



## DIPLOMARBEIT

Master's Thesis

### **Berechnung eines Fußgängersteiges aus Stahl unter Normalkraft, zweiachsiger Biegung und Wölbkrafttorsion nach zwei Methoden**

#### **Teil 2:**

### **Gekoppelte Berechnung ohne Berücksichtigung von Schwerpunkt, Hauptachsen und Schubmittelpunkt**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

O. Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut RUBIN  
und

Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn Mehdi AMINBAGHAI

Institut für Baustatik

eingereicht an der Technischen Universität Wien,  
Fakultät für Bauingenieurwesen,  
von

**Mariam ARNAOUT**

Waldmüllergasse 9/1/11

1200 Wien

E610 / 9925114

Wien im Dezember 2008

Unterschrift



---

## Kurzfassung

Mariam Arnaout: Berechnung eines Fußgängersteiges aus Stahl unter Normalkraft, zweiachsiger Biegung und Wölbkrafttorsion nach zwei Methoden, Teil 2: Gekoppelte Berechnung ohne Berücksichtigung von Schwerpunkt, Hauptachsen und Schubmittelpunkt.

Für den Querschnitt eines Fußgängersteiges wird ein gekoppeltes Berechnungsverfahren nach Herrn O. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Rubin angewendet. Schnittgrößen und Verzerrungen werden gekoppelt dargestellt, sodass weder die Berechnung des Schwerpunkts noch des Schubmittelpunkts und der Hauptachsen notwendig ist. Es kann das Bezugskoordinatensystem beliebig gewählt werden.

In dieser Arbeit werden drei verschiedene Lastfälle behandelt. Mittels einer Übertragungsbeziehung werden alle Schnittgrößen, Verschiebungsgrößen, sowie der Verzerungszustand bestimmt und die daraus resultierenden Normalspannungen sowie Schubflüsse angegeben.

Die Ergebnisse stimmen exakt mit der parallel geführten Arbeit, die denselben Fußgängersteig zum Thema hat, in der er jedoch nach der konventionellen Methode berechnet wurde, überein.

Es wurde somit bewiesen, dass die gekoppelte Berechnung eine gute Lösung für die vorliegende Aufgabenstellung liefert.

## Summary

Mariam Arnaout: Analysis of a pedestrian bridge out of steel loaded by normal force, biaxial bending and torsion by two different methods, part 2: coupled form of analysis without use of centroid, shear centre and principal axis.

The cross section of a pedestrian bridge gets analysed by a coupled form of analysis, which is created by Mr. O. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Rubin.

The relation between stress results and deformation are written in a coupled form which allows an arbitrarily choice of a reference point and a reference system of coordinates. There is no need for calculating the centroid nor the shear centre or the principal axis.

Based on the relation mentioned above a transfer matrix gets developed, which enables the calculation of all stress results, deformations and displacements.

The results of three different kinds of loads are displayed in this paper.

Comparing the results of this thesis with these of the thesis, that concerns the same square section but handles it with a more conventional calculation method, it turns out, that the results are exactly the same.

This proves that the coupled form of analysis, which is used in this paper, is a good solution for the present case, since it maintains the same results as the regularly used method.

---

## Vorwort

Diese Arbeit sollte ursprünglich interdisziplinär zwischen dem Institut für Baustatik und dem Institut für Tragkonstruktionen Abteilung Stahlbau ausgeführt werden. Die Idee war, dass zwei Studenten eine gemeinsame Arbeit über zwei Rechenverfahren verfassen, um diese anschließend zu vergleichen. Entstanden sind nun zwei Arbeiten:

Teil Eins wurde von Christina Söllner am Institut für Stahlbau,

Teil Zwei von Mariam Arnaout am Institut für Baustatik verfasst.

Großer Dank gilt vor allem Herrn O. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Rubin für die Bereitstellung seines Aufsatzes „Ein Berechnungskonzept für Stäbe mit offenem Querschnitt bei Beanspruchung durch Längskraft, zweiachsiger Biegung und Torsion ohne Bestimmung von Schwerpunkt, Schubmittelpunkt und Hauptachsen“, auf dem diese Arbeit basiert. Für die gute Betreuung möchte ich mich herzlich bei ihm bedanken.

Herr Ass. Prof. Dipl.-Ing. Dr. tech. Mehdi Aminbaghai hat mich bei vielen Projekten im Studium kompetent, geduldig und verständnisvoll unterstützt, wofür ich ihm sehr dankbar bin.

Zudem möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Rene Binder für die tatkräftige Unterstützung mit Mathematica 6.0 und seine permanente Hilfsbereitschaft bedanken.

Herr Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Francesco Aigner hat sich sehr engagiert und war gern bereit mit uns über jedes Problem „laut nachzudenken“, welches im Zuge der Diplomarbeit(en) aufgetaucht ist. Seine Zuwendungen waren für uns äußerst hilfreich, dafür danken wir ihm sehr.

Bei meiner kompetenten Partnerin und lieben Freundin, Christina Söllner, möchte ich mich für die gute Zusammenarbeit bedanken.

Besonders möchte ich mich bei meiner Mutter bedanken, die mich sehr unterstützt hat, mir viele Stunden zugehört hat und immer für mich da war.

Meine Schwester Nadya und mein Vater haben mich ebenfalls sehr unterstützt und waren immer für mich da, wofür ich mich sehr herzlich bedanke.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Freunden und Kollegen bedanken, die mir zur Seite gestanden sind, sich Zeit für viele, produktive Gespräche genommen und mich motiviert haben.

