



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

## DIPLOMARBEIT

# Freie Randwerte bei zweidimensionalen Ruinproblemen

Laura Ulrike Witting, BSc

Ausgeführt am Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik der Technischen  
Universität Wien  
unter der Anleitung von  
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

---

Wien, am

---

Laura Ulrike Witting, BSc

# Inhaltsverzeichnis

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2. Stochastische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1. Stochastische Prozesse . . . . .	4
2.1.1. Poissonprozess . . . . .	6
2.2. Martingale . . . . .	7
2.3. Stochastische Integration . . . . .	9
2.4. Ito-Prozesse und Ito-Formel . . . . .	11
2.5. Stochastische Differential- und Integralgleichungen . . . . .	12
<b>3. Risiko- und Ruintheorie</b>	<b>14</b>
3.1. Risikoprozess . . . . .	14
3.2. Ruinwahrscheinlichkeit . . . . .	15
3.2.1. Integrodifferentialgleichung zur Ruinwahrscheinlichkeit . . . . .	16
3.2.2. Lundberg Anpassungskoeffizient . . . . .	18
3.3. Approximation des klassischen Modells . . . . .	21
<b>4. Stochastische Kontrolltheorie</b>	<b>23</b>
4.1. Dynamische Programmierung . . . . .	24
4.1.1. Hamilton- Jacobi - Bellman Gleichung . . . . .	26
4.1.2. Verifikationstheorem . . . . .	28
4.1.3. Beispiel: Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit eines Versicherungsunternehmens . . . . .	31
<b>5. Numerische Methode</b>	<b>34</b>
5.1. Legendre Wavelet Approximation . . . . .	34
5.2. Fehlerabschätzung der approximierten Lösung . . . . .	36
5.3. Wavelet Collocation Methode . . . . .	36
5.4. Wavelet Collocation Methode mit singulärem Kern und uneigentlichem Integral . . . . .	38
<b>6. Optimale Steuerpolitik von zwei Unternehmen mit gleicher Volatilität</b>	<b>44</b>
6.1. Hamilton- Jacobi- Bellman Gleichung . . . . .	45
6.2. Optimale Steuerstrategie und maximale Überlebenswahrscheinlichkeit . . . . .	47

<b>7. Optimale Steuerpolitik von zwei Unternehmen mit unterschiedlicher Volatilität</b>	<b>49</b>
7.1. Hamilton- Jacobi- Bellman Gleichung . . . . .	50
7.2. Implizite Darstellung der Optimalen Steuerstrategie . . . . .	51
7.3. Numerische Analyse . . . . .	58
7.3.1. Kalibrierung der Input-Parameter der Wavelet Collocation Methode	59
7.3.2. Numerische Lösung der Integralgleichung . . . . .	70
<b>8. Zusammenfassung</b>	<b>75</b>
<b>A. Wichtige Resultate aus Maß - und Wahrscheinlichkeitstheorie</b>	<b>76</b>
A.1. Starkes Gesetz der großen Zahlen . . . . .	76
A.2. Konvergenzsätze . . . . .	76
A.3. Ungleichung . . . . .	77
<b>B. Wichtige Resultate aus der Theorie für partielle Differentialgleichungen</b>	<b>78</b>
<b>C. Matlabcodes</b>	<b>80</b>
<b>Listings von Matlabcodes</b>	<b>89</b>
<b>Literatur</b>	<b>90</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>94</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>95</b>

# 1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Thema aus der stochastischen Kontrolltheorie bearbeitet. Die stochastische Kontrolltheorie kann unter vereinfachten Annahmen ein theoretisches Modell liefern, wie ein Staat seine Steuerpolitik gestalten könnte. Im Allgemeinen hat die stochastische Kontrolltheorie zum Ziel, eine Variable einer bestimmten Einheit über ein Steuerungselement zu optimieren. Als Einheit ist vorstellbar ein Staat oder aber auch ein Unternehmen, dabei ist die Überlebenswahrscheinlichkeit oder das Vermögen als Variable anzusehen. Veränderbar ist das betrachtete Modell durch das Steuerungselement, wie zum Beispiel die Zusammensetzung von Aktien oder die Förderungen durch den Staat. So stellen McKean und Shepp in ihrem Artikel [22] ein vereinfachtes Modell vor: Eine Wirtschaft wird über zwei Unternehmen definiert, wobei die Vermögen beider Unternehmen jeweils mit Brown'schen Bewegungen bei gleicher Volatilität modelliert werden. Die staatliche Förderung in diesem Modell entspricht dem Steuerungselement und wird über die Drift der Brown'schen Bewegung beschrieben. Eine positive Drift bedeutet eine Förderung, die nur einem Unternehmen zugutekommt. Als Variable zur Optimierung wird die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit beider Unternehmen herangezogen. Es wird somit ein zweidimensionales Ruinproblem betrachtet. Vereinfachend wird zudem unterstellt, dass es nur zwei Optionen für die Steuerung gibt: Ein sozialistisches Steuersystem, wobei nur das zum jeweiligen Zeitpunkt schwächere Unternehmen vom Staat unterstützt wird, oder ein kapitalistisches Steuersystem, welches nur das stärkere Unternehmen fördert. Was heuristisch schon zu vermuten ist, wird von McKean und Shepp mit Techniken aus der stochastischen Kontrolltheorie bewiesen: Um die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit beider Unternehmen zu maximieren, muss das sozialistische Steuersystem angewandt werden. Dabei wurde auch eine explizite Formel der gemeinsamen Überlebenswahrscheinlichkeit gefunden. Allgemeinere Formen dieses Modells mit mehr als durch zwei Brown'sche Bewegungen modellierten Untereinheiten wurden unter anderem von Autoren wie Aldous [2] Tang und Tsai [33] behandelt. In einem Artikel von Professor Grandits [9], der sich noch in Vorbereitung befindet, wird das Setting von McKean und Shepp verändert. Die Volatilität eines der beiden Unternehmen wird geringfügig erhöht und das sozialistische sowie das kapitalistische Steuersystem werden wie folgt angepasst. Im sozialistischen System wird das Unternehmen mit erhöhter Volatilität nun solange gefördert, bis sein Vermögen dasjenige des anderen Unternehmens zuzüglich eines vermögensabhängigen Schwellenwertes übersteigt. Mit dem zweidimensionalen Ruinproblem, formuliert durch partielle Differentialgleichungen, kann diese Funktion des Schwellenwertes implizit durch eine Integralgleichung dargestellt werden. Der Schwellenwert ist dabei ein freier Randwert der partiellen Differentialgleichungen. Ziel der hier vorliegenden Arbeit ist es, diese Funktion explizit durch ein numerisches Verfahren zu ermitteln. Solch ein Verfahren wurde

mit der Legendre Wavelet Collocation Methode gefunden. Hierfür zugrunde liegend ist der Artikel von Kumar, Manchanda und Pooja [17]. Aufgrund der Komplexität der Integralgleichung werden in der vorliegenden Arbeit zwei alternative Ausführungen dieser Methode hergeleitet und verglichen. Die Frage stellt sich, ob annähernd gleiche Lösungen gefunden werden können und die Resultate plausibel sind.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 werden Resultate aus der stochastischen Analysis, insbesondere stochastische Prozesse wie zum Beispiel Poissonprozesse und die Stochastische Integration mit Definitionen und dazu relevanten Sätzen vorgestellt. Dies stellt die Basis für die im folgenden verwendete Ruintheorie (Kapitel 3) und stochastischen Kontrolltheorie (Kapitel 4) dar. Die Ruintheorie liefert Resultate für die Überlebenswahrscheinlichkeit, insbesondere von Versicherungsunternehmen. Die stochastische Kontrolltheorie ermöglicht es, ein Modell zur Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit einer Einheit zu entwickeln. Als weitere Voraussetzung für Kapitel 7 wird in Kapitel 5 die numerische Theorie zur expliziten Lösung der Integralgleichung behandelt. Hier werden auch die beiden oben genannten alternativen Lösungsansätze neu hergeleitet. Kapitel 6 beschäftigt sich mit dem Artikel von McKean und Shepp [22] und seinen Resultaten. Die Veränderungen des Modells mit unterschiedlichen Volatilitäten nach Grandits [9] werden in Kapitel 7 beschrieben und eine implizite Darstellung des Schwellenwertes hergeleitet. Ein Hauptanliegen der vorliegenden Arbeit ist die Präsentation der numerischen Ergebnisse, die den Schwellenwert als Lösung haben. Im Anhang werden verwendete Sätze aus der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und verwendete Matlabprogramme aufgeführt. Alle Grafiken und Matlabprogramme wurden von mir erstellt und das Abbildungsverzeichnis wie auch das Listing für die Matlabprogramme sind nach der Zusammenfassung (Kapitel 8) zu finden.

## 2. Stochastische Grundlagen

In den folgenden Abschnitten werden die Grundlagen vorgestellt, die in der Risiko- und Ruintheorie sowie in der Stochastische Kontrolltheorie verwendet werden.

### 2.1. Stochastische Prozesse

Stochastische Prozesse sind zeitlich abhängige generierte Zufallsvariablen. Sie können unter anderem den Vermögensprozess oder einen Risikoprozess von Unternehmen, insbesondere von Versicherungen, darstellen. Referenzen in diesem Abschnitt sind [10], [7],[18] und desweiteren werden in Abschnitt 2.1.1 die Referenzen [24] [31][23] und [11] verwendet.

**Definition 2.1.1** (Stochastischer Prozess). *Ein stochastischer Prozess  $X$  ist eine Familie von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in T}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .*

In der Theorie der Stochastischen Prozesse gibt es wichtige Voraussetzungen, die einige stochastische Prozesse erfüllen sollen:

**Definition 2.1.2** (Pfad). *Sei  $\omega \in \Omega$  fixiert: Dann ist  $X_t(\omega)$  ein Pfad von  $X_t$ .*

**Definition 2.1.3** (Cadlag). *Angenommen fast alle Pfade von  $X_t$  sind rechtsstetig und der Limes von links existiert, dann heißt der Prozess cadlag. Falls alle Pfade stetig sind, heißt der Prozess stetig.*

**Definition 2.1.4** (Filtration). *Eine Familie  $(\mathcal{F}_t)_{t=0 \dots T}$  von Sigmaalgebren, die  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$  erfüllt, nennt man eine Filtration. In diesem Fall nennt man  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)_{t=0 \dots T}$  auch einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nehmen an, dass  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  und  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$  gilt.*

Eine Filtration kann auch als Informationsgewinn interpretiert werden. Dabei stellt jede Sigmaalgebra die Information zum Zeitpunkt  $t$  dar.

**Definition 2.1.5** (adaptiert). *Ein Stochastischer Prozess  $X = (X_t)_{t \in T}$  ist adaptiert bezüglich einer Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t=0 \dots T}$ , wenn jedes  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -messbar ist.*

Adaptiertheit bedeutet also, dass durch Beobachtung des Prozesses nicht mehr Information gewonnen werden kann, als in der Filtration steckt.

**Definition 2.1.6** (vorhersehbar). *Ein Stochastischer Prozess  $X = (X_t)_{t \in T}$  heißt vorhersehbar bezüglich einer Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t=0 \dots T}$ , wenn jedes  $X_t$   $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar ist.*

Somit ist ein vorhersehbarer Stochastischer Prozess zum Zeitpunkt  $t - 1$  deterministisch bestimmbar.

**Definition 2.1.7** (progressiv messbar).  *$H$  ist progressiv messbar, falls gilt:*

$$H : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } H(\omega, t) := X_t(\omega)$$

wobei  $H(\omega, t)$  messbar bzgl  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$  ist.

**Definition 2.1.8** (übliche Bedingungen). *Eine Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t=0\dots T}$  genügt den üblichen Bedingungen falls folgendes gilt:*

1.  $\mathcal{F}_0$  enthält alle  $\mathbb{P}$ -Nullmengen
2.  $\mathcal{F}$  ist rechtsstetig, also  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$

Nun definieren wir eine Zufallsvariable, die einen Prozess stoppt.

**Definition 2.1.9** (Stoppzeit). *Eine Stoppzeit ist eine Zufallszeit, daher  $\tau : \Omega \rightarrow I \cup \{+\infty\}$ , wobei  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  gilt. Die Indexmenge  $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$   $n \in \mathbb{N}$  ist als Zeit zu verstehen.*

Die Bedingung  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  gibt uns an, ob der Prozess bis zum Zeitpunkt  $t$  gestoppt wird. Ein Beispiel für eine Stoppzeit ist die **erste Trefferzeit** für den Zustand  $a$ :  $\tau = \inf\{t | X_t = a > 0\}$  mit  $X_0 = 0$ .

Einer der bekanntesten stochastischen Prozesse ist die Brown'sche Bewegung. Diese wird unter anderem für die Risikomodellierung von Aktien oder die Approximation von Schäden in einer Versicherung verwendet.

**Definition 2.1.10** (Brown'sche Bewegung). *Ein Stochastischer Prozess  $B(t, \omega)$  heißt Brown'sche Bewegung, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:*

1.  $\mathbb{P}\{\omega, B(0, \omega) = 0\} = 1$
2. Für alle  $0 \leq s < t$  ist die Zufallsvariable  $B(t) - B(s)$  normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $t - s$ , d.h.  $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
3.  $B(t, \omega)$  hat unabhängige Inkremente, d.h. für alle  $0 \leq t_1 \leq t_2 < \dots < t_n$  sind die Zufallsvariablen

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

unabhängig

4. Fast alle Pfade von  $B(t, \omega)$  sind stetig, d.h.

$$\mathbb{P}[\omega; B(\bullet, \omega) \text{ ist stetig} ] = 1$$

**Definition 2.1.11** (Brown'sche Bewegung mit Drift). *Ein Prozess  $X_t = \mu t + \sigma B_t$  heißt Brown'sche Bewegung mit Drift mit  $\mu$  und  $\sigma$  als Konstanten, wobei  $B_t$  eine Brown'sche Bewegung nach 2.1.10 ist.*

**Definition 2.1.12** (geometrische Brown'sche Bewegung). *Der Prozess  $M_t = \exp(\frac{-2\mu}{\sigma^2} X_t)$  heißt geometrische Brown'sche Bewegung, wobei  $X_t$  einer Brown'schen Bewegung mit Drift gemäß Definition 2.1.11 folgt.*

Diese Art von Stochastischen Prozessen werden wir später weiter verwenden. Zunächst kommen wir zu einem weiteren Stochastischen Prozess, der eine wichtige Rolle bei Risikoprozessen eines Versicherungsunternehmens spielt.

### 2.1.1. Poissonprozess

In Versicherungsunternehmen wird die Anzahl der Schäden durch einen Zählprozess modelliert.

**Definition 2.1.13** (Zählprozess). *Seien  $S_i$  Schäden eines Versicherungsunternehmens, dann beschreibt  $N(t) = \#\{i : S_i \in [0, t]\}$  die Anzahl der Schäden im Zeitraum  $[0, t]$ .*

Der Schaden  $S_i$  trifft zu einem **Schadenszeitpunkt**  $\sigma_i$  mit **Zwischenankunftszeiten**  $T_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$  ein.

**Definition 2.1.14** (Erneuerungsprozess). *Seien  $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$  nichtnegative unabhängig identisch verteilte (iiv) Zufallsvariablen.  $\sigma_n = \sum_{u=1}^n T_u$   $n \geq 1$  ist die Erneuerungssequenz und der Zählprozess  $N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}$  heißt sein korrespondierender Erneuerungsprozess.*

Nehmen wir nun an, dass die Zwischenankunftszeiten einer Exponentialverteilung mit Intensitätsparameter  $\lambda > 0$  folgen. Eine besondere Eigenschaft der Exponentialverteilung ist die Gedächtnislosigkeit:

$$\begin{aligned} T_i &\sim \text{Exp}(\lambda) \\ \Rightarrow \\ \forall t, s > 0 : \mathbb{P}[T > t + s | T > t] &= \mathbb{P}[T > s] \end{aligned}$$

Die Anzahl der Schäden bildet einen Erneuerungsprozess. Mit Annahme der Exponentialverteilung der Zwischenankunftszeiten nennt er sich Poissonprozess.

**Definition 2.1.15** (Poissonprozess). *Sei  $\{N(t) : t \geq 0\}$  ein Zählprozess dessen Schadenankunftszeiten  $\{\sigma_n : n \geq 1\}, n \in \mathbb{N}$  einen Erneuerungsprozess bilden. Falls die Zwischenankunftszeiten  $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$  sind mit  $\lambda > 0$ , dann heißt  $\{N(t) : t \geq 0\}$  (homogener) Poissonprozess mit Intensität  $\lambda$ .*

Nachfolgend ein Theorem mit wichtigen Erkenntnissen für den Poissonprozess.

**Theorem 2.1.16.** *Sei  $\{N(t) : t \geq 0\}$  ein beliebiger Zählprozess. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $\{N(t)\}$  ist ein Poissonprozess mit Intensität  $\lambda$ .
2. Für alle  $t \geq 0$  gilt:  $N_t \sim Poi(\lambda t)$
3. Der Zufallsvektor  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  hat unter der Bedingung  $\{N_t = n\}$  dieselbe Verteilung wie ein Ordnungsvektor der Ordnungsstatistik von  $n$  unabhängigen über  $[0, t]$  gleichverteilten Zufallsvariablen.
4.  $\{N(t)\}$  hat stationäre und unabhängige Zuwächse und für  $h \downarrow 0$  gilt  $\mathbb{P}[N_h = 0] = 1 - \lambda h + o(h)$  und  $\mathbb{P}[N_h = 1] = \lambda h + o(h)$ .
5.  $\{N(t)\}$  hat stationäre und unabhängige Zuwächse und für jedes  $t \geq 0$  ist  $N_t$  eine  $Poi(\lambda t)$  verteilte Zufallsvariable.

Ein wichtiges Resultat dieses Theorems besagt, dass der Poissonprozess  $N_t \sim Poi(\lambda t)$  verteilt ist. Somit ergibt sich für den Erwartungswert und die Varianz

$$\mathbb{E}[N_t] = Var[N_t] = \lambda * t$$

Die einzelnen Schäden  $S_i$  sind uvi verteilt, und die gesamte Schadenlast, die ein Versicherungsunternehmen tragen muss, wird durch einen Zusammengesetzten Poissonprozess beschrieben.

**Definition 2.1.17** (Zusammengesetzter Poissonprozess).  $N_t$  ist ein Poissonprozess mit Intensität  $\lambda$  und  $S_1, S_2, ..$  uiv Zufallsvariablen, die unabhängig von  $N_t$  sind. Den stochastischen Prozess

$$X_t := \sum_{i=1}^{N_t} S_i$$

nennt man Zusammengesetzten Poissonprozess. Dieses Modell wird auch als kollektives Modell bezeichnet, da man nicht zwischen den einzelnen Versicherungspolizzen unterscheidet, sondern nur den Gesamtschaden über das Kollektiv betrachtet.

Mit der Turmeigenschaft des bedingten Erwartungswertes  $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|N_t]]$  und der Unabhängigkeit von  $N_t$  und  $S_i$  gilt für den Zusammengesetzten Poissonprozess folgender Erwartungswert und folgende Varianz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|N_t]] = \mathbb{E}[N_t \mathbb{E}[S]] = \mathbb{E}[N_t] \mathbb{E}[S] = \lambda t \mathbb{E}[S] \\ Var[X_t] &= \mathbb{E}[Var[X|N_t]] + Var[\mathbb{E}[X|N_t]] \\ &= \mathbb{E}[N_t Var[S]] + Var[N_t \mathbb{E}[S]] = \mathbb{E}[N_t] Var[S] + \mathbb{E}[S]^2 Var[N_t] = \lambda t \mathbb{E}[S^2] \end{aligned}$$

## 2.2. Martingale

Eine spezielle Klasse von Stochastischen Prozessen sind Martingale. Die zugrundeliegenden Referenzen sind [18], [10], [32].

**Definition 2.2.1** (Martingal). Sei  $(X_t)$  ein Stochastischer Prozess, der  $\mathcal{F}_t$ -adaptiert ist und für den gilt  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$  für alle  $t \in T$ .  $X_t$  heißt Martingal bezüglich  $\mathcal{F}_t$  für alle  $s \leq t \in T$ , wenn

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \text{ f.s.}$$

Die Brown'sche Bewegung und die geometrische Brown'sche Bewegung sind Martingale [18, S.18] [10].

**Definition 2.2.2** (Super(Sub)-Martingal). Sei  $(X_t)$  ein Stochastischer Prozess, der  $\mathcal{F}_t$ -adaptiert ist und für den gilt  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$  für alle  $t \in T$ .  $X_t$  heißt Super(Sub)-Martingal bezüglich  $\mathcal{F}_t$  für alle  $s \leq t \in T$ , wenn

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq (\geq) X_s \text{ f.s.}$$

**Definition 2.2.3** ( $L_p$ -beschränkt).  $X_t$  heißt  $L_p$ -beschränkt, wenn  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$ .

**Definition 2.2.4** (lokales Martingal). Ein Prozess  $X_t$  ist ein lokales Martingal, wenn eine Folge von Stoppzeiten  $\tau_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \rightarrow \infty$  fast sicher existiert und  $X_{t \wedge \tau_n}$  ein Martingal für feste  $n$  ist.

**Theorem 2.2.5** (Martingalkonvergenzsatz). Sei  $X_t$  ein  $L^1$ -beschränktes Supermartingal, d.h es gilt  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ . Dann gilt:  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$  existiert fast sicher und ist fast sicher endlich mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty$

**Lemma 2.2.6.** Sei  $X_t$  ein nicht-negatives Supermartingal, so existiert  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$  fast sicher.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t|] &= \mathbb{E}[X_t] \leq \mathbb{E}[X_0] \\ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X_t|] &\leq \mathbb{E}[X_0] < \infty \end{aligned}$$

Die Voraussetzung der  $L^1$ -Beschränkung ist erfüllt und man wendet nun den Martingalkonvergenzsatz 2.2.5 an.  $\square$

Im allgemeinen gilt keine  $L_1$ -Konvergenz. Jedoch gilt folgender Satz:

**Theorem 2.2.7** ( $L_p$ -Martingal Konvergenzsatz). Sei  $X_t$  ein Martingal mit  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$  mit  $p > 1$ . Dann gilt:  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$  existiert fast sicher und ist fast sicher endlich mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty$  und in  $L_p$ . Zudem gilt:  $X_s = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_s]$  fast sicher.

**Theorem 2.2.8** (Optimal Stopping Theorem). Sei  $M_t$  ein Martingal,  $\tau_1 < \infty$  und  $\tau_2 < \infty$  seien Stoppzeiten, dann gilt

$$\mathbb{E}[M_{\tau_1} | \mathcal{F}_{\tau_2}] = M_{\tau_1 \wedge \tau_2}$$

Gilt  $\tau_1 > \tau_2$

$$\mathbb{E}[M_{\tau_1} | \mathcal{F}_{\tau_2}] = M_{\tau_2}$$

## 2.3. Stochastische Integration

Um eine Integration bezüglich eines Stochastischen Prozesses durchzuführen, muss der Integrationsbegriff erweitert werden. Der Grund liegt in der unendlichen Variation von vielen Stochastischen Prozessen auf einem Intervall  $[a, b]$ :

Sei  $T = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$  eine Partition und  $B$  eine Brown'sche Bewegung, so hat  $B$  unendliche Variation nach [18]:

$$\sup_T Va(T, B) := \sup_T \sum_{i=1}^n |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| = \infty$$

Somit ist es nicht möglich, das Stochastische Integral pfadweise zu definieren. Wir definieren das Stochastische Integral für die Brownsche Bewegung nach Ito. Referenzen in Abschnitt 2.3, 2.4 und 2.5 sind [18] und [10]:

### Schritt 1: Einfache Integranden

Der Raum der einfachen Integranden mit der Partition  $\mathcal{T} = \{0 = t_0 < \dots < t_n = t\}$  sei

$$S_0 := \{H | H_t = \phi_1 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^n \phi_i I_{(t_{i-1}, t_i]}(t)\}$$

mit  $\phi_i \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t_{i-1}}, P)$

Das Ito-Integral bezüglich der Einfachen Integranden definiert sich wie folgt:

**Definition 2.3.1** (Ito-Integral mit Einfachen Integranden).

$$\int_0^t H_s dB_s := \sum_{i=1}^n \phi_i (B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}) \quad (2.1)$$

Es gilt für 2.3.1

- $\int_0^t H_s dB_s$  ist ein  $L^2$ -beschränktes Martingal
- **Ito – Isometrie** von  $L^2(ds \otimes \mathbb{P}) \rightarrow L^2(\mathbb{P}) : \mathbb{E}[(\int_0^t H_s dB_s)^2] = \mathbb{E}[(\int_0^t H_s^2 ds)]$

### Schritt 2: Adaptierte Integranden aus $\mathcal{H}$

Der Raum der adaptierten Integranden aus  $\mathcal{H}$  sei

$$\mathcal{H} := \{H | H \text{ adaptiert mit } \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds] < \infty\}$$

**Definition 2.3.2** (Ito-Integral mit adaptierten Integranden aus  $\mathcal{H}$ ).

$$\int_0^t H_s dB_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t H_s^{(n)} dB_s \quad (2.2)$$

wobei  $H^{(n)}$  eine Folge aus  $S_0$  ist.

*Idee zur Konstruktion von 2.2.* Angenommen:  $H \in \mathcal{H}$  und  $\exists H^{(n)} \in S_0$ , sodass  $\mathbb{E}[\int_0^t (H^{(n)} - H)^2 ds] \rightarrow 0$ . Zudem nehmen wir an, dass  $X_T^{(n)}$  eine stetige Cauchy-Folge in  $L^2(\mathbb{P})$  sei. Somit existiert genau ein stetiger Prozess  $X_t$  mit  $X_t^{(n)} \xrightarrow{L^2(\mathbb{P})} X_t \forall t \in [0, T]$ .  $\int_0^T H_s^{(n)} dB_s$  ist eine Cauchy-Folge in  $L^2(\mathbb{P})$  und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T H_s^{(n)} dB_s = \int_0^T H_s dB_s$   $\square$

Es gilt für 2.3.2

- $\int_0^t H_s dB_s$  ist ein  $L^2$ -beschränktes Martingal
- Linearität:  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, H^{(1)}$  und  $H^{(2)} \in \mathcal{H} : \int_0^T (\alpha_1 H_s^{(1)} + \alpha_2 H_s^{(2)}) dB_s = \int_0^T \alpha_1 H_s^{(1)} dB_s + \int_0^T \alpha_2 H_s^{(2)} dB_s$
- Ito-Isometrie:  $\mathbb{E}[(\int_0^t H_s dB_s)^2] = \mathbb{E}[(\int_0^t H_s^2 ds)]$
- Falls  $\tau$  eine Stoppzeit:  $\int_0^{t \wedge \tau} H_s dB_s = \int_0^t H_s I_{[0, \tau]}(s) dB_s$

**Schritt 3:** Lokalisation

Der Raum der fast sicheren  $L^2$ -adaptierte Integranden sei

$$\mathcal{L} := \{H | H \text{ adaptiert mit } \mathbb{P}[\int_0^t H_s^2 ds < \infty] = 1\}$$

und eine Stoppzeit

$$\tau_n = \inf\{t > 0 | \int_0^t H_s^2 ds = n\} \text{ mit } \inf \emptyset = T$$

**Definition 2.3.3** (Ito-Integral mit fast sicher  $L^2$ -adaptierten Integranden). *Es sei  $H_t^{(n)} = H_t I_{[0, \tau_n]}(t)$ , sodass  $H_t^{(n)} \in \mathcal{H}$  und  $H_t \in \mathcal{L}$ . Das Ito-Integral definiert sich dann als*

$$\int_0^t H_s dB_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t H_s^{(n)} dB_s \quad (2.3)$$

für  $t \leq \tau_n$  im Intervall  $[0, T]$

2.3 ist nicht notwendigerweise ein Martingal. Jedoch gilt für 2.3:

- $\int_0^t H_s dB_s$  ist ein lokales Martingal

Das stochastische Integral bzgl einer Brown'schen Bewegung mit Integranden aus  $\mathcal{L}$  ist nun definiert. Wir können den Begriff des stochastischen Integrals erweitern, indem wir die Brown'sche Bewegung durch ein stetig  $L^2$ -beschränktes Martingal  $M_t$  ersetzen.  $H_s$  schränken wir auf progressiv messbare Funktionen (siehe Definition 2.1.7) ein. Dazu definieren wir den Bracketprozess:

**Definition 2.3.4** (Bracketprozess).

$$[M]_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

mit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_i |t_{i+1} - t_i| = 0$

Die Ito-Isometrie schreibt sich nun wie folgt:

$$\mathbb{E}[(\int_0^t H_s dM_s)^2] = \mathbb{E}[(\int_0^t H_s^2 d[M]_s)]$$

Für den Bracketprozess der Brown'schen Bewegung gilt  $[B]_t = t$  [18, S.38] .

## 2.4. Ito-Prozesse und Ito-Formel

Wir stellen für den im Folgenden definierten Prozess eine verallgemeinerte Version der Kettenregel vor.

**Definition 2.4.1** (Ito-Prozess). *Ein Prozess  $X_t$  der Form*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \quad (2.4)$$

heißt Ito-Prozess, falls gilt:

1.  $X_0$  ist  $\mathcal{F}_0$ -messbar
2.  $K_s$  ist adaptiert mit  $\mathbb{P}[\int_0^t |K_s| ds < \infty] = 1$
3.  $H_s$  ist adaptiert mit  $\mathbb{P}[\int_0^t H_s^2 ds < \infty] = 1$

**Lemma 2.4.2.** *Die Darstellung in 2.4 ist eindeutig mit*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s = X'_t = X_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s \forall t$$

und es gilt

- $X_0 = X'_0$  fast sicher
- $K_s = K'_s (ds \otimes P)$  fast sicher
- $H_s = H'_s (ds \otimes dP)$  fast sicher

So ist eine Brown'sche Bewegung mit  $X_0 = 0$ ,  $K_s = 0$  und  $H_s = 1$  ein Ito-Prozess. Für Ito-Prozesse ergibt sich nun die verallgemeinerte Form für die Kettenregel:

**Theorem 2.4.3** (Ito-Formel). *Sei  $X_t$  ein Ito-Prozess und  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ . Dann ist  $f(X_t)$  wieder ein Ito-Prozess und es gilt:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds \quad (2.5)$$

Eine einfachere Darstellung von 2.4 ergibt sich mit

- $dX_s = K_s ds + H_s dB_s$

- $[X]_s = \int_0^t H_s^2 ds$
- $d[X]_s = H_s^2 ds$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d[X]_s \quad (2.6)$$

*Beweis.* siehe [18, S.96-102] □

**Bemerkung 2.4.4** (Verallgemeinerung der Ito-Formel). Sei  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in C^{1,2}$  und seine partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  seien stetig:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d[X]_s \quad (2.7)$$

## 2.5. Stochastische Differential- und Integralgleichungen

Wir können einen Ito-Prozess auch als Differential- bzw. Integralgleichung verstehen mit folgender Notation:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad \text{oder} \quad (2.8)$$

$$X_t = \zeta + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad (2.9)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} b &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \sigma &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \\ X_0 = \zeta &\mathcal{F}_0 \text{ - messbar} \end{aligned}$$

Wir definieren eine Lösung für 2.8:

**Definition 2.5.1** (Lösung der Stochastischen Differential- und Integralgleichung). Ein Prozess  $X_t$  heißt Lösung von 2.8 falls gilt:

1.  $X_t$  erfüllt 2.8
2.  $X_t$  ist adaptiert
3.  $\int_0^t |b^i(s, X_s)| ds < \infty$  fast sicher
4.  $\int_0^t \sigma^{i,j}(s, X_s)^2 ds < \infty$  fast sicher

Bei dieser Lösung unterscheiden wir zwei verschiedene Lösungsarten. Eine **starke Lösung**  $X_t$  ist adaptiert bezüglich der natürlichen Filtration der Brown'schen Bewegung. Ist die Filtration Teil der Lösung mit  $X_t$ , so spricht man von einer **schwachen Lösung**.

