendermaßen nach S kommen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 99 \\ 77 \\ 55 \end{pmatrix}}_{\in \overline{S}} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 85 \\ 70 \\ 55 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 84 \\ 70 \\ 56 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 91 \\ 70 \\ 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}}_{\in S'} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 75 \\ 50 \end{pmatrix}}_{\in S}$$

Hier wurden nur Seitenbewegungen mit einem gemeinsamen Ton eingesetzt. Statt dem letzten Schritt könnte man auch mittels einer Rückung wechseln:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 90 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}}_{\in S'} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 95 \\ 75 \\ 55 \end{pmatrix}}_{\in S}$$

Der 'Umweg' über S' existiert in jedem Fall, weil am Anfang dieses Abschnitts gezeigt wurde, dass es zwischen zwei Schleifen, die ein gemeinsames System haben, immer einen Wechsel innerhalb dieses Systems gibt.

2.6 Tonleiterbildung

Das Schema für eine Dur-Tonleiter ist Gt Gt Ht Gt Gt Gt Ht.[25] Für eine Moll-Tonleiter ist es Gt Ht Gt Gt Ht Gt Gt. In der reinen Stimmung entspricht ein Halbton in etwa dem Verhältnis (16 : 15) und ein Ganzton circa (9 : 8).

Zu je 2 Systemen gibt es einen charakteristischen Tonvorrat, den man aus den Übergängen zwischen diesen Systemen erhält. Daraus kann man Tonleitern erstellen. Die Töne entnimmt man meistens aus der Oktave von $v_2 = 2t_1t_2$ bis $v_4 = 4t_1t_2$ und sie sind:

- Die Grundtöne t_1 und t_2 der beiden Systeme beziehungsweise deren Oktavierungen, also $2^n t_i,\ n \in \mathbb{N}$. Davon liegt jeweils eine in $[v_2, v_4]$

- Der Verschmelzungston und seine Vielfachen, insbesondere v_2 bis v_4.

- Die Töne der Außenstimmen bei den Übergängen. Wenn man den Bereich $[v_2, v_4]$ betrachtet, sind die Übergänge um v_3 relevant. Die acht Töne sind also: $v_3 \pm k_1t_1,\ v_3 \pm k_3t_1,\ v_3 \pm k_2t_2$ und $v_3 \pm k_4t_2$

- Die Dominantsysteme[26] von t_1 und t_2, also Töne der Form $3nt_i$ im Bereich $[v_2, v_4]$

Von diesen Tönen fallen oft einige zusammen. Zum Beispiel ist das Dominantsystem des 3er-Systems komplett im 3er-System enthalten, weil 3 ein Teiler von 9 ist. Wenn man zu wenig Material erhält, wird (zusätzlich) die nächsthöhere Oktave $[v_4, v_8]$ herangezogen. In dieser Oktave sind nicht mehr ein, sondern drei Verschmelzungstöne enthalten. In diesem Fall verwendet man alle in dieser Oktave liegenden Übergänge. Die sechzehn Töne erhält man am leichtesten aus den Übergängen um den Verschmelzungston in der Mitte des Intervalls, also v_6. Die im Bereich $[v_5, v_7]$ enthaltenen Töne sind analog zu vorher $v_6 \pm k_1t_1,\ v_6 \pm k_3t_1,\ v_6 \pm k_2t_2$ und $v_6 \pm k_4t_2$. Das sind die Töne aus den Übergängen in Kapitel 2.5.2 mit $l = 6$ und $j = 0$. Die anderen acht Töne erhält man mit $j = 1$.

Nach Schulers Theorie entsteht der Dur-Modus aus der Interaktion des 2er-Systems mit dem 3er-System, der Moll-Modus aus der Interaktion des 3er-Systems mit dem 5er-System. (vgl. [1], Seite 206)

---

[25] Gt = Ganzton, Ht = Halbton

[26] Die Dominante von t_1 ist $3t_1$. Das Dominantsystem von t_1 ist das von $3t_1$ erzeugte System.

