

DIPLOMARBEIT

Zur Klassifikation von Minimalflächen im Lorentz-Minkowski-Raum \mathbb{R}_1^3

zur Erlangung des akademischen Grades

Magister der Naturwissenschaften

im Rahmen des Studiums

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Darstellende Geometrie

eingereicht von

Liliom Paul Neidhart
Matrikelnummer 01125756

ausgeführt am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation der Technischen Universität Wien

Betreuung

Betreuer: Ao.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Friedrich Manhart

Wien, 23.10.2018

(Unterschrift Verfasser)

(Unterschrift Betreuer)

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkungen	3
0.1	Vorwort	3
0.2	Dank	4
0.3	Bezeichnungsweisen	5
1	Der Lorentz-Minkowski-Raum \mathbb{R}_1^3	6
1.1	Grundlegende Definitionen	6
1.2	Isometrien	8
2	Differentialgeometrie im \mathbb{R}_1^3	12
2.1	Klassifikation von Flächen	12
2.2	Metrische Grundform, Weingartenabbildung und Krümmungsform	12
2.3	Hauptkrümmungen, Gaußsche Krümmung und mittlere Krümmung	14
3	Minimalflächen	16
3.1	Minimalflächen im euklidischen Raum	16
3.2	Minimalflächen im \mathbb{R}_1^3	17
3.2.1	Raumartige Minimalflächen	17
3.2.2	Zeitartige Minimalflächen	22
4	Minimaldrehflächen	27
4.1	1. Fall: Raumartige Achse	27
4.2	2. Fall: Zeitartige Achse	32
4.3	3. Fall: Isotrope Achse	34
4.4	Exkurs: Kettenlinien im Lorentz-Minkowski Raum	36
4.5	Diskussion und Zusammenfassung	40
5	Minimalregelflächen	41
5.1	Raumartige Minimalregelflächen	43
5.1.1	Vorüberlegungen	43
5.1.2	Berechnung der mittleren Krümmung	43
5.1.3	1. Fall: $ \kappa > \tau > \mathbf{0}$	44
5.1.4	2. Fall: $ \tau > \kappa > \mathbf{0}$	46
5.1.5	3. Fall: $ \tau = \kappa \neq \mathbf{0}$	47
5.1.6	Sonderfälle	48
5.2	Zeitartige Minimalregelflächen	49
5.2.1	Vorüberlegungen	49
5.2.2	1. Fall: Die Erzeugenden sind raumartig	49
5.2.3	2. Fall: Die Erzeugenden sind zeitartig	52
5.2.4	3. Fall: Die Erzeugenden sind isotrop	53
5.3	Diskussion und Zusammenfassung	55
6	Minimalschraubflächen	56
7	Appendix	58
	Abbildungsverzeichnis	58
	Literaturverzeichnis	59

0 Vorbemerkungen

0.1 Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Minimalflächen im Lorentz-Minkowski-Raum \mathbb{R}_1^3 und stellt einen Versuch dar, Parallelen und Unterschiede zu der Situation im euklidischen 3-Raum hervorzuheben. Besonderes Augenmerk wird dabei auf Dreh-, Regel- und Schraubflächen gelegt, da diese Flächenklassen – ähnlich jenen im euklidischen Raum – im Kontext der Minimalität in enger Verbindung zueinander stehen.

Die Geometrie des Lorentz-Minkowski-Raumes, induziert durch eine indefinite Bilinearform, der sogenannten Lorentz-Metrik, weist markante Unterschiede zur euklidischen Geometrie auf. Diese Unterschiede, insbesondere die verschiedenen Typen von 1-Parameter-Untergruppen der speziellen Lorentz-Gruppe bzw. der pseudo-euklidischen Gruppe, sind Inhalt des ersten Abschnittes.

Die Lorentz-Metrik wirkt sich auf die Differentialgeometrie des \mathbb{R}_1^3 aus, wenn man verlangt, dass betrachtete Größen und Objekte invariant unter pseudo-euklidischen Bewegungen sind. In Abschnitt zwei werden die damit verbundenen Modifikationen bei der Definition von Krümmungsgrößen ausgeführt und damit die mittlere Krümmung erklärt.

Minimalflächen im Lorentz-Minkowski-Raum sind, so wie auch im Euklidischen, als Flächen erklärt, deren mittlere Krümmung in jedem Punkt verschwindet. In Abschnitt drei werden grundlegende Eigenschaften wie die Darstellbarkeit mittels holomorpher Funktionen oder Extrema des Flächeninhaltes diskutiert. Dabei lassen raumartige Minimalflächen weitestgehend gleichartige Aussagen zum euklidischen 3-Raum zu, zeitartige Minimalflächen bedürfen jedoch neuer Konzepte und es treten Phänomene auf, die kein Analogon in der euklidischen Situation besitzen.

In Abschnitt vier werden alle Minimalflächen klassifiziert, die invariant sind unter einer 1-Parameter-Untergruppe der speziellen Lorentz-Gruppe und damit ein Pendant zu euklidischen Minimaldrehflächen bilden. Außerdem werden Kettenlinien im \mathbb{R}_1^3 im Kontext der potentiellen Energie und als Evoluten von Traktrizen untersucht. Anschließend werden in Abschnitt fünf Minimalregelflächen betrachtet und klassifiziert. Zuletzt werden in Abschnitt sechs Zusammenhänge der bisherigen Untersuchungen hergestellt, was zur Beschreibung von Minimalflächen führt, die invariant sind unter einer 1-Parameter-Untergruppe der pseudo-euklidischen Gruppe und damit ein Pendant zu euklidischen Minimalschraubflächen bilden.

Insgesamt stützt sich die Arbeit auf die Ergebnisse verschiedener Publikationen (vgl. Appendix: Literatur) und führt diese zusammen. Hierbei wird versucht, genauer auf Zwischenschritte und Annahmen einzugehen, als dies manchmal in den Publikationen der Fall ist, um Nachvollziehbarkeit sicherzustellen. Zusätzlich wird versucht den geometrischen Sachverhalt mit Hilfe einer Vielzahl von Grafiken zu veranschaulichen.

0.2 Dank

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit, aber auch im Verlauf meines Studiums maßgeblich unterstützt und begleitet haben.

Mein Dank gebührt Prof. Friedrich Manhart, der meine Diplomarbeit betreut und begutachtet hat. Durch seinen Einfluss habe ich mich mit pseudo-euklidischer Geometrie beschäftigt und so den Entschluss gefasst, diese als Thema für meine Diplomarbeit zu wählen. Für sein Angebot, ihn jederzeit mit Fragen konsultieren zu dürfen und für die Anregungen im Verlauf der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Prof. Martin Peternell, unter dessen Leitung meine Arbeit als Studienassistent ein Vergnügen war, und der mich auch im Schreibprozess der Diplomarbeit stets unterstützt hat.

Eine Person, die ich sehr bewundere und die in ihren Lehrveranstaltungen immer versucht hat, den Blick von uns Studierenden auf das Wesentliche zu lenken und damit einen maßgeblichen Beitrag zur Basis meines Mathematikverständnisses geleistet hat, ist Prof. Reinhard Winkler. Dafür und für die vielen Diskussionen über fachdidaktische Fragen möchte ich mich herzlich bedanken.

Schließlich danke ich meinen Eltern. Meiner Mutter, weil sie mich stets in meiner Studienwahl bestärkt und in meinem Studium unterstützt hat, und meinem Vater, der das Fundament für mein Interesse an der Mathematik gelegt hat.

Liliom Neidhart, 21. Oktober 2018

0.3 Bezeichnungsweisen

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, die in der Arbeit behandelten Konzepte und Inhalte zu notieren, wie etwa der Vergleich der Publikationen [5], [12] und [6] zweifellos bestätigt. Um im Folgenden einheitlich zu notieren und um Missverständnissen vorzubeugen, seien hier einige Vorbemerkungen zur Notation festgehalten.

Der Schauplatz dieser Arbeit ist der Lorentz-Minkowski-Raum \mathbb{R}_1^3 , weshalb es sinnvoll scheint, alle damit verbundenen Größen ohne besondere Kennzeichnung anzuschreiben. Sollte es notwendig sein, zwischen Größen der Lorentz-Minkowski-Geometrie und der euklidischen Geometrie zu unterscheiden, so werden die euklidischen im Index mit einem e versehen. Wird also beispielsweise die Gaußsche Krümmung K im Sinne der Differentialgeometrie im Lorentz-Minkowski Raum mit der Gaußschen Krümmung K_e im euklidischen Raum verglichen, so wird dies $\text{sgn } K_e = -\text{sgn } K$ angeschrieben.

Wenn in dieser Arbeit Flächenwege bzw. Flächen betrachtet werden, so seien diese, bis auf explizit angeführte Änderungen, reguläre, differenzierbare Hyperflächenwege $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bzw. Hyperflächen $f(U)$. „Differenzierbar“ bedeutet stets die Differenzierbarkeitsklasse C^∞ , wobei meist die Differenzierbarkeitsklasse C^2 ausreicht.

Um schleppende Formulierungen möglichst zu vermeiden, werden Hyperflächenwege bzw. Hyperflächen kurz Flächenwege bzw. Flächen genannt und die Stellen, an denen lokale Größen von Flächenwegen betrachtet werden, nur dann angeschrieben, wenn es notwendig erscheint. Ableitungen und Koordinatenfunktionen werden wie folgt angeschrieben:

Definition 0.1 (Notation). Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein regulärer Flächenweg,

$$a := (u^1, u^2) \mapsto f(a) := (f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2)).$$

Dabei bezeichnen u^j , $j \in \{1, 2\}$, die Koordinatenfunktionen im Parameterbereich und $f^\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, die Koordinatenfunktionen von f .

Die partiellen Ableitungen werden kurz mit

$$f_{,j}(a) := \frac{\partial f}{\partial u^j}(a), \quad a \in U$$

bzw.

$$f_{,jk}(a) := \frac{\partial^2 f}{\partial u^k \partial u^j}(a), \quad a \in U$$

bezeichnet. Der Tangentialvektorraum (bzw. die affine Tangentialebene) im Punkt $f(a)$ wird mit $T_a f$ bezeichnet und ist, da f regulär, stets 2-dimensional.

Zudem wird im Text manchmal von affinen Strukturen wie Punkten, Geraden oder Ebenen geschrieben und nicht klar zwischen dem \mathbb{R}^3 als Vektorraum und dem dazu gehörigen affinen Raum unterschieden.

1 Der Lorentz-Minkowski-Raum \mathbb{R}_1^3

Für die folgenden Definitionen und Folgerungen vergleiche auch R. LOPEZ [10].

1.1 Grundlegende Definitionen

Bezeichne \mathbb{R}^3 den 3-dimensionalen Vektorraum mit seiner gewohnten Struktur und der kanonischen Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$ mit

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Weiters bezeichnen wir mit (x, y, z) die Koordinaten eines Vektors bezüglich B .

Definition 1.1 (Lorentz-Metrik, Lorentz-Minkowski-Raum). *Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\langle u, v \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3, \quad u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3),$$

heißt *Lorentz-Metrik und der Raum $\mathbb{R}_1^3 := (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz-Minkowski-Raum.*

Die Lorentz-Metrik ist eine indefinite Bilinearform, sodass im Gegensatz zur euklidischen Situation auch Vektoren $\langle u, u \rangle = 0$ ($u \neq 0$) und $\langle v, v \rangle < 0$ existieren, was zu folgender Definition führt:

Definition 1.2. *Ein Vektor $u \in \mathbb{R}_1^3$ heißt¹*

$$\begin{aligned} \text{raumartig} &: \iff \langle u, u \rangle > 0 \\ \text{zeitartig} &: \iff \langle u, u \rangle < 0 \\ \text{isotrop (lichtartig)} &: \iff \langle u, u \rangle = 0, \quad u \neq 0. \end{aligned}$$

Analog heißen Untervektorräume $U \subset \mathbb{R}^3$ raumartig, zeitartig oder isotrop (lichtartig), je nachdem ob die darauf durch die Lorentz-Metrik induzierte Metrik positiv definit, indefinit oder degeneriert ist. Die Zugehörigkeit eines Vektors oder Untervektorraumes zu einer dieser Klassen wird fortan mit Typus bezeichnet.

Die Menge aller isotropen Vektoren $L := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$ wird als Lichtkegel bezeichnet (vgl. Abbildung 1).

Beispiel 1.1. *Um erste Unterschiede zum euklidischen Raum zu illustrieren, betrachte etwa die zeitartigen bzw. raumartigen (Minkowski-) Sphären $S_1^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x \rangle = 1\}$, bzw. $H_2 := H_2^+ \cup H_2^-$, wobei $H_2^+ := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x \rangle = -1, x_3 > 0\}$ und $H_2^- := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x \rangle = -1, x_3 < 0\}$, die dem einschaligen Einheitsdrehhyperboloid bzw. den beiden Schalen des zweischaligen Einheitsdrehhyperboloids entsprechen (vgl. Abbildung 1). Die Klassifikation dieser Flächen in raum- bzw. zeitartig greift an dieser Stelle vor und wird in Abschnitt 2, Definition 2.1 genauer ausgeführt.*

Bemerkung. *Mit Blick auf die sphärische Abbildung und der damit verbundenen Weingartenabbildung, sei der Unterschied dieser „Minkowski-Sphären“ zur euklidischen Sphäre hervorgehoben.*

¹Die in diesem Kontext etwas eigenartig anmutenden Bezeichnungen sind auf die spezielle Relativitätstheorie zurückzuführen.

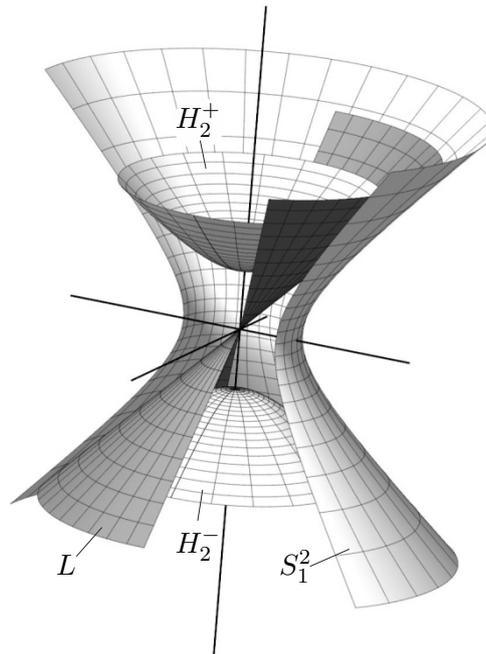


Abbildung 1: Lichtkegel und „Minkowski-Sphären“

Definition 1.3. Das (Lorentz-) Kreuzprodukt zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ ist der eindeutige Vektor, geschrieben $u \times v$, der

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w), \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$$

erfüllt, wobei (u, v, w) die 3×3 -Matrix mit den jeweiligen Spaltenvektoren bezeichnet. In Koordinaten gilt

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, -u_1v_2 + u_2v_1).$$

Dieses Kreuzprodukt ist wohldefiniert, im Unterschied zum euklidischen aber ist die Basis $B = (u, v, u \times v)$ nicht notwendigerweise positiv orientiert. Die Orientierung hängt vom Typus der durch die Vektoren aufgespannten Ebene ab. Genauer: ist die Hülle von u und v raumartig, so ist B negativ orientiert; ist sie zeitartig, so ist B positiv orientiert. Im isotropen Fall liegt $u \times v$ wieder in der Hülle von u und v .

Für einfache Eigenschaften von Untervektorräumen in Abhängigkeit von ihrem Typus siehe auch R. LOPEZ [10, Prop. 1.1.-Prop. 1.7.].

1.2 Isometrien

Es werden Eigenschaften von Flächen untersucht, die invariant unter pseudo-euklidischen Bewegungen sind. Wie pseudo-euklidische Bewegungen erklärt sind und insbesondere wie 1-Parameter-Untergruppen als Pendant zu Schraubungen im euklidischen Sinne aussehen, ist Inhalt dieses Unterabschnittes. Besonders mit Blick auf die Klassifikation in Minimal-schraubflächen und Minimaldrehflächen muss die Struktur der Lorentz-Gruppe bzw. der pseudo-euklidischen Gruppe genauer betrachtet werden.

Eine umfassende Einführung in die Theorie von Transformationsgruppen gibt W. KÜHNEL [8].

Definition 1.4 (Isometrie). *Sei $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorraumendomorphismus. A heißt Isometrie genau dann, wenn*

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

gilt. A wird auch als Lorentz-Transformation bezeichnet.

Definiert man

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

so gilt $\langle u, v \rangle = u^T G v$ und für die Menge aller Lorentz-Transformationen $O_1(3)$ als Menge von Matrizen gilt

$$O_1(3) = \{A \in Gl(3, \mathbb{R}) : A^T G A = G\}.$$

$SO_1(3)$ bezeichnet die *spezielle Lorentz-Gruppe* als Untergruppe von $O_1(3)$, die Orientierung erhält, also

$$SO_1(3) = \{A \in O_1(3) : \det A = 1\}.$$

Definition 1.5 (Pseudo-euklidische Gruppe). *Die von der Lorentz-Gruppe $O_1(3)$ zusammen mit allen Translationen des 3-dimensionalen Raumes erzeugte Gruppe heißt pseudo-euklidische Gruppe und ihre Elemente pseudo-euklidische Bewegungen.*

Im euklidischen Raum sehen alle 1-Parameter-Untergruppen der speziellen orthogonalen Gruppe bis auf Konjugation und Parametertransformation wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie aber verhält es sich im Lorentz-Minkowski-Raum?

(Lorentz-) Drehungen bezeichnen nichttriviale 1-Parameter-Untergruppen von $SO_1(3)$ als Pendant zu euklidischen Drehungen und sind durch eine Fixpunktachse ausgezeichnet.

Proposition 1.1. *Bis auf Konjugation ($Y = PXP^{-1}$, P orientierter Basiswechsel in neue Orthonormalbasis) und zulässige Parametertransformationen umfassen die folgenden drei Fälle alle möglichen nichttrivialen 1-Parameter-Untergruppen der speziellen Lorentz-Gruppe $SO_1(3)$:*

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} u \quad (1)$$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u \quad (2)$$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & 1 & \theta \\ -\frac{\theta^2}{2} & \theta & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix} u \quad (3)$$

Beweis. Es gilt: Jede 1-Parameter-Untergruppe von $Gl(3, \mathbb{R})$ ist von der Form $\theta \mapsto \exp(\theta X)$ für festes $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. (Beweis [8, S. 71])

Es müssen also alle zulässigen Kandidaten für X gefunden werden.

1-Parameter-Untergruppen können als differenzierbare Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ aufgefasst werden mit $c(0) = E$ (E bezeichnet die Einheitsmatrix) und beliebigen $\varepsilon > 0$ (vgl. [8, S. 77]).

Mit $A(\theta) := \exp(\theta X)$ gilt

$$\frac{d}{d\theta} A(0) = X.$$

Da $A(\theta) \in SO_1(3) \forall \theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{d\theta} ((A(\theta))^T \cdot G \cdot A(\theta)) = 0.$$

Mit der Produktregel und $A(0) = E$ folgt

$$\left(G \cdot \frac{d}{d\theta} A(0) \right)^T = -G \cdot \frac{d}{d\theta} A(0)$$

und damit insgesamt

$$X = \frac{d}{d\theta} A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$$

für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Da die 1-Parameter-Untergruppe nicht trivial ist, hat X einen 1-dimensionalen Kern der Form

$$\left[\begin{pmatrix} -z \\ y \\ -x \end{pmatrix} \right].$$

Der Kern von X entspricht den Fixpunkten der Transformationen. Je nachdem ob er raumartig, zeitartig oder isotrop ist, ist X konjugiert zu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen in $\exp(\theta X)$ und einfaches Rechnen ist die Behauptung bewiesen. \square

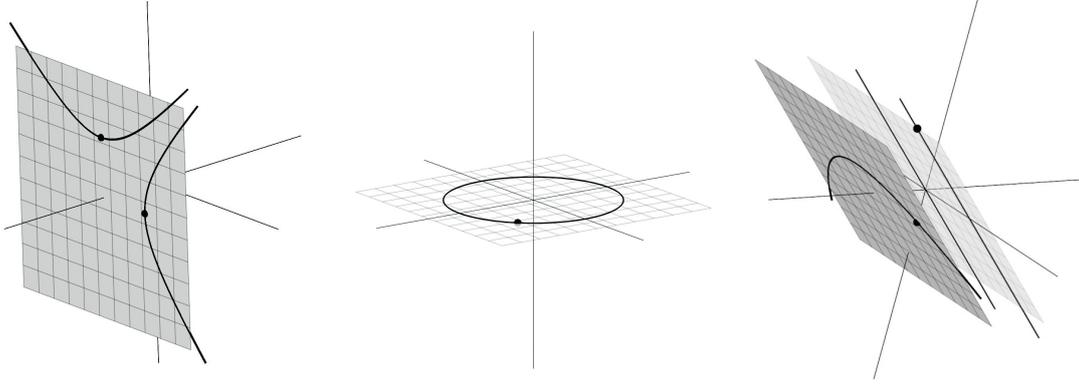


Abbildung 2: Bahnkurven bei (Lorentz-) Drehungen

Dieser Beweis lehnt sich an den Beweis von Proposition 1.2, die F. DILLEN und W. KÜHNEL [9, Proposition 1] formulieren und beweisen.

