

Analytische Behandlung des Rohrendeproblems bei der Autofrettage von Rohren

Diplomarbeit

erstellt von

Stefan Bauer

Matrikelnr.0625118

Getreidemarkt 9

A-1060 Wien

Betreuer

O.Univ.-Prof. Dr. techn. F. G. Rammerstorfer

Wien, Juli 2017

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Autofrettage eines dickwandigen Rohres und die Grenzen einer sinnvollen Anwendung dieser behandelt. Es wird, unter Vereinfachungen, der Spannungszustand eines mit Innendruck belasteten, dickwandigen Rohres mit Hilfe analytischer Gleichungen beschrieben. Hierbei wird der rein elastische, wie auch der elastisch-plastische Bereich des Rohres behandelt. Insbesondere das Rohrende im ebenen Spannungszustand. Dies wird unter Anwendung der Fließbedingungen nach TRESCA erreicht. Bei einer anschließenden Entlastung werden die im Rohr verbleibenden Eigenspannungen durch analytische Gleichungen beschrieben. Zusätzlich werden die Ergebnisse mittels einer Finite-Elemente-Analyse verifiziert.

Abstract

This master thesis aims to describe the Autofrettage of a thick-walled cylinder. Another goal will be to discover its limits to provide a reasonable use. Under simplified assumptions, the stress condition of a thick-walled cylinder under pressure from its inside will be examined by using analytical equations. Therefore, it is important to not only focus simply on the elastic but also on the elastic-plastic range of the cylinder. To obtain these results the yield criterions according to TRESCA will be applied. The remaining residual stress in the cylinder after a subsequent decrease of pressure will also be described with analytical methods. In addition to that, the results will be verified by using finite element analysis.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	VI
1. Einleitung	1
1.1. Aufgabenstellung	1
1.2. Begriffserklärung	1
1.2.1. Autofrettage	2
1.2.2. Isotropes Material	2
1.2.3. EVZ-Ebener Verzerrungszustand	2
ESZ-Ebener Spannungszustand	3
1.2.4. Vektoren und Rechenregeln	3
1.3. Materialeigenschaften	3
1.4. Verzerrungen	4
1.5. Spannungszustand	5
1.6. HOOKE'sches Gesetz	6
1.6.1. ESZ- Ebener Spannungszustand	6
1.6.2. EVZ- Ebener Verzerrungszustand	7
1.7. Fließbedingung nach Tresca	7
1.7.1. Bestimmung des kritischen Spannungszustandes für den Fließ- beginn	9
1.8. Normalitätsregel	10
1.9. Lokale Gleichgewichtsbedingung	11
2. Analytische Beschreibung	14
2.1. Allgemeines	14
2.2. Elastischer Bereich	15
2.2.1. Berechnung des Druckes der vom elastischen auf den elastisch plastischen Bereich einwirkt	15
2.2.2. Berechnung des Fließdrucks	23
2.3. Elastisch-plastischer Bereich	25
2.3.1. Berechnung des Radius der Bereichsgrenze R	27
2.3.2. Berechnung des Druckes p_F	27
2.3.3. Berechnung der Traglast	28

2.3.4. Graphische Auswertung	28
2.4. Gültigkeit	30
2.5. Eigenspannungen	31
2.5.1. Eigenspannungen im ursprünglich elastisch-plastischen Bereich	33
2.5.2. Eigenspannungen im ursprünglich elastischen Bereich	34
2.5.3. Bis zu welchem Druck kommt es zu einer rein elastischen Entlastung?	36
3. Numerische Berechnung	37
3.1. Laststeigerung	38
3.2. Numerische Verifizierung	49
3.2.1. Hauptnormalspannungen	49
3.2.2. Eigenspannungen	50
3.3. Fließfläche	50
3.4. Einflüsse auf die numerische Analyse	52
3.4.1. Unterschied zwischen geometrisch linearer und geometrisch nichtlinearer numerischer Analyse	52
3.4.2. Einfluss der Modelllänge	59
4. Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse	68
4.1. Vergleich: Ebener Spannungszustand mit dem Ebenen Verzerrungszustand	68
4.2. Unterschied zwischen geometrisch linearer und geometrisch nichtlinearer Betrachtung	69
4.3. Unterschied zwischen einem langen dickwandigen Rohr und einer dünnen dickwandigen Rohrscheibe	70
4.4. Grenzen der Autofrettage	70
A. Anhang	75
A.1. Herleiten des lokalen Gleichgewichts	81

Tabellenverzeichnis

1.1. Mögliche Werte für die Funktion F	8
2.1. Werte für die analytische Berechnung mit rein elastischem Materialverhalten im Ebenen Spannungszustand	22
4.1. Übersichtstabelle der Gleichung zur Bestimmung der Hauptnormalspannungen im Ebenen Verzerrungszustand sowie im Ebenen Spannungszustand	72
4.2. Übersichtstabelle der Gleichungen zur Bestimmung der Eigenspannungen nach einer vollständigen elastischen Entlastung im Ebenen Verzerrungszustand sowie im Ebenen Spannungszustand	73
A.1. Numerisch berechnete Werte der normierten Bereichsgrenze bei zunehmender normierter Rohrlänge, einem normierten Druck von $p_N = 0.9$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$	76
A.2. Numerisch berechnete Werte der normierten Bereichsgrenze, bei einer zunehmenden normierten Rohrlänge, einem normierten Druck von $p_N = 0.5$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$	77
A.3. Numerisch berechnete Werte der normierten Bereichsgrenze, bei einer zunehmenden normierten Rohrlänge, einem normierten Druck von $p_N = 1$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$	77
A.4. Numerisch berechnete Werte der normierten Bereichsgrenze, bei einer normierten Rohrlänge von $\frac{l}{a} = 5$ und einem zunehmenden normierten Druck. (Ausgangswert von $\frac{R}{a}$ ist der normierte Innenradius $\frac{a}{a} = 1$. Ausgangswert des normierten Drucks $\frac{p}{\sigma_F}$ ist jener normierte Druck, bei dem es erstmals zum Fließen kommt. Bei einem Außen- zu Innenradius Verhältnis von $\frac{b}{a} = 5$ hat dieser den Wert 0.48.	77

Nomenklatur

Abkürzungen

D-Scale	deformation scale factor	[-]
ESZ	Ebener Spannungszustand	[-]
EVZ	Ebener Verzerrungszustand	[-]
VEVZ	Verallgemeinerter Ebener Verzerrungszustand	[-]

Geometrische Größen

①	rein elastischer Bereich	[-]
②	elastisch-plastischer Bereich	[-]
a	Innenradius	[m]
b	Außenradius	[m]
R	Grenze zwischen elastischen und elastisch-plastischen Bereich	[m]
r	Radius	[m]

Allgemein

Δ	Differenz	[-]
δ_{ij}	Kronecker-Delta	[-]
λ_u	Konstante	[-]
A, B	Konstanten	[-]
a_{Ty}	Entwicklungspunkt von Taylorpolynom	[-]
f	Funktion	[-]
f_{Ty}	Funktion für Taylorpolynom	[-]
P_{Ty}	Taylorpolynom	[-]

Mechanische Variablen

χ	Verdrehung	[-]
$\gamma_{r\varphi}, \gamma_{\varphi z}, \gamma_{zr}$	Winkeländerungen im zylindrischen Koordinatensystem	[-]
σ_E	auftretende Spannung beim einachsigen Zugversuch	$[\frac{N}{m^2}]$
σ_V	Vergleichsspannung	$[\frac{N}{m^2}]$
σ_{ijN}	normierte Spannung	[-]
σ_{ij}^R	Eigenspannungskomponente	$[\frac{N}{m^2}]$
$\sigma_{ij}^{\textcircled{1}}$	beschreibende Spannungsgleichung für den Bereich ①	$[\frac{N}{m^2}]$
$\sigma_{ij}^{\textcircled{2}}$	beschreibende Spannungsgleichung für den Bereich ②	$[\frac{N}{m^2}]$
τ_1, τ_2, τ_3	Hauptschubspannungen	$[\frac{N}{m^2}]$
$\tilde{\sigma}_{ij}$	rein elastische Spannungskomponente	$[\frac{N}{m^2}]$
ε_{ij}^{el}	elastische Verzerrungskomponente	[-]
ε_{ij}^{pl}	plastische Verzerrungskomponente	[-]
$\varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{\varphi z}, \varepsilon_{zr}$	Schubverzerrungen im zylindrischen Koordinatensystem	[-]

$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}$	Dehnungen im zylindrischen Koordinatensystem	[-]
ϱ_N	normierter Radius	[-]
ϱ_W	normierter Außenradius	[-]
\vec{u}	Verschiebevektor in zylindrischen Koordinaten	[m]
k_T	kritischer Wert für das Fließen nach Tresca	[0]
p^*	Kritischer Innendruck	[$\frac{N}{m^2}$]
p_N	normierter Innendruck	[-]
p_T	maximal ertragbarer Innendruck	[$\frac{N}{m^2}$]
p_{FBN}	normierter notwendiger Druck für erstmaliges Fließen	[-]
p_{FB}	notwendiger Druck für erstmaliges Fließen	[$\frac{N}{m^2}$]
u	r-Komponente des zyl. Verschiebevektors	[m]
v	Umfangskomponente des zyl. Verschiebevektors	[-]
w	z-Komponente des zyl. Verschiebevektors	[m]
${}^0\sigma_{ij}$	Spannungstensors des Ausgangszustandes	[$\frac{N}{m^2}$]

Werkstoffeigenschaften

ν	Querdehnungszahl, Poissonzahl	[-]
σ_F	Fließspannung	[$\frac{N}{m^2}$]
E	Elastizitätsmodul	[$\frac{N}{m^2}$]
R_e	Streckgrenze	[$\frac{N}{m^2}$]
R_m	Zugfestigkeit	[$\frac{N}{m^2}$]

1. Einleitung

1.1. Aufgabenstellung

In dieser Arbeit gilt es, aufbauend auf die Bakkalaureatsarbeit [2], den Spannungszustand eines dickwandigen Rohres mit Hilfe analytischen Gleichungen zu beschreiben. Weiters ist eine Finite Elemente Studie anzufertigen, um die analytisch berechneten Gleichungen zu verifizieren. Unter einem isothermen Zustand wird an dem Rohr eine Autofrettage durchgeführt, die das teilweise Plastizieren des Querschnitts zur Folge hat. Dieses Plastizieren wird mithilfe der Fließbedingung nach TRESCA beschrieben. Das Modell, des plastizierenden dickwandigen Rohres ist unter folgenden Vereinfachungen zu beschreiben:

- Es wird ein isothermer Zustand vorausgesetzt
- Es handelt sich um ein homogenes isotropes Material
- Man geht von einem elastisch ideal-plastischen Materialverhalten aus.
- Das Modell wird im Ebenen Spannungszustand betrachtet (freier, unbelasteter Endquerschnitt des Rohres).
- Die Verzerrungen sind gegenüber der Geometrie des Rohres sehr klein gegenüber eins. Es werden daher linearisierte Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen herangezogen.

1.2. Begriffserklärung

Wichtige Begriffe aus der Bakkalaureatsarbeit [2] sind daraus übernommen und nochmals aufgeführt.

1.2.1. Autofrettage

Bei dickwandigen Rohren oder Bohrungen in massiven Bauteilen lassen sich durch eine einmalige Beanspruchung mit sehr hohem Innendruck an der Innenwand günstige Druckeigenstressungen in Umfangsrichtung erzeugen, da es an der Innenoberfläche zum Plastizieren und somit nach Entlastung zu Eigenstressungen kommt. Dieses Verfahren, auch Autofrettage genannt, wurde ursprünglich an Geschützrohren und später an Druckbehältern angewandt. Heute findet es vor allem an Bauteilen von PKW Dieseleinspritzsystemen Anwendung. So werden Innendruck-beaufschlagte Komponenten, wie z. B. Gehäuse, mit Innendrücken bis zu 6000 bar, verfestigt. Dadurch kommt es zu einer Dauerfestigkeitssteigerung und damit verbunden zu einer höheren Lebensdauer der Bauteile. Nahtlos gezogene Einspritzleitungen werden ebenso mit diesem Verfahren verfestigt, sodass Leitungen aus St30Al Drücke über 1500 bar beherrschen.[4, S.213] [9, S.383,392]

1.2.2. Isotropes Material

Sind die physikalischen Eigenschaften eines homogenen Materials in jedem Punkt gleich und von der Richtung unabhängig, spricht man von einem homogenen isotropen Material. Für Metalle ist diese Näherung in einem gewissen Bereich sehr gut zutreffend. [8, S.165]

1.2.3. EVZ-Ebener Verzerrungszustand

Der Ebene Verzerrungszustand bezeichnet ein dreidimensionales Modell, das in einer Richtung keine Verzerrungen aufweist, jedoch in den beiden anderen Richtungen Längenänderungen auftreten. Unter dieser Voraussetzung kommt es in der verzerrungsfreien Richtung ebenfalls zu Spannungen. Diese Behinderung der Längenänderung kann z. B. durch eine Einspannung erreicht werden. [6, S.148f]

$$\varepsilon_{zj} = 0 \quad j \in r, \varphi, z$$

ESZ-Ebener Spannungszustand

Der Ebene Spannungszustand bezeichnet ein dreidimensionales Modell, bei dem zwei Hauptnormalspannungen auftreten und die dritte Hauptnormalspannung gleich null ist. Diesen Zustand findet man an einer freien, unbelasteten Oberfläche oder bei sehr dünnen Blechen die nur in ihrer Ebene belastet werden. [5, S.46f]

$$\sigma_{zj} = 0 \quad j \in r, \varphi, z$$

(z ist hier die Richtung der Normalen auf die freie Oberfläche)

1.2.4. Vektoren und Rechenregeln

Die Darstellung der Vektoren erfolgt klar gekennzeichnet mit \vec{a} . Generell gilt die Einstein'sche Summenkonvention, es wird also über Ausdrücke mit doppelt auftretende Indizes summiert. Es sei noch das Kronecker-Delta δ_{ij} erwähnt, für das gilt:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

1.3. Materialeigenschaften

Da sich um ein homogenes, isotropes Material handelt, das es zu Untersuchen gilt, wie es auch schon in der Bakkalaureatsarbeit [2] der Fall war, werden hier die Materialeigenschaften von [2, S.7f] nochmals angeführt.

Abbildung 1.1 zeigt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines duktilen Werkstoffs mit einem rein elastischen Bereich bis zur Streckgrenze R_e bzw. Anfangsfließspannung σ_F , einer ausgeprägten Streckgrenze und mit anschließendem elastisch-plastischen Verhalten. Hier wird üblicherweise die nominelle Spannung $\sigma = \frac{F}{A_0}$ als Funktion der nominellen Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ mit A_0 und l_0 , dem Querschnitt bzw. der Messlänge im unverformten Zustand, ermittelt vom einachsigen Zugversuch, dargestellt. Wird das Maximum der Spannung-Dehnungs-Kurve, die Zugfestigkeit R_m erreicht, so beginnt

das Einschnüren der Zugprobe. Gut kaltumformbare Werkstoffe weisen ein solches Verhalten auf. [7, S.102f]

Abbildung 1.2 zeigt ein elastisch-ideal plastisches Materialverhalten. Es kommt zu keiner Verfestigung. Diese Idealisierung ist für duktile Stähle mit ausgeprägter Streckgrenze eine gute Näherung, wenn nur kleine plastische Verzerrungen auftreten.

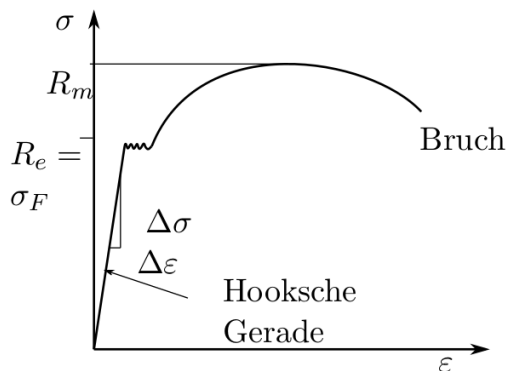


Abbildung 1.1.: Spannung-Dehnungs Diagramm eines Werkstoffes mit ausgeprägter Streckgrenze

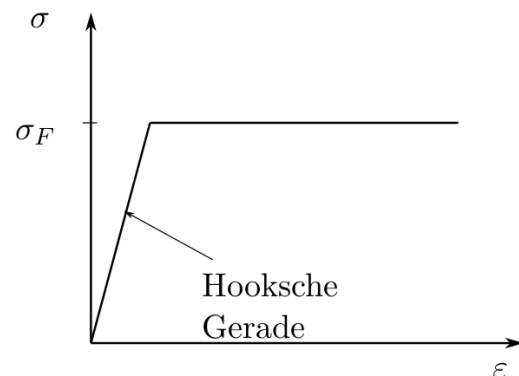


Abbildung 1.2.: Spannung-Dehnungs Diagramm eines elastisch ideal plastischen Materials

1.4. Verzerrungen

Für die Betrachtung des Verformungszustandes, wird der Verschiebungsvektor \vec{u} im zylindrischen Koordinatensystem, wie auch der Spannungstensor, auf den unverformten Zustand bezogen. Hierbei bezeichnet u die Verschiebung in radialer Richtung, χ eine Verdrehung um jene Achse, die mit \vec{e}_z zusammenfällt und w die axiale Verschiebung. Wobei \vec{e}_z die Längsachse des Rohres darstellt. Dies und Nachfolgendes ist ebenfalls unter [2] ersichtlich und teilweise von dort entnommen.

Da wir voraussetzen, dass die Verschiebungsgrößen (u, v, w) , die Komponenten des Verschiebevektors \vec{u} , klein gegenüber den Abmessungen sind und somit die Kleinheit der Verzerrungen gegeben ist, können die linearisierten Verschiebungs-Verzerrungs Beziehungen von [8, S.160f] bzw. [2, S.10f] für die Berechnung herangezogen werden.

Diese lauten:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.1) \quad \gamma_{r\varphi} = 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \quad (1.2) \quad \gamma_{\varphi z} = 2\varepsilon_{\varphi z} = r \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.3) \quad \gamma_{zr} = 2\varepsilon_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.6)$$

$$\text{mit } \chi = \frac{v}{r} \quad (1.7)$$

Wobei ε_{rr} die Dehnung in radialer Richtung, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ die Dehnung des Umfanges und ε_{zz} die axiale Dehnung ist. ε_{ij} für $i \neq j$ mit $i, j \in r, \varphi, z$, stellen die zugehörigen Schubverzerrungen bzw. die Schubwinkel γ_{ij} mit $i, j \in r, \varphi, z$, dar. Die genaue Herleitung dieser Gleichungen ist ausführlich unter [2] und auch [8, S.171f] nachzuschlagen.

1.5. Spannungszustand

In dieser Arbeit wird der Cauchy'sche Spannungstensor (1.8), somit die auf den verformten Zustand Betrachtungsweise, gewählt. Wie auch schon im Punkt 1.4 erwähnt wurde. Hierbei werden $\vec{\sigma}_{ij}$ für $i, j \in r, \varphi, z$ mit $i = j$ als Normalspannungen und mit $i \neq j$ als Schubspannungen bezeichnet. Dieser Punkt richtet sich nach [5, S.44f] bzw. ist auch unter [2] genauer nachzulesen.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Das in der nachfolgenden Berechnung gewählte zylindrisches Koordinatensystem fällt mit den Spannungshauptachsen zusammen. Somit kann statt (1.8) folgendes geschrieben werden:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Wobei $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die drei Hauptnormalspannungen sind. Liegt das Koordinatensystem in den Spannungshauptachsen, so gilt für alle Schubspannungen $\sigma_{ij} = 0$ für $i \neq j$. [8, S.159f]

1.6. HOOKE'sches Gesetz

Da dieser Punkt schon in der Bakkalaureatsarbeit [2] angeführt wurde, aber für diese Arbeit ebenfalls eine wesentliche Rolle spielt, wird ein Teil dieses Punktes hier zur Einführung wiederholt.

Das von Robert HOOKE 1678 veröffentlichte und unter dem Namen „HOOKE'sches Gesetz“ bekannt gewordene Gesetz, beschreibt den proportionalen Zusammenhang von elastischer Verformung zur einwirkenden Belastung. Gültigkeit besitzt dieses lineare Verhalten nur im rein linear elastischen Bereich von homogenen, isotropen Materialien. Vorausgesetzt, das Material entspricht diesem Materialverhalten, lautet das HOOKE'sche Gesetz in der Form eines linear elastischen Werkstoffgesetzes folgendermaßen: [8, S.165]

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{ij}^{el} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk}^{el} \delta_{ij} \right] \quad (1.10)$$

bzw.

$$\varepsilon_{ij}^{el} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] \quad (1.11)$$

Mit $i, j \in x, y, z$ für das kartesische und $i, j \in r, \varphi, z$ für das zylindrische Koordinatensystem.

Hierbei bezeichnet ν die Querdehnungszahl und E den Elastizitätsmodul.

1.6.1. ESZ- Ebener Spannungszustand

Um für die nachfolgende Berechnung einen besseren Überblick herzustellen, werden die Gleichungen des HOOK'schen Gesetzes (1.10) bzw. (1.11) für den Ebenen Spannungszustand angeschrieben: Hier geben die Gleichungen (1.12) bis (1.14) die Verzerrungen in Hauptachsenrichtung, und (1.15) bis (1.17) die Hauptnormalspannungen für den Ebenen Spannungszustand wieder.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{rr} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \right] \quad (1.12) \quad \sigma_{rr} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{\varphi\varphi} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \right] \quad (1.13) \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[-\nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \right] \quad (1.14) \quad \sigma_{zz} = 0 = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (1.17)$$

1.6.2. EVZ- Ebener Verzerrungszustand

Der Vollständigkeit wegen, werden auch die Gleichungen des HOOK'schen Gesetzes (1.10) bzw. (1.11) für den Ebenen Verzerrungszustand angeschrieben. Gleichung (1.18) bis (1.20) beschreiben wiederum die Verzerrung in den Hauptachsenrichtungen, und Gleichung (1.21) bis (1.23) geben die Hauptnormalspannungen für den Ebenen Verzerrungszustand wieder.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{rr} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right] \quad (1.18) \quad \sigma_{rr} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{\varphi\varphi} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right] \quad (1.19) \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right] \quad (1.20) \quad \sigma_{zz} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (1.23)$$

1.7. Fließbedingung nach Tresca

Dieser Punkt ist ebenfalls von [2] entnommen und dient hier als grundlegenden Erläuterung zum Thema Fließen. Die im Jahre 1864 von Henri TRESCA veröffentlichte Hypothese gab erstmals Antwort auf die Frage, wann Fließen einsetzt bzw. wann die Funktion der Fließfläche $F \equiv 0$ wird. Die Fließbedingung von TRESCA geht davon aus, dass der rein elastische Bereich endet und es somit zu plastischen Verformungen kommt, wenn der Betrag der größten Schubspannung $|\tau_{max}|$ einen kritischen Wert k_T erreicht. Aus diesem Grund wird die TRESCAsche Fließbedingung auch als Schubspannungshypothese bezeichnet. In dieser Arbeit wird ausschließlich diese Fließbedingung verwendet.

$$\begin{aligned}
 F = 0 & \Leftrightarrow |\tau|_{max} = k_T \\
 \text{bzw.} & \quad (|\tau|_{max})^2 - k_T^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

Die Gleichungen zur Beschreibung der Hauptschubspannungen, nachzulesen unter [8, S.161], lauten:

$$|\tau_1| = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| \quad ; \quad |\tau_2| = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| \quad ; \quad |\tau_3| = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|
 \tag{1.25}$$

Da die Voraussetzung getroffen wurde, dass es zu keinerlei Verfestigung kommt, kann im elastisch-plastischen Bereich die betragsmäßig größte Hauptschubspannung $|\tau|_{max}$ nicht einen Wert annehmen, der über der Anfangsfließspannung σ_F liegt. Daher ergeben sich für die Funktion der Fließbedingung nur zwei mögliche Zustände (siehe hierzu Tabelle 1.1):

Mögliche Zustände für die Funktion F	
$F = 0$	elastisch-plastischer Bereich
$F < 0$	elastischer Bereich

Tabelle 1.1.: Mögliche Werte für die Funktion F

Weiters wird plastische Stabilität des Werkstoffes vorausgesetzt. Um dies zu erreichen, muss der von der Fließfläche eingeschlossene Bereich konvex sein. Ein Bereich ist dann konvex, wenn er zu je zwei Punkten auch deren Verbindungsgeraden gänzlich enthält. Die Randpunkte sind hier inbegriffen. Wird dies nicht erfüllt, ist er nicht konvex. Daniel C. DRUCKER formulierte hierzu das DRUCKER'sche Stabilitätskriterium.

$$(\sigma_{ij} - {}^0\sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij}^{pl} \geq 0
 \tag{1.26}$$

In dieser Ungleichung ist ${}^0\sigma_{ij}$ der Spannungstensors eines Ausgangszustandes auf oder im Inneren des Fließkörpers, σ_{ij} der tatsächliche Spannungszustand und $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ die differentielle zugehörige plastische Verzerrungsänderung. [3, S.139f]

Fließen tritt dann ein, wenn laut Tabelle 1.1 die Gleichung $F = 0$ erfüllt ist. Da dabei mindestens einer der Absolutwerte für die Hauptschubspannungen (τ_1, τ_2, τ_3) gleich σ_F ist, gilt:

$$F = (\tau_1^2 - k_T^2) (\tau_2^2 - k_T^2) (\tau_3^2 - k_T^2) = 0 \quad (1.27)$$

Zumindest einer der Klammerausdrücke wird beim Einsetzen des Plastizierens null und erfüllt somit die Fließbedingung $F = 0$.

Drückt man die Hauptschubspannungen der Gleichung (1.27) durch die zugehörigen Hauptnormalspannungen mit Hilfe der Gleichungen (1.25) aus, erhält man die Fließbedingung nach TRESCA, abhängig von den drei Hauptnormalspannungen:

$$F = \underbrace{\left[\frac{1}{4} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - k_T^2 \right]}_{\text{I}} \underbrace{\left[\frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - k_T^2 \right]}_{\text{II}} \underbrace{\left[\frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - k_T^2 \right]}_{\text{III}} = 0 \quad (1.28)$$

Siehe hierzu [11, S.34f]

1.7.1. Bestimmung des kritischen Spannungszustandes für den Fließbeginn

Dieses Kapitel wurde mit Hilfe [10] und [11, S.36] berechnet.

Um diesen kritischen Wert k_T zu bestimmen, braucht es den einachsigen Zugversuch. In diesem tritt nur eine Hauptnormalspannung auf, und es kann somit der rein werkstoffabhängige Wert k_T bestimmt werden.

Die Hauptnormalspannungskomponenten eines einachsigen Zugversuchs lauten:

$$\sigma_1 = \sigma_E \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = 0 \quad (1.29)$$

Ist die Bedingung $\sigma_E = \sigma_F$ erfüllt, befindet man sich am Ende der HOOKE'schen Geraden und somit am Ende des rein elastischen Bereichs; es kommt zum Fließen.

Eingesetzt in die Fließbedingung nach TRESCA (1.27) bzw. (1.28) ergibt sich demzufolge:

$$F = [-k_T^2] \left[\frac{1}{4} (\sigma_F)^2 - k_T^2 \right] \left[\frac{1}{4} (\sigma_F)^2 - k_T^2 \right] = 0$$

woraus sich der Wert k_T bestimmen lässt:

$$k_T = \frac{1}{2} \sigma_F \quad (1.30)$$

Somit ergibt sich die Fließbedingung zu

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_F = 0 \quad (1.31)$$

1.8. Normalitätsregel

Dieses Kapitel folgt den korrespondierenden Ausführungen von Betten [3] und wurde teilweise [2] entnommen.