2.6.1 Der Dur-Modus

Aus der Kombination des 2er-Systems mit dem 3er-System erhält man um v_3 die Tonmenge

$$\{12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, (24)\}$$

In diesem Fall steuern die Dominantsysteme keine zusätzlichen Töne bei, weil die Dominante des 2er-Systems die 6 und damit gleich dem Verschmelzungston ist, und weil das Dominantsystem des 3er-Systems wie gesagt nur aus Tönen des 3er-Systems besteht. In der nächsthöheren Oktave erhält man folgende Töne:

$$\{24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, (48)\}$$

In dieser Menge kommen alle Töne, die in der Menge um v_3 enthalten sind, ebenfalls vor, nämlich als ihre Oktavierung. Die Auswahl von Tönen aus dieser Menge ist ein künstlerischer Akt und bleibt dem Komponisten überlassen. Kriterien dafür sind:

- Die Oktave sollte relativ gleichmäßig ausgefüllt werden, sodass nicht einerseits sehr kleine Intervalle vorkommen und gleichzeitig zwischen zwei anderen aufeinanderfolgenden Tönen ein großer Abstand ist.
- Der Komponist wählt die Töne so, dass er die gewünschten Intervalle und Übergänge in dem Musikstück realisieren kann.
- Das gezielte Brechen von Regeln kann eine starke musikalische Wirkung entfalten. Daher sind dem Komponisten keine zwingenden Grenzen gesetzt.

Eine Teilmenge und damit eine mögliche Auswahl der obigen Menge sind die Töne von G-Dur:

$$\{24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, (48)\}$$

Vereinigt man die beiden Mengen um v_3 und v_6, dann erhält man alle Töne von C-Dur:

$$\{16, 18, 20, 21, 24, 27, 30, (32)\}$$

Diese beiden Tonleitern sind nicht ganz identisch: Der Schritt vom dritten auf den vierten Ton ist in der G-Dur-Tonleiter der übliche reine Halbtonschritt $16 : 15$, in der C-Dur-Tonleiter nur $21 : 20$. Um das auszugleichen ist der folgende Schritt in C-Dur mit $8 : 7$ größer als der in G-Dur $(9 : 8)$. Beide Schritte zusammen ergeben jeweils die kleine Terz$(6 : 5)$:

$$\frac{16}{15} \cdot \frac{9}{8} = \frac{6}{5} = \frac{21}{20} \cdot \frac{8}{7}$$

Dur	Gt	Gt	Ht	Gt	Gt	Gt	Ht
C-Dur rein	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$
G-Dur	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$
C-Dur	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Tabelle 2.5: Dur-Tonleitern

In Tabelle 2.5 werden die Schritte in den Tonleitern verglichen.

Man kann die G-Dur-Tonleiter auch auf herkömmliche Weise erhalten. Den Tonvorrat erhält man aus drei Dreiklängen: Den Grundakkorden auf dem Ton selbst, auf der Dominante und auf der Subdominante. Die Dominante von G ist D und die Subdominante ist C. Im Schulerschen System ist die Dominante der 3 die 9 (das Dreifache) und die Subdominante die 1 (ein Drittel). Den Grundakkord erhält man jeweils aus dem dritten und dem fünften Teilton. Das liefert aus der Subdominante die Töne $\{1, 3, 5\}$, aus dem Ton selbst (Tonika) $\{3, 9, 15\}$ und aus der Dominante $\{9, 27, 45\}$. Bringt man diese Töne in dieselbe Oktave, dann erhält man insgesamt

$$\{24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, (48)\}$$

und damit dieselben Töne für G-Dur wie vorher.

2.6.2 Der Moll-Modus

Das 3er-System und das 5er-System liefern um v_3 den Tonvorrat

$$\{30, 35, 36, 39, 40, 45, 48, 50, 51, 54, 55, (60)\}$$

Aus dieser Menge erhält man fast H-Moll[27]:

$$\{30, 35, 36, 40, 45, 48, 54, (60)\}$$

Nur der erste Schritt $(35 : 30) \equiv (7 : 6)$ ist größer als üblich. Dadurch muss ein anderer Schritt entsprechend kleiner sein. Hier ist es der zweite Schritt $(36 : 35)$. Damit stimmt das Intervall zwischen dem ersten und dem dritten Ton, denn es ist die für Moll charakteristische kleine Terz $(36 : 30) \equiv (6 : 5)$.

