



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

DIPLOMARBEIT

# Asymptotische Trefferwahrscheinlichkeiten für kleine Kreise

ausgeführt am

Institut für  
Financial and Actuarial Mathematics  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits**

durch

**BSc David Hahnenkamp**

Matrikelnummer: 01367977

St. Georgener Hauptstraße 58a

7000 Eisenstadt

# Kurzfassung

Diese Arbeit behandelt die Brownsche Bewegung mit Drift. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft diese einen Kreis um den Ursprung? In höheren Dimensionen verallgemeinert sich das Problem in das Treffen einer  $d$ -dimensionalen Sphäre, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Der Schlüssel hierzu ist die Laplace-Gegenbauer-Transformation. Diese legt die gemeinsame Verteilung des Trefferzeitpunktes und des Trefferortes eindeutig fest. Mit diesen Ergebnissen können wir eine Approximation der Trefferwahrscheinlichkeit für den verschwindenden Kreisradius herleiten.

Um die Laplace-Gegenbauer-Transformation berechnen zu können, benötigen wir zunächst Grundkenntnisse über die sogenannten Besselfunktionen, spezielle Funktionen mit häufiger Anwendung in der Physik. Auf deren Basis können wir die modifizierten Besselfunktionen beschreiben und deren zentrale Eigenschaften anführen. Des Weiteren lernen wir die Gegenbauerpolynome kennen, eine Familie von orthogonalen Polynomen. Diese gehören zu den Jacobipolynomen und stehen in Zusammenhang mit den Tschebyschowpolynomen.

Die Erkenntnisse aus den ersten beiden Kapiteln wollen wir anschließend mit Hilfe von Simulationen verdeutlichen. Hier wird erklärt, wie Pfade einer eindimensionalen Brownschen Bewegung implementiert werden können und wie dies auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden kann. Wir simulieren die Trefferwahrscheinlichkeit in zwei Dimensionen für unterschiedliche Werte von Radius, Drift und Startvektor und vergleichen die Ergebnisse mit den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten. Außerdem konstruieren wir einen Controller für die Y-Komponente, welcher der x-Achse eine Art Anziehungskraft verleiht. Zum Schluss des Kapitels gehen wir kurz auf die Konvergenzordnung des so simulierten Prozess ein.

Im letzten Kapitel geht es um das Cramér-Lundberg-Modell. Es werden grundlegende Erkenntnisse erarbeitet und wichtige Resultate wie Maßwechsel und die Lundberg-Gleichung vorgestellt. Außerdem approximieren wir die Wahrscheinlichkeit des Ruins über eine Diffusion.

# Abstract

This diploma thesis discusses Brownian Motion. What is the probability that it hits a circle surrounding the origin? Introducing higher dimensions the problem shifts into hitting a sphere centered in the origin. The key in answering this question is the Laplace-Gegenbauer-Transformation. This transformation uniquely determines the joint distribution of the hitting time and the hitting position. With those results we can calculate an approximation of the hitting time for vanishing radius of the sphere.

Before calculating the Laplace-Gegenbauer-Transformation, we need to acquire some basic knowledge of the Besselfunctions, which are special functions with frequent use in physics. Based on these we are able to describe the so called Besselfunctions of purely imaginary argument and state their central properties. Moreover, we will become familiar with the Gegenbauer-polynomials, a family of orthogonal polynomials. These polynomials belong to the Jacobi-polynomials and are connected with the Chebyshev-polynomials.

Subsequently, we will illustrate the insights of preceding sections by simulations. In this chapter we explain how to implement paths of a one-dimensional Brownian Motion and how to generalize this into higher dimensions. Then we will simulate the hitting probability of the previous section in two dimensions for different values of radius, drift and starting vector and compare these results with the true ones. Furthermore, we construct a controller for the y-component, which provides a kind of gravitation for the x-axis. At the end of the chapter we consider the order of convergence of the arising process.

The last chapter deals with the Cramér-Lundberg-Model. We will develop basic knowledge about the model and will state central results such as change of measure and the Lundberg-equation. Furthermore, we approximate the probability of ruin by a diffusion.

# Danksagung

Ich danke meinen Eltern, Erich und Petra Hahnenkamp, die mich während meiner gesamten Studienlaufbahn unterstützt haben.

Außerdem danke ich meiner Partnerin, Jasmin Pörtl, der ich meine Probleme immer anvertrauen konnte.

Und ich bedanke mich bei Herrn Professor Grandits, der mir nicht nur mit meiner Diplomarbeit, sondern auch außerhalb davon, immer weitergeholfen hat.

Danke.

# Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 1. Mai 2020

---

David Hahnenkamp

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Besselfunktionen . . . . .	7
1.2	Modifizierte Besselfunktionen . . . . .	10
1.3	Gegenbauerpolynome . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Trefferwahrscheinlichkeiten</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Simulation</b>	<b>25</b>
3.1	Eindimensionale Brownsche Bewegung . . . . .	25
3.2	Höherdimensionale Brownsche Bewegung . . . . .	25
3.3	Verschwindender Kreisradius $R$ . . . . .	28
3.4	Kontroller für die Vertikale . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Das Cramér-Lundberg-Modell</b>	<b>34</b>
4.1	Allgemeine Ruintheorie . . . . .	34
4.2	Das Modell . . . . .	36
4.3	Die Schadenshöhenverteilung . . . . .	38
4.4	Maßwechsel . . . . .	39
4.5	Der Anpassungskoeffizient . . . . .	41
4.6	Diffusions-Approximation . . . . .	44

# 1 Einleitung

## 1.1 Besselfunktionen

Betrachten wir die Funktion

$$e^{\frac{x}{2}}(t-\frac{1}{t}) = e^{\frac{x}{2}t}e^{-\frac{x}{2}\frac{1}{t}} = \sum_{m \geq 0} \frac{(\frac{x}{2})^m}{m!} t^m \sum_{k \geq 0} \frac{(-\frac{x}{2})^k}{k!} t^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n.$$

Wir haben die Funktion (links) in ihre Laurentreihe (rechts) entwickelt. Der Koeffizienten  $J_n(x)$  ist die **Besselfunktion erster Art der Ordnung n**. Durch das Ausmultiplizieren der vorhergehenden Taylorreihen können wir diese berechnen und erhalten die Darstellung,

$$J_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+n}}{k!(k+n)!}, \text{ für } n \geq 0. \quad (1)$$

Für negative Ordnungen erhalten wir

$$J_{-n}(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^{m+n} (\frac{x}{2})^{2m+n}}{m!(m+n)!} = (-1)^n J_n(x) = J_n(-x). \quad (2)$$

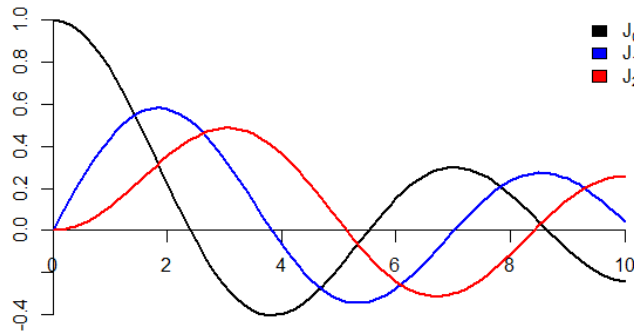


Abbildung 1: Besselfunktionen erster Art

**Beispiel 1.1.** Betrachten wir die ersten vier Summanden der Besselfunktionen der Ordnungen Null und Eins.

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 4} + \frac{x^5}{2^2 4^2 6} - \frac{x^7}{2^2 4^2 6^2 8} \dots$$

**Satz 1.1.** (Rekursionsformeln) Für  $n \in \mathbb{Z}$  gelten die Rekursionen

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} J_n(x) \\ J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) &= 2J'_n(x). \end{aligned}$$

*Beweis.* Verwenden wir die Funktion von Beginn des Kapitels und deren Darstellung als Laurentreihe,

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n.$$

Ableiten nach  $t$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) n t^{n-1}, \\ \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) n t^{n-1}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die erste Rekursion. Leiten wir nach  $x$  statt nach  $t$  ab, so erhalten wir die zweite Rekursion. □

**Bemerkung 1.1.** Addieren bzw. subtrahieren wir die beiden Gleichungen aus Satz 1.1, so erhalten wir

$$\begin{aligned} xJ'_n(x) + nJ_n(x) &= xJ_{n-1}(x) \\ xJ'_n(x) - nJ_n(x) &= -xJ_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Mit der Produktregel berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n J_n(x) &= nx^{n-1} J_n(x) + x^n J'_n(x) \\ &= x^{n-1} (nJ_n(x) + xJ'_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \\ \frac{d}{dx} x^{-n} J_n(x) &= -nx^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J'_n(x) \\ &= x^{-n-1} (-nJ_n(x) + xJ'_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left( x^{1-2n} \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] \right) = -x^{1-n} J_n(x).$$



Verwenden wir für die linke Seite die Produktregel, so erhalten wir die Gleichung

$$(1 - n)x^{-n}J'_n(x) + x^{1-n}J''_n(x) - n^2x^{-n-1}J_n(x) + nx^{-n}J'_n(x) = -x^{1-n}J_n(x).$$

Weiteres Umformen ergibt die sogenannte **Besselsche Differentialgleichung**:

$$x^2J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung erlaubt es uns nun, den Begriff der Ordnung auf reelle Zahlen auszudehnen.

**Definition 1.1.** Sei  $\nu \in \mathbb{R}$ . Die Besselsche Differentialgleichung ist gegeben durch

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0.$$

Eine Funktion  $y$ , welche die Besselsche Differentialgleichung löst, nennt man Besselfunktion der Ordnung  $\nu$ .

**Bemerkung 1.2.** Wir kennen bereits  $J_n(x)$  für ganzzahlige Ordnungen in Form der Reihendarstellung (1). Um diese Darstellung zu verallgemeinern, nutzen wir die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

und ihre Eigenschaft  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ .

Nachrechnen ergibt, dass die Funktion

$$J_\nu(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)!} \text{ für } \nu \in \mathbb{R}$$

die zugehörige Besselsche Differentialgleichung löst. Wir nennen  $J_\nu(x)$  die Besselfunktion erster Art der Ordnung  $\nu$ .

Bei der Besselschen Differentialgleichung handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Um alle Lösungen beschreiben zu können, benötigen wir eine weitere Lösung, die von  $J_\nu(x)$  linear unabhängig ist (im Sinne der Wronski-Determinante). Ist  $\nu$  keine ganze Zahl, so sind  $J_\nu(x)$  und  $J_{-\nu}(x)$  unabhängig. Dies ist aber offensichtlich falsch für ganzzahlige  $\nu$ . Für die Wahl der zweiten Lösung gibt es mehrere Möglichkeiten, z. B. die Hankelfunktionen. In der Literatur wird jedoch häufiger auf die sogenannte

**Weber-Funktion** zurückgegriffen. Für nicht ganzzahliges  $\nu$  ist sie gegeben durch

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

und für  $\nu \in \mathbb{Z}$  setzt man die Funktion durch den Grenzwert stetig fort. Wir nennen  $Y_\nu(x)$  auch **die Besselfunktion zweiter Art der Ordnung  $\nu$** .

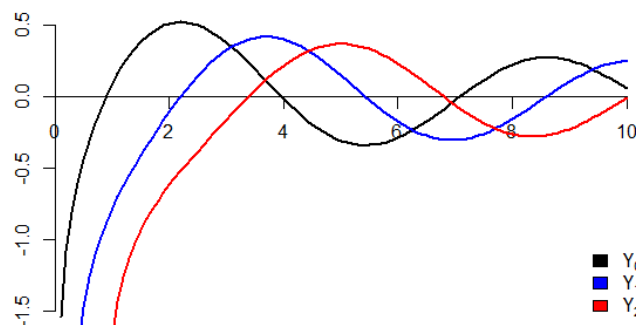


Abbildung 2: Besselfunktionen zweiter Art

Diese beiden Funktionen bilden nun ein Fundamentalsystem der Besselschen Differentialgleichung, d. h. wir können für jede Lösung  $f(x)$  Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  finden, sodass

$$f(x) = \alpha_1 J_\nu(x) + \alpha_2 Y_\nu(x)$$

gilt.