Proposition 1.2. *Bis auf Konjugation ($Y = PXP^{-1}$, P orientierter Basiswechsel in neue Orthonormalbasis) und zulässige Parametertransformationen umfassen die folgenden drei Fälle alle möglichen nichttrivialen 1-Parameter-Untergruppen der pseudo-euklidischen Gruppe:*

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} u + p \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u + p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & 1 & \theta \\ -\frac{\theta^2}{2} & \theta & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix} u + p \begin{pmatrix} \frac{\theta^3}{3} - \theta \\ \theta^2 \\ \frac{\theta^3}{3} + \theta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Diese Untergruppen bilden das Pendant zu den euklidischen Schraubungen und werden deshalb (Lorentz-) Schraubungen genannt.

Proposition 1.1 und 1.2 zeigen, dass im Lorentz-Minkowski-Raum im Gegensatz zum euklidischen Raum zwischen genau drei Fällen unterschieden werden muss.

Die in Proposition 1.1 angeführten 1-Parameter-Untergruppen sind (Lorentz-) Drehungen um die 1. (raumartige) Achse (Gleichung 1), die 3. (zeitartige) Achse (Gleichung 2) und um die (isotrope) 1. Mediane in der e_1e_3 -Ebene (Gleichung 3). Analoges gilt für die (Lorentz-) Schraubungen bzgl. der Schraubachsen bei Proposition 1.2.

(Lorentz-) Drehungen um raumartige Achsen werden auch „Boosts“ genannt.

Bahnkurven bei (Lorentz-) Drehungen. Die Bahnkurven von Punkten, die (Lorentz-) Drehungen unterworfen werden, welche nicht auf der Drehachse liegen, sind je nach Typus der Drehachse Hyperbeln (raumartig), Ellipsen (zeitartig) oder Parabeln und Geraden (isotrop) (vgl. Abbildung 2).

(Lorentz-) Drehungen erlauben es auch, (pseudo-euklidische) Kreise im \mathbb{R}_1^3 als Bahnkurven von Punkten unter (Lorentz-) Drehungen zu definieren.

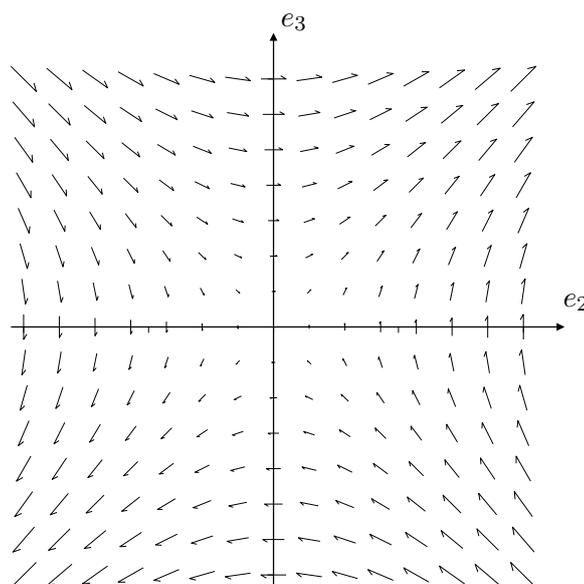


Abbildung 3: Vektorfeld

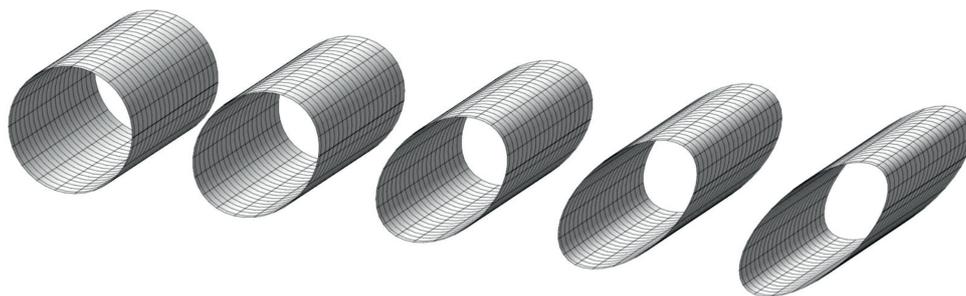


Abbildung 4: Drehzylinder unter Boost

Beispiel 1.2. Ein euklidischer Drehzylinder $f(U)$ mit 1. Achse als Drehachse und Radius 1 wird einem Boost in Richtung e_1 unterworfen.

$$f(u, v) := (u, \cos v, \sin v), \quad U := \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$$

Unterwirft man $f(U)$ einem Boost in Richtung e_1 , so ergibt sich

$$Af(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} f(uv) = \begin{pmatrix} u \\ \cos v \cosh \theta + \sin v \sinh \theta \\ \cos v \sinh \theta + \sin v \cosh \theta \end{pmatrix}.$$

In Abbildung 4 sind von links nach rechts die Flächen $Af(U)$ zu den Parameterwerten $\theta = 0$, $\theta = 0.1$, $\theta = 0.2$, $\theta = 0.3$ und $\theta = 0.4$ dargestellt.

In Abbildung 3 ist das Vektorfeld dargestellt, dessen Integralkurven die Bahnkurven dieses Boosts in einer zur e_2e_3 -Ebene parallelen Ebene sind. Dabei ist gut zu erkennen, dass die beiden isotropen Achsen jeweils als Ganzes fest bleiben.

2 Differentialgeometrie im \mathbb{R}_1^3

In diesem Abschnitt wird auf notwendige Modifikationen in der klassischen euklidischen Differentialgeometrie eingegangen, um (pseudo-euklidische) bewegungsinvariante geometrische Begriffe von Flächen zu erhalten.

Für die angeführten Definitionen und Erklärungen vgl. auch W. KÜHNEL [7, S. 81].

2.1 Klassifikation von Flächen

Definition 2.1. Ein regulärer Flächenweg $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bzw. die Fläche $f(U)$ heißt

$$\begin{aligned} \text{raumartig} &: \iff T_a f \text{ ist raumartig} \quad \forall a \in U \\ \text{zeitartig} &: \iff T_a f \text{ ist zeitartig} \quad \forall a \in U. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die durch obige Definition suggerierte eindeutige Klassifikation von Flächen in raum- bzw. zeitartig ist im Allgemeinen natürlich nicht möglich. Man betrachte beispielsweise die euklidische Einheitskugel $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Der Bereich $\{(x, y, z) \in S^2 : |z| < 1/\sqrt{2}\}$ ist zeitartig während $\{(x, y, z) \in S^2 : |z| > 1/\sqrt{2}\}$ raumartig ist (vgl. [10]). Flächen mit ausschließlich isotropen Tangentialebenen sind nicht Gegenstand dieser Arbeit und werden nicht behandelt.

2.2 Metrische Grundform, Weingartenabbildung und Krümmungsform

Definition 2.2 (Metrische Grundform). Die Abbildung $(I)_{f(a)} : T_a f \times T_a f \rightarrow \mathbb{R}$, durch die Lorentz-Metrik im Tangentialvektorraum $T_a f$ induziert, heißt metrische Grundform der Fläche $f(U)$.

Die Funktionen $g_{jk} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_{jk} := (I)_{f(a)}(f_{,j}(a), f_{,k}(a)) = \langle f_{,j}(a), f_{,k}(a) \rangle, \quad j, k \in \{1, 2\}$$

heißen Koordinatenfunktionen von $(I)_{f(a)}$. Weiters bezeichne

$$\Delta(a) := \det(g_{jk}(a))$$

die Determinante der Funktionen g_{jk} .

Die Definition der metrischen Grundform erfolgt analog zur Definition in der euklidischen Differentialgeometrie. Im Euklidischen gilt für reguläre Punkte $\Delta_e > 0$, da das euklidische Skalarprodukt positiv definit ist. Im Lorentz-Minkowski-Raum hingegen, können durchaus die Fälle $\Delta < 0$ bei zeitartigen Flächenstücken und $\Delta = 0$ bei isotropen Tangentialebenen auftreten.

Korollar 2.1. Für raum- bzw. zeitartige Flächen gilt stets $\Delta(a) > 0$ bzw. $\Delta(a) < 0$ an jeder Stelle $a \in U$.

Bemerkung. Ab jetzt sei immer $\Delta \neq 0$ an betrachteten Flächenwegen vorausgesetzt.

Definition 2.3 (Normalvektor). Der Vektor

$$n_f(a) := \frac{f_{,1}(a) \times f_{,2}(a)}{\sqrt{-\varepsilon \Delta(a)}}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

heißt Normalvektor (kurz: n) des Flächenwegs f im Punkt $f(a)$, wobei $\varepsilon := 1$ bei zeitartigen Flächen und $\varepsilon := -1$ bei raumartigen Flächen gilt.

Diese Definition ist das Pendant zum euklidischen (Einheits-) Normalvektor, da $\langle n, n \rangle = \frac{1}{-\varepsilon \Delta} \langle f_{,1} \times f_{,2}, f_{,1} \times f_{,2} \rangle = \varepsilon$ gilt. Per Definition gilt: Ist die Fläche raumartig, so ist n zeitartig und umgekehrt.

Definition 2.4 (Sphärische Abbildung, Weingartenabbildung). *Die sphärische Abbildung (Gauß-Abbildung) σ wird mittels Definition 2.3 erklärt:*

$$f(a) \mapsto \sigma(f(a)) := n_f(a).$$

Der Vektorraumendomorphismus $\omega_p : T_a f \rightarrow T_a f$ mit

$$\omega_p := -D\sigma \circ (Df)^{-1}$$

als derivierte Abbildung der sphärischen Abbildung heißt Weingartenabbildung der Fläche $f(U)$ im Punkt $p := f(a)$.

Die Funktionen $h_j^l : U \rightarrow \mathbb{R}$ als Einträge der Matrixdarstellung von ω_p bezüglich der Basis $(f_{,1}, f_{,2})$ heißen Koordinatenfunktionen von ω_p .

Formal gesehen entspricht diese Definition der euklidischen, wobei die sphärische Abbildung durch die „Minkowski-Sphären“ erklärt ist (Man erinnere sich an Abbildung 1).

Definition 2.5 (Krümmungsform). *Die Krümmungsform ist der Normalanteil der Matrix der zweiten Ableitungen, sie ist also eigentlich vektorwertig. Im euklidischen Fall ist dies unerheblich, man betrachtet einfach den skalaren Faktor des projizierten Vektors im 1-dimensionalen Normalraum der Tangentialebene im Verhältnis zum Normalvektor (Länge 1). Da im Lorentz-Minkowski-Raum aber unterschieden werden muss zwischen raum- und zeitartigen Normalräumen bzw. Vektoren, wird die Krümmungsform als Bilinearform auf $T_a f$ folgendermaßen erklärt:*

$$(II)_{f(a)}(x, y) := \varepsilon(I)_{f(a)}(x, \omega_p(y)) = \varepsilon \langle x, \omega_p(y) \rangle,$$

wobei ε wieder dem Typ des Normalraumes entsprechend aus $\{-1, 1\}$ gewählt werden muss. Die Funktionen $h_{jk} : U \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h_{jk} := (II)_{f(a)}(f_{,j}, f_{,k}), \quad j, k \in \{1, 2\}$$

heißen Koordinatenfunktionen von $(II)_{f(a)}$.

Die hier gegebene Definition lehnt sich an die Erklärung von W. KÜHNEL [7, S. 81]. Es gilt wie im euklidischen Fall, dass die Weingartenabbildung selbstadjungiert ist bezüglich der metrischen Grundform, womit auch die im Lorentz-Minkowski-Raum erklärte Krümmungsform eine symmetrische Bilinearform ist. Einzig die metrische Grundform ist im zeitartigen Fall nicht positiv definit, was sich auf die Existenz der Hauptkrümmungen auswirkt (vgl. Unterabschnitt 2.3).

Zur Berechnung der Koordinatenfunktionen. Mit den bisherigen Definitionen berechnen sich die Koordinatenfunktionen h_{jk} der Krümmungsform und die Koordinatenfunktionen h_j^l der Weingartenabbildung wie folgt:

Die Weingartenabbildung als derivierte Abbildung der sphärischen Abbildung wird durch gleiche Koordinaten beschrieben, wodurch

$$\omega_p(f_{,j}) = -n_{,j}$$

gilt. Die Koordinatenfunktionen h_{jk} der Krümmungsform berechnen sich daher

$$\begin{aligned} \underline{h_{jk}} &= \varepsilon(I)_{f(a)}(f_{,j}, \omega_p(f_{,k})) = \varepsilon\langle f_{,j}, \omega_p(f_{,k}) \rangle = -\varepsilon\langle f_{,j}, n_{,k} \rangle \stackrel{(1)}{=} \\ &= \varepsilon\langle n_{,k}, f_{,j} \rangle = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon\Delta}} \langle f_{,1} \times f_{,2}, f_{,jk} \rangle = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon\Delta}} \det(f_{,1}, f_{,2}, f_{,jk}), \end{aligned}$$

wobei bei (1) durch Ableiten nach u^k von $\langle n, f_{,j} \rangle = 0$ mittels Produktregel und der daraus resultierende Identität $\langle n_{,k}, f_{,j} \rangle = -\langle n, f_{,jk} \rangle$ umgeformt wurde.

Mit bekannten h_{jk} ergeben sich die Koordinatenfunktionen h_k^l der Weingartenabbildung durch

$$h_{jk} = \varepsilon\langle f_{,j}, \omega_p(f_{,k}) \rangle = \varepsilon\langle f_{,j}, h_k^s f_{,s} \rangle = \varepsilon h_k^s g_{sj}.$$

Durch Multiplikation mit der zu (g_{sj}) inversen Matrix² (g^{jl}) folgt

$$\underline{h_k^l} = \underline{\varepsilon h_{jk} g^{jl}}.$$

2.3 Hauptkrümmungen, Gaußsche Krümmung und mittlere Krümmung

Definition 2.6 (Gaußsche Krümmung, mittlere Krümmung). *Die Gaußsche Krümmung ist erklärt durch*

$$K := \varepsilon \det \omega_p.$$

Die mittlere Krümmung ist erklärt durch

$$H := \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tr} \omega_p.$$

Auch hier muss $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ dem Typus der Fläche entsprechend gewählt werden (vgl. F. MANHART [12, S. 3]).

Es gilt

$$\begin{aligned} H &= \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tr} \omega_p = \frac{\varepsilon}{2} (h_1^1 + h_2^2) = \frac{1}{2} (h_{11} g^{11} + h_{12} g^{12} + h_{21} g^{21} + h_{22} g^{22}) = \\ &= \frac{1}{2\Delta} (h_{11} g_{22} - 2h_{12} g_{12} + h_{22} g_{11}), \end{aligned}$$

und

$$K = \varepsilon \det \omega_p = \varepsilon \frac{\det(h_{jk})}{\Delta} = -\frac{\det(A_{jk})}{\Delta^2}, \quad (7)$$

wobei $A_{jk} := \det(f_{,1}, f_{,2}, f_{,jk})$ und auf die Berechnungen am Ende von Abschnitt 2.2 zurückgegriffen wurde. Mit (7) gilt außerdem

$$\Delta^2 K = -\Delta_e^2 K_e,$$

wobei Δ_e und K_e die Determinanten der euklidischen Metrik und die euklidische Gaußsche Krümmung bezeichnen. Damit gilt:

Korollar 2.2. *Die euklidische Gaußsche Krümmung und die Gaußsche Krümmung im Lorentz-Minkowski-Raum haben stets verschiedene Vorzeichen oder sind beide gleich null.*

² (g_{sj}) ist invertierbar, da $\Delta \neq 0$ vorausgesetzt ist.

Definition 2.7 (Hauptkrümmungen). *Sollten die Eigenwerte κ_1 und κ_2 der Weingartenabbildung reell sein, so werden sie wie im euklidischen Fall, Hauptkrümmungen genannt und die zugehörigen Eigenvektoren werden als Krümmungsvektoren bezeichnet.*

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\omega_p - \kappa E) = 0$. Damit gilt für die Hauptkrümmungen

$$\kappa_{1,2} = \varepsilon H \pm \sqrt{H^2 - \varepsilon K}. \quad (8)$$

Ist der betrachtete Flächenweg raumartig, so folgt die Existenz der Hauptkrümmungen wie im Euklidischen aus der Selbstadjungiertheit der Weingartenabbildung bezüglich der in diesem Fall positiv definiten metrischen Grundform. Da die metrische Grundform im zeitartigen Fall indefinit ist, kann hier über die Existenz der Hauptkrümmung keine allgemeine Aussage getroffen werden.

Bemerkung. *Betrachtet man dieses Problem projektivgeometrisch, so handelt es sich bei den Eigenräumen der Hauptkrümmungen um Geraden in der Tangentialebene, die konjugiert sind bezüglich der durch die Lorentz-Metrik induzierten Involution (Orthogonalität) und gleichzeitig konjugiert sind bezüglich der durch die Krümmungsform bestimmten Involution. Ist die Tangentialebene zeitartig so ist die Involution durch die Lorentz-Metrik hyperbolisch (da zwei isotrope Richtungen existieren). Ist gleichzeitig die Involution der Krümmungsform hyperbolisch ($K_e < 0$), existiert nicht notwendigerweise ein gemeinsames Paar konjugierter Geraden, also auch keine reellen Hauptkrümmungen. Sollte die Involution der Krümmungsform aber elliptisch sein ($K_e > 0$), existiert jedenfalls ein gemeinsames Paar konjugierter Geraden und damit Hauptkrümmungen.*

3 Minimalflächen

Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit sind Minimalflächen. Bevor in den Folgeabschnitten auf spezielle Minimalflächen im \mathbb{R}_1^3 eingegangen wird, sind in diesem Abschnitt allgemeine Aussagen über Minimalflächen angeführt. Die Komplexifizierung des Parameterbereiches und die damit verbundene Darstellbarkeit von Minimalflächen mittels holomorpher Funktionen ist ein sehr schönes Beispiel für das Netz von Zusammenhängen, das sich durch die Mathematik spannt, erscheinen doch Funktionentheorie und Differentialgeometrie als vermeintlich unabhängige Teilgebiete.

3.1 Minimalflächen im euklidischen Raum

Betrachtet man eine kompakte Teilmenge $C \subset U$ (C soll dabei nichtleeres Inneres haben, und der Rand ∂C soll eine Nullmenge sein) und einen regulären Flächenweg f , so nennt man die C^2 -Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(s, u) \mapsto f_s(u)$, wobei alle $f_s : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ Immersionen sind, für die $f_0 = f$ und $f_s|_{U \setminus C} = f|_{U \setminus C}$, $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt, eine kompakte Variation von f auf C .

Betrachtet man im euklidischen Raum den Oberflächeninhalt aller Vergleichsflächen f_s auf C , so zeigt sich, dass für ein Extremum des Oberflächenfunktionals notwendig $H = 0$ gilt. Liegt tatsächlich ein Extremum vor, so ist dies ein Minimum.

Dies führt im euklidischen Raum zur Definition von Minimalflächenwegen $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch die Bedingung $H_e(a) = 0$, für alle $a \in U$. Diese Flächenwege sind aber nicht notwendigerweise minimal im oben erklärten Sinne, da $H_e = 0$ nur notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung ist.

Bemerkenswerter Weise gilt aber im euklidischen Raum, dass alle Minimalflächen lokal den Flächeninhalt minimieren, also lokal tatsächlich minimal sind, obwohl nur gefordert wurde, dass der Oberflächeninhalt stationär ist. Genauer gilt:

Satz 3.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ Minimalflächenweg. Dann gibt es um jede Stelle $u_0 \in U$ eine kompakte Umgebung $C \subset U$ mit der Eigenschaft, dass für jeden nicht zu f geometrisch äquivalenten Flächenweg $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\hat{f} = f$ auf $U \setminus C$ gilt:*

$$\mathcal{A}(f|_C) < \mathcal{A}(\hat{f}|_C),$$

wobei \mathcal{A} den Flächeninhalt im euklidischen Raum wie gewohnt beschreibt.

Dieser Satz ist direkt von J. ESCHENBURG und J. JOST [4, Kapitel 8.1. und 8.2] übernommen, die auch obige Aussagen im Detail ausführen und beweisen.

Im Anschluss an die euklidische Situation werden Flächenwege im Lorentz-Minkowski Raum Minimalflächenwege genannt, genau dann, wenn überall $H = 0$ gilt (vgl. Definition 3.1). Ob trotz anders erklärten Oberflächeninhaltes im \mathbb{R}_1^3 Extremaleigenschaften bei Minimalflächenwegen erhalten bleiben, ist, unter anderem, Inhalt der Unterabschnitte 3.2.1 und 3.2.2.