**Lemma 2.5.2** (Existenz und Eindeutigkeit). *In der Gleichung 2.8 gilt*

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K\|x - y\| \text{ gleichm\u00e4\u00dfig in } t \in [0, T]$$

und seien  $X_t, X'_t$  zwei L\u00f6sungen von 2.8, dann sind  $X_t$  und  $X'_t$  ununterscheidbar, also  $\mathbb{P}[X_t = X'_t \forall t] = 1$

Ununterscheidbarkeit bedeutet, dass die Pfade fast sicher gleich sind.

**Definition 2.5.3** (Modifikation).  $X'_t$  hei\u00dft Modifikation von  $X_t$ , falls gilt:  
 $\mathbb{P}[X_t = X'_t] = 1 \forall t$

Falls  $X_t$  und seine Modifikation  $X'_t$  rechts-oder linksstetig sind, dann sind  $X'_t$  und  $X_t$  ununterscheidbar.

**Definition 2.5.4** (Eindeutige starke L\u00f6sung). *Es gelte*

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K\|x - y\| \text{ und} \tag{2.10}$$

$$\|b(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + \|x\|) \tag{2.11}$$

mit einer Konstanten  $K$ . Wenn  $\mathbb{E}[\zeta^2] < \infty$ , dann hat 2.8 eine stetige eindeutige starke L\u00f6sung. F\u00fcr  $X_t$  gilt  $\mathbb{E}[\int_0^t \|X_s\|^2 ds] < \infty$ .

Die Gleichung 2.10 nennt man Lipschitzbedingung und Gleichung 2.11 nennt man Wachstumsbedingung.

## 3. Risiko- und Ruinthorie

Die Überlebenswahrscheinlichkeit stellt in dieser Arbeit eine wichtige Größe dar. Sie ist ein Begriff der Risiko- und Ruinthorie. Dabei werden Unternehmen mittels Risikoprozessen modelliert und eine Darstellung der Ruin- und der Überlebenswahrscheinlichkeit mittels Integrodifferentialgleichungen gewonnen. Zudem werden wir eine obere Schranke der Ruinwahrscheinlichkeit herleiten. Zunächst gehen wir von Versicherungsunternehmen aus, welche einem Poissonprozess folgen. Am Ende des Kapitels werden wir jedoch sehen, dass der Risikoprozess eines solchen Versicherungsunternehmens approximativ mit einer Brown'schen Bewegung mit Drift modelliert werden kann. Solch einen Prozess bezeichnet man auch als Diffusionsprozess. Die Ruin- und die Überlebenswahrscheinlichkeiten können hierfür explizit angegeben werden.

In Abschnitt 3.1 und 3.2 werden die Referenzen [3],[8],[27], [20] [35], in Abschnitt 3.2.1 [24] [8] Abschnitt 3.2.2[8], [23] und Abschnitt 3.3 [28] [13] [10] verwendet.

### 3.1. Risikoprozess

In der Risiko- und Ruinthorie liegt der Modellierung ein Versicherungsunternehmen zugrunde. Dabei werden eine Anfangsreserve, Prämienzahlungen und die Schäden berücksichtigt. Anfangsreserven und Prämienzahlungen sind im Vorhinein bestimmt und somit deterministische Werte. Die Gesamtschadenlast besteht aus der Summe aller Schäden mit seinen jeweiligen Schadenhöhen. Die Schadenhöhen sind nicht deterministisch und werden als Zufallsvariable modelliert. Auch die Schadenanzahl ist zufällig, zudem abhängig von der Zeit und wird somit durch einen stochastischen Prozess beschrieben.

**Definition 3.1.1** (klassischer Risikoprozess). *Der klassische Risikoprozess eines Versicherungsunternehmens definiert sich durch*

$$R(t, x) = x + ct + \sum_{i=1}^{N_t} S_i = x + ct + Z_t \quad (3.1)$$

wobei  $x \geq 0$  die Anfangsreserve und  $c \in \mathbb{R}$  die konstante Zeitsteigerung der Versicherungsprämie beschreibt. Die einzelnen Schadenhöhen  $S_i$  sind *u.i.v.* und unabhängig von der Zufallsvariable der Schadensanzahl  $N_t$ .  $N_t$  folgt einem Poissonprozess.  $Z_t$  beschreibt den Gesamtschaden.

Der Risikoprozess kann auch als die Entwicklung der Kapitalreserve über die Zeit eines Unternehmens angesehen werden. Es gibt einige Verallgemeinerungen dieses klassischen Modells, die versuchen die reale Welt genauer abzubilden. Es ist zum Beispiel

möglich, Störungen in der Prämienzahlung oder der Auszahlung der Schäden durch die Brown'sche Bewegung darzustellen. Diesen Prozess nennt man gestörten Risikoprozess. [8, Vgl. Abschnitt 4.1]

**Definition 3.1.2** (gestörter Risikoprozess). *Der gestörte Risikoprozess ist als*

$$R(t, x) = x + ct + \sum_{i=1}^{N_t} S_i + \sigma W_t \quad (3.2)$$

definiert, wobei  $\sigma > 0$  und  $W_t$  eine Brown'sche Bewegung ist.

## 3.2. Ruinwahrscheinlichkeit

Ein Unternehmen erleidet Ruin, wenn seine Kapitalreserve negativ wird, also  $R(t, x) < 0$  für ein  $t \geq 0$ . Im Zusammenhang damit ist es von Interesse des Unternehmens, die Ruinwahrscheinlichkeit zu ermitteln.

**Definition 3.2.1** (Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit). *Die Ruinwahrscheinlichkeit mit endlichem Zeithorizont  $t$  des Risikoprozesses  $R_t$  ist gegeben durch*

$$\psi(x, t) = \mathbb{P}[\inf_{0 \leq s < t} R(x, s) < 0 | R_0 = x] \quad (3.3)$$

Eine äquivalente Definition kann über dem Ruinzeitpunkt  $\tau = \inf\{t \geq 0 : R(x, t) < 0\}$  erfolgen:

$$\psi(x, t) = \mathbb{P}[\tau < t | R_0 = x] \quad (3.4)$$

Betrachten wir nun den unendlichen Zeithorizont:

**Definition 3.2.2** (Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit). *Die Ruinwahrscheinlichkeit mit unendlichem Zeithorizont des Risikoprozesses  $R_t$ , dass heißt ob überhaupt einmal ein Ruin stattfindet, ist gegeben durch*

$$\psi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\inf_{0 \leq t} R(x, t) < 0 | R_0 = x] = \mathbb{P}[\tau < \infty | R_0 = x] \quad (3.5)$$

In einem klassischen Risikoprozess nach 3.1.1 ist ein Ruin nur möglich, wenn ein Schaden und somit ein Sprung im Graphen des Risikoprozesses eintritt. In einem gestörten Risikoprozess 3.1.2 kann Ruin zusätzlich durch die Oszillation in der Brownschen Bewegung eintreten.

Eine weitere Eigenschaft im Zusammenhang mit Ruinwahrscheinlichkeiten ist die Sicherheitszuschlagsbedingung. Hierfür wird ein Theorem für den Erneuerungsprozess gebraucht.

**Theorem 3.2.3** (Starkes Gesetz der Erneuerungstheorie). *Sei  $X$  ein Erneuerungsprozess mit erwarteter Zwischenankunftszeit  $\lambda \in (0, \infty)$ , dann gilt*

$$\frac{X_t}{t} \rightarrow \lambda \text{ fast sicher für } t \rightarrow \infty$$

*Beweis.* siehe Beweis von Theorem 78 in [35] □

Wenden wir dieses Theorem auf den Risikoprozess  $R_t$  an. Zudem wenden wir das Gesetz der Großen Zahlen A.1.1 auf die Schäden  $S_i$  mit Erwartungswert  $\mathbb{E}[S_i] = \mu$  an.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{t} + c - \frac{N_t \sum_{i=1}^{N_t} S_i}{t N_t} \right) = c - \lambda\mu > 0$$

Damit  $R_t > 0$  für  $t \rightarrow \infty$  gilt, muss die Bedingung

$$c > \lambda\mu \tag{3.6}$$

gelten und somit

$$\mathbb{P}[\lim_{t \rightarrow \infty} R_t = \infty] = 1 \tag{3.7}$$

Mit äquivalenter Vorgehensweise für  $R_t < 0$  und  $t \rightarrow \infty$  folgt

$$\mathbb{P}[\lim_{t \rightarrow \infty} \inf R_t = -\infty] = 1$$

und somit

$$\psi(x) = 1 \text{ f.s. } \forall x \geq 0 \text{ wenn } c \leq \lambda\mu \tag{3.8}$$

Die Bedingung 3.6 wird auch Sicherheitszuschlagsbedingung genannt, da sonst fast sicherer Ruin eintritt.

### 3.2.1. Integrodifferentialgleichung zur Ruinwahrscheinlichkeit

Die Ruinwahrscheinlichkeiten mit unendlichem Zeitraum im klassischen Risikomodell erfüllen eine Integrodifferentialgleichung. Aus Theorem 2.1.16 wissen wir wenn  $N_t \sim Poi(\lambda)$ :

$$\mathbb{P}[N_t = k] = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & k = 0 \\ \lambda h + o(h) & k = 1 \text{ für } h \rightarrow 0 \\ o(h) & k \geq 2 \end{cases}$$

welches als infinitesimale Poisson- Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird [8].

Wenn ein Schaden in  $[0, h]$  eintritt, gibt es folgende Fälle, wobei  $r_0$  das Anfangskapital beschreibt:

- $X_1 \leq r_0 \rightarrow$  kein Ruin
- $r_0 < X_1 \leq r_0 + ch \rightarrow \exists s \in (0, h]$ , sodass Ruin sicher in  $[0, s)$  mit  $\psi = 1$  eintritt, aber unmöglicher Ruin in  $[s, h]$ .

- $X_1 > r_0 + ch \rightarrow$  sicher Ruin in  $[0, h]$  mit  $\psi = 1$

Die Wahrscheinlichkeit für Fälle mit  $k = 1$ , also genau ein Schaden, beträgt  $\lambda h$  für sehr kleine  $h$ . Zudem gilt für den Zeitpunkt  $h$ , wenn bis dahin kein Schaden auftritt  $R(h) = r_0 + ch$ . Mit diesen Fällen kann die Integrodifferentialgleichung leicht hergeleitet werden. Man setze  $r_0 + cs = x$  und somit  $s(x) = \frac{(x-r_0)}{c}$ .  $F(x)$  ist die Verteilungsfunktion der Schäden und  $f_T = \lambda \exp^{-\lambda t}$  ist die Dichte der Verteilungsfunktion der Zwischenankunftszeiten  $T$  die nach Definition 2.1.15 exponentialverteilt sind.

$$\begin{aligned} \psi(r_0) = & (1 - \lambda h)\psi(r_0 + ch) + \lambda h \left\{ \int_0^{r_0} \psi(r_0 + ch - x) dF(x) \right. \\ & + \int_{r_0}^{r_0+ch} \left[ \int_0^{s(x)} \lambda \exp^{-\lambda t} dt + \int_{s(x)}^h \lambda \exp^{-\lambda t} \psi(r_0 + ct - x) dt \right] dF(x) \\ & \left. + \int_{r_0+ch}^{\infty} dF(x) \right\} + o(h) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Formen wir dies um und nehmen an, dass  $\psi$  differenzierbar ist.

$$\begin{aligned} \psi(r_0) - \psi(r_0 + ch) = & (-\lambda h) \left\{ \psi(r_0 + ch) - \int_0^{r_0} \psi(r_0 + ch - x) dF(x) \right. \\ & - \int_{r_0}^{r_0+ch} \left[ \int_0^{s(x)} \lambda \exp^{-\lambda t} dt + \int_{s(x)}^h \lambda \exp^{-\lambda t} \psi(r_0 + ct - x) dt \right] dF(x) \\ & \left. - [1 - F(r_0 + ch)] \right\} + o(h) \end{aligned}$$

$$\psi'(r_0) = \frac{\lambda}{c} \left\{ \psi(r_0) - \int_0^{r_0} \psi(r_0 - x) dF(x) - [1 - F(r_0)] \right\} \text{ für } h \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

Diese Gleichung ist für gewisse Schadensverteilungen eindeutig lösbar. Dies ist der Fall, wenn die Schadensverteilung einer Linearkombination von Exponentialverteilungen oder einer Gammaverteilung folgt [8]. Im Falle einer Exponentialverteilungen mit Verteilungsfunktion [24]

$$f(x) = \frac{1}{\mu} \exp^{-\frac{x}{\mu}} \quad \forall x > 0$$

gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = \frac{\lambda \mu}{c} \exp^{-u \frac{c - \lambda \mu}{c \mu}}$$

Es folgt für die Überlebenswahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit

$$\delta(r_0) = \mathbb{P}[\tau = \infty | X_0 = x] = 1 - \mathbb{P}[\tau < \infty | X_0 = x] = 1 - \psi(r_0)$$

Wir können Gleichung 3.10 für die Überlebenswahrscheinlichkeit äquivalent umformulieren (siehe Beispiel 4.19 in [8]) in

$$\delta'(r_0) = \frac{\lambda}{c} (\delta(r_0) - \int_0^{r_0} \delta(r_0 - x) dF(x)) \quad (3.11)$$

Mit Hilfe der Gleichung 3.10 ermitteln wir eine Darstellung für die Überlebenswahrscheinlichkeit für das Anfangskapital  $r_0 = 0$ :  $\delta(0)$ . Mit der Konvergenz durch Montonie aus A.2.4 und 3.7 können wir nun

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \delta(r_0) = \delta(\infty) = 1 \quad (3.12)$$

folgern. Zudem formen wir Gleichung 3.11 weiter um. Im dritten Schritt wenden wir Partielle Integration an.

$$\begin{aligned} \delta'(r_0) &= \frac{\lambda}{c}(\delta(r_0) - \int_0^{r_0} \delta(r_0 - x)dF(x)) \\ &= \frac{\lambda}{c}(\delta(r_0) + \int_0^{r_0} \delta(r_0 - x)d(1 - F(x))) \\ &= \frac{\lambda}{c}([\delta(r_0) + \delta(0)(1 - F(r_0)) - \delta(r_0)] + \int_0^{r_0} \delta'(r_0 - x)(1 - F(x))dx) \\ &= \frac{\lambda}{c}([\delta(0)(1 - F(r_0))] + \int_0^{r_0} \delta'(r_0 - x)(1 - F(x))dx) \\ \int_0^t \delta'(r_0)dr_0 &= \frac{\lambda}{c}([\delta(0) \int_0^t (1 - F(r_0))] + \int_0^{r_0} \delta'(r_0 - x)(1 - F(x))dxdr_0) \\ \delta(t) - \delta(0) &= \frac{\lambda}{c}([\delta(0) \int_0^t (1 - F(r_0))]dr_0 + \int_{x=0}^t (1 - F(x)) \int_{r_0=x}^t \delta'(r_0 - x)dr_0dx) \\ &= \frac{\lambda}{c}([\delta(0) \int_0^t (1 - F(r_0))]dr_0 + \int_{x=0}^t (1 - F(x))[\delta(t - x) - \delta(0)]dx) \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_{x=0}^t (1 - F(x))\delta(t - x)dx \\ &\rightarrow \delta(r_0) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{r_0} (1 - F(x))\delta(r_0 - x)dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wir lassen  $r_0 \rightarrow \infty$  gehen. Benutzen wir 3.12 und setzen wir in 3.13 ein:

$$\begin{aligned} \delta(\infty) &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\delta(\infty) \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\delta(\infty)\mu \\ 1 &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\mu \end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine Darstellung der Überlebenswahrscheinlichkeit, wenn es kein Startkapital gibt:

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}\mu$$

### 3.2.2. Lundberg Anpassungskoeffizient

**Definition 3.2.4** (Anpassungskoeffizient). *Der Anpassungskoeffizient  $r$  ist die positive Lösung in  $v$  von*

$$\mathbb{E}[\exp^{vL_1}] = 1 \quad (3.14)$$

wobei  $L_t = Z_t - ct$  der Verlustprozess mit dem Gesamtschaden  $Z_t$  ist.

Wir benutzen die Definition der Momentenerzeugenden Funktion einer Zufallsvariablen  $X$

$$M_X(v) = \mathbb{E}[\exp^{vX}]$$

Setzen wir nun den Verlustprozess  $L_t$  in die Momentenerzeugende Funktion ein und setzen  $M_{L_t}(v) = 1$  für ein  $t > 0$

$$\begin{aligned} M_{L_t}(v) &= M_{Z_t - ct}(v) = e^{-vct} M_{Z_t}(v) = e^{-vct} \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{vZ_t} | N_t]] \\ &= e^{-vct} \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{vZ_t}]^{N_t}] \\ &= e^{-vct} \mathbb{E}[e^{\log(\mathbb{E}[e^{vZ_t}]^{N_t})}] \\ &= e^{-vct} M_{N_t}(\log(M_S(v))) \end{aligned}$$

Die Momentenerzeugende Funktion des Poissonprozesses ist  $M_{N_t}(v) = e^{\lambda t(e^v - 1)}$

$$M_{L_t}(v) = e^{-vct} e^{\lambda t(M_S(v) - 1)} = 1 \quad (3.15)$$

$$\Leftrightarrow M_S(v) = 1 + \frac{vc}{\lambda} \quad (3.16)$$

Der Anpassungskoeffizient  $r$  kann somit durch die Lösung der Gleichung 3.16 in  $v$  ermittelt werden.

Gehen wir davon aus, dass die Schäden Exponentialverteilt sind. In diesem Fall ergibt sich für den Anpassungskoeffizienten

$$r = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}$$

Eine Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit kann durch den Anpassungskoeffizienten  $r$  angegeben werden.

**Theorem 3.2.5** (Lundberg Ungleichung). *Für den Risikoprozess aus 3.1.1, für den der Anpassungskoeffizient  $r$  existiert, gilt folgende Abschätzung für die Ruinwahrscheinlichkeit*

$$\psi(r_0) \leq e^{-rr_0} \forall r_0 \geq 0 \quad (3.17)$$

*Beweis.* Der Beweis wird als Induktionsbeweis geführt. Definiere

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}[\max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u] = \mathbb{P}[Z_k > u \text{ für ein } k \in \{1, \dots, n\}]$$

Für  $n \rightarrow \infty$  und  $u > 0$  gilt  $\psi_n(u) \rightarrow \psi(u)$ . Es reicht zu zeigen, dass

$$\psi_n(u) \leq e^{-ru} \text{ für alle } n \geq 1 \text{ und } u > 0 \quad (3.18)$$

Induktionsanfang:

Für den Induktionsanfang benutzt man die Markov'sche Ungleichung aus A.3.1 und erinnere sich an die Gleichung des Anpassungskoeffizienten 3.15.

$$\psi_1(u) \leq e^{-ru} M_{L_1}(r) = e^{-ru}$$

Der Induktionsanfang wurde somit mit  $n = 1$  gezeigt.

Für den Induktionsschritt gehen wir davon aus, dass 3.18 für  $n$  erfüllt ist. Nun ist 3.18 für  $n + 1$  zu zeigen.

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}[\max_{1 \leq k \leq n+1} Z_k > u] \\ &= \mathbb{P}[L_1 > u] + \mathbb{P}[\max_{2 \leq k \leq n+1} (L_1 + (Z_k - L_1)) > u, L_1 \leq u] \\ &= \int_{(u, \infty)} dF_{L_1}(x) + \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P}[\max_{1 \leq k \leq n} [x + Z_k] > u] dF_{L_1}(x) \end{aligned}$$

Betrachten wir die beiden Summanden des Terms getrennt. Für den ersten Teil wenden wir wieder die Markov'sche Ungleichung aus A.3.1 und 3.15 an.

$$\int_{(u, \infty)} dF_{L_1}(x) \leq \int_{(u, \infty)} \exp^{r(x-u)} dF_{L_1}(x)$$

Für den zweite Teil der Summe gilt

$$\begin{aligned} &\int_{(-\infty, u]} \mathbb{P}[\max_{1 \leq k \leq n} [x + Z_k] > u] dF_{L_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \mathbb{P}[\max_{1 \leq k \leq n} Z_k > u - x] dF_{L_1}(x) \\ &= \int_{(-\infty, u]} \psi_k(u - x) dF_{L_1}(x) \\ &\leq \int_{(-\infty, u]} \exp^{r(u-x)} dF_{L_1}(x) \end{aligned}$$

Zusammen ergeben sich für beide Summen und mit 3.15

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \int_{(-\infty, \infty]} \exp^{r(u-x)} dF_{L_1}(x) \\ &\leq \exp^{ru} M_{L_1}(r) = \exp^{-ru} \end{aligned}$$

Die Induktion wurde bewiesen und damit auch das Theorem □

Mit einem großem Startkapital  $r_0$  versichert uns die Lundberg Ungleichung, dass die Ruinwahrscheinlichkeit sehr klein ist. Zudem gilt auch für große Anpassungskoeffizienten  $r$  eine niedrigere Ruinwahrscheinlichkeit.

### 3.3. Approximation des klassischen Modells

Wie in den vorherigen Abschnitten zu sehen war, gibt es im Allgemeinen keine geschlossene Formel zur Ermittlung der Ruinwahrscheinlichkeit. Meist ist sie nur explizit darstellbar, wenn die Verteilung der Schäden bekannt ist. Eine andere Art, um zu einer expliziten Darstellung zu kommen, ist eine Approximation des klassischen Modells aus Definition 3.1.1 durch die Brown'schen Bewegung mit Drift:

$$R(t, x) = x + ct + \sigma W_t \quad (3.19)$$

Die Idee erscheint sinnvoll, da der zusammengesetzte Poissonprozess und die Brown'sche Bewegung eine gemeinsame Eigenschaft besitzen: Der Zusammengesetzte Poissonprozess [26, S.61] wie auch die Brown'sche Bewegung gemäß Definition 2.1.10 besitzen unabhängige und stationäre Inkremente. Zudem gibt es eine explizite Darstellung der Ruinwahrscheinlichkeit für den Prozess  $R(t) = ct + \sigma W_t$  mit

$$\psi(x) = e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \quad \text{in unendlicher Zeit} \quad (3.20)$$

$$\psi(x, t) = \Phi\left(\frac{\mu t + x}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}} * \Phi\left(\frac{\mu t - x}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad \text{in endlicher Zeit} \quad (3.21)$$

[28, S.206] wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

*Beweis der Gleichung 3.20.* Setze die Stopzeit  $\tau = \inf\{t > 0 | X_t = -x\}$ , wobei  $x > 0$  das Anfangsvermögen darstellt. Zudem sei  $M_t = \exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2} X_t)$  eine geometrische Brown'sche Bewegung nach 2.1.12.  $0 \leq M_{t \wedge \tau} < \exp(\frac{2\mu x}{\sigma^2})$  ist ein beschränktes Martingal. Aus Lemma 2.2.6 folgt nun  $M_{t \wedge \tau} \rightarrow M_\tau$  fast sicher. Zwei Fälle treffen für  $\tau$  zu:

1.  $\tau < \infty : X_\tau = -x$
2.  $\tau = \infty : X_\tau = +\infty$

$$\begin{aligned} 1 &= M_0 = \mathbb{E}[\exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2} X_{t \wedge \tau}) | \mathcal{F}_0] && \text{Optimal Stopping Theorem 2.2.8} \\ &= \mathbb{E}[\exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2} X_{t \wedge \tau}) I_{\{\tau \leq t\}}] + \mathbb{E}[\exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2} X_{t \wedge \tau}) I_{\{\tau > t\}}] \\ &\stackrel{t \rightarrow \infty}{=} \exp(\frac{2\mu}{\sigma^2} x) \mathbb{E}[I_{\{\tau \leq t\}}] + \underbrace{\mathbb{E}[\exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2} X_{t \wedge \tau}) I_{\{\tau > t\}}]}_{\rightarrow 0} \\ &\text{majorisierte Konvergenz A.2.5} \\ &= \exp(\frac{2\mu}{\sigma^2} x) \mathbb{P}[\tau < \infty] \\ \Rightarrow \mathbb{P}[\tau < \infty] &= \exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2} x) \end{aligned}$$

□

Für den Prozess 3.19 erhalten wir nach [28, S.206] folgende Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\psi(x) = e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \quad \text{in unendlicher Zeit} \quad (3.22)$$

Unser Ziel ist, die schwache Konvergenz des klassischen Modells gegen die Brown'sche Bewegung mit Drift und die Konvergenz der Ruinwahrscheinlichkeiten zu zeigen und damit die Ruinwahrscheinlichkeiten 3.22 als explizite Darstellung zu verwenden. Folgende Proposition aus [28, S.226] zeigt uns erste Resultate für die Konvergenz der Ruinwahrscheinlichkeiten zwischen dem klassischen Modell 3.1.1 und der Brown'sche Bewegung mit Drift 3.19.

**Proposition 3.3.1.** *Sei  $R^{(n)}$  eine Folge von klassischen Risiko Modellen mit  $R_0^{(n)} = x$ , und sei  $W$  eine Brown'sche Bewegung. Angenommen  $R^{(n)}$  konvergiert schwach gegen  $R$  mit  $R(t) = ct + \sigma W_t$ . Dabei ist  $\tau^{(n)}$  die Ruinzeit von  $R^{(n)}$  und  $\tau$  die Ruinzeit von  $R$ . Dann konvergiert  $\tau^{(n)}$  schwach (siehe Definition A.2.2) gegen  $\tau$ . Wenn zusätzlich gilt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[R_1^{(n)}] < \infty$ , dann gilt zudem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\tau^{(n)} < \infty] = \mathbb{P}[\tau < \infty]$ .*

Um Proposition 3.3.1 auf das klassische Risiko Modell anzuwenden, müssen wir noch die schwache Konvergenz von diesem gegen den Prozess  $R(t) = ct + \sigma W_t$  zeigen. Dazu folgen wir der Vorgehensweise in [13]. Wir definieren eine Folge von Risikoprozessen

$$R^{(n)}(t) = x^{(n)} + c^{(n)}nt - \sum_{i=1}^{N(nt)} S_i^{(n)} \quad \text{auf } 0 \leq t \leq 1 \quad (3.23)$$

mit  $x^{(n)} > 0$ ,  $c^{(n)} > 0$  und  $\mathbb{E}[S_i^{(n)}] = \mu^{(n)}$ ,  $\text{Var}[S_i^{(n)}] = \varsigma^{(n)} > 0$ . Zudem nehmen wir an, dass die Schäden an den Schadenzeitpunkten  $\sigma_i^{(n)}$  mit unabhängig Exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten  $T_i^{(n)}$  auftreten. Dabei gilt nach Theorem 3.2.3  $\mathbb{E}[T_i^{(n)}] = \frac{1}{\lambda}$

**Theorem 3.3.2.** *Sei  $x^{(n)} = x\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ ,  $c^{(n)} = c\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ ,  $\mu^{(n)} = \mu\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$   $\varsigma^{(n)2} \rightarrow \varsigma^2 > 0$  und  $\mathbb{E}[(R_i^{(n)})^{2+\epsilon}]$  ist in  $n$  für ein  $\epsilon > 0$  beschränkt. Dann konvergiert  $\sqrt{n}R^{(n)}(t) \rightarrow x + \Gamma + \sqrt{\varsigma}\sqrt{\lambda}W$  mit  $\Gamma = (c - \mu\lambda)t$  schwach.*

*Beweis.* Der Beweis kann in [13] nachgelesen werden. □

## 4. Stochastische Kontrolltheorie

Dieses Kapitel ist eine Einführung in die stochastische Kontrolltheorie. Anfangs wird die Risikothorie mit endlichem Zeithorizont behandelt und das Bellman Prinzip vorgestellt. In den darauf folgenden Abschnitten gehen wir von einem Diffusionsprozess als Grundlage aus und mit ihm wird auch die Hamilton- Jacobi- Bellman Gleichung hergeleitet. Danach folgen zwei Verifikationstheoreme. Das erste bezieht sich auf endlichen Zeithorizont, das zweite auf unendlichen Zeithorizont. Als Referenzen verweise ich in Kapitel 4 auf [10] im Speziellen in Abschnitt 4.1 auf [30],[25], in Abschnitt 4.1.2 auf [10] und in Abschnitt 4.1.3 auf [12].

Im folgenden Kapitel nehmen wir an, dass die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t=0\dots T}$  im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t=0\dots T}, P)$  die üblichen Bedingungen 2.1.8 erfüllt. In der Kontrolltheorie versuchen wir ein Problem oder einen Zustand, beschrieben durch den **Zustandsprozess**  $X_t$ , mit Hilfe eines Kontrollprozesses zu kontrollieren.

**Definition 4.0.1** (Kontrollprozess). *Der Kontrollprozess  $u_t$  ist  $(\mathcal{F}_t)_{t=0\dots T}$ -progressiv messbar mit Werten  $U \subset \mathbb{R}^p$*

Den Kontrollprozess nennt man auch **Strategie**. Die Strategie  $u_t$  wird mit dem Informationsgewinn  $\mathcal{F}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  entschieden. Sei der Zustandsprozess  $X_t$   $n$ -dimensional und die Brown'sche Bewegung  $B_t$   $m$ -dimensional. Der Kontrollprozess ist Teil der stochastischen Differentialgleichung der Dynamik für den Zustandsprozess, die in 2.8 vorgestellt wurde:

$$d(X_t) = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t \quad (4.1)$$

$$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t \in [0, T] \quad (4.2)$$

$$\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \quad t \in [0, T] \quad (4.3)$$

Mit diesem kontrollierbaren Prozess kann ein Zielfunktional mit endlichem Zeithorizont optimiert werden.

**Definition 4.0.2** (Zielfunktional mit endlichem Zeithorizont). *Das Zielfunktional ist als  $J(t, x, u_t) = \mathbb{E}[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s)ds + \phi(T, X_T) | X_t = x]$  definiert, wobei  $\varphi$  die laufenden Kosten und  $\phi$  die Endkosten bestimmen.*

**Definition 4.0.3** (Zulässige Kontrollprozesse und Strategien). *Die Menge der zulässigen Kontrollprozesse und Strategien  $A(t, x)$  sind  $(\mathcal{F}_t)_{t=0\dots T}$ -progressiv messbare Prozesse, sodass 4.1 eine eindeutige Lösung hat und das Zielfunktional  $J$  wohldefiniert ist.*

Über die Zulässigen Kontrollprozesse optimieren wir das Zielfunktional und erhalten die Wertfunktion:

**Definition 4.0.4** (Wertfunktion). *Zum Zeitpunkt  $t > 0$  und mit Anfangskapital  $x$  ist die Wertfunktion definiert als*

$$V(t, x) = \sup_{u \in A(t, x)} J(t, x, u_t)$$

Ziel ist es, eine optimale Strategie  $u^*$  zu finden, so dass gilt

$$J(0, x, u^*) = V(0, x)$$

Bei manchen Problemen wird optimiert, indem das Zielfunktional minimiert wird. Solche ein Problem wäre zum Beispiel die Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit.