Nachdem gezeigt wurde, dass der rein elastische Bereich eines elastisch-ideal plastischen, isotropen Materials mit dem HOOKE'schen Gesetz beschrieben werden kann stellt sich die Frage, wie sich das Material verhält, wenn man an dieser Bereichsgrenze eine weitere Laststeigerung durchführt. Es wird angenommen, dass sich die elastischen und die plastischen inkrementellen Verzerrungen in einem solchen Material additiv zusammensetzen [3, S.3]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^p \quad \text{bzw.} \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{el} + d\varepsilon_{ij}^p \quad (1.32)$$

Da bei einer Laststeigerung an der Fließgrenze der Spannungszustand vom Spannungsraum nicht außerhalb der Fließfläche liegen kann, ist das Material bestrebt sich plastisch zu verformen. Es kommt zum Fließen. Da dies mit dem kleinst möglichen Aufwand geschieht, bedeutet dies, dass mit der verrichteten plastischen Arbeit $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ die Verzerrungen bestrebt sind, sich zu maximieren. Geht man von der plastischen

Arbeit $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p$, mit dem vorhandenen Spannungszustand σ_{ij} und einem fiktiven statisch und plastisch zulässigen Spannungszustand σ_{ij}^0 aus, so kann man sagen, dass die plastische Arbeit $d\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p$ dem Prinzip der maximalen plastischen Arbeit entspricht.

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (1.33)$$

Das Prinzip der maximalen plastischen Arbeit besagt nun, dass unter allen möglichen angenommenen statisch und plastisch zulässigen Spannungszuständen $\tilde{\sigma}_{ij}$, der tatsächlich eingenommene Spannungszustand σ_{ij} die plastische Arbeit zu einem Maximum macht. Durch Lösen dieser Extremwertaufgabe (1.34), die genauer in [2] behandelt wird, gelangt man zur sogenannten Normalenregel. Hierbei stellt $d\lambda$ einen Proportionalitätsfaktor dar und nicht mehr einen Lagrange Multiplikator $d\lambda_L$.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_L \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.34)$$

Man erkennt an der Gleichung (1.35), dass die plastische Verzerrung in Richtung der auf die Fließfläche stehenden Normalen $\frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$ zeigt. Deshalb spricht man auch von der *Normalenregel*.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.35)$$

1.9. Lokale Gleichgewichtsbedingung

Durch Heranziehen eines infinitesimal kleinen Volumenelement in Zylinderkoordinaten, an dem ein Kräftegleichgewicht angesetzt wird, gelangt man auf die allgemeinen lokalen Gleichgewichtsbeziehungen (1.36), (1.37) und (1.38). Die Herleitung dieser, ist im Anhang unter Punkt A.1 angeführt und kann auch in [2] bzw. auch in ähnlicher Form in [8, S73f] nachgeschlagen werden.

$$\vec{e}_r : \quad \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \vec{q}_{Vr} = 0 \quad (1.36)$$

$$\vec{e}_\varphi : \quad \frac{1}{r} (\sigma_{\varphi r} + \sigma_{r\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \vec{q}_{V\varphi} = 0 \quad (1.37)$$

$$\vec{e}_z : \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \vec{q}_{Vz} = 0 \quad (1.38)$$

Da es sich bei dem dickwandigen Rohr um eine axialsymmetrische Problemstellung handelt, erfährt die punktuelle Spannungskomponente über eine Winkeländerung keine Werteänderung. Es gilt daher:

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.39)$$

Eine weitere Folgerung bei einer vollständigen Axial-Symmetrie ist:

$$\sigma_{z\varphi} = \sigma_{zr} \quad (1.40)$$

Weiters wird vorausgesetzt, dass keine Volumskräfte am infinitesimalen kleinen Volumen wirken:

$$q_{Vr} = q_{V\varphi} = q_{Vz} = 0 \quad (1.41)$$

Dadurch vereinfachen sich die zuvor angeschriebenen Gleichungen zu:

$$\vec{e}_r : \quad \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = 0 \quad (1.42)$$

$$\vec{e}_\varphi : \quad \frac{1}{r} (\sigma_{\varphi r} + \sigma_{r\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} = 0 \quad (1.43)$$

$$\vec{e}_z : \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} = 0 \quad (1.44)$$

Diese Gleichungen beschreiben das lokale Gleichgewicht in einem langen, dickwandigen Rohr. Um analytisch Gleichungen der Hauptnormalspannungen in einem dickwandigen Rohr zu finden, muss noch eine zusätzliche Einschränkung getroffen werden.

So muss vorausgesetzt werden, dass auch die Meridianfläche, des axialsymmetrischen Körpers, schubspannungsfrei ist. Sprich es gilt: $\sigma_{rz} = 0$. Wie in einem nachfolgenden Kapitel gezeigt wird, führt diese Vereinfachung, ab einer gewissen Rohrlänge nicht mehr zu hinreichend genauen Lösungen. Mit dieser Vereinfachung ergeben sich die obigen Gleichungen zu:

$$\vec{e}_r : \quad \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = 0 \quad (1.45)$$

$$\vec{e}_\varphi : \quad \frac{1}{r} (\sigma_{\varphi r} + \sigma_{r\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} = 0 \quad (1.46)$$

$$\vec{e}_z : \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (1.47)$$

Hierbei gibt die Gleichung (1.45) die Beziehung der radialen zur tangentialen Hauptnormalspannung an. Gleichung (1.47) gibt den axialen Hauptnormalspannungsverlauf entlang der Längsachse an.

Gleichung (1.45) wird in weiterer Folge als die lokale Gleichgewichtsbedingung bezeichnet.

2. Analytische Beschreibung

Dieses Kapitel wurde in Anlehnung an [2] erstellt und teilweise daraus übernommen.

2.1. Allgemeines

Wie in der Einleitung auf Seite 1 unter Punkt 1.1 schon erwähnt, darf vorausgesetzt werden, dass bei einer Ausdehnung des, durch Innendruck belasteten, dickwandigen Rohres sämtliche Verzerrungen sehr klein gegen eins sind und es können deshalb die linearisierten Verschiebungs-Verzerrung-Beziehung von (1.1) bis (1.6) für die analytische Beschreibung des Verhaltens, verwendet werden. Aus dem gleichem Grund kann auch mit nominellen Spannungen gerechnet werden. Die Gleichungen (1.45)-(1.47) liefern eine Beschreibung der lokalen Spannungskomponenten, an einem dickwandigen Rohr, unter der Voraussetzung, einer Schubspannungsfreien Meridianfläche. Gleichung (1.47) gibt an, dass sich die axiale Hauptnormalspannung, entlang der Längsachse des Rohres, im Wert nicht ändert. Da es sich bei dem Modell um ein, an beiden Enden nicht eingespanntes, dickwandiges Rohr handelt, mit der Voraussetzung, dass die Oberflächen, in längsrichtung der Rohrachse, lastfrei sind, ist der Wert der axiale Hauptnormalspannung am lastfreien Rohrende gleich null. Da sich dieser Wert, der Gleichung (1.47) nach, entlang der Längsachse nicht ändert, und die anderen Spannungskomponenten in Richtung der Rohrlängsachse ebenfalls null sind, kann man, unter diesen Bedingungen, von einem Ebenen Spannungszustand ausgehen. Diese Annahme trifft umso genauer zu, je kürzer das Rohr ist.

Abbildung 2.1 zeigt eine schematische Skizze des mit dem Innendruck p belasteten dickwandigen Rohres. ① kennzeichnet den rein elastischen und ② den elastisch-plastischen Bereich. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Fließbeginn am Innenradius einsetzt und der plastische Bereich von dort aus monoton wächst, wenn der Innendruck monoton gesteigert wird. Der Übergang vom elastischen in den elastisch-plastischen Bereich ist durch den Radius R gekennzeichnet. Der Innenradius a und der Außenradius b sind die geometrischen Abmessungen des zu untersuchenden Modells. Es gilt

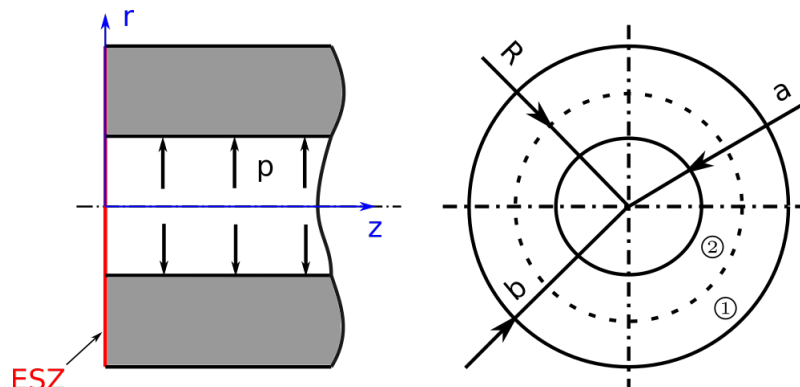


Abbildung 2.1.: Skizze des Modells im Ebenen Spannungszustand

für das aufgestellte Modell des Rohrendes, beschreibende Gleichungen der Hauptnormalspannungen im elastischen, sowie im elastisch-plastischen Bereich zu finden.

2.2. Elastischer Bereich

2.2.1. Berechnung des Druckes der vom elastischen auf den elastisch plastischen Bereich einwirkt

Die nachfolgende Vorgehensweise zur Bestimmung der elastischen Lösung des dickwandigen Rohres ist dem Werk [8, S.299] entnommen und folgt auch dem Vorgehen, wie es schon in [2] gezeigt wurde.

Durch die axial-symmetrische Innendruckbelastung verschwindet die tangentielle Verschiebung v und somit gilt laut (1.7) $\chi = 0$. Das gewählte zylindrische Koordinatensystem fällt mit den Spannungshauptachsen zusammen, somit treten keine Schubverzerrungen bzw. Schubspannungen auf, siehe Gleichung (1.4) bis (1.6).

Die linearen Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (1.1)-(1.6) vereinfachen sich so zu:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} \quad (2.1)$$

Aus den Gleichungen (1.15) und (1.16) entstehen, die Gleichungen, der radialen $\sigma_{rr}^{\textcircled{1}}$ und tangentialen $\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}}$ Hauptnormalspannung für den elastischen Bereich $\textcircled{1}$

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_{rr}^{el} (1-\nu) + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} + \nu\varepsilon_{zz}^{el} \right] \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} (1-\nu) + \nu\varepsilon_{rr}^{el} + \nu\varepsilon_{zz}^{el} \right] \quad (2.3)$$

mit $\sigma_{zz}^{\textcircled{1}} \equiv 0$ folgt:

$$\varepsilon_{zz}^{el} = \frac{1}{E} [-\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] \quad (2.4)$$

Genauer ist hierzu im Punkt 1.6.1 nachzulesen. Die Gleichung 2.4 ist ebenfalls dem Punkt 1.6.1 entnommen.

Werden Gleichung 2.2 und 2.3 in die lokale Gleichgewichtsbedingung (1.45) unter der Verwendung der Gleichungen (2.1) eingesetzt, ergibt sich:

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{r} (1-2\nu) - \frac{u}{r^2} (1-2\nu) + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} (1-\nu) + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{r} \nu - \frac{u}{r^2} \nu \right] = 0 \quad (2.5)$$

Zusammengefasst ergibt dies eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Radialkomponente u des Verschiebevektors \vec{u} :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (2.6)$$

Mit dem Lösungsansatz $u = r^{\lambda_u}$ erhält man drei Gleichungen:

$$u = r^{\lambda_u} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda_u r^{\lambda_u-1} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \lambda_u (\lambda_u - 1) r^{\lambda_u-2} \quad (2.7)$$

die sich in die zu lösende Differentialgleichung (2.6) einsetzen lassen.

$$\begin{aligned} \lambda_u (\lambda_u - 1) r^{\lambda_u - 2} + \lambda_u r^{\lambda_u - 2} - r^{\lambda_u - 2} &= 0 \\ \lambda_{u1} &= 1 \quad \lambda_{u2} = -1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die aus dieser charakteristischen Gleichung gewonnenen Lösungen λ_{u1} und λ_{u2} sind reell und von einander verschieden. Durch Einsetzen dieser Lösungen in die Ansatzfunktion r^{λ_u} , ergibt sich eine allgemeine Lösung, mit den Konstanten A und B für die radiale Verschiebung.

$$u = \frac{A}{r} + Br \quad (2.9)$$

Die Verzerrungskomponenten (2.1), ausgedrückt mit dieser allgemeinen Lösung, ergeben sich zu:

$$\varepsilon_{rr}^{el} = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} + B, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} = \frac{u}{r} = \frac{A}{r^2} + B \quad (2.10)$$

Um die elastischen Verzerrungen vollständig zu definieren, sind noch die beiden Konstanten A und B zu bestimmen. Hierfür wird zunächst die Gleichung für die axiale Hauptnormalspannung (1.17) vereinfacht und auf die axiale Verzerrungskomponente ε_{zz}^{el} umgeformt:

$$\sigma_{zz}^{\textcircled{1}} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{zz}^{el} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} + \varepsilon_{rr}^{el} + \varepsilon_{zz}^{el} \right) \right] \quad (2.11)$$

Durch die Modellannahme Ebener Spannungszustand ist die axiale Hauptnormalspannung definitionsgemäß null.

$$\sigma_{zz}^{\textcircled{1}} = 0 \quad (2.12)$$

Die axiale Verzerrungskomponente lässt sich somit folgendermaßen anschreiben

$$\varepsilon_{zz}^{el} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\varepsilon_{rr}^{el} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} \right) \quad (2.13)$$

Setzt man die eben ermittelte Beziehung der Verzerrungskomponenten (2.13) in die aus dem HOOK'schen Gesetz ermittelte Gleichung der radialen Hauptnormalspannung (1.15) ein, vereinfacht sich diese zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\textcircled{1}} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{rr}^{el} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{rr}^{el} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\varepsilon_{rr}^{el} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} \right) \right] \\ \sigma_{rr}^{\textcircled{1}} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{rr}^{el} + \nu \frac{1-2\nu}{(1-2\nu)(1-\nu)} \left(\varepsilon_{rr}^{el} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} \right) \right] \\ \sigma_{rr}^{\textcircled{1}} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{rr}^{el} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Werden die erhaltenen Gleichungen (2.10), abhängig von den Konstanten, in die erhaltenen Beziehungen für die radiale Hauptnormalspannung (2.14) eingesetzt, ergibt sich:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(-\frac{A}{r^2} + B + \nu \frac{A}{r^2} + \nu B \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[B(1+\nu) + \frac{A}{r^2} (\nu-1) \right] \quad (2.15)$$

Führt man ein analoges Vorgehen bei der Gleichung für die tangentielle Hauptnormalspannung (1.16) durch, so vereinfacht sich diese in folgender Form:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{el} + \nu \varepsilon_{rr}^{el} \right) \quad (2.16)$$

und durch die Verwendung der Gleichungen unter (2.10) weiterführend zu:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{A}{r^2} + B - \nu \frac{A}{r^2} + \nu B \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[B(1+\nu) + \frac{A}{r^2} (1-\nu) \right] \quad (2.17)$$

Da die Gleichung für die radiale Hauptnormalspannung sowie die Randbedingung einer, in Rohrlängsrichtung, spannungsfreien äußeren Oberfläche als auch die des stetigen Übergang des Spannungsvektors an der Bereichsgrenze R gegeben sein muss, ergeben sich zwei Gleichungen für die Randbedingungen:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}}(b) = 0 \quad (2.18)$$

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}}(R) = -p_F \quad (2.19)$$

Dabei ist p_F jener Druck, der seitens des Bereiches $\textcircled{2}$ an der Bereichsgrenze auf den Bereich $\textcircled{1}$ ausgeübt wird. Natürlich ist p_F gleich jenem Druck, welcher notwendig ist, um ein Rohr mit Innenradius R und Außenradius b gerade zum Fließen am Innenrand $r = R$ zu bringen; sieh später!

Durch die Anwendung dieser Randbedingungen auf die Gleichung (2.15), lassen sich die Konstanten A und B bestimmen. So führt die Randbedingung (2.18) zu:

$$B(1 + \nu) + \frac{A}{b^2}(\nu - 1) = 0 \quad (2.20)$$

und die Randbedingung (2.19) auf:

$$\frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{A}{R^2}(\nu - 1) - \frac{A}{b^2}(\nu - 1) \right] = -p_F \quad (2.21)$$

Durch diese zwei Gleichungen, (2.20) und (2.21), lassen sich die zwei unbekanntenen Koeffizienten A und B ermitteln:

$$A = p_F \frac{1 + \nu}{E} \frac{R^2 b^2}{b^2 - R^2} \quad (2.22)$$

$$B = -p_F \frac{\nu - 1}{E} \frac{R^2}{b^2 - R^2} \quad (2.23)$$

Durch Einsetzen der erhaltenen Koeffizienten in die Gleichung der radialen und tangentialen Hauptnormalspannung, (2.15) und (2.17), erhält man:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[-p_F \frac{\nu-1}{E} \frac{R^2}{b^2-R^2} (1+\nu) + p_F \frac{1+\nu}{E} \frac{R^2 b^2}{b^2-R^2} (\nu-1) \frac{1}{r^2} \right] \quad (2.24)$$

Durch Vereinfachung der Gleichung gelangt man auf:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}} = p_F \frac{R^2}{b^2-R^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (2.25)$$

Führt man dieses Vorgehen ebenfalls bei der tangentialen Hauptnormalspannung durch und berücksichtigt man, dass definitionsgemäß die axiale Hauptnormalspannung σ_{zz} null ist, lassen sich Spannungen im elastischen Bereich, abhängig von der Bereichsgrenze und dem vom elastisch-plastischen Bereich $\textcircled{2}$ auf elastischen Bereich $\textcircled{1}$ ausgeübten Druck p_F , in Abhängigkeit des Radius r ausdrücken.

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}}(r) = p_F \frac{R^2}{b^2-R^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (2.26)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}}(r) = p_F \frac{R^2}{b^2-R^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (2.27)$$

$$\sigma_{zz}^{\textcircled{1}} = 0 \quad (2.28)$$

Geht man von einem rein elastischen Zustand im gesamten Querschnitt aus, so verändert sich die Randbedingung (2.19) zu $\sigma_{rr}^{\textcircled{1}}(a) = -p$. Die Gleichungen 2.26 - 2.28 verändern sich dadurch zu:

$$\boxed{\sigma_{rr}(r) = p \frac{a^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)} \quad (2.29)$$

$$\boxed{\sigma_{\varphi\varphi}(r) = p \frac{a^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)} \quad (2.30)$$

$$\boxed{\sigma_{zz} = 0} \quad (2.31)$$

Betrachtet man diese Gleichungen für den über den gesamten Querschnitt rein elastischen Zustand und vergegenwärtigt man sich, dass $a \leq r \leq b$ gilt, führt das zu folgenden Erkenntnissen:

- Die radiale Hauptnormalspannung (2.29) weist ihren betragsmäßig maximalen Wert am Innenradius a auf, ist eine Druckspannung, und geht in Richtung des Außenradius b , so wie vorausgesetzt, gegen 0.
- Die tangentielle Hauptnormalspannung (2.30), hat ebenso ihr Maximum am Innenradius, ist jedoch eine Zugspannung und erreicht am Außenradius b zwar ihr Minimum, jedoch nicht 0.
- Die axiale Hauptnormalspannung (2.31) ist über den gesamten Querschnitt nach der Definition des Ebenen Spannungszustandes ident 0.

Damit zeigt sich, dass für den Ebenen Spannungszustand im rein elastischen Bereich stets gilt:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}} < \sigma_{zz}^{\textcircled{1}} < \sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}} \quad (2.32)$$

Weiters ist zu erkennen, dass der größte Spannungsunterschied am Innenradius auftritt. Die zuvor getroffene Vermutung, dass die Fließgrenze zuerst am Innenradius erreicht wird, bestätigt sich dadurch.

Durch die Einführung neuer auf den Innenradius a bzw. auf die Fließspannung σ_F normierte Variablen:

$$\varrho_N = \frac{r}{a} \quad ; \quad \varrho_W = \frac{b}{a} \quad ; \quad R_N = \frac{R}{a} \quad \text{und} \quad p_N = \frac{p}{\sigma_F} \quad (2.33)$$

ergibt sich eine unabhängigere Darstellung der Ergebnisse.

Die Gleichungen der Spannungskomponenten (2.29) bis (2.31) werden ebenfalls auf die Fließspannung bezogen und lauten für den rein elastischen Spannungszustand durch Einsetzen der normierten Variablen wie folgt:

$$\sigma_{rrN}(\varrho_N) = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_F} = p_N \frac{1}{\varrho_W^2 - 1} \left(1 - \frac{\varrho_W^2}{\varrho_N^2} \right) \quad (2.34)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi N}(\varrho_N) = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_F} = p_N \frac{1}{\varrho_W^2 - 1} \left(1 + \frac{\varrho_W^2}{\varrho_N^2} \right) \quad (2.35)$$

$$\sigma_{zzN} = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_F} = 0 \quad (2.36)$$

In Abbildung 2.2 wird ein Beispiel für einen rein elastischen Spannungszustand, mit dem normierten Druck $p_N = 0.4$ über dem Verhältnis von einem Außen- zu Innenradius von 5, dargestellt.

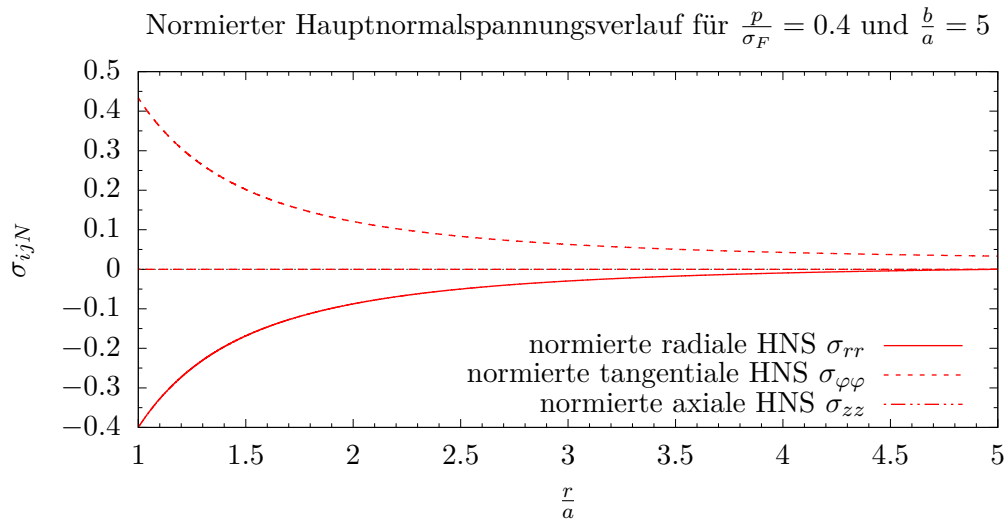


Abbildung 2.2.: Darstellung der normierten Hauptnormalspannungen bei einer rein elastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.4$)

Verwendete und errechneten Werte für Abb. 2.2		
$\frac{b}{a}$	5	Verhältnis: Außen zu Innenradius
$\frac{p}{\sigma_F}$	0.4	Verhältnis: Druck zur Fließspannung
ν	0.3	Querkontraktionszahl
p_{FBN}	0.48	normierter Druck für den Fließbeginn TRESCA

Tabelle 2.1.: Werte für die analytische Berechnung mit rein elastischem Materialverhalten im Ebenen Spannungszustand

Hierbei ist zu erkennen, dass der maximale Spannungsunterschied an der Innenwand auftritt.

Um den Gültigkeitsbereich der rein elastischen Gleichungen (2.29) bis (2.31) zu bestimmen, muss der Druck, der für das erstmalige Auftreten einer plastischen Verformung notwendig ist, bestimmt werden.

2.2.2. Berechnung des Fließdrucks

Nach der Fließbedingung von TRESCA, beschrieben unter Punkt 1.7, ist die maximale Schubspannung, die sich aus der größten Differenz zweier Hauptnormalspannungen ergibt, verantwortlich für das Einsetzen des Fließvorgangs.

Man sieht anhand Gleichung (2.32) bzw. an der Abbildung 2.2, dass die radiale Spannungskomponente, die minimale und die tangentielle Spannungskomponente, die maximale Hauptnormalspannung des rein elastischen Spannungszustandes sind. Deshalb sind diese beiden für das Einsetzen der Plastizität verantwortlich. Die Fließbedingung (1.31) ergibt sich daher zu:

$$F = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \sigma_F \quad (2.37)$$

Durch das Einsetzen der Gleichungen (2.29) und (2.30) in die Fließbedingung (2.37) sieht man, dass es erstmalig zum Fließen kommt, wenn gilt:

$$-p_{FB} \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + p_{FB} \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \sigma_F$$

Vereinfacht ergibt sich eine Gleichung für den Druck p_{FB} , der vorhanden sein muss, um erstmalig Fließen hervorzurufen:

$$\boxed{p_{FB} = \frac{\sigma_F}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (2.38)$$

Durch die graphische Aufbereitung der Gleichung (2.38) in Abhängigkeit von normierten Variablen, des normierte Druck p_N das Verhältnis von Außen- zum Innenradius ϱ_W und des normierte Radius ϱ_N , siehe hierzu (2.33), ergibt sich Abbildung 2.3

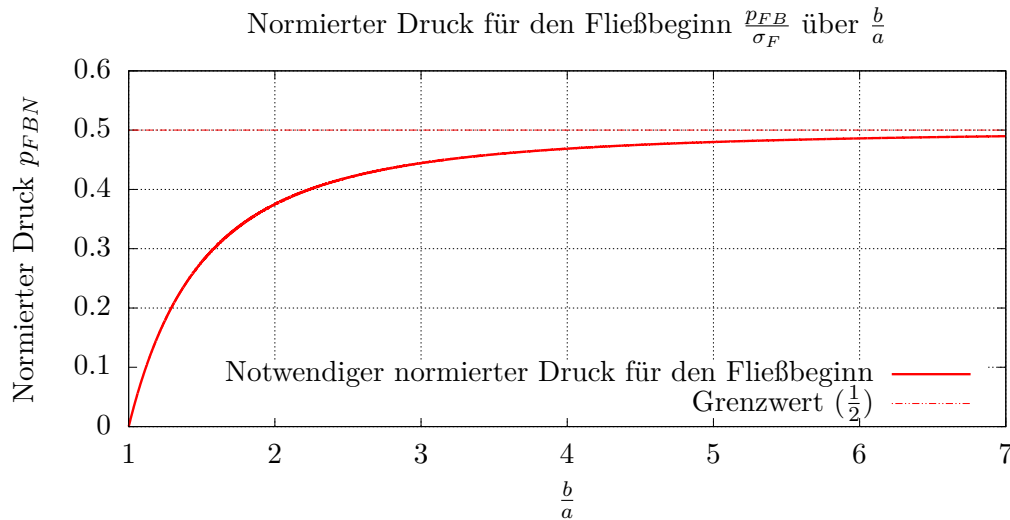


Abbildung 2.3.: Notwendiger Druck für den Fließbeginn $p_{FBN} = \frac{p_{FB}}{\sigma_F}$ in Abhängigkeit vom Radienverhältnis $\varrho_W = \frac{b}{a}$

Aus Abbildung 2.3 erkennt man, dass der Druck für den Fließbeginn einen Grenzwert besitzt. Dieser ergibt sich in normierter Darstellung zu:

$$p_{FBN} = \lim_{\varrho_W \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varrho_W^2} \right) \quad p_{FBN} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (2.39)$$

Dies bedeutet, dass es, wenn das Verhältnis von Innendruck zu Fließspannung den Wert $\frac{1}{2}$ bei der Betrachtung nach TRESCA überschreitet, es unabhängig von der Dicke der Rohrwand an der Innenseite bereits zum Plastizieren gekommen ist. Eine Vergrößerung des Verhältnisses Außenradius zu Innenradius ist nur bis zu einem Wert von etwa 4 sinnvoll, da dadurch bei einem Druckverhältnis unter $\frac{1}{2}$ der Fließbeginn hinausgezögert werden kann. Ab dem Wert 4 führt eine Vergrößerung von $\frac{b}{a}$ nicht mehr zu einem signifikant später einsetzenden Plasizieren der Innenwand.

2.3. Elastisch-plastischer Bereich

Das folgende Vorgehen zur Bestimmung der radialen und der tangentialen Hauptnormalspannung sowie der Bereichsgrenze R , des Druckes p_F , bei $r = R$, und des Traglastdruckes p_T ist dem Vorlesungsskript [10] entnommen.