3.2 Minimalflächen im \mathbb{R}_1^3

Ein Minimalflächenweg bzw. eine Minimalfläche im \mathbb{R}_1^3 ist wie folgt definiert:

Definition 3.1 (Minimalfläche). *Ein regulärer Flächenweg $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt Minimalflächenweg, $f(U)$ Minimalfläche, wenn*

$$H(a) = 0, \quad \forall a \in U$$

gilt.

Es zeigt sich, dass es in vielen Fragen entscheidend ist, ob es sich dabei um einen raum- bzw. zeitartigen Flächenweg handelt, weshalb die Gliederung in die Unterabschnitte 3.2.1 und 3.2.2 sinnvoll erscheint.

3.2.1 Raumartige Minimalflächen

Extremaleigenschaften des Flächeninhalts. Im Lorentz-Minkowski Raum führt die Forderung nach einem Extremum ebenfalls auf $H = 0$, im Fall raumartiger Minimalflächen wird durch ein Extremum aber ein Maximum realisiert. In Analogie zur euklidischen Aussage in Unterabschnitt 3.1 gilt: Jede raumartige Minimalfläche maximiert den Oberflächeninhalt lokal. Deshalb werden raumartige Minimalflächen oft als Maximalflächen bezeichnet (vgl. E. CALABI [3]).

Komplexifizierung und Darstellung mittels holomorpher Funktionen. Interpretiert man den 2-dimensionalen Parameterbereich als Teil der Gaußschen Zahlenebene, so ergeben sich im euklidischen Raum bemerkenswerte Aussagen über die Darstellbarkeit von Minimalflächen durch holomorphe Funktionen (vgl. W. KÜHNEL [7, S. 68-74]). Ähnliche Aussagen lassen sich für raumartige Minimalflächen treffen.

Definition 3.2. *Ein regulärer Flächenweg $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt isotherm, falls gilt*

$$g_{jk} = \lambda \delta_{jk} \text{ mit } \lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Lemma 3.1. *Für jeden isothermen Flächenweg $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt:*

$$f(U) \text{ ist Minimalfläche} \Leftrightarrow f_{,11}^\alpha + f_{,22}^\alpha = 0, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}$$

Die Funktionen f^α werden dann harmonisch genannt.

Beweis. Für die mittlere Krümmung H gilt in isothermen Parametern

$$2\lambda H = h_{11} + h_{22}.$$

Einerseits folgt nun aus

$$\langle f_{,1}, f_{,1} \rangle = \lambda = \langle f_{,2}, f_{,2} \rangle, \quad \langle f_{,1}, f_{,2} \rangle = 0$$

durch Ableiten und der Produktregel

$$\langle f_{,1}, f_{,11} \rangle = -\langle f_{,1}, f_{,22} \rangle \Leftrightarrow \langle f_{,11} + f_{,22}, f_{,1} \rangle = 0$$

und analog

$$\langle f_{,11} + f_{,22}, f_{,2} \rangle = 0.$$

Der Vektor $f_{,11} + f_{,22}$ liegt also im Normalraum der Tangentialebene. Andererseits gilt

$$\varepsilon \langle f_{,11} + f_{,22}, n \rangle = h_{11} + h_{22} = 2\lambda H.$$

Damit gilt $H = 0 \Leftrightarrow f_{,11} + f_{,22} = 0$. □

Lemma 3.2. *Jedes raumartige Minimalflächenstück gestattet lokal eine isotherme Parametrisierung.*

Beweis. Da bei raumartigen Flächen die metrische Grundform positiv definit ist, kann der Beweis für den euklidischen Fall von H. BRAUNER [2, S. 204] direkt übernommen werden. □

Lemma 3.3. *Ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein isothermer Minimalflächenweg und*

$$\phi^\alpha := f^\alpha_{,1} - i f^\alpha_{,2}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\},$$

so gilt: ϕ^α ist holomorph und

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 = 0, \tag{9}$$

$$|\phi^1|^2 + |\phi^2|^2 - |\phi^3|^2 \neq 0. \tag{10}$$

Beweis. (a) Nach Lemma 3.1 erfüllt f^α die Laplace-Gleichung und ist daher analytisch. Damit ist auch $f^\alpha_{,j}$ analytisch. Weiters berechnet man

$$(\operatorname{Re} \phi^\alpha)_{,1} - (\operatorname{Im} \phi^\alpha)_{,2} = f^\alpha_{,11} + f^\alpha_{,22} = 0$$

$$(\operatorname{Re} \phi^\alpha)_{,2} + (\operatorname{Im} \phi^\alpha)_{,1} = f^\alpha_{,12} - f^\alpha_{,21} = 0.$$

Damit erfüllen die Funktionen ϕ^α die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und sind daher holomorph.

(b) Durch einfaches Rechnen bestätigt man die Gleichungen (9) und (10). □

Es gilt aber auch die Umkehrung:

Lemma 3.4. *Sei (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) ein Tripel holomorpher Funktionen, das die beiden Gleichungen (9) und (10) erfüllt, wobei für die Funktionen jeweils gilt $\phi^\alpha : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$, U einfach zusammenhängendes Gebiet. Weiters seien mit $z_0 \in U$*

$$f^\alpha(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi^\alpha(\xi) d\xi : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}.$$

Dann ist $f = (f^1, f^2, f^3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein isothermer Weg und $f(U)$ eine Minimalfläche.

Beweis. Da ϕ^α holomorph ist, ist auch $\Phi^\alpha(z) := \int_{z_0}^z \phi^\alpha(\xi) d\xi$ holomorph (U wird als einfach zusammenhängendes Gebiet vorausgesetzt) und damit $\operatorname{Re} \Phi^\alpha$ harmonisch, weil $\operatorname{Re} \Phi^\alpha$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

Es bleibt nach Lemma 3.1 nur noch zu zeigen, dass f isotherm ist. Es gilt:

$$\frac{d\Phi^\alpha}{dz} = \phi^\alpha = (\operatorname{Re} \Phi^\alpha)_{,1} - i(\operatorname{Re} \Phi^\alpha)_{,2} = f_{,1}^\alpha - i f_{,2}^\alpha.$$

Nach Voraussetzung erfüllt ϕ^α Gleichung (9) und (10), woraus

$$0 = g_{11} - g_{22} - 2i g_{12} \Rightarrow g_{11} = g_{22}, g_{12} = 0 \text{ und } 0 < g_{11} + g_{22}$$

folgt, womit gezeigt ist, dass f isotherm ist. □

Mit Lemma 3.2, 3.3 und 3.4 gilt folgender Satz, der es erlaubt, alle raumartigen Minimalflächen mit einfach zusammenhängenden Parametergebieten zumindest theoretisch zu erfassen.³

Satz 3.2. *Jeder raumartige Minimalflächenweg $f = (f^1, f^2, f^3)$ ist durch ein Tripel von holomorphen Funktionen wie in Lemma 3.3 erklärt, durch*

$$f^\alpha(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi^\alpha(\xi) d\xi : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}$$

wobei U einfach zusammenhängendes Gebiet ist, darstellbar.

Das Problem, alle raumartigen Minimalflächen zu finden, wird damit übersetzt in die Aufgabe, alle Tripel im Sinne von Lemma 3.3 zu finden. Folgender Satz löst diese Aufgabe weitestgehend:

Satz 3.3 (Weierstrass-Darstellung, raumartig). *Gibt man über einem einfach zusammenhängenden Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ und eine meromorphe Funktion $G : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|G(\zeta)| \neq 1$ für $\zeta \in U$, so vor, dass FG^2 holomorph ist, so ist*

$$(\phi^1, \phi^2, \phi^3) := \left(\frac{1}{2}F(1 + G^2), \frac{i}{2}F(1 - G^2), -FG \right)$$

ein Tripel im Sinne von Lemma 3.3. Jedes Tripel im Sinne von Lemma 3.3 ist von dieser Art.

Einen Beweis für diesen Satz, der gleichzeitig auch Satz 3.2 beweist, führt O. KOBAYASHI [6, Beweis Theorem 1.1.].

Bemerkung. *Definiert man*

$$\Phi^\alpha(z) := \operatorname{Re} \underbrace{\int_{z_0}^z \phi^\alpha(\zeta) d\zeta}_{=: \mathcal{X}^\alpha(z)} = \frac{1}{2} (\mathcal{X}^\alpha(z) + \bar{\mathcal{X}}^\alpha(z)),$$

wobei $\bar{\mathcal{X}}^\alpha(z)$ die zu $\mathcal{X}^\alpha(z)$ konjugierte komplexe Funktion meint, so gilt

$$f(z)^\alpha = \frac{1}{2} (\mathcal{X}^\alpha(z) + \bar{\mathcal{X}}^\alpha(z)).$$

Damit ist $f(U)$ als Schiebfläche, die von den komplexen Kurven $\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\mathcal{X}(z) := (\mathcal{X}^1(z), \mathcal{X}^2(z), \mathcal{X}^3(z))$ bzw. $\bar{\mathcal{X}}(z) := (\bar{\mathcal{X}}^1(z), \bar{\mathcal{X}}^2(z), \bar{\mathcal{X}}^3(z))$ erzeugt wird, interpretierbar. Wegen $\dot{\Phi}^\alpha(z) = \phi^\alpha(z)$ und Gleichung (9) in Lemma 3.3 gilt außerdem $\langle \dot{\mathcal{X}}(z), \dot{\mathcal{X}}(z) \rangle = 0$ bzw. $\langle \dot{\bar{\mathcal{X}}}(z), \dot{\bar{\mathcal{X}}}(z) \rangle = 0$.

Definition 3.3 (Assoziierte Schar, raumartig). *Der Flächenweg $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit*

$$\hat{f}_{,2}^\alpha = f_{,1}^\alpha \quad \text{und} \quad \hat{f}_{,1}^\alpha = -f_{,2}^\alpha \tag{11}$$

heißt konjugiert harmonisch zum Minimalflächenweg $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Die 1-Parameter-Menge

$${}^{(\mu)}f := \cos \mu f + \sin \mu \hat{f}, \tag{12}$$

mit ${}^{(\mu)}f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, heißt assoziierte Schar zu f und ${}^{(\mu)}f$ assoziiert zu f .

³Die Berechnung des Integrals bei konkreten ϕ^α könnte sich als schwierig erweisen.

Der konjugierte Flächenweg \hat{f} ist wohldefiniert, seine Existenz folgt fast direkt aus der Tatsache, dass f stets als isotherm parametrisiert angenommen werden darf.

Komplexifiziert man ${}^{(\mu)}f$, so lässt sich leicht berechnen, dass für die zugehörigen holomorphen Funktionen ${}^{(\mu)}\phi^\alpha = e^{i\mu}\phi^\alpha$ gilt. Wegen $|e^{i\mu}| = 1$ erfüllen auch die Funktionen ${}^{(\mu)}\phi^\alpha$ die Bedingungen von Lemma 3.3, sodass ${}^{(\mu)}f$ wieder Minimalflächen liefern. Weiters ist die Abbildung ${}^{(\mu)}\beta : f(U) = {}^{(0)}f(U) \rightarrow {}^{(\mu)}f(U)$, beschrieben durch gleiche Koordinaten, eine lokale Isometrie, wie mit (11) und (12) sofort folgt.

Korollar 3.1. *Je zwei Flächenwege, die derselben assoziierten (raumartigen) Schar angehören, haben in zugeordneten Flächenpunkten ${}^{(\mu_1)}f(a)$ und ${}^{(\mu_2)}f(a)$ dieselbe metrische Grundform und Gaußkrümmung und dieselben Normalvektoren. Ist f Minimalflächenweg, so sind alle zu f assoziierten Flächenwege Minimalflächenwege.*

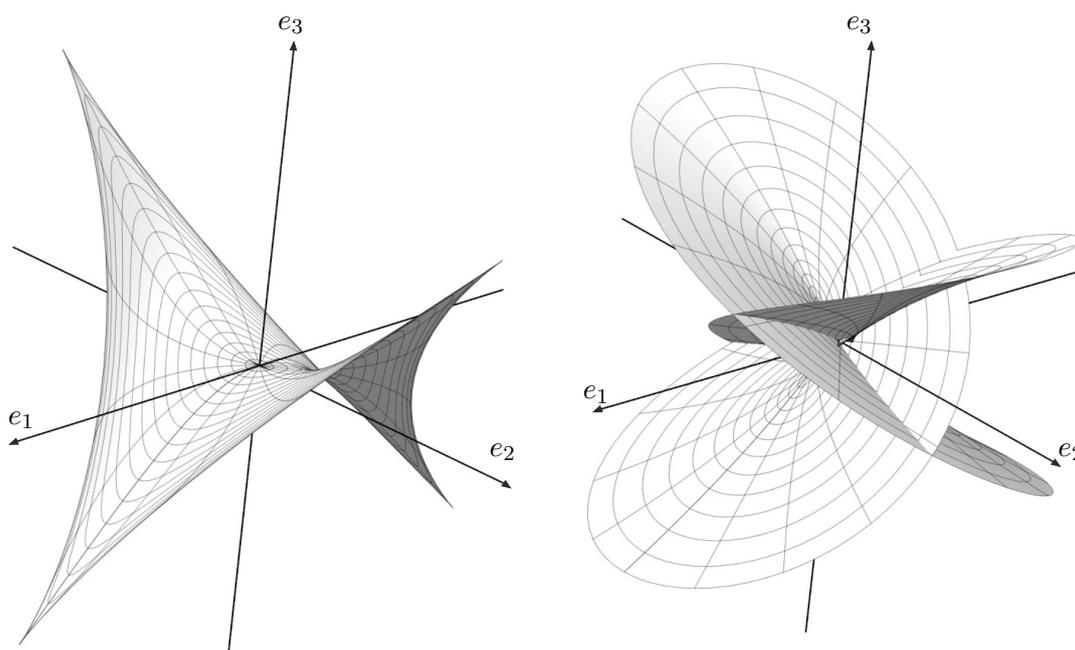


Abbildung 5: Enneper-Fläche der 1. Art

Beispiel 3.1. Setzt man $F(\zeta) := 2$ und $G(\zeta) := \zeta$ und $U := \mathbb{C} \setminus \{|\zeta| = 1\}$ (U ist nicht einfach zusammenhängend, trotzdem funktioniert die Konstruktion; man zerlege einfach U in die Zusammenhangskomponenten $U_1 := \{\zeta \in U : |\zeta| < 1\}$ und $U_2 := \{\zeta \in U : |\zeta| > 1\}$) und berechne

$$\begin{aligned}\phi^1 &= 1 + \zeta^2, \\ \phi^2 &= i - i\zeta, \\ \phi^3 &= -2\zeta,\end{aligned}$$

so ergeben sich daraus die Koordinatenfunktionen durch $f^\alpha(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi^\alpha d\zeta$. Mit $z = u + iv$ lautet der zu F und G gehörige Flächenweg

$$f = \left(u - uv^2 + \frac{u^3}{3}, -v + u^2v - \frac{v^3}{3}, v^2 - u^2 \right).$$

Die zugehörige Fläche $f(U)$ wird auch als Enneper-Fläche der 1. Art bezeichnet⁴ (vgl. O. KOBAYASHI [6, Example 2.2]).

In Abbildung 5 sind verschiedene Stücke dieser Fläche dargestellt. Links handelt es sich um das Flächenstück über der offenen Einheitskreisscheibe. Das Bild des Randes der Kreisscheibe ($|\zeta| = 1$) ist die singuläre Randkurve des Flächenstückes. Rechts handelt es sich um das Bild der Kreisscheibe mit Radius 3.

⁴Dies in Anlehnung an die klassische Enneper-Minimalfläche, die durch gleiche Wahl von F und G im euklidischen Fall entsteht.

3.2.2 Zeitartige Minimalflächen

Dieser Unterabschnitt orientiert sich an T. KLOTZ MILNOR [5].

Extremaleigenschaften des Oberflächeninhalts. Im zeitartigen Fall minimieren Minimalflächen lokal weder den Oberflächeninhalt, noch maximieren sie ihn.

Darstellungsmöglichkeiten. Da zeitartige Minimalflächen offenbar nicht isotherm parametrisierbar sind (aus $g_{jk} = \lambda \delta_{jk}$ folgt stets $\Delta > 0$), bedarf es einer anderen Herangehensweise, um Pendants zur Weierstrass-Darstellung und der assoziierten Schar im raumartigen Fall zu finden.

Es gilt folgender Satz (vgl. H. BRAUNER [2, S. 64]):

Satz 3.4. *Es sei $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein regulärer, differenzierbarer Flächenweg und ${}_{(j)}V_f : U \rightarrow Tf$, $j \in \{1, 2\}$, wobei Tf die Vereinigung aller Tangentialräume von f meint, differenzierbare Tangentialvektorfelder längs f mit ${}_{(j)}V_f \neq 0$ in U . Falls für alle $a_0 \in U$ die Tangentialvektoren $\{{}_{(1)}V_f(a_0), {}_{(2)}V_f(a_0)\}$ linear unabhängig sind, so existiert lokal ein Parameterwechsel $\varphi : U_0' \rightarrow U_0 \subseteq U$, sodass für $f' = f \circ \varphi$ die Parameterkurven Integralkurven von ${}_{(j)}V_f$ sind.*

Definition 3.4 (Null-Koordinaten). *Gilt für $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$,*

$$g_{11} = g_{22} = 0, g_{12} \neq 0,$$

so heißen u, v Null-Koordinaten und f mit Null-Koordinaten parametrisiert.

Korollar 3.2. *Jeder zeitartige Flächenweg f gestattet lokal Null-Koordinaten.*

Beweis. Per Definition ist jede Tangentialebene von f zeitartig, wodurch in jedem Flächenpunkt zwei linear unabhängige isotrope Tangentialvektoren existieren. Mit Satz 3.4 folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.5. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Null-Koordinaten parametrisiert. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist Minimalflächenweg*

(ii) *$f_{,12} = 0$*

(iii) *$f(u, v) = \mathcal{X}(u) + \mathcal{Y}(v)$, \mathcal{X}, \mathcal{Y} Kurven mit $\dot{\mathcal{X}}, \dot{\mathcal{Y}}$ isotrop und linear unabhängig*

Beweis. (a) (i) \Leftrightarrow (ii)

„ \Rightarrow “

Es gilt $0 = H = \frac{1}{2\Delta}(h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11})$. Da f mit Null-Koordinaten parametrisiert ist, folgt $H = 0 \Leftrightarrow h_{12} = 0$ und für die Christoffel-Symbole gilt $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$. Mit der Gauß-Gleichung

$$f_{,jk} = \Gamma_{jk}^l + h_{jk}n$$

folgt insgesamt $f_{,12} = 0$.

„ \Leftarrow “

Es folgt sofort $h_{12} = 0$ womit mit Null-Koordinaten $H = 0$ gilt.

(b) (ii) \Leftrightarrow (iii)

„ \Leftarrow “

Trivial.

„ \Rightarrow “

Aus $f_{,12} = 0$ folgt durch Integration nach u bzw. v dann $f_{,1} = X(u)$ bzw. $f_{,2} = Y(v)$. Durch erneutes Integrieren folgt insgesamt $f(u, v) = \mathcal{X}(u) + \mathcal{Y}(v)$, mit beliebigen regulären, differenzierbaren Funktionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} mit $\{\dot{\mathcal{X}}, \dot{\mathcal{Y}}\}$ linear unabhängig. Wegen Null-Koordinaten-Parametrisierung gilt außerdem $\langle \dot{\mathcal{X}}, \dot{\mathcal{X}} \rangle = 0$ und $\langle \dot{\mathcal{Y}}, \dot{\mathcal{Y}} \rangle = 0$.

□

Mit Korollar 3.2 und Lemma 3.5 gilt insgesamt folgender Satz:

Satz 3.5. *Jede zeitartige Minimalfläche $f(U)$ ist eine Schiebfläche, die durch isotrope Kurven, d.h. die Tangenten der Kurven sind stets isotrop, erzeugt wird. Umgekehrt ist jede Schiebfläche, die durch isotrope Kurven erzeugt wird, Minimalfläche.*

Ähnlich der raumartigen Situation lassen sich damit alle zeitartigen Minimalflächen durch geeignete Paare $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, wobei $\mathcal{X} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{Y} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$, erfassen. Auch hier übersetzt sich das Problem der Erfassung aller Minimalflächen in die Aufgabe, alle geeigneten Paare $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ zu finden.