Um die optimale Strategie und das Zielfunktional zu bestimmen, müssen wir das Problem umformulieren. Die nächsten Kapitel werden dies behandeln.

## 4.1. Dynamische Programmierung

### Bellmans Prinzip

Wir stellen nun die stochastische Version des Bellman Prinzips, auch bekannt als Dynamic Programming Principle, vor.

**Theorem 4.1.1** (Dynamic Programming Principle). *Für alle Stoppzeiten  $\tau \geq t$  gilt:*

$$V(t, x) = \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(\tau, X_\tau) | \mathcal{F}_t \right] \quad (4.4)$$

Diese Version des Theorems ist für einen finiten Zeitraum verfasst. Im Grunde besagt dieses Theorem, dass die optimale Lösung in Teilintervalle unterteilt werden kann und die jeweiligen Entscheidungen für die Strategien in den späteren Teilintervallen unabhängig sind von den anfänglichen Entscheidungen. Somit ist eine Optimierung über die gesamte Zeit eine Optimierung über die jeweiligen Teilintervalle.

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis wie in [30]. Folgende Aussagen gelten, werden aber nicht bewiesen:

1. Für jede Strategie  $u$  und Anfangsdaten  $(t, x)$  erholt sich der Zustandsprozess in jeder Stoppzeit  $\tau > t$ :  $X_{t,x}^u(s) = X_{\tau, X_{t,x}^u(\tau)}^u(s) \forall s \leq \tau$
2. Falls  $u^1(s) = u^2(s) \forall s \leq \tau$  dann gilt:  $X_{t,x}^{u^1}(s) = X_{t,x}^{u^2}(s) \forall s \leq \tau$
3. Falls  $u$  in  $A(t, x)$  zulässig ist, dann ist  $u$  beschränkt auf das stochastischen Intervall  $[\tau, T]$  auch zulässig in  $A(\tau, X_{t,x}^u(\tau))$
4. Angenommen  $u \in A(t, x)$  und  $\hat{u} \in A(\tau, X_{t,x}^u(\tau))$  Definiere :

$$\bar{u}_s = \begin{cases} u_s, & s \leq \tau \\ \hat{u}_s, & s \geq \tau \end{cases}$$

So ist  $\bar{u} \in A(t, x)$

5. Das Zielfunktional besitzt eine additive Struktur:

$$J(t, x, u_t) = \mathbb{E}[\int_t^\tau \varphi(s, X_{t,x}^u(s), u_s) ds + G(X_{t,x}^u(\tau)) | X_t = x] \text{ mit einer Kostenfunktion } G$$

Mit der Aussage 5 git:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E}[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + G(X_{t,x}^u(T)) | \mathcal{F}_t] \\ &= \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E}[\int_t^\tau \varphi(s, X_s, u_s) ds + \mathbb{E}[\int_\tau^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + G(X_{t,x}^u(T)) | \mathcal{F}_\tau] | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wir führen den Beweis von 4.4, indem wir zeigen, dass die Wertfunktion  $V(t, x)$  sowohl kleiner gleich als auch größer gleich der rechten Seite ist. Zuerst beweisen wir

$$V(t, x) \leq \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E}[\int_t^\tau \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(\tau, X_{t,x}^u(\tau)) | \mathcal{F}_\tau]$$

$u$  beschränkt auf das stochastischen Intervall  $[\tau, T]$  ist auch zulässig in  $A(\tau, X_{t,x}^u(\tau))$ . Somit gilt:

$$\mathbb{E}[\int_\tau^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + G | \mathcal{F}_\tau] \leq V(\tau, X_{t,x}^u(\tau)) \quad (4.6)$$

Setzen wir 4.6 in 4.5 ein:

$$V(t, x) \leq \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E}[\int_t^\tau \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(\tau, X_{t,x}^u(\tau)) | \mathcal{F}_t] \quad (4.7)$$

Nun müssen wir noch die umgekehrte Ungleichung beweisen: Dazu wählen wir ein  $\epsilon > 0$ , ein  $\omega \in \Omega$  und ein  $u^{\omega, \epsilon} \in A(\tau, X_{t,x}^u(\tau))$  sodass

$$\mathbb{E}[\int_\tau^T \varphi(s, X_{\tau, X_{t,x}^u(\tau)}^{\omega, \epsilon}(s), u_s^{\omega, \epsilon}) ds + G(X_{\tau, X_{t,x}^u(\tau)}^{\omega, \epsilon}(T)) | \mathcal{F}_\tau] \geq V(\tau, X_{t,x}^u(\tau)) + \epsilon \quad (4.8)$$

Wir setzen

$$u_s^* = \begin{cases} u_s, & s \in [t, \tau] \\ u_s^{\omega, \epsilon}, & s \in [\tau, T] \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass  $u_s^* \in A(t, x)$ . Und setzen wir in 4.8 in 4.5:

$$\begin{aligned} V(t, x) &\geq \mathbb{E}[\int_t^T \varphi(s, X_{t,x}^{u^*}(s), u_s^*) ds + G(X_{t,x}^{u^*}(T)) | \mathcal{F}_t] \\ &\geq \mathbb{E}[\int_t^\tau \varphi(s, X_{t,x}^u(s), u_s) ds + V(\tau, X_{t,x}^u(\tau)) + \epsilon | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Da die Gleichung für alle  $u \in A(t, x)$  und  $\epsilon > 0$  gilt, folgt:

$$V(t, x) \geq \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E}[\int_t^\tau \varphi(s, X_{t,x}^u(s), u_s) ds + V(\tau, X_{t,x}^u(\tau)) | \mathcal{F}_t]$$

□

Im nächsten Abschnitt leiten wir eine infinitesimale Version des Bellmans Prinzips, die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (HJB-Gleichung) her. Die Gleichung beschreibt das Verhalten der Wertfunktion  $V(t, x)$ , wenn die Stoppzeit  $\tau$  gegen  $t$  läuft. [25, S.42]

### 4.1.1. Hamilton- Jacobi - Bellman Gleichung

Wir gehen wieder von einem finiten Zeithorizont aus und setzen unsere Stoppzeit  $\tau = t + h$ . Mit dem Bellman Prinzip 4.4 folgt:

$$V(t, x) = \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E} \left[ \int_t^{t+h} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t+h, X_{t+h}) | \mathcal{F}_t \right] \quad (4.9)$$

Unser Ziel ist es, die Ito Formel 2.4.4 auf  $V(t+h, X_{t+h})$  anzuwenden. Wir können die Ito-Formel für  $V(t+h, X_{t+h})$  speziell formulieren, wenn wir den Zustandsprozess exemplarisch darstellen. Wir gehen von einer **ItoDiffusion** aus: Sind die Lipschitz- und Wachstumsbedingung nach 2.10 und 2.11 erfüllt, so ist dieser Prozess nach Definition 2.5.4 die eindeutig starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung aus 2.8:

$$d(X_t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (4.10)$$

Für die Ito-Diffusion definieren wir die **Diffusionsmatrix**  $a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^\top(t, x)$ . Es gilt, dass der Prozess nicht von der gesamten Vergangenheit abhängt, sondern nur von dem Zustand in  $t$ . Diese Eigenschaften nennt man Markoveigenschaften:

**Theorem 4.1.2** (Markoveigenschaften der Ito-Diffusion). *Sei  $X_t$  eine Ito-Diffusion und  $f$  eine beschränkte, messbare Funktion von  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:*

1. *Markoveigenschaft:  $\mathbb{E}[f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(X_s) | X_0 = X_t]$*
2. *starke Markoveigenschaft:  $\mathbb{E}[f(X_{\tau+s}) | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[f(X_s) | X_0 = X_\tau]$  wobei  $\tau$  eine Stoppzeit ist.*

Wir definieren nun zwei Operatoren und werden zeigen, dass diese beiden Operatoren übereinstimmen, wenn gewisse Voraussetzungen erfüllt sind.

**Definition 4.1.3** ( $L$ -Operator). *Sei  $f \in DL$ , wobei  $DL = \{f \text{ messbar} \mid \text{dass } Lf \forall t, x \text{ definiert ist}\}$ . Der  $L$ -Operator ist definiert als:*

$$Lf := \lim_{s \searrow t} \frac{\mathbb{E}[f(s, X_s) - f(t, x) | X_t = x]}{s - t} \quad (4.11)$$

**Definition 4.1.4** ( $\mathcal{L}$ - Operator). *Sei  $f \in C^{1,2} = \{f \mid \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \forall i, j \text{ stetig}\}$*

$$\mathcal{L}f := \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.12)$$

oder die Kurzschreibweise

$$\mathcal{L}f := f_{|0} + bDf + \frac{1}{2}tr(a(t, x)D^2f) \quad (4.13)$$

wobei  $Df$  der Gradient von  $f$ ,  $tr()$  die Spur einer Matrix und  $D^2f$  die Hessematrix von  $f$  ist.

**Theorem 4.1.5.** Sei  $f \in C^{1,2}$  und sei  $u \geq s \geq t$  und es gelte  $\mathbb{E}[\int_s^u |\mathcal{L}f(r, X_r)| dr | X_t = x] < \infty$ ,  $\mathbb{E}[\int_s^u \|Df(r, X_r)\sigma(r, X_r)\|^2 dr | X_t = x] < \infty$ . Dann gilt  $f \in DL$  und  $Lf = \mathcal{L}f$ .

**Bemerkung 4.1.6.** Falls  $f \in C^{1,2}$  und einen kompakten Träger hat, so gilt auch  $Lf = \mathcal{L}f$ .

**Bemerkung 4.1.7.** Die Ito-Formel für die Ito-Diffusion kann als

$$df(t, X_t) = \mathcal{L}f(t, X_t)dt + Df(t, X_t)\sigma(t, X_t)dW_t \quad (4.14)$$

geschrieben werden.

Wenden wir nun Bemerkung 4.1.7 in Integralschreibweise auf  $V(t+h, u, X_{t+h})$  an :

$$\begin{aligned} V(t+h, X_{t+h}) &= V(t, x) + \int_t^{t+h} V_{|0}(s, X_s) + b(s, X_s)DV(s, X_s) \\ &\quad + \frac{1}{2}tr(a(s, X_s)D^2V(s, X_s))ds + \int_t^{t+h} DV(s, X_s)\sigma(s, X_s)dW_s \end{aligned}$$

Wir setzen nun die letzte Gleichung in 4.9 ein.

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E}[\int_t^{t+h} \varphi(s, X_s, u_s)ds + V(t, x) \\ &\quad + \int_t^{t+h} V_{|0}(s, X_s) + b(s, X_s, u_s)DV(s, X_s) + \frac{1}{2}tr(a(s, X_s, u_s)D^2V(s, X_s))ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} DV(s, X_s)\sigma(s, X_s, u_s)dW_s | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Der letzte Teil des Terms ist ein Stochastisches Integral. Nach Abschnitt 2.3 ist dieser Term ein Martingal. Somit verschwindet das Integral im bedingten Erwartungswert mit der Filtration  $\mathcal{F}_t$ . Zudem können wir die Bedingung der Filtration mit dem Zustand  $X_t = x$  zum Zeitpunkt  $t$  ersetzen.

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E}[\int_t^{t+h} \varphi(s, X_s, u_s)ds + V(t, x) \\ &\quad + \int_t^{t+h} V_{|0}(s, X_s) + b(s, X_s, u_s)DV(s, X_s) \\ &\quad + \frac{1}{2}tr(a(s, X_s, u_s)D^2V(s, X_s))ds | X_t = x] \end{aligned}$$

Subtrahieren wir nun  $V(t, x)$ , dividieren mit  $(t+h-t)$  und bilden den Limes  $h \rightarrow 0$ . Das Ergebnis ist die **Hamilton – Jacobi – Bellman Gleichung**:

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{u \in A(t, x)} \{ \varphi(s, X_s, u_s) + V_{|0}(t, X_t) + b(t, X_t, u_t)DV(t, X_t) + \frac{1}{2}tr(a(t, X_t, u_t)D^2V(t, X_t)) \} \\ &= \sup_{u \in A(t, x)} \{ \varphi(s, X_s, u_s) + \mathcal{L}^u V \} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Wir haben damit die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung für den Diffusionsprozess hergeleitet. Dass die Wertfunktion  $V$  die HJB Gleichung erfüllt, ist ein notwendiges Kriterium, um das Supremum des Zielfunktional  $J$  zu erreichen. Ist die Wertfunktion noch nicht bekannt, kann meist aus der HJB-Gleichung ein Kandidat für die Wertfunktion  $V$  und die optimale Strategie  $u$  mit Methoden der partiellen Differentialgleichung ermittelt werden. Dieser Kandidat muss als Wertfunktion mit einem Verifikationstheorem bestätigt werden.

### 4.1.2. Verifikationstheorem

Zunächst präsentieren wir ein Verifikationstheorem mit endlichem Horizont. Darauf folgt das Verifikationstheorem mit unendlichem Horizont. Diese beiden Verifikationstheoreme basieren auf starken Annahmen. Bei vielen konkreten Problemen sind eigene Verifikationssätze nötig. Die Beweisideen sind den hier aufgeführten Verifikationstheoremen ähnlich und können von ihnen abgeleitet werden.

#### Verifikationstheorem mit endlichem Horizont

Zum Zweck der Übersichtlichkeit fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned}
 d(X_t) &= b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t & (4.16) \\
 b &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t \in [0, T] \\
 \sigma &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \quad t \in [0, T] \\
 J(t, x, u_t) &= \mathbb{E} \left[ \int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \phi(T, X_T) \mid X_t = x \right] \\
 V(t, x) &= \sup_{u \in A(t, x)} J(t, x, u_t)
 \end{aligned}$$

Für Strategien  $u$  aus  $A(t, x)$  nehmen wir an:

1.  $u$  ist ein progressiv messbarer Prozess mit  $\mathbb{E}[\int_t^T \|u_s\|^2 ds] < \infty$
2.  $\forall u \in A(t, x)$  besitzt die Diffusionsdifferentialgleichung 4.16 eine eindeutige starke Lösung  $X_t$ , die  $\mathbb{E}[\sup_{t \leq u \leq T} \|X_u\|^2] < \infty$  erfüllt
3.  $J$  ist wohldefiniert

**Theorem 4.1.8** (Verifikationstheorem mit endlichem Zeithorizont). *Sei  $\varphi$  stetig, so dass  $|\varphi(t, x, u)| \leq C_\varphi(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2)$  und  $\|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$ . Desweiteren sei  $\Phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  eine Funktion, so dass  $|\Phi(t, x)| \leq C_\Phi(1 + \|x\|^2)$ . Zudem gilt für  $\Phi$  folgende Form der HJB-Gleichung  $0 = \sup_{u \in A(t, x)} \{\varphi(s, X_s, u_s) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x)\}$  mit  $\Phi(T, x) = \phi(T, x)$ . Dann gilt*

$$\Phi(t, x) \geq V(t, x)$$

Falls zudem  $\exists \hat{u}$  und  $u_t^* := \hat{u}(t, X_t^*) \in A(t, x)$  mit  $X_t^*$  als Lösung von 4.16. Dann gilt

$$\Phi(t, x) = V(t, x)$$

und  $u_t^*$  ist eine optimale Strategie.

*Beweis.* Sei  $u_t$  eine beliebige zulässige Strategie und sei  $\tau_n = T \wedge \inf_{s>t} \{ \|X_s - x\| = n \}$  eine Stoppzeit, die beschränkt ist. Wir wenden nun die Ito-Formel aus Bemerkung 4.1.7 auf  $\Phi(\tau_n, X_{\tau_n})$  an mit  $X_t = x$ :

$$\Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) = \Phi(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}\Phi(s, X_s) ds + \int_t^{\tau_n} D\Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s \quad (4.17)$$

Betrachten wir den letzten Term  $\int_t^{\tau_n} D\Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s$  und beweisen, dass dies ein stochastisches Integral nach 2.3.2 ist und damit ein Martingal: Da  $\Phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  ist  $D\Phi$  stetig auf  $[t, \tau_n]$ . Damit gilt  $D\Phi \leq K$  auf  $[t, \tau_n]$ . Zudem haben wir aus den Voraussetzungen eine Abschätzung für  $|\sigma(t, x, u)|^2$ . Aus der Voraussetzung 1 für  $u_s$  und da  $X_t$  eine starke Lösung ist, gelten  $\mathbb{E}[\int_t^T \|u_s\|^2 ds] < \infty$  und  $\mathbb{E}[\int_t^T \|X_s\|^2 ds] < \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_n} \|D\Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds\right] \\ & \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_n} \|K \sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds\right] \\ & \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_n} C_\sigma (1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds\right] < \infty \end{aligned}$$

So gilt  $D\Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) \in \mathcal{H}$  und damit  $\int_t^{\tau_n} D\Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s$  ein stochastische Martingal nach 2.3.2. Da dieses Integral ein Martingal ist, gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_n} D\Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s\right] = 0$$

Somit resultiert

$$\Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) = \Phi(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^{u_s} \Phi(s, X_s) ds \quad (4.18)$$

Betrachten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n})\right] \\ & = \mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^{u_s} \Phi(s, X_s) ds\right] \\ & = \Phi(t, x) + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s) + \mathcal{L}^{u_s} \Phi(s, X_s) ds\right]}_{\leq 0} \leq \Phi(t, x) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Bilden wir den Limes für die Stoppzeit mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = T$  fast sicher. Um sicher zu stellen, dass wir Erwartungswert und Limes vertauschen können, suchen wir eine Majorante, damit der Konvergenzsatz der Majorisierten Konvergenz nach Theorem A.2.5

angewandt werden kann.

$$\begin{aligned} \int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) &\leq \int_t^{\tau_n} C_\varphi(1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds + C_\Phi(1 + \|X_{\tau_n}\|^2) \\ &\leq \int_t^{\tau_n} C_\varphi(1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds + C_\Phi(1 + \sup_{t \leq s \leq \tau_n} \|X_s\|^2) \in L^1 \end{aligned}$$

Eine integrierbare Majorante existiert und der Limes kann mit dem Erwartungswert vertauscht werden.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(T, X_T)] &\leq \Phi(t, x) \\ \mathbb{E}[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(T, X_T)] &\leq \Phi(t, x) \\ J(t, x, u) &\leq \Phi(t, x) \quad \forall u \in A(t, x) \\ V(t, x) &\leq \Phi(t, x) \end{aligned}$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Für die zweite Aussage müssen wir nur in Gleichung 4.19 das Ungleichheitszeichen durch einen Gleichheitszeichen ersetzen. Dies ist zulässig, da wir den optimierten Prozess betrachten. Es folgt:

$$V(t, x) = \Phi(t, x)$$

□

### Verifikationstheorem mit unendlichem Horizont

Wir werden nun den unendlichen Zeithorizont betrachten. Zusätzlich nehmen wir an, dass  $b, \sigma$ , und  $\varphi$  nicht explizit von der Zeit abhängen:

$$d(X_t) = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t \quad (4.20)$$

Der  $\mathcal{L}$ -Operator hat nun folgende Form:

$$\mathcal{L}f := b(x, u)Df + \frac{1}{2}tr(a(t, x)D^2f)$$

Für das Zielfunktional in unendlicher Zeit führen wir eine neue Definition ein:

**Definition 4.1.9** (Zielfunktional mit unendlichem Zeithorizont). *Das Zielfunktional ist als*

$$J(t, x, u_t) = \mathbb{E}[\int_t^\infty \exp(-\beta s)\varphi(X_s, u_s)ds]$$

definiert, wobei  $\varphi$  die laufenden Kosten und  $\exp(-\beta s)$  den Abzinsungsfaktor bestimmen.

Die Wertfunktion ergibt sich als  $V(x) := \sup_{u \in A(x)} J(x, u)$ .

Für Strategien  $u$  aus  $A(t, x)$  nehmen wir an:

1.  $u$  ist ein progressiv messbarer Prozess, mit  $\mathbb{E} \int_t^T e^{(-\beta s)} \|u_s\|^2 ds < \infty$
2.  $\forall u \in A(t, x)$  soll 4.16 eine eindeutige starke Lösung  $X_t$  besitzen, die  $\mathbb{E}[e^{(-\beta s)} \|X_s\|^2] < \infty$  erfüllt
3.  $J$  ist wohldefiniert

**Theorem 4.1.10** (Verifikationstheorem mit unendlichem Zeithorizont). *Sei  $\varphi$  stetig, so dass  $|\varphi(x, u)| \leq C_\varphi(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2)$  und  $\|\sigma(x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$ . Weiteres sei  $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$  eine Funktion, so dass  $|\Phi(x)| \leq C_\Phi(1 + \|x\|^2)$ . Zudem gilt für  $\Phi$  folgende Form der HJB-Gleichung  $0 = \sup_{u \in A(x)} \{\varphi(X_s, u_s) + \mathcal{L}^u \Phi(x) - \beta \Phi(x)\}$  mit  $\lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \exp(-\beta \tau_n) \Phi(X_{\tau_n}) = 0 \forall$  Stoppzeiten  $\tau_n$ . Dann gilt*

$$\Phi(x) \geq V(x)$$

Falls zudem  $\exists \hat{u}$  und  $u_t^* := \hat{u}(X_t^*) \in A(x)$  mit  $X_t^*$  als Lösung von 4.16. Dann gilt

$$\Phi(x) = V(x)$$

und  $u_t^*$  ist eine optimale Strategie.

*Beweis.* Wir nehmen als Grundlage den Beweis für das Verifikationstheorem mit endlichem Zeithorizont. Wir nehmen  $\tilde{\Phi}(t, x) = \exp(-\beta t) \Phi(x)$  als Kandidatenfunktion für Theorem 4.1.8. Für  $\tilde{\varphi}$  gilt  $\tilde{\varphi} = \exp(-\beta t) \varphi(x)$ . Wir setzen  $\tilde{\Phi}(t, x)$  und  $\tilde{\varphi}$  in die HJB-Gleichung aus 4.1.8 ein und erhalten mit  $\Phi(x)$  Äquivalenz zur HJB-Gleichung in diesem Theorem:

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{u \in A(x)} \{ \exp(-\beta t) \varphi(X_s, u_s) + \mathcal{L}^u \exp(-\beta t) \Phi(x) \} \\ &= \sup_{u \in A(x)} \{ \exp(-\beta t) \varphi(X_s, u_s) - \beta \exp(-\beta t) \Phi(x) + \exp(-\beta t) \mathcal{L}^u \Phi(x) \} \\ &= \sup_{u \in A(x)} \{ \varphi(X_s, u_s) - \beta \Phi(x) + \mathcal{L}^u \Phi(x) \} \end{aligned}$$

Wenn  $\Phi(t, x)$  die HJB-Gleichung aus diesem Theorem erfüllt, so erfüllt  $\tilde{\Phi}(t, x)$  die HJB-Gleichung aus 4.1.8 und es gilt

$$\tilde{\Phi}(t, x) \stackrel{(\text{=})}{\geq} V(t, x) \text{ mit } \Phi(x) = \tilde{\Phi}(0, x) \stackrel{(\text{=})}{\geq} V(0, x) = V(x)$$

Der Rest des Beweises folgt analog Beweis für Theorem 4.1.8. □

### 4.1.3. Beispiel: Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit eines Versicherungsunternehmens

Wir wenden die Theorie der stochastischen Kontrolltheorie auf ein Beispiel in der Praxis an. Dieses Beispiel wurde von [12] motiviert. Betrachtet wird dabei ein Versicherungsunternehmen. Der Risikoprozess  $R$  wird wie der gestörte Risikoprozess aus 3.1.2 modelliert:

$$\begin{aligned} R(t) &= r + \underbrace{ct + Z_t}_{L(t)} + \theta(t) \underbrace{(\mu t + \sigma W(t))}_{I(t)} \\ dR(t) &= dL(t) + d(\theta(t)I(t)) \end{aligned}$$

wobei  $R(0) = r$ ,  $L(t)$  der klassische Risikoprozess eines Versicherungsunternehmens und  $I(t)$  ein Investmentindex, dessen Dynamik der Brown'schen Bewegung folgt.  $\theta$  ist die Anzahl der Investments. Sei  $A$  eine Investmentstrategie. Wir setzen

$$A = \theta(t) * I(t)$$

wobei  $A$  den Wert der Investments beschreibt. Um die HJB Gleichung herzuleiten, benutzen wir die Integro-Differentialgleichung 3.9 für die Überlebenswahrscheinlichkeit  $\delta$  und können das Integral als Erwartungswert verstehen. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt den Zustand, wenn kein Schaden auftritt. Dieser muss um den Gewinn oder Verlust der Investmentkomponente ergänzt werden. Da die Investmentkomponente stochastisch modelliert wird, ist ein Erwartungswert über die Überlebenswahrscheinlichkeit zu nehmen. Wie bei der Ruinwahrscheinlichkeit gilt auch für die Überlebenswahrscheinlichkeit: Mit Wahrscheinlichkeit  $\lambda dt$  tritt ein Schaden  $X$  auf mit Überlebenswahrscheinlichkeit  $\delta_A(s + cdt + dI(t) - X)$ . Mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - \lambda dt)$  tritt kein Schaden auf mit Überlebenswahrscheinlichkeit  $\delta_A(r + cdt + dI(t))$ :

$$\delta_A(s) = (1 - \lambda dt)\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + d(\theta(t)I(t)))] + \lambda dt\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + d(\theta(t)I(t)) - X)]$$

Zudem gilt für die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit folgender Zusammenhang zu allen anderen Überlebenswahrscheinlichkeiten:

$$\delta(s) = \sup_A \delta_A(s)$$

$$\begin{aligned} \sup_A \delta_A(s) &= \sup_A \{(1 - \lambda dt)\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + dI(t))] + \lambda dt\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + dI(t) - X)]\} \\ &= \sup_A \{(1 - \lambda dt)\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + dI(t)) - \delta_A(s)] \\ &\quad + \lambda dt\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + dI(t) - X)]\} \\ &= \sup_A \{\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + dI(t)) - \delta_A(s)] + \lambda dt\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + dI(t) - X) \\ &\quad - \delta_A(s + cdt + dI(t))]\} \\ &= \sup_A \left\{ \frac{\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + dI(t)) - \delta_A(s)]}{dt} + \lambda\mathbb{E}[\delta_A(s + cdt + dI(t) - X) \right. \\ &\quad \left. - \delta_A(s + cdt + dI(t))] \right\} \end{aligned}$$

Wir lassen  $dt \rightarrow 0$  und wenden die Ito-Formel für Diffusionsprozesse 4.14 auf den ersten Term der letzten Gleichung, welcher als Differenzenquotient zu verstehen ist, an.

$$0 = \sup_A \left\{ [ct + A(t) * \mu] \delta'_A(s) + \frac{1}{2} [A(t)^2 * \sigma^2] \delta''_A(s) + \lambda \mathbb{E}[\delta_A(s - X) - \delta_A(s)] \right\}$$

Um das Supremum über alle  $A$  zu erhalten, müssen wir die erste Ableitung der Gleichung gleich Null setzen und prüfen, ob die zweite Ableitung kleiner Null ist. Wir erhalten die Strategie nach [12]

$$A = A(s) = -\frac{\mu}{\sigma^2} * \frac{\delta'(s)}{\delta''(s)}$$

Um eine explizite Lösung zu erhalten, ist es notwendig, die Verteilung der Schäden  $X$  zu kennen. Man setzt Strategie  $A$  in Abhängigkeit von  $\delta$  in die Supremums Gleichung ein. Die daraus resultierende Integro-Differentialgleichung gilt es, nach  $\delta$  zu lösen. Für den Beweis der Optimalität der Strategie, die Existenz von  $\delta$  und Beispiele expliziter Lösungen in Abhängigkeit von der Verteilung  $X$  verweise ich auf [12].

## 5. Numerische Methode

In diesem Kapitel geht es um eine numerische Methode zur Diskretisierung von Integralgleichungen. Eine spezielle Integralgleichung wird in Kapitel 7 hergeleitet und soll nach einer Funktion  $f$  gelöst werden.  $f$  kann durch eine Fredholm Integralgleichung erster Art implizit beschrieben werden:

$$g(x) = \int_0^\infty K(x, s)f(s)ds, \quad x \in [0, 1] \quad (5.1)$$

wobei  $g$  eine gegebene Funktion ist. Mit der ermittelten Funktion  $f$ , wobei gilt  $f = \exp(x) * \eta_\epsilon(x)$ , kann wiederum eine Funktion  $\eta_\epsilon(x)$  bestimmt werden. Mit  $\eta_\epsilon(x) + x$  ergibt sich die obere Grenze eines optimalen Gebiets, innerhalb dessen ein Unternehmen vom Staat gefördert wird. Dies beschreibt eine optimale Steuerpolitik, auf die in Kapitel 7 noch näher eingegangen wird. Die Herleitung hierzu findet sich in Abschnitt 7.2. Die numerische Lösung dieser Fredholm Integralgleichung erster Art wird in Abschnitt 7.3 mit Hilfe der Wavelet Collocation Methode gefunden, die eine Diskretisierung der Gleichung 5.1 vorsieht. In den nächsten Abschnitten wird diese Methode eingeführt. Die Methode basiert auf der Referenz [17]. Dabei werden in Abschnitt 5.4 eigene weiterführende Überlegungen zur Anpassung an die besonderen Gegebenheiten von Gleichung 5.1 vorgestellt.

### 5.1. Legendre Wavelet Approximation

Wir suchen für die Lösung  $f$  in 5.1 eine Approximation. Als Approximation verwenden wir eine Legendre Wavelet Approximation. Die Legendre Wavelets  $\psi_{j,k}(t)$  sind stetige Polynome und bilden eine Orthonormal Basis auf dem Hilbertraum  $L^2[0, 1]$  [17]. Die **Legendre Wavelets** definieren sich als

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{(m + \frac{1}{2})2^{\frac{K}{2}}} q_m(2^K t - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^K} \leq t \leq \frac{\hat{n}+1}{2^K} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} &\text{mit } \hat{n} = 2n - 1 : n = 1, \dots, 2^{K-1} \\ &\text{und } m = 0, \dots, M - 1 \end{aligned}$$

und  $q_m$  sind **Legendre Polynome**

$$q_{k+1}(s) = \frac{2k+1}{k+1} s q_k(s) - \frac{k}{k+1} q_{k-1}(s) \quad (5.3)$$

mit  $q_0(s) = 1, q_1(s) = s$

$m$  ist ein positiver ganzzahliger Wert, der den Grad des Legendre Polynoms  $q_m$  aus 5.3 repräsentiert und  $M - 1$  der Grad des höchsten Polynoms. Der Wert  $K$  wird festgehalten und beschreibt die Einteilung des Intervalls  $[0, 1]$ . In Abbildung 5.1 sind für  $M = 3$  und  $K = 2$  Legendre Wavelet Funktionen als Teil einer Orthonormal Basis visualisiert. In diesem Fall ist der höchste Grad der Polynome also  $M - 1 = 2$  und das Intervall  $[0, 1]$  wird mit  $K = 2$  in zwei Intervalle eingeteilt.