In der nächsthöheren Oktave kommen bis zum Ton 80 noch folgende Töne dazu:

$$\{60, 63, 65, 66, 69, 70, 72, 75, 80\}$$

[27] Der 15. Teilton ist ein H

Gemeinsam mit den Tönen aus dem Bereich $[v_2, v_4]$ liefert das eine Menge, in der alle Töne für E-Moll[28] vorhanden sind, nämlich

$$\{40, 45, 48, 54, 60, 63, 72, (80)\}.$$

In den beiden Moll-Skalen kommen weder die 2 noch eine ihrer Potenzen im Tonvorrat vor. Diese Zahlen können weder in den Übergängen noch im System des Verschmelzungstons oder in den Dominantsystemen vorkommen, weil sie nur im 2er-System enthalten sind und dieses System bei der Erstellung der Skalen nicht beteiligt ist. Man sagt, dass sich diese Tonleitern vom Grundton losgelöst haben.

Tabelle 2.6 vergleicht die A-Moll-Tonleiter der reinen Stimmung mit den neu gewonnenen Moll-Tonleitern.

Moll	Gt	Ht	Gt	Gt	Ht	Gt	Gt
A-Moll rein	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$
E-Moll	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{10}{9}$
H-Moll	$\frac{7}{6}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$

Tabelle 2.6: Moll-Tonleitern

Man kann also Tonleitern erstellen, die sehr ähnlich oder sogar gleich wie die herkömmlichen Tonleitern der reinen Stimmung aufgebaut sind. Man muss sich aber nicht darauf beschränken, sondern hat eine viel größere Auswahl zur Verfügung.

2.6.3 Beispiel einer Skala

Erstellen wir nun eine neuartige Tonleiter. Im Abschnitt 2.5 wurden meist die Systeme 3 und 5 herangezogen. Sie werden auch jetzt verwendet, weil die Übergänge zwischen diesen Systemen nun bekannt sind. Möchte man sämtliche dreistimmigen Übergänge durch Gegenbewegung um $v_2 = 30$ im Stück einsetzen, braucht man die Töne

$$\{5, 6, 9, 10, 20, 21, 24, 25, 30, 35, 36, 39, 40, 50, 51, 54, 55\}.$$

Nun wird noch 45 als 3_{15} hinzugefügt. Mit diesen Tönen kann man auch alle Übergänge durch Gegenbewegung um $v_1 = 15$ [29] und die Übergänge um v_3

[28] $40 \equiv 5$ ist ein E

[29] 15 ist als Oktavierung der 30 in der Menge enthalten.

mit $j = 0$ [30] aus Abschnitt 2.5.2 konstruieren. Wäre $j > 0$, dann würde man ungerade Zahlen größer als 60 benötigen. Doch wenn man nur die obigen Töne verwendet und sie oktaviert, gibt es keine ungeraden Zahlen, die größer als 60 sind.

Transponiert man alle vorhandenen Töne in die Oktave $[30, 60]$, erhält man:

$$\{30, 35, 36, 39, 40, 42, 45, 48, 50, 51, 54, 55, (60)\}$$

In dieser zwölftönigen Skala kann man unter anderem folgende Intervalle realisieren:

$$\frac{t+1}{t} \qquad t = 1, \ldots, 17$$

Das bedeutet, dass in diesem Fall alle Primzahlen bis zur 17 verwendet werden, was eine deutliche Erweiterung der traditionellen Musik ist (siehe Anfang von Kapitel 2). Es kommen nicht alle Intervalle der Form

$$\frac{17}{n} \qquad n < 17$$

vor, denn die 17 ist nur als Teilton des 3er-Systems vorhanden. $5 \cdot 17 = 85$ ist in dieser Skala nicht enthalten. Gibt es nun einen Ton wie hier die 11, der nur im 5er-System vorkommt[31], dann kann man das Intervall $17 : 11$ mit diesen Tönen nicht bilden.