Mariam Arnaout

---

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1. EINLEITUNG</b> .....	<b>3</b>
1.1 Allgemein .....	3
1.2 Berechnungsmethoden .....	3
1.3 Aufgabenstellung und Zielsetzung .....	4
<b>2. FUßGÄNGERSTEG</b> .....	<b>5</b>
2.1 Querschnitt und statisches System .....	5
2.2 Übersicht der Lastfälle .....	6
2.2.1 Lastfall 1: Eigengewicht mit Aufbau .....	6
2.2.2 Lastfall 2: Nutzlast .....	6
2.2.2.1 Lastfall 2a: Nutzlast auf dem gesamten Deckblech .....	7
2.2.2.2 Lastfall 2b: Nutzlast über dem kurzen Steg .....	7
2.2.2.3 Lastfall 2c: Nutzlast über dem langen Steg .....	7
2.2.3 Lastfall 3: Wind .....	7
2.3 Aufteilung der Einwirkung in ihre Komponenten .....	8
2.3.1 Belastung in x-Richtung .....	8
2.3.2 Belastung in z-Richtung .....	8
<b>3. THEORIE DER GEKOPPELTEN BERECHNUNGSMETHODE NACH [1]</b> .....	<b>9</b>
3.1 Einleitung .....	9
3.2 Allgemein .....	9
3.3 Annahmen .....	10
3.4 Allgemeine Berechnung des Fußgängersteges .....	10
3.4.1 Verschiebungsgrößen, Schnittgrößen und Einwirkungen .....	11
3.4.2 Berechnung der Spannungen $\sigma_f$ aus den Verschiebungsgrößen $u$ , $w$ , $v$ und $\vartheta$ mit Hilfe der Matrix $A$ .....	11
3.4.3 Berechnung der Knotenkräfte $F_i$ aus den Spannungen $\sigma_f$ mit Hilfe der Matrix $B$ .....	13
3.4.4 Berechnung der Schnittgrößenmatrix $S$ aus der Matrix $k$ mit Hilfe der Matrix $D$ .....	16
3.4.5 Schnittgrößen .....	17
3.4.5.1 Streckenlasten und Schnittgrößen .....	17
3.4.5.2 Differenzialgleichung für $M_w$ und Lösung .....	19
3.4.6 Verschiebungsgrößen .....	22
3.5 Übertragungsbeziehung .....	23
3.6 Berechnung der unbekanntenen Zustandgrößen an der Stelle $i$ und $k$ für einen gabelgelagerten einfeldrigen Stab aus der Übertragungsbeziehung (3.89) .....	25
3.7 Verschiebungen $U$ , $W$ und $V$ an den Querschnittspunkten $f$ .....	26
3.8 Schubspannungen und Normalspannungen .....	26
3.9 Übergang zur konventionellen Formulierung .....	29
<b>4. ANWENDUNG DER GEKOPPELTEN BERECHNUNGSMETHODE FÜR EINEN FUßGÄNGERSTEG</b> .....	<b>32</b>
4.1 Vorwerte: .....	32
4.1.1 Querschnittsabhängige Beziehungen: Matrix $A$ , $B$ , $D$ sowie die Konstante $K$ und die Torsionsträgheitsmomente $I_T$ und $I_T^*$ .....	32
4.1.2 Schnittstellenabhängige Werte .....	33
4.2 Randbedingungen .....	35
4.2.1 Randbedingungen zufolge Gesamtbelastung .....	35
4.3 Lastfall 1: Eigengewicht mit Aufbau .....	36
4.3.1 Einwirkung .....	36
4.3.2 Übertragungsbeziehung für $x = l = 3000$ .....	36
4.3.3 Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $Z_i$ .....	37
4.3.4 Berechnung von $u_i$ aus $u_k$ .....	38
4.3.5 Bestimmen des Zustandvektor $Z_x$ für $x = 500$ mittels Übertragungsbeziehung .....	40
4.3.6 Verschiebungen der einzelnen Querschnittsknoten für die 3 betrachteten Stellen .....	42
4.3.7 Normalspannungen und Schubflüsse .....	43
4.4 Lastfall 2a: Nutzlast auf dem gesamten Deckblech .....	45
4.5 Ermittlung der maßgebenden Einflussbreite für Lastfall 2b .....	46
4.5.1 Einwirkung zur Ermittlung der maximale Durchbiegung des kurzen Steges .....	46
4.5.2 Gleichungssystem $i$ nach $k$ .....	46
4.5.3 Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $Z_i$ .....	47
4.5.4 Durchbiegung in Stabmitte .....	48

4.5.5	Durchbiegung aus der Linienlast und Nulldurchgang an der Stelle $x=1500$ .....	49
4.6	Lastfall 2b: Nutzlast über dem kurzen Steg.....	50
4.6.1	Einwirkungsbreite aus der maximalen Durchbiegung .....	50
4.6.2	Übertragungsbeziehung für $x= l=3000$ .....	50
4.6.3	Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $Z_i$ .....	51
4.6.4	Bestimmen des Zustandvektor $Z_x$ für $x=500$ mittels Übertragungsbeziehung .....	52
4.6.5	Verschiebungen der einzelnen Querschnittsknoten für die 3 betrachteten Stellen .....	54
4.6.6	Normalspannungen und Schubflüsse .....	54
4.7	Lastfall 2c: Nutzlast über dem langen Steg.....	57
4.7.1	Einwirkung zur Ermittlung der maximale Durchbiegung des langen Steges.....	57
4.7.2	Gleichungssystem $i$ nach $k$ .....	57
4.7.3	Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $Z_i$ .....	58
4.7.4	Durchbiegung in Stabmitte.....	58
4.7.5	Durchbiegung aus der Linienlast und Nulldurchgang an der Stelle $x=1500$ .....	59
4.8	Lastfall 3a: Wind; Druck .....	60
4.8.1	Einwirkung .....	60
4.8.2	Übertragungsbeziehung für $x= l=3000$ .....	60
4.8.3	Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $Z_i$ .....	61
4.8.4	Berechnung von $u_i$ aus $u_k$ .....	62
4.8.5	Bestimmen des Zustandvektor $Z_x$ für $x = 500$ mittels Übertragungsbeziehung .....	63
4.8.6	Verschiebungen der einzelnen Querschnittsknoten für die 3 betrachteten Stellen .....	65
4.8.7	Normalspannungen und Schubflüsse .....	66
4.9	Lastfall 3b: Wind; Sog .....	68
4.10	Übergang zur konventionellen Formulierung .....	69
<b>5.</b>	<b>VERGLEICH „ENTKOPPELTES“ – „GEKOPPELTES VERFAHREN“ .....</b>	<b>70</b>
5.1	Allgemein .....	70
5.2	Unterschiede .....	70
5.2.1	Querschnittswerte .....	70
5.2.2	Rechenweise .....	70
5.2.3	Handrechnung .....	70
5.2.4	Schwerpunkt und Schubmittelpunkt.....	71
5.2.5	Transparenz .....	71
5.3	Zusammenfassung.....	71
	<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>72</b>
	<b>ANHANG A: AUFSATZ VON O.PROF. DR.TECHN. DIPL-ING. HELMUT RUBIN .....</b>	<b>I-XXX</b>

# 1. EINLEITUNG

## 1.1 Allgemein

Das im Nachfolgenden angewendete Berechnungsverfahren ist von Herrn O. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Rubin entwickelt. Diese Arbeit soll die Anwendung dieser Berechnungsmethode anhand eines Stahlbrückenquerschnitts unter Beanspruchung von Längskraft, zweiachsiger Biegung und Wölbkrafttorsion zeigen und mit den Ergebnissen der parallel geführten Arbeit [2], die denselben Querschnitt und das gleiche statische System nach den entkoppelten Differenzialgleichungen behandelt, verglichen werden.