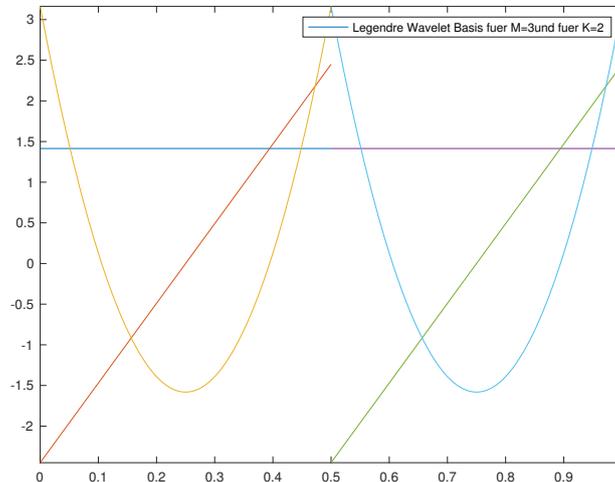


Abbildung 5.1.: Legendre - Wavelet Basis

Eine Funktion  $f \in L^2[0, 1]$  kann mit den Legendre Wavelets folgendermaßen geschrieben werden:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{n,m}(t)$$

mit den Legendre Wavelet Koeffizienten als Skalarprodukt im Hilbertraum

$$c_{nm} = \int_0^1 f(t) \psi_{n,m}(t) dt$$

Wähle ein  $K$  und ein  $M$  genügend groß, so kann  $f$  auch durch endliche Summen der Legendre Wavelets approximiert werden:

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(t)$$

Die Approximation kann auch als Vektor Multiplikation dargestellt werden. Hierfür definieren wir die Vektoren

$$C = [c_{1,0}, \dots, c_{1,M-1}, c_{2,0}, \dots, c_{2,M-1}, \dots, c_{2^{K-1},M-1}]$$

$$\psi(t) = [\psi_{1,0}(t), \dots, \psi_{1,M-1}(t), \psi_{2,0}(t), \dots, \psi_{2,M-1}(t), \dots, \psi_{2^{K-1},M-1}(t)]$$

Beide sind Vektoren aus  $\mathbb{R}^{2^{K-1}M}$ . Die Vektor Multiplikation von  $C$  und  $\psi$  ergibt die approximierten Lösung

$$f(t) \approx C \psi^T(t) \tag{5.4}$$

## 5.2. Fehlerabschätzung der approximierten Lösung

Das folgende Theorem beinhaltet die Fehlerabschätzung für eine Funktion  $f$ , die wie in 5.4 durch Legendre Wavelets approximiert wird.

**Theorem 5.2.1.** *Sei  $f(x) \in C^m[0, 1]$  und  $C\psi^\top$  eine approximierte Lösung von  $f(x)$  wie in 5.4, unter Benutzung der Legendre Wavelets. Dann erhält man folgende Fehlerabschätzung:*

$$\|f - C\psi^\top\| \leq \frac{1}{m!2^{mK}} \sup_{x \in [0,1]} |f^m(x)|$$

*Beweis.* siehe [17] □

## 5.3. Wavelet Collocation Methode

Das Verfahren, welches hier vorgestellt wird, setzt sich einerseits aus einer Approximation mit Legendre Wavelet Basis Funktionen und andererseits aus einer Lösung eines Gleichungssystems zusammen. Das Gleichungssystem ergibt sich aus der Diskretisierung einer Integralgleichung und der Auswertung an Stützstellen. So resultiert die Wavelet Collocation Methode aus diesen beiden Methoden. Der Algorithmus, der dieses Problem löst, ist leicht zu implementieren und sehr effizient, da nur ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Viele Artikel von Autoren wie Kumar, Manchanda und Pooja [17] und Maleknejad [21] haben diese Methode zur Lösung für Integralgleichungen erster Ordnung verwendet. Als Grundlage dieser Arbeit verweise ich auf den Artikel von Kumar, Manchanda und Pooja [17]. Ziel ist es, die Fredholmgleichung erster Art zu lösen:

$$g(x) = \int_0^1 K(x, s)f(s)ds, \quad x \in [0, 1] \quad (5.5)$$

Im Unterschied zur Integralgleichung 5.1 ist dies kein uneigentliches Integral sondern ein eigentliches Integral mit oberer Integralgrenze 1.

Man nennt  $g(x)$  **observierter Dateninput** und  $K(x, s)$  den **Kern**. Die gesuchte Funktion  $f$  ist Lösung des Problems 5.5.

Vorerst nehmen wir an, dass  $g, f$  stetig auf  $[0, 1]$  sind, sowie dass  $K$  stetig auf  $[0, 1] \times [0, 1]$  ist. Gemäß [5, S.300],[34] ist 5.5 ein schlecht gestelltes Problem. Das bedeutet, dass mindestens eine der Bedingungen für korrekt gestellte Probleme nicht erfüllt wird:

**Definition 5.3.1** (Korrekt gestelltes Problem). *Ein mathematisches Problem heißt korrekt gestellt, wenn*

- *Das Problem hat eine Lösung*
- *Die Lösung ist eindeutig bestimmt*
- *Die Lösung hängt stetig von den Eingangsdaten ab*

[5, S.300] besagt, dass kleine Änderungen in den Eingangsdaten zu großen Änderungen in der Lösung führen können. Um das schlecht gestellte Problem in ein korrekt gestelltes Problem umzuwandeln, benutzen wir eine Regularisierungsmethode. Hierfür wandeln wir die Fredholm Gleichung erster Art in eine **Fredholm Gleichung zweiter Art** um:

$$\alpha f_\alpha(x) = g(x) - \int_0^1 K(x, s) f_\alpha(s) ds, \quad x \in [0, 1] \quad (5.6)$$

wobei der **Regularisierungsparameter**  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  sehr klein ist. Eine Fredholm Gleichung zweiter Art ist ein korrekt gestelltes Problem. Es gilt mit  $\alpha \rightarrow 0$  nach [17]:

$$f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(x)$$

Unser Ziel ist es nun, Gleichung 5.6 zu lösen. Wir approximieren  $f_\alpha(x)$  mit

$$f_\alpha(t) \approx \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(t) \quad (5.7)$$

Setzen wir 5.7 in 5.6 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(x) &= g(x) - \int_0^1 K(x, s) \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(s) ds \\ \alpha \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(x) &= g(x) - \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \int_0^1 K(x, s) \psi_{n,m}(s) ds \end{aligned}$$

Mit

$$L_{nm}(x) = \int_0^1 K(x, s) \psi_{n,m}(s) ds \quad (5.8)$$

folgt

$$\alpha \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(x) = g(x) - \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} L_{nm}(x) \quad (5.9)$$

Wir berechnen  $L_{nm}(x)$  mit einer numerischen Integral-Approximation. Denkbar ist zum Beispiel eine Gauss-Legendre Quadratur (kann in Delves [5] nachgelesen werden). Programme wie Matlab oder Maple stellen jedoch vorimplementierte Integral Approximationen zur Verfügung. So gibt es in Matlab die Funktion  $q = \text{integral}(\text{fun}, \text{xmin}, \text{xmax})$ , welche von Shampine [29] vorgestellt wird. Das Verfahren ist auch geeignet, wenn ein Integral Singularitäten in den Endpunkten besitzt, was sich in einem späteren Abschnitt als nützlich erweist. Um ein Gleichungssystem mit  $2^{K-1}M$  Unbekannten des Vektors  $C$  zu lösen, braucht es  $2^{K-1}M$  Gleichungen. Mit dem Collocation Verfahren erzeugen wir aus 5.9 ein Gleichungssystem. Dafür verwenden wir  $2^{K-1}M$  Stützstellen. Die Stützstellen  $x_i$  ergeben sich durch

$$x_i = \frac{2i-1}{2 * 2^{K-1}M} \quad i = 1, 2, \dots, 2^{K-1}M$$

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\alpha \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(x_i) = g(x_i) - \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} L_{nm}(x_i) \text{ mit } i = 1, \dots, 2^{K-1}M$$

Dieses Gleichungssystem kann mit Hilfe von einem Vektor und zwei Matrizen in einem Matrix Gleichungssystem dargestellt werden:

$$G := [g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{K-1M})]$$

$$\Psi := \begin{bmatrix} \psi_{1,0}(x_1) & \psi_{1,0}(x_2) & \dots & \psi_{1,0}(x_{K-1M}) \\ \psi_{1,1}(x_1) & \psi_{1,1}(x_2) & \dots & \psi_{1,1}(x_{K-1M}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{1,M-1}(x_1) & \psi_{1,M-1}(x_2) & \dots & \psi_{1,M-1}(x_{K-1M}) \\ \psi_{2,0}(x_1) & \psi_{2,0}(x_2) & \dots & \psi_{2,0}(x_{K-1M}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{2^{K-1},M-1}(x_1) & \psi_{2^{K-1},M-1}(x_2) & \dots & \psi_{2^{K-1},M-1}(x_{K-1M}) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L} := \begin{bmatrix} L_{1,0}(x_1) & L_{1,0}(x_2) & \dots & L_{1,0}(x_{K-1M}) \\ L_{1,1}(x_1) & L_{1,1}(x_2) & \dots & L_{1,1}(x_{K-1M}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1,M-1}(x_1) & L_{1,M-1}(x_2) & \dots & L_{1,M-1}(x_{K-1M}) \\ L_{2,0}(x_1) & L_{2,0}(x_2) & \dots & L_{2,0}(x_{K-1M}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{2^{K-1},M-1}(x_1) & L_{2^{K-1},M-1}(x_2) & \dots & L_{2^{K-1},M-1}(x_{K-1M}) \end{bmatrix}$$

Die einzelnen Einträge von  $\Psi$  und  $\mathcal{L}$  berechnen sich demnach wie folgt :

$$\begin{aligned} \Psi_{(i-1)*(M)+j+1,k} &= \psi_{ij}(x_k) \\ \mathcal{L}_{(i-1)*(M)+j+1,k} &= L_{ij}(x_k) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Für das Matrix Gleichungssystem gilt:

$$\begin{aligned} \alpha C \Psi &= G - C \mathcal{L} \\ C(\alpha \Psi + \mathcal{L}) &= G \\ C &= G(\alpha \Psi + \mathcal{L})^{-1} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Um den Lösungsvektor  $C$  zu erhalten, wird  $\alpha > 0$ , aber sehr nahe bei Null gewählt.

## 5.4. Wavelet Collocation Methode mit singulärem Kern und uneigentlichem Integral

Dieser Abschnitt ist eine von mir hergeleitete Erweiterung der Methode des letzten Abschnitts 5.3. In Abschnitt 5.3 ist der Kern stetig und die Integralgrenzen in der Fredholmgleichung sind endlich auf  $[0, 1]$ . Gehen wir nun von einer Singularität des Kerns

und von Integralgrenzen  $[0, \infty]$  in der Gleichung aus. Die Fredholmgleichung erster Art hat jetzt folgende Gestalt:

$$g(x) = \int_0^\infty K(x, s)f(s)ds, \quad x \in [0, \infty] \quad (5.12)$$

dabei hat  $K$  die Form

$$K(x, s) = k(|x - s|) - k(\sqrt{x^2 + s^2})$$

wobei  $k$  eine Funktion ist, die bei 0 eine Singularität besitzt, sonst jedoch stetig auf  $(0, \infty)$  ist. Für den Kern  $K$  gilt, dass dieser somit eine Singularität in  $x = s$  besitzt. Zwei Alternativen werden vorgestellt, um das Problem 5.12 zu lösen. In Abschnitt 7.3 werden diese beide Alternativen auf ihre Anwendbarkeit geprüft und verglichen.

### Alternative 1

Alternative 1 substituiert die Integralgrenzen. Zuerst werden wir 5.12 mit  $s = -\ln(t)$  substituieren, damit das Integral die Grenzen  $[0, 1]$  besitzt.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K(x, s)f(s)ds &= \int_{e^{-0}}^{e^{-\infty}} \frac{K(x, -\ln(t))}{-t} f(-\ln(t))dt \\ &= \int_1^0 \frac{K(x, -\ln(t))}{-t} f(-\ln(t))dt \\ &= \int_0^1 \frac{K(x, -\ln(t))}{t} f(-\ln(t))dt \\ &= \int_0^1 \frac{k(|x + \ln(t)|) - k(\sqrt{x^2 + \ln(t)^2})}{t} f(-\ln(t))dt \end{aligned}$$

Der Kern  $\frac{k(|x + \ln(t)|) - k(\sqrt{x^2 + \ln(t)^2})}{t}$  besitzt Singularitäten in  $x = -\ln(t) \Leftrightarrow t = \exp(-x)$  und  $t = 0$ . Wir spalten das Integral in

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{k(|x + \ln(t)|) - k(\sqrt{x^2 + \ln(t)^2})}{t} f(-\ln(t))dt = \\ &\int_0^{\exp(-x)} \frac{k(|x + \ln(t)|) - k(\sqrt{x^2 + \ln(t)^2})}{t} f(-\ln(t))dt + \\ &\int_{\exp(-x)}^1 \frac{k(|x + \ln(t)|) - k(\sqrt{x^2 + \ln(t)^2})}{t} f(-\ln(t))dt \end{aligned}$$

auf, sodass die Singularitäten die Integrationsgrenzen bilden. Wir setzen

$$\hat{K}(x, t) := \frac{k(|x + \ln(t)|) - k(\sqrt{x^2 + \ln(t)^2})}{t}$$

und für unsere Integralgleichung ergibt sich aus 5.12

$$\int_0^{e^{-x}} \hat{K}(x, t) f(-\ln(t)) dt + \int_{e^{-x}}^1 \hat{K}(x, t) f(-\ln(t)) dt = g(x) \quad (5.13)$$

Mit der Regularisierung 5.6 wandeln wir 5.13 in eine Fredholmgleichung zweiter Art um:

$$\alpha f_\alpha(-\ln(x)) = g(x) - \left[ \int_0^{e^{-x}} \hat{K}(x, t) f_\alpha(-\ln(t)) dt + \int_{e^{-x}}^1 \hat{K}(x, t) f_\alpha(-\ln(t)) dt \right]$$

Wie 5.7 approximieren wir

$$f_\alpha(-\ln(t)) \approx \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(t) \quad (5.14)$$

5.14 setzen wir in die Fredholmgleichung zweiter Art ein:

$$\alpha \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{n,m}(x) = g(x) - \sum_{n=1}^{2^{K-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \hat{L}_{nm}(x)$$

mit

$$\hat{L}_{nm}(x) := \int_0^{e^{-x}} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt + \int_{e^{-x}}^1 \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt \quad (5.15)$$

Nach 5.2 ist  $\psi_{n,m}(t)$  auf Subintervallen von  $[0, 1]$  definiert. Die Intervallgrenzen sind abhängig von  $n$  weiter auf die Subintervalle  $a_i = \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq t \leq b_i = \frac{\hat{n}+1}{2^k}$  einzugrenzen, wobei  $\psi_{n,n}(t) = 0$ , wenn  $t < a_{nm}$  bzw.  $t > b_{nm}$ . Es ergeben sich folgende Fälle:

$$\begin{cases} (1) & e^{-x} \leq a_{mn} \leq b_{nm} \\ (2) & a_{mn} \leq e^{-x} \leq b_{mn} \\ (3) & a_{mn} \leq b_{mn} \leq e^{-x} \end{cases}$$

Wir fahren mit 5.15 fort und führen die Fallunterscheidung durch, indem wir die Integrallgrenzen auf den jeweiligen Fall anpassen und dann geschickt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{nm}(x) &= \int_{\max(0, a_{mn})}^{\min(e^{-x}, b_{mn})} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt + \int_{\max(e^{-x}, a_{mn})}^{\min(1, b_{mn})} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt \\ &= \mathbf{1}_{e^{-x} \leq a_{mn}} \int_{\max(0, a_{mn})}^{\min(1, b_{mn})} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt \\ &\quad + \mathbf{1}_{a_{mn} < e^{-x} < b_{mn}} \left[ \int_{\max(0, a_{mn})}^{e^{-x}} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt + \int_{e^{-x}}^{\min(1, b_{mn})} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt \right] \\ &\quad + \mathbf{1}_{e^{-x} \geq b_{mn}} \int_{\max(0, a_{mn})}^{\min(1, b_{mn})} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt \\ &= (\mathbf{1}_{e^{-x} \leq a_{mn}} + \mathbf{1}_{e^{-x} \geq b_{mn}}) \int_{\max(0, a_{mn})}^{\min(1, b_{mn})} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt \\ &\quad + \mathbf{1}_{a_{mn} < e^{-x} < b_{mn}} \left[ \int_{\max(0, a_{mn})}^{e^{-x}} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt + \int_{e^{-x}}^{\min(1, b_{mn})} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt \right] \\ &:= (\mathbf{1}_{e^{-x} \leq a_{mn}} + \mathbf{1}_{e^{-x} \geq b_{mn}}) \hat{L}1_{nm}(x) + \mathbf{1}_{a_{mn} < e^{-x} < b_{mn}} [\hat{L}2_{nm}(x) + \hat{L}3_{nm}(x)] \end{aligned}$$

Wir definieren Matrix  $\hat{\mathcal{L}}$  mit den Einträgen (vgl. 5.10)

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_{(i-1)*(M)+j+1,k} &:= \hat{L}_{ij}(x_k) \\ &= (\mathbf{1}_{e^{-x_k} \leq a_{ij}} + \mathbf{1}_{e^{-x_k} \geq b_{ij}}) \hat{L}1_{ij}(x_k) + \mathbf{1}_{a_{ij} < e^{-x_k} < b_{ij}} [\hat{L}2_{ij}(x_k) + \hat{L}3_{ij}(x_k)]\end{aligned}$$

Die Matrix  $\hat{\mathcal{L}}$  lässt sich somit in drei Matrizen aufspalten. Zudem definieren wir zwei Indikator Matrizen, die wir komponentenweise mit den Matrizen multiplizieren.

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{I}}1 \circ \hat{\mathcal{L}}1 + \hat{\mathcal{I}}2 \circ (\hat{\mathcal{L}}2 + \hat{\mathcal{L}}3) \quad (5.16)$$

wobei  $\circ$  die komponentenweise Multiplikation zweier Matrizen beschreibt mit den folgenden Einträgen:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}1_{(i-1)*(M)+j+1,k} &:= \int_{\max(0, a_{mn})}^{\min(1, b_{mn})} \hat{K}(x_k, t) \hat{\psi}_{n,m}(t) dt \\ \hat{\mathcal{L}}2_{(i-1)*(M)+j+1,k} &:= \int_{\max(0, a_{mn})}^{e^{-x}} \hat{K}(x_k, t) \hat{\psi}_{n,m}(t) dt \\ \hat{\mathcal{L}}3_{(i-1)*(M)+j+1,k} &:= \int_{e^{-x}}^{\min(1, b_{mn})} \hat{K}(x_k, t) \hat{\psi}_{n,m}(t) dt \\ \hat{\mathcal{I}}1_{(i-1)*(M)+j+1,k} &:= (\mathbf{1}_{e^{-x_k} \leq a_{ij}} + \mathbf{1}_{e^{-x_k} \geq b_{ij}}) \\ \hat{\mathcal{I}}2_{(i-1)*(M)+j+1,k} &:= \mathbf{1}_{a_{ij} < e^{-x_k} < b_{ij}}\end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 5.3 können wir die Matlab Funktion  $q = \text{integral}(\text{fun}, \text{xmin}, \text{xmax})$  als Approximation für  $\hat{\mathcal{L}}1$ ,  $\hat{\mathcal{L}}2$  und  $\hat{\mathcal{L}}3$  anwenden.

Setzen wir 5.16 in 5.11 aus Abschnitt 5.3 ein, erhalten wir den in 5.11 definierten Lösungsvektor  $C$ :

$$\begin{aligned}C &= G(\alpha\Psi + \hat{\mathcal{L}})^{-1} \\ C &= G(\alpha\Psi + (\hat{\mathcal{I}}1 \circ \hat{\mathcal{L}}1 + \hat{\mathcal{I}}2 \circ (\hat{\mathcal{L}}2 + \hat{\mathcal{L}}3)))^{-1}\end{aligned} \quad (5.17)$$

Nun können wir  $f(-\ln(t))$  nach 5.4 approximieren:

$$f(-\ln(t)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(-\ln(t)) \approx \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Upsilon(t)C$$

mit dem Vektor  $\Upsilon_{(i-1)*(M)+j+1}(t) = \psi_{ij}(t)$ , der die Legendre Wavelet Basis Funktionen als Einträge beinhaltet. Für die Lösung fehlt noch die Rücksubstitution  $t = e^{-x}$ :

$$f(x) \approx \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Upsilon(e^{-x})C \quad (5.18)$$

Wir haben  $f(-\ln(t))$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  approximiert. Hierbei wurde von der Funktion  $g$ , die den Dateninput beschreibt, nur Information auf  $[0, 1]$  verwendet. Es ist jedoch wünschenswert, eine breitere Information von  $g$  zu benutzen. Um dies umzusetzen, verwenden wir gemäß 5.13 eine erweiterte Transformation  $s = -\ln((t-s)/h)$  auf das

gewünschte Intervall, wobei  $s$  den Intervallanfang und  $h$  die Länge des Intervalls bezeichnet. Wir erhalten aus 5.13 folgende Gleichung:

$$\int_s^{h*e^{-x}+s} \hat{K}(x, t) f(-\ln((t-s)/h)) dt + \int_{h*e^{-x}+s}^{h+s} \hat{K}(x, t) f(-\ln((t-s)/h)) dt = g(x)$$

mit  $x \in [s, s+h]$  (5.19)

Dies führt uns zu der Berechnung von den Integralen 5.15 aus den Fredholmgleichungen

$$\hat{L}_{nm}(x) = \int_s^{h*e^{-x}+s} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt + \int_{h*e^{-x}+s}^{h+s} \hat{K}(x, t) \psi_{n,m}(t) dt$$

mit

$$\hat{K}(x, t) = \frac{k(|x + \ln((t-s)/h)|) - k(\sqrt{x^2 + \ln((t-s)/h)^2})}{t-s}$$

Die Legendre Polynome  $\psi_{n,m}$  haben wir als Orthonormalbasis von  $L^2[0, 1]$  definiert. Wir führen die Basis auf dem endlichen Intervall  $L^2[s, h]$  durch Translation fort. Für die Einträge von der Matrix  $\Psi$  gilt:

$$\Psi_{(u-1)*(2^{k-1}*M)+(i-1)*(M)+j+1,k} = \psi_{ij}(x_k - (s+u-1))$$

mit  $u = 1, 2, \dots, h$ . Wir erhalten äquivalent zu 5.18 folgende Approximation:

$$f(x) \approx \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\Upsilon(e^{-x} * h + s)) * C \quad (5.20)$$

mit

$$\Upsilon_{(u-1)*(2^{k-1}*M)+(i-1)*(M)+j+1}(t) = \psi_{ij}(t - (s+u-1))$$

mit  $u = 1, 2, \dots, h$ .

Durch das Aufteilen des Intervalls haben wir sicher gestellt, dass eine Approximation des Integrals möglich ist. Es sollte jedoch beachtet werden, dass es durch die Singularitäten in den Intervallenden trotzdem noch zu Divergenzen kommen kann, die zu Unsicherheiten von  $\hat{L}$  führen. Je nach Transformation und unterschiedlichen Stützstellen können diese Unsicherheiten auftreten. Deswegen sollte untersucht und getestet werden, für welche  $K$ ,  $M$ ,  $h$  und  $s$  dies möglichst vermieden werden kann. Außerdem sollte der Effekt der Regularisierung der Fredholmgleichung erster Art auf die Lösung analysiert werden. Dazu sollte ein geeigneter Parameter  $\alpha$  gewählt werden, der einerseits wegen  $\alpha \rightarrow 0$  möglichst klein ist, andererseits groß genug ist, so dass das Problem ein korrekt gestelltes Problem ist. Dieses Problem werden wir in 7.3 weiter analysieren.

## Alternative 2

In Alternative 2 reduzieren wir die Integrationsgrenzen von  $[0, \infty]$  auf ein endliches Intervall  $[0, h]$ , wobei  $h$  so gewählt werden soll, dass für das Integral möglichst

$$\int_0^h K(x, s) f(s) ds \approx \int_0^\infty K(x, s) f(s) ds$$

gilt. Wir erhalten somit die Integralgleichung:

$$g(x) = \int_0^h K(x, s) f(s) ds, \quad x \in [0, h]$$

Wir können die Legendre Polynome  $\psi_{n,m}$  als Orthonormalbasis durch Translation  $t - s$  auf dem endlichen Intervall  $[0, h]$  fortführen (siehe Alternative 1). Somit gilt für die Matrix  $\Psi$ :

$$\Psi_{(u-1)*(2^{k-1}*M)+(i-1)*(M)+j+1,k} = \psi_{ij}(x_k - (s + u - 1))$$

mit  $u = 1, 2, \dots, h$ . Der Kern  $K$  besitzt eine Singularität in  $x = s$ . Auch hier werden wir das Integral so aufteilen, dass die Singularstellen in den Integralgrenzen liegen. Damit ergibt sich für die Matrixeinträge von  $\hat{L}$ :

$$\hat{L}_{nm}(x) = \int_0^x K(x, t) \psi_{n,m}(t) dt + \int_x^h K(x, t) \psi_{n,m}(t) dt$$

und wir erhalten die Approximation

$$f(x) \approx \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\Upsilon(x)) * C \quad (5.21)$$

mit  $\Upsilon_{(u-1)*(2^{k-1}*M)+(i-1)*(M)+j+1}(t) = \psi_{ij}(t - (u - 1))$  mit  $u = 1, 2, \dots, h$ .

Der Matlabcode C.3 führt die in diesem Abschnitt vorgestellten zwei alternativen Methoden aus. In Abschnitt 7.3.1 werden wir eine Kalibrierung der Parameter beider Methoden vornehmen. In Abschnitt 7.3.2 werden dann die Resultate vorgestellt.

## 6. Optimale Steuerpolitik von zwei Unternehmen mit gleicher Volatilität

In diesem und in Kapitel 7 gehe ich auf den Artikel von McKean und Sheep [22] ein. Es wird ein Modell für die Wirtschaft eines Staates vorgestellt und untersucht, welche Steuerpolitik für den Staat optimal ist. In diesem Modell besteht die Wirtschaft aus zwei Unternehmen mit jeweils gleicher Volatilität  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ , welche den Dynamiken

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \mu_1(t)dt + \sigma_1 dW_1(t), & X_1(0) &= x_1, \sigma_1^2 = 1 \\ dX_2(t) &= \mu_2(t)dt + \sigma_2 dW_2(t), & X_2(0) &= x_2, \sigma_2^2 = 1 \end{aligned}$$

folgen, wobei  $X_i$  das Vermögen von Unternehmen  $i$  ist und  $W_1$  und  $W_2$  zwei voneinander unabhängige Brown'sche Bewegungen sind. In Kapitel 7 wird im Modell die Volatilität geringfügig verändert. Die Steuerstrategie  $\pi$  spiegelt sich in den Drifts  $\mu_1(t)$  und  $\mu_2(t)$  wieder. Dabei gilt  $\mu_1(t) + \mu_2(t) = 1$  mit  $\mu_1(t), \mu_2(t) \geq 0 \Leftrightarrow \mu_2(t) = 1 - \mu_1(t)$ . Gilt etwa  $\mu_2 > \mu_1$ , so wird das Unternehmen 2 mehr gefördert als Unternehmen 1. In dem vereinfachten Modell unterscheiden wir nun zwischen zwei verschiedenen Steuerpolitiken:

**Definition 6.0.1** (Demokratische Steuerpolitik oder Push-Bottom Strategie). *Falls  $X_1(t) \leq X_2(t)$ , wählt der Staat die Steuerpolitik  $\pi_D$  zum Zeitpunkt  $t$ :*

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \pi(t) \\ \mu_2(t) &= 1 - \pi(t) \end{aligned}$$

mit  $\pi(t) = 1$  und umgekehrt.

**Definition 6.0.2** (Republikanische Steuerpolitik oder Push-Top Strategie). *Falls  $X_1(t) \leq X_2(t)$ , wählt der Staat die Steuerpolitik  $\pi_R$  zum Zeitpunkt  $t$ :*

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \pi(t) \\ \mu_2(t) &= 1 - \pi(t) \end{aligned}$$

mit  $\pi(t) = 0$  und umgekehrt.

In unserem Modell gehen wir also davon aus, dass es nur zwei Steuerpolitiken  $\Pi = \{\pi_D, \pi_R\}$  gibt, zwischen denen man sich entscheiden muss. Die Ruinzeitpunkte von Unternehmen 1 und 2 sind

$$\tau_1 = \min_t \{X_{1,\pi}(t) < 0\} \text{ und } \tau_2 = \min_t \{X_{2,\pi}(t) < 0\}$$

Es stellt sich die Frage, welche der beiden Steuerpolitken optimal ist, falls man die Wahrscheinlichkeit gemäß Abschnitt Kapitel 3, dass beide Unternehmen gemeinsam überleben  $\mathbb{P}[\tau_1 = \infty \text{ und } \tau_2 = \infty]$  maximieren will. Folgendes Optimierungsproblem gilt es zu lösen:

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{P}[\tau_1 = \infty \text{ und } \tau_2 = \infty | x_1, x_2] = \max_{\pi \in \Pi} \delta_\pi(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2) \quad (6.1)$$

Intuitiv ist klar, dass unter dieser Fragestellung der Staat immer das Unternehmen unterstützt, welches im Zeitpunkt  $t$  schwächer ist, und somit die Demokratische Steuerpolitik angewandt wird. Dies gilt es, in diesem Kapitel mittels der stochastischen Kontrolltheorie zu beweisen. McKean und Sheep [22] stellt auch eine allgemeinere Formulierung der Dynamik der Unternehmen mit  $\mu_1(t) + \mu_2(t) = 1$  und  $\mu_1(t), \mu_2(t) \geq -\rho$ ,  $\infty > \rho \geq -\frac{1}{2}$  vor. Mit dieser Dynamik ist es möglich, dass  $\mu_i \leq 0$  gilt. Dabei werden vom Staat bei einem Unternehmen Steuern eingenommen. Diese Steuern werden dann an das andere Unternehmen zur Unterstützung weiter gegeben. Mit der Demokratischen Steuerpolitik ergibt sich in diesem Fall eine Robin Hood Strategie. McKean und Sheep [22] konnten jedoch nur mit  $\rho = 0$  eine Lösung für das Problem finden.

## 6.1. Hamilton- Jacobi- Bellman Gleichung

Wir suchen die HJB Gleichung für unser Problem 6.1. Vergleichen wir die Zustände unserer beiden Unternehmen mit der Differentialgleichung 4.20, so identifizieren wir:

$$dX = \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix}, b(t, X, \pi) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi(t) \\ 1 - \pi(t) \end{bmatrix}, a(t, X, \pi) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Wertfunktion  $V(x_1, x_2)$  ist die optimale Überlebenswahrscheinlichkeit  $V(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2)$  und das Zielfunktional ist die Überlebenswahrscheinlichkeit mit beliebiger Strategie  $\pi$   $J(x_1, x_2, \pi) = \delta_\pi(x_1, x_2)$  aus Problem 6.1. Mit der HJB-Gleichung 4.15 ergibt sich:

$$0 = \sup_{\pi \in \Pi} \{ \pi(t)V_1(x_1, x_2) + (1 - \pi(t))V_2(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(V_{11}(x_1, x_2) + V_{22}(x_1, x_2)) \} \quad (6.2)$$

Die Indizes 1, 2, 11, 22 der Funktion  $V$  beschreiben jeweils die partiellen Ableitung in ihren Quadranten.

