

Diplomarbeit

Master's Thesis

Untersuchung des Versagens von Tunnelleibungen unter richtungsbetontem Primärdruck (Kirsch kernversagen) mit Hilfe des Particle Flow Codes PFC^{2D}

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rainer Poisel

E203

Institut für Ingenieurgeologie, TU-Wien

und

Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexander Preh

E203

Institut für Ingenieurgeologie, TU-Wien

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Bauingenieurwesen

Von

Markus Steiner

0215358

Muredastraße 73

I – 39046 St.Ulrich

Wien, im April 2008

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mir bei der Ausarbeitung dieser Arbeit geholfen und mich während dieser Zeit unterstützt haben.

Im Besonderen möchte ich mich bei Univ.Prof.Dipl.Ing.Dr.techn. Rainer Poisel und Uni.Ass.Dipl.Ing.Dr.techn. Alexander Preh bedanken. Ihre Erfahrung auf dem Gebiet der computergestützten Modellierung felsmechanischer Probleme hat es mir ermöglicht, zielgesteuert zu Arbeiten und einen Blick für das Wesentliche zu behalten. Außerdem möchte ich mich bei ihnen bedanken, dass sie stets bereit waren Fragen zu beantworten und unterstützend in die Erstellung dieser Arbeit eingegriffen haben.

Die Zeit, welche ich am Institut verbracht habe, war von einer freundlichen Atmosphäre gekennzeichnet. Die Zusammenarbeit der Institutsmitglieder ist mit ein Grund für die rasche Abwicklung dieser Arbeit. Deshalb möchte ich mich bei allen Institutsmitgliedern herzlich bedanken.

Des Weiteren möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich stets unterstützt hat. Meine Eltern gaben mir die Möglichkeit, mein Studium eigenständig zu planen und erfolgreich abzuschließen. Ihre Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit war für mich von entscheidender Bedeutung.

Ein Dank gebührt auch meiner Freundin und all meinen Freunden. Sie haben jene Zeit mit mir verbracht, in der ich wieder neue Energie für die Erstellung dieser Arbeit tanken konnte, mich auch mal von der Arbeit abgelenkt und beruhigend auf mich eingewirkt.

Kurzfassung

Die steigende Mobilität von Menschen und Gütern stellt immer höhere Anforderung an die Infrastruktur. Diesen Anforderungen kann heutzutage nur durch den Bau von Tunnelbauwerken entgegen werden. Der Bau von Tunnelbauwerken ist jedoch trotz großer Fortschritte in den letzten Jahrzehnten immer noch mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Die Bestimmung der Gebirgsparameter selbst, sowie der Interaktion des Tunnelvortriebes mit dem Gebirge und der Spannungsumlagerung vom Insitu-Spannungszustand bis hin zum Endzustand lassen die Schwierigkeit erahnen, einen Tunnel sicher, kostengünstig und effizient auszuführen.

In dieser Arbeit soll auf jenen Versagensmodus eingegangen werden, welcher mit dem Begriff „Kirschkernelversagen“ gekennzeichnet wird. Es werden mittels eines am Computer generierten Modells jene Parameter untersucht, welche diesen Versagensmodus begünstigen und es wird besonderes Augenmerk darauf gelegt, wie gut sich das Kirschkernelversagen abbilden lässt. Zur Erstellung des Modells wurde das Programm PFC^{2D} (Particle Flow Code 2 Dimensions) der ITASCA CONSULTING GROUP verwendet. PFC ist ein diskontinuumsmechanisches Programm, welches in der Lage ist große Verschiebungen abzubilden. Das untersuchte Modell weist einen Ausbruchsdurchmesser von 10 Metern und eine Überlagerungshöhe, gemessen vom Zentrum des Ausbruches von 80 Metern auf. Die Kohäsion wurde durch Anwendung von zwei unterschiedlichen Bindungsmodellen zwischen den Partikeln modelliert. Die Untersuchungen werden für große Vertikalspannungen und geringe Horizontalspannungen durchgeführt.

Ziel dieser Arbeit ist ein Vergleich zwischen den Berechnungen in PFC mit den von RABCEWICZ und FEDER entwickelten Theorien und mit einer in FLAC durchgeführten Vergleichsrechnung von APFELBAUM. Außerdem wurde durch Anwendung unterschiedlicher Bindungsparameter deren Eignung zur Darstellung des Versagensmodus untersucht. Die Ergebnisse der Modellrechnungen zeigen deutlich die Ausbildung der Kirschkerne. Das Versagen des Querschnittes hat seinen Ursprung im Ulmenbereich. Firste und Sohle bleiben weitgehend unbeeinträchtigt. Beide in PFC^{2D} verwendeten Bindungsparameter sind in der Lage den Versagensmodus abzubilden. Die Untersuchungen mittels PFC haben gezeigt, dass die Verschiebungen in der Firste und in der Sohle außerordentlich gering sind. Für die Praxis bedeutet dies, dass unter den Randbedingungen der Modellrechnung die Ankerung in der Firste und Sohle gering gehalten werden kann. Im Ulmenbereich dagegen müssen die Stützmittel unter Rücksichtnahmen der zu erwartenden Verschiebungen bemessen werden. Dies gilt insbesondere für deren Einbindung in das Gebirge. Untersuchungen des Versagensmechanismus helfen daher, den Verbau (Ausbau) zu dimensionieren, das Messprogramm zu optimieren und die Messergebnisse richtig zu interpretieren.

Abstract

The increasing mobility of people and goods requires high demands on the future infrastructure. To be able to face this demand, a number of tunnels are being build and planned all over the world, in order to avoid having bottlenecks, improper gradients, conform safety regulations or simply shorten the journey time.

Despite big improvements of technology and operation systems in the last decades, driving a tunnel is still connected with considerable difficulties. The definition of the properties of the soil, the interaction of the surrounding soil with the tunnel itself, and the development of the stress level from the primary condition over the construction period and to the final stage, state the problem to drive a tunnel in an efficient way.

The focus of this paper lies in the so called failure mechanism „notching“. The named failure mechanism was analyzed by developing a computer aided model. Further investigations were done to analyze which parameters abet this behavior and how well it can be designed by using the program PFC. The design and calculation of the model was done in PFC^{2D} (Particle Flow Code in 2 dimensions) of ITASCA CONSULTANT GROUP. PFC is a discontinuum program able to calculate and visualize large displacements. The cross-section of the analyzed tunnel has a diameter of 10 meters. Its overburden, measured from the center of the tunnel to the surface, was chosen to be 80 meters. The cohesion between the particles was designed by using two different kinds of bond models. The investigations are accomplished assuming high vertical and low horizontal stress.

The aim of the present paper is to compare the model behavior of the PFC-model with the models developed by RABCEWICZ and FEDER and with a calculation done by APFELBAUM using the program FLAC. APFELBAUM applied the same dimensions of the calculated model. Furthermore it was possible to analyze if the used bond-models suit the calculation and are able to describe the so called failure mechanism „notching“. The results of the calculations show clearly the development of the notches. The origin of the failure of the cross-section lies in the benches. The displacements in the roof and invert are considerably smaller comparing to the displacements in the bench area. Both bond models used in PFC^{2D} are able to describe the failure mechanism. The design of supporting aids must take account of the calculations and the assumed boundary conditions. This means for example that the anchorage in the roof and the invert can be reduced to a minimum. The large displacements in the benches must be considered when choosing the supporting aids in this range. A proper bonding length of the anchors in the intact rock mass must ensure low displacement rates. Thus, the studies of the failure mechanism help to design the supporting aids and the monitoring program and help to interpret the measurements correctly.

INHALTSVERZEICHNIS

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | PROBLEMSTELLUNG UND ZIELSETZUNG | 1 |
| 2 | VERSAGEN VON TUNNELLEIBUNGEN UNTER RICHTUNGSBETONTEM PRIMÄRDRUCK | 3 |
| 3 | NUMERISCHE LÖSUNGSVERFAHREN | 8 |
| 4 | DAS PROGRAMM PFC^{2D} | 9 |
| 4.1 | BERECHNUNGSKREISLAUF | 11 |
| 4.2 | KRAFTVERSchiebungsgesetz | 12 |
| 4.3 | BEWEGUNGSGESETZ | 18 |
| 4.4 | ABSCHÄTZUNG DES KRITISCHEN ZEITSCHRITTES | 20 |
| 4.5 | KONSTITUTIVE BEZIEHUNGEN (KONTAKTMODELLE) | 22 |
| 4.5.1 | <i>Steifigkeitsmodell</i> | 22 |
| 4.5.2 | <i>Gleitmodell</i> | 24 |
| 4.5.3 | <i>Bindungsmodell</i> | 25 |
| 4.6 | MECHANISCHE DÄMPFUNG | 30 |
| 4.6.1 | <i>Lokale nichtviskose Dämpfung</i> | 30 |
| 4.6.2 | <i>Viskose Dämpfung</i> | 31 |
| 4.7 | BESTIMMUNG DER MATERIALPARAMETER | 33 |
| 4.7.1 | <i>Einaxialer Druckversuch</i> | 33 |
| 4.7.2 | <i>Biaxialtest</i> | 34 |
| 4.7.3 | <i>Braziliantest</i> | 35 |
| 5 | MODELLRECHNUNG | 38 |
| 5.1 | PARTIKELGENERIERUNG | 38 |
| 5.2 | BERECHNUNG DER INITIALSPANNUNGEN UND SETZEN DER RANDBEDINGUNGEN | 40 |
| 5.3 | WAHL EINES KONTAKTMODELLS UND DER MATERIALPARAMETER | 41 |
| 5.4 | GRUNDSÄTZLICHES ZUM KALIBRATIONSPROZESS | 41 |
| 5.4.1 | <i>Kontaktbindung</i> | 42 |
| 5.4.2 | <i>Parallelbindung</i> | 47 |
| 6 | BERECHNUNGEN | 51 |
| 7 | KALIBRATIONSPROZESS | 53 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 7.1 | VORGEHENSWEISE | 53 |
| 7.2 | VERWENDUNG DES KONTAKTBINDUNGSMODELLS | 56 |
| 7.2.1 | <i>Ergebnisse</i> | 58 |
| 7.2.2 | <i>Erkenntnisse der Kalibration</i> | 68 |
| 7.3 | VERWENDUNG DES PARALLELBINDUNGSMODELLS | 71 |
| 7.3.1 | <i>Ergebnisse</i> | 73 |
| 7.3.2 | <i>Erkenntnisse der Kalibration</i> | 77 |
| 8 | ERGEBNISSE DER MODELLRECHNUNGEN | 78 |
| 8.1 | KONTAKTBINDUNG | 79 |
| 8.1.1 | <i>Modell 1</i> | 79 |
| 8.1.2 | <i>Modell 2</i> | 82 |
| 8.1.3 | <i>Modell 3</i> | 108 |
| 8.1.4 | <i>Modell 4</i> | 110 |
| 8.1.5 | <i>Modell 5</i> | 125 |
| 8.2 | PARALLELBINDUNG | 129 |
| 8.2.1 | <i>Modell 1</i> | 129 |
| 8.2.2 | <i>Modell 2</i> | 133 |
| 9 | INTERPRETATION | 139 |
| 9.1 | MODELLE MIT KONTAKTBINDUNG | 139 |
| 9.1.1 | <i>Modell 2</i> | 139 |
| 9.1.2 | <i>Modell 4</i> | 140 |
| 9.2 | MODELLE MIT PARALLELBINDUNG | 141 |
| 9.2.1 | <i>Modell 2</i> | 141 |
| 9.3 | VERGLEICH MIT DEN BERECHNUNGEN IN FLAC ^{2D} | 142 |
| 10 | ZUSAMMENFASSUNG | 145 |
| 11 | REFERENZEN | 149 |

1 Problemstellung und Zielsetzung

Trotz der im Tunnelbau in den letzten Jahrzehnten stattgefundenen schnellen Weiterentwicklung und Verbesserung der Methoden und Maschinen, kommt es immer wieder zu unvorhergesehenen Verbrüchen mit oftmals schwerwiegenden Folgen. Das Versagen eines Tunnelbauwerkes kann dabei eine Vielzahl von Ursachen haben. Dies hängt vorwiegend mit den komplexen Eigenschaften des den Hohlraum umgebenden Gebirges zusammen. Eine genaue Bestimmung der Gebirgsparameter für jeden Punkt ist unmöglich. Die Vielfalt an unterschiedlichen Fest- bzw. Lockergesteinen, mit denen man es im Tunnelbau zu tun haben kann, gibt einen Eindruck über die Schwierigkeit, einen Tunnel erfolgreich, kostengünstig und effektiv vorzutreiben. Erschwerend kommt hinzu, dass die Gebirgsparameter nicht nur in sich selbst Unsicherheiten aufweisen, sondern auch die Interaktion des Gebirges mit dem Bauwerk von entscheidender Bedeutung ist, da das Gebirge selbst einen Teil des Bauwerkes darstellt und als Baustoff für das Tunnelbauwerk angesehen werden kann. Diese Überlegungen geben einen Eindruck über die Vielfalt an möglichen Versagensmodi, die im Tunnelbau auftreten können. In dieser Arbeit wird besonders auf den, als Kirschkernelversagen bezeichneten Versagensmodus eingegangen. Es soll auf jene Gegebenheiten fokussiert werden, welche ein derartiges Versagensbild begünstigen. Dabei wird vor allem auf die Möglichkeit der Abbildung dieses Mechanismus mit Hilfe des Programms PFC^{2D} eingegangen.

Als Kirschkernelversagen wird jenes Schadensbild bezeichnet, bei dem das Versagen im Bereich der Ulmen auftritt und zufolge hoher Vertikalspannung keilförmige, durch Scherbrüche begrenzte Bereiche in den Hohlraum gedrückt werden. Abbildung 1 zeigt eine schematische Darstellung des Kirschkernelversagens.

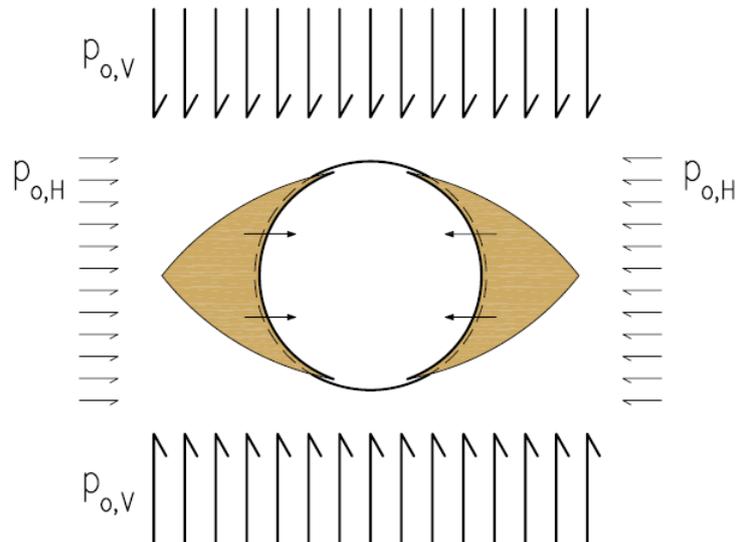


Abbildung 1: Kirschkerneffekt. $p_{o,v}$, Vertikalspannungen; $p_{o,H}$, Horizontalspannungen. Wobei

$$p_{o,v} \gg p_{o,H}$$

Dabei werden zerdrückte Ulmenbereiche („Zwickel“) aufgrund der hohen vertikalen insitu-Spannungen in den Hohlraum gedrückt bzw. gequetscht. Dieses Verhalten ist vergleichbar mit dem Auspressen eines Kirschkerns beim starken Drücken einer Kirsche (überliefert von L. MÜLLER).

SCHUBERT (2006) spricht in seiner Arbeit vom „Kirschkerneffekt“. *In einem Nichtzentralsymmetrischen Spannungszustand, also z.B. bei einem Seitendruckverhältnis $K_1 < 1,0$, bilden sich Bruchzonen im Bereich der Ulmen. Dabei schieben sich, von den Scherbruchflächen und vom Ausbruchrand begrenzte kompakte Blöcke in den Hohlraum („Kirschkerneffekt“). Bei weiterer Steigerung der Beanspruchung kann es durch die Abflachung der Stützlinie und die dadurch entstehende stärkere Krümmung im Ulmenbereich, zur Bildung neuer Scherbrüche bergwärts der bereits entstandenen und gelösten Scherbruchkörper kommen.* Dieses Verhalten schreitet so lange bergwärts fort, bis der Winkel ψ (siehe Abbildung 5) kleiner als der Reibungswinkel zwischen dem zertrümmerten Bereich des Ulmenzwickels und des intakten Gesteins ist.

2 Versagen von Tunnelleibungen unter richtungsbetontem Primärdruck

Die Spannungsumlagerung, welche sich direkt nach Ausbruch des Hohlraumes einstellt, wurde bereits von RABCEWICZ (1964) beschrieben. In seiner Arbeit wurde die Umlagerung bzw. der Versagensmechanismus in drei Stufen eingeteilt (siehe Abbildung 2). Im ersten Schritt bilden sich keilförmige Bruchkörper welche sich normal auf die Hauptdruckspannung in Richtung Hohlraum bewegen (Abbildung 2, I). Dies ist auf Grund der Überschreitung der Mohrschen Scherfestigkeit der Gleitfugen möglich. In einem weiteren Schritt verursacht diese Bewegung ein Anwachsen der Spannungen in den Ulmen und eine Verschiebung der Firste und Sohle in Richtung Hohlraum (Abbildung 2, II). Das ständige Anwachsen der Verschiebungsvektoren in Firste und Sohle in Richtung Mittelpunkt führt schließlich zum Ausknicken des Gebirges in diesen Bereichen (Abbildung 2, III).

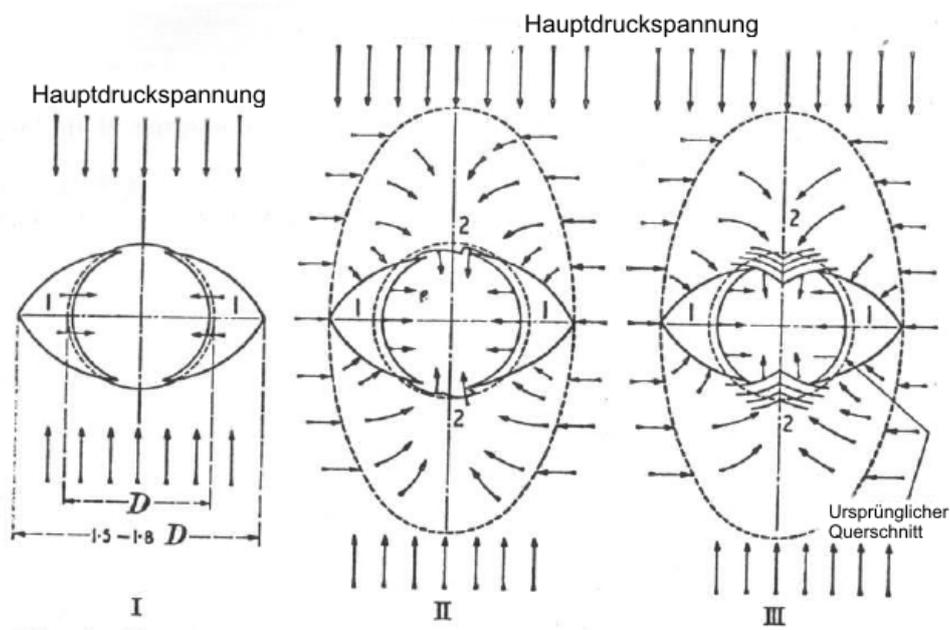


Abbildung 2: Sequenzen des Versagensmechanismus eines unter Richtungsbetontem Primärdruck stehenden kreisrunden Hohlraums. RABCEWICZ (1964)

SATTLER (1965) stellt in seiner Arbeit eine Schubbruchhypothese vor und beschreibt die Spannungsumlagerung nach Ausbruch des Querschnittes unter Berücksichtigung einer bewehrten Spritzbetonschale. Durch die Vermeidung „unzulässiger Auflockerung“, also einem entsprechend raschen Einbau der Spritzbetonschale, ist im umliegenden Gebirge weiterhin ein räumlicher Spannungszustand vorhanden. Die Spritzbetonschale ist somit kontinuierlich gestützt und bildet mit dem umgebenden Gebirge ein untrennbares Ganzes. In einem ersten Schritt verformt sich das Gebirge in Richtung der wirkenden Hauptdruckspannung. Dies führt zu einer vertikalen Verformung der Firste und Sohle. Die Bewegungen erstrecken sich seitlich – an Größe abnehmend – bis weit in das Gebirge hinein. Durch diese, sowohl elastische als auch plastische Verformung, wird die Spritzbetonschale seitlich an die Ulmen gedrückt. Unter der Auflast, dem erhöhten Seitendruck durch den Umlagerungsvorgang und dem passiven Druck der Ulmen (Seitendruck) wird der in Abbildung 3 als Kern bezeichnete Teil vollständig plastifiziert.

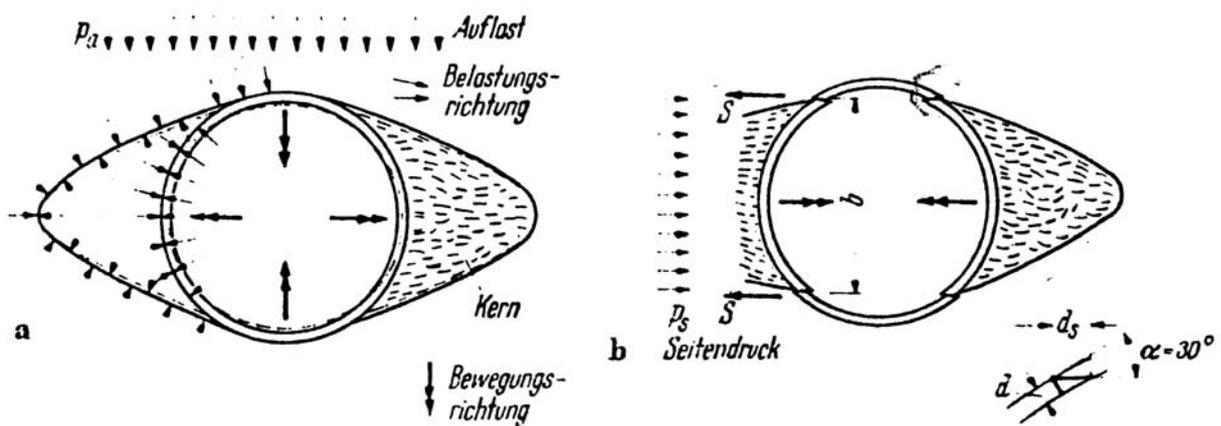


Abbildung 3: Schubbruchhypothese, SATTLER (1965)

Bei einer weiteren Bewegung der Firste und Sohle wird dieser Kern als Ganzes aus den Ulmen gequetscht. Es kommt zu einer Abscherung der Schale am oberen bzw. unteren Ende der Ulmen. Bei ausreichender Dimensionierung der Schale können diese Scherspannungen aufgenommen werden und eine vollständige Beruhigung des Gebirges erreicht werden. Sattler gibt außerdem an, dass der Seitendruck p_s für das Herausquetschen des Kernes maßgebend ist. Ein Schubbruch kann, bei Vorhandensein von großen Druckspannungen, nur unter einem flachen Winkel gegenüber der Normaldruckrichtung erfolgen. Bei Annahme dieses Bruches unter einem Winkel von 30° gegenüber der Radialrichtung ergibt sich die Bruchschubkraft S pro Längeneinheit in Abhängigkeit der Scherbruchspannung τ_{Br} und der Bruchschnittlänge d_s aus der Gleichung 2.1. Die zugehörige Horizontalkraft H des seitlich ausgedrückten Gebirgskernes kann Gleichung 2.2 entnommen werden. Der Seitendruck, welcher zum

Versagen der Schale bei gegebener Schalenstärke d führt, berechnet sich laut Gleichung 2.3. Eine Dimensionierung der Schale unter Berücksichtigung der Horizontalkraft H kann Gleichung 2.4 entnommen werden.

$$S = \tau_{Br} \cdot 2d \quad \text{Gleichung 2.1}$$

$$H = 2 \cdot S \quad \text{Gleichung 2.2}$$

$$p_{s,Br} = \frac{2 \cdot \tau_{Br} \cdot d_s}{b} \quad \text{Gleichung 2.3}$$

$$d_{s,Br} = \frac{H}{2 \cdot \tau_{Br}} \quad \text{Gleichung 2.4}$$

Die eben genannten Beziehungen lassen sich erweitern indem auch eine Verankerung der Spritzbetonschale berücksichtigt wird. Außer dem Scherwiderstand der Schale τ_{Br} wird der Scherwiderstand τ_T des geankerten Gebirgstragringes gemäß Abbildung 4 in Rechnung gestellt, wobei die entsprechenden Scherfestigkeiten den Mohrschen Hüllkurven der einzelnen Gebirgsarten entnommen werden können (RABCEWICZ 1973).

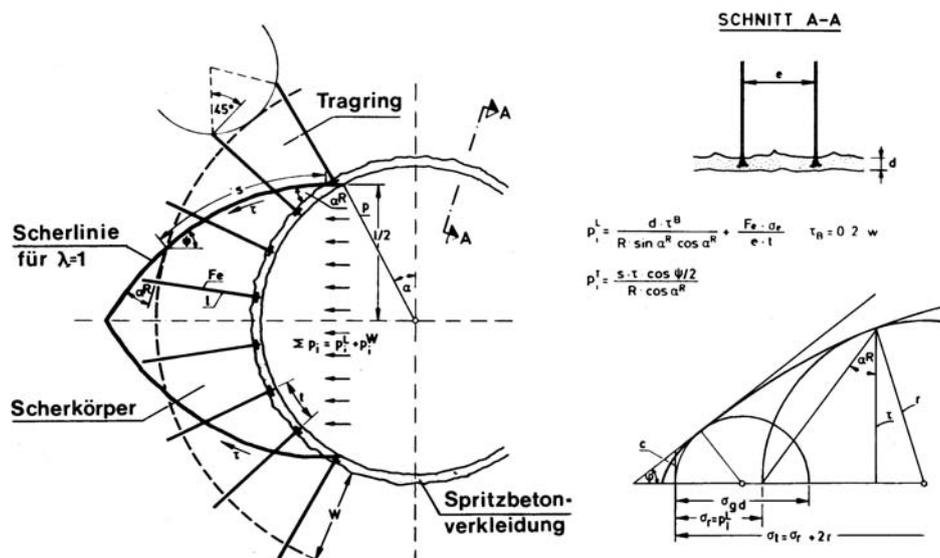


Abbildung 4: Ausquetschen von Scherkeilen aus den Tunnelulmen in Verbindung mit „Scherbruch“ in der Tunnelauskleidung, RABCEWICZ (1973)

Laut FEDER (1977) kann festgestellt werden, dass der Bruchvorgang eines Hohlraumes unter einem gravitativen Insitu-Spannungszustand drei Zustände durchläuft.

- Zustand 1: Radialrisse im First- und Sohlbereich
- Zustand 2: Zermalmen der Ulmenbereiche
- Zustand 3: Scherbruch

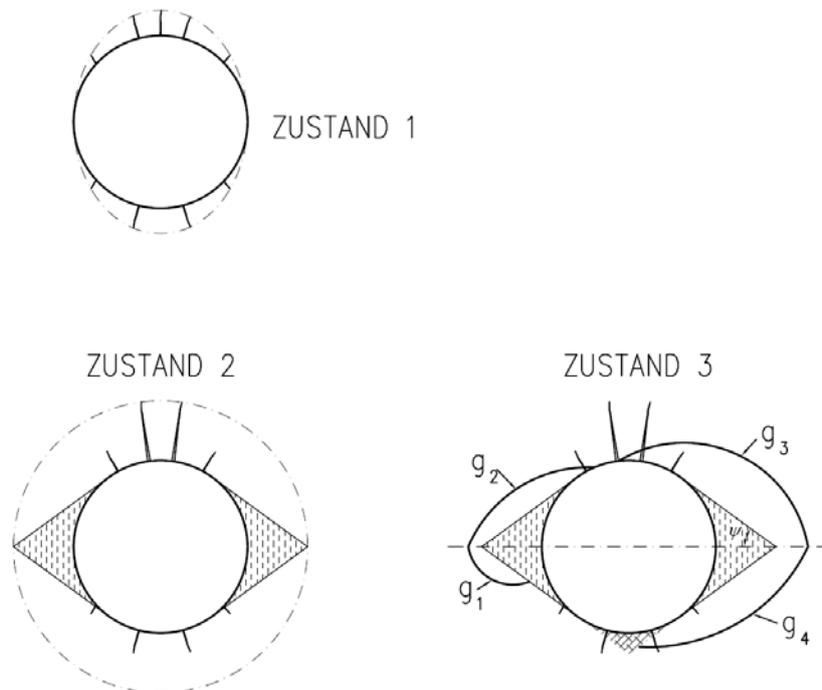


Abbildung 5: Bruchzustände. FEDER (1977, verändert)

Zustand 1 (Abbildung 5) tritt bei Gebirge mit kleiner Seitendruckzahl oder ovalem Hohlraum auf. Radialrisse im First- und Sohlbereich können jedoch nur auftreten, wenn der Seitendruck nahezu Null ist, da die für die Rissbildung verantwortlichen Zugspannungen sonst vom Seitendruck überdrückt werden. Diese Form von Radialrissen kann in der Praxis daher meist nicht beobachtet werden. Durch diesen Zustand kann allerdings bereits ein Firstverbruch bewirkt werden. Für die richtige Wahl der Stützmittel in diesem Stadium ist der Firstbereich maßgebend. Es treten auch Risse im Bereich der Sohle auf, diese sind jedoch von untergeordneter Bedeutung, es sei denn es kommt durch Wasseraufnahme und Knetwirkung der Baufahrzeuge zu einer Entfestigung des Gebirges im Sohlbereich was sich im Zustand 3 negativ auswirkt wenn von diesem Bereich eine Scherfestigkeit erwartet wird.

Der Zustand 2 ist durch eine Zermalmung des Gebirges im Bereich der Ulmen und eine weitere Ausbildung der Zugrisse in der Firste gekennzeichnet. Es kommt zu einer Ausquetschung weicher Komponenten oder zu einer Zerberstung poröser Komponenten aus

dem Ulmenbereich. Dieses Versagensbild konnte durch die Modelle sehr gut abgebildet werden. In den Modellen 1 bis 3, bei denen die Bindungsfestigkeiten so gewählt wurden (siehe Tabelle 3), dass sich ein sprödes Materialverhalten einstellt, kommt es zu einem Ausquetschen von Bereichen an den Ulmen. Ein ähnliches Versagensbild kann im Modell 4 und 5 bei Verwendung einer Kontaktbindung beobachtet werden, bei dem jedoch ein Material generiert wurde, welches geringe Zugfestigkeiten aufweist und es somit, wie aus dem Rissbild in Abbildung 104 erkennbar ist, fast ausschließlich Zugrisse auftreten.

Der Zustand 2 ist dann erreicht und voll ausgebildet, wenn die Zermalmung der Ulmenzwickel so weit bergwärts vorgedrungen ist, dass der Winkel ψ klein genug wird, um eine Reibungsfläche zu bilden, welche in der Lage ist die weitere Ausquetschung des Materials zu verhindern. Dies ist dann der Fall wenn der Winkel ψ dem Reibungswinkel δ_{BG} zwischen kompakten und zermalmt Material entspricht. Als Sicherungsmaßnahmen in diesem Bereich ist eine geschlossene, anliegende Schale oder eine Verankerung möglich. Letzteres kann natürlich nur dann sinnvoll angewendet werden, wenn der Anker über die Gleitbruchebene hinausreicht. Die Fortpflanzung der Risse in der Firne muss bei der Wahl der Stützmittel im Firstbereich ebenfalls berücksichtigt werden.

Wird die Gebirgstragfähigkeit in Zustand 2 überschritten, so führt dies zu Scherbrüchen welche den Zustand 3 charakterisieren. Die gekrümmten Scherbrüche reichen entweder in die zermalmt Zonen der Ulmenzwickel und stoßen dort auf den passiven Widerstand des zermalmt Material oder reichen direkt bis in den Hohlraum. Diese Scherbrüche weisen eine qualitative Ähnlichkeit mit Felsböschungsbrüchen auf und können genauso behandelt werden. Auf die richtige Wahl der Stützmittel wird in diesem Dokument nicht eingegangen.

3 Numerische Lösungsverfahren

Bevor ein Problem mit Hilfe von Digitalrechnern gelöst werden kann, muss es gewisse Eigenschaften aufweisen. Der Digitalrechner arbeitet mit einer binären Kodierung und kann nur eine endliche „diskrete“ Menge verschiedener Zahlenwerte darstellen. Die Umwandlung, welche Diskretisierung genannt wird, kann durch verschiedene numerischen Verfahren erfolgen (z.B. Methode der Finiten Differenzen - FDM, Boundary Element Method - BEM, Methode der Finiten Elemente - FEM). Die berechneten Ergebnisse sind Näherungen, sie sind also mit Fehlern behaftet. Neben Fehlern durch notwendige Vereinfachungen bei der Erstellung des mathematischen Modells kommt es zu Fehlern durch die Diskretisierung und durch die Lösung der diskreten Gleichungen. Besonders bei feinen Gittern, kann auch der Rundungsfehler auf Grund der computerinternen Zahlendarstellung das Ergebnis beeinflussen. Der Einfluss dieser Fehler auf die Ergebnisse darf nicht außer Acht gelassen werden. Insbesondere sollten erhaltene Ergebnisse auf ihre physikalische Plausibilität hin untersucht werden und, sofern experimentelle oder analytische Ergebnisse zur Verfügung stehen, mit diesen validiert werden. Hinsichtlich der Diskretisierung muss die Stabilität eines Verfahrens beachtet werden, d.h. ob Störungen im Verlauf der Berechnung wieder abklingen oder sich aufschaukeln.

Die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) wurde in den 70er Jahren von CUNDALL & STRACK (1979) zur Lösung felsmechanischer Probleme entwickelt. CUNDALL & HART (1992) schlagen vor, dass der Begriff Diskrete-Elemente-Methode auf Algorithmen angewendet werden sollte, die zum einen endliche Verschiebungen und Rotationen diskreter Körper, einschließlich ihrer vollständigen Trennung zulassen, und zum andern neue Kontakte automatisch erkennen.

Diese Forderungen werden auch von der Ereignisgesteuerten Methode erfüllt. Die Ereignisgesteuerte Methode beschreibt ein Modell dessen Ablauf aufgrund der Auswertung von Zwischenergebnissen gesteuert wird. Der wesentliche Ablauf kann in zwei Schritte eingeteilt werden. In einem ersten Schritt wird ein Ereignis erkannt und in einem zweiten Schritt wird dessen Handhabung festgelegt. Um das Modell mit weichen Partikelkontakten endlicher Dauer von dieser zu unterscheiden, verwenden CUNDALL & STRACK den Begriff Distinkte-Elemente-Methode (CEPARTEC, 2007). Diese bildet die Grundlage für die Berechnungen mit PFC.

Im folgenden Abschnitt wird speziell auf das Programm PFC und dessen Lösungsalgorithmus eingegangen.

4 Das Programm PFC^{2D}

Nach PREH (2004) und ITASCA (2005)

Der Particle Flow Code (PFC) ist ein Verfahren zur numerischen Modellierung von komplexen Systemen auf Basis der Methode der Distinkten Elemente (HART, 1996). Diese ist wiederum in die Gruppe der Diskreten Elemente einzuordnen. Diskrete-Elemente-Verfahren weisen folgende wesentliche Merkmale auf:

- Das Modell wird in Diskrete Elemente zerlegt, für die eine bestimmte Geometrie und Materialverhalten festgelegt wird.
- Die Eigenschaften der Kontakte und die Art der Wechselwirkungen müssen definiert werden.
- Algorithmen zur Ermittlung von Kontakten müssen vorhanden sein um Blöcke zu bestimmen welche einen Kontakt mit einem anderen Block bzw. einem Wandelement aufweisen, während der Berechnung in Kontakt treten können oder ihren Kontakt verlieren.

In PFC^{2D} erfolgt die Modellierung des Problems mit Hilfe von Scheiben- oder Kugelementen und eindimensionalen Wandelementen und in der Version 3D mit Kugelementen und zweidimensionalen Wandelementen. In der Version 3D weisen Wandelemente eine aktive und eine inaktive Seite auf. Die Ermittlung des Kontaktes zwischen Ballelementen oder zwischen einem Ball- und einem Wandelement bildet die Grundlage zur Berechnung der Kontaktkräfte und der Berechnung des anschließenden Bewegungsverhaltens. Ein Kontakt zwischen einem Partikel und einem Wandelement kann nur auf der aktiven Seite erkannt werden. PFC besitzt eine Detektionsautomatik, die alle sich aufgrund der Partikelbewegung einstellenden Kontakte, sowohl mit einem anderen Partikel als auch mit einem Wandelement, erkennt. Dies geschieht über geometrische Betrachtungen. Der Vorteil der Ermittlung des Kontaktes rein über die Geometrie liegt darin, dass nachträgliche Änderungen der Radien ohne Eingriff in den Lösungsalgorithmus möglich sind.

Dadurch ist es PFC möglich große Verschiebungen abzubilden. Darüber hinaus können die Partikel durch Verbindung an ihren Berührungspunkten zu einem Festkörper verbunden werden, der wiederum durch eine progressive Schädigung der Bindungen (Ausbildung von Trenn- und Scherbrüchen) zerstört werden kann. Dies ist mit kontinuumsmechanischen Methoden (z.B. FDM, FEM) nicht möglich.

Das numerische Modell welches dem Programm PFC zugrunde liegt, enthält folgende Annahmen:

- 1) Die kugel- oder scheibenförmigen Partikel werden als starr angenommen
- 2) Die Kontakte zwischen den Partikeln beschränken sich auf eine unendlich kleine Fläche (Punkt bzw. Linie)
- 3) Die Partikel können ineinander Eindringen. Das Verhalten der Kontakte beruht auf einem weichen Stoß mit einer endlichen Normalsteifigkeit der Teilchen.
- 4) Die Größe der Überlappung hängt von der Steifigkeit der Partikel und der Kontaktkraft ab und ist klein im Verhältnis zur Teilchengröße.
- 5) An den Kontaktpunkten kann eine Bindung zwischen zwei Partikeln definiert werden. Auf die möglichen Bindungsarten wird in Kapitel 4.5.3 näher eingegangen.
- 6) Geometrisch komplizierte Elementarbausteine können durch den Zusammenschluss mehrerer Kugелеlemente bzw. Wandelemente hergestellt werden. Diese bilden dann wiederum einen neuen Elementarbaustein.

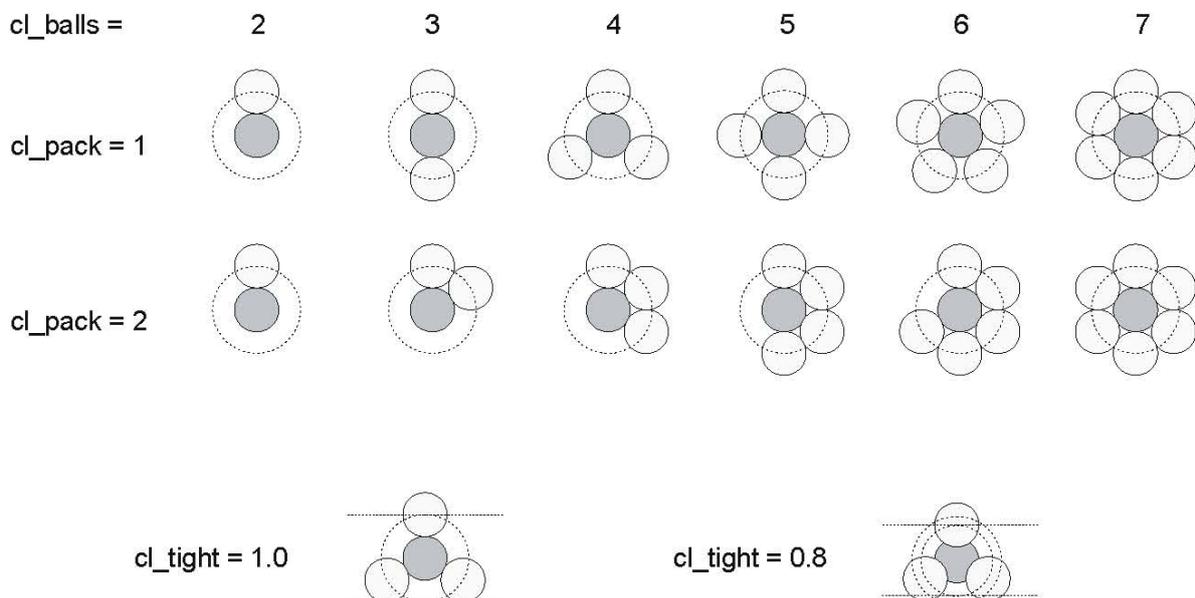


Abbildung 6: Zusammenschluss mehrerer Kugелеlemente (Cluster), ITASCA (2004)

Die sich aus der Berechnung ergebenden Differentialgleichungen werden nach dem Verfahren der expliziten Finiten Differenzen gelöst. Dies bringt den Vorteil eines pro Rechenschritt nur geringen Aufwandes mit sich. Nachteilig wirkt sich diese Berechnungsweise jedoch auf die

Stabilität der Berechnung aus, da sich der Fehler von Zeitschritt zu Zeitschritt aufschaukeln kann. Deshalb ist in PFC ein besonderer Algorithmus zur Berechnung des Zeitabschnittes implementiert. Auf diesen wird in Abschnitt 4.4 näher eingegangen.

4.1 Berechnungskreislauf

Das Berechnungsverfahren der Distinkten Elemente Methode in PFC besteht aus einem expliziten zeitgesteuerten Algorithmus. Der Berechnungskreislauf, dargestellt in Abbildung 7, läuft in jedem Berechnungs- bzw. Zeitschritt ab, und wendet in jedem Zeitschritt das Bewegungsgesetz auf jedes Partikel, und ein Kraft-Verschiebungsgesetz für jeden Kontakt, an. Es findet keine Kopplung der Beziehungen für jedes einzelne Partikel zu einer Gesamtmatrix statt. Kontakte, die zwischen zwei Partikeln oder einem Partikel und einer Wand bestehen, können während der Simulation automatisch gebildet oder gelöst werden. Am Beginn jedes Zeitschrittes wird die interne Kontaktliste, aufgrund der gegenwärtigen Positionen der Partikel und der Wände, erneuert. Unter Berücksichtigung der relativen Bewegung der beiden Elemente und des Kontaktmodells (konstitutive Beziehungen) wird das Kraftverschiebungsgesetz auf jeden Kontakt angewendet und die Kontaktkräfte ermittelt. Anschließend wird das Bewegungsgesetz auf jedes Partikel angewendet und dessen Position und Geschwindigkeit, aufgrund der resultierenden Kräfte und Momente, die aus den Kontakt- und Massenkräften berechnet werden, neu bestimmt. Die Bewegung eines einzelnen unverformbaren Partikels resultiert aus dem Eigengewicht des Partikels und den auf ihn wirkenden Kontaktkräften. Zuzug der Resultierenden des Kraftvektors und des Momentenvektors werden dann die translatorische Bewegung sowie die Rotation des Partikels dargestellt. Dabei ist die translatorische Bewegung des Massenmittelpunktes durch dessen Position x_i , dessen Geschwindigkeit \dot{x}_i und dessen Beschleunigung \ddot{x}_i , beschrieben. Die Beschreibung der Rotationsbewegung des Partikels erfolgt analog durch die Winkelgeschwindigkeit ω_i und die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_i$.

Für das Ende der Berechnung wird ein Abbruchkriterium verwendet, wobei dieses auf unterschiedliche Weise definiert werden kann. Eine Berechnung endet entweder nach einer vorgegebenen Anzahl von Berechnungsschritten oder wenn ein Toleranzkriterium erreicht wird.

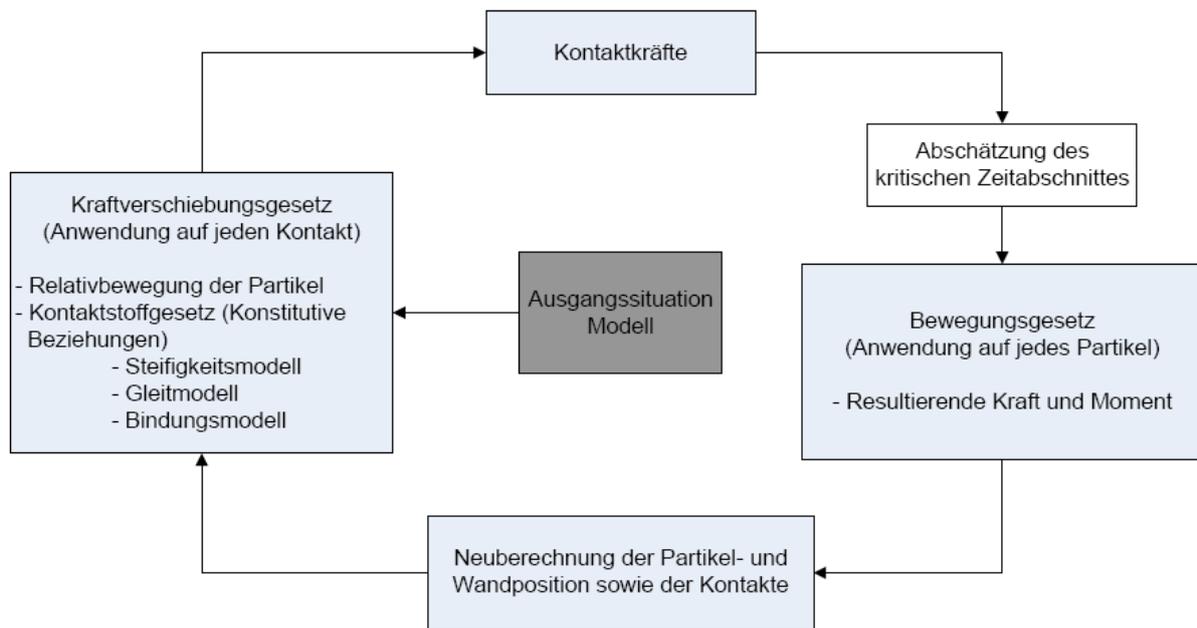


Abbildung 7: Berechnungskreislauf, PREH, (2004), verändert

4.2 Kraftverschiebungsgesetz

Das Kraftverschiebungsgesetz stellt bei Vorhandensein eines Kontaktes die Beziehung zwischen den Kontaktkräften und den relativen Verschiebungen der Partikel her. Es werden zwei Kontaktformen unterschieden, Ball-Ball- und Ball-Wand-Kontakt. Bei einem Ball-Ball-Kontakt und Vorhandensein einer Parallelbindung entsteht eine zusätzliche Kraft und ein zusätzliches Moment in Folge der Deformation des zementartigen Materials zwischen den beiden Partikeln, welches durch die Parallelbindung simuliert wird. Die daraus entstandene Kraft und das Moment wirken zusätzlich auf die beiden Partikel.

Das Kraftverschiebungsgesetz wird an einem Kontakt angewandt und durch den Kontaktpunkt $x_i^{[C]}$, welcher auf der Kontaktfläche liegt, und durch den Einheitsnormalvektor n_i (siehe Abbildung 8) beschrieben. Der Kontaktpunkt liegt im Überlappungsbereich der Partikel.

Bei einem Ball-Ball-Kontakt liegt der Einheitsnormalvektor auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Bälle. Für den Fall eines Ball-Wandkontaktes liegt der Einheitsnormalvektor auf der kürzesten Verbindungslinie zwischen Ballzentrum und der Wand. Die Kontaktkraft wird in eine Normalkomponente parallel zum Einheitsnormalvektor und in eine Scherkomponente senkrecht dazu zerlegt. Das Kraftverschiebungsgesetz stellt diese Kraftkomponente mittels Normal- und Schersteifigkeit in Relation zur relativen Verschiebung.

Im Folgenden wird das Kraftverschiebungsgesetz sei es für einen Ball-Ball-Kontakt als auch für einen Ball-Wand-Kontakt dargestellt. Für den Fall eines Ball-Ball-Kontaktes werden die Gleichungen für zwei kugelförmige Partikel (A, B) angegeben. U^n bezeichnet dabei die Überlappung.

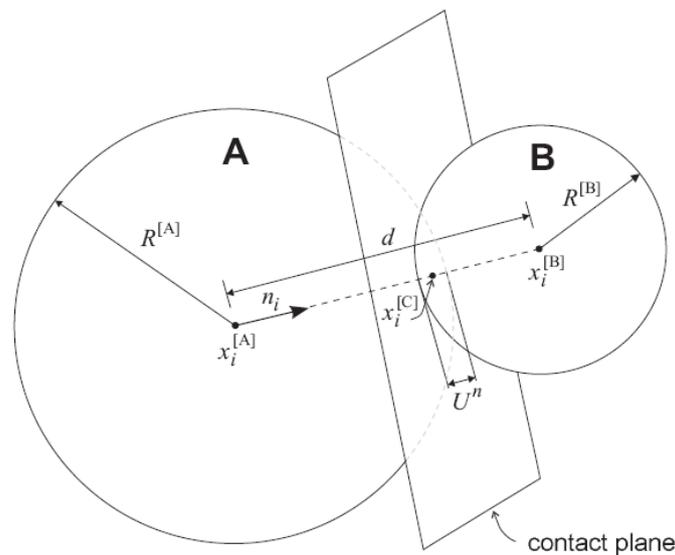


Abbildung 8: Ball-Ball-Kontakt, ITASCA (2004)

Für den Normalvektor n_i , der die Kontaktebene festlegt, gilt folgendes:

$$n_i = \frac{x_i^{[B]} - x_i^{[A]}}{d} \quad \text{Gleichung 4.1}$$

wobei $x_i^{[A]}$ und $x_i^{[B]}$ die Positionsvektoren der Mittelpunkte der Partikel A und B sind und d den Abstand zwischen den beiden Mittelpunkten darstellt:

$$d = |x_i^{[B]} - x_i^{[A]}| = \sqrt{(x_i^{[B]} - x_i^{[A]}) \cdot (x_i^{[B]} - x_i^{[A]})} \quad \text{Gleichung 4.2}$$

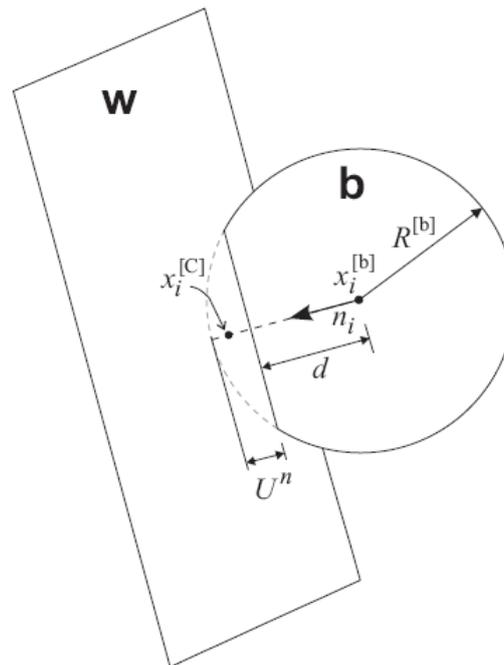


Abbildung 9: Ball-Wand-Kontakt, ITASCA (2004)

Für den Fall eines Ball-Wand-Kontaktes werden die Gleichungen für einen kugelförmigen Ball und ein zweidimensionales Wandelement laut Abbildung 9 angegeben. Der Normalenvektor n_i zeigt in Richtung der kürzesten Distanz d , vom Kugelmittelpunkt zur Wand. Die Richtung findet man, indem man die Lage des Ballmittelpunktes bestimmten definierten Bereichen zuordnet. Die Vorgehensweise welche in PFC verwendet wird, ist in Abbildung 10, für eine Zweidimensionale Wand aus zwei Geraden \overline{AB} und \overline{BC} , dargestellt. Der gesamte Raum auf der aktiven Seite der Wand kann durch setzen von Lotrechten Geraden auf die jeweiligen Endpunkte der Segmente in fünf Teilbereiche geteilt werden. Falls der Ballmittelpunkt in den Regionen 2 oder 4 liegt, liegt der Kontaktpunkt entlang der Geraden \overline{AB} oder \overline{BC} und der Normalenvektor steht Normal zum jeweiligen Segment. Liegt das Partikel in einem der Bereiche 1, 3 oder 5, so gibt es einen Kontakt an einem der Eckpunkte und der Normalenvektor zeigt vom Eckpunkt in Richtung Ballmittelpunkt.

Der Vorteil der Ermittlung des Kontaktpunkts rein über die Geometrie liegt darin, dass nachträgliche Änderungen der Radien ohne Eingriff in den Lösungsalgorithmus möglich sind. Nach der Änderung der Radien werden im nächsten Rechenschritt die neuen Kontakte über die Betrachtung der Geometrie erfasst.

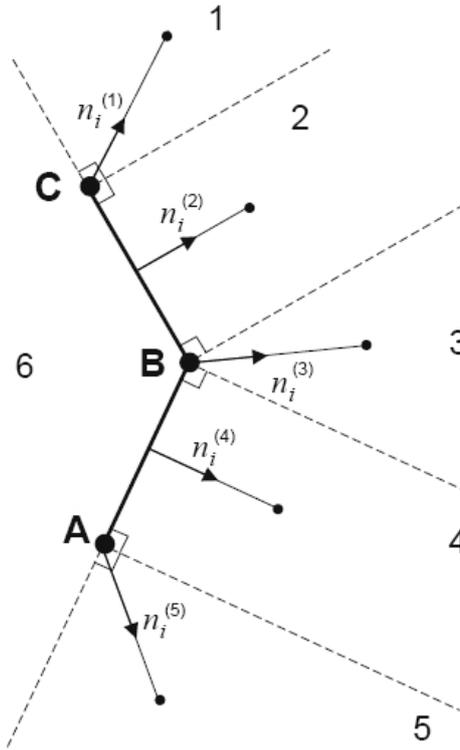


Abbildung 10: Festlegung der Richtung des Normalenvektors für einen Ball-Wand-Kontakt, ITASCA (2004)

Die Überlappung U^n , ist definiert als relative Verschiebung an den Kontakten in Richtung der Normalen und lässt sich wie folgt darstellen:

$$U^n = \begin{cases} R^{[A]} + R^{[B]} - d & (\text{Ball - Ball}) \\ R^{[b]} - d & (\text{Ball - Wand}) \end{cases} \quad \text{Gleichung 4.3}$$

wobei $R^{[\Phi]}$ der Radius des Balles Φ ist. Die Position des Kontaktpunktes kann wie folgt bestimmt werden.

$$x_i^{[C]} = \begin{cases} x_i^{[A]} + (R^{[A]} - 1/2 \cdot U^n) \cdot n_i & (\text{Ball - Ball}) \\ x_i^{[b]} + (R^{[b]} - 1/2 \cdot U^n) \cdot n_i & (\text{Ball - Wand}) \end{cases} \quad \text{Gleichung 4.4}$$

Der Kontaktkraftvektor F_i , welcher die Wirkung des Balles A auf Ball B (bei einem Ball-Ball-Kontakt) und die Wirkung des Balles auf die Wand (bei einem Ball-Wand-Kontakt) darstellt, kann in einen Normalkraftvektor F_i^n und einen Scherkraftvektor F_i^s , bezogen auf die Kontaktfläche, zerlegt werden.

$$F_i = F_i^n + F_i^s \quad \text{Gleichung 4.5}$$

Die Magnitude der Normalkraft wird aus der Überlappung U^n und der Normalsteifigkeit K^n ermittelt.

$$F_n = K^n \cdot U^n \quad \text{Gleichung 4.6}$$

Der Wert von K^n hängt vom verwendeten Kontaktmodell ab.

Man beachte, dass die Normalsteifigkeit K^n einem Sekantenmodul entspricht, und dieser somit eine Beziehung zwischen dem Gesamtwert der Normalkraft und jenem der Verschiebung herstellt. Die auf Grundlage der Geometrie berechnete Normalkontaktkraft birgt mehrere Vorteile. Zum einen ist die Berechnung weniger anfällig für eine numerische Fehlerfortpflanzung und eine zufällige Ballplatzierung mit Überlappung kann problemlos generiert und verarbeitet werden, und zum anderen ist eine nachträgliche Variierung der Ballradien möglich.

Die Schersteifigkeit k_s entspricht dagegen einem Tangentenmodul und stellt somit eine Beziehung zwischen den Inkrementen der Verschiebung und der Kraft dar. Sie wird schrittweise berechnet. Wenn ein Kontakt festgestellt wird, wird die Scherkraft erstmal auf Null gesetzt. Jede darauf folgende Verschiebung resultiert in einem Inkrement der elastischen Scherkontaktkraft, welche zur bisherigen Kontaktkraft addiert wird. Die Bewegung des Kontaktes wird durch das Update von n_i und $x_i^{[c]}$ bei jedem Berechnungsschritt berücksichtigt.

Die relative Scherbewegung am Kontakt, bzw. die Geschwindigkeit der Scherbewegung, V_s , welche im Falle eines Ball-Ball-Kontaktes als Relativgeschwindigkeit des Balles B zum Ball A am Kontaktpunkt und im Falle eines Ball-Wand-Kontaktes als Relativgeschwindigkeit des Balles zur Wand am Kontaktpunkt definiert ist, folgt aus

$$V^s = \left(\dot{x}_i^{[\Phi^2]} - \dot{x}_i^{[\Phi^1]} \right) t_i - \omega_3^{[\Phi^2]} \left| x_k^{[C]} - x_k^{[\Phi^2]} \right| - \omega_3^{[\Phi^1]} \left| x_k^{[C]} - x_k^{[\Phi^1]} \right| \quad \text{Gleichung 4.7}$$

wobei $\dot{x}_i^{[\Phi^j]}$ und $\omega_3^{[\Phi^j]}$ die Translations- bzw. Rotationsgeschwindigkeit des Elements Φ^j mit den Komponenten

$$\{\Phi^1, \Phi^2\} = \begin{cases} \{A, B\}, & \text{Ball - Ball} \\ \{b, w\}, & \text{Ball - Wand} \end{cases} \quad \text{Gleichung 4.8}$$

und $t_i = \{-n_2, n_1\}$ ist.

Die Scherkomponente des Vektors des Kontaktverschiebungsincrementes, das während eines Zeitschrittes Δt auftritt, wird berechnet aus

$$\Delta U^s = V^s \cdot \Delta t \quad \text{Gleichung 4.9}$$

und verwendet für die Berechnung des elastischen Anteiles des Inkrementes der Scherkraft.

$$\Delta F^s = -k^s \cdot \Delta U^s \quad \text{Gleichung 4.10}$$

Der Wert der Schersteifigkeit k_s hängt vom verwendeten Steifigkeitsmodell ab. Weil es sich um einen Tangentenmodul handelt wird der Kleinbuchstabe k verwendet.

Die neue Kontaktscherkraft ergibt sich durch Addition der vorhandenen Scherkraft zu Beginn des Zeitintervalls Δt und dem Inkrement des elastischen Anteils der Scherkraft zu

$$F^s \leftarrow F^s + \Delta F^s \leq \mu \cdot F^n \quad \text{Gleichung 4.11}$$

In Gleichung 4.11 stellt μ den Reibungskoeffizienten dar.

Die Werte der Kontaktnormal- und Kontaktschersteifigkeit, welche aus den Gleichungen 5.6 und 5.10 ermittelt wurden, werden insofern angepasst, als sie dann den Gleichungen der konstitutiven Beziehungen genügen. Nach dieser Korrektur wird der Einfluss der Kontaktkraft auf die resultierende Kraft und das resultierende Moment des Elementes wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} F_i &= F^n n_i + F^s t_i \\ F_i^{[\Phi^1]} &\leftarrow F_i^{[\Phi^1]} - F_i \\ F_i^{[\Phi^2]} &\leftarrow F_i^{[\Phi^2]} + F_i \\ M_3^{[\Phi^1]} &\leftarrow M_3^{[\Phi^1]} - e_{3jk} \left(x_j^{[C]} - x_j^{[\Phi^1]} \right) \cdot F_k \\ M_3^{[\Phi^2]} &\leftarrow M_3^{[\Phi^2]} - e_{3jk} \left(x_j^{[C]} - x_j^{[\Phi^2]} \right) \cdot F_k \end{aligned} \quad \text{Gleichung 4.12}$$

wobei $F_i^{[\Phi^j]}$ und $M_3^{[\Phi^j]}$ die Summe der Kräfte und Momente des Partikels Φ^j sind. F_i ergibt sich aus Gleichung 4.5.

4.3 Bewegungsgesetz

Die Bewegung eines einzelnen Partikels wird durch die resultierende Kraft und das resultierende Moment beeinflusst, welche auf das Partikel wirken. Durch Bestimmung der Translation des Massenmittelpunktes und der Rotation des Partikels, kann dessen Bewegung eindeutig dargestellt werden. Die translatorische Bewegung des Massenmittelpunktes wird durch Angabe der Position x_i , Geschwindigkeit \dot{x}_i und Beschleunigung \ddot{x}_i beschrieben. Die Rotationsbewegung wird durch die Winkelgeschwindigkeit ω_i und Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_i$ ausgedrückt. Zwei Bewegungsgleichungen können als Vektorgleichungen angeschrieben werden. Dabei stellt die erste eine Relation zwischen der resultierenden Kraft und der translatorischen Bewegung her; die zweite hingegen verknüpft das resultierende Moment mit der Rotation des Partikels (Impuls und Drallsatz).

$$F_i = m(\ddot{x}_i - g_i) \quad \dots \text{translatorische Bewegung} \quad \text{Gleichung 4.13}$$

$$M_i = \dot{H}_i \quad \dots \text{rotatorische Bewegung} \quad \text{Gleichung 4.14}$$

Dabei stellt F_i die resultierende Kraft, m die Gesamtmasse des Partikels und g_i den Massenbeschleunigungsvektor dar. Die resultierende Kraft ergibt sich aus der Summe der äußeren Kräfte die auf das Partikel wirken.

M_i stellt das resultierende Moment und \dot{H}_i den Drehimpuls des Partikels dar. Den Gleichungen 5.13 und 5.14 liegt ein lokales Koordinatensystem, mit Ursprung im Massenmittelpunkt des Partikels, zu Grunde. Kommt das lokale Koordinatensystem so zu liegen, dass dessen Achsen mit den Trägheitshauptachsen des Partikels übereinstimmen, so ergibt sich aus Gleichung 4.14 die Eulersche Bewegungsgleichung.