## 1.2 Berechnungsmethoden

Zur Berechnung von Stäben mit offenen Querschnitten unter Beanspruchung von Längskraft, zweiachsiger Biegung und Wölbkrafttorsion werden üblicherweise der Schwerpunkt, der Schubmittelpunkt und die Hauptachsen bestimmt, woraus die Anwendung der **entkoppelten Differenzialgleichungen** des Biege- und Torsionsproblems für Schnittgrößen und Spannungen ermöglicht wird. Die Normalspannungen und Schubspannungen können so für jede Schnittgröße getrennt bestimmt werden. Dies setzt jedoch auch die Kenntnis bzw. Berechnung sämtlicher Querschnittswerte voraus. Anwendung findet diese Methode im ersten Teil der Arbeit „**Berechnung eines Fußgängersteiges aus Stahl unter Normalkraft, zweiachsiger Biegung und Wölbkrafttorsion nach zwei Methoden**“, Teil 1: **Entkoppelte Berechnung unter Berücksichtigung von Schwerpunkt, Hauptachsen und Schubmittelpunkt sowie Ermittlung der Wölbspannungen nach dem Drillträgerverfahren [2]** von *Christina Söllner* verfasst.

Alternativ zur entkoppelten Methode wird ein **gekoppeltes Berechnungsverfahren** von *Rubin* [1] angewendet, das ohne separate Ermittlung der Querschnittswerte sowie ohne Schwerpunkt, Hauptachsen und Schubmittelpunkt auskommt. Das Bezugssystem darf frei gewählt werden. Ausgehend von einem beliebigen, aber auf der Querschnittskontur liegenden Bezugspunkt wird eine Übertragungsbeziehung für die Zustandsgrößen am Anfang und am Ende des betrachteten Stabes aufgestellt. Mit Hilfe der Randbedingungen und der Übertragungsbeziehung können die Zustandsgrößen am Anfangs- und Endpunkt vollständig bestimmt werden. Danach können mit Übertragungsbeziehungen an jeder Stelle  $x$  entlang der Längsachse alle Schnittgrößen, sowie Verschiebungsgrößen des Bezugspunkts ermittelt

werden. In weiterer Folge können über Formänderungsgrößen die Normalspannungen sowie die Änderung der Normalspannungen über die Länge in jedem Punkt des Querschnitts bestimmt werden. Aus dieser Änderung der Normalspannungen lassen sich durch Kräftegleichgewichte Schubflüsse und nach Division durch die Blechdicke die Schubspannungen errechnen.

### 1.3 Aufgabenstellung und Zielsetzung

In dieser Diplomarbeit wird das „Gekoppelte Berechnungsverfahren“ auf einen Fußgängersteg angewendet. Es werden verschiedene Lastfälle wie Eigengewicht, Nutzlast und Windlast mit unterschiedlichen Laststellungen betrachtet und ausgewertet.

Der Querschnitt des Fußgängersteiges und seine Belastungen werden im nachfolgenden Kapitel genauer angegeben.

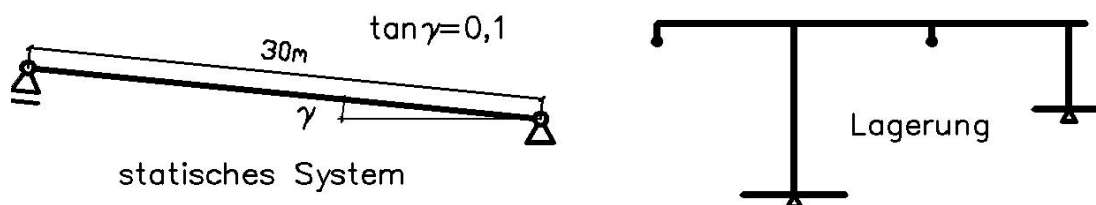


Abbildung 1: Angabe

Ziel der Arbeit ist es zu zeigen, dass das gekoppelte und entkoppelte Berechnungsverfahren exakt die gleichen Ergebnisse liefern. Dies soll mittels Vergleich der Normalspannungen sowie dem Vergleich der Schubflüsse, die mit den jeweiligen Verfahren errechnet werden, gezeigt werden. Für ein effizientes Arbeiten und auf Wunsch der Betreuer entschieden wir uns die Programmierung mit der Software "Mathematica" in Zusammenarbeit beider Studentinnen durchzuführen. Dies sollte die Fehleranfälligkeit reduzieren, nach dem Motto "Vier Augen sehen mehr als zwei". Außerdem lernte dadurch jede das Verfahren der anderen kennen, was für einen Vergleich unerlässlich ist.