Nach der Fließbedingung von TRESCA ist, wie schon in Kapitel 1.7 beschrieben, die im Betrag größte Schubspannung für das Einsetzen des Plastizierens verantwortlich. Die maximale Schubspannung ergibt sich laut Gleichung (1.25) aus der halben Differenz der größten zur kleinsten Hauptnormalspannung. Bei der Berechnung des rein elastischen Bereichs, im Kapitel 2.2.2, wurde schon gezeigt, dass, so lange $p < p_{FB}$ ist, der maximale Unterschied der einzelnen Hauptnormalspannungen zueinander, sich an der Innenseite des Rohres ergibt und deshalb an dieser Stelle die Fließbedingung als erstes erfüllt sein wird. Da die radiale Hauptnormalspannungskomponente σ_{rr} einen stetigen Übergang vom elastischen in den elastisch-plastischen Bereich aufweist und sich die beiden anderen Hauptnormalspannungen auch aus der elastischen Lösung entwickeln, ist anzunehmen, dass auch zu Beginn des elastisch-plastischen Bereiches, also bei $r = R$, die tangentiale Hauptnormalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ die größte ist, gefolgt von der axialen Hauptnormalspannung σ_{zz} , welche wegen dem Ebenen Spannungszustand null ist. Zumindest gelte die Annahme:

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_3^{(2)} \quad \sigma_{zz}^{(2)} \stackrel{?}{=} \sigma_2^{(2)} \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} \stackrel{?}{=} \sigma_1^{(2)} \quad (2.40)$$

Mit Hilfe der lokalen Gleichgewichtsbedingung (1.45) und der Fließbedingung nach TRESCA (2.37), kann man eine beschreibende Gleichung für den elastisch-plastischen Bereich formulieren.

$$\frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = 0 \quad , \quad F = \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - \sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_F \equiv 0 \quad (2.41)$$

Hierfür setzt man die umgeformte Fließbedingung in den Klammerausdruck der lokalen Gleichgewichtsbedingung ein und erhält daraus eine einfache Differentialgleichung der Form:

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(2)}}{dr} = \sigma_F \frac{1}{r} \quad (2.42)$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man eine allgemeine Lösung für die radiale Hauptnormalspannung vom elastisch-plastischen Bereich, abhängig von der Integrationskonstante C .

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{2}} = \sigma_F \ln(r) + C \quad (2.43)$$

Um diese bestimmen zu können, betrachtet man den Spannungszustand an der Innenwand, an der als Randbedingung gilt:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{2}}(a) = -p \quad (2.44)$$

Setzt man diese in Gleichung (2.43) ein, so lässt sich die Integrationskonstante bestimmen:

$$C = -p - \sigma_F \ln(a) \quad (2.45)$$

Daraus ergibt sich eine eindeutige Lösung für die radiale Hauptnormalspannung $\sigma_{rr}^{\textcircled{2}}$ im elastisch-plastischen Bereich:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{2}} = -p + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad a \leq r \leq R \quad (2.46)$$

Eingesetzt in die Fließbedingung (2.41), die ja im gesamten Bereich $a \leq r \leq R$ erfüllt ist, erhält man die Gleichung zur Beschreibung der tangentialen Hauptnormalspannung:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{2}} = -p + \sigma_F + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad a \leq r \leq R \quad (2.47)$$

Die beschreibenden Gleichungen für den elastisch-plastischen Bereich $a \leq r \leq R$ lauten:

$$\boxed{\sigma_{rr}^{\textcircled{2}} = -p + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right)} \quad \boxed{\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{2}} = -p + \sigma_F + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right)} \quad \boxed{\sigma_{zz}^{\textcircled{2}} = 0} \quad a \leq r \leq R \quad (2.48)$$

2.3.1. Berechnung des Radius der Bereichsgrenze R

Am Übergang vom elastischen zum elastisch-plastischen Bereich, muss die radiale Hauptnormalspannung σ_{rr} stetig sein:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{2}}(R) = \sigma_{rr}^{\textcircled{1}}(R) \quad (2.49)$$

Setzt man hier die zugehörigen Gleichungen(2.26) und (2.46) ein, erhält man eine Gleichung für die Bereichsgrenze R , in Abhängigkeit vom, seitens des elastisch-plastischen Bereich auf den elastischen Bereich, ausgeübten Druck p_F .

$$\begin{aligned} -p + \sigma_F \ln\left(\frac{R}{a}\right) &= -p_F \frac{R^2}{R^2 - b^2} \left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right) \\ -p + \sigma_F \ln\left(\frac{R}{a}\right) &= -p_F \\ R &= a e^{\frac{p-p_F}{\sigma_F}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.3.2. Berechnung des Druckes p_F

Da die Fließbedingung auch vom rein elastischen Bereich bei $r = R$ erfüllt wird, gilt an der Bereichsgrenze R :

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}}(R) - \sigma_{rr}^{\textcircled{1}}(R) &= \sigma_F \\ \frac{R^2 p_F}{b^2 - R^2} \left(\frac{R^2 + b^2 - R^2 + b^2}{R^2} \right) &= \sigma_F \end{aligned}$$

Hieraus lässt, sich der Druck p_F berechnen:

$$p_F = \frac{\sigma_F}{2} \left(1 - \frac{R^2}{b^2}\right) \quad (2.51)$$

Setzt man diesen nun in die Gleichungen der rein elastischen Lösung (2.26), (2.27) und (2.28) ein, so ergeben sich diese zu expliziten Funktionen von σ_F und r :

$$\boxed{\sigma_{rr}^{\textcircled{1}}(r) = \frac{\sigma_F}{2} R^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right)} \quad \boxed{\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}}(r) = \frac{\sigma_F}{2} R^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right)} \quad \boxed{\sigma_{zz}^{\textcircled{1}} = 0} \quad (2.52)$$

Ebenso lässt sich mit (2.51), eingesetzt in (2.50), die Bereichsgrenze R darstellen als die relevante Nullstelle der nichtlinearen impliziten Gleichung:

$$\boxed{R - a e^{\frac{1}{2} \left(\frac{2p}{\sigma_F} - 1 + \frac{R^2}{b^2} \right)} = 0} \quad (2.53)$$

2.3.3. Berechnung der Traglast

Die Traglast des Rohres wird als erreicht betrachtet, wenn der rein elastische Bereich gerade verschwindet bzw. der elastisch-plastische Bereich den Außenrand erreicht, also wenn $R = b$ erfüllt ist. Um herauszufinden, ab welchem Innendruck p_T dies zutrifft, wird $R = b$ in Gleichung (2.53) eingesetzt.

$$\ln \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2p_T}{\sigma_F} - 1 + \frac{b^2}{b^2} \right)$$

Hieraus lässt sich der Traglastdruck p_T bestimmen.

$$\boxed{p_T = \sigma_F \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \quad (2.54)$$

2.3.4. Graphische Auswertung

Die graphische Auswertung erfolgt anhand zweier exemplarischen Beispielen. Zu sehen in Abbildung 2.4 und 2.5.

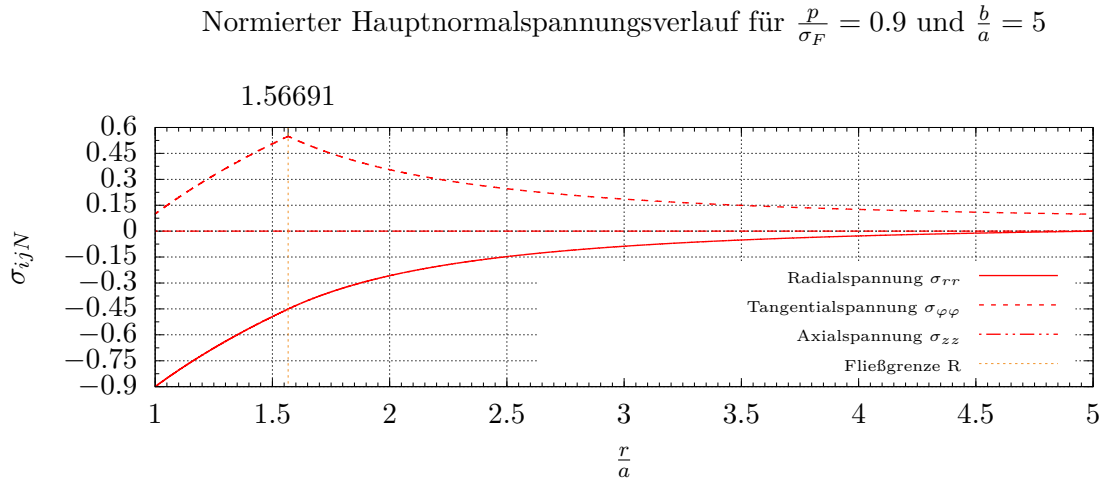


Abbildung 2.4.: Darstellung der analytisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im ESZ ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.9$).

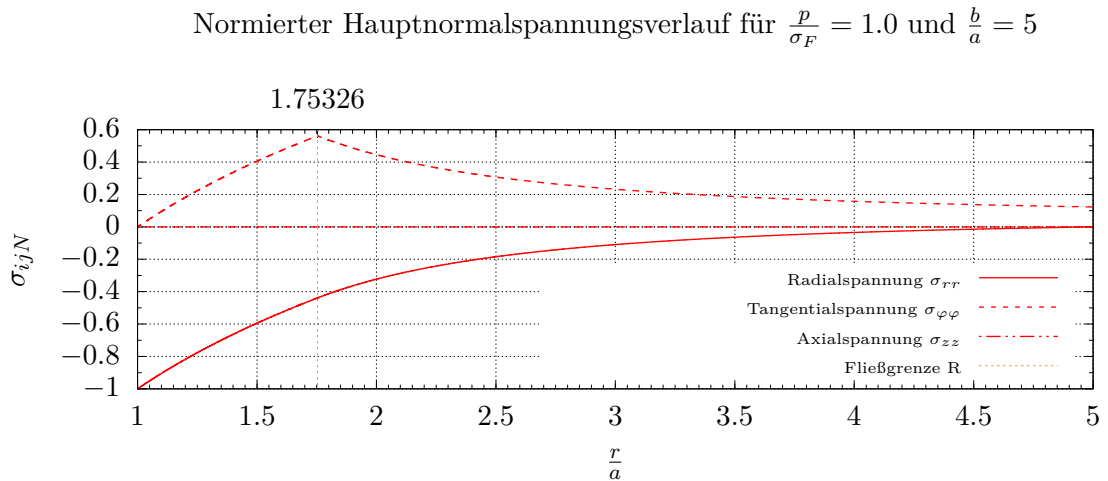


Abbildung 2.5.: Darstellung der analytisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im ESZ ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 1.0$).

2.4. Gültigkeit

Es gilt nun zu prüfen, wie lange die Annahme $\sigma_{rr}^{(2)} < \sigma_{zz}^{(2)} < \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ siehe(2.40), bei einer monotonen Innendrucksteigerung Gültigkeit besitzt und somit die zuvor aufgestellten Gleichungen den elastisch-plastischen Bereich beschreiben können. Da die axiale Hauptnormalspannung, in dem Modell des Ebenen Spannungszustand, den Wert null aufweist, ist die Grenze der zuvor getroffenen Annahme erreicht wenn die tangentielle Hauptnormalspannung (2.47) von einer Zugspannung in eine Druckspannung übergeht. Sprich wenn die tangentielle Hauptnormalspannung ebenfalls den Wert null aufweist.

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(r) = -p + \sigma_F + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) = 0 \quad (2.55)$$

Da dies zuerst an der Innenwand a auftritt, lässt sich der kritische Druck p^* , bei dem die tangentielle gleich der axialen Hauptnormalspannung (nämlich null) ist, folgendermaßen anschreiben:

$$p^* = \sigma_F \quad (2.56)$$

Ausgehend von den auftretenden Werten der Hauptnormalspannungen an der Innenwand:

$$\sigma_{rr}^{(2)} = -p^* = -\sigma_F \quad , \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0 \quad , \quad \sigma_{zz}^{(2)} = 0 \quad \text{bei } r = a \quad (2.57)$$

kann man bei einer weiteren Innendrucksteigerung $p > p^*$ folgende Überlegungen für den Innenwandbereich anstellen:

- 1) Für die axiale Hauptnormalspannung gilt weiterhin $\sigma_{zz}^{(2)} \equiv 0$, da es sich um einen Ebenen Spannungszustand handelt.
- 2) Der Wert der radialen Hauptnormalspannung am Innenradius ist direkt proportional zum Wert des Innendruckes, siehe hierzu die Randbedingung (2.44). Daraus folgt, dass mit steigendem Innendruck, ebenso der Wert des Betrages der radialen Hauptnormalspannung steigt.
- 3) Sollte zunächst der Wert der tangentialen Hauptnormalspannung wieder ins positive ansteigen, so wären die radiale und tangentielle Hauptnormalspannungen

für das Fließen nach TRESCA maßgeblich. Daher würden die bisher aufgestellten Gleichungen 2.41 bis 2.54 Gültigkeit besitzen und die tangentiale Hauptnormalspannung würde wieder den Wert null aufweisen. Dies kann also nicht sein.

- 4) Wird der Wert der tangentialen Hauptnormalspannung negativ, so wären die radiale und axiale Hauptnormalspannung für das Fließen nach TRESCA maßgeblich.

$$F = \sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_F \equiv 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{rr}^{(2)} = -\sigma_F \quad (2.58)$$

Da, wie Punkt 2) zeigt, der Betrag der radiale Hauptnormalspannung direkt proportional zum Innenendruck ist und wegen Punkt 4) der Wert der radiale Hauptnormalspannung gleich dem negativen Wert der Fließspannung entsprechen muss, lautet der gültige Bereich für den Innendruck, in einer geometrisch linearen Analyse, in dem das aufgestellte Modell mit all den getroffenen Vereinfachungen Aussagekraft besitzt:

$$0 \leq p \leq \sigma_F \quad (2.59)$$

Bei einem Innendruck größer der Fließspannung, kommt es zu sehr großen axialen Verschiebungen und zur Bildung einer Singularität.

2.5. Eigenspannungen

Die folgende Berechnung ist anhand [10] durchgeführt worden und man geht davon aus, dass die Entlastung vollkommen elastisch verläuft. Dies gilt es zu Prüfen um die Grenzen der Gültigkeit der so gewonnenen Gleichungen zu bestimmen.

Unter der Annahme, dass die Entlastung rein elastisch erfolgt, liegt ab dem Zeitpunkt der Entlastung, ein lineares Materialverhalten vor. Dadurch kann man die in einer elastisch-plastischen Analyse berechneten Spannungskomponenten ${}^p\sigma_{ij}^{EP}(r)$ mit jenen aus einer rein elastischen Entlastung berechneten Spannungskomponenten ${}^{-p}\sigma_{ij}^E(r)$ superponieren, und man erhält den Eigenspannungszustand $\sigma_{ij}^R(r)$:

$$\sigma_{ij}^R(r) = {}^p\sigma_{ij}^{EP}(r) + {}^{-p}\sigma_{ij}^E(r) \quad (2.60)$$

Da dies ein lineares Problem darstellt, kann ebenso geschrieben werden:

$$\sigma_{ij}^R(r) = {}^p\sigma_{ij}^{EP}(r) - {}^p\sigma_{ij}^E(r) \quad (2.61)$$

In weiterer Folge, werden anstelle der Variablen ${}^p\sigma_{ij}^{EP}(r)$ und ${}^p\sigma_{ij}^E(r)$, die Variablen $\sigma_{ij}^{\textcircled{\mathbb{K}}}$ und $\tilde{\sigma}_{ij}$ verwendet.

$${}^p\sigma_{ij}^{EP} = \sigma_{ij}^{\textcircled{\mathbb{K}}} \quad ; \quad {}^p\sigma_{ij}^E(r) = \tilde{\sigma}_{ij} \quad \text{für } \textcircled{\mathbb{K}} = \textcircled{1} \text{ bzw. } \textcircled{2} \quad (2.62)$$

Eingesetzt in die zuvor angeschriebene Gleichung (2.61), ergibt sich:

$$\sigma_{ij}^R = \sigma_{ij}^{\textcircled{\mathbb{K}}} - \tilde{\sigma}_{ij} \quad (2.63)$$

Wie schon in den Kapiteln zuvor erwähnt, muss die radiale Hauptnormalspannung einen stetigen Übergang zu dem im Inneren und an der Außenseite herrschenden Druck aufweisen. Daher ergeben sich die Randbedingungen:

$$\tilde{\sigma}_{rr}(a) = -p \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma}_{rr}(b) = 0 \quad (2.64)$$

Es lassen sich somit die Gleichungen von (2.29) bis (2.31) verwenden und folgendermaßen anschreiben:

Für den Ebenen Spannungszustand gilt:

$$\tilde{\sigma}_{rr}(r) = -p \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(r) = -p \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad \tilde{\sigma}_{zz} = 0$$

Da bei der Berechnung des Spannungszustands bei der Belastung eine Bereichsunterscheidung notwendig war, muss hier diese Bereichsunterscheidung weiter durchgeführt werden.

Die beschreibenden Gleichungen für den Ebenen Spannungszustand, nach der Fließbedingung nach TRESCA, lauten bei Belastung mit Innendruck p und mit R aus Gleichung (2.53):

Für den elastischen Bereich ① ($R \leq r \leq b$):

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}}(r) = \frac{\sigma_F R^2}{2} \frac{R^2}{b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}}(r) = \frac{\sigma_F R^2}{2} \frac{R^2}{b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \quad \sigma_{zz}^{\textcircled{1}}(r) = 0$$

und für den elastisch-plastischen Bereich ② ($a \leq r \leq R$):

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{2}}(r) = -p + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{2}}(r) = -p + \sigma_F + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad \sigma_{zz}^{\textcircled{2}}(r) = 0$$

2.5.1. Eigenspannungen im ursprünglich elastisch-plastischen Bereich

Die Eigenspannungen im ursprünglichen, unter Belastung elastisch-plastischen gewordenen, Bereich ergeben sich mit der Gleichung (2.63) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\textcircled{2}R}(r) &= \sigma_{rr}^{\textcircled{2}} - \tilde{\sigma}_{rr} = -p + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) + p \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \\ &\boxed{\sigma_{rr}^{\textcircled{2}R}(r) = \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) + p \frac{b^2 (r^2 - a^2)}{r^2 (a^2 - b^2)}} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{2}R}(r) &= \sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{2}} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = -p + \sigma_F + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) + p \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \\ &\boxed{\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{2}R}(r) = \sigma_F + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) + p \frac{b^2 (r^2 + a^2)}{r^2 (a^2 - b^2)}} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{\textcircled{2}} &= \sigma_{zz}^{\textcircled{2}} - \tilde{\sigma}_{zz} = 0 \\ &\boxed{\sigma_{zz}^{\textcircled{2}} = 0} \end{aligned} \quad (2.67)$$

2.5.2. Eigenspannungen im ursprünglich elastischen Bereich

In gleicher Weise wird im elastische Bereich ① mittels Gleichung (2.63) vorgegangen:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}R}(r) = \sigma_{rr}^{\textcircled{1}} - \tilde{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_F}{2} R^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) + p \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\boxed{\sigma_{rr}^{\textcircled{1}R}(r) = \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \left(\frac{\sigma_F}{2} \frac{R^2}{b^2} + p \frac{a^2}{a^2 - b^2} \right)} \quad (2.68)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}R}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_F}{2} R^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) + p \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\boxed{\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}R}(r) = \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left(\frac{\sigma_F}{2} \frac{R^2}{b^2} + p \frac{a^2}{a^2 - b^2} \right)} \quad (2.69)$$

$$\sigma_{zz}^{\textcircled{1}R} = \sigma_{zz}^{\textcircled{1}} - \tilde{\sigma}_{zz} = 0 \quad (2.70)$$

$$\boxed{\sigma_{zz}^{\textcircled{1}R} = 0} \quad (2.71)$$

Für eine dimensionslose Darstellung werden die Gleichungen, wie schon in den vorherigen Kapiteln, auf den Innenradius a und auf die Fließspannung σ_F normiert. Hierzu, siehe Gleichung (2.33) auf Seite 21 .

$$\sigma_{rrN}^{\textcircled{1}R} = \frac{\varrho_r^2 - \varrho_W^2}{\varrho_r^2} \left(\frac{p_N}{1 - \varrho_W^2} + \frac{R_N^2}{2\varrho_W^2} \right) \quad \sigma_{\varphi\varphi N}^{\textcircled{1}R} = \frac{\varrho_r^2 + \varrho_W^2}{\varrho_r^2} \left(\frac{p_N}{1 - \varrho_W^2} + \frac{R_N^2}{2\varrho_W^2} \right) \quad (2.72)$$

$$\sigma_{rrN}^{\textcircled{2}R} = \ln(\varrho_r) + p_N \frac{\varrho_W^2 (\varrho_r^2 - 1)}{\varrho_r^2 (1 - \varrho_W^2)} \quad \sigma_{\varphi\varphi N}^{\textcircled{2}R} = 1 + \ln(\varrho_r) + p_N \frac{\varrho_W^2 (\varrho_r^2 + 1)}{\varrho_r^2 (1 - \varrho_W^2)} \quad (2.73)$$

Betrachtet man Abbildung 2.6 und Vergleicht dies mit den Hauptnormalspannung unter normaler Belastung, Abbildung 2.4, erkennt man, dass im ursprünglich elastisch-plastischen Bereich die tangentielle Hauptnormalspannung eine weit größere Änderung aufgrund der Entlastung erfährt, als die radiale Hauptnormalspannung. Die tangentielle Hauptnormalspannung geht von einer Zugspannung über in eine Druckspannung.

Weiters ist gut zu erkennen, dass im Eigenspannungszustand an der Innenseite, die axiale, sowie die radiale Hauptnormalspannung den Wert null aufweisen. Die radiale Hauptnormalspannung ist an der Innen- sowie auch an der Außenseite aufgrund der lastfreien Oberfläche null. Die axiale Hauptnormalspannung ist definitionsgemäß null.

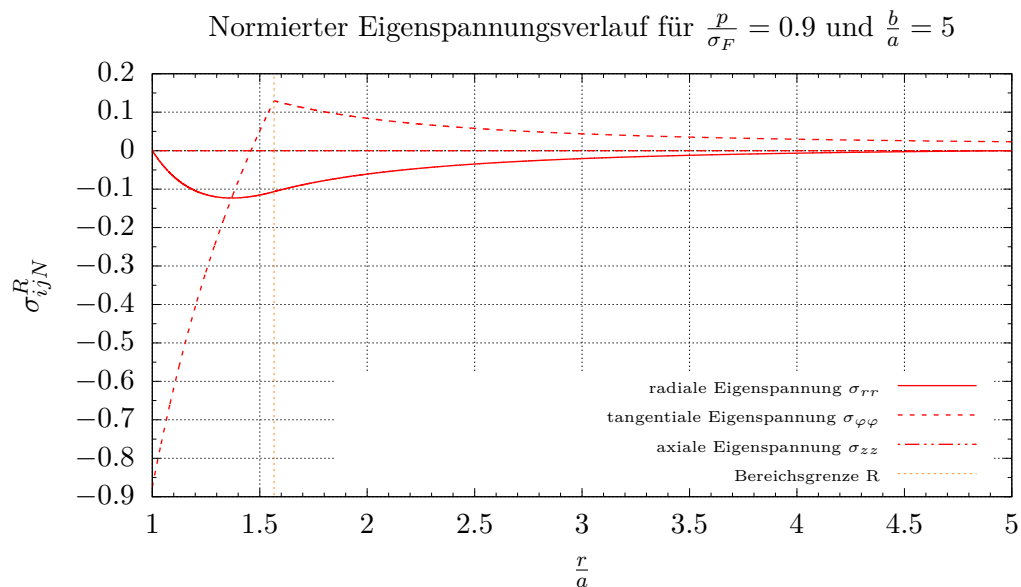


Abbildung 2.6.: Darstellung der normierten Eigenspannungen im Ebenen Spannungszustand nach TRESCA

Diese zuvor aufgestellten Gleichungen gelten, so lange eine rein elastische Entlastung vorliegt. Kommt es bei Entlastung in Gegenrichtung zum Plastizieren, müsste man eine neuerliche Bereichsunterscheidung machen. Es ist nun zu prüfen, bis zu welchem Druck eine vollständig elastische Entlastung stattfindet.

2.5.3. Bis zu welchem Druck kommt es zu einer rein elastischen Entlastung?

Wenn beim Entlasten Fließen in Gegenrichtung auftritt, verändert sich die Fließbedingung zu:

$$\sigma_{rr}^{\textcircled{2}R} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{2}R} = \sigma_F \quad (2.74)$$

Zur größten Spannungsdifferenz kommt es wieder an der Innenwand. Somit lassen sich die zuvor aufgestellten Gleichungen, für $r = a$, in die Fließbedingung einsetzen. Dies ergibt:

$$\frac{2b^2 p}{b^2 - a^2} = 2\sigma_F \quad (2.75)$$

Dadurch erhält man den Druck p_F^R , ab welchem es bei Entlastung auf Grund der Eigenspannungen erneut zum Fließen kommt.

$$\boxed{p_F^R = \sigma_F \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad \text{bzw.} \quad p_{FN}^R = 1 - \frac{1}{\varrho_W^2} \quad (2.76)$$

Man erkennt, dass dieser Drucke, ebenso wie der Druck der benötigt wird, um das Material erstmals zum Plastizieren zu bringen, einen Grenzwert besitzt:

$$\lim_{\varrho_W \rightarrow \infty} p_{FN}^R = \lim_{\varrho_W \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\varrho_W^2}\right) \quad p_{FN}^R \rightarrow 1 \quad (2.77)$$

Die tangentielle Hauptnormalspannung ist, im Eigenspannungszustand, eine Druckspannung und wirkt, da bei erneuter Druckaufbringung wie in Kapitel 2.2 gezeigt wurde, die tangentielle Hauptnormalspannung als Zugspannung auftritt, dieser entgegen. Damit wird der erneute Fließbeginn hinausgezögert.

3. Numerische Berechnung

Dieses Kapitel richtet sich nach der Ausarbeitung von [2] und wurde teilweise daraus übernommen. Für die Erstellung der numerischen Auswertung wurde das Finite Elemente Programm Abaqus 6.14 der Firma Dassault Systems für eine geometrisch lineare Analyse verwendet. Da es sich um ein rotationssymmetrisches Problem handelt, wird ein zweidimensionales, axial-symmetrisches Modell verwendet. Die Länge der betrachteten Rohrscheibe, wurde mit $0.1mm$ ausreichend dünn im Vergleich zu dem Außenradius $b = 50mm$ und Innenradius $a = 10mm$ gewählt, um die Vorgabe des Ebenen Spannungszustandes so gut wie möglich zu modellieren und den Einfluss einer axialen Spannungskomponente weitgehend auszuschließen. Die verwendeten Elemente des Typs CAX8 sind biquadratisch interpolierte, axialsymmetrische 8 Knoten Elemente gleicher Größe von $0.1mm$. Um die aus der analytischen Berechnungen erhaltenen Ergebnisse mit der Finiten Elementen Methode verifizieren zu können, wird die numerische Auswertung als geometrisch lineare Analyse durchgeführt. Die normierten Werte, die zur Darstellung sämtliche Diagramme verwendet werden, sind den jeweiligen Rohrenden entnommen. In Abbildung 3.1 ist eine schematische Skizze des

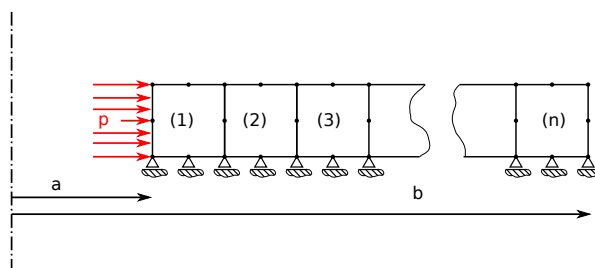


Abbildung 3.1.: Axialsymmetrisches Finite Elemente Modell

Finiten Elemente Modells abgebildet. Hier bezeichnet a , wie in den vorherigen Kapiteln, den Innenradius und b den Außenradius. Mit p wird der Innendruck bezeichnet, der als *pressure load* an der Rohrrinnenwand aufgebracht wird. Durch diese Modellierung, ist das eigentliche Modell für die numerische Analyse doppelt so lang. Es wird jedoch darauf verzichtet, die gespiegelte Seite ebenfalls darzustellen. Ebenso sind die Maße wie die normierte Rohrlänge auf die dargestellte Modellhälfte bezogen.