Bemerkung. *Bei raumartigen Minimaflächen (und bei euklidischen Minimalflächen) sind die Schiebkurven stets komplex (siehe Unterabschnitt 3.2.1), wohingegen die Schiebkurven in der zeitartigen Situation stets „sichtbar“, also reell, sind.*

Man darf o.B.d.A. annehmen, dass $\mathcal{X}(u)$ und $\mathcal{Y}(u)$ (euklidisch) bogenlängenparametrisiert sind und gegebenenfalls die Parameterwechsel u zu $-u$ bzw. v zu $-v$ durchführen, wodurch

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{X}}(u) &= \left(a(u), b(u), \sqrt{1 - a^2(u) - b^2(u)} \right), \\ \dot{\mathcal{Y}}(v) &= \left(\alpha(v), \beta(v), \sqrt{1 - \alpha^2(v) - \beta^2(v)} \right),\end{aligned}$$

gilt, wobei $a(u)$, $b(u)$, $\alpha(v)$ und $\beta(v)$ glatte Funktionen sind. Weil es sich um isotrope Kurven handelt, folgt weiters

$$a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2},$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{X}}(u) &= \left(a(u), b(u), \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \dot{\mathcal{Y}}(v) &= \left(\alpha(v), \beta(v), \frac{1}{\sqrt{2}} \right).\end{aligned}$$

Offenbar sind $(a(u), b(u))$ und $(\alpha(v), \beta(v))$ Punkte auf Kreissegmenten C_u bzw. C_v des Kreises C , wobei wegen der linearen Unabhängigkeit von $\dot{\mathcal{X}}$ und $\dot{\mathcal{Y}}$ die Kreissegmente C_u und C_v disjunkt sein müssen. Damit ergibt sich mit zwei glatten Funktionen $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : J \rightarrow \mathbb{R}$, für die stets $A \neq B \pmod{2\pi}$ gilt, die Darstellung

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\dot{\mathcal{X}}(u) &= (\cos A(u), \sin A(u), 1), \\ \sqrt{2}\dot{\mathcal{Y}}(v) &= (\cos B(v), \sin B(v), 1).\end{aligned}$$

Mit den bisherigen Überlegungen gilt folgender Satz, der es erlaubt, alle geeigneten Paare $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ zu erfassen und der ein zeitartiges Pendant zur Weierstrass-Darstellung im raumartigen Fall bildet:

Satz 3.6 (Weierstrass-Darstellung, zeitartig). *Seien $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : J \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen, für die*

$$A(u) \neq B(v) \pmod{2\pi}, \quad \forall u \in I, v \in J$$

gilt. Dann ist $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ mit

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\mathcal{X}(u) &= \left(\int_{u_0}^u \cos A(t) dt, \int_{u_0}^u \sin A(t) dt, u - u_0 \right), \\ \sqrt{2}\mathcal{Y}(v) &= \left(\int_{v_0}^v \cos B(t) dt, \int_{v_0}^v \sin B(t) dt, v - v_0 \right), \end{aligned}$$

ein Paar im Sinne von Lemma 3.5. Jedes Paar im Sinne von Lemma 3.5 ist von dieser Art.

Die Stellen u_0 und v_0 sind fest gewählt, nehmen aber keinen erheblichen Einfluss auf die Fläche. Sie führen lediglich zu Translationen und damit zu geometrisch äquivalenten Flächen.

Die Funktionen $A(u)$ und $B(v)$ gestatten Kontrolle über die Gaußsche Krümmung der Minimalfläche. Berechnet man

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \det(h_{jk}) = \frac{1}{-\Delta^2} A_{11} A_{22} = \\ &= \frac{1}{\Delta^2} A'(u) B'(v) (-1 + \cos B(v) \cos A(u) + \sin B(v) \sin A(u))^2, \end{aligned}$$

so zeigt, sich, dass die Ableitungen von $A(u)$ und $B(v)$ das Vorzeichen der Gaußschen Krümmung bestimmen.

Korollar 3.3. *Für die Gaußsche Krümmung einer zeitartigen Minimalfläche gilt*

$$\operatorname{sgn} K = \operatorname{sgn} A'(u) B'(v).$$

Definition 3.5 (Assoziierte Schar, zeitartig). *Der Flächenweg $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit*

$$\hat{f}(u, v) := \mathcal{X}(u) - \mathcal{Y}(v) \tag{13}$$

heißt konjugiert zum Minimalflächenweg $f(u, v) = \mathcal{X}(u) + \mathcal{Y}(v)$.

Die 1-Parameter-Menge

$${}^{(\mu)}f := \cosh \mu f + \sinh \mu \hat{f}, \tag{14}$$

mit ${}^{(\mu)}f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, heißt assoziierte Schar zu f und ${}^{(\mu)}f$ assoziiert zu f .

Man beachte, dass die zum Minimalflächenweg \hat{f} gehörige Fläche der assoziierten Schar nicht angehört.

Wie im raumartigen Fall gilt auch hier folgende Aussage, die durch Berechnung unmittelbar folgt:

Korollar 3.4. *Je zwei Flächenwege, die derselben assoziierten (zeitartigen) Schar angehören, haben in zugeordneten Flächenpunkten ${}^{(\mu_1)}f(a)$ und ${}^{(\mu_2)}f(a)$ dieselbe metrische Grundform und Gaußkrümmung, und dieselben Normalvektoren. Ist f Minimalflächenweg, so sind alle zu f assoziierten Flächenwege Minimalflächenwege.*

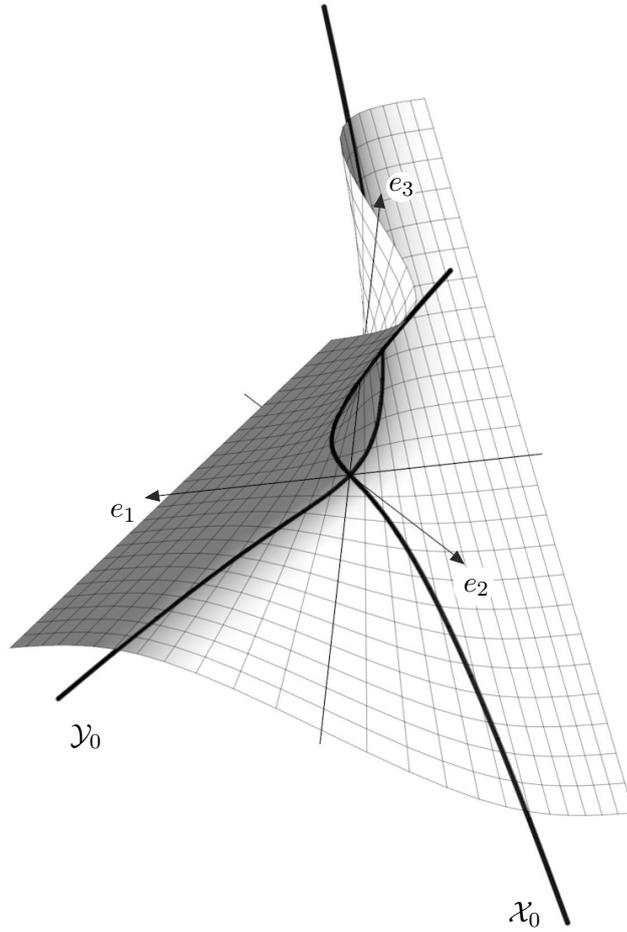


Abbildung 6: Minimalfläche als Graph über \mathbb{R}^2

Beispiel 3.2. Die Fläche $f(\mathbb{R}^2)$, die als Sehnenmittelfläche der Kurven $\mathcal{X}(u) := (u, \cosh u, \sinh u)$ und $\mathcal{Y}(v) := (v, -\cosh v, -\sinh v)$ entsteht, also $f(u, v) := 1/2(\mathcal{X}(u) + \mathcal{Y}(v))$, ist ein interessantes Beispiel einer zeitartigen Minimalfläche. Die isotropen Kurven \mathcal{X} bzw. \mathcal{Y} sind die Bahnkurven der Punkte $(0, 1, 0)$ bzw. $(0, -1, 0)$ unter der (Lorentz-) Schraubung um die e_1 -Achse mit $p = 1$ (siehe Proposition 1.2, Gleichung (4)). Es gilt

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{1}{2} (u + v, \cosh u - \cosh v, \sinh u - \sinh v) \\ &= \left(\frac{u + v}{2}, \sinh \frac{u + v}{2} \sinh \frac{u - v}{2}, \sinh \frac{u - v}{2} \cosh \frac{u + v}{2} \right). \end{aligned}$$

Mit dem Parameterwechsel $t = 1/2(u + v)$, $r = \sinh 1/2(u - v)$ ist $\tilde{f} = (t, r \sinh t, r \cosh t)$ ein zu f äquivalenter Flächenweg. Diese Parametrisierung zeigt, dass es sich bei $f(U)$ um jene Fläche handelt, die bei Verschraubung der e_3 -Achse um die e_1 -Achse entsteht. Die Fläche ist tatsächlich eine Minimalfläche, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_{,1} &= (0, \sinh t, \cosh t) \\ \tilde{f}_{,2} &= (1, r \cosh t, r \sinh t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow g_{11} = -1, \quad g_{22} = 1 + r^2, \quad g_{12} = 0, \quad \Delta = -(1 + r^2)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_{,11} &= (0, 0, 0) \\ \tilde{f}_{,22} &= (0, r \sinh t, r \cosh t) \\ \tilde{f}_{,12} &= (0, \cosh t, \sinh t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{11} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{12} = 1$$

$$\Rightarrow h_{11} = h_{22} = 0, \quad h_{12} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\Delta} (h_{22}g_{11} - 2h_{12}g_{12} + h_{11}g_{22}) = 0.$$

Ein weiterer Parameterwechsel $s = t$, $w = r \cosh t$ führt zur Parametrisierung

$$(s, w \tanh s, w), \quad (15)$$

die erkennen lässt, dass die betrachtete Fläche global als Graph über der e_1e_3 Ebene darstellbar ist.

Zusammengefasst handelt es sich hier also um eine zeitartige, minimale Regelschraubfläche, die gleichzeitig Schiebfläche isotroper Kurven ist und als Graph über ganz \mathbb{R}^2 darstellbar ist. In Abbildung 6 ist die Fläche mit den beiden isotropen Schiebkurven \mathcal{X}_0 und \mathcal{Y}_0 durch den Ursprung dargestellt.

Der Satz von Bernstein. Die als Satz von Bernstein⁵ bekannte Tatsache (für den Beweis des klassischen Satzes siehe etwa J. ESCHENBURG und J. JOST [4, Abschnitt 8.7]), dass es sich bei einer Minimalfläche im euklidischen 3-Raum, die als Graph über ganz \mathbb{R}^2 definiert ist, nur um eine Ebene handeln kann, gilt auch für raumartige Minimalflächen, wie E. CALABI [3] zeigen konnte.

In der zeitartigen Situation ist die Aussage falsch, wie Beispiel 3.2 zeigt. Es existieren also zeitartige Minimalflächen, die keine Ebenen sind und global als Graph über einer Ebene definiert sind. Es existieren sogar unendlich viele, paarweise verschiedene Minimalflächen, die global als Graph angeschrieben werden können, wie T. KLOTZ MILNOR [5] bewies. Genauer gilt folgender Satz:

Satz 3.7. *Handelt es sich bei $f(U)$ um eine zeitartige Minimalfläche, die als Graph über ganz \mathbb{R}^2 definiert ist, so sind alle zu f assoziierten Flächen Graphen über ganz \mathbb{R}^2 .*

⁵Sergej Natanowitsch Bernstein (1880-1968)

4 Minimaldrehflächen

Ziel dieses Abschnittes ist es, alle Minimaldrehflächen, bis auf pseudo-euklidische Bewegungen, im \mathbb{R}_1^3 zu klassifizieren. In Unterabschnitt 1.2 wurde geklärt, was im Lorentz-Minkowski-Raum unter einer (Lorentz-) Drehung verstanden wird und Proposition 1.1 erlaubt es, sich auf genau drei Fälle zu beschränken (siehe Unterabschnitt 4.1, 4.2 und 4.3). Es sei daran erinnert, dass stets Flächenwege mit $\Delta \neq 0$ betrachtet werden.

In seiner Publikation führt I. VAN DE WOESTIJNE [15] unter Anderem eine solche Klassifikation durch, baut seinen Beweis jedoch anders auf, als in dieser Arbeit. Nichts desto trotz führt eine Klassifikation im obigen Sinne zwangsläufig auf die Lösungen von Differentialgleichungen, weshalb die im Folgenden erbrachten Beweise im Grunde den Ideen von [15] gleichen.

Um zu klassifizieren, bedarf es zuvor noch einer Definition von Drehflächen im \mathbb{R}_1^3 .

Definition 4.1 (Drehfläche). *Eine Drehfläche $f(U)$ im \mathbb{R}_1^3 mit Drehachse l ist eine Fläche, die invariant ist unter einer 1-Parameter-Untergruppe von $SO_1(3)$, die l punktweise fest lässt.*

Diese Definition bildet das Pendant zu den gewohnten euklidischen Drehflächen. Auch hier entsteht eine Drehfläche durch (Lorentz-) Drehung einer ebenen Kurve (Meridiankurve) um die Drehachse l , deren Trägerebene die Achse l beinhaltet.

Im euklidischen 3-Raum gilt bekanntlich (O. BONNET 1860):

Satz 4.1. *Jede nicht ebene Minimaldrehfläche liegt in einem Katenoid (Kettenfläche).*

Da offenbar alle nicht isotropen Ebenen Minimaldrehflächen sind, seien diese sehr einfachen Flächen aus den folgenden Überlegungen ausgeschlossen.

4.1 1. Fall: Raumartige Achse

Nach Proposition 1.1 darf o.B.d.A. angenommen werden, dass es sich bei der Drehachse l um die e_1 -Achse handelt, wodurch die 1-Parameter-Untergruppe durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Da der Typus der Trägerebene der Meridiankurve definitionsgemäß unter Isometrien, also insbesondere unter (Lorentz-) Drehungen, erhalten bleibt, gilt es zwischen raumartigen und zeitartigen Trägerebenen zu unterscheiden.

Fall 1.1 Sei die Trägerebene der Meridiankurve c raumartig. Es darf angenommen werden, dass es sich um die e_1e_2 -Ebene handelt, da jede andere raumartige Ebene, die e_1 trägt, durch (Lorentz-) Drehung um e_1 in die e_1e_2 -Ebene übergeführt werden kann. Es ist möglich, die Meridiankurve lokal als Graph über der e_1 -Achse anzusetzen.⁶ Sei also

$$c(u) := (u, g(u), 0)$$

und damit der Drehflächenweg

$$f(u, \theta) = (u, g(u) \cosh \theta, g(u) \sinh \theta).$$

⁶Dies schließt Ebenen als Lösungen aus.

Damit lassen sich folgende Größen berechnen:

$$\left. \begin{aligned} f_{,1} &= (1, \dot{g} \cosh \theta, \dot{g} \sinh \theta) \\ f_{,2} &= (0, g \sinh \theta, g \cosh \theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow g_{11} = 1 + \dot{g}^2, \quad g_{22} = -g^2, \quad g_{12} = 0, \quad \Delta = -g^2(1 + \dot{g}^2)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{,11} &= (0, \ddot{g} \cosh \theta, \ddot{g} \sinh \theta) \\ f_{,22} &= (0, g \cosh \theta, g \sinh \theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{11} = -g\ddot{g}, \quad A_{22} = -g^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\Delta} \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon\Delta}} (g_{11}A_{22} + g_{22}A_{11}).$$

Die Bedingung $\Delta > 0$ führt zu $\dot{g}^2 < -1$, womit es sich nicht um eine raumartige Drehfläche handeln kann. Vielmehr ist f , sofern $g \neq 0$, ein zeitartiger Flächenweg. Die mittlere Krümmung H verschwindet genau dann, wenn gilt

$$g_{11}A_{22} + g_{22}A_{11} = \ddot{g}g^3 - (1 + \dot{g}^2)g^2 = 0.$$

Da $\Delta \neq 0$, ist $g \neq 0$ und die Differentialgleichung ist äquivalent mit

$$\underline{\ddot{g}g = \dot{g}^2 + 1.} \tag{16}$$

Die Differentialgleichung (16) lässt sich mit dem Ansatz $\dot{g} = p$, $p = p(g)$ lösen. Mit diesem Ansatz gilt

$$\ddot{g} = \frac{dp}{du} = p \frac{dp}{dg}$$

und damit

$$gp \frac{dp}{dg} = p^2 + 1,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{p}{p^2 + 1} dp = \frac{1}{g} dg.$$

Integration liefert

$$\ln \sqrt{p^2 + 1} = \ln |g| + a_1$$

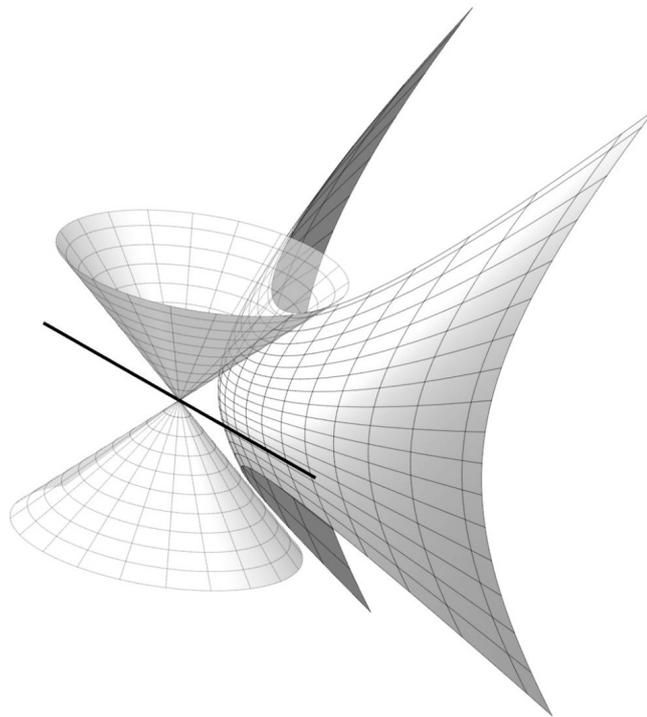
und weiter

$$\begin{aligned} &\sqrt{p^2 + 1} = ag \\ \Leftrightarrow &\frac{dg}{du} = p = \sqrt{a^2 g^2 - 1} \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{\sqrt{a^2 g^2 - 1}} dg = du. \end{aligned}$$

Substituiert man $w = ag$, $dw = adg$, so folgt

$$\frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{w^2 - 1}} dw = du.$$

Erneute Integration liefert

Abbildung 7: Raumartig-zeitartiges Katenoid 1. Art, $a = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \cosh^{-1} w = u + b_1 \\ \Rightarrow & w = \cosh(au + b) \\ \Rightarrow & g(u) = \frac{1}{a} \cosh(au + b). \end{aligned}$$

Insgesamt besitzt der Drehflächenweg die Darstellung

$$f(u, \theta) = \left(u, \frac{1}{a} \cosh(au + b) \cosh \theta, \frac{1}{a} \cosh(au + b) \sinh \theta \right),$$

die mit dem Parameterwechsel $a\tilde{u} = au + b$ die Darstellung

$$f(\tilde{u}, \theta) = \left(\tilde{u} - \frac{b}{a}, \frac{1}{a} \cosh(a\tilde{u}) \cosh \theta, \frac{1}{a} \cosh(a\tilde{u}) \sinh \theta \right)$$

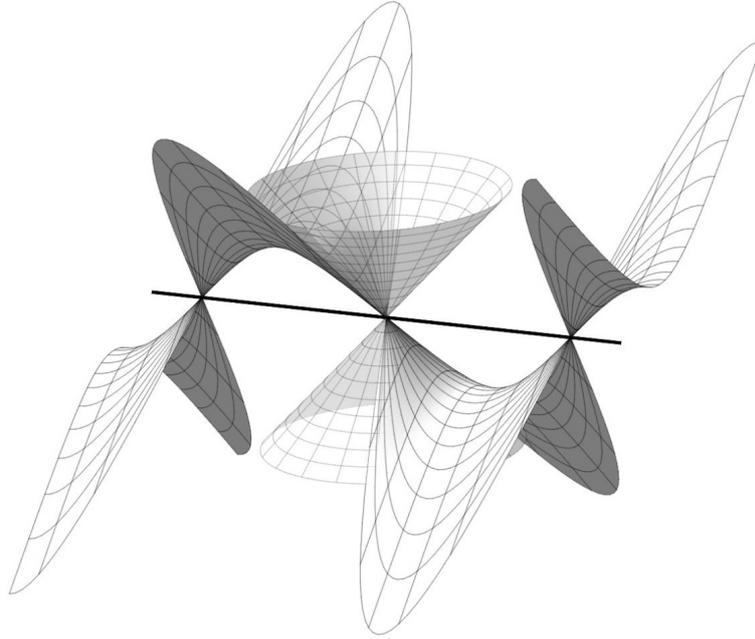
besitzt. Da Translationen zu geometrisch äquivalenten Flächen führen, darf $b = 0$ angenommen werden, was zur endgültigen Darstellung führt, wobei ich den Parameter der Einfachheit halber wieder mit u bezeichne (vgl. Abbildung 7):

$$\underline{f(u, \theta) = \left(u, \frac{1}{a} \cosh au \cosh \theta, \frac{1}{a} \cosh au \sinh \theta \right)}$$

Fall 1.2 Sei die Trägerebene der Meridiankurve c zeitartig. Es darf angenommen werden, dass es sich um die e_1e_3 -Ebene handelt, da jede andere zeitartige Ebene, die e_1 trägt, durch (Lorentz-) Drehung um e_1 in die e_1e_3 -Ebene übergeführt werden kann. Es ist möglich, die Meridiankurve lokal als Graph über der e_1 -Achse anzusetzen.⁷

$$c(u) := (u, 0, g(u))$$

⁷Dies schließt Ebenen als Lösungen aus.