## 1.2 Modifizierte Besselfunktionen

In der Physik ist man häufig mit folgendem Problem konfrontiert:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + \nu^2)y(x) = 0. \quad (3)$$

Diese Differentialgleichung ähnelt der Besselschen Differentialgleichung sehr. Der Unterschied besteht darin, dass im letzten Term  $x^2$  durch  $(-x^2)$  ausgetauscht wurde. Wir versuchen eine Lösung zu finden und zwar mit folgender Idee:

$$J_\nu(ix) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k i^{2k+\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)!} = i^\nu \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)!}.$$

Das Ergebnis stellt leider keine reelle Funktion dar, weswegen wir noch einen Normierungsterm verwenden müssen. Wir definieren die sogenannte **modifizierte Besselfunktion erster Art der Ordnung  $\nu$**  als

$$I_\nu(x) := i^{-\nu} J_\nu(ix) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(ix).$$

In der englischen Literatur wird die Formulierung **Bessel functions of purely imaginary argument** verwendet. Diese Funktion weist nun keine Periodizität mehr auf, wie man in Abbildung 3 sieht, sondern eher ein exponentielles Verhalten.

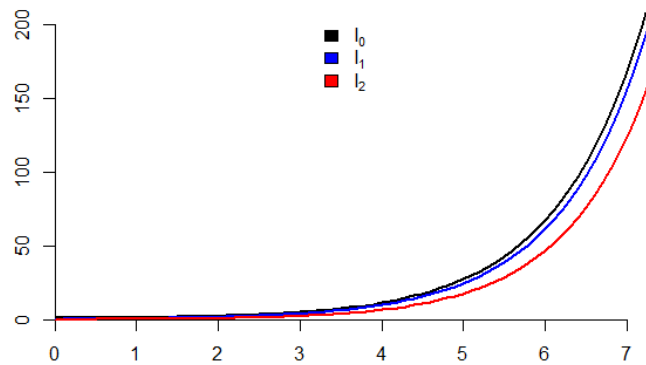


Abbildung 3: modifizierte Besselfunktionen erster Art

**Bemerkung 1.3.** Die modifizierte Besselfunktion löst obige Differentialgleichung, aber auch hier benötigen wir wieder eine zweite linear unabhängige Lösung. Wir nutzen die sogenannte **Macdonald Funktion**:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \text{ für } \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) \text{ für } n \in \mathbb{Z},$$

die wir als **modifizierte Besselfunktion zweiter Art der Ordnung  $\nu$**  bezeichnen. Die modifizierten Besselfunktionen  $I_\nu(x)$  und  $K_\nu(x)$  bilden nun für die Differentialgleichung (3) ein Fundamentalsystem und wir können jede Lösung als Linearkombination dieser beiden Funktionen darstellen.

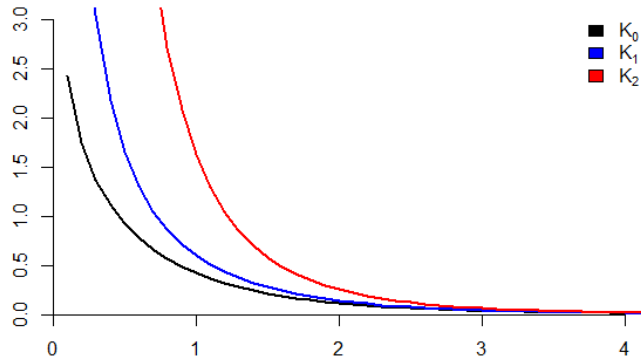


Abbildung 4: modifizierte Besselfunktionen zweiter Art

**Bemerkung 1.4.** Wir führen einige Eigenschaften der modifizierten Besselfunktionen an. Die zugehörigen Beweise kann man in [Wat44] nachlesen.

(Rekursionen)

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x), \quad K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x),$$

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_{\nu}(x), \quad K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_{\nu}(x),$$

$$xI'_{\nu}(x) + \nu I_{\nu}(x) = xI_{\nu-1}(x), \quad xK'_{\nu}(x) + \nu K_{\nu}(x) = -xK_{\nu-1}(x),$$

$$xI'_{\nu}(x) - \nu I_{\nu}(x) = xI_{\nu+1}(x), \quad xK'_{\nu}(x) - \nu K_{\nu}(x) = -xK_{\nu+1}(x).$$

(Asymptotisches Verhalten)

$$I_{\nu}(z) \sim \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \text{ für } z \rightarrow 0, \nu > -1$$

$$K_{\nu}(z) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \text{ für } z \rightarrow 0, \nu > 0$$

$$K_0(z) \sim -\log z \text{ für } z \rightarrow 0.$$

### 1.3 Gegenbauerpolynome

Wir betrachten die Funktion

$$G^\lambda(x, z) := (1 - 2xz + z^2)^{-\lambda}$$

mit  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x \in [-1, 1]$  und  $z \in \mathbb{C}$ , wobei  $|z| < 1$  gilt. In diesem Bereich stellt  $G^\lambda(x, z)$  eine holomorphe Funktion in  $z$  dar und wir können sie als Potenzreihe schreiben:

$$G^\lambda(x, z) = \sum_{n \geq 0} C_n^\lambda(x) z^n.$$

Der Koeffizient  $C_n^\lambda(x)$  ist **das Gegenbauerpolynom der Ordnung  $\lambda$  vom Grade  $n$** . Mithilfe des verallgemeinerten binomischen Lehrsatzes können wir die Polynome berechnen.

$$\begin{aligned} (1 - 2xz + z^2)^{-\lambda} &= (1 - z(2x + z))^{-\lambda} = \sum_{k \geq 0} \binom{-\lambda}{k} z^k (z - 2x)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \binom{-\lambda}{k} z^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^{k-j} (-2x)^j = \dots \end{aligned}$$

Substituieren wir  $n = 2k - j$  und  $m = k - j$ , so ergibt sich

$$= \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{-\lambda}{n-m} \binom{n-m}{n-2m} (-2x)^{n-2m}.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich gelangen wir zur folgenden Definition.

**Definition 1.2.** Das Gegenbauerpolynom der Ordnung  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  vom Grade  $n \in \mathbb{N}_0$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(x) &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{-\lambda}{n-m} \binom{n-m}{n-2m} (-2x)^{n-2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+n-m-1)}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\lambda+n-m)}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $G^\lambda(x, z) := (1 - 2xz + z^2)^{-\lambda}$  bezeichnen wir als erzeugende Funktion der Gegenbauerpolynome  $C_n^\lambda(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

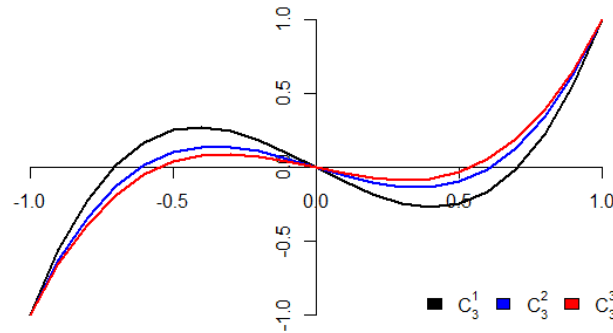


Abbildung 5: Normiertes Gegenbauerpolynom  $C_3^\lambda$  für unterschiedliche Ordnungen  $\lambda = 1, 2, 3$ .

**Beispiel 1.2.** Für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  führen wir ein paar konkrete Gegenbauerpolynome an:

$$\begin{aligned}
 C_0^\lambda(x) &= 1, \\
 C_1^\lambda(x) &= 2\lambda x, \\
 C_2^\lambda(x) &= -\lambda + 2\lambda(1 + \lambda)x^2, \\
 C_3^\lambda(x) &= -2\lambda(\lambda + 1)x + \frac{4}{3}\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)x^3.
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.5.** Wir wollen an dieser Stelle die Tschebyschowpolynome (erster Art) erwähnen. Sie werden durch die Funktion

$$\frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n \geq 0} T_n(x)z^n \tag{4}$$

erzeugt. Die ersten drei Polynome sind

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 1, \\
 T_1 &= x, \\
 T_2 &= 2x^2 - 1.
 \end{aligned}$$

Für die Tschebyschowpolynome gilt die Rekursion

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

und für einen Winkel  $\theta$  gilt

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

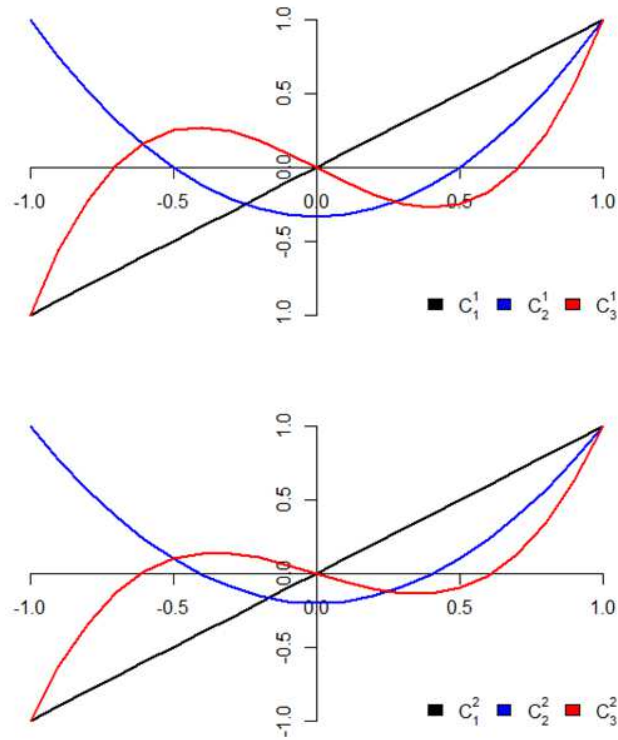


Abbildung 6: Normierte Gegenbauerpolynome für Ordnungen  $\lambda = 1$  bzw.  $\lambda = 2$

Für  $x \in [-1, 1]$  sind die Polynome  $T_n(x)$  orthogonal bezüglich des Skalarproduktes:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Wir wollen nun auch Gegenbauerpolynome für die Ordnung  $\lambda = 0$  definieren. Dazu benötigen wir eine andere erzeugende Funktion, die wir als Potenzreihe darstellen.

$$G^0(x, z) := 1 - \log(1 - 2xz + z^2) = \sum_{n \geq 0} C_n^0 z^n$$

mit  $x \in [-1, 1]$  und  $z \in \mathbb{C}$ , wobei  $|z| < 1$  gilt. Leiten wir die letzte Gleichung nach  $z$  ab, so ergibt sich

$$\frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2} C_n^0(x) z^n.$$

Die Funktion links ist die erzeugende Funktion der Tschebyschowpolynome, mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} C_0^0(x) &:= T_0(x), \\ C_n^0(x) &:= \frac{2}{n} T_n(x) \text{ für } n > 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.6.** An dieser Stelle seien folgende Punkte erwähnt:

- (1) Häufig werden die Gegenbauerpolynome in normierter Form angegeben, d. h. es soll

$$C_n^\lambda(1) = 1$$

gelten. Dies erreichen wir, indem wir durch den entsprechenden Wert dividieren:

$$\tilde{C}_n^\lambda(x) := \frac{C_n^\lambda(x)}{C_n^\lambda(1)}.$$

Wir betrachten das Gegenbauerpolynom  $C_n^\lambda$  ab sofort als bereits normiert.

- (2) Fixieren wir  $\lambda > -\frac{1}{2}$ , dann gilt für  $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$  mit  $\nu \neq \mu$

$$\begin{aligned} \langle C_\nu^\lambda, C_\mu^\lambda \rangle &= 0, \text{ wobei} \\ \langle f, g \rangle &:= \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \cdot (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Das heißt, dass die Gegenbauerpolynome orthogonal zueinander sind bezüglich obigen Skalarproduktes.