3.1. Laststeigerung

Auf den folgenden Seiten wird ein Modell mit den zuvor getroffenen Angaben, dem Radienverhältnis von $\frac{b}{a} = 5$ und einer Fließspannung von $\sigma_F = 275\text{N/mm}^2$ verwendet, um eine normierte Innendrucksteigerung von $p_N = \frac{p}{\sigma_F} = 0.1$ auf $p_N = 0.9$ und die danach verbleibenden Eigenspannungen darzustellen.

Lastfall $p_N = 0.1$:

In diesem rein elastischen Lastfall zeigen Abbildung 3.3 und 3.4 die beiden von null verschiedenen Hauptnormalspannungen. Abbildung 3.5 die daraus resultierende Vergleichsspannung nach TRESCA. Wie zu erwarten, ist auf Abbildung 3.6 der rein elastische Bereich gut erkennbar.¹ Das zugehörige Diagramm 3.27 ist auf Seite 46 ersichtlich.

Lastfall $p_N = 0.3$:

Dieser Lastfall, zu sehen auf Abbildung 3.7 bis 3.10 entspricht ebenfalls einem rein elastischem.¹ Das zugehörige Diagramm 3.28 ist auf Seite 46 ersichtlich

Lastfall $p_N = 0.5$:

Bei diesem Lastfall, zu sehen auf Abbildung 3.11 bis 3.14, tritt erstmals Fließen auf. Wie auf Abbildung 3.14 erkennbar ist, bildet sich an der Innenwand des dickwandigen Rohres eine kleine elastisch-plastische Zone aus.¹ Das zugehörige Diagramm 3.29 ist auf Seite 47 ersichtlich.

Lastfall $p_N = 0.7$:

Dieser elastisch-plastische Lastfall, zu sehen auf Abbildung 3.15 bis 3.18, zeigt deutlich die Zunahme des elastisch-plastischen Bereichs.¹ Das zugehörige Diagramm 3.30 ist auf Seite 47 ersichtlich.

Lastfall $p_N = 0.9$:

Die Belastung mit $p_N = 0.9$ zeigt eine deutlich ausgeprägte elastisch-plastische Zone und stellt auch die maximale Belastung dieser Untersuchung da. Abbildungen 3.19 bis 3.22, veranschaulichen die Belastung recht deutlich.¹ Das zugehörige Diagramm 3.31 ist auf Seite 48 ersichtlich.

Lastfall $p_N = 0$:

Nach einer Belastung mit $p_N = 0.9$ wird vollkommen entlastet $p_N = 0$. Abbildung

¹ Auf die Darstellung der axialen Hauptnormalspannung wurde verzichtet, da sich diese von null nicht unterscheidet (ESZ)

3.19 bis 3.22 zeigen das Verhalten des dickwandigen Rohres unter den verbleibenden Eigenspannungen.¹ Das zugehörige Diagramm 3.32 ist auf Seite 48 ersichtlich.

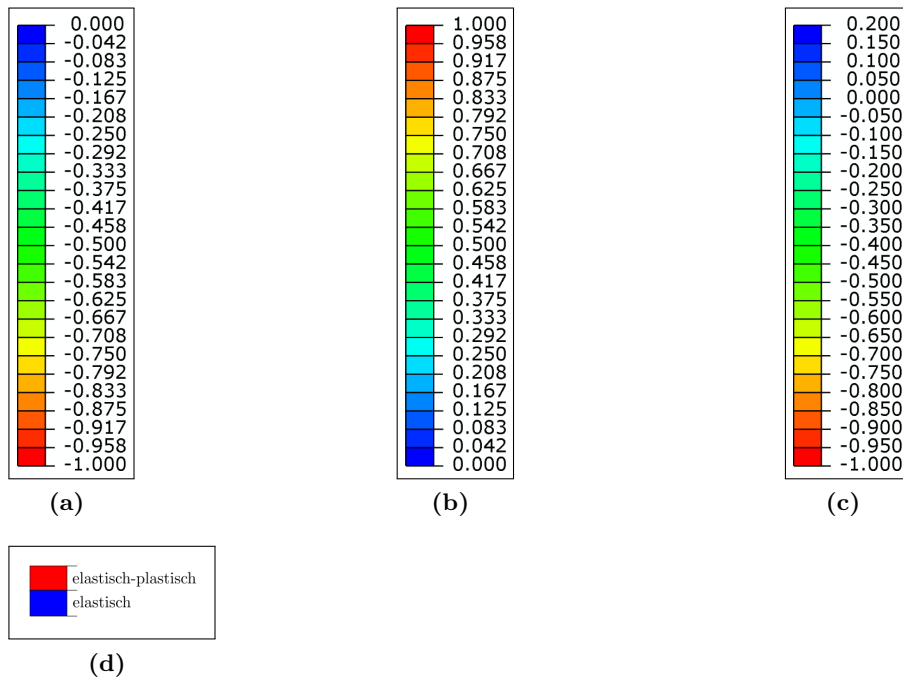


Abbildung 3.2.: Legenden mit, auf die Fließspannung, normierte Werte.

3.2a: Legende für die radialen Hauptnormalspannungen der Abbildungen 3.3, 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 und 3.23.

3.2b: Legende für die Vergleichsspannung nach TRESCA und die tangentialen Hauptnormalspannungen, ersichtlich in den Abbildungen von 3.4 und 3.5 bis hin zu den Abbildungen 3.24 und 3.25. Ausgenommen ist die tangentielle Eigenspannung in Abbildung 3.24.

3.2c: Legende für die tangentielle Eigenspannung in Abbildung 3.24.

3.2d: Legende für die Darstellung der elastischen und elastisch-plastischen Zonen in den Abbildungen 3.6, 3.10, 3.14, 3.18, 3.22 und 3.26.

Lastfall $p_N = 0.1$ und $\frac{b}{a} = 5$

Abbildung 3.3.: Radiale HNS

Abbildung 3.4.: Tangentiale HNS

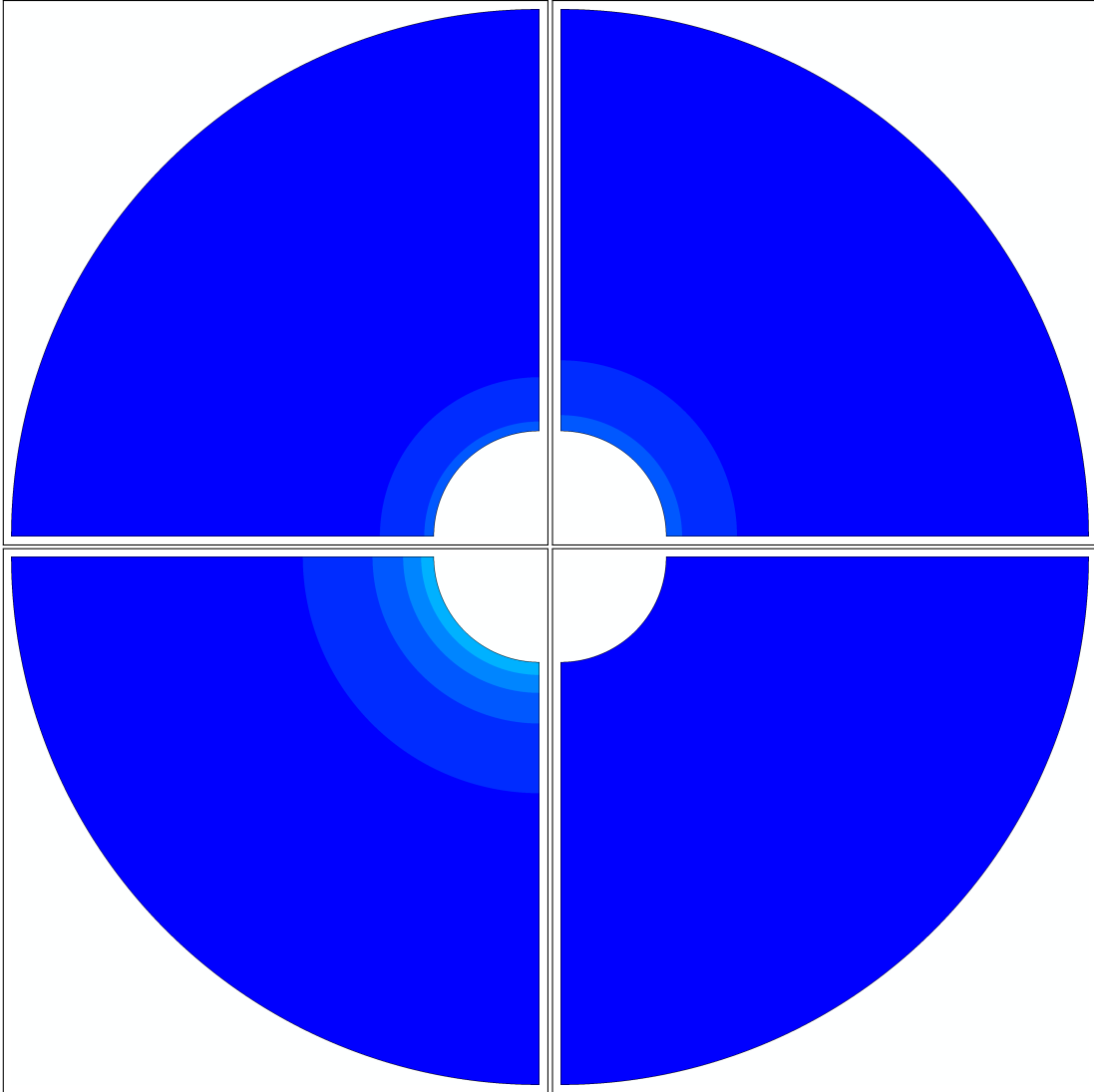


Abbildung 3.5.: Darstellung der Vergleichsspannung nach TRESCA

Abbildung 3.6.: Darstellung der elastischen und elastisch-plastische Zone

Lastfall $p_N = 0.3$ und $\frac{b}{a} = 5$

Abbildung 3.7.: Radiale HNS

Abbildung 3.8.: Tangentiale HNS

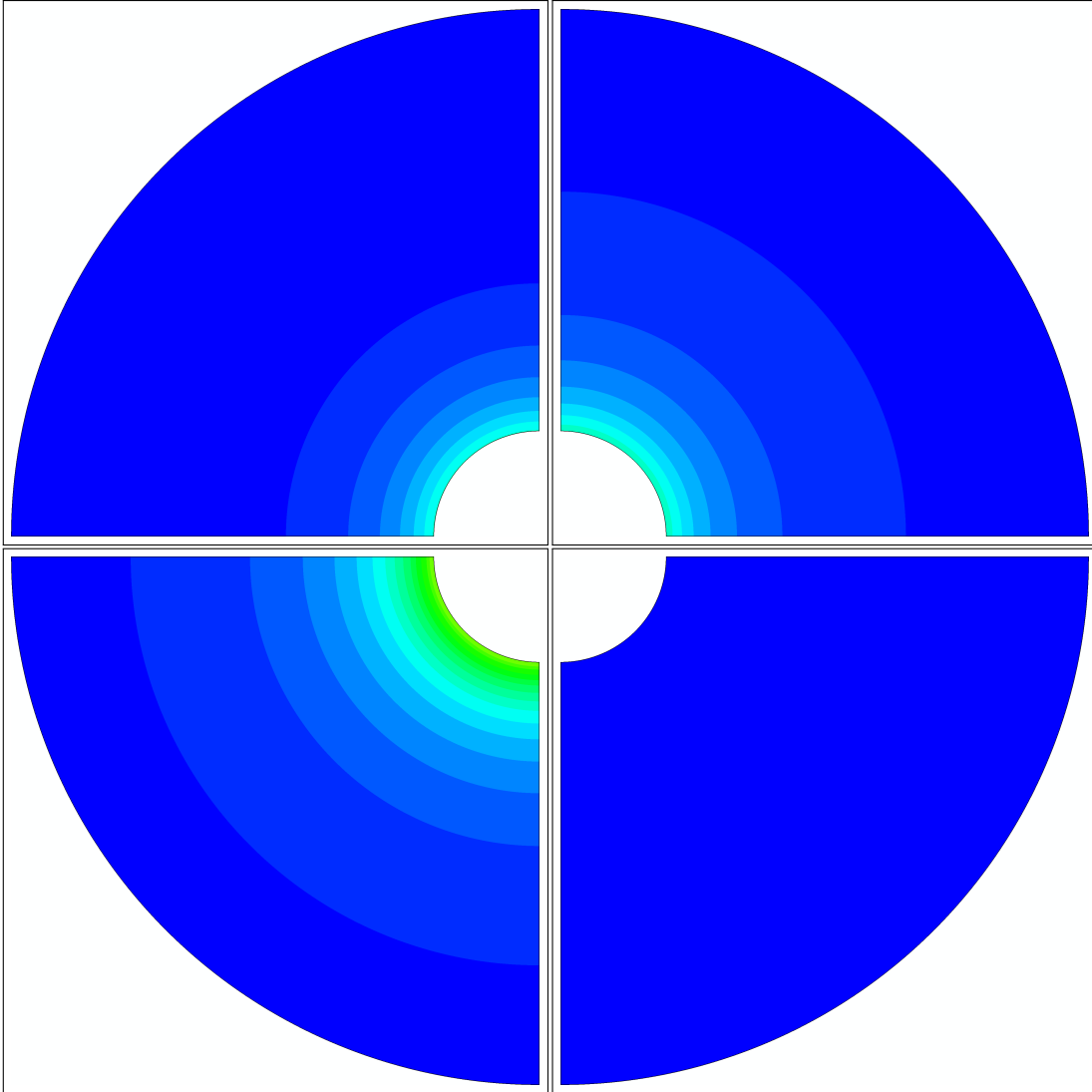


Abbildung 3.9.: Darstellung der Vergleichsspannung nach TRESCA

Abbildung 3.10.: Darstellung der elastischen und elastisch-plastische Zone

Lastfall $p_N = 0.5$ und $\frac{b}{a} = 5$

Abbildung 3.11.: Radiale HNS

Abbildung 3.12.: Tangentiale HNS

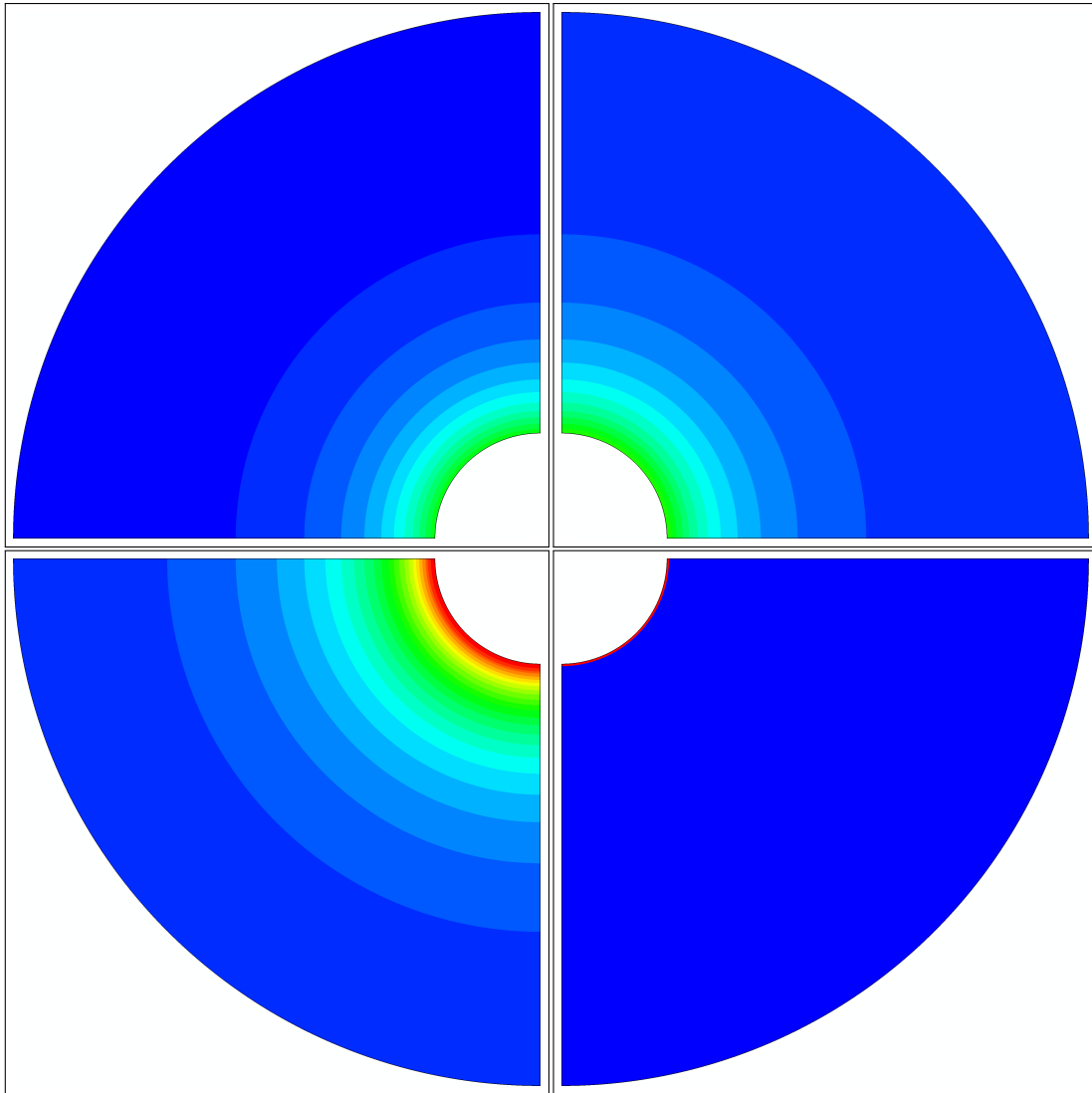


Abbildung 3.13.: Darstellung der Vergleichsspannung nach TRESCA

Abbildung 3.14.: Darstellung der elastischen und elastisch-plastischen Zone

Lastfall $p_N = 0.7$ und $\frac{b}{a} = 5$

Abbildung 3.15.: Radiale HNS

Abbildung 3.16.: Tangentiale HNS

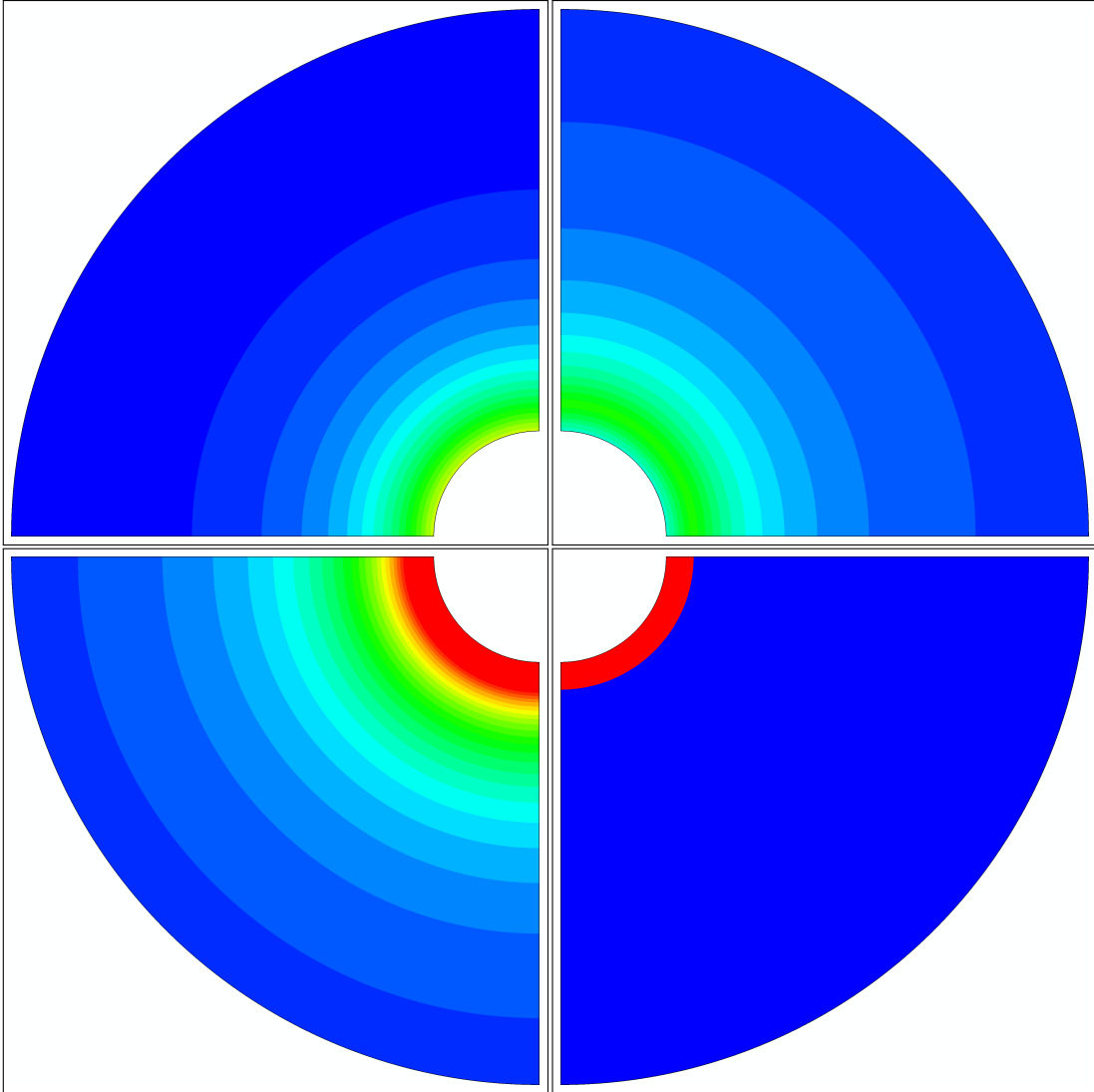


Abbildung 3.17.: Darstellung der Vergleichsspannung nach TRESCA

Abbildung 3.18.: Darstellung der elastischen und elastisch-plastischen Zone

Lastfall $p_N = 0.9$ und $\frac{b}{a} = 5$

Abbildung 3.19.: Radiale HNS

Abbildung 3.20.: Tangentiale HNS

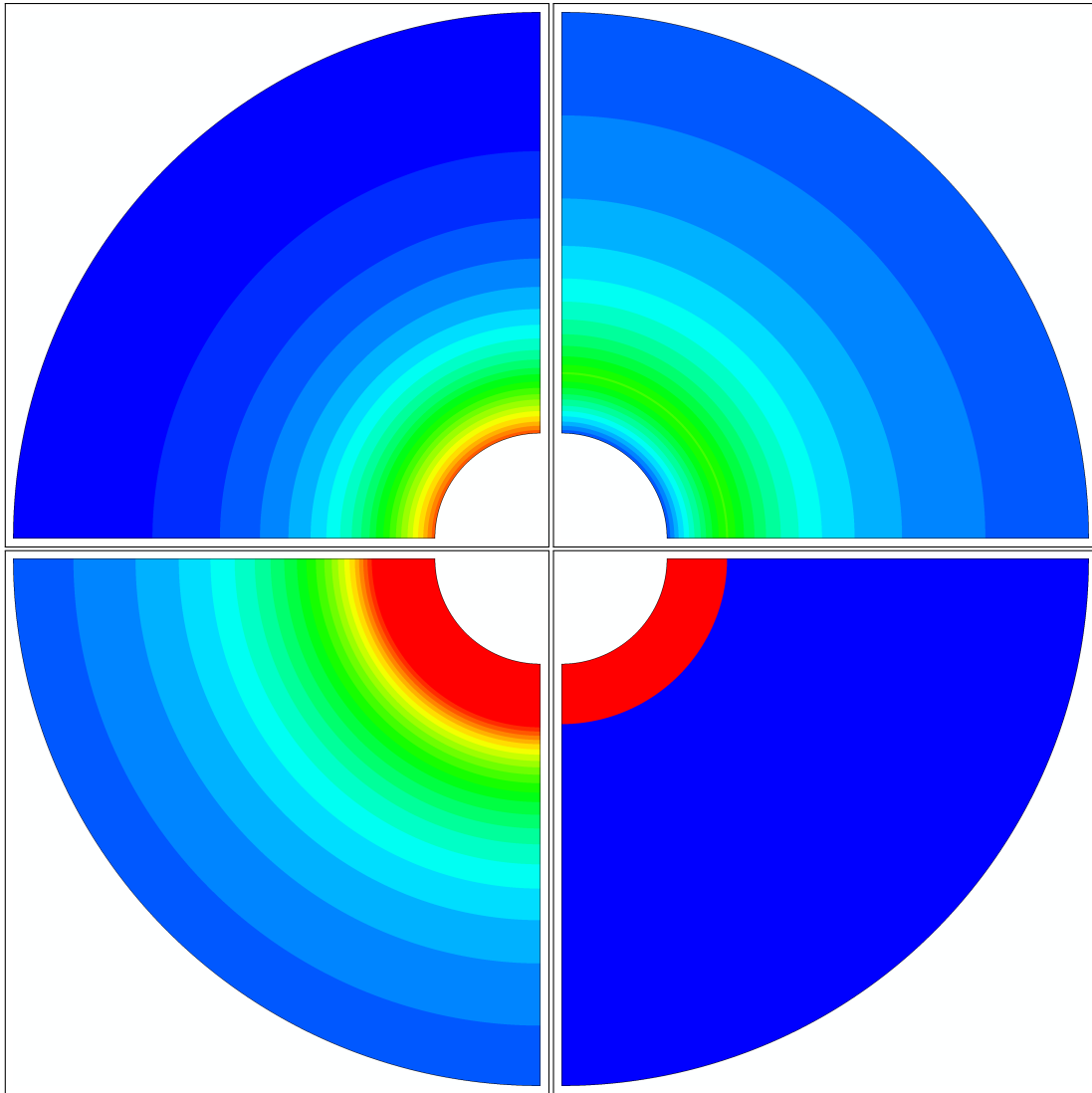


Abbildung 3.21.: Darstellung der Vergleichsspannung nach TRESCA

Abbildung 3.22.: Darstellung der elastischen und elastisch-plastischen Zone

Lastfall $p_N = 0$ und $\frac{b}{a} = 5$

Abbildung 3.23.: Radiale HNS

Abbildung 3.24.: Tangentiale HNS

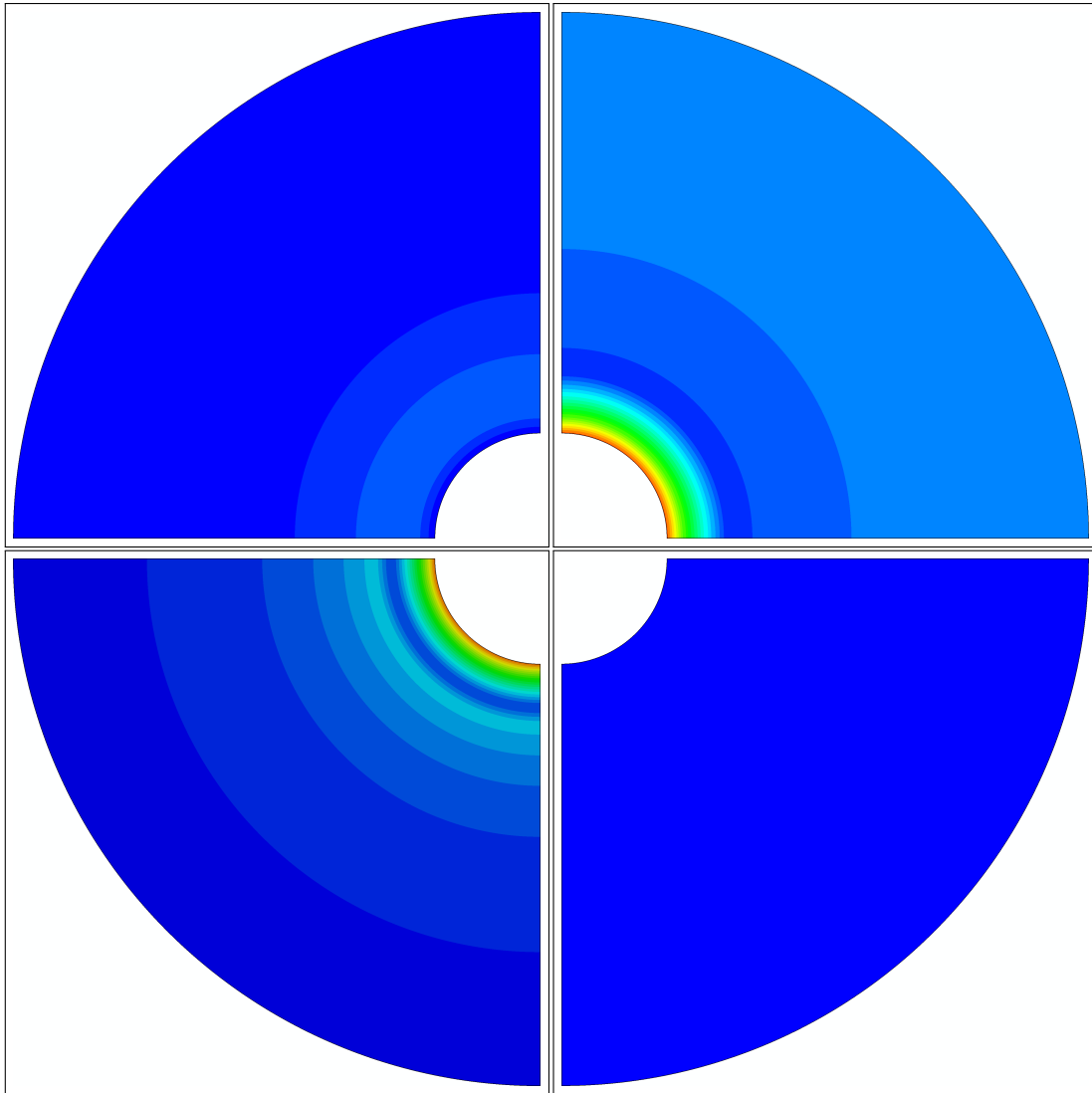


Abbildung 3.25.: Darstellung der Vergleichsspannung nach TRESCA

Abbildung 3.26.: Darstellung der elastischen und elastisch-plastischen Zone

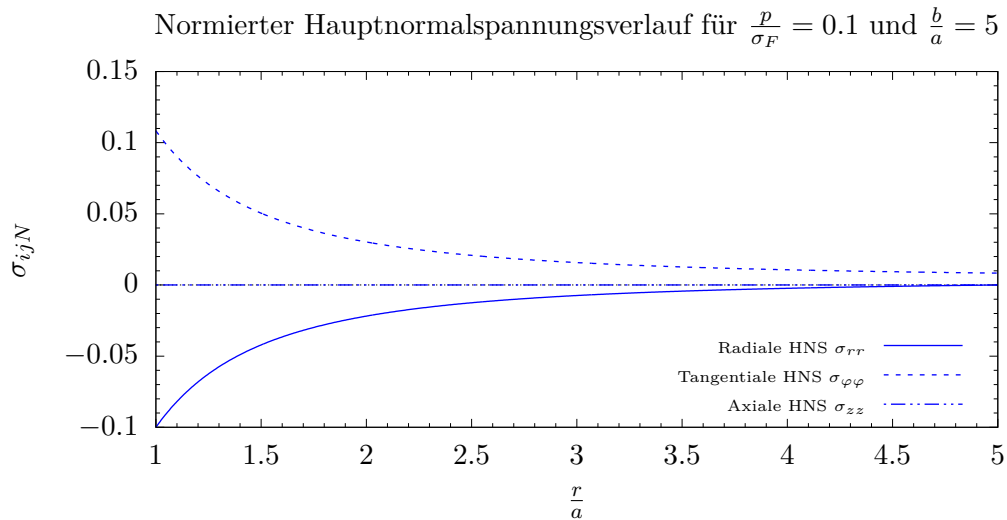


Abbildung 3.27.: Darstellung der numerisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei rein elastischer Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.1$)