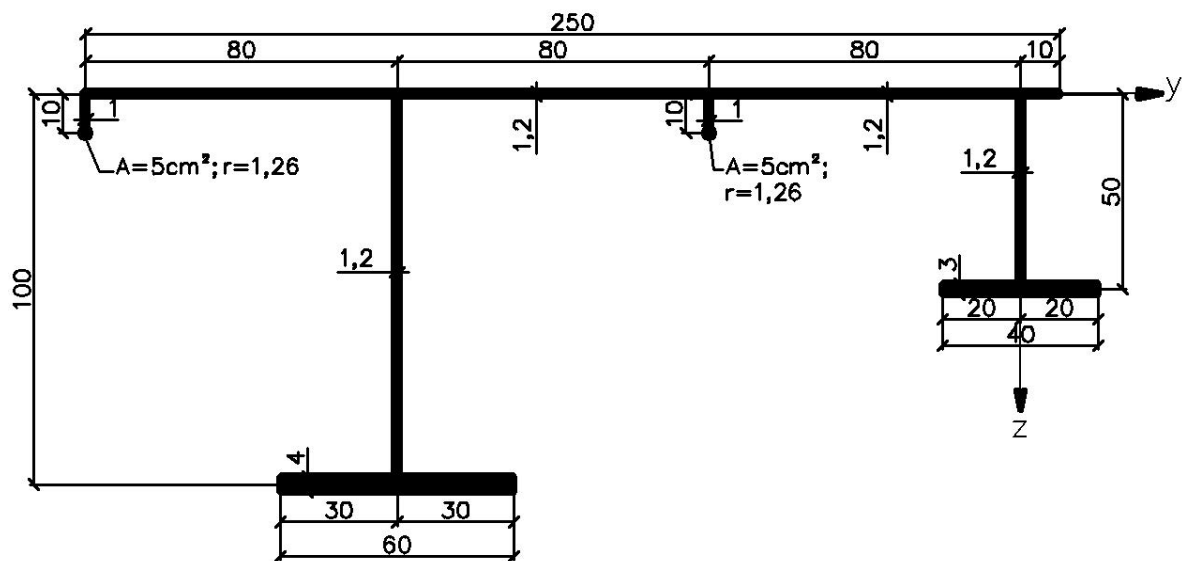


## 2. FUßGÄNGERSTEG

### 2.1 Querschnitt und statisches System

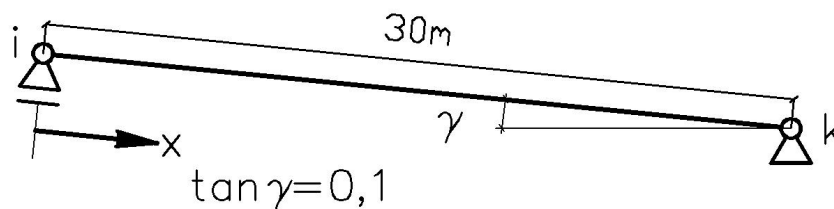
Der Querschnitt ist aus 12 einzelnen Blechen zusammengesetzt, asymmetrisch und offen.

Das Deckblech ist mit T-Steifen, deren Gurte für die Berechnung als Punktfächen idealisiert sind, ausgesteift und liegt auf zwei Stegblechen unterschiedlicher Höhe. Die beiden Stegbleche sind jeweils mit einem Untergurt versehen.



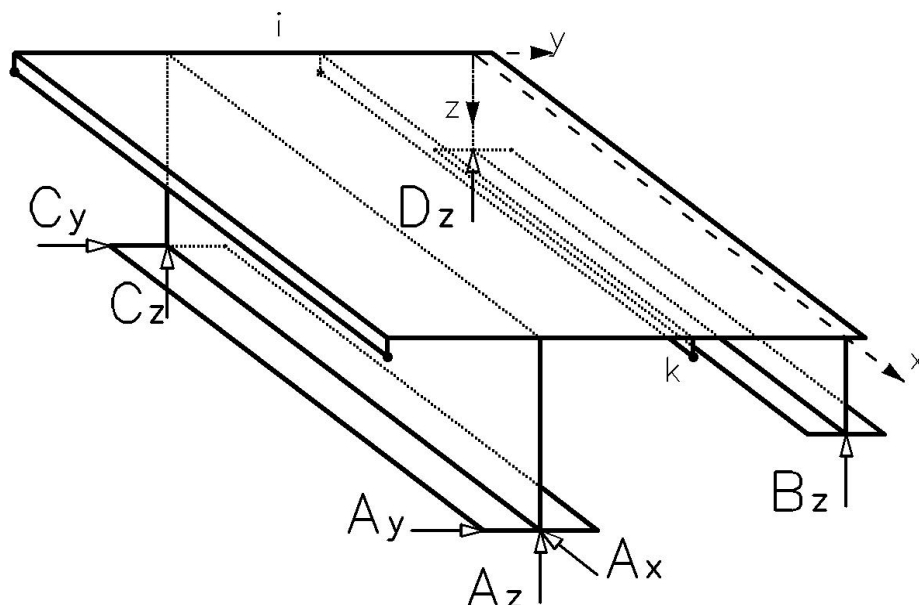
**Abbildung 2: Querschnitt des Fußgängerstegs; alle Längen sind in cm angegeben.**

Zur Modellierung des statischen Systems für den Fußgängersteg kann sowohl in y- als auch in z-Richtung ein Einfeldbalken herangezogen werden. Der Anfangspunkt der Brücke ist in Richtung der Stablängsachse verschieblich gelagert.



**Abbildung 3: Einfeldbalken**

Die vier Auflager des Fußgängersteges haben insgesamt sieben Wertigkeiten, damit ist das System einfach statisch unbestimmt.



**Abbildung 4: Auflagerkräfte der Brücke**

Auflagerreaktionen:

In negative x-Richtung wirkend:  $A_x$

In y-Richtung wirkend:  $A_y, C_y$

In negative z-Richtung wirkend:  $A_z, B_z, C_z, D_z$

## 2.2 Übersicht der Lastfälle

### 2.2.1 Lastfall 1: Eigengewicht mit Aufbau

Das Eigengewicht mit Aufbau wirkt als ständige Flächenlast auf dem Deckblech. Ihre Resultierende greift nicht im Schwerpunkt des Querschnittes an, sondern in Deckblechmitte.

$$\gamma_G = 1,35 \text{ (Teilsicherheitsfaktor)} \quad (2.1)$$

$$g_k^F = 6,00 \text{ kN/m}^2 \quad (2.2)$$

$$g_{Ed}^F = g_k \gamma_G = 8,10 \text{ kN/m}^2 \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Lastfall 2: Nutzlast

Die Nutzlast ist eine veränderliche Flächenlast und wirkt auf dem Deckblech.

$$\gamma_Q = 1,35 \text{ (Teilsicherheitsfaktor)} \quad (2.4)$$

$$q_k^F = 5,00 \text{ kN/m}^2 \quad (2.5)$$

$$q_{Ed}^F = q_k \gamma_Q = 6,75 \text{ kN/m}^2 \quad (2.6)$$

### 2.2.2.1 Lastfall 2a: Nutzlast auf dem gesamten Deckblech

Die resultierende Linienlast aus der durchgehenden Nutzlast wirkt in Deckblechmitte.

### 2.2.2.2 Lastfall 2b: Nutzlast über dem kurzen Steg

Für diesen Lastfall ist jene Lasteinwirkungsfläche gesucht, durch die die Durchbiegung des kurzen Steges in z-Richtung maximal wird. Diese Einflussbreite soll mit einer Linienlast ( $q=1\text{kN/m}$ ) über dem kurzen Steg ermittelt werden.