## 2 Trefferwahrscheinlichkeiten

In diesem Kapitel geht es um eine  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung  $(X_t)_{t \geq 0}$  mit Drift  $c$  und Varianz  $\sigma = 1$ ,

$$X_t = x + B_t + ct.$$

Dabei bezeichnet  $B_t$  eine standardisierte Brownsche Bewegung, startend in 0. Wir interessieren uns für die Trefferwahrscheinlichkeit  $T$  einer Sphäre um den Ursprung mit Radius  $R > 0$ ,

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = R\}.$$

Der Startvektor der Brownschen Bewegung  $X_0 = x$  ist dabei flexibel, darum müssen wir die Fälle eines Treffers von innen wie auch von außen getrennt betrachten.

Die folgenden Resultate werden sich als hilfreich herausstellen.

**Lemma 2.1.** Für  $w = \sqrt{Z^2 + z^2 - 2Zz \cos \phi}$  gilt

$$\frac{K_\nu(w)}{w^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{K_{\nu+m}(Z)}{Z^\nu} \frac{I_{\nu+m}(z)}{z^\nu} C_m^\nu(\cos \phi). \quad (5)$$

*Beweis.* Siehe [Wat44, S. 365]. □

**Lemma 2.2.** Für  $z \in \mathbb{R}$  und  $-1 \leq u \leq 1$  gilt

$$e^{zu} = \begin{cases} \Gamma(h) \left(\frac{z}{2}\right)^{-h} \sum_{m=0}^{\infty} (m+h) I_{m+h}(z) C_m^h(u) & \text{für } h > 0 \quad (6) \\ \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m T_m(u) I_m(z) & \text{für } h = 0 \quad (7) \end{cases}$$

wobei  $\epsilon_m = 1$  für  $m = 0$  und  $\epsilon_m = 2$  für  $m > 0$ .

*Beweis.* Siehe [Wat44, S. 369]. □

Das Hauptwerkzeug, um die Trefferwahrscheinlichkeiten zu ermitteln, ist die **Laplace-Gegenbauer-Transformation** (LGT). Zunächst definieren wir diese. Die darauf folgenden Aussagen dienen dem besseren Verständnis.

Mit  $\theta_t = \angle x X_t$  bezeichnen wir den Winkel zwischen den Vektoren  $x$  und  $X_t$ . Ist  $x = 0$  wählen wir einen beliebigen, aber fixen Vektor  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und verwenden stattdessen den Winkel zwischen  $z$  und  $X_t$ . Außerdem benötigen wir die fixe Konstante  $h := \frac{d-2}{2}$ , wobei wir von der Dimension  $d > 2$  ausgehen.

**Definition 2.1.** Die Erwartungswerte

$$E \left[ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\beta^2 T - c \cdot X_T} C_m^h(\cos \theta_T) \right], \beta > 0, m \in \mathbb{N}_0$$

werden als Laplace-Gegenbauer-Transformation bezeichnet. Dabei fassen wir den Term  $\exp\left(-\left(\frac{1}{2}\right)\beta^2 T - c \cdot X_T\right) C_m^h(\cos \theta_T)$  als Null auf, falls  $T$  den Wert unendlich annimmt.

**Bemerkung 2.1.** Hier ist darauf zu achten, dass es sich bei der LGT nicht nur um einen einzigen Erwartungswert handelt. Für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  wird ein solcher gebildet. Diese Menge an Werten legt die gemeinsame Verteilung des Trefferzeitpunkts und Trefferorts,  $(T, X_T)$  eindeutig fest - ähnlich wie die Verteilung einer Zufallsvariable in gewissen Situationen von ihren Momenten eindeutig festgelegt wird.

In der jetzigen Form ist die LGT für uns unpraktisch und nicht handhabbar. Wie sich zeigt, ist es möglich, die Erwartungswerte konkret auszurechnen. Im folgenden Theorem ist darauf zu achten, dass wir nicht den Winkel bezüglich des Startvektors  $x$  verwenden, sondern einen allgemeinen Vektor  $z$ .

**Theorem 2.3.** Sei  $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  ein beliebiger, aber fixer Vektor.

(1) (Treffer von innen) Für  $0 < |x| < R < |z|$  erhalten wir

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\beta^2 T - c \cdot X_T} C_m^h(\cos \angle z X_T) \right] \\ = e^{-c \cdot x} \left( \frac{R}{|x|} \right)^h \frac{I_{m+h}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2} |x|)}{I_{m+h}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2} R)} C_m^h(\cos \angle z x). \end{aligned}$$

(2) Für  $x = 0$  erhalten wir

$$E \left[ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\beta^2 T - c \cdot X_T} C_m^h(\cos \angle z X_T) \right] = \begin{cases} \frac{(R\sqrt{\beta^2 + |c|^2})^h}{2^h \Gamma(h+1) I_h(\sqrt{\beta^2 + |c|^2} R)}, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

(3) (Treffer von außen) Für  $0 < |z| < R < |x|$  erhalten wir

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\beta^2 T - c \cdot X_T} C_m^h(\cos \angle z X_T) \right] \\ = e^{-c \cdot x} \left( \frac{R}{|x|} \right)^h \frac{K_{m+h}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2} |x|)}{K_{m+h}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2} R)} C_m^h(\cos \angle z x). \end{aligned}$$

*Beweis.*

(1) Wählen wir  $\lambda > |c|$  und betrachten die Hilfsfunktion

$$U(t, x) = e^{-\frac{1}{2}t(\lambda^2 - |c|^2) - c \cdot x} \frac{K_h(\lambda|x - z|)}{(\lambda|x - z|)^h}.$$

Diese Hilfsfunktion erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta U + c \cdot \nabla U = 0.$$

An dieser Stelle wiederholen wir die mehrdimensionale Ito-Formel:

Sei  $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  und  $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^1, \dots, X_t^d)_{t \geq 0}$  ein stetiges Semimartingal, dann gilt:

$$dF(X_t) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_t) dX_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(X_t) d[X^j, X^k]_t,$$

wobei wir mit  $[X^j, X^k]$  die quadratische Variation der Komponenten  $X^j$  und  $X^k$  bezeichnen.

Wenden wir nun die Ito-Formel auf  $U(t, X_t)$  an, wobei  $X_t = x + B_t + ct$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} dU(t, X_t) &= \frac{\partial U(t, X_t)}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^d \frac{\partial U(t, X_t)}{\partial x_j} dX_t^j \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 U(t, X_t)}{\partial x_k \partial x_k} d[X^j, X^k]_t. \end{aligned}$$

Benutzen wir  $dX_s^j = dB_s^j + c_j dt$  und  $d[X^j, X^k]_t = 0$  für  $j \neq k$  bzw.  $d[X^j, X^k]_t = dt$  für  $j = k$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} dU(t, X_t) &= \frac{\partial U(t, X_t)}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^d \frac{\partial U(t, X_t)}{\partial x_j} dB_t^j \\ &\quad + \sum_{j=1}^d c_j \frac{\partial U(t, X_t)}{\partial x_j} dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U(t, X_t)}{\partial x_j^2} dt \\ &= \left( \underbrace{\frac{\partial U(t, X_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta U(t, X_t) + c \cdot \nabla U(t, X_t)}_{=0} \right) dt + \sum_{j=1}^d \frac{\partial U(t, X_t)}{\partial x_j} dB_t^j. \end{aligned}$$

Somit ist  $U(t, X_t)$  ein Martingal und wir können das Optional Stopping Theorem anwenden, d. h.

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)T(\lambda^2 - |c|^2) - c \cdot X_T} \frac{K_h(\lambda|X_T - z|)}{(\lambda|X_T - z|)^h} \right] &= E[U(T, X_T)] \\ &= E[U(0, X_0)] = e^{-c \cdot x} \frac{K_h(\lambda|x - z|)}{(\lambda|x - z|)^h}. \end{aligned}$$

Wenden wir nun Lemma 2.1 auf die letzte Gleichung an, wobei wir  $w = \lambda|x - z| = \sqrt{|\lambda x|^2 + |\lambda z|^2 - 2|\lambda x||\lambda z|\cos(\angle zx)}$  wählen.

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)T(\lambda^2 - |c|^2) - c \cdot X_T} 2^h \Gamma(h) \right. \\ \left. \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (h+m) \frac{K_{h+m}(|\lambda z|)}{|\lambda z|^h} \frac{I_{h+m}(|\lambda X_T|)}{|\lambda X_T|^h} C_m^h(\cos \angle zx) \right] \\ = e^{-c \cdot x} 2^h \Gamma(h) \sum_{m=0}^{\infty} (h+m) \frac{K_{h+m}(|\lambda z|)}{|\lambda z|^h} \frac{I_{h+m}(|\lambda x|)}{|\lambda x|^h} C_m^h(\cos \angle zx) \end{aligned}$$

Vertauschen wir Summe und Erwartungswert und vergleichen die Koeffizienten von  $K_{h+m}(\lambda|z|)$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)T(\lambda^2 - |c|^2) - c \cdot X_T} \frac{I_{h+m}(|\lambda X_T|)}{|\lambda X_T|^h} C_m^h(\cos \angle zx) \right] \\ = e^{-c \cdot x} \frac{I_{h+m}(|\lambda x|)}{|\lambda x|^h} C_m^h(\cos \angle zx). \end{aligned}$$

Zum Schluss bemerken wir, dass nur der Bereich  $\{|X_T| = R\}$  einen Beitrag zum Erwartungswert liefert und wir können  $|X_T|$  durch  $R$  ersetzen. Ziehen wir alle konstanten Faktoren aus der Erwartung, so folgt

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)T(\lambda^2 - |c|^2) - c \cdot X_T} C_m^h(\cos(\angle zx)) \right] \\ = e^{-c \cdot x} \left( \frac{R}{|x|} \right)^h \frac{I_{h+m}(|\lambda x|)}{I_{h+m}(|\lambda R|)} C_m^h(\cos(\angle zx)). \end{aligned}$$

Der Beweis wird vollendet, indem wir  $\beta^2 := \lambda^2 - |c|^2 > 0$  setzen.

- (2) Sei zunächst  $|x| > 0$ , dann können wir das Resultat aus Fall (1) verwenden. Da wir unsere Berechnungen bereits unabhängig vom Startvektor  $x$  durchgeführt haben, verändert sich die linke Seite nicht, wenn wir  $|x| \searrow 0$  gehen lassen. Für die rechte Seite verwenden wir die Asympto-

tik der Besselfunktionen aus Bemerkung 1.4.

$$\begin{aligned}
& e^{-c \cdot x} \left( \frac{R}{|x|} \right)^h \frac{I_{h+m}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}|x|)}{I_{h+m}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)} C_m^h(\cos(\angle zx)) \\
& \sim \frac{R^h}{|x|^h} \left( \frac{1}{I_{h+m}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)} \right) \left( \frac{(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}|x|)^{h+m}}{2^{h+m}\Gamma(h+m+1)} \right) C_m^h(1) \\
& = \frac{R^h (\sqrt{\beta^2 + |c|^2})^{h+m} |x|^m}{2^{h+m}\Gamma(h+m+1)I_{h+m}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)}
\end{aligned}$$

Für  $m = 0$  ist  $|x|^m = 1$ , ansonsten konvergiert obiger Ausdruck gegen Null.

- (3) Hier funktioniert der Beweis analog zu Fall (1), jedoch vergleichen wir die Koeffizienten von  $I_{m+h}(\lambda|z|)$  statt von  $K_{m+h}(\lambda|z|)$ .