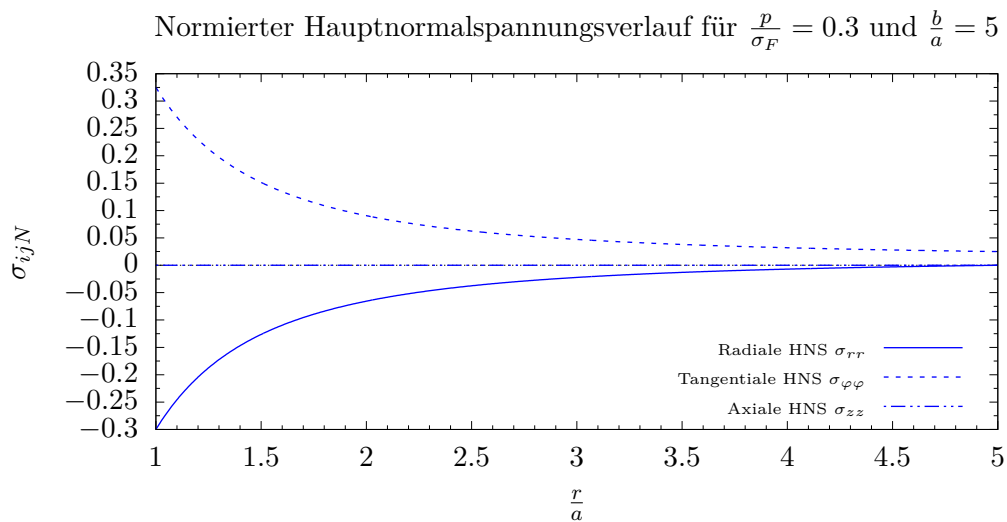


Abbildung 3.28.: Darstellung der numerisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei rein elastischer Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.3$)

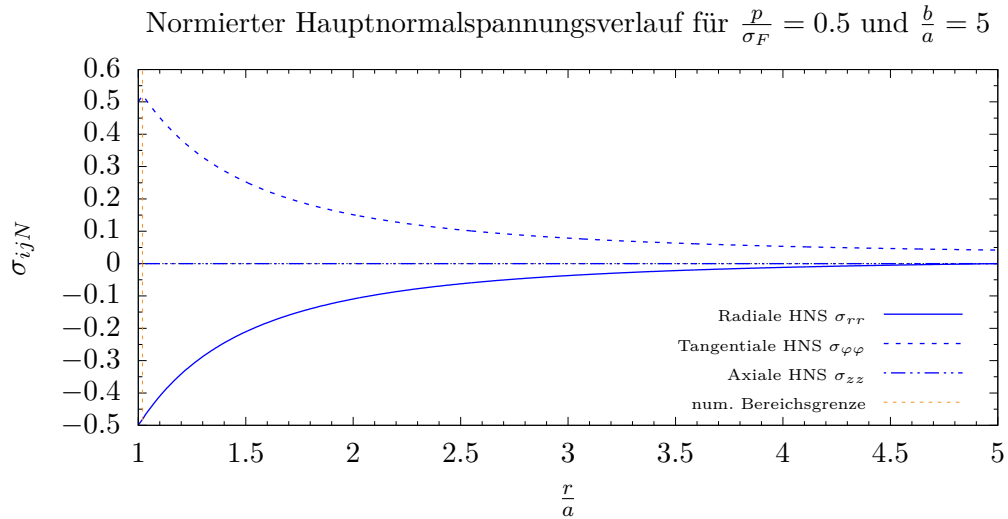


Abbildung 3.29.: Darstellung der numerisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei elastisch-plastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.5$)

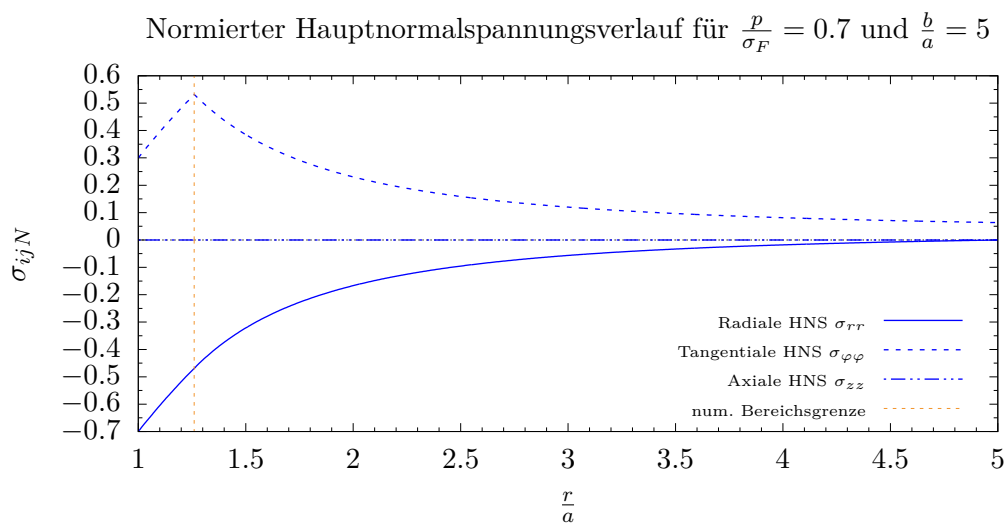


Abbildung 3.30.: Darstellung der numerisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.7$)

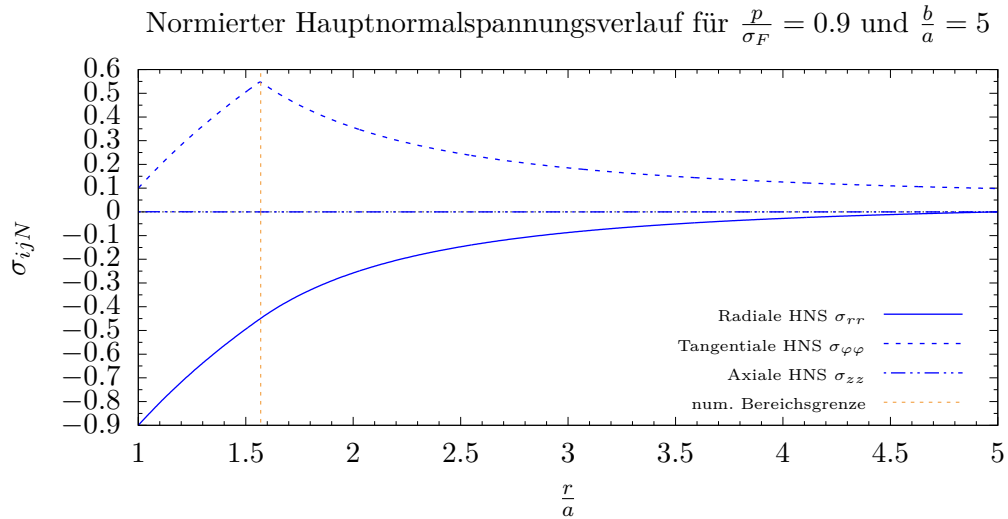


Abbildung 3.31.: Darstellung der numerisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.9$)

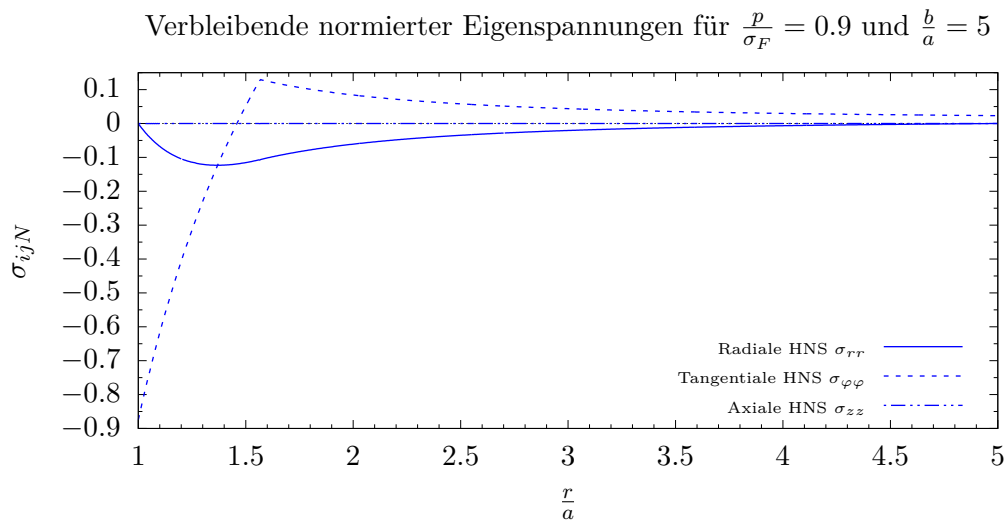


Abbildung 3.32.: Darstellung der numerisch berechneten normierten Eigenspannungen nach einer Beanspruchung von $p_N = 0.9$ im Ebenen Spannungszustand ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0$)

3.2. Numerische Verifizierung

Um die Gültigkeit der analytisch ermittelten Gleichungen aus Kapitel 2 zu bestätigen, werden die, aus den analytischen Gleichungen ermittelten, normierten Hauptnormalspannungen und die Bereichsgrenze R , mit jenen aus der Finiten Elemente Berechnung gewonnenen Daten, überlagert. Hierfür wird das zuvor aufgestellte Finite Elemente Modell mit einem normierten Druck $p_N = 0.9$ herangezogen.

3.2.1. Hauptnormalspannungen

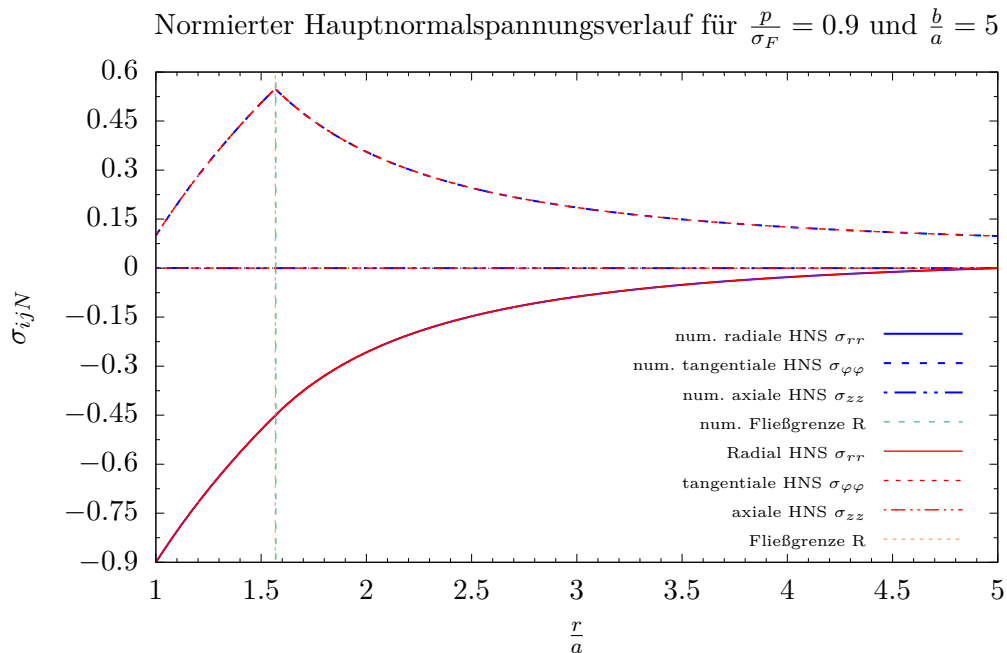


Abbildung 3.33.: Darstellung der numerisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im ESZ ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.9$)

Bei einem normierten Druck von $p_N = \frac{p}{\sigma_F} = 0.9$, und einem Außen- zu Innenradius Verhältnis von $\frac{b}{a} = 5$, deckt sich der analytisch berechnete radiale, tangentielle und axiale Hauptnormalspannungsverlauf exakt mit der numerisch ermittelten Lösung. Dies hat zur Folge, dass sich der analytisch berechnete Wert der Bereichsgrenze R ebenfalls sehr gut mit dem numerisch berechneten Wert deckt. Siehe hierzu Abbildung 3.33.

3.2.2. Eigenspannungen

Normierter Eigenspannungsverlauf nach einer Belastung von $\frac{p}{\sigma_F} = 0.9$ und $\frac{b}{a} = 5$

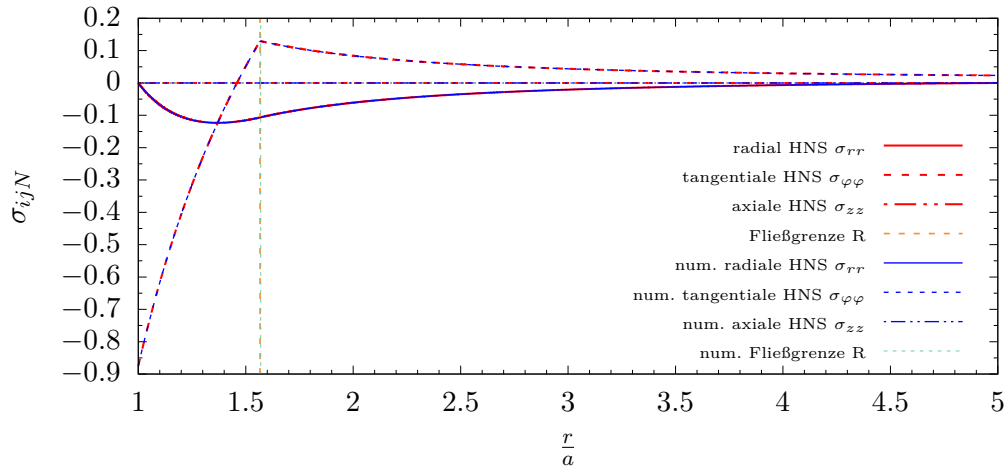


Abbildung 3.34.: Darstellung der numerisch berechneten normierten Hauptnormalspannungen bei rein elastisch-plastischer Beanspruchung im ESZ ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.9$)

Wie schon zuvor bei der Darstellung der Hauptnormalspannungen unter Innendruckbelastung (Abbildung 3.33), kann man bei der Darstellung der, nach Abfallen des Innendrucks, verbleibenden Eigenspannungen die exakte Übereinstimmung zwischen dem analytisch berechneten radialen, tangentialen und axialen Hauptnormalspannungsverlauf und der numerischen Berechnung erkennen. Siehe hierzu Abbildung 3.34. Ebenfalls stimmt die analytisch berechnete Bereichsgrenze mit dem Ergebnis aus der geometrisch linearen Finiten Elemente Analyse überein.

3.3. Fließfläche

Um den ratenbezogenen Spannungsverlauf graphisch im Spannungsraum darzustellen, wurde das Programm Matlab gewählt.

Die nachfolgende Darstellung der Fließfläche, Abbildung 3.35, veranschaulicht die Spannungszustände, die ein Körperpunkt im Querschnitt während des Steigens des Innendrucks durchläuft. Man erkennt, wie der Spannungspfad im elastischen Bereich vom Ursprung des Koordinatensystems bis zur Fließfläche anwächst und danach entlang der Fließfläche, in den negativen Spannungsraum verläuft (blauer Spannungs-

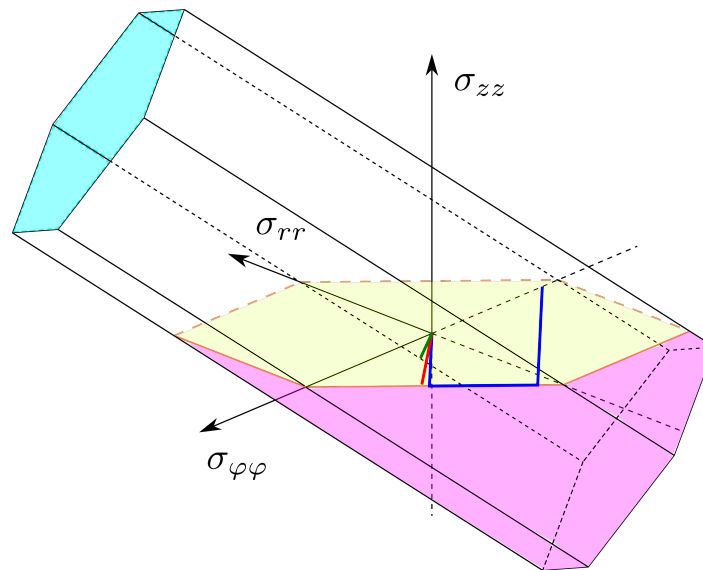


Abbildung 3.35.: Darstellung der Fließfläche und dreier Spannungspfade bei einem normierten Innendruck von $p_N = 0.9$ und einem Radienverhältnis von $\frac{b}{a} = 5$

pfad). Bei Eintreten der Entlastung verlässt der Spannungspfad die Fließfläche und wandert erneut durch den elastischen Bereich, bis er schließlich in Gegenrichtung an Wert zunimmt. Dieses Anwachsen würde dann wieder durch die Fließfläche begrenzt werden. Ebenso erkennbar ist, dass die Spannungspfade von den beiden Körperpunkten - rot und grün - nicht die Fließfläche erreichen und somit im elastischen Bereich verbleiben. Weiters ist zu erkennen, dass die Spannungspfade nur in der σ_{rr} - $\sigma_{\varphi\varphi}$ -Ebene verläuft (Ebener Spannungszustand).

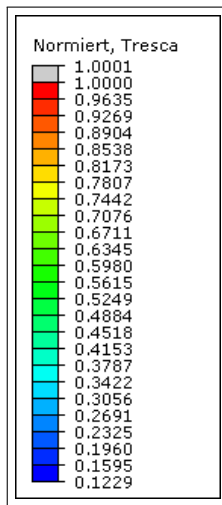
- **blau**.... $\frac{r}{a} = 1$
Zeigt den normierten Spannungsverlauf des Punktes, in welchem das Verhältnis von Radius zu Innenradius 1 beträgt.
- **rot**.... $\frac{r}{a} = 1.59$
Zeigt den normierten Spannungsverlauf des Punktes, in welchem das Verhältnis von Radius zu Innenradius 1.59 beträgt.
- **grün**.... $\frac{r}{a} = 2.295$
Zeigt den normierten Spannungsverlauf des Punktes, in welchem das Verhältnis von Radius zu Innenradius 2.295 beträgt.

3.4. Einflüsse auf die numerische Analyse

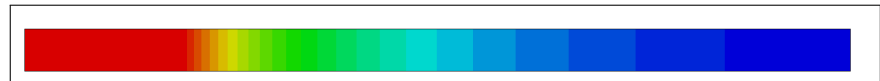
In diesem Kapitel 3.4 wird das zuvor schon, im Kapitel 3, beschriebene Modell verwendet. Ergänzend sei erwähnt, dass es sich hierbei nicht mehr um eine rein geometrisch lineare numerische Analyse handeln muss. Ebenso werden hier unterschiedliche Rohrlängen verwendet. Aus diesem Grund werden auch unterschiedliche Größen des Elements CAX8 verwendet. So werden bei dünnen Rohrscheiben Elemente der Größe $0.05mm$ am ganzen Querschnitt verwendet. In langen Rohren wird der Querschnitt zusätzlich in drei Bereiche unterteilt. Der erste Bereich erstreckt sich über den elastisch-plastischen Bereich, bis hin in den elastischen Bereich und wurde mit Elementen der Größe $0.05mm$ modelliert. Am Außenrand des dickwandigen Rohres befindet sich ein Bereich, in dem Elemente bis zu einer Größe von $0.1mm$ verwendet wurden. Zwischen diesen Bereichen liegt eine Zone in der der Abaqus Algorithmus selbstständig eine Übergang von den kleinen zu den großen Elementen schafft.

3.4.1. Unterschied zwischen geometrisch linearer und geometrisch nichtlinearer numerischer Analyse

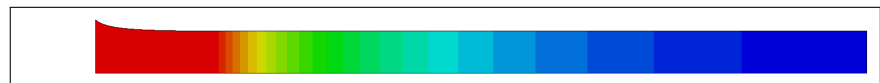
Abbildung 3.36 zeigt exemplarisch die Auswertung einer Rohrscheibe, mit einer normierten Länge von $\frac{l}{a} = 0.02$ (wobei hier l die Länge des Rohres bezeichnet) und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$. Dieses Modell wird mit einem normierten Druck von $p_N = 1$ belastet und einer geometrisch linearen sowie geometrisch nichtlinearen Finiten Elemente Analyse unterzogen. Die daraus erhaltenen, auf die Fließspannung normierten, Werte der Vergleichsspannung nach TRESCA, sind graphisch in den Abbildungen 3.36b bis 3.36f dargestellt. Um das Modell besser abbilden zu können, wurde nach der numerischen Auswertung die Länge des Modells, im Postprozessor, in Richtung der Rohrlängsachse um den Faktor 10 gestreckt. In den Abbildungen 3.36b und 3.36e sind die Deformationen des Modells nicht vergrößert dargestellt. Hier lässt sich kein eindeutiger Unterschied zwischen der geometrisch linearen und der geometrisch nichtlinearen numerischen Analyse ausmachen. Aus diesem Grund sind in Abbildungen 3.36c und 3.36f die Deformationen mit dem Faktor 100 vergrößert worden. Dieser Faktor wird im Folgenden als *deformation scale factor* bzw. D-Scale bezeichnet. Auch bei der vergrößerten Darstellung der Deformationen lässt sich kaum ein Unterschied auszumachen.



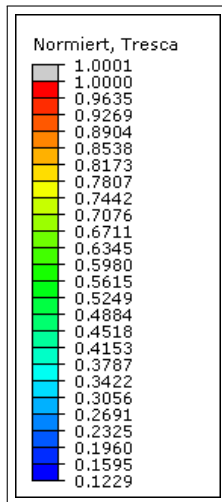
(a) Legende mit den normierten Werten, zugehörig zu den Abbildungen 3.36b und 3.36c



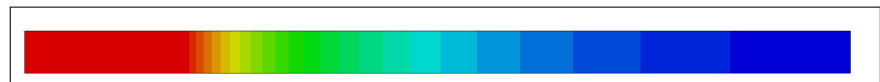
(b) Geometrisch nichtlineare Finite Elemente Analyse (D-Scale=1)



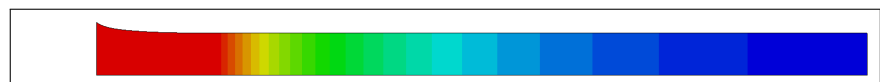
(c) Geometrisch nichtlineare Finite Elemente Analyse (D-Scale=100)



(d) Legende mit normierten Werten, zugehörig zu den Abbildungen 3.36e und 3.36f



(e) Geometrisch lineare Finite Elemente Analyse (D-Scale=1)



(f) Geometrisch lineare Finite Elemente Analyse (D-Scale=100)

Abbildung 3.36.: Finite Elemente Analyse eines Rohres mit der normierten Länge von $\frac{l}{a} = 0.02$, bei einem normierten Druck von $p_N = 1$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$. Die postnumerische Abbildung ist in Rohrlängsrichtung um den Faktor 10 skaliert, um eine bessere Darstellung zu erhalten.

Abbildung 3.37 zeigt exemplarisch die numerische Auswertung eines Rohrmodells mit den charakteristischen Abmessungen eines langen Rohres. Mit einer normierter Rohrlänge von $\frac{l}{a} = 3$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$. Die Belastung des Modells erfolgt an der Rohrrinnenwand mit einem normierten Druck von $p_N = 1$. Die numerische Auswertung wird einerseits geometrisch linear, sowie geometrisch nichtlinear, durchgeführt. Die daraus erhaltenen Werte, der Vergleichsspannung nach TRESCA, sind ebenfalls auf die Fließspannung normiert und in den Abbildungen 3.37b bis 3.37f dargestellt. Um die Darstellung kompakt zu halten, ist in diesen Abbildungen nur das für uns interessante Rohrende, geschnitten in der r-z Ebene, abgebildet. Wie auch schon im Modell zuvor, sieht man in Abbildung 3.37b und 3.37e, die mit einem D-Scale von 1 abgebildet wurden, keinen nennenswerten Unterschied zwischen den zwei Analysemethoden. Um doch einen etwaigen Unterschied auszumachen, ist in den Abbildungen 3.37c und 3.37f der D-Scale auf 100 gesetzt. Doch auch bei dieser vergrößerten Darstellung lässt sich kaum ein Unterschied feststellen.

