
Betreuer



DIPLOMARBEIT

TEILCHENVERNICHTUNG IN EINER KLASSE VON EBENFRONTIGEN GRAVITATIONSWELLEN-GEOMETRIEN

AUSGEFÜHRT AM
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

BETREUER:
PRIVATDOZ. DIPL.-ING. DR. TECHN. HERBERT BALASIN

DURCH
LUKAS WALZEK
MATR.NR.: 1126679
LUKAS.WALZEK@TUWIEN.AC.AT
BREITENSEERSTR. 110/16/7
1140 WIEN

4. Juli 2017

Student

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	pp-Wellen Geometrien	2
1.2	Anmerkungen zu Lichtkegel Koordinaten	4
2	Mathematische Hilfsmittel	7
2.1	SCHWARZsche Distributionen Theorie	7
2.1.1	Testfunktionen	7
2.1.2	Distributionen	8
2.1.3	Verallgemeinerung auf n -dimensionale Mannigfaltigkeiten	8
2.1.4	Differentiation	9
2.1.5	Regularisierung von divergenten Integralen	10
2.1.6	Multiplikation auf $\mathcal{K}' \times \mathcal{K}'$	11
2.1.7	Anwendung auf impulsive pp-Wellen - naive Rechnungen	14
2.2	COLOMBEAU Theorie	17
2.2.1	Motivation	17
2.2.2	Die Theorie	18
2.2.3	Assoziation	20
2.2.4	Korrektur der naiven Rechnungen	22
3	Klein-Gordon-Felder und die Feynmansche Interpretation	27
3.1	KLEIN-GORDON-Feld im flachen Raum	27
3.2	Energie Impuls Tensor das KLEIN-GORDON-Feldes	28
3.3	Positive und negative Frequenz	29
3.4	BOGOLUBOV-Koeffizienten	31
3.5	DIE FEYNMANSche Interpretation	33
4	Klassischer thermischer Energie Impuls Tensor	35
4.1	Relativistische Thermodynamik	35
4.2	Ultrarelativistischer Limes des thermischen Energie Impuls Tensors	36

5	Streuprozesse und Teilchenvernichtung	42
5.1	COLOMBEAUSche Anschlussbedingung	43
5.2	Schrödinger Gleichung	45
5.3	Teilchen Vernichtung	46
5.4	PENROSE Klebemethode (Scissors and Paste)	48
6	Zusammenfassung und Ausblick	50

Kurzfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, der Frage nach dem Auftreten von Teilchenvernichtung in pp-Wellen Geometrien, im Rahmen des FEYNMANSchen Bildes nachzugehen. Dabei handelt es sich um ebenfrontige Gravitationswellen mit parallelen Strahlen. Ergänzend berechnen wir den distributionellen ultrarelativistischen Limes des klassischen thermischen Energie-Impuls-Tensors der SCHWARZSCHILD Geometrie. Den mathematischen Rahmen bildet eine Einführung in die Distributionen Theorie, sowie in die verallgemeinerten Funktionen nach COLOMBEAU.

Abstract

The aim of this thesis is to investigate the possibility of particle annihilation in plane fronted gravitational waves with parallel rays, using the FEYNMAN picture. This investigation is complemented by the calculation of the ultrarelativistic limit of the thermal energy-momentum-tensor of the SCHWARZSCHILD geometry. The mathematical frame of this work is an introduction to distribution theory and to the theory of generalized functions by COLOMBEAU.

Notationen & Konventionen

- Wir verwenden die Metrik Konvention $(-, +, +, +)$.
- g_{ab} ist die Metrik der vollen Raumzeit. Die MINKOWSKI-Metrik wird mit η_{ab} bezeichnet.
- Alle Ableitungen wirken per Definition nur auf das Objekt rechts davon.
- Getildete Größen bezeichnen, wenn nicht anders erwähnt, die räumlichen Komponenten eines Vierervektors in Lichtkegel Koordinaten.
- In dieser Arbeit verwenden wir die abstrakte Index-Notation, dabei beziehen sich die Indizes nicht auf ein konkretes Basissystem.

Grundlegende Formeln und Relationen

Dieses Kapitel dient dazu, dass Differenzial Kalkül und die grundlegenden Formeln der allgemeinen Relativitätstheorie, zu wiederholen.

- Differenzialformen: Dabei handelt es sich um total antisymmetrische, kovariante Tensorfelder. Im weiteren bezeichnen ω eine p-Form, φ eine q-Form und v ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\omega \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \omega, \quad (0.0.1)$$

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi, \quad (0.0.2)$$

$$v \lrcorner (\omega \wedge \varphi) = (v \lrcorner \omega) \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge (v \lrcorner \varphi). \quad (0.0.3)$$

- LIE-Ableitung: Diese beschreibt die Änderung tensorieller Größen unter der von einem Vektorfeld erzeugten Strömung. Die LIE-Ableitung ist definiert über

ihre Wirkung auf Vektor-, bzw. Kovektorfelder. Für einen allgemeinen Tensor der Stufe (p, q) gilt

$$L_v t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} = v^c \nabla_c t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} - \sum_{i=1}^p t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots c \dots a_p} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{i=1}^q t_{b_1 \dots c \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \nabla_{b_i} v^c \quad (0.0.4)$$

und des Weiteren gilt für Formen die Relation

$$L_v \omega = [d, v \lrcorner] \omega = d(v \lrcorner \omega) + v \wedge d\omega. \quad (0.0.5)$$

Sie erfüllt die folgende Relation

$$L_{[v,w]} = [L_v, L_w]. \quad (0.0.6)$$

- Kovariante Ableitung: Um den Begriff der infinitesimalen Änderung zu beschreiben, bedarf es einer, i.A. wegabhängigen Parallelverschiebung, welche die kovariante Ableitung bestimmt. Der Differenzentensor C_{bc}^a beschreibt die Tatsache, dass die Differenz zweier kovarianter Ableitungen $\tilde{\nabla}_c, \nabla_c$ eine algebraische Derivation ist, es gilt:

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) v^b &= C_{ca}^b v^c \\ (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) \omega_b &= -C_{ba}^c \omega_c. \end{aligned}$$

Ist eine der beiden kovarianten Ableitungen LEVI-CIVITA bezüglich einer Metrik g_{ab} so gilt der Zusammenhang,

$$C_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cm} (\tilde{\nabla}_b g_{am} + \tilde{\nabla}_a g_{mb} - \tilde{\nabla}_m g_{ab}). \quad (0.0.7)$$

Der Kommutator zweier kovarianter Ableitungen, wirkend auf ein Vektorfeld, wird mit dem RIEMANN-Tensor identifiziert

$$[\nabla_a, \nabla_b] v^c = R_{dab}^c v^d.$$

Dieser charakterisiert die kovariante Ableitung. Bei der Wirkung auf ein Kovektorfeld ändert sich allerdings ein Vorzeichen

$$[\nabla_a, \nabla_b] \omega_d = -R_{dab}^c \omega_c.$$

Der RIEMANN-Tensor ist symmetrisch unter der Vertauschung der beiden Indexblöcke $R_{abcd} = R_{cdab}$, jedoch anti-symmetrisch in den jeweiligen Indexblöcken

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}.$$

Der RICCI-Tensor ist definiert als die Spur des RIEMANNNS

$$R_{ab} := R^c_{acb}.$$

Zuletzt geben wir noch den Zusammenhang zwischen RIEMANN-Tensor und Differenzen-Tensor an [1]

$$\tilde{R}^c_{adb} = R^c_{adb} + \nabla_d C^c_{ab} - \nabla_b C^c_{ad} + C^c_{md} C^m_{ab} - C^c_{mb} C^m_{ad}. \quad (0.0.8)$$

Symbole und Zeichen

η_{ab}	MINKOWSKI Metrik
g_{ab}	Raumzeit Metrik
$f(\tilde{x}, u)$	Wellenprofil
$\tilde{f}(\tilde{x})$	reduziertes Wellenprofil
G_{ab}	EINSTEIN-Tensor
$R^a{}_{bcd}$	RIEMANN-Tensor
∇_a	LEVI-CIVITA-Ableitung bzgl. g_{ab}
\mathcal{C}_0^∞	Raum der glatten Funktionen mit komp. Träger
\mathcal{K}	Raum der Testfunktionen
\mathcal{K}'	Raum der Distributionen
\mathcal{E}	Raum der glatten Funktionen
\mathcal{E}'	Raum der Distributionen mit komp. Träger

Kapitel 1

Einleitung

Die Entdeckung der Teilchenerzeugung in Gravitationsfeldern und die sogenannte HAWKING-Strahlung von schwarzen Löchern im speziellen, stellen eine interessante Verbindung von Quantentheorie und Gravitation dar. Hier wird allerdings die Gravitation, durch eine Raumzeit als fester Hintergrund, also durch eine allgemein relativistische Quantentheorie, beschrieben. Nichtsdestotrotz sind im speziellen bei schwarzen Löchern, aufgrund der nicht trivialen Geometrie, durchaus interessante Abweichungen von der (speziell-)relativistischen Quantenmechanik zu erwarten. HAWKINGS Entdeckung, dass im asymptotischen Bereich eines stationären schwarzen Loches der Teilchenstrom, der in der Umgebung des Horizonts erzeugten Teilchenpaare einer PLANCKverteilung genügt und deshalb einer definierten Temperatur entspricht[2], war demnach eine Überraschung, deren Auswirkungen bis heute zu zahlreichen tiefgreifenden Fragen über die Quantentheorie der Gravitation Anlass geben. In der vorliegenden Arbeit möchten wir uns mit einem Grenzfall dieses Effekts beschäftigen, nämlich dem Verhalten von Teilchenerzeugung und Vernichtung in sogenannten ebenfrontigen Gravitationswellen mit parallelen Strahlen (kurz pp-Wellen). Die Verbindung zu HAWKINGS Arbeit rührt von einer anderen Untersuchung durch AICHELBURG und SEXL[3], welche die Veränderung der Raumzeitgeometrie, bezüglich eines (asymptotisch) mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Beobachters, bzw. im Sinne der Relativitätstheorie mit Lichtgeschwindigkeit bewegten schwarzen Loches, untersucht. Dieser Grenzwert ist natürlich nur unter einer damit einhergehenden Verminderung der Gesamtmasse des schwarzen Lochs durchführbar, stellt also den Limes $M \rightarrow 0$ dar. Hier würde aber unter naiver Betrachtung der SCHWARZSCHILD-Lösung, diese in den flachen Raum übergehen. AICHELBURG und SEXL gelang es den ultrarelativistischen Grenzfall der SCHWARZSCHILD-Geometrie zu berechnen und dieser ergibt tatsächlich einen flachen Raum, mit Ausnahme einer

lichtartigen Hyperebene, welche die gesamte Krümmung enthält. Die so gefundene Lösung stellt eine impulsive Gravitationswelle - eine sogenannte pp-Welle mit impulsiven Wellenprofil - dar. Diese Ideen wurden von anderen Autoren auf weitere Geometrien übertragen,[4, 5] welche ebenfalls impulsive pp-Wellen ergeben.

Die mit HAWKINGS Rechnung verbundene Frage ist nun, was in dieser Geometrie mit der Teilchenstrahlung passiert. Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, dass HAWKING-Strahlung in allgemeinen pp-Wellen Geometrien nicht ausgeschlossen ist, dazu machen wir uns die FEYNMAN-Interpretation zunutze. Wir betrachten also Streuprozesse (im speziellen ein KLEIN-GORDON-Feld) und errechnen mittels der COLOMBEAUSchen-Theorie, eine Anschlussbedingung zwischen dem Feld vor und jenem nach dem Schock.

In Abschnitt 2.1 starten wir mit einem kurzen Überblick über die SCHWARZsche Distributionen Theorie. Dieser mündet dann in den Problemen, die es bei Produkten von „herkömmlichen“ Distributionen gibt. Der Höhepunkt dieses Abschnitts ist das SCHWARZsche Unmöglichkeitsresultat. Beendet wird dieser dann mit zwei kurzen Beispielen aus der Physik, in denen gezeigt wird, dass schon bei einfachen Streuprozessen, Produkte aus Distributionen auftreten können. Im Abschnitt 2.2 wird dann, die bereits erwähnte COLOMBEAU-Theorie vorgestellt und die physikalischen Beispiele aus dem vorherigen Abschnitt werden im COLOMBEAU-Stil präsentiert. Kapitel 3 dient dazu, den Formalismus hin zum HAWKING-Effekt zu rekapitulieren. Im folgenden Kapitel betrachten wir dann den klassischen, thermischen Energie-Impuls-Tensor einer „pp-Welle“ und berechnen von diesem den ultrarelativistischen Limes. In Kapitel 5 wird dann die Anschlussbedingung eines KLEIN-GORDON-Feldes berechnet und gezeigt, dass es unter gewissen Bedingungen sehr wohl möglich ist, HAWKING-Strahlung zu entdecken.

1.1 pp-Wellen Geometrien

Ebenfrontige Gravitationswellen mit parallelen Strahlen (kurz pp-Wellen) wurden erstmals 1960, von EHLERS und KUNDT klassifiziert [6]. Sie enthalten als Spezialfall ebene Gravitationswellen, welche die einfachste exakte Gravitationswellen Lösung der allgemeinen Relativitätstheorie darstellen. Bedeutend mehr Interesse wurde ihnen zuteil, als 1971 AICHELBURG und SEXL den ultrarelativistischen Boost der SCHWARZSCHILD-Metrik durchführten und dabei eine spezielle, impulsive (d.h. δ -förmig im Krümmungstensor), pp-Welle als Lösung fanden [3].

Abseits von den Vakuum EINSTEIN Gleichungen kann man pp-Wellen auch abstrakt, als Raumzeit-Geometrien, welche ein kovariant konstantes lichtartiges Vektorfeld p^a besitzen, definieren [6].

In dieser Arbeit sind wir speziell an impulsiven pp-Wellen interessiert, für diese können folgende Annahmen getroffen werden:

- Die Geometrie wird bestimmt durch ein Wellen-Profil $f(\tilde{x}, px, \bar{p}x)$.¹
- Die Änderung $(p\partial)f = 0$, woraus $f(\tilde{x}, px, \bar{p}x) = f(\tilde{x}, px)$ folgt.
- Die Geometrie ist, bis auf einer lichtartigen Hyperfläche flach $\implies f(\tilde{x}, px) = \tilde{f}(\tilde{x})\delta(px)$, mit dem reduzierten Wellen-Profil \tilde{f} .

All diese Annahmen führen dazu, dass die Metrik in folgender Form geschrieben werden kann (BRINKMAN-Koordinaten)

$$g_{ab} = \eta_{ab} + f(\tilde{x}, px)p_ap_b = \eta_{ab} + \delta(px)\tilde{f}(\tilde{x})p_ap_b. \quad (1.1.1)$$

Anhand dieser Zerlegung erkennt man, dass \bar{p}^a nur bezüglich η , lichtartig ist. Des Weiteren gilt $\bar{p}p = -1$. Unter Verwendung von Gleichung 0.0.7 und 0.0.8, ist es möglich den RICCI-Tensor zu berechnen

$$R_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^2 f p_a p_b.$$

Das konjugierte Vektorfeld \bar{p}^a hat die Eigenschaft $p\bar{p} = -1$, ist lichtartig bezüglich der η -Metrik und man kann mit dessen Hilfe ein Vektorfeld wie folgt zerlegen:

$$v^a = -p^a(\bar{p}v) - \bar{p}^a(pv) + \tilde{v}^a,$$

wobei \tilde{v} die zwei räumlichen Komponenten beschreibt. Zerlegt man nun den Gradienten ebenfalls in zwei lichtartige- und zwei raumartige- Richtungen

$$\partial_a = -p_a(\bar{p}\partial) - \bar{p}_a(p\partial) + \tilde{\partial}_a,$$

so findet man

$$\partial^2 f = \tilde{\partial}^2 f$$

und daher

$$R_{ab} = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}^2 \tilde{f} p_a p_b \delta(px).$$

Über die EINSTEIN Gleichungen

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab}$$

¹ \bar{p}^a ist das zu p^a konjugierte Vektorfeld.