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 \cdot \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \\ M_2 &= I_2 \cdot \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ M_3 &= I_3 \cdot \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 \end{aligned} \quad \text{Gleichung 4.15}$$

In den Gleichungen 4.15 sind I_1, I_2 und I_3 Hauptträgheitsmomente; $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ und $\dot{\omega}_3$ stellen die Winkelbeschleunigung um die Hauptträgheitsachsen und M_1, M_2, M_3 die Komponenten des resultierenden Momentes bezogen auf die Hauptachsen dar.

Sei es für ein kugelförmiges, als auch für ein zylindrisches Element mit Radius R und gleichmäßig verteilter Masse übers Volumen, fällt der Massenmittelpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt des Elementes zusammen. Handelt es sich um kugelförmige Elemente sind die Achsen eines lokalen Koordinatensystems mit Ursprung im Zentrum des

Elementes immer Hauptachsen und die Trägheitsmomente um die jeweiligen Achsen gleich groß. Bei scheibenförmigen Elementen, die nur um den Normalenvektor der Ebene rotieren, sind die beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 gleich null. Daher kann Gleichung 4.15 für den zwei-, als auch dreidimensionalen Fall auf ein globales Koordinatensystem bezogen werden.

$$M_3 = I\dot{\omega}_3 = (\beta \cdot m \cdot R^2)\dot{\omega}_3 \quad \text{Gleichung 4.16}$$

mit

$$\beta = \begin{cases} 2/5, & (\text{Kugelförmiges Partikel}) \\ 1/2, & (\text{scheibenförmiges Partikel}) \end{cases} \quad \text{Gleichung 4.17}$$

Die Bewegungsgleichungen, beschrieben in Gleichung 4.16 und Gleichung 4.17, werden nach Umwandlung in eine Differenzgleichung unter Verwendung des mittleren Differenzenquotienten über den Zeitschritt Δt gelöst. Dabei werden die Größen \dot{x}_i und ω_i mit dem mittleren Intervall $(t \pm \Delta t / 2)$ berechnet, während die Größen x_i , \ddot{x}_i , $\dot{\omega}_i$, F_i und M_i mit dem Hauptintervall $(t \pm \Delta t)$ ermittelt werden.

Die Gleichung 4.18 und Gleichung 4.19 beschreiben die translatorische und rotatorische Beschleunigung zum Zeitpunkt t mit den Geschwindigkeitswerten des mittleren Intervalls.

$$\ddot{x}_i^{(t)} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (\dot{x}_i^{(t+\Delta t/2)} - \dot{x}_i^{(t-\Delta t/2)}) \quad \text{Gleichung 4.18}$$

$$\dot{\omega}_i^{(t)} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (\omega_i^{(t+\Delta t/2)} - \omega_i^{(t-\Delta t/2)}) \quad \text{Gleichung 4.19}$$

Setzt man die Gleichung 4.18 und Gleichung 4.19 in die Gleichung 4.13 und Gleichung 4.16 ein, so erhält man die Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t + \Delta t / 2$.

$$\dot{x}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{x}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left(\frac{F_i^{(t)}}{m} + g_i \right) \cdot \Delta t \quad \text{Gleichung 4.20}$$

$$\omega_i^{(t+\Delta t/2)} = \omega_i^{(t-\Delta t/2)} + \left(\frac{M_i^{(t)}}{I} \right) \cdot \Delta t \quad \text{Gleichung 4.21}$$

Aus den Geschwindigkeiten in Gleichung 4.20 und Gleichung 4.21 lassen sich anschließend die Positionen der Partikelmittelpunkte wieder neu bestimmen.

$$x_i^{(t+\Delta t)} = x_i^{(t)} + \dot{x}_i^{(t+\Delta t/2)} \cdot \Delta t \quad \text{Gleichung 4.22}$$

Der Berechnungskreislauf aus Abbildung 7 kann nun wie folgt beschrieben werden:

Ausgehend von den Werten $\dot{x}_i^{(t-\Delta t/2)}$, $\omega_3^{(t-\Delta t/2)}$, $x_i^{(t)}$, $F_i^{(t)}$ und $M_i^{(t)}$, werden mit Hilfe von Gleichung 4.20 und Gleichung 4.21 die Geschwindigkeiten $\dot{x}_i^{(t+\Delta t/2)}$ und $\omega_3^{(t+\Delta t/2)}$ ermittelt. Anschließend wird mit Gleichung 4.22 die Position des Partikelmittelpunktes $x_i^{(t+\Delta t)}$ berechnet. Die aktualisierten Kräfte und Momente $F_i^{(t+\Delta t)}$ und $M_i^{(t+\Delta t)}$ werden im nächsten Berechnungszyklus durch Anwendung des Kraftverschiebungsgesetzes ermittelt.

4.4 Abschätzung des Kritischen Zeitschrittes

Nach ITASCA (2007)

PFC verwendet die in Gleichung 4.18 bis Gleichung 4.21 expliziten zentralen Differenzialgleichungen um die Bewegungsgleichungen zu integrieren. Das mit Hilfe dieser Gleichungen berechnete Ergebnis bleibt stabil, solange ein Kritischer Zeitschritt, welcher mit dem kleinsten Eigenwert des Systems verbunden ist, nicht überschritten wird. Die Wahl dieses Zeitschrittes ist also von zentraler Bedeutung für die Genauigkeit der ermittelten Lösung. Wird der Zeitschritt zu groß gewählt führen bereits kleinste Fehler in Anfangs- und Randbedingungen, zu einem unbrauchbaren Ergebnis. Ein extrem kleiner Zeitschritt führt dagegen zu einer erheblich längeren Rechenzeit.

Eine Eigenwertanalyse für jeden Berechnungszeitschritt und eine daraus abgeleitete Abschätzung, stellt jedoch für das sich in PFC ständig ändernde und aus meist sehr vielen Partikeln bestehende Modell, keine praktikable Lösung dar. Deshalb bedient sich das Programm PFC einer einfachen Prozedur um den Zeitschritt zu Beginn jedes Berechnungsschrittes abzuschätzen. Für die Berechnung wird dann ein Bruchteil des so ermittelten kritischen Zeitschrittes verwendet.

Die Abschätzung dieses Zeitschrittes wird mit Hilfe eines Einmassenschwingers beschrieben.

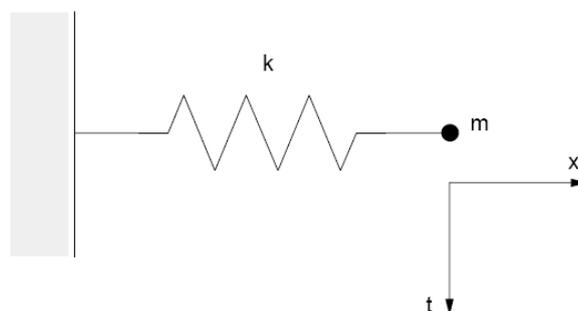


Abbildung 11: Einmassenschwinger, ITASCA (2004)

Die Bewegung der Punktmasse m wird durch die Gleichung $-kx = m\ddot{x}$ beschrieben. Dabei ist k die Federsteifigkeit des Systems. Der kritische Zeitschritt einer finiten Differentialgleichung zweiten Grades wurde von BATHE und WILSON (1967) wie folgt angegeben:

$$t_{krit} = \frac{T}{\pi} \quad T = 2\pi\sqrt{m/k} \quad \text{Gleichung 4.23}$$

wobei T die Länge der Periode des Systems ist.

Im nächsten Schritt wird eine Aneinanderkettung unendlich vieler Punktmassen durch Federn, wie in Abbildung 12 dargestellt, betrachtet. Die kleinste Periodenlänge dieses Systems wird dann erreicht werden, wenn die Punktmassen sich in entgegengesetzte Richtung bewegen und somit der Mittelpunkt der Feder nicht verschoben wird. Die Bewegung einer einzelnen Punktmasse kann durch die äquivalenten Systeme in Abbildung 12(b,c) ersetzt werden. Der kritische Zeitschritt dieser Systeme ergibt sich aus

$$t_{krit} = 2\sqrt{m/(4k)} = \sqrt{m/k} \quad \text{Gleichung 4.24}$$

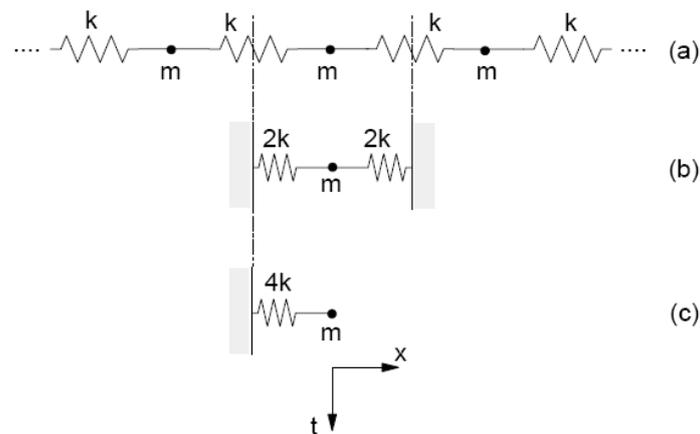


Abbildung 12: Serienschaltung von Punktmassen, ITASCA (2004)

Die beiden betrachteten Systeme charakterisieren eine translatorische Bewegung. Diese beiden Systeme können auf eine Rotationsbewegung umgelegt werden, indem die Masse m durch das Massenträgheitsmoment I eines endlich großen Partikels und die Federsteifigkeit durch eine Rotationsfedersteifigkeit ersetzt wird. Dadurch ergibt sich der kritische Zeitschritt eines Mehrmassenschwingers wie folgt:

$$t_{krit} = \begin{cases} \sqrt{m/k^{tran}} & \text{Translation} \\ \sqrt{I/k^{rot}} & \text{Rotation} \end{cases} \quad \text{Gleichung 4.25}$$

Je nachdem, ob PFC^{2D} oder PFC^{3D} verwendet wird, handelt es sich bei dem Modell um eine zweidimensionale oder dreidimensionale Ansammlung von Partikeln und Federn, wobei jede Masse und Feder unterschiedliche Kennwerte aufweisen kann. Für jeden Freiheitsgrad eines jeden Partikels wird ein kritischer Zeitschritt nach Gleichung 4.25 unter Annahme entkoppelter Freiheitsgrade ermittelt. Die gewählte Steifigkeit wird mit den Diagonalwerten der Steifigkeitsmatrix, die die Inkremente der Verschiebung und Rotation in Relation zu denen der Kräfte und Momente setzt, abgeschätzt. Der kritische Zeitschritt für das Gesamtsystem ergibt sich aus dem Minimum aller so ermittelten kritischen Zeitschritte.

4.5 Konstitutive Beziehungen (Kontaktmodelle)

Ein bestimmtes Materialverhalten wird in PFC durch Assoziation eines einfachen konstitutiven Modells zu jeder Bindung, simuliert. Dieses Modell besteht aus folgenden drei Teilen:

- Steifigkeitsmodell
- Gleitmodell
- Bindungsmodell

Das Steifigkeitsmodell stellt eine elastische Beziehung zwischen Kontaktkraft und relativen Verschiebung her. Das Gleitmodell liefert einen Zusammenhang zwischen Kontaktscher- bzw. Kontaktnormalkraft und einer relativen Verschiebung (Gleitung) der sich in Kontakt befindlichen Partikel. Das Bindungsmodell dient dazu, die übertragbare Normal- und Scherkraft eines Kontaktes zu limitieren und den Kontakten eine Steifigkeit zuzuordnen.

Es besteht die Möglichkeit die vorhandenen Kontaktmodelle zu modifizieren, sie miteinander zu koppeln oder neue Kontaktmodelle zu generieren.

4.5.1 Steifigkeitsmodell

Das Steifigkeitsmodell regelt die elastische Interaktion zweier in Kontakt befindlicher Partikel. Es stellt eine Beziehung zwischen den Kontaktkräften und den relativen Verschiebungen in Normal- und Scherrichtung her. Wie bereits in Kapitel 4.2 erwähnt, ist die Normalsteifigkeit eine Sekantensteifigkeit,

$$F_i^n = K^n U^n n_i \quad \text{Gleichung 4.26}$$

da sie eine Beziehung zwischen der Normalkraft und der Verschiebung in Richtung der Normalen herstellt. Die Schersteifigkeit ist eine Tangentensteifigkeit,

$$\Delta F_i^s = -k^s \cdot \Delta U_i^s \quad \text{Gleichung 4.27}$$

da sie eine Beziehung zwischen dem Inkrement der Scherkraft zu dem Inkrement der Verschiebung in Scherrichtung darstellt.

Je nach verwendetem Steifigkeitsmodell werden unterschiedliche Werte für die Kontaktsteifigkeit ermittelt. PFC stellt zwei unterschiedliche Modelle zur Verfügung, ein lineares Steifigkeitsmodell und ein vereinfachtes Hertz-Mindlin-Modell. Ein Kontakt zweier Bälle mit unterschiedlichem Steifigkeitsmodell ist nicht erlaubt und das Hertz-Modell ist mit jeder Art von Bindung inkompatibel, da dieses Modell Zugkräfte nicht berücksichtigen kann.

Im Folgenden wird nur auf das lineare Steifigkeitsmodell eingegangen, da dieses bei der Modellierung angewandt wurde.

Dieses Modell wird durch die Spezifikation einer Normal- und einer Schersteifigkeit k_n und k_s definiert. Die Steifigkeit des Kontaktes zweier Partikel wird unter Annahme einer Serienschaltung der beiden Elementsteifigkeiten gebildet. Die Sekanten-Kontaktnormalsteifigkeit K^n ergibt sich dann wie folgt:

$$K^n = \frac{k_n^{[A]} k_n^{[B]}}{k_n^{[A]} + k_n^{[B]}} \quad \text{Gleichung 4.28}$$

und die Tangenten-Kontaktschersteifigkeit ergibt sich zu:

$$k^s = \frac{k_s^{[A]} k_s^{[B]}}{k_s^{[A]} + k_s^{[B]}} \quad \text{Gleichung 4.29}$$

wobei die Hochgestellten Indizes [A] und [B] die beiden Elemente kennzeichnen, welche in Kontakt stehen.

Beim Linearen Modell ist die Sekanten-Normalsteifigkeit gleich der Tangenten-Normalsteifigkeit. Es gilt also folgendes:

$$k^n = \frac{dF^n}{dU^n} = \frac{d(K^n U^n)}{dU^n} = K^n \quad \text{Gleichung 4.30}$$

4.5.2 Gleitmodell

Das Gleitmodell ist eine immanente Eigenschaft der beiden in Kontakt tretenden Elemente. Es behandelt keine Normalzugkraft und erlaubt Gleiten durch Beschränkung der Scherkraft. Dieses Modell ist immer aktiv, es sei denn, eine Kontaktbindung zwischen den Elementen ist vorhanden. In diesem Fall wird dem Bindungsmodell der Vorrang gegeben. Diese beiden Modelle beschreiben die Konstitutiven Eigenschaften des Kontaktpunktes.

Die Parallelbindung hingegen beschreibt eine zementartige Bindung zwischen zwei Bällen. Das Gleitmodell und die Parallelbindung können gleichzeitig auftreten. Außerdem können auch die beiden Bindungsmodelle (Kontaktbindung und Parallelbindung) miteinander verknüpft werden. In diesem Fall wird das Gleitmodell erst dann auf den Kontakt angewandt, nachdem die Kontaktbindung gebrochen ist.

Das Gleitmodell wird durch den Reibungskoeffizienten μ beeinflusst. Treten zwei Elemente mit unterschiedlichen Reibungskoeffizienten in Kontakt, so wird der niedrigere der beiden angewandt.

Ist keine Kontaktbindung vorhanden, wird der Kontakt auf Gleitung geprüft. Dazu wird die maximal zulässige Scherkraft anhand der Coulombschen Gleitbedingung

$$F_{\max}^s = \mu \cdot |F_i^n| \quad \text{Gleichung 4.31}$$

bestimmt und mit dem Betrag der Scherkraftkomponenten $|F_i^s|$ verglichen. Wird festgestellt, dass $|F_i^s| > F_{\max}^s$ ist, so ist beim nächsten Rechenschritt Gleiten zulässig und F_i^s wird wie folgt auf F_{\max}^s beschränkt:

$$F_i^s \leftarrow F_i^s \left(\frac{F_{\max}^s}{|F_i^s|} \right) \quad \text{Gleichung 4.32}$$

4.5.3 Bindungsmodell

PFC erlaubt das spezifizieren einer Bindung zwischen zwei Partikeln. Die beiden in PFC implementierten Bindungsmodelle sind:

- Kontaktbindung
- Parallelbindung

Während die Kontaktbindung für einen Punkt definiert wird und nur eine Kontaktkraft übertragen kann, wirkt die Parallelbindung auf einen kreisförmigen bzw. rechteckigen Querschnitt zwischen zwei Partikeln und ist in der Lage eine Kraft und ein Moment zu übertragen. Die beiden Modelle können gemeinsam aktiv sein. Eine Bindung existiert so lange, bis die Normal- oder Scherkraft die zulässige Festigkeit der Bindung in die jeweilige Richtung überschreitet. Es können nur Bälle untereinander verbunden werden.

4.5.3.1 Kontaktbindung

Die der Kontaktbindung zugrunde liegende Vorstellung kann der Abbildung 13 entnommen werden. Zwischen zwei Partikeln ist ein Paar elastischer Federn mit konstanter Normal- und Schersteifigkeit, welche am Kontaktpunkt wirken, installiert. Diese beiden Federn haben eine definierte Scher- und Zugsteifigkeit. Eine Kontaktbindung erlaubt auch eine Zugkraft zwischen den Partikeln wobei die Überlappung dann gleich Null ist. Der Wert der Normalzugkraft im Kontakt ist limitiert durch die maximal aufnehmbare Normalkraft der Kontaktbindung. Eine Kontaktbindung wird durch die folgenden zwei Parameter gesteuert:

- Bindungszugfestigkeit F_c^n (Kraft)
- Bindungsscherfestigkeit F_c^s (Kraft)

Es ist möglich einen Mittelwert und eine Standardabweichung für die beiden Werte festzulegen und somit eine gewisse Unregelmäßigkeit des modellierten Materials zu simulieren. Wenn die Beanspruchung des Kontaktes dessen Festigkeit überschreitet, bricht die Bindung und sowohl die Bindungsnormalkraft als auch die Bindungsscherkraft werden gelöscht. D.h. die Bindung geht als ganzes verloren, unabhängig davon welche der beiden Komponenten versagt. Ein Kontakt der beiden Partikel kann hingegen weiterhin bestehen auch wenn die Scherfestigkeit der Bindung überschritten wurde, vorausgesetzt die Normalkraft ist eine Druckkraft.

Die konstitutiven Beziehungen welche die Komponenten der Kontaktkräfte mit den relativen Verschiebungen verknüpfen, sind in Abbildung 13 dargestellt. F^n bezeichnet die

Kontaktnormalkraft, wobei $F^n > 0$ für eine Zugkraft steht; U^n ist die relative Verschiebung in Normalenrichtung, wobei $U^n > 0$ eine Überlappung bedeutet. F^s gibt den Wert der Kontaktscherkraft an; U^s ist die relative Verschiebung des Kontaktpunktes zu jenem Punkt an dem der Kontakt gebildet wurde. Zu jedem Zeitpunkt ist entweder das Kontaktmodell oder das Gleitmodell aktiv.

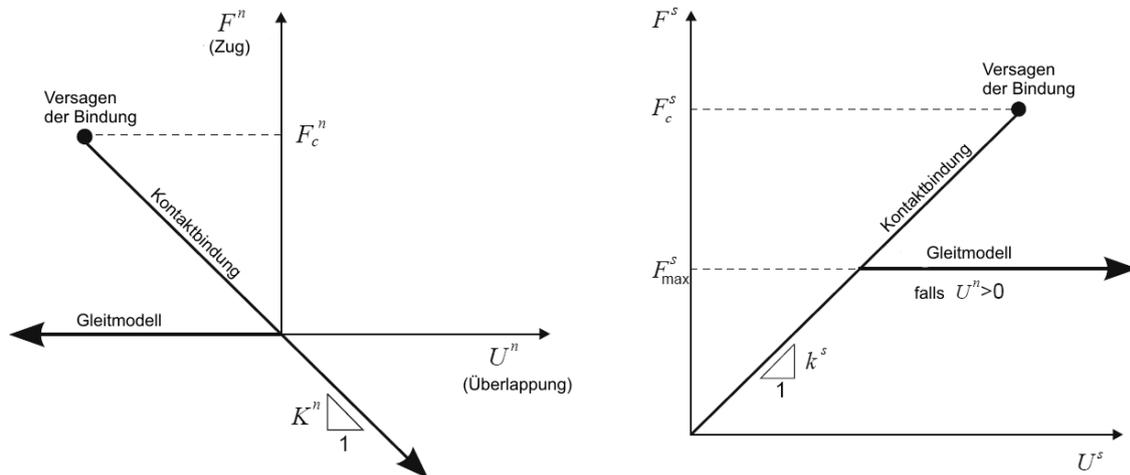


Abbildung 13: Konstitutive Beziehungen einer Kontaktbindung . Links: Normalkomponente; rechts Scherkomponente, ITASCA (2004), verändert

4.5.3.2 Parallelbindung

Die Parallelbindung beschreibt das Verhalten eines endlichen großen Bereiches eines zementartigen Materials zwischen zwei Partikeln. Diese werden entweder als Sphären oder Zylinder gehandhabt. Diese Bindungsart interagiert Parallel mit dem Gleitmodell bzw. dem Kontaktmodell und beschreibt eine elastische Bindung der beiden Partikel. Daher unterbindet das Vorhandensein einer Parallelbindung nicht die Möglichkeit des Gleitens. Sowohl eine Kraft als auch ein Moment kann durch die Bindung übertragen werden.

Treten zwei Partikel in Kontakt, so bildet deren Schnittfigur eine kreisförmige oder rechtwinklige Fläche ab. Innerhalb dieser Fläche werden nun elastische Federn mit konstanter Normal- und Schersteifigkeit gleichmäßig verteilt. Diese Federn wirken Parallel zu jenen, die im Kontaktpunkt über das Steifigkeitsmodell definiert sind. Auf Grund der Steifigkeit der Parallelbindung führt eine Relativverschiebung der Partikel, nach der Bildung der Parallelbindung, zu einer Kraft und einem Moment im Kontaktmaterial. Diese beiden Größen wirken dann auf die beiden Partikel und können in Beziehung mit der maximalen Normal- und Scherspannung innerhalb des Bindungsmaterials gebracht werden. Übersteigt eine dieser beiden Spannungen die entsprechende Festigkeit, bricht die Bindung.

Eine Parallelbindung ist durch die folgenden Parameter definiert (Um eine Verwechslung mit den Parametern der Kontaktbindung zu unterbinden, werden die mit der Parallelbindung in Verbindung stehenden Parameter durch einen hochgestellten Strich gekennzeichnet):

- Normalsteifigkeit \bar{k}^n
- Schersteifigkeit \bar{k}^s
- Normalfestigkeit $\bar{\sigma}_c$
- Scherfestigkeit $\bar{\tau}_c$
- Bindungsradius \bar{R}

Die resultierende Kraft und das resultierende Moment werden mit \bar{F}_i und \bar{M}_3 gekennzeichnet. Die Kraft \bar{F}_i kann in eine Normal- und eine Scherkomponente in Bezug auf die Kontaktebene zerlegt werden.

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^n + \bar{F}_i^s \quad \text{Gleichung 4.33}$$

Die eben Beschriebenen Kraftkomponenten sowie das Moment sind in Abbildung 14 dargestellt. Die Parallelbindung ist als endlich großes Element eines elastischen Materials abgebildet. Die Normalkraftkomponente kann durch folgende skalaren Größen beschrieben werden.

$$\bar{F}_i^n = (\bar{F}_j n_j) n_i = \bar{F}^n n_i \quad \text{Gleichung 4.34}$$

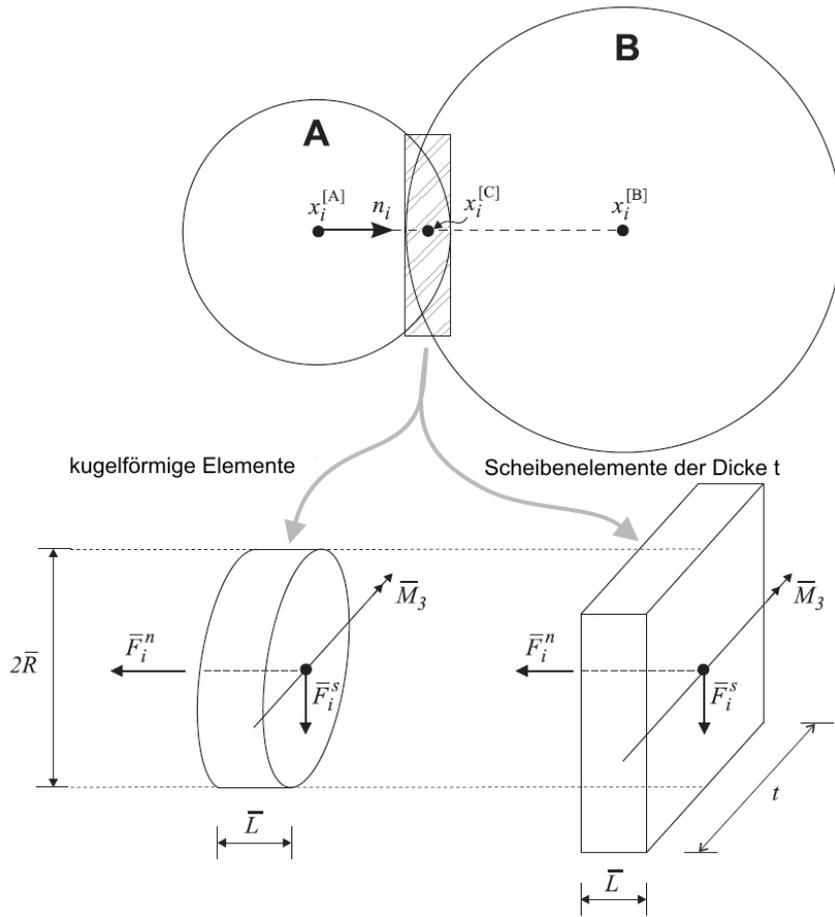


Abbildung 14: Parallelbindung, ITASCA (2004), verändert

Bei Bildung einer Bindung, werden \bar{F}_i und \bar{M}_3 zu Null gesetzt. Jede anschließende Relativverschiebung und -Verdrehung führt zu einem Inkrement der Kraft und des Momentes. Diese Inkremente werden über die Berechnungsschritte aufsummiert. Die elastischen Inkremente der Kraft und des Momentes sind für einen Berechnungsschritt wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\Delta \bar{F}_i^n &= (-\bar{k}^n A \Delta U^n) n_i \\ \Delta \bar{F}_i^s &= -\bar{k}^s A \Delta U_i^s \\ \Delta \bar{M}_3 &= -\bar{k}^n I \Delta \mathcal{G}_3\end{aligned}\tag{Gleichung 4.35}$$

Wobei

$$\begin{aligned}\Delta U_i &= V_i \cdot \Delta t \\ \Delta \mathcal{G}_3 &= (\omega_3^{[B]} - \omega_3^{[A]}) \Delta t\end{aligned}\tag{Gleichung 4.36}$$

bedeuten.

Die Kontaktgeschwindigkeit V_i ist nach Gleichung 4.7 definiert.

A ist die Fläche und I das Trägheitsmoment des Bindungsquerschnittes bezogen auf eine Achse welche durch den Kontaktpunkt und die Richtung $\Delta\mathcal{G}_3$ definiert ist. Je nach verwendetem Modell (Scheibe oder Kugel) ergeben sich diese Werte wie folgt:

$$A = \begin{cases} \pi \bar{R}^2 & (\text{Kugel}) \\ 2\bar{R}t & (\text{Scheibe mit Dicket}) \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} 1/4\pi\bar{R}^4 & (\text{Kugel}) \\ 2/3t\bar{R}^3 & (\text{Scheibe mit Dicket}) \end{cases}$$

Gleichung 4.37

Nach jedem Berechnungsschritt werden dann die Vektoren der Kraft und des Momentes aus den Gleichung 4.38 bestimmt.

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^n &\leftarrow \bar{F}^n n_i + \Delta\bar{F}_i^n \\ \bar{F}_i^s &\leftarrow \bar{F}_i^s + \Delta\bar{F}_i^s \\ \bar{M}_3 &\leftarrow \bar{M}_3 + \Delta\bar{M}_3 \end{aligned}$$

Gleichung 4.38

Der Maximalwert der Zug- und Scherspannung, welche auf den Rand der Bindung wirken, werden nach Gleichung 4.39 bestimmt.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\frac{\bar{F}^n}{A} + \frac{|\bar{M}_3|}{I} \bar{R} \\ \tau_{\max} &= \frac{|\bar{F}_i^s|}{A} \end{aligned}$$

Gleichung 4.39

Falls nun, entweder die Zugfestigkeit ($\sigma_{\max} \geq \bar{\sigma}_c$) oder die Scherfestigkeit ($\tau_{\max} \geq \bar{\tau}_c$) überschritten wird, bricht die Bindung.

Falls die Festigkeiten nicht überschritten werden, und somit die Bindung nicht bricht, tragen die Bindungsspannungen aus Gleichung 4.39 wie folgt zur resultierenden Spannung beider Partikel bei.

$$\begin{aligned} F_i^{[A]} &\leftarrow F_i^{[A]} - \bar{F}_i \\ F_i^{[B]} &\leftarrow F_i^{[B]} - \bar{F}_i \\ M_3^{[A]} &\leftarrow M_3^{[A]} - e_{3,jk} \left(x_j^{[C]} - x_j^{[A]} \right) \bar{F}_k - \bar{M}_3 \\ M_3^{[B]} &\leftarrow M_3^{[B]} - e_{3,jk} \left(x_j^{[C]} - x_j^{[B]} \right) \bar{F}_k + \bar{M}_3 \end{aligned}$$

Gleichung 4.40

Hier bedeuten $F_i^{[\Phi]}$ und $M_3^{[\Phi]}$ die Summe der Kräfte und Momente für das Partikel Φ . \bar{F}_i wird nach Gleichung 4.33 bestimmt.

4.6 Mechanische Dämpfung

Die kinetische Energie der Partikel wird im Zuge der Berechnung durch die zwischen den Partikeln stattfindende Reibung umgewandelt. Häufig reicht jedoch der Reibungswiderstand nicht aus um das Modell nach einer vernünftigen Anzahl an Berechnungsschritten zum stillstand zu bringen, oder es ist gar keine Umwandlung der Energie infolge Reibung vorgesehen. Deshalb stellt PFC andere Dämpfungsmodelle zur Verfügung. Diese sind: Lokale nichtviskose Dämpfung, eine viskose geschwindigkeitsproportionale Dämpfung und ein kombiniertes Dämpfungsmodell. Die nichtviskose lokale, und kombinierte Dämpfung greifen auf das Partikel direkt ein, die viskose Dämpfung hingegen auf den Kontakt der Elemente.

4.6.1 Lokale nichtviskose Dämpfung

Diese, in PFC implementierte Dämpfungsart entspricht dem von CUNDALL (1987) beschriebenen Verfahren. Ein zusätzlicher Term, welcher die Dämpfung beschreibt, wird der zweiten Newtonschen Bewegungsgleichung hinzugefügt,

$$F_{(i)} + F_{(i)}^d = M_{(i)} A_{(i)}; \quad i = 1 \dots 6$$

$$M_{(i)} A_{(i)} = \begin{cases} m\ddot{x}_{(i)}, & \text{for } i = 1 \dots 2 \\ I\dot{\omega}_{(3)}, & \text{for } i = 4 \dots 6 \end{cases} \quad \text{Gleichung 4.41}$$

wobei $F_{(i)}$, $M_{(i)}$ und $A_{(i)}$ die generalisierten Kräfte, Massen, und Beschleunigungskomponenten darstellen. $F_{(i)}$ beinhaltet die Wirkung der Gravitation; $F_{(i)}^d$ ist die Dämpfungskraft.

$$F_{(i)}^d = -\alpha |F_{(i)}| \text{sign}(V_{(i)}); \quad i = 1 \dots 3$$

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} +1, & \text{falls } y > 0; \\ -1, & \text{falls } y < 0; \\ 0, & \text{falls } y = 0 \end{cases} \quad \text{Gleichung 4.42}$$

Die generalisierten Geschwindigkeiten ergeben sich dann zu:

$$V_{(i)} = \begin{cases} \dot{x}_{(i)}, & \text{für } i = 1 \dots 3 \\ \omega_{(i-3)}, & \text{für } i = 4 \dots 6 \end{cases} \quad \text{Gleichung 4.43}$$

Die Dämpfungskraft wird durch die Dämpfungskonstante α , welche einen Grundwert von 0,7 hat, gesteuert und kann für jedes einzelne Partikel separat gesetzt werden. Diese Dämpfungsart hat folgende Vorteile:

- 1) Nur eine beschleunigte Bewegung wird gedämpft. D.h. eine stationäre Bewegung wird nicht gedämpft.
- 2) Der Dämpfungskoeffizient ist dimensionslos.
- 3) Weil die Dämpfung Frequenzunabhängig ist, werden Bereiche des Modells, die unterschiedliche Eigenschwingungen haben trotzdem gleichmäßig gedämpft, sofern sie die selbe Dämpfungskonstante haben.

Dabei ist das Ausmaß der Dämpfung unabhängig von der Dauer des Berechnungszeitschrittes, und somit hängt der Energieverlust nicht vom Zyklus ab. Die Dämpfung ist der Bewegungsrichtung immer entgegengesetzt und ergibt sich aus den angreifenden Kräften. Im Unterschied dazu, hängt die viskose Dämpfung von der Größe der Geschwindigkeit ab.

4.6.2 Viskose Dämpfung

Ist diese Dämpfungsart aktiv, wird jedem Kontakt ein Dämpfungselement (Newtonscher Dämpfer) hinzugefügt. Diese Dämpfungselemente agieren parallel mit dem existierenden Kontaktmodell. Eine Darstellung des eben beschriebenen Modells kann Abbildung 15 entnommen werden. Eine Dämpfungskraft wird der Kontaktkraft hinzugefügt, deren Normalkomponente D^n und Scherkomponente D^s wie folgt bestimmt sind.

$$\begin{aligned} D^n &= c_n |V^n| \\ D^s &= c_s |V^s| \end{aligned} \quad \text{Gleichung 4.44}$$

Dabei kennzeichnen c_n und c_s die Dämpfungskonstanten in Normal- und Scherrichtung und V^n , V^s die Kontaktgeschwindigkeiten in Normal- und Scherrichtung. Die Dämpfungskraft wirkt entgegen die Bewegungsrichtung. Die Dämpfungskonstanten werden nicht direkt eingegeben sondern ergeben sich aus folgenden Gleichungen durch Angabe eines kritischen Dämpfungsverhältnisses in Normal- und Scherrichtung (β_s und β_n).

$$\begin{aligned} c_n &= \beta_n c_n^{crit} \\ c_s &= \beta_s c_s^{crit} \end{aligned} \quad \text{Gleichung 4.45}$$

wobei c_n^{crit} und c_s^{crit} die kritischen Dämpfungskonstanten sind und durch Gleichung 4.46 bestimmt werden.

$$\begin{aligned} c_n^{crit} &= 2m\omega_n = 2\sqrt{mk_n} \\ c_s^{crit} &= 2m\omega_s = 2\sqrt{mk_s} \end{aligned} \quad \text{Gleichung 4.46}$$

Dabei sind ω_n und ω_s die Eigenfrequenzen des Systems, k_n und k_s die Kontaktsteifigkeiten. m stellt die effektive Masse des Systems dar. Die effektive Masse m ergibt sich aus Gleichung 4.47

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{Gleichung 4.47}$$

Die viskose Dämpfung wird durch die Angabe des Verhältnisses β gesetzt (GINSBERG und GENIN, 1984). Falls $\beta=1$ ist, nennt man dies eine kritische Dämpfung. Damit meint man, dass die Antwort des Systems so rasch als möglich gegen Null abklingt. Ist die Variable $\beta < 1$ gesetzt so nennt man dies eine unterkritische bzw. leichte Dämpfung. Wird die Variable auf einen Wert $\beta > 1$ gesetzt so wird die Dämpfung als überkritisch bzw. stark bezeichnet.

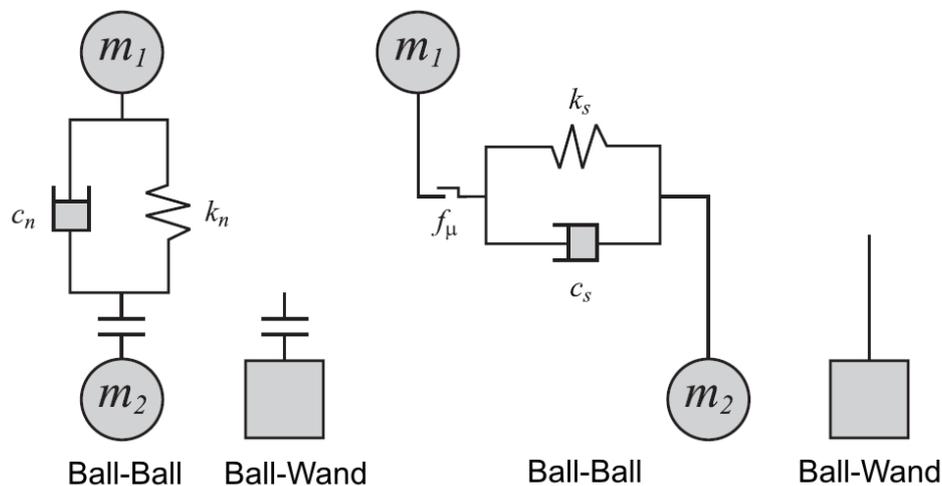


Abbildung 15: viskoses Dämpfungsmodell, ITASCA (2004), verändert

4.7 Bestimmung der Materialparameter

Eine direkte Eingabe der Gebirgsparameter (Kohäsion c und Reibungswinkel φ) in PFC ist nicht möglich. Daher muss über geeignete Prüfverfahren von den Mikroparametern der Partikel und der Bindungen zwischen den Partikeln auf die Eigenschaften des generierten Modells geschlossen werden. Dies geschieht unter Zuhilfenahme der von ITASCA zur Verfügung stehenden Algorithmen, welche eine Simulation eines Biaxialtests und Braziliantests in PFC^{2D} ermöglichen. Die Versuchsanordnung und Annahmen die den Tests zu Grunde liegen werden in den folgenden Kapiteln behandelt.

4.7.1 Einaxialer Druckversuch

Der Versuchsaufbau für einen einaxialen Druckversuch kann der Abbildung 16 entnommen werden.

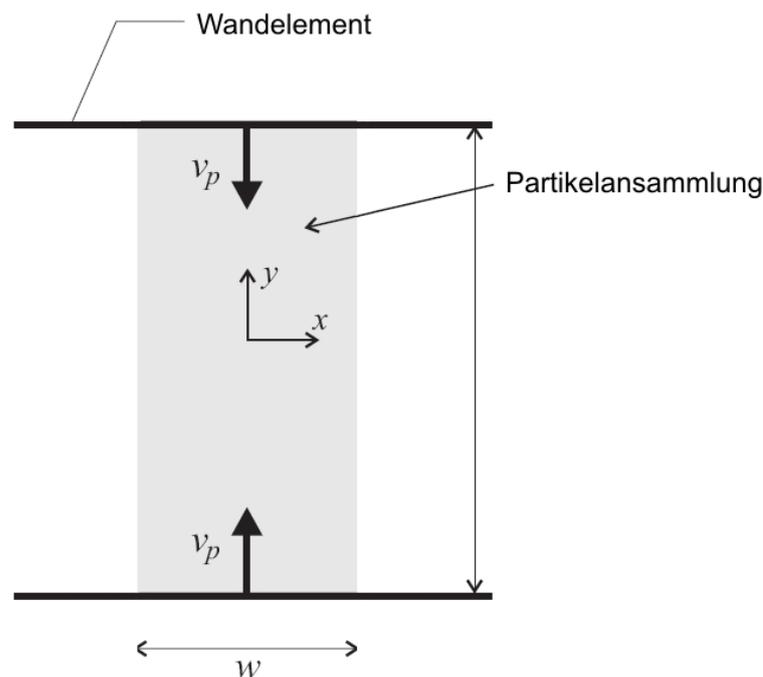


Abbildung 16: Skizze des einaxialen Druckversuches, ITASCA (2004), verändert

Als einaxiale Druckfestigkeit wird die Druckfestigkeit von Proben bei ungehinderter Seitendehnung bezeichnet. Sie wird bei vorgegebener Belastungsgeschwindigkeit bestimmt. Die einaxiale Druckfestigkeit ergibt sich aus dem Quotient der maximalen Druckkraft F und der Querschnittsfläche A .

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Gleichung 4.48

Die Stauchung ε der Probe ergibt sich aus dem Quotient der Änderung der Höhe der Probe Δh zur Anfangshöhe der Probe h_a .

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_a} \quad \text{Gleichung 4.49}$$

Der maßgebliche Querschnitt A wird aus der Beziehung

$$A = \frac{A_0}{1 - \varepsilon} \quad \text{Gleichung 4.50}$$

berechnet. Darin ist A_0 der Querschnitt der Probe bei Versuchsbeginn.

Die Abmessung des Prüfkörpers wurde mit 5x10 Metern so gewählt, dass dieselbe Größe der Partikel wie im endgültigen Berechnungsmodell verwendet werden konnte. Nach Abschluss der Simulation kann die Spannungs-Dehnungs-Beziehung dargestellt und der Maximalwert der Druckspannung ausgelesen werden. Eine Darstellung des Rissbildes gibt Aufschluss über den Versagungsmodus.

4.7.2 Biaxialtest

Ein Biaxialtest ist dadurch gekennzeichnet, dass der Seitendruck bei gleichmäßig zunehmender vertikaler Belastung, konstant gehalten wird. Dies wird in PFC durch einen Servo-Mechanismus, der die Bewegung der Seitenwände steuert, gewährleistet.

Bei der Simulation eines Biaxialtests in PFC werden alle Wände als Reibungslos angenommen. Die vier Wände, welche zur Generierung des Partikelensembles notwendig sind, werden auch verwendet, um den Biaxialtest durchzuführen. Dabei wird die Normalsteifigkeit der Seitenwände herabgesetzt um eine möglichst gute Übereinstimmung mit einem realen Biaxialtest, wie er im Labor durchgeführt werden würde, zu erzielen.

Als Probekörper wurde wieder ein Rechteck mit den Abmessungen 5x10 Metern gewählt. Wie aus dem Einaxialen Druckversuch kann hier die maximale Druckspannung bei konstant gehaltenem Seitendruck ermittelt werden.

Während der Versuchsdurchführung werden die aufgeprägten Spannungen und Dehnungen, Energiegrößen und Mikrorisse aufgezeichnet. Für die Kalibrierung ist vor allem der Verlauf des deviatorischen Spannungsanteils $\sigma_d = \sigma_y - \sigma_x$ und dessen Maximalwert $|\sigma_d|$ von Bedeutung.

Der Biaxialtest gibt Aufschluss über den Elastizitätsmodul E , die Querdehnungszahl ν , die maximale Druckfestigkeit unter konstantem Seitendruck, die Lage der Proportionalitätsgrenze und die Anzahl der Scher- und Zugrisse. Wie diese Parameter bestimmt werden, kann unter Annahme einer Kontaktbindung, dem Kapitel 5.4.1.1 entnommen werden.

Abbildung 17 zeigt eine schematische Darstellung des Biaxialversuches.

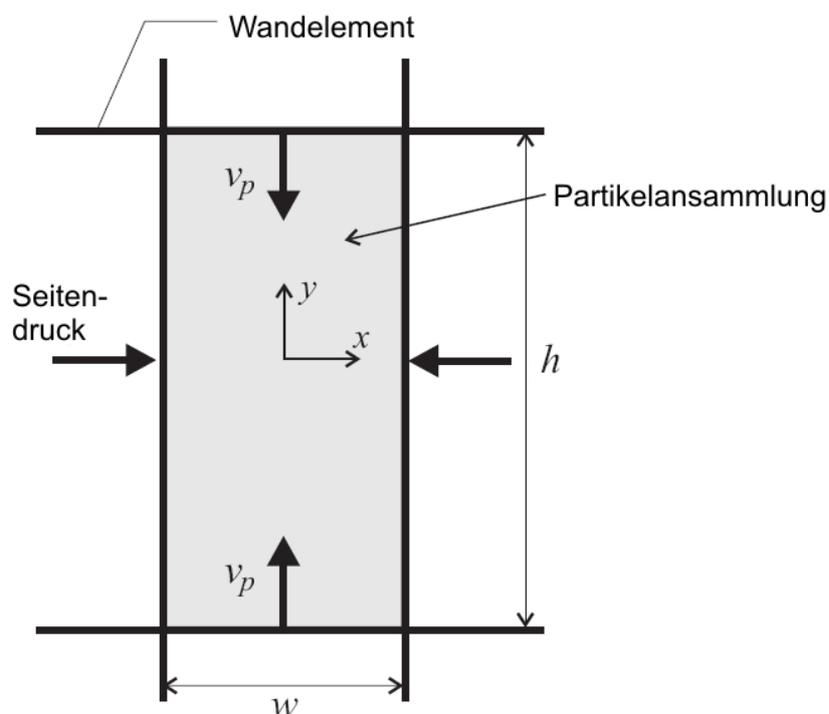


Abbildung 17: Skizze zum Biaxialtest, ITASCA (2004), verändert

4.7.3 Braziliantest

Der Braziliantest, oder Scheibendruckversuch, stellt eine Möglichkeit dar, die Zugfestigkeit auf indirektem Wege zu bestimmen. Ein scheibenförmiger Prüfkörper wird entlang zweier einander gegenüberliegender Streifen der Mantelfläche durch Druck (in y-Richtung) belastet. Dadurch entstehen Zugspannungen im inneren Bereich des Probekörpers, welche normal zur Richtung der äußeren Druckkraft verlaufen.

Die Spannungen, welche im Probekörper auftreten, können mit den folgenden Formeln bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{-2F}{\pi d} \left\{ \frac{x^2(R-y)}{\beta_1^4} + \frac{x^2(R+y)}{\beta_2^4} - \frac{1}{2R} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{-2F}{\pi d} \left\{ \frac{(R-y)^3}{\beta_1^4} + \frac{(R+y)^3}{\beta_2^4} - \frac{1}{2R} \right\} \\ \sigma_{xy} &= \frac{-2F}{\pi d} \left\{ \frac{x(R-y)^2}{\beta_1^4} + \frac{x(R+y)^2}{\beta_2^4} \right\}\end{aligned}\quad \text{Gleichung 4.51}$$

Darin bedeuten σ_i , Spannung in die jeweilige Richtung; F , Druckkraft; R , Radius der Scheibe und d , Dicke der Scheibe. Die Werte β ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\beta_1^2 &= (R-y)^2 + x^2 \\ \beta_2^2 &= (R+y)^2 + x^2\end{aligned}\quad \text{Gleichung 4.52}$$

Es ist zu erkennen, dass das Spannungsmaximum in der Scheibenmitte in x-Richtung auftritt. Es handelt sich dabei um eine Zugspannung. Wird für die Koordinaten x und y der Mittelpunkt der Scheibe gewählt, also $x=y=0$ eingesetzt, so ergibt sich die maximal auftretende Spannung zu

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\pi \cdot d \cdot R}\quad \text{Gleichung 4.53}$$

Wenn die Belastung einen kritischen Wert erreicht hat, kommt es zu einem von der Mitte ausgehenden diametral verlaufenden Trennbruch.

Eine Darstellung des Versuchskörpers kann Abbildung 18 entnommen werden.

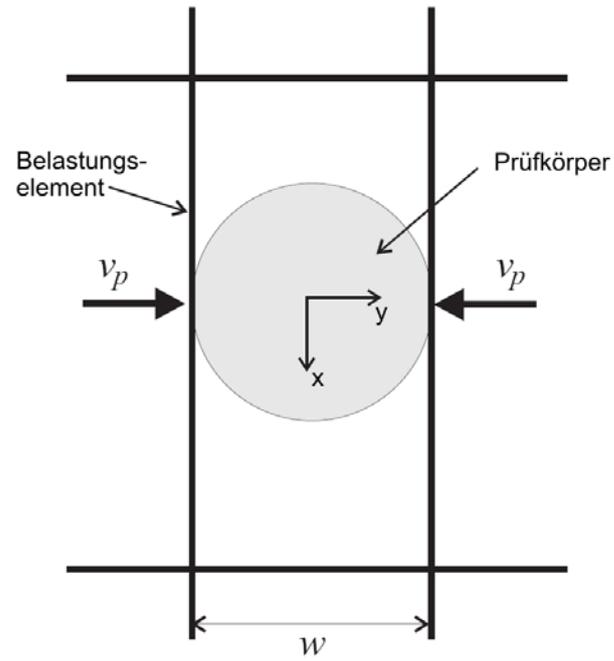


Abbildung 18: Prüfkörper zum Braziliantest, ITASCA (2004), verändert

5 Modellrechnung

5.1 Partikelgenerierung

Bei einem Programm wie PFC ist es nicht möglich von vornherein eine Partikelanordnung mit den gewünschten Eigenschaften zu generieren, weil es keinen eindeutigen Weg gibt, eine definierte Anzahl an Partikeln in einem Volumen zu verteilen. Der Initiale Spannungszustand kann nicht unabhängig von der gewählten Packung (Partikelgröße, Porosität) eingegeben werden, da Kontaktkräfte zwischen den Partikeln bei der Generierung entstehen. Für die Generierung des hier analysierten Modells wurde die Methode der Radiusexpansion für die Partikelgenerierung angewandt. Im ersten Schritt werden die Modellgrenzen festgelegt und durch Wandelemente beschränkt. Der Innenraum, welcher durch die vier Wandelemente entsteht wird mit einer irregulären Partikelanordnung, die jedoch eine definierte Porosität und Partikelgrößenverteilung aufweist, gefüllt. Dabei ist zu beachten, dass die Porosität nicht beliebig klein gewählt werden kann, da für jede Partikelgrößenverteilung eine dichteste Lagerung existiert. Folgende Gleichungen beschreiben den Hohlraumanteil einer Partikelanordnung.

$$\text{Porosität } n = \frac{V_p}{V_{tot}} \quad \text{Gleichung 5.1}$$

$$\text{Porenzahl } e = \frac{V_p}{V_s} \quad \text{Gleichung 5.2}$$

V_p stellt das Volumen der Poren, V_{tot} das Gesamtvolumen und V_s das Volumen der Partikel dar. Der von den Wandelementen umschlossene Raum wird also mit zufällig verteilten Partikeln gefüllt. Dies erfolgt mittels des Befehls „Generate“. Da dieser Befehl jedoch eine Überlappung der Partikel nicht zulässt, ist es notwendig zuerst eine Gruppe von Partikeln mit verkleinertem Radius zu generieren. In einem zweiten Schritt wird dieser Radius dann expandiert bis die gewünschte Porosität erreicht wird. Durch die Radiusexpansion entsteht kein homogener Zustand da Bereiche vorhanden sind in denen kein Partikel zu finden ist und andere in denen große Überlappungen der Partikel vorhanden sind. Durch Berechnung des Gleichgewichtes verteilen sich die Partikel im Raum. Trotz Verteilung sind immer noch Überlappungen der Partikel vorhanden, aus denen Kontaktkräfte zwischen den Partikeln resultieren. Diese Kontaktkräfte müssen in einem weiteren Schritt reduziert werden, da dieser Spannungszustand sonst den gewollten gravitativen Spannungszustand komplett überprägen würde. Ohne eine Reduktion, wäre eine Spannungsumlagerung hin zum Initialspannungszustand wie in Abbildung 20 dargestellt nicht realisierbar. Diese Manipulation geschieht über die geringfügige Änderung der Radien der Partikelansammlung bis sich eine gewünschte durchschnittliche Spannung innerhalb der Packung einstellt. Ein

weiterer Nebeneffekt ist der Anstieg der scheinbaren Porosität infolge des Flächenverlustes des Feststoffanteiles (Überlappung). Dieser Effekt ist jedoch gering und wird in dieser Arbeit vernachlässigt. Im letzten Schritt der Partikelgenerierung werden die so genannten Floater entfernt. Dies sind Partikel mit weniger als zwei Partikelkontakten im zweidimensionalen Fall und Partikel mit weniger als drei Partikelkontakten im dreidimensionalen Fall. Eine Behandlung dieser Partikel ist deshalb notwendig, weil diese keinen Kontakt zur Materialmatrix besitzen und zu unkontrollierten Bewegungen innerhalb des freien Raumes neigen. Diese werden entfernt, indem deren Radius so lange vergrößert wird bis ein weiterer Kontakt entweder mit einem anderen Partikel oder einem Wandelement entsteht.

Die grundsätzliche Vorgehensweise zur Modellgenerierung ist in Abbildung 19 dargestellt.

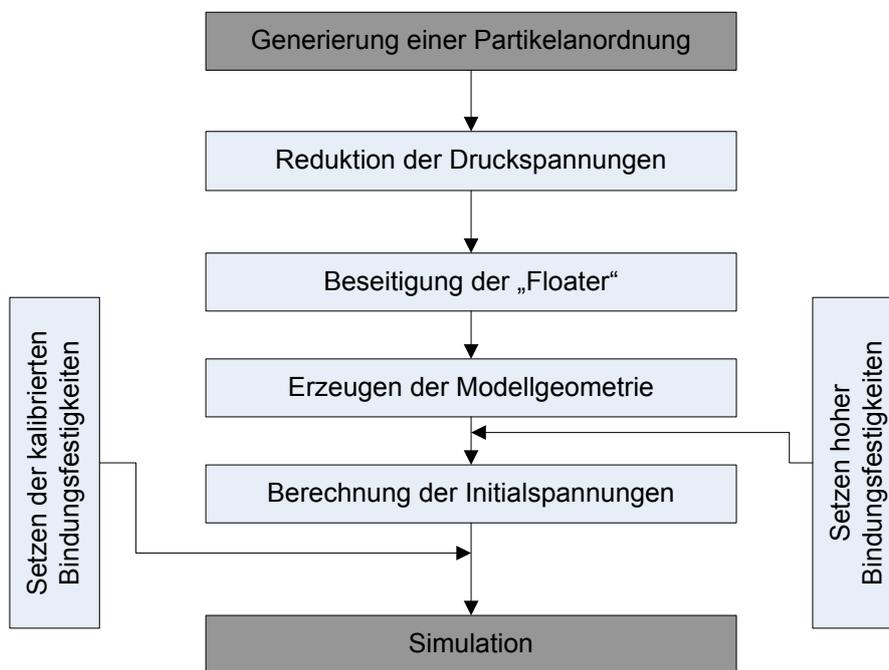


Abbildung 19: Vorgehensweise bei der Modellerstellung , PREH (2004), verändert

5.2 Berechnung der Initialspannungen und setzen der Randbedingungen

Nach der Generierung der Partikel wird der Deckel des Modells entfernt und die Gravitation aktiviert. Um nur elastische Deformationen zu berechnen, werden die Partikel durch eine hohe Kontaktkraft miteinander verbunden und die Bindungsfestigkeit so hoch gesetzt, dass ein Versagen (plastische Verformungen) verhindert wird. Abbildung 20 zeigt den Initialspannungszustand (Kontourplot der Vertikalspannungen σ_{yy}) des Modells.

Die Wandreibung, der zur Partikelgenerierung notwendigen Begrenzungsebenen (Wandelemente) wird herabgesetzt um eine möglichst freie Bewegung zu ermöglichen. Der Widerstand welcher auf jene Partikel wirkt, welche entlang einer Begrenzungswand gleiten soll damit minimiert werden. Die Wandreibung bleibt zu jedem Zeitpunkt gering, wird also auch während der Berechnung nicht erhöht. Außerdem wurden die Partikel, welche sich in einem geringeren Abstand als zwei Metern zur unteren Begrenzungswand befinden, fixiert. Wird diese Fixierung der Lage nicht vorgenommen gelten nur die Randbedingungen welche durch die Wände definiert werden. Dies kann jedoch zur Folge haben, dass sich die Partikel ungehindert von der Wand wegbewegen können und so bei Zugbelastung eine Kluft zwischen der Wand und einem gebundenen Partikelensemble entsteht.

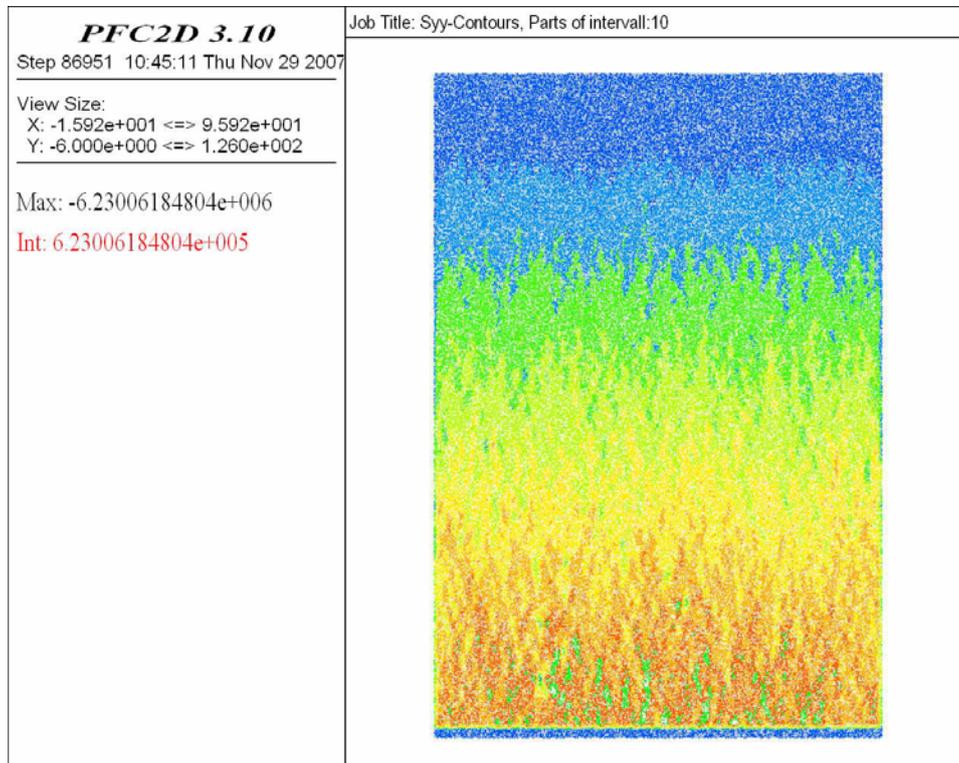


Abbildung 20: Kontourplot der Inisutspannungen

5.3 Wahl eines Kontaktmodells und der Materialparameter

Eine theoretische Definition der Bindungsmodelle kann dem Abschnitt 4.5.3 entnommen werden. Hier wird auf die für die Kalibration wichtigen Punkte eingegangen. Bei Verwendung eines Modells mit Kontaktbindung benötigt man 5 Parameter um das Verhalten zu definieren. Wird ein Modell mit Parallelbindungen zwischen den Partikeln verwendet so müssen 8 Parameter kalibriert werden. Zu beachten ist jedoch, dass weder das Kontaktmodell, noch das Parallelbindungsmodell eine Abhängigkeit der Scherfestigkeit von der Normalspannung berücksichtigen.

5.4 Grundsätzliches zum Kalibrationsprozess

Die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Kalibration kann nachstehender Abbildung entnommen werden. Welche Parameter kalibriert werden müssen, hängt vom verwendeten Bindungsmodell ab.

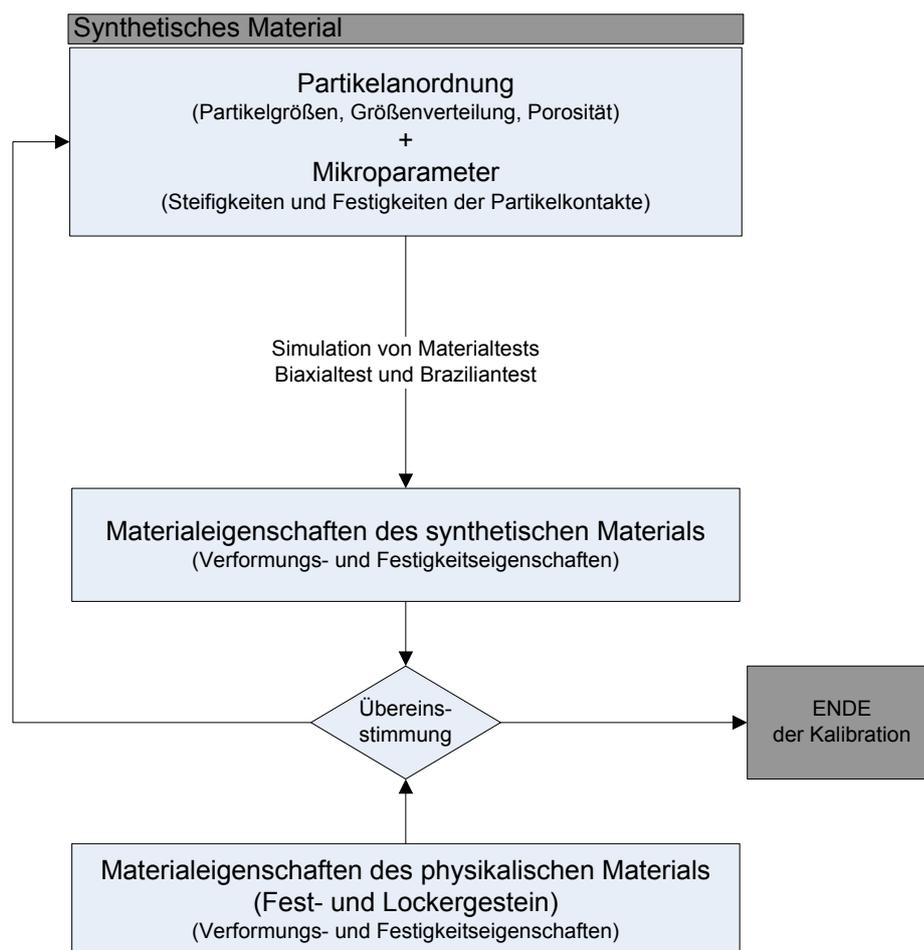


Abbildung 21: Flussdiagramm des Kalibrationsprozesses, PREH (2004), verändert

5.4.1 Kontaktbindung

Eine Kontaktbindung stellt eine Kombination eines Hook- (konstante Normal- und Schersteifigkeit) und eines St. Venant-Körpers (konstante Zug- und Scherfestigkeit) dar. Gleiten und Rollen sind bei intakter Bindung ausgeschlossen. Das Überschreiten einer Bindungsfestigkeit, Normal- oder Scherfestigkeit, bringt eine Auflösung des gesamten Kontaktes mit sich.