*Herleitung von 6.2.* Mit dem Dynamic Programming Principle aus Theorem 4.1.1 und keinen laufenden Kosten  $\varphi = 0$  ergibt sich

$$V(x_1, x_2) = \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}[V(X_1(t), X_2(t)) | \mathcal{F}_0] \quad (6.3)$$

Wenden wir die Ito-Formel 4.1.7 auf  $V(X_1(t), X_2(t))$  an:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(X_1(t), X_2(t))|\mathcal{F}_0] &= V(x_1, x_2) \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^t [\pi(s)V_1(X_1(s), X_2(s)) + (1 - \pi(s))V_2(X_1(s), X_2(s)) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}(V_{11}(X_1(s), X_2(s)) + V_{22}(X_1(s), X_2(s)))]ds \right. \\ &+ \left. \underbrace{\int_0^t V_1(X_1(s), X_2(s))dW_1(s) + V_2(X_1(s), X_2(s))dW_2(s)}_{=0 \text{ da Martingal}}\right]|\mathcal{F}_0] \end{aligned}$$

Dann setzen wir die letzte Gleichung in 6.3 ein, subtrahieren  $V(x_1, x_2)$  und dividieren durch  $t$ . Mit  $t \rightarrow 0$  erhalten wir 6.2 □

Für die Demokratische Steuerpolitik oder Push-Bottom Strategie ergibt sich mit  $X_1(t) \leq X_2(t)$

$$0 \geq V_1(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(V_{11}(x_1, x_2) + V_{22}(x_1, x_2)) \quad (6.4)$$

und für die Republikanische Steuerpolitik oder Push-Top Strategie:

$$0 \geq V_2(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(V_{11}(x_1, x_2) + V_{22}(x_1, x_2)) \quad (6.5)$$

Letztendlich ergibt sich aus 6.2 die HJB Gleichung

$$0 = \max(V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2)) + \frac{1}{2}(V_{11}(x_1, x_2) + V_{22}(x_1, x_2)) \quad (6.6)$$

Wir erhalten somit eine partielle Differentialgleichung und können die Randbedingungen als  $V(x_1, 0)$ ,  $V(0, x_2)$ ,  $V(x_1, \infty)$  und  $V(\infty, x_2)$  formulieren. Aus 3.22 ist

$$\delta(x) = 1 - e^{-2\frac{x*\mu}{\sigma^2}}$$

die Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Unternehmen, das einer Brown'schen Bewegung folgt. Wenn eines der Unternehmen nun kein Startkapital  $x_i = 0$  besitzt, ergibt sich für die jeweilige Überlebenswahrscheinlichkeit  $\delta_i = 0$ , somit gilt für

$$\begin{aligned} V(x_1, 0) &= 0 \\ V(0, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Für unendliches Startkapital eines Unternehmens ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit  $\delta_i = 1$  und es gilt für die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} V(x_1, \infty) &= (1 - e^{-2x_1}) * 1 \\ V(\infty, x_2) &= (1 - e^{-2x_2}) * 1 \end{aligned}$$

## 6.2. Optimale Steuerstrategie und maximale Überlebenswahrscheinlichkeit

McKean und Sheep haben mit "großem Glück und viel Schwierigkeit"[22] die partielle Differentialgleichung 6.6 gelöst. Wir werden deswegen keine Herleitung, sondern nur einen Beweis dafür liefern, dass 6.7 als gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit des Problems 6.1 maximal ist. Zudem wird auch gezeigt, dass die Push-Bottom Strategie optimal ist.

Die Lösung für die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit ist nach [22]

$$\delta(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = 1 - e^{-2\min(x_1, x_2)} - 2\min(x_1, x_2)e^{-(x_1+x_2)} \quad (6.7)$$

Als partielle Ableitungen ergeben sich

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2) &= \begin{cases} 2e^{-2x_1} - 2e^{-x_1-x_2} + 2x_1e^{-x_1-x_2} & x_1 \leq x_2 \\ 2x_2e^{-x_1-x_2} & \text{sonst} \end{cases} \\ V_2(x_1, x_2) &= \begin{cases} 2x_1e^{-x_1-x_2} & x_1 \leq x_2 \\ 2e^{-2x_2} - 2e^{-x_1-x_2} + 2x_2e^{-x_1-x_2} & \text{sonst} \end{cases} \\ V_{11}(x_1, x_2) &= \begin{cases} 2e^{-2x_1}((x_1 - 2)(-e^{x_1-x_2}) - 2) & x_1 \leq x_2 \\ -2x_2e^{-x_1-x_2} & \text{sonst} \end{cases} \\ V_{22}(x_1, x_2) &= \begin{cases} -2x_1e^{-x_1-x_2} & x_1 \leq x_2 \\ 2e^{-2x_2}((x_2 - 2)(-e^{x_1-x_2}) - 2) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $V \in C^1 \forall x_1, x_2 > 0$  und  $V \in C^2$  auf  $x_1 = x_2$ . Durch Einsetzen der partiellen Ableitungen in die HJB Gleichung 6.6 können wir zeigen, dass 6.7 die HJB Gleichung erfüllt. Dies ist jedoch nur eine notwendige Bedingung für die Maximalität einer Lösung. Wir zeigen nun, dass  $V$  wirklich maximal ist. Dazu zeigen wir

$$\delta_\pi(x_1, x_2) \leq V(x_1, x_2)$$

wobei  $\delta_\pi$  die Überlebenswahrscheinlichkeit, dass beide Unternehmen überleben, für eine beliebige Strategie  $\pi \in \Pi$  ist. Definieren wir den Prozess

$$Z(t) := V(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t))$$

Der Prozess  $Z(t)$  beschreibt die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit von zwei Unternehmen zum Zeitpunkt  $t$ , wenn vor  $t$  beliebige Strategien  $\pi$  verwendet worden sind und nach  $t$  eine optimale Strategie verwendet wird. Wir können zeigen, dass der Prozess  $Z(t)$  ein Supermartingal ist, indem wir zeigen, dass das erwartete lokale Ito-Differential kleiner gleich 0 ist:  $E[dZ(t)] \leq 0$ . Wir wenden also die Ito-Formel aus Bemerkung 4.1.7 auf  $dZ(t)$  an und nehmen den Erwartungswert.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[dZ(t)] &= \mathbb{E}[\underbrace{\mathcal{L}Z(t)dt + DZ(t)dW_t}_{=0}] \\ &= \max(V_1, V_2) + \frac{1}{2}(V_{11} + V_{22}) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die Drift von  $Z$  ist negativ mit

$$-2e^{-2x_1} + 2e^{-x_1-x_2} - 2x_1e^{-x_1-x_2} \leq 0 \text{ für } x_1 \leq x_2$$

und mit der Supermartingaleigenschaft von  $Z(t)$  gilt

$$\mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}[V(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t))] \leq Z(0) = V(x_1, x_2)$$

Insbesondere für den Zeitpunkt  $t = \infty$  ergibt sich

$$\mathbb{E}[Z(\infty)] \leq V(x_1, x_2) \tag{6.9}$$

Für  $t = \infty$  haben wir 2 Fälle. Entweder haben beide Unternehmen unendliches Kapital oder ein Unternehmen ist insolvent:

$$Z(\infty) = \begin{cases} 1 = V(\infty, \infty) & X_1(\infty), X_2(\infty) = \infty \\ 0 = V(0, x_2) = V(x_1, 0) & X_1(\infty) = 0 \text{ oder } X_2(\infty) = 0 \end{cases}$$

Mit 6.9 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(\infty)] &= \underbrace{V(\infty, \infty)}_{=1} * \delta^\pi(x_1, x_2) + \underbrace{V(0, x_2) * \mathbb{P}[\text{Unternehmen 1 geht insolvent}]}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{V(x_1, 0) * \mathbb{P}[\text{Unternehmen 2 geht insolvent}]}_{=0} \\ &= \delta^\pi(x_1, x_2) \leq V(x_1, x_2) \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Nehmen wir nun an, dass  $x_1 \leq x_2$ . In der HJB Gleichung 6.6 muss  $\max(V_1, V_2)$  ermittelt werden. Mit den oben hergeleiteten ersten partiellen Ableitungen gilt  $V_2 \leq V_1$ . Somit resultiert aus der HJB Gleichung die Push-Bottom Strategie 6.4. Damit erfolgt auch Gleichheit in 6.8 und somit Optimalität der Push-Bottom Strategie.

## 7. Optimale Steuerpolitik von zwei Unternehmen mit unterschiedlicher Volatilität

In diesem Kapitel werden wir die Annahmen für die Dynamiken der Unternehmen leicht abändern. Mit Ausnahme der Volatilität bleiben die Annahmen des Modells aus Kapitel 6 erhalten. Wir verändern die Volatilität des Unternehmens 2 folgendermaßen:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \mu_1(t)dt + \sigma_1 dW_1(t), & X_1(0) &= x_1, \sigma_1^2 = 1 \\ dX_2(t) &= \mu_2(t)dt + \sigma_2 dW_2(t), & X_2(0) &= x_2, \sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \epsilon = 1 + \epsilon, \end{aligned}$$

wobei  $W_1$  und  $W_2$  zwei voneinander unabhängige Brown'sche Bewegungen sind und  $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \epsilon \geq \sigma_1^2 = 1$  mit  $\epsilon > 0$ . Wenn die Volatilität eines Unternehmens steigt, so sinkt seine Überlebenswahrscheinlichkeit nach der Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit 3.22. In einer sozialistisch ausgerichteten Steuerpolitik wird das Unternehmen gefördert, welches eine geringere Überlebenswahrscheinlichkeit hat. Um die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit von zwei Unternehmen zu maximieren, soll das volatilere Unternehmen eine höhere Förderungsspannweite erhalten als in Kapitel 6 vorausgesetzt. Also wird das Unternehmen mit höherer Volatilität nun solange gefördert, bis sein Vermögen  $x_2$  dasjenige  $x_1$  Vermögen des anderen Unternehmens zuzüglich eines vermögensabhängigen Schwellenwerts  $\eta_\epsilon(x_1) > 0$  übersteigt.  $\eta_\epsilon$  ist auch abhängig von der gewählten Volatilität  $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \epsilon$ . In diesem Kapitel wird es unser Ziel sein,  $\eta_\epsilon(x)$  zu ermitteln.

**Definition 7.0.1** (Push-Bottom Strategie mit einem volatileren Unternehmen). *Falls  $X_1(t) + \eta_\epsilon(X_1(t)) \leq X_2(t)$  mit  $\eta_\epsilon(X_1) \geq 0$ , wählt der Staat die Steuerpolitik  $\pi_{DV}$  zum Zeitpunkt  $t$ :*

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \pi(t) \\ \mu_2(t) &= 1 - \pi(t) \end{aligned}$$

mit  $\pi(t) = 1$  und umgekehrt.

**Definition 7.0.2** (Push-Top Strategie mit einem volatileren Unternehmen). *Falls  $X_1(t) + \eta_\epsilon(X_1(t)) \leq X_2(t)$  mit  $\eta_\epsilon(X_1) \geq 0$ , wählt der Staat die Steuerpolitik  $\pi_{RV}$  zum Zeitpunkt  $t$ :*

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \pi(t) \\ \mu_2(t) &= 1 - \pi(t) \end{aligned}$$

mit  $\pi(t) = 0$  und umgekehrt.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass die Push-Bottom Strategie die optimale Strategie für das Optimierungsproblem

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{P}[\tau_1 = \infty \text{ und } \tau_2 = \infty | x_1, x_2] = \max_{\pi \in \Pi} \delta_\pi(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2) \quad (7.1)$$

mit  $\Pi = \{\pi_{DV}, \pi_{RV}\}$ , ist.

## 7.1. Hamilton- Jacobi- Bellman Gleichung

Die HJB Gleichung wird wie in 6.1 hergeleitet. Es gilt:

$$dX = \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix}, b(t, X, \pi) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi(t) \\ 1 - \pi(t) \end{bmatrix}, a(t, X, \pi) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + \epsilon} \end{bmatrix}$$

Analog der Herleitung von 6.6 erhält man die HJB Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{\pi \in \Pi} \{ \pi(t) V_1(x_1, x_2) + (1 - \pi(t)) V_2(x_1, x_2) + \frac{1}{2} (V_{11}(x_1, x_2) + \sigma_2^2 V_{22}(x_1, x_2)) \} \\ &= \max(V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2)) + \frac{1}{2} (V_{11}(x_1, x_2) + \sigma_2^2 V_{22}(x_1, x_2)) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Angenommen der Staat wählt die Push-Bottom Strategie, so kann man die HJB Gleichung in zwei partielle Differentialgleichungen unterteilen:

$$V_1(x_1, x_2) + \frac{1}{2} (V_{11}(x_1, x_2) + \sigma_2^2 V_{22}(x_1, x_2)) = 0 \text{ für } x_1, x_2 \in \text{I} \quad (7.3)$$

$$V_2(x_1, x_2) + \frac{1}{2} (V_{11}(x_1, x_2) + \sigma_2^2 V_{22}(x_1, x_2)) = 0 \text{ für } x_1, x_2 \in \text{II} \quad (7.4)$$

mit den Bereichen  $\text{I} = \{x_1 + \eta_\epsilon(x_1) \leq x_2\}$  und  $\text{II} = \{x_1 + \eta_\epsilon(x_1) > x_2\}$ . Für den Bereich I ergeben sich die Randbedingungen

$$\begin{aligned} V(x_1, \infty) &= 1 - e^{-2x_1} \\ V(0, x_2) &= 0 \\ V(x_1, x_1 + \eta_\epsilon(x_1)) &= V(x_1, B(x_1)) := L(x_1) \end{aligned}$$

und für Bereich II

$$\begin{aligned} V(\infty, x_2) &= (1 - e^{-2\frac{x_2}{\sigma_2}}) \\ V(x_1, 0) &= 0 \\ V(x_1, x_1 + \eta_\epsilon(x_1)) &= V(x_1, B(x_1)) = L(x_1) \end{aligned}$$

mit  $B(x_1) := x_1 + \eta_\epsilon(x_1)$ . In Abbildung 7.1 ist jeweils das Gebiet, auf dem die beiden partiellen Differentialgleichungen gelten, im 1.Quadranten des kartesischen Koordinatensystem veranschaulicht.

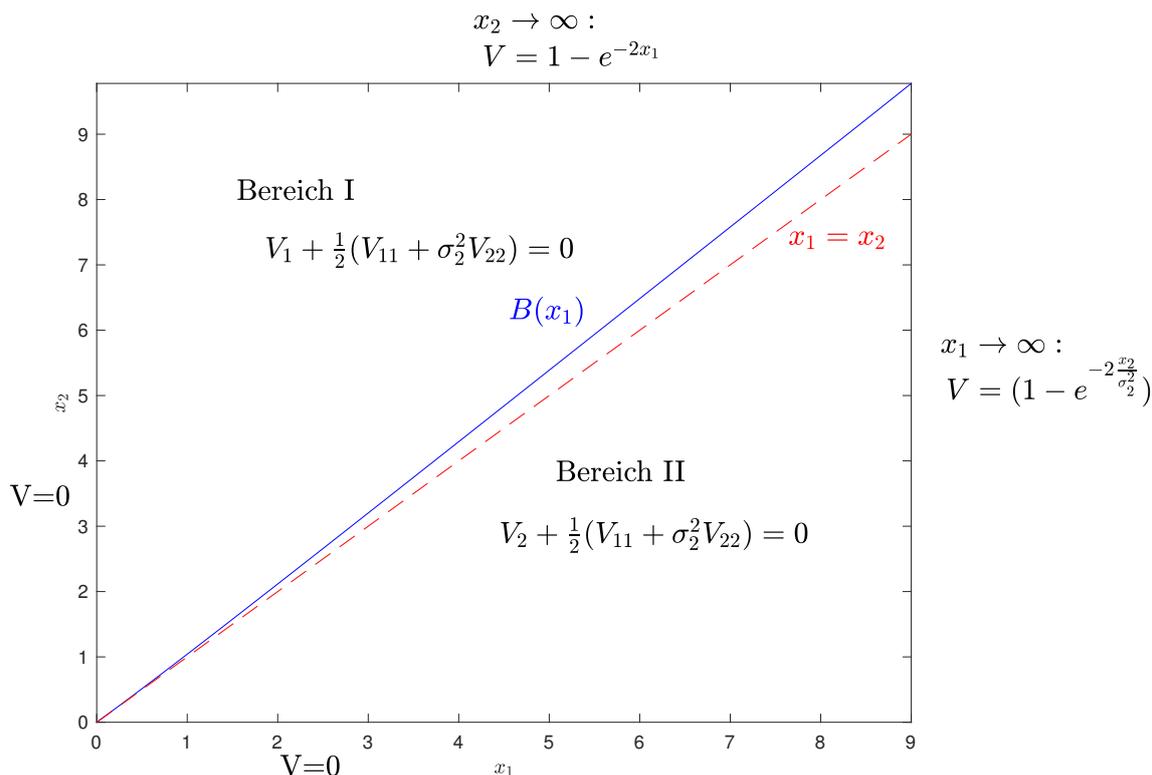


Abbildung 7.1.: HJB Gleichung aus 7.2 für die Push-Bottom Strategie 7.0.1

## 7.2. Implizite Darstellung der Optimalen Steuerstrategie

Wir fahren mit der Herleitung der Optimalität der Push-Bottom Strategie fort. Die HJB Gleichung 7.2 unterscheidet sich geringfügig von der HJB Gleichung 6.6 und somit auch die zugehörige Lösung  $V$ , welche die Gleichung 7.2 erfüllt:

$$\begin{aligned}
 V(x_1, x_2) &= 1 - e^{-2x_1} - 2x_1 e^{-(x_1+x_2-\eta_\epsilon(x_1))} + \kappa(x_1, x_2) && \text{auf Bereich I} \\
 V(x_1, x_2) &= 1 - e^{-2(x_2-\eta_\epsilon(x_1))} - 2(x_2 - \eta_\epsilon(x_1)) e^{-(x_1+x_2-\eta_\epsilon(x_1))} + \kappa(x_1, x_2) && \text{auf Bereich II}
 \end{aligned}
 \tag{7.5}$$

Für die Randbedingung auf  $B(x_1) = x_1 + \eta_\epsilon(x_1)$  folgt

$$V(x_1, x_1 + \eta_\epsilon) = L(x_1) = 1 - e^{-2x_1} - 2x_1 e^{-2x_1} + \kappa(x_1, x_1 + \eta_\epsilon(x_1))$$

$\kappa$  wird so gewählt, dass die Ableitungen die HJB Gleichung 7.2 erfüllen, die Drift von  $Z(t) := V(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t))$  negativ ist und die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
 V_1 &\geq V_2 \text{ in } x_1 + \eta_\epsilon(x_1) \leq x_2 \\
 V_1 &< V_2 \text{ sonst}
 \end{aligned}
 \tag{7.6}$$

gelten. Der Beweis, dass 7.5 maximal gewählt ist, verläuft gemäß des Beweises in Abschnitt 6.2. Aus 7.6 folgt, dass die Push-Bottom Strategie 7.0.1 optimal ist.

Damit eine konkrete Push-Bottom Strategie bestimmt werden kann, muss nun noch die Funktion  $\eta_\epsilon$  ermittelt werden. Hierfür werden wir eine Integralgleichung herleiten, die  $\eta_\epsilon$  implizit darstellt. In Abschnitt 7.3 wird  $\eta_\epsilon$  explizit durch numerische Verfahren berechnet.

Um zur Integralgleichung zu gelangen, betrachten wir zunächst die Bereiche I =  $\{x_1 + \eta_\epsilon(x_1) \leq x_2\}$  und II =  $\{x_1 + \eta_\epsilon(x_1) > x_2\}$  einzeln, welche durch die Funktion  $B(x)$  aus Abbildung 7.1 getrennt sind. Wir bezeichnen die Funktion  $V$  in unseren beiden Teilbereichen als:

$$V = \begin{cases} V^I & \text{in Bereich I} \\ V^{II} & \text{in Bereich II} \end{cases}$$

Beginnen wir mit Bereich I:

**Schritt 1:**

Wir setzen

$$w^I = V^I - (1 - e^{-2x_1})$$

so dass die Randbedingungen

$$\begin{aligned} w^I(x_1, \infty) &= 0 \\ w^I(x_1, B(x_1)) &= L(x_1) - (1 - e^{-2x_1}) := M^I(x_1) \end{aligned}$$

resultieren. Wir leiten  $w^I$  ab:

$$\begin{aligned} w_1^I &= V_1^I - 2e^{-2x_1} \\ w_{11}^I &= V_{11}^I + 4e^{-2x_1} \\ w_2^I &= V_2^I \\ w_{22}^I &= V_{22}^I \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitungen in Bereich I der HJB Gleichung 7.3 ein und erhalten:

$$w_1^I + \frac{1}{2}w_{11}^I + \frac{\sigma_2^2}{2}w_{22}^I = 0 \text{ in } B(x_1) \leq x_2 \quad (7.7)$$

**Schritt 2:**

Wir wenden eine weitere Transformation auf  $w^I = \hat{w}^I * e^{-x_1}$  an. Für die resultierende partielle Differentialgleichung aus der Gleichung 7.7 ist eine Fundamentallösung nach Definition B.0.6 (Anhang) leicht herzuleiten. Die Randbedingungen ergeben sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \hat{w}^I(x_1, \infty) &= 0 \\ \hat{w}^I(x_1, B(x_1)) &= e^{x_1}L(x_1) - e^{x_1} + e^{-x_1} := m^I(x_1) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Wir drücken die Ableitungen  $w^I$  in Abhängigkeit von  $\hat{w}^I$  aus:

$$\begin{aligned} w_1^I &= -e^{-x_1}\hat{w}^I + e^{-x_1}\hat{w}_1^I \\ w_2^I &= e^{-x_1}\hat{w}_2^I \\ w_{11}^I &= e^{-x_1}\hat{w}^I - 2e^{-x_1}\hat{w}_1^I + e^{-x_1}\hat{w}_{11}^I \\ w_{22}^I &= e^{-x_1}\hat{w}_{22}^I \end{aligned}$$

Mit diesen Ableitungen eingesetzt in die Partielle Differentialgleichung aus 7.7 folgt:

$$\hat{w}_{11}^I + \sigma_2^2\hat{w}_{22}^I - \hat{w}^I = 0 \text{ in } B(x_1) \leq x_2 \quad (7.9)$$

**Schritt 3:**

Entlang der Funktion  $B(x)$  müssen die Ableitungen nach  $x_1$  und  $x_2$  den gleichen Wert annehmen:

$$\begin{aligned} V_1^I(x, B(x)) &= V_2^I(x, B(x)) \\ &\Leftrightarrow \\ w_1^I(x, B(x)) + 2e^{-2*x} &= w_2^I(x, B(x)) \\ &\Leftrightarrow \\ \hat{w}_1^I(x, B(x)) * e^{-x} - \hat{w}^I(x, B(x)) * e^{-x} + 2e^{-2*x} &= \hat{w}_2^I(x, B(x)) * e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \\ \hat{w}_1^I(x, B(x)) - \hat{w}_2^I(x, B(x)) &= \hat{w}^I(x, B(x)) - 2 * e^{-x} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Wir differenzieren die Randbedingung 7.8 nach  $x$  :

$$\begin{aligned} \hat{w}^I(x, B(x)) &= m^I(x) \\ \frac{d}{dx} &\Rightarrow \\ \hat{w}_1^I(x, B(x)) + \hat{w}_2^I(x, B(x))B'(x) &= m^I(x) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Addieren wir die Gleichungen 7.10 und 7.11 bzw subtrahieren wir die Gleichungen 7.10 und 7.11, so ergibt sich  $\hat{w}_1^I(x, B(x))$  bzw  $\hat{w}_2^I(x, B(x))$ :

$$\begin{aligned} \hat{w}_1^I(x, B(x)) &= \frac{m^I(x)B'(x) + m^I(x) - 2e^{-x}B'(x)}{1 + B'(x)} \\ \hat{w}_2^I(x, B(x)) &= \frac{m^I(x) - m^I(x) + 2e^{-x}}{1 + B'(x)} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Diese beiden partiellen Ableitungen werden später für die Bestimmung der Richtungsableitung benutzt.

**Schritt 4:**

Sei  $E$  eine Fundamental Lösung der partiellen Differentialgleichung 7.9. Mit der Delta-Distribution  $\delta_\xi$  nach Definition B.0.5 gilt nach Definition B.0.6 für  $E^\xi$ :

$$E_{11}^\xi + \sigma_2^2 E_{22}^\xi - E^\xi = \delta_\xi \quad (7.13)$$

Wir multiplizieren Gleichung 7.13 mit  $\hat{w}^I$  und Gleichung 7.9 mit  $E^\xi$  und integrieren beide Gleichungen über den Bereich I. Als Ränder besitzt dieser Bereich die Achse von  $x_2$ , eine Parallelachse von  $x_1$ , auf der  $\hat{w}^I = 0$  gilt, und  $B(x_1)$  (siehe Abbildung 7.1) .

$$\begin{aligned} \int_I (E_{11}^\xi + \sigma_2^2 E_{22}^\xi - E^\xi) \hat{w}^I dx &= \int_I \delta_\xi \hat{w}^I dx \\ \int_I (\hat{w}_{11}^I + \sigma_2^2 \hat{w}_{22}^I - \hat{w}^I) E^\xi dx &= 0 \end{aligned}$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten Gleichung und wenden die mehrdimensionale Integration aus B.2 an. Da auf der Achse von  $x_2$  und der Parallelachse von  $x_1$   $\hat{w}^I = 0$  gilt, folgt für den Rand von I auf dem Integral  $\partial I = B(x)$ .

$$\begin{aligned} \int_I [\operatorname{div} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \nabla \hat{w}^I \right) E^\xi - \operatorname{div} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \nabla E^\xi \right) \hat{w}^I] dx &= \int_I \delta_\xi \hat{w}^I dx + \int_I [\hat{w}^I E^\xi - E^\xi \hat{w}^I] dx \\ \Leftrightarrow \int_{B(x)} [\nabla \hat{w}^I \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix} E^\xi - \nabla E^\xi \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix} \hat{w}^I] ds &= \hat{w}^I(\xi) \end{aligned}$$

Der linke Term der letzten Gleichung stellt ein Kurvenintegral dar und wir können ihn nach Definition B.0.7 als

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [\nabla \hat{w}^I(\zeta, B(\zeta)) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix} E^\xi(\zeta, B(\zeta), \xi_1, \xi_2) \\ - \nabla E^\xi(\zeta, B(\zeta), \xi_1, \xi_2) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix} \hat{w}^I(\zeta, B(\zeta))] \sqrt{1 + B'^2(\zeta)} d\zeta &= \hat{w}^I(\xi) \end{aligned} \quad (7.14)$$

schreiben. Wir bestimmen die Richtungsableitung  $\nabla \hat{w}^I \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix}$  nach Definition B.0.1. Der äußere Normalenvektor  $v$  lässt sich als Senkrechte auf der Ableitung  $B'(x)$  konstruieren:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B'}{\sqrt{1+B'^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+B'^2}} \end{pmatrix}$$

Mit den partiellen Ableitungen aus 7.12 ergibt sich der Richtungsvektor

$$\begin{aligned} \nabla \hat{w}^I(x, B(x)) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix} &= \\ \frac{m(x)B'^2(x) + m'(x)B'(x) - 2e^{-x}B'^2(x) - m'(x)\sigma_2^2 + m(x)\sigma_2^2 - 2e^{-x}\sigma_2^2}{\sqrt{1 + B'^2(x)}(1 + B'(x))} & \end{aligned}$$

Wählen wir  $\xi = (x, B(x))$  dann folgt  $w(\xi) = m^I(x)$  und setzen wir den Richtungsvektor in das Kurvenintegral 7.14 mit

$$\begin{aligned} m^I(x) &= e^x L(x) - e^x + e^{-x} \\ m^A(x) &= e^x L(x) + e^x L'(x) - e^x - e^{-x} \end{aligned}$$

ein :

$$\begin{aligned} &\frac{e^x}{2} L(x) - \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \\ &\int_0^\infty \left[ \frac{Le^\zeta B'^2 + L'e^\zeta B' + B'Le^\zeta - B'^2 e^\zeta - B'^2 e^{-\zeta} - B'e^{-\zeta} - B'e^\zeta - L'e^\zeta \sigma_2^2}{\sqrt{1 + B'^2(1 + B')}} \right. \\ &E^\xi(\zeta, B(\zeta), x, B(x)) - \nabla E^\xi(\zeta, B(\zeta), x, B(x)) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix} (e^\zeta L(\zeta) - e^\zeta + e^{-\zeta}) \left. \right] \sqrt{1 + B'^2(\zeta)} d\zeta \end{aligned} \quad (7.15)$$

### Schritt 5:

Nun wollen wir die Fundamentallösung  $E$  aus Gleichung 7.15 bestimmen. Für die Fundamentallösung  $G$  der zweidimensionalen modifizierten Helmholtzgleichung

$$\Delta G(r_1, r_2) - \lambda^2 G(r_1, r_2) = \delta(r_1, r_2)$$

wobei  $\Delta$  der Laplace Operator ist, folgt für  $G$  nach [4] :

$$G(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda \sqrt{r_1^2 + r_2^2})$$

$K_0$  bezeichnet die modifizierte Besselfunktion 2. Art mit Ordnung 0.