(mit $c = G = 1$) lässt sich nun der Energie-Impuls-Tensor berechnen

$$T_{ab} = -\frac{\tilde{\partial}^2 \tilde{f}}{16\pi} p_a p_b \delta(px).$$

Dieser ist wohldefiniert und ebenfalls auf einer Null-Hyperfläche konzentriert.

RICHELBERG und SEXL fanden beim ultrarelativistischen Limes von SCHWARZSCHILD die folgende Metrik,

$$g_{ab} = \eta_{ab} - 16\pi \delta(px) \frac{\log(\rho)}{2\pi} p_a p_b.$$

Berechnet man nun den Energie-Impuls-Tensor unter der Verwendung das, in Polarkoordinaten, $\frac{1}{2\pi} \log(\rho)$ die Fundamentallösung des zweidimensionalen LAPLACE-Operators ist, so findet man,

$$T_{ab} = \delta^2(\tilde{x}) \delta(px) p_a p_b.$$

1.2 Anmerkungen zu Lichtkegel Koordinaten

Die Rechnungen mit lichtartigen Vektorfeldern sind oft tückisch und verleiten zu Vorzeichenfehlern, darum werden wir diesen Abschnitt den lichtartigen Koordinaten widmen. p^a und \bar{p}^a sein zwei vorwärts orientierte Null-Vektorfelder mit der Eigenschaft $p\bar{p} = -1$. Man kann diese nun explizit in Koordinaten konstruieren

$$p^a = \delta_v^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{p}^a = \delta_u^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Definieren wir nun die Koordinaten $u = \frac{t-z}{\sqrt{2}}$ und $v = \frac{t+z}{\sqrt{2}}$ so ist klar, dass

$$u = -px$$

und

$$v = -\bar{p}x.$$

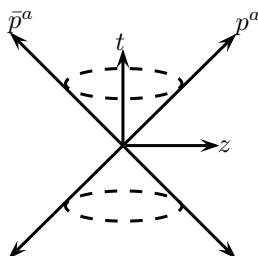


Abbildung 1.2.1: Diese Abbildung illustriert die Wahl der lichtartigen Vektorfelder p^a und \bar{p}^a

Woraus die Identifikation $p_a = -\delta_a^u$ und $\bar{p}_a = -\delta_a^v$ folgt. Kehrt man die Relationen für u und v um, so erhält man $t = \frac{v+u}{\sqrt{2}}$ und $z = \frac{v-u}{\sqrt{2}}$ und somit die korrespondierenden Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Welche wieder durch die Invarianten ausgedrückt werden können

$$\frac{\partial}{\partial u} = \bar{p}\partial$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v} = p\partial.$$

Jeder Vektor kann nun in seine beiden lichtartigen- und seine räumlichen Anteile zerlegt werden

$$v^a = -p^a (\bar{p}v) - \bar{p}^a (pv) + \tilde{v}^a,$$

selbiges funktioniert analog mit Kovektoren. Da wir es später in der Arbeit benötigen und es an dieser Stelle ein gutes Beispiel für die Anwendung der Zerlegung eines Kovektors ist, geben wir hier noch den Wellenoperator in lichtartigen Koordinaten an

$$\partial^2 = \partial_a \partial^a = \left(-p_a (\bar{p}\partial) - \bar{p}_a (p\partial) + \tilde{\partial}_a \right) \left(-p^a (\bar{p}\partial) - \bar{p}^a (p\partial) + \tilde{\partial}^a \right).$$

Die Produkte pp und $\bar{p}\bar{p}$ tragen nicht bei. Ebenso tragen Produkte zwischen p^a oder \bar{p}^a und einem räumlichen Ausdruck nicht bei. Somit erhalten wir

$$\partial^2 = -2 (p\partial) (\bar{p}\partial) + \tilde{\partial}^2.$$

Da es bei lichtartigen Koordinaten oft zu Vorzeichenwechsel kommt, werden wir hauptsächlich mit den invarianten, inneren Produkten arbeiten [7].

Kapitel 2

Mathematische Hilfsmittel

2.1 Schwarzsche Distributionen Theorie

Wir werden uns zuerst mit den Grundbegriffen im \mathbb{R}^n beschäftigen und danach Distributionen auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten behandeln. Wir werden jedoch immer wieder Bezug auf den \mathbb{R}^n nehmen.

2.1.1 Testfunktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, die Menge aller Testfunktionen $\mathcal{K}(\Omega)$ ¹ sind all jene reellen Funktionen φ , welche einen kompakten Träger und Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen. Oder anders gesagt

$$\mathcal{K}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

wobei der Subskript 0 für den kompakten Träger und der Superskript ∞ für die Ableitungen beliebiger Ordnung steht.

$\mathcal{K}(\Omega)$ ist ein linearer Raum, d.h. $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi_1 + \varphi_2 &\in \mathcal{K}(\Omega), \\ \lambda \varphi_1 &\in \mathcal{K}(\Omega).\end{aligned}$$

Eine Folge $(\varphi_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{K}(\Omega)$ zu Null, wenn alle Funktionen außerhalb einer fixierten, beschränkten Umgebung verschwinden [8].

¹ \mathcal{K} steht hier für kompakt.

2.1.2 Distributionen

Eine Distribution F ist ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{K}(\Omega)$ d.h.

1. $(F, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(F, \varphi_1) + \beta(F, \varphi_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}(\Omega)$
2. Wenn $(\varphi_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}(\Omega)$ zu Null konvergiert, dann konvergiert $(F, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ebenfalls zu Null.

Das sind genau jene Eigenschaften die den Dualraum ausmachen, daher wird die Menge aller Distributionen mit $\mathcal{K}'(\Omega)$ bezeichnet [8].

Beispiel 2.1. Die DIRAC-Delta Distribution ist definiert über ihre Wirkung auf Testfunktionen,

$$(\delta(x-a), \varphi(x)) = \varphi(a).$$

Beispiel 2.2. Existiert ein $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)^2$ existiert, so nennt man ein Funktional regulär,

$$(F_f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) d^n x. \quad (2.1.1)$$

2.1.3 Verallgemeinerung auf n -dimensionale Mannigfaltigkeiten

Betrachtet man Gleichung 2.1.1, so sieht man schnell, dass reguläre Distributionen, aufgrund der Volumensform $d^n x$, von der Struktur des \mathbb{R}^n abhängen. Ein koordinatenunabhängiges Konstrukt lässt sich dennoch erreichen. Betrachtet man nämlich $\varphi(x)$ und $d^n x$ als zwei Teile eines Ganzen, so lässt sich dies mittels einer n -Form $\tilde{\varphi}$ realisieren. Denn dann lässt sich ein reguläres Funktional auf natürliche Weise schreiben als [9]

$$\int_{\mathcal{M}} f \tilde{\varphi}. \quad (2.1.2)$$

Wir bezeichnen mit Ω_0^n den Raum aller \mathcal{C}^∞ n -Formen mit kompakten Träger. Man kann nun wiederum den Raum der Distributionen als den Raum aller linearen Funktionale $F : \Omega_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen. Wir bezeichnen den Raum dieser Distributionen mit Ω_0^n .

² $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ sind die einfach lokal integrierbaren Funktionen im \mathbb{R}^n .

³Hier bezeichnet die Tilde Volumensformwertigkeit.

Für orientierbare Mannigfaltigkeiten, mit Volumensform ω , kann $\tilde{\varphi}$ eindeutig geschrieben werden als $\tilde{\varphi} = \varphi\omega$, mit $\varphi \in \mathcal{K}$. Es ist offensichtlich, dass für $\omega = d^n x$, Gleichung 2.1.2 mit der Definition im \mathbb{R}^n übereinstimmt.

Eine weitere Verallgemeinerung kann erzielt werden, indem man tensorwertige Testformen verwendet. Dabei müssen natürlich auch die darauf wirkenden Funktionale tensorwertig sein [10, 9]. Ein reguläres, tensorielles Funktional kann geschrieben werden als

$$(F_f^I, \tilde{\varphi}_I) = \int_M f^I \tilde{\varphi}_I.$$

2.1.4 Differentiation

Motiviert durch die linearen Funktionale⁴

$$\int L_\xi f \tilde{\varphi} = \int d(\xi \lrcorner (f \tilde{\varphi})) - \int f L_\xi \tilde{\varphi} = - \int f L_\xi \tilde{\varphi},$$

definieren wir

$$(L_\xi F, \tilde{\varphi}) = - (F, L_\xi \tilde{\varphi}).$$

Ist ξ ein KILLING-Vektorfeld zu g_{ab} so gilt, für $\tilde{\varphi} = \varphi\omega_g$ [10]

$$(L_\xi F, \tilde{\varphi}) = - (F, L_\xi (\varphi\omega_g)) = - (F, L_\xi \varphi \omega_g) = - (F, \xi(\varphi) \omega_g).$$

Im \mathbb{R}^n gilt im speziellen

$$(\partial_i F, \varphi) = - (F, \partial_i \varphi).$$

Beispiel 2.3. Die HEAVYSIDE-Funktion ist definiert durch,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$(\theta', \varphi) = - (\theta, \varphi') = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = - (\varphi(\infty) - \varphi(0)) = \varphi(0)$$

und daher gilt

$$(\theta', \varphi) = (\delta, \varphi)$$

⁴Hier bezeichnet die Tilde ebenfalls Volumensformwertigkeit.

2.1.5 Regularisierung von divergenten Integralen

Betrachte eine Funktion f , welche überall außer an der Stelle x_0 , integrierbar ist.⁵ Dann wird das Integral

$$\int f \varphi dx$$

im Allgemeinen nicht existieren. Betrachtet man jedoch Testfunktionen welche an der Stelle x_0 verschwinden wird das Integral konvergieren. Die Prozedur der Regularisierung hängt ab von der Stärke der Singularität ab, im einfachsten Fall (erster Ordnung) funktioniert diese wie folgt⁶

$$([f]_a, \varphi) = \int dx f(x) (\varphi(x) - \varphi(0) \theta(a - |x|)),$$

dies stimmt natürlich für Testfunktionen mit der Eigenschaft $\varphi(0) = 0$ mit der originalen Definition überein. Die Theta-Funktion wird benötigt um die Eigenschaft des kompakten Trägers nicht zu verletzen [8].

Beispiel 2.4. Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, diese kann nach der obigen Prozedur regularisiert werden,

$$\left(\left[\frac{1}{x} \right]_a, \varphi \right) = \int \frac{dx}{x} (\varphi(x) - \varphi(0) \theta(a - |x|)) \quad (2.1.3)$$

Gleichung 2.1.3 hängt natürlich nicht vom Parameter a ab, da (o.B.d.A. $b > a$)

$$\begin{aligned} \left(\left[\frac{1}{x} \right]_a, \varphi \right) &= \int \frac{dx}{x} (\varphi(x) - \varphi(0) \theta(b - |x|)) \\ &\quad - \varphi(0) \int \frac{dx}{x} (\theta(a - |x|) - \theta(b - |x|)) = \\ &\quad \left(\left[\frac{1}{x} \right]_b, \varphi \right) - \varphi(0) \left(\int_{-a}^a - \int_{-b}^b \right) \frac{dx}{x} = \\ &\quad \left(\left[\frac{1}{x} \right]_b, \varphi \right) + \varphi(0) \left(\int_{-b}^{-a} + \int_a^b \right) \frac{dx}{x} = \\ \left(\left[\frac{1}{x} \right]_b, \varphi \right) + \varphi(0) \left(- \int_a^b + \int_a^b \right) \frac{dx}{x} &= \left(\left[\frac{1}{x} \right]_b, \varphi \right), \end{aligned}$$

gilt.

⁵ $\frac{1}{x}$ ist ein Beispiel mit einer Singularität an der Stelle $x = 0$

⁶ aus Gründen der Einfachheit wählen wir $x_0 = 0$

2.1.6 Multiplikation auf $\mathcal{K}' \times \mathcal{K}'$

Für $F \in \Omega_0^n$ und $f \in \mathcal{C}^\infty$ ist ein sinnvolles Produkt definiert durch⁷

$$(Ff, \tilde{\varphi}) = (F, f\tilde{\varphi}).$$

Dieses Produkt ist kommutativ und es gilt, für ein Vektorfeld ξ ,

$$\begin{aligned} (L_\xi(fF), \tilde{\varphi}) &= -(fF, L_\xi\tilde{\varphi}) = -(F, fL_\xi\tilde{\varphi}) = \\ &= -(F, L_\xi(f\tilde{\varphi})) + (F, L_\xi f\tilde{\varphi}) = \\ &= (fL_\xi F, \tilde{\varphi}) + (L_\xi fF, \tilde{\varphi}) = \\ &= (fL_\xi F + L_\xi fF, \tilde{\varphi}). \end{aligned}$$

Also:

$$L_\xi(fF) = fL_\xi F + L_\xi fF. \quad (2.1.4)$$

Wobei sowohl die linke, also auch die rechte Seite von Gleichung 2.1.4 wohldefiniert ist, da $fF \in \Omega_0^n$, $L_\xi F \in \Omega_0^n$ und $L_\xi f \in \mathcal{C}^\infty$ gilt. Will man jedoch ein Produkt zwischen Distributionen definieren, muss man leider schnell einsehen das dies zu groben Unstimmigkeiten führt.

Im Folgenden geben wir zwei Beispiele, bleiben allerdings aus Gründen der Übersichtlichkeit in \mathbb{R} .

Beispiel 2.5. Betrachtet man die HEAVYSIDE-Funktion als Element von L_{loc}^1 , dann gilt

$$(\theta^n, \varphi) = (\theta, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{K} \quad (2.1.5)$$

d.h.

$$\theta^n = \theta$$

da $\theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\theta(x) = 1$ für $x > 0$ ist. Differenziert man die obige Gleichung so erhält man⁸

$$n\theta^{n-1}\theta' = \theta'$$

und somit

$$n\theta^{n-1}\delta = \delta \Rightarrow n\theta(0)\delta = \delta,$$

was natürlich inkonsistent ist, da $\theta(0)$ unabhängig von n ist [7].

⁷Die Tilde bezeichnet wiederum Volumensformwertigkeit.

⁸Hier wird angenommen, dass die für stetige Funktionen gültige Relation $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$, auch für die unstetige Funktion θ gilt.

Beispiel 2.6. Eine weitere Inkonsistenz bei der Definition eines Produkts auf $\mathcal{K}' \times \mathcal{K}'$ findet sich bei Betrachtung der Funktion $\sigma = 2\theta - 1$. Verwendet man Gleichung 2.1.5, so kommt man zum Schluss, dass $\sigma^2 = 4\theta^2 - 4\theta + 1 = 1$ und daher⁹

$$0 = 1' = (\sigma^2)' = \sigma'\sigma + \sigma\sigma' = 2\delta\sigma + 2\sigma\delta$$

gilt. Dies hat wiederum zur Folge, dass

$$\delta\sigma = -\sigma\delta \vee \sigma\delta = 0.$$

Um $\sigma\delta = 0$ zu ermöglichen muss $\theta(0) = \frac{1}{2}$ gelten, was über die Relation,

$$(2\theta - 1)\delta = (2\theta(0) - 1)\delta$$

leicht ersichtlich ist. Nimmt man tatsächlich an das $\theta(0) = \frac{1}{2}$ gilt, dann ist das so definierte Produkt nicht mehr assoziativ, denn

$$(\theta\theta)\delta = \theta\delta = \theta(0)\delta = \frac{1}{2}\delta$$

andererseits aber

$$\theta(\theta\delta) = \theta\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{4}\delta,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Die beiden Beispiele sollen die Probleme eines Produktes auf $\mathcal{K}' \times \mathcal{K}'$ aufzeigen. Alternativ ist es allerdings möglich \mathcal{K}' in eine assoziative Algebra $(\mathcal{A}, +, \circ)$ einzubetten. Natürliche Anforderungen an \mathcal{A} sind

1. $C^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$, $f(x) = 1$ ist das Einheitsselement von \mathcal{A} .
2. \exists eine Ableitung D , d.h. $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ist linear und erfüllt die Leibniz Regel.
3. $D|_{C^1(\mathbb{R})}$ ist die herkömmliche Ableitung auf $C^1(\mathbb{R})$.
4. $\circ|_{C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})}$ ist das normale Produkt stetiger Funktionen [11].