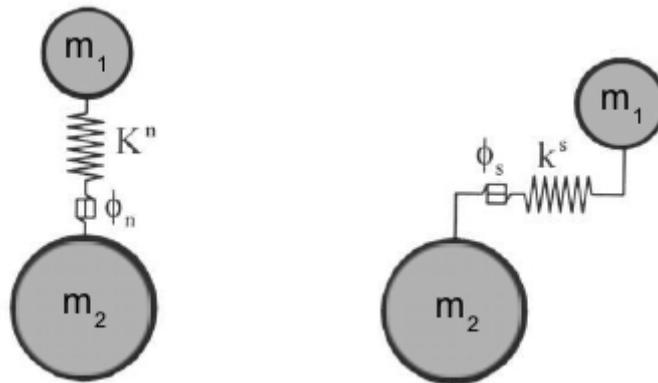


Abbildung 22: Kontaktbindungsmodell, PREH (2004), verändert

In Abbildung 22 bedeuten: K^n , Kontaktnormalsteifigkeit; Φ_n , Zugfestigkeit; K^s , Kontaktschersteifigkeit und Φ_s , Scherfestigkeit.

5.4.1.1 Kalibrieren der Gesteinsparameter

Das Programm PFC erlaubt die Modellierung eines Materials durch Definition folgender Mikroparameter:

- Kontaktmodul E_c
- Verhältnis der Normal- zur Schersteifigkeit k_n / k_s
- Reibungskoeffizient μ
- Normalfestigkeit σ_c
- Scherfestigkeit τ_c

Diesen stehen folgenden Makroparametern des Materials gegenüber. Diese Parameter beschreiben das Materialverhalten des Ensembles.

- Kohäsion c
- Innerer Reibungswinkel φ
- Elastizitätsmodul E
- Querdehnungszahl ν

Eine direkte Eingabe der Makroparameter im Programm PFC^{2D} ist nicht möglich, weshalb die Mikroparameter mit Hilfe geeigneter Kalibrierungsprozesse variiert werden müssen, bis das Versagensbild jenem des gewünschten Materials entspricht. Die Antwort des synthetischen Materials wird Anhand eines einaxialen Druckversuches, eines Biaxialtests und einem Braziliantest wie in Abschnitt 4.7 beschrieben, dem des physikalischen Materials angenähert.

Die Verformbarkeit eines PFC-Materials wird durch die Definition des Kontaktmoduls E_c für die Partikelkontakte und des Verhältnisses der Partikelsteifigkeiten k_n/k_s (Normal- zu Schersteifigkeit) definiert. Dies bedeutet dass die Verformbarkeit eine Funktion des Kontaktmoduls und des Verhältnisses der Partikelsteifigkeiten darstellt.

$$\text{Verformbarkeit} = f\left(E_c, \frac{k_n}{k_s}\right)$$

$$E_c = \frac{k_n}{2 \cdot t} \quad \text{Gleichung 5.3}$$

In Gleichung 5.3 stellt t die Dicke der betrachteten Scheibe dar.

Die Ermittlung der Bindungsfestigkeit Φ_n und Φ_s erfolgt für jeden Kontakt unter Anwendung der Gleichungen 5.4 und 5.5. Dabei können die Mikroparameter der Kontaktfestigkeit normalverteilt eingegeben werden. Dies geschieht durch Spezifikation eines Mittelwertes und einer dazugehörigen Standardabweichung der Zug- und Scherfestigkeit σ_c und τ_c . Ist kein Kontakt vorhanden, oder bricht dieser, so wird das Verhalten am Kontaktpunkt durch den Reibungskoeffizienten μ gesteuert.

$$\Phi_n = \sigma_c \cdot 2 \cdot \tilde{R} \cdot t \quad \text{Gleichung 5.4}$$

$$\Phi_s = \tau_c \cdot 2 \cdot \tilde{R} \cdot t$$

Gleichung 5.5

Darin ist \tilde{R} der mittlere Partikelradius.

5.4.1.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls und der Querdehnungszahl

Der Elastizitätsmodul und die Querdehnungszahl wird über die beiden Mikroparameter E_c (Partikelmodul) und k_n/k_s (Steifigkeitsverhältnis) bestimmt. Um ein elastisches Materialverhalten zu erzwingen werden die Bindungsfestigkeiten sehr hoch gesetzt damit ein Versagen zwischen den Partikeln ausgeschlossen werden kann. Mit Hilfe eines Biaxialtests wird dann der E-Modul bzw. die Querdehnungszahl bestimmt. Für eine definierte Partikelanordnung (Größe, Verteilung) und ein definiertes Verhältnis von k_n/k_s , ist der Elastizitätsmodul linear abhängig vom Kontaktmodul E_c .

Die Poissonsche Zahl welche mit Hilfe eines Biaxialtests in PFC^{2D} ermittelt wird, beruht auf der Annahme eines ebenen Spannungszustandes (mit $\sigma_z=0$) und konstanter Horizontalspannung ($\Delta\sigma_x=0$). Sie ergibt sich aus dem negativen Verhältnis der Dehnung $\Delta\varepsilon_x$ zur Dehnung $\Delta\varepsilon_y$.

$$\nu' = \frac{\Delta\varepsilon_x}{\Delta\varepsilon_y}$$

Gleichung 5.6

Für die Berechnung werden jene Dehnungsinkremente verwendet, welche von Beginn des Biaxialtests bis zu jenem Punkt stattgefunden haben, an dem die Hälfte der maximalen Spannung auftritt. Die Poissonsche Zahl, welche einem ebenen Verzerrungszustand entspräche, kann dann mit Hilfe der Formel von UGURAL und FENSTER (1987) bestimmt werden.

$$\nu = \frac{\nu'}{1 + \nu'}$$

Gleichung 5.7

Die in PFC^{2D} berechnete Poissonsche Zahl hängt bei einem Material mit Kontaktkräften im Wesentlichen vom Verhältnis der Partikelsteifigkeiten k_n/k_s ab. Bei Vergrößerung des Verhältnisses, vergrößert sich auch der Wert der Querdehnungszahl ν . Die so ermittelte Querdehnungszahl ist jedoch nicht direkt mit der des realen Materials vergleichbar, da weder die Bedingungen eines ebenen Spannungszustandes, noch jene eines ebenen Verzerrungszustandes, erfüllt sind. Für eine erste Abschätzung kann das Verhältnis der Partikelsteifigkeiten gleich dem Verhältnis von Elastizitäts- zu Schubmodul des Materials gesetzt werden.

$$\frac{k_n}{k_s} = \frac{E}{G} = 2 \cdot (1 + \nu)$$

Gleichung 5.8

Abbildung 23 zeigt die Abhängigkeit der Querdehnzahl vom Verhältnis der Partikelsteifigkeiten k_n/k_s , ermittelt für das Materialmodell eines Lac du Bonnet Granits (POTYONDY & CUNDALL, 2001)

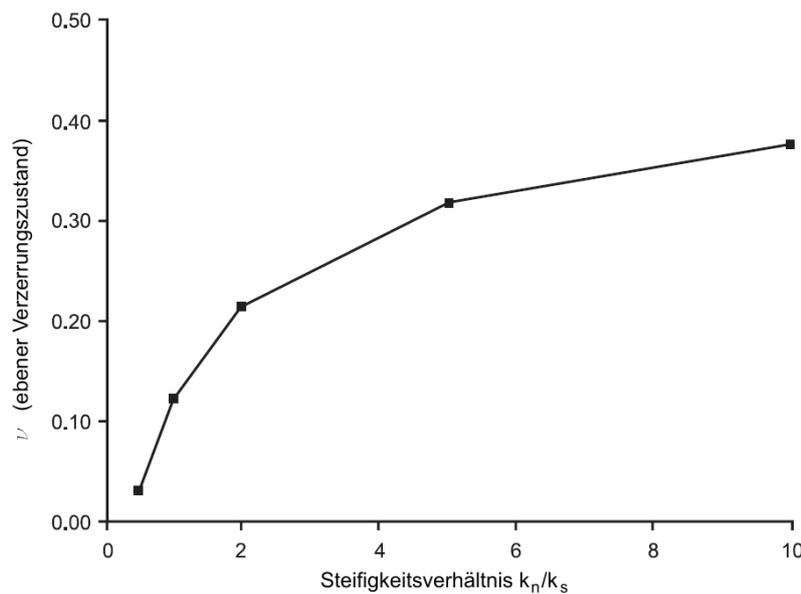


Abbildung 23: Relation zwischen dem Steifigkeitsverhältnis und Querdehnungszahl für ein Lac du Bonnet Granit, POTYONDY UND CUNDALL, (2001)

5.4.1.3 Bestimmung der Druckfestigkeit (Peak)

Für ein konstantes Verhältnis von Standardabweichung zum Mittelwert der Festigkeiten, und einem konstanten Verhältnis von mittlerer Normalzugfestigkeit zu mittlerer Scherfestigkeit, ist die maximale Druckspannung annähernd linear Abhängig von der mittleren Normalzugfestigkeit. Bei einem ungebundenen Material hängt die maximale Druckfestigkeit im Wesentlichen vom Parameter μ ab. Wird ein ungebundenes Material einem Biaxialtest unterzogen, kommt es zu einer Neuordnung der Partikel durch Überwindung der Haftreibung. Dies ergibt eine nichtlineare Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen und eine kontinuierliche Abnahme des Elastizitätsmoduls bis zum Erreichen der maximalen Druckspannung.

Die Maximale Druckspannung wird folgendermaßen kalibriert:

- Nullsetzen der Standardabweichungen für Zug- und Scherfestigkeit

- Variation des Wertes der mittleren Normalzugfestigkeit bei festgehaltenem Verhältnis von mittlerer Normalzugfestigkeit und mittlerer Scherfestigkeit

Das Verhältnis von mittlerer Normalzugfestigkeit zu mittlerer Scherfestigkeit beeinflusst im Wesentlichen die Steigung der Geraden im $\sigma_3 - \sigma_1$ -Diagramm. Zusätzlich kann festgestellt werden, dass das Verhältnis von Zug- zu Scherfestigkeit den Versagensmechanismus beeinflusst. Ein in PFC modelliertes Material mit einem kleinen Verhältnis von σ_c / τ_c versagt vorwiegend durch entstehen von Zugrissen, wodurch es zu einem spröden Versagensbild kommt. Weist das Material hingegen kleine Werte der Scherfestigkeit τ_c und somit ein größeres Verhältnis der Parameter σ_c / τ_c auf, versagt das Material vorwiegend durch entstehen von Scherbrüchen. Der Versagensmodus entspricht dem eines duktilen Materials.

5.4.1.4 Bestimmung der Proportionalitätsgrenze

Als Proportionalitätsgrenze ist jener Punkt im $\sigma - \varepsilon$ Diagramm definiert, bei dem die Dilatanz (plastische Volumenzunahme) beginnt. Die Elastizitätsgrenze stellt den Beginn der Rissbildung dar. Die Proportionalitätsgrenze wird vorwiegend durch die Werte der Standardabweichung beeinflusst bzw. durch das Verhältnis der Standardabweichung zum Mittelwert der Materialzug- und Materialscherfestigkeit. Eine Erhöhung dieses Verhältnisses reduziert die Spannung bei der die Proportionalitätsgrenze erreicht wird.

Da es für das zu modellierende Material keine Aussage über dessen Proportionalitätsgrenze gibt wird für die Berechnungen immer mit einem Verhältnis der Standardabweichung zum Mittelwert der Materialzug- und Materialscherfestigkeit von ca. 1/100 verwendet.

5.4.1.5 Bestimmung der Zugfestigkeit

Die Bestimmung der Zugfestigkeit erfolgt indirekt über einen so genannten Braziliantest. Die Theorie dazu kann Kapitel 4.7.3 entnommen werden. Eine Darstellung des in PFC verwendeten Modells (Prüfkörper) kann der folgenden Abbildung entnommen werden.

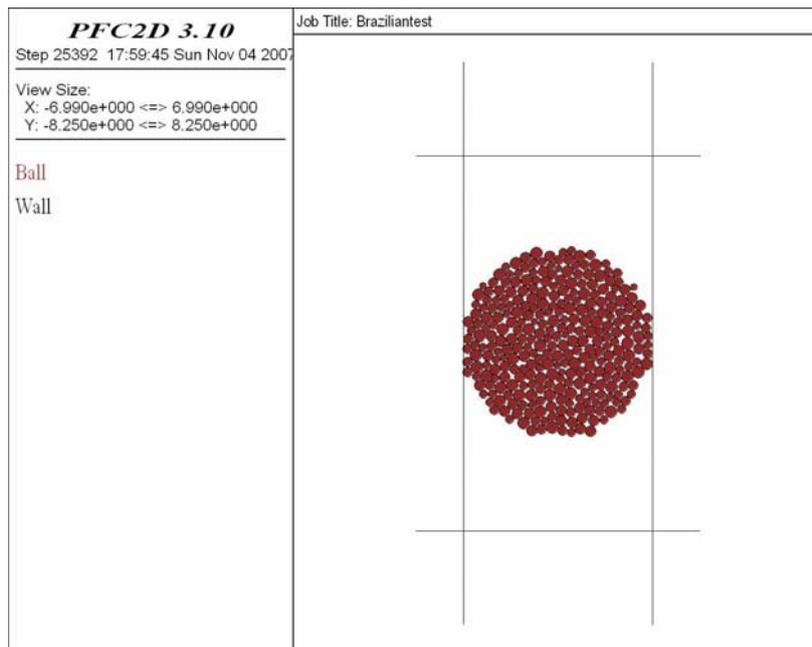


Abbildung 24: Prüfkörper für den Braziliantest

Das Einsetzen des Trennbruchs kann auch anhand der Arbeitslinien erkannt werden.

5.4.2 Parallelbindung

Wie bereits in Kapitel 4.5.3.2 erwähnt, simuliert eine Parallelbindung ein zementartiges Bindungsmaterial zwischen den Partikeln. Die Parallelbindung ist in der Lage Kräfte und Momente zu übertragen. Die Parallelbindung wird durch die folgenden Parameter beschrieben:

- Verhältnis der Normal- zur Schersteifigkeit der Partikel k_n / k_s
- Verhältnis der Normal- zur Schersteifigkeit der Parallelbindung \bar{k}^n / \bar{k}^s
- Normal- und Scherfestigkeit $\bar{\sigma}_c$ und $\bar{\tau}_c$
- Bindungsradius \bar{R}
- Partikelmodul E_c
- Elastizitätsmodul der Parallelbindung \bar{E}_c
- Reibungskoeffizienten μ

Die Bindung bricht sobald entweder die Normal- ($\bar{\sigma}_c$) oder die Scherfestigkeit ($\bar{\tau}_c$) überschritten wird. Gleichung 5.9 stellt den Zusammenhang zwischen den Parallelbindungssteifigkeiten \bar{k}^n , \bar{k}^s und dem Bindungsmodul \bar{E}_c der Parallelbindung her.

$$\bar{k}^n = \frac{\bar{E}_c}{L}$$

$$\bar{k}^s = \frac{\bar{E}_c}{L} \cdot \left(\frac{\bar{R}}{\tilde{R}} \right)^2$$

Gleichung 5.9

Wobei, \bar{R} der Abbildung 25 entnommen werden kann, und \tilde{R} den mittleren Partikelradius darstellt. Diese Beziehungen zeigen auf mikroskopischer Ebene keinen Zusammenhang zwischen Steifigkeit und Querdehnungszahl ν . Ein Zusammenhang auf makroskopischer Ebene kann jedoch für ein irreguläres Partikelensemble, welches durch eine Parallelbindung gebunden ist, beobachtet werden. Zu erkennen ist außerdem, dass eine Reduktion des Radius der Parallelbindung \bar{R} eine Reduktion der Steifigkeit der Parallelbindung zur Folge hat.

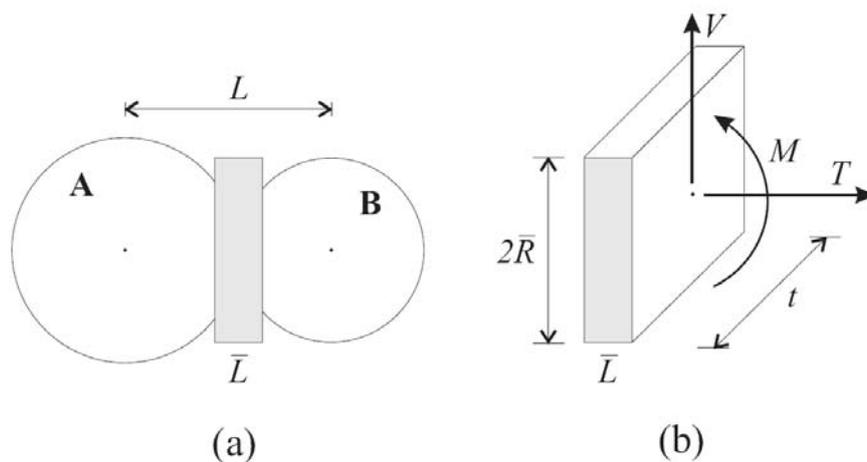


Abbildung 25.: Idealisierung der Parallelbindung (a) und der aufnehmbaren Kräfte (b), ITASCA (2004)

5.4.2.1 Kalibrierung der Gesteinsparameter

Im Folgenden werden alle Mikroparameter aufgelistet die zur Charakterisierung der Parallelbindung notwendig sind:

- Radiusmultiplikator $\bar{\lambda}$
- Elastizitätsmodul der der Partikelkontakte E_c
- Verhältnis der Partikelnormal- zur Partikelschersteifigkeit k_n / k_s

- Elastizitätsmodul der Parallelbindung \bar{E}_c
- Verhältnis der Normal- zur Schersteifigkeit der Parallelbindung \bar{k}^n / \bar{k}^s
- Reibungskoeffizient zwischen den Partikeln μ
- Normal- und Scherfestigkeit des zementartigen Materials, welches die Parallelbindung charakterisiert. $\bar{\sigma}_c$ und $\bar{\tau}_c$

Der resultierende Elastizitätsmodul ergibt sich aus der Summe des Elastizitätsmoduls der Parallelbindung und der Partikelkontakte (\bar{E}_c und E_c).

Dem gegenüber stehen wieder folgende Makroparameter des Materials. Diese Parameter beschreiben die Wirkung des Materialensembles.

- Kohäsion c
- Innerer Reibungswinkel φ
- Elastizitätsmodul E
- Querdehnungszahl ν

5.4.2.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls und der Querdehnungszahl

Wie bereits oben erwähnt setzt sich der Elastizitätsmodul aus den beiden Größen \bar{E}_c und E_c zusammen. Diese Beziehung kann in Form von Gleichung 5.10 angeschrieben werden,

$$E = \frac{E_c}{\xi} + \frac{\bar{E}_c}{\bar{\xi}} \quad \text{Gleichung 5.10}$$

wobei die Faktoren ξ und $\bar{\xi}$ eine Beziehung zwischen dem Elastizitätsmodul des Kontaktes und der Parallelbindung (Mikroparameter), zum Elastizitätsmodul des Ensembles (Makroparameter) herstellen. Diese beiden Faktoren können bestimmt werden, indem in einem ersten Schritt nur eine Kontaktbindung zugewiesen wird, d.h. $\bar{E}_c = 0$ gesetzt wird und E_c so lange variiert wird, bis sich der gewünschte Elastizitätsmodul einstellt. Daraus kann der Faktor ξ bestimmt werden. In einem weiteren Schritt wird der Bindung der Elastizitätsmodul der Parallelbindung \bar{E}_c zugewiesen um eine Abschätzung über den Faktor $\bar{\xi}$ zu erhalten. Unter Berücksichtigung der Gleichung 5.10 kann dann der Elastizitätsmodul des Ensembles

angepasst werden. Einfluss auf den Elastizitätsmodul hat bei Verwendung der Parallelbindung außerdem der Radius der Parallelbindung \bar{R} bzw. der Radiusmultiplikator $\bar{\lambda}$. Eine Erhöhung des Radius der Parallelbindung bringt ein Anwachsen des Elastizitätsmoduls. Der Zusammenhang zwischen den Variablen \bar{R} und $\bar{\lambda}$ ist durch Gleichung 5.11 gegeben.

$$\bar{R} = \bar{\lambda} \cdot \min(R^{[A]}, R^{[B]}) \quad \text{Gleichung 5.11}$$

Darin kennzeichnen $R^{[A]}$ und $R^{[B]}$ den Radius der in Kontakt befindlichen Partikel.

5.4.2.3 Bestimmung der Druckfestigkeit (Peak)

Die Vorgehensweise ist Grundsätzlich dieselbe wie bei Verwendung einer Kontaktbindung. Jedoch hat hier nicht nur der Wert der Normal- und Schersteifigkeit des Partikels sondern auch jener der Normal- und Schersteifigkeit der Parallelbindung Einfluss auf den Maximalwert der Druckfestigkeit. Durch die Ausführung eines Biaxialtests können die Druckfestigkeit sowie der Elastizitätsmodul bestimmt werden. Eine Kalibration unter Verwendung des Parallelbindungsmodells ist also erheblich aufwändiger als bei Verwendung des Kontaktbindungsmodells. Hinsichtlich Proportionalitätsgrenze und Zugfestigkeit wird auf die beiden Kapitel 5.4.1.4 und 5.4.1.5 verwiesen.

6 Berechnungen

Das untersuchte Modell weist die in Abbildung 26 dargestellten Abmessungen auf. Wie daraus ersichtlich, befindet sich die Tunnelachse in 40 Metern Abstand zu den seitlichen Wänden und zum unteren Rand. Die Überlagerung misst 80 Meter. Die Dichte des Ensembles wurde mit 2700kg/m^3 festgelegt. Dabei ist zu beachten dass die Partikeldichte, welche in PFC eingegeben werden kann, nicht der Dichte des Partikelensembles entspricht, sondern diese mit der Porosität n korrigiert werden muss. Dies geschieht über die folgende Formel.

$$\rho_{tot} = \frac{\rho_{Ball}}{1-n} \quad \text{Gleichung 6.1}$$

Wobei ρ_{Ball} die Dichte eines Partikels und ρ_{tot} die Dichte des Materials kennzeichnen.

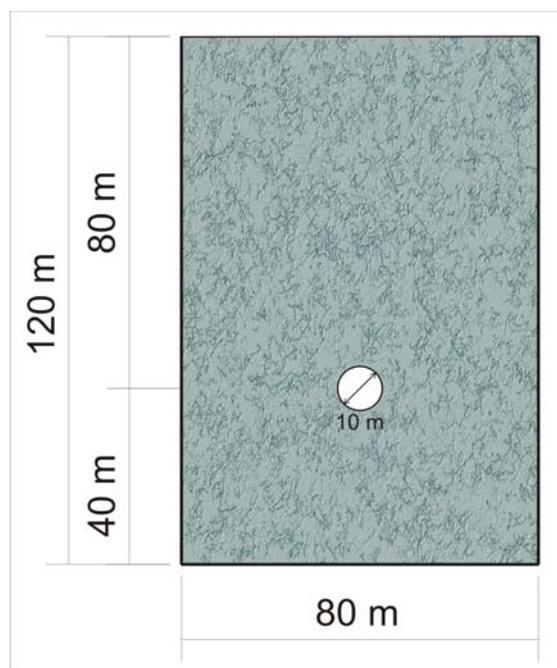


Abbildung 26: Darstellung des verwendeten Modells

Das Erzeugen eines Festkörpers mit definierten Materialverhalten birgt zusätzlich Schwierigkeiten weil es nicht möglich ist, direkt von den makroskopischen Eigenschaften eines Festkörpers (Elastizitätsmodul, Querdehnungszahl, Reibungswinkel, Kohäsion) auf dessen mikroskopische Eigenschaften (Kontaktmodul, Bindungskräfte, Steifigkeiten) zu schließen. Deshalb ist ein Kalibrationsprozess notwendig welcher Kapitel 7 beschrieben wird.

Für die Generierung des Ausgangszustandes, wurden folgende Materialparameter angesetzt. Diese wurden im Hinblick auf eine vernünftige Rechenzeit und Erfahrungen aus früheren Modellbildungen angenommen. Die Partikelsteifigkeiten variieren je nach dem ob eine Kontaktbindung (KB) oder eine Parallelbindung (PB) verwendet wurde.

| Parameter | Denotation | Wert | Einheit |
|--|-------------------------|--|-------------------|
| Partikelradius | r | 0,1— 0,16 | m |
| Porosität | n | 16,0 | % |
| Partikeldichte | ρ_p | 3200 | kg/m ³ |
| Gesteinsdichte | ρ | 2700 | kg/m ³ |
| Partikel-Normalsteifigkeit | k_n | 1,35 · 10 ⁹ (KB) 8,0 · 10 ⁸ (PB) | Pa |
| Partikel-Schersteifigkeit | k_s | 4,22 · 10 ⁸ (KB) 2,50 · 10 ⁸ (PB) | Pa |
| Partikel-Steifigkeitsverhältnis | k_n / k_s | 3,2 (KB) 3,2 (PB) | - |
| Reibungskoeffizient | μ | 0,087 bzw. 0,466 | - |
| Radius der Parallelbindung | \bar{R} | 0,133 | m |
| Normalsteifigkeit der Parallelbindung | \bar{k}^n | 3,195 · 10 ⁹ (PB) | Pa |
| Schersteifigkeit der Parallelbindung | \bar{k}^s | 1,452 · 10 ⁹ (PB) | Pa |
| Steifigkeitsverhältnis der Parallelbindung | \bar{k}^n / \bar{k}^s | 2,2 | - |

Tabelle 1: Materialparameter (Mikroparameter)

7 Kalibrationsprozess

7.1 Vorgehensweise

Zur Berechnung der Mohrschen Bruchkurve wurde für das getestete Material eine Serie von Biaxialtests mit unterschiedlichen Seitendrücker durchgeföhrt. Zur Bestimmung des Seitendruckes über die Tiefe wurde Gleichung 7.2 angewandt. Die Vertikalspannung σ_v ergibt sich nach Gleichung 7.1 aus dem Produkt der Wichte γ und der Tiefe h . Durch einbeziehen der Poissonschen Zahl erhält man dann die insitu Horizontalspannung σ_H in Abhängigkeit der vorhandenen Vertikalspannung. Allen Berechnungen wurde ein Modell mit einem Elastizitätsmodul von ca. $1 \cdot 10^9 Pa$ sowie einer Querdehnungszahl von $\nu = 0,25$ zu Grunde gelegt. In Tabelle 2 sind diese Abhängigkeiten für jene Tiefen dargestellt, in welchen ein Biaxialtest durchgeföhrt wurde.

$$E = 1 \cdot 10^9 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\nu = 0,25$$

$$\gamma = 2700 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$\sigma_v = \gamma \cdot h$$

Gleichung 7.1

$$\sigma_H = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_v = 0,33 \cdot \sigma_v$$

Gleichung 7.2

| Tiefe h | σ_v | σ_H |
|---------|------------|------------|
| 30 | 810 | 270 |
| 40 | 1080 | 360 |
| 50 | 1350 | 450 |
| 60 | 1620 | 540 |
| 70 | 1890 | 630 |
| 80 | 2160 | 720 |
| 90 | 2430 | 810 |
| 100 | 2700 | 900 |
| 120 | 3240 | 1080 |

Tabelle 2: Abgeschätzter Spannungsverlauf über die Tiefe

Ziel der Kalibrierung war es, die Mikroparameter so festzulegen, dass sich in etwa jene Bruchgerade einstellt, welche das Grenzgleichgewicht der Vergleichsrechnung in FLAC darstellt (APFELBAUM 2008). APFELBAUM (2008) hat in seiner Arbeit unter anderem eine Untersuchung in FLAC^{2D} durchgeführt, um die Makroparameter (Kohäsion und Reibungswinkel) jenes Materials abzuschätzen, für welches sich das Grenzgleichgewicht eingestellt hat. Das untersuchte Modell in FLAC und jenes in Kapitel 6 beschriebene Modell, weisen dieselben geometrischen Abmessungen auf. FLAC arbeitet im Gegensatz zu PFC direkt mit den Makroparametern des Materials. Die kontinuumsmechanische Untersuchung des Modells (APFELBAUM 2008) zeigt folgende Gebirgsparameter für den Zustand des Grenzgleichgewichtes (Reibungswinkel φ und Kohäsion c).

$$c \approx 65000 \frac{N}{mm^2}$$

$$\varphi \approx 27^\circ$$

Aus dem Seitendruck σ_H , der Kohäsion c und dem Reibungswinkel φ , kann nun mit Hilfe der Bestimmungsgleichung Gleichung 7.3 die primäre Hauptspannung berechnet werden. Dies bildet eine Gerade im $\sigma_1 - \sigma_3$ -Diagramm ab, welche in eine Mohrsche Darstellung übergeführt werden kann. Diese Vorgehensweise wurde zur Bestimmung der Mohrschen Bruchgeraden jenes Materials herangezogen, für dessen Eigenschaften sich im Programm FLAC das Grenzgleichgewicht eingestellt hat.

Die Primäre Hauptspannung σ_1 des in PFC generierten Materials wurde, wie bereits weiter oben erwähnt, durch die Simulation einer Serie von Biaxialtests mit unterschiedlichem Seitendruck, bestimmt. Der Zusammenhang zwischen größter und kleinster Hauptspannung ist durch Gleichung 7.3 gegeben.

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 + c \cdot \frac{2 \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad \text{Gleichung 7.3}$$

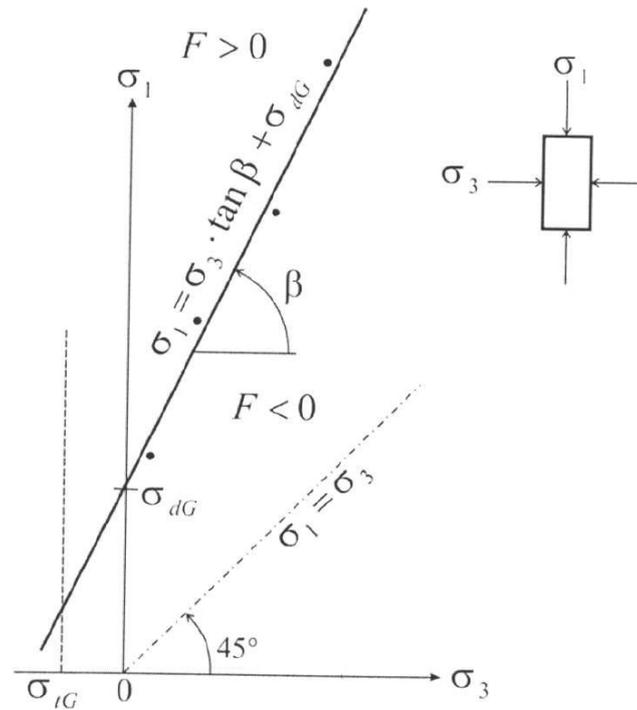
Die Überführung der Ergebnisse aus dem $\sigma_1 - \sigma_3$ -Diagramm (Abbildung 27) in die Mohrsche Darstellung erfolgt mit den Gleichungen 7.4 und 7.5. Dabei wird Gleichung 7.4 dazu verwendet um aus der Steigung β der Geraden im $\sigma_1 - \sigma_3$ -Diagramm auf den Reibungswinkel φ , welcher die Steigung der Mohrschen Geraden bezeichnet, zu schließen. Die Kohäsion c , ergibt sich durch lösen der Gleichung 7.5. Dabei ist σ_{dG} die einaxiale Druckfestigkeit des Materials.

$$\varphi = \arcsin \frac{\tan \beta - 1}{\tan \beta + 1}$$

Gleichung 7.4

$$c = \sigma_{dG} \cdot \frac{1 - \sin \varphi}{2 \cdot \cos \varphi}$$

Gleichung 7.5

Abbildung 27: Bezeichnungen im σ_3 - σ_1 -Diagramm

7.2 Verwendung des Kontaktbindungsmodells

In Tabelle 3 sind die Mikroparameter der Kontaktbindung angeführt, welche für die einzelnen Modelle verwendet wurden. Es wurden 5 Modelle untersucht und dabei die Bindungsfestigkeiten (Mittelwert, Standardabweichung) entsprechend der Tabelle 3 variiert. Die Bindungsfestigkeit hat direkten Einfluss auf das Modellverhalten. In der letzten Spalte der Tabelle 3 ist das grundsätzliche Modellverhalten beschrieben. Versagt der Querschnitt, so ist damit ein totaler Kollaps des Ausbruchquerschnittes gemeint. Einen Verlauf des Versagens zeigen die jeweiligen Abbildungen der Kontaktkräfte in Kapitel 8.

| Kontaktbindung | | | | | | |
|----------------|-------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|----------|
| | | Zugfestigkeit σ [Pa] | | Scherfestigkeit τ [Pa] | | Versagen |
| | μ | Mittelwert $\bar{\sigma}_c$ | Standardabw. σ_{dev} | Mittelwert $\bar{\tau}_c$ | Standardabw. τ_{dev} | |
| Modell 1 | 0,087 | $5 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^4$ | $1,1 \cdot 10^6$ | $1 \cdot 10^4$ | NEIN |
| Modell 2 | 0,087 | $5 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^4$ | $1 \cdot 10^6$ | $1 \cdot 10^4$ | JA |
| Modell 3 | 0,466 | $5 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^4$ | $1 \cdot 10^6$ | $1 \cdot 10^4$ | NEIN |
| Modell 4 | 0,087 | $7 \cdot 10^5$ | $1 \cdot 10^4$ | $3,5 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^4$ | JA |
| Modell 5 | 0,466 | $7 \cdot 10^5$ | $1 \cdot 10^4$ | $3,5 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^4$ | JA |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Tabelle 3: Variierte Parameter der Kontaktbindung

In den Tabellen 4, 5 und 6 sind die Ergebnisse der Druckversuche, des Braziliantests sowie die Parameter der Bruchgeraden dargestellt. σ_1 bezeichnet dabei jene, im Einaxial- bzw. Biaxialtest ermittelte größte Hauptdruckspannung in Abhängigkeit zur kleinsten Hauptdruckspannung.

| Druckversuch | | Modell-Nummer | | | | |
|--------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| Tiefe | Seitendruck | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 |
| h [m] | σ_3 [kN/m ²] | σ_1 [kN/m ²] |
| 0 | 0 | 1.480,06 | 1.348,07 | 1.565,71 | 1.090,77 | 1.166,19 |
| 30 | 270 | 1.748,53 | 1.586,52 | 1.973,69 | 2.026,18 | 2.139,51 |
| 40 | 360 | 1.899,37 | 1.717,44 | 2.124,11 | 2.370,00 | 2.417,33 |
| 50 | 450 | 2.063,52 | 1.811,60 | 2.276,82 | 2.700,97 | 2.797,35 |
| 60 | 540 | 2.169,33 | 1.883,25 | 2.469,10 | 2.886,16 | 2.987,79 |

| | | | | | | |
|-----|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 70 | 630 | 2.378,06 | 2.193,47 | 2.723,50 | 3.152,65 | 3.393,83 |
| 80 | 720 | 2.482,59 | 2.006,02 | 2.911,94 | 3.375,83 | 3.748,37 |
| 90 | 810 | 2.798,95 | 2.610,30 | 3.055,14 | 3.642,64 | 4.051,82 |
| 100 | 900 | 2.761,50 | 2.888,16 | 3.195,33 | 3.845,35 | 4.261,66 |
| 120 | 1080 | 3.139,63 | 3.244,72 | 3.744,95 | 4.252,48 | 4.664,46 |

Tabelle 4: Ergebnisse der Druckversuche (Kontaktbindung)

| Braziliantest | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|
| Druckkraft F_{\max} [kN] | 4277,42 | 3817,70 | 4257,90 | 3929,68 | 3782,87 |
| Zugfestigkeit σ_{\max} [kN/m ³] | 544,62 | 486,08 | 542,13 | 500,34 | 481,65 |
| gesamte Rissanzahl | 40 | 21 | 71 | 30 | 31 |
| Anzahl Scherrisse | 0 | 0 | 0 | 30 | 31 |
| Anzahl Schubrisse | 40 | 21 | 71 | 0 | 0 |

Tabelle 5: Ergebnisse des Braziliantests (Kontaktbindung)

| Parameter der Bruchgeraden | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 |
|-----------------------------------|---------|--------|---------|---------|---------|
| Steigung k | 1,72 | 2,08 | 2,15 | 2,71 | 3,26 |
| Schnittpunkt σ_{dG} | 1278,68 | 884,71 | 1344,04 | 1403,13 | 1301,37 |
| Winkel β | 59,89 | 64,32 | 65,05 | 69,76 | 72,92 |
| Reibungswinkel φ | 15,42 | 20,52 | 21,40 | 27,47 | 32,00 |
| Kohäsion c [kN/m ²] | 486,85 | 306,74 | 458,42 | 425,97 | 360,65 |

Tabelle 6: Parameter der Bruchgeraden (Kontaktbindung)

In Abbildung 28 sind die Ergebnisse der Modelle im $\sigma_3 - \sigma_1$ -Diagramm abgebildet.

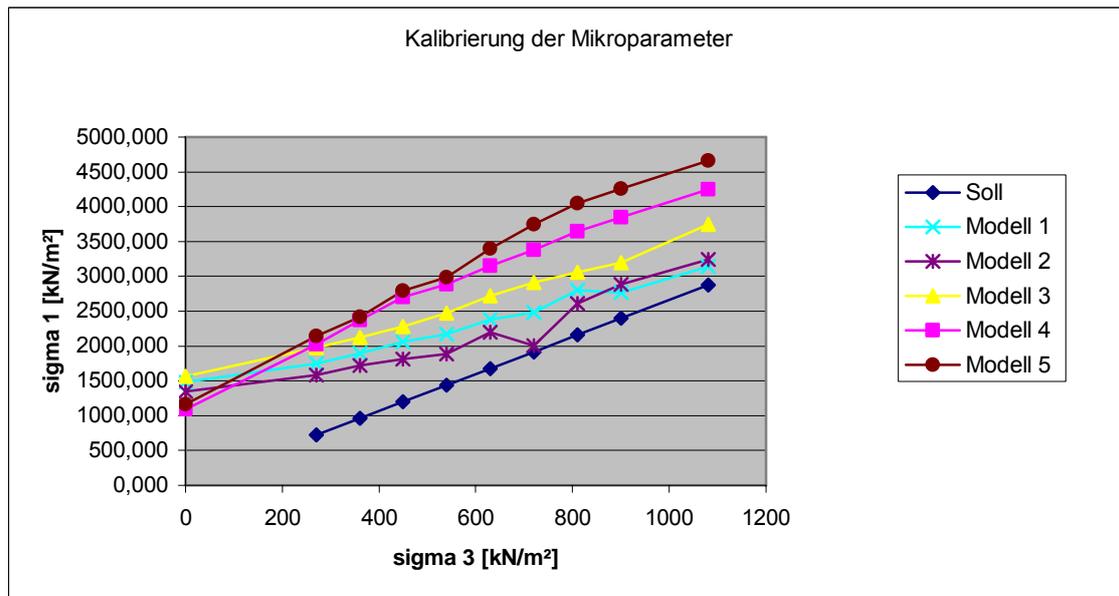


Abbildung 28: Darstellung der Ergebnisse im sigma1-sigma3-Diagramm

7.2.1 Ergebnisse

Die folgenden Abbildungen enthalten eine grafische Darstellung der Ergebnisse aus den obigen Tabellen. Für jedes berechnete Modell ist die Bruchgerade, die Arbeitslinie (einaxialer Druckversuch; Biaxialversuch mit einem Seitendruck von 720kN/m^2) sowie das Rissbild im einaxialen Druckversuch und Braziliantest, dargestellt. Es wurde deshalb die Darstellung der Arbeitslinie mit einem Seitendruck von 720kN/m^2 gewählt, da dieser Druck in etwa in der Tiefe vorherrscht, in der sich der Tunnel befindet (80m). Das Rissbild, welches dem einaxialen Druckversuch entnommen wurde enthält außerdem die Verschiebungsvektoren. Schubrisse in den Bindungen werden in schwarzer, Zugrisse in blauer Farbe gekennzeichnet. Die Kontaktbindung zwischen den Partikeln ist in roter Farbe abgebildet. Die Darstellung der Mohrschen Spannungskreise sowie der Bruchgeraden enthält außerdem die Bruchgerade jenes Materials, welches das Grenzgleichgewicht im Programm FLAC kennzeichnet (grüne Farbe).

Ergebnisse des Modells 1

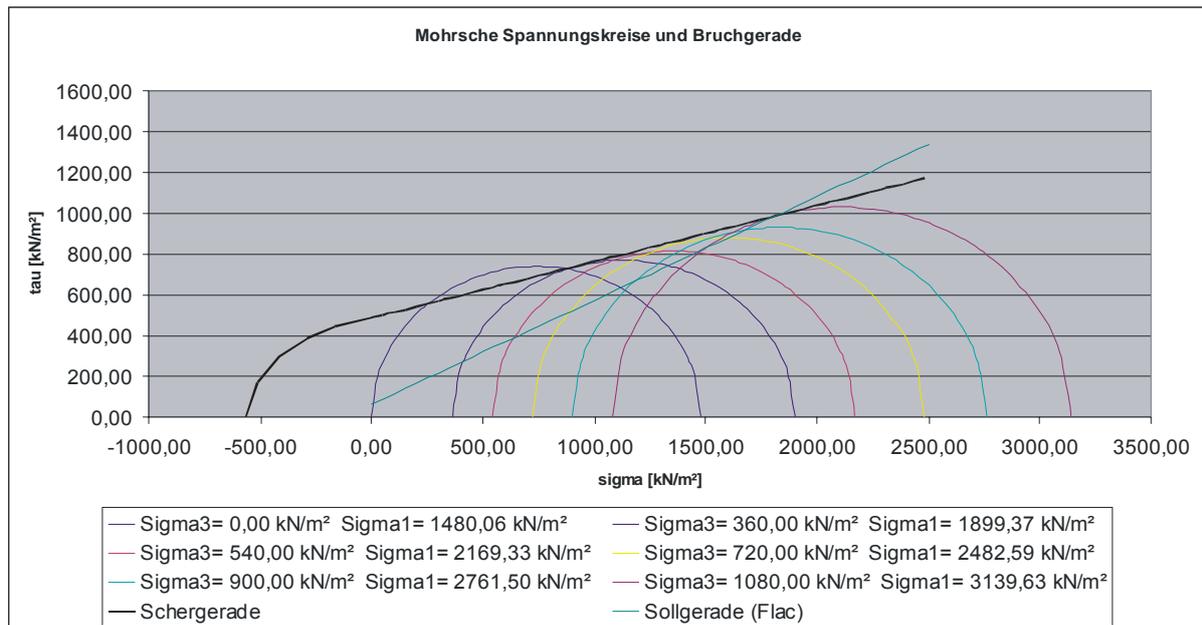


Abbildung 29: Mohrsche Spannungskreise und Bruchgerade für das Material aus Modell 1

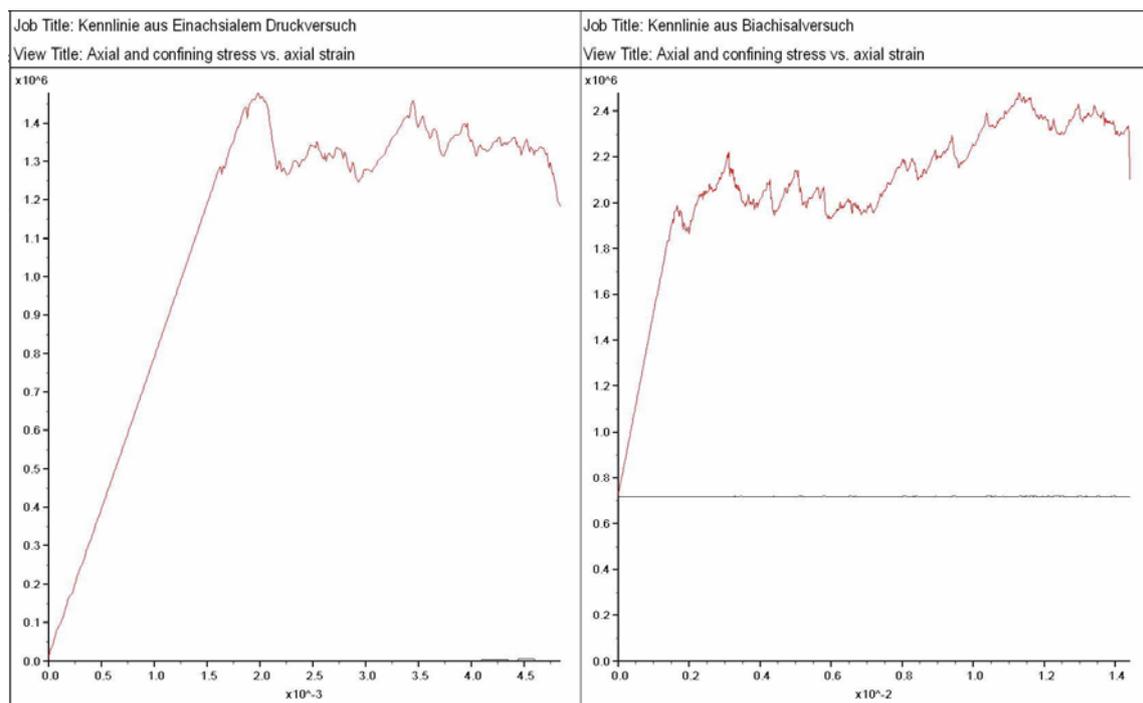


Abbildung 30: Arbeitslinie aus einaxialem (links) und biaxialem (rechts) Druckversuch in einer Tiefe von 80m
Abszisse: Dehnung [-]; Ordinate: Spannung [Pa]

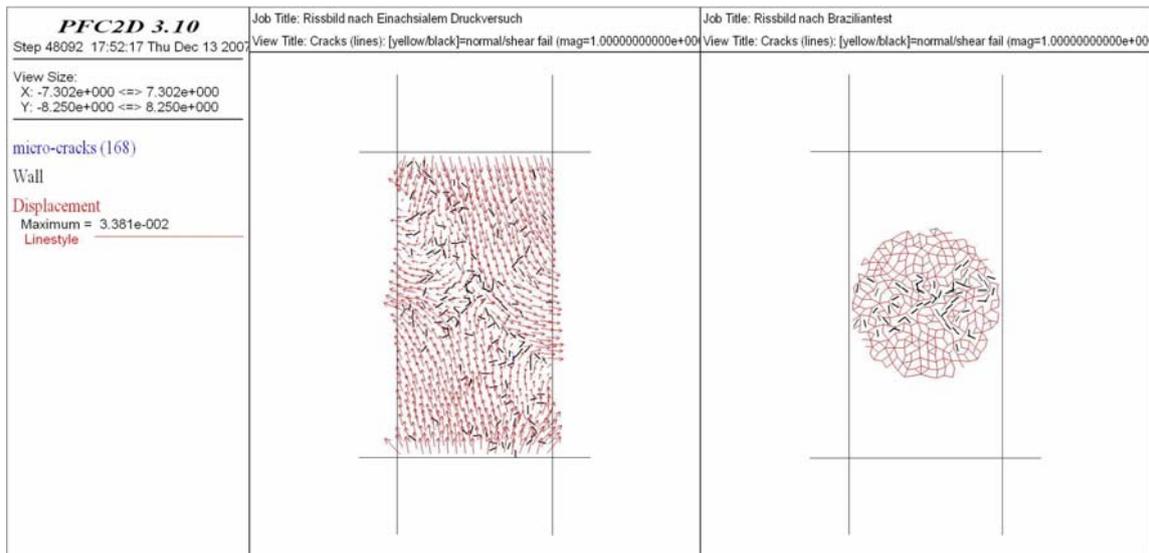


Abbildung 31: Rissbild nach einachsigem Druckversuch (links) und Braziliantest (rechts)

Ergebnisse des Modells 2

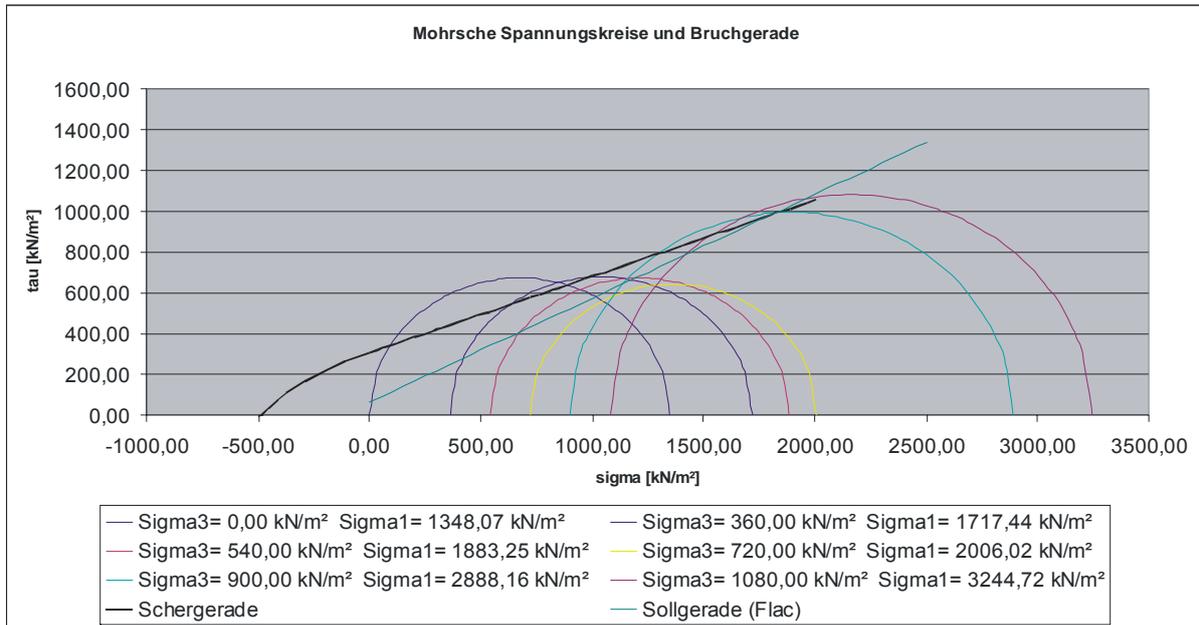


Abbildung 32: Mohrsche Spannungskreise und Bruchgerade für das Material aus Modell 2

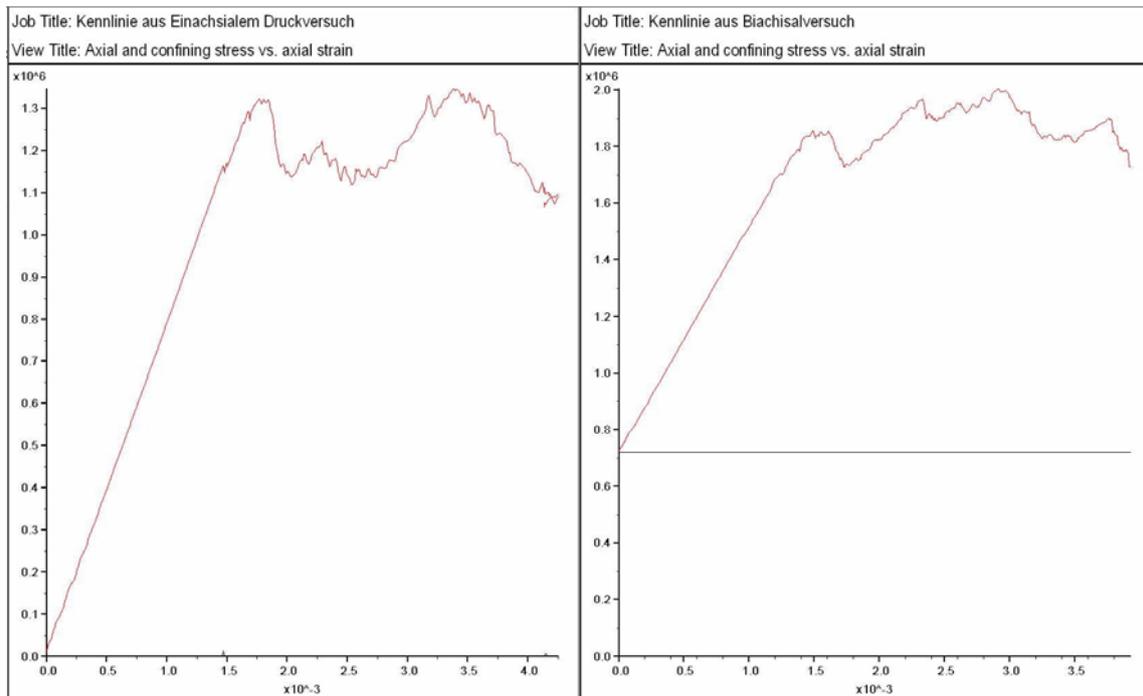


Abbildung 33: Arbeitslinie aus einaxialem (links) und biaxialem (rechts) Druckversuch in einer Tiefe von 80m
Abszisse: Dehnung [-]; Ordinate: Spannung [Pa]

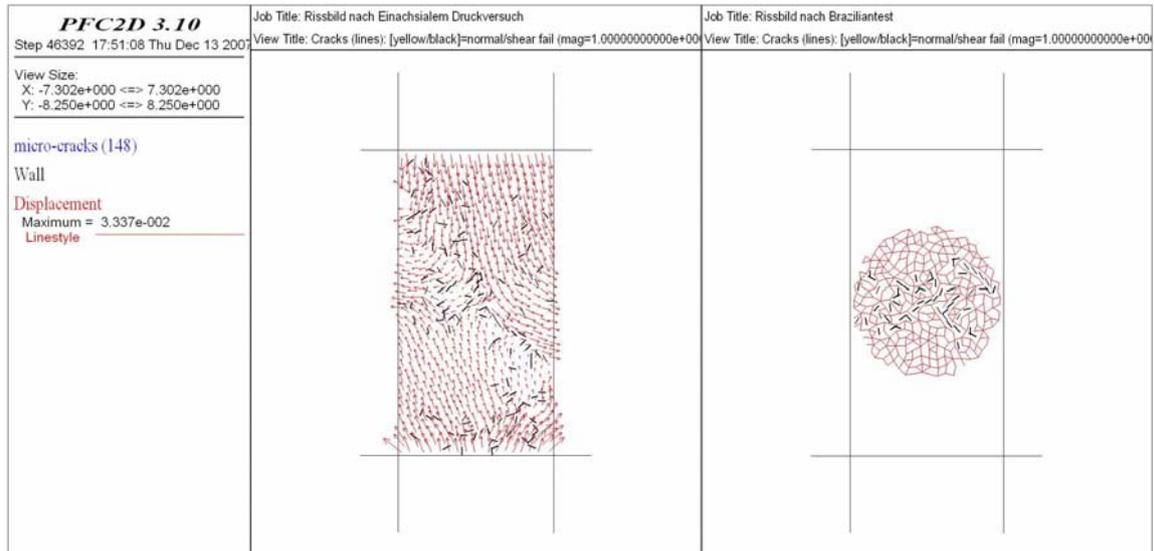


Abbildung 34: Rissbild nach einaxialem Druckversuch (links) und Braziliantest (rechts)

Es ist deutlich erkennbar, dass nur Schubrisse auftreten. Auf Grund der geringen Reibungskonstante μ führt ein Versagen in den Bindungen beim einaxialen Druckversuch sehr rasch zum Gesamtversagen.