□

Wir wollen nun die LGT in Einzelteile zerlegen. Lassen wir  $\beta$  gegen Null konvergieren, so erhalten wir Folgendes:

#### Korollar 2.4.

- (1) Für  $0 < |x| < R < |z|$  gilt

$$E \left[ e^{-c \cdot X_T} C_m^h(\cos \angle z X_T) \right] = e^{-c \cdot x} \left( \frac{R}{|x|} \right)^h \frac{I_{m+h}(|c||x|)}{I_{m+h}(|c|R)} C_m^h(\cos \angle zx).$$

- (2) Für  $x = 0$  gilt

$$E \left[ e^{-c \cdot X_T} C_m^h(\cos \angle z X_T) \right] = \begin{cases} \frac{(R|c|)^h}{2^h \Gamma(h+1) I_h(|c|R)}, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

- (3) Für  $|x| > R$  und  $|z| < R$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
& E \left[ e^{-c \cdot X_T} C_m^h(\cos \angle z X_T), T < \infty \right] \\
& = e^{-c \cdot x} \left( \frac{R}{|x|} \right)^h \frac{K_{m+h}(|c||x|)}{K_{m+h}(|c|R)} C_m^h(\cos \angle zx).
\end{aligned}$$

□

Dieses Korollar liefert uns gewissermaßen den Erwartungswert des hinteren Teils der LGT. Von größerer Bedeutung ist jedoch der vordere Teil.

**Satz 2.5.** Wir definieren  $G(m, c, x, R) := (m + h)I_{m+h}(|c|R)C_m^h(\cos \angle cx)$  als abkürzende Schreibweise.

(1) Für  $0 < |x| < R$  gilt

$$E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \right] = \begin{cases} e^{-c \cdot x} \frac{2^h \Gamma(h)}{(|c||x|)^h} \sum_{m=0}^{\infty} G(m, c, x, R) \frac{I_{m+h}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}|x|)}{I_{m+h}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)}, & d \geq 3 \\ e^{-c \cdot x} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m I_m(|c|R) \cos(m \angle cx) \frac{I_m(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}|x|)}{I_m(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)}, & d = 2. \end{cases}$$

(2) Für  $x = 0$  gilt

$$E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \right] = \left( \frac{\sqrt{\beta^2 + |c|^2}}{|c|} \right)^h \frac{I_h(|c|R)}{I_h(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)}.$$

(3) Für  $|x| > R$  gilt

$$E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \right] = \begin{cases} e^{-c \cdot x} \frac{2^h \Gamma(h)}{(|c||x|)^h} \sum_{m=0}^{\infty} G(m, c, x, R) \frac{K_{m+h}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}|x|)}{K_{m+h}(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)}, & d \geq 3 \\ e^{-c \cdot x} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m I_m(|c|R) \cos(m \angle cx) \frac{K_m(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}|x|)}{K_m(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)}, & d = 2. \end{cases}$$

*Beweis.* Die Idee ist, obigen Erwartungswert auf die Form der LGT umzumünzen. Dazu schreiben wir das Skalarprodukt mithilfe der Cosinusfunktion,  $c \cdot X_T = |c||X_T| \cos(\angle cX_T)$ . Für den Fall  $0 < |x| < R$  erhalten wir

$$E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \right] = E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T - c \cdot X_T} e^{|c||X_T| \cos(\angle cX_T)} \right].$$

Wir wenden für den letzten Exponentialterm Lemma 2.2 an - zunächst für  $h > 0$  oder gleichbedeutend  $d \geq 3$ :

$$E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \right] = \frac{\Gamma(h)2^h}{|c|^h R^h} \sum_{m=0}^{\infty} (m + h) I_{m+h}(|c|R) E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T - c \cdot X_T} C_m^h(\cos \angle cX_T) \right].$$

Die Berechnung der LGT via Theorem 2.3 führt zum erwarteten Ergebnis. Für den Fall  $h = 0$  verwenden wir die andere Gleichung aus Lemma 2.2. Die Ähnlichkeit der Tschebyschow- und Gegenbauerpolynome (siehe Bemerkung 1.3) erlaubt es uns, auch hier Theorem 2.3 anzuwenden.

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m I_m(|c|R) E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T - c \cdot X_T} T_m(\cos \angle cX_T) \right] \\ &= e^{-c \cdot x} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m I_m(|c|R) \frac{I_m(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}|x|)}{I_m(\sqrt{\beta^2 + |c|^2}R)} \underbrace{T_m(\cos \angle cx)}_{=\cos(m \angle cx)} \end{aligned}$$

Die Fälle  $x = 0$  und  $|x| > 0$  beweist man analog mit dem jeweils passenden Fall von Theorem 2.3.  $\square$

Mithilfe von Satz 2.5 ist es uns nun möglich, die Trefferwahrscheinlichkeit zu berechnen. Es gilt

$$E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \right] = E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \mathbb{1}_{T < \infty} \right] + \underbrace{E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \mathbb{1}_{T = \infty} \right]}_{=0}$$

und damit

$$E \left[ e^{-\frac{1}{2}\beta^2 T} \right] \rightarrow P[T < \infty] \text{ für } \beta \rightarrow 0.$$

Lassen wir  $\beta$  gegen 0 gehen, so erhalten wir das folgende Resultat:

**Korollar 2.6.** Für  $|x| > R$  gilt

$$P[T < \infty] = \begin{cases} e^{-c \cdot x} \frac{2^h \Gamma(h)}{(|c|x)^h} \sum_{m=0}^{\infty} G(m, c, x, R) \frac{K_{m+h}(|c|x)}{K_{m+h}(|c|R)}, & d \geq 3 \\ e^{-c \cdot x} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m I_m(|c|R) \cos(m \angle cx) \frac{K_m(|c|x)}{K_m(|c|R)}, & d = 2. \end{cases}$$

□

**Bemerkung 2.2.** (1) Konvergiert der Drift  $c$  gegen 0, so erhalten wir das bekannte Resultat  $P[T < \infty] = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{d-2}$ .

- (2) Starten wir im Inneren der Sphäre, so stellt sich heraus, dass bei positivem Drift die Trefferwahrscheinlichkeit 1 ist. Dazu verwendet man den passenden Unterpunkt aus Satz 2.5 und Lemma 2.2 liefert die notwendigen Umformungen. Rechnerisch ist es wichtig, dass der Drift positiv ist, denn nur so können wir die LGT anwenden.
- (3) Was passiert wenn der Radius der Sphäre kleiner wird? Die Wahrscheinlichkeit, die Sphäre zu treffen, vermindert sich. Betrachten wir den Fall  $d = 2$ :

$$P[T < \infty] = e^{-c \cdot x} \left[ \frac{K_0(|c|x)}{K_0(|c|R)} + \sum_{m=1}^{\infty} 2 \cdot I_m(|c|R) \cos(m \angle cx) \frac{K_m(|c|x)}{K_m(|c|R)} \right].$$

Lässt man  $R$  gegen 0 konvergieren, so gilt  $K_0(|c|R) \sim -\log(|c|R)$ . Die Summanden höherer Ordnung konvergieren wesentlich schneller gegen 0 (siehe Abbildung 7). Die Trefferwahrscheinlichkeit für kleine Kreise verhält sich demnach folgendermaßen:

$$P[T < \infty] \sim \frac{-e^{-c \cdot x} K_0(|c|x)}{\log(|c|R)} \text{ für } R \rightarrow 0.$$

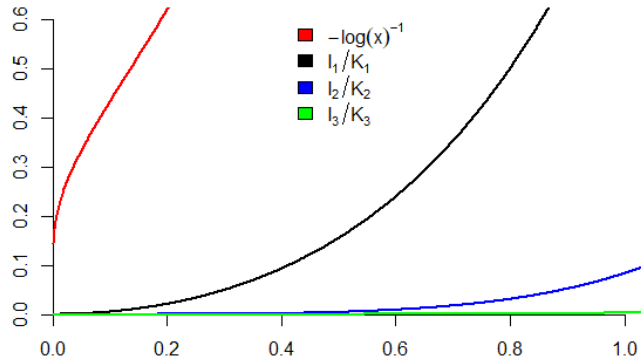


Abbildung 7: Vergleich von  $-\log(x)^{-1}$  und  $I_j(x)/K_j(x)$ .

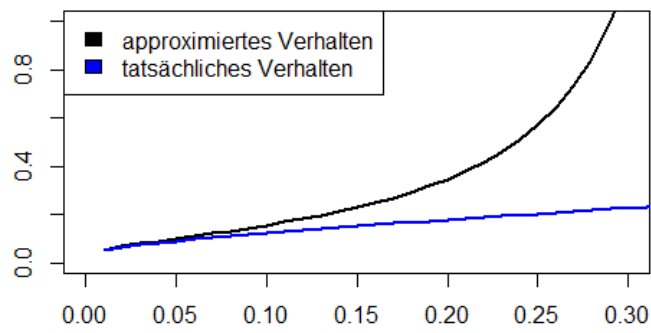


Abbildung 8: Verhalten von  $P[T < \infty]$  und dessen Schätzung aus Bemerkung 2.2 für  $R \rightarrow 0$ .



### 3 Simulation

Wir wollen nun die in Kapitel 2 durchgeführten Berechnungen durch Simulationen veranschaulichen. Dazu benötigen wir zunächst die Brownsche Bewegung, von der wir später mehrere Pfade erzeugen.

#### 3.1 Eindimensionale Brownsche Bewegung

Sei  $X_t = ct + B_t$  eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Drift  $c$ , die in  $X_0 = 0$  startet. Unser Ziel ist es, Werte zu den Zeitpunkten  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  zu simulieren. Dabei sollen die Zeitpunkte gleichmäßig im Intervall  $[0, t_n]$  angeordnet sein, d. h.  $t_{k+1} - t_k = \Delta t$  für  $k = 0, \dots, n-1$ , wobei  $\Delta t > 0$  eine von uns festgelegte Schrittweite bezeichnet. Schreiben wir nun den Prozess zum Zeitpunkt  $t_k$  mithilfe seiner Inkremente.

$$\begin{aligned}
 X_{t_k} &= (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + X_{t_{k-1}} \\
 &= (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + (X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}}) + X_{t_{k-2}} \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} X_{t_{j+1}} - X_{t_j}
 \end{aligned}$$

Diese Summendarstellung der  $(X_{t_k})_{k=0, \dots, n}$  erweist sich als praktisch, da die Inkremente einer Brownschen Bewegung stationär und unabhängig sind. Wir kennen sogar die Verteilung der Inkremente,

$$X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \sim \mathcal{N}(c \cdot (t_{j+1} - t_j), (t_{j+1} - t_j)) = \mathcal{N}(c \cdot \Delta t, \Delta t).$$

Wir erzeugen demzufolge *iid*-Zufallsvariablen  $(Z_k)_{k=1, \dots, n}$  mit Verteilung  $\mathcal{N}(c \cdot \Delta t, \Delta t)$  und summieren diese zum passenden Zeitpunkt auf:

$$\begin{aligned}
 X_{t_k} &= \sum_{j=1}^{k-1} Z_k \text{ für } k = 1, \dots, n \\
 X_0 &= 0.
 \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist es, den Startwert zu verallgemeinern. Dazu ist lediglich eine Translation um den gewünschten Startwert notwendig, d. h.  $(x + X_{t_k})_{k=0, \dots, n}$  ist die Simulation der Brownschen Bewegung, die in  $x$  startet.

#### 3.2 Höherdimensionale Brownsche Bewegung

Die Simulation in höheren Dimensionen können wir komponentenweise arrangieren. Wir simulieren zunächst eine eindimensionale Brownsche Bewegung  $X_t$  mit Drift  $c_1$ , startend in  $x$  und eine weitere, davon unabhängige

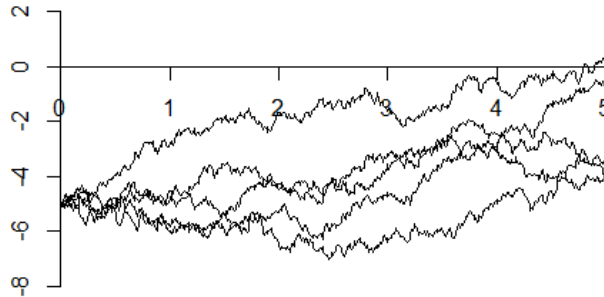


Abbildung 9: Simulation von fünf Pfaden der Brownschen Bewegung mit Start  $x = -5$ , Drift  $c = 0.5$  und  $\Delta t = 0.01$

Brownsche Bewegung  $Y_t$  mit Drift  $c_2$ , startend in  $y$ . Der Vektor  $(X_t, Y_t)$  simuliert dann eine zweidimensionale Brownsche Bewegung mit Drift  $c = (c_1, c_2)$  und Startvektor  $(x, y)$ .

Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall  $d = 2$ . Wir interessieren uns nun für die Approximation der Trefferwahrscheinlichkeit. Dazu erzeugen wir (für einen möglichst großen Endzeitpunkt  $t_n$ ) 100 Pfade. Die Anzahl der Pfade, die einen Kreis mit Radius  $R$  treffen (dividiert durch 100), müssten dann ungefähr mit der berechneten Wahrscheinlichkeit aus Korollar 2.6 übereinstimmen.

Wir führen folgende Notation ein: Wir bezeichnen den Startvektor mit  $(x, y)$ , den Drift mit  $c = (c_1, c_2)$ , die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit mit  $p = P[T < \infty]$  und die simulierte Trefferwahrscheinlichkeit mit  $\hat{p}$ . Die folgenden Listings sind im Syntax der Programmiersprache R formuliert.

Listing 1: Simulation der Trefferwahrscheinlichkeit

```

c1=-1 #drift x
c2=-1 #drift y
x=5 #start
y=5 #start
R=2 #Radius

Dt=1/10
t_n=100000
  
```

```

t = seq(from = 0, to = t_n, by = Dt) # time
Pfade=100

X = matrix(rnorm(n = Pfade * (length(t)-1), mean = Dt*c1,
                sd = sqrt(Dt)), Pfade, (length(t)-1))
Y = matrix(rnorm(n = Pfade * (length(t)-1), mean = Dt*c2,
                sd = sqrt(Dt)), Pfade, (length(t)-1))
X = cbind(rep(0, Pfade), t(apply(X, 1, cumsum)))
Y = cbind(rep(0, Pfade), t(apply(Y, 1, cumsum)))
X = x+X
Y = y+Y

Z=matrix(0,Pfade,length(t))
for(i in 1:Pfade){
  Z[i,]=sqrt(X[i,]^2+Y[i,]^2)
}

v=0 #Anzahl der treffenden Pfade
for(i in 1: Pfade){
  if(min(Z[i,])<=R){
    v=v+1
  }
}

p_hut=v/Pfade

```

**Beispiel 3.1.** Betrachten wir einige Auswertungen des Listings 1:

- (1) Ist  $(x, y) = (-100, 100)$  und  $c = (0.5, -0.5)$ , ergibt sich  $p = 0.2021745$  und  $\hat{p} = 0.19$  und folglich eine Abweichung von 0.01217445.
- (2) Ändern wir im vorhergehenden Punkt (1) den Startvektor  $(x, y) = (-5, 5)$ , so erhalten wir  $p = 0.7619553$  und  $\hat{p} = 0.75$  und damit eine Abweichung von 0.01195529.
- (3) Richten wir im Punkt (1) den Drift neu aus mit  $c = (1, -2)$ , so erhalten wir  $p = 0.6105329$  und  $\hat{p} = 0.60$  und somit eine Abweichung von 0.01053286.

Bei mehrmaliger Durchführung der Simulation lässt sich eine durchschnittliche Abweichung von ca. 0.02 feststellen. Das liegt vermutlich an dem zu geringen Endzeitpunkt.

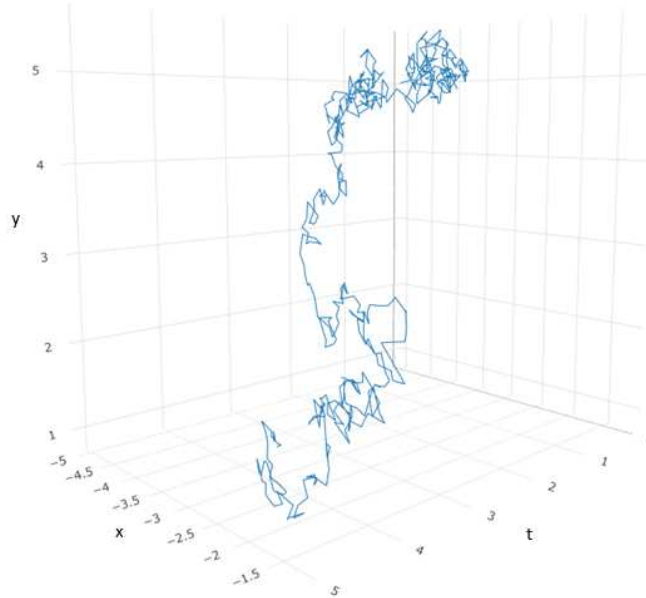


Abbildung 10: Simulation Brownsche Bewegung mit Start  $(x, y) = (-5, 5)$ , Drift  $c = (0.5, -0.5)$  und  $\Delta t = 0.01$

### 3.3 Verschwindender Kreisradius $R$

In Bemerkung 2.2 haben wir das Verhalten der Trefferwahrscheinlichkeit für einen immer kleiner werdenden Radius kennengelernt,

$$P[T < \infty] \sim \frac{-e^{-c \cdot x} K_0(|c||x|)}{\log(|c|R)} \text{ für } R \rightarrow 0. \quad (8)$$

Wir bezeichnen ab sofort die Approximation (8) mit  $A = A(R)$ . Unser Ziel ist es, nun auch in der Simulation den Kreisradius  $R$  gegen 0 gehen zu lassen.

Geht man davon aus, dass unsere Rechenkapazität beschränkt ist (z.B. 100 Pfade zu  $n = 1$  Million Zeitpunkten), so herrscht ein Wechselspiel zwischen Endzeitpunkt  $t_n$  (der möglichst groß sein sollte) und der Schrittweite  $\Delta t$  (die möglichst klein sein sollte). Um kleine Kreise zu treffen, ist es sinnvoller, den Fokus auf eine kleine Schrittweite zu setzen, denn nur so können unsere Pfade einen kleinen Kreis auch treffen. Das Manko des zu kleinen Endzeitpunkts gleichen wir durch einen gut gewählten Startvektor und Drift aus.

**Beispiel 3.2.** Wir wählen den Startvektor  $(x, y) = (1, 1)$ , den Drift  $c = (-0.5, -0.5)$  und bezeichnen, wie auch zuvor, die Trefferwahrscheinlichkeit mit  $p = p(R)$ . Für die Simulation verwenden wir  $t_n = 10$ ,  $\Delta t = 1/100000$

und erzeugen wie gewohnt 100 Pfade. In der Tabelle wird unter  $\hat{p} = \hat{p}(R)$  der durchschnittliche Wert der Simulation angegeben, wobei die Simulation insgesamt 10-mal ausgeführt wurde. Außerdem tabellieren wir die Werte der Approximation  $A$  und die absoluten Abweichungen zur tatsächlichen Trefferwahrscheinlichkeit.

$R$	$p$	$\hat{p}$	$A$	$Fehler(p, \hat{p})$	$Fehler(p, A)$
0.1	0.4054708	0.391	0.43201	0.0144708	0.0265392
0.07	0.3625114	0.352	0.3807473	0.0105114	0.0182359
0.05	0.3288586	0.304	0.3424172	0.0248586	0.0135586
0.03	0.2876008	0.263	0.2970215	0.0246008	0.0094207
0.01	0.2257535	0.202	0.2311232	0.0237535	0.0053697

Je kleiner  $R$  wird, desto größer wird der Fehler zwischen  $p$  und der Simulation  $\hat{p}$ , denn unsere Schrittweite bleibt konstant, während die Kreise verschwinden. Umgekehrt wird die Approximation  $A$  immer besser.

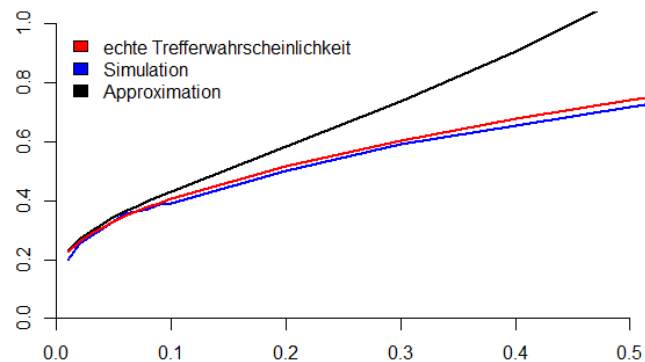


Abbildung 11: Vergleich der Approximation  $A$  und der Simulation  $\hat{p}$  mit der echten Trefferwahrscheinlichkeit  $p$ .

### 3.4 Kontroller für die Vertikale

Wir wollen nun einen Kontrollmechanismus für den vertikalen Drift einbauen. Der Drift des simulierten Prozesses soll stets in Richtung x-Achse zeigen. Für eine zweidimensionale Brownsche Bewegung sei der Drift  $c = (c_1, c_2)$  und der Startvektor  $(x, y)$ . Der vertikale Drift  $c_2$  soll nun die Brownsche Bewegung in Richtung x-Achse ziehen. Wir gehen hier davon aus, dass der Startvektor über der x-Achse liegt und  $c_2 < 0$  ist. Der Prozess, den wir

simulieren möchten, ist dann

$$X_t = x + c_1 \cdot t + W_t^{(1)} \quad (9)$$

$$Y_t = y + c_2 \cdot \int_0^t \operatorname{sgn}(Y_s) ds + W_t^{(2)}, \quad (10)$$

wobei  $(W^{(1)}, W^{(2)})$  eine zweidimensionale, standardisierte Brownsche Bewegung darstellt. Das Integral in der Y-Komponente bewirkt nun eine Anpassung des vertikalen Drifts. Zur Abkürzung schreiben wir im Folgenden  $W$  statt  $W^{(2)}$ .

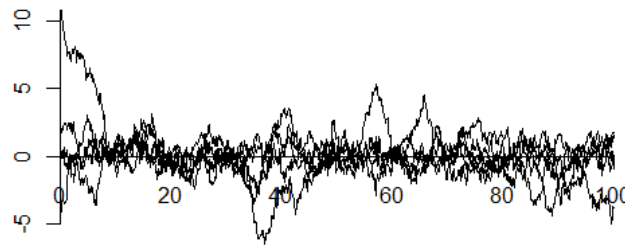


Abbildung 12: Simulation von fünf Pfaden des Prozesses  $Y$ , Start  $y = 10$  und Drift  $c_2 = -0.5$

Nun bauen wir diesen Effekt in die Simulation ein. Dazu betrachten wir die Y-Komponente in Differentialschreibweise:

$$dY_t = c_2 \cdot \operatorname{sgn}(Y_t) dt + dW_t.$$

Wir simulieren den Prozess, indem wir  $Y_0 = y$  setzen und die Inkremente berechnen:

$$(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}) = c_2 \cdot \operatorname{sgn}(Y_{t_k}) \cdot \Delta t + (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), \quad (11)$$

somit

$$(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}) \sim \mathcal{N}(c_2 \cdot \operatorname{sgn}(Y_{t_k}) \cdot \Delta t, \Delta t).$$

Der Prozess  $Y$  wird demnach ähnlich wie eine Brownsche Bewegung simuliert. Der einzige Unterschied ist die Vorzeichenänderung des Drifts, je nach aktuellem Stand des Prozesses. Diese Art der Approximation nennt man

**Euler-Maruyama-Verfahren.** Es stellt eine Verallgemeinerung des Euler-Verfahrens dar und approximiert stochastische Differentialgleichungen der Form

$$dS(t) = b(S(t)) dt + \sigma(S(t)) dW_t$$

$$S(0) = s.$$

Eine Approximation  $S_h(t)$  mit Schrittweite  $h$  wie in (11) konvergiert stark mit Ordnung  $\gamma$ , falls  $E[|S_h(t) - S(t)|]$  von der Ordnung  $O(h^\gamma)$  für  $h \rightarrow 0$  ist. Unter gewissen Voraussetzungen an  $b$  und  $\sigma$  konvergiert das Euler-Maruyama-Verfahren mit Ordnung  $1/2$ , unter der Bedingung  $\sigma = 1$  gilt sogar Ordnung  $1$ . Für eine Reflecting-Brownian-Motion erhält man eine Ordnung von  $1/2$ , wie man in [AGP95] nachlesen kann.