Abbildung 8: Raumartig-raumartiges Katenoid, $a = 1$

und damit der Drehflächenweg

$$f(u, \theta) = (u, g(u) \sinh \theta, g(u) \cosh \theta).$$

Damit lassen sich folgende Größen berechnen:

$$\left. \begin{array}{l} f_{,1} = (1, \dot{g} \sinh \theta, \dot{g} \cosh \theta) \\ f_{,2} = (0, g \cosh \theta, g \sinh \theta) \end{array} \right\} \Rightarrow g_{11} = 1 - \dot{g}^2, \quad g_{22} = g^2, \quad g_{12} = 0, \quad \Delta = g^2(1 - \dot{g}^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{,11} = (0, \ddot{g} \sinh \theta, \ddot{g} \cosh \theta) \\ f_{,22} = (0, g \sinh \theta, g \cosh \theta) \end{array} \right\} \Rightarrow A_{11} = g\ddot{g}, \quad A_{22} = g^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\Delta} \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon\Delta}} (g_{11}A_{22} + g_{22}A_{11}).$$

Betrachtet man Δ , so sind hier im Gegensatz zu Fall 1.1 auch raumartige Flächen möglich, sofern $\dot{g}^2 < 1$. Dies wird beim Lösen der Differentialgleichung (17) zu einer Fallunterscheidung und zu zwei verschiedenen Lösungsscharen führen.

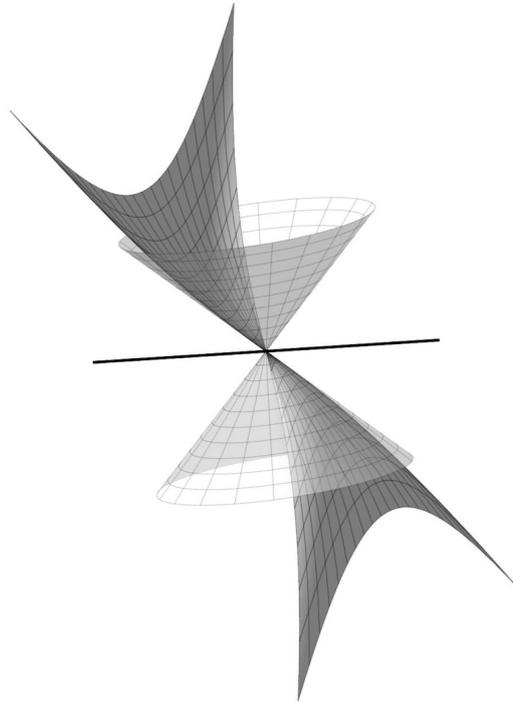
In Analogie zu Fall 1.1 gilt es, folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$\ddot{g}g = \dot{g}^2 - 1. \quad (17)$$

Derselbe Ansatz wie in Fall 1.1 führt zu

$$\ln \sqrt{|p^2 - 1|} = \ln |g| + a_1.$$

Hier muss, wie schon angedeutet, zwischen $\dot{g} < 1$ (raumartig) und $\dot{g} > 1$ (zeitartig) unterschieden werden.

Abbildung 9: Raumartig-zeitartiges Katenoid 2. Art, $a = 1$

Fall 1.2.1 Sei $\dot{g} < 1$: Dies führt mit analoger Rechnung zu Fall 1.1 zu

$$g(u) = \frac{1}{a} \sin(au + b)$$

und damit, nach zulässiger Vernachlässigung der Translation in Richtung e_1 , zum raumartigen Drehflächenweg (vgl. Abbildung 8)

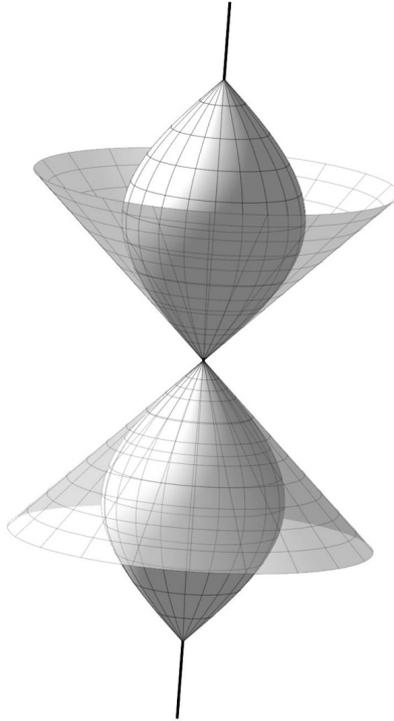
$$\underline{f(u, \theta) = \left(u, \frac{1}{a} \sin au \sinh \theta, \frac{1}{a} \sin au \cosh \theta\right)}.$$

Fall 1.2.2 Sei $\dot{g} > 1$: Dies führt mit analoger Rechnung zu Fall 1.1 zu

$$g(u) = \frac{1}{a} \sinh(au + b)$$

und damit, nach zulässiger Vernachlässigung der Translation in Richtung e_1 , zum zeitartigen Drehflächenweg (vgl. Abbildung 9)

$$\underline{f(u, \theta) = \left(u, \frac{1}{a} \sinh au \sinh \theta, \frac{1}{a} \sinh au \cosh \theta\right)}.$$

Abbildung 10: Zeitartig-zeitartiges Katenoid, $a = 1$

4.2 2. Fall: Zeitartige Achse

Nach Proposition 1.1 darf o.B.d.A. angenommen werden, dass es sich bei der Drehachse l um die e_3 -Achse handelt, wodurch die 1-Parameter-Untergruppe durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

Da die Trägerebene der Meridiankurve c die e_3 -Achse beinhaltet, ist sie stets zeitartig, wodurch c wieder o.B.d.A. lokal als Graph über der e_3 -Achse in der e_1e_3 -Ebene angesetzt werden darf:

$$c(u) := (g(u), 0, u)$$

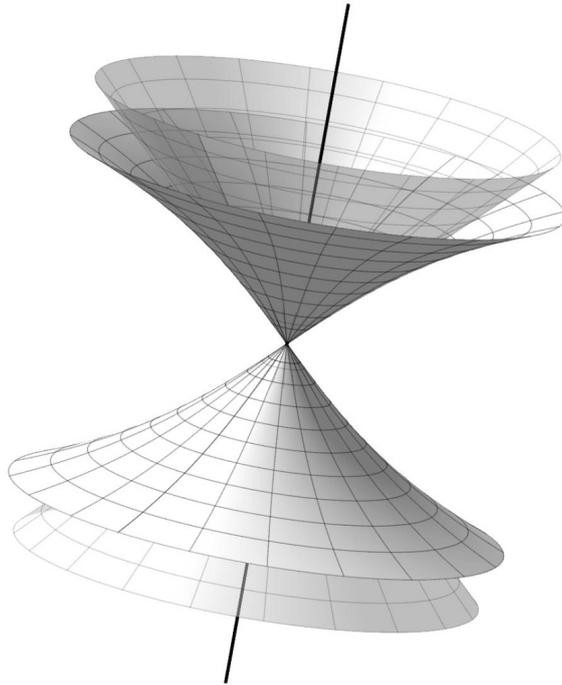
Damit besitzt der Drehflächenweg die Darstellung

$$f(u, \theta) = (g(u) \cos \theta, g(u) \sin \theta, u).$$

Wieder berechnet man mit dieser Darstellung die mittlere Krümmung:

$$\left. \begin{array}{l} f_{,1} = (\dot{g} \cos \theta, \dot{g} \sin \theta, 1) \\ f_{,2} = (-g \sin \theta, g \cos \theta, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow g_{11} = \dot{g}^2 - 1, \quad g_{22} = g^2, \quad g_{12} = 0, \quad \Delta = g^2(\dot{g}^2 - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{,11} = (\ddot{g} \cos \theta, \ddot{g} \sin \theta, 0) \\ f_{,22} = (-g \cos \theta, -g \sin \theta, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow A_{11} = -g\ddot{g}, \quad A_{22} = g^2$$

Abbildung 11: Zeitartig-raumartiges Katenoid, $a = 1$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\Delta} \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon\Delta}} (g_{11}A_{22} + g_{22}A_{11}).$$

Da $\Delta \neq 0$ gilt $g \neq 0$, wodurch $H = 0$ zu folgender Differentialgleichung führt:

$$\ddot{g}g = \dot{g}^2 - 1. \quad (18)$$

Es handelt sich um Gleichung (17) aus Fall 1.2, die für $\dot{g} < 1$ die Lösungen

$$g(u) = \frac{1}{a} \sin(au + b)$$

und für $\dot{g} > 1$ die Lösungen

$$g(u) = \frac{1}{a} \sinh(au + b)$$

besitzt. Im Unterschied zu Fall 1.2 führt $\dot{g} < 1$ hier zu einem zeitartigen Flächenweg (vgl. Abbildung 10)

$$\underline{f(u, \theta) = \left(\frac{1}{a} \sin au \cos \theta, \frac{1}{a} \sin au \sin \theta, u \right)},$$

und $\dot{g} > 1$ zu einem raumartigen Flächenweg (vgl. Abbildung 11)

$$\underline{f(u, \theta) = \left(\frac{1}{a} \sinh au \cos \theta, \frac{1}{a} \sinh au \sin \theta, u \right)}.$$

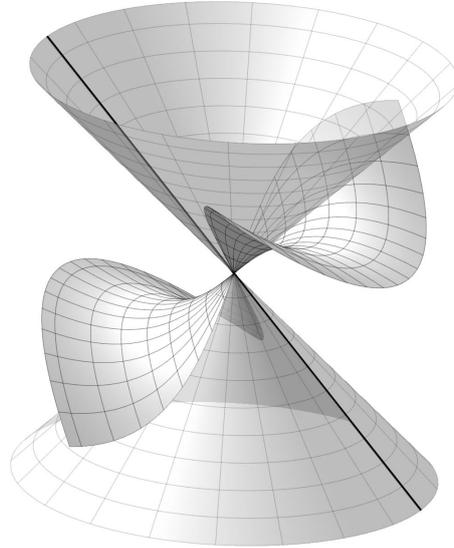


Abbildung 12: Isotrop-raumartiges Katenoid, $a = 1/3$

4.3 3. Fall: Isotrope Achse

Nach Proposition 1.1 darf o.B.d.A. angenommen werden, dass es sich bei der Drehachse l um die 1. Mediane in der e_1e_3 -Ebene handelt, wodurch die 1-Parameter-Untergruppe durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & 1 & \theta \\ -\frac{\theta^2}{2} & \theta & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Die Trägerebene der Meridiankurve kann nicht raumartig sein, da sie die isotrope Achse l beinhaltet. Wäre die Trägerebene isotrop, so würde durch (Lorentz-) Drehung der Meridiankurve die Trägerebene selbst entstehen. Mit dieser Überlegung muss die Trägerebene zeitartig sein und darf o.B.d.A. als e_1e_3 -Ebene angenommen werden. Wieder kann die Meridiankurve c lokal als Graph über l angesetzt werden. Aus rein „kosmetischen“ Gründen bei der Darstellung setze ich c lokal als Graph über der 2. Mediane in der e_1e_3 -Ebene an, was genauso möglich ist. Damit ergibt sich

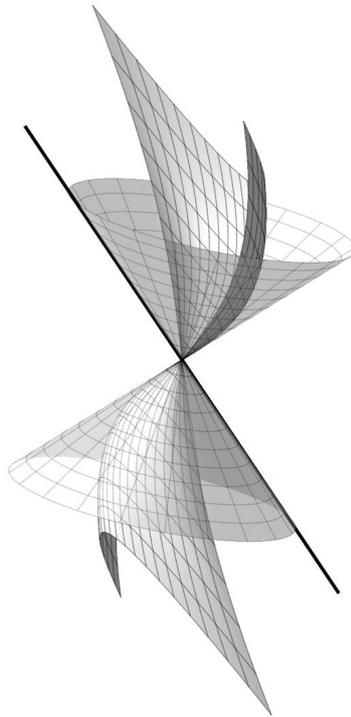
$$c(u) := (h(u) + u, 0, h(u) - u)$$

wodurch der Drehflächenweg die Darstellung

$$f(u, \theta) = (h(u) + u - u\theta^2, -2u\theta, h(u) - u - u\theta^2)$$

besitzt. Wie in den vorhergegangenen Fällen berechnet man damit die mittlere Krümmung:

$$\left. \begin{array}{l} f_{,1} = (\dot{h} + 1 - \theta^2, -2\theta, \dot{h} - 1 - \theta^2) \\ f_{,2} = (-2u\theta, -2u, -2u\theta) \end{array} \right\} \Rightarrow g_{11} = 4\dot{h}, \quad g_{22} = 4u^2, \quad g_{12} = 0, \quad \Delta = 16\dot{h}u^2$$

Abbildung 13: Isotrop-zeitartiges Katenoid, $a = -1/3$

$$\left. \begin{aligned} f_{,11} &= (\ddot{h}, 0, \dot{h}) \\ f_{,22} &= (-2u, 0, u) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{11} = -4u\ddot{h}, \quad A_{22} = 8u^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\Delta} \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon\Delta}} (g_{11}A_{22} + g_{22}A_{11}).$$

Setzt man $H = 0$ und dividiert durch u^2 , $u \neq 0$ da $\Delta \neq 0$, ergibt sich die Differentialgleichung

$$\underline{2\dot{h} = u\ddot{h}}. \quad (19)$$

Sei $g(u) = \dot{h}(u)$ und $\dot{h} \neq 0$ nach Voraussetzung ($\Delta \neq 0$) womit sich aus Gleichung (19)

$$\frac{dg}{g} = 2\frac{1}{u}$$

ergibt. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{g}dg = 2\frac{1}{u}du.$$

Integration liefert

$$\ln |g| = 2 \ln |u| + a_1,$$

woraus folgt

$$\frac{dh}{du} = g = a_2 u^2.$$

Umformung und erneute Integration führt zu

$$h(u) = \underbrace{\frac{a_2}{3}}_{=:a} u^3 + b.$$

Betrachtet man Δ , so muss stets $u \neq 0$ gelten. Mit $\Delta > 0$ folgt $au^2 > 0$ und damit $a > 0$. Umgekehrt führt $\Delta < 0$ zu $a < 0$.

Mit zulässiger Vernachlässigung der Translation ($b = 0$) ergibt sich der raumartige Drehflächenweg (vgl. Abbildung 12)

$$\underline{f(u, \theta) = (au^3 + u - u\theta^2, -2u\theta, au^3 - u - u\theta^2)}, \quad a > 0$$

und der zeitartige Drehflächenweg (vgl. Abbildung 13)

$$\underline{f(u, \theta) = (au^3 + u - u\theta^2, -2u\theta, au^3 - u - u\theta^2)}, \quad a < 0.$$

4.4 Exkurs: Kettenlinien im Lorentz-Minkowski Raum

Durchhang einer Kette. Die Kurven, die den Durchhang einer Kette unter Einfluss der Schwerkraft beschreiben, deren Enden in zwei festen Punkten aufgehängt sind, werden Kettenlinien genannt. Die Berechnung solcher Kurven ist im Grunde ein physikalisches Problem. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Masse der Kette gleichmäßig verteilt ist, das heißt dass man die Masse eines Kettenstückes in Abhängigkeit von dessen Länge berechnen kann. Es handelt sich um ein ebenes Problem, weshalb man die gesuchten Kurven als Graphen ansetzen kann. Vom physikalischen Standpunkt aus minimieren Kettenlinien die Summe der potenziellen Energie aller Teilchen der Kette, was in euklidischen Ebenen bekanntlich zu Kurven der Bauart $(u, 1/a \cosh au)$ führt. Die Summe E_{pot} der potenziellen Energie aller Teilchen einer Kette $c(u) = (u, h(u))$ lautet

$$E_{pot} = \int_a^b g\mu \sqrt{|\langle \dot{c}(u), \dot{c}(u) \rangle|} h(u) du.$$

Hier bezeichnet g den Beschleunigungsfaktor, μ die Masse der Kette pro Längeneinheit und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Metrik der Ebene. Mit der Euler-Lagrange-Gleichung folgt:

$$\int_a^b g\mu \sqrt{|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|} h du \text{ ist stationär} \Leftrightarrow \frac{d}{du} \frac{d\sqrt{|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|} h}{d\dot{h}} = \frac{d\sqrt{|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|} h}{dh}$$

Im euklidischen Fall ($\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_e$) wird ein Minimum realisiert. Im Lorentz-Minkowski-Raum \mathbb{R}_1^3 handelt es sich bei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um die Lorentz-Metrik, wodurch aus obiger Differentialgleichung andere Lösungen zu erwarten sind als im euklidischen 3-Raum. Genauer gilt:

Satz 4.2. *In allen Fällen sei $h(u) = 0$ ausgeschlossen.*

1. Sei $c(u) := (u, 0, h(u))$ ein Graph über der e_1 -Achse in der e_1e_3 -Ebene. Genau für die Funktionen

$$(i) \quad h(u) = 1/a \sin au,$$

$$(ii) \quad h(u) = 1/a \sinh au$$

ist die Funktion

$$E_{\text{pot}}(h) = \int_a^b g\mu\sqrt{|\langle \dot{c}(u), \dot{c}(u) \rangle|} h(u) du, \quad g, \mu \in \mathbb{R} \text{ konstant}, \quad (20)$$

stationär.

2. Sei $c(u) := (u, h(u), 0)$ ein Graph über der e_1 -Achse in der e_1e_2 -Ebene. Genau für die Funktionen

$$h(u) = 1/a \cosh au$$

ist die Funktion $E_{\text{pot}}(h)$ stationär.

Beweis. 1. Es gilt $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1 - \dot{h}^2$. Mit der Euler-Lagrange-Gleichung gilt es

$$\frac{d}{du} \frac{d\sqrt{|1 - \dot{h}^2|}h}{d\dot{h}} = \frac{d\sqrt{|1 - \dot{h}^2|}h}{dh}$$

nach h zu lösen. Umformung dieser Differentialgleichung führt zur Gleichung

$$\ddot{h}h = \dot{h}^2 - 1,$$

die der Gleichung (17) aus Unterabschnitt 4.1 entspricht und die Lösungen $h(u) = 1/a \sin au$ bzw. $h(u) = 1/a \sinh au$ besitzt.

2. Es gilt $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1 + \dot{h}^2$. Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichung und anschließende Umformung liefert die Differentialgleichung

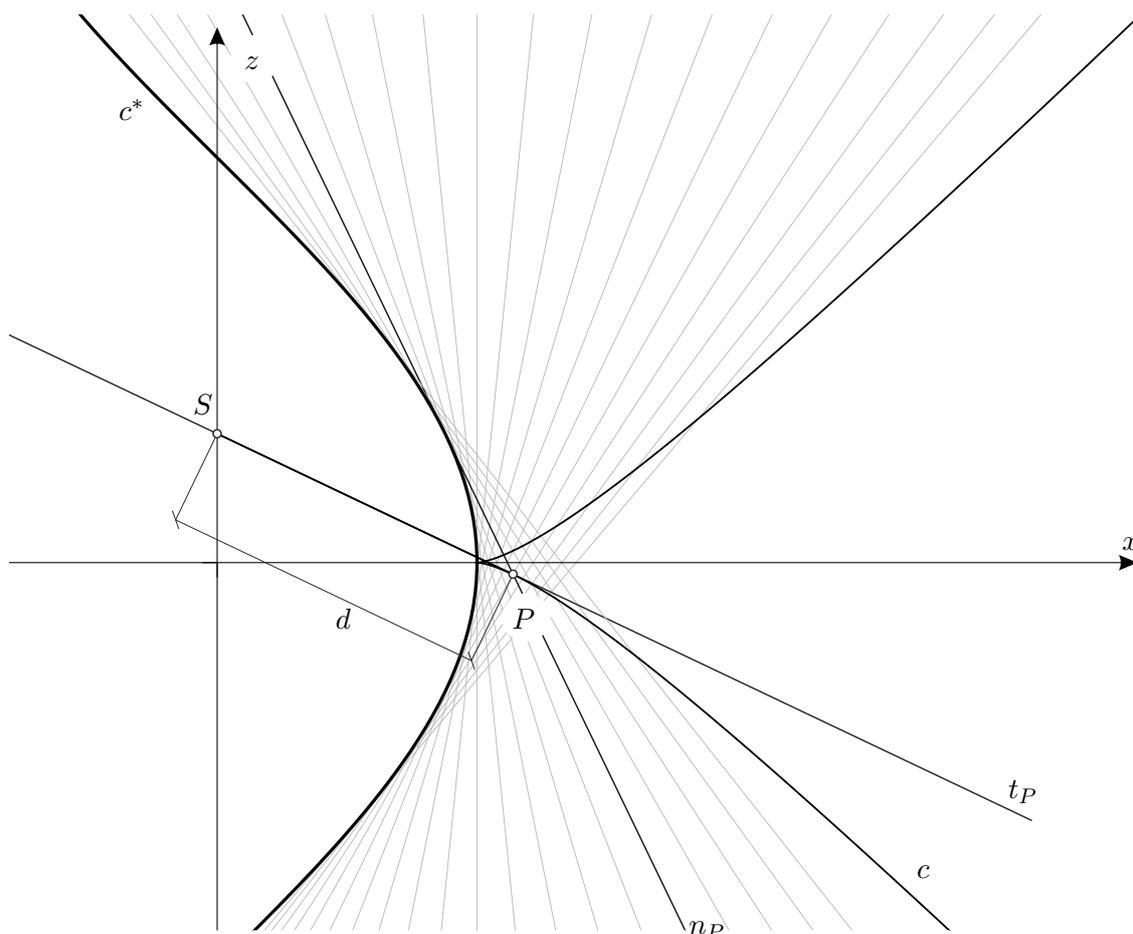
$$\ddot{h}h = \dot{h}^2 + 1,$$

die der Gleichung (16) aus Unterabschnitt 4.1 entspricht und die Lösung $h(u) = 1/a \cosh au$ besitzt.⁸

□

Bemerkung. Wie zu Beginn des Abschnittes angeführt, besitzen Minimaldrehflächen im euklidischen Raum Kettenlinien als Meridiankurven. Der oben angeführte Zugang mittels der potentiellen Energie führt zu „Kettenlinien“ im Lorentz-Minkowski-Raum, die auch hier, bis auf den Fall isotroper Drehachsen, genau die Meridiankurven der Minimaldrehflächen bilden.