Man setze  $\lambda = 1$  und

$$\begin{aligned} E(r_1, r_2) &:= \frac{1}{\sigma_2} G(r_1, \frac{r_2}{\sigma_2}) \\ \Rightarrow E_1 &= \frac{1}{\sigma_2} G_1, \quad E_2 = \frac{1}{\sigma_2^2} G_2, \quad E_{11} = \frac{1}{\sigma_2} G_{11}, \quad E_{22} = \frac{1}{\sigma_2 \sigma_2^2} G_{22} \end{aligned}$$

Wir setzen  $E$  in 7.13 ein

$$\begin{aligned} E_{11}(r_1, r_2) + \sigma_2^2 E_{22}(r_1, r_2) - E(r_1, r_2) &= \\ \frac{1}{\sigma_2} [G_{11}(r_1, \frac{r_2}{\sigma_2}) + G_{22}(r_1, \frac{r_2}{\sigma_2}) - G(r_1, \frac{r_2}{\sigma_2})] &= \\ \frac{1}{\sigma_2} \delta(r_1, \frac{r_2}{\sigma_2}) \end{aligned}$$

Mit  $E$  wird also die Helmholtzgleichung erfüllt und die Fundamentallösung  $E^\xi$  bezüglich der verschobenen Delta-Distribution für 7.13 ergibt sich als:

$$E^\xi(x, y, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_2} K_0\left(\sqrt{(\xi_1 - x)^2 + \frac{(\xi_2 - y)^2}{\sigma_2^2}}\right) \quad (7.16)$$

**Schritt 6:**

Wir linearisieren  $E^\xi(\zeta, B(\zeta), x, B(x))$  aus Formel 7.16. Dazu benötigen wir die Ableitung von  $K_0$

$$K_0'(z) = -K_1(z)$$

mit  $K_1$  als modifizierte Besselfunktion 2. Art mit Ordnung 1 [1, S.376] und  $B(x) = x + \eta_\epsilon(x)$ .

$$\begin{aligned} E^\xi(\zeta, B(\zeta), x, B(x)) &\approx \\ &\frac{1}{2\pi} K_0(\sqrt{2}|\zeta - x|) - \frac{\epsilon}{4\pi} K_0(\sqrt{2}|\zeta - x|) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{8\pi} K_1(\sqrt{2}|\zeta - x|)\epsilon|\zeta - x| - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{K_1(\sqrt{2}|\zeta - x|)}{\text{sign}(\zeta - x)} (\eta_\epsilon(\zeta) - \eta_\epsilon(x)) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die **Schritte 1 – 6** werden für den Bereich II in angepasster Form analog durchgeführt:

**Schritt 1:**

Um in Bereich II die Randbedingungen

$$\begin{aligned} w^{\text{II}}(x_1, \infty) &= 0 \\ w^{\text{II}}(x_1, B(x_1)) &= L(x_1) - (1 - e^{-\frac{2B(x_1)}{\sigma_2^2}}) := M^{\text{II}}(x_1) \end{aligned}$$

zu erhalten, wählen wir

$$w^{\text{II}} = V^{\text{I}} - (1 - e^{-\frac{2x_2}{\sigma_2^2}})$$

Es resultiert die partielle Differentialgleichung

$$w_2^{\text{II}} + \frac{1}{2}w_{11}^{\text{II}} + \frac{\sigma_2^2}{2}w_{22}^{\text{II}} = 0 \text{ in } B(x_1) > x_2 \quad (7.18)$$

**Schritt 2:**

Wir transformieren  $w^{\text{I}} = \hat{w}^{\text{I}} * e^{-\frac{x_2}{\sigma_2^2}}$  mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \hat{w}^{\text{II}}(\infty, x_2) &= 0 \\ \hat{w}^{\text{II}}(x_1, B(x_1)) &= e^{\frac{B(x_1)}{\sigma_2^2}} L(x_1) - e^{\frac{B(x_1)}{\sigma_2^2}} + e^{-\frac{B(x_1)}{\sigma_2^2}} := m^{\text{II}}(x_1) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Wir erhalten

$$\hat{w}_{11}^{\text{II}} + \sigma_2^2 \hat{w}_{22}^{\text{II}} - \frac{1}{\sigma_2^2} \hat{w}^{\text{II}} = 0 \text{ in } B(x_1) > x_2 \quad (7.20)$$

**Schritt 3:**

Die partiellen Ableitungen nach  $x_1$  und  $x_2$  ergeben sich als

$$\begin{aligned}\hat{w}_1^{\text{II}}(x, B(x)) &= \frac{m^{\text{II}}(x) + \frac{m^{\text{II}}(x)}{\sigma_2^2} - \frac{2}{\sigma_2^2} e^{-\frac{B(x)}{\sigma_2^2}}}{1 + B'(x)} \\ \hat{w}_2^{\text{II}}(x, B(x)) &= \frac{m^{\text{II}}(x) - \frac{m^{\text{II}}(x)B'(x)}{\sigma_2^2} + \frac{2B'(x)}{\sigma_2^2} e^{-\frac{B(x)}{\sigma_2^2}}}{1 + B'(x)}\end{aligned}\quad (7.21)$$

**Schritt 4:**

Die Normalenableitung in Bereich II auf  $B(x)$  ist die entgegengesetzte Normalenableitung von Bereich I und mit den partiellen Ableitungen aus 7.21 ergibt sich der Richtungsvektor

$$\begin{aligned}\hat{w}^{\text{II}}(x, B(x)) \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ -\sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix} &= \\ \frac{-m^{\text{II}}(x)B'(x) + \frac{m^{\text{II}}(x)B'(x)}{\sigma_2^2} - \frac{2B'^2(x)}{\sigma_2^2} e^{-\frac{B(x)}{\sigma_2^2}} + m^{\text{II}}(x)\sigma_2^2 + m^{\text{II}}(x) - 2e^{-\frac{B(x)}{\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + B'^2(x)}(1 + B'(x))}\end{aligned}$$

Mit  $F$  als Fundamental Lösung der partiellen Differentialgleichung 7.20 gilt :

$$F_{11}^\xi + (\sigma_2^2)F_{22}^\xi - \frac{1}{\sigma_2^2}F^\xi = \delta_\xi$$

Wie in Bereich I erhalten wir ein Kurvenintegral:

$$\begin{aligned}& \frac{e^{\frac{B(x)}{\sigma_2^2}}}{2}L(x) - \frac{e^{\frac{B(x)}{\sigma_2^2}}}{2} + \frac{e^{-\frac{B(x)}{\sigma_2^2}}}{2} = \\ & \int_0^\infty \left[ \frac{-L'B'e^{\frac{B}{\sigma_2^2}} + LB'e^{\frac{B}{\sigma_2^2}} + L'e^{\frac{B}{\sigma_2^2}}\sigma_2^2 - B'e^{\frac{B}{\sigma_2^2}} - B'e^{-\frac{B}{\sigma_2^2}} + Le^{\frac{B}{\sigma_2^2}} - e^{\frac{B}{\sigma_2^2}} - e^{-\frac{B}{\sigma_2^2}}}{\sqrt{1 + B'^2}(1 + B')} \right. \\ & \left. F^\xi(\zeta, B(\zeta), x, B(x)) - \nabla F^\xi(\zeta, B(\zeta), x, B(x)) \cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ \sigma_2^2 - v_2 \end{pmatrix} \left( e^{\frac{B}{\sigma_2^2}}L(\zeta) - e^{\frac{B}{\sigma_2^2}} + e^{-\frac{B}{\sigma_2^2}} \right) \right] \\ & \sqrt{1 + B'^2}(\zeta)d\zeta\end{aligned}\quad (7.22)$$

**Schritt 5:**

Für die Fundamentallösung  $F$  aus Gleichung 7.22 mit  $\lambda = \frac{1}{\sigma_2}$  und

$$F(r_1, r_2) = \frac{1}{\sigma_2^2}G\left(r_1, \frac{r_2}{\sigma_2^2}\right)$$

erhalten wir die verschobene Fundamentallösung

$$F^\xi(\xi_1, \xi_2, x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} K_0\left(\sqrt{\frac{(\xi_1 - x)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(\xi_2 - y)^2}{\sigma_2^2}}\right) \quad (7.23)$$

### Schritt 6:

Auch für die Fundamentallösung  $F$  gibt es eine linearisierte Lösung. Um den Umfang dieser Arbeit in Grenzen zu halten, wird diese Lösung nicht angegeben.

Wir setzen in die Gleichung 7.15 aus Schritt 4 die Linearisierung von  $E^\xi$  und in Gleichung 7.22 aus Schritt 4 die Linearisierung von  $F^\xi$  ein. Auch dieser Zwischenschritt wird hier nicht dargestellt. Jedoch ist ein Artikel von Grandits [9] in Vorbereitung, welcher diese Zwischenschritte ausführt. Danach subtrahieren wir die eingesetzten Gleichungen voneinander und erhalten für die Funktion  $\eta_\epsilon$  eine Fredholm Gleichung erster Art :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [K_0(\sqrt{2}|x - \zeta|) - K_0(\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \zeta^2})] \tilde{\eta}_\epsilon(\zeta) d\zeta + g_\epsilon(x) = 0 \quad (7.24)$$

mit  $\tilde{\eta}_\epsilon = e^{-\zeta} \eta_\epsilon$  und

$$\begin{aligned} g_\epsilon(x) = \epsilon * & \left[ \int_0^\infty 1/2 \frac{K_0(\sqrt{2s^2 + 2x^2}) e^{-s} (-4s^4 + 4s^3x + 4s^2x^2 + 4sx^3 - 8s^3 - 8sx^2)}{\pi(2s^2 + 2x^2)} ds \right. \\ & + \int_0^\infty 1/2 \frac{K_1(\sqrt{2s^2 + 2x^2}) e^{-s} (4s^5 + 8s^3x^2 + 4sx^4 + 4s^4 + 24s^2x^2 + 4x^4)}{\pi(2s^2 + 2x^2)^{3/2}} ds \\ & + \int_0^\infty 1/2 \frac{K_0(\sqrt{2}|s - x|) e^{-s} (2s^2 + 4s)}{\pi} ds \\ & \left. - \int_0^\infty 1/2 \frac{\sqrt{2}K_1(\sqrt{2}|s - x|) |s - x| e^{-s} (s + 1)}{\pi} ds - (x^2 + x) e^{-x} \right] \end{aligned}$$

Je nach Wahl von  $\epsilon$  verändert sich  $\eta_\epsilon$  mit dem Faktor  $\epsilon$ . Analytisch haben wir herausgefunden, dass die Push-Bottom Strategie aus 7.0.1 das Problem 7.1 optimal löst. Wir haben analytisch eine implizite Form 7.24 für  $\eta_\epsilon$  hergeleitet. Jedoch haben wir noch keine explizite Darstellung gefunden. Im folgenden Abschnitt 7.3 werden wir eine numerische Darstellung für  $\eta_\epsilon$  ermitteln.

## 7.3. Numerische Analyse

In diesem Abschnitt wird mit einem numerischen Verfahren eine approximative Lösung für  $\eta_\epsilon(x)$  der Integralgleichung 7.24 hergeleitet. Um aus der impliziten Darstellung von  $\eta_\epsilon(x)$  in der Fredholm Gleichung 7.24 eine explizite Darstellung zu erhalten, benutzen wir die numerische Methode aus Abschnitt 5.4, die Wavelet Collocation Methode. Es wurden zwei Alternativen vorgestellt, die eine Fredholm Gleichung mit uneigentlichem Integral und singulärem Kern unter Anwendung der Wavelet Collocation Methode lösen.

Ziel ist es, anhand der numerischen Methode  $\eta_\epsilon$  mit einer Festlegung von  $\epsilon$  zu bestimmen. Hierbei wurde die Software Matlab Version R2018a auf einem MacBook Pro(13 Zoll, Mitte 2010) mit macOS Sierra Version 10.12.6 verwendet.

Mit der Transformation aus Alternative 1 werden wir folgende Integralgleichung numerisch lösen:

$$\frac{2}{\pi} \int_s^{s+h} \frac{K_0(\sqrt{2}|x + \log(\frac{\zeta-s}{h})|) - K_0(\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \log^2(\frac{\zeta-s}{h})})}{\zeta - s} \tilde{\eta}_\epsilon(-\log(\frac{\zeta-s}{h})) d\zeta + g_\epsilon(x) = 0 \quad (7.25)$$

Alternative 2 löst 7.24 ebenso numerisch, jedoch werden wir die obere Integrationsgrenze der Integralgleichung durch einen endlichen Wert  $h$  ersetzen.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^h [K_0(\sqrt{2}|x - \zeta|) - K_0(\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \zeta^2})] \tilde{\eta}_\epsilon(\zeta) d\zeta + g_\epsilon(x) = 0 \quad (7.26)$$

### 7.3.1. Kalibrierung der Input-Parameter der Wavelet Collocation Methode

In diesem Abschnitt werden wir die Parameter der in 5.4 vorgestellten Methode der Wavelet Collocation kalibrieren. Da  $g_\epsilon(x)$  aus 7.24 linear in  $\epsilon$  ist und somit auch  $\eta_\epsilon$ , setzen wir in diesem Abschnitt  $\epsilon = 1$ . In Abschnitt 7.3.2 ermitteln wir die Lösung  $\eta_\epsilon$  abhängig von verschiedenen  $\epsilon$ .

Als nächstes suchen wir den Regularisierungsparameter  $\alpha$  für die Approximation von einer Fredholmgleichung erster Art durch eine Fredholm Gleichung zweiter Art. Danach werden wir für Alternative 1 eine sinnvolle Transformation suchen. Für Alternative 2 werden wir ein möglichst kleines Intervall für die Integration suchen, sodass die Lösung möglichst exakt ist. Zuletzt sind für beide Alternativen jeweils Parameter  $M$  und  $K$  für die Wavelet Approximation festzulegen.

Anhand der Kalibrierung werden wir vergleichen, welche Alternative zu stabileren oder effektiveren Ergebnissen führt. Die Darstellungen der Lösungen in den folgenden Grafiken entsprechen  $B(x_1) = \eta_\epsilon(x_1) + x_1 = \tilde{\eta}_\epsilon(x_1) * e^{x_1} + x_1$ .

#### Regularisierungsparameter

Wir werden den Regularisierungsparameter  $\alpha$  variieren. Dabei sind  $K, M$  mit  $K = 2$  und  $M = 3$  festgelegt. Alternative 1 mit den variierenden Lösungen und den festen Transformationsparametern  $s = 0$  und  $h = 2$  ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Abbildung 7.3 zeigt die verschiedenen Lösungen auf dem festen endlichen Intervall  $[0, 8]$  für Alternative 2.

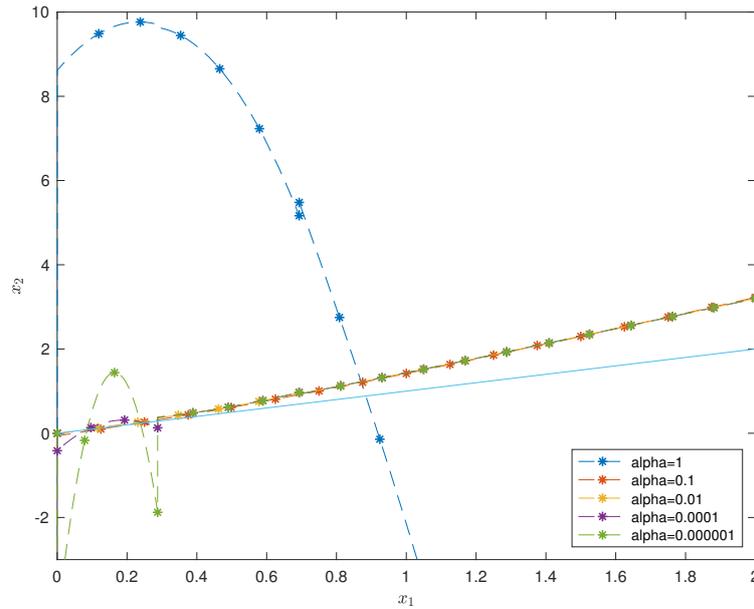


Abbildung 7.2.:  $B(x_1)$  für verschiedene  $\alpha$  gemäß Alternative 1

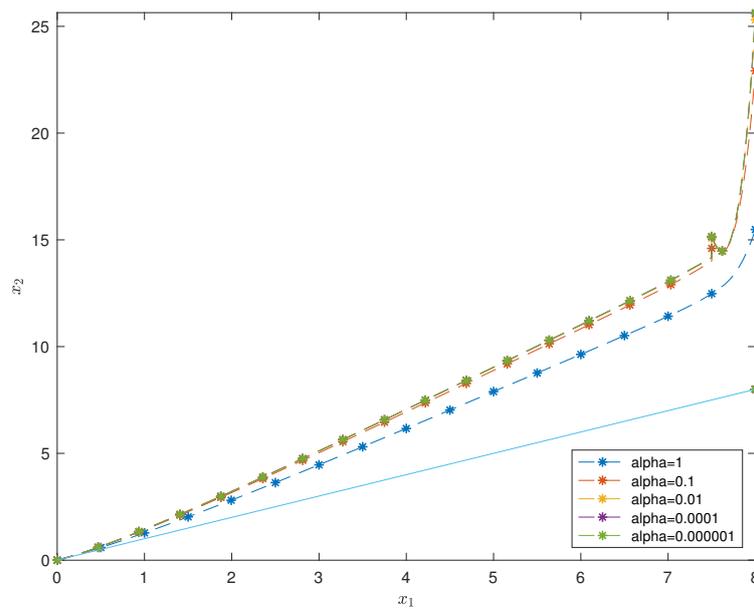


Abbildung 7.3.:  $B(x_1)$  für verschiedene  $\alpha$  gemäß Alternative 2

In Abbildung 7.2 für Alternative 1 ist zu beobachten, dass sich für  $\alpha = 1$  die Lösung verschieden anders zu den anderen Lösungen verhält. Allerdings würden wir in diesem Fall von einer Fredholm Gleichung zweiter Art ohne Regularisierung ausgehen. Lösungen mit  $\alpha < 1$  verhalten sich zumindest ab  $x_1 = 0.3$  gleich. Unter der Annahme dass die Lösung eine Gerade darstellt, sehen wir, dass sich die besten Ergebnisse für  $\alpha = 0.1$  und  $\alpha = 0.01$  ergeben. Für  $\alpha = 10^{-4}$  und  $\alpha = 10^{-6}$  ist das Verhalten in  $0 \leq x_1 \leq 0.3$  durch eine zu

schwache Regularisierung zu erklären und wäre damit ein schlecht gestelltes Problem. Die Integralberechnung in der Matrix  $\hat{\mathcal{L}}$  kann Unsicherheiten durch ihre Singularitäten hervorrufen. Wählen wir  $\alpha$  größer, können diese geglättet werden. Im weiteren Vorgehen entscheiden wir uns für  $\alpha = 0.01$  in Alternative 1.

Abbildung 7.3 für Alternative 2 zeigt für fast alle  $\alpha$ , ausgenommen  $\alpha = 1$ , ein gleichartiges Verhalten. Auch hier entscheiden wir uns für  $\alpha = 0.01$  für die weiteren Variationen der Approximation.

### Transformationsparameter Alternative 1

In Abbildungen 7.4 und Abbildung 7.5 betrachten wir diejenigen Transformationen, welche als untere Integrationsgrenze 0 besitzen und die obere Integrationsgrenze  $h$  variiert wird. Wir legen die anderen Parameter  $\alpha$ ,  $K$  und  $M$  mit  $\alpha = 0.01$ ,  $K = 2$  und  $M = 3$  fest. Abbildung 7.4 zeigt die Lösung auf dem jeweiligen Transformationsintervall in Abhängigkeit von  $h$ . Hiermit enden die Graphen bei unterschiedlichen Werten von  $x_1$ . Zum Beispiel endet der Graph mit  $h = 1$  bei  $x_1 = 1$ . Die Lösungen werden also jeweils auf  $[0, h]$  beschränkt. Abbildung 7.5 zeigt die jeweiligen Lösungen dargestellt, auf dem ganzen Intervall  $[0, 6]$  ohne obere Beschränkung von  $h$ .

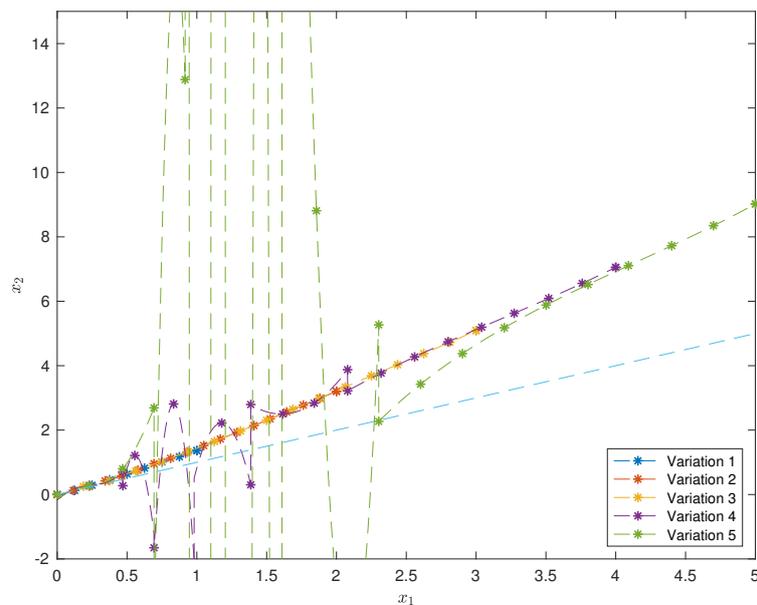


Abbildung 7.4.:  $B(x_1)$  mit verschiedenen Transformationen auf  $[0, h]$

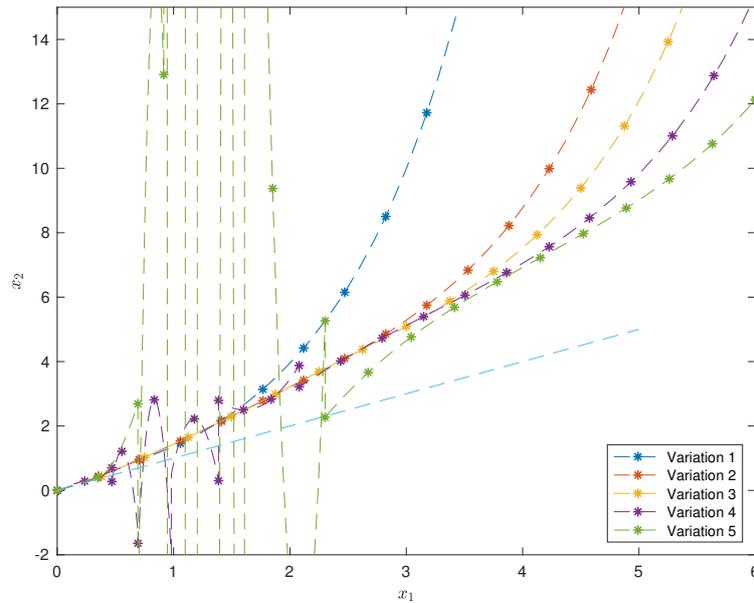


Abbildung 7.5.:  $B(x_1)$  mit verschiedenen Transformationen auf dem ganzen Intervall auf  $[0, 6]$

Variation	Transformation
1	$s = 0$ und $h = 1$
2	$s = 0$ und $h = 2$
3	$s = 0$ und $h = 3$
4	$s = 0$ und $h = 4$
5	$s = 0$ und $h = 5$

Tabelle 7.1.: Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.4 und Abb. 7.5

In Abbildung 7.4 wird ersichtlich, dass Lösungen mit  $h \leq 3$  ähnliches Verhalten, im Sinne einer Geraden, auf ihren jeweiligen Intervallen zeigen. Für  $h > 3$  zeigt sich jedoch im Bereich von  $[0.5, 3]$  kein einheitliches Verhalten. Die Transformation und deren Auswirkung auf die Singularitäten können die Sprünge der Graphen hervorrufen. Jedoch nähern sich die jeweiligen Lösungen am Intervallanfang und Ende wieder den anderen Lösungen an. Es wird anhand dieses Beispiels deutlich, dass Transformationen mit großem  $h > 3$  ungünstig für die Darstellung einer Lösung sind.

Betrachten wir Abbildung 7.5, so wird ersichtlich, dass sich die Lösungen außerhalb ihres Transformationsintervalls unterschiedlich verhalten. Der Versuch einer Darstellung durch Rücktransformation auf das ganze Intervall  $[0, \infty]$  der Lösung führt zu Ergebnissen, die eine starke Variation außerhalb des Transformationsintervalls  $[0, h]$  zeigen. Erklärbar ist diese Beobachtung durch die Einschränkung der Legendre Wavelet Collocation Methode, die nur auf seinem Transformationsintervall  $[0, h]$  definiert ist.

Alternative 1 gibt uns somit eine gute Lösung, wenn wir das Transformationsintervall

möglichst klein halten und die Lösung nur auf dem jeweiligen Transformationsintervall dargestellt wird.

Abbildung 7.6 stellt eine zusammengesetzte Lösung aus 8 verschiedenen Transformationen mit festem  $h = 1$  und variierendem  $s$  dar.

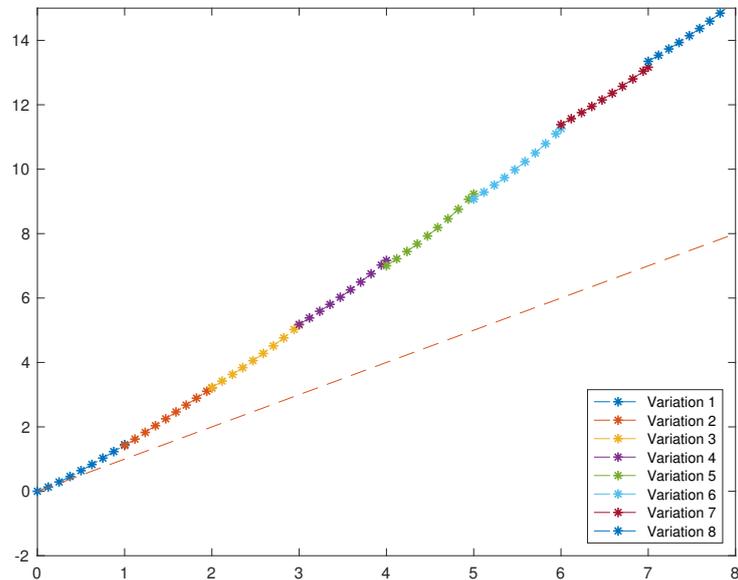


Abbildung 7.6.:  $B(x_1)$  als Zusammensetzung verschiedener Transformationen mit  $h = 1$

Die jeweiligen Lösungen, eingeschränkt auf ihr Transformationsintervall, ergeben ein einheitliches Bild in Abbildung 7.6. Die Zusammensetzung ähnelt einer Geraden. Somit ergibt sich bei Alternative 1 bei kleinen Transformationsintervallen eine gute Lösungsapproximation.

Die folgende Abbildung 7.7 stellt uns dieselbe Variation für  $\tilde{\eta}$  dar.

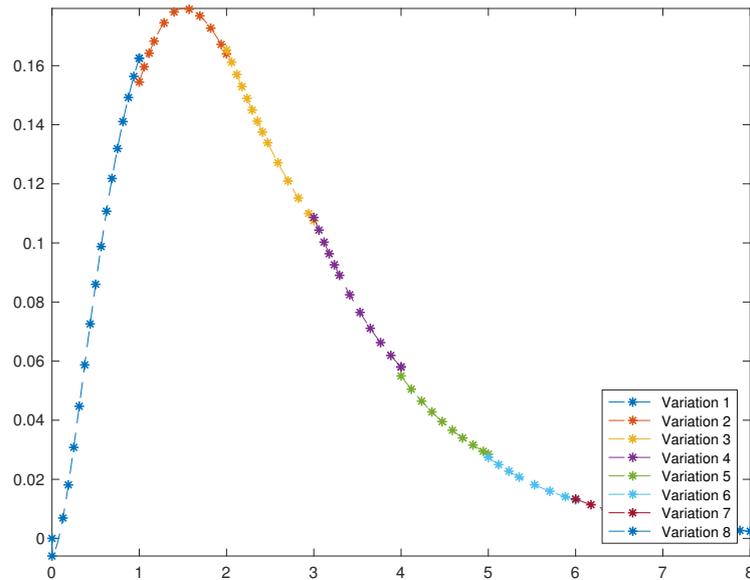


Abbildung 7.7.: Funktion  $\tilde{\eta}$  in Abhängigkeit von verschiedenen Transformationen mit  $h = 1$

Variation	Transformation
1	$s = 0$ und $h = 1$
2	$s = 1$ und $h = 1$
3	$s = 2$ und $h = 1$
4	$s = 3$ und $h = 1$
5	$s = 4$ und $h = 1$
6	$s = 5$ und $h = 1$
7	$s = 6$ und $h = 1$
8	$s = 7$ und $h = 1$

Tabelle 7.2.: Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.6 und 7.7

### Integrationsintervall Alternative 2

Nun werden wir ein geeignetes  $h$  für Alternative 2 suchen. Um

$$\int_0^h K(x, s)f(s)ds \approx \int_0^\infty K(x, s)f(s)ds$$

zu erhalten, sollten wir von der Theorie her  $h$  so groß wie möglich wählen. Jedoch sollte man gleichzeitig auch den Rechenaufwand in Betracht ziehen, weil die Anzahl der Stützstellen mit größeren  $h$  steigt. Deswegen werden wir durch numerisches Testen herausfinden, ab welchen  $h$   $\tilde{\eta}$  ein einheitliches Verhalten zeigt. Wir setzen unsere Parameter mit  $K = 2$ ,  $M = 3$  und  $\alpha = 0.01$  fest.

In Abbildung 7.8 wird die obere Integralgrenze variiert.

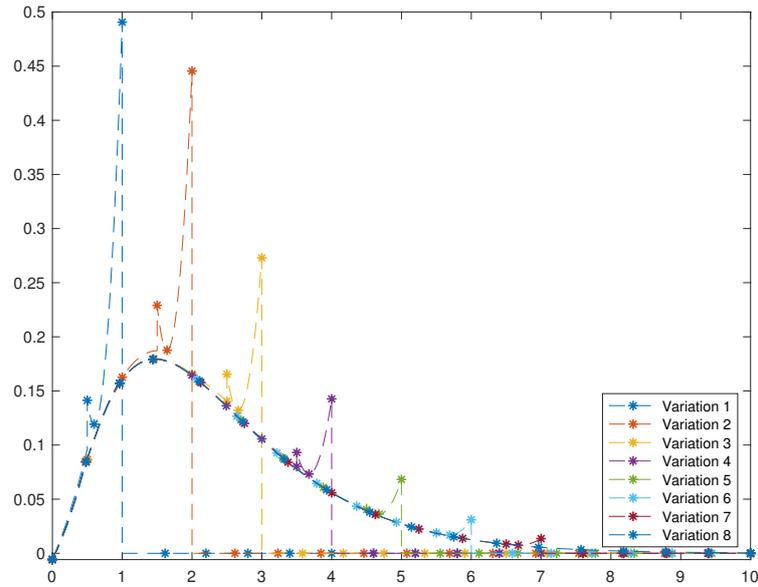


Abbildung 7.8.: Darstellung der Funktion  $\tilde{\eta}$  in Abhängigkeit von  $h$

In Abbildung 7.8 wird ersichtlich, dass  $\tilde{\eta}$  für größer werdende  $h$  als eine Kurve beschrieben werden kann. Bei  $x_1 = h$  stürzt die Kurve jedoch immer auf 0 ab. Zudem steigt die Kurve kurz vor  $x_1 = h$  sehr stark an.