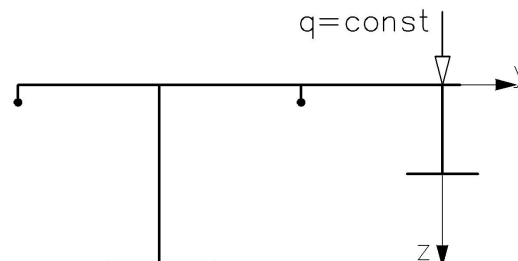


Abbildung 5: Laststellung für die Linienlast zur Ermittlung der Einflussbreite für Lastfall 2b

### 2.2.2.3 Lastfall 2c: Nutzlast über dem langen Steg

Für diesen Lastfall ist jene Lasteinwirkungsfläche gesucht, durch die die Durchbiegung des langen Steges in z-Richtung maximal wird. Diese Einflussbreite soll mit einer Linienlast ( $q=1\text{kN/m}$ ) über dem langen Steg ermittelt werden.

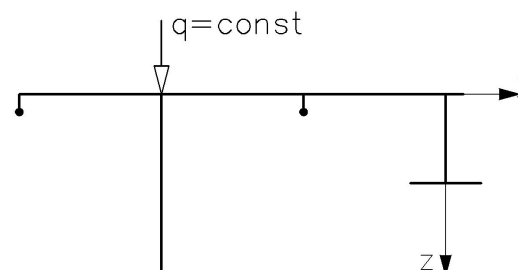


Abbildung 6: Laststellung für die Linienlast zur Ermittlung der Einflussbreite für Lastfall 2c

### 2.2.3 Lastfall 3: Wind

Die Windlast wirkt als resultierende Linienlast auf der Höhe des Deckblechs in y-Richtung.

$$Y_Q = 1,00 \text{ (Teilsicherheitsfaktor)} \quad (2.7)$$

$$w_k = \pm 3,00 \text{ kN/m} \quad (2.8)$$

$$w_{Ed} = w_k Y_Q = \pm 3,00 \text{ kN/m} \quad (2.9)$$

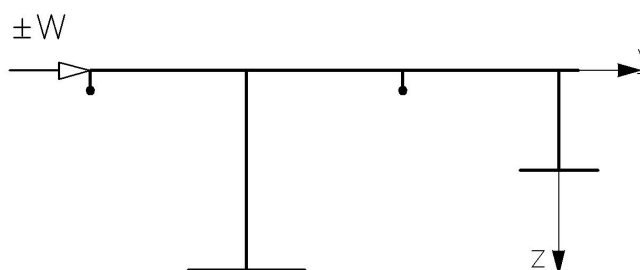


Abbildung 7: Laststellung für Lastfall 3

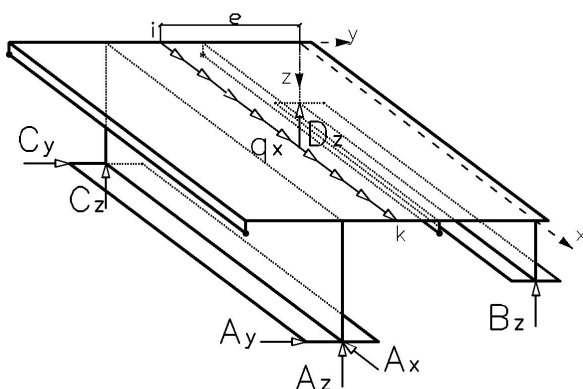
## 2.3 Aufteilung der Einwirkung in ihre Komponenten

Aufgrund der Neigung des Fußgängerstegs ist es zur Berechnung notwendig, die in Vertikalrichtung wirkenden Einflusskräfte in ihre x- und z-Komponenten aufzuteilen.

Die Einwirkung Wind wirkt ausschließlich in y-Richtung. Außer im Lastfall Wind gibt es bei dem vorliegenden, behandelten Beispiel keine y-Komponenten aus Einwirkungen.

$g_{Ed}$  steht im Folgenden repräsentativ für eine Linienlast in Vertikalrichtung<sup>1</sup>, was bedeutet, dass die Flächenlast  $g_{Ed}^F$  mit der Einflußbreite multipliziert wird.

### 2.3.1 Belastung in x-Richtung



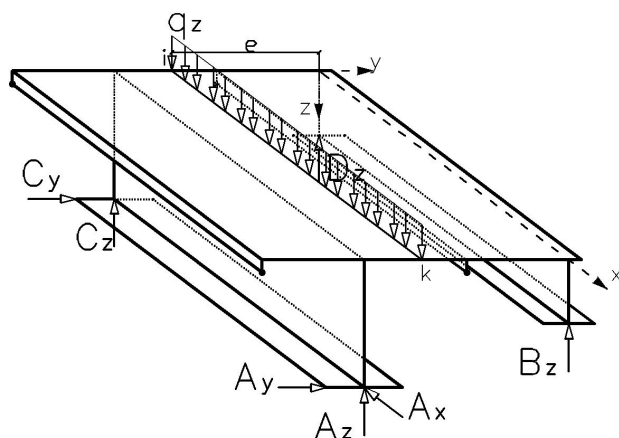
Belastungsanteil, der wie in der dargestellt, in Richtung der x-Achse des Systems wirkt:

$$q_x = g_{Ed} \sin \gamma$$

e...Abstand der Kräfteinleitungsstelle zum Bezugspunkt

Abbildung 8: System mit Belastung in x-Richtung

### 2.3.2 Belastung in z-Richtung



Belastungsanteil, der wie in der dargestellt, in Richtung der z-Achse des Systems wirkt:

$$q_z = g_{Ed} \cos \gamma$$

Abbildung 9: System mit Belastung in z-Richtung

## 3. THEORIE DER GEKOPPELTEN BERECHNUNGSMETHODE NACH [1]

### 3.1 Einleitung

Das gesamte Kapitel 3 basiert auf der Arbeit von *Rubin* [1] in Anhang A.

### 3.2 Allgemein

Bei der gekoppelten Berechnungsmethode ist es im Gegensatz zur üblichen Berechnung von Stäben mit offenem Querschnitt unter Beanspruchung von Längskraft, zweiachsiger Biegung und Wölbkrafttorsion nicht notwendig, den Schwerpunkt mit Hauptachsen für die Biegung und den Schubmittelpunkt für die Torsion zu bestimmen.