⁸Dieser Fall entspricht der euklidischen Situation, womit an dieser Stelle bewiesen wurde, dass $h(u) = 1/a \cosh au$ als einzige Kettenlinien in euklidischen Ebenen auftreten.

Abbildung 14: Traktrix c und ihre Evolute c^* , Zug zeitartig und Leine raumartig

Kettenlinien als Evoluten von Traktrizen. Eine Traktrix, auch Schleppkurve genannt, bezeichnet die ebene Bahnkurve eines Punktes P der von einem Punkt S an einer Leine mit konstanter Länge d gezogen wird, wobei sich S als ziehender Punkt auf einer Geraden bewegt. In der euklidischen Situation sind die Evoluten von Traktrizen stets (euklidische) Kettenlinien.

Im Lorentz-Minkowski-Raum müssen verschiedene Fälle unterschieden werden. Isotrope Trägerebenen seien aus den folgenden Überlegungen ausgeschlossen. Handelt es sich um eine raumartige Trägerebene der Traktrix, so darf man o.B.d.A. die e_1e_2 -Ebene annehmen, womit es sich um die euklidische Situation handelt. Ist die Trägerebene zeitartig, lässt sich die Traktrix c zu gegebenen $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ihre zugehörige Evolute c^* wie folgt berechnen:

Lokal kann eine Traktrix c als Graph $c(t) = (t, z(t))$ angesetzt werden, wobei die z -Achse jene Gerade ist, auf der sich der ziehende Punkt S bewegt. Sei die z -Achse zeitartig (zeitartiger Zug), wodurch die x -Achse folglich raumartig ist. Zudem muss zwischen raumartiger oder zeitartiger Leine unterschieden werden. Sei die Leine raumartig, was sich per Definition durch $\langle \vec{SP}, \vec{SP} \rangle > 0$ ausdrückt. Um eine Parameterdarstellung der Traktrix zu erhalten, berechnet man zu einem Punkt $P = c(t)$ den zugehörigen Punkt $S(t)$. Die Tangente in P lässt sich anschreiben als

$$(t, z) + \lambda(1, \dot{z}).$$

Schneidet man diese Tangente mit der z -Achse ($x = 0$) erhält man den Punkt

$$S(t) = (0, z - t\dot{z})$$

und damit den Vektor

$$\overrightarrow{SP} = (t, t\dot{z}).$$

Es gilt

$$0 < d^2 = \langle \overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SP} \rangle = t^2 - t^2\dot{z},$$

woraus folgt

$$\dot{z} = \pm \frac{\sqrt{t^2 - d^2}}{t}, \quad |t| \geq d.$$

Integration liefert

$$z(t) = \pm \left(\sqrt{t^2 - d^2} - d \cos^{-1} \frac{d}{t} \right).$$

Mit dem zulässigen Parameterwechsel $t = \gamma(\tilde{t}) = d / \cos \tilde{t}$, $\tilde{t} \in (-\pi/2, \pi/2)$, gilt für $\tilde{c} := c \circ \gamma$

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\tilde{t}) &= d \left(\frac{1}{\cos \tilde{t}}, \tilde{t} - \tan \tilde{t} \right), \\ \dot{\tilde{c}}(\tilde{t}) &= d \left(\frac{\sin \tilde{t}}{\cos^2 \tilde{t}}, 1 - \frac{1}{\cos^2 \tilde{t}} \right) = d \left(\frac{\sin \tilde{t}}{\cos^2 \tilde{t}}, \frac{\sin^2 \tilde{t}}{\cos^2 \tilde{t}} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung der Bahnnormalen lautet somit

$$\begin{aligned} x_1 + \sin \tilde{t} \cdot x_3 &= d \left(\frac{1}{\cos \tilde{t}} + \sin \tilde{t}(\tilde{t} - \tan \tilde{t}) \right) \\ &\Leftrightarrow \\ x_1 + \sin \tilde{t} \cdot x_3 &= d(\cos \tilde{t} + \tilde{t} \sin \tilde{t}). \end{aligned} \tag{21}$$

Um nun die Evolute als Hüllkurve der Bahnnormalen zu berechnen, muss Gleichung (21) nach \tilde{t} abgeleitet werden, woraus sich x_3 und in Folge x_1 eindeutig ergeben. Die Evolute \tilde{c}^* von \tilde{c} besitzt damit die Parameterdarstellung

$$\tilde{c}^*(\tilde{t}) = d(\cos \tilde{t}, \tilde{t}).$$

Ein letzter Parameterwechsel führt zur Darstellung

$$c^*(t) = \left(d \sin \frac{1}{d}t, t - d \frac{\pi}{2} \right).$$

Vernachlässigt man den Translationsanteil $-d\pi/2$ und setzt man $a := 1/d$, so erhält man eine der pseudo-euklidischen Kettenlinien aus Satz 4.2.

Bemerkung. Mit ähnlichen Überlegungen lässt sich auch der 2. Fall (zeitartige Leine) berechnen, was zur pseudo-euklidischen Kettenlinie $c^*(t) = (1/a \sinh at, t)$ führt. Insgesamt treten in Analogie zum euklidischen Fall ausschließlich Kettenlinien als Evoluten von Traktrizen auf.

4.5 Diskussion und Zusammenfassung

Insgesamt liefern die Unterabschnitte 4.1 - 4.3 einen vollständigen Beweis dafür, dass es sich bei einer Minimaldrehfläche bis auf Isometrien nur um eine der sieben hergeleiteten Flächen handeln kann, deren Parameterdarstellungen in Tabelle 1 noch einmal angeführt werden. In Anlehnung an die euklidische Situation werden diese Flächen als Katenoide bezeichnet, wobei Unterabschnitt 4.5 zeigt, dass dies auch mit Blick auf das Funktional der potentiellen Energie Berechtigung findet. Die verschiedenen Typen der Katenoide werden von I. VAN DE WOESTINE [15] mittels Nummern unterschieden (Katenoid 1. Art, etc.). In dieser Arbeit wird die Bezeichnung „raumartig-zeitartiges Katenoid“ verwendet, wenn die Achse raumartig und die Fläche zeitartig ist. Ein raumartiges Katenoid mit isotroper Achse wird in diesem Sinne als isotrop-raumartiges Katenoid bezeichnet. Einzig beim raumartig-zeitartigen Katenoid muss weiter unterschieden werden mittels 1. und 2. Art.

Achse \ Typ	raumartig $f(u, \theta) =$	zeitartig $f(u, \theta) =$
raumartig	$(u, 1/a \sin au \cosh \theta, 1/a \sin au \sinh \theta)$	1. Art: $(u, 1/a \cosh au \cosh \theta, 1/a \cosh au \sinh \theta)$ 2. Art: $(u, 1/a \sinh au \sinh \theta, 1/a \sinh au \cosh \theta)$
zeitartig	$(1/a \sinh au \cos \theta, 1/a \sinh au \sin \theta, u)$	$(1/a \sin au \cos \theta, 1/a \sin au \sin \theta, u)$
isotrop	$(au^3 + u - u\theta^2, -2u\theta, au^3 - u - u\theta^2)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$	$(au^3 + u - u\theta^2, -2u\theta, au^3 - u - u\theta^2)$ mit $a \in \mathbb{R}^-$

Tabelle 1: Übersicht Minimaldrehflächen

5 Minimalregelflächen

In diesem Kapitel sollen alle Minimalregelflächen im Lorentz-Minkowski Raum beschrieben werden. Genau wie im vorherigen Abschnitt bedarf es zuerst einer Definition einer Regelfläche bzw. eines Regelflächenweges.

Definition 5.1 (Regelfläche). *Ein Flächenweg $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt Regelflächenweg, falls gilt*

$$f(u, v) = l(u) + v \cdot r(u), \quad \text{wobei } l, r : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } r(u) \neq 0 \quad \forall u \in I.$$

Eine Fläche Φ heißt Regelfläche, falls ein Regelflächenweg f existiert mit $f(U) = \Phi$. Die Kurve l bzw. r wird als Leit- bzw. Richtkurve der Regelfläche bezeichnet.

Da die Beweise in diesem Abschnitt auf Differentialgeometrie von Kurven im \mathbb{R}_1^3 zurückgreifen, insbesondere auf Begleitbasen, Krümmung und Torsion, sei zu Beginn ein kurzer Überblick darüber geben. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben – es werden nur jene Ergebnisse zusammengefasst, die in weiterer Folge Relevanz besitzen. In seiner Publikation gibt R. LOPEZ [10] im zweiten Abschnitt einen detaillierten Einblick in die Problematiken und daraus resultierenden Modifikationen bei der Definition einer Frenet-Basis.

Frenet-Basis. Ähnlich wie im euklidischen 3-Raum kann auch im Lorentz-Minkowski-Raum von einer Frenet-Basis gesprochen werden, wobei der Typus der betrachteten Kurve entscheidend ist.

Definition 5.2. *Eine Kurve $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt raumartig (bzw. zeitartig oder isotrop) genau dann, wenn $\dot{c}(t) > 0$ (bzw. $\dot{c}(t) < 0$ oder $\dot{c}(t) = 0$) $\forall t \in I$ gilt.⁹*

Lemma 5.1. *Sei $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre, raumartige bzw. zeitartige Kurve. Es gibt einen Diffeomorphismus γ sodass für $\tilde{c} := c \circ \gamma$ gilt $\langle \tilde{c}, \dot{\tilde{c}} \rangle = 1$ bzw. $\langle \tilde{c}, \dot{\tilde{c}} \rangle = -1$.*

Für den Beweis siehe R. LOPEZ [10, S. 56, Prop. 2.2].

Um mühsame Bezeichnungsweisen zu vermeiden, wird eine Kurve für die $|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle| = 1$ gilt, in Analogie zur euklidischen Situation, als bogenlängenparametrisiert bezeichnet. Betrachten wir reguläre raumartige oder zeitartige Kurven, so darf stets angenommen werden, dass diese bogenlängenparametrisiert sind.

Bei den folgenden Überlegungen seien Geradenstücke als Kurven ausgeschlossen, da Geradenstücke genau jene Kurven sind, bei denen $\ddot{c} = 0$ oder \dot{c} proportional zu \ddot{c} ist.

Definition 5.3 (Frenet-Basis). *Sei $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine bogenlängenparametrisierte, raumartige bzw. zeitartige Kurve. Die Basis $F := (t(s), n(s), b(s))$, wobei gilt*

$$t(s) := \dot{c}(s), \quad n(s) := \frac{\dot{t}(s)}{\sqrt{|\langle \dot{t}(s), \dot{t}(s) \rangle|}}, \quad b(s) := t(s) \times n(s),$$

heißt Frenet-Basis oder auch Begleitbasis von c im Punkt $c(s)$.

Die Definition erfolgt analog zum euklidischen Fall. Durch Ableiten von $|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle| = 1$ folgt, dass $t(s)$ und $n(s)$ orthogonal sind, womit es sich insgesamt um eine Orthonormalbasis handelt, sofern $\dot{t}(s)$ nicht isotrop ist. Da das Kreuzprodukt im Lorentz-Minkowski-Raum jedoch anders erklärt ist (vgl. Definition 1.3), ist die Frenet-Basis nicht zwingend positiv orientiert, wodurch man den Typus von $t(s)$ und $n(s)$ für die Frenet-Gleichungen genauer unterscheiden muss.

⁹Stillschweigend wurde schon in Abschnitt 3.2.2 der Begriff „isotrope Kurve“ verwendet.

Proposition 5.1 (Frenet-Gleichungen). 1. Sei c eine bogenlängenparametrisierte, raumartige Kurve und $F := (t(s), n(s), b(s))$ die zugehörige Frenet-Basis.

(a) Sei der Vektor $\dot{t}(s)$ raumartig. Dann lauten die Frenet-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix},$$

wobei $\kappa = \sqrt{\langle \dot{t}(s), \dot{t}(s) \rangle}$, $\tau = -\langle \dot{n}, b \rangle$ und F negativ orientiert ist.

(b) Sei der Vektor $\dot{t}(s)$ zeitartig. Dann lauten die Frenet-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix},$$

wobei $\kappa = \sqrt{-\langle \dot{t}(s), \dot{t}(s) \rangle}$, $\tau = \langle \dot{n}, b \rangle$ und F positiv orientiert ist.

2. Sei c eine bogenlängenparametrisierte, zeitartige Kurve und $F := (t(s), n(s), b(s))$ die zugehörige Frenet-Basis. Dann ist $\dot{t}(s)$ raumartig und die Frenet-Gleichungen lauten

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix},$$

wobei $\kappa = \sqrt{\langle \dot{t}(s), \dot{t}(s) \rangle}$, $\tau = \langle \dot{n}, b \rangle$ und F positiv orientiert ist.

Hier wird der Fall, dass c raumartig ist und $\dot{t}(s)$ isotrop, nicht behandelt. Dies würde zur sogenannten Pseudo-Torsion führen, was aber für die folgenden Überlegungen in dieser Arbeit keine Relevanz besitzt. Für einen Beweis und genauere Ausführungen zu Konzepten für isotrope Kurven sei auf R. LOPEZ [10] verwiesen.

Bemerkung. Raumartige bzw. zeitartige Kurven mit einem raumartigen oder zeitartigen Hauptnormalvektor $n(s)$ werden auch Frenet-Kurven genannt. Für Frenet-Kurven gilt in Analogie zum euklidischen 3-Raum, dass eine Kurve genau dann eine Schraublinie, also Bahnkurve eines Punktes unter einer (Lorentz-) Schraubung ist (vgl. Prop. 1.2), wenn ihre Krümmung κ und Torsion τ konstant sind (Beweis siehe R. LOPEZ [10]).

5.1 Raumartige Minimalregelflächen

Die hier angeführten Beweise orientieren sich an der Publikation von I. VAN DE WOESTIJNE [15].

5.1.1 Vorüberlegungen

Nach Definition 5.1 kann jeder Regelflächenweg f angeschrieben werden als

$$f(u, v) = c(u) + v \cdot n(u), \quad \text{wobei } c, n : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } n(u) \neq 0 \quad \forall u \in I.$$

Wir betrachten Flächenwege mit $\Delta > 0$. Setzt man $v = 0$, so zeigen die partiellen Ableitungen $f_{,1} = \dot{c} + v \cdot \dot{n}$ und $f_{,2} = n$, dass c eine raumartige, reguläre Kurve sein muss. Somit darf c als bogenlängenparametrisiert angenommen werden. Zudem muss n stets raumartig sein und ohne Einschränkung darf wegen $n \neq 0$ angenommen werden, dass $\langle n, n \rangle = 1$ gilt.

Lemma 5.2. *Ist $f := c + v \cdot n$ ein raumartiger Regelflächenweg, so gibt es einen zu f äquivalenten Flächenweg*

$$\tilde{f} := \tilde{c} + s \cdot n \quad \text{mit} \quad \langle \dot{\tilde{c}}, n \rangle = 0.$$

Beweis. Da jede Flächenkurve von f als Leitkurve verwendet werden darf, kann die Orthogonaltrajektorie \tilde{c} der Erzeugenden angesetzt werden als

$$\tilde{c} = c(u) + v(u) \cdot n(u).$$

Die Ableitung lautet

$$\dot{\tilde{c}} = \dot{c} + \dot{v} \cdot n + v \cdot \dot{c},$$

woraus mit $0 = \langle \dot{\tilde{c}}, n \rangle$ folgt

$$\dot{v} = -\langle \dot{c}, n \rangle.$$

Mittels Integration kann nun $v(u)$ ermittelt werden. □

Korollar 5.1. *Insgesamt kann also jede raumartige Regelfläche parametrisiert werden durch einen Flächenweg $f = c + v \cdot n$ mit den Eigenschaften*

- i. $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1$
- ii. $\langle n, n \rangle = 1$
- iii. $\langle \dot{c}, n \rangle = 0$

5.1.2 Berechnung der mittleren Krümmung

Die mittlere Krümmung berechnet sich wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} f_{,1} = \dot{c} + v \cdot \dot{n} \\ f_{,2} = n \end{array} \right\} \Rightarrow g_{11} = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle + 2v \langle \dot{c}, \dot{n} \rangle + v^2 \langle \dot{n}, \dot{n} \rangle, \quad g_{22} = \langle n, n \rangle = 1, \quad g_{12} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{,11} = \ddot{c} + v \cdot \ddot{n} \\ f_{,22} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{11} = \det(n, \dot{c} + v \cdot \dot{n}, \ddot{c} + v \cdot \ddot{n}), \quad A_{22} = 0$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\Delta} \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon\Delta}} A_{11}.$$

Damit handelt es sich bei f genau dann um einen Minimalregelflächenweg wenn $A_{11} = 0$ gilt, was äquivalent ist zu $\ddot{c} + v \cdot \ddot{n} \in \text{Span}\{f_{,1}, f_{,2}\}$. Anders formuliert existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \cdot n + \mu \cdot (\dot{c} + v \cdot \dot{n}) = \ddot{c} + v \cdot \ddot{n}.$$

Setzt man $v = 0$, so folgt, dass es sich bei n um den Hauptnormalvektor von c handelt. Es gilt also folgendes Zwischenergebnis:

Satz 5.1. *Ein raumartiger Regelflächenweg im Sinne von Korollar 5.1 ist genau dann minimal, wenn n Hauptnormalvektor von c ist.*

Bezeichnet man den Binormalvektor von c mit b , so gelten die Frenet-Gleichungen aus Proposition 5.1:

$$\begin{aligned}\ddot{c} &= \kappa \cdot n \\ \dot{n} &= -\kappa \cdot \dot{c} + \tau \cdot b \\ \dot{b} &= \tau \cdot n\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\underline{\dot{c} + v \cdot \dot{n}} = \dot{c} - v\kappa \cdot \dot{c} + v\tau \cdot b = \underline{(1 - v\kappa) \cdot \dot{c} + v\tau \cdot b} \quad (22)$$

und

$$\begin{aligned}\underline{\ddot{c} + v \cdot \ddot{n}} &= \kappa \cdot n + v \cdot (-\dot{\kappa} \cdot \dot{c} - \kappa \cdot \ddot{c} + \dot{\tau} \cdot b + \tau \cdot \dot{b}) = \\ &= \underline{(\kappa - v\kappa + v\tau^2) \cdot n + v \cdot (-\dot{\kappa} \cdot \dot{c} + \dot{\tau} \cdot b)}.\end{aligned} \quad (23)$$

Die Gleichungen zeigen, dass $v \cdot (-\dot{\kappa} \cdot \dot{c} + \dot{\tau} \cdot b)$ parallel zu $(1 - v\kappa) \cdot \dot{c} + v\tau \cdot b$ ist, da $\dot{c} + v \cdot \dot{n}$ stets Tangentialvektor der Minimalregelfläche sein muss. Dies gilt für alle u und v , woraus folgt, dass sowohl κ als auch τ konstant sind. In den folgenden Unterabschnitten werden die verschiedenen Fälle und die daraus resultierenden Flächen behandelt.