Wir implementieren diesen Kontroller in unsere Simulation, indem wir den Drift immer dann umkehren (negatives Vorzeichen), wenn der eindimensionale Prozess der Y-Komponente das Niveau 0 überquert. Die so erzeugte Trefferwahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit  $\tilde{p}$ .

Listing 2: Simulation der Trefferwahrscheinlichkeit mit Kontroller der Y-Komponente

```

c1=-0.5 #drift x
c2=-0.5 #drift y
x=10 #start
y=10 #start
R=1

Dt=1/10
t_n=100000
t = seq(from = 0, to = t_n, by = Dt) # time
Pfade=100

Drift_normal = matrix(rnorm(n = Pfade * (length(t)-1),
                             mean = Dt*c2, sd = sqrt(Dt)), Pfade, (length(t)-1))
Drift_reversed = matrix(rnorm(n = Pfade * (length(t)-1),
                               mean = -Dt*c2, sd = sqrt(Dt)), Pfade, (length(t)-1))

Y_t=y #aktueller Aufenthaltsort
Y=matrix(y, nrow = Pfade, ncol = length(t))

for(j in 1:Pfade){
  for(i in 1:(length(t)-1)){
    if(Y_t>=0){
      Y_t=Y_t+Drift_normal[j,i]
    }
  }
}

```

```

    }else{
      Y_t=Y_t+Drift_reversed[j,i]
    }
    Y[j,i+1]=Y_t
  }
}

X = matrix(rnorm(n = Pfade * (length(t)-1), mean = Dt*c1,
               sd = sqrt(Dt)), Pfade, (length(t)-1))
X = cbind(rep(0, Pfade), t(apply(X, 1, cumsum)))
X = x+X

Z=matrix(0,Pfade,length(t))
for(i in 1:Pfade){
  Z[i,]=sqrt(X[i,]^2+Y[i,]^2)
}

v=0
for(i in 1: Pfade){
  if(min(Z[i,])<=R){
    v=v+1
  }
}

p_tilde=v/Pfade

```

Wir wollen nun die neue Simulation mit der Funktion  $f(R) := -1/\log(R)$  vergleichen, wie in Abbildung 13 illustriert. Wir wählen den Startvektor  $(x, y) = (0.1, 0.1)$  und den Drift  $c = (-0.2, -0.2)$ . Auf diese Weise können wir  $\Delta t = 1/100000$  und  $t_n = 1$  setzen. Wir erhalten für  $\tilde{p}/f(R)$  folgende Werte:

$R$	$\tilde{p}/f(R)$	$R$	$\tilde{p}/f(R)$
0.1	0.3292697	0.02	0.3325220
0.09	0.3371124	0.01	0.3177567
0.08	0.3308705	0.009	0.3061845
0.07	0.3297482	0.008	0.3090121
0.06	0.3291691	0.007	0.3125962
0.05	0.3355220	0.006	0.3018438
0.04	0.3412008	0.005	0.3073024
0.03	0.3401361	0.004	0.2981589

Wie man erkennt, sind die Konvergenzordnungen von  $\tilde{p}$  und  $f(R)$  für



$R \rightarrow 0$  durchaus vergleichbar. Wir vermuten demzufolge, dass  $\tilde{p}$  mit Ordnung  $\mathcal{O}(-\frac{1}{\log(R)})$  konvergiert.

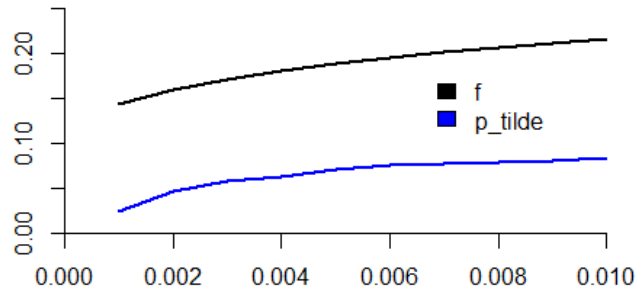


Abbildung 13: Vergleich: Trefferwahrscheinlichkeit aus Listing 2 mit Start  $(x, y) = (0.1, 0.1)$  und Drift  $c = (-0.2, -0.2)$  im Vergleich mit der Funktion  $f(R)$ .

## 4 Das Cramér-Lundberg-Modell

### 4.1 Allgemeine Ruintheorie

Aus der Sicht eines Versicherungsunternehmens müssen unsere eingenommenen Prämien die ausbezahlten Leistungen zumindest decken. Dabei geht man von einem gewissen Anfangsvermögen  $u > 0$  und einer konstanten Prämienrate  $p > 0$  aus. Um den Gesamtbetrag der Schäden zu ermitteln, benötigen wir die Schadensanzahl bis zum Zeitpunkt  $t$  und die Höhe der einzelnen Schäden. Wir treffen die folgenden Annahmen:

- In endlicher Zeit kommt es nur zu endlich vielen Schadensfällen, d. h. die Schadensanzahl  $N_t$  für  $t \in [0, T]$  ist endlich.
- Die Höhe des  $n$ -ten Schadens wird mit  $U_i$  bezeichnet.

Der sogenannte Risikoprozess  $R_t$  lässt sich nun folgendermaßen darstellen:

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \text{ für } t \geq 0.$$

Unser Unternehmen gilt als ruiniert, wenn der Risikoprozess unter Null fällt. Somit ist der Zeitpunkt des Ruins gegeben als

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 \mid R_t < 0\}.$$

Ruin tritt ein, wenn dieser Zeitpunkt in endlicher Zeit erreicht wird. Die Ruinwahrscheinlichkeit ist folglich  $\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty)$ . Wir können die Ruinwahrscheinlichkeit auch direkt mithilfe des Ruinprozesses ausdrücken.

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\inf_{t \geq 0} R_t < 0\right) = \mathbb{P}\left(\inf_{t > 0} R_t < 0 \mid R_0 = u\right)$$

Für einen endlichen Zeithorizont  $T > 0$  bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit  $\psi(u, T) = \mathbb{P}(\tau(u) < T)$  oder anders ausgedrückt

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq t \leq T} R_t < 0\right).$$

Ein wichtiger Prozess ist der Verlustprozess  $S_t$ ,

$$S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - pt,$$

der angibt, in-wie-weit die Prämien die auftretenden Schäden kompensieren. Nutzen wir dessen Maximum, so erhalten wir eine weitere Darstellung für die Ruinwahrscheinlichkeit:

$$M := \sup_{t \geq 0} S_t, \quad \psi(u) = \mathbb{P}(M > 0)$$

bzw.

$$M_T := \sup_{0 \leq t \leq T} S_t, \quad \psi(u, T) = \mathbb{P}(M_T > 0).$$

Wir treffen nun eine wichtige Annahme und zwar gehen wir davon aus, dass eine Konstante existiert, die wir als durchschnittliche Schadensrate interpretieren - genauer formuliert existiert  $\rho$ , sodass

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} U_i \xrightarrow{f.s.} \rho, \text{ für } t \rightarrow \infty$$

gilt. Diese durchschnittliche Schadensrate sollte sich mit der Prämienrate aufwiegen. Der sogenannte Sicherheitszuschlag,

$$\eta := \frac{p - \rho}{\rho},$$

gibt uns an, um wie viel Prozent die Prämienrate die Schadensrate übertrifft (gemessen an der Schadensrate). Dieser Sicherheitszuschlag hat eine zentrale Bedeutung.

**Proposition 4.1.**

*Gilt  $\eta < 0 \Rightarrow \psi(u) = 1$  für alle  $u$ ,*

*Gilt  $\eta > 0 \Rightarrow \psi(u) < 1$  für genügend großes  $u$ .*

*Beweis.* Wegen obiger Annahme gilt

$$\frac{S_t}{t} \xrightarrow{f.s.} \rho - p.$$

Ist nun  $\eta < 0$ , so ist dies äquivalent zu  $\rho - p > 0$  und somit konvergiert  $S_t$  fast sicher gegen unendlich. □

**Bemerkung 4.1.** Auch für  $\eta = 0$  gilt  $\psi(u) = 1$  für ein beliebiges Anfangsvermögen  $u > 0$ , denn  $\limsup_{t \rightarrow \infty} S_t = \infty$ .

## 4.2 Das Modell

Das klassische Modell der Ruintheorie ist das Cramér-Lundberg-Modell. Hier wird der Gesamtschaden durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess beschrieben.

**Definition 4.1.** Existiert für einen stochastischen Prozess  $(Z_t)_{t \geq 0}$  eine Folge von nicht negativen Zufallsvariablen  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass

$$Z_t = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < W_1 \\ \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\} \end{cases}$$

gilt, wobei  $T_n := W_1 + \dots + W_n$ , so ist  $Z_t$  ein Zählprozess. Wir nennen  $W_n$  die Zwischenankunftszeiten und  $T_n$  die Ankunftszeiten des Zählprozesses.

Ein Zählprozess zählt die Anzahl eines Ereignisses, z. B. das Auftreten von Schäden. Wann diese Ereignisse eintreten, wird durch die Ankunftszeiten festgelegt.

**Definition 4.2.** Ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\beta > 0$  ist ein Zählprozess  $(N_t)_{t \geq 0}$  mit càdlàg-Pfaden, der folgende Eigenschaften erfüllt:

- $N_0 = 0$ .
- $(N_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  besitzt unabhängige Inkremente, d. h. für  $0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N}$  sind die Inkremente

$$(N_{t_2} - N_{t_1}), \dots, (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$$

unabhängig.

- $(N_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  besitzt stationäre Inkremente - genauer, für  $t, s \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = n) = e^{-\beta s} \frac{(\beta s)^n}{n!} \text{ für } n = 0, 1, \dots$$

Anders ausgedrückt besitzen die Inkremente  $N_{t+s} - N_t$  eine Poissonverteilung mit dem Parameter  $\beta \cdot s$ .

**Bemerkung 4.2.** Man beachte, dass ein Zählprozess  $Z_t$  mithilfe seiner Zwischenankunftszeiten  $W_i$  dargestellt werden kann,

$$Z_t = |\{i \geq 1 \mid W_i \leq t\}|.$$

Bei einem Poisson-Prozess  $N_t$  mit Intensität  $\beta$  sind diese Zwischenankunftszeiten exponentialverteilt mit Parameter  $\beta$ , denn  $\{W_1 \leq t\} = \{N_t \geq 1\}$ .

Im Cramér-Lundberg-Modell gelten die folgenden Annahmen:

- Die Schadensanzahl  $N_t$  ist ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\beta > 0$ .
- Die Schadenshöhen  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  bilden eine iid-Folge und haben die Verteilungsfunktion  $B$ .
- Die Schadensanzahl  $N_t$  ist unabhängig von der Folge der Schäden  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .
- Für die Prämienrate gilt  $p = 1$ .

Man sagt, der Gesamtschaden  $\sum_{i=1}^{N_t} U_i$  besitzt eine zusammengesetzte Poissonverteilung. Wir wollen nun ein paar Eigenschaften des Poisson-Prozesses  $N_t$  und des Verlustprozesses  $S_t$  angeben.