Theorem 2.1. \nexists Algebra \mathcal{A} sodass 1-4 erfüllt sind. (Schwarz 1948)

⁹Die Gleichheit ist hier im LEBESQUE Sinn zu verstehen.

Beweis. Betrachten wir die beiden Funktionen

$$x_+ := \theta x \implies x \circ x_+ \stackrel{4}{=} x_+^2$$

und

$$x \circ (x \ln |x| - x) \stackrel{4}{=} x^2 \ln |x| - x^2.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} D^2(x_+) \circ x &\stackrel{2}{=} D^2(x_+ \circ x) - 2Dx_+Dx - x_+D^2x = \\ &D^2(x_+^2) - 2Dx_+ \stackrel{3}{=} 2Dx_+ - 2Dx_+ = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \circ D^2(x \ln |x| - x) &\stackrel{2,4}{=} D^2(x^2 \ln |x| - x^2) - 2DxD(x \ln |x| - x) - \\ &- D^2x(x \ln |x| - x) \stackrel{3}{=} D^2(x^2 \ln |x| - x^2) - 2D(x \ln |x| - x) = \\ &D(2x \ln |x| - x) - 2D(x \ln |x| - x) = 1. \end{aligned}$$

Also ist x invertierbar in \mathcal{A} .

Da \mathcal{A} laut Annahme assoziativ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} D^2(x_+) &= D^2(x_+) \circ 1 = D^2(x_+) \circ (x \circ D^2(x \ln |x| - x)) = \\ &(D^2(x_+) \circ x) \circ D^2(x \ln |x| - x) = 0. \end{aligned}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu

$$D^2(x_+) = D^2(x \circ \theta) = D\left(\theta + \underbrace{x \circ \delta}_{=0}\right) = \delta,$$

und daher $\delta \notin \mathcal{A}$, also ist die Existenz einer Deltafunktion in einer solchen Algebra widerlegt. \square

Dieses Resultat, welches Schwarz im Jahre 1948 gefunden hat, bezeichnet man als Unmöglichkeitsresultat. Es ist der Ursprung für den Satz „Distributionen können nicht multipliziert werden“. Betrachtet man den Beweis jedoch etwas genauer, so sieht man, dass das Problem aber eher auf die Inkonsistenz zwischen Differenziation und Multiplikation stetiger Funktionen zurückgeht. COLOMBEAU schlussfolgerte daher, dass die vierte Bedingung schwächer sein muss, und postulierte die folgende Vermutung.

Vermutung 2.1. $\circ|_{C^\infty(\mathbb{R}) \times C^\infty(\mathbb{R})}$ ist das normale Produkt glatter Funktionen[11, 12].

2.1.7 Anwendung auf impulsive pp-Wellen - naive Rechnungen

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass Produkte von Distributionen bereits bei einfachen Streuprozessen auftreten. Wir werden hier den Rahmen der Distributionen nutzen und manchmal sogar bewusst überstrecken, um zu einem Ergebnis zu gelangen.

Gravitation

Wir wollen die Geodäten in einer allgemeinen pp-Wellen Raumzeit berechnen, d.h.

$$g_{ab} = \eta_{ab} + f p_a p_b = \eta_{ab} + \tilde{f} p_a p_b \delta(px).$$

Unter Verwendung von Gleichung 0.0.7 findet man

$$\begin{aligned} C_{ab}^c &= \frac{1}{2} (\partial_a f p_b p^c + \partial_b f p_a p^c - \partial^c f p_a p_b) = \\ & \frac{1}{2} (\tilde{\partial}_a f p_b p^c + \tilde{\partial}_b f p_a p^c - \tilde{\partial}^c f p_a p_b - (\bar{p}\partial) f p_a p_b p^c). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Dabei haben wir die Ableitung wieder in ihre licht- und raumartigen Komponenten zerlegt. Die Geodätengleichung wird somit zu

$$\ddot{x}^c + \frac{1}{2} \left[2(p\dot{x}) (\dot{x}\tilde{\partial}) f - (p\dot{x})^2 (\bar{p}\partial) f \right] p^c - \frac{1}{2} (p\dot{x})^2 \tilde{\partial}^c f = 0$$

Zerlegt man diese wiederum in ihre Komponenten so findet man

$$p\ddot{x} = 0 \quad (2.1.7)$$

$$\bar{p}\ddot{x} = (p\dot{x}) (\dot{x}\tilde{\partial}) f - \frac{1}{2} (p\dot{x})^2 (\bar{p}\partial) f \quad (2.1.8)$$

und

$$\ddot{x}^c = \frac{1}{2} (p\dot{x})^2 \tilde{\partial}^c f. \quad (2.1.9)$$

Gleichung 2.1.7 bedeutet nichts anderes, als das man px als affinen Parameter verwenden kann. Schreibt man Gleichung 2.1.8 und 2.1.9 auf den affinen Parameter um so erhält man

$$\tilde{x}^{c''} = \frac{1}{2} \tilde{\partial}^c f \quad (2.1.10)$$

und

$$\bar{p}x'' = (\tilde{x}'\tilde{\partial})f - \frac{1}{2}(\bar{p}\partial)f(x^a(px)) = \frac{1}{2}(\tilde{x}'\tilde{\partial})\tilde{f}\delta + \frac{1}{2}\tilde{f}\delta'. \quad (2.1.11)$$

Die Lösung zu diesen Gleichungen sollten vor und nach dem Impuls jeweils die flache Geodätengleichung ($\ddot{x} = 0$) erfüllen, daher wählen wir den Ansatz

$$x^\mu = \theta_+ x_+^\mu + \theta_- x_-^\mu. \quad (2.1.12)$$

mit $\theta_+ + \theta_- = 1$ und x_+, x_- als Lösungen der freien Gleichung.

Setzt man nun Gleichung 2.1.12 in Gleichung 2.1.10 und 2.1.11 ein, findet man

$$\delta'(\tilde{x}_+(0) - \tilde{x}_-(0)) + \delta(\tilde{x}'_+(0) - \tilde{x}'_-(0)) = \frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f}(\tilde{x}(0))\delta$$

und

$$\delta'(\bar{p}x_+ - \bar{p}x_-) + \delta(\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_-) = \frac{1}{2}[\theta(0)(\tilde{x}'_+(0) - \tilde{x}'_-(0)) + \tilde{x}'_-(0)]\tilde{\partial}\tilde{f}(\tilde{x}(0))\delta + \frac{1}{2}\tilde{f}(\tilde{x}(0))\delta'.$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten so gilt

$$\tilde{x}_+(0) = \tilde{x}_-(0) =: \tilde{x}(0)$$

$$\tilde{x}'_+(0) - \tilde{x}'_-(0) = \frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f}(\tilde{x}(0))$$

,

$$\bar{p}x_+(0) - \bar{p}x_-(0) = \frac{1}{2}\tilde{f}(\tilde{x}(0))$$

$$\bar{p}x'_+(0) - \bar{p}x'_-(0) = \frac{1}{2}\left[\theta(0)\frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f}(\tilde{x}(0)) + \tilde{x}'_-(0)\right]\tilde{\partial}\tilde{f}(\tilde{x}(0)).$$

Zusammenfassend kann man also sagen, dass ein unbestimmter Faktor $\theta(0)$ auftaucht. Diesen Faktor erhielten wir indem die, für stetige Funktionen gültige, Relation $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$ verwendet wurde. Da die θ -Funktion nicht stetig ist, haben wir den Rahmen etwas überdehnt um ans Ziel zu kommen. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen wie wir mittels COLOMBEAU-Theorie dieses Problem umgehen [7].

Elektromagnetismus

Das elektromagnetische Analogon zur gravitativen pp-Welle wird durch das Vektorpotential $A^\mu = fp^\mu$ beschrieben. p^μ erfüllt wiederum $\partial_\mu p^\nu = 0$. Ausgehend vom Vektorpotential berechnet sich der Feldstärke Tensor zu

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \left(\tilde{\partial}^\mu \tilde{f} p^\nu - \tilde{\partial}^\nu \tilde{f} p^\mu \right) \delta.$$

über die LORENTZ-Gleichung erhält man somit

$$\ddot{x}^\mu = \frac{e}{m} F^\mu_\nu \dot{x}^\nu = \frac{e}{m} \left((p\dot{x}) \tilde{\partial}^\mu \tilde{f} - (\dot{x}\tilde{\partial}) \tilde{f} p^\mu \right) \delta.$$

Spaltet man dies wiederum in Komponenten auf, dann erhält man

$$p\ddot{x} = 0 \tag{2.1.13}$$

$$\bar{p}\ddot{x} = \frac{e}{m} (\dot{x}\tilde{\partial}) \tilde{f} p^\mu \delta \tag{2.1.14}$$

$$\ddot{\tilde{x}} = (p\dot{x}) \frac{e}{m} \tilde{\partial}^\mu \tilde{f} \delta. \tag{2.1.15}$$

Gleichung 2.1.13 erlaubt uns wieder px als affinen Parameter zu verwenden. Somit können wir Gleichung 2.1.14 und 2.1.15 umschreiben und erhalten

$$\bar{p}x'' = \frac{e}{m\gamma} (\tilde{x}'\tilde{\partial}) \tilde{f} p^\mu \delta \tag{2.1.16}$$

$$\tilde{x}'' = \frac{e}{m\gamma} \tilde{\partial}^\mu \tilde{f} \delta. \tag{2.1.17}$$

mit $\gamma =: \frac{\partial(px)}{\partial\tau}$ und $' = \frac{\partial}{\partial(px)}$.

Wir machen wieder denselben Ansatz wie auch schon zuvor im Gravitations-Abschnitt

$$x^\mu = \theta_+ x_+^\mu + \theta_- x_-^\mu \tag{2.1.18}$$

mit $\theta_+ + \theta_- = 1$ und $\theta = \theta(px)$. Differenziert man nun diesen Ansatz so findet man

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \delta (x_+^\mu - x_-^\mu) + \theta_+ x_+'^\mu + \theta_- x_-'^\mu \\ x''^\mu &= \delta' (x_+^\mu - x_-^\mu) + \delta (x_+'^\mu - x_-'^\mu) \end{aligned}$$

Setzt man nun noch Gleichung 2.1.18 in Gleichung 2.1.14 und Gleichung 2.1.15 ein erhält man

$$\delta'(\tilde{x}_+(0) - \tilde{x}_-(0)) + \delta(\tilde{x}'_+(0) - \tilde{x}'_-(0)) = \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial} \tilde{f}(\tilde{x}(0)) \delta$$

und

$$\delta'(\bar{p}x_+(0) - \bar{p}x_-(0)) + \delta(\bar{p}x'_+(0) - \bar{p}x'_-(0)) = \frac{e}{\gamma m} [\theta(0)(\tilde{x}'_+(0) - \tilde{x}'_-(0)) + \tilde{x}'_-(0)] \tilde{\partial} \tilde{f}(\tilde{x}(0)) \delta.$$

Ein Koeffizientenvergleich führt dann schlussendlich zu

$$\tilde{x}_+(0) = \tilde{x}_-(0) =: \tilde{x}(0)$$

$$\tilde{x}'_+(0) - \tilde{x}'_-(0) = \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial} \tilde{f}(\tilde{x}(0))$$

$$\bar{p}x_+(0) - \bar{p}x_-(0) = 0$$

und

$$\bar{p}x'_+(0) - \bar{p}x'_-(0) = \frac{e}{\gamma m} \left[\theta(0) \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial} \tilde{f}(\tilde{x}(0)) + \tilde{x}'_-(0) \right] \tilde{\partial} \tilde{f}(\tilde{x}(0)).$$

Auch hier findet sich der ominöse Faktor $\theta(0)$, welcher mathematisch nicht definiert ist, wieder. Wie auch schon in der vorherigen Kalkulation wurde der Rahmen der Distributionen-Theorie überdehnt und es ist unklar wieso der Koeffizienten Vergleich funktioniert. Durch Verwendung der COLOMBEAU-Theorie können diese Probleme beseitigt und der mathematischen Rahmen klar definiert werden.

2.2 Colombeau Theorie

2.2.1 Motivation

Die Idee zur später definierten COLOMBEAU-Algebra besteht darin die zwei „möglichen“ Produkte von Distributionen miteinander zu identifizieren. Einerseits kann man das Produkt zweier Distributionen definieren als die nichtlineare Abbildung ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto F_1(\varphi) F_2(\varphi) \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die regulären Distributionen, mit $f_i \in \mathcal{C}^\infty$, so ist deren Produkt

$$\int f_1(x^c) \varphi(x^c) d^n x \int f_2(x^c) \varphi(x^c) d^n x \quad (2.2.1)$$

andererseits könnte man auch das klassische punktweise Produkt $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty$ bilden und dieses als Distribution auffassen

$$\int f_1(x^c) f_2(x^c) \varphi(x^c) d^n x. \quad (2.2.2)$$

Nun besteht die Idee zur COLOMBEAU-Algebra darin eine geeignete Quotienten Algebra zu finden sodass in diesem Quotienten, Gleichung 2.2.1 und Gleichung 2.2.2 übereinstimmen.

Betrachten wir zunächst den Vektorraum aller \mathcal{C}^∞ -Funktionen $\mathcal{E}(\Omega)$, der Dualraum $\mathcal{E}'(\Omega)$ ist dann der Raum aller Distributionen mit kompakten Träger. Klarerweise gilt $\delta_x \in \mathcal{E}'(\Omega)$ wobei $(\delta_x, \varphi) = \varphi(x)$. $\mathcal{E}'(\Omega)$ ist ein lokal konvexer Vektorraum und das Konzept von \mathcal{C}^∞ -Funktionen ist, unter Verwendung eines geeigneten Differentialkalküls¹⁰, auf einem Solchen wohldefiniert und wir bezeichnen den Vektorraum aller \mathcal{C}^∞ -Funktionen auf $\mathcal{E}'(\Omega)$ mit $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$. Betrachten wir nun die Menge

$$\mathcal{M} = \{F | F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}'(\Omega)), F(\delta_x) = 0, \forall x \in \Omega\}.$$

Also ist $F \sim G$, falls $(F - G)(\delta_x) = 0$. \mathcal{M} ist offensichtlich ein Ideal denn die Summe zweier $F \in \mathcal{M}$ ist natürlich wieder in \mathcal{M} und die Multiplikation eines Elements $F \in \mathcal{M}$ mit einem beliebigen Element $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$ liefert angewandt auf die δ_x Funktion Null. Nun definieren wir Funktionen $f(x) := F(\delta_x)$. Diese sind nun wohldefiniert auf der Quotientenalgebra $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))}{\mathcal{M}}$ und es gilt:

$$Df(x) = F'D\delta_x = -F'\delta'_x$$

Also ist der Quotient $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))}{\mathcal{M}}$, isomorph zu $\mathcal{E}(\Omega)$. Da $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathcal{K})$ ist die Idee nun \mathcal{M} zu einem Ideal $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathcal{K}(\Omega))$ auszuweiten, sodass $\mathcal{N} \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}'(\Omega)) = \mathcal{M}$, denn dann ist $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))}{\mathcal{M}} \subseteq \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{K}(\Omega))}{\mathcal{N}}$ und somit sind die beiden Integrale aus Gleichung 2.2.1 und 2.2.2, in $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{K}(\Omega))}{\mathcal{N}}$ gleichwertig [12].

2.2.2 Die Theorie

In dieser Arbeit betrachten wir die sogenannte vereinfachte Algebra um die funktionalanalytische Maschinerie ein wenig zu vereinfachen. Im letzten Abschnitt haben

¹⁰COLOMBEAU verwendet dabei das SILVA-Kalkül

wir gesehen, dass wir \mathcal{K}' in eine assoziative Algebra \mathcal{A} einbetten müssen um eine sinnvolle Multiplikation zu definieren. Betrachtet man COLOMBEAUSche-Objekte vom physikalischen Standpunkt, dann sind diese nicht anderes als Regularisierungen [7, 9].