Die gekoppelte Berechnungsmethode ermöglicht von einem beliebigen, jedoch auf dem Querschnitt liegenden Bezugspunkt 0 mit frei wählbaren, orthogonalen Querschnittsachsen  $y$  und  $z$  auszugehen.

Für diesen Bezugspunkt 0 und seine Achsen werden sowohl der allgemeine Dehnungs- als auch Normalspannungszustand im Querschnitt mit vier Grundzuständen ausgedrückt. Die vier Dehnungszustände sind mit den Schnittgrößen  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  und  $M_\omega$  gekoppelt, weshalb Schwerpunkt, Hauptachsen und Schubmittelpunkt für die Berechnung weiterhin nicht nötig sind.

Aus diesen Zusammenhängen wird die Übertragungsbeziehung entwickelt, welche das Tragverhalten eines Stabes vollständig beschreibt. Allgemein hat der Zustandsvektor 14 Komponenten (7 Verschiebungs- und 7 Schnittgrößen). Wird die Übertragungsbeziehung für  $x=l$  formuliert, kann man daraus für den Einzelstab alle Zustandsgrößen am Stabanfang und Stabende errechnen. Anschließend ist es möglich, für jede beliebige Schnittstelle  $0 \leq x \leq l$  nach Neuformulierung der Übertragungsbeziehung für die entsprechende Stelle  $x$ , die Zustandsgrößen zu bestimmen.

Die Normal- und Schubspannungen lassen sich nun für jeden beliebigen Punkt im Querschnitt unter Betrachtung der resultierenden Belastung formulieren.

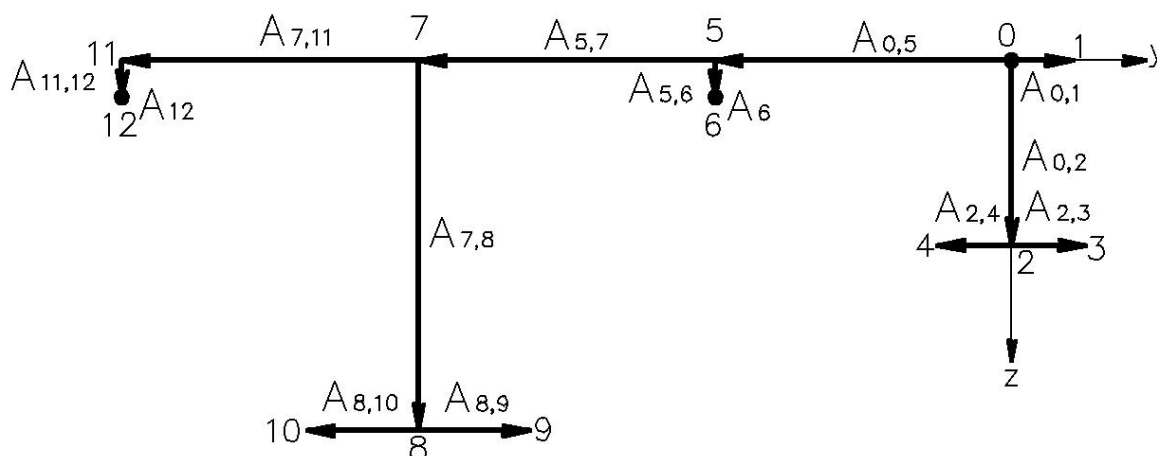
Die Berechnung erfolgt mit Hilfe von Matrizen, deren Elemente nach einfachen Formeln bestimmt werden können. Es empfiehlt sich für diese Berechnung ein Rechenprogramm zu verwenden. Jedoch ist es möglich das Gleichungssystem so zu lösen, dass jeweils eine Gleichung mit nur einer Unbekannten vorliegt.

### 3.3 Annahmen

Unter folgenden Voraussetzungen ist das „Gekoppelte Berechnungsverfahren“ anwendbar:

- § Der Querschnitt ist über die Stablänge konstant.
- § Der Querschnitt ist offen und besteht aus geraden, dünnwandigen Blechabschnitten; deren Anzahl und die Form der Verzweigungen sind beliebig.
- § Querkraft- und Wölbkraftschubverformungen werden vernachlässigt.
- § Die einzelnen Blechabschnitte bleiben eben (*Wagner-Hypothese*).
- § Der Querschnitt bleibt formtreu.
- § Es wird Elastizitätstheorie I. Ordnung angewendet.
- § Als Einwirkungen werden (gemäß einem beliebigen Polynom) veränderliche Streckenlasten, Streckentorsionsmomente und Einzeleinwirkungen berücksichtigt.
- § Es werden nur Querschnitte mit Verwölbung betrachtet; der Sonderfall eines wölb-freien Querschnitts (bei dem drei Bleche in einem Knoten verbunden sind) wird nicht betrachtet.

### 3.4 Allgemeine Berechnung des Fußgängersteges



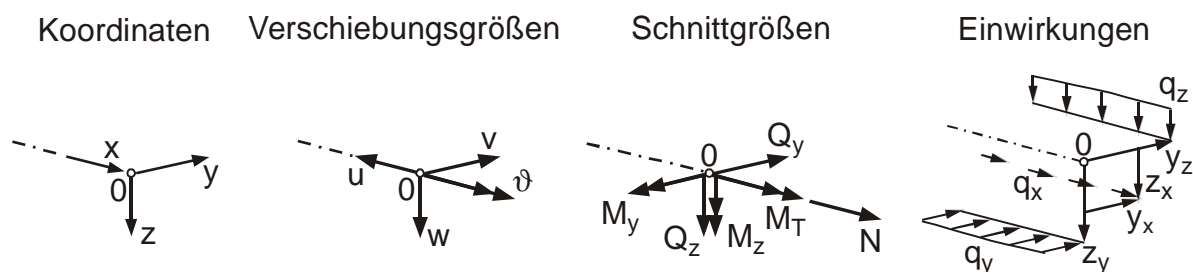
**Abbildung 10:** Betrachteter Querschnitt mit Bezugspunkt 0 und Achsen  $y$  und  $z$ , Blickrichtung entgegen der  $x$ -Achse.

Die **Abbildung 10** zeigt den aus 12 Blechen und 2 Punktflächen ( $A_6$  und  $A_{12}$ ) bestehenden Querschnitt des Fußgängerstegs, für den die zur Berechnung erforderlichen Matrizen und Formeln angegeben werden. Die Wahl des Bezugspunkts 0 und der Achsen  $y$  und  $z$  erfolgte willkürlich.