Ergebnisse des Modells 3

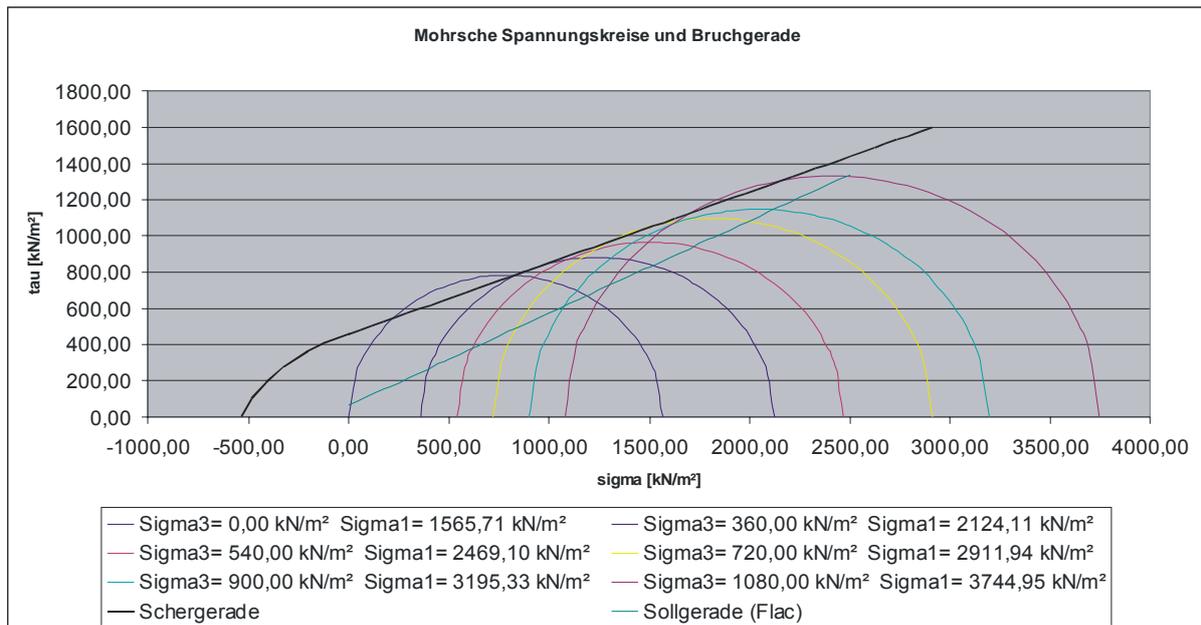


Abbildung 35: Mohrsche Spannungskreise und Bruchgerade für das Material aus Modell 3

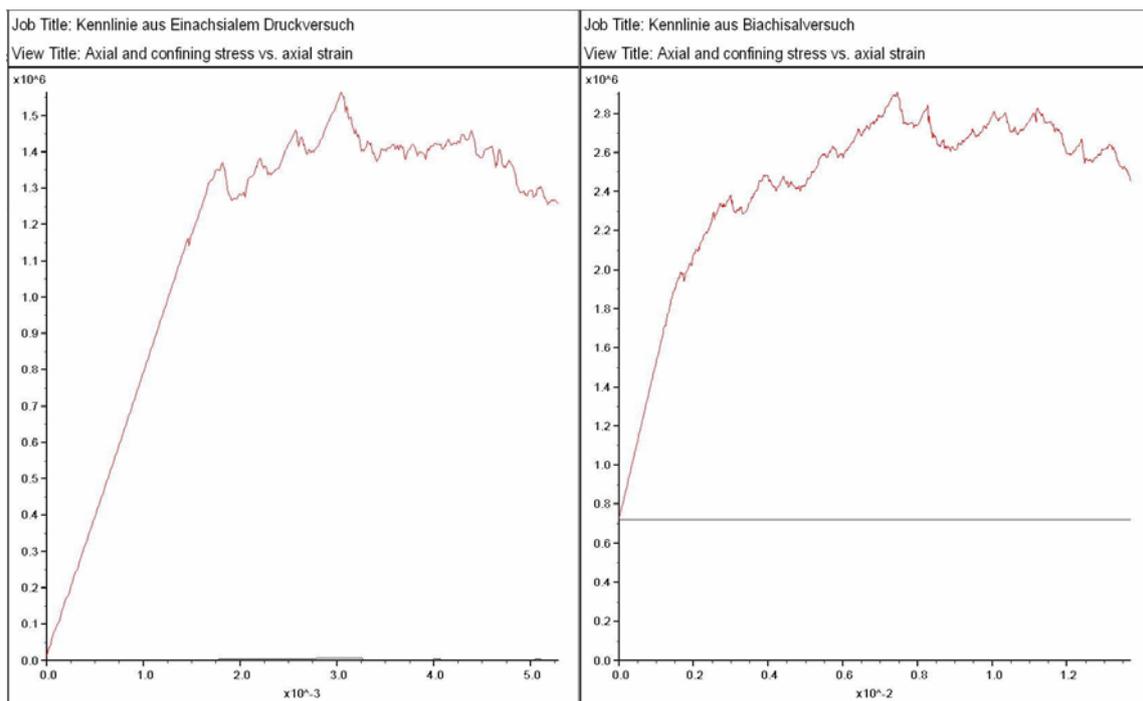


Abbildung 36: Arbeitslinie aus einaxialem (links) und biaxialem (rechts) Druckversuch in einer Tiefe von 80m
Abszisse: Dehnung [-]; Ordinate: Spannung [Pa]

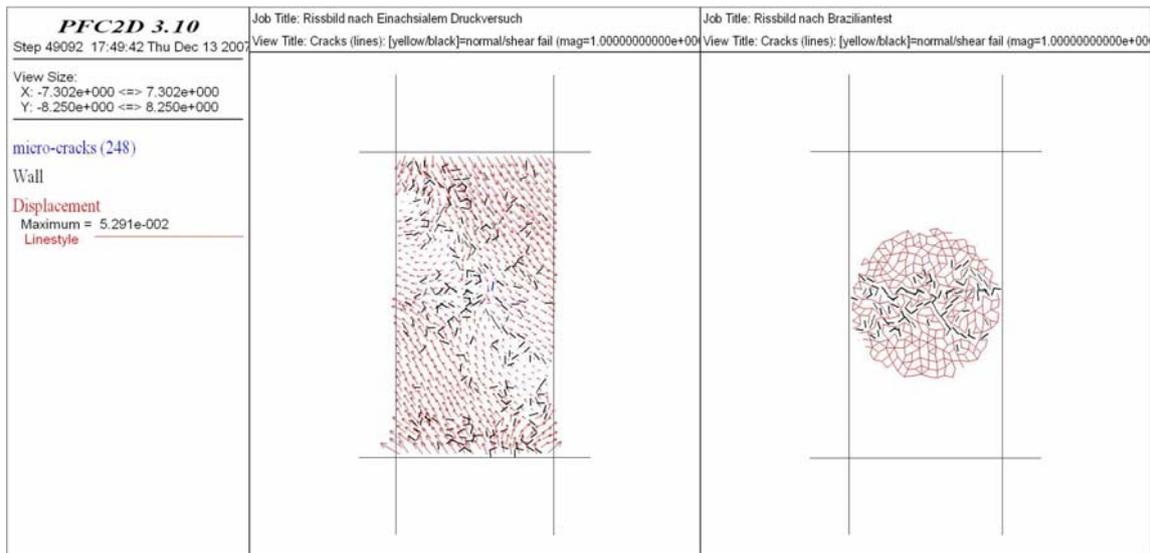


Abbildung 37: Rissbild nach einachsigem Druckversuch (links) und Braziliantest (rechts)

Ergebnisse des Modells 4

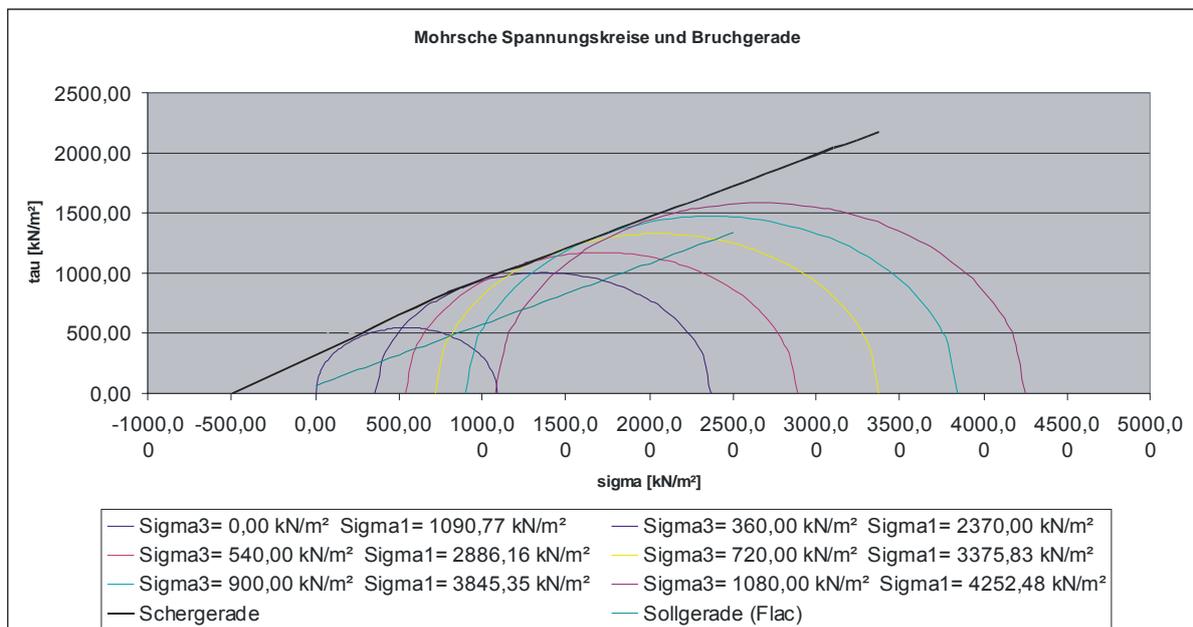


Abbildung 38: Mohrsche Spannungskreise und Bruchgerade für das Material aus Modell 4

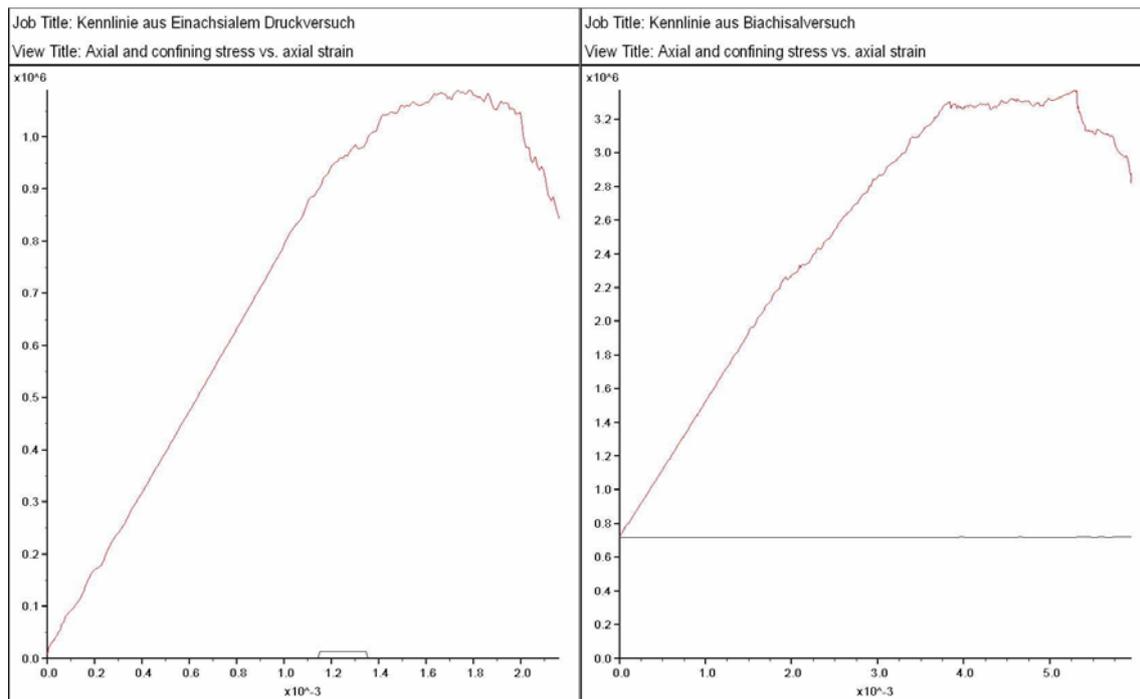


Abbildung 39: Arbeitslinie aus einaxialem (links) und biaxialem (rechts) Druckversuch in einer Tiefe von 80m
Abszisse: Dehnung [-]; Ordinate: Spannung [Pa]

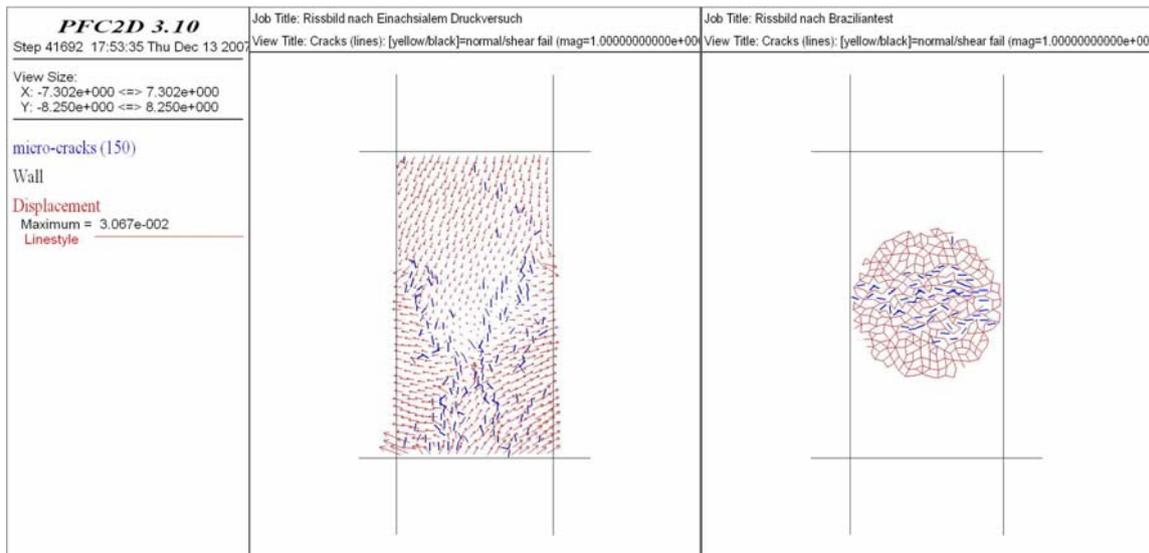


Abbildung 40: Rissbild nach einaxialem Druckversuch (links) und Braziliantest (rechts)

Ergebnisse des Modells 5

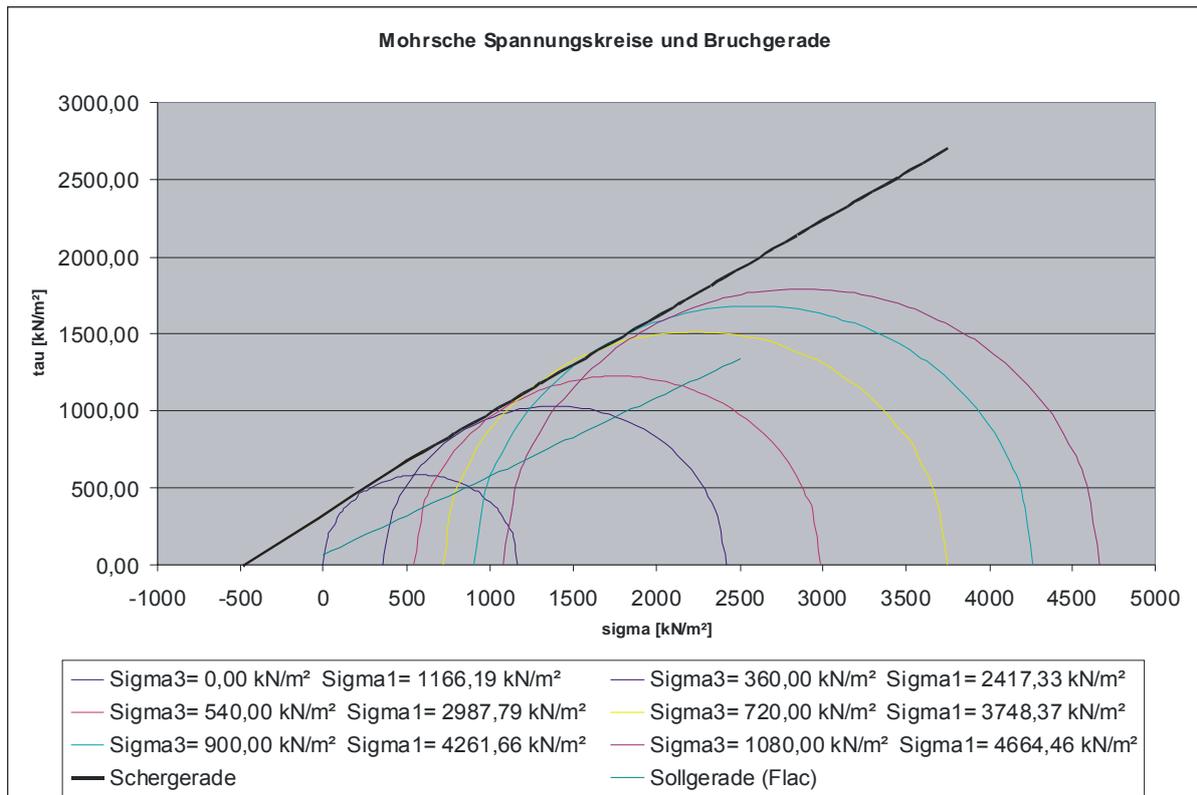


Abbildung 41: Mohrsche Spannungskreise und Bruchgerade für das Material aus Modell 5

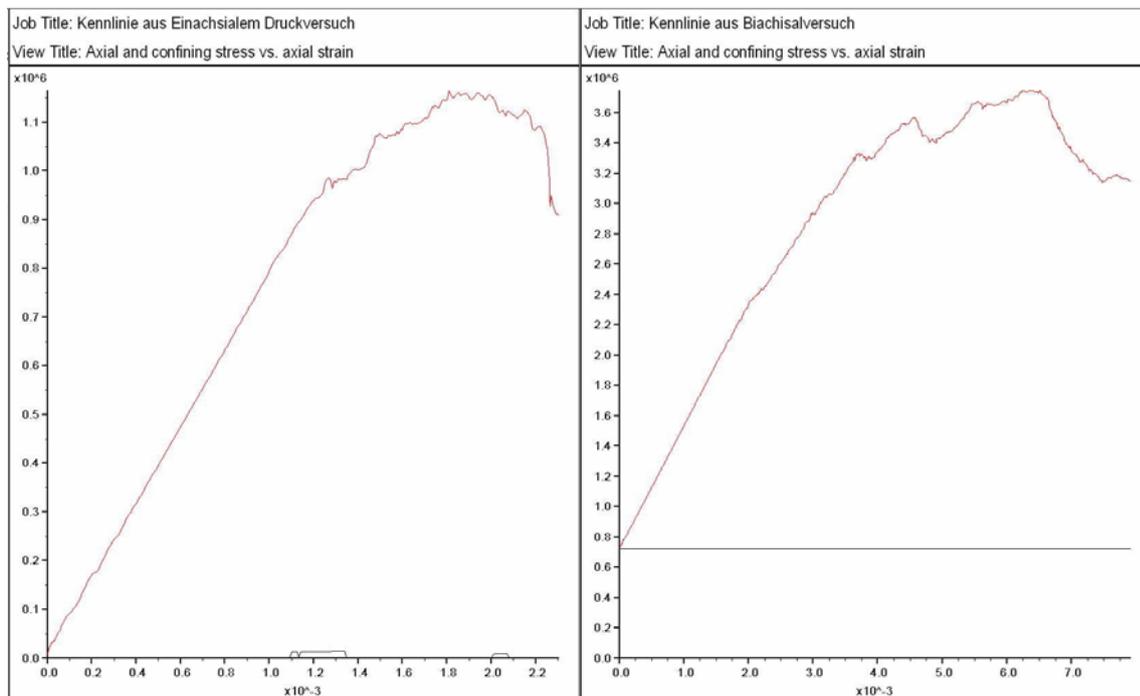


Abbildung 42: Arbeitslinie aus einaxialem (links) und biaxialem (rechts) Druckversuch in einer Tiefe von 80m
Abszisse: Dehnung [-]; Ordinate: Spannung [Pa]

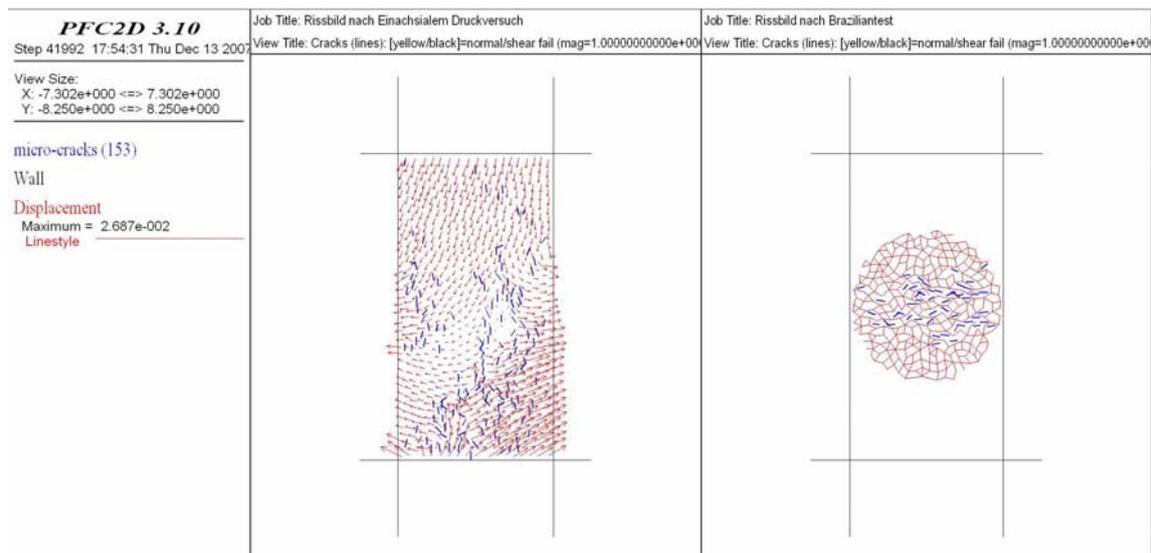


Abbildung 43: Rissbild nach einachsigem Druckversuch (links) und Braziliantest (rechts)

7.2.2 Erkenntnisse der Kalibration

Die Neigung der Bruchgeraden hängt im Wesentlichen vom Mittelwert des Verhältnisses der Zugfestigkeit zur Scherfestigkeit $\bar{\sigma}_c / \bar{\tau}_c$ ab. Abbildung 44 zeigt diese Abhängigkeit. Es hat sich gezeigt, dass die Neigung der Bruchlinie sowohl bei Steigerung des Verhältnis von $\bar{\sigma}_c / \bar{\tau}_c$ als auch bei Verringerung dieses Verhältnisses auf einen Wert kleiner als 1, zunimmt. Die schwarze Linie aus Abbildung 44 stellt die Bezugslinie mit einem Verhältnis von Zugfestigkeit zu Scherfestigkeit $\bar{\sigma}_c / \bar{\tau}_c = 1,0$ dar. Steigert man nun dieses Verhältnis auf einen Wert von 5 bzw. 10, so erhält man die hell- und dunkelgrüne Linie. Verringert man das Verhältnis auf die Werte 0,4 bzw. 0,2 so erhält man die orange Linie bzw. die rote Linie.

Das Verhältnis der Standardabweichung zum Mittelwert der Kontaktfestigkeiten beeinflusst zudem dieses Verhältnis. Diese Beziehung wurde mit einem konstanten Wert von $\bar{\sigma}_c / \sigma_{dev} = 100$ bzw. $\bar{\tau}_c / \tau_{dev} = 100$ immer gleich beibehalten.

Ziel der Kalibrierung war es, die Mikroparameter so festzulegen, dass sich in etwa jene Bruchgerade einstellt, welche das Grenzgleichgewicht in einer Rechnung mit dem Programm FLAC darstellt. Es hat sich gezeigt, dass es äußerst schwierig ist ein Material in PFC zu Modellieren welches den folgenden Eigenschaften genügt:

- Geringe Materialfestigkeit
- Geringe Kohäsion (aus FLAC: 65 kN/m²)
- Sprödes Materialverhalten und einem hohen Reibungswinkel von ca.27° (aus FLAC)

Die Lage der Bruchgeraden im $\sigma_3 - \sigma_1$ Diagramm hängt von den Absolutwerten der Kontaktfestigkeiten $\bar{\sigma}_c$ und $\bar{\tau}_c$ ab. Bei Annäherung der Bruchgeraden an jene, welche mit dem Programm FLAC bestimmt wurde, müssen die Werte der Kontaktfestigkeit relativ gering angenommen werden. Verwendet man nun diese im Modell, so brechen die Bindungen bereits auf Grund des Insitu- Spannungszustandes. Es ist also nicht möglich ein Material zu generieren, dessen Kontaktfestigkeit und somit Kohäsion gering ist, jedoch dessen Partikelbindung nicht bereits auf Grund des Insitu-Spannungszustandes brechen. Das Problem hängt damit zusammen, dass bei Überschreitung der Scherfestigkeit der Kontaktbindung auch keine Normalkraft im Kontakt übertragen wird. D.h. die Bindung der beiden Partikel geht verloren. Im Zuge der Kalibrierung stellte sich heraus, dass der Wert der Scherfestigkeit der Kontaktbindung nicht beliebig gering gewählt werden darf, da sonst eine Vielzahl der Kontakte im Modell bereits vor Ausbruch der Tunnelröhre brechen würden und somit ein Material ohne Kontaktbindung vorläge, bei welchem es nicht zum Kirschkernelversagen kommen würde. Nun wurde aber auch festgestellt, dass eine weitere Steigerung des Verhältnisses des Mittelwertes der Zugfestigkeit zur Scherfestigkeit der Kontaktbindung über einen Wert von 10 hinaus keinen wesentlichen Einfluss mehr auf die Steigung der Bruchgeraden hat. Dies ist dadurch zu erklären, dass alle Bindungen auf Scheren versagen, dadurch aber auch dessen Zugfestigkeit verloren geht, weil, wie schon weiter oben erwähnt, die gesamte Bindung bei Versagen einer Komponente gelöscht wird.

Dasselbe Problem ergibt sich grundsätzlich auch bei der Modellierung eines duktilen Materials mit geringer Zugfestigkeit und hoher Scherfestigkeit der Kontaktbindung, also einem Verhältnis des Mittelwertes der Zugfestigkeit zu jenem der Scherfestigkeit kleiner als 1.

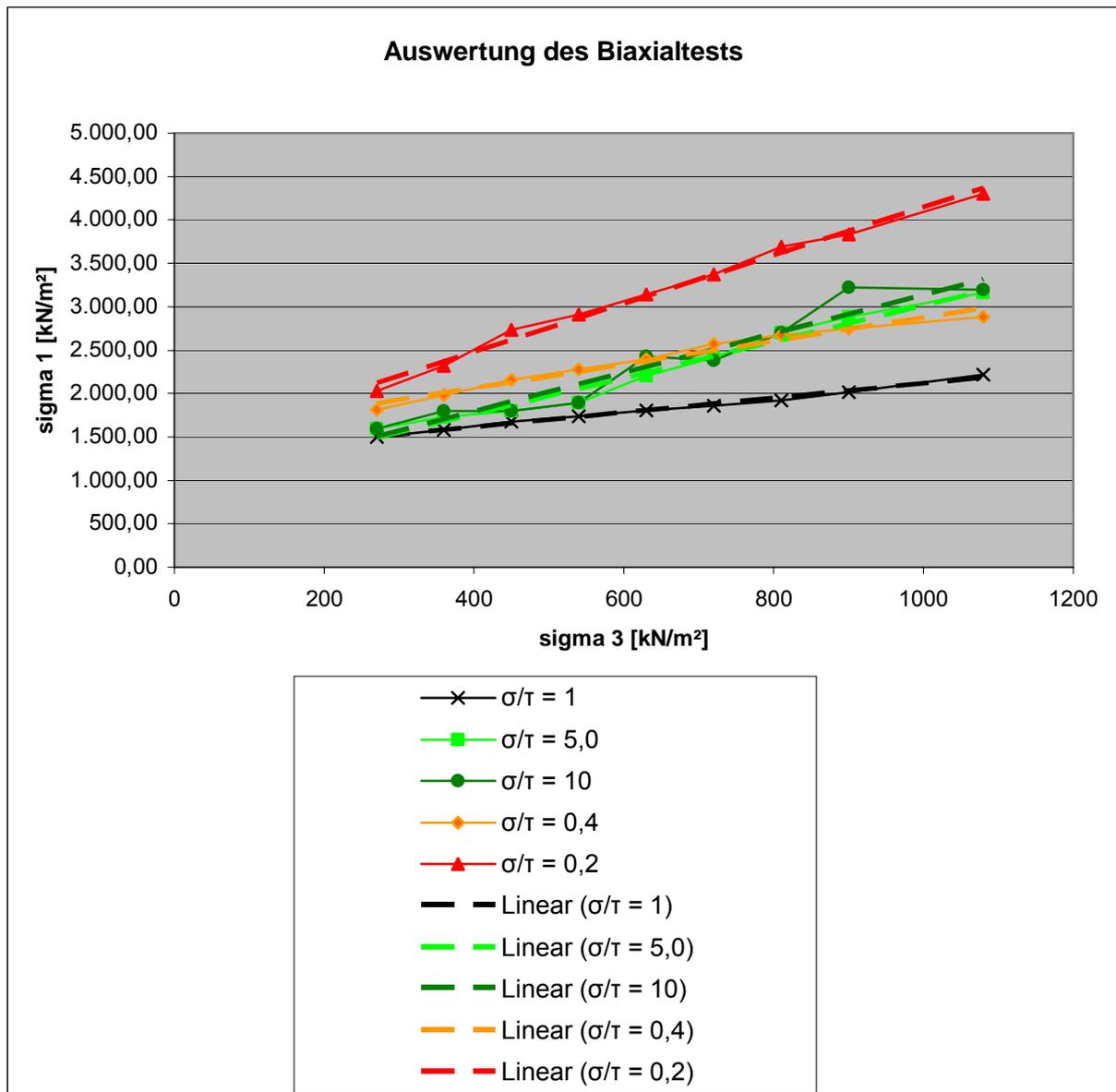


Abbildung 44: Erkenntnisse der Kalibrierung

| Tiefe | Seitendruck | VERHÄLTNIS | | | | |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | $\sigma/\tau = 1,0$ | $\sigma/\tau = 5,0$ | $\sigma/\tau = 10$ | $\sigma/\tau = 0,4$ | $\sigma/\tau = 0,2$ |
| h | σ_3 | σ_1 | σ_1 | σ_1 | σ_1 | σ_1 |
| [m] | [kN/m ²] |
| 30 | 270 | 1.500,24 | 1.591,05 | 1.591,05 | 1.809,69 | 2.029,60 |
| 40 | 360 | 1.582,38 | 1.727,18 | 1.795,29 | 1.981,20 | 2.317,30 |
| 50 | 450 | 1.677,81 | 1.800,71 | 1.800,71 | 2.155,91 | 2.734,84 |
| 60 | 540 | 1.738,83 | 1.889,48 | 1.889,48 | 2.281,29 | 2.912,03 |
| 70 | 630 | 1.802,99 | 2.202,48 | 2.427,61 | 2.393,73 | 3.141,11 |
| 80 | 720 | 1.861,94 | 2.414,94 | 2.379,05 | 2.573,96 | 3.373,85 |
| 90 | 810 | 1.920,85 | 2.696,88 | 2.696,88 | 2.674,21 | 3.692,67 |
| 100 | 900 | 2.014,02 | 2.886,52 | 3.223,48 | 2.744,64 | 3.832,07 |
| 120 | 1080 | 2.220,03 | 3.158,14 | 3.197,43 | 2.880,75 | 4.303,63 |

Tabelle 7: Auswertung der Kalibrierung

7.3 Verwendung des Parallelbindungsmodells

In Tabelle 8 sind die Mikroparameter der Kontaktbindung angeführt, welche für die einzelnen Modelle verwendet wurden.

| Parallelbindung | | | | | | |
|-----------------|-------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|----------|
| | | Zugfestigkeit σ [Pa] | | Scherfestigkeit τ [Pa] | | Versagen |
| | μ | Mittelwert $\bar{\sigma}_c$ | Standardabw. σ_{dev} | Mittelwert $\bar{\tau}_c$ | Standardabw. τ_{dev} | |
| Modell 1 | 0,466 | $12 \cdot 10^6$ | $12 \cdot 10^4$ | $3,2 \cdot 10^6$ | $3,2 \cdot 10^4$ | NEIN |
| Modell 2 | 0,466 | $10 \cdot 10^6$ | $10 \cdot 10^4$ | $3 \cdot 10^6$ | $3 \cdot 10^4$ | JA |

Tabelle 8: Variierte Parameter der Parallelbindung

In den Tabellen 9 bis 11 sind die Ergebnisse der Druckversuche, des Braziliantests sowie die Parameter der Bruchgeraden dargestellt.

| Druckversuch | | Modell-Nummer | |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Tiefe | Seitendruck | V1 | V2 |
| h | σ_3 | σ_1 | σ_1 |
| [m] | [kN/m ²] | [kN/m ²] | [kN/m ²] |
| 0 | 0 | 6.898,20 | 6.436,95 |
| 30 | 270 | 7.601,94 | 7.101,00 |
| 40 | 360 | 7.817,35 | 7.280,65 |
| 50 | 450 | 7.892,35 | 7.452,64 |

| | | | |
|-----|------|----------|----------|
| 60 | 540 | 8.114,29 | 7.523,83 |
| 70 | 630 | 8.159,24 | 7.770,91 |
| 80 | 720 | 8.308,20 | 7.972,69 |
| 90 | 810 | 8.528,42 | 8.142,14 |
| 100 | 900 | 8.611,27 | 8.100,97 |
| 120 | 1080 | 9.020,42 | 8.376,59 |

Tabelle 9: Ergebnisse der Druckversuche (Parallelbindung)

| Braziliantest | V1 | V2 |
|--|----------|----------|
| Druckkraft F_{\max} [kN] | 17241,72 | 15517,55 |
| Zugfestigkeit σ_{\max} [kN/m ³] | 2195,28 | 1975,75 |
| gesamte Rissanzahl | 41 | 37 |
| Anzahl Scherrisse | 3 | 3 |
| Anzahl Schubrisse | 38 | 34 |

Tabelle 10: Ergebnisse des Braziliantests (Parallelbindung)

| Parameter der Bruchgeraden | V1 | V2 |
|-----------------------------------|---------|---------|
| Steigung k | 1,66 | 1,62 |
| Schnittpunkt σ_{dG} | 7163,49 | 6712,40 |
| Winkel β | 58,99 | 58,25 |
| Reibungswinkel φ | 14,43 | 13,62 |
| Kohäsion c [kN/m ²] | 2777,01 | 2639,91 |

Tabelle 11: Parameter der Bruchgeraden (Parallelbindung)

In Abbildung 45 sind die Ergebnisse der Modelle im $\sigma_3 - \sigma_1$ -Diagramm abgebildet.

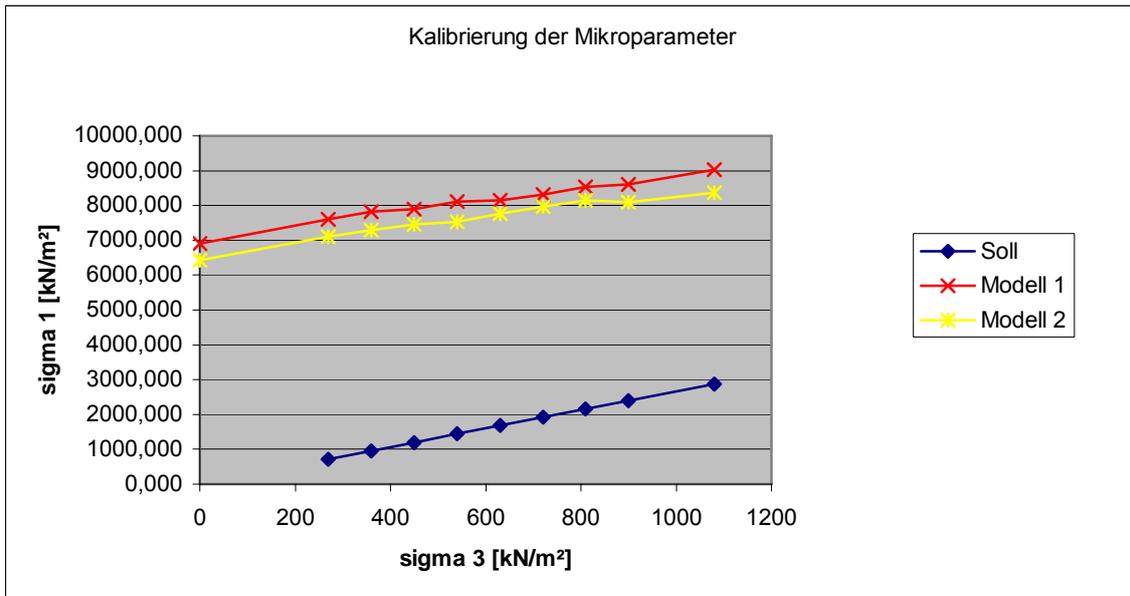


Abbildung 45: Darstellung der Ergebnisse im sigma1-sigma3-Diagramm

7.3.1 Ergebnisse

Die folgenden Abbildungen enthalten wiederum eine grafische Darstellung der Ergebnisse aus den obigen Tabellen. Für jedes berechnete Modell ist die Bruchgerade, die Arbeitslinie (einaxialer Druckversuch; Biaxialversuch mit einem Seitendruck von 720kN/m^2) sowie das Rissbild im einaxialen Druckversuch und Braziliantest, dargestellt. Es wurde deshalb die Darstellung der Arbeitslinie mit einem Seitendruck von 720kN/m^2 gewählt, da dieser Druck in etwa in der Tiefe vorherrscht, in der sich der Tunnel befindet (80m). Das Rissbild, welches dem einaxialen Druckversuch entnommen wurde enthält außerdem die Verschiebungsvektoren. Schubrisse in den Bindungen werden in schwarzer, Zugrisse in blauer Farbe gekennzeichnet. Die Parallelbindung zwischen den Partikeln ist in roter Farbe abgebildet. Die Darstellung der Mohrschen Spannungskreise sowie der Bruchgeraden enthält außerdem die Bruchgerade jenes Materials, welches das Grenzgleichgewicht im Programm FLAC kennzeichnet (grüne Farbe).

Ergebnisse des Modells 1

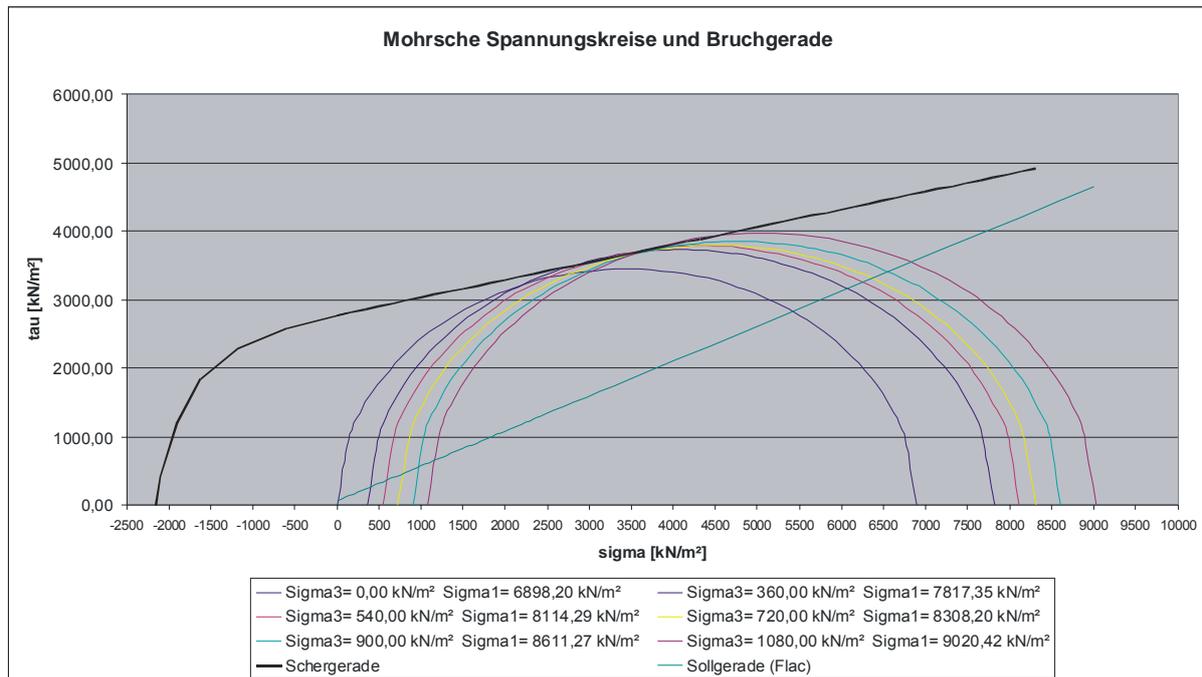


Abbildung 46: Mohrsche Spannungskreise und Bruchgerade für das Material aus Modell 1

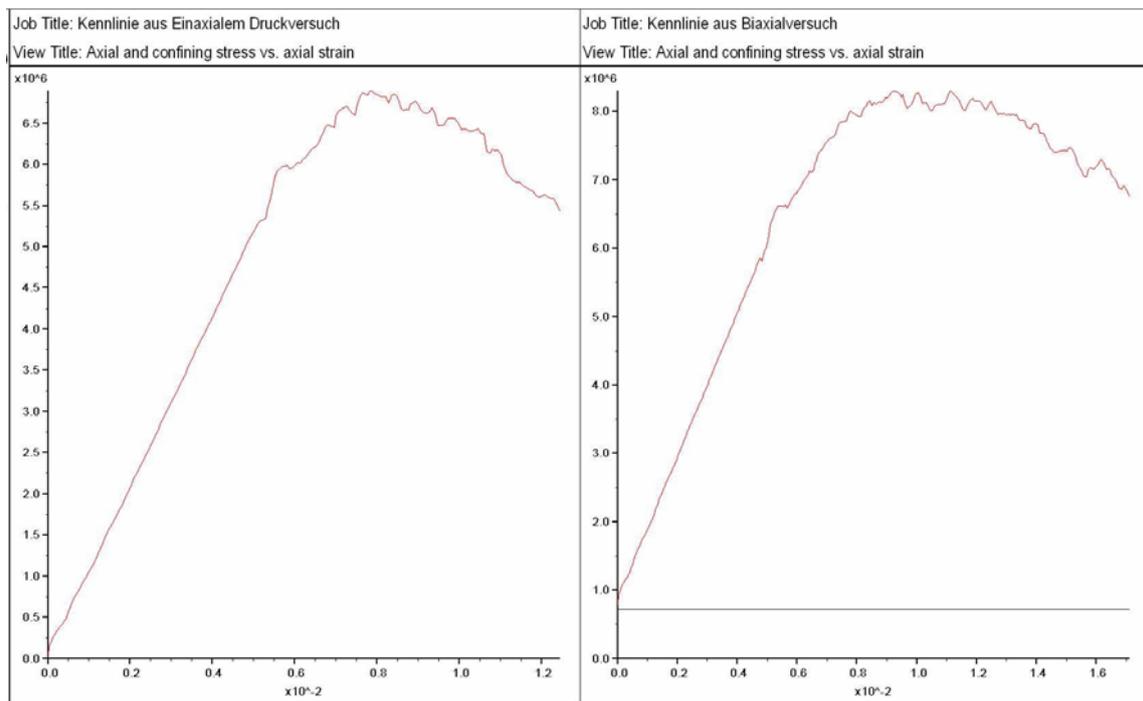


Abbildung 47: Arbeitslinie aus einaxialem (links) und biaxialem (rechts) Druckversuch in einer Tiefe von 80m
Abszisse: Dehnung [-]; Ordinate: Spannung [Pa]

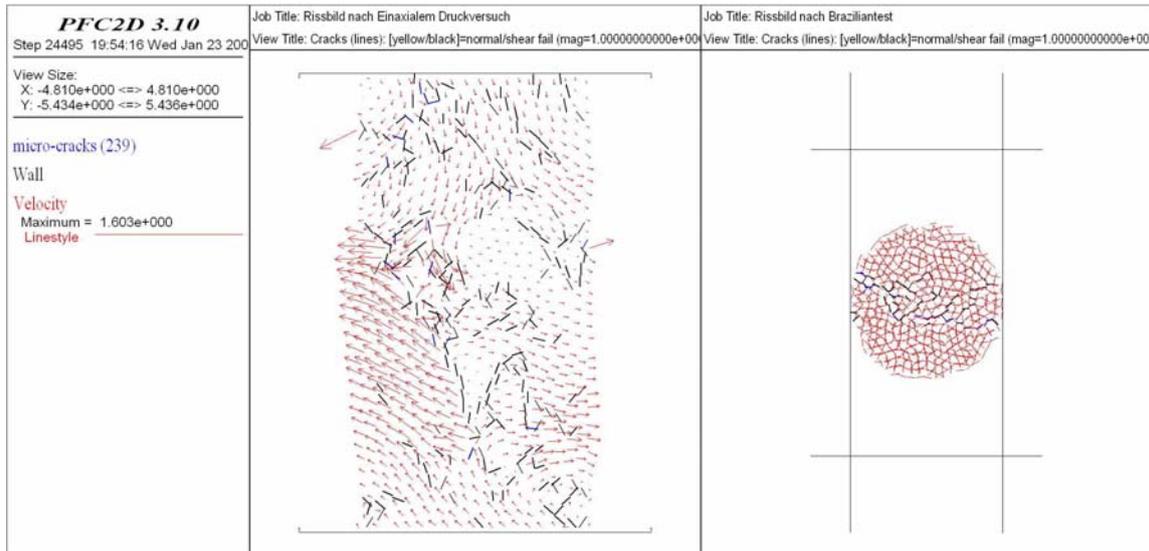


Abbildung 48: Rissbild nach einaxialem Druckversuch (links) und Braziliantest (rechts)

Ergebnisse des Modells 2

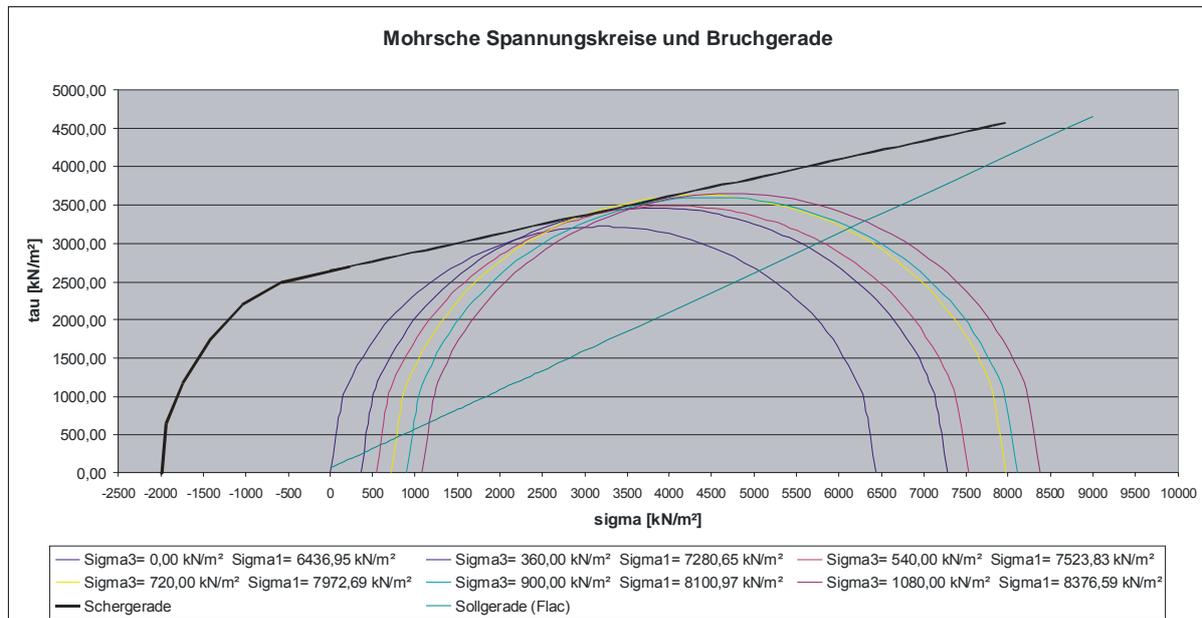


Abbildung 49: Mohrsche Spannungskreise und Bruchgerade für das Material aus Modell 1

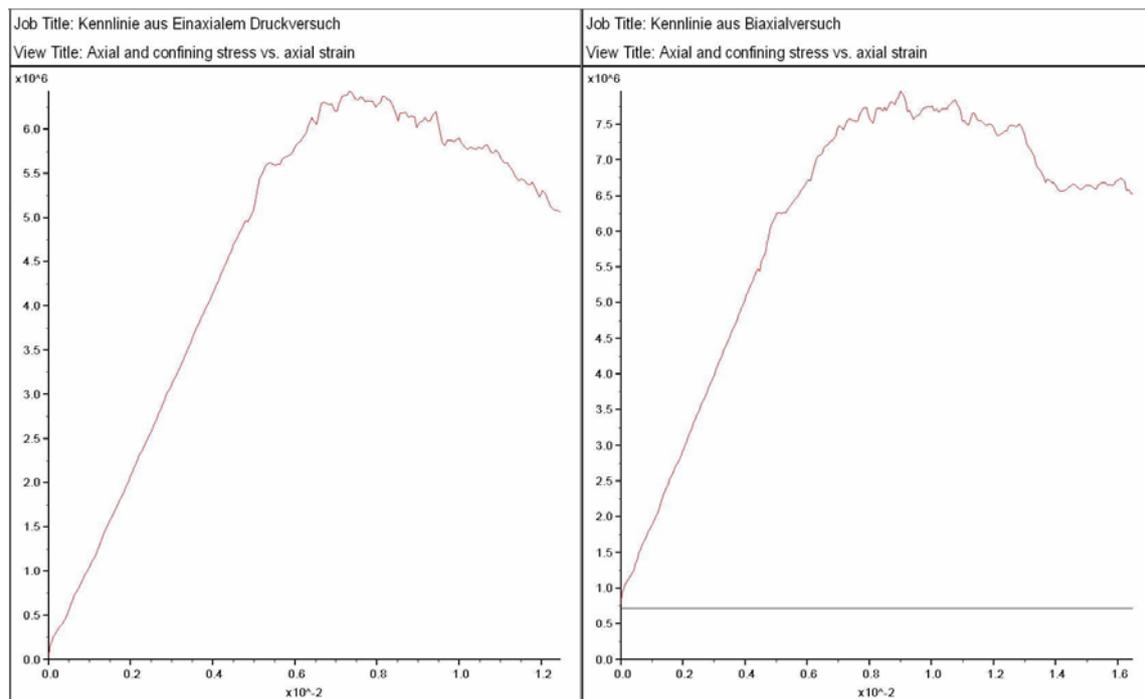


Abbildung 50: Arbeitslinie aus einaxialem (links) und biaxialem (rechts) Druckversuch in einer Tiefe von 80m
Abszisse: Dehnung [-]; Ordinate: Spannung [Pa]

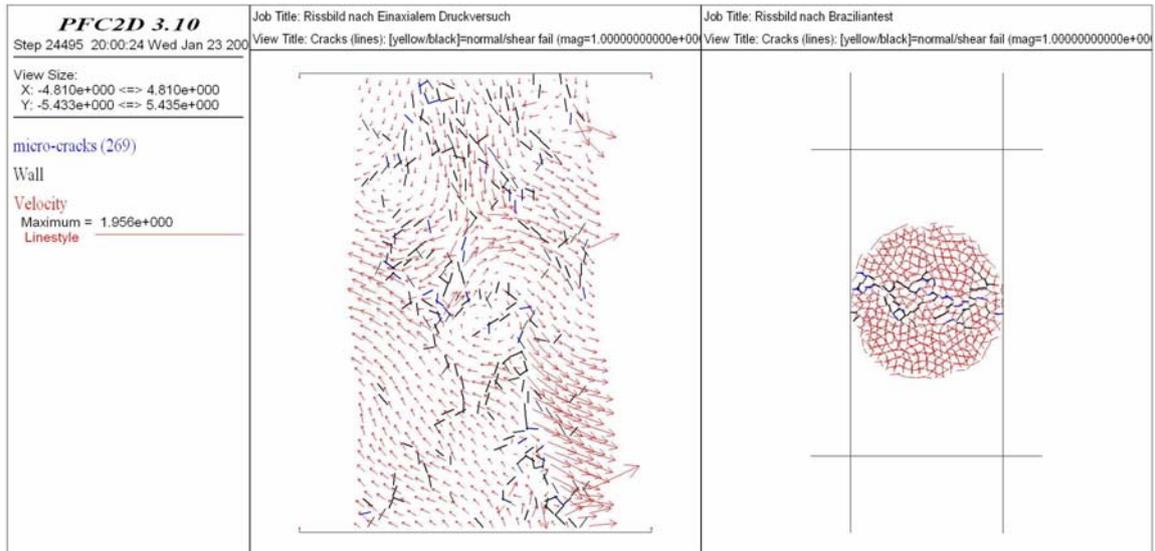


Abbildung 51: Rissbild nach einaxialem Druckversuch (links) und Braziliantest (rechts)

7.3.2 Erkenntnisse der Kalibration

Die Kalibration der Mikroparameter bei Verwendung einer Parallelbindung hat gezeigt, dass sich durch die große Anzahl an Variablen (8) eine Kalibration als schwierig erweist. Die zu kalibrierenden Mikroparameter können Abschnitt 5.4.2 entnommen werden. Durch die Einhaltung der in den Kapiteln 5.4.2.1 bis 5.4.2.3 beschriebenen Schritten kann der Kalibrationsprozess etwas aufgeteilt und dadurch vereinfacht werden. Die Kopplung der Partikelsteifigkeiten mit den Steifigkeiten der Parallelbindung und die Bestimmung des Radius \bar{R} der Parallelbindung stellt die zentrale Schwierigkeit dar. Die Anpassung des Elastizitätsmoduls und der Querdehnungszahl ist hingegen einfacher zu erreichen. Es hat sich gezeigt, dass es bei Verwendung der Parallelbindung in Analogie zur Kontaktbindung noch schwieriger ist ein Material mit ausreichender Festigkeit zu generieren, dessen Bindungen nicht bereits infolge des Insitu-Spannungszustandes brechen und welches eine geringe Kohäsion aufweist.

8 Ergebnisse der Modellrechnungen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der einzelnen Modellrechnungen dargestellt. Die Berechnungen der Modelle 1 und 3 führten zu einem standfesten Endzustand. Bereits bei Modell 1 ist ein Ansatz des Kirschkernelversagens zu erkennen. Eine Zusammenfassung der Mikroparameter, mit denen die Modelle berechnet wurden, kann der Tabelle 3 entnommen werden.

Die Ergebnisse werden für jede Modellrechnung durch Darstellung der Kontaktkräfte und des Rissbildes erläutert. Dabei wird immer mit der Darstellung der Auflockerung um den Hohlraum begonnen. Dies geschieht durch die Darstellung der Kontaktkräfte. Dabei werden Druckkräfte gelb und Zugkräfte rot eingefärbt. Die Darstellung der Kontaktkräfte zeigt sehr genau eine Auflockerung im Bereich der Ulmen und eine Umlagerung der Spannungen weg vom Tunnelquerschnitt in horizontale Richtung.

Im Anschluss an diese Darstellungen ist das Rissbild abgebildet. Dies gibt Aufschluss darüber, in welchen Bereichen Bindungen brechen und ob dies durch Überschreitung der Scher- oder der Zugfestigkeit geschieht. Außerdem lässt sich daraus der Versagensmechanismus ableiten. Bricht eine Bindung durch Überschreiten der Scherfestigkeit so wird der Bruch in schwarzer Farbe gekennzeichnet. Wird hingegen die Zugfestigkeit überschritten, so wird der Bruch blau eingefärbt.

Als dritte Darstellung wird der Hohlraumrand und seine Verschiebungsvektoren gewählt. Diese Abbildungen geben Aufschluss über die Bewegungen des Gebirges im Bereich des Hohlraumes. Die Verschiebungen werden in Metern angegeben und können den beigefügten Tabellen entnommen werden. Es wurden die Verschiebungen an der Firste, an der rechten Ulme und in der Sohle gemessen. Es wurde darauf geachtet, die Verschiebungen von jenen Bällen zu messen, welche sich noch nicht komplett vom Ensemble gelöst haben und sich somit im freien Fall befinden würden. Die gemessenen Verschiebungen stellen somit einen Mittelwert dar.

8.1 Kontaktbindung

8.1.1 Modell 1

- Reibungskoeffizient der Partikel: $\mu = 0,087$
- Mittelwert der Zugfestigkeit: $\bar{\sigma}_c = 5 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Zugfestigkeit: $\sigma_{dev} = 5 \cdot 10^4$
- Mittelwert der Scherfestigkeit: $\bar{\tau}_c = 1,1 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Scherfestigkeit: $\tau_{dev} = 1 \cdot 10^4$
- Verhalten: Standfest

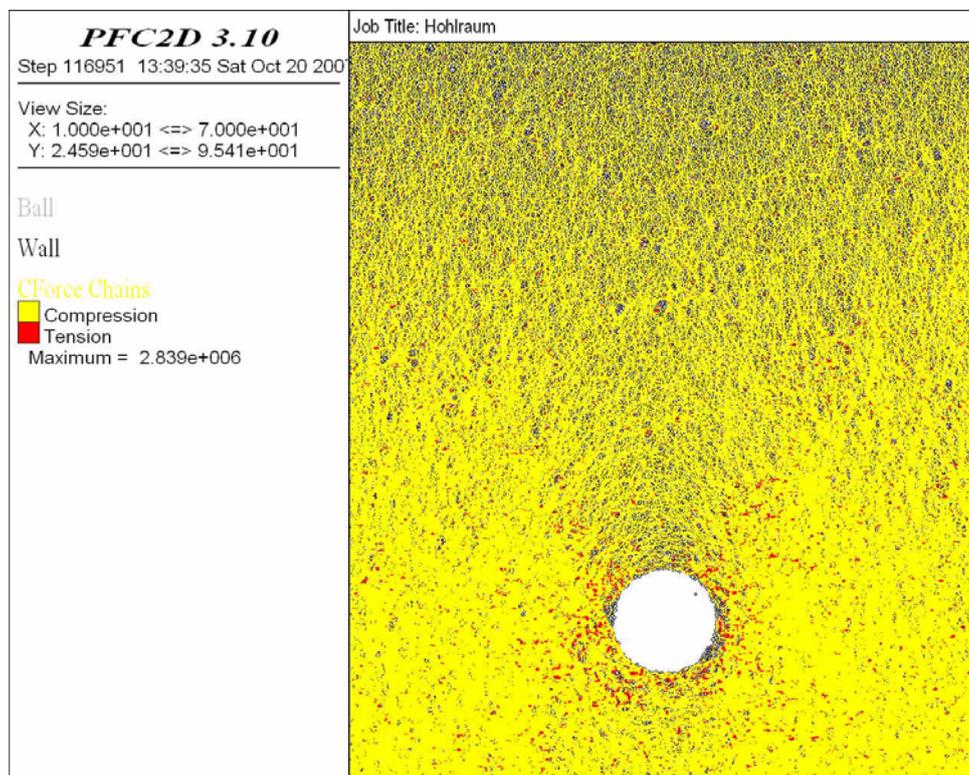


Abbildung 52: Kontaktkräfte nach 20.000 Berechnungsschritten

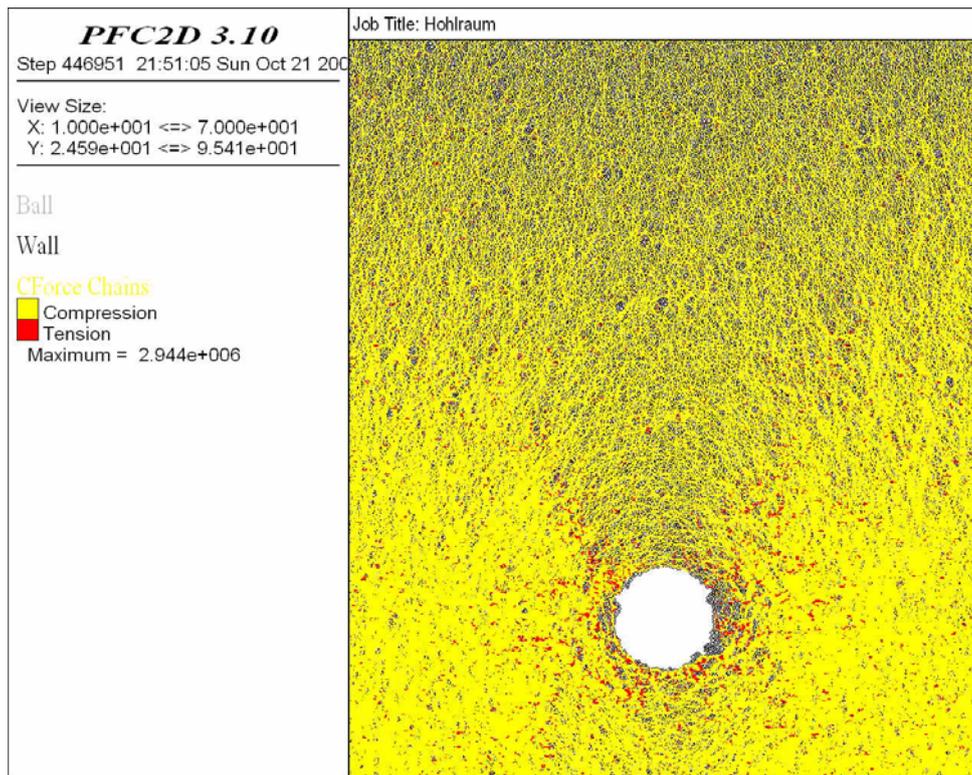


Abbildung 53: Kontaktkräfte nach 350.000 Berechnungsschritten

Abbildung 52 und 53 zeigen die Kontaktkräfte zwischen den Partikeln. Auch wenn kein totales Versagen des Hohlraumes eintritt, ist bereits eine Ausquetschung des Gebirges, besonders an der rechten Ulme, deutlich auszumachen.

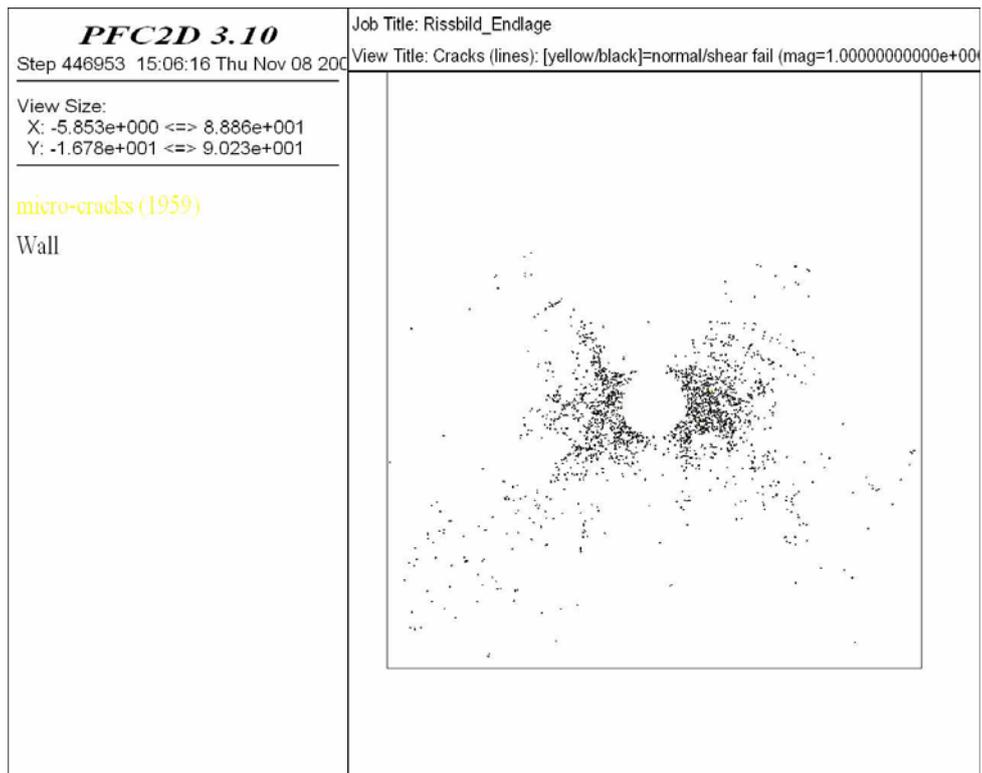


Abbildung 54: Rissbild (Endlage)

Am Rissbild ist erkennbar, dass es vorwiegend zu Schubrisen im Bereich der Ulmen kommt. Eine gewisse Ausbildung der Scherbänder ist bereits erkennbar. Diese zeigt sich dann noch viel deutlicher in den Simulationen mit den Materialparametern aus Modell 2 bis 5.