Die Abbildung 7.9 zeigt uns die Lösung im Sinne von  $B(x_1) = \eta_\epsilon(x_1) + x_1 = \tilde{\eta}_\epsilon(x_1) * e^{x_1} + x_1$

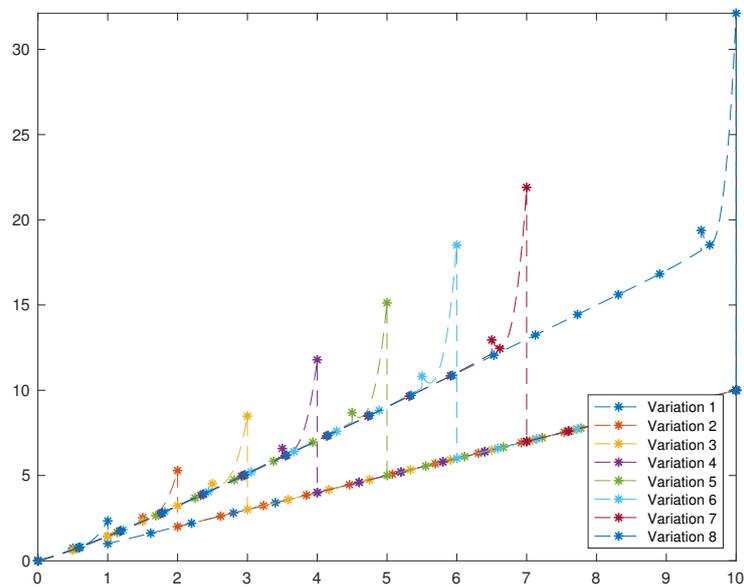


Abbildung 7.9.:  $B(x_1)$  mit unterschiedlichen Intervalllängen

Variation	Integrationsintervall
1	[0, 1]
2	[0, 2]
3	[0, 3]
4	[0, 4]
5	[0, 5]
6	[0, 6]
7	[0, 7]
8	[0, 8]

Tabelle 7.3.: Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.9 und Abb. 7.8

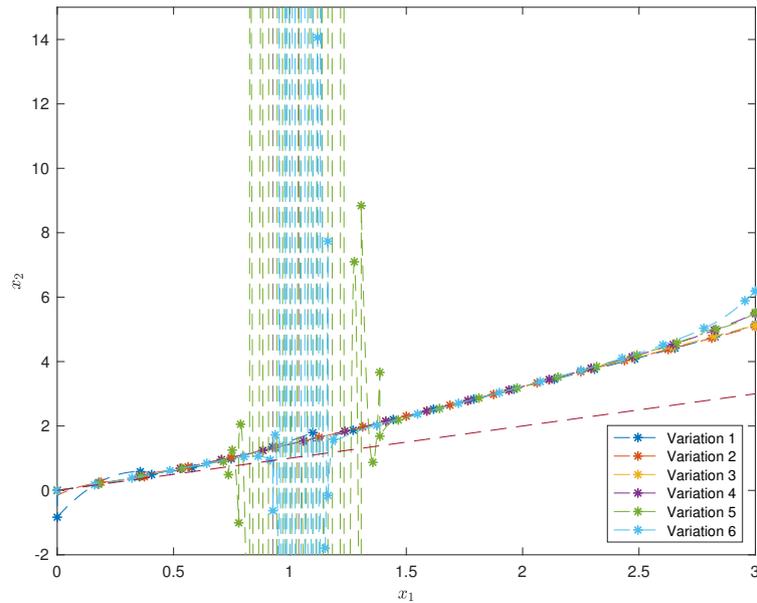
Das einheitliche Verhalten in Abbildung 7.9 auch für kleine  $h$ , ist dadurch zu erklären, dass der Kern  $K$  der Integralgleichung 7.26 aus einer Zusammensetzung von modifizierten Besselfunktionen zweiter Art besteht. Sie werden als  $K_0$  bezeichnet werden. Dabei besitzt  $K_0$  eine Singularität und für  $\zeta \rightarrow \infty$  geht  $K_0 \rightarrow 0$ . Für den Kern  $K$  bedeutet das: Je weiter  $x$  und  $\zeta$  von einander entfernt sind, desto kleiner wird  $K$ . Wir definieren den Bereich  $\mathcal{B} = \{\zeta \mid |K(x, \zeta)| > \epsilon\} \cap \{\zeta \mid |\tilde{\eta}(\zeta)| > \epsilon\}$ , wobei  $\epsilon$  so klein gewählt wird, dass gilt :

$$\int_{\mathcal{B}} K(x, \zeta) \tilde{\eta}(\zeta) d\zeta \approx \int_0^{\infty} K(x, \zeta) \tilde{\eta}(\zeta) d\zeta$$

Der Bereich  $\mathcal{B}$  kann durch die Eigenschaft von  $K$  somit auch bei kleineren Intervallen gut abgedeckt werden. Der steile Anstieg kurz vor  $x_1 = h$  lässt sich dadurch erklären, dass wir das Integral auf einen Bereich  $[0, h]$  einschränken und nicht über dem ganzen Intervall  $[0, \infty]$  integrieren.

### Wavelet Parameter

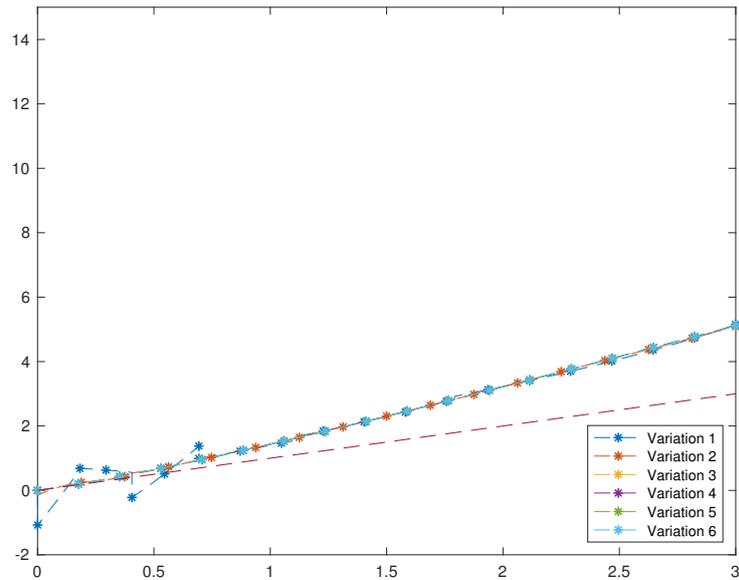
Wir variieren nun Parameter  $K$ , der die Unterteilung des Intervalls für die Legendre Wavelet Polynomfunktionen definiert, und  $M$ , den höchsten Grad der Polynome, zuerst für Alternative 1 und danach für Alternative 2. Für Alternative 1 verwenden wir das Transformationsintervall  $[0, 3]$ . In Alternative 2 verwenden wir das Integrationsintervall  $[0, 10]$ . Für Alternative 1 ist die Variation von  $K$  in Abbildung 7.10 und von  $M$  in Abbildung 7.11 dargestellt. Abbildung 7.12 vergleicht die Variation von  $K$  und Abbildung 7.13 die Variation von  $M$  für Alternative 2.

Abbildung 7.10.:  $B(x_1)$  mit Variation von  $K$  Alternative 1

Variation	$K$ und $M$
1	$K = 1$ und $M = 3$
2	$K = 2$ und $M = 3$
3	$K = 3$ und $M = 3$
4	$K = 4$ und $M = 3$
5	$K = 5$ und $M = 3$
6	$K = 6$ und $M = 3$

Tabelle 7.4.: Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.10

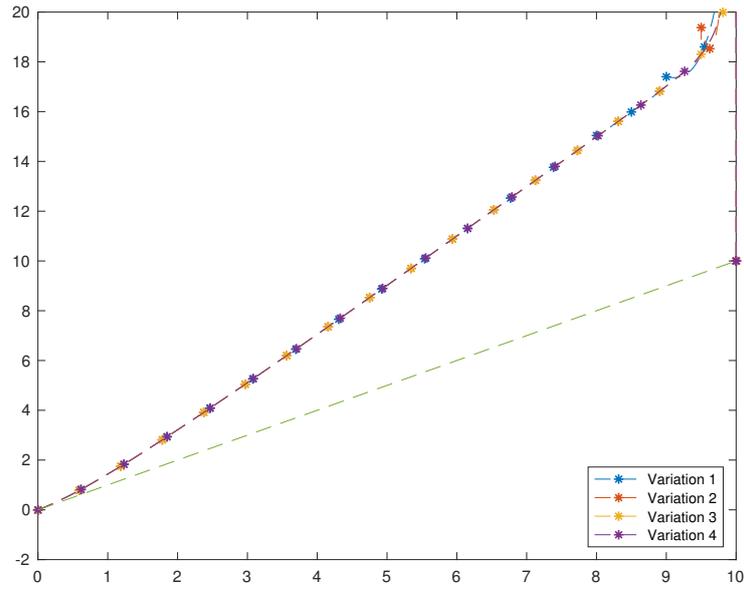
In Abbildung 7.10 beobachten wir für  $K = 2, \dots, 4$  ein einheitliches Verhalten der Lösung als Gerade.  $K = 1$  zeigt im Intervall  $[0, 0.5]$  ein abweichendes Verhalten. Mit  $K = 1$  ergeben sich zu wenig Stützstellen, und so liefert die Methode in diesem Intervall eine schlechte Approximation. Für  $K \geq 5$  zeigt sich, dass die Lösungen im Intervall  $[0.7, 1.5]$  sehr stark von dem einheitlichen Verhalten abweichen. Außerhalb dieses Intervalles zeigen die Lösungen ein einheitliches Verhalten. Wir entscheiden uns deshalb für  $K = 3$ , da einerseits der Rechenaufwand relativ gering und andererseits die Lösung stabil ist.

Abbildung 7.11.:  $B(x_1)$  mit Variation von  $M$  Alternative 1

Variation	Kund $M$
1	$K = 2$ und $M = 2$
2	$K = 2$ und $M = 3$
3	$K = 2$ und $M = 4$
4	$K = 2$ und $M = 5$
5	$K = 2$ und $M = 6$
6	$K = 2$ und $M = 7$

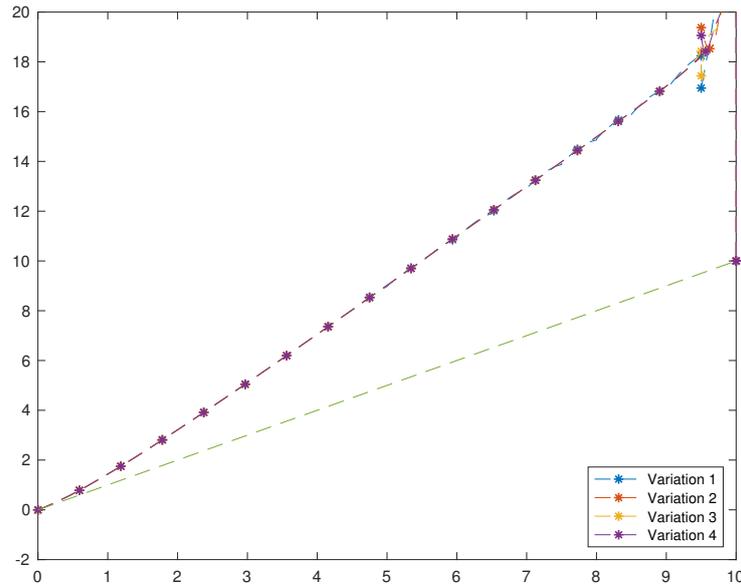
Tabelle 7.5.: Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.11

Die Gradvariation in Abbildung 7.11 der Waveletpolynome zeigt lediglich im Falle von  $M = 2$  im Intervall  $[0, 0.7]$  Abweichungen im Vergleich zu den anderen Lösungen. Begründet werden kann dies dadurch, dass sich mit  $M = 2$  zu wenig Stützstellen ergeben und nur mit Geraden approximiert wird. Die Wahl von  $M = 4$  scheint wegen seines geringen Rechenaufwands und dank guter Approximation sinnvoll.

Abbildung 7.12.:  $B(x_1)$  mit Variation von  $K$  Alternative 2

Variation	$K$ und $M$
1	$K = 1$ und $M = 3$
2	$K = 2$ und $M = 3$
3	$K = 3$ und $M = 3$
4	$K = 4$ und $M = 3$

Tabelle 7.6.: Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.12

Abbildung 7.13.:  $B(x_1)$  mit Variation von  $M$  Alternative 2

Variation	$K$ und $M$
1	$K = 2$ und $M = 2$
2	$K = 2$ und $M = 3$
3	$K = 2$ und $M = 4$
4	$K = 2$ und $M = 5$

Tabelle 7.7.: Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.13

In Abbildung 7.12 und Abbildung 7.13 zeigt sich in allen Variationen eine stabile Lösung. Wir entscheiden uns für  $K = 2$  und  $M = 3$ .

Im Allgemeinen haben wir gesehen, dass Alternative 1 nur mit richtiger Parametrisierung eine gute Lösung approximieren kann. Die Integraltransformation mit  $t = -\log(\frac{\zeta-s}{h})$  in Alternative 1 ist vor allem bei größeren  $h$  schwierig. Alternative 2 ist, mit Ausnahme von Parameter  $\alpha$ , unabhängig von der Parametrisierung sehr stabil in der Lösungsfindung.

### 7.3.2. Numerische Lösung der Integralgleichung

Wir stellen nun unsere Lösung  $\eta_\epsilon(x_1) + x_1$  mit der in 7.3.1 gefundenen Kalibrierung dar. Für Alternative 1 setzen wir  $\alpha = 0.01$ ,  $K = 3$ ,  $M = 4$  sowie die Transformation  $s = 0$  und  $h = 3$ . Für Alternative 2 wählen wir  $\alpha = 0.01$ ,  $K = 2$ ,  $M = 3$  sowie das Integrationsintervall  $[0, 10]$ .

Mit  $\epsilon = 0.1$  wird die numerische Lösung der Integralgleichung aus 7.24 in Abbildung 7.14 mit beiden Alternativen dargestellt.

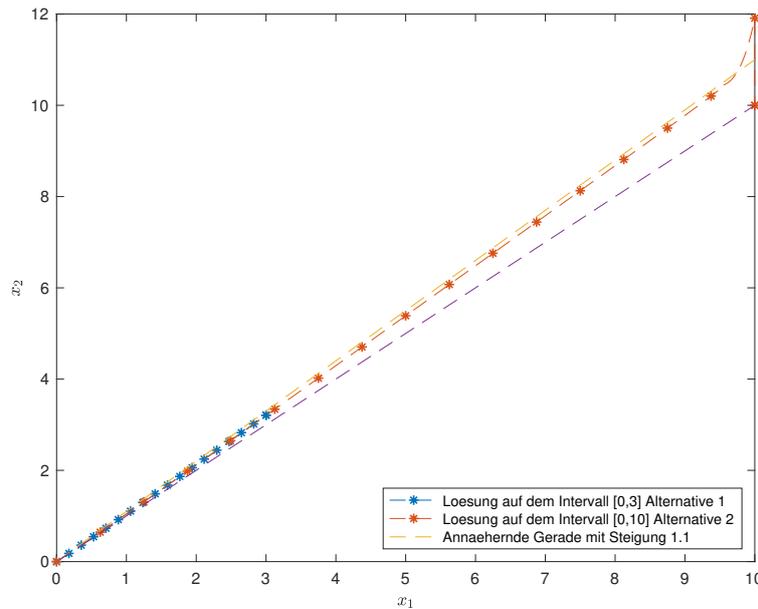


Abbildung 7.14.:  $B(x_1)$  dargestellt mit Alternative 1 und Alternative 2 mit  $\epsilon = 0.1$

Abbildung 7.14 zeigt sowohl Alternative 1 auf seinem Transformationsintervall als auch Alternative 2 auf seinem Integrationsintervall. Dabei überlagern sich die Lösungen der beiden verschiedenen Alternativen auf dem Transformationsintervall  $[0, 3]$ . Alternative 2 führt die Lösung auf dem Integrationsintervall auf  $[3, 10]$  fort. Die Lösung nähert sich dabei der gelben Geraden mit Steigung 1.1, die in Abbildung 7.14 abgebildet ist. Zum Vergleich stellt die lila Gerade  $x_2 = x_1$  dar. Demnach ergibt sich für  $\eta_{0.1}(x_1) \approx 0.1x_1$ . Die vollständigen numerischen Funktionen für  $\eta_\epsilon(x_1)$ , die aus dem Matlabcode C.2 resultieren, wären für Alternative 1 ein Polynom mit Grad 3 und für Alternative 2 ein Polynom mit Grad 2. Jedoch sind diese Funktionen, definiert für die Intervalllängen  $[0, 3]$  und  $[0, 10]$ , sehr lang und unübersichtlich. Ich gebe daher den Lösungsvektor  $C$  sowie den Vektor  $\Upsilon$ , der die entsprechende Legendre Waveletfunktionen beinhaltet, auf dem Intervall  $[0, 1]$  für Alternative 1 mit  $\alpha = 0.01$ ,  $K = 2$  und  $M = 3$  an:

$$C = \begin{pmatrix} 0.1480 \\ -0.0574 \\ 0.0177 \\ 0.0286 \\ -0.0298 \\ 0.0008 \end{pmatrix} \quad \Upsilon(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{(s < \frac{1}{2} \wedge 0 \leq s)} \sqrt{2} \\ \mathbf{1}_{(s < \frac{1}{2} \wedge 0 \leq s)} \sqrt{2} \sqrt{3} (4s - 1) \\ \mathbf{1}_{(s < \frac{1}{2} \wedge 0 \leq s)} \sqrt{2} \sqrt{5} (24s^2 - 12s + 1) \\ \mathbf{1}_{(s < 1 \wedge \frac{1}{2} \leq s)} \sqrt{2} \\ \mathbf{1}_{(s < 1 \wedge \frac{1}{2} \leq s)} \sqrt{2} \sqrt{3} (4s - 3) \\ \mathbf{1}_{(s < 1 \wedge \frac{1}{2} \leq s)} \sqrt{2} \sqrt{5} (24s^2 - 36s + 13) \end{pmatrix}$$

Die vollständige numerische Lösung ergibt sich in diesem Fall als

$$\eta_{0.1}(x_1) = \Upsilon(e^{-x_1})^\top C * 0.1 * e^{x_1}$$

Betrachten wir in Abbildung 7.15  $\tilde{\eta}$  aus der Integralgleichung numerisch.

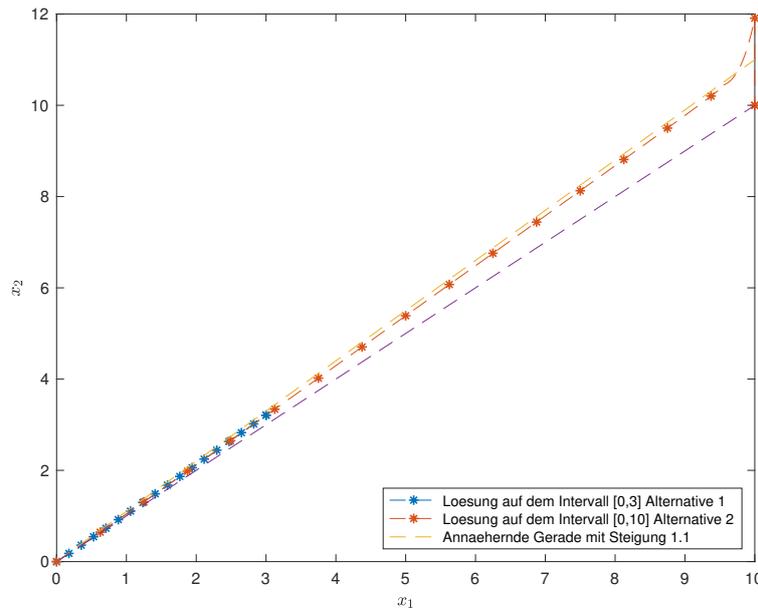


Abbildung 7.15.:  $\tilde{\eta}$  aus Integralgleichung 7.24 mit Alternative 1 und Alternative 2

In Abbildung 7.15 sehen wir, dass  $\tilde{\eta}$  aus Alternative 2 leicht abweicht von  $\tilde{\eta}$  aus Alternative 1. Das Verhalten der beiden Lösungen ist jedoch ähnlich. Welche der beiden Alternativen ein besseres Ergebnis erzielt, kann ermittelt werden, indem wir die jeweiligen Integrale aus den Integralgleichungen 7.25 und 7.26 mit den erhaltenen  $\tilde{\eta}$  auswerten und mit  $g$  aus Integralgleichung 7.24 vergleichen. Dies wird in Abbildung 7.16 dargestellt.

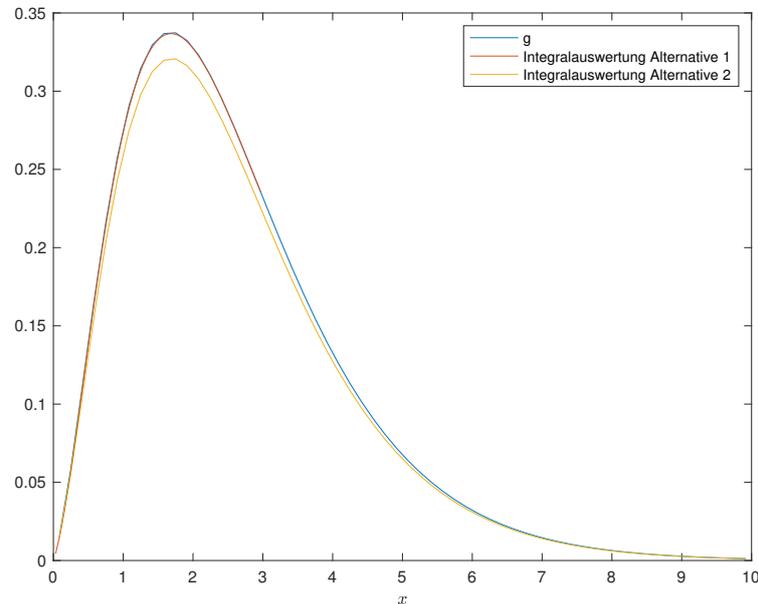


Abbildung 7.16.: Integrellösung und Vergleich mit der Funktion  $g$

Abbildung 7.16 zeigt uns, dass die Auswertung des Integrals mit Alternative 1 auf dem

Transformationsintervall  $[0, 3]$  eine sehr gute Annäherung an die Funktion  $g$  ist. Dabei wird der blaue Graph der Funktion  $g$  auf dem Intervall  $[0, 3]$  von dem roten Graphen der Auswertung von Alternative 1 überlagert. Der Graph der Auswertung des Integrals aus Alternative 2 zeigt ein leicht abweichendes Verhalten am Hochpunkt der Kurve. Die Tatsache, dass Alternative 1 im Vergleich zu Alternative 2 eine bessere Annäherung liefert, erklärt sich durch das Einschänken des Integrationsintervalls in Alternative 2. Um eine bessere Approximation in Alternative 2 zu erzielen, müsste man das Integrationsintervall vergrößern. Hierbei sollte jedoch die erhöhte Rechenaufwand beachten. Betrachtet man die Lösungen in 7.14, können wir beobachten, dass sich die Alternativen 1 und 2 durch die Multiplikation von  $\exp * \tilde{\eta}_\epsilon$  überlagern und wir den Nachteil von Alternative 2 hierdurch auffangen können.

Wir variieren nun  $\epsilon$ . Abbildung 7.17 zeigt uns die Lösung  $\eta_\epsilon$  mit  $\epsilon = 0; \epsilon = 0.01; \epsilon = 0.2; \epsilon = 0.5$ .

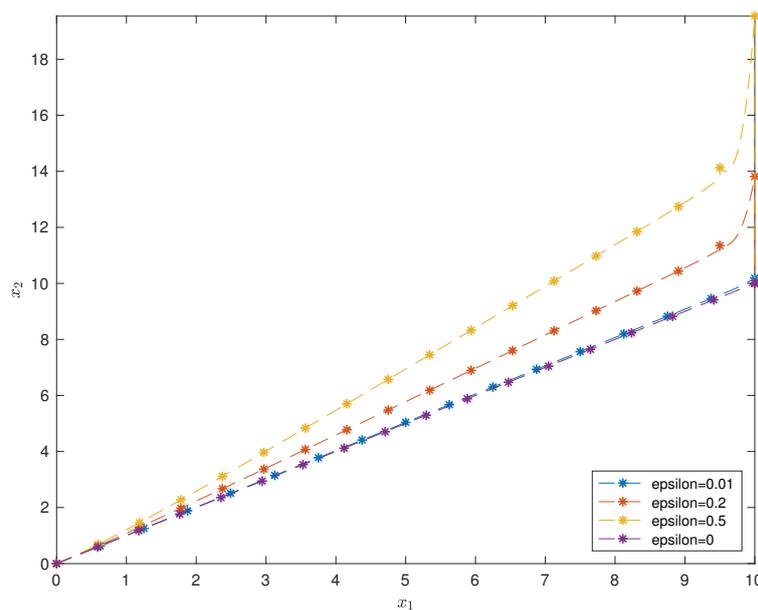


Abbildung 7.17.:  $B(x_1)$  mit  $\epsilon = 0; \epsilon = 0.01; \epsilon = 0.2; \epsilon = 0.5$

In Abbildung 7.17 können wir mit zunehmendem  $\epsilon$  auch eine zunehmende Steigung des Graphen der Funktion  $\eta_\epsilon$  beobachten. Dieses Verhalten kann dadurch erklärt werden, dass  $\epsilon$  nur als Faktor in  $g_\epsilon$  multipliziert wird und  $\epsilon$  ein multiplikativer Faktor in  $\eta_\epsilon$  ist. Der Fall  $\epsilon = 0$  stellt dabei das Setting von McKean und Sheep aus Kapitel 6 mit gleichen Volatilitäten  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  dar. Die Lösungskurve  $B(x_1) = \eta_\epsilon(x_1) + x_1 = x_1$  entspricht also der Identität.

Zusammenfassend können wir folgende Vor- und Nachteile der Alternativen aufzählen: Alternative 1 kann eine genauere Approximation von  $\tilde{\eta}_\epsilon$  erzielen, jedoch nur auf einem kleineren Transformationsintervall. Abhilfe könnte eine Zusammensetzung der Lösungen auf vielen kleinen Transformationsintervallen wie in Abbildung 7.6 schaffen. Ein weiterer Nachteil ist jedoch die schwierige Kalibrierung der Alternative 1. Im Gegensatz dazu sind

die Lösungen in Alternative 2 stabil und auch längere Integrationsintervalle können gut dargestellt werden. Jedoch sollte die längere Rechenzeit bei der Verwendung von längeren Intervallen beachtet werden.

## 8. Zusammenfassung

Das Ziel der Arbeit ist, eine explizite Darstellung von  $\eta_\epsilon$  durch numerische Berechnungen zu erhalten.  $\eta_\epsilon(x_1)$  ist eine Funktion, abhängig von dem Vermögen  $x_1$  des Unternehmens 1, bei gleichbleibender Volatilität  $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \epsilon$  des Unternehmens 2.  $\eta_\epsilon$  beschreibt den Schwellenwert, den Unternehmen 1 zusätzlich zum Vermögen  $x_2$  des volatileren Unternehmens 2 überschreiten muss, um von einer Förderung des Staates zu profitieren. Dies stellt das Szenario einer sozialischen Steuerpolitik dar, die optimal ist, wenn die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit beider Unternehmen maximiert werden soll. Eine implizite Darstellung von  $\tilde{\eta}_\epsilon(x_1) = \exp(x_1) * \eta_\epsilon(x_1)$  ist durch die Integralgleichung 7.24

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [K_0(\sqrt{2}|x - \zeta|) - K_0(\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \zeta^2})] \tilde{\eta}_\epsilon(\zeta) d\zeta + g_\epsilon(x) = 0$$

gegeben. Das numerische Verfahren der Wavelet Collocation Methode scheint für die numerische Approximation geeignet, da es einen einfachen Algorithmus aufweist und gute Ergebnisse bringt. Da das klassische Verfahren der Wavelet Collocation Methode für eigentliche Integrale mit stetigem Kern vorgesehen ist, war es Aufgabe der vorliegenden Arbeit, das ursprüngliche Verfahren an ein Integral mit uneigentlichem und singulären Kern zu adaptieren und zu kalibrieren. Hierfür werden zwei alternative Ausführungsweisen vorgestellt und verglichen. Alternative 1 transformiert das uneigentliche Integral in der Integralgleichung in ein eigentliches Integral. Auch Alternative 2 wandelt, ohne Transformation, das Integral in ein eigentliches Integral um, indem die unendliche obere Integralgrenze durch eine endliche ersetzt wird. Dabei beachten wir, dass Alternative 1 sehr sensibel auf unterschiedliche Kalibrierungen reagiert, Alternative 2 jedoch im Wesentlichen gleiche Ergebnisse unabhängig von der Kalibrierung aufweist. Die Approximation mit einer geeigneten Kalibrierung unter Alternative 1 von  $\tilde{\eta}_\epsilon$  ist besser als die unter Alternative 2. Nach der Multiplikation  $\tilde{\eta}_\epsilon = \exp * \eta_\epsilon$  ist der Fehler in Alternative 2 unwesentlich und die Lösung stimmt approximativ mit derjenigen von Alternative 1 überein. Zudem kann Alternative 1 nur auf kleineren einzelnen Intervallen zur Lösungsfindung angewandt werden. Also sind beide Methoden je nach spezifischem Blickwinkel zur Findung einer Lösung geeignet und erzielen plausible und anwendbare Ergebnisse.

# A. Wichtige Resultate aus Maß - und Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Maß - und Wahrscheinlichkeitstheorie gibt uns erste wichtige Definitionen und Resultate, welche fortführend in stochastischen Prozessen und somit auch in der Ruintheorie und der stochastischen Kontrolltheorie verwendet werden. Einige wichtige Resultate, welche diese Arbeit heranzieht, werden hier aufgeführt. Sie stammen aus [19] und [16]. Interessierte Leser können Beweise in den angegebenen Werken nachlesen.

**Definition A.0.1** (messbar). Sind  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  zwei Messräume, so nennt man die Funktion  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$   $\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_2$ -messbar, wenn  $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1 \forall A \in \mathcal{F}_2$ .

## A.1. Starkes Gesetz der großen Zahlen

**Theorem A.1.1** (Kolmogorov's 2. Gesetz der großen Zahlen). Besitzen die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  unabhängige, identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_n, n \in \mathbb{N}$  einen Erwartungswert  $\mathbb{E}X := \mathbb{E}X_n$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}X \quad P - f.s. \quad (\text{A.1})$$

## A.2. Konvergenzsätze

**Definition A.2.1** (Fast sichere Konvergenz). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge von Zufallsvariablen  $X_n$  konvergiert fast sicher gegen die Zufallsvariable  $X$ , wenn

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

ist.

**Definition A.2.2** (schwache Konvergenz). Eine Folge von endlichen Maßen  $P_n$  auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  bzw. die Folge ihrer zugehörigen Verteilungsfunktionen  $F_n$  konvergiert schwach gegen das endliche Maß  $P$  bzw gegen seine Verteilungsfunktion  $F$ , wenn für jeden Stetigkeitspunkt  $x$  von  $F$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$

**Definition A.2.3** ( $L_p$ -Konvergenz). Eine Funktionenfolge  $f_n \in L_p$  konvergiert in  $L_p$  gegen  $f \in L_p$  wenn gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|f_n - f|^p] = 0$

**Theorem A.2.4** (Konvergenz durch Monotonie). *Ist  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $f_n$  eine  $P$ -fast überall monoton wachsende Folge, die gegen  $f$  konvergiert. dann gilt*

$$\lim_n \int f_n dP = \int \lim_n f_n dP = \int f dP$$

**Theorem A.2.5** (Satz der majorisierten Konvergenz). *Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $f_n$  eine Folge von  $\mathcal{F}$ -messbaren Funktionen mit  $|f_n| \leq g$   $P$ -f.ü., wobei  $g$  bezüglich  $P$  integrierbar ist auf  $\Omega$ . Dann konvergiert  $f_n$   $P$ -f.ü. gegen eine  $\mathcal{F}$ -messbare Funktion  $f$  und es gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| dP = 0$$

## A.3. Ungleichung

**Theorem A.3.1** (Markov'sche Ungleichung). *Ist  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $X$  eine reellwertige Zufallsvariable,  $a$  eine reelle Konstante und  $h : D \rightarrow [0, \infty)$  eine monoton steigende Funktion. Dann gilt*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[h(X)]}{h(a)}$$

## B. Wichtige Resultate aus der Theorie für partielle Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden relevante Resultate für partielle Differentialgleichungen präsentiert. Diese Resultate werden in Abschnitt 7.2 für die Herleitung einer Integralgleichung aus einer partiellen Differentialgleichung benötigt. Grundlegend hierfür ist das Skript von Prof Jüngel [14]. Interessierte können Beweise und weitere Resultate hier nachlesen. Wir gehen von einer offenen Menge  $\Omega$  aus. Für den Rand der Menge nehmen wir  $\partial\Omega \in C^1$  und  $x^* \in \partial\Omega$  an. Der Rand  $\partial\Omega$  kann um  $x^*$  lokal durch eine Funktion  $g(x_1, \dots, x_{n-1})$  beschrieben werden. Durch stetige partielle Ableitungen kann eine Tangentialebene beschrieben werden. Der **äussere Normaleneinheitsvektor**  $v(x^*)$  ist derjenige Vektor, der senkrecht auf der Tangentialebene steht und mit Länge 1 durch den Punkt  $x^*$  geht. Von der offenen Menge  $\Omega$  betrachtet weist die Richtung des Vektors nach außen.