**Satz 4.2.** (Das Gesetz der großen Zahlen für  $N_t$ ) Sei  $N_t$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\beta > 0$ , dann gilt

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{f.s.} \beta.$$

*Beweis.* Man bedenke zunächst, dass  $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$  für  $n \in \mathbb{N}$  gilt, wobei  $T_n$  die Ankunftszeit des Niveaus  $n$  von  $N_t$  bezeichnet. Darum gilt

$$T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$$

und

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}.$$

Stellt man die Ankunftszeiten als Summe der Zwischenankunftszeiten dar, so besagt das starke Gesetz der großen Zahlen  $n^{-1}T_n \xrightarrow{f.s.} \beta^{-1}$ . Somit erhalten wir

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \xrightarrow{f.s.} \beta^{-1},$$

da  $N(t)$  fast sicher gegen unendlich strebt. Mit obiger Ungleichungskette folgt die Aussage. □

**Bemerkung 4.3.** Der Beweis von Satz 4.2 verwendet die Annahme, dass für zwei Zufallsvariablen  $X, Y$  mit  $X_n \xrightarrow{f.s.} X$  und  $Y \xrightarrow{f.s.} \infty$  auch  $X_Y \xrightarrow{f.s.} X$  gilt. Die Teilmengen des Wahrscheinlichkeitsraumes  $\Omega$ , auf welchen die ersten beiden Konvergenzen stattfinden, besitzen volles Maß, daher auch ihr Schnitt (De-morgansche Regel). Dieser wiederum befindet sich in jener Teilmenge von  $\Omega$ , auf der die letzte Konvergenz stattfindet.

**Satz 4.3.** Sei  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - t$  der Verlustprozess. Wir erhalten die folgenden Eigenschaften:

- (1)  $E[S_t] = t\beta E[U_1] - t$ ,
- (2)  $Var[S_t] = t\beta E[U_1^2]$ ,
- (3)  $S_t/t \xrightarrow{f.s.} \beta E[U_1] - 1$ .

*Beweis.* Für die erste Aussage müssen wir lediglich auf die Schadensanzahl bedingen und deren Unabhängigkeit zur Schadenshöhe ausnutzen.

$$E \left[ \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right] = E \left[ E \left[ \sum_{i=1}^{N_t} U_i \mid N_t \right] \right] = E [N_t E[U_1 \mid N_t]] = E[N_t] \cdot E[U_1]$$

Die zweite Aussage beweist man auf ähnliche Weise. Der letzte Teil folgt aus der Darstellung

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_t} U_i}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} U_i}{N_t} \frac{N_t}{t}$$

und aus der Verwendung von Satz 4.2 und Bemerkung 4.3. □

Satz 4.3 zeigt  $\rho = \beta E[U_1]$ . Unsere durchschnittliche Schadensrate entspricht demnach der Intensität der Schadensanzahl multipliziert mit der durchschnittlichen Schadenshöhe. Außerdem ist unser Sicherheitszuschlag  $\eta = 1/(\beta E[U_1]) - 1$ .

### 4.3 Die Schadenshöhenverteilung

Die Verteilung der einzelnen  $U_i$  ist die Schadenshöhenverteilung. Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion mit  $B(x)$ ,  $x > 0$ . Hier gibt es zwei wichtige Gruppen: Verteilungen mit schweren Rändern (heavy tailed) und Verteilungen mit leichten Rändern (light tailed). Eine Verteilung hat leichte Ränder,

wenn die komplementäre Verteilungsfunktion (der Tail) schnell genug abflacht - genauer formuliert verlangt man  $\bar{B}(x) = 1 - B(x) = \mathcal{O}(e^{-sx})$  für ein  $s > 0$ . Unser Fokus liegt auf jenen Verteilungen mit leichten Rändern.

**Beispiel 4.1.** Einige bekannte Beispiele für Verteilungen mit schweren Rändern sind

- die Lognormal-Verteilung,
- die Pareto-Verteilung und
- die Weibull-Verteilung.

Verteilungen mit leichten Rändern sind z. B.

- die Exponential-Verteilung,
- die Gamma-Verteilung und
- Verteilungen mit beschränktem Träger.

**Satz 4.4.** Sei  $\hat{B}(r) = E[e^{rU_1}]$  die momenterzeugende Funktion der Schäden, dann ist die momenterzeugende Funktion von  $S_t$  gegeben durch

$$E[e^{rS_t}] = e^{t\kappa(r)},$$

wobei  $\kappa(r) = \beta(\hat{B}(r) - 1) - r$  ist.

*Beweis.* Wir benutzen das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit und die Unabhängigkeit der  $U_i$ 's:

$$\begin{aligned}
 E[e^{rS_t}] &= e^{-rt} \sum_{k=0}^{\infty} E[e^{r(U_1 + \dots + U_k)}] \mathbb{P}(N_t = k) \\
 &= e^{-rt} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{B}(r)^k e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} = e^{-rt} e^{-\beta t} e^{\hat{B}(r)\beta t}.
 \end{aligned}$$

□

#### 4.4 Maßwechsel

Für eine Verteilung  $F$  ist die kummulantenerzeugende Funktion  $\kappa(x)$  definiert als

$$\kappa(x) := \log(\hat{F}(x)),$$

wobei  $\hat{F}(x)$  die zugehörige momenterzeugende Funktion von  $F$  bezeichnet.

**Bemerkung 4.4.** Aus Satz 4.4 folgt, dass die kummulantenerzeugende Funktion von  $S_t$  gleich  $t\beta(\hat{B}(x) - 1) - tx$  ist.

**Definition 4.3.** Die Exponential-Familie  $\{F_\theta\}$  der Verteilung  $F$  besteht aus jenen Verteilungen, für die gilt

$$\kappa_\theta(x) = \kappa(x + \theta) - \kappa(\theta)$$

für  $\theta$  so, dass  $\kappa(\theta)$  wohldefiniert ist. Dabei bezeichnet  $\kappa_\theta(x)$  die kummulantenerzeugende Funktion von  $F_\theta$  und  $\kappa(x)$  jene von  $F$ .

Anders ausgedrückt gilt für die Exponential-Familie bezüglich  $F$

$$F_\theta(dx) = e^{\theta x - \kappa(\theta)} F(dx).$$

Indem wir eine neue Intensität  $\beta_\theta$  und Schadenverteilung  $B_\theta$  wählen, wollen wir einen anderen Verlustprozess finden, welcher  $\kappa_\theta$  als kummulantenerzeugende Funktion besitzt. Lösen wir dazu folgendes Problem:

$$\begin{aligned} \kappa_\theta(x) &\stackrel{!}{=} \kappa(x + \theta) - \kappa(\theta) \\ &= t\beta(\hat{B}(x + \theta) - 1) - t(x + \theta) - [t\beta(\hat{B}(\theta) - 1) - t\theta] \\ &= t\beta\hat{B}(x + \theta) - t\beta\hat{B}(\theta) - tx \\ &= t\beta\hat{B}(\theta) \left( \frac{\hat{B}(x + \theta)}{\hat{B}(\theta)} - 1 \right) - tx \stackrel{!}{=} \kappa_\theta(x) = t\beta(\hat{B}(x) - 1) - tx. \end{aligned}$$

Wir benötigen demzufolge

$$\beta_\theta = \beta\hat{B}(\theta), \quad \hat{B}_\theta(x) = \frac{\hat{B}(x + \theta)}{\hat{B}(\theta)}. \quad (12)$$

Der Wechsel auf diese Parameter geschieht über einen Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

**Definition 4.4.** Sei  $\sum_{i=1}^{N_t} U_i$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess bezüglich  $\mathbb{P}$  mit Intensität  $\beta$  und Summandenverteilung  $B$ , dann bezeichnen wir mit  $\mathbb{P}_\theta$  jenes Wahrscheinlichkeitsmaß, mit dem dieser Prozess die Parameter  $\beta_\theta$  und  $B_\theta$  aus (12) aufweist.

Den Zusammenhang zwischen diesen beiden Maßen liefert das folgende Theorem. Für den Beweis verweisen wir auf [AA10, S. 84].



**Theorem 4.5.** Mit  $\kappa(x) = \beta(\hat{B}(x) - 1) - x$  bezeichnen wir die momenterzeugende Funktion von  $S_1$ . Sei  $\mathbb{F}_T = \sigma(S_t : t \leq T)$  die Sigma-algebra, die von  $S_T$  bis zum Zeitpunkt  $T$  erzeugt wird und bezeichne mit  $\mathbb{P}^{(T)} = \mathbb{P}|_{\mathbb{F}_T}$  die Einschränkung auf diese Sigma-algebra, dann sind  $\mathbb{P}_\theta^{(T)}$  und  $\mathbb{P}^{(T)}$  äquivalent auf  $\mathbb{F}_T$  mit Dichte,

$$\frac{d\mathbb{P}^{(T)}}{d\mathbb{P}_\theta^{(T)}} = e^{\theta S_T - T\kappa(\theta)}.$$

Weiters sei  $\tau$  eine Stoppzeit und  $G \in \mathbb{F}_\tau$ ,  $G \subset \{\tau < \infty\}$ , so gilt

$$\mathbb{P}(G) = E_\theta \left[ e^{-\theta S_\tau - \tau\kappa(\theta)} \mathbb{1}_G \right].$$

## 4.5 Der Anpassungskoeffizient

Um den Nutzen eines Geschäfts zu bewerten, verwendet man häufig Nutzenfunktionen. So kann man den Nutzen von Geld oder einer Investition besser abwägen. Es muss gelten, dass Nutzenfunktionen monoton wachsen, denn in der Regel ist mehr (Geld) besser als weniger. Allerdings wird der Nutzen einer Sache weniger, je mehr man davon bereits hat. Mathematisch ausgedrückt ist eine Nutzenfunktion konkav. Wir interessieren uns hier speziell für eine Nutzenfunktion. Der exponentielle Nutzen  $u$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\gamma e^{\gamma x} \text{ für ein } \gamma > 0. \end{aligned}$$

Ein Versicherungsunternehmen besitzt ein Vermögen  $W$  und versichert ein Risiko  $X$ , welches durch eine Zufallsvariable gegeben ist. Als Gegenleistung erhält es die Prämie  $P$ . Der erwartete Nutzen aus diesem Geschäft muss mindestens so groß sein wie der Nutzen der Ausgangssituation, folglich gilt

$$\begin{aligned} E[u(W + P - X)] &= u(W) \\ E[-\gamma e^{-\gamma W} e^{-\gamma P} e^{\gamma X}] &= -\gamma e^{-\gamma W} \\ P &= \frac{1}{\gamma} \log(\hat{B}_X(\gamma)). \end{aligned}$$

Diese Prämie muss das Versicherungsunternehmen mindestens verlangen. Im Cramér-Lundberg-Modell ist das übernommene Risiko gegeben durch

$$X = \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

Die momenterzeugende Funktion lautet

$$\hat{B}_X(\gamma) = e^{\beta t(\hat{B}(\gamma)-1)}.$$

Demnach ist die Exponential-Prämie  $P = \frac{1}{\gamma}\beta t(\hat{B}(\gamma) - 1)$ . Im Cramér-Lundberg-Modell ist die Prämienrate gleich 1, somit erhalten wir

$$t = \frac{1}{\gamma}\beta t(\hat{B}(\gamma) - 1)$$

$$0 = \beta(\hat{B}(\gamma) - 1) - \gamma.$$

Diese letzte Gleichung spielt eine wichtige Rolle in der Ruintheorie.

**Definition 4.5.** Sei  $\kappa(x)$  die kummulantenerzeugende Funktion von  $S_1$ . Die Gleichung

$$0 = \kappa(\gamma) = \beta(\hat{B}(\gamma) - 1) - \gamma$$

wird als die Lundberg-Gleichung bezeichnet. Falls eine positive Lösung  $\gamma > 0$  existiert, so nennen wir diese den Anpassungskoeffizienten bzw. Lundberg-Exponent.

**Bemerkung 4.5.** Häufig wird die Lundberg-Gleichung auch in folgender Form angegeben:

$$\hat{B}(\gamma) = 1 + \frac{\gamma}{\beta}.$$

Da die momenterzeugende Funktion konvex ist und wir hier den Schnitt mit einer linearen Funktion suchen, gibt es maximal zwei Lösungen. Offensichtlich löst 0 die Gleichung, weshalb der Anpassungskoeffizient (sollte er existieren) eindeutig ist.

**Beispiel 4.2.** Betrachten wir  $Exp(\delta)$ -verteilte Schäden  $U_i$ , so erhalten wir als momenterzeugende Funktion  $\hat{B}(x) = \frac{\delta}{\delta-x}$ . Lösen wir daher

$$\frac{\delta}{\delta-\gamma} = 1 + \frac{\gamma}{\beta}$$

$$0 = \gamma \left( \frac{\delta-\gamma}{\beta} - 1 \right).$$

Schließen wir die Lösung  $\gamma = 0$  aus, so bleibt

$$0 = \left( \frac{\delta-\gamma}{\beta} - 1 \right)$$

$$\gamma = \delta - \beta.$$

In diesem Fall gelingt es uns somit den Anpassungskoeffizienten konkret auszurechnen.