8.1.2 Modell 2

- Reibungskoeffizient μ der Partikel: $\mu = 0,087$
- Mittelwert der Zugfestigkeit: $\bar{\sigma}_c = 5 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Zugfestigkeit: $\sigma_{dev} = 5 \cdot 10^4$
- Mittelwert der Scherfestigkeit: $\bar{\tau}_c = 1,0 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Scherfestigkeit: $\tau_{dev} = 1,1 \cdot 10^4$
- Verhalten: Instabil

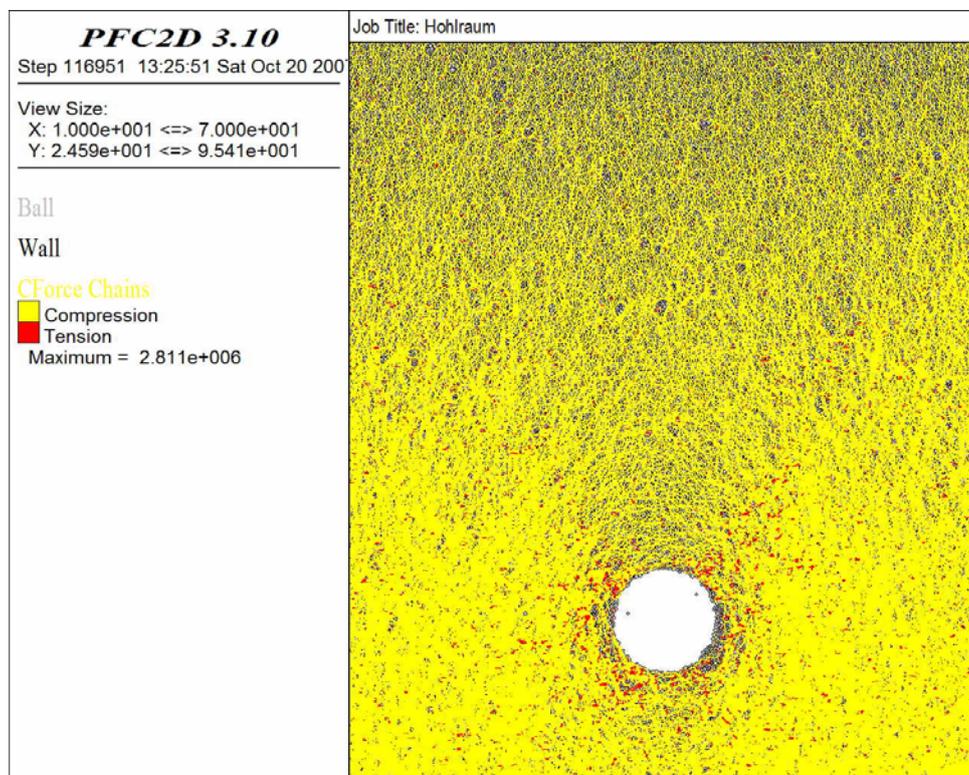


Abbildung 55: Kontaktkräfte nach 20.000 Berechnungsschritten

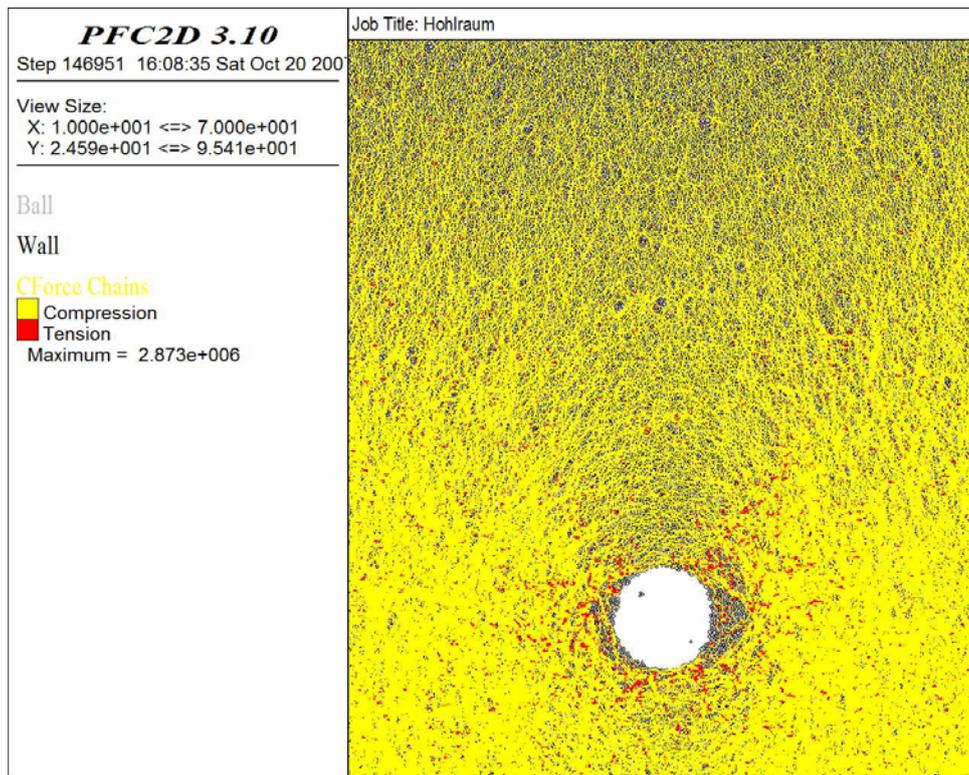


Abbildung 56: Kontaktkräfte nach 50.000 Berechnungsschritten

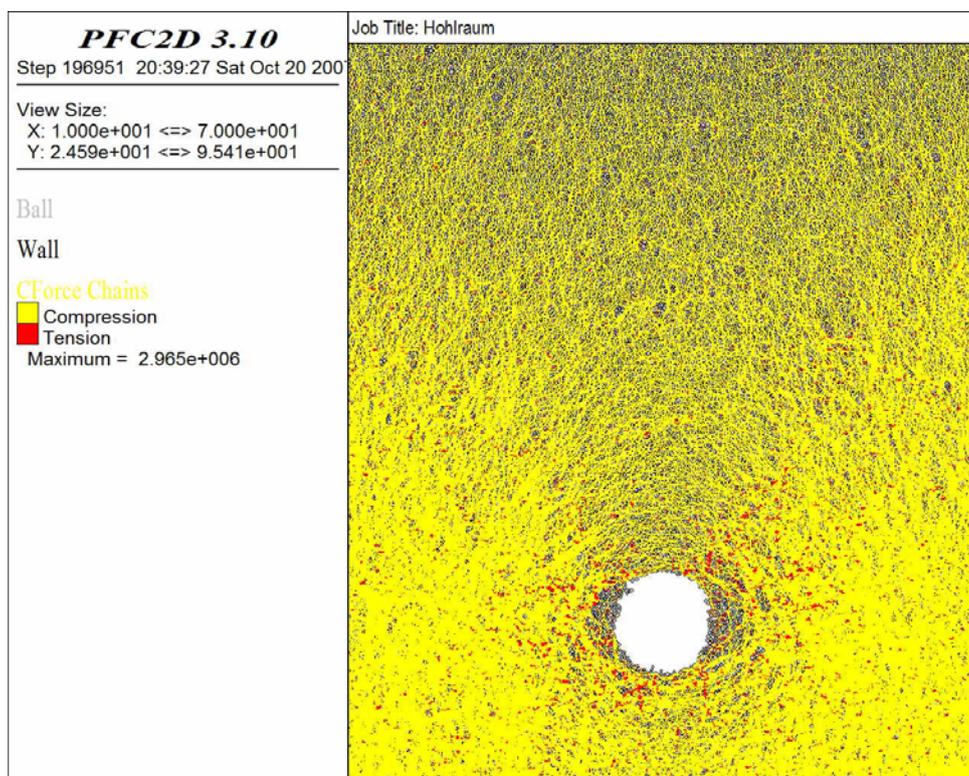


Abbildung 57: Kontaktkräfte nach 100.000 Berechnungsschritten

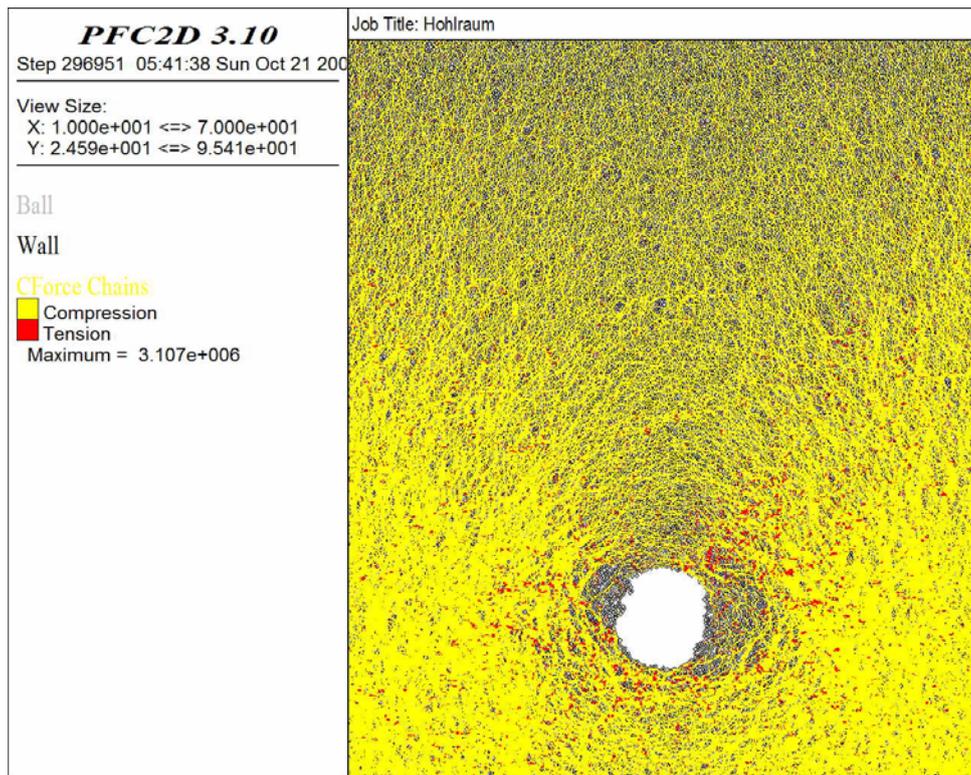


Abbildung 58: Kontaktkräfte nach 200.000 Berechnungsschritten

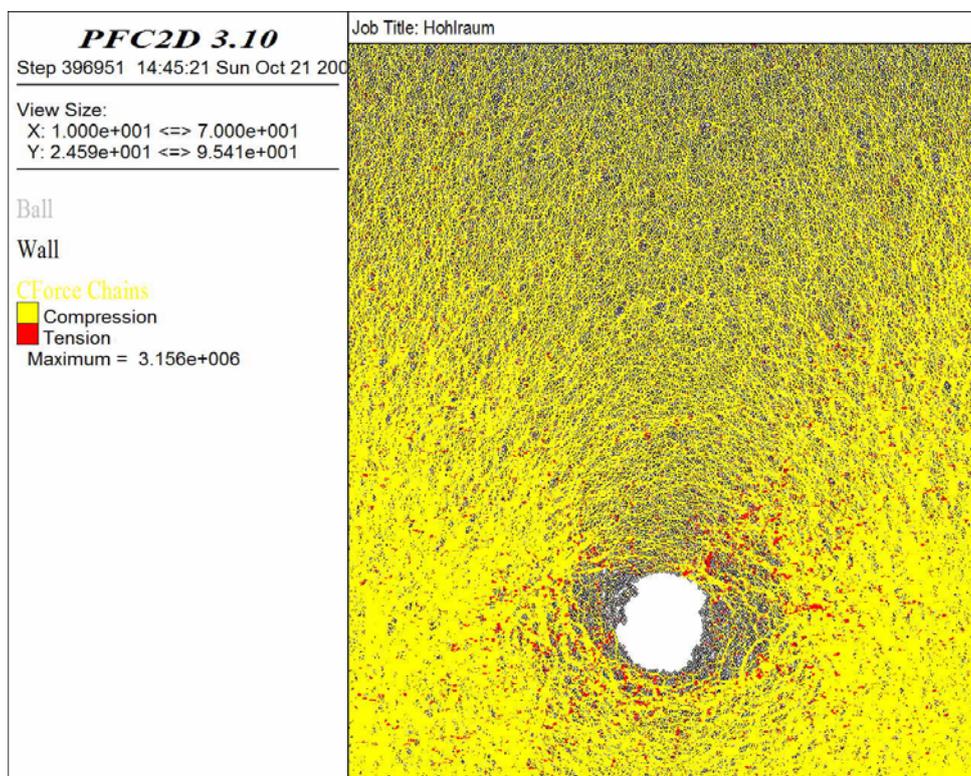


Abbildung 59: Kontaktkräfte nach 300.000 Berechnungsschritten

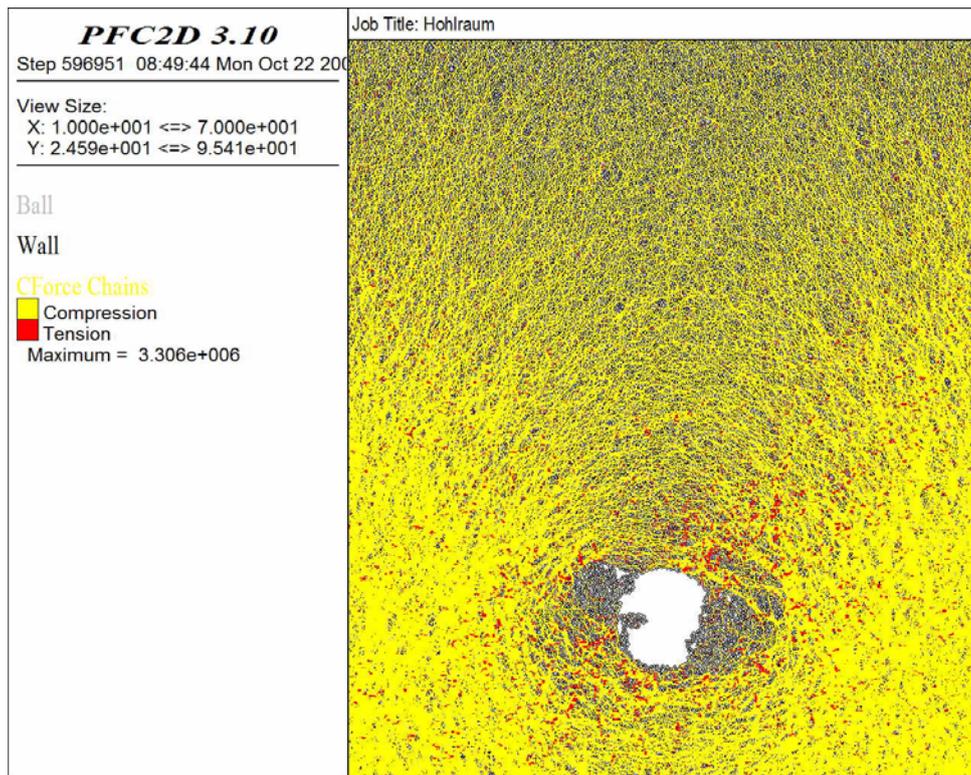


Abbildung 60: Kontaktkräfte nach 500.000 Berechnungsschritten

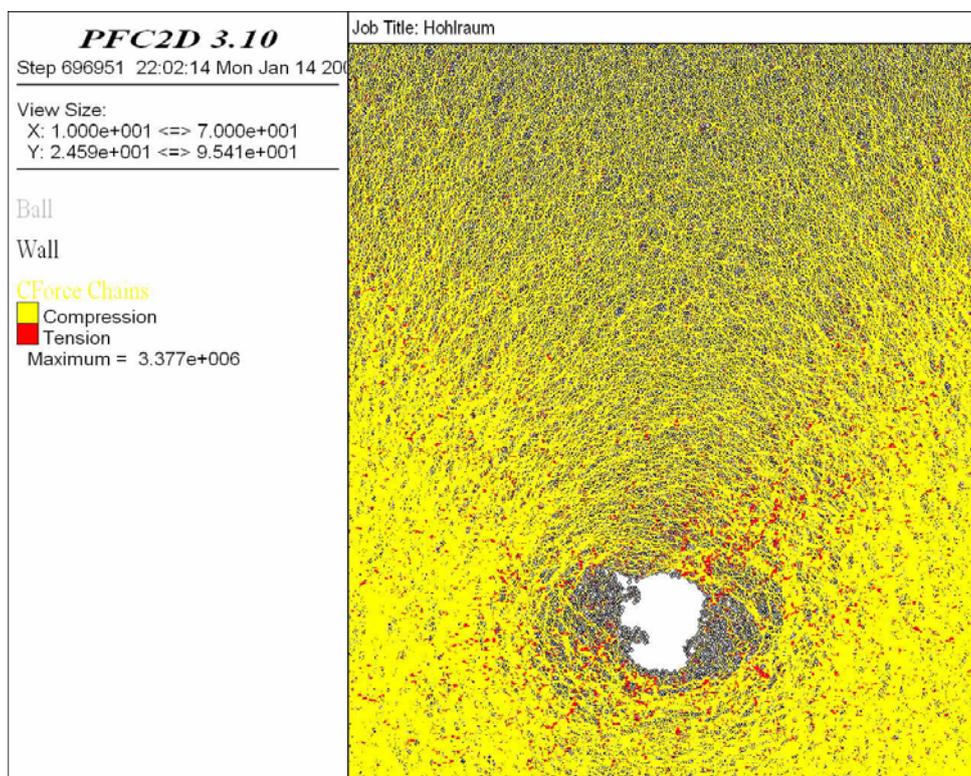


Abbildung 61: Kontaktkräfte nach 600.000 Berechnungsschritten

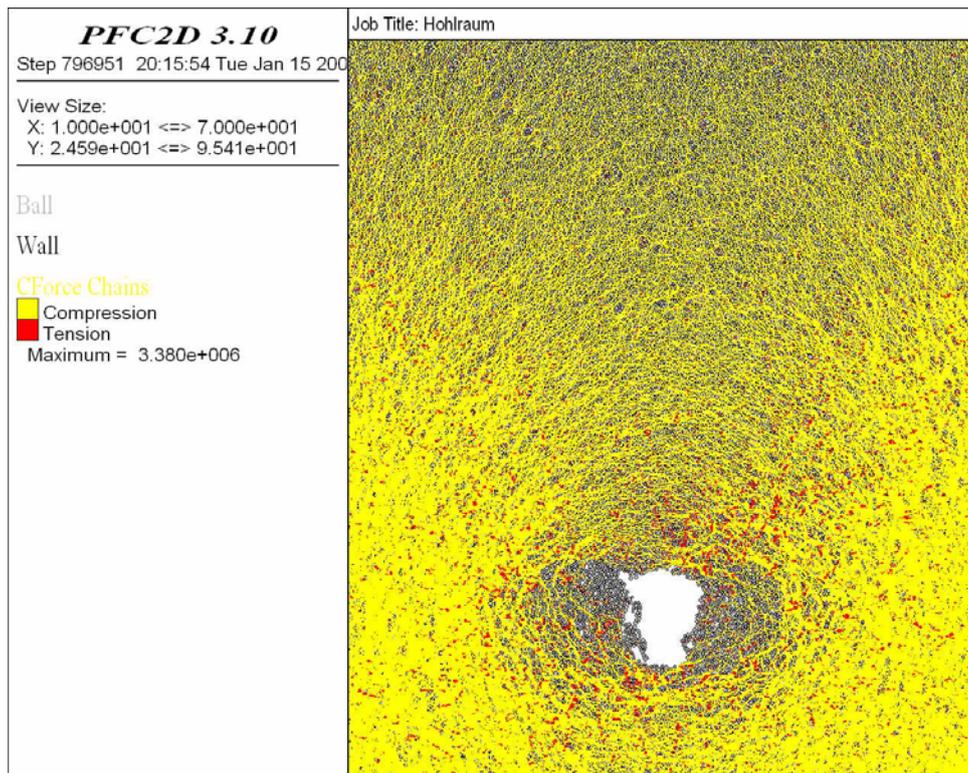


Abbildung 62: Kontaktkräfte nach 700.000 Berechnungsschritten

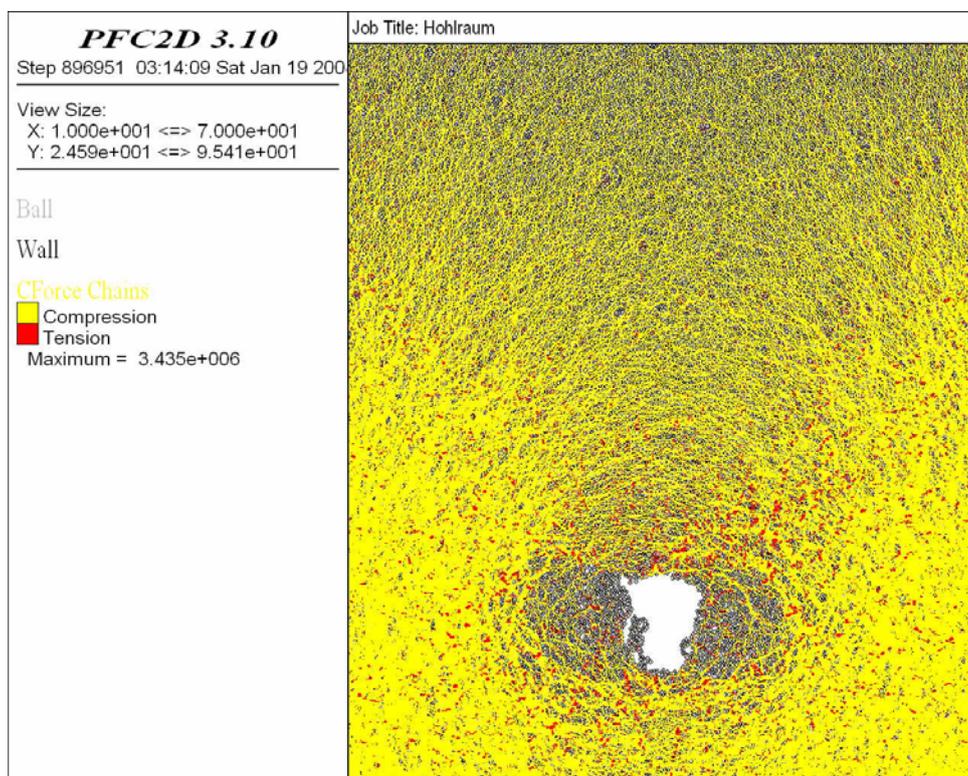


Abbildung 63: Kontaktkräfte nach 800.000 Berechnungsschritten

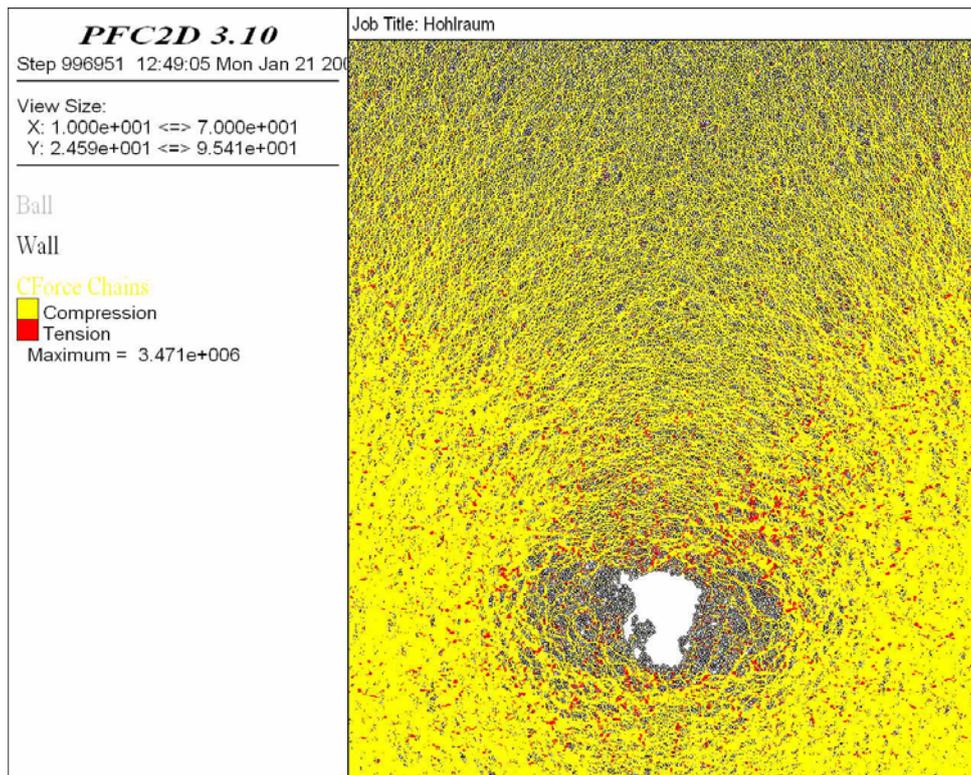


Abbildung 64: Kontaktkräfte nach 900.000 Berechnungsschritten

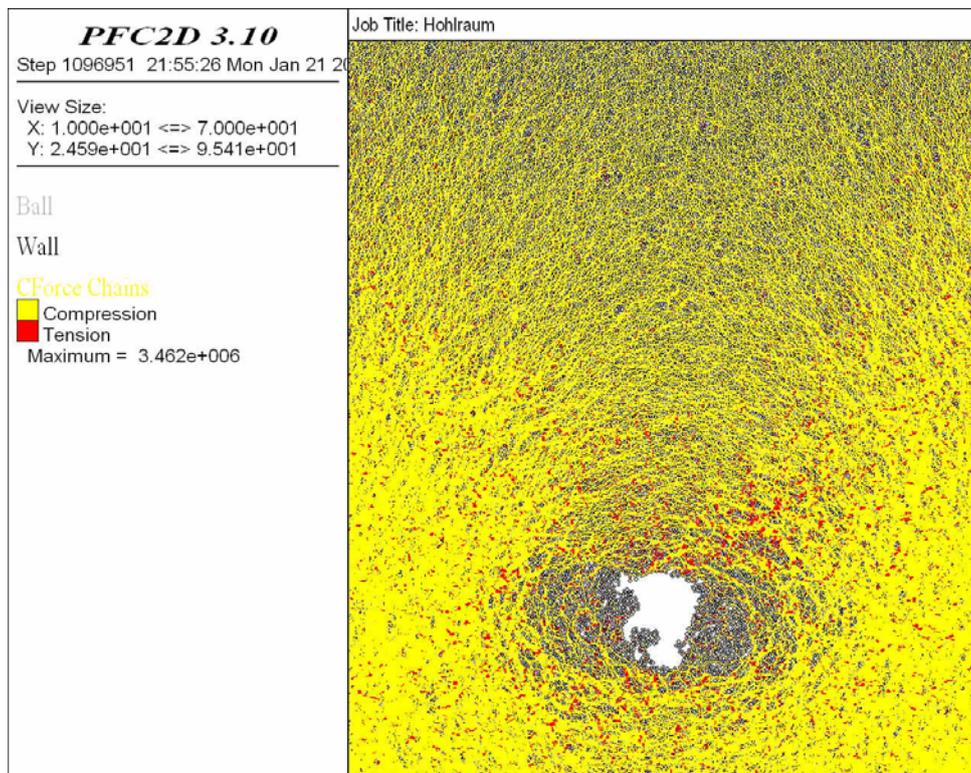


Abbildung 65: Kontaktkräfte nach 1.000.000 Berechnungsschritten

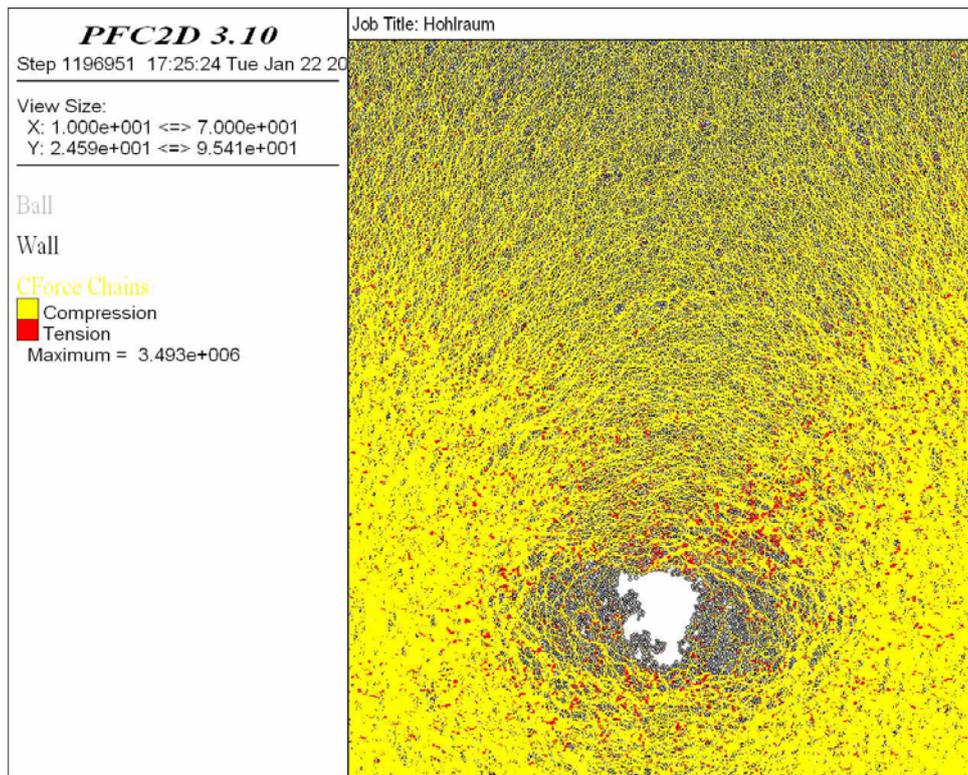


Abbildung 66: Kontaktkräfte nach 1.100.000 Berechnungsschritten

Abbildung 55 bis 66 zeigen die Kontaktkräfte der Partikel untereinander. Es ist eine erhebliche Auflockerung im Bereich der Ulmen auszumachen. Es kommt zu einem deutlichen ausquetschen mehr oder weniger kompetenter Bruchkörper aus dem Ensemble. Anhand der Form der Bruchkörper, welche sich im Bereich der Ulmen ablösen, sowie deren Entstehung und Bewegung, kann auf ein Scherversagen geschlossen werden. Dies wird durch die Darstellung des Rissbildes (Abbildung 67 bis 78) bestätigt.

Hinsichtlich des Rissbildes können folgende Aussagen gemacht werden. Die für die Berechnung des Modells 2 verwendeten Parameter führen fast ausschließlich zu Schubrisen im Modell (Abbildung 67 bis Abbildung 78). Dies hängt mit der im Vergleich zur Normalfestigkeit, geringen Scherfestigkeit der Kontaktbindung in diesem Modell zusammen. Die ersten Scherbrüche treten im Bereich der Ulmen auf und führen zu einer Auflockerung in diesem Bereich. Eine Rissbildung im Bereich der Firste, kann in PFC nicht beobachtet werden. Der Firstbereich ist zu Beginn der Berechnung frei von Rissen (siehe Abbildung 67). Mit Fortschreitung der Berechnung häufen sich die Brüche der Kontaktbindungen im Bereich der Ulmen, was zu einer zunehmenden Auflockerung in diesem Bereich und zu entsprechend großen Verschiebungen der Ulmenzwickel führt. Der First- und Sohlbereich bleiben weitgehend Rissfrei.

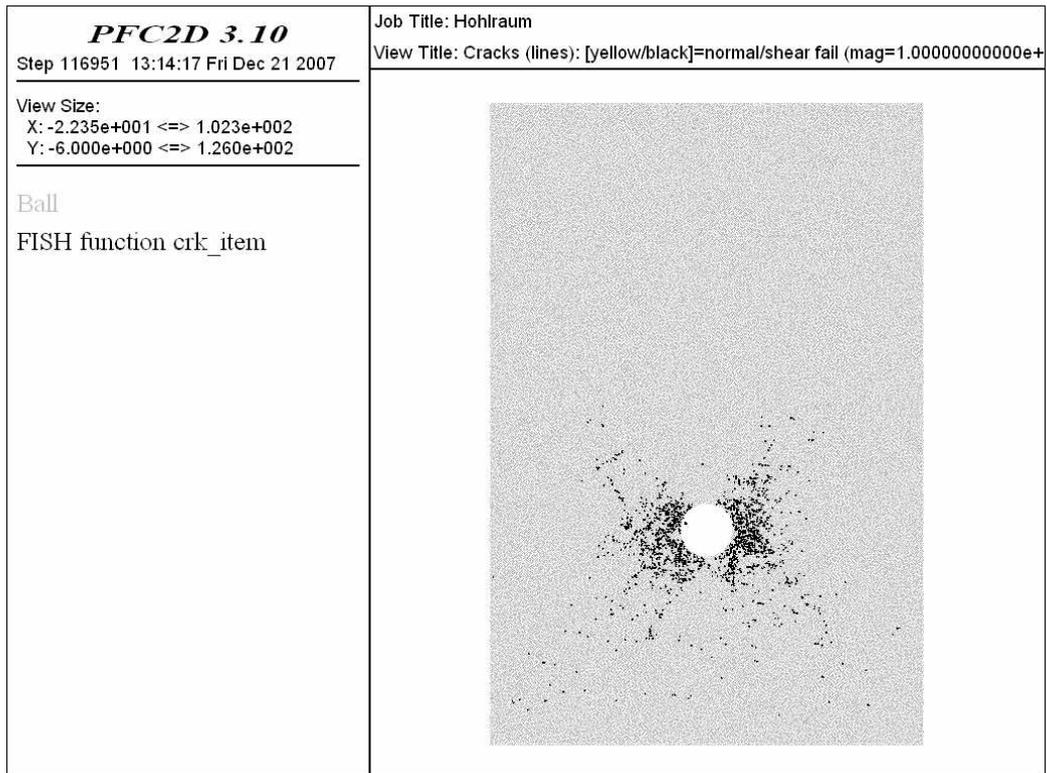


Abbildung 67: Rissbildung nach 20.000 Berechnungsschritten

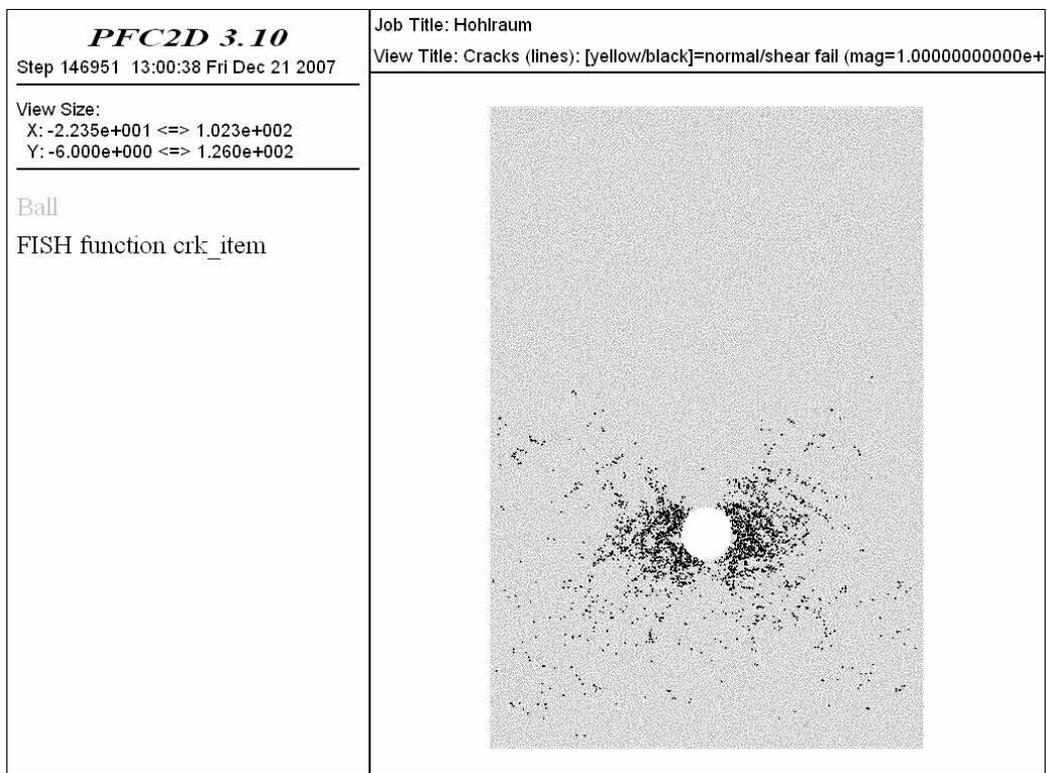


Abbildung 68: Rissbildung nach 50.000 Berechnungsschritten

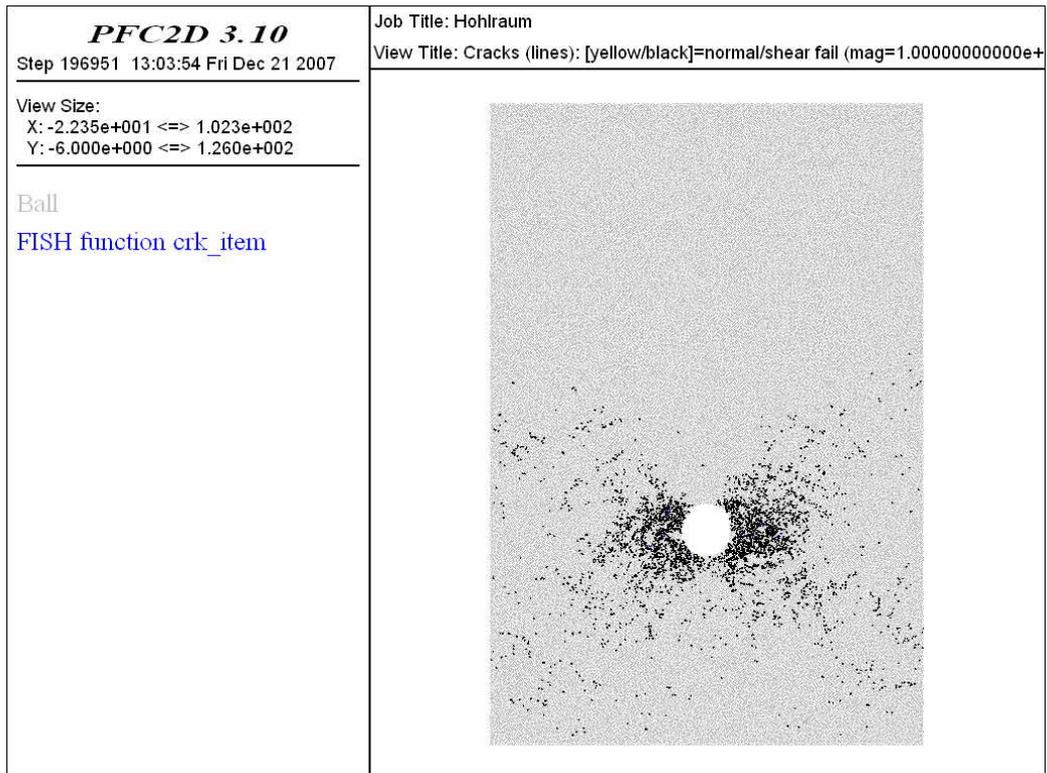


Abbildung 69: Rissbildung nach 100.000 Berechnungsschritten

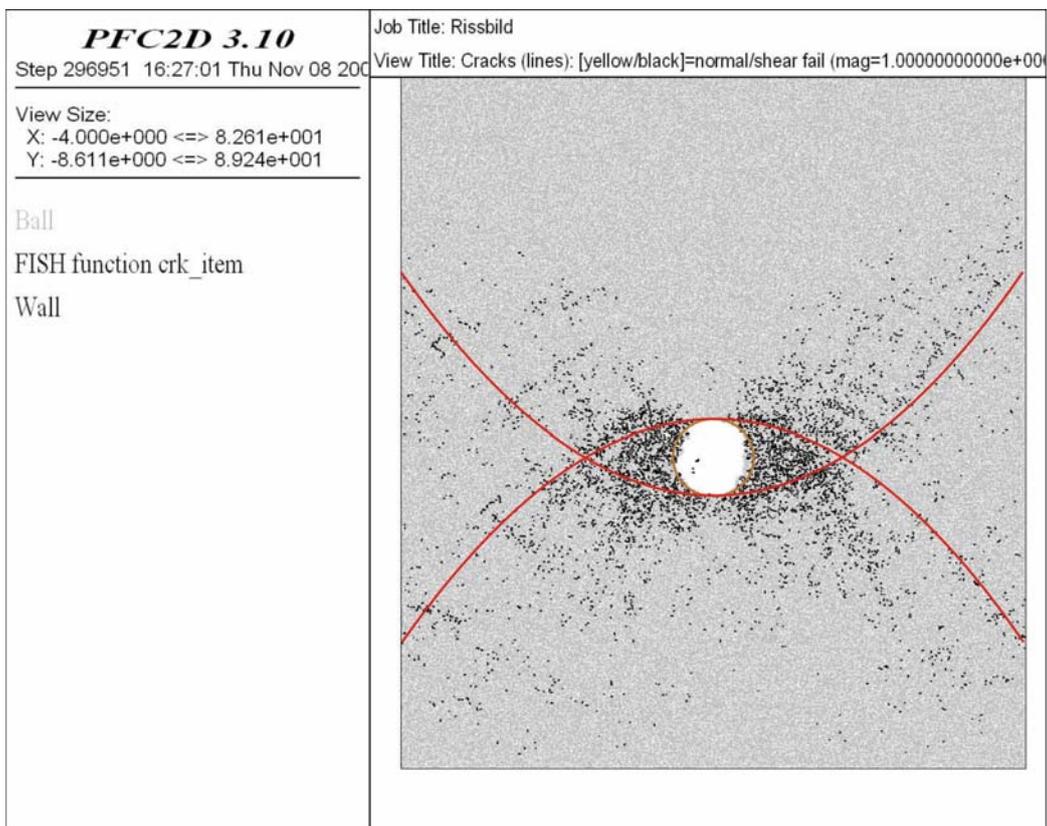


Abbildung 70: Rissbildung mit Kennzeichnung der sich ausbildenden Scherbänder nach 200.000 Berechnungsschritten

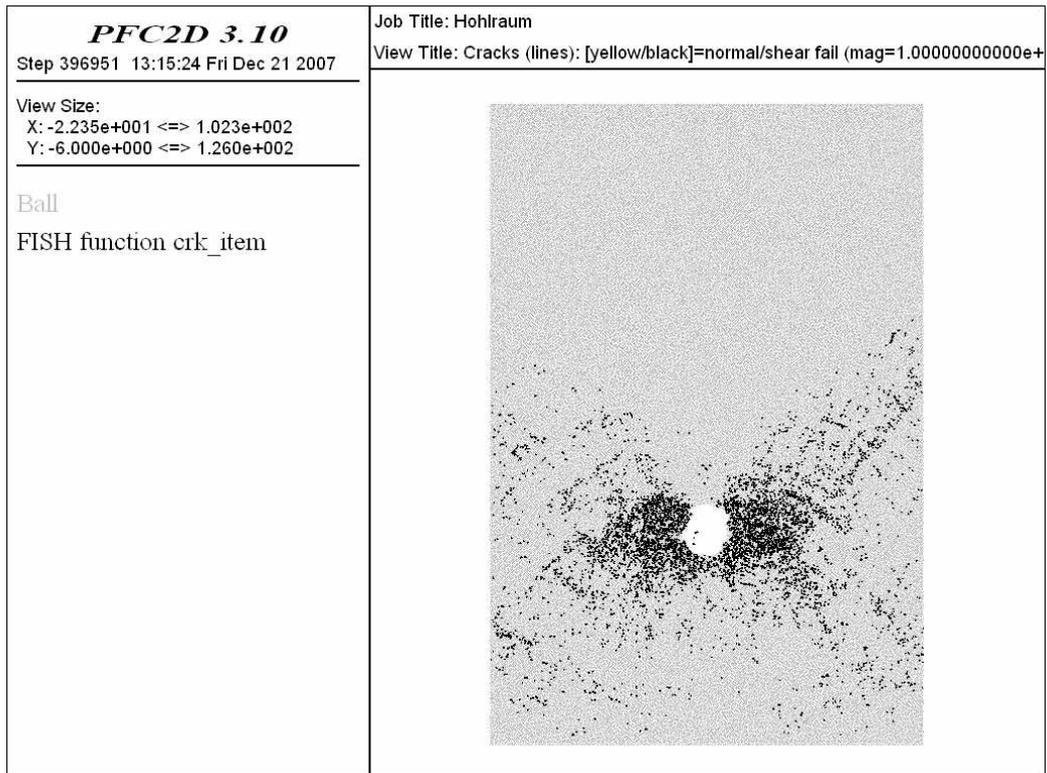


Abbildung 71: Rissbildung nach 300.000 Berechnungsschritten

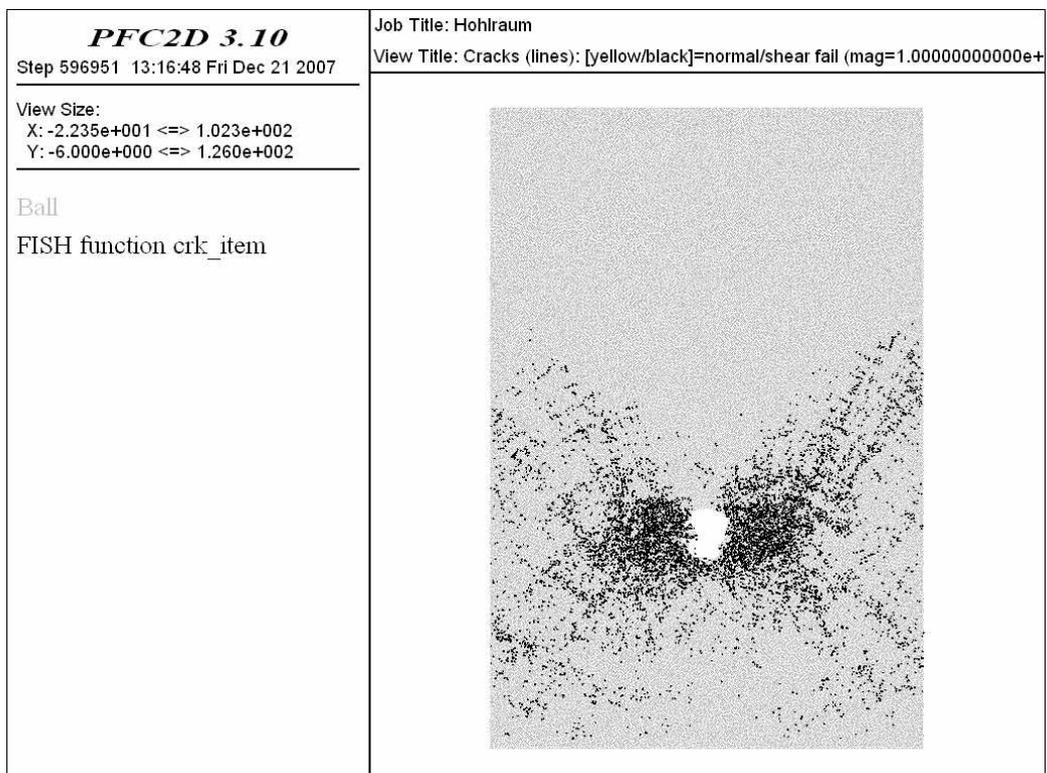


Abbildung 72: Rissbildung nach 500.000 Berechnungsschritten

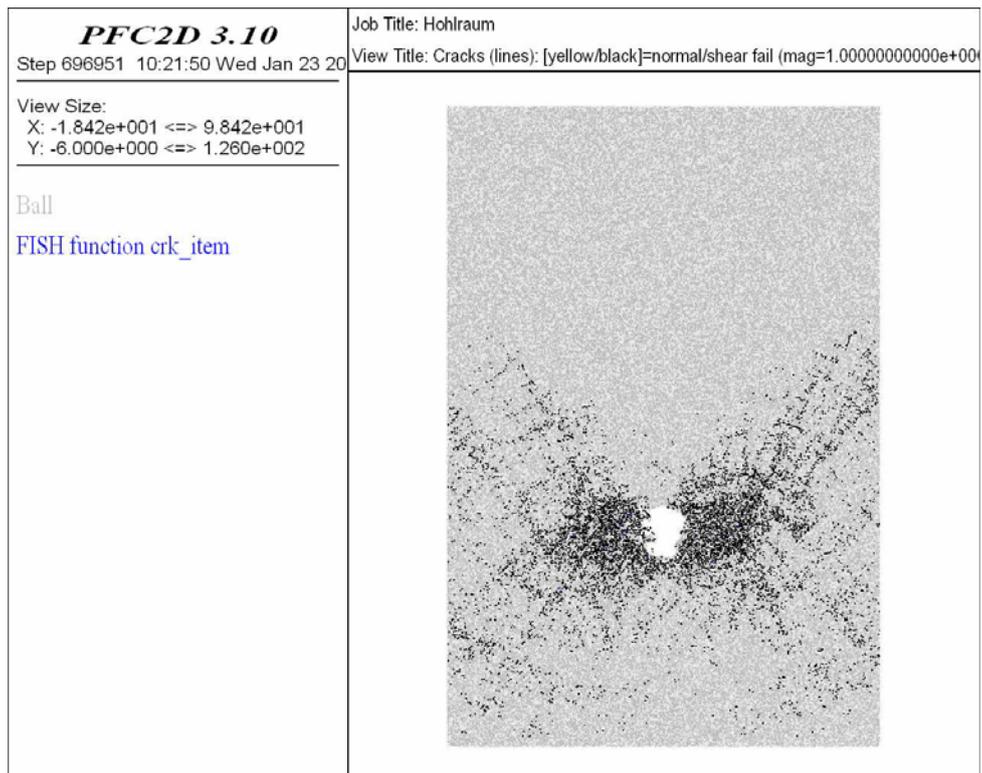


Abbildung 73: Rissbildung nach 600.000 Berechnungsschritten

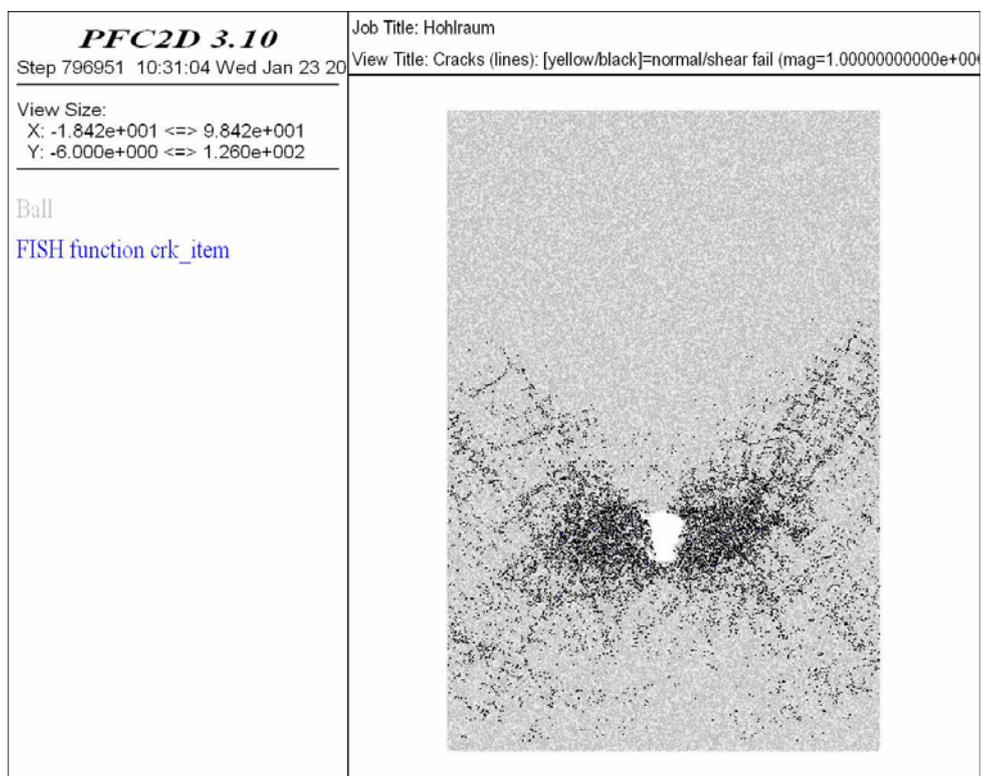


Abbildung 74: Rissbildung nach 700.000 Berechnungsschritten

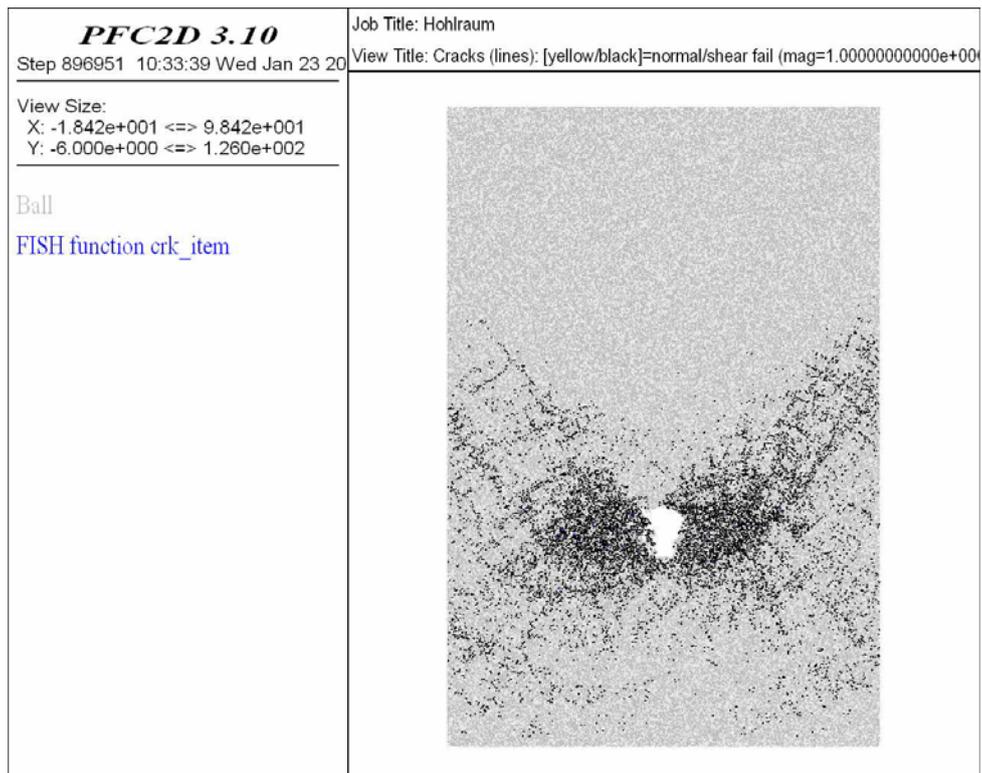


Abbildung 75: Rissbildung nach 800.000 Berechnungsschritten

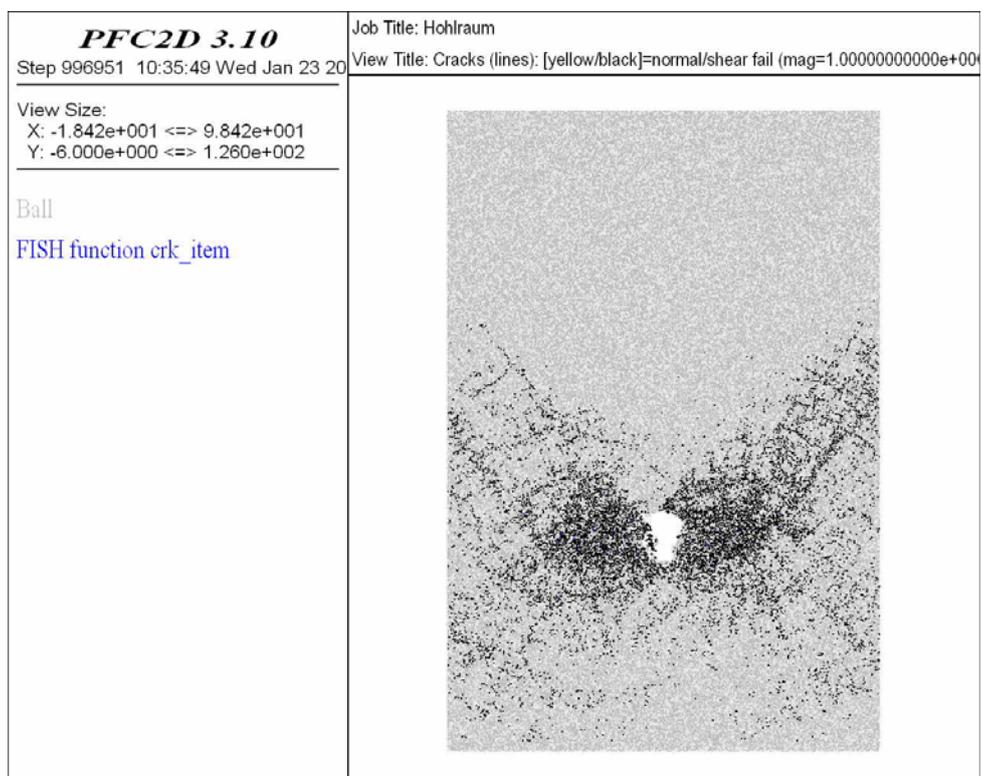


Abbildung 76: Rissbildung nach 900.000 Berechnungsschritten

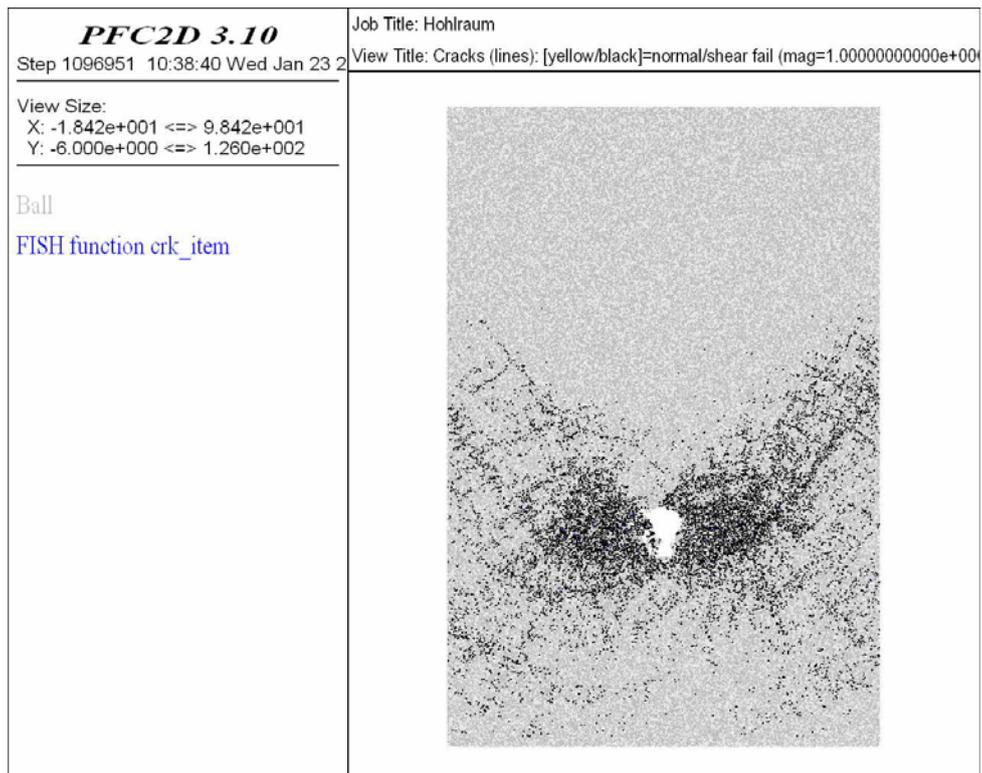


Abbildung 77: Rissbildung nach 1.000.000 Berechnungsschritten

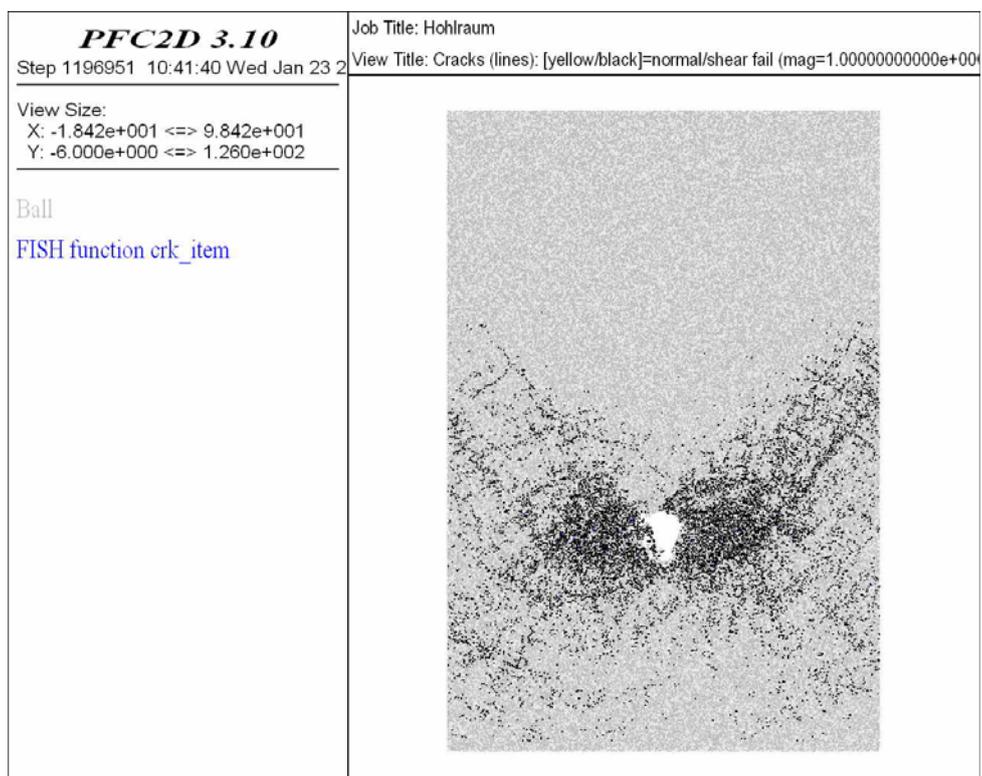


Abbildung 78: Rissbildung nach 1.100.000 Berechnungsschritten

Folgende Abbildungen zeigen die Verschiebungsvektoren um den Hohlraum, welche in regelmäßigen Abschnitten während der Berechnung aufgezeichnet wurden. Die beigefügte Tabelle beschreibt die auftretenden Verschiebungen in Zahlen. Es handelt sich dabei um die Maximalverschiebung für den betrachteten Bereich des Ausbruches.