**Definition B.0.1** (Normalenableitung). Sei  $\partial\Omega \in C^1$  mit äusserem Normaleneinheitsvektor  $v$  und  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ . Dann nennen wir

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f(x) \cdot v(x), \quad x \in \partial\Omega$$

die äussere Normalenableitung von  $f$  an  $x$ . Sie ist stetig auf  $\partial\Omega$ .  $\nabla$  beschreibt den Nabla Operator.

**Theorem B.0.2** (Gauss). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene und beschränkte Menge mit  $\partial\Omega \in C^1$  und äusserem Normaleneinheitsvektor  $v$ , definiert auf  $\partial\Omega$ . Ferner sei  $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  eine vektorwertige Funktion. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f) dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot v ds$$

Das Integral auf der rechten Seite bezeichnet das Oberflächenintegral.

Wir können mit  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  und der Produktregel

$$\operatorname{div}(uf) = \nabla u \cdot f + u \operatorname{div}(f)$$

den Satz von Gauss B.0.2 erweitern:

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}(f) dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot f dx + \int_{\partial\Omega} u(f \cdot v) ds \quad (\text{B.1})$$

B.1 wird auch als mehrdimensionale partielle Integration angesehen. Wenden wir die mehrdimensionale Integration B.1 zweimal an, ergibt sich [14, S.41]

$$\int_{\Omega} u \Delta f dx = \int_{\Omega} \Delta u f dx + \int_{\partial\Omega} (u(\nabla f \cdot v) - f(\nabla u \cdot v)) ds \quad (\text{B.2})$$

$\Delta$  bezeichnet den Laplace Operator.

Wir definieren die Menge

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) : \text{der Träger von } \phi \text{ ist kompakt in } \Omega\}$$

**Definition B.0.3** (Distribution). *Eine Distribution ist ein lineares Funktional  $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  das bezüglich der Konvergenz*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(\phi_n) = 0 \text{ für alle Folgen } \phi_n \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ die gegen null konvergieren,}$$

*stetig ist. Anstatt  $u(\phi)$  für  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  verwenden wir die Notation  $\langle u, \phi \rangle$ . Wir bezeichnen die Menge aller Distributionen mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$*

**Theorem B.0.4.** *Jede Funktion  $f \in L^1_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \forall K \subset \Omega \text{ kompakt} : f \in L^1(K)\}$  kann mittels*

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \phi dx \text{ für alle } \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

*als eine Distribution aufgefasst werden.*

**Definition B.0.5** (Delta-Distribution). *Die Dirac'sche Delta- Distribution  $\delta$  ist durch*

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) \text{ für alle } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

*definiert. Die verschobene Dirac'sche Delta-Distribution mit Pol in  $\zeta$  wird durch*

$$\langle \delta_{\zeta}, \phi \rangle = \phi(\zeta)$$

*definiert.*

**Definition B.0.6** (Fundamentallösung). *Sei  $L(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_{\alpha} D^{\alpha} u$  ein linearer formaler Differentialoperator und  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ . Wir nennen  $U_{\zeta}$  eine distributionelle Lösung von*

$$L(U_{\zeta}) = \delta_{\zeta}$$

*wobei  $\delta_{\zeta}$  die verschobene Delta-Distribution ist, Fundamentallösung von  $L$  mit Pol in  $\zeta$ .*

Desweiteren benötigen wir die Definition eines Kurvenintegrals 1. Art. Für weiteres verweise ich auf [6].

**Definition B.0.7** (Kurvenintegral 1.Art). *Sei  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (stückweise)  $C^1$ -Kurve. Dann heißt*

$$\int_{\gamma} f d\gamma := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

*Kurvenintegral 1.Art der Funktion  $f$  entlang der Kurve  $\gamma$ .*

## C. Matlabcodes

Listing C.1: Matlabcode für Abbildung 5.1

```

1 syms m s n k
2 set(0, 'defaulttextinterpreter', 'Latex');
3
4 M=3
5 K=2
6 pp=(m+0.5)^(0.5)*2^(K*0.5)*legendreP(m, 2^K*s-(2*n-1));
7 phinmzz=matlabFunction(pp);
8 fun_lb=@(n,k)((2*n-1)-1)/2^(k);
9 fun_ub=@(n,k)((2*n-1)+1)/2^(k);
10 for i= 1:(2^(K-1))
11     for j=0:M-1
12         a((i-1)*(M)+j+1)=fun_lb(i,K);
13         b((i-1)*(M)+j+1)=fun_ub(i,K);
14         funkur((i-1)*(M)+j+1)=phinmzz(j,i,s);
15         fplot(funkur((i-1)*(M)+j+1), [a((i-1)*(M)+j+1), b((i-1)*(M)+j
16             +1)])
17         hold on
18     end
19 end
20 legend(cat(2, cat(2, 'Legendre Wavelet Basis fuer M=', int2str(
    M)), cat(2, 'und fuer K=', int2str(K))))
21 print('legendrewaveletsprint', '-depsc')

```

Listing C.2: Matlabcode für Abbildung 7.14 und der Abbildungen 7.1, 7.15 und 7.17

```

1 clear all
2 close all
3 set(0, 'defaulttextinterpreter', 'latex');
4 syms t s
5 tic
6 %%Alternativ 1
7 %%Paramter
8 %Wavetparameter K
9 K=3;
10 %Wavetparameter M
11 M=4;

```

```

12 %Parameter fuer nicht verwendete Gauss Quadratur
13 gqp=20;
14 methode=2;
15 %Intervalldeklaration
16 intervallanfang1=0; %s
17 intervallende1=3;%s+h
18 intervall1=intervallende1-intervallanfang1;%h
19 %Regularisierungsparameter
20 alpha=0.01;
21 %Kern
22 kk=besselk(0,sqrt(2)*abs(t-s))-besselk(0,sqrt(2)*sqrt(t^2+s
    ^2));
23 k=matlabFunction(kk);
24 %Wahl der Alternative durch Transformation
25 k=matlabFunction(k(-log((s-intervallanfang1)/intervall1),t)
    /(s-intervallanfang1));%Alternative 1
26 trennung=matlabFunction(intervallanfang1+intervall1*exp(-t))
    ; %Singularitaet
27 % Auswertung von g(x) an den Stuetzstellen
28 [G,t1] = intG(M,K,intervallanfang1,intervallende1)
29 %waveInt liefert numerisches eta_schlange mit FF1 und C1 als
    Loesungvektor C
30 %und waveletfunktion1 sind die Legendre Wavelet Basis
    Funktionen
31 [C1,FF1,waveletfunktion1] = wavmInt(K,M,gqp,alpha,methode,
    intervallanfang1,intervallende1,G,k,trennung)
32 %integralproberechnung mit FF1 (Ergebnis sollte g(x) seien)
33 [Loesung1,Loesung21] = integralgleichung(k,FF1,M,K,
    intervallanfang1,intervallende1)
34 syms s
35
36
37 toc
38 tic
39 %%Alternativ 2
40 K=2;
41 M=3;
42 gqp=20;
43 intervallanfang=0;
44 intervallende=10;
45 alpha=0.1;
46 methode=2;
47 intervall=intervallende-intervallanfang;
48 [G,t2] = intG(M,K,intervallanfang,intervallende)

```

```

49 k=matlabFunction(kk); %keine Transformation also Alternative
    2
50 trennung=matlabFunction(t);
51 [C2,FF2,waveletfunktion2] = wavmInt(K,M,gqp,alpha,methode,
    intervallanfang,intervallende,G,k,trennung)
52 [Loesung2,Loesung22] = integralgleichung(k,FF2,M,K,
    intervallanfang,intervallende)
53 %wahle epsilon aus sigma2^2=(1+epsilon)
54
55 %plots fuer epsilon=0.1
56 epsilon=0.1;
57
58 figure(1)
59 fplot(FF1(exp(-s)*intervall1+intervallanfang1)*epsilon*exp(s
    )+(s),[intervallanfang1 intervallende1], '--*')
60 hold on
61 fplot(FF2(s)*epsilon*exp(s)+(s),[intervallanfang
    intervallende], '--*')
62 hold on
63 toc
64 fplot(s*1.1 ,[intervallanfang intervallende], '--')
65 hold on
66 fplot(s ,[intervallanfang intervallende], '--')
67 legend('Loesung auf dem Intervall [0,3] Alternative 1','
    Loesung auf dem Intervall [0,10] Alternative 2','
    Annaehernde Gerade mit Steigung 1.1','Location','
    southeast')
68 xlabel('$x_1$')
69 ylabel('$x_2$')
70 print('result3','-depsc')
71
72 figure(2)
73 fplot(FF1(exp(-s)*intervall1+intervallanfang1)*epsilon,[
    intervallanfang1 intervallende1], '--*')
74 hold on
75 fplot(FF2(s)*epsilon,[intervallanfang intervallende], '--*')
76 legend('epsilon=0.1 etatilde auf Intervall [0,3] Alternative
    1','etatilde auf Intervall [0,10] Alternative 2','
    Location','southeast')
77 xlabel('$\zeta$')
78 %ylabel('$x_2$')
79 print('result3_2','-depsc')
80 figure(3)
81 epsilon=1

```

```

82 plot(t2,G*epsilon)
83 hold on
84 plot(t1,Loesung1*epsilon)
85 hold on
86 plot(t2,Loesung2*epsilon)
87 xlabel('$x$')
88 legend('g','Integralauswertung Alternative 1','
      Integralauswertung Alternative 2')
89 print('result3_3','-depsc')
90
91 %plots fuer epsilon=0.01,0.2,0.5
92
93 figure(4)
94 epsilon=0.01;
95 fplot(FF2(s)*epsilon*exp(s)+(s),[intervallanfang
      intervallende], '--*')
96 hold on
97 epsilon=0.2;
98 fplot(FF2(s)*epsilon*exp(s)+(s),[intervallanfang
      intervallende], '--*')
99 hold on
100 epsilon=0.5;
101 fplot(FF2(s)*epsilon*exp(s)+(s),[intervallanfang
      intervallende], '--*')
102 hold on
103 epsilon=0;
104 fplot(FF2(s)*epsilon*exp(s)+(s),[intervallanfang
      intervallende], '--*')
105 legend('epsilon=0.01','epsilon=0.2','epsilon=0.5','epsilon=0
      ','Location','southeast')
106 xlabel('$x_1$')
107 ylabel('$x_2$')
108 print('result3_5','-depsc')
109
110 %Abbildung zur Darstellung der partiellen Diffgl auf den
      Bereichen I und II
111 figure(5)
112 epsilon=0.1;
113 fplot(FF2(s)*epsilon*exp(s)+(s),[intervallanfang
      intervallende-1], 'b')
114 hold on
115 fplot((s),[intervallanfang intervallende-1], '--r')
116 gtext('Bereich $\mathrm{I}$','FontSize',16)
117 gtext('Bereich $\mathrm{I}\mathrm{I}$','FontSize',16)

```

```

118 gtext('V=0','FontSize',16)
119 gtext('V=0','FontSize',16)
120 gtext('$B(x_1)$','FontSize',16,'Color','blue')
121 gtext('$x_1=x_2$','FontSize',16,'Color','red')
122 gtext('$x_2 \to \infty:$','FontSize',16)
123 gtext('$V=1-e^{-2 x_1}$','FontSize',16)
124 gtext('$x_1 \to \infty:$','FontSize',16)
125 gtext('$V=(1-e^{-2\frac{x_2}{\sigma_2}})$','FontSize',16)
126 gtext('$V_{1}+\frac{1}{2}(V_{11}+\sigma_2^2V_{22})=0$','
      FontSize',16)
127 gtext('$V_{2}+\frac{1}{2}(V_{11}+\sigma_2^2V_{22})=0$','
      FontSize',16)
128 xlabel('$x_1$')
129 ylabel('$x_2$')
130 %print('result3_4','-depsc')

```

Die Abbildungen 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12 und 7.13 sind Variationen von Matlabcode C.2 die den Code C.3 verwenden.

Listing C.3: Matlabcode für die Numerische Approximation von  $\tilde{\eta}$  der Integralgleichung 7.24

```

1 function [C,FF,fz] = wavmInt(K,M,gqp2,alpha,methode,
      intervallanfang,intervallende,G,k,trennung)
2
3 %%gibt den Loesungsvektor C des linearen Gleichungssystems
      der
4 %%diskretisierten Fredholmgleichung zurueck
5
6 %% gibt die approximierte Funktion eta_schlange zureuck
7 %% gibt die Legendre Wavelet Polynome zurueck
8
9 set(0,'defaulttextinterpreter','Latex');
10 syms x t s m n c o
11 intervall=intervallende-intervallanfang;
12 p=(2^(K-1))*M;
13 %Anzahl der Stuetzstellen
14 p2=(2^(K-1))*M*intervall;
15 %Stuetzstellen
16 t1=((2*(1:p*intervall)-1)/2/p).'+intervallanfang;
17 %Legendre Wavelet Polynome
18 pp=(m+0.5)^(0.5)*2^(K*0.5)*legendreP(m,2^K*s-(2*n-1));
19 phinmzz=matlabFunction(pp);
20 %Funktionen zur Bestimmung der Intevalle des
      Definitionsbereichs der Legendre
21 %Wavelet Polynome

```

```

22 %Untere Grenze a
23 fun_lb=@(n,k)((2*n-1)-1)/2^(k);
24 %Untere Grenze b
25 fun_ub=@(n,k)((2*n-1)+1)/2^(k);
26 for h=1:intervall
27 for i= 1:(2^(K-1))
28     for j=0:M-1
29         %Vektor a
30         a((h-1)*(2^(K-1)*M)+(i-1)*(M)+j+1)=fun_lb(i,K)+
            intervallanfang+h-1;
31         %Vektor b
32         b((h-1)*(2^(K-1)*M)+(i-1)*(M)+j+1)=fun_ub(i,K)+
            intervallanfang+h-1;
33         %Vektor mit Legendre Wavelet Funktionen
34         funkur((h-1)*(2^(K-1)*M)+(i-1)*(M)+j+1)=phinmzz(j,i,s
            -(intervallanfang+h-1));
35
36     end
37 end
38 end
39
40 GGF1=zeros(p2);
41 GGF2=zeros(p2);
42 GGF3=zeros(p2);
43 for j=1:p2
44     f=matlabFunction(funkur(j)*k(s,t));
45     for i=1:p2
46         % Auswertung des Integral L1
47         L1(i,j)=integral(@(s)f(s,t1(i)),a(j),trennung(t1(i)));
48         % Auswertung des Integral L2
49         L2(i,j)=integral(@(s)f(s,t1(i)),trennung(t1(i)),b(j));
50         % Auswertung des Integral L2
51         L3(i,j)=integral(@(s)f(s,t1(i)),a(j),b(j));
52     end
53 end
54 GGF1=L1;
55 GGF2=L2;
56 GGF3=L3;
57 if(methode==3)% falls gaussquadratur gewaehlt wird,jedoch
    wird diese nicht verwendet
58 for i=1:p2
59     f=matlabFunction(funkur(i)*k(s,t));
60     [IF1,IF2,IF3] = GL2dim(f,a(i),b(i),gqp2);
61     FF1=matlabFunction(IF1);

```

```

62 FF2=matlabFunction(IF2);
63 FF3=matlabFunction(IF3);
64 GG1(:,i)=FF1(t1);
65 GG2(:,i)=FF2(t1);
66 GG3(:,i)=FF3(t1);
67 end
68 GGF1=GG1;
69 GGF2=GG2;
70 GGF3=GG3;
71 end
72 %ende gaussquadratur
73 r01=t1;
74 %Singulaeritaeten
75 exp_r=trennung(r01);
76 %Indikatorfunktionen I
77 IND1=zeros(p2,p2);
78 IND2=zeros(p2,p2);
79 IND3=zeros(p2,p2);
80 for i=1:p2
81 index1=find(a(i)>exp_r);
82 IND1(index1,i)=1;
83
84 index2=find(a(i)<exp_r & exp_r<b(i));
85 IND2(index2,i)=1;
86
87 index3=find(exp_r>b(i));
88 IND3(index3,i)=1;
89
90 end
91 FUN=GGF3;
92 %Integral L
93 if(methode>1) %methode=1 wuerde keine Aufteilung an den
    Singularitaeten bedeuten
94 FUN=IND1.*GGF3+IND2.*(GGF1+GGF2)+IND3.*(GGF3);
95 end
96 % Auswertung von Legendre Waveletfunktionen an den
    Stuetzstellen
97 for i=1:p2
98 indexphi=find(a(i)<t1 & t1<b(i));
99 INDPHI(indexphi,i)=1;
100 end
101
102 funk=matlabFunction(funkur);
103 for i=1:p2

```

```

104 PHI(i,:) = funk(t1(i));
105 end
106 PHI = PHI .* INDPHI;
107 %Lineares Gleichungssystem Matrix
108 FUN = FUN + PHI * alpha;
109 %Loesung des lineares Gleichungssystem: Vektor C
110 C = (inv(FUN)) * G.';
111 % Approximierte Loesung fuer eta_schlange
112 F_sol = (funktur .* ((a <= s) & (s < b))) * C;
113 fz = funktur .* ((a <= s) & (s < b))
114 FF = matlabFunction(F_sol);
115 end

```

Listing C.4: Matlabcode für die Numerische Auswertung des Integrals in der Integralgleichung 7.24 in Abb. 7.16

```

1 function [Loesung, Loesung2] = integralgleichung(k, F, M, K,
    intervallanfang, intervallende)
2 %% Dient als Proberechnung der ermittelten Funktion F=
    eta_schlange in der Integralgleichung. Loesung sollte die
    Funktion g(x) seien
3 syms s t
4 set(0, 'defaulttextinterpreter', 'Latex');
5 intervall = intervallende - intervallanfang;
6 p = (2^(K-1)) * M;
7 %Anzahl der Stuetzstellen
8 p2 = (2^(K-1)) * M * intervall;
9 %Stuetzstellen
10 t1 = ((2*(1:p*intervall) - 1) / 2/p) .'+ intervallanfang;
11 %Integrand
12 integrator = matlabFunction(k(s, t) * F(s))
13 %Auswertung des Integrals
14 for i = 1:length(t1)
15     fu1 = integrator(s, t1(i));
16     func1 = matlabFunction(fu1);
17 %Loesung
18 Loesung(i) = integral(func1, intervallanfang, intervallende);
19 %Alternative Loesung auf ganzem Intervall
20     Loesung2(i) = integral(func1, 0, inf);
21 end
22 end

```

Listing C.5: Matlabcode für die Numerische Auswertung der Funktion  $g(x)$  der Integralgleichung 7.24

```

1 function [G,t1] = intG(M,K,intervallanfang,intervallende)
2 %%Gibt uns einen Vektor G mit Funktionswerten der Funktion g
   (x) an den
3 %%Stuetzstellen t1 zurueck.
4 syms s x t
5 set(0,'defaulttextinterpreter','Latex');
6 intervall=intervallende-intervallanfang;
7 p=(2^(K-1))*M;
8 %Anzahl der Stuetzstellen
9 p2=(2^(K-1))*M*intervall;
10 %Stuetzstellen
11 t1=((2*(1:p*intervall)-1)/2/p).'+intervallanfang;
12 %Aufteilung der Funktion g(x)
13 g1 = 0.1e1 / pi * besselk(0.0e0, sqrt((2 * s ^ 2 + 2 * x ^
   2))) / (2 * s ^ 2 + 2 * x ^ 2) * exp(-s) * (-4 * s ^ 4 +
   4 * s ^ 3 * x + 4 * s ^ 2 * x ^ 2 + 4 * s * x ^ 3 - 8 * s
   ^ 3 - 8 * s * x ^ 2) / 0.2e1;
14 g2 = 0.1e1 / pi * besselk(0.1e1, sqrt((2 * s ^ 2 + 2 * x ^
   2))) * ((2 * s ^ 2 + 2 * x ^ 2) ^ (-0.3e1 / 0.2e1)) * exp
   (-s) * (4 * s ^ 5 + 8 * s ^ 3 * x ^ 2 + 4 * s * x ^ 4 + 4
   * s ^ 4 + 24 * s ^ 2 * x ^ 2 + 4 * x ^ 4) / 0.2e1;
15 g3 = 0.1e1 / pi * besselk(0.0e0, sqrt(0.2e1) * abs(s - x)) *
   exp(-s) * (2 * s ^ 2 + 4 * s) / 0.2e1;
16 g4 = -sqrt(0.2e1) / pi * besselk(0.1e1, sqrt(0.2e1) * abs(s
   - x)) * abs(s - x) * exp(-s) * (s + 1) / 0.2e1;
17 g5 = -(x ^ 2 + x) * exp(-x);
18 f1=matlabFunction(g1);
19 f2=matlabFunction(g2);
20 f3=matlabFunction(g3);
21 f4=matlabFunction(g4);
22 f5=matlabFunction(g5);
23 ff1=matlabFunction(f1(-log(s),t)/s);
24 ff2=matlabFunction(f2(-log(s),t)/s);
25 ff3=matlabFunction(f3(-log(s),t)/s);
26 ff4=matlabFunction(f4(-log(s),t)/s);
27 ff5=f5;
28 %Auswertung an den Stuetzstellen
29 for i=1:length(t1)
30 fu1=ff1(s,t1(i));
31 func1=matlabFunction(fu1);
32 G1(i)=integral(func1,0,exp(-t1(i)))+integral(func1,exp(-t1(i)
   )),1);
33

```

```
34 fu2=ff2(s,t1(i));
35 func2=matlabFunction(fu2);
36 G2(i)=integral(func2,0,exp(-t1(i)))+integral(func2,exp(-t1(i)
    )),1);
37
38 fu3=ff3(s,t1(i));
39 func3=matlabFunction(fu3);
40 G3(i)=integral(func3,0,exp(-t1(i)))+integral(func3,exp(-t1(i)
    )),1);
41
42 fu4=ff4(s,t1(i));
43 func4=matlabFunction(fu4);
44 G4(i)=integral(func4,0,exp(-t1(i)))+integral(func4,exp(-t1(i)
    )),1);
45
46 fu5=f5(t1(i));
47 G5(i)=fu5;
48 end
49 %Eintrage des Vektors G entsprechen den Funktionswerten an
    den
50 %Stuetzstellen
51 G=(-(G1+G2+G3+G4+G5)*pi/2);
52
53 end
```

# Listings

C.1. Matlabcode für Abbildung 5.1 . . . . .	80
C.2. Matlabcode für Abbildung 7.14 und der Abbildungen 7.1, 7.15 und 7.17 . . . . .	80
C.3. Matlabcode für die Numerische Approximation von $\tilde{\eta}$ der Integralgleichung 7.24 . . . . .	84
C.4. Matlabcode für die Numerische Auswertung des Integrals in der Integralgleichung 7.24 in Abb. 7.16 . . . . .	87
C.5. Matlabcode für die Numerische Auswertung der Funktion $g(x)$ der Integralgleichung 7.24 . . . . .	87

# Literatur

- [1] Milton Abramowitz und Irene Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 9. Aufl. New York City: Dover, 1964.
- [2] David Aldous. “Up the River” game story”. <https://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Research/OP/river.pdf>. Feb. 2002.
- [3] Soeren Asmussen. *Ruin Probabilities*. Bd. 2. World Scientific, 2000.
- [4] CS Chen u. a. “Fast Solution for Solving the Modified Helmholtz Equation with the Method of Fundamental Solutions”. In: *Communications in Computational Physics* 17.3 (2015), S. 867–886.
- [5] L. M. Delves und J. L. Mohamed. *Computational Methods for Integral Equations*. Cambridge University Press, 1985.
- [6] Herbert Egger und Matthias Schlottbom. *Differential- und Integralrechnung MSE: Vorlesungsskript*. Techn. Ber. Technische Universitaet Muenchen, 2012.
- [7] Hans Foellmer und Alexander Schied. *Stochastic finance*. 2. Aufl. Bd. 27. De Gruyter studies in mathematics. Berlin: de Gruyter, 2008.
- [8] Riccardo Gatto. *Stochastische Modelle der aktuariellen Risikotheorie: Eine mathematische Einführung*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [9] Peter Grandits. “Herleitung einer impliziten Darstellung des freien Randwerts in einem zweidimensionalen Ruinproblem”. in Vorbereitung. Okt. 2018.
- [10] Peter Grandits. *Stochastische Kontrolltheorie- Mitschrift*. Techn. Ber. Wien: Institut fuer Wirtschaftsmathematik, TU Wien, 2015.
- [11] Dietmar Hareter. *Optimale Dividendenzahlungen im Cramer-Lundberg Modell*. 2010.
- [12] Christian Hipp und Michael Plum. “Optimal investment for insurers”. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 27.2 (2000), S. 215–228.
- [13] Donald Iglehart. “Diffusion Approximations in Collective Risk Theory”. In: *Journal of Applied Probability* 6.2 (1969), S. 285–292.
- [14] Ansgar Juengel. *Partielle Differentialgleichungen: Vorlesungsskript*. Techn. Ber. Institut fuer Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, 2015.
- [15] Martin Keller-Ressel. *Stochastische Analysis: Vorlesungsskript*. Techn. Ber. TU Dresden, 2012.

- [16] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [17] J Kumar, Pammy Manchanda und Pooja. “Numerical solution of fredholm integral equations of the first kind using legendre wavelet collocation method”. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 117 (Jan. 2017), S. 33–43.
- [18] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Universitext. New York, NY: Springer, 2006.
- [19] Norbert Kusolitsch. *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie; Eine Einführung*. Vienna: Springer Vienna: Vienna, 2011.
- [20] Andreas Kyprianou. *Gerber-Shiu risk theory*. EAA series. Cham: Springer, 2013.
- [21] Khosrow Maleknejad, Nasser Aghazadeh und Reza Mollapourasl. “Numerical solution of Fredholm integral equation of the first kind with collocation method and estimation of error bound”. In: *Applied Mathematics and Computation* 179.1 (2006), S. 352–359.
- [22] Henry Mckean und Larry Shepp. “The advantage of capitalism vs. socialism depends on the criterion”. In: *Journal of Mathematical Sciences* 139 (Dez. 2006), S. 6589–6594.
- [23] Thomas Mikosch. *Non-life insurance mathematics*. 2. Aufl. Universitext. Berlin: Springer, 2009.
- [24] Kalev Paerna. *Risk Theory- Script*. Techn. Ber. University of Tartu- Institute of Mathematical Statistics, 2016.
- [25] Huyen Pham. *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. 1. Aufl. Bd. 61. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [26] Thorsten Rheinlander und Jenny Sexton. *Hedging derivatives*. Bd. 15. Advanced series on statistical science and applied probability. 2011.
- [27] Tomasz Rolski u. a. “Stochastic Processes for Insurance and Finance”. In: *British Actuarial Journal* 6 (1999), S. 876–877.
- [28] Hanspeter Schmidli. *Stochastic control in insurance*. Probability and its applications. London: Springer, 2008.
- [29] Lawrence Shampine. “Vectorized adaptive quadrature in MATLAB”. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 211.2 (2008), S. 131–140.
- [30] Halili Mete Soner. “Stochastic Optimal Control in Finance”. In: Cattedra Galileiana 2003, in Scuola Normale. Pisa, 2005.
- [31] Evgeny Spodarev. *Stochastische Risikotheorie Vorlesungsskript*. Techn. Ber. Ulm: Universität Ulm, 2008.
- [32] Rongfeng Sun. *Probability Theory II, Lecture 3 : Vorleseungsskript*. Techn. Ber. Department of Mathematics, National University of Singapore, 2017.

- [33] Wenpin Tang und Li-Cheng Tsai. “Optimal surviving strategy for drifted Brownian motions with absorption”. In: *The Annals of Probability* 46.3 (Mai 2018), S. 1597–1650.
- [34] Abdul-Majid Wazwaz. “The regularization method for Fredholm integral equations of the first kind”. In: *Computers and Mathematics with Applications* 61 (2011), S. 2981–2986.
- [35] Matthias Winkel. *Part B Applied Probability: Vorleseungsskript*. Techn. Ber. Department of Statistics, University of Oxford, 2007.

# Abbildungsverzeichnis

5.1. Legendre - Wavelet Basis . . . . .	35
7.1. HJB Gleichung aus 7.2 für die Push-Bottom Strategie 7.0.1 . . . . .	51
7.2. $B(x_1)$ für verschiedene $\alpha$ gemäß Alternative 1 . . . . .	60
7.3. $B(x_1)$ für verschiedene $\alpha$ gemäß Alternative 2 . . . . .	60
7.4. $B(x_1)$ mit verschiedenen Transformationen auf $[0, h]$ . . . . .	61
7.5. $B(x_1)$ mit verschiedenen Transformationen auf dem ganzen Intervall auf $[0, 6]$ . . . . .	62
7.6. $B(x_1)$ als Zusammensetzung verschiedener Transformationen mit $h = 1$ . . . . .	63
7.7. Funktion $\tilde{\eta}$ in Abhängigkeit von verschiedenen Transformationen mit $h = 1$ . . . . .	64
7.8. Darstellung der Funktion $\tilde{\eta}$ in Abhängigkeit von $h$ . . . . .	65
7.9. $B(x_1)$ mit unterschiedlichen Intervalllängen . . . . .	65
7.10. $B(x_1)$ mit Variation von $K$ Alternative 1 . . . . .	67
7.11. $B(x_1)$ mit Variation von $M$ Alternative 1 . . . . .	68
7.12. $B(x_1)$ mit Variation von $K$ Alternative 2 . . . . .	69
7.13. $B(x_1)$ mit Variation von $M$ Alternative 2 . . . . .	70
7.14. $B(x_1)$ dargestellt mit Alternative 1 und Alternative 2 mit $\epsilon = 0.1$ . . . . .	71
7.15. $\tilde{\eta}$ aus Integralgleichung 7.24 mit Alternative 1 und Alternative 2 . . . . .	72
7.16. Integrallösung und Vergleich mit der Funktion $g$ . . . . .	72
7.17. $B(x_1)$ mit $\epsilon = 0$ ; $\epsilon = 0.01$ ; $\epsilon = 0.2$ ; $\epsilon = 0.5$ . . . . .	73

# Tabellenverzeichnis

7.1. Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.4 und Abb. 7.5 . . . . .	62
7.2. Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.6 und 7.7 . . . . .	64
7.3. Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.9 und Abb. 7.8 . . . . .	66
7.4. Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.10 . . . . .	67
7.5. Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.11 . . . . .	68
7.6. Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.12 . . . . .	69
7.7. Beschreibung der Variationen aus Abb. 7.13 . . . . .	70