Betrachte eine einparametrische Familie $(f_\epsilon)_{\epsilon \in I}$, $I = (0, 1)$ von \mathcal{C}^∞ Objekten, welche moderat im Parameter ϵ wachsen, d.h.

$$\mathcal{E}_M = \left\{ f \mid f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists N \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. \exists \eta > 0, \exists c > 0 \text{ sodass } \sup_{x \in K} |D^\alpha f_\epsilon(x)| \leq c\epsilon^{-N}, \forall 0 < \epsilon < \eta \right\}.$$

Des Weiteren definieren wir das Ideal \mathcal{N}

$$\mathcal{N} = \left\{ f \mid f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall N \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. \exists \eta > 0, \exists c > 0 \text{ sodass } \sup_{x \in K} |D^\alpha f_\epsilon(x)| \leq c\epsilon^N, \forall 0 < \epsilon < \eta \right\}$$

Addition, Multiplikation und Differenziation sind Punktweise definiert, d.h.

$$(f_\epsilon)_{\epsilon \in I} + (g_\epsilon)_{\epsilon \in I} = (f_\epsilon + g_\epsilon)_{\epsilon \in I}, \\ (f_\epsilon)_{\epsilon \in I} (g_\epsilon)_{\epsilon \in I} = (f_\epsilon g_\epsilon)_{\epsilon \in I}, \\ \partial^\alpha (f_\epsilon)_{\epsilon \in I} = (\partial^\alpha f_\epsilon)_{\epsilon \in I}.$$

Daher ist \mathcal{E}_M eine Algebra[11].

Man kann leicht sehen, dass \mathcal{N} tatsächlich ein Ideal von \mathcal{E}_M ist, denn

1. Betrachte $f_\epsilon, g_\epsilon \in \mathcal{N}$, dann gilt $f_\epsilon + g_\epsilon \in \mathcal{N}$.
2. Multipliziert man ein beliebiges Element $f_\epsilon \in \mathcal{E}_M$ mit einem Element $g_\epsilon \in \mathcal{N}$ so ist das Ergebnis wiederum in \mathcal{N} .

Die COLOMBEAU-Algebra \mathcal{G} ist definiert als der Quotient

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{E}_M}{\mathcal{N}}.$$

Klarerweise ist \mathcal{G} eine Algebra da \mathcal{E}_M eine ist und \mathcal{N} ein Ideal ist.

Während \mathcal{C}^∞ Funktionen kanonisch als konstante Familien, $f_\epsilon = f$ eingebettet sind, benötigt man für stetige Funktionen und Elemente aus \mathcal{K} einen sogenannten „Mollifier“,

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \int d^n y \rho\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) f(y).$$

Dabei muss die Funktion ρ

$$\int d^n x \rho(x) = 1$$

und

$$\int d^n x \rho(x) x^\alpha = 0$$

erfüllen [11].

2.2.3 Assoziation

Die Assoziation oder auch schwache Gleichheit, ist eine wichtige Äquivalenz-Relation, die auf dem Niveau der Distributionen Gleichheit bedeutet. Zwei Elemente f_ϵ, g_ϵ sind zueinander assoziiert, ($f \approx g$) wenn

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^n x (f_\epsilon(x) - g_\epsilon(x)) \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}. \quad (2.2.3)$$

Die Assoziation erfüllt

$$f \approx g \implies D^\alpha f \approx D^\alpha g$$

und

$$f \approx g \implies \omega f \approx \omega g \quad \forall \omega \in \mathcal{C}^\infty$$

was man leicht mittels Gleichung 2.2.3 sieht [11, 12].

Beispiel 2.7. $\theta^n \approx \theta$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \theta(y_1) \rho\left(\frac{y_1 - x}{\epsilon}\right) \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \theta(y_n) \rho\left(\frac{y_n - x}{\epsilon}\right) \varphi(x) &= \\
= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy_1 \rho\left(\frac{y_1 - x}{\epsilon}\right) \dots \int_0^{\infty} dy_n \rho\left(\frac{y_n - x}{\epsilon}\right) \varphi(x) &= \\
= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon}} dz_1 \rho(z_1) \dots \int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon}} dz_n \rho(z_n) \varphi(x) &
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun eines dieser Integrale so ist klar, dass für $x > 0$ die obere Grenze, im Grenzwert gegen ∞ strebt und somit das Integral 1 ergibt. Im anderen Fall, also $x < 0$, kollabiert das Integral und liefert 0. Daher folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon}} dz_1 \rho(-z_1) \dots \int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon}} dz_n \rho(-z_n) \varphi(x) &= \\
= \int_0^{\infty} dx \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \theta(x). &
\end{aligned}$$

Leitet man nun die Relation $\theta^n \approx \theta$ einmal ab, so folgt

$$(n+1) \theta^n \theta' \approx \theta' \implies \theta^n \theta' \approx \frac{\theta'}{n+1}$$

was diesmal kein Widerspruch ist, da die Potenz diesmal auf beiden Seiten auftritt [11].

Beispiel 2.8. $\theta\delta \approx A\delta$ mit $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \theta(y_1) \rho\left(\frac{y_1 - x}{\epsilon}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \delta(y_2) \rho_2\left(\frac{y_2 - x}{\epsilon}\right) \varphi(x) &= \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy_1 \rho\left(\frac{y_1 - x}{\epsilon}\right) \rho_2\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \varphi(x) = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon}} dy \rho(y) \rho_2(x) \varphi(\epsilon x) = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_2(x) \int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon}} dy \rho(y) \varphi(0)}_{\text{endlich}} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} O(\epsilon) = \\
 &= A\varphi(0)
 \end{aligned}$$

Zum Abschluss noch ein, für die Anwendung der COLOMBEAU-Theorie, wichtiger Satz.

Satz 2.1. *Sind zwei COLOMBEAU-Objekte zueinander assoziiert so besitzen sie, wenn einer existiert, denselben distributionellen Schatten. Also zwei Distributionen T, S und zwei COLOMBEAU-Objekte f_ϵ, g_ϵ die $f_\epsilon \approx T$ und $g_\epsilon \approx S$ erfüllen gilt also $T = S$.*

Dieser Satz macht es überhaupt erst sinnvoll, sich schwache Gleichungen anzusehen, denn auch wenn zwei Objekte in der COLOMBEAU-Algebra nicht gleich, sondern nur assoziiert sind, sind sie am Distributionellen Niveau gleich.

2.2.4 Korrektur der naiven Rechnungen

In diesem Abschnitt werden wir dieselben Gleichungen wie in Abschnitt 2.1 analysieren, jedoch werden es nun schwache anstatt normaler Gleichungen sein.

Gravitation

Die schwache Geodäten Gleichung ist nahe zu gleich der Geodäten Gleichung aus aus Abschnitt 2.1.7, jedoch wird die Gleichheit durch eine schwache Gleichheit \approx ersetzt.

$$\ddot{x}^c + \frac{1}{2} \left[2 \left(\dot{\tilde{x}} \tilde{\partial} \right) f(p\dot{x}) - (\bar{p}\partial) f(p\dot{x})^2 \right] p^c - \frac{1}{2} \tilde{\partial}^c f(p\dot{x})^2 \approx 0$$

Es gelten auch weiterhin die selben Relationen wie in Abschnitt 2.1.7, was uns zu

$$\delta'(\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-) + \delta(\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_-) \approx \frac{1}{2} \tilde{\delta} \tilde{f} \delta$$

und

$$\delta'(\bar{p}x_+ - \bar{p}x_-) + \delta(\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_-) \approx \frac{1}{2} [A(\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_-) + \tilde{x}'_-] \tilde{\delta} \tilde{f} \delta + \frac{1}{2} \tilde{f} \delta'$$

führt. Wobei wir hier $\theta\delta \approx A\delta$ verwendet haben.

Vergleicht man die Koeffizienten erhält man wieder

$$\tilde{x}_+(0) = \tilde{x}_-(0) = \tilde{x}(0), \quad (2.2.4)$$

$$\tilde{x}'_+(0) - \tilde{x}'_-(0) = \frac{1}{2} \tilde{\delta} \tilde{f}(\tilde{x}(0)), \quad (2.2.5)$$

$$\bar{p}x_+(0) - \bar{p}x_-(0) = \frac{1}{2} \tilde{f}(\tilde{x}(0)), \quad (2.2.6)$$

$$\bar{p}x'_+(0) - \bar{p}x'_-(0) = \frac{1}{2} \left[A \frac{1}{2} \tilde{\delta} \tilde{f}(\tilde{x}(0)) + \tilde{x}'_-(0) \right] \tilde{\delta} \tilde{f}(\tilde{x}(0)). \quad (2.2.7)$$

Hier wurde verwendet, dass

$$\delta(px) \tilde{f}(\tilde{x}(px)) \approx \delta(px) \tilde{f}(\tilde{x}(0)),$$

was leicht mittels die folgenden Rechnung zu zeigen ist (der Einfachheit halber $px = u$),

$$\begin{aligned} \delta(px) \tilde{f}(\tilde{x}(px)) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} du \phi\left(\frac{u}{\epsilon}\right) \tilde{f}(\theta_+(u)(\tilde{x}_+(u) - \tilde{x}_-(u)) + \tilde{x}_-(u)) \approx \\ &\approx \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} du \phi\left(\frac{u}{\epsilon}\right) \tilde{f}\left(\frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^u du' \psi\left(\frac{u'}{\epsilon}\right) (\tilde{x}_+(u') - \tilde{x}_-(u')) + \tilde{x}_-(u)\right) \varphi(u) \end{aligned}$$

ein skalieren von u und u' führt nun zu

$$\delta(px) \tilde{f}(\tilde{x}(px)) \approx \int_{-\infty}^{\infty} du \phi(u) \tilde{f}\left(\int_{-\infty}^u du' \psi(u') (\tilde{x}_+(\epsilon u') - \tilde{x}_-(\epsilon u')) + \tilde{x}_-(\epsilon u)\right) \varphi(\epsilon u).$$

Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ bleibt unter Verwendung von $\tilde{x}_+(0) = \tilde{x}_-(0)$,

$$\delta(px) \tilde{f}(\tilde{x}(px)) \approx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} du \phi(u)}_{=1} \tilde{f}(\tilde{x}(0)) \varphi(0) = \tilde{f}(\tilde{x}(0)) \varphi(0).$$

Nun kann man die Konstante allerdings mittels einer physikalischen Bedingung bestimmen, der Tangentenvektor muss kovariant konstant sein.

$$g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = -2(px)(\bar{p}\dot{x}) + \dot{x}^2 + f(px)^2 \approx \text{const.}$$

Unter Verwendung des affinen Parameters folgt,

$$-2(\bar{p}x') + \tilde{x}'^2 + f \approx \text{const.}$$

Setzt man nun den Ansatz 2.1.18 in die Gleichungen 2.2.4-2.2.7 ein, erhält man

$$\begin{aligned} & -2\left(\theta'(\bar{p}x_+ - \bar{p}x_-) + \theta(\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_-) + \bar{p}x'_-\right) + \left(\theta'(\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-) + \theta_+\tilde{x}'_+ + \theta_-\tilde{x}'_-\right)^2 + \tilde{f}\delta = \\ & = -2\left(\theta'(\bar{p}x_+ - \bar{p}x_-) + \theta(\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_-) + \bar{p}x'_-\right) + \theta'^2(\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-)^2 + \theta_+^2\tilde{x}'_+{}^2 + \theta_-^2\tilde{x}'_-{}^2 + \\ & \quad + 2\theta'\theta_+(\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-)\tilde{x}'_+ + 2\theta'\theta_-(\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-)\tilde{x}'_- + \theta_+\theta_-\tilde{x}'_+\tilde{x}'_- \approx \\ & \approx -2\left(\theta'(\bar{p}x_+ - \bar{p}x_-) + \theta(\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_-) + \bar{p}x'_-\right) + \theta\left[(\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_-)(\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_- + 2\tilde{x}'_-)\right] + \tilde{x}'_-{}^2 + \tilde{f}\delta \approx \\ & \approx -2\left(\delta\frac{1}{2}\tilde{f} + \theta\frac{1}{2}\left(A\frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f} + \tilde{x}'_-\right)\tilde{\partial}\tilde{f} + \bar{p}x'_-\right) + \theta\left[\frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f}\left(\frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f} + 2\tilde{x}'_-\right)\right] + \tilde{x}'_-{}^2 + \tilde{f}\delta = \\ & = \theta\left[-\left(A\frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f} + \tilde{x}'_-\right)\tilde{\partial}\tilde{f} + \frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f}\left(\frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f} + 2\tilde{x}'_-\right)\right] - 2\bar{p}x'_- + \tilde{x}'_-{}^2 = \\ & = \theta\left[\frac{1}{4}(\tilde{\partial}\tilde{f})^2(1 - 2A)\right] - 2\bar{p}x'_- + \tilde{x}'_-{}^2 \approx \text{const.} \end{aligned}$$

Diese Relation ist nur konstant, wenn der Koeffizient der θ -Funktion verschwindet und daher gilt $A = \frac{1}{2}$. Schlussendlich sind die Anschlussbedingungen also

$$\tilde{x}_+ - \tilde{x}_- = 0, \quad (2.2.8)$$

$$\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_- = \frac{1}{2}\tilde{\partial}\tilde{f}, \quad (2.2.9)$$

$$\bar{p}x_+ - \bar{p}x_- = \frac{1}{2}\tilde{f} \quad (2.2.10)$$

und

$$\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_- = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\tilde{\partial}\tilde{f} + \tilde{x}'_-\right]\tilde{\partial}\tilde{f}. \quad (2.2.11)$$

Relation 2.2.10 bedeutet, dass die Geodäte einen Sprung an der Stelle $px = 0$ in der $\bar{p}x$ -Koordinate macht [7]. (Siehe Abb. 2.2.1)

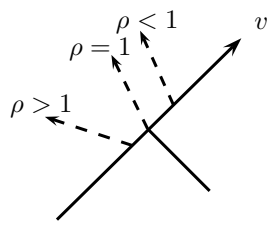


Abbildung 2.2.1: Der Versatz Δv als Funktion von der transversalen Koordinate ρ , in der Aichelburg-Sexl Geometrie ($\tilde{f} = -8m \log(\rho)$).

Elektromagnetismus

Auch hier läuft die Rechnung exakt gleich ab

$$\ddot{x}^\mu \approx \frac{e}{m} F^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu. \quad (2.2.12)$$

und es gelten dieselben Relationen wie im vorherigen Abschnitt, außer $\theta\delta \approx A\delta$.

$$\delta'(\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-) + \delta(\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_-) \approx \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial}\tilde{f}\delta$$

und

$$\delta'(\bar{p}x_+ - \bar{p}x_-) + \delta(\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_-) \approx \frac{e}{\gamma m} [A(\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_-) + \tilde{x}'_-] \tilde{\partial}\tilde{f}\delta.$$

Vergleicht man erneut die Koeffizienten erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{x}_+ - \tilde{x}_- &= 0, \\ \tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_- &= \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial}\tilde{f}, \\ \bar{p}x_+ - \bar{p}x_- &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

und

$$\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_- = \frac{e}{\gamma m} \left[A \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial}\tilde{f} + \tilde{x}'_- \right] \tilde{\partial}\tilde{f}. \quad (2.2.14)$$

Mit der Ambiguität A .