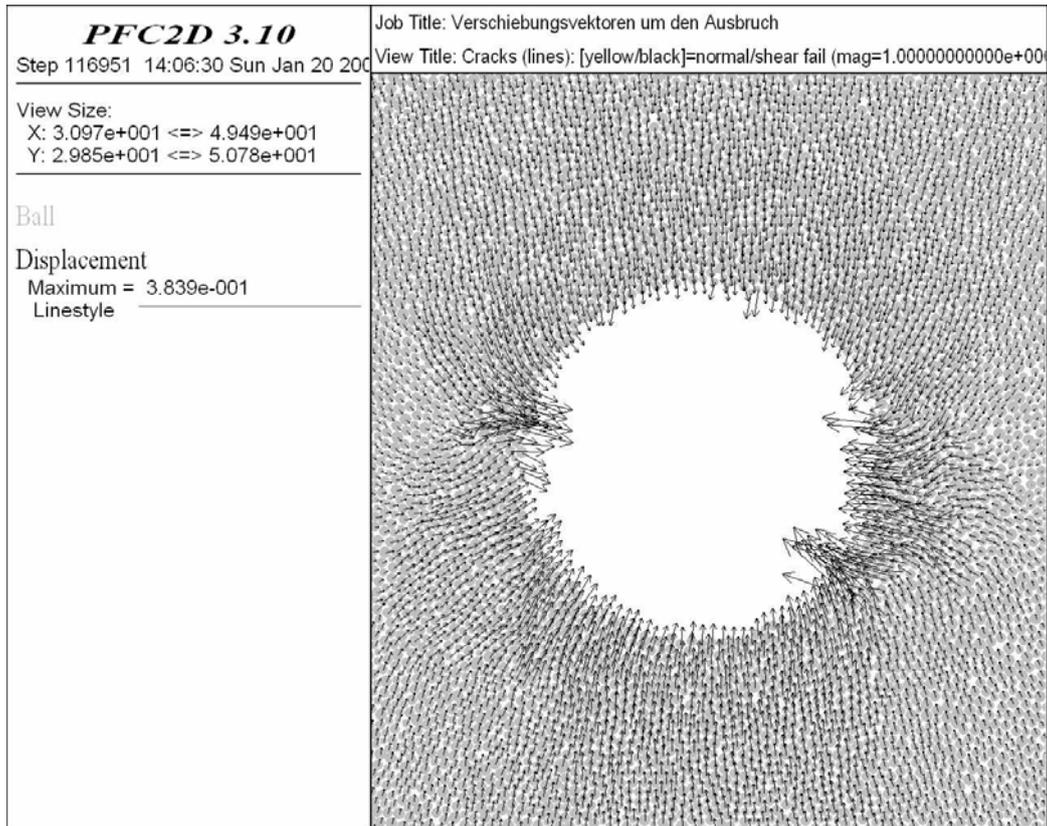


Abbildung 79: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 20.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 20.000 Berechnungsschritten | |
|---|--------|
| Firste | 0,16 m |
| Sohle | 0,13 m |
| Ulme | 0,38 m |

Tabelle 12: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 20.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

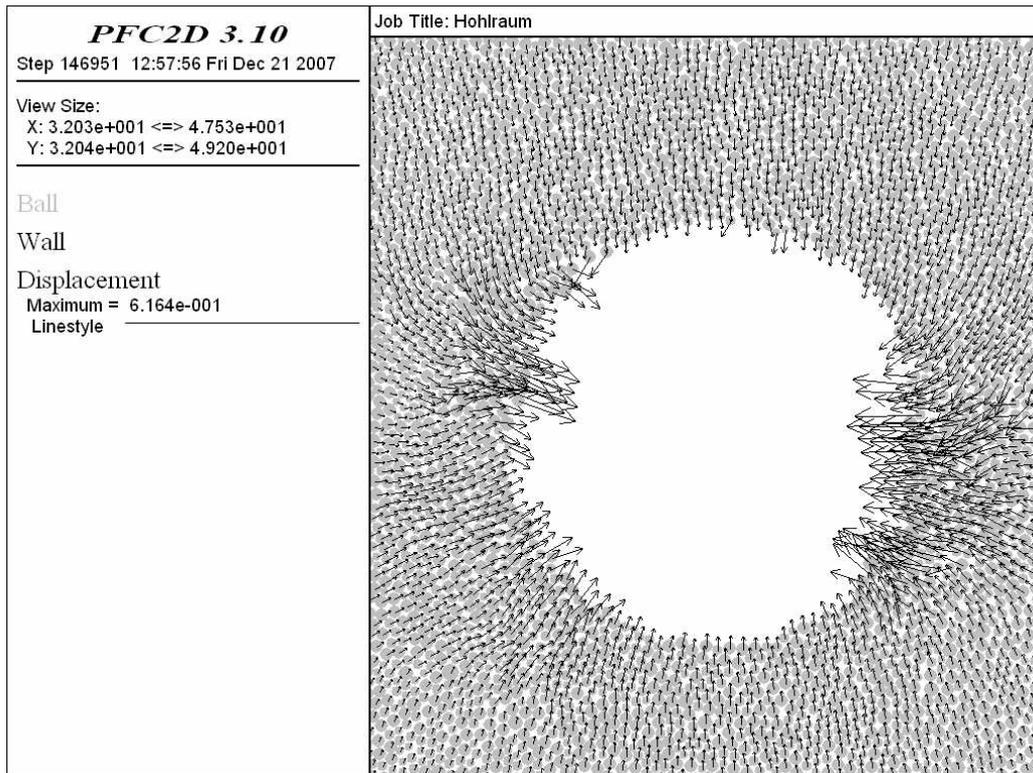


Abbildung 80: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 50.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 50.000 Berechnungsschritten | |
|---|--------|
| Firste | 0,21 m |
| Sohle | 0,14 m |
| Ulme | 0,61 m |

Tabelle 13: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 50.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

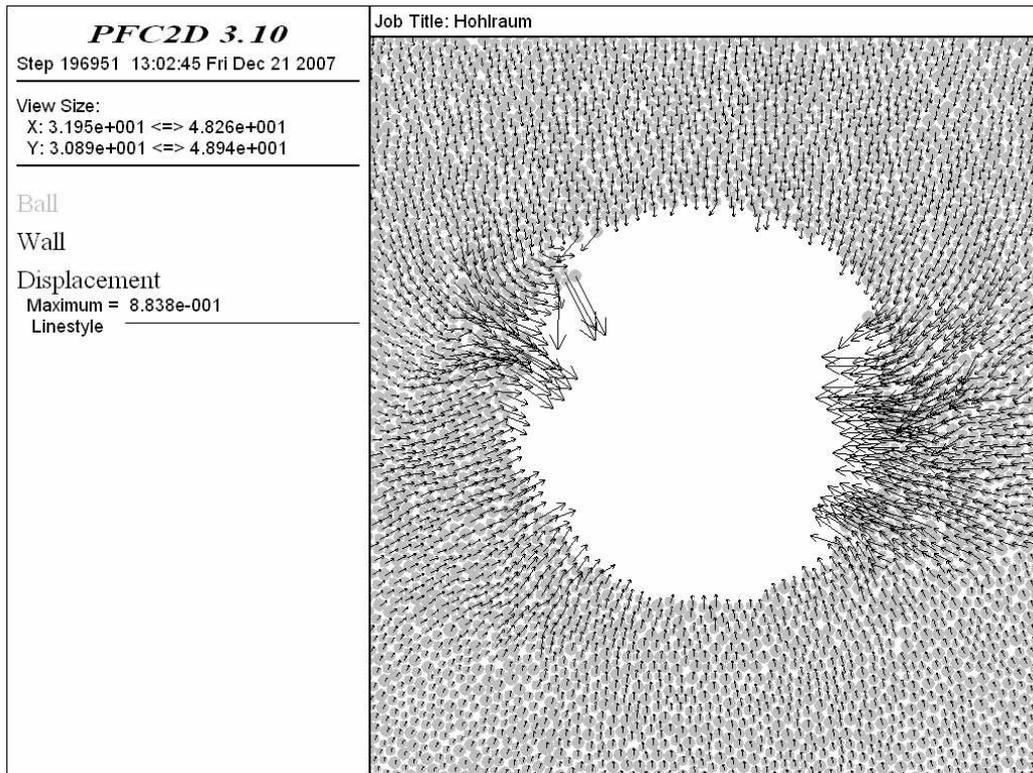


Abbildung 81: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 100.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 100.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,25 m |
| Sohle | 0,23 m |
| Ulme | 0,86 m |

Tabelle 14: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 100.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

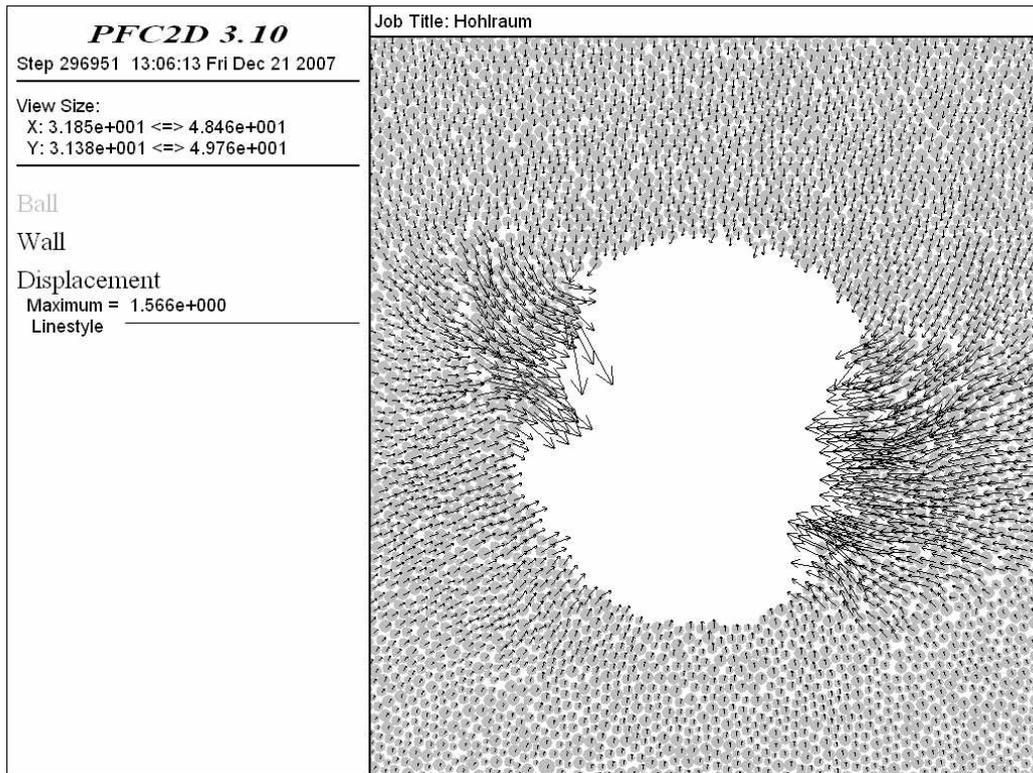


Abbildung 82: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 200.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 200.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,29 m |
| Sohle | 0,27 m |
| Ulme | 1,26 m |

Tabelle 15: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 200.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

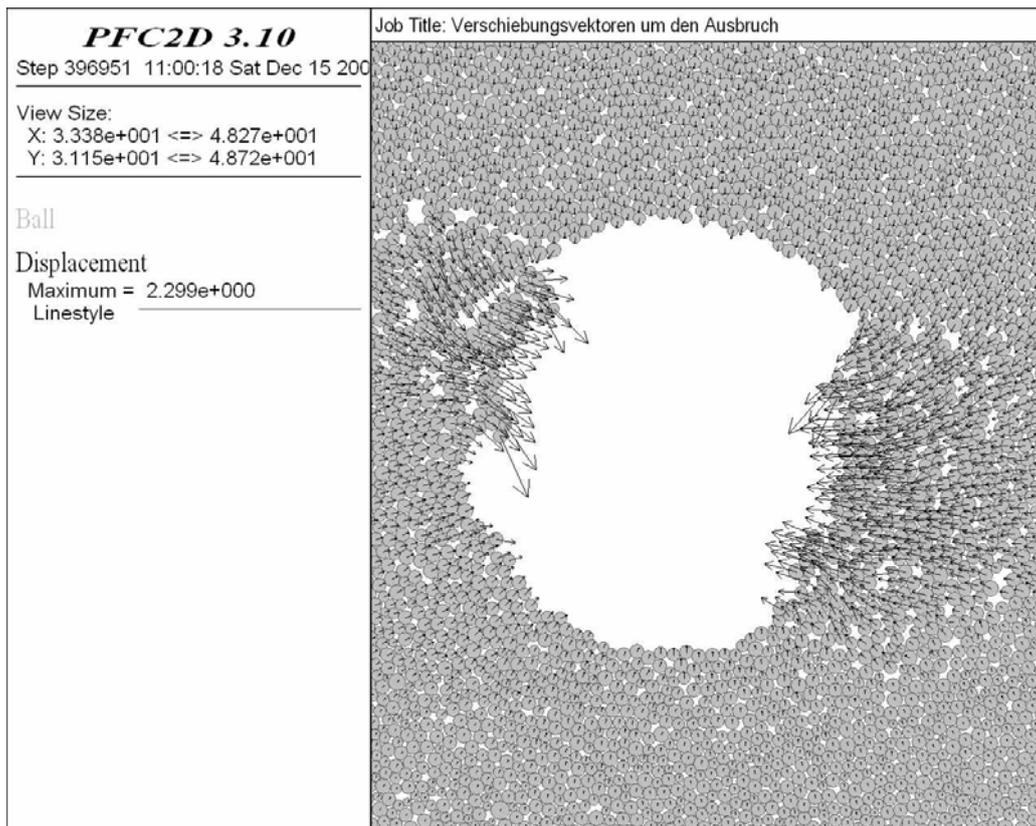


Abbildung 83: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 300.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 300.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,32 m |
| Sohle | 0,28 m |
| Ulme | 1,40 m |

Tabelle 16: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 300.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

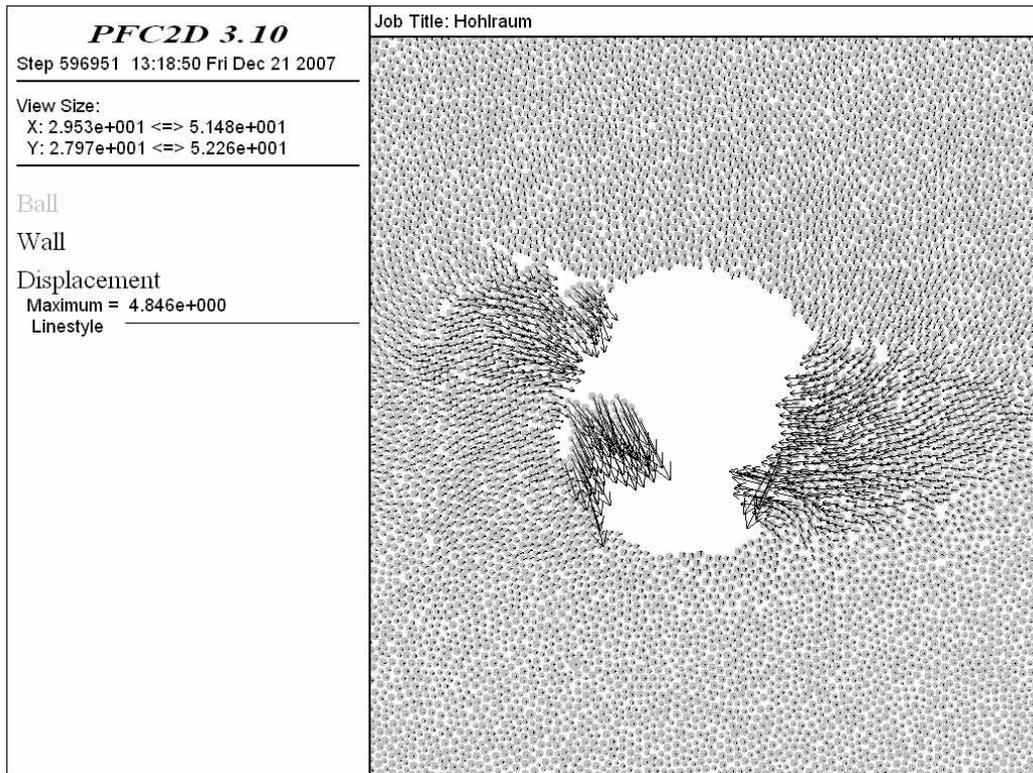


Abbildung 84: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 500.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 500.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,39 m |
| Sohle | 0,36 m |
| Ulme | 1,65 m |

Tabelle 17: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 500.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

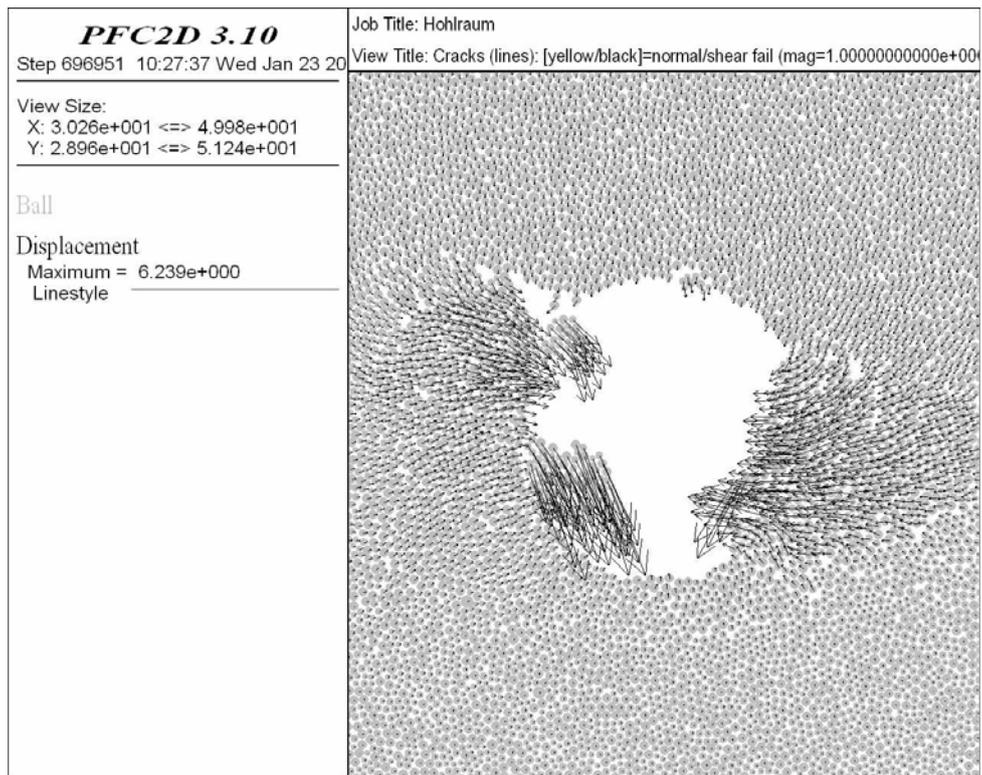


Abbildung 85: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 600.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 600.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,42 m |
| Sohle | 0,37 m |
| Ulme | 1,70 m |

Tabelle 18: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 600.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

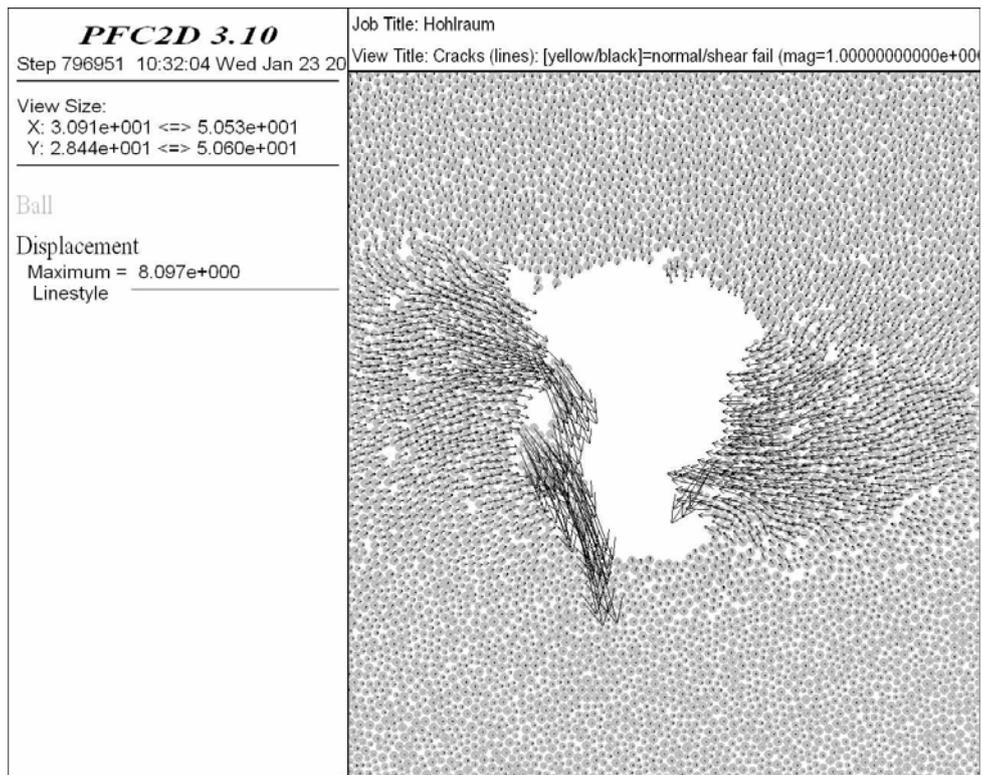


Abbildung 86: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 700.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 700.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,44 m |
| Sohle | 0,37 m |
| Ulme | 1,96 m |

Tabelle 19: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 700.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

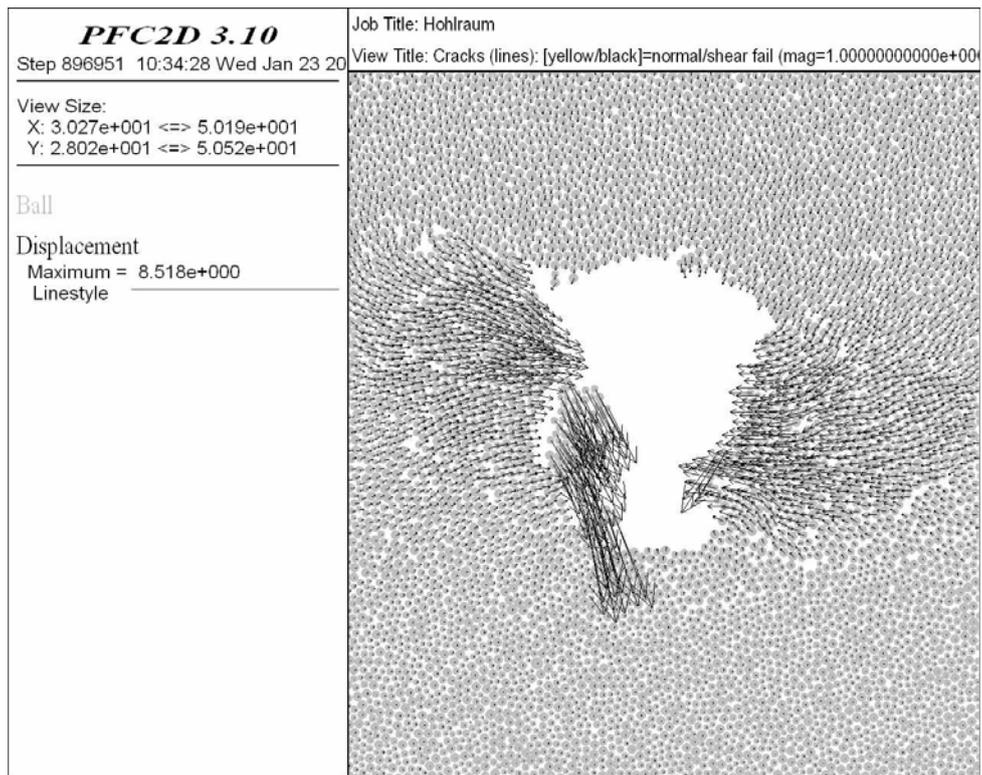


Abbildung 87: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 800.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 800.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,46 m |
| Sohle | 0,38 m |
| Ulme | 2,16 m |

Tabelle 20: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 800.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

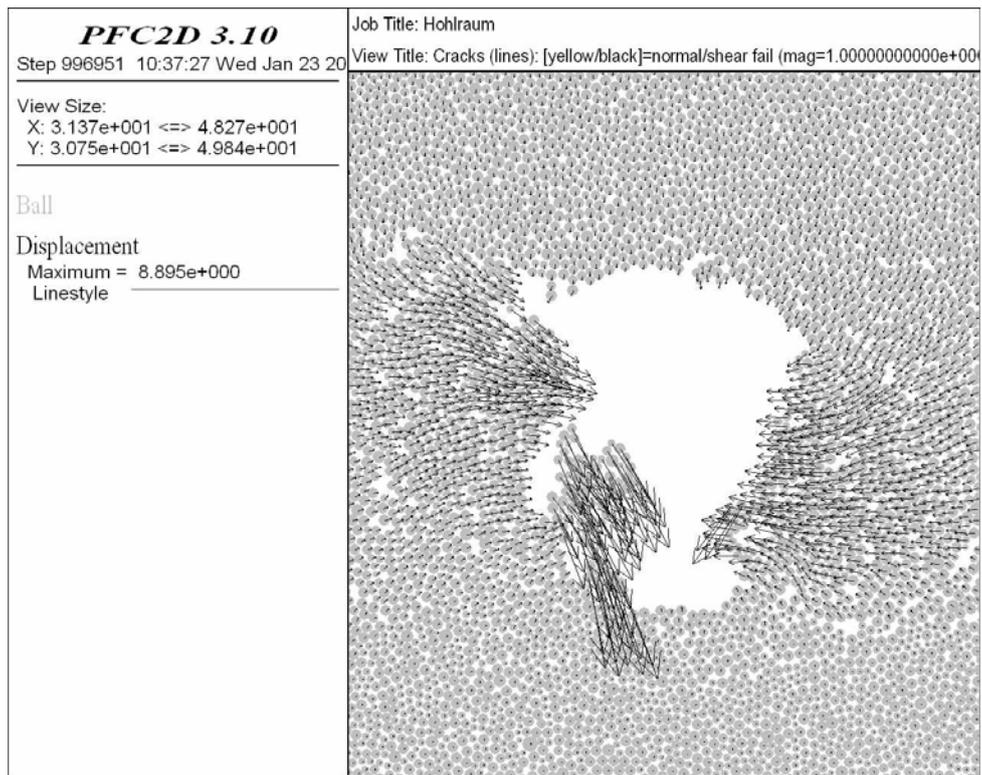


Abbildung 88: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 900.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 900.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,61 m |
| Sohle | 0,39 m |
| Ulme | 2,33 m |

Tabelle 21: Verschiebungen in Richtung Hohlräum nach 900.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

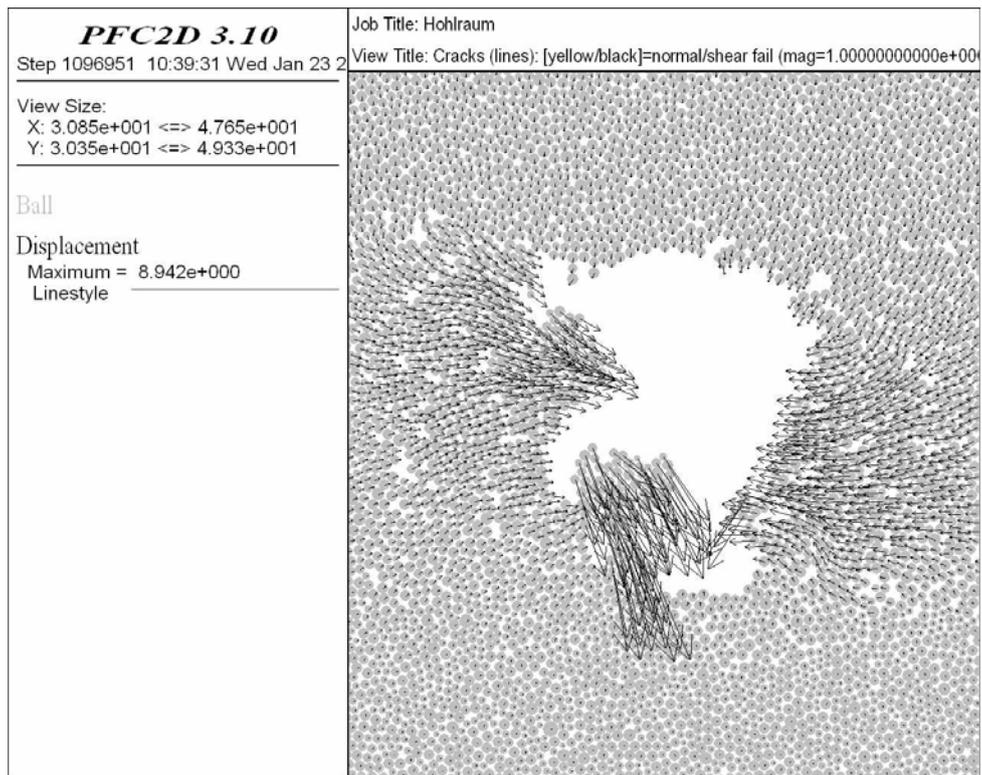


Abbildung 89: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 1.000.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 1.000.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,63 m |
| Sohle | 0,39 m |
| Ulme | 2,59 m |

Tabelle 22: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 1.000.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

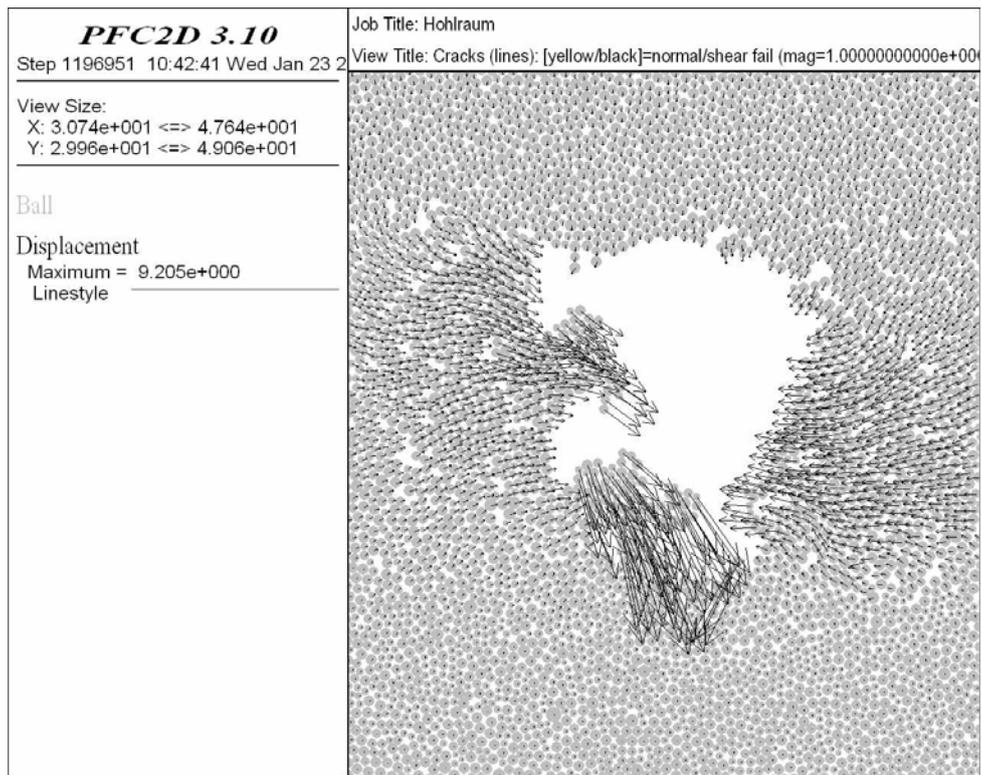


Abbildung 90: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 1.100.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 1.100.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,69 m |
| Sohle | 0,39 m |
| Ulme | 2,88 m |

Tabelle 23: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 1.100.000 Berechnungsschritten (Modell 2)

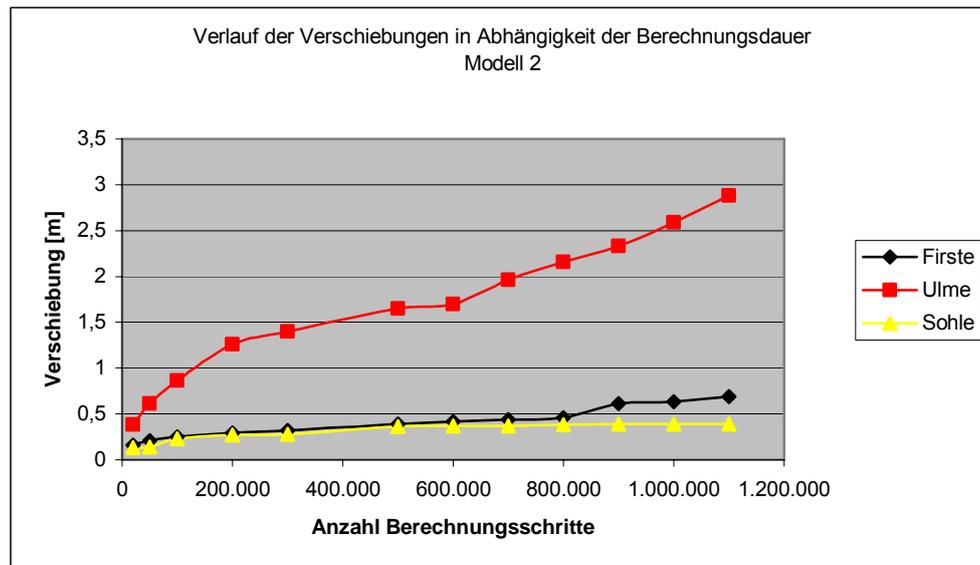


Abbildung 91: Verlauf der Verschiebungen um den Ausbruchsquerschnitt

Abbildung 91 zeigt den Verlauf der Verschiebungen über die Berechnungsschritte an der Firste, Sohle und Ulme des modellierten Ausbruches. Es zeigen sich deutliche Verschiebungen in allen Bereichen des Ausbruches. Ein ausgeprägtes progressives Verhalten ist jedoch nur im Ulmenbereich zu erkennen. Die Verschiebungen im Sohlbereich wachsen bis zu einem Wert von etwa 40 cm an und nehmen nicht mehr weiter zu.

8.1.3 Modell 3

- Reibungskoeffizient der Partikel: $\mu = 0,466$
- Mittelwert der Zugfestigkeit: $\bar{\sigma}_c = 5 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Zugfestigkeit: $\sigma_{dev} = 5 \cdot 10^4$
- Mittelwert der Scherfestigkeit: $\bar{\tau}_c = 1 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Scherfestigkeit: $\tau_{dev} = 1 \cdot 10^4$
- Verhalten: Standfest

Die verwendeten Parameter für dieses Modell führen zu einem standfesten Verhalten des Gebirges. Im rechten Ulmenbereich kommt es zu einer Überbeanspruchung des Gebirges und somit zum Scherbruch vieler Bindungen. Der in diesem Modell etwas höher angesetzte Reibungskoeffizient der Partikel verhindert das Ausquetschen der überbeanspruchten Bereiche. Es kommt somit zur Ausbildung, jedoch nicht zum ausdrücken der Ulmenzwickel. Abbildung 92 und 93 zeigen die Kontaktkräfte zwischen den Partikeln. Abbildung 94 stellt die gebrochenen Bindungen dar.

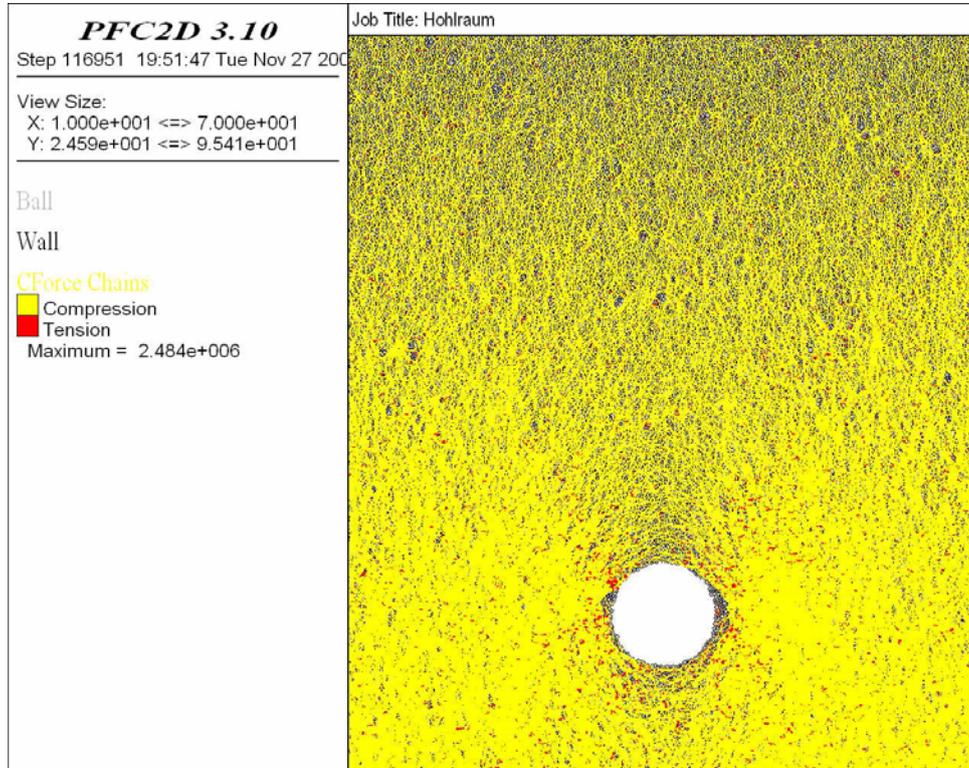


Abbildung 92: Kontaktkräfte nach 20.000 Berechnungsschritten

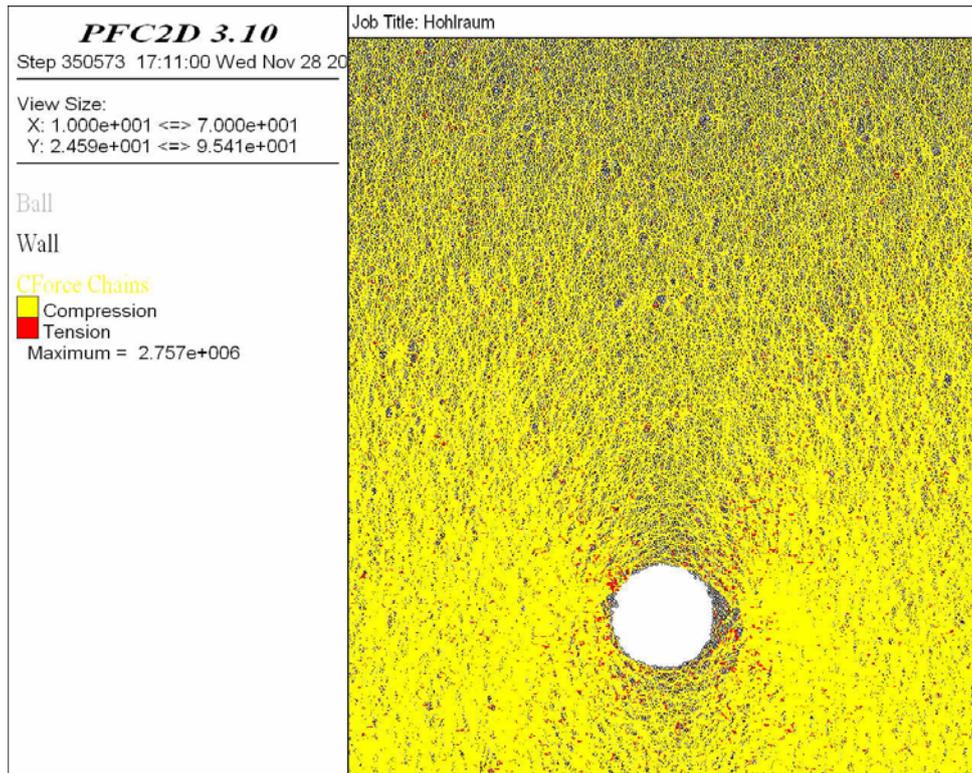


Abbildung 93: Kontaktkräfte nach 253.000 Berechnungsschritten (Endlage)

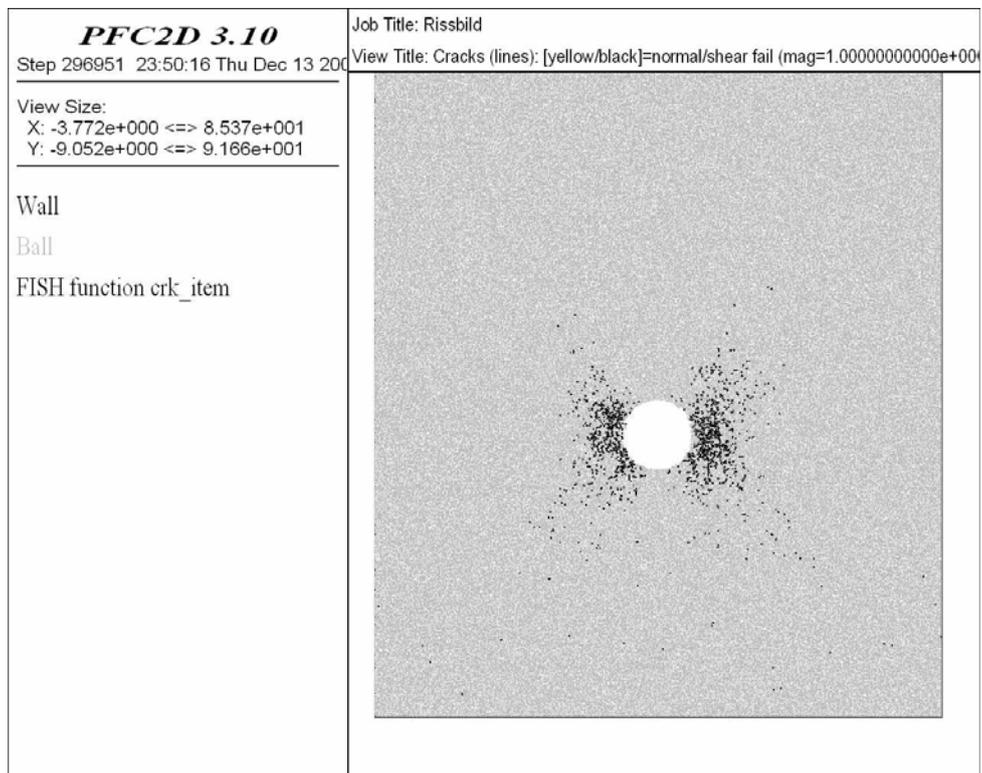


Abbildung 94: Rissbildung nach 200.000 Berechnungsschritten

8.1.4 Modell 4

Bei diesem Modell wurde das Verhältnis des Mittelwertes der Zugfestigkeit zu jenem der Schubfestigkeit der Kontaktbindung invertiert. Es wurde mit einem Verhältnis $\bar{\sigma}_c / \bar{\tau}_c = 0,2$ gerechnet. Folgende Abbildungen zeigen den Verlauf der sich ergebenden Auflockerungen um den Hohlraum. Man erkennt dass sich die Auflockerung nicht nur auf den Ulmenbereich beschränkt, sondern sich über den gesamten Ausbruch erstreckt. Man erkennt jedoch auch deutlich eine Bewegung der Ulmen in Richtung des Ausbruches. Der ursprünglich kreisrunde Ausbruch deformiert zu einem ellipsenförmigen. Es kommt zu einem kompletten Versagen des Querschnittes. Interessant dabei ist vor allem das sich einstellende Rissbild. Wie aus Abbildung 104 ersichtlich, kommt es vorwiegend zu Zugrissen zwischen den Kontakten (In blauer Farbe dargestellt). Obwohl hauptsächlich Zugrisse auftreten, kommt es trotzdem zur Ausbildung von Scherbändern, deren Verlauf jedoch nicht affin zu jenen Scherbändern aus Modell 2 ist. Die in den Ulmen ausgequetschten Bereiche haben im Gegensatz zu jenen aus Modell 2 eher die Form eines Halbkreises.

- Reibungskoeffizient der Partikel: $\mu = 0,087$
- Mittelwert der Zugfestigkeit: $\bar{\sigma}_c = 7 \cdot 10^5$
Standardabweichung der Zugfestigkeit: $\sigma_{dev} = 1 \cdot 10^4$
- Mittelwert der Scherfestigkeit: $\bar{\tau}_c = 3,5 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Scherfestigkeit: $\tau_{dev} = 5 \cdot 10^4$
- Verhalten: Instabil

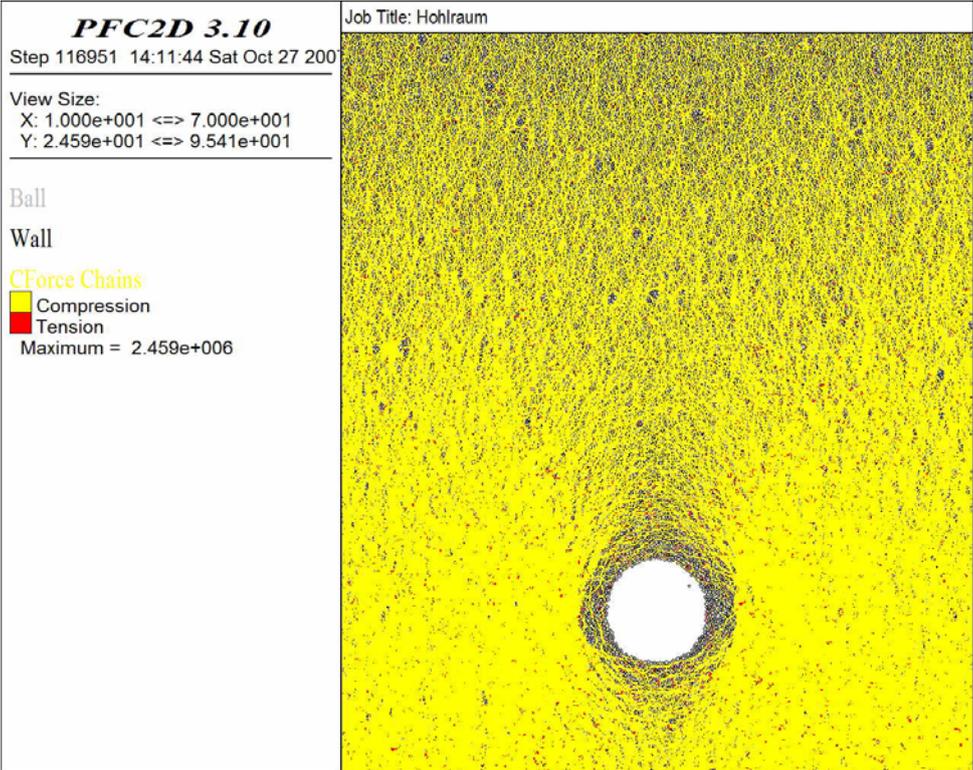


Abbildung 95 Kontaktkräfte nach 20.000 Berechnungsschritten

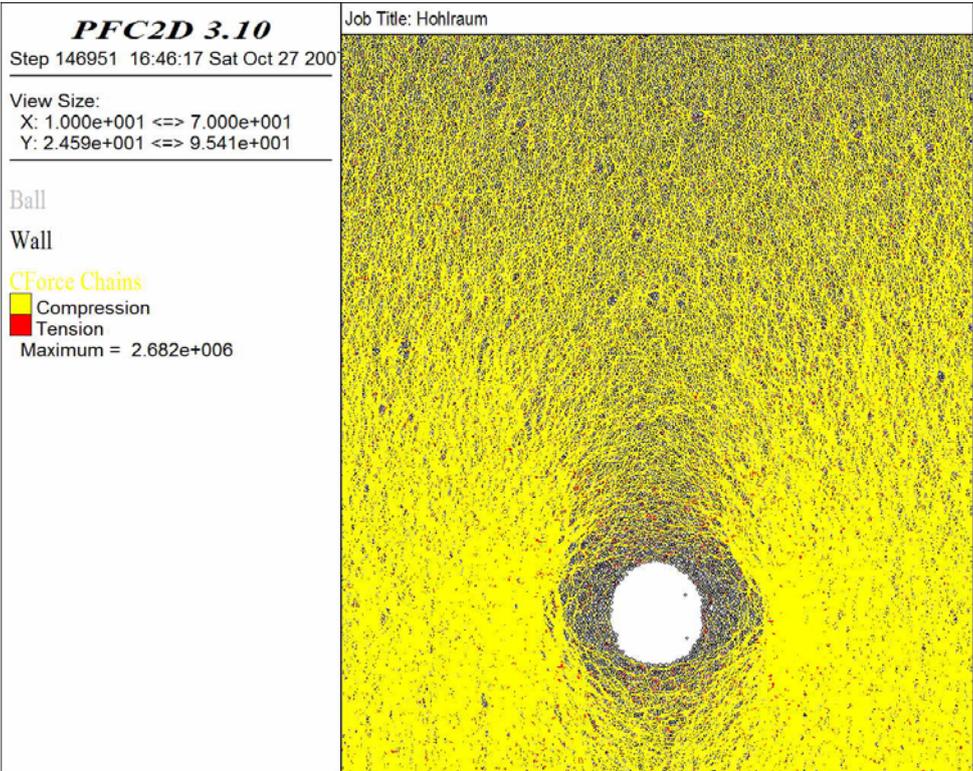


Abbildung 96: Kontaktkräfte nach 50.000 Berechnungsschritten

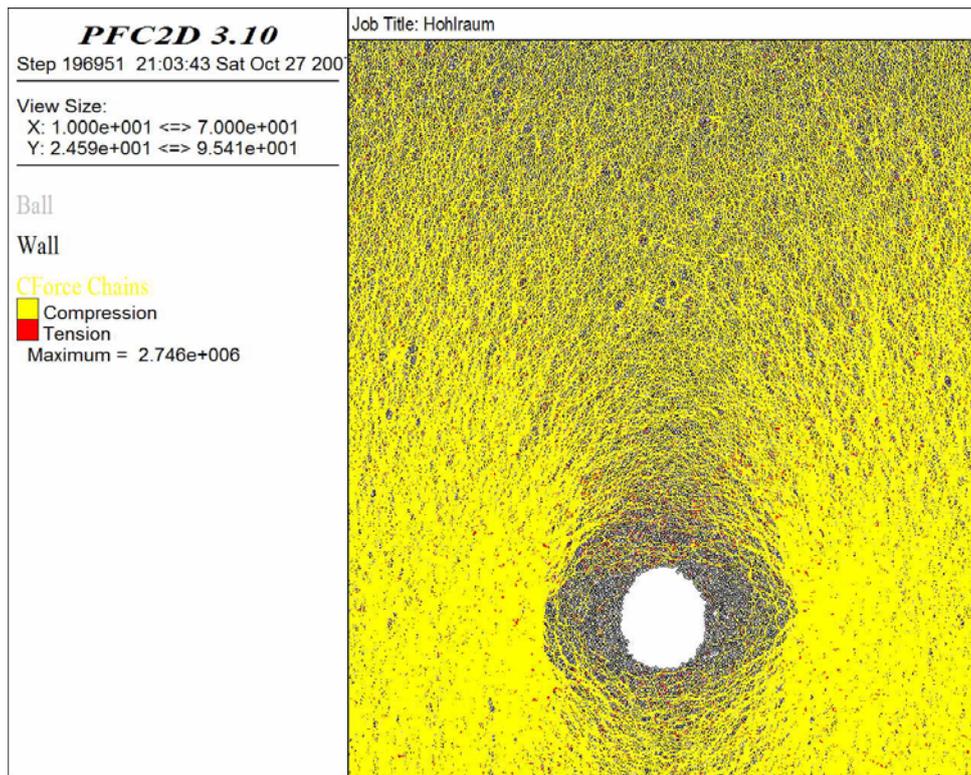


Abbildung 97: Kontaktkräfte nach 100.000 Berechnungsschritten

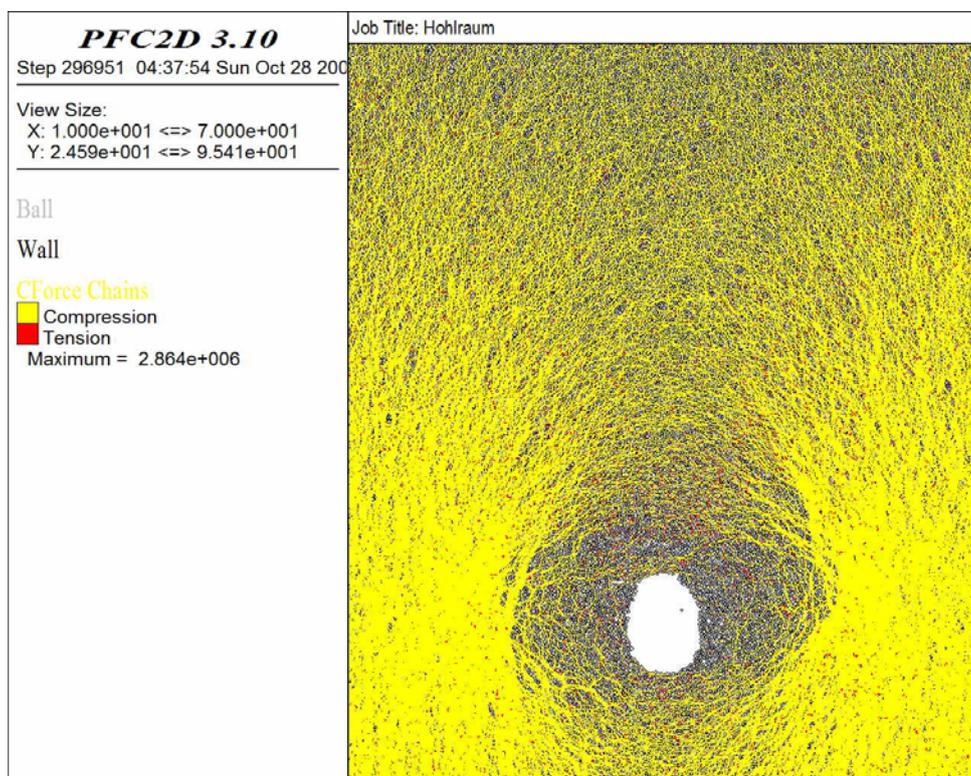


Abbildung 98 Kontaktkräfte nach 200.000 Berechnungsschritten

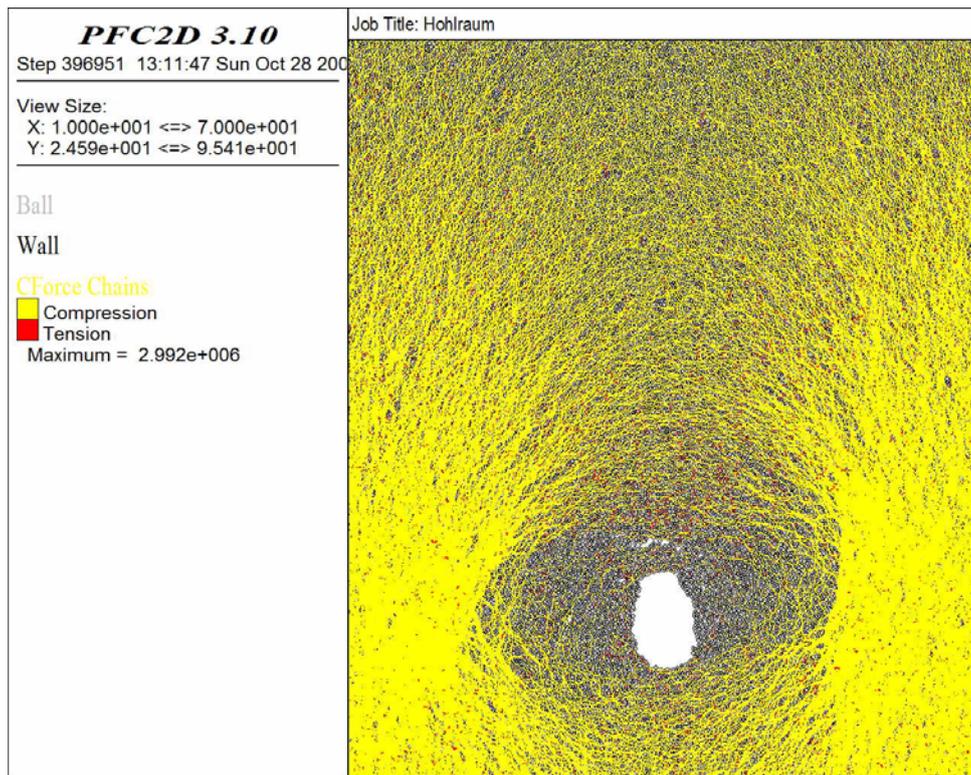


Abbildung 99: Kontaktkräfte nach 300.000 Berechnungsschritten

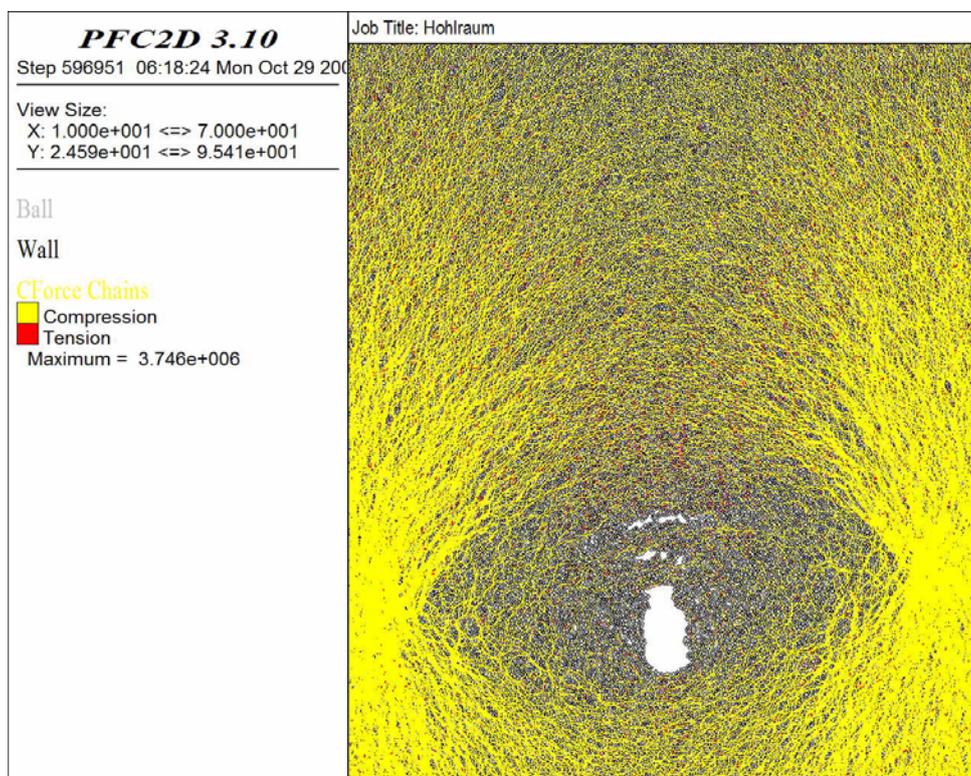


Abbildung 100: Kontaktkräfte nach 500.000 Berechnungsschritten

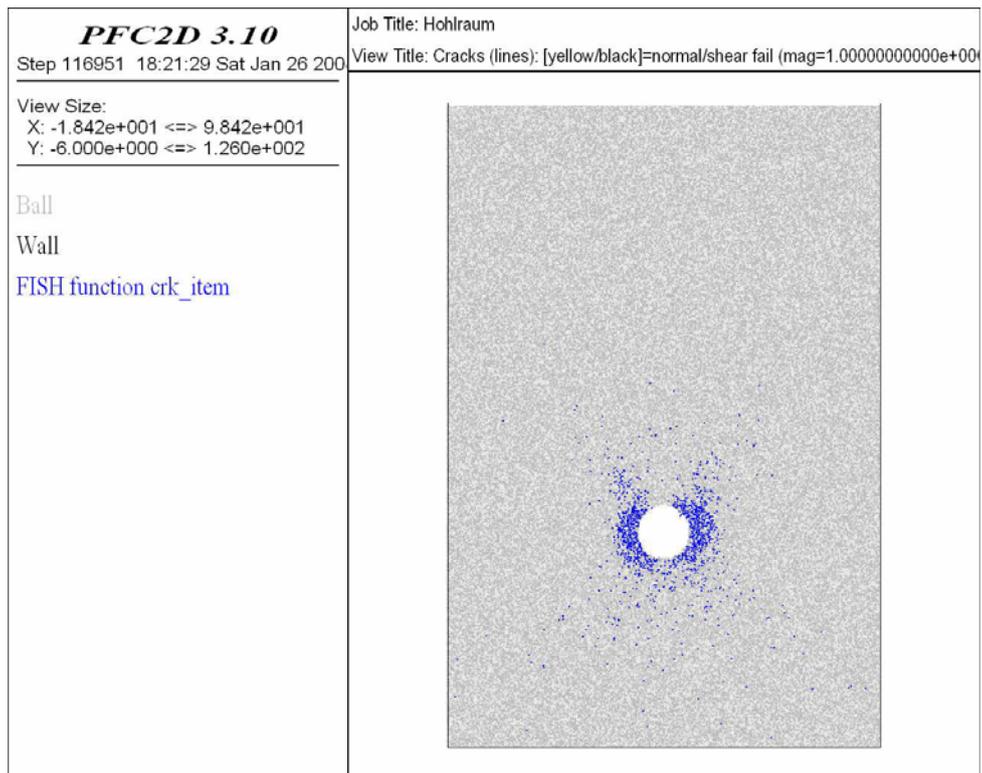


Abbildung 101: Rissbildung nach 20.000 Berechnungsschritten

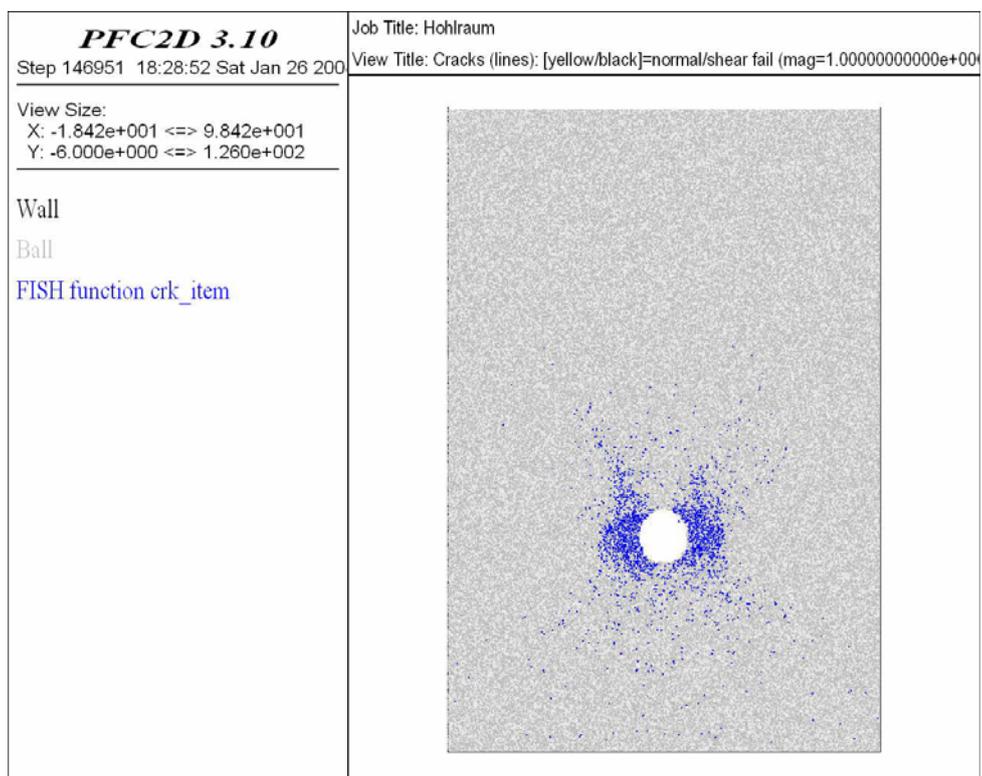


Abbildung 102: Rissbildung nach 50.000 Berechnungsschritten

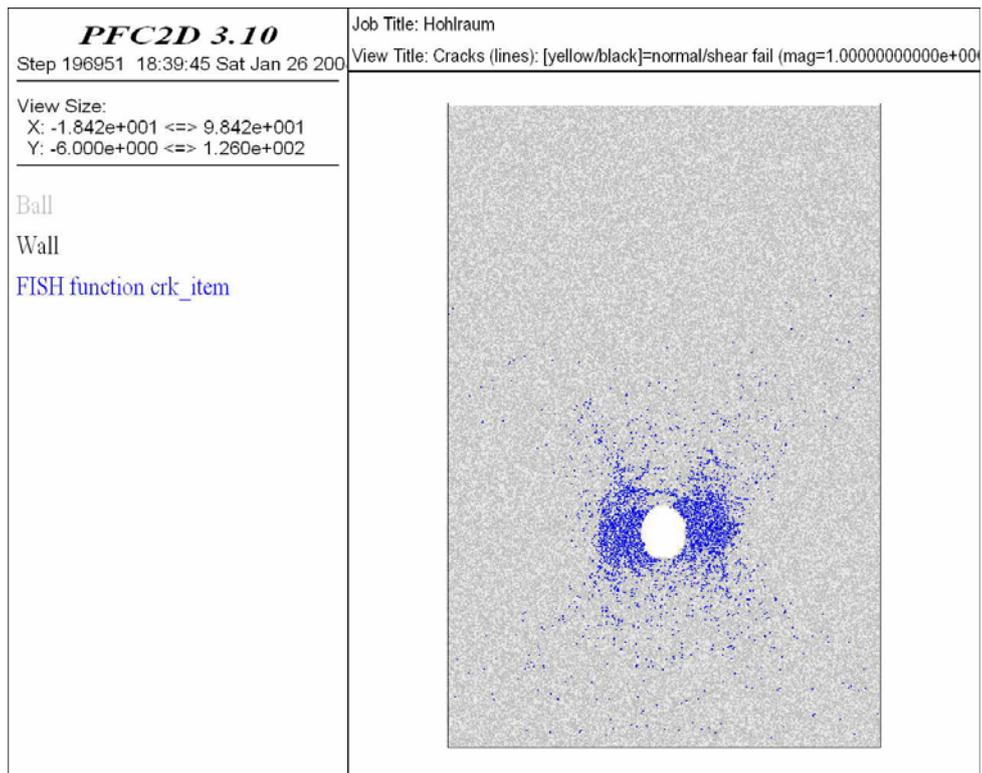


Abbildung 103: Rissbildung nach 100.000 Berechnungsschritten

Abbildung 103 zeigt ein interessantes Phänomen. Aufgrund der einschnürenden Wirkung der Bewegung der Ulmen und der dadurch entstehenden Druckspannungen im Firstbereich kommt es knapp oberhalb der Firste zu einem durchgehenden Horizontalen Zugriss. Dieser entsteht aus der indirekten Zugbeanspruchung welche durch die senkrecht dazu wirkenden Druckspannungen hervorgerufen wird.