Um den etwaigen Unterschied zwischen geometrisch linearer und geometrisch nichtlinearer numerischer Auswertung auszumachen, werden in Abbildung 3.38 die normierten Hauptnormalspannungen, der beiden zuvor aufgestellten Modelle, abgebildet. Die hier abgebildeten Werte sind dem, in Richtung der Rohrlängsachse lastfreien, Rohrende entnommen. Ebenso wie in den Darstellungen zuvor (Abbildung 3.37 und 3.36), lässt sich kaum ein Unterschied zwischen geometrisch linearer und geometrisch nichtlinearer Analyse ausmachen. Lediglich ein minimales Abweichen ist in der Bereichsgrenzen erkennbar. Wenn man jedoch die normierten Hauptnormalspannungen beider Modelle miteinander vergleicht, fällt auf, dass sich der Verlauf im elastisch-plastischen Bereich der beiden Modelle zueinander deutlich unterscheidet. Dies ist auf die Rohrlänge zurückzuführen und wird unter Punkt 3.4.2 genauer behandelt.

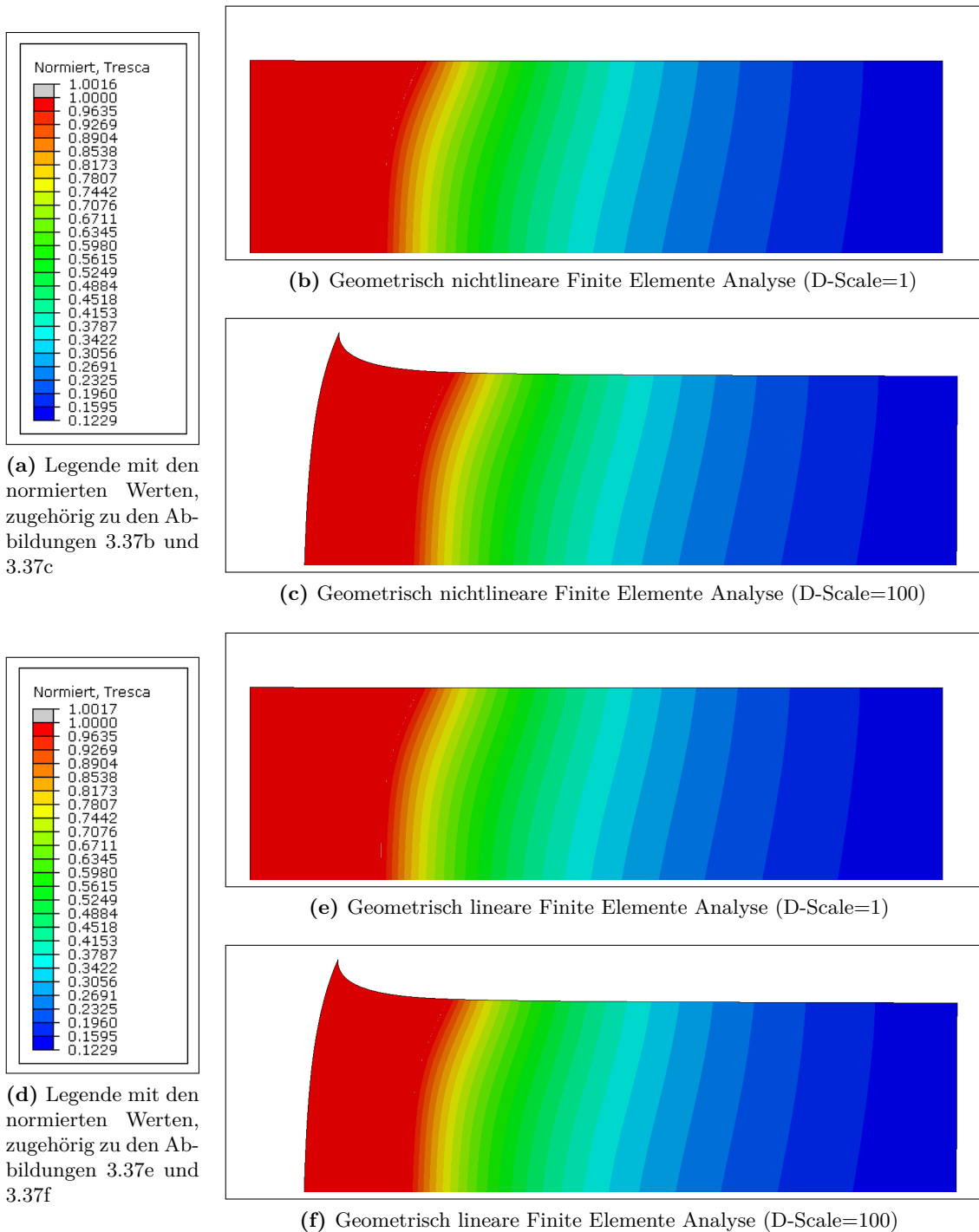


Abbildung 3.37.: Finite Elemente Analyse eines Rohres mit der normierten Länge von $\frac{l}{a} = 3$ bei einem normierten Druck von $p_N = 1$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$. In dieser Abbildung ist nur das Rohrende und nicht das ganze Modell dargestellt.

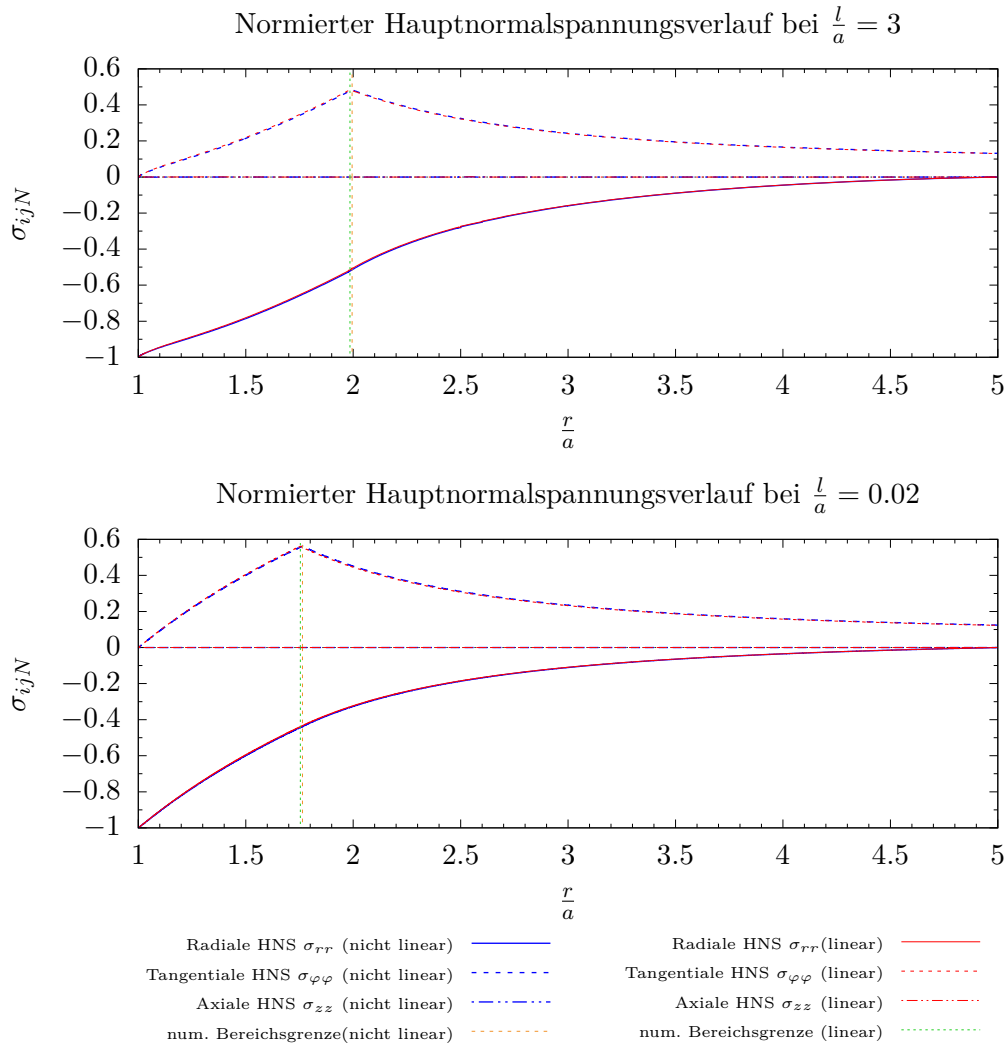
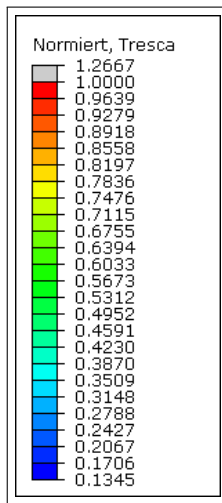
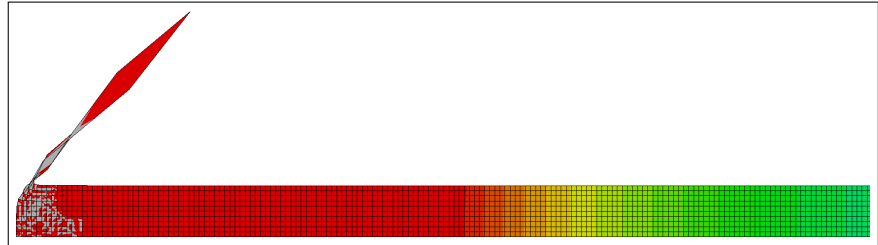


Abbildung 3.38.: Darstellung der geometrisch linearen, sowie geometrisch nichtlinearen numerisch berechneten, normierten Hauptnormalspannungen bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand ($\frac{b}{a} = 5, p_N = 1$)

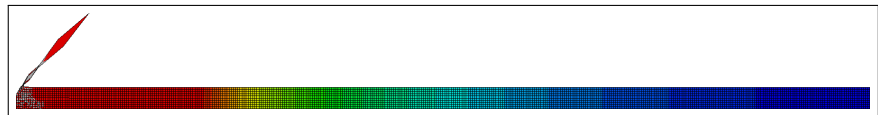
Ein eklatanter Unterschied zwischen der geometrisch linearen und der geometrisch nichtlinearen numerischen Analyse ist bei der Überschreitung der analytisch bestimmten Modellgrenze ($p \leq \sigma_F$) zu erkennen. In Abbildung 3.39 ist die geometrisch lineare, sowie geometrisch nichtlineare numerische Auswertung eines Modell mit einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$, einer normierten Länge $\frac{l}{a} = 0.1$ und einem normierten Innendruck von $p_N = 1.12727$, abgebildet. Abbildungen 3.39c und 3.39e zeigen einen Schnitt durch das ganze Modell entlang der r-z Ebene. Abbildung 3.39b und 3.39f zeigen jeweils einen Ausschnitt des Modells - die vergrößerte Darstellung der Rohrrinnenwand. Man sieht sofort, dass bei einer geometrisch linearen Analyse (Abbildung 3.39c bzw. 3.39b) das Material aufgrund der eventuell auftretenden Singularität sozusagen „herausschießt“. Wo hingegen sich, bei einer geometrisch nichtlinearen Analyse, eine „Materialnase“ ausbildet. Die Verformungen in Abbildung 3.39 sind nicht skaliert, sprich es liegt ein D-Scale=1 vor. Bei einer Belastung über einem normierten Druck von eins, muss die numerische Berechnung zusätzlich stabilisiert werden und es treten auch numerische Werte auf, die in dieser Form nicht zulässig sind. Werte die größer als die Fließspannung sind, bzw. in auf die Fließspannung normierter Form größer als eins sind, sind nicht zulässig, da im elastisch-plastischen Bereich der Wert der Vergleichsspannung nicht über den der Fließspannung hinauswachsen kann. In den Abbildungen sind solche Werte grau eingefärbt.



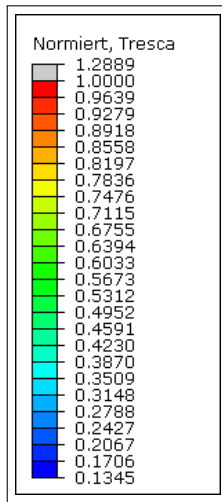
(a) Legende mit den normierten Werten, zugehörig zu den Abbildungen 3.39b und 3.39c



(b) Detaildarstellung der Abbildung 3.39c



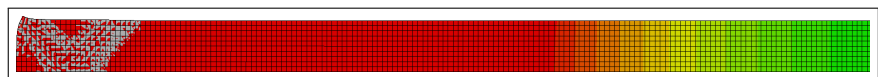
(c) Geometrisch linearen Finite Elemente Analyse



(d) Legende mit den normierten Werten, zugehörig zu den Abbildungen 3.39e und 3.39f



(e) Geometrisch nichtlineare Finite Elemente Analyse



(f) Detaildarstellung der Abbildung 3.39e

Abbildung 3.39.: Finite Elemente Analyse eines Rohres mit der normierten Länge von $\frac{l}{a} = 0.1$ bei einem normierten Druck von $p_N = 1.12727$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$. (D-Scale=1)

3.4.2. Einfluss der Modelllänge

In Abbildung 3.37, bzw. im zugehörigen Diagramm 3.38, ist der Unterschied zwischen kurzem und langem Rohr, in der Größe des elastisch-plastischen Bereichs, augenscheinlich geworden. Um diesen deutlicher herauszuarbeiten, wird ein Modell mit einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$, einem normierten Innendruck von $p_N = 0.9$ und mit einer normierten Länge von $\frac{l}{a} = 0.005$ dem gleichen Modell, mit einer normierten Länge von $\frac{l}{a} = 5$, gegenüber gestellt. Das Modell mit der normierten Länge von $\frac{l}{a} = 0.005$ wird zur besseren Darstellung, nach der numerischen Auswertung, in Rohrlängsachse mit dem Faktor 1000 gestreckt. Der *deformation scale factor* beträgt bei beiden Modelle eins. Abbildung 3.40b zeigt den Querschnitt einer, in Rohrlängsrichtung vergrößert dargestellten, dünnen Rohrscheibe. Abbildung 3.40c zeigt den Querschnitt eines dickwandigen Rohrs, mit einer ausreichend langen Rohrlänge. In beiden Abbildungen sind die normierten Werte der Vergleichsspannung nach TRESCA abgebildet. Es ist klar zu erkennen, dass bei der Zunahme der Rohrlänge sich die elastisch-plastische Zone ebenfalls vergrößert. In einer dünnen Scheibe prägt sich eine im Durchmesser kleinere elastisch-plastische Zone aus, als am Rand eines langen Rohres. Bei einem langen Rohr erkennt man aber auch, dass der Durchmesser der elastisch-plastischen Zone nicht konstant entlang der Rohrlängsachse bleibt, sondern sich mit zunehmendem Abstand zum Rohrende verkleinert und sich schließlich auf einen konstanten Wert einstellt.

Das Diagramm in Abbildung 3.41 stellt die am, in Richtung der Rohrlängsachse, lastfreien Rohrende entnommenen normierten Hauptnormalspannungen beider zuvor, in Abbildung 3.40, betrachteten Modelle gegenüber. Hier fällt der große Unterschied im Verlauf der Hauptnormalspannungen beider Modelle auf. So bildet sich bei dem längeren Rohr eine viel größere elastisch-plastische Zone am Rohrende als bei der dünnen Scheibe aus. Auch ist das Maxima der tangentialen Hauptnormalspannungen unterschiedlich. So fällt der Wert der maximalen tangentialen Hauptnormalspannung beim langen Modell geringer aus als beim kurzen Modell. Dies hat zur Folge, dass auch die radiale Hauptnormalspannung eine unterschiedliche Charakteristik aufweist. Die auftretenden numerische Ungenauigkeit im langen Modell hängt mit den unterschiedlich großen Elementen zusammen, die bei der Modellierung des langen Rohres verwendet wurden.

Bevor näher auf die Ursache dieser Rohrlängenabhängigkeit der elastisch-plastischen Zone eingegangen wird, werfen wir einen Blick auf Abbildung 3.42. Hierfür wird ein exemplarisches Modell mit einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$ und einem normierten Innendruck von $p_N = 0.9$ herangezogen um die Auswirkung der Rohrlänge auf die elastisch-plastische Zone am Rohrende zu zeigen. Abbildung

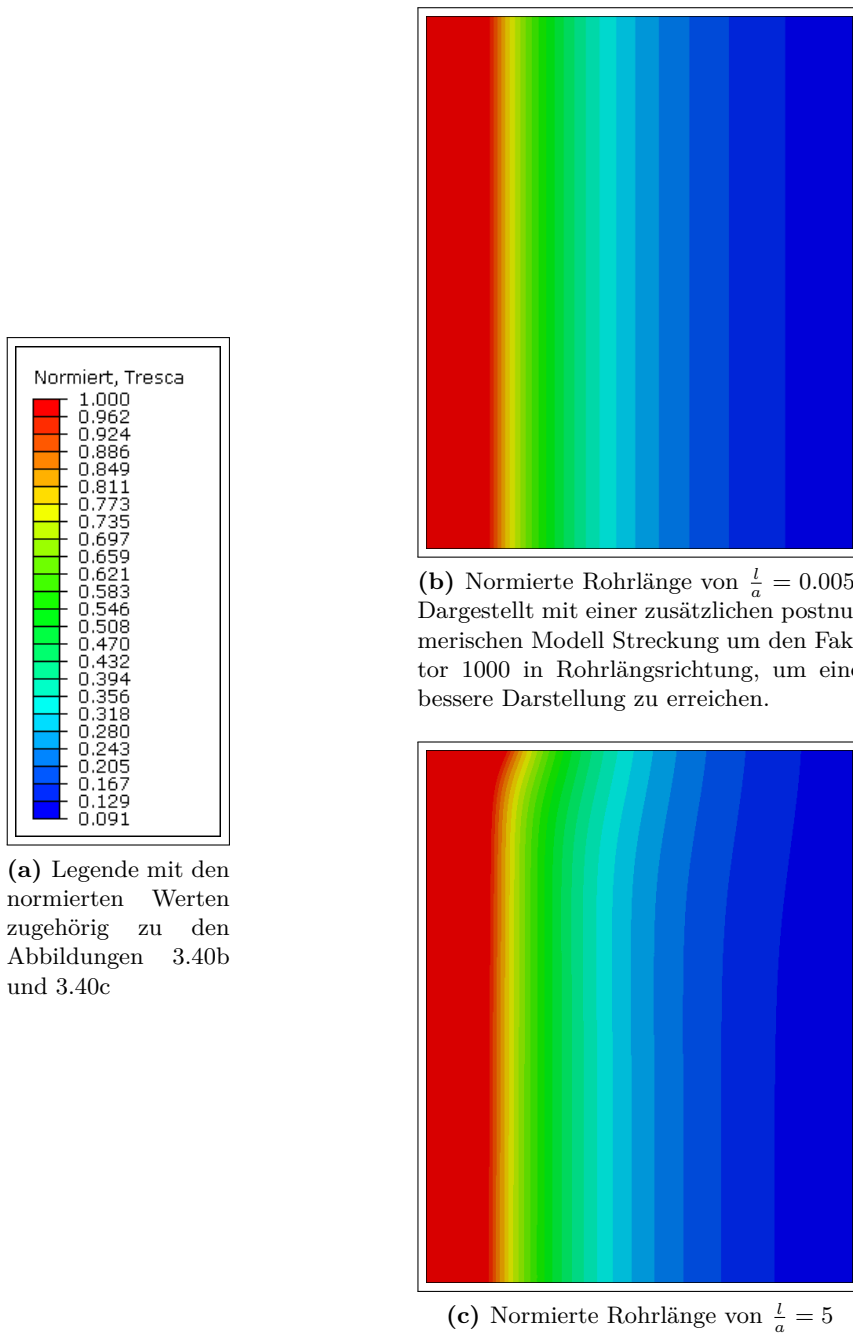


Abbildung 3.40.: Geometrisch lineare Finite Elemente Analyse einer elastisch-plastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand bei einem normierten Druck $p_N = 0.9$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$. Dargestellt mit D-Scale=1.

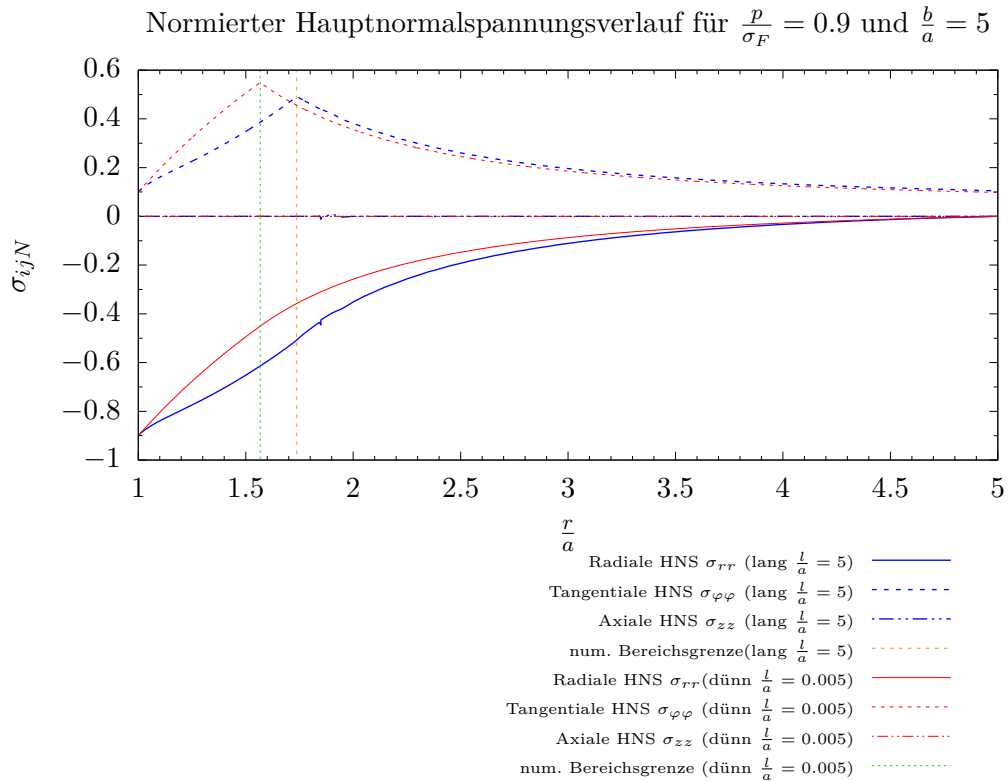


Abbildung 3.41.: Gegenüberstellung der normierten Hauptnormalspannungen eines geometrisch linear numerisch berechneten Modells, bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand mit den charakteristischen Werten ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.9$), bei einer unterschiedlichen Modelllänge.

3.42 stellt die Zunahme der normierten Rohrlänge auf der Abszisse mit den zugehörigen normierten Werte der Bereichsgrenze R auf der Ordinate dar. Hier lässt sich erkennen, dass bei einem ausreichend kurzen Rohrstück, die normierten Werte der Bereichsgrenze annähernd konstant bleiben. In diesem Fall kann man von einem Ebenen Spannungszustand einer dünnen Rohrscheibe ausgehen. Überschreitet die Rohrlänge einen kritischen Wert, so nimmt der Durchmesser der elastisch-plastischen Zone stark zu. Ab einer gewissen Rohrlänge, hat die Rohrlänge keinen weiteren Einfluss mehr auf eine weiter Zunahme des Durchmesser der elastisch-plastische Zone und es stellt sich wiederum ein konstanter Wert des Durchmesser der elastisch-plastischen Zone ein.

Im Anhang unter Punkt A.1 findet sich eine, zu Diagramm 3.42 zugehörige, Werteta-
belle.

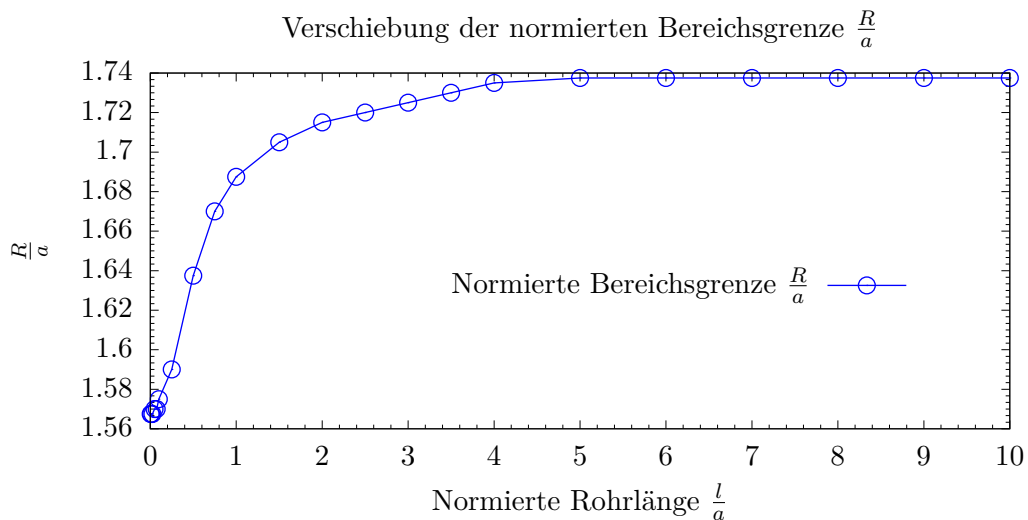


Abbildung 3.42.: Darstellung der numerisch geometrisch linear berechneten, auf die Fließspannung normierten Bereichsgrenze zwischen elastischer und elastisch-plastischer Zone in Abhängigkeit zur normierten Rohrlänge. Bei einer exemplarischen Modellvorgabe von $(\frac{b}{a} = 5, p_N = 0.9)$

Die Abhängigkeit des Radius, welcher den elasto-plastischen Bereich vom rein elastischen Bereich abgrenzt, von der Modelllänge bedarf einer näheren Betrachtung: Auf den ersten Blick erscheint es verwunderlich, dass die Länge des vom freien Rohrende ausgehend modellierten Rohrstückes einen Einfluss auf die Verhältnisse an der Oberfläche hat; liegt doch jedenfalls ein Ebener Spannungszustand direkt am Rohrende vor, und schließlich wurde ja eine analytische Lösung für den Ebenen Spannungszustand gefunden.

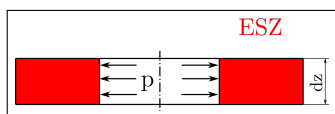
Sieht man aber näher hin, so werden bei der Analyse des Ebenen Spannungszustandes für eine dünne Scheibe von vornherein die Systemgleichungen für einen zwei-achsigen Spannungszustand herangezogen, und die Randbedingungen sind als Spannungsbedingungen in der betrachtete Ebene formuliert. Es wird also per se ein ebenes, d.h.

zweidimensionales Problem behandelt (welches im gegebenen Fall schließlich in einer Dimension, der Radialkoordinate, beschreibbar ist). Siehe hierzu Abbildung 3.43a. Bei der Analyse der Verhältnisse an der lastfreien Oberfläche eines dreidimensionalen Körpers liegen die Verhältnisse anders: Hier ist von den Systemgleichungen eines Spannungszustandes in einem dreidimensionalen Raum auszugehen, und der Umstand, dass an der Oberfläche ein Ebener Spannungszustand vorliegt, nimmt hier die Gestalt einer Randbedingung an.

Es liegen also grundsätzlich zwei verschiedene Problemklassen vor, wenn, einerseits, ein Ebener Spannungszustand für dünne Scheiben betrachtet wird und, andererseits, der Ebene Spannungszustand als Bedingung (!) an der lastfreien Oberfläche eines dreidimensionalen Körpers mit einem drei-achsigen Spannungszustand (der im gegebenen Fall in zwei Dimensionen, nämlich in radialer und axialer Richtung veränderlich, beschreibbar ist) einzuhalten ist.

Weitere numerisch berechnete Ergebnisse von ausgewählten Modellen, um den Einfluss der Modelllänge deutlich zu machen, finden sich im Anhang unter Punkt A.