Betrachtet man erneut die LORENTZ-Gleichung 2.2.12 und multipliziert diese mit \dot{x}_μ so folgt

$$\ddot{x}^\mu \dot{x}_\mu = \frac{1}{2} (\dot{x}^2)' \approx \frac{e}{m} F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu \dot{x}_\mu = 0$$

und daher gilt, obwohl x^μ keine Geodäte ist,

$$\left(\dot{x}^2\right)' \approx 0 \implies \dot{x}^2 \approx \text{konst.}$$

Zerlegt man $\dot{x}^\mu = -p^\mu \bar{p}\dot{x} - \bar{p}^\mu p\dot{x} + \dot{\tilde{x}}$ dann folgt

$$\dot{x}^2 = -2(p\dot{x})(\bar{p}\dot{x}) + \dot{\tilde{x}}^2 = \gamma^2 \left[-2(\bar{p}x') + \tilde{x}'^2\right] \approx \text{konst.}$$

und da γ eine Konstante ist folgt

$$-2(\bar{p}x') + \tilde{x}'^2 \approx \text{konst.}$$

Setzt man die Gleichungen für $\bar{p}x'$ und \tilde{x}' ein folgt

$$\begin{aligned} & -2\left(\theta_+ \bar{p}x'_+ + \theta_- \bar{p}x'_-\right) + \left(\theta_+ \tilde{x}'_+ + \theta_- \tilde{x}'_-\right)^2 \approx \\ & -2\left(\theta_+ \bar{p}x'_+ + \theta_- \bar{p}x'_-\right) + \theta_+ \tilde{x}'_+{}^2 + \theta_- \tilde{x}'_-{}^2 = \\ & -2\left[\theta\left(\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_-\right) + \bar{p}x'_-\right] + \theta\left(\tilde{x}'_+{}^2 - \tilde{x}'_-{}^2\right) + \tilde{x}'_-{}^2 = \\ & \theta\left[-2\left(\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_-\right) + \left(\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_-\right)\left(\left(\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_-\right) + 2\tilde{x}'_-\right)\right] \underbrace{-2\bar{p}x'_- + \tilde{x}'_-{}^2}_{\text{konst.}} \approx \text{konst.} \end{aligned}$$

Auch hier muss wieder der Koeffizient der θ -Funktion verschwinden. Kombiniert man Gleichung 2.2.13 und 2.2.14 mit den obigen Relationen erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{e}{\gamma m} \left(A \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial} \tilde{f} + \tilde{x}'_-\right) \tilde{\partial} \tilde{f} + \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial} \tilde{f} \left(\frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial} \tilde{f} + 2\right) \tilde{x}'_- = 0 \\ & \frac{e^2}{\gamma^2 m^2} (\tilde{\partial} \tilde{f})^2 (1 - 2A) = 0 \implies A = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Somit sind die Anschlussbedingungen schlussendlich

$$x_+^\mu - x_-^\mu = 0,$$

$$\tilde{x}'_+ - \tilde{x}'_- = \frac{e}{\gamma m} \tilde{\partial} \tilde{f}, \quad (2.2.15)$$

und

$$\bar{p}x'_+ - \bar{p}x'_- = \frac{e}{\gamma m} \left[\frac{e}{2\gamma m} \tilde{\partial} \tilde{f} + \tilde{x}'_-\right] \tilde{\partial} \tilde{f}. \quad (2.2.16)$$

Im Gegensatz zur Gravitation, gibt es hier keinen Sprung in den Koordinaten, sondern nur in den Ableitungen.

Kapitel 3

Klein-Gordon-Felder und die Feynmansche Interpretation

3.1 Klein-Gordon-Feld im flachen Raum

Die LAGRANGE-Dichte für ein freies skalares Feld im MINKOWSKI-Raum ist,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2).$$

Mittels der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right)$$

Diese führt zur KLEIN-GORDON-Gleichung

$$(\partial^2 - m^2) \phi = 0.$$

Die Lösungen der Wellengleichungen sind offensichtlich ebene Wellen

$$\phi \propto e^{ikx}.$$

Das innere Produkt ist definiert als

$$(\phi_1, \phi_2) = \int \omega_h J_a(\phi_1, \phi_2) n^a = i \int (\phi_1 \partial_a \phi_2^* - \phi_2^* \partial_a \phi_1) n^a \omega_h, \quad (3.1.1)$$

wobei ω_h die Volumensform einer CAUCHY-Hyperfläche Σ ist. Im MINKOWSKI-Raum wird diese Relation zu (mit $\omega_h = d^3x$ und $n^a = \partial_t^a$)

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1) d^3x.$$

Die normierten ebenen Wellen (MINKOWSKI-Moden) sind somit

$$f_k = e^{ikx}.$$

Diese erfüllen,

$$(f_k, f_{k'}) = \frac{1}{2\omega (2\pi)^3} \delta^3(k - k'), \quad (3.1.2)$$

$$(f_k^*, f_{k'}^*) = -\frac{1}{2\omega (2\pi)^3} \delta^3(k - k') \quad (3.1.3)$$

und¹

$$(f_k, f_{k'}^*) = 0.$$

Die Verallgemeinerung für gekrümmte Raumzeiten ist unproblematisch, es wird einfach die Koordinaten-kovariante Ableitung ∂ durch die kovariante Ableitung ∇ ersetzt [13]. Dies gilt allerdings nicht für die FOURIER-Moden.

3.2 Energie Impuls Tensor des Klein-Gordon-Feldes

Wir starten mit der Wirkung

$$S = \frac{1}{2} \int \omega_g (g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2)$$

mit der Volumensform $\omega_g = \sqrt{g} d^4x$ [13]. Variation der Wirkung S nach der Metrik führt zu

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \delta \omega_g (g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2) + \int \omega_g \delta g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi$$

Der nächste Schritt ist es nun die Variation der Volumensform zu berechnen, ($g = -\det g_{ab}$)

$$\delta \omega_g = \sqrt{g} d^4x = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \delta g d^4x. \quad (3.2.1)$$

¹Durch diese Art der Normierung ist die rechte Seite von Gleichung 3.1.2 und 3.1.3 LORENTZ-Invariant

Mit der Variation der Determinante einer Matrix. (Unter Verwendung der Invarianz von Spur und Determinante unter Basistransformationen)

$$\begin{aligned}
 \delta \det(M) &= \delta(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum_k \lambda_1 \dots \delta \lambda_k \dots \lambda_n = \\
 &= \sum_k \lambda_1 \dots \lambda_k \lambda_k^{-1} \delta \lambda_k \dots \lambda_n = \det(M) \sum_k \lambda_k^{-1} \delta \lambda_k = \\
 &= \det(M) \operatorname{tr}(M^{-1} \delta M)
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

folgt,

$$\delta \omega_g = \frac{1}{2} \omega_g g^{ab} \delta g_{ab}. \tag{3.2.3}$$

Setzt man dies nun in die Variation der Wirkung ein so findet man,

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \omega_g g_{ab} (\delta g)^{ab} \left(g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi + m^2 \phi^2 \right) + \frac{1}{2} \int \omega_g \delta g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi = \\
 &\quad \frac{1}{2} \int \omega_g \left[-\frac{1}{2} g_{ab} \left(g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi + m^2 \phi^2 \right) + \nabla_a \phi \nabla_b \phi \right] \delta g^{ab}.
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $(\delta g)^{ab} = -\delta g^{ab}$. (Dies ist leicht zu beweisen, wenn man die Relation $g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c$ ableitet.)

Der Energie Impuls Tensor ist nun,

$$T_{ab} = \frac{2}{\omega_g} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \left(g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi + m^2 \phi^2 \right). \tag{3.2.4}$$

3.3 Positive und negative Frequenz

Um den Begriff positiver Frequenz, respektive positiver Energie invariant zu definieren bieten sich symmetrische Raumzeiten an, das heißt solche in denen ein ausgezeichnete Zeitbegriff existiert, welche durch einen stationären KILLING-Vektor repräsentiert wird. Es sei nun $\{g_k\}$ ein vollständiges System von Moden und ξ ein licht- oder zeitartiges KILLING-Vektorfeld. Eine Mode wird als Mode positiver Frequenz bezeichnet, wenn

$$L_\xi g_k = -i\omega g_k \tag{3.3.1}$$

und als Mode negativer Frequenz falls

$$L_\xi g_k = i\omega g_k, \tag{3.3.2}$$

mit $\omega > 0$.

Im MINKOWSKI-Raum können wir, im Bezug auf LORENTZ-Koordinaten, die normale Zeitableitung verwenden

$$L_{\partial_t} f_k = \partial_t f_k.$$

Betrachtet man die MINKOWSKI-Moden f_k so sieht man, dass sich diese analytisch in der Zeit fortsetzen lassen, wobei sie beschränkt im unteren komplexen Halbraum sind, hingegen sind die komplex konjugierten Moden f_k^* analytisch und beschränkt im oberen komplexen Halbraum. Dies kann man erkennen indem man die Zeit komplexifiziert, d.h. $t \rightarrow t_r + it_i$. Setzt man dies nun in eine Mode ein erhält man

$$f_k = e^{i(k_m x^m - \omega t_r)} e^{\omega t_i},$$

verwendet man nun die Euler Identität, so erhält man

$$f_k = \underbrace{e^{ik_m x^m}}_C [\cos(\omega t_r) - i \sin(\omega t_r)] e^{\omega t_i}$$

es ist offensichtlich dass dies die CAUCHY-RIEMANN-Gleichungen erfüllt, denn

$$\partial_{t_r} \operatorname{Re}(f_k) = -C\omega \sin(\omega t_r) e^{\omega t_i} = \partial_{t_i} \operatorname{Im}(f_k)$$

und

$$\partial_{t_r} \operatorname{Im}(f_k) = -C\omega \cos(\omega t_r) e^{\omega t_i} = -\partial_{t_i} \operatorname{Re}(f_k)$$

Die Beschränktheit ist gewährleistet, da für $\omega > 0$, $\lim_{t_i \rightarrow -\infty} e^{\omega t_i} = 0$. Im folgenden bezeichnen wir die obere komplexe Halbebene als Zukunftsröhre und die Untere als Vergangenheitsröhre. Somit lässt sich der folgende Satz formulieren [14].

Satz 3.1. *Die MINKOWSKI-Moden sind analytisch und beschränkt in der Vergangenheitsröhre, während die komplex konjugierten MINKOWSKI-Moden analytisch und beschränkt in der Zukunftsröhre sind.*

Interessant ist auch die Umkehrung obigen Satzes [14, 15]:

Satz 3.2. *Eine Funktion die analytisch und beschränkt in der Vergangenheitsröhre ist besitzt nur positive Frequenzen bzw. eine Funktion die analytisch und beschränkt in der Zukunftsröhre ist, enthält nur negative Frequenzen [14, 15].*

Beweis. Eine integrierbare Funktion kann in Fourier Form dargestellt werden,

$$f(t) = \int d\omega F(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Komplexifikation der Zeit bedeutet $t \rightarrow t_r + it_i$ und daher gilt

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int d\omega (F_r(\omega) + iF_i(\omega)) e^{-i\omega t_r + \omega t_i} = \\
 &= \int d\omega (F_r(\omega) + iF_i(\omega)) (\cos(\omega t_r) - i \sin(\omega t_r)) e^{\omega t_i} = \\
 &= \int d\omega (F_r \cos(\omega t_r) + F_i \sin(\omega t_r)) e^{\omega t_i} + \\
 &+ i \int d\omega (F_i \cos(\omega t_r) - F_r \sin(\omega t_r)) e^{\omega t_i}.
 \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich dass diese Funktion die CAUCHY-RIEMANN-Gleichungen erfüllt, denn

$$\partial_{t_r} \operatorname{Re}(f(t)) = \int d\omega \omega (-F_r \sin(\omega t_r) + F_i \cos(\omega t_r)) e^{\omega t_i} = \partial_{t_i} \operatorname{Im}(f(t))$$

und

$$\partial_{t_r} \operatorname{Im}(f(t)) = - \int d\omega \omega (F_r \cos(\omega t_r) + F_i \sin(\omega t_r)) e^{\omega t_i} = -\partial_{t_i} \operatorname{Re}(f(t)).$$

Damit die Funktion beschränkt in der Vergangenheitsröhre ist muss $F(\omega) = \theta(\omega) f(\omega)$ gelten und damit sie beschränkt in der Zukunftsröhre ist muss $F(\omega) = \theta(-\omega) f(\omega)$ gelten [14]. \square

3.4 Bogolubov-Koeffizienten

Wir betrachten ein Skalarfeld ϕ in zwei unterschiedlichen vollständigen Modensystemen. Die Vorstellung von positiver und negativer Frequenz erlaubt uns (a_k, b_k) als Vernichtungsoperatoren bzw. $(a_k^\dagger, b_k^\dagger)$ als Erzeuger zu identifizieren,

$$\phi = \sum a_k f_k + a_k^\dagger f_k^* = \sum b_k g_k + b_k^\dagger g_k^*. \quad (3.4.1)$$

Der Einfachheit halber werden die Moden mit einem Diskreten Parameter k Nummeriert. Des Weiteren sollten die Moden an eine Zerlegung der Raumzeit in raumartige Hyperflächen Σ_t angepasst sein. Positive Frequenz bezieht sich dann auf die

zukunftsgerichtete Flächennormale und negative Frequenz auf die vergangenheitsgerichtete Flächennormale. Da beide Sätze vollständig sind, können wir f_k in Termen von g_k bzw. umgekehrt ausdrücken.

$$g_k = \sum_{k'} \alpha_{kk'} f_{k'} + \beta_{kk'} f_{k'}^* \quad (3.4.2)$$

und

$$f_k = \sum_{k'} \gamma_{k'k} g_{k'} + \epsilon_{k'k} g_{k'}^*. \quad (3.4.3)$$

Um die Koeffizienten α , β , γ , und ϵ zu bestimmen, projizieren wir mit f_k und g_k auf Gleichung 3.4.2. Es folgt

$$\begin{aligned} (g_k, f_l) &= \sum_{k'} (\alpha_{kk'} f_{k'}, f_l) + (\beta_{kk'} f_{k'}^*, f_l) = \\ &= \sum_{k'} \alpha_{kk'} \underbrace{(f_{k'}, f_l)}_{\delta_{k'l}} + \beta_{kk'} \underbrace{(f_{k'}^*, f_l)}_0 = \alpha_{kl}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (g_k, f_l^*) &= \sum_{k'} (\alpha_{kk'} f_{k'}, f_l^*) + (\beta_{kk'} f_{k'}^*, f_l^*) = \\ &= \sum_{k'} \alpha_{kk'} \underbrace{(f_{k'}, f_l^*)}_0 + \beta_{kk'} \underbrace{(f_{k'}^*, f_l^*)}_{-\delta_{k'l}} = -\beta_{kl}. \end{aligned}$$

Es gilt also $\alpha_{kk'} = (g_k, f_{k'})$ und $\beta_{kk'} = -(g_k, f_{k'}^*)$.

Macht man analoge Projektionen in Gleichung 3.4.3, so folgt $(g_k, f_{k'}) = \gamma_{k'k}^*$ und $(g_k, f_{k'}^*) = \epsilon_{k'k}$, also $\gamma_{k'k} = \alpha_{kk'}^*$ und $\epsilon_{k'k} = -\beta_{kk'}$ und somit

$$f_k = \sum_{k'} \alpha_{k'k}^* g_{k'} - \beta_{k'k} g_{k'}^*. \quad (3.4.4)$$

Wir können ebenfalls die Erzeuger und die Vernichter a, a^\dagger in Termen von b, b^\dagger und umgekehrt ausdrücken

$$a_k = \sum \alpha_{k'k} b_{k'} + \beta_{k'k}^* b_{k'}^\dagger$$

und

$$b_k = \sum \alpha_{kk'} a_{k'} - \beta_{kk'} a_{k'}^\dagger.$$

Nun kann der jeweilige Vakuumzustand definiert werden

$$a_k |0_f\rangle = 0$$

und

$$b_k |0_g\rangle = 0.$$

Betrachtet man nun den Teilchenzahloperator $a_k^\dagger a_k$ der f -Moden und wendet diesen auf das g -Vakuum an, so findet man

$$\begin{aligned} \langle 0_g | a_k^\dagger a_k | 0_g \rangle &= \langle 0_g | \left(\sum_{p'} \alpha_{p'k}^* b_{p'}^\dagger + \beta_{p'k} b_{p'} \right) \left(\sum_{k'} \alpha_{k'k} b_{k'} + \beta_{k'k}^* b_{k'}^\dagger \right) = \\ &= \langle 0_g | \sum_{k',p'} \beta_{p'k} \beta_{k'k}^* b_{p'} b_{k'}^\dagger | 0_g \rangle = \langle 0_g | \sum_{k',p'} \beta_{p'k} \beta_{k'k}^* \left(b_{k'}^\dagger b_{p'} + \delta_{k'p'} \right) | 0_g \rangle = \\ &= \sum_{k'} \beta_{k'k} \beta_{k'k}^* = \sum_{k'} |\beta_{k'k}|^2. \end{aligned}$$

Es kann also sein, dass Beobachter f keine Teilchen wahrnimmt, während Beobachter g von einem Spektrum an Teilchen $\sum_{k'} |\beta_{k'k}|^2$ umgeben ist. Es stellt sich heraus, dass das Vakuum unter LORENTZ-Transformationen invariant ist, jedoch bereits bei gegeneinander beschleunigt, bewegten Systemen verschwindet der β -Koeffizient nicht mehr. Aus Gleichung 3.4.2 kann man ablesen, dass g_k keine negativen Frequenzen enthält sobald der Koeffizient β verschwindet [13].