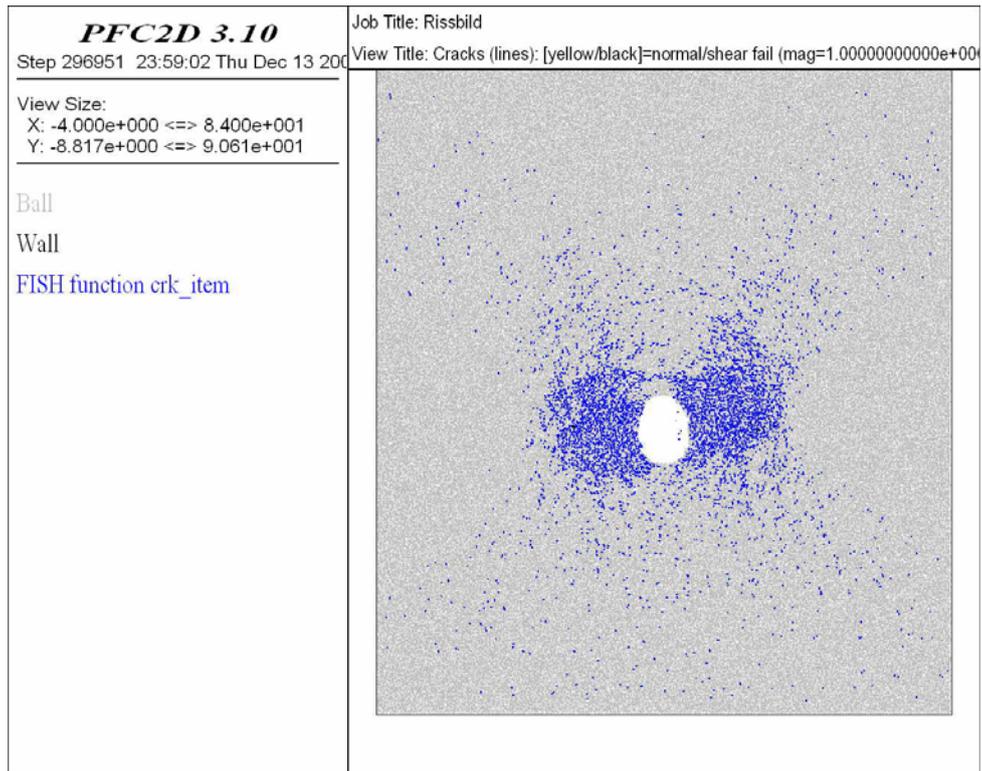


Abbildung 104: Rissbildung nach 200.000 Berechnungsschritten

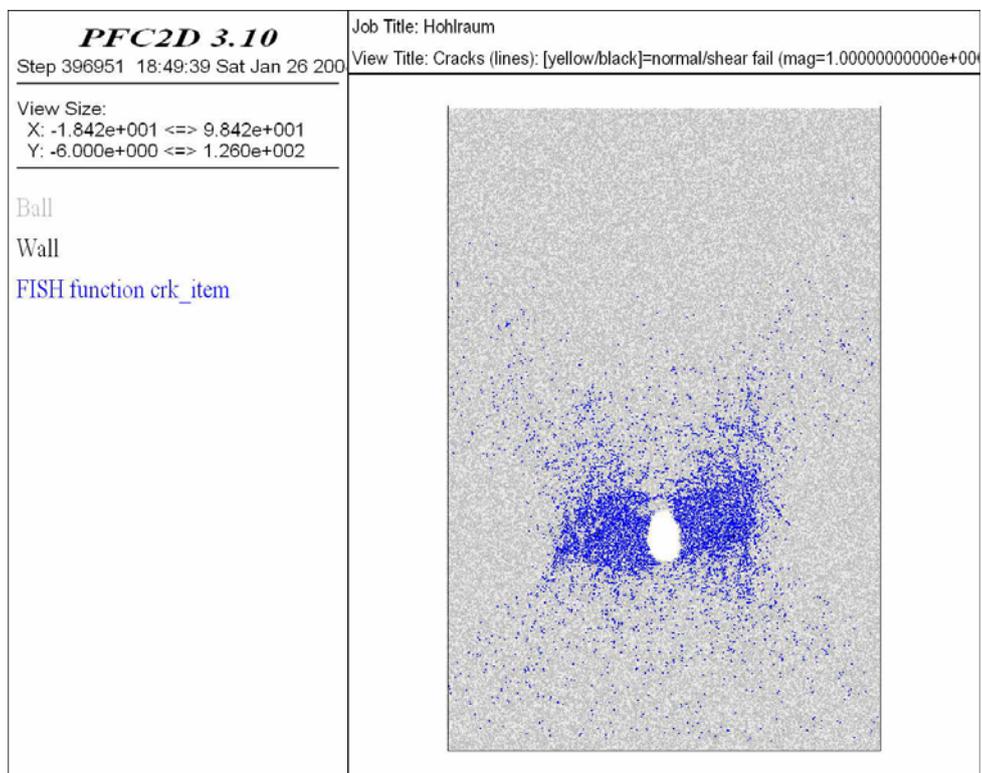


Abbildung 105: Rissbildung nach 300.000 Berechnungsschritten

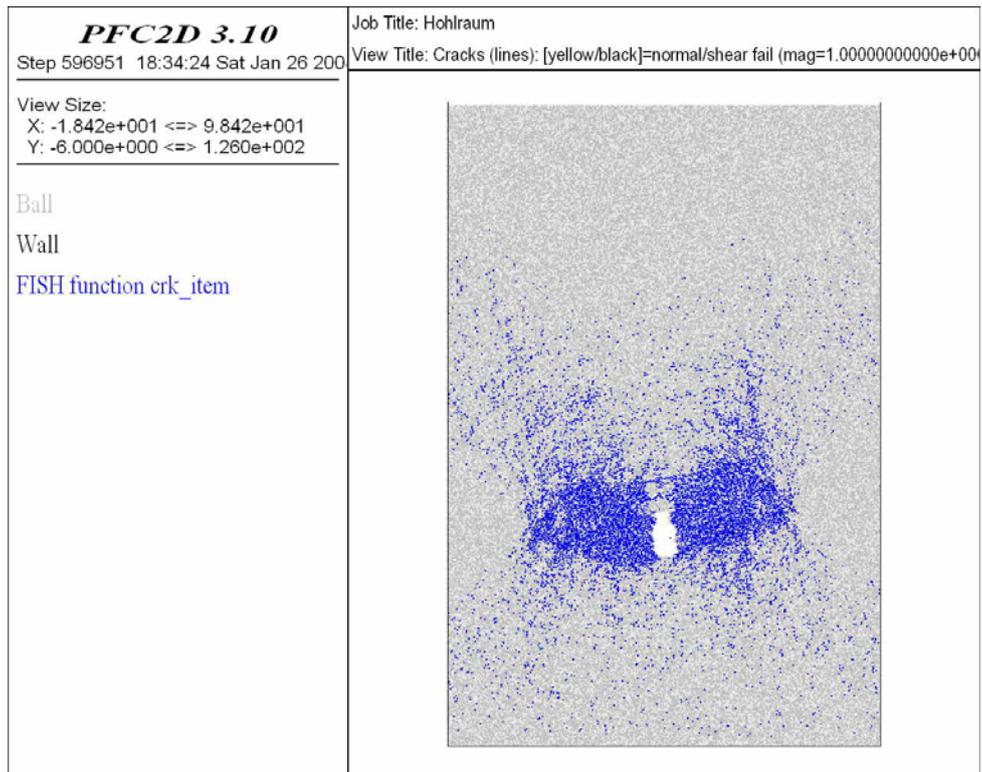


Abbildung 106: Rissbildung nach 500.000 Berechnungsschritten

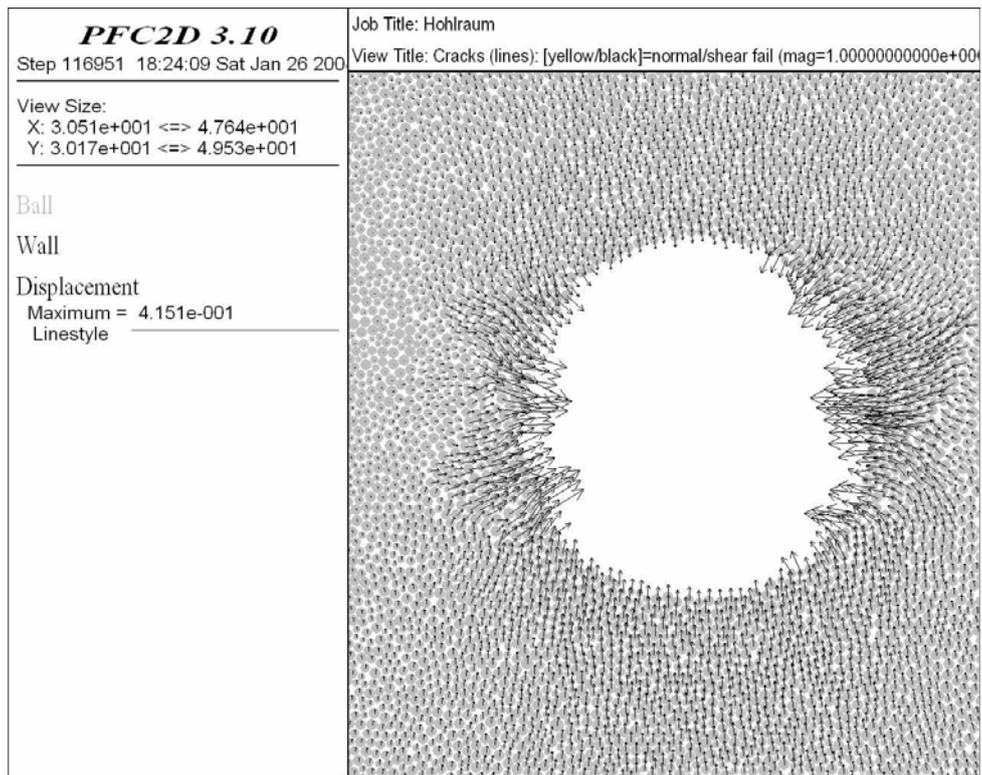


Abbildung 107: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 20.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 20.000 Berechnungsschritten | |
|---|--------|
| Firste | 0,07 m |
| Sohle | 0,09 m |
| Ulme | 0,42 m |

Tabelle 24: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 20.000 Berechnungsschritten (Modell 4)

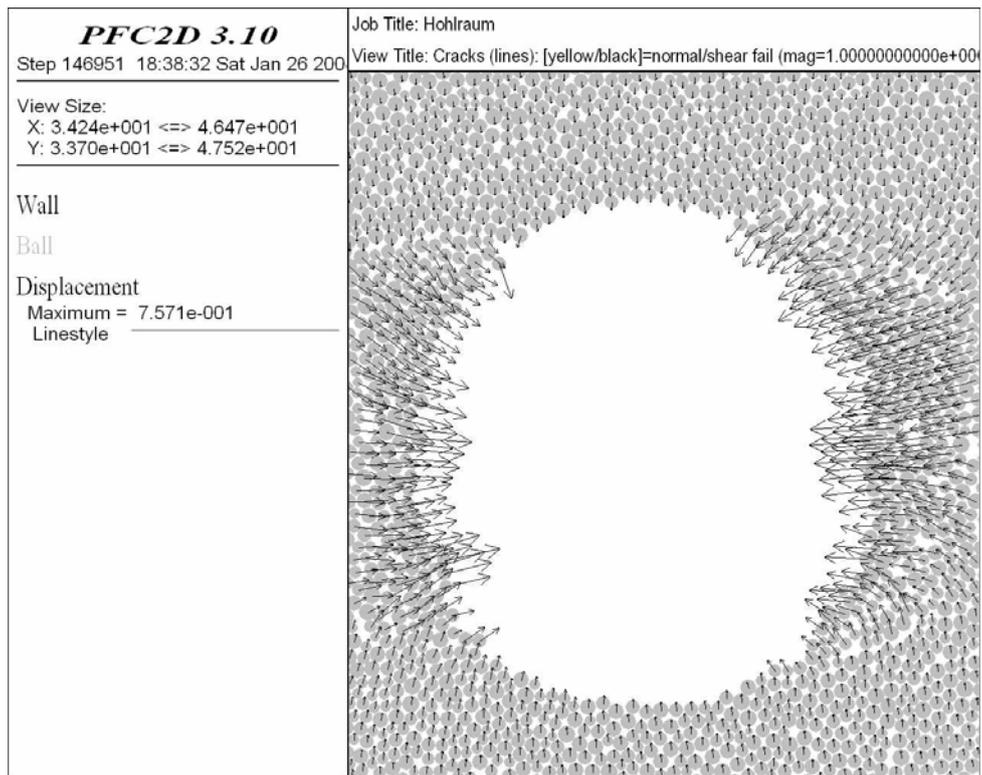


Abbildung 108: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 50.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 50.000 Berechnungsschritten | |
|---|--------|
| Firste | 0,10 m |
| Sohle | 0,12 m |
| Ulme | 0,76 m |

Tabelle 25: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 50.000 Berechnungsschritten (Modell 4)

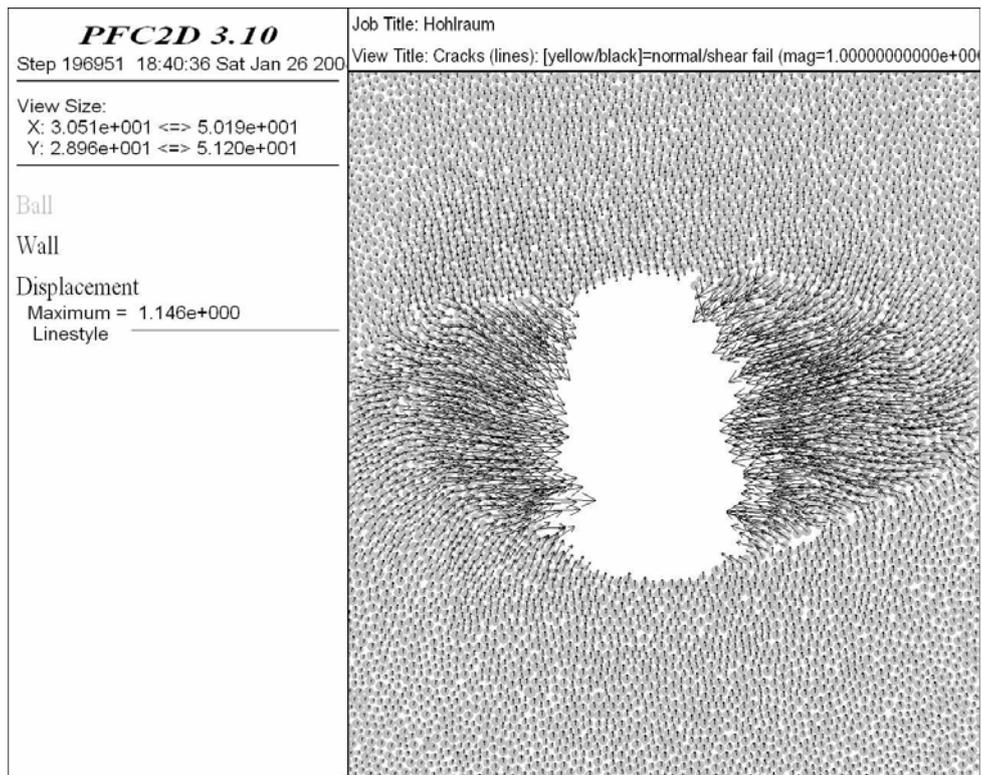


Abbildung 109: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 100.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 100.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,16 m |
| Sohle | 0,16 m |
| Ulme | 1,15 m |

Tabelle 26: Verschiebungen in Richtung Hohlräum nach 100.000 Berechnungsschritten (Modell 4)

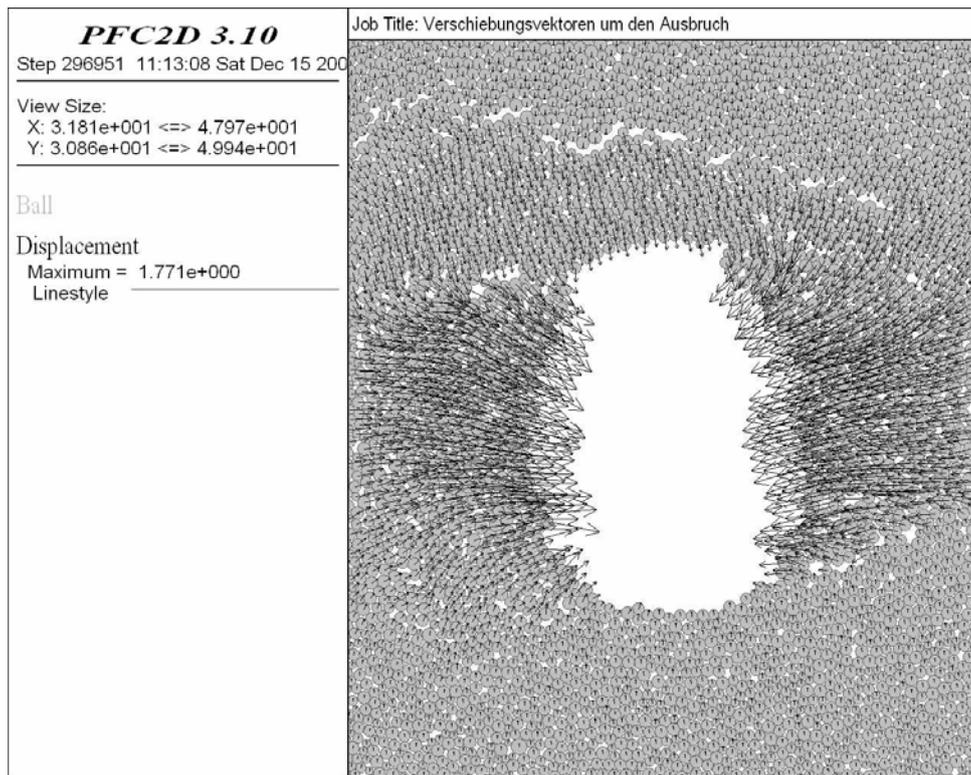


Abbildung 110: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 200.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 200.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,35 m |
| Sohle | 0,20 m |
| Ulme | 1,77 m |

Tabelle 27: Verschiebungen in Richtung Hohlraum nach 200.000 Berechnungsschritten (Modell 4)

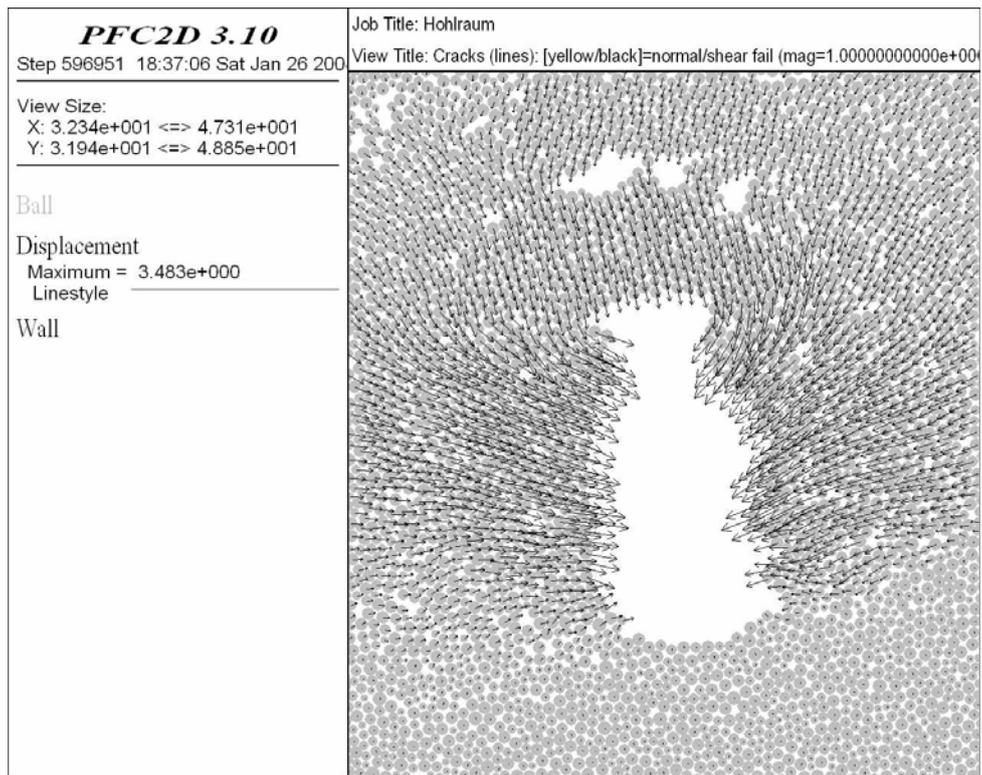


Abbildung 111: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 300.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 300.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 0,67 m |
| Sohle | 0,22 m |
| Ulme | 2,39 m |

Tabelle 28: Verschiebungen in Richtung Hohlräum nach 300.000 Berechnungsschritten (Modell 4)

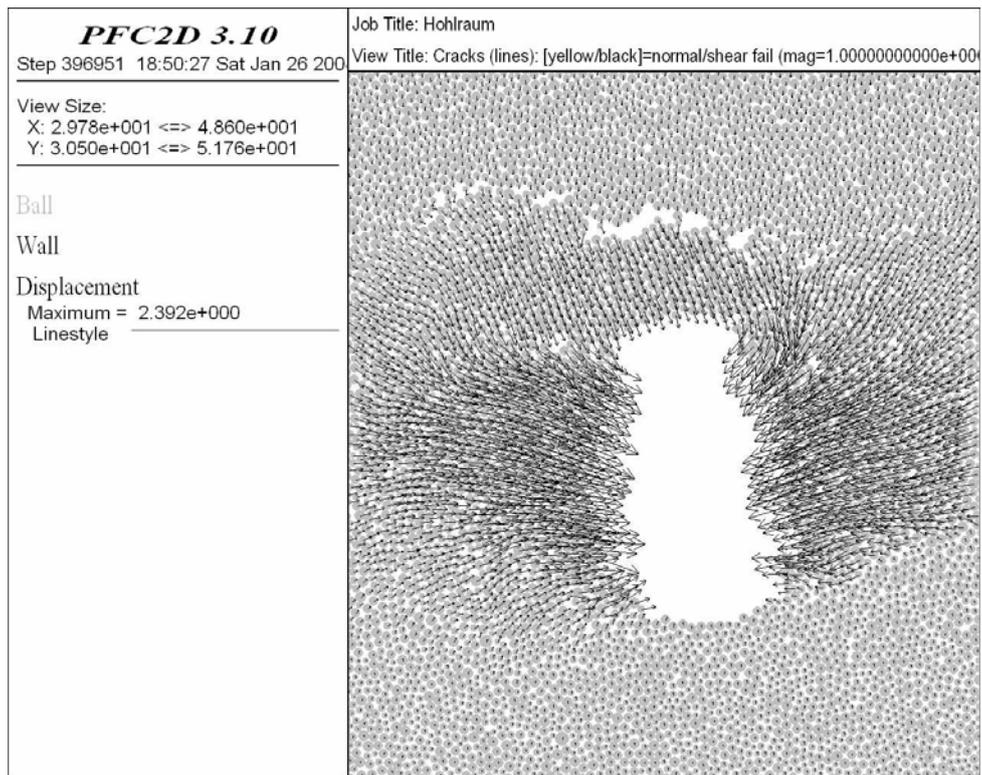


Abbildung 112: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 500.000 Berechnungsschritten

| Verschiebungen nach 500.000 Berechnungsschritten | |
|--|--------|
| Firste | 1,56 m |
| Sohle | 0,23 m |
| Ulme | 3,48 m |

Tabelle 29: Verschiebungen in Richtung Hohlräum nach 500.000 Berechnungsschritten (Modell 4)

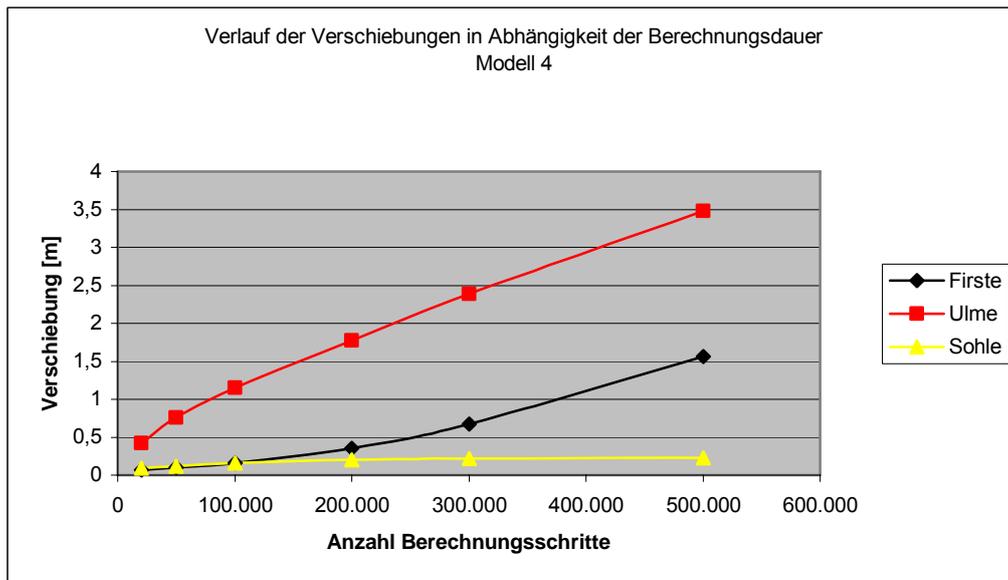


Abbildung 113: Verlauf der Verschiebungen um den Ausbruchsquerschnitt

Betrachtet man die Verschiebungen in diesem Modell (Abbildung 113), so erkennt man, dass diese im Bereich der Ulme progressiv zunehmen. In diesem Bereich wachsen sie von einem Wert von 0,42 m nach 20.000 Berechnungsschritten auf 3,48 m nach 500.000 Berechnungsschritten, an. Im Bereich der Firste kann ein interessantes Phänomen beobachtet werden. In diesem Bereich bildet sich zwischen den Berechnungsschritten 100.000 und 200.000 ein annähernd waagrechter Riss. Dies erklärt das Anwachsen der Verschiebungen in diesem Bereich auf einen Wert von 1,56 m (500.000 Berechnungsschritte).

8.1.5 Modell 5

- Reibungskoeffizient der Partikel: $\mu = 0,466$
- Mittelwert der Zugfestigkeit: $\bar{\sigma}_c = 7 \cdot 10^5$
Standardabweichung der Zugfestigkeit: $\sigma_{dev} = 1 \cdot 10^4$
- Mittelwert der Scherfestigkeit: $\bar{\tau}_c = 3,5 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Scherfestigkeit: $\tau_{dev} = 5 \cdot 10^4$
- Verhalten: Instabil

Dieses Modell weist mit Ausnahme des Reibungskoeffizienten zwischen den Partikeln dieselben Parameter auf wie das Modell 4. Der höhere Reibungskoeffizient führt zu einem stabileren Verhalten des Gebirges nach dem Bruch der Bindungen. Dargestellt sind wiederum die Kontaktkräfte sowie ein Rissbild und die dazugehörigen Verschiebungsvektoren der Partikel um den Hohlraum. Der Querschnitt versagt durch Brechen der Bindungen infolge Überbeanspruchung in Normalenrichtung.

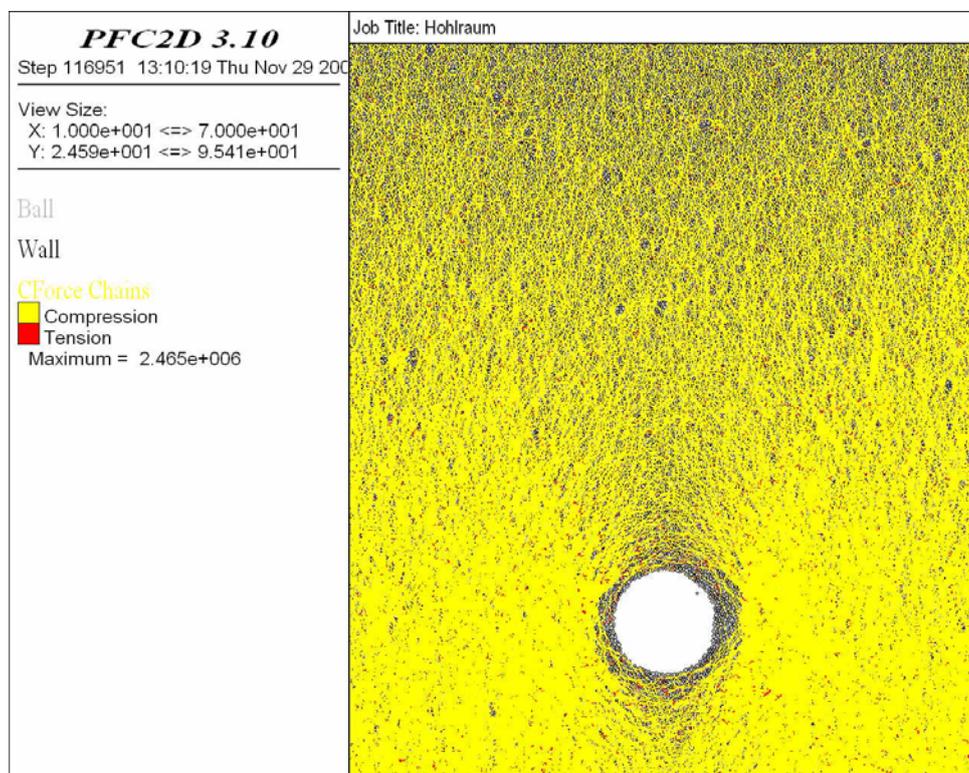


Abbildung 114: Kontaktkräfte nach 20.000 Berechnungsschritten

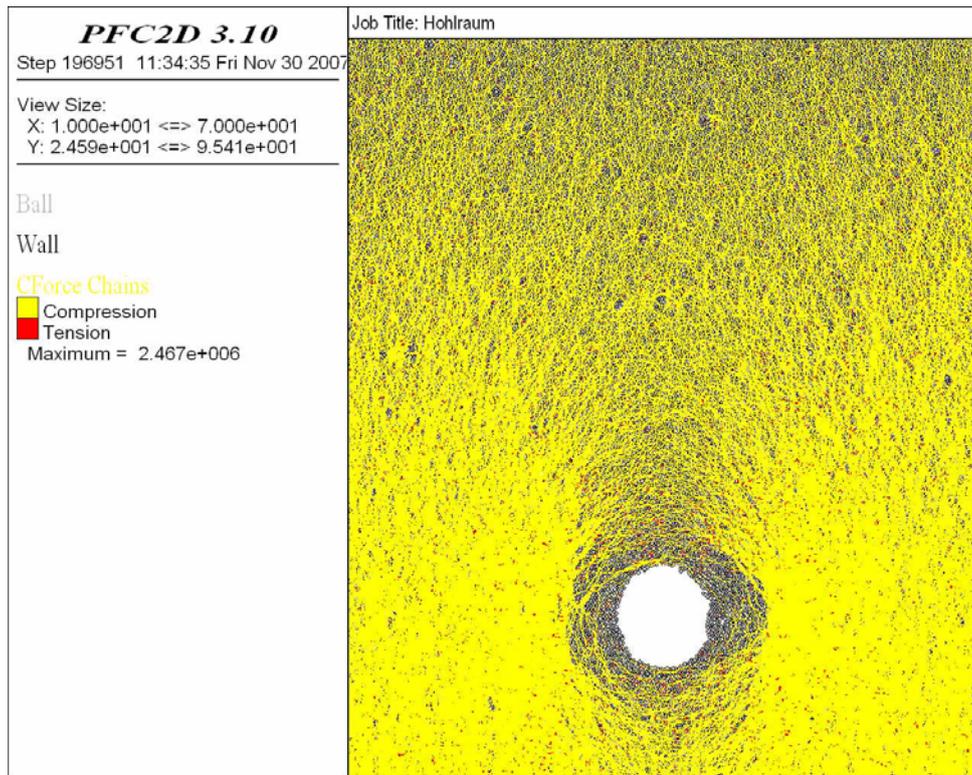


Abbildung 115: Kontaktkräfte nach 100.000 Berechnungsschritten

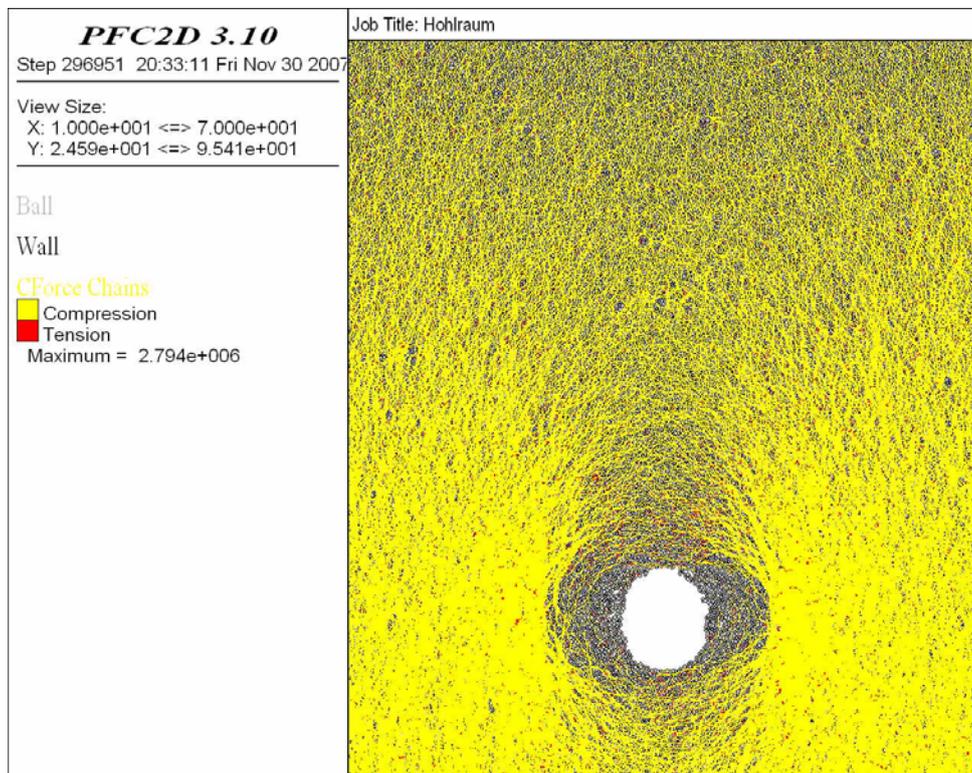


Abbildung 116: Kontaktkräfte nach 200.000 Berechnungsschritten

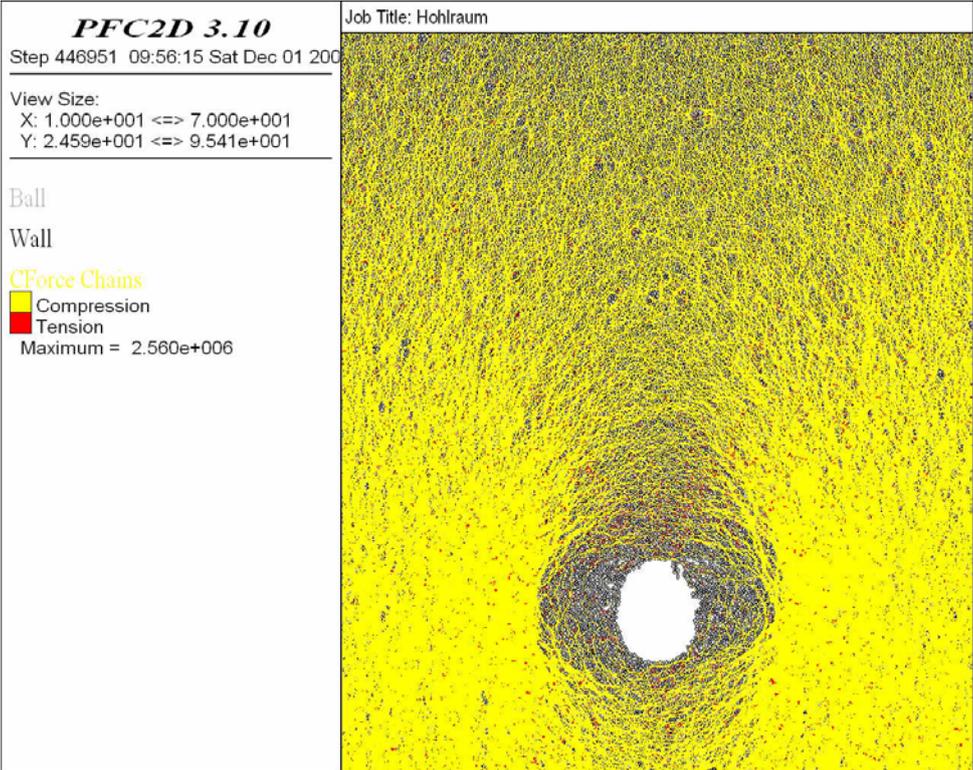


Abbildung 117: Kontaktkräfte nach 350.000 Berechnungsschritten

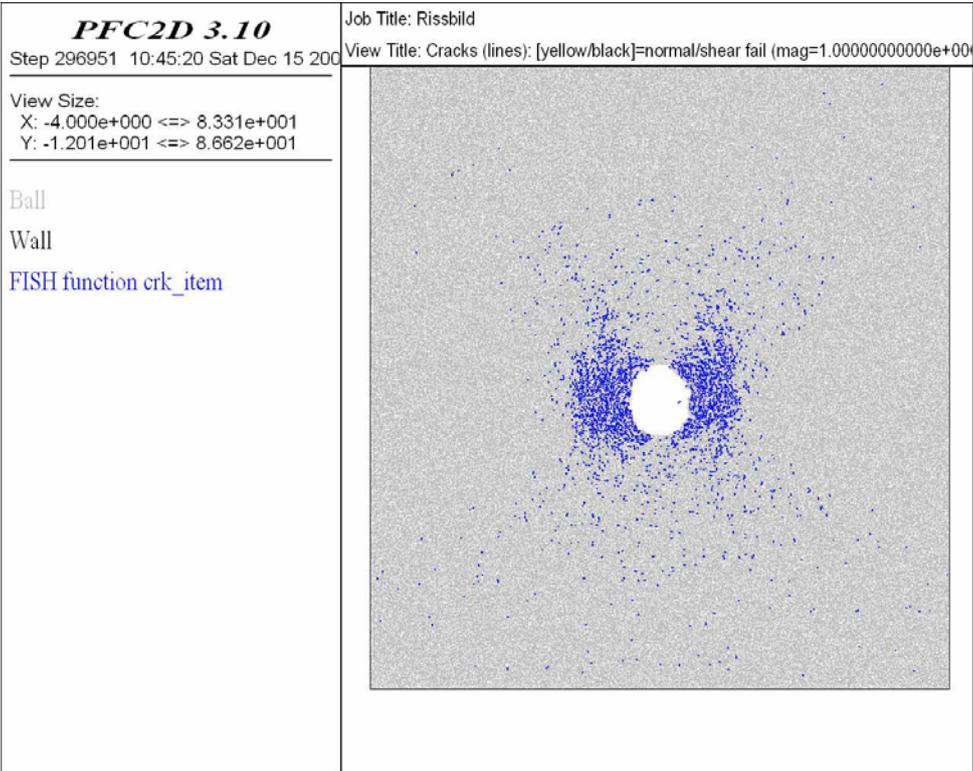


Abbildung 118: Rissbildung nach 200.000 Berechnungsschritten

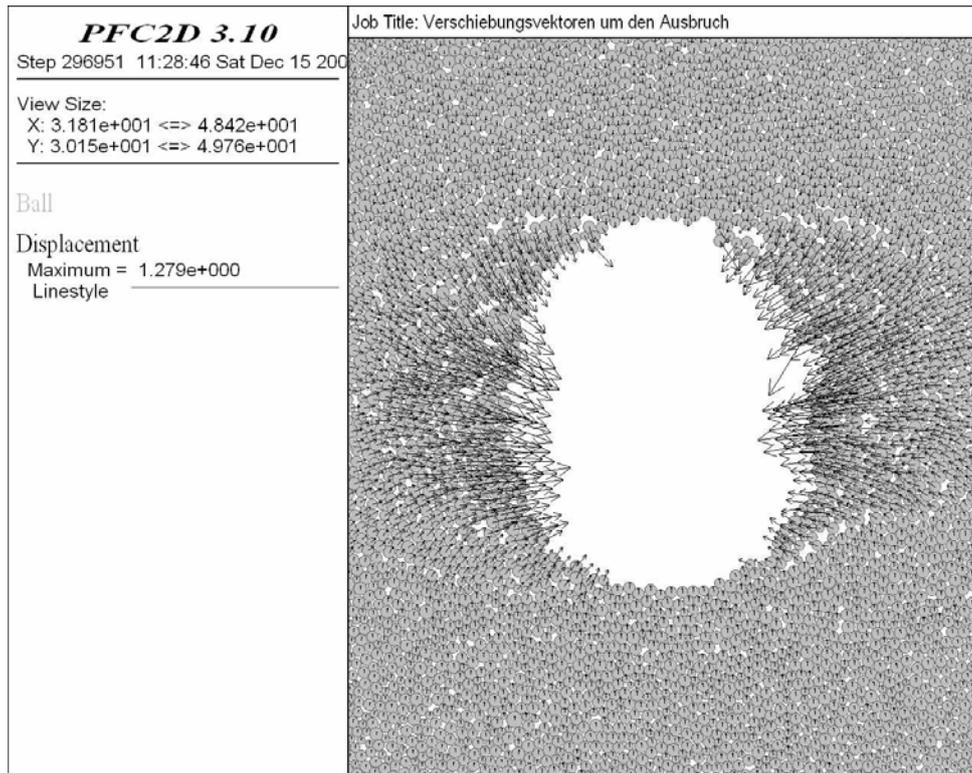


Abbildung 119: Verschiebungsvektoren um den Ausbruch nach 200.000 Berechnungsschritten

8.2 Parallelbindung

Ein Versagen der Ulmen konnte auch durch Anwendung einer Parallelbindung zwischen den Partikeln generiert werden.

8.2.1 Modell 1

Die Darstellung der Kontaktkräfte (Abbildung 120 bis 122) zeigt die Überbeanspruchung der Ulmen und den Versagensablauf. An der linken Ulme spalten sich schalenförmige Bruchkörper ab, welche anschließend in den Hohlraum einfallen.

Die Darstellung der Rissbildung (Abbildung 123 bis 125) zeigt, dass die Risse fast nur auf den Ulmenbereich beschränkt bleiben. Es kommt sowohl zu Schub-, als auch zu Zugrissen von Bindungen. Die Parameter, welche für das Modell 1 (Parallelbindung) angewandt wurden zeigen zwar das Versagen der Ulmen, führen jedoch nicht zum totalen Versagen des Querschnittes.

- Mittelwert der Zugfestigkeit: $\bar{\sigma}_c = 12 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Zugfestigkeit: $\sigma_{dev} = 12 \cdot 10^4$
- Mittelwert der Scherfestigkeit: $\bar{\tau}_c = 3,2 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Scherfestigkeit: $\tau_{dev} = 3,2 \cdot 10^4$
- Verhalten: Standfest

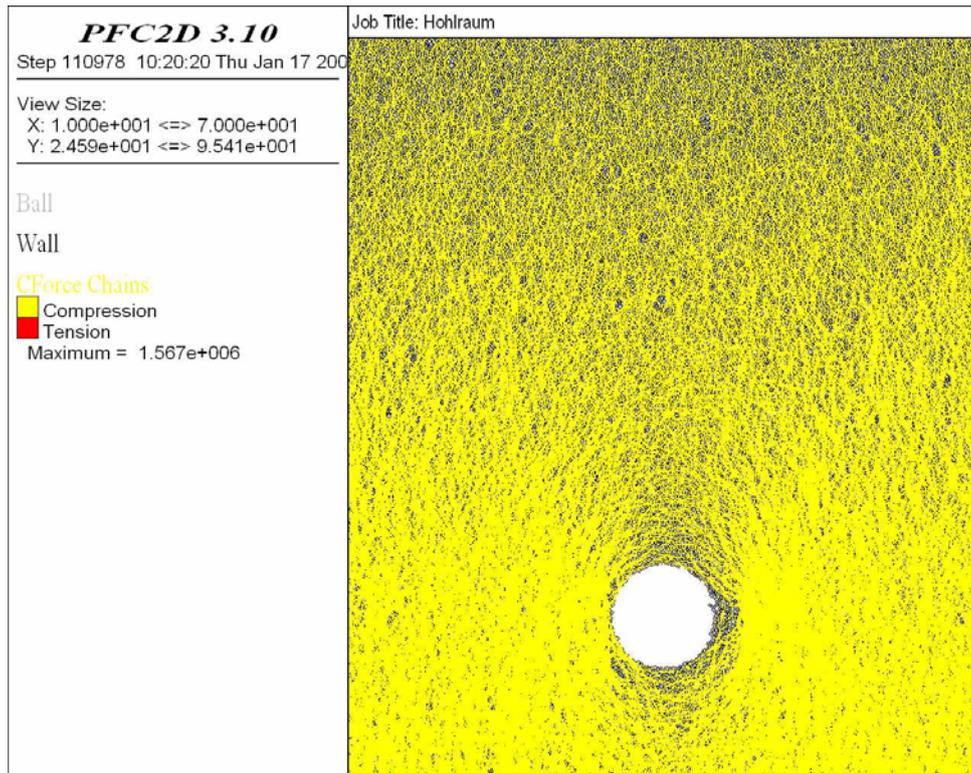


Abbildung 120: Kontaktkräfte nach 20.000 Berechnungsschritten

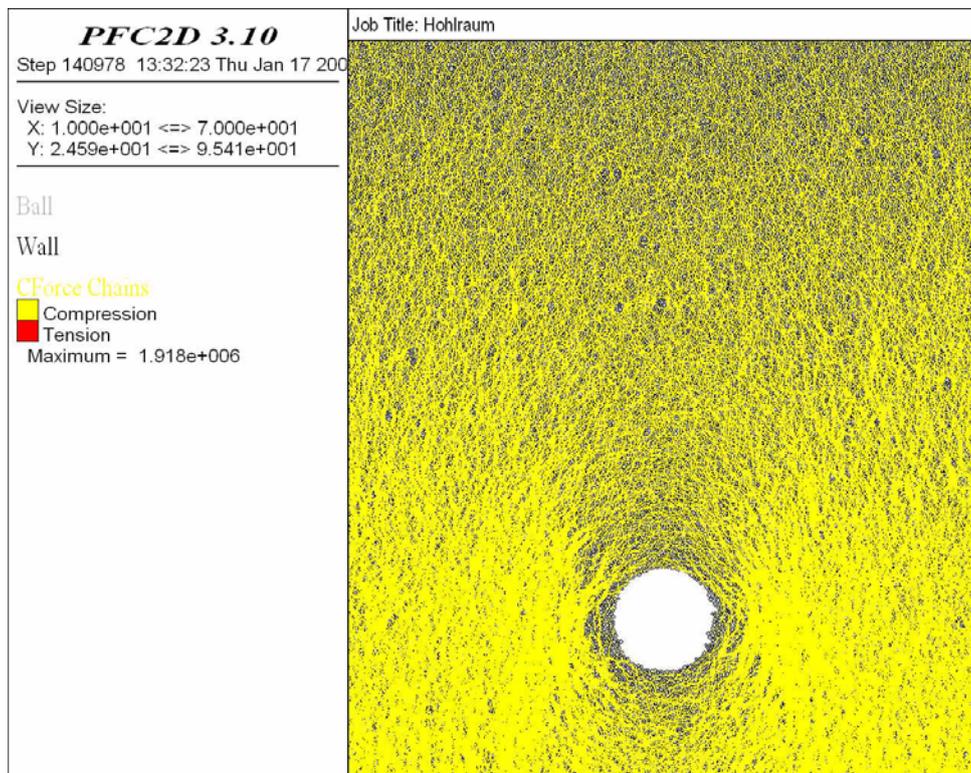


Abbildung 121: Kontaktkräfte nach 50.000 Berechnungsschritten

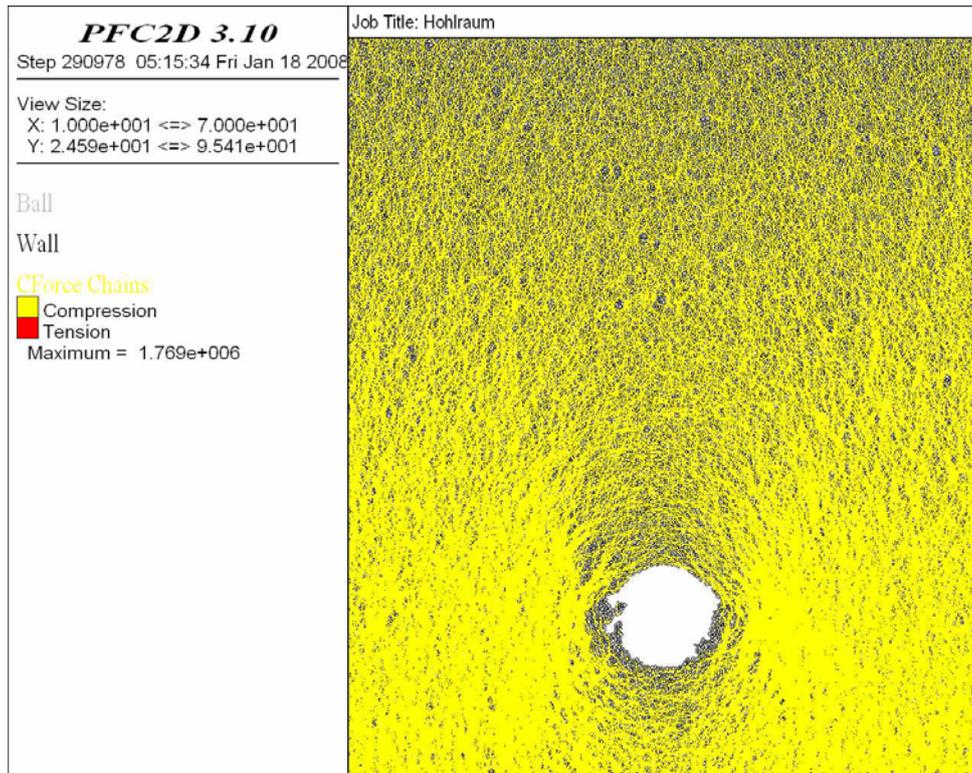


Abbildung 122: Kontaktkräfte nach 200.000 Berechnungsschritten

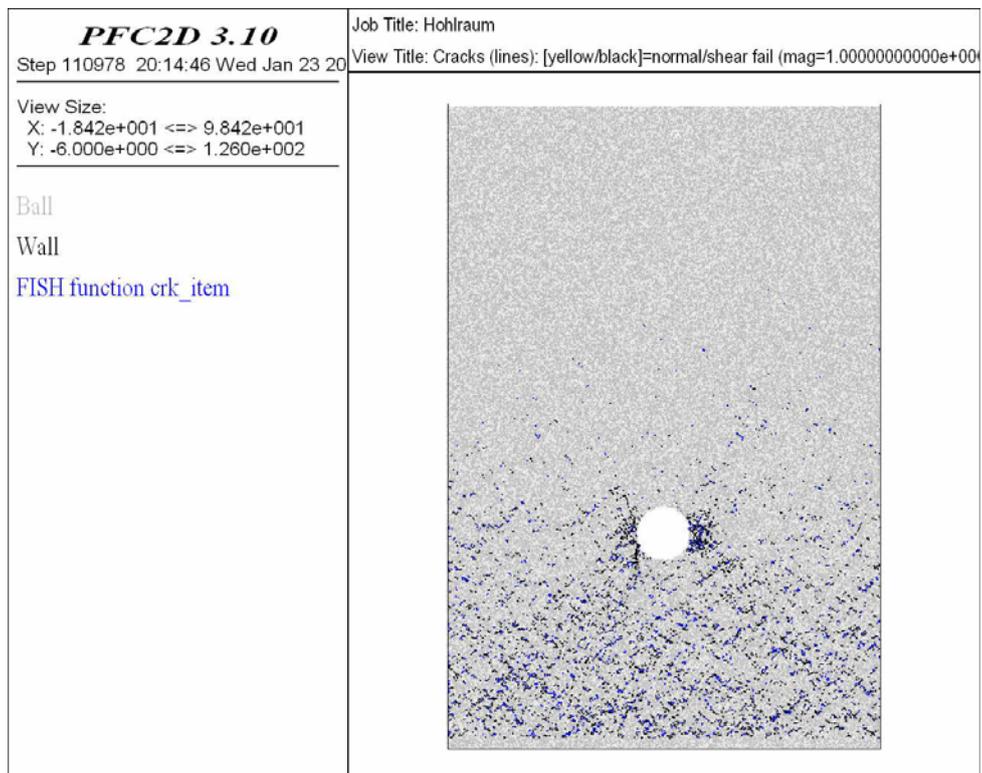


Abbildung 123: Rissbildung nach 20.000 Berechnungsschritten

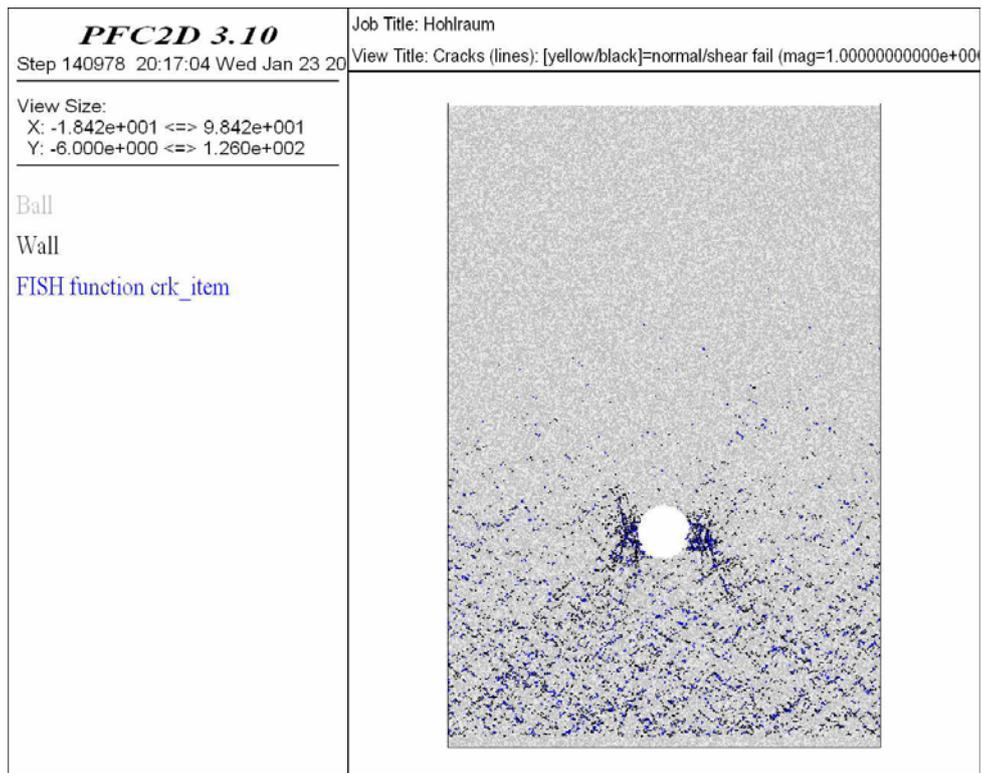


Abbildung 124: Rissbildung nach 50.000 Berechnungsschritten

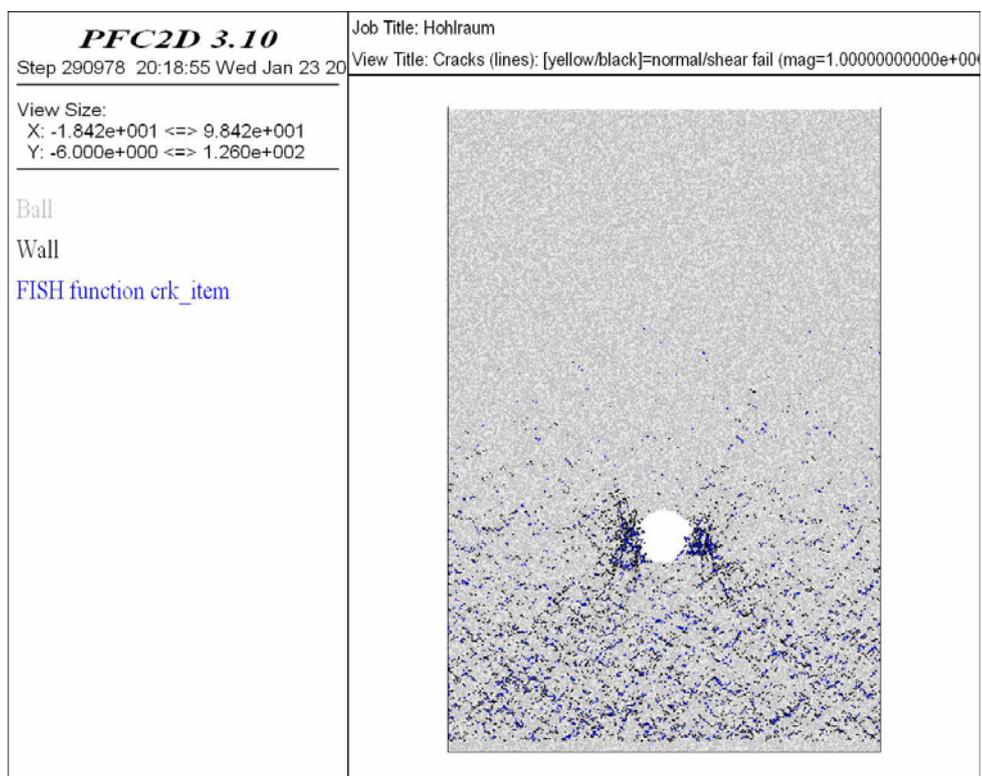


Abbildung 125: Rissbildung nach 200.000 Berechnungsschritten

8.2.2 Modell 2

In diesem Modell wurde die Festigkeit der Parallelbindungen herabgesetzt. Der Ablauf des Versagens ist qualitativ ähnlich zu jenem aus Modell 1. Die Darstellung der Kontaktkräfte zeigt wiederum das Ablösen und Einfallen schalenförmiger Bruchkörper in den Hohlraum (Abbildung 126 bis 130). Dieses Verhalten setzt sich bergwärts fort.

Die Rissbilder (Abbildung 131 bis 135) zeigen sowohl Schub-, als auch Zugrisse. Die Rissbildung beschränkt sich wiederum fast ausschließlich auf den Ulmenbereich.