Warum der Anpassungskoeffizient so wichtig ist, beantwortet das folgende Theorem. Für den Beweis benötigen wir den Überschussprozess  $\xi(u) := S_{\tau(u)} - u$ , den wir auf  $\{\tau(u) < \infty\}$  definieren. Im Falle des Ruins gibt er uns an, um wie viel der Verlust unser Vermögen übersteigt.

**Theorem 4.6.** *Für alle  $u > 0$  gilt  $\psi(u) \leq e^{-\gamma u}$ .*

*Beweis.* Wir wechseln das Wahrscheinlichkeitsmaß von  $\mathbb{P}$  zu  $\mathbb{P}_\gamma$ . Es gilt demnach  $\kappa_\gamma(x) = \kappa(x + \gamma)$ . Bezüglich  $\mathbb{P}_\gamma$  besitzt  $S_t$  einen positiven Drift, denn es gilt

$$E_\gamma[S_t] = \kappa'_\gamma(0) = \kappa'(\gamma) > 0, \text{ da } \kappa \text{ strikt konvex ist.}$$

Es folgt, dass  $G := \{\tau(u) < \infty\}$  bezüglich  $\mathbb{P}_\gamma$  volles Maß besitzt. Nutzen wir nun Theorem 4.5 und den Überschussprozess,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = E_\gamma [e^{-\gamma S_{\tau(u)}} \mathbb{1}_G] = e^{-\gamma u} E_\gamma [e^{-\gamma \xi(u)} \mathbb{1}_G] \\ &= e^{-\gamma u} E_\gamma [e^{-\gamma \xi(u)}] \leq e^{-\gamma u}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus  $\xi(u) \geq 0$ . □

**Beispiel 4.3.** Betrachten wir wieder den Fall von  $Exp(\delta)$ -verteilten Schäden. Hier kennen wir den Anpassungskoeffizienten bereits,  $\gamma = \delta - \beta$ . Fixieren wir nun einen Zeitpunkt  $t$ . Für den Risikoprozess  $R_t$  gilt

$$E[e^{-\gamma R_t}] = E[e^{-\gamma(u - S_t)}] = e^{-\gamma u} e^{t\kappa(\gamma)} = e^{-\gamma u}.$$

Wir erhalten somit

$$E[e^{-\gamma R_{\tau(u)} | \tau(u) < \infty}] \cdot \psi(u) = e^{-\gamma u}.$$

Nutzt man nun, dass  $(-R_{\tau(u)} | \tau(u) < \infty) \sim Exp(\delta)$ , so ist

$$E[e^{-\gamma R_{\tau(u)} | \tau(u) < \infty}] = \delta / (\delta - \gamma).$$

Einsetzen ergibt  $\psi(u) = \beta / \delta \cdot e^{-(\delta - \beta)u}$ . Dies zeigt uns, dass obige Abschätzung sehr gut ist. Im Allgemeinen kann man die Ruinwahrscheinlichkeit durch  $\psi(u) \stackrel{f.s.}{\sim} C e^{-\gamma u}$  für  $u \rightarrow \infty$  approximieren, wobei  $C$  eine Konstante darstellt.

## 4.6 Diffusions-Approximation

Sei  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein Random walk mit  $E[Z_1] = \mu$  und  $Var(Z_1) = \sigma^2$ , dann besagt Donskers Theorem, dass

$$\left( \frac{1}{\sigma\sqrt{c}} (Z_{[tc]} - tc\mu) \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{D} (W_0(t))_{t \geq 0} \text{ für } c \rightarrow \infty,$$

wobei  $(W_\zeta(t))_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung mit Drift  $\zeta$  und Varianz 1 darstellt. Für den Beweis verweisen wir auf die angegebenen Referenzen in [AA10, S. 139].

Unser Ziel ist es, den Verlustprozess  $S_t$  zu approximieren. Donskers Theorem liefert hierzu die Grundlage, da  $S_t$  einen Random walk in stetiger Zeit (einen Levy-Prozess) darstellt.

**Lemma 4.7.** Für  $t \in [nh, (n+1)h]$  gilt

$$S_{nh} - h \leq S_t \leq S_{(n+1)h} + h.$$

*Beweis.* Zuerst bemerken wir, dass  $S_{u+v} \geq S_u - v$  für  $u, v \geq 0$ , denn  $S_{u+v} - S_u$  wird minimal (mit Wert  $-v$ ), wenn im Intervall  $[u, u+v]$  kein zusätzlicher Schaden entsteht. Insbesondere gilt für  $t = nh + v$  und  $0 \leq v \leq h$

$$S_t \geq S_{nh} - v \geq S_{nh} - h.$$

Analog beweist man die andere Ungleichung. □

Wir gehen erneut von einer allgemeinen Prämienrate  $p$  aus und schreiben  $S_t^{(p)} = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - tp$ . Vermindern wir nun  $p$  so weit, dass  $p$  gegen die kritische Prämienrate  $\rho$  konvergiert, so passiert das Folgende.

**Theorem 4.8.** Es gilt

$$\left( \frac{|\mu|}{\sigma^2} \cdot S_{tc}^{(p)} \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{D} (W_{-1}(t))_{t \geq 0}$$

für  $p \searrow \rho$ , wobei  $\mu = \rho - p$  und  $\sigma^2 = \beta E[U_1^2]$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\left( \frac{1}{\sigma\sqrt{c}} (S_{tc}^{(p)} - tc\mu) \right)_{t \geq 0} = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{c}} (S_{tc}^{(\rho)} - tc\rho) \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{D} (W_0(t))_{t \geq 0},$$

falls  $c = c_p \nearrow \infty$ , sobald  $p \searrow \rho$ . Die Konvergenz folgt aus Donskers Theorem, verknüpft mit Lemma 4.7. Setzen wir nun  $c = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \frac{|\mu|}{\sigma^2} (S_{\frac{t\sigma^2}{\mu^2}}^{(p)} + t) \right)_{t \geq 0} &\xrightarrow{D} (W_0(t))_{t \geq 0}, \\ \left( \frac{|\mu|}{\sigma^2} \cdot S_{\frac{t\sigma^2}{\mu^2}}^{(p)} \right)_{t \geq 0} &\xrightarrow{D} (W_0(t) - t)_{t \geq 0} = (W_{-1}(t))_{t \geq 0}. \end{aligned}$$

□

Der Ruinzeitpunkt ist abhängig von der Prämienrate  $p$ . Es sei  $\tau_p(u) = \inf\{t \geq 0 \mid S_t^{(p)} > u\}$  der Ruinzeitpunkt bei gegebener Prämienrate  $p$ . Formulieren wir die zugehörige Stoppzeit auch für die Brownsche Bewegung,  $\tau_\zeta(u) = \inf\{t \geq 0 \mid W_\zeta(t) > u\}$ , so ist bekannt, dass diese eine Invers-Gauß-Verteilung besitzt - genauer

$$\mathbb{P}(\tau_\zeta(u) \leq x) = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right) + e^{2\zeta u} \Phi\left(-\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right) =: IG(x, \zeta, u).$$

Mit Hilfe des Theorems können wir nun die Verteilung der Ruinwahrscheinlichkeit im endlichen Zeithorizont approximieren.

**Korollar 4.9.** Für  $p \searrow \rho$  erhalten wir  $\psi_p\left(\frac{u\sigma^2}{|\mu|}, \frac{T\sigma^2}{\mu^2}\right) \rightarrow IG(T, -1, u)$ .

*Beweis.* Die Abbildung  $f \rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} f(t)$  ist auf der Menge der Verteilungen fast sicher stetig (bezüglich jedes Wahrscheinlichkeitsmaßes, das sich auf die stetigen Funktionen konzentriert). Da stetige Abbildungen Konvergenz in Verteilung erhalten, folgt

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{|\mu|}{\sigma^2} (S_{\frac{t\sigma^2}{\mu^2}}^{(p)}) \xrightarrow{D} \sup_{0 \leq t \leq T} W_{-1}(t).$$

Die linke Seite besitzt eine stetige Verteilungsfunktion, weshalb die komplementären Verteilungsfunktionen konvergieren. □

Dieses Korollar bekräftigt somit die Approximation:

$$\psi_p(u, T) \approx IG\left(\frac{T\mu^2}{\sigma^2}, -1, \frac{u|\mu|}{\sigma^2}\right).$$

Für  $T \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\psi_p(u) \approx IG\left(\infty, -1, \frac{u|\mu|}{\sigma^2}\right) = e^{-\frac{2u\mu}{\sigma^2}}.$$

## Literatur

- [AA10] ASMUSSEN, Soren ; ALBRECHER, Hansjörg: *Ruin Probabilities* -. Singapur : World Scientific, 2010. – ISBN 978-9-814-28252-9
- [AGP95] ASMUSSEN, S. ; GLYNN, P. ; PITMAN, J.: Discretization error in simulation of one-dimensional reflecting Brownian motion. In: *Ann. Applied Prob.* 5 (1995), S. 875–896
- [Bow10] BOWMAN, Frank: *Introduction to Bessel Functions* -. New York : Dover Publications, 2010. – ISBN 978-0-486-60462-6
- [Gla13] GLASSERMAN, Paul: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* -. Berlin Heidelberg : Springer Science and Business Media, 2013. – ISBN 978-0-387-21617-1
- [Pat18] PATRA, Baidyanath: *An Introduction to Integral Transforms* -. Boca Raton, Fla : CRC Press, 2018. – ISBN 978-0-429-99434-0
- [Rei12] REIMER, Manfred: *Multivariate Polynomial Approximation* -. Basel : Birkhäuser, 2012. – ISBN 978-3-034-88095-4
- [Wat44] WATSON, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* -. Cambridge : Cambridge University Press, 1944. – ISBN 978-0-521-09382-8
- [Yin99] YIN, Chuancun: The joint distribution of the hitting time and place to a sphere or spherical shell for Brownian motion with drift. In: *Statistics & Probability Letters* 42 (1999), Mai, Nr. 4, S. 367–373

## Abbildungsverzeichnis

1	Besselfunktionen erster Art . . . . .	7
2	Besselfunktionen zweiter Art . . . . .	10
3	modifizierte Besselfunktionen erster Art . . . . .	11
4	modifizierte Besselfunktionen zweiter Art . . . . .	12
5	Normiertes Gegenbauerpolynom $C_3^\lambda$ für unterschiedliche Ordnungen $\lambda = 1, 2, 3$ . . . . .	14
6	Normierte Gegenbauerpolynome für Ordnungen $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = 2$ . . . . .	15
7	Vergleich von $-\log(x)^{-1}$ und $I_j(x)/K_j(x)$ . . . . .	24
8	Verhalten von $P[T < \infty]$ und dessen Schätzung aus Bemerkung 2.2 für $R \rightarrow 0$ . . . . .	24
9	Simulation von fünf Pfaden der Brownschen Bewegung mit Start $x = -5$ , Drift $c = 0.5$ und $\Delta t = 0.01$ . . . . .	26
10	Simulation Brownsche Bewegung mit Start $(x, y) = (-5, 5)$ , Drift $c = (0.5, -0.5)$ und $\Delta t = 0.01$ . . . . .	28
11	Vergleich der Approximation $A$ und der Simulation $\hat{p}$ mit der echten Trefferwahrscheinlichkeit $p$ . . . . .	29
12	Simulation von fünf Pfaden des Prozesses $Y$ , Start $y = 10$ und Drift $c_2 = -0.5$ . . . . .	30
13	Vergleich: Trefferwahrscheinlichkeit aus Listing 2 mit Start $(x, y) = (0.1, 0.1)$ und Drift $c = (-0.2, -0.2)$ im Vergleich mit der Funktion $f(R)$ . . . . .	33