Die Knotenpunkte und Blechenden werden mit  $f$  und  $g$  ( $0,1,2,\dots$ ) bezeichnet. Daraus ergeben sich für auf Knoten bezogene Größen ein und auf Bleche bezogene Größen zwei Indi-

zes, z.B.  $A_{fg}(= A_{gr})$  als Fläche für das Blech fg. Die Rechenrichtung für Wölbordinaten  $\omega$  und Schubflüsse  $T$  ist durch die Pfeile im Querschnitt dargestellt, sie sind vom Bezugspunkt nach außen gerichtet.

### 3.4.1 Verschiebungsgrößen, Schnittgrößen und Einwirkungen



**Abbildung 11: Koordinaten, Verschiebungen, Schnittgrößen und Einwirkungen**

Die positiven Richtungen der x-Achse(=Stabachse), y- und z- Achse, der Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und des Torsionsdrehwinkels  $\vartheta$ , der Schnittgrößen  $N$ ,  $M_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_z$ ,  $Q_y$  und  $M_T$  sowie der Streckenlasten  $q_x$ ,  $q_y$  und  $q_z$ , die einen nach einem beliebigen Polynom veränderlichen Verlauf haben können, sind in **Abbildung 11** dargestellt.

Die Exzentrizitäten  $y_x$ ,  $z_x$ ,  $y_z$  und  $z_y$  sind ebenfalls abgebildet und werden als konstant über die gesamte Stablänge angenommen.

Für die ganze Berechnung gilt, dass alle Größen auf den Punkt 0 und die Achsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  bezogen sind.

### 3.4.2 Berechnung der Spannungen $\sigma_f$ aus den Verschiebungsgrößen $u$ , $w$ , $v$ und $\vartheta$ mit Hilfe der Matrix **A**

Es wird vereinbart:

- § Bezeichnungen für eine Matrix sind fett und unterstrichen, z.B. **A**.
- § Formänderungsgrößen und Verschiebungsgrößen mit Querstrich (oben) sind E-fach, z.B.  $\bar{w} = Ew$ .
- § Ableitungen nach  $x$  werden mit Strich versehen, z.B.  $du / dx = u'$ .

Als Formänderungsgrößen, die den Dehnungs- und Normalspannungszustand im Querschnitt vollständig beschreiben, werden definiert:

$$\kappa_1 = -\bar{u}' \quad (3.1)$$

$$\kappa_2 = -\bar{w}'' \quad (3.2)$$

$$\kappa_3 = -\bar{v}'' \quad (3.3)$$

$$\kappa_4 = -\bar{\vartheta}'' \quad (3.4)$$

Als zugehörige Matrix wird vereinbart:

$$\underline{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa'_1 \\ \kappa_2 & \kappa'_2 \\ \kappa_3 & \kappa'_3 \\ \kappa_4 & \kappa'_4 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Weiters wird als Spannungsmatrix definiert:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma'_0 \\ \sigma_1 & \sigma'_1 \\ \sigma_2 & \sigma'_2 \\ \sigma_3 & \sigma'_3 \\ \sigma_4 & \sigma'_4 \\ \sigma_5 & \sigma'_5 \\ \sigma_6 & \sigma'_6 \\ \sigma_7 & \sigma'_7 \\ \sigma_8 & \sigma'_8 \\ \sigma_9 & \sigma'_9 \\ \sigma_{10} & \sigma'_{10} \\ \sigma_{11} & \sigma'_{11} \\ \sigma_{12} & \sigma'_{12} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Die Ableitungen  $\kappa'_i$  und  $\sigma'_i$  werden zur Berechnung der Schubflüsse bzw. Schubspannungen benötigt.

Die Matrix  $\underline{\sigma}$  berechnet sich aus der Matrix  $\underline{\kappa}$  wie folgt:

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\kappa} \quad (3.7)$$

Diese Gleichung beinhaltet eine rein kinematische Beziehung (mit E-Modul erweitert).

Für Matrix  $\underline{\mathbf{A}}$  gilt:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & y_0 & \omega_0 \\ 1 & z_1 & y_1 & \omega_1 \\ 1 & z_2 & y_2 & \omega_2 \\ 1 & z_3 & y_3 & \omega_3 \\ 1 & z_4 & y_4 & \omega_4 \\ 1 & z_5 & y_5 & \omega_5 \\ 1 & z_6 & y_6 & \omega_6 \\ 1 & z_7 & y_7 & \omega_7 \\ 1 & z_8 & y_8 & \omega_8 \\ 1 & z_9 & y_9 & \omega_9 \\ 1 & z_{10} & y_{10} & \omega_{10} \\ 1 & z_{11} & y_{11} & \omega_{11} \\ 1 & z_{12} & y_{12} & \omega_{12} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$



Die Matrixglieder sind Längsverschiebungen der Querschnittspunkte  $f$  in  $x$ -Richtung, und zwar die der 1. Spalte aus  $u = -1$ , die der 2. Spalte aus  $w' = -1$ , die der 3. Spalte aus  $v' = -1$  und jene der 4. Spalte aus  $\vartheta' = -1$ , das heißt, die Glieder  $\omega_f$  sind die üblichen Einheitsverwölbungen. Diese können rekursiv mit  $\omega_0 = 0$  beginnend in Pfeilrichtung fortschreitend berechnet werden aus:

$$\omega_g = \omega_f + z_f y_g - z_g y_f \quad (3.9)$$

Für den Querschnitt des Fußgängerstegs bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 = \omega_2 = \omega_5 = \omega_7 = \omega_{11} = 0 \\ \omega_3 &= z_2 y_3 - z_3 y_2 \quad (y_2 = 0) \\ \omega_4 &= z_2 y_4 - z_4 y_2 \quad (y_2 = 0) \\ \omega_6 &= z_5 y_6 - z_6 y_5 \quad (z_5 = 0) \\ \omega_8 &= z_7 y_8 - z_8 y_7 \quad (z_7 = 0) \\ \omega_9 &= \omega_8 + z_8 y_9 - z_9 y_8 \\ \omega_{10} &= \omega_8 + z_8 y_{10} - z_{10} y_8 \\ \omega_{12} &= \omega_{11} + z_{11} y_{12} - z_{12} y_{11} \quad (z_{11} = 0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.4.3 Berechnung der Knotenkräfte $F_f$ aus den Spannungen $\sigma_f$ mit Hilfe der Matrix $\underline{\mathbf{B}}$