Modell eines Ebenen Spannungszustandes



(a) Sehr dünne Scheibe mit belastungsfreien Oberflächen in Rohrlängsachse

$$\text{Randbedingung 1: } \sigma_{zz} = 0 \quad (3.1)$$

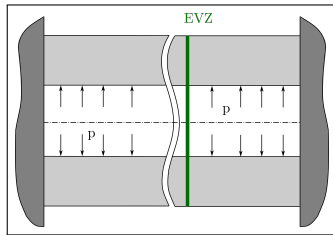
$$\text{Randbedingung 2: } \sigma_{zz} = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{Definition: } \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0 \quad (3.3)$$

Da es sich um eine sehr dünne Scheibe handelt und die Randbedingungen an den Rändern erfüllt sein müssen, ist hier auch im inneren der Scheibe die Spannungskomponente unveränderlich $\sigma_{zz} = 0$

Abbildung 3.43.: Auflistung der unterschiedlichen Modellbeschreibungen

Modell eines Ebenen Verzerrungszustandes

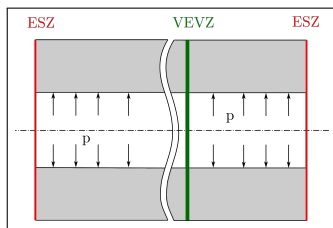


(b) Dickwandiges, langes, beidseitig eingespanntes Rohr

$$\text{Definition: } \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\varphi z} = 0 \quad (3.4)$$

Bei einem langen, beidseitig eingespannten, dickwandigen Rohr, kann man davon ausgehen, dass mittig ein Ebener Verzerrungszustand herrscht.

Modell des, in diesem Kapitel behandelten, Rohres



(c) Langes, dickwandiges Rohr mit lastfreien Oberflächen in Rohrlängsachse

$$\text{Randbedingung rechts, des rechten ESZ: } \sigma_{zz} = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{Randbedingung links, des rechten ESZ: } \sigma_{zz} \neq 0 \quad (3.6)$$

$$\text{Definition VEVZ: } \varepsilon_{zz} = \text{const.} \quad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\varphi z} = 0 \quad (3.7)$$

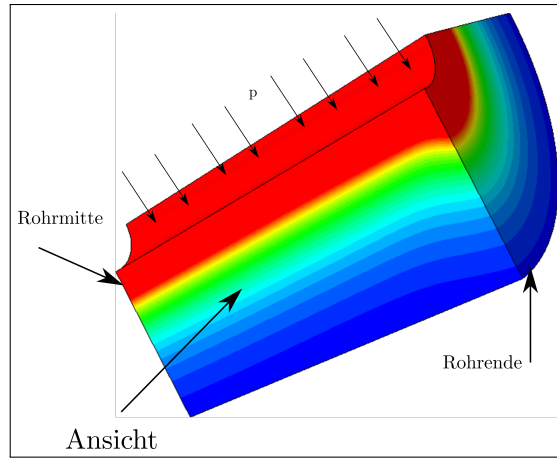
Mit VEVZ wird der Verallgemeinerte Ebene Verzerrungszustand abgekürzt. Man kann davon ausgehen, dass dieser in der Mitte eines langen, dickwandigen, nicht eingespannten und in Rohrlängsrichtung belastungsfreien Rohres auftritt. Das hier abgebildete Modell stellt den Zustand dar, der in diesem Kapitel bei den Modellen mit langer Rohrlänge auftritt. Die Definition des VEVZ ist [1] entnommen.

Abbildung 3.43.: Aufüstung der unterschiedlichen Modellbeschreibungen

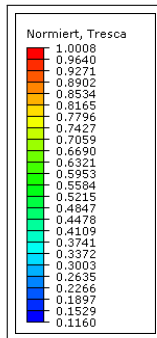
Abbildung 3.44 zeigt ein langes, dickwandiges Rohr mit, in Rohrlängsachse, lastfreien Oberflächen. Es hat die charakteristischen Abmessungen von einem Verhältnis Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$ und einer normierten Länge von $\frac{l}{a} = 10$. Die normierte Last die auf die Rohrrinnenwand wirkt, beträgt eins ($p_N = 1$). In den Abbildungen ist die Meridian-Fläche (r-z Ebene), des Rohrmodells abgebildet. Die linke Seite der Abbildungen stellt die Rohrmitte, in Längsrichtung, dar. Das eigentliche Rohrmodell ist somit doppelt so lang ($\frac{l}{a} = 20$). Siehe hierzu die Modellbildung in Kapitel 3. Die obere Kante der Meridian-Fläche stellt die Rohrrinnenwand dar. Hier wirkt der, auf die Fließspannung normierte, Innendruck von $p_N = 1$. Auf der rechten Seite der Abbildungen, ist das, in Rohrlängsrichtung, lastfreie Rohrende zu sehen.

Abbildung 3.44c zeigt die wirkende Vergleichsspannung nach TRESCA. Am Rohrende ist eine deutlich größere elastisch-plastische Zone auszumachen, als in der Rohrmitte. Vergleicht man diesen Umstand, mit den zuvor dargestellten Modellbeschreibungen, so erkennt man, der Abbildung 3.43c zufolge, dass es sich in der Rohrmitte um einen Verallgemeinerten Ebenen Verzerrungszustand handelt, und am Rohrende eine Art von Ebenen Spannungszustand vorliegt. Im Verallgemeinerten Ebenen Verzerrungszustand gilt $\sigma_{zz} \neq 0$. Abbildung 3.44g zeigt, dass an der Rohrrinnenwand eine axiale Druckspannung anliegt. Diese klingt mit zunehmender Nähe zum Rohrende ab und hat an der Oberfläche des Rohrendes den Wert null. Im Ebenen Spannungszustand einer dünnen, dickwandigen Rohrscheibe, bildet sich definitionsgemäß keine Schubspannung in der r-z Ebene aus. Alle Spannungskomponenten die in Rohrlängsrichtung zeigen, sind null. Anders ist dies bei einem langen, dickwandigen Rohr. Abbildung 3.44k zeigt deutlich, dass sich kurz nach dem Rohrende, ein lokales Maximum der Schubspannungskomponenten in der r-z Ebene wirkend, ausbildet. Diese zusätzlich auftretende Spannungskomponente beeinflusst den Verlauf der radialen, tangentialen und axialen Hauptnormalspannung am Rohrende und das Ergebnis der numerischen Analyse kann daher nicht mehr mit einem Ebenen Spannungszustand gleich gesetzt werden, der in einer dünnen, dickwandigen Rohrscheibe wirkt.

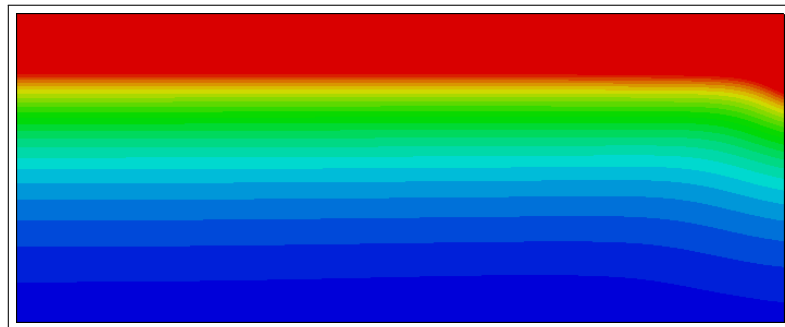
Durch die Vereinfachung, der schubspannungsfreien Meridian-Fläche, in Kapitel 1.9, beschreiben die analytisch aufgestellten Gleichungen, diesen Fall unzureichend genau.



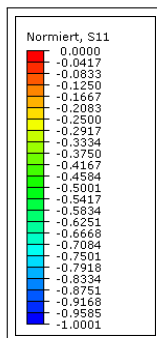
(a) Dreidimensionale Darstellung von 3.44c



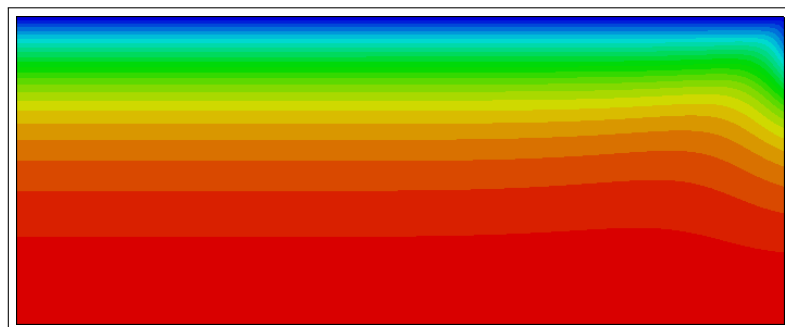
(b) Legende zu den Abbildungen 3.44a und 3.44c



(c) Darstellung der Vergleichsspannung nach TRESCA

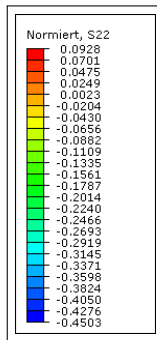


(d) Legende von 3.44e

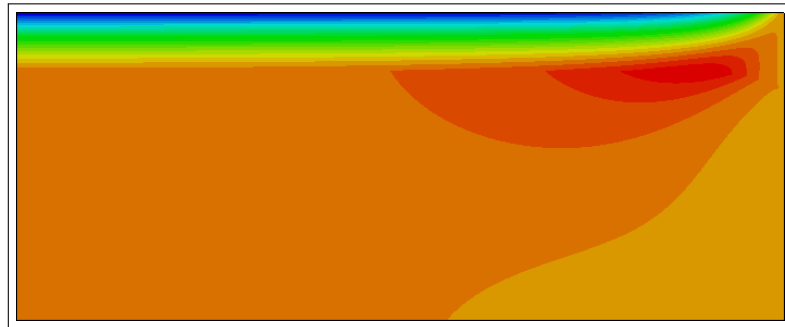


(e) Darstellung der radialen Hauptnormalspannung

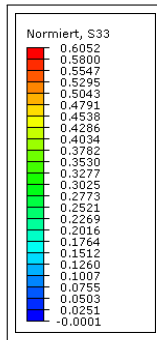
Abbildung 3.44.: Geometrisch lineare Finite Elemente Analyse einer elastisch-plastischen Beanspruchung im „Ebenen Spannungszustand“ bei einem normierten Druck $p_N = 1$, einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$ und einer normierten Länge $\frac{l}{a} = 10$. Dargestellt mit D-Scale=1.



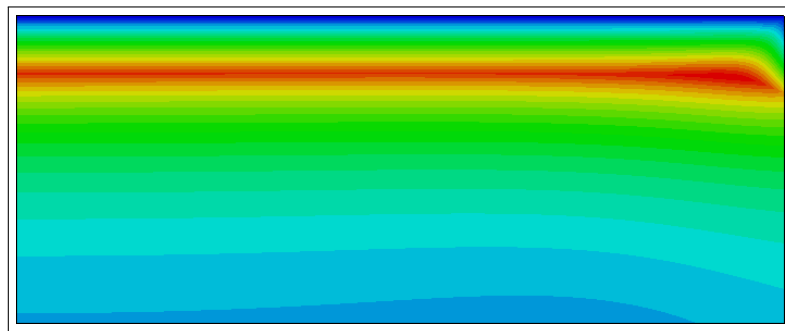
(f) Legende von 3.44g



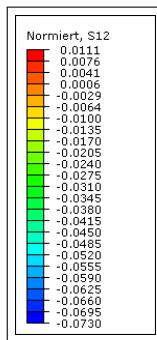
(g) Darstellung der axialen Hauptnormalspannung



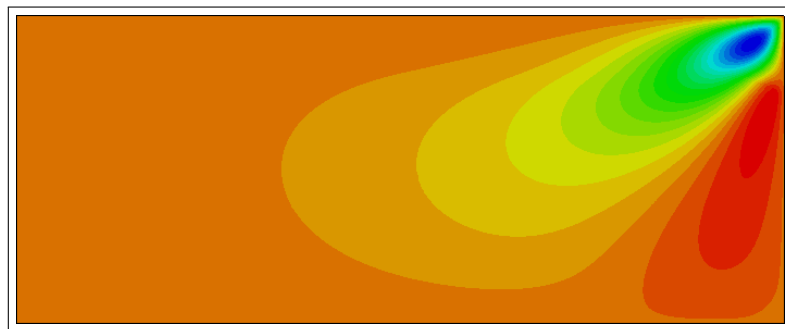
(h) Legende von 3.44i



(i) Darstellung der tangentialen Hauptnormalspannung



(j) Legende von 3.44k



(k) Darstellung der Schubspannung in der r-z Ebene

Abbildung 3.44.: Geometrisch lineare Finite Elemente Analyse einer elastisch-plastischen Beanspruchung im „Ebenen Spannungszustand“ bei einem normierten Druck $p_N = 1$, einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$ und einer normierten Länge $\frac{l}{a} = 10$. Dargestellt mit D-Scale=1.

4. Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Dieses Kapitel richtet sich nach [2] und wurde teilweise daraus übernommen.

4.1. Vergleich: Ebener Spannungszustand mit dem Ebenen Verzerrungszustand

Vergleicht man, anhand der analytisch errechneten Ergebnisse des dickwandigen Rohres, das Modell des Ebenen Spannungszustandes mit jenem des Ebenen Verzerrungszustandes aus [2], erkennt man, dass sich bei der Beschreibung der Hauptnormalspannungen, sowie der Eigenspannungen, lediglich die axiale Spannungskomponente unterscheidet. Die Gleichungen für die tangentialen und radialen Hauptnormalspannungen, sowie die der tangentialen und radialen Eigenspannungen, vom elastischen und elastisch-plastischen Bereich, sind beim Ebenen Verzerrungszustand und Ebenen Spannungszustand ident. Ebenfalls stimmt der Radius der elastisch-plastischen Zone R , an der das elastische zum elastisch-plastischen Materialverhalten übergeht, überein. Plastizieren setzt im Ebenen Spannungszustand beim gleichen Innendruck ein, wie im Ebenen Verzerrungszustand. Die beschreibende Gleichung für die Traglast des dickwandigen Rohres, kann ebenfalls aus beiden Modellbeschreibungen mit dem gleichen Resultat gewonnen werden. Dies ist nicht verwunderlich, da, bei der Annahme der Fließbedingung nach TRESCA, noch innerhalb der festgelegten Modellgrenzen die axiale Hauptnormalspannung keinen Einfluss auf das Fließen hat.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Ebenen Spannungszustand und Ebenen Verzerrungszustand besteht bei den zulässigen Innendrücken um die Gültigkeit der Vereinfachungen und der Modellbildung nicht zu gefährden. Das Modell mit der Betrachtungsweise Ebener Verzerrungszustand lässt, im Gegensatz zum Modell mit der Betrachtungsweise Ebener Spannungszustand, einen Innendruck größer σ_F zu. Beim Modell mit dem Ebenen Spannungszustand ist die Grenze des Modells erreicht, wenn

4.2. Unterschied zwischen geometrisch linearer und geometrisch nichtlinearer Betrachtung

der Innendruck gleich der Fließspannung σ_F ist. Der Grund hierfür ist, dass im Ebenen Spannungszustand die axiale Hauptnormalspannung null bleibt, wohingegen im Ebenen Verzerrungszustand, die axiale Hauptnormalspannung stets die mittlere Hauptnormalspannung bleibt, obgleich die tangential Hauptnormalspannung bei $p = \sigma_F$ in eine Druckspannung übergeht.

Weitere wesentliche Unterschiede zwischen Ebenen Spannungszustand und Ebenen Verzerrungszustand liegen vor, wenn man die Deformationen betrachtet: So sind beim Ebenen Spannungszustand definitionsgemäß die axialen Verzerrungen und somit auch die axialen Verschiebungen null, während die axialen Verschiebungen beim Ebenen Spannungszustand (also am Rohrende) nicht null sind. Ferner ist die radiale Aufweitung des Rohrendes beim Ebenen Verzerrungszustand geringer als beim Ebenen Spannungszustand. Somit ist bei einer hydraulische Autofrettage (konstanter Innendruck über die gesamte Rohrlänge) die Aufweitung am Rohrende größer als in weiterer Entfernung vom Rohrende, und es kommt auch zu einer Aufwölbung des Endquerschnittes, insbesondere in dem Bereich der Rohrinneenseite.

Um einen übersichtlichen Vergleich zwischen Ebenen Spannungszustand und Ebenen Verzerrungszustand aufzustellen, sind die beschreibenden Gleichungen in den nachfolgenden Tabellen 4.1 und 4.2 gegenübergestellt.

4.2. Unterschied zwischen geometrisch linearer und geometrisch nichtlinearer Betrachtung

Im Kapitel 3.4 wird der Unterschied zwischen einer geometrisch linearen und einer geometrisch nicht linearen numerischen Analyse deutlich gemacht. Es zeigt sich, dass bis hin zur analytisch bestimmten Modellgrenze ($p = \sigma_F$) die Ergebnisse der geometrisch linear numerischen Analyse kaum merkbar von den Ergebnissen der geometrisch nicht-linearen numerischen Analyse abweichen. Wird jedoch in der numerischen Berechnung ein Innendruck größer der analytisch bestimmten Modellgrenze, sprich $p > \sigma_F$, verwendet, so lässt sich ein deutlicher Unterschied erkennen. Bei der geometrisch linearen numerischen Analyse kommt es bei einem normierten Druck über eins, eventuell zu einer Singularität und das Material „schießt“ hinaus. Hingegen bei einer geometrisch nichtlinearen numerischen Analyse, bildet sich bei einem solchen Druck eine deutlich erkennbare Materialwölbung aus. Siehe hierzu die Abbildung 3.39.

4.3. Unterschied zwischen einem langen dickwandigen Rohr und einer dünnen dickwandigen Rohrscheibe

Die numerisch generierten Ergebnisse von Kapitel 3.4 zeigen, dass die Rohrlänge durchaus einen Einfluss auf die Größe der elastisch-plastischen Zone hat.

Ein kurzes, dickwandiges Rohr, bzw. eine Rohrscheibe, wird durch ihre beiden Randbedingungen ($\sigma_{zz} = 0$) zu einem zwei-achsigen Problem reduziert, siehe hierzu 3.43a, und bildet dadurch eine elastisch-plastische Zone mit geringem Durchmesser aus, als ein vergleichsweise langes Rohr.

Ein langes, dickwandiges Rohr mit belastungsfreien Rohrenden in Rohrlängsrichtung kann, wie in Abbildung 3.43c zu sehen ist, modelliert werden. Durch diese Betrachtungsweise entstehen für das Ebene Spannungszustand Modell zwei verschiedene Randbedingungen und es ist von einem drei-achsigen Spannungszustand in einem dreidimensionalen Raum auszugehen.

Der Unterschied zwischen den Radien des elastisch-plastischen Bereichs eines kurzen und langen Rohres, ist jedoch nicht nur von der Länge des Rohres abhängig, sondern auch vom aufgetragenen Innendruck. So hat der Radius des elastisch-plastischen Bereichs eines langen,¹ dickwandigen Rohres bei einem normierten Innendruck von $p_N = 0.5$ lediglich einen Zuwachs von 0.2451% wo hingegen an der analytisch gezeigten Modellgrenze ($p_N = 1$) der Zuwachs 14.408% beträgt. Siehe hierzu die Tabellen A.2 und A.3.

4.4. Grenzen der Autofrettage

Abbildung 4.1 stellt die Lastbereiche dar, die für eine Autofrettage, nach einer analytischen Modellbeschreibung, maßgeblich sind. Der untere Grenzdruck, in Abbildung 4.1 rot eingefärbt und mit *Fließbeginn* gekennzeichnet, ist jener minimale Innendruck, der für die Bildung einer elastisch-plastischen Zone im Material notwendig ist. Der obere Grenzdruck, in Abbildung 4.1 blau eingefärbt und mit *Fließbeginn durch die Eigenspannungen nach TRESCA* gekennzeichnet, ergibt sich durch die Bedingung, dass die Entlastung vollständig elastisch erfolgen soll. Das bedeutet, dass es nicht aufgrund der, bei der Entlastung entstehenden, Eigenspannungen erneut zum Plastizieren der Rohrwand kommen soll. Bis zu einem Verhältnis Außen- zu Innenradius von ca.

¹ langes Rohr: $\frac{l}{a} = 5$

$\frac{b}{a} = 2.22$ ist der maßgebliche obere Grenzdruck für eine Autofrettage die erreichbare Traglast nach TRESCA, nachzuschlagen in Kapitel 2.3.3 Gleichung (2.54). Erst bei einem Verhältnis Außen- zu Innenradius, von $\frac{b}{a} \geq 2.22$, ist der zuvor genannte obere Grenzdruck, der für eine vollständige elastische Entlastung verantwortlich ist, maßgeblich. Bei einem normierten Druck, von $\frac{p}{\sigma_F} = 1$, ist die Grenze des analytischen beschreibbaren dickwandigen Rohres im Ebenen Spannungszustand erreicht. Im Ebenen Verzerrungszustand existiert solch eine Grenze nicht. In der Betrachtungsweise des Ebenen Verzerrungszustandes ist das Diagramm in Abbildung 4.1 ebenso gültig, jedoch existiert diese Modellgrenze bei $\frac{p}{\sigma_F} = 1$ nicht und die Traglast kann auch bei einem normierten Druck größer eins bestimmt werden. Diesem Fall wurde hier mit der grün-strichlierten Linie Rechnung getragen.

Der zuvor erwähnte Wert des Verhältnis von Außen- zu Innenradius von 2.22 errechnet sich durch die Gleichsetzung der Gleichung, die zur Bestimmung des Traglastdruckes herangezogen wird, mit der Gleichung des maximalen Druckes, der für eine rein elastische Entlastung noch zulässig ist. Siehe hierzu Gleichung (4.1):

$$p_T = p_F^R \quad \rightarrow \quad \frac{b}{a} = 2.2184577 \quad (4.1)$$

Um möglichst großen Nutzen aus der Autofrettage zu ziehen, ist ein Verhältnis Außen- zu Innenradius von etwas größer als 2.22 zu wählen. Ab diesem Verhältnis ist es möglich, das volle Potential der eingebrachten Eigenspannungen auszunutzen. Ziel der Autofrettage ist nicht die Erhöhung der Traglast, sondern durch diese Behandlung soll ein möglichst hoher Betriebsdruck, ohne erneutes Plastizieren der Rohrwand auszulösen, erreicht werden. Um den Autofrettage-Vorgang möglichst effektiv einzusetzen, sollte die Wandstärke gering gehalten werden, sodass möglichst viel des Querschnitt ausgenutzt und plastiziert wird. Eine Erhöhung der Wandstärke bringt nur wenig Nutzen, da der Druck nicht beliebig gesteigert werden kann, ohne einen erneuten Fließvorgang bei Entlastung zu verursachen.

Gleichungen der Hauptnormalspannungen nach TRESCA				
	ESZ	EVZ		
allgemeine Form im elastischen Bereich				
$\sigma_{rr}^{(1)}$		$-p_F \frac{R^2}{R^2-b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$		radiale Hauptnormalspannung im elastischen Bereich
$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$		$-p_F \frac{R^2}{R^2-b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$		tangentiale Hauptnormalspannung im elastischen Bereich
$\sigma_{zz}^{(1)}$	0	$-p_F \frac{R^2}{R^2-b^2} 2\nu$		axiale Hauptnormalspannung im elastischen Bereich
elastischer Bereich mit eingesetztem Fließdruck				
$\sigma_{rr}^{(1)}$		$\frac{\sigma_F}{2} R^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right)$	(2.52)	radiale Hauptnormalspannung im elastischen Bereich
$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$		$\frac{\sigma_F}{2} R^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right)$	(2.52)	tangentiale Hauptnormalspannung im elastischen Bereich
$\sigma_{zz}^{(1)}$	0	(2.52)	$\nu \sigma_F R^2 \frac{1}{b^2}$	[2](4.13) axiale Hauptnormalspannung im elastischen Bereich
elastisch-plastischer Bereich				
$\sigma_{rr}^{(2)}$		$-p + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right)$	(2.46)	radiale Hauptnormalspannung im elastisch-plastischen Bereich
$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$		$-p + \sigma_F + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right)$	(2.47)	tangentiale Hauptnormalspannung im elastisch-plastischen Bereich
$\sigma_{zz}^{(2)}$	0	(2.48)	$f(r, \nu) \left(-p + \frac{\sigma_F}{2} + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)$	[2](4.42) axiale Hauptnormalspannung im elastisch-plastischen Bereich
p_F		$\frac{\sigma_F}{2} \left(1 - \frac{R^2}{b^2}\right)$	(2.51)	Druck vom elastisch-plastischen auf den elastischen Bereich
p_{FB}		$\frac{\sigma_F}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$	(2.38)	Minstdruck für den Fließbeginn
p_T		$\sigma_F \ln\left(\frac{b}{a}\right)$	(2.54)	Traglast
R		$a e^{\frac{1}{2} \left(\frac{2p}{\sigma_F} - 1 + \frac{R^2}{b^2}\right)}$	(2.53)	Radius der elastisch-plastischen Zone

Tabelle 4.1.: Übersichtstabelle der Gleichung zur Bestimmung der Hauptnormalspannungen im Ebenen Verzerrungszustand sowie im Ebenen Spannungszustand

Gleichungen der Eigenspannungen nach TRESCA				
	ESZ		EVZ	Beschreibung
elastischer Bereich				
$\sigma_{rr}^{\textcircled{1}R}$			$\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \left(\frac{\sigma_F}{2} \frac{R^2}{b^2} + p \frac{a^2}{a^2 - b^2}\right)$	(2.68) radiale Eigenspannung im elastischen Bereich
$\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{1}R}$			$\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \left(\frac{\sigma_F}{2} \frac{R^2}{b^2} + p \frac{a^2}{a^2 - b^2}\right)$	(2.69) tangentielle Eigenspannung im elastischen Bereich
$\sigma_{zz}^{\textcircled{1}R}$	0	(2.71)	$2\nu \left(\frac{\sigma_F}{2} \frac{R^2}{b^2} + p \frac{a^2}{a^2 - b^2}\right)$	[2](5.14) axiale Eigenspannung im elastischen Bereich
elastisch-plastischer Bereich				
$\sigma_{rr}^{\textcircled{2}R}$			$\sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) + p \frac{b^2(r^2 - a^2)}{r^2(a^2 - b^2)}$	(2.65) radiale Eigenspannung im elastisch-plastischen Bereich
$\sigma_{\varphi\varphi}^{\textcircled{2}R}$			$\sigma_F + \sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right) + p \frac{b^2(r^2 + a^2)}{r^2(a^2 - b^2)}$	(2.66) tangentielle Eigenspannung im elastisch-plastischen Bereich
$\sigma_{zz}^{\textcircled{2}R}$	0	(2.67)	–	[2] axiale Eigenspannung im elastisch-plastischen Bereich
p_F^R			$\sigma_F \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$	(2.76) maximaler Innendruck für den Fließbeginn bei Entlastung
$\lim p_F^R$			σ_F	(2.77) Grenzwert des maximalen Innendrucks

Tabelle 4.2.: Übersichtstabelle der Gleichungen zur Bestimmung der Eigenspannungen nach einer vollständigen elastischen Entlastung im Ebenen Verzerrungszustand sowie im Ebenen Spannungszustand

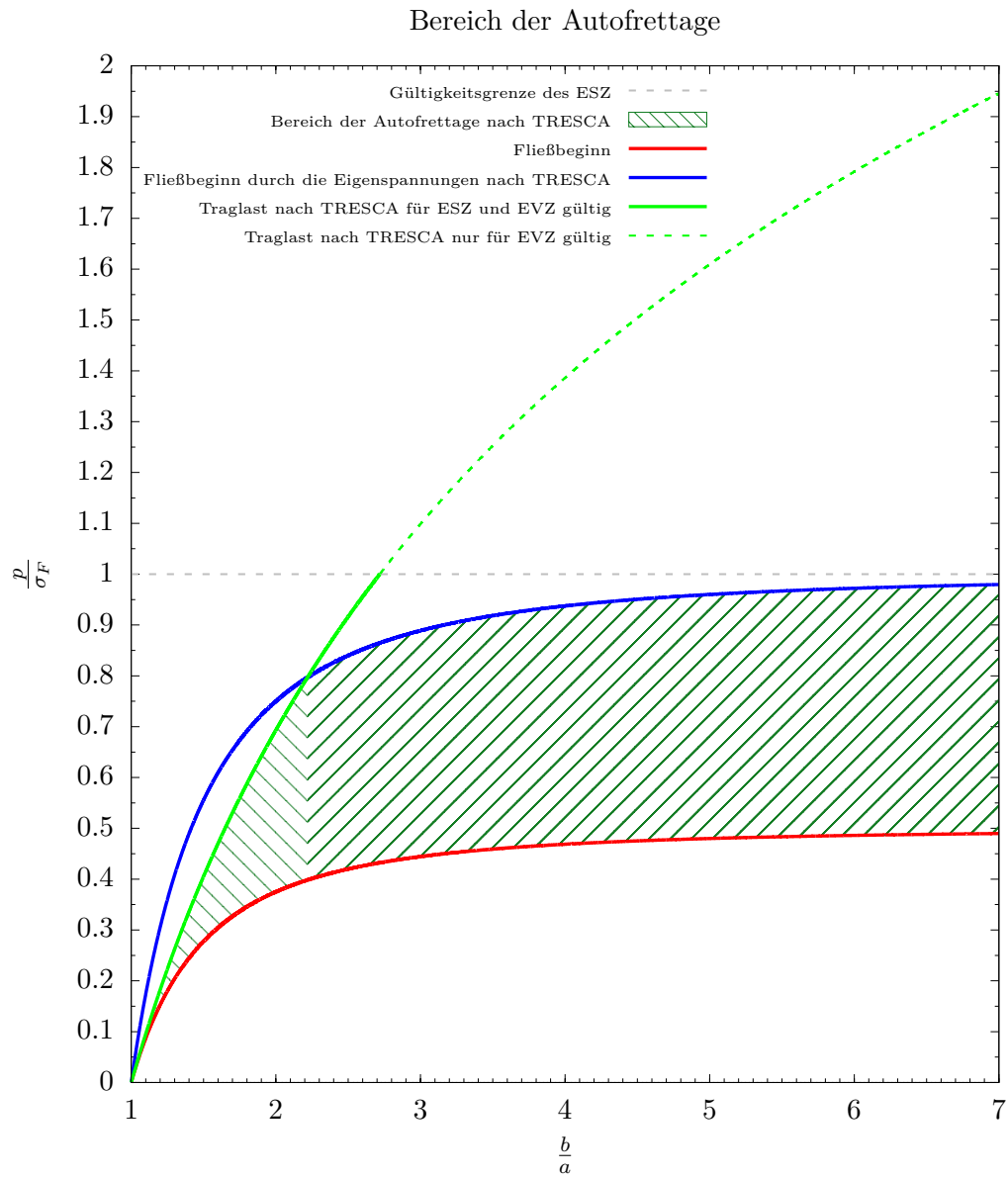


Abbildung 4.1.: Bereiche der Autofrettage im Ebenen Spannungszustand

A. Anhang

Bei den nachfolgenden Tabellen handelt es sich um ergänzende numerische Auswertungen mehrerer geometrisch linearer Analysen eines dickwandigen Rohres, betrachtet im Ebenen Spannungszustand, mit einem Außen- zu Innenradius Verhältnis von $\frac{b}{a} = 5$ und einer Elementgröße in der elastisch-plastischen Zone von 0.05. Das dickwandige Rohr wurde für die numerische Analyse wie in Kapitel 3 modelliert. Die Werte der normierten Hauptnormalspannungskomponenten und die Größe der elastisch-plastischen Zone sind dem, in Rohrlängsachse lastfreien, Rohrende entnommen.