3.5 Die Feynmansche Interpretation

Die Probleme, die in dieser Arbeit behandelt werden, können natürlich mittels der Maschinerie der Quantenfeldtheorie gelöst werden. Es gibt jedoch auch einen anderen Zugang, welcher auf FEYNMAN zurück geht.² Betrachtet man Teilchen Erzeugungs- oder Vernichtungsprozesse in einem Raumzeitbild so kann eine einfache Interpretation dieser Prozesse gegeben werden. Zum Beispiel bei der Erzeugung eines Elektron-Positron Paares starten die beiden Weltlinien vom selben Raumzeitpunkt P_3 das Positron propagiert dann solange bis es von einem weiteren Elektron, welches von P_1 startet, in P_2 vernichtet wird (siehe Abb. 3.5.1).

Alternativ kann man diesen Prozess auch so interpretieren, dass ein Elektron in P_1 startet, in P_2 an einem Potential in die Vergangenheit gestreut wird, wo es an P_3 erneut an einem Potential gestreut wird und weiter in die Zukunft propagiert (siehe Abb. 3.5.2).

²Die FEYNMAN Methode reicht völlig aus für die Betrachtung von Streuprozessen. Wenn z.B. thermische Zustände konstruiert werden sollen benötigt man nichtsdestotrotz die volle Quantenfeld Theorie.

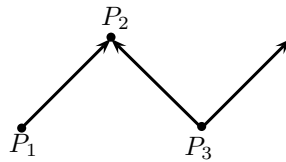


Abbildung 3.5.1: Diese Abbildung zeigt die Erzeugung eines Elektron-Positron Paares in P_3 . Das Positron propagiert solange bis es von einem Elektron in P_2 vernichtet wird.

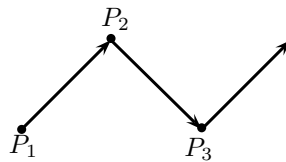


Abbildung 3.5.2: Diese Abbildung zeigt die Propagation eines Elektrons. Von P_1 bis P_2 propagiert es in die Zukunft. Am Punkt P_2 kommt es zu einer Streuung. Von P_2 bis P_3 in die Vergangenheit und nach erneuter Streuung wieder in die Zukunft.

Ein Antiteilchen kann also, nach FEYNMAN, formal als in die Vergangenheit reisendes Teilchen betrachtet werden. Betrachtet man ein Teilchen als Wellenpaket

$$\psi(x^m) = \int d^3k A(k^m) e^{i(k^m x^m - \omega t)},$$

so erkennt man, dass die Zeitabhängigkeit einzig und allein in dem Faktor $e^{-i\omega t}$ steckt, d.h. Zeitumkehr bewirkt einen Vorzeichenwechsel im Exponenten

$$e^{-i\omega t} \rightarrow e^{i\omega t},$$

laut Gleichungen 3.3.1 und 3.3.2 bedeutet dies aber nichts anderes als einen Wechsel von positiver Frequenz auf negative Frequenz. In Kapitel 5 betrachten wir Streuprozesse und starten mit einem Wellenpaket mit positiver und negativer Frequenz und untersuchen ob die Möglichkeit besteht, eine Streuwelle rein positiver Frequenz zu erhalten. Nach der FEYNMANSCHEN Interpretation würde dies nämlich bedeuten, dass ein Teilchen vernichtet wurde [16].

Kapitel 4

Klassischer thermischer Energie Impuls Tensor

4.1 Relativistische Thermodynamik

Bei der üblichen BOSE-EINSTEIN-Verteilung, welcher Photonen genügen, handelt es sich um eine Funktion, welche im Ruhesystem des Beobachters der dieses thermische Gleichgewicht feststellt definiert ist.

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{\beta E} - 1}$$

mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$, wobei k_B die Boltzmann Konstante und T die Temperatur ist. Um diese in relativistischer Form anzugeben betrachten wir den Exponenten βE und schreiben diesen in einer LORENTZ-invarianten Form. Da es sich bei der Energie um eine, bezüglich des Beobachters, dessen Ruhesystem mit jenem des thermischen Gleichgewichts übereinstimmt, also relativ definierte Größe handelt, lässt sich der Exponent βE als $\beta (-u_a k^a)$ schreiben. Nun definieren wir den Vierervektor $\beta^a = \beta u^a$ [17]. Damit kann die obige Verteilung geschrieben werden als

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{-\beta^a k_a} - 1}.$$

Ähnlich wie bei den MAXWELL-Gleichungen stellt sich die Frage nach dem 4-dimensionalen Objekt dessen Komponenten der Verteilung entsprechen. Des weiteren muss man die Lichtartigkeit des Vektors k^a in Betracht ziehen, was mit einem Faktor $\delta_+(k^2)$ getan werden kann. Dabei beschränkt das + die Vektoren auf zukunftsgerichtete. Letzt-

endlich ist die einzige ausgezeichnete Richtung, die des Vektors k^a und somit folgt

$$T^{ab} = A \frac{k^a k^b}{e^{-\beta k} - 1} \delta_+(k^2),$$

mit einer noch unbestimmten Konstante A . Diese kann festgelegt werden indem man den Erwartungswert der T^{00} -Komponente des Energie Impulstensors betrachtet, denn dieser muss das STEFAN-BOLTZMAN-Gesetz erfüllen,

$$E = \langle u_a T^{ab} u_b \rangle \propto T^4.$$

Also folgt mit $(uk) = -\omega$, $|k^m| =: k$,

$$\begin{aligned} \langle u_a T^{ab} u_b \rangle &= A \int d^4 k \frac{\omega^2}{e^{\beta \omega} - 1} \delta_+(\omega^2 - k^m k^m) = \\ &= A \int d^4 k \frac{\omega^2}{e^{\beta \omega} - 1} \frac{\delta(\omega - k)}{2k} = \\ &= \frac{A}{2} \int d^3 k \frac{k}{e^{\beta k} - 1} = 2\pi A \int dk \frac{k^3}{e^{\beta k} - 1}. \end{aligned}$$

Macht man nun die Substitution $\beta k = x$, so führt dies zur korrekten T -Abhängigkeit,

$$\langle u_a T^{ab} u_b \rangle = \frac{2\pi A}{\beta^4} \int dx \frac{x^3}{e^x - 1} = 2A \frac{\pi^5}{15} k_B^4 T^4 = A\sigma T^4. \quad (4.1.1)$$

Vergleicht man dies mit dem STEFAN-BOLZMANN-Gesetz so ist klar, dass für die Konstante $A = 1$ gilt.

Daher gilt für den thermischen Energie Impuls Tensor eines Photons

$$T^{ab} = \frac{k^a k^b}{e^{-\beta(ku)} - 1} \delta_+(k^2),$$

dieser ist offensichtlich spurfrei.

4.2 Ultrarelativistischer Limes des thermischen Energie Impuls Tensors

In diesem Abschnitt wollen wir eine Abfolge von LORENTZ-Systemen, welche im Limes Lichtgeschwindigkeit erreichen betrachten. Ziel ist es nun den distributionellen, ultrarelativistischen Limes, falls dieser existiert, zu berechnen. Dazu betrachten wir

$$\lim_{v \rightarrow 1} (T^{ab}, \varphi_{ab}). \quad (4.2.1)$$

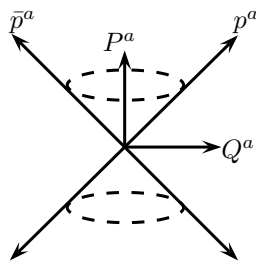


Abbildung 4.2.1: Diese Abbildung zeigt die Vektorfelder, P^a und Q^a , welche bei der Limes Bildung gegen p^a verkippen.

Die tensorielle Testfunktion ist gegeben durch

$$\varphi_{ab} = \varphi_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu,$$

mit $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Des weiteren gilt $e_a^0 = p_a$, $e_a^1 = \bar{p}_a$, $e_a^2 = \tilde{e}_a^2$ und $e_a^3 = \tilde{e}_a^3$. Durch diese Zerlegung können wir Gleichung 4.2.1 in ihre Komponenten zerlegen

$$\lim_{v \rightarrow 1} (T^{ab}, \varphi_{ab}) = \lim_{v \rightarrow 1} (T^{ab} e_a^i e_b^j, \varphi_{ij}) = \lim_{v \rightarrow 1} (T^{ij}, \varphi_{ij}).$$

Anstatt dem Limes $v \rightarrow 0$ zu bilden, führten wir zwei Vektorfelder, $P^a = m u^a$ und das dazu konjugierten Räumliche Q^a , ein.

Betrachtet man nun Abbildung 4.2.1, so erkennt man das sich die beiden neu eingeführten Vektorfelder durch geeignete Linearkombinationen von p^a und \bar{p}^a darstellen lassen,

$$P^a = p^a + \alpha \bar{p}^a$$

und

$$Q^a = p^a + \beta \bar{p}^a.$$

Die Koeffizienten α und β können mittels der Relationen $P^2 = -m^2$, $Q^2 = m^2$ und $PQ = 0$ bestimmen. Dies führt zu (unter Verwendung von $p\bar{p} = -1$)

$$\alpha = -\beta = \frac{m^2}{2}.$$

Im Limes $m \rightarrow 0$ verkippen die beiden Vektorfelder P^a und Q^a also genau gegen das lichtartige Vektorfeld p^a .

Es folgt somit

$$\lim_{m \rightarrow 0} (T^{ab}, \varphi_{ab}) = \lim_{m \rightarrow 0} \int d^4k \frac{k^a k^b \varphi_{ab}}{e^{-\frac{\beta}{m} (pk + \frac{m^2}{2} \bar{p}k)} - 1} \delta(k^2).$$

Der Einfachheit halber führen wir die beiden Frequenzvariablen $\omega = -(\bar{p}k)$ und $\bar{\omega} = -(pk)$ ein. Zerlegt man nun die Testfunktion nach ihren Komponenten

$$\varphi_{ab} = p_a p_b \varphi + \bar{p}_a \bar{p}_b \psi + p_{(a} \bar{p}_{b)} \chi + p_{(a} \tilde{e}_b^i \varphi_i + \bar{p}_{(a} \tilde{e}_b^i \psi_i + \tilde{e}_a^i \tilde{e}_b^j \varphi_{ij},$$

wobei die Testfunktionen $(\varphi, \psi, \chi, \varphi_i, \psi_i, \varphi_{ij})$ jeweils von den Variablen $(\bar{\omega}, \omega, \tilde{k} e_\rho^i)$ abhängen so folgt,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} (T^{ab}, \varphi_{ab}) &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int d\bar{\omega} d\omega d(\tilde{k}^2) d\phi \frac{k^a k^b \varphi_{ab}}{e^{\frac{\beta}{m} (\bar{\omega} + \frac{m^2}{2} \omega)} - 1} \delta(k^2) = \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int d\bar{\omega} d\omega d(\tilde{k}^2) d\phi \frac{\delta(\tilde{k}^2 - 2(pk)(\bar{p}k))}{e^{\frac{\beta}{m} (\bar{\omega} + \frac{m^2}{2} \omega)} - 1} \left[\omega^2 \psi + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\omega}^2 \varphi + \bar{\omega} \omega \chi + \bar{\omega} \tilde{k}^i \varphi_i + \omega \tilde{k}^i \psi_i + \tilde{k}^i \tilde{k}^j \varphi_{ij} \right]. \end{aligned}$$

Durch die Auswertung der δ -Funktion hängen die Testfunktionen nun von den Variablen $(\bar{\omega}, \omega, \sqrt{2\bar{\omega}\omega} e_\rho^i)$ ab, was zu

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} (T^{ab}, \varphi_{ab}) &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^\infty d\bar{\omega} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{e^{\frac{\beta}{m} (\bar{\omega} + \frac{m^2}{2} \omega)} - 1} \left[\omega^2 \psi + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\omega}^2 \varphi + \bar{\omega} \omega \chi + \bar{\omega} \sqrt{2\bar{\omega}\omega} e_\rho^i \varphi_i + \omega \sqrt{2\bar{\omega}\omega} e_\rho^i \psi_i + 2\bar{\omega}\omega e_\rho^i e_\rho^j \varphi_{ij} \right] \end{aligned}$$

führt.

Da wir in erster Linie am HAWKING-Effekt interessiert sind, gilt $\frac{\beta}{m} =: \tilde{\beta}$, was bei genauerer Betrachtung bedeutet, dass $T \propto \frac{1}{m}$ und somit wird das System heißer, je näher wir dem Grenzwert $m = 0$ kommen. Betrachtet man nun die obigen Integrale, in erster Näherung für $m = 0$, so erkennt man, dass lediglich die Komponente $\omega^2 \psi$ Probleme macht, den diese verhält sich in der Nähe von Null wie $\frac{1}{\bar{\omega}}$. Für alle anderen folgt im schlimmsten Fall eine Abhängigkeit von $\frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}}}$ und dies ist eine integrierbare Singularität und daher bleiben diese Beiträge wohldefiniert und endlich. Betrachten wir nun den divergierenden Teil etwas genauer,

$$\lim_{m \rightarrow 0} (T^{00}, \psi) := \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^\infty d\bar{\omega} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\omega^2 \psi(\bar{\omega}, \omega, \sqrt{2\bar{\omega}\omega} e_\rho^i)}{e^{\tilde{\beta} (\bar{\omega} + \frac{m^2}{2} \omega)} - 1}.$$

Dieses Integral ist, im naiven Limes für $\bar{\omega} = 0$, singular. Nun kann man sich die Regularisierungsmethode aus Abschnitt 2.1.5 zunutze machen.