5.1.3 1. Fall: $|\kappa| > |\tau| > 0$

In diesem Fall ist

$$c_0(u) := c(u) + \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \cdot n(u)$$

eine zeitartige Gerade, da $\ddot{c}_0 = 0$ und $\langle \dot{c}_0, \dot{c}_0 \rangle < 0$ gilt, was einfach nachzurechnen ist. Sei c_0 o.B.d.A. die e_3 -Achse. Da per Konstruktion $\langle \dot{c}_0, n \rangle = 0$ gilt, kann $n(u)$ angesetzt werden als

$$n(u) = -(\cos f(u), \sin f(u), 0).$$

Insgesamt gilt dann

$$c(u) = \left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \cos f(u), \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \sin f(u), g(u) \right)$$

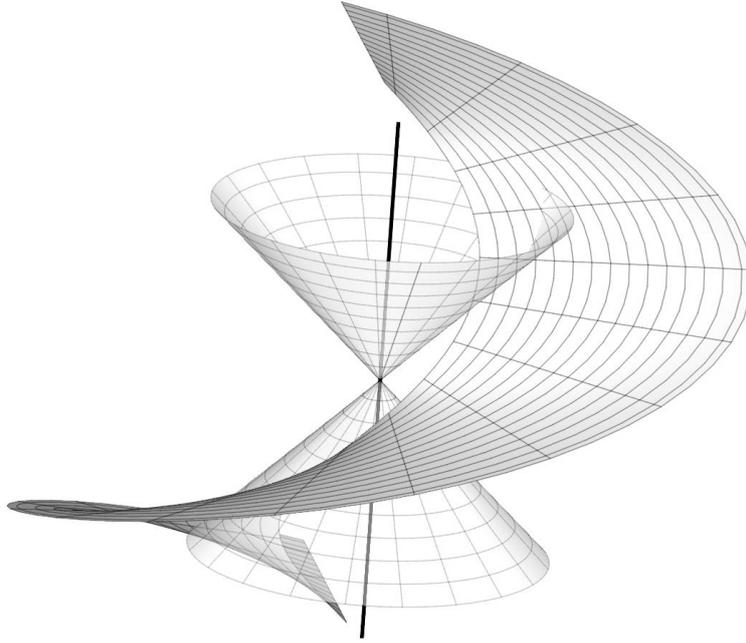


Abbildung 15: Zeitartig-raumartiges Helicoid

und die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \left(-\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \dot{f} \sin f, \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \dot{f} \cos f, \dot{g} \right), \\ \ddot{c} &= \left(-\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} (\ddot{f} \sin f + \dot{f}^2 \cos f), \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} (\ddot{f} \cos f - \dot{f}^2 \sin f), \ddot{g} \right).\end{aligned}$$

Wegen den Frenet-Gleichungen gilt damit

$$\begin{aligned}\ddot{f} &= 0, \\ \dot{f} &= \sqrt{\kappa^2 - \tau^2}, \\ \ddot{g} &= 0,\end{aligned}$$

woraus sich $f(u) = \sqrt{\kappa^2 - \tau^2}u$ und $g(u) = au$ ergeben. Aus $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1$ folgt außerdem $a = \tau/\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}$.

Insgesamt folgt

$$f(u, v) = \left(\left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} - v \right) \cos \sqrt{\kappa^2 - \tau^2}u, \left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} - v \right) \sin \sqrt{\kappa^2 - \tau^2}u, \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}u \right).$$

Mit dem Parameterwechsel $v = \kappa/(\kappa^2 - \tau^2) - s$, $u = t/\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}$ besitzt die raumartige Minimalregelfläche schlussendlich die Darstellung

$$f(t, s) = \left(s \cos t, s \sin t, \frac{\tau}{\kappa^2 - \tau^2}t \right),$$

wobei $s > |\tau/(\kappa^2 - \tau^2)|$ oder $s < -|\tau/(\kappa^2 - \tau^2)|$ gilt, da $\Delta > 0$ ist. Es handelt sich hier um einen Teil der (euklidischen) Wendelfläche (vgl. Abbildung 15).

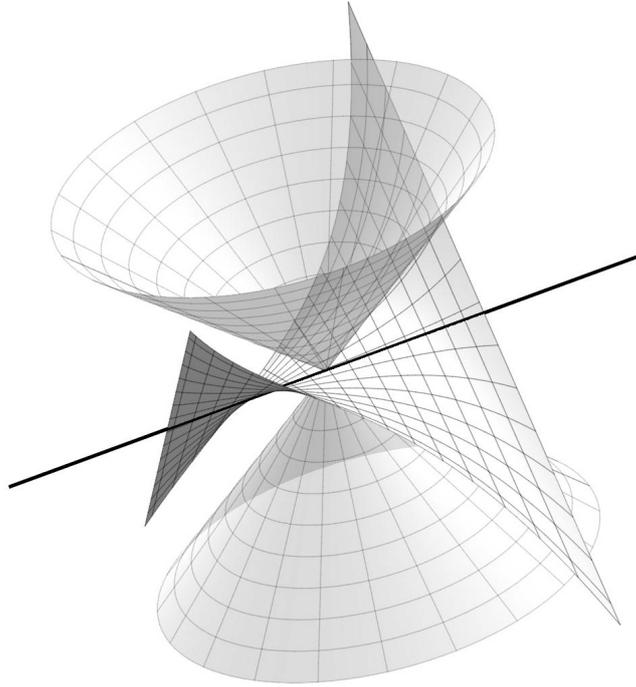


Abbildung 16: Raumartig-raumartiges Helicoid

5.1.4 2. Fall: $|\tau| > |\kappa| > 0$

In diesem Fall ist

$$c_0(u) := c(u) + \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \cdot n(u)$$

eine raumartige Gerade, da $\ddot{c}_0 = 0$ und $\langle \dot{c}_0, \dot{c}_0 \rangle > 0$ gilt, was einfach nachzurechnen ist. Sei c_0 o. B. d. A. die e_1 -Achse. Da per Konstruktion $\langle \dot{c}_0, n \rangle = 0$ gilt, kann $n(u)$ angesetzt werden als

$$n(u) = -(0, \cosh f(u), \sinh f(u)).$$

Analoge Berechnungen zu Fall 1. führen zum Flächenweg

$$f(u, v) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}} u, \left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} - v \right) \cosh \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} u, \left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} - v \right) \sinh \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} u \right)$$

und ein Parameterwechsel zu

$$f(t, s) = \left(\frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2} t, s \cosh t, s \sinh t \right),$$

wobei $-|\tau/(\tau^2 - \kappa^2)| < s < |\tau/(\tau^2 - \kappa^2)|$, da $\Delta > 0$ ist. Es handelt sich hier ein Stück der Schraubfläche, die durch (Lorentz-) Schraubung der e_2 -Achse um die e_1 -Achse entsteht (vgl. Abbildung 16).

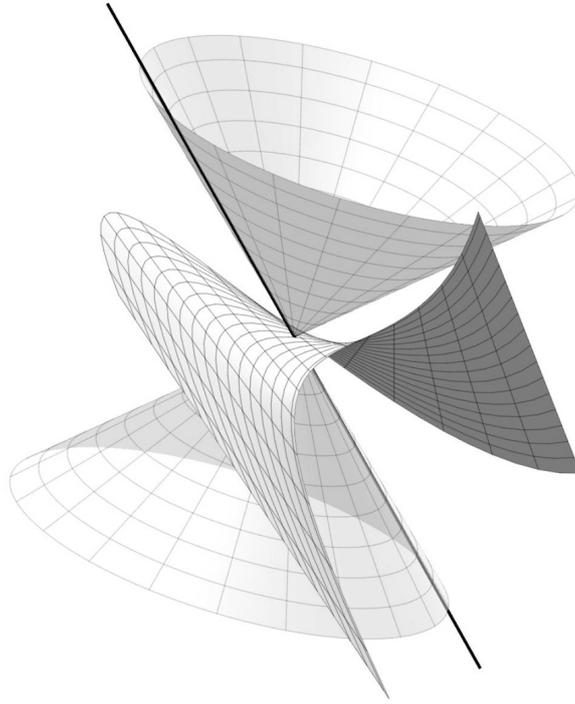


Abbildung 17: Isotrop-raumartiges Helicoid bzw. CAYLEYsche Regelfläche

5.1.5 3. Fall: $|\tau| = |\kappa| \neq 0$

Aus den Frenet-Gleichungen folgt $\ddot{n} = (\tau^2 - \kappa^2) \cdot n = 0$, sodass $\dot{n} = (a_1, a_2, a_3)$ mit konstanten a_i gilt. Ohne Einschränkung darf $c(0) = (0, 0, 0)$, $\dot{c}(0) = (1, 0, 0)$ und $n(0) = (0, 1, 0)$ angenommen werden, woraus $b(0) = (0, 0, -1)$ folgt.

Damit ist $n(u) = (a_1 u, a_2 u + 1, a_3 u)$. Wegen $\dot{b} = \tau \cdot n$ gilt mit $b(0) = (0, 0, -1)$:

$$\dot{b} = (\tau a_1 u, \tau a_2 u + \tau, \tau a_3 u) \Rightarrow b = \left(\frac{\tau a_1}{2} u^2, \frac{\tau a_2}{2} u^2 + \tau u, \frac{\tau a_3}{2} u^2 - 1 \right).$$

Aus $\dot{n} = -\kappa \cdot \dot{c} + \tau \cdot b$ folgt

$$\dot{c} = \frac{1}{\kappa} \cdot (\tau \cdot b - \dot{n}) = \left(\frac{\tau^2 a_1}{2\kappa} u^2 - \frac{a_1}{\kappa}, \frac{\tau^2 a_2}{2\kappa} u^2 + \frac{\tau^2}{\kappa} u - \frac{a_2}{\kappa}, \frac{\tau^2 a_3}{2\kappa} u^2 - \frac{\tau}{\kappa} - \frac{a_3}{\kappa} \right).$$

Setzt man in $\dot{c}(0) = (1, 0, 0)$ ein, so lassen sich die Konstanten $a_1 = -\kappa$, $a_2 = 0$ und $a_3 = -\tau$ berechnen, womit gilt

$$\dot{c} = \left(-\frac{\tau^2}{2} u^2 + 1, \kappa u, -\frac{\kappa\tau}{2} u^2 \right).$$

Die Leitkurve c besitzt also die Darstellung

$$c = \left(-\frac{\tau^2}{6} u^3 + u, \frac{\kappa}{2} u^2, -\frac{\kappa\tau}{6} u^3 \right),$$

woraus sich insgesamt folgender Minimalflächenweg ergibt (vgl. Abbildung 17):

$$f(u, v) = \left(-\frac{\tau^2}{6} u^3 + u, \frac{\kappa}{2} u^2, -\frac{\kappa\tau}{6} u^3 \right) + v(-\kappa u, 1, -\tau u) =$$

$$= \left(-\frac{\tau^2}{6}u^3 + u - \kappa uv, \frac{\kappa}{2}u^2 + v, -\frac{\kappa\tau}{6}u^3 - \tau uv \right).$$

Dabei handelt es sich um eine CAYLEYsche Regelfläche. Für den Parameter v gilt wegen $\Delta > 0$ entweder $v > 1/2\kappa$, wenn $\kappa < 0$ oder $v < 1/2\kappa$, wenn $\kappa > 0$ ist.

5.1.6 Sonderfälle

Bisher wurden die Fälle $\kappa = 0$ bzw. $\tau = 0$ nicht diskutiert.

- $\kappa = 0$

Dieser Fall lässt es nicht zu, von einer eindeutigen Frenet-Basis zu sprechen, da \dot{c} und \ddot{c} linear abhängig sind. Sowohl in Fall 1 als auch in Fall zwei wurde durch geschickte Wahl von v eine Gerade gefunden, die alle Erzeugenden der Regelfläche orthogonal schneidet. Bei $\kappa = 0$ handelt es sich bei c selbst schon um eine solche Gerade, die nach Voraussetzung raumartig ist. Damit erhält man hier wieder das raumartig-raumartige Helicoid aus Unterabschnitt 5.1.4.

- $\tau = 0$

In diesem Fall ist die Leitkurve c eben, wodurch es sich bei der zugehörigen Minimalregelfläche um eine raumartige Ebene handelt.

5.2 Zeitartige Minimalregelflächen

Auch hier orientieren sich die hier angeführten Beweise an der Publikation von I. VAN DE WOESTIJNE [15].

5.2.1 Vorüberlegungen

Die Klassifikation im zeitartigen Fall hat große Ähnlichkeit zum raumartigen Fall und um Redundanz zu vermeiden, werden analoge Beweise nicht im Detail ausgeführt. Im Unterschied zu raumartigen Minimalregelflächen sind die Erzeugenden nicht notwendigerweise raumartig, was zu anderen Fallunterscheidungen als bisher führt. Mit ähnlichen Überlegungen wie in Unterabschnitt 5.1.1 kann ein zeitartiger Regelflächenweg ohne Einschränkung, sollten die Erzeugenden nicht isotrop sein, als

$$f(u, v) = c(u) + v \cdot n(u)$$

angenommen werden, mit

$$\langle n, n \rangle = 1, \quad \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = -1, \quad \langle \dot{c}, n \rangle = 0 \quad (24)$$

im Falle raumartiger Erzeugenden oder mit

$$\langle n, n \rangle = -1, \quad \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1, \quad \langle \dot{c}, n \rangle = 0 \quad (25)$$

im Falle zeitartiger Erzeugenden.

In den folgenden Unterabschnitten werden die drei möglichen Fälle für Erzeugendentypen diskutiert.

5.2.2 1. Fall: Die Erzeugenden sind raumartig

Die Leitkurve c ist nach Gleichung (24) zeitartig. Gleiche Überlegungen wie in Unterabschnitt 5.1.2 zeigen, dass es sich auch in diesem Fall genau dann um einen Minimalregelflächenweg handelt, wenn n der Hauptnormalvektor von c ist. Bezeichnet b den Binormalvektor, so gelten die Frenet-Gleichungen aus Proposition 5.1

$$\begin{aligned} \ddot{c} &= \kappa \cdot n, \\ \dot{n} &= \kappa \cdot \dot{c} - \tau \cdot b, \\ \dot{b} &= \tau \cdot n, \end{aligned}$$

mittels derer wie in Unterabschnitt 5.1.1, folgt, dass sowohl κ als auch τ konstant sind. Wieder gibt es verschiedene Fälle:

Fall 1.1: $|\kappa| > |\tau| > 0$

Die Kurve

$$c_0(u) := c(u) - \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \cdot n(u)$$

ist wie in Unterabschnitt 5.1.4 eine raumartige Gerade. Analoge Berechnungen führen zum Flächenweg

$$f(u, v) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}} u, - \left(v + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \cosh \sqrt{\kappa^2 - \tau^2} u, - \left(v + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \sinh \sqrt{\kappa^2 - \tau^2} u \right)$$

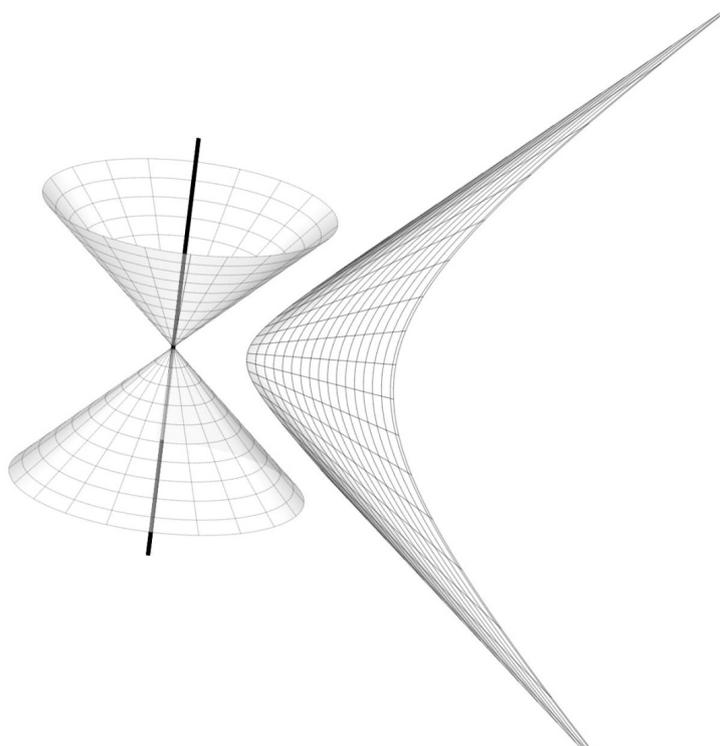


Abbildung 18: Raumartig-zeitartiges Helicoid 1. Art

und ein Parameterwechsel weiter zu

$$f(t, s) = \left(\frac{\tau}{\kappa^2 - \tau^2} t, s \cosh t, s \sinh t \right),$$

wobei $s < -|\tau/(\kappa^2 - \tau^2)|$ oder $s > |\tau/(\kappa^2 - \tau^2)|$, da $\Delta < 0$ ist. Es handelt sich hier um ein Stück der Schraubfläche, die durch (Lorentz-) Schraubung der e_2 -Achse um die e_1 -Achse entsteht (vgl. Abbildung 18).

Bemerkung. *Schränkt man den Parameterbereich nicht ein, so erhält man die gesamte Fläche, die durch (Lorentz-) Schraubung der e_2 -Achse um die e_1 -Achse entsteht. Die beiden Flächenkurven längs derer die Tangentialebenen stets isotrop sind ($\Delta = 0$), bilden die „Grenzkurven“, die die Fläche in raumartigen und zeitartigen Bereich gliedern.*

Fall 1.2: $|\tau| > |\kappa| > 0$

Die Kurve

$$c_0(u) := c(u) + \frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} \cdot n(u)$$

ist wie in Unterabschnitt 5.1.3 eine zeitartige Gerade. Analoge Berechnungen führen zum Flächenweg

$$f(u, v) = \left(\left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} - v \right) \cos \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} u, \left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} - v \right) \sin \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} u, \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}} u \right)$$

und ein Parameterwechsel weiter zu

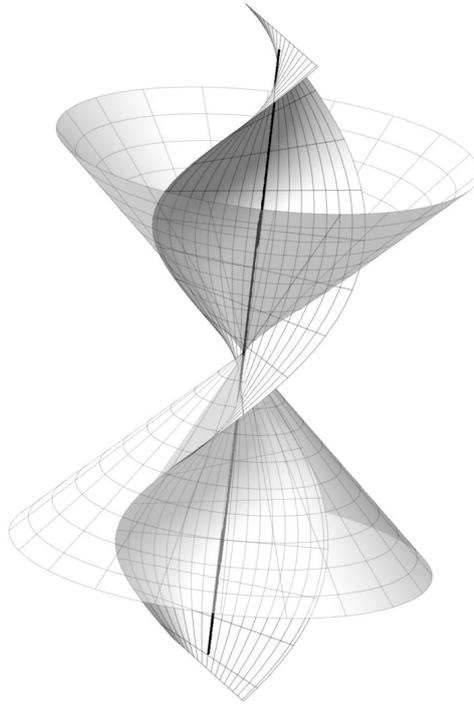


Abbildung 19: Zeitartig-zeitartiges Helicoid

$$f(t, s) = \left(s \cos t, s \sin t, \frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2} t \right),$$

wobei $-|\tau/(\tau^2 - \kappa^2)| < s < |\tau/(\tau^2 - \kappa^2)|$, da $\Delta < 0$ ist. Es handelt sich hier um ein Stück der (euklidischen) Wendelfläche (vgl. Abbildung 19).

Bemerkung. Auch hier wird die Wendelfläche durch Kurven mit $\Delta = 0$ in einen zeitartigen bzw. raumartigen Bereich getrennt.

Fall 1.3: $|\kappa| = |\tau| \neq 0$

Wie in Unterabschnitt 5.1.5, folgt aus den Frenet-Gleichungen auch hier, dass \dot{n} konstant ist. Die Frenet-Basis an der Stelle 0 muss jedoch, da c eine zeitartige Kurve ist, anders angesetzt werden. Seien ohne Einschränkung $\dot{c}(0) = (0, 0, 1)$, $n(0) = (1, 0, 0)$ und $b(0) = (0, 1, 0)$. Analoge Berechnungen zu 5.1.5 führen zum Flächenweg

$$f(u, v) = \left(\frac{\kappa}{2} u^2 + v, -\frac{\kappa\tau}{6} u^3 - \tau uv, \frac{\kappa^2}{6} u^3 + u + \kappa uv \right),$$

wobei $v > -1/2\kappa$, sofern $\kappa > 0$ gilt oder $v < -1/2\kappa$, wenn $\kappa < 0$ gilt, wegen $\Delta < 0$. Wieder erhält man eine CAYLEYsche Regelfläche (vgl. Abbildung 20).