Tabelle A.1 dient zur Erstellung der Abbildung 3.42 und beinhaltet die normierten Werte der verwendeten Modelllänge und die normierten Werte des Radius der elastisch-plastischen Zone, bei einer Belastung durch einen normierten Druck von $p_N = 0.9$. Weiters zeigt $\Delta \frac{l}{a}$ die Zunahme der normierten Rohrlänge in Prozent, bezogen auf die Startlänge von $\frac{l}{a} = 0.005$. Passend dazu gibt $\Delta \frac{R}{a}$ die Zunahme des Radius der elastisch-plastischen Zone in Prozent an. Hierbei wurden die Werte ebenfalls auf den ersten vorkommenden Wert ($\frac{R}{a} = 1.5675$) bezogen.

Tabelle A.2 zeigt die Zunahme des Radius der elastisch-plastischen Zone in Abhängigkeit zur normierten Modelllänge, bei einem normierten Druck von $p_N = 0.5$. Dieser entspricht einem Druck, der knapp über jenen Druck liegt, der für den Fließbeginn notwendig ist ($p_{FBN} = 0.48$). $\Delta \frac{l}{a}$ gibt die Zunahme der normierten Modelllänge in Prozent an. Die normierte Ausgangslänge wird mit 0.005 gewählt, da Tabelle A.1 gezeigt hat, dass es sich bei dieser Länge um eine ausreichend dünne Rohrscheibe handelt, um den Ebenen Spannungszustand gut abzubilden. Die Zunahme des normierten Radius $\Delta \frac{R}{a}$ wird ebenfalls in Prozent angegeben und ist auf den auftretenden Wert, bei einer normierten Modelllänge von $\frac{l}{a} = 0.005$, bezogen. Also auf $\frac{R}{a} = 1.02$.

Abbildung A.1 zeigt die normierten Hauptnormalspannungen, welche bei einem normierten Druck von $p_N = 0.5$, am, in Rohrlängsachse lastfreien, Rohrende auftreten. Dieses Diagramm ist der Tabelle A.2 zugehörig.

$p_N = 0.9$						
$\frac{l}{a}$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1
$\frac{R}{a}$	1.5675	1.5675	1.5675	1.57	1.57	1.575
$\Delta \frac{l}{a}$	+0%	+100%	+400%	+900%	+1400%	+1900%
$\Delta \frac{R}{a}$	+0%	+0%	+0%	+0.1595%	+0.1595%	+1.4354%
$\frac{l}{a}$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0
$\frac{R}{a}$	1.59	1.6375	1.67	1.6875	1.705	1.715
$\Delta \frac{l}{a}$	+4900%	+9900%	+14900%	+19900%	+29900%	+39900%
$\Delta \frac{R}{a}$	+0.4785%	+4,4657%	+6.5391%	+7.6556%	+8.7719%	+9.4099%
$\frac{l}{a}$	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0
$\frac{R}{a}$	1.72	1.725	1.73	1.735	1.7375	1.7375
$\Delta \frac{l}{a}$	+49900%	+59900%	+69900%	+79900%	+99900%	+119900%
$\Delta \frac{R}{a}$	+9.7289%	+10.0478%	+10.3668%	+10.6858%	+10.8453%	+10.8453%
$\frac{l}{a}$	7.0	8.0	9.0	10.0		
$\frac{R}{a}$	1.7375	1.7375	1.7375	1.7375		
$\Delta \frac{l}{a}$	+139900%	+159900%	+179900%	+19900%		
$\Delta \frac{R}{a}$	+10.8453%	+10.8453%	+10.8453%	+10.8453%		

Tabelle A.1.: Numerisch berechnete Werte der normierten Bereichsgrenze bei zunehmender normierter Rohrlänge, einem normierten Druck von $p_N = 0.9$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$.

Zusätzlich zu der tabellarischen (Tabelle A.3) und grafischen Auswertung (in Form eines Diagramms Abbildung A.1) zeigt Abbildung A.2 einen Schnitt durch das Modell entlang der r-z Ebene. Bei der Darstellung von A.2b wurde postnumerisch das Modell entlang der Rohrachse um den Faktor 1000 gestreckt. Die Deformationen sind mit dem Faktor D-Scale=1 abgebildet. In Abbildung A.2c wurde auf eine postnumerische Streckung verzichtet.

$p_N = 0.5$		
$\frac{l}{a}$	0.005	5
$\frac{R}{a}$	1.02	1.0225
$\Delta \frac{l}{a}$	+0%	+99900%
$\Delta \frac{R}{a}$	+0%	+0.2451%

Tabelle A.2.: Numerisch berechnete Werte der normierten Bereichsgrenze, bei einer zunehmenden normierten Rohrlänge, einem normierten Druck von $p_N = 0.5$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$.

$p_N = 1$		
$\frac{l}{a}$	0.005	5
$\frac{R}{a}$	1.7525	2.005
$\Delta \frac{l}{a}$	+0%	+99900%
$\Delta \frac{R}{a}$	+0%	+14.408%

Tabelle A.3.: Numerisch berechnete Werte der normierten Bereichsgrenze, bei einer zunehmenden normierten Rohrlänge, einem normierten Druck von $p_N = 1$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$.

$\frac{p}{\sigma_F}$	0.5	0.9	1
$\frac{R}{a}$	1.0225	1.7375	2.005
$\Delta \frac{p}{\sigma_F}$	+4.16666%	+87.5%	+108.333%
$\Delta \frac{R}{a}$	+2.25%	+73.75%	+100.5%

Tabelle A.4.: Numerisch berechnete Werte der normierten Bereichsgrenze, bei einer normierten Rohrlänge von $\frac{l}{a} = 5$ und einem zunehmenden normierten Druck. (Ausgangswert von $\frac{R}{a}$ ist der normierte Innenradius $\frac{a}{a} = 1$. Ausgangswert des normierten Drucks $\frac{p}{\sigma_F}$ ist jener normierte Druck, bei dem es erstmals zum Fließen kommt. Bei einem Außen- zu Innenradius Verhältnis von $\frac{b}{a} = 5$ hat dieser den Wert 0.48.

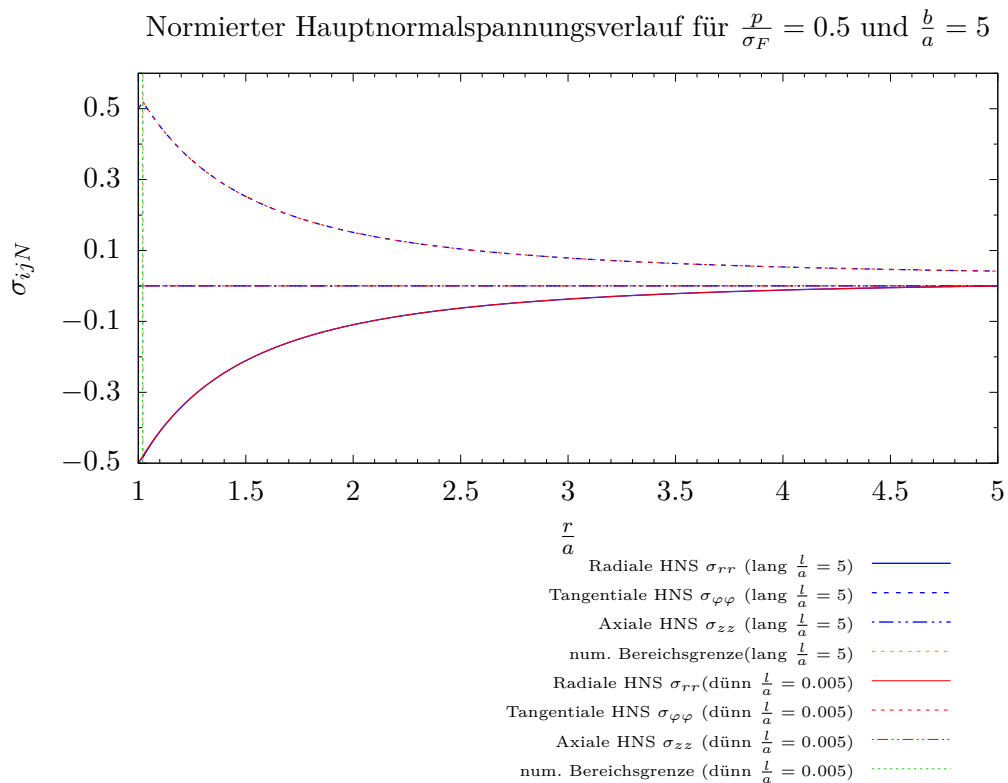
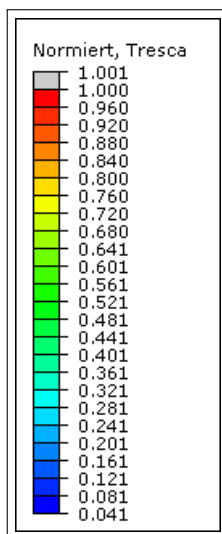
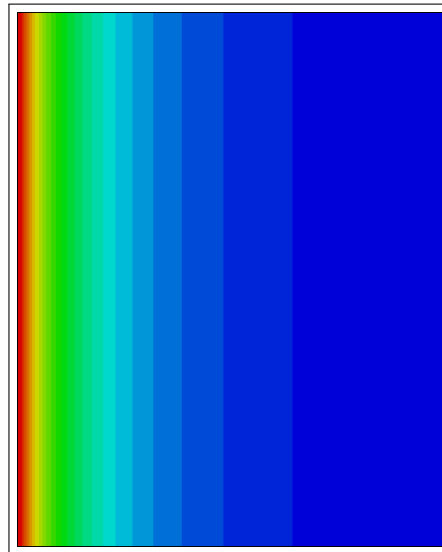


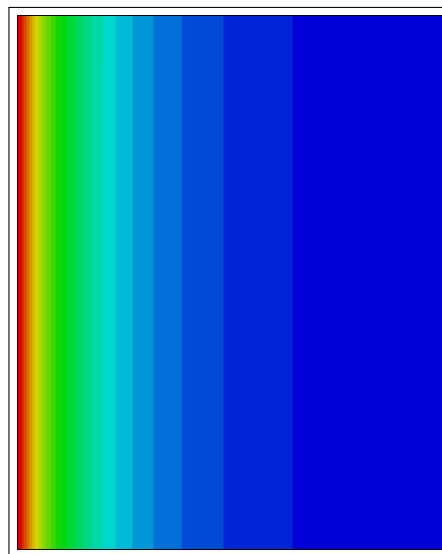
Abbildung A.1.: Gegenüberstellung der normierten Hauptnormalspannungen eines geometrisch linear berechneten Modells, bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im ebenen Spannungszustand, mit den charakteristischen Werten ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 0.5$) bei unterschiedlicher Modelllänge.



(a) Legende mit den normierten Werten, zugehörig zu den Abbildungen A.2b und A.2c



(b) Normierte Rohrlänge von $\frac{l}{a} = 0.005$. Dargestellt mit einer zusätzlichen postnumerischen Modellstreckung um den Faktor 1000 in Rohrlängsrichtung, um eine bessere Darstellung zu erreichen.



(c) Normierte Rohrlänge von $\frac{l}{a} = 5$

Abbildung A.2.: Geometrisch lineare Finite Elemente Analyse einer elastisch-plastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand bei einem normierten Druck $p_N = 0.5$ und einem Verhältnis von Außen- zu Innenradius von $\frac{b}{a} = 5$. Dargestellt mit D-Scale=1.

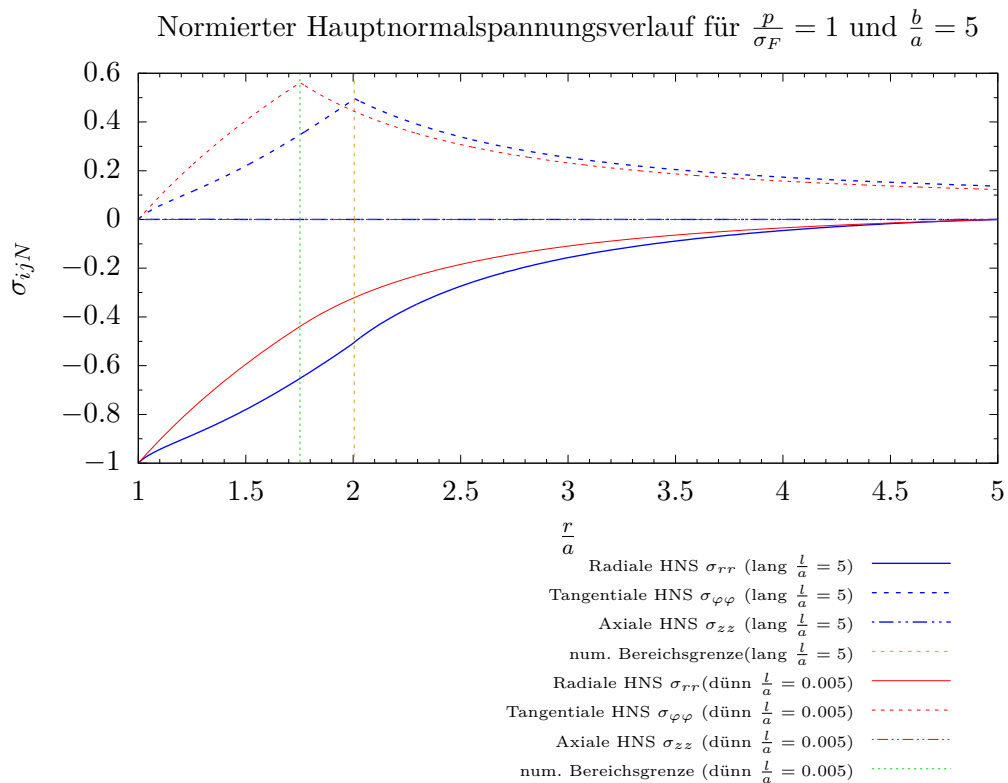


Abbildung A.3.: Gegenüberstellung der normierten Hauptnormalspannungen eines geometrisch linear berechneten Modells, bei einer elastisch-plastischen Beanspruchung im Ebenen Spannungszustand, mit den charakteristischen Werten ($\frac{b}{a} = 5$, $p_N = 1$) bei unterschiedlicher Modelllänge.

A.1. Herleiten des lokalen Gleichgewichts

Die Herleitung der lokalen Gleichgewichtsbedingung wird nach der Vorgehensweise von Parkus [8, S.73f] durchgeführt und ist gänzlich, mit zusätzlichen Modifikationen, aus [2] entnommen.

Zur Herleitung der lokalen Gleichgewichtsbedingung wird ein infinitesimal kleines Volumenelement in Zylinderkoordinaten, wie dargestellt in Abbildung A.4, betrachtet, für welches ein Kräftegleichgewicht $d\vec{F}_R = \vec{0}$ gegeben ist.

Die Spannungen $\vec{\sigma}$ werden mit deren zugehörigen Flächen multipliziert, die daraus entstehenden Kraftvektoren werden summiert und der so resultierende Kraftvektor muss in Summe mit dem Vektor einer allfälligen Volumskraft (Volumskraftdichte \vec{q}_V mal Volumen V) einen Nullvektor ergeben.

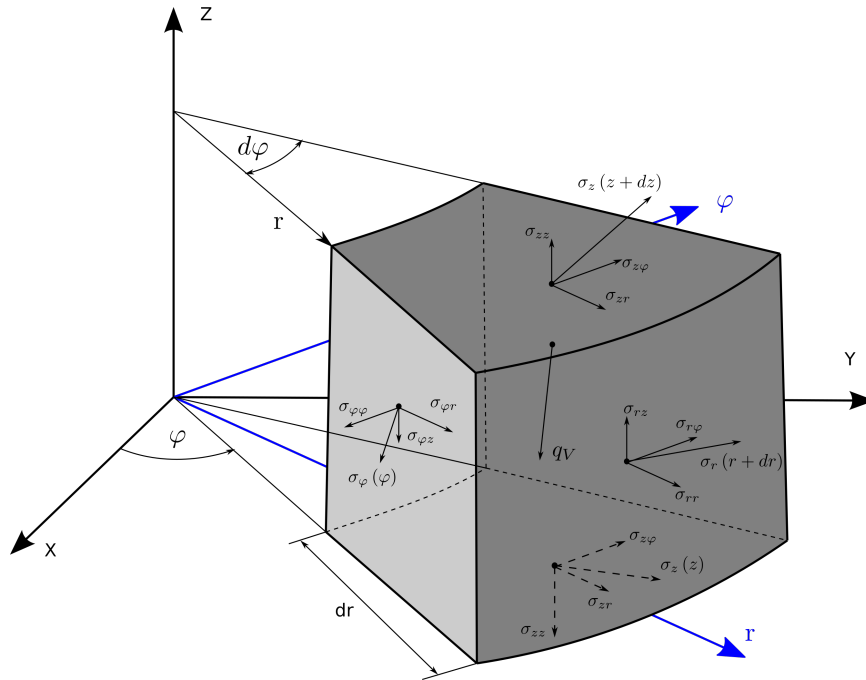


Abbildung A.4.: Lokales Gleichgewicht

$$d\vec{F}_R = -\vec{\sigma}_\varphi(\varphi)drdz + \vec{\sigma}_\varphi(\varphi + d\varphi)drdz + \vec{\sigma}_r(r + dr)(r + dr)d\varphi dz - \vec{\sigma}_r(r)(r)d\varphi dz + \vec{\sigma}_z(z + dz)r d\varphi dr - \vec{\sigma}_z(z)r d\varphi dr + \vec{q}_V dV = \vec{0} \quad (\text{A.1})$$

Mit Hilfe des Taylorpolynoms (A.2) [12, S.314] werden die Spannungen in (A.1) nach ihrer Potenz um i für $i \in r, \varphi, z$ entwickelt, und die Darstellung der Reihe wird nach dem linearen Term abgebrochen (A.3).

$$P_{Ty}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{Ty}^{(i)}}{i!} (x - a_{Ty})^i \quad (\text{A.2})$$

Das ausgeschriebene Taylorpolynom,

$$P_{Ty}(x) = f_{Ty}(a_{Ty}) + \frac{f_{Ty}(a_{Ty})'}{1!} (x - a_{Ty}) + \frac{f_{Ty}(a_{Ty})''}{2!} (x - a_{Ty})^2 + \dots + \frac{f_{Ty}(a_{Ty})^n}{n!} (x - a_{Ty})^n$$

angewandt auf die Spannungskomponenten,

$$\sigma_i(i + di) = \sigma_i(i) + \frac{\partial \sigma_i}{\partial i} di + \underbrace{\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial i^2} di^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \sigma_i}{\partial i^n} di^n}_{\text{In Weiterem nur noch als ... geschrieben}} \quad i \in r, \varphi, z \quad (\text{A.3})$$

führt auf eine Gleichgewichtsbeziehung:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_R &= drdz \left(-\vec{\sigma}_\varphi(\varphi) + \vec{\sigma}_\varphi(\varphi) + \frac{\partial \vec{\sigma}_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi \right) + rd\varphi dr \left(-\vec{\sigma}_z(z) + \vec{\sigma}_z(z) + \frac{\partial \vec{\sigma}_z(z)}{\partial z} dz \right) + \\ &\quad \vec{\sigma}_r(r) (r + dr) d\varphi dz + \frac{\partial \vec{\sigma}_r(r)}{\partial r} dr (r + dr) d\varphi dz - \vec{\sigma}_r(r) rd\varphi dz + \dots + \vec{q}_V dV \\ &= \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Das differentielle Volumen dV des infinitesimal kleinen Volumenelement ergibt sich in der Näherung durch die Multiplikation der Bogenlänge $r d\varphi$, mit der Höhe dz und der Tiefe des Elements dr .

$$dV = rd\varphi dr dz$$

Berücksichtigt man das Volumen und fasst die Gleichung (A.4) zusammen, so vereinfacht sich diese zu:

$$d\vec{F}_R = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\sigma}_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} dV + \frac{\partial \vec{\sigma}_z(z)}{\partial z} dV + \frac{\vec{\sigma}_r(r)}{r} dV + \frac{\partial \vec{\sigma}_r(r)}{\partial r} dV + \frac{\partial \vec{\sigma}_r(r)}{\partial r} \frac{1}{r} dV \frac{dV}{rd\varphi dz} + (\dots) dV^2 + \vec{q}_V dV = \vec{0} \quad (\text{A.5})$$

und weiterführend zu:

$$\frac{d\vec{F}_R}{dV} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\sigma}_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z(z)}{\partial z} + \frac{\vec{\sigma}_r(r)}{r} + \frac{\partial \vec{\sigma}_r(r)}{\partial r} + \underbrace{\frac{\partial \vec{\sigma}_r(r)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{dV}{rd\varphi dz}}_{=0 \text{ mit } dV \rightarrow 0} + (\dots) dV + \vec{q}_V = \vec{0} \quad (\text{A.6})$$

Mit dem Grenzübergang $dV \rightarrow 0$ entsteht eine lokale Gleichgewichtsbedingung in Vektorform:

$$\vec{f}_R = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\sigma}_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z(z)}{\partial z} + \frac{\vec{\sigma}_r(r)}{r} + \frac{\partial \vec{\sigma}_r(r)}{\partial r} + \vec{q}_V = \vec{0} \quad (\text{A.7})$$

Spaltet man die Spannungsvektoren $\vec{\sigma}_i$ mit $i \in \{r, \varphi, z\}$ in ihre Komponenten, abhängig vom zylindrischen Koordinatensystem, auf, ergibt dies:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_r &= \sigma_{rr} \vec{e}_r + \sigma_{r\varphi} \vec{e}_\varphi + \sigma_{rz} \vec{e}_z \\ \vec{\sigma}_\varphi &= \sigma_{\varphi r} \vec{e}_r + \sigma_{\varphi\varphi} \vec{e}_\varphi + \sigma_{\varphi z} \vec{e}_z \\ \vec{\sigma}_z &= \sigma_{zr} \vec{e}_r + \sigma_{z\varphi} \vec{e}_\varphi + \sigma_{zz} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Die Einheitsvektoren des zylindrischen Koordinatensystems, angeschrieben im kartesischen Koordinatensystem, lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Daraus resultierend ergeben sich, für die Ableitung der Einheitsvektoren, folgende Resultate:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial z} = 0 \quad \text{mit } i \in r, \varphi, z \quad (\text{A.11})$$

Berücksichtigt man die Aufspaltung der Spannungsvektoren nach (A.8) und die zugehörigen Eigenvektoren, ergibt sich aus Gleichung (A.7):

$$\begin{aligned} \vec{f}_R &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} \vec{e}_r + \sigma_{\varphi r} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \sigma_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \sigma_{\varphi \varphi} \vec{e}_r + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} \vec{e}_z \right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \\ &\quad \frac{1}{r} (\sigma_{rr} \vec{e}_r + \sigma_{r\varphi} \vec{e}_\varphi + \sigma_{rz} \vec{e}_z) + \\ &\quad \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} \vec{e}_z \right) + \vec{q}_V \\ &= \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Daraus lassen sich skalare, lokale Gleichgewichtsbedingungen anschreiben:

$$\vec{e}_r : \quad \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + q_{Vr} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{e}_\varphi : \quad \frac{1}{r} (\sigma_{\varphi r} + \sigma_{r\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + q_{V\varphi} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{e}_z : \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + q_{Vz} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Literaturverzeichnis

- [1] *Abaqus Manuals*, 6.14 Auflage. Dassault Systèmes, 2014.
- [2] S. Bauer, “Grenzbedingungen für hydraulische/pneumatische Autofrettage von dickwandigen Rohren”, Technische Universität Wien - Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, Bakkalaureatsarbeit, 2014.
- [3] J. Betten, Hrsg., *Kontinuumsmechanik - Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*, 2. Auflage. Heidelberg: Springer, 2001.
- [4] Dieter Radaj/Michael Vormwald, Hrsg., *Ermüdungsfestigkeit - Grundlagen für Ingenieure*, 3. Auflage. Heidelberg: Springer, 2007.
- [5] Dietmar Gross/Werner Hauger/Jörg Schröder/Wolfgang A. Wall, Hrsg., *Technische Mechanik Band 2: Elastostatik*, 9. Auflage. Heidelberg: Springer, 2007.
- [6] Hans Albert Richard/Manuela Sander, Hrsg., *Technische Mechanik. Festigkeitslehre*, 2. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [7] Hans-Jürgen Bargel / Günter Schulze, Hrsg., *Werkstoffkunde*, 10. Auflage. Heidelberg: Springer, 2008.
- [8] Heinz Parkus, Hrsg., *Mechanik der festen Körper*, 6. unveränderter Nachdruck der 2. Auflage. Wien: Springer, 2005.
- [9] Klaus Mollenhauer/Helmut Tschöke, Hrsg., *Handbuch Dieselmotoren*, 3. Auflage. Heidelberg: Springer, 2007.
- [10] F. G. Rammerstorfer, “Technische Plastizitätstheorie”, Technische Universität Wien - Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, Vorlesungsskript, 2011.
- [11] L. Schreiber, “Einführung in die Plastizitätstheorie”, Universität Kassel - Institut für Mechanik, Vorlesungsskript, 1997. [Online]. Available: <http://www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de/~lsch/plt/plt.pdf>
- [12] Tilo Arens/Frank Hettlich/Christian Karpfinger/Ulrich Kockelkorn/Hellmuth Stachel, Hrsg., *Mathematik*, 1. korrigierter Nachdruck der 1 Auflage. Heidelberg: Spektrum, 2008,2009.