- Mittelwert der Zugfestigkeit: $\bar{\sigma}_c = 10 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Zugfestigkeit: $\sigma_{dev} = 10 \cdot 10^4$
- Mittelwert der Scherfestigkeit: $\bar{\tau}_c = 3,0 \cdot 10^6$
Standardabweichung der Scherfestigkeit: $\tau_{dev} = 3,0 \cdot 10^4$
- Verhalten: Instabil

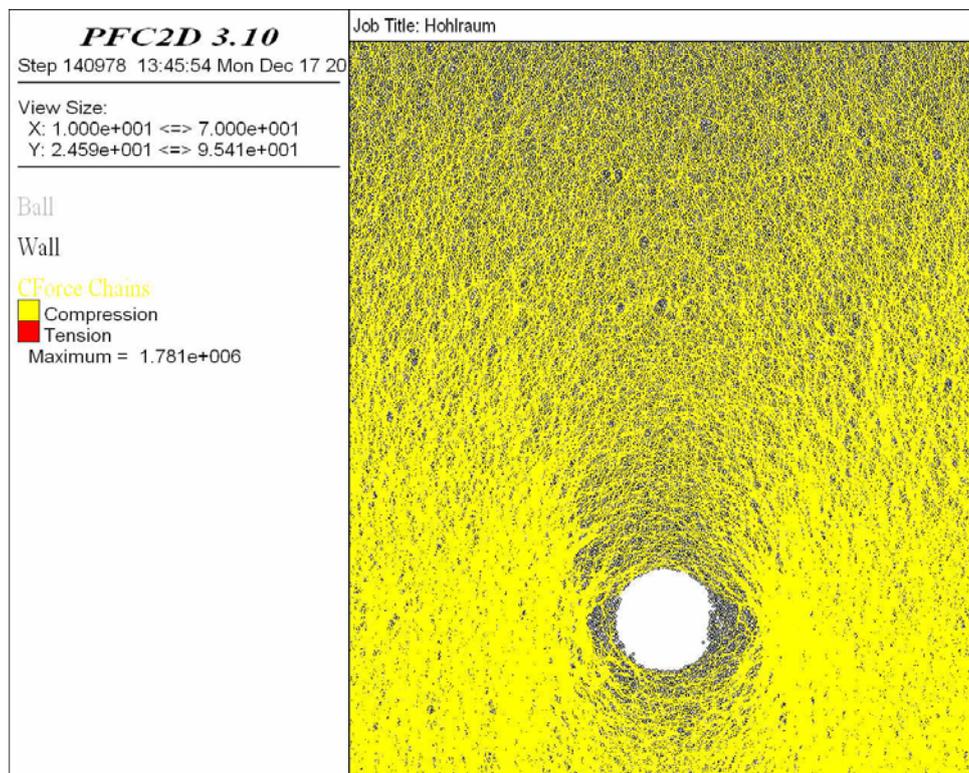


Abbildung 126: Kontaktkräfte nach 50.000 Berechnungsschritten

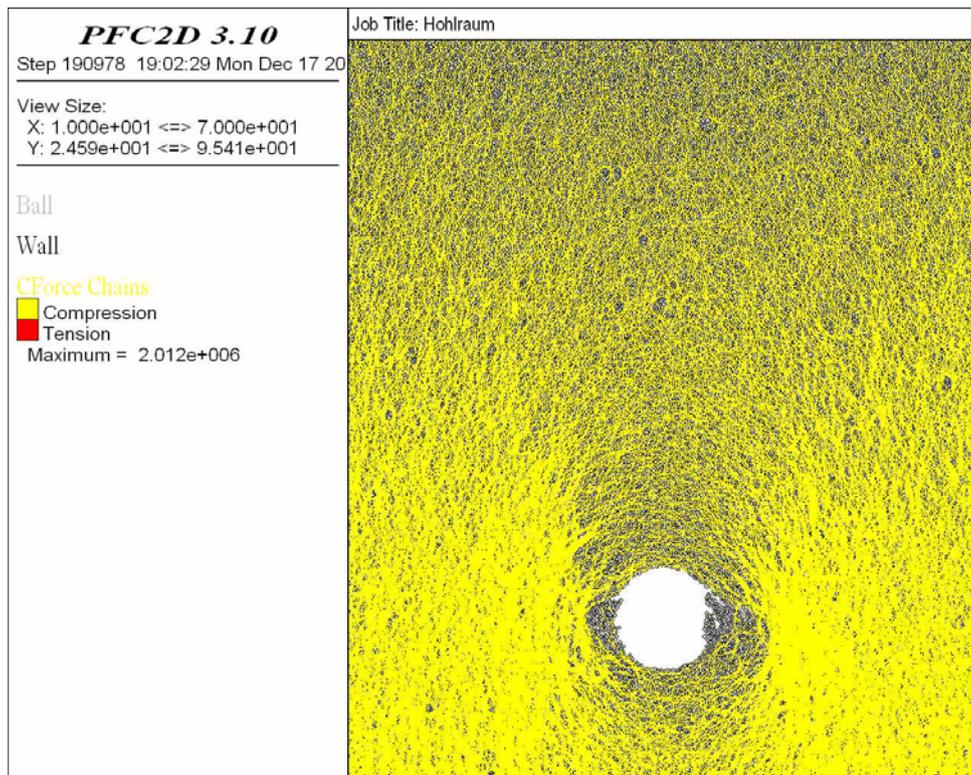


Abbildung 127: Kontaktkräfte nach 100.000 Berechnungsschritten

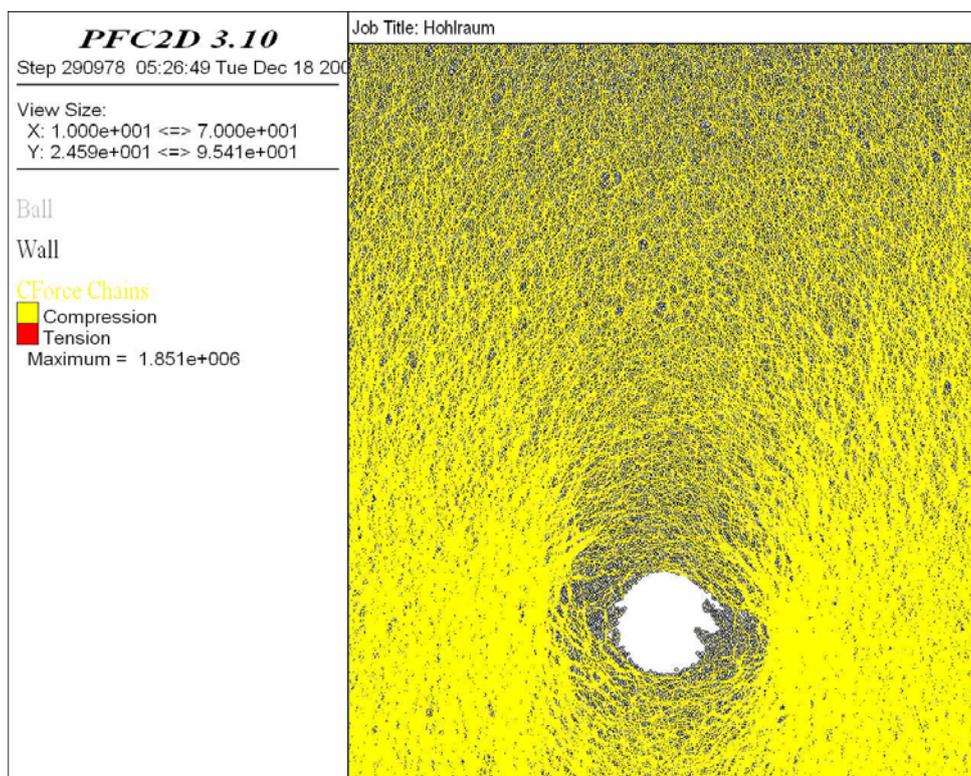


Abbildung 128: Kontaktkräfte nach 200.000 Berechnungsschritten

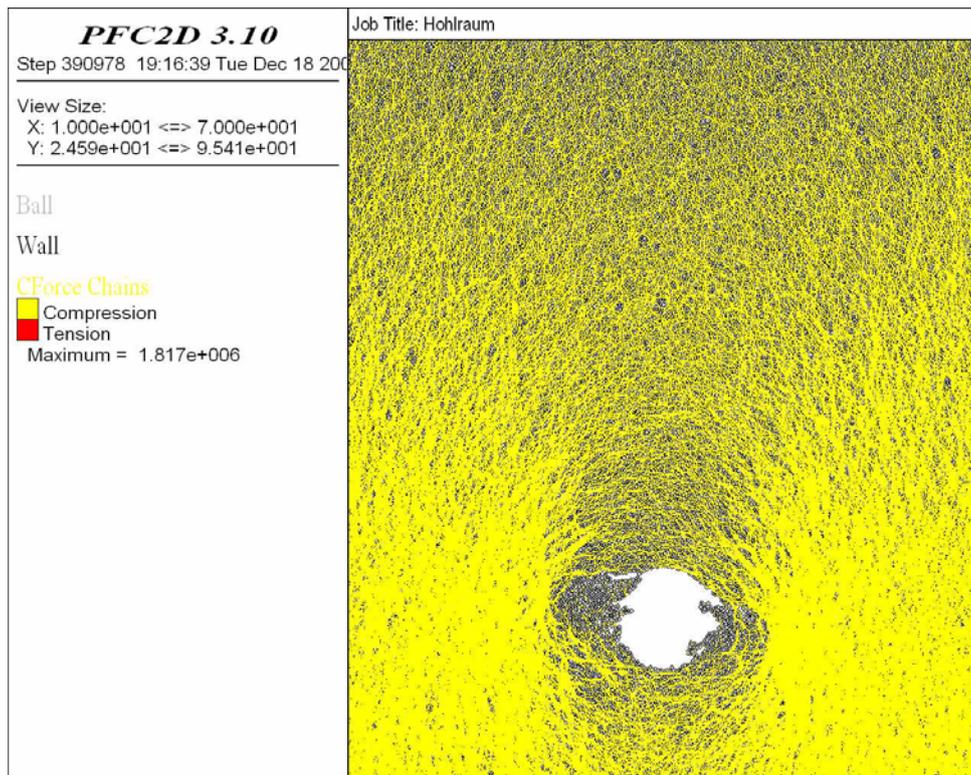


Abbildung 129: Kontaktkräfte nach 300.000 Berechnungsschritten

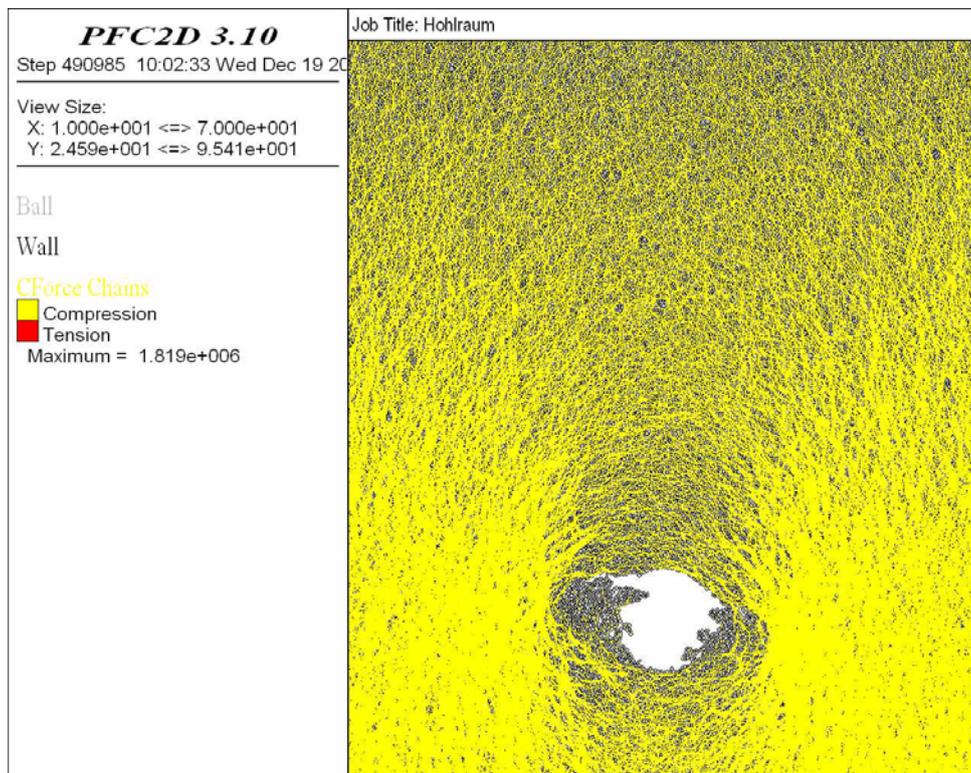


Abbildung 130: Kontaktkräfte nach 400.000 Berechnungsschritten

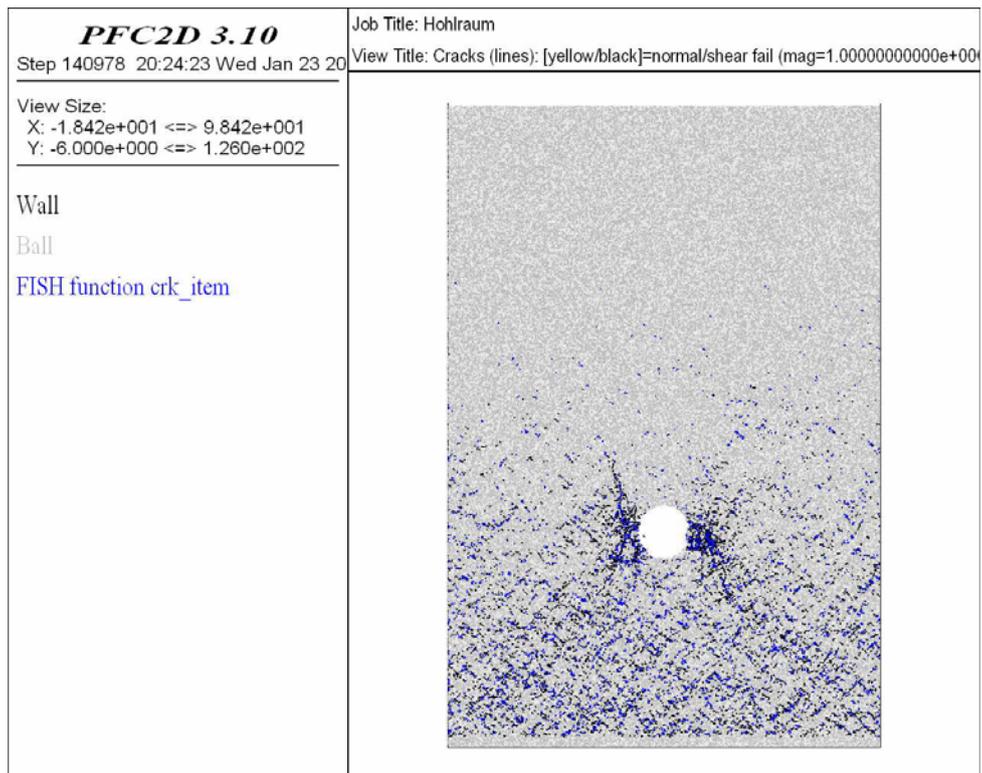


Abbildung 131: Rissbildung nach 50.000 Berechnungsschritten

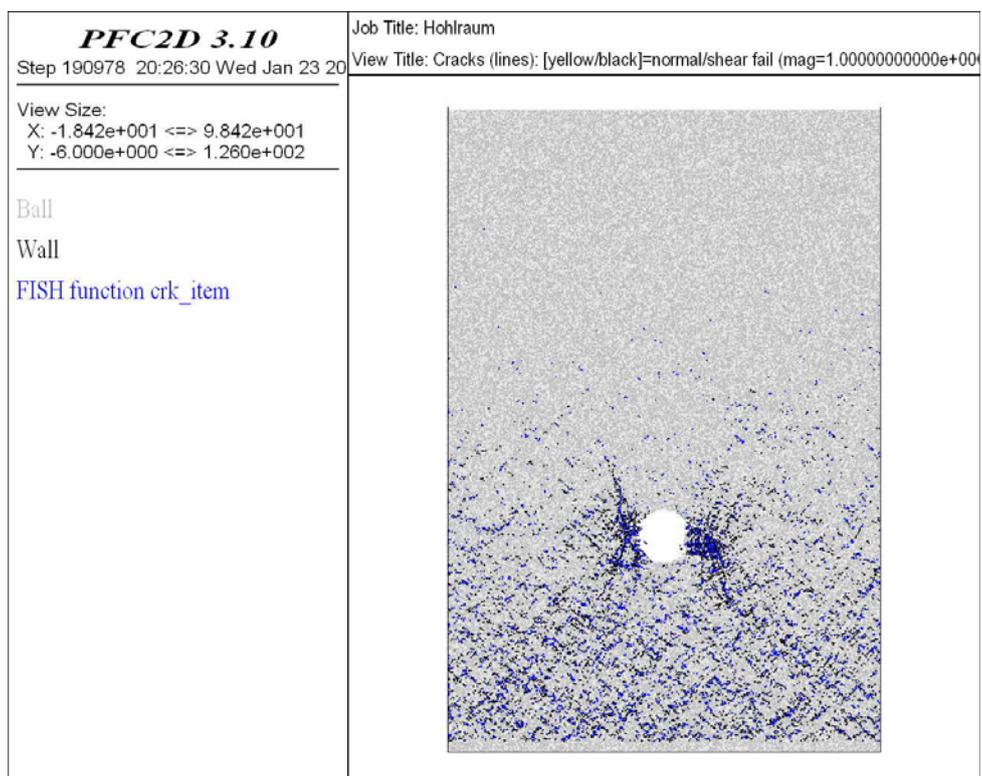


Abbildung 132: Rissbildung nach 100.000 Berechnungsschritten

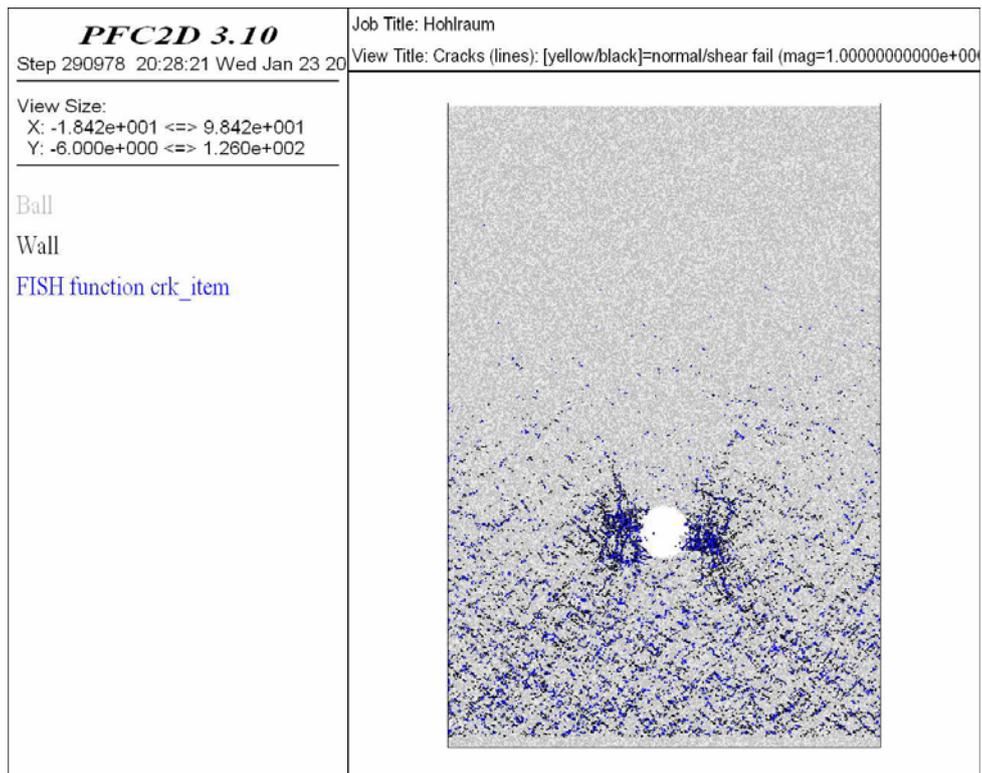


Abbildung 133: Rissbildung nach 200.000 Berechnungsschritten

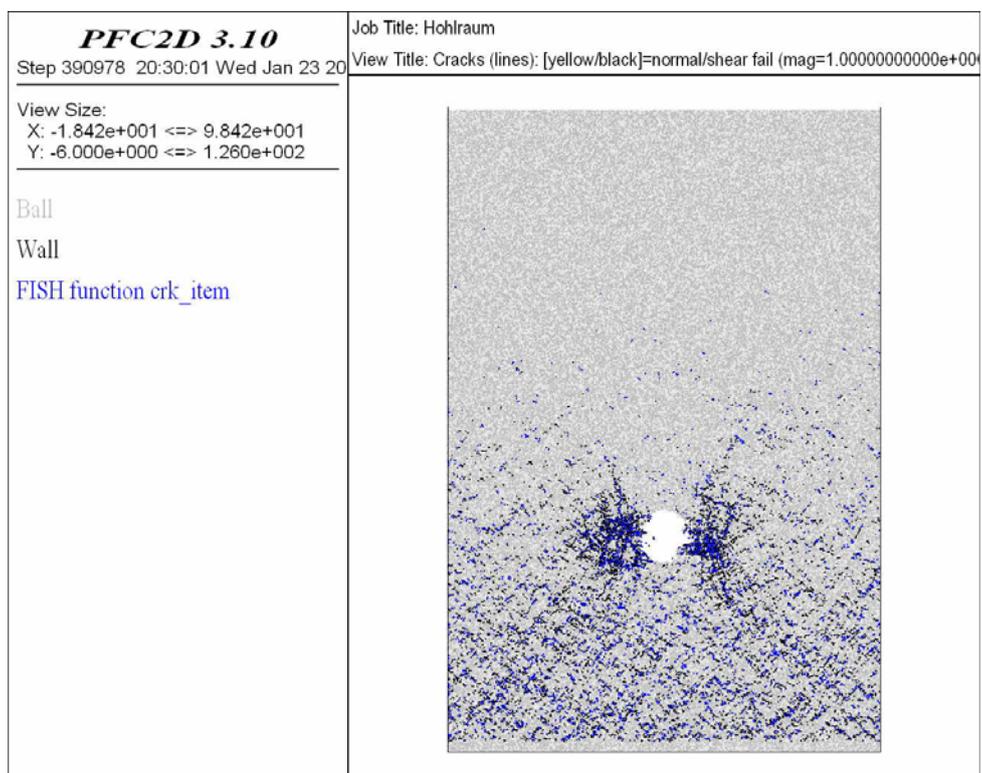


Abbildung 134: Rissbildung nach 300.000 Berechnungsschritten

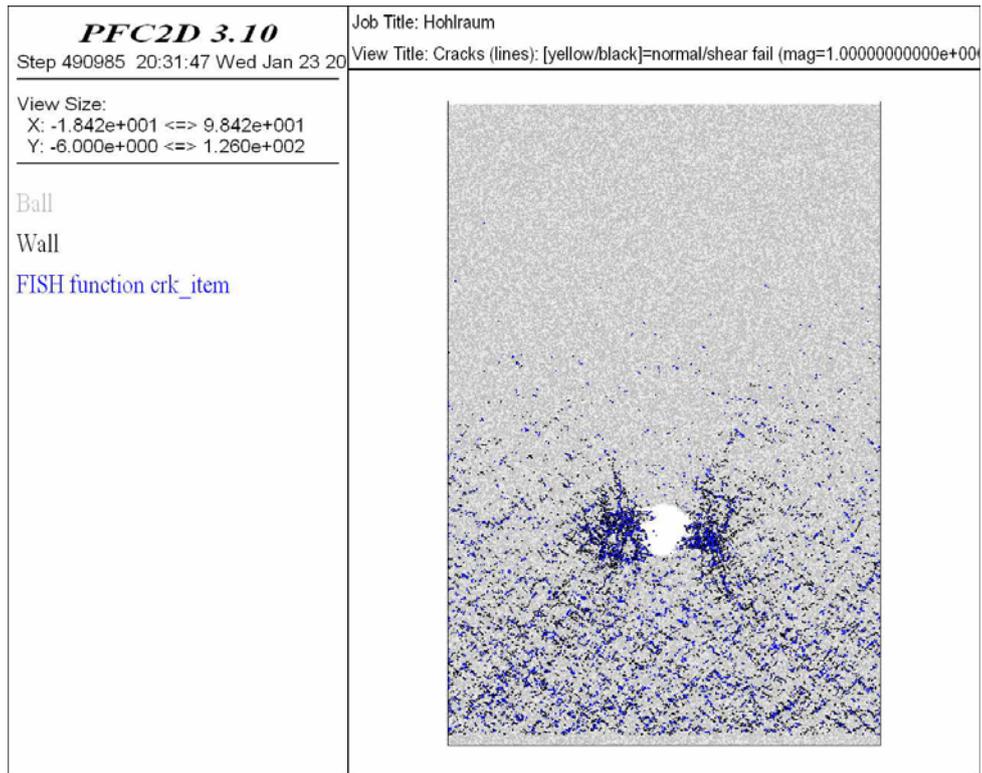


Abbildung 135: Rissbildung nach 400.000 Berechnungsschritten

9 Interpretation

Die Ergebnisse der Berechnungen haben gezeigt, dass sowohl das Kontaktbindungs- als auch das Parallelbindungsmodell ein Kirschkernelversagen abbilden können. Es kann nur zu diesem Versagensmechanismus kommen, wenn eine Kohäsion, simuliert durch die Bindung der Partikel untereinander und ein richtungsbetonter Spannungszustand vorhanden ist. Eine entsprechend gute Modellierung des Ausgangszustandes mit einem gravitativen Insitu-Spannungszustand ist daher für die Modellierung des Kirschkernelversagens von zentraler Bedeutung.

Interessant und aufschlussreich sind vor allem die Darstellungen der Verschiebungsvektoren um den Hohlraum sowie die Rissbildung. Sowohl bei Anwendung der Kontaktbindung, als auch der Parallelbindung, kommt es zu einem Versagensmodus, welcher seinen Ursprung im Versagen der Ulmen hat. Der Ablauf des Versagens weist jedoch Unterschiede auf. Eine Aussage darüber zu treffen, welches Modell besser geeignet ist das Kirschkernelversagen realistisch abzubilden, ist nicht möglich.

In den folgenden Abschnitten wird die Berechnung mit den Parametern der Modelle 2 und 4 der Kontaktbindung, sowie Modell 2 der Parallelbindung, mit der Theorie in Kapitel 2 verglichen. Außerdem werden die Berechnungen mittels PFC mit den Berechnungen in FLAC^{2D} (APFELBAUM, 2008) verglichen.

9.1 Modelle mit Kontaktbindung

9.1.1 Modell 2

Die Ergebnisse des Modells 2 können Kapitel 8.1.2 entnommen werden. Besonders Aufschlussreich und von Interesse für einen Vergleich mit den Theorien von FEDER (1967) und RABCEWICZ (1964) ist die Darstellung der Verschiebungsvektoren um den Hohlraum. Das Verständnis über die Ursachen und die Entwicklung der in Abbildung 91 dargestellten Verläufe der Verschiebungen stellt daher den Kernpunkt für einen Vergleich dar.

Es zeigen sich deutliche Verschiebungen in allen Bereichen des Ausbruches. Ein ausgeprägtes progressives Verhalten ist jedoch nur im Ulmenbereich zu erkennen. Die Verschiebungen im Sohlbereich wachsen bis zu einem Wert von etwa 40 cm an und nehmen nicht mehr weiter zu. Die Verschiebungen in der Firste und in der Sohle resultieren vor allem aus der beginnenden Auflockerung direkt nach Ausbruch des Tunnelquerschnittes und sind im Vergleich zu den Verschiebungen an den Ulmen sehr gering. Der Verlauf der Verschiebungen in der Firste zeigt jedoch nach etwa 900.000 Berechnungsschritten Unterschiede zu jenem der Sohle auf. Durch die zunehmende Auflockerung im Bereich der Ulmen kann der, über dem Hohlraum

liegende Bruchkörper entlang der sich ausbildenden Scherbänder (siehe Abbildung 70) abgleiten, wodurch es wiederum zum Anwachsen der Vertikalverschiebungen in der Firste kommt.

Vergleicht man die Ergebnisse dieses Modells mit der von FEDER (1977) entwickelten Theorie, so kann festgestellt werden, dass die von FEDER (1977) beschriebene Rissbildung im Bereich der Firste in PFC nicht beobachtet werden kann. Es kommt weder kurz nach Ausbruch des Querschnittes, noch nach Fortschreiten der Berechnungsdauer zu einer Rissbildung im Bereich der Firste oder der Sohle. Das Rissbild zeigt ausschließlich Risse im Ulmenbereich. Die von FEDER (1977) beschriebene Zermalmung der Ulmen kann in PFC deutlich Anhand der Darstellung der Kontaktkräfte nachvollzogen werden. Es kommt zu einem Ausquetschen mehr oder weniger zusammenhängender Bruchkörper aus den Ulmen (Kirsch kernversagen). Das Versagen hat seinen Ursprung in der Überschreitung der Scherfestigkeit der Kontaktbindungen. Das Rissbild zeigt deutlich, dass nur Scherbrüche auftreten. Eine Ausbildung der von FEDER (1977) beschriebenen Tief liegenden Scherbänder (siehe Abbildung 5, Zustand 3, g_1 bis g_4), welche in den Ausbruchsquerschnitt bzw. in die zermalmten Ulmenwickel reichen, kann in PFC nicht beobachtet werden. Die Ergebnisse in PFC zeigen einen durchgehenden Versagensablauf. Dieser kann nicht in verschiedene Schritte eingeteilt werden. Es stellt sich vielmehr ein Versagensbild ein, dessen Charakteristiken im Berechnungsverlauf gleich bleiben, jedoch an Intensität zunehmen.

Im Vergleich zur Theorie von RABCEWICZ (1964) kommt es in einem ersten Schritt zu einer Zermalmung der Ulmenbereiche und zum Ausquetschen von Bruchkörpern aus diesem Bereich. Dieses Verhalten kann durch die Berechnung in PFC bestätigt werden. Im Anschluss daran sollten die Verschiebungen im Bereich der Firste und der Sohle, in einem zweiten und dritten Schritt des Versagensmodus, zunehmen. Dieses Verhalten kann durch die Berechnungen in PFC nicht bestätigt werden. Die Verschiebungen in vertikaler Richtung nehmen zwar zu, bleiben aber im Vergleich zu den Horizontalverschiebungen im Ulmenbereich klein (Siehe Tabelle 12 bis Tabelle 23). Das Anwachsen der Verschiebungen nach etwa 900.000 Berechnungsschritten folgt nicht aus dem Ausknicken der Schichten in der Firste sondern, wie bereits weiter oben beschrieben, aus dem Abgleiten des Bruchkörpers entlang der sich ausbildenden Scherbänder. Es kann demzufolge nur eine Analogie mit Phase 1 der von RABCEWICZ vorgestellten Theorie gefunden werden.

9.1.2 Modell 4

Das Modell 4 zeigt im Vergleich zu Modell 2 ein ganz anderes Versagen. Die Darstellung des Rissbildes zeigt, dass vorwiegend Zugrisse (blau) auftreten, was mit der im Vergleich zur Scherfestigkeit geringen Zugfestigkeit der Kontaktbindung zusammenhängt. Anhand der

gemessenen Verschiebungen (Abbildung 113) kann wiederum ein Vergleich mit den Theorien von FEDER und RABCEWICZ (1964) durchgeführt werden.

Radialrisse im Bereich der Firste, wie von FEDER (1977) beschrieben, können nicht beobachtet werden. Das Rissbild zeigt ausschließlich Risse im Ulmenbereich. Die Abbildungen der Kontaktkräfte und der Rissbildung zeigen eine Zerlegung des Gebirges im Ulmenbereich. Es kommt nicht zu einem Ausquetschen von Bruchkörpern aus dem Ulmenbereich. Vielmehr wird der Querschnitt von den beiden Ulmen eingeschnürt. Der im Ausgangszustand kreisrunde Ausbruchquerschnitt wird zu einem ellipsenförmigen verformt. Eine Ausbildung der von FEDER (1977) beschriebenen Tief liegenden Scherbänder (siehe Abbildung 5, Zustand 3, g_1 bis g_4), welche in den Ausbruchquerschnitt bzw. in die zermalmt Ulmenzwickel reichen, kann auch in durch dieses Modell nicht bestätigt werden.

Modell 4 weist dagegen einige Gemeinsamkeiten mit der von RABCEWICZ (1964) entwickelten Theorie auf. Demzufolge kommt es, bedingt durch die Bewegung der Ulmen zum Ausknicken des Gebirges und demzufolge zu Verschiebungen in Richtung Hohlraum der Firste und der Sohle. Die Berechnung in PFC zeigt diese Verschiebungen im Firstbereich. Betrachtet man die Rissbildung in Abbildung 103, so ist ein durchgehender horizontaler Riss oberhalb der Firste auszumachen. Auf Grund dieses Risses entstehen Vertikalverschiebungen des darunter liegenden zusammenhängenden Bruchkörpers. In der Sohle kann ein solches Verhalten jedoch nicht beobachtet werden. Die Versagensform des Modells 4 kann also in zwei grundsätzliche Schritte eingeteilt werden. In einem ersten Schritt kommt es durch Überschreitung der Zugfestigkeit der Bindungen im Ulmenbereich zu erheblichen plastischen Bewegungen. Dabei wird der ursprünglich kreisrunde Hohlraum zu einem elliptischen Hohlraum verformt. Im Zuge dieser Bewegungen kommt es in einem zweiten Schritt im Bereich der Firste zu Druckspannungen und letztlich zum Überschreiten der Zugfestigkeit in senkrechter Richtung dazu (Indirektes Zugversagen) und zum Öffnen eines durchgehenden horizontalen Risses oberhalb der Firste.

9.2 Modelle mit Parallelbindung

9.2.1 Modell 2

Das Versagen des Querschnittes geht wiederum von den Ulmenbereichen aus. Im Unterschied zur Kontaktbindung hat hier die Kalibration zu Parametern geführt, unter deren Anwendung es im Modell sowohl zu Schub- als auch zu Zugrissen der Bindungen kommt. Dabei ist festzustellen, dass sich das Versagen auf noch kleinere Bereiche der Ulmen beschränkt als es bei Verwendung der Kontaktbindung der Fall war.

Im Anschluss an die Zermalmung der Ulmenzwickel kommt es im Gegensatz zu den Modellen mit Kontaktbindung zu keiner dominanten Verschiebung der Ulmenzwickel in Richtung Hohlraum, sondern zu einer Ablösung Schalenförmiger Bereiche, welche in den Hohlraum fallen. Abbildung 127 zeigt dieses Versagensbild. Ein Spaltbruch ist ein Indiz für dominantes Zugversagen der Bindungen normal zur Hauptdruckrichtung.

Beim Vergleich der Ergebnisse mit der Theorie von FEDER kann wiederum eine Analogie mit Zustand 2 aus Abbildung 5 festgestellt werden. Radialrisse im Bereich der Firste und Sohle, sowie Scherbänder welche in den Hohlraum reichen, können nicht beobachtet werden. Der Querschnitt versagt durch Überschreitung der Festigkeit im Ulmenbereich.

Eine Analogie zum ersten Schritt der von RABCEWICZ (1964) beschriebenen Theorie ist durchaus vorhanden. Die Gebirgsfestigkeit wird im Bereich der Ulmen überschritten und Bruchkörper werden aus den Ulmen in Richtung Hohlraum gedrückt. Eine Verschiebung der Firste und der Sohle kann im PFC- Modell jedoch nicht beobachtet werden.

9.3 Vergleich mit den Berechnungen in FLAC^{2D}

APFELBAUM (2008) hat in seiner Arbeit unter anderem zwei verschiedene Berechnungssituationen untersucht. Das Modell weist dieselben Dimensionen auf, wie sie auch in dieser Arbeit verwendet wurden. In einem ersten Schritt wurde das Modell in FLAC durch Druck belastet, also ein Biaxialversuch ($\sigma_H / \sigma_V = 1/3$) am Modell durchgeführt, ohne die Gravitationskraft zu aktivieren. Abbildung 136 zeigt die Schubverzerrungen nach 1.000 Berechnungsschritten. Eine Ausbildung der Kirschkerne im Ulmenbereich ist deutlich erkennbar.

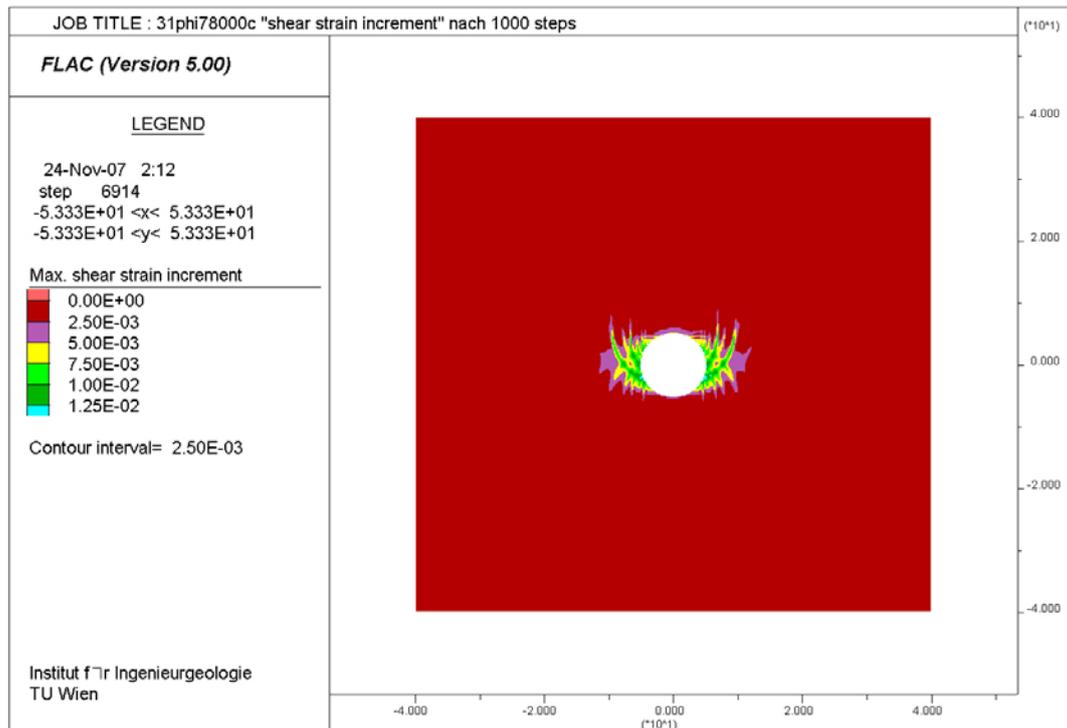


Abbildung 136: Darstellung der Schubverzerrungen in FLAC (APFELBAUM 2008). Modellbelastung durch Druckspannung

In einem zweiten Schritt wurde an Stelle einer Druckspannung die Gravitationskraft aktiviert. Abbildung 137 zeigt das Ergebnis dieser Berechnung. Diese Berechnung liefert, im Gegensatz zum Druckversuch (Abbildung 136), keine eindeutige Darstellung des Kirschkernversagens. Dieses kann zwar im Anfangsstadium der Berechnung angedeutet werden, jedoch bilden sich mit fortlaufender Anzahl an Berechnungsschritten konjugierte Scherbänder, welche in Richtung Oberfläche anwachsen. Nach 20.000 Berechnungsschritten ergibt sich die in Abbildung 137 dargestellte Situation. Daraus kann man schließen, dass die Berechnung dieses Modells in FLAC einen sehr zeitabhängigen Verlauf des Versagensmechanismus zeigt. Eine Ausbildung der Ulmenzwickel ist nur in einem sehr frühen Stadium der Berechnung erkennbar. Dies entspricht im Wesentlichen auch den von RABCEWICZ (1964) entwickelten Mechanismus (siehe Abbildung 2). Das weitere Versagensbild sieht jedoch anders als von RABCEWICZ beschrieben aus. Der Querschnitt versagt durch Bildung von Scherbändern, welche bis an die Oberfläche des Modells reichen. Wie bereits weiter oben beschrieben, konnte die Ausbildung der Scherbänder in geringem Maße auch in PFC beobachtet werden. Weitere Interpretationen der Berechnungen in FLAC können der Arbeit von APFELBAUM (2008) entnommen werden.

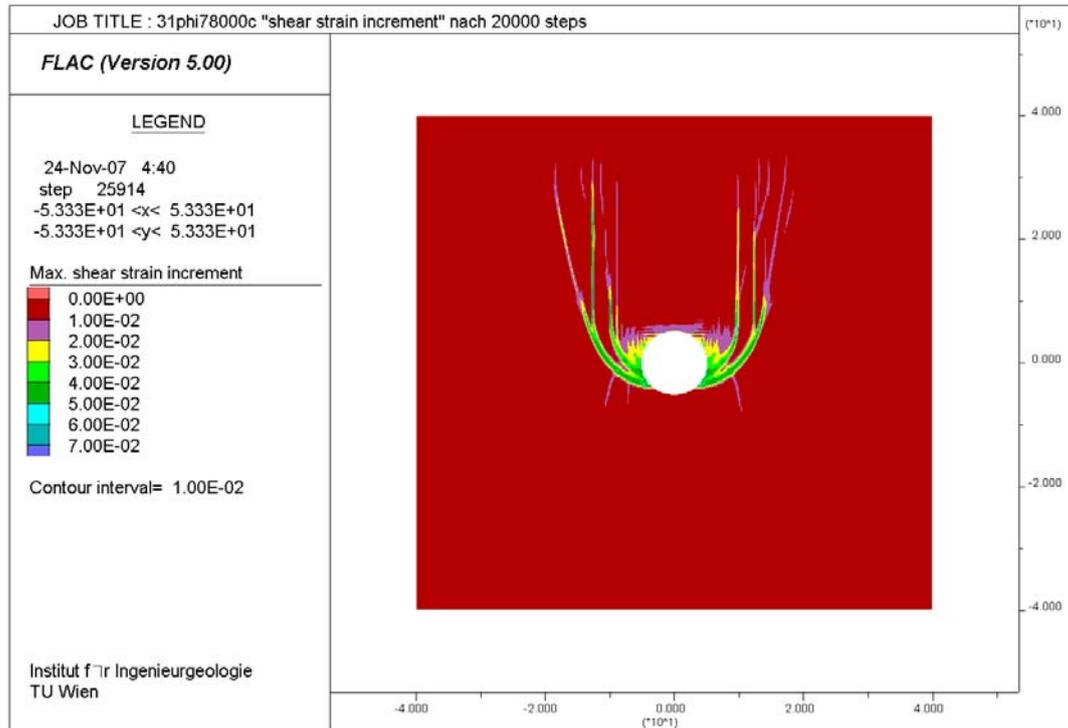


Abbildung 137: Darstellung der Schubverzerrungen in FLAC (APFELBAUM 2008). Modellbelastung durch Gravitationskraft

Aus den durchgeführten Berechnungen ist ersichtlich, dass sich der als Kirschkernversagen bezeichnete Versagensmodus deutlich in PFC^{2D} abbilden lässt. Sei es bei Verwendung einer Kontaktbindung als auch bei Verwendung einer Parallelbindung.

Die Untersuchungen mittels PFC haben gezeigt, dass die Verschiebungen in der Firste und in der Sohle außerordentlich gering sind. Für die Praxis bedeutet dies, dass unter den Randbedingungen der Modellrechnung die Ankerung in der Firste und Sohle gering gehalten werden kann. Im Ulmenbereich dagegen müssen die Stützmittel unter Rücksichtnahmen der zu erwartenden Verschiebungen bemessen werden. Dies gilt insbesondere für deren Einbindung in das Gebirge. Untersuchungen des Versagensmechanismus helfen daher, den Verbau (Ausbau) zu dimensionieren, das Messprogramm zu optimieren und die Messergebnisse richtig zu interpretieren.

10 Zusammenfassung

Bedingt durch die große Vielfalt an unterschiedlichen Fest- und Lockergesteinen treten im Tunnelbau eine Vielfalt an möglichen Versagensmodi auf. In dieser Arbeit wurde das so genannte „Kirschkernelversagen“ im Detail untersucht und besonderes Augenmerk auf dessen Modellierbarkeit im Programm PFC^{2D} gelegt. PFC ist ein Verfahren zur numerischen Modellierung von komplexen Systemen auf Basis der Methode der Distinkten Elemente. Dieses ist wiederum in die Gruppe der Diskreten Elemente einzuordnen. PFC erlaubt die Darstellung großer Verschiebungen und ist deshalb für die in dieser Arbeit verfolgten Absichten besonders gut geeignet.

Als Kirschkernelversagen wird jenes Schadensbild bezeichnet, bei dem das Versagen senkrecht zur Hauptnormalspannungsrichtung auftritt und keilförmige, durch Scherbrüche begrenzte Bereiche in den Hohlraum gedrückt werden. Dieses Verhalten ist vergleichbar mit dem Auspressen eines Kirschkernel beim starken drücken einer Kirsche (überliefert von L. MÜLLER).

Je nach Materialeigenschaft kommt es im Bereich der Ulme zu schalenförmigen Abplatzungen (Sprödes Material) oder zu einem keilförmigen Ausquetschen von zermalmtem Material aus den Ulmen. Dieser Versagensmodus schreitet so lange bergwärts fort, bis der Reibungswinkel der Gleitfläche geringer als der innere Reibungswinkel des Gesteins ist. RABCEWICZ (1964) und FEDER (1977) haben in ihren Arbeiten versucht den Mechanismus zu beschreiben und darzustellen, welcher zum Kirschkernelversagen führt. Dabei haben beide den Versagensmodus in drei Schritte eingeteilt und die Verformung des Querschnittes Abschnittsweise beschrieben.

Die laut RABCEWICZ zu unterscheidenden Zustände sind in Abbildung 2 dargestellt. Die Spannungsumlagerung, welche direkt nach Ausbruch des Hohlraumes zu Verschiebungen um den Hohlraum führen, sind in der Abbildung ersichtlich. In einem ersten Schritt kommt es zur Bildung der Ulmenzwickel und zu einer Bewegung der Ulmen senkrecht zur vertikalen Hauptdruckspannung in Richtung Hohlraum. In einem weiteren Schritt kommt es neben einer zunehmenden Bewegung der Ulmen zu einer Bewegung der Firste und der Sohle in Richtung Hohlraum. Das ständige Anwachsen der Verschiebungsvektoren in Firste und Sohle in Richtung Mittelpunkt führt schließlich zum Ausknicken des Gebirges in diesen Bereichen.

Laut Feder werden folgende Zustände unterschieden:

- Radialrisse im First- und Sohlbereich
- Zermalmten der Ulmenbereiche und eine weitere Ausbildung der Zugrisse. Es kommt zu einer Ausquetschung weicher Komponenten oder zu einer Zerberstung poröser Komponenten aus dem Ulmenbereich. Dieser Zustand ist dann voll ausgebildet, wenn die Zermalmung der Ulmenzwickel so weit bergwärts vorgedrungen ist, dass der entstandene Winkel der Gleitflächen kleiner als der innere Reibungswinkel zwischen kompakten und zermalmten Material wird.
- Wird die Gebirgstragfähigkeit in Zustand 2 überschritten, so führt dies zu Scherbrüchen, welche entweder in die zermalmten Zonen der Ulmenzwickel reichen und somit auf den passiven Widerstand des zermalmten Materials stoßen, oder direkt in den Hohlraum reichen.

Damit es zu diesem Versagensmodus kommen kann müssen zwei wesentliche Merkmale des Insitu-Spannungszustandes bzw. der Gebirgsparameter erfüllt sein. Es muss zum einen, ein richtungsbetonter Spannungszustand und zum anderen eine Kohäsion des Materials vorhanden sein. Ein richtungsbetonter Spannungszustand bedeutet z.B., dass die Spannungen im Gebirge in vertikale Richtung wesentlich größer sein müssen als die Horizontalspannungen.

Beide soeben dargestellten Theorien haben eine große Gemeinsamkeit. Die Verformungen laut FEDER (1977) in Phase 2 und jene laut RABCEWICZ (1964) in Phase 1 weisen große Ähnlichkeit auf. Die von FEDER (1977) beobachteten Radialrisse in der Firste und in der Sohle sowie Scherbänder außerhalb der zermalmten Ulmenzwickel treten bei der von RABCEWICZ (1964) vorgestellten Theorie nicht auf.

Das für die Berechnungen verwendete Modell weist eine Abmessung von 120 x 80 Metern auf. Der Ausbruch der Tunnelröhre erfolgt in einem Abstand von 40 Metern zur unteren und zu den seitlichen Begrenzungswänden (siehe Abbildung 26). Das umgebende Gestein weist eine Dichte von 2700 kg/m³ auf. Abbildung 20 zeigt den für die Modellrechnung in dieser Arbeit generierten Insitu- Spannungszustand. Eine Kohäsion wird mit Hilfe der Definition einer Bindung zwischen den Partikeln generiert. Dabei können unterschiedliche Bindungsmodelle angewandt werden. Im Rahmen der Modellrechnung wurden in dieser Arbeit zwei unterschiedliche Modelle kalibriert. Zum einen eine Kontaktbindung und zum anderen eine Parallelbindung. Im Unterschied zur Kontaktbindung bietet die Anwendung einer Parallelbindung die Möglichkeit einer Übertragung von Momenten in den Bindungen. Eine Kontaktbindung kann hingegen nur Normal- und Querkräfte übertragen. Die

grundlegende Schwierigkeit bei der Modellierung von einem Material in PFC liegt in der Tatsache, dass die in der Geotechnik meist angewandten Gebirgsparameter (Reibungswinkel und Kohäsion) nicht direkt dem Material zugeordnet werden können. Durch Variation der Partikelsteifigkeit und der Bindungseigenschaften der Partikel untereinander kann unter Zuhilfenahme geeigneter Kalibrationsprozesse das gewünschte Materialverhalten generiert werden. Mit anderen Worten ausgedrückt, können in PFC nur die Mikroparameter, also die Eigenschaften der einzelnen Partikel und deren Bindung untereinander definiert werden, nicht aber die Eigenschaften des generierten Ensembles. D.h. die Mikroparameter müssen so lange variiert werden, bis die Antwort des synthetischen Materials unter definierten Testbedingungen jenem Material entspricht, welches unter den gegebenen Randbedingungen zu dem gewünschten Versagensmodus führt.

Um die Makroparameter (Reibungswinkel und Kohäsion) und somit die Mohrsche Bruchgerade des generierten Materials zu bestimmen, wurden in PFC ein Biaxialtest sowie ein Braziliantest simuliert. Dieser Kalibrationsprozess wurde sowohl unter Verwendung einer Kontakt- als auch einer Parallelbindung durchgeführt. Jene Parameter, welche das Grenzgleichgewicht beschreiben waren in etwa bekannt (APFELBAUM 2008).

Dabei hat sich gezeigt, dass das Ergebnis der Kalibration nicht so eindeutig ausfällt wie man annehmen würde. Bei Verwendung einer Kontaktbindung lässt sich die Bruchgerade sowohl durch ein sprödes, als auch durch ein duktileres Material annähern. Wird hingegen eine Parallelbindung zwischen den Partikeln angewandt, so gestaltet sich die Kalibration noch schwieriger, da die Anzahl an Variablen von 5 auf 8 ansteigt.

Die kalibrierten Mikroparameter wurden anschließend dem Modell zugewiesen und dessen Verhalten analysiert. Für die Darstellung des Versagensablaufes eignen sich besonders drei Arten von Darstellungen:

- Darstellung der Kontaktkräfte der Partikel: diese Darstellung gibt Aufschluss über die entstehende Auflockerung um den Tunnelausbruch und bildet die sich ausbildenden „Ulmenzwickel“ besonders gut ab. Der Verlauf der Auflockerung kann gut beobachtet werden. Diese Abbildungen zeigen die Spannungsumlagerung im Querschnitt.
- Darstellung des Rissbildes: Im Laufe der Berechnung brechen die überbeanspruchten Bindungen zwischen den Partikeln. Bindungen, welche auf Grund überschrittener Zugfestigkeit bzw. Scherfestigkeit reißen, werden unterschiedlich eingefärbt. Bindungen brechen in jenen Bereichen, in denen die vorhandenen Spannungen die Bindungsfestigkeit überschreiten. In allen analysierten Modellen ist ersichtlich, dass das Versagen des Querschnittes seinen Ursprung im Bereich der Ulmen hat.

- Darstellung der Verschiebungsvektoren um den Hohlraumrand: Als Folge der Auflockerung des Gebirges und eintretenden Spannungsumlagerung entstehen Verschiebungen um den Ausbruchquerschnitt. Die Verschiebungen wurden in Abhängigkeit der Berechnungsdauer, in der Firste, der Sohle und an den Ulmen, aufgezeichnet und dargestellt. Anhand dieser Darstellung können die Ergebnisse der Berechnung in PFC mit den von FEDER (1977) und RABCEWICZ (1964) entwickelten Theorien verglichen werden.

Die von FEDER in einem ersten Schritt beschriebene Rissbildung im Bereich der Firste und der Sohle kann im PFC-Modell weder bei Verwendung einer Kontakt- noch bei Verwendung einer Parallelbindung beobachtet werden. Radialrisse in diesen Bereichen treten somit im Modell nicht auf. Stattdessen geht das Modell direkt in Phase 2 über. Diese ist vergleichbar zur ersten Phase der von RABCEWICZ (1964) vorgestellten Theorie. In Analogie dazu kommt es direkt nach Ausbruch des Querschnittes zu einer Spannungsumlagerung im Bereich der Ulme und zum Ausquetschen von zermalmtem Material in Richtung Hohlraum in diesen Bereichen. Aus den Diagrammen in Abbildung 91 und Abbildung 107 ist ersichtlich, dass auch die Verschiebungen in der Firste und in der Sohle mit fortschreitender Berechnungsdauer ein progressives Verhalten aufweisen. Dies steht im Einklang mit der Phase 2 der Theorie von RABCEWICZ (1964). Allerdings kommt es weder in der Sohle, noch in der Firste zu dem in Phase drei der Theorie von RABCEWICZ (1964) beschriebenen Ausknicken des Gebirges. Stattdessen nehmen die Verschiebungen in den Ulmen immer weiter zu. Es kann also weder ein vergleichbares Verhalten des Modells mit der Phase 3 der von RABCEWICZ (1964), noch mit der Phase 3 der von FEDER (1977) vorgestellten Theorie erkannt werden. Die Zermalmung der Ulmenzwickel schreitet immer weiter fort, ohne dass sich erkennbare tiefliegende Scherbänder ausbilden, welche entweder in die plastifizierte Zonen der Ulmen oder direkt in den Hohlraum reichen.

Vergleicht man hingegen die Modellrechnung in PFC mit jener in FLAC (APFELBAUM 2008) so kann folgende Aussage gemacht werden:

Bei Verwendung des Kontaktbindungsmodells mit einer im Vergleich zur Scherfestigkeit hohen Zugfestigkeit der Kontaktbindung (Modell 2) kann eine Ausbildung von Scherbändern, welche von der Sohle ausgehen und bis zu den Modellgrenzen anwachsen, beobachtet werden (siehe Abbildung 70). Sehr viel deutlicher bilden sich diese Scherbänder im FLAC-Modell aus. Hier kommt es unmittelbar nach Ausbruch des Tunnelquerschnittes zu einer Überschreitung der Festigkeit im Ulmenbereich. Dieser Versagenstyp schreite jedoch nicht wie in der PFC-Berechnung bis zum Versagen des Hohlraumes fort, sondern es bilden sich deutliche Scherbänder die bis an die Oberfläche des Modells reichen. Der Versagenstyp ändert sich also nach wenigen Berechnungsschritten.

Wird jedoch in PFC ein Modell mit Kontaktbindung dessen Parametern wie im Modell 4, also einer im Vergleich zur Scherfestigkeit geringeren Zugfestigkeit, oder ein Modell mit Parallelbindung verwendet, so ist eine Ausbildung der Scherbänder nicht mehr auszumachen.

Die Ergebnisse der Berechnungen haben gezeigt, dass sowohl das Kontaktbindungs- als auch das Parallelbindungsmodell ein Kirschkernelversagen abbilden können. Wichtig für die klare Ausbildung der Ulmenzwickel ist ein einwandfreier In-situ-Spannungszustand und die Simulation einer Kohäsion durch eine Bindung der Partikel untereinander.

Die Untersuchungen mittels PFC haben gezeigt, dass die Verschiebungen in der Firste und in der Sohle außerordentlich gering sind. Für die Praxis bedeutet dies, dass unter den Randbedingungen der Modellrechnung die Ankerung in der Firste und Sohle gering gehalten werden kann. Im Ulmenbereich dagegen müssen die Stützmittel unter Rücksichtnahmen der zu erwartenden Verschiebungen bemessen werden. Dies gilt insbesondere für deren Einbindung in das Gebirge. Untersuchungen des Versagensmechanismus helfen daher, den Verbau (Ausbau) zu dimensionieren, das Messprogramm zu optimieren und die Messergebnisse richtig zu interpretieren.

11 Referenzen

CUNDALL, P.A.: A Computer Model for Simulating Progressive, Large Scale Movements in Block Rock Systems. Proc. Symp. Rock Fracture, Nancy, pap. II-8 (1971)

CUNDALL, P.A.: Distinct Element Models of Rock and Soil Structure. In: Brown, E. T. (Ed.), Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics, Ch. 4., Allen & Unwin, London, pp. 129-163 (1987)

CUNDALL, P.A.: Formulation of a Three-Dimensional Distinct Element Model – Part 1. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System Composed of Many Polyhedral Blocks. Int. Journal of Rock Mechanics, Min.Sci. & Geomech. Abstr., 25(3), pp. 107-116 (1988)

CUNDALL, P.A. KONIETZKY, H. & POTYONDY, D.: PFC – Ein neues Werkzeug für numerische Modellierungen. – Bautechnik 73, S 492-500 (1996)

DAWSON, E. M.: Finite Element Slope Analysis. In: Proc. Of the 47th Annual Geotechnical Conference, University of Minnesota, Dep. Of Civ. Eng.

- FEDER, G & ARWANITAKIS, M.: Zur Gebirgsmechanik ausbruchnaher Bereiche tiefliegender Hohlrumbauten. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte. Sonderdruck aus Jahrgang 121, Heft 4. Leoben (1977).
- FEDER, G.: Zum Stabilitätsnachweis für Hohlräume in festem Gebirge bei richtungsbetontem Primärdruck. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte. Sonderdruck aus Jahrgang 122, Heft 4. Leoben (1977).
- FEDER, G.: 10 Jahre Gebirgsmechanik aus dem Institut für Konstruktiven Tiefbau der Montanuniversität Leoben. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte. Jahrgang 131, Heft 2. Leoben (1986).
- FRÜWIRT, T.: Numerische Untersuchung von Felsmassenstürzen im Bereich der Großhangbewegung Gagenwald bei Murau mittels PFC^{3D}. Diplomarbeit an der TU Wien (2004)
- GINSBERG, J. H. & GENIN, J.: Dynamics, Second Edition. New York: John Wiley and Sons (1984)
- ITASCA: PFC^{2D} (Particle Flow Code in 2 Dimensions), Version 3.1 User's Manual. Itasca Consulting Group, Inc, Minneapolis (© 2004)
- KONIETZKY, H.: Numerische Simulation in der Geomechanik mittels expliziter Verfahren. Gelsenkirchen, Itasca Consultant GmbH. (2000)
- MAIR AM TINKHOF, K.: Numerische Untersuchung von Felsmassenstürzen vom Roten Kögele am Hallstätter Salzberg mittels PFC^{3D}. Diplomarbeit an der TU-Wien. (2007).
- POISEL, R.: Angewandte Felsmechanik. Skriptum an der Technischen Universität Wien (2006)
- POTYONDY, D. O. & CUNDALL, P. A.: Modeling of Notch Formation in the URL Mine-By Tunnel: Phase IV-Enhancements to the PFC Model of Rock. Report to Atomic Energy of Canada Limited (AECL), April. Issued as Ontario Hydro Nuclear Waste Management Division Report, N. 06819-REP-01200-10002-R00. (1999)
- POTYONDY, D. O. CUNDALL, P. A.: A Bonded-Particle Model for Crystalline Rock. Submitted to Int. J. Rock Mech. & Min. Sci, No. For a special issue on rock mechanics research at the AECL Underground Research Laboratory (2003).
- PREH, A.: Modellierung des Verhaltens von Massenbewegungen bei großen Verschiebungen mit Hilfe des Particle Flow Codes (PFC), Dissertation an der TU Wien, 2004

- PREH, A.: Modellierung der Versagensmechanismen von Felsböschungen mithilfe des Particle Flow Codes (PFC). Dissertation an der TU Wien (2003)
- RABCEWICZ, L.: The New Austrian Tunneling Methode; Prof. Dr. techn. L. v. Rabcewicz (Water Power November 1964).
- RABCEWICZ, L.: Die neue Österreichische Tunnelbauweise. I. Entstehung, Ausführung und Erfahrungen. Der Bauingenieur 40. Jahrgang, Heft 8. August (1965)
- RABCEWICZ, L.: Theorie und Praxis bei den Untertagearbeiten eines großen Dammbauvorhabens. Rock Mech., Suppl. 2, S 193-224 (1973)
- ROTH, W.: Ermittlung von Sicherheitsfaktoren mittels des kontinuumsmechanischen Finiten Differenzen – Codes FLAC. Diplomarbeit an der TU Wien (1999)
- ROTH, W.: Dreidimensionale numerische Simulation von Felsmassenstürzen mittels der Methode der Distinkten Elemente (PFC). Dissertation an der TU Wien (2003)
- SATTLER, K.: Die Neue Österreichische Tunnelbauweise. II. Statische Wirkungsweise und Bemessung. Der Bauingenieur Heft 8 (1965)
- SCHUBERT, W.: Skriptum zur Vorlesung. Felsmechanik und Tunnelbau. Technische Universität Graz (2006).
- TERZAGHI K.: Theoretische Bodenmechanik, Springer B/G/H, 1954
- UGURAL, A.C. & FENSTER, S. K.: Advanced Strength and Applied Elasticity, Second SI Edition. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc.. (1987)
- WILL, J.: Die Diskrete Elemente Methode (DEM) und ihre Anwendung in der Felsmechanik. Mitteilungen des Institutes für Strukturmechanik, Festschrift Prof. Harald Zrost, No. 95-1. S. 11.1-5.11.13. (1995)
- ÖNORM B 4415:1976 07 01: Erd- und Grundbau. Untersuchung von Bodenproben. Einaxiale Druckfestigkeit. (1976)