Wie auch schon bei den vorher konstruierten Moll-Skalen kommen weder die 2 noch eine ihrer Potenzen im Tonvorrat vor und auch diese Skala hat sich damit vom Grundton losgelöst. Dennoch existieren die Intervalle $17 : 2^n$, weil man verlangt, dass die beiden Grundtöne der interagierenden Systeme vorhanden sind. Daher gibt es hier zum Ton $51 = 3 \cdot 17$ einen Ton $3 \cdot 2^n$. Diese beiden Töne stehen im Verhältnis:

$$\frac{3 \cdot 17}{3 \cdot 2^n} = \frac{17}{2^n}$$

Mit den vorkommenden Primzahlen kann man also die für sie charakteristischen Intervalle bilden. Das gilt auch für die Grundtöne der beiden Systeme, aber hier muss man anders argumentieren: Der Verschmelzungston bildet mit dem Grundton des einen Systems genau das charakteristische Intervall des Grundtons des anderen Systems.

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{t_1 t_2}{t_1} = \frac{t_2}{1} \quad \text{und} \quad \frac{v_1}{t_2} = \frac{t_1 t_2}{t_2} = \frac{t_1}{1}$$

[30] Das sind die Übergänge, bei denen die Außenstimmen möglichst nahe am Verschmelzungston sind.

[31] $33 = 3 \cdot 11$ fehlt

Die 19 und alle höheren Primzahlen sind in keinem der Töne als Primfaktor enthalten. Deswegen kommen sie in dieser Skala gar nicht vor. Möchte man aber auch alle Rückungen und Seitenbewegungen verwenden, braucht man zusätzlich die Töne 33 und 57. Damit kommt die 19 neu zur Skala dazu. Außerdem ist die 11 jetzt auch im 3er-System. Daher existiert in diesem Fall das Intervall 17 : 11.

Man sieht also, dass das Modell sehr flexibel ist und vom Komponisten seinen Wünschen und Vorstellungen entsprechend angepasst werden kann.

Anhang A

Regeln in Schulers Modell

- Jede natürliche Zahl entspricht einem Ton. Das Verhältnis zweier Zahlen entspricht dem Verhältnis der Frequenzen der entsprechenden Töne.
- Die 1 ist die Einheit/Gesamtheit und kommt als Ton nicht vor.
- Die 2 ist der Grundton. Sie und ihre Potenzen sind das passive Zentrum.
- Ungerade Zahlen sind aktiver als gerade Zahlen. Primzahlen sind besonders aktiv; je höher, desto aktiver.
- Ungerade Zahlen streben zu ihren geraden Nachbarn.
- Das Erreichen der 2 ist so lange wie möglich hinauszuzögern. Zum Beispiel können die Schleifen (Abschnitt 2.5.5) dafür verwendet werden.
- Übergänge zwischen Systemen sind im Fall eines Wechsel von gerade zu ungerade aktiv öffnend. Passiv schließende Übergänge wechseln von ungerade zu gerade.
- Ein dreistimmiger Akkord ist genau dann harmonisch, wenn seine Töne die Gleichung des arithmetischen Mittels erfüllen.
- Die Bewegungsformen der Akkorde sind Gegenbewegung, Seitenbewegung und Rückung. (Abschnitt 2.5)
- Das Ohr orientiert sich am Bass.

Literaturverzeichnis

[1] Thomas Schuler: *Fraktale Tonalität: Von den Angeboten energetischer Musik und ihrer Bedeutungen für mikrotonale Skalenbildungen*, 2005

[2] Alexander Aigner: *Zahlentheorie.* Berlin: de Gruyter, 1974

[3] Ernst Bindel: *Die Zahlengrundlagen der Musik im Wandel der Zeiten.* Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben, 1985, 2. Auflage

[4] Guerino Mazzola: *Geometrie der Töne: Elemente der Mathematischen Musiktheorie.* Basel: Birkhäuser Verlag, 1990

[5] Rudolf Wille: *Mathematik und Musiktheorie* in: *Musik und Zahl*. Hg. v. Günter Schnitzler. Bonn: Verlag für systematische Musikwissenschaft, 1976

[6] Franz Richter-Herf: *Mikrotöne: Internationales Symposium Mikrotonforschung*. Innsbruck: Helbling, 1986

[7] Franz Richter-Herf: *Mikrotöne II: Bericht über das 2. internationale Symposium Mikrotonforschung*. Innsbruck: Helbling, 1988