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow 0} (T^{00}, \psi) &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^\infty d\bar{\omega} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\omega^2 \psi(\bar{\omega}, \omega, \sqrt{2\bar{\omega}\omega} e^i)}{e^{\tilde{\beta}(\bar{\omega} + \frac{m^2}{2}\omega)} - 1} = \\
 &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^\infty d\bar{\omega} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\omega^2 (\psi(\bar{\omega}, \omega, \sqrt{2\bar{\omega}\omega} e^i) - \psi(0, \omega, 0^i))}{e^{\tilde{\beta}(\bar{\omega} + \frac{m^2}{2}\omega)} - 1} + \\
 &+ \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^\infty d\bar{\omega} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\phi \psi(0, \omega, 0^i) \frac{\omega^2}{e^{\tilde{\beta}(\bar{\omega} + \frac{m^2}{2}\omega)} - 1} = \\
 &= \lim_{m \rightarrow 0} ([T^{00}], \psi) + \pi \lim_{m \rightarrow 0} \int_0^\infty d\omega \psi(0, \omega, 0^i) \omega^2 \int_0^\infty d\bar{\omega} \frac{1}{e^{\tilde{\beta}(\bar{\omega} + \frac{m^2}{2}\omega)} - 1}
 \end{aligned}$$

Der erste Term ist nun an der Stelle $\bar{\omega} = 0$, wohldefiniert und endlich. Für den zweiten Teil folgt nach der Substitution $e^{\tilde{\beta}(\bar{\omega} + \frac{m^2}{2}\omega)} = x$,

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty d\bar{\omega} \frac{1}{e^{\tilde{\beta}(\bar{\omega} + \frac{m^2}{2}\omega)} - 1} = \frac{1}{\tilde{\beta}} \int_{e^{\tilde{\beta}\frac{m^2}{2}\omega}}^\infty dx \frac{1}{x(x-1)} = \\
 &= \frac{1}{\tilde{\beta}} \int_{e^{\tilde{\beta}\frac{m^2}{2}\omega}}^\infty dx \frac{-(x-1) + x}{x(x-1)} = \frac{1}{\tilde{\beta}} \int_{e^{\tilde{\beta}\frac{m^2}{2}\omega}}^\infty dx \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = \\
 &= \frac{1}{\tilde{\beta}} \log \left(1 - \frac{1}{x} \right) \Big|_{e^{\tilde{\beta}\frac{m^2}{2}\omega}}^\infty = -\frac{1}{\tilde{\beta}} \log \left(1 - e^{-\tilde{\beta}\frac{m^2}{2}\omega} \right)
 \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{m \rightarrow 0} (T^{00}, \psi) = \lim_{m \rightarrow 0} ([T^{00}], \psi) - \pi \lim_{m \rightarrow 0} \int_0^\infty d\omega \psi(0, \omega, 0^i) \omega^2 \frac{1}{\tilde{\beta}} \log \left(1 - e^{-\tilde{\beta}\frac{m^2}{2}\omega} \right).$$

Finden wir nun eine Testfunktion $\psi(\omega) := \psi(0, \omega, 0^i)$, sodass der zweite Teil divergiert so existiert die Regularisierung nicht. Betrachten wir also die Funktion

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2} & \text{für } \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

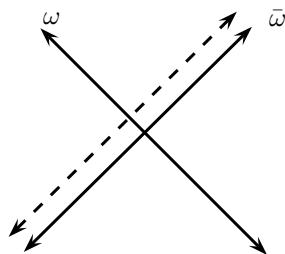


Abbildung 4.2.2: Durch die Skalierung der Temperatur verkippt die Gleichzeitebene so das es keinen Schnitt mit der von p^a aufgespannten Achse gibt. Mit den anderen Achsen gibt es jeweils endliche Schnittpunkte.

so haben wir das folgende Integral auszuwerten

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\pi}{\tilde{\beta}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \log \left(1 - e^{-\tilde{\beta} \frac{m^2}{2} \omega} \right).$$

Nach der Substitution $x = e^{-\tilde{\beta} \frac{m^2}{2} \omega}$, wird dieses zu

$$-\lim_{m \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\tilde{\beta}^2 m^2} \int_{e^{-\tilde{\beta} \frac{m^2}{2} \omega_1}}^{e^{-\tilde{\beta} \frac{m^2}{2} \omega_2}} dx \frac{\log(1-x)}{x}.$$

Dies wird zu einer verallgemeinerten RIEMANNSchen Zetafunktion¹, denn es gilt

$$g_2(z) = \int_0^z dx \frac{\log(1-x)}{x}.$$

Es folgt also somit für obiges Integral

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\tilde{\beta}^2 m^2} \left[g_2 \left(e^{-\tilde{\beta} \frac{m^2}{2} \omega_1} \right) - g_2 \left(e^{-\tilde{\beta} \frac{m^2}{2} \omega_2} \right) \right],$$

was im Limes, nach der Anwendung von DE L'HOSPITAL divergiert. Die Regularisierung existiert also in diesem Fall nicht.

¹Die RIEMANNSchen Zetafunktionen sind definiert über $g_\nu(z) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} - 1} dx$.

Die Hyperebene des Beobachters verkippt hier immer mehr gegen eine $\omega = \text{konstant}$ Hyperebene (siehe Abb.4.2.2). Dies bedeutet jedoch, dass alle Achsen einen endlichen Schnittpunkt mit der Hyperebene besitzen. Das einzige Problem liegt, wie auch schon die Rechnung gezeigt hat in der pp -Komponente. Physikalisch entspricht dies dem DOPPLER-Effekt. Die Divergenz lässt sich somit auf eine unendlich starke blau-Verschiebung zurückführen. In den anderen Richtungen entsteht ein endliches PLACK-Spektrum.

Kapitel 5

Streuprozesse und Teilchenvernichtung

In diesem Kapitel untersuchen wir Streuprozesse, eines KLEIN-GORDON-Feldes und errechnen mittels COLOMBEUScher Theorie eine Übergangsbedingung. Haben wir dann diese Anschlussbedingung erhalten, so betrachten wir ob es Teilchen-Erzeugung bzw. Vernichtung in solchen Systemen gibt. Wir starten also mit der KLEIN-GORDON-Gleichung, die Verallgemeinerung auf gekrümmte Räume besteht darin, die Koordinaten Kovariante Ableitung durch die LEVI-CIVITA-Ableitung zu ersetzen.

$$(\nabla^2 - m^2) \phi = 0$$

Der Term $\nabla^2 \phi$ kann umgeschrieben werden in

$$\nabla^2 \phi = g^{ab} \nabla_a \partial_b \phi = (\eta^{ab} - f p^a p^b) (\partial_a - C_{ba}^c \partial_c) \partial_b \phi.$$

Von Gleichung 2.1.6 wissen wir, dass der C_{ab}^c -Term nicht beiträgt, da sowohl $C_a^{ca} = 0$ als auch $p^a p^b C_{ba}^c = 0$. Wir finden daher

$$(\partial^2 - m^2) \phi = f (p\partial)^2 \phi$$

die KLEIN-GORDON-Gleichung in einer pp-Wellen Raumzeit.

Klarerweise ist dies für $px \neq 0$, die freie KLEIN-GORDON-Gleichung.

Daher können wir ϕ_- , o.B.d.A. als ebene Welle ansetzen,

$$\phi_- = e^{ikx} = e^{ik_a(-p^a(\bar{p}x) - \bar{p}^a(px) + \tilde{x}^a)} = e^{i\tilde{k}\tilde{x}} e^{-i(pk)(\bar{p}x) - i(\bar{p}k)(px)}.$$

5.1 Colombeausche Anschlussbedingung

Wir starten mit der schwachen KLEIN-GORDON-Gleichung

$$(\partial^2 - m^2) \phi \approx f (p\partial)^2 \phi. \quad (5.1.1)$$

Nach Differentiation des Ansatzes $\phi = \theta_+ \phi_+ + \theta_- \phi_-$, erhält man für die diversen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_a \phi &= \theta' (\phi_+ - \phi_-) p_a + \theta_+ \partial_a \phi_+ + \theta_- \partial_a \phi_-, \\ \partial^2 \phi &= 2\theta' ((p\partial) \phi_+ - (p\partial) \phi_-) \end{aligned}$$

und

$$(p\partial) \phi = \theta_+ (p\partial) \phi_+ + \theta_- (p\partial) \phi_-.$$

Somit folgt nach dem einsetzen in die KLEIN-GORDON-Gleichung

$$2\theta' ((p\partial) \phi_+ - (p\partial) \phi_-) \approx \delta \tilde{f} \left(A (p\partial)^2 \phi_+ + (1 - A) (p\partial)^2 \phi_- \right),$$

wobei wir wieder $\theta\delta \approx A\delta$ verwendet haben. Nach dem Koeffizientenvergleich erhält man

$$(p\partial) \phi_+ - (p\partial) \phi_- = \frac{1}{2} \tilde{f} \left(A (p\partial)^2 \phi_+ + (1 - A) (p\partial)^2 \phi_- \right). \quad (5.1.2)$$

Nun benötigen wir eine physikalische Bedingung um die Ambiguität A zu fixieren. Dazu betrachten wir den Energie Impulstensor des Feldes. (Gleichung 3.2.4)

Nun Berechnen wir daraus den Strom $j^a = p^b T_b^a$. (Dabei verwenden wir, dass ∇ auf ein Skalarfeld schlichtweg zu ∂ wird.)

$$j_a = T_{ab} p^b = \partial_a \phi (p\partial) \phi - \frac{1}{2} p_a \left((\eta^{cd} - f p^c p^d) \partial_c \phi \partial_d \phi + m^2 \phi^2 \right).$$

und daher

$$j^b = g^{ab} j_a = \partial^a \phi (p\partial) \phi - \frac{1}{2} p^b \left(\partial^c \phi \partial_c \phi + m^2 \phi^2 + f ((p\partial) \phi)^2 \right).$$

Dieser Ausdruck ist divergenzfrei, denn p^a ist kovariant konstant, und $\partial_a T_b^a = 0$. Daher können wir mittels der Gleichung

$$\partial_a j^a \approx 0$$

die Ambiguität bestimmen.

Da die Assoziation unter der Ableitung erhalten bleibt, berechnen wir zuerst den Strom j^a .

$$\begin{aligned}
j^a &\approx (\theta_+ (p\partial) \phi_+ + \theta_- (p\partial) \phi_-) (\theta' p^a (\phi_+ - \phi_-) + \theta_+ \partial^a \phi_+ + \theta_- \partial^a \phi_-) \\
&\quad - \frac{1}{2} p^a [(\theta' p_c (\phi_+ - \phi_-) + \theta_+ \partial_c \phi_+ + \theta_- \partial_c \phi_-) (\theta' p^c (\phi_+ - \phi_-) + \theta_+ \partial^c \phi_+ + \theta_- \partial^c \phi_-) \\
&\quad + m^2 \theta_+ \phi_+^2 + m^2 \theta_- \phi_-^2 + f (B ((p\partial) \phi_+)^2 - (1 - 2A + B) ((p\partial) \phi_-)^2 + 2(A - B) ((p\partial) \phi_+ (p\partial) \phi_-))] \\
&\approx -\frac{1}{2} p^a \delta \tilde{f} [B ((p\partial) \phi_+)^2 + (1 - 2A + B) ((p\partial) \phi_-)^2 + 2(A - B) ((p\partial) \phi_+ (p\partial) \phi_-)] \\
&\quad + \theta_+ \left[(p\partial) \phi_+ \partial^a \phi_+ - \frac{1}{2} p^a (\partial_c \phi_+ \partial^c \phi_+ + m^2 \phi_+^2) \right] \\
&\quad + \theta_- \left[(p\partial) \phi_- \partial^a \phi_- - \frac{1}{2} p^a (\partial_c \phi_- \partial^c \phi_- + m^2 \phi_-^2) \right] = \\
&= \theta_+ j_+^a + \theta_- j_-^a - \frac{1}{2} p^a \delta \tilde{f} [B ((p\partial) \phi_+)^2 + (1 - 2A + B) ((p\partial) \phi_-)^2 + 2(A - B) ((p\partial) \phi_+ (p\partial) \phi_-)],
\end{aligned}$$

wobei wir bei der ersten Assoziation $\theta\delta \approx A\delta$ und $\theta^2\delta \approx B\delta$ verwendeten und in der letzten Zeile die Definition des freien Stroms benutzt haben. Die Divergenz wird nun nach der Assoziation zu

$$\begin{aligned}
\partial_a j^a &\approx \delta p_a (j_+^a - j_-^a) - \delta \tilde{f} [B (p\partial)^2 \phi_+ p\partial \phi_+ + (1 - 2A + B) (p\partial)^2 \phi_- (p\partial) \phi_- \\
&\quad + (A - B) ((p\partial)^2 \phi_+ (p\partial) \phi_-) + (A - B) ((p\partial) \phi_+ (p\partial)^2 \phi_-)] = \\
&= \delta [((p\partial) \phi_+)^2 - ((p\partial) \phi_-)^2] - \delta \tilde{f} [B (p\partial)^2 \phi_+ (p\partial) \phi_+ + (1 - 2A + B) (p\partial)^2 \phi_- (p\partial) \phi_- \\
&\quad + (A - B) ((p\partial)^2 \phi_+ (p\partial) \phi_-) + (A - B) ((p\partial) \phi_+ (p\partial)^2 \phi_-)] = \\
&= \delta ((p\partial) \phi_+ + (p\partial) \phi_-) (p\partial \phi_+ - p\partial \phi_-) - \delta \tilde{f} [B (p\partial)^2 \phi_+ p\partial \phi_+ + (1 - 2A + B) (p\partial)^2 \phi_- (p\partial) \phi_- \\
&\quad + (A - B) ((p\partial)^2 \phi_+ (p\partial) \phi_-) + (A - B) ((p\partial) \phi_+ (p\partial)^2 \phi_-)] \approx 0.
\end{aligned}$$

Setzt man nun die Anschlussbedingung (Gleichung 5.1.2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\delta \left\{ \frac{1}{2} \tilde{f} \delta ((p\partial) \phi_+ + (p\partial) \phi_-) (A (p\partial)^2 \phi_+ + (1 - A) (p\partial)^2 \phi_-) \right. \\
&\quad - \tilde{f} [B (p\partial)^2 \phi_+ (p\partial) \phi_+ + (1 - 2A + B) (p\partial)^2 \phi_- (p\partial) \phi_- \\
&\quad \left. + (A - B) ((p\partial)^2 \phi_+ (p\partial) \phi_-) + (A - B) ((p\partial) \phi_+ (p\partial)^2 \phi_-) \right\} \approx 0.
\end{aligned}$$

Da die gesamte Gleichung zu Null assoziiert ist, muss der Ausdruck in der geschwungenen Klammer verschwinden.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ((p\partial)\phi_+ + (p\partial)\phi_-) \left(A (p\partial)^2 \phi_+ + (1-A) (p\partial)^2 \phi_- \right) - B (p\partial)^2 \phi_+ (p\partial)\phi_+ \\ & - (1-2A+B) (p\partial)^2 \phi_- (p\partial)\phi_- - (A-B) \left((p\partial)^2 \phi_+ (p\partial)\phi_- \right) - (A-B) \left((p\partial)\phi_+ (p\partial)^2 \phi_- \right) = 0 \end{aligned}$$

Dies wird nach einigen Umformungen zu,

$$\begin{aligned} & (A-2B) (p\partial)^2 \phi_+ (p\partial)\phi_+ + (-1+3A-2B) (p\partial)^2 \phi_- (p\partial)\phi_- + \\ & + (-A+2B) (p\partial)^2 \phi_+ (p\partial)\phi_- + (1-3A+2B) (p\partial)\phi_+ (p\partial)^2 \phi_- = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung das jeder einzelne Koeffizient verschwindet, führt zu $A = \frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{4}$.

Somit wird die Anschlussbedingung zu

$$(p\partial)\phi_+ - (p\partial)\phi_- = \frac{1}{4} \tilde{f} \left((p\partial)^2 \phi_+ + (p\partial)^2 \phi_- \right), \quad (5.1.3)$$

bzw.

$$\left(1 - \frac{\tilde{f}}{4} (p\partial) \right) (p\partial)\phi_+ = \left(1 - \frac{\tilde{f}}{4} (p\partial) \right) (p\partial)\phi_-.$$

Mit Hilfe der Fouriertransformationen ψ_+, ψ_-^1 können wir Gleichung 5.1.3 in Form einer CAYLAY-Transformation schreiben

$$\psi_+ = \left(\frac{1 - \frac{i\tilde{f}(pk)}{4}}{1 + \frac{i\tilde{f}(pk)}{4}} \right) \psi_-. \quad (5.1.4)$$

5.2 Schrödinger Gleichung

Um Streuprozesse zu untersuchen ist es einfacher mit einer Anfangswertformulierung zu starten. Die Vorstellung in diesem Teil der Arbeit ist die folgende: ein Wellenpaket (mit positiver und negativer Frequenz) propagiert auf den Schock zu, an der Stelle $px = 0$ trifft sie den Schock. Das Enddatum des einfallenden Wellenpakets ψ_- wird jetzt nach der Vorschrift unserer Anschlussbedingung in ein Anfangsdatum für ein ausfallendes Wellenpaket ψ_+ übersetzt. Um von der KLEIN-GORDON-Gleichung auf die Schrödinger Gleichung überzugehen, machen wir eine Fouriertransformation in der Variable $\bar{p}k$. Wir starten mit der freien KLEIN-GORDON-Gleichung in lichtartigen Koordinaten,

$$\left(-2(p\partial)(\bar{p}\partial) + \tilde{\partial}^2 - m^2 \right) \phi = 0.$$

¹ $\phi = \int d(pk) e^{-i(pk)(\bar{p}x)} \psi$

Für eine monochromatische Welle, $\phi = e^{-i(pk)(\bar{p}x)}\psi$, folgt

$$i(\bar{p}\partial)\psi = \left(\underbrace{-\frac{\tilde{\partial}^2}{2(-pk)}}_{H_{\text{free}}} + \frac{m^2}{2(-pk)} \right) \psi \quad (5.2.1)$$

bzw. in Koordinaten, mit $pk = -\bar{\omega}$, $\bar{p}k = -\omega$, $px = -u$, $\bar{p}x = -v$ und $\bar{p}\partial = \partial_u$,

$$i\partial_u\psi = \left(\underbrace{-\frac{\tilde{\partial}^2}{2\bar{\omega}}}_{H_{\text{free}}} + \frac{m^2}{2\bar{\omega}} \right) \psi = H\psi.$$