Fall 1.4: Sonderfälle

Ähnlich wie in Unterabschnitt 5.1.6 führt $\kappa = 0$ zu den bisher behandelten Fällen. Sollte $\tau = 0$ gelten, so handelt es sich um eine zeitartige Ebene.

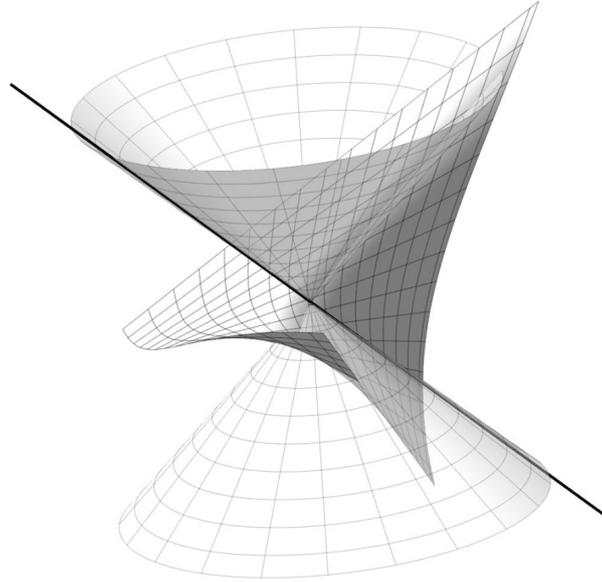


Abbildung 20: Isotrop-zeitartiges Helicoid

5.2.3 2. Fall: Die Erzeugenden sind zeitartig

In diesem Fall darf der zugrundeliegende Flächenweg wie in Gleichung (25) angenommen werden. Mit gleicher Argumentation wie bisher gilt: Es handelt sich um einen Minimalregelflächenweg genau dann, wenn n Hauptnormalvektor von c ist. Bezeichnet b den Binormalvektor, so gelten die Frenet-Gleichungen aus Proposition 5.1:

$$\begin{aligned}\ddot{c} &= \kappa \cdot n \\ \dot{n} &= \kappa \cdot \dot{c} + \tau \cdot b \\ \dot{b} &= \tau \cdot n\end{aligned}$$

Wieder folgt, dass κ und τ konstant sind. Die Kurve

$$c_0 = c - \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \cdot n$$

ist eine raumartige Gerade, die ohne Einschränkung als die e_1 -Achse angenommen werden darf. Hier ist eine Fallunterscheidung wie bisher nicht notwendig, da $\kappa^2 + \tau^2 \neq 0$ für $(\kappa, \tau) \neq (0, 0)$. In Analogie zu den vorhergegangenen Berechnungen führt dies zum Flächenweg

$$f(u, v) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} u, - \left(v + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \sinh \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} u, - \left(v + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \cosh \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} u \right)$$

und ein Parameterwechsel zur Darstellung

$$f(t, s) = \left(\frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} t, s \sinh t, s \cosh t \right).$$

Dabei handelt es sich (nach entsprechender Wahl von κ und τ) um die Fläche aus Beispiel 3.2 (vgl. Abbildung 6). Wie bisher führt $\kappa = 0$ wieder zum soeben beschriebenen Flächenweg und $\tau = 0$ zu einer zeitartigen Ebene.

5.2.4 3. Fall: Die Erzeugenden sind isotrop

In diesem Fall kann der Regelflächenweg angesetzt werden als

$$f(u, v) = c(u) + v \cdot n(u),$$

mit $\langle n, n \rangle = 0$. Für die Determinante der metrischen Grundform gilt somit $\Delta = -\langle \dot{c}, n \rangle^2$, woraus wegen der vorausgesetzten Zeitartigkeit $\langle \dot{c}, n \rangle \neq 0$ folgt. Setzt man

$$n_0 := \frac{1}{\langle \dot{c}, n \rangle} \cdot n,$$

so kann n_0 statt n als Richtkurve verwendet werden. Es gilt also:

Lemma 5.3. *Jeder zeitartige Regelflächenweg mit isotropen Erzeugenden kann angeschrieben werden als*

$$f(u, v) = c(u) + v \cdot n(u)$$

mit $\langle n, n \rangle = 0$ und $\langle \dot{c}, n \rangle = 1$.

Mit Hilfe dieser Darstellung lässt sich die mittlere Krümmung berechnen:

$$\left. \begin{array}{l} f_{,1} = \dot{c} + v \cdot \dot{n} \\ f_{,2} = n \end{array} \right\} \Rightarrow g_{11} = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle + 2v \langle \dot{c}, \dot{n} \rangle + v^2 \langle \dot{n}, \dot{n} \rangle, \quad g_{22} = 0, \quad g_{12} = \langle \dot{c}, n \rangle = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{,11} = \ddot{c} + v \cdot \ddot{n} \\ f_{,22} = 0 \\ f_{,12} = \dot{n} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{11} = \det(n, \dot{c} + v \cdot \dot{n}, \ddot{c} + v \cdot \ddot{n}), \quad A_{22} = 0, \quad A_{12} = \det(\dot{c} + v \dot{n}, n, \dot{n})$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\Delta} \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon\Delta}} A_{12}.$$

Verschwindende mittlere Krümmung ist also äquivalent zu $\det(\dot{c} + v \dot{n}, n, \dot{n}) = 0$. Setzt man $v = 0$, so folgt

$$\det(\dot{c}, n, \dot{n}) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda \cdot \dot{c} + \mu \cdot n = \dot{n}.$$

Durch Multiplikation der Gleichung mit n bzw. \dot{c} lässt sich $\lambda = 0$ bzw. $\mu = \langle \dot{c}, \dot{n} \rangle$ berechnen. Insgesamt gilt

$$\dot{n} = \mu \cdot n.$$

Satz 5.2. *Jede zeitartige Minimalregelfläche $\Phi = f(U)$ mit isotropen Erzeugenden lässt sich durch einen Regelflächenweg*

$$f(u, v) = c_0(u) + v \cdot n(u) \tag{26}$$

mit $\langle \dot{c}_0, \dot{c}_0 \rangle = 0$, $\langle n, n \rangle = 0$ und $\langle \dot{c}, n \rangle = 1$ beschreiben.

Beweis. Setzt man $c_0(u) := c(u) + v(u) \cdot n(u)$ an, so gilt $\dot{c}_0(u) = \dot{c} + \dot{v} \cdot n + v \cdot \dot{n} = \dot{c} + (\dot{v} + v\mu) \cdot n$. Die Funktion $v(u)$ erhält man als eindeutige Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$0 = \langle \dot{c}_0, \dot{c}_0 \rangle = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle + 2(\dot{v} + \mu v).$$

□

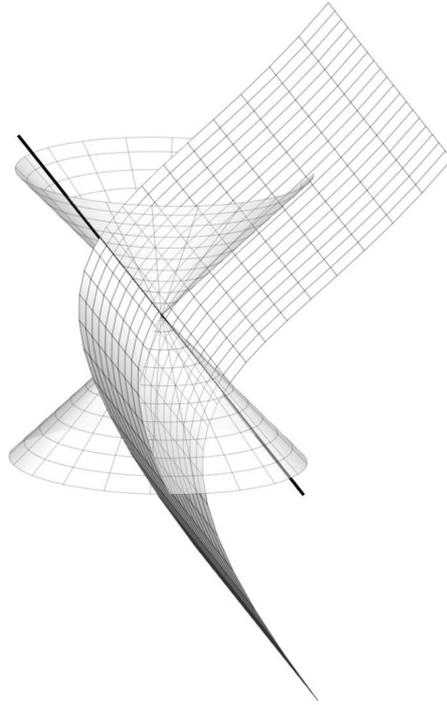


Abbildung 21: Parabolischer Nullzylinder

Hier gilt es hervorzuheben, dass die Parametrisierung des Regelflächenweges aus (26) nur eine notwendige, keineswegs aber eine hinreichende Bedingung für einen zeitartigen Minimalregelflächenweg mit isotropen Erzeugenden ist. Gilt zusätzlich $\det(\dot{c}, n, \dot{n}) = 0$, so ist die Minimalität sichergestellt. Flächen dieser Art werden als „flat B-scrolls over a nullcurve“ bezeichnet (vgl. I. Van De WOESTIJNE [15] oder H. BALGETIR et al. [1]). Es handelt sich dabei um (euklidische) torsale Regelflächen.

Beispiel 5.1 (Parabolischer Nullzylinder). *Ein Beispiel für „flat B-scrolls“ ist der parabolische Nullzylinder P (vgl. Abbildung 21). Erzeugt wird er durch (Lorentz-) Schraubung einer Geraden l um eine isotrope Achse a , wobei l parallel zu a ist. P. MIRA und J. A. PASTOR [13] geben folgende Parameterdarstellung für P (hier wird die erste Mediane der e_1e_3 -Ebene um sich selbst verschraubt):*

$$f(u, v) = \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} - u + 2v, u^2, \frac{u^3}{3} + u + 2v \right).$$

Es handelt sich um eine Fläche im Sinne von Satz 5.2; Setze $c(u) := f(u, 0)$ und $n(u) := (1, 0, 1)$.

5.3 Diskussion und Zusammenfassung

Die bisherigen Ausführungen in Abschnitt 5 liefern insgesamt einen Beweis, dass es sich bei Minimalregelflächen bis auf Isometrien nur um eine der acht hergeleiteten Flächen handeln kann. Im Unterschied zu Minimaldrehflächen tritt hier der Sonderfall der „flat B-scrolls“ auf. Im Falle nicht isotroper Erzeugenden zeigte sich, dass es sich bei Minimalregelflächen stets um (Lorentz-) Schraubflächen handelt, die durch Verschraubung entsprechender Geraden entstehen. In Tabelle 2 werden jene Flächenwege noch einmal zusammengefasst.

Achse \ Typ	raumartig $f(u, v) =$	zeitartig $f(u, v) =$
raumartig	$(au, v \cosh u, v \sinh u)$ mit $- a < v < a $	1. Art: $(au, v \cosh s, v \sinh s)$ mit $v < - a $ oder $v > a $ 2. Art: $(au, v \sinh u, v \cosh u)$
zeitartig	$(v \cos u, v \sin u, au)$ mit $v < - a $ oder $v > a $	$(v \cos u, v \sin u, au)$ mit $- a < v < a $
isotrop	$(-\tau^2/6u^3 + u - \kappa uv, \kappa/2u^2 + v, -\kappa\tau/6u^3 - \tau uv)$ mit $v > 1/2\kappa$ wenn $\kappa < 0$ oder $v < 1/2\kappa$ wenn $\kappa > 0$	$(\kappa/2u^2 + v, \kappa\tau/6u^3 - \tau uv, \kappa^2/6u^3 + u + \kappa uv)$ mit $v > -1/2\kappa$ wenn $\kappa > 0$ oder $v < -1/2\kappa$ wenn $\kappa < 0$

Tabelle 2: Übersicht Minimalregelflächen

6 Minimalschraubflächen

Schraubflächen im Lorentz-Minkowski-Raum \mathbb{R}_1^3 werden in Analogie zum euklidischen 3-Raum erklärt als Bahnen von regulären Kurven unter einer (Lorentz-) Schraubung (siehe Proposition 1.2), oder anders formuliert:

Definition 6.1 (Schraubfläche). *Eine Schraubfläche $f(U)$ im \mathbb{R}_1^3 ist eine Fläche, die invariant ist unter einer 1-Parameter-Untergruppe der pseudo-euklidischen Gruppe.*

Aus Abschnitt 5 geht hervor, dass es sich bei Minimalregelflächen, bis auf den Fall isotroper Erzeugenden, stets um Schraubflächen handelt. In ihrer Publikation zeigen P. MIRA und J. A. PASTOR [13], dass entsprechende raumartige Katenoide aus Abschnitt 4 assoziiert sind zu entsprechenden raumartigen Helicoiden aus Abschnitt 5, insbesondere sind Helicoide stets konjugiert zu Katenoiden. Auch zeitartige Helicoide sind stets konjugiert zu entsprechenden zeitartigen Katenoiden, wobei sie nicht assoziiert sind¹⁰.

Für raumartige Minimalschraubflächen gilt:

Satz 6.1. *Eine raumartige Minimalfläche ist eine Schraubfläche mit Achse l genau dann, wenn sie assoziiert ist zu einem raumartigen Katenoid aus Abschnitt 4 mit Achse l .*

Einen Beweis liefern P. MIRA und J. A. PASTOR [13, Theorem 1.1.].

Für zeitartige Minimalschraubflächen gilt:

Satz 6.2. *Eine zeitartige Minimalfläche ist eine Schraubfläche mit Achse l genau dann, wenn sie assoziiert ist zu einem zeitartigen Katenoid aus Abschnitt 4 mit Achse l oder einem zeitartigen Helicoid aus Abschnitt 5 mit Achse l .*

Einen Beweis liefert F. MANHART [12, Theorem 3].

Es ist bekannt, dass in der euklidischen Situation das euklidische Katenoid assoziiert ist zur Wendelfläche und alle euklidischen Minimalschraubflächen der gemeinsamen Schar angehören. Die Sätze 6.1 und 6.2 bilden dazu ein pseudo-euklidisches Pendant.

Beispiel 6.1. *Setzt man beim isotrop-raumartigen Katenoid $a := 1/3$, so erhält man den Flächenweg*

$$f(u, v) = \left(\frac{1}{3}u^3 + u + uv^2, -2uv, \frac{1}{3}u^3 - u - uv^2 \right).$$

Dabei handelt es sich um eine isotherme Parametrisierung:

$$\left. \begin{array}{l} f_{,1} = (u^2 + 1, -2v, u^2 - v^2 - 1) \\ f_{,2} = (-2uv, -2u, -2uv) \end{array} \right\} \Rightarrow g_{11} = 4u^2, \quad g_{22} = 4u^2, \quad g_{12} = 0$$

Der konjugiert harmonische Flächenweg \hat{f} zu f lautet

$$\hat{f}(u, v) = \left(\frac{1}{3}v^3 + v - u^2v, u^2 - v^2, \frac{1}{3}v^3 + u^2v - v \right).$$

Damit lassen sich alle zu f assoziierten Flächen berechnen. In den Abbildungen 22-25 sind die zu den Scharparameterwerten $\mu = 0$, $\mu = \pi/6$, $\mu = \pi/3$ und $\mu = \pi/2$ gehörigen Flächen dargestellt.

¹⁰Da stets $\cosh \mu \neq 0$ gilt, liegt die zu f konjugierte Fläche nicht in der assoziierten Schar zu f .

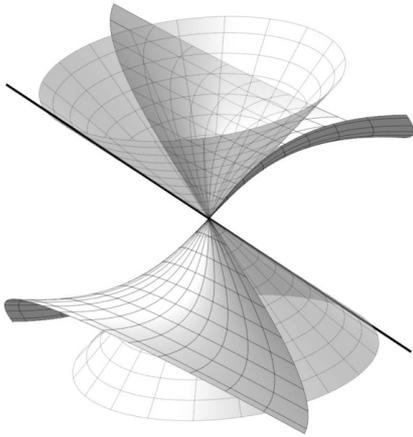


Abbildung 22: $\mu = 0$

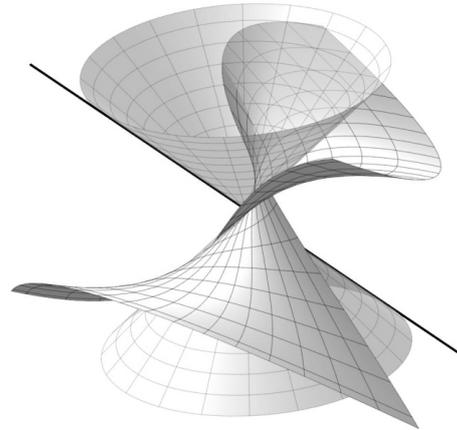


Abbildung 23: $\mu = \pi/6$

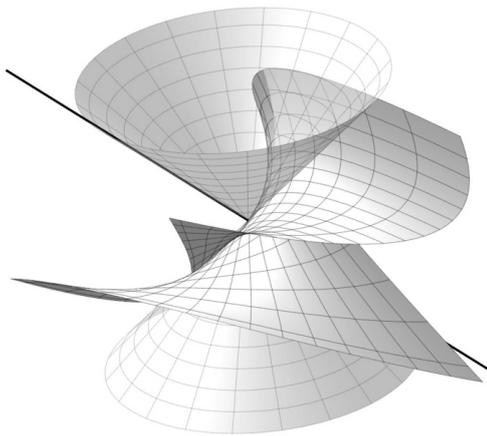


Abbildung 24: $\mu = \pi/3$

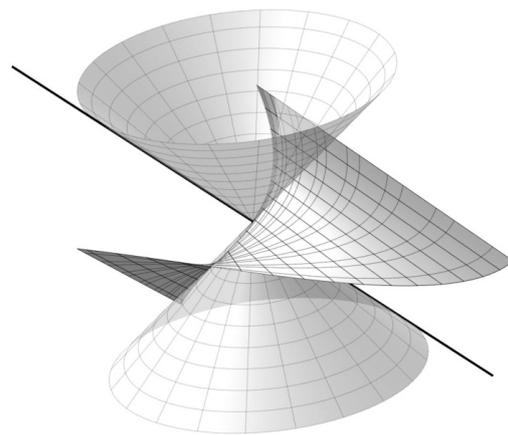


Abbildung 25: $\mu = \pi/2$

7 Appendix

Abbildungsverzeichnis

1	Minkowski-Sphären	7
2	Bahnkurven bei (Lorentz-) Drehungen	10
3	Vektorfeld e_1 -Boost	11
4	Drehzylinder unter Boost	11
5	Enneper-Fläche 1. Art	21
6	Beispiel: Minimalfläche als Graph über \mathbb{R}^2 , nicht eben	25
7	Raumartig-zeitartiges Katenoid 1. Art	29
8	Raumartig-raumartiges Katenoid	30
9	Raumartig-zeitartiges Katenoid 2. Art	31
10	Zeitartig-zeitartiges Katenoid	32
11	Zeitartig-raumartiges Katenoid	33
12	Isotrop-raumartiges Katenoid	34
13	Isotrop-zeitartiges Katenoid	35
14	Pseudo-euklidische Traktrix	38
15	Zeitartig-raumartiges Helicoid	45
16	Raumartig-raumartiges Helicoid	46
17	Isotrop-raumartiges Helicoid	47
18	Raumartig-zeitartiges Helicoid 1. Art	50
19	Zeitartig-zeitartiges Helicoid	51
20	Isotrop-zeitartiges Helicoid	52
21	Parabolischer Nullzylinder	54
22	Assoziierte Fläche, $\mu = 0$	57
23	Assoziierte Fläche, $\mu = \pi/6$	57
24	Assoziierte Fläche, $\mu = \pi/3$	57
25	Assoziierte Fläche, $\mu = \pi/2$	57

Literaturverzeichnis

- [1] BALGETIR, H. ; BEKTAS, M. ; ERGÜT, M.: On the B-Scrolls in the 3-dimensional Lorentzian Space \mathbb{L}^3 . In: *Kragujevac J. Math.* 27 (2005)
- [2] BRAUNER, H.: *Differentialgeometrie*. 1. Auflage. Wiesbaden : Springer, 1981
- [3] CALABI, E.: Examples of Bernstein problems for some non-linear-equations. In: *Proc. Symp. Pure Math.* 15 (1970)
- [4] ESCHENBURG, J. ; JOST, J.: *Differentialgeometrie und Minimalflächen*. 2. Auflage. Berlin : Springer, 2007
- [5] KLOTZ MILNOR, T.: Entire Timelike Minimal Surfaces in $E^{3,1}$. In: *Michigan Math. Journal* 37 (1990)
- [6] KOBAYASHI, O.: Maximal Surfaces in the 3-Dimensional Minkowski Space L^3 . In: *Tokyo Journal of Mathematics* 7 No. 2 (1983)
- [7] KÜHNEL, W.: *Differentialgeometrie, Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*. 5. Auflage. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2010
- [8] KÜHNEL, W.: *Matrizen und Lie-Gruppen, eine geometrische Einführung*. 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2011
- [9] KÜHNEL, W. ; DILLEN, F.: Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space. In: *manuscripta mathematica* 98 (1999)
- [10] LOPEZ, R.: Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. In: *International Electronic Journal of Geometry* 7 (2014)
- [11] LOPEZ, R. ; DEMIR, E.: Helicoidal surfaces in Minkowski space with constant mean curvature and constant Gauss curvature. In: *arXiv* (2010)
- [12] MANHART, F.: Timelike Helicoidal Surfaces in Lorentz-Minkowski 3-Space Revisited. In: *Slovak Journal for Geometry and Graphics* 12 (2015)
- [13] MIRA, P. ; PASTOR, J. A.: Helicoidal Maximal Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. In: *Monatsh. Math.* 140 (2003)
- [14] PICHLER, J.: *Minimalflächen*. Wien, Technische Universität Wien, Diplomarbeit, 1995
- [15] VAN DE WOESTIJNE, I.: Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. In: *Geometry and Topology of submanifolds II*. (1990)