Hier identifizieren wir u mit der Zeit und H mit dem zeitunabhängigen HAMILTON-Operator. Von der mathematischen Struktur ist dies natürlich eine Schrödinger Gleichung und kann somit genauso mit einem Zeitentwicklungsoperator gelöst werden

$$\psi = U(u)\Psi(\tilde{x}).$$

Hierbei ist der Zeitentwickler gegeben durch

$$U = e^{-iHu}.$$

5.3 Teilchen Vernichtung

In diesem Abschnitt ist es aufgrund der Unterscheidung zwischen positiver und negativer Frequenz sinnvoll von den Invarianten in ein konkretes Koordinatensystem, wie im vorherigen Abschnitt, überzugehen. Für eine MINKOWSKI-Mode folgt daher

$$f_k = e^{ikx} = e^{i\tilde{k}\tilde{x}} e^{-i\bar{\omega}v} e^{-i\omega u}.$$

Da wir u als Zeitvariable interpretieren bedeutet positive Frequenz

$$\partial_u f_k = -i\omega f_k, \quad k_- > 0.$$

Wir starten also unterhalb des Schocks mit der Welle

$$\phi_- = E(\tilde{k}_E, \bar{\omega}_E) e^{i\tilde{k}_E\tilde{x}} e^{-i\bar{\omega}_E v} e^{-i\omega_E u} + R(\tilde{k}_R, \bar{\omega}_R) e^{i\tilde{k}_R\tilde{x}} e^{i\bar{\omega}_R v} e^{i\omega_R u},$$

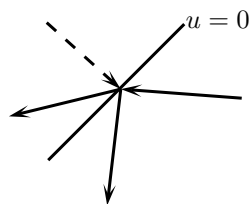


Abbildung 5.3.1: Die Abbildung zeigt einen Teilchenvernichtungsprozess an der lichtartigen Hyperebene.

mit $k_- = \frac{\tilde{k}^2}{2\bar{\omega}}$. Nach der Fourier Transformation in der Variable v (und der korrespondierenden Frequenz Variable $\bar{\omega}$) folgt

$$\psi_- = E(\tilde{k}_E, \bar{\omega}_E) e^{i\tilde{k}_E \tilde{x}} e^{-i(\bar{\omega}_E - \bar{\omega})v} e^{-i\omega_E u} + R(\tilde{k}_R, \bar{\omega}_R) e^{i\tilde{k}_R \tilde{x}} e^{i(\bar{\omega}_R + \bar{\omega})v} e^{i\omega_R u}.$$

Für $\psi_+|_{u=0} = C(\tilde{x}, \bar{\omega}) \psi_-|_{u=0}$ ² ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \psi_+|_{u=0} &= C(\tilde{x}, \bar{\omega}) E(\tilde{k}_E, \bar{\omega}_E) e^{i\tilde{k}_E \tilde{x}} e^{-i(\bar{\omega}_E - \bar{\omega})v} + \\ &+ C(\tilde{x}, \bar{\omega}) R(\tilde{k}_R, \bar{\omega}_R) e^{i\tilde{k}_R \tilde{x}} e^{i(\bar{\omega}_R + \bar{\omega})v}. \end{aligned}$$

Zerlegt man dies nun in ebene Wellen so erhält man

$$\begin{aligned} \psi_+|_{u=0} &= E(\tilde{k}_E, \bar{\omega}_E) e^{-i(\bar{\omega}_E - \bar{\omega})v} \int d\tilde{l} \tilde{C}(\bar{\omega}_E, \tilde{l} - \tilde{k}_E) e^{i\tilde{l}\tilde{x}} + \\ &+ R(\tilde{k}_R, \bar{\omega}_R) e^{i(\bar{\omega}_R + \bar{\omega})v} \int d\tilde{l} \tilde{C}(-\bar{\omega}_R, \tilde{l} - \tilde{k}_R) e^{i\tilde{l}\tilde{x}} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{C}(\bar{\omega}, \tilde{q}) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\tilde{x} \frac{1 + \frac{i\tilde{f}\bar{\omega}}{4}}{1 - \frac{i\tilde{f}\bar{\omega}}{4}} e^{-i\tilde{q}\tilde{x}},$$

Um nun tatsächlich einen Vernichtungsprozess möglich machen zu können, dürfen in ψ_+ nur Moden positiver Frequenz auftauchen (siehe Abb. 5.3.1), d.h.

² $C(\tilde{x}, \bar{\omega})$ bezeichnet die CAYLAY-Transformation aus Gleichung 5.1.4

$$\begin{aligned}
 & E(\tilde{k}_E, \bar{\omega}_E) e^{-i(\bar{\omega}_E - \bar{\omega})v} \int d\tilde{l} \tilde{C}(\bar{\omega}, \tilde{l} - \tilde{k}_E) e^{i\tilde{l}\tilde{x}} + \\
 & + R(\tilde{k}_R, \bar{\omega}_R) e^{i(\bar{\omega}_R + \bar{\omega})v} \int d\tilde{l} \tilde{C}(\bar{\omega}, \tilde{l} - \tilde{k}_R) e^{i\tilde{l}\tilde{x}} = \\
 & = e^{-i(\bar{\omega}_T - \bar{\omega})v} \int d\tilde{l} T(\tilde{l}, \bar{\omega}_T) e^{i\tilde{l}\tilde{x}},
 \end{aligned}$$

was wiederum zu

$$\begin{aligned}
 e^{-i(\bar{\omega}_E - \bar{\omega})v} E(\tilde{k}_E, \bar{\omega}_E) \tilde{C}(\bar{\omega}, \tilde{l} - \tilde{k}_E) + e^{i(\bar{\omega}_R + \bar{\omega})v} R(\tilde{k}_R, \bar{\omega}_R) \tilde{C}(\bar{\omega}, \tilde{l} - \tilde{k}_R) = \\
 = e^{-i(\bar{\omega}_T - \bar{\omega})v} T(\bar{\omega}_T, \tilde{l}),
 \end{aligned}$$

führt. Man sieht sofort dass diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn der zweite Term verschwindet, und $\bar{\omega}_E = \bar{\omega}_T =: \bar{\omega}$, denn dann ist der Transmissions-Koeffizient bestimmt durch

$$T(\bar{\omega}, \tilde{l}) = E(\tilde{k}_E, \bar{\omega}) \tilde{C}(\bar{\omega}, \tilde{l} - \tilde{k}_E).$$

Da unsere Problemstellung $R(\tilde{k}_R, \bar{\omega}_R) \neq 0$ verlangt, ist die einzige andere Möglichkeit, dass $\tilde{C}(-\bar{\omega}_R, \tilde{l} - \tilde{k}_R) = 0$. Hat \tilde{C} betrachtet als Funktion von $-\bar{\omega}_R$ also eine Nullstelle so ist Teilchen Vernichtung möglich, da wir über $\bar{\omega}_R$ frei verfügen können. Gibt es keine Nullstellen in der Fourier Transformierten, so ist dieser Prozess ausgeschlossen.

Wenn wir unsere Raumzeit um eine Dimension reduzieren, ($\tilde{f} = 4x$) so kann die Fouriertransformation, explizit ausgerechnet werden

$$\tilde{C}(-\bar{\omega}_R, \tilde{l} - \tilde{k}) = -\delta(\tilde{l} - \tilde{k}) - \frac{2}{\bar{\omega}_R} \exp\left(\frac{\tilde{l} + \tilde{k}}{\bar{\omega}_R}\right) \theta(\tilde{l} - \tilde{k}),$$

und man erkennt, dass $\tilde{C}(\bar{\omega}_R)$ hier keine Nullstelle besitzt und es daher auch keine Teilchenvernichtung in drei Dimensionen gibt. Die Lösung für die AICHELBURG-SEXL-Geometrie ist nicht trivial und wird in weiterführenden Arbeiten behandelt werden.

5.4 Penrose Klebemethode (Scissors and Paste)

Die von PENROSE vorgeschlagene Methode lässt sich am einfachsten illustrieren indem man den flachen Raum entlang einer lichtartigen Hyperebene aufschneidet. Nach

dem teilen des Raumes wird eine Koordinatentransformation durchgeführt. Anschließend werden die Teile wieder verklebt und die Transformation wird (im distributionellen Sinne) wieder rückgängig gemacht. Diese Methode ist gängig um Probleme dieser Form zu lösen. Die Raumzeit wird auseinander geschnitten, und dann im Sinne der PENROSE-Anschlussbedingung wieder verklebt. Die Bedingung stetiger Geodäten fixiert uns diese Anschlussbedingung. In Abschnitt 2.1.7 sahen wir, dass die Geodäten an $px = 0$ einen Sprung in der $\bar{p}x$ -Koordinate machen. (Gleichung 2.2.10) Es wird also die Koordinatentransformation $v \rightarrow v - \frac{1}{2}\tilde{f}$, an der Stelle $u = 0$ durchgeführt. Die Ebene Welle wird unter dieser Transformation zu,

$$e^{i\tilde{k}\tilde{x}} e^{-i\bar{\omega}[v-\frac{1}{2}\tilde{f}]} e^{-i\omega u} = e^{\frac{i}{2}\bar{\omega}\tilde{f}} e^{i\tilde{k}\tilde{x}} e^{-i\bar{\omega}v} e^{-i\omega u}.$$

Bezeichnet man nun $A(\bar{\omega}, \tilde{x}) = e^{\frac{i}{2}\bar{\omega}\tilde{f}}$, so können wir der Methode aus dem vorherigen Abschnitt exakt folgen und erhalten für die Fouriertransformation

$$\tilde{A}(\bar{\omega}, \tilde{l} - \tilde{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tilde{x} e^{-i(\tilde{l}-\tilde{k})\tilde{x}} e^{\frac{i}{2}\bar{\omega}\tilde{f}}.$$

Dieses Integral ist nun tatsächlich für die AICHELBURG-SEXL-Geometrie lösbar ($\tilde{f} = -4 \log(\tilde{x}^2)$) und es folgt [18]

$$A(\bar{\omega}, \tilde{l} - \tilde{k}) = \frac{\Gamma(1 - 2i\bar{\omega})}{4\pi\Gamma(2i\bar{\omega})} \left(\frac{4}{(\tilde{l} - \tilde{k})^2} \right)^{1-2i\bar{\omega}}.$$

Betrachtet man nun noch einmal die CAYLEY-Transformation so kann man diese in die Form

$$C(\bar{\omega}, \tilde{x}) = \exp \left[i \arctan \left(\frac{2 \left(\frac{\bar{\omega}\tilde{f}}{4} \right)}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}\tilde{f}}{4} \right)^2} \right) \right]$$

bringen. Betrachtet man nun kleine Argumente ($\left(\frac{\bar{\omega}\tilde{f}}{4} \right) \ll 1$) so kann man den Term im Nenner vernachlässigen. Macht man nun noch eine Reihenentwicklung für den Arcus Tangens, ($\arctan(x) = x + O(x^3)$) so folgt in erster Ordnung

$$C(\bar{\omega}, \tilde{x}) \approx e^{\frac{i}{2}\bar{\omega}\tilde{f}}$$

was genau der PENROSE Anschlussbedingung entspricht. Also liefert die COLOM-BEAUSche Anschlussbedingung noch höhere Ordnungsterme und somit Korrekturen zur „Scissors and Paste“ Methode. Was man jedoch anhand dieser Methode sagen kann ist, dass es in erster Ordnung keine Teilchenvernichtung gibt, da die Fouriertransformierte $\tilde{A}(\bar{\omega})$ keine Nullstellen besitzt.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Teilchenenerzeugungs- und Vernichtungsprozesse in impulsiven pp-Wellen Geometrien untersucht. Die Motivation dieser Untersuchung stammt aus der Tatsache, dass diese Geometrie als ultrarelativistischer Grenzwert stationärer schwarzer Löcher auftreten und somit mit einem entsprechenden Analogon zur HAWKINGSchen Strahlungsformel zu rechnen ist. Die Hauptaspekte dieser Arbeit sind der ultrarelativistische Limes des thermischen Energie Impuls Tensors und die Berechnung des Streuprozesses. Das Ergebnis des ultrarelativistischen Limes deutet klar auf die Möglichkeit von Teilchenvernichtung hin. Das Ergebnis der Streurechnung zeigt, dass es zumindest unter gewissen Umständen Teilchenvernichtung gibt. Die Lösung des Problems für die AICHELBURG-SEXL-Geometrie ist nicht trivial und konnte im Rahmen dieser Arbeit nur als Näherung angegeben werden. In dieser Näherung ist keine Teilchenvernichtung möglich. In weiterführenden Arbeiten wäre es interessant höhere Ordnungsterme oder sogar die exakte Lösung für dieses Problem anzugeben. Ein weiterer interessanter Aspekt könnte eine quantenfeldtheoretische Rechnung und die Berechnung thermischer Zustände sein.

Danksagungen

Mein Dank gilt vor allem und in erster Linie meinem Betreuer DR. HERBERT BALASIN der stets um meine Arbeit bemüht war und mir mit seinem umfangreichen Wissen das schreiben dieser Arbeit ermöglicht hat.

Des weiteren möchte ich mich bei meinen Kommilitonen bedanken, besonderer Dank gilt hierbei DAVID ERKINGER der mir nicht nur bei physikalischen und mathematischen Fragen oft eine Hilfe war, sondern der mir auch ein guter Freund geworden ist.

Besonderer Dank gebührt natürlich meiner Lebensgefährtin PETRA, die mir mein ganzes Studium zur Seite stand, sich für mein Fachgebiet interessiert hat und mir bei vielen schwierigen Entscheidungen eine wichtige Stütze war.

Schließlich möchte ich mich bei meiner gesamten Familie bedanken, vor allem bei meinen Eltern MICHAELA und RICHARD, sie haben mir, nicht zuletzt, durch ihre finanzielle Unterstützung den Weg zum Abschluss ermöglicht und bei meinem „Onkel“ MARIO der mich durch seine Laufbahn als Physiker auf den Studiengang Physik, gebracht hat.

Literaturverzeichnis

- [1] Misner C, Thorne K, and Wheeler J. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, 1973.
- [2] Hawking S. Particle creation by black holes. *Commun. math. Phys.* 43, 199-220, 1975.
- [3] Aichelburg P and Sexl R. *Gen. Rel. Grav.* 2, 303., 1971.
- [4] Loustó C and Sánchez N. *Int. J. mod. Phys. A5*, 915, 1990.
- [5] Balasin H and Nachbagauer H. Boosting the kerr-geometry into an arbitrary direction. *Class.Quant.Grav.* 707, 1999.
- [6] Jordan P, Ehlers J, and Kundt W. Akad. wiss. lit. (mainz) abhandl. *Math.-Nat. Kl. 2*, 21., 1960.
- [7] Balasin H. Geodesics for impulsive gravitational waves and the multiplication of distributions. *Class.Quant.Grav.* 14 (1997) 455-462, 1996.
- [8] Gel'fand I and Shilov G. *Generalized functions*. Academic Press, 1964.
- [9] Balasin H. Colombeau's generalized functions on arbitrary manifolds. *Alberta-Thy-35-96, TUW96-20*, 1996.
- [10] Balasin H. On the distributional nature of the energy momentum tensor of a black hole or what curves the schwarzschild geometry? *Class. Quant. Grav.* 10, 2271, 1993.
- [11] Steinbauer R. Colombeau-theorie und ultrarelativistischer limes. *Masterarbeit, Universität Wien*, 1995.
- [12] Colombeau J. *Multiplication of Distributions*. Springer Verlag, 1990.

- [13] Birrel N and Davies P. *Quantum Fields in curved space*. Cambridge monographs on mathematical physics, 1982.
- [14] Torggler M. Hawking radiation in eternal black hole geometries. *Master Thesis, Vienna University of Technology*, 2009.
- [15] Penrose R. Twistor-newsletters.
- [16] Feynman R. The theory of positrons. *Physical Review* 76/749-759, 1949.
- [17] Israel W and Stewart J. Progress in relativistic thermodynamics and electrodynamics of continuous media. *Gen. Rel. Grav. Vol. 2, 491*, 1980.
- [18] t'Hooft G. Graviton dominance in ultra-high-energy scattering. *Physical Letters B* 198, 61, 1987.