Die Knotenkräfte  $F_f$  ersetzen den Normalspannungszustand im Querschnitt statisch gleichwertig. Für den allgemeinen Abschnitt  $fg$  lauten die Knotenkräfte an den Enden  $f$  bzw.  $g$ :

$$F_{fg} = \left( \frac{\sigma_f}{3} + \frac{\sigma_g}{6} \right) \cdot A_{fg} \quad (3.11)$$

$$F_{gf} = \left( \frac{\sigma_g}{3} + \frac{\sigma_f}{6} \right) \cdot A_{fg} \quad (3.12)$$

Die Summe der am Knoten  $f$  vorhandenen Kräfte beträgt:

$$F_f = \sum_g F_{fg} \quad (3.13)$$

$$\text{daraus erhält man: } \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.14)$$

Die Matrix  $\underline{\mathbf{F}}$  ist wie folgt definiert:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} F_0 & F'_0 \\ F_1 & F'_1 \\ F_2 & F'_2 \\ F_3 & F'_3 \\ F_4 & F'_4 \\ F_5 & F'_5 \\ F_6 & F'_6 \\ F_7 & F'_7 \\ F_8 & F'_8 \\ F_9 & F'_9 \\ F_{10} & F'_{10} \\ F_{11} & F'_{11} \\ F_{12} & F'_{12} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Die Matrix  $\underline{\mathbf{B}}$  ist quadratisch und symmetrisch. Die Nebendiagonalglieder auf der Zeile  $f$  und Spalte  $g$  betragen  $\frac{A_{fg}}{6}$ , wenn  $A_{fg}$  existiert, das heißt, wenn  $f$  und  $g$  Endpunkte ein und desselben Blechstreifens sind, andernfalls ist  $A_{fg} = 0$  zu setzen. Die Hauptdiagonalglieder  $\frac{A_{ff}}{3}$  ergeben sich jeweils als doppelte Summe der Nebendiagonalglieder  $\frac{A_{fg}}{6}$  der Zeile  $f$ . Die Symmetrie folgt aus  $A_{fg} = A_{gf}$ .



### 3.4.4 Berechnung der Schnittgrößenmatrix $\underline{\mathbf{S}}$ aus der Matrix $\underline{\mathbf{k}}$ mit Hilfe der Matrix $\underline{\mathbf{D}}$

Schnittgrößenmatrix  $\underline{\mathbf{S}}$ :

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} N & N' \\ M_y & M'_y \\ M_z & M'_z \\ M_\omega & M'_\omega \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$M_\omega$  ist das auf den Punkt 0 bezogenen Wölbmoment.

Die Matrix  $\underline{\mathbf{S}}$  lässt sich zunächst aus der Matrix  $\underline{\mathbf{F}}$  wie folgt bestimmen:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} \quad (3.19)$$

Wobei  $\underline{\mathbf{A}}^T$  die Transponierte von  $\underline{\mathbf{A}}$  ist.

Aus den Gleichungen (3.7), (3.14) und (3.19) erhält man:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{k}} \quad (3.20)$$

und nach Inversion

$$\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \quad (3.21)$$

Die Matrix  $\underline{\mathbf{D}}$  berechnet sich aus:

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \quad (3.22)$$

Die Komponenten der Matrix  $\underline{\mathbf{D}}$  entsprechen den Querschnittswerten der konventionellen Formulierung:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} A_z & A_z & A_y & A_\omega \\ A_z & A_{zz} & A_{zy} & A_{z\omega} \\ A_y & A_{yz} & A_{yy} & A_{y\omega} \\ A_\omega & A_{\omega z} & A_{\omega y} & A_{\omega\omega} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Dies soll nur ein Hinweis sein - bei der ersten Anwendung dieses Verfahrens, ist das eine gute Zwischenkontrolle, da die Querschnittswerte leicht aus einem Querschnittsprogramm bzw. bei üblicherer Querschnittsform, aus Tabellen entnommen werden können - im weiteren spielen die Querschnittswerte als solche für dieses Berechnungsverfahren jedoch keine Rolle!

Da  $\underline{\mathbf{B}}$  symmetrisch ist, folgt aus Gleichung (3.22), dass auch  $\underline{\mathbf{D}}$  und damit  $\underline{\mathbf{D}}^{-1}$  symmetrisch sind. Bezeichnet man die Glieder von  $\underline{\mathbf{D}}^{-1}$  mit  $d_{...}$ , so lautet Gleichung (3.21) ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa'_1 \\ \kappa_2 & \kappa'_2 \\ \kappa_3 & \kappa'_3 \\ \kappa_4 & \kappa'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N & N' \\ M_y & M'_y \\ M_z & M'_z \\ M_\omega & M'_\omega \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Von besonderer Bedeutung in dieser Beziehung ist die Formel für  $\kappa_4$ , die wie folgt lautet:

$$\kappa_4 = -\bar{\vartheta}'' = d_{41}N + d_{42}M_y + d_{43}M_z + d_{44}M_\omega \quad (3.25)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass  $1/d_{44}$  gleich dem auf den Schubmittelpunkt bezogenen Wölbrägheitsmoment  $I_\omega$  gemäß üblicher Vorgehensweise ist, wo anstelle von Gleichung (3.25) die Beziehung  $-\bar{\vartheta}'' = M_\omega / (EI_\omega)$  gilt, wobei hier  $M_\omega$  auf den Schubmittelpunkt bezogen ist.

Wird die Matrix  $\underline{D}$  singular, liegt ein wölbfreier Querschnitt vor, und  $\underline{D}^{-1}$  existiert nicht.

### 3.4.5 Schnittgrößen

#### 3.4.5.1 Streckenlasten und Schnittgrößen

Zur Schreibweise wird zunächst vereinbart:

$$a_0 = 1; \quad a_j = \frac{x^j}{j!} \quad \text{für } j \geq 1, \quad a_j = 0 \quad \text{für } j < 0 \quad (3.26)$$

für die Ableitung bzw. Integration gilt:

$$\begin{aligned} a'_j &= a_{j-1} \\ \int_0^x a_j dx &= a_{j+1} \quad \text{für } j \geq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die allgemeine Formulierung für Streckenlasten kann aus [1] Gleichungen (27) und (28) entnommen werden. Die nähere Erklärung für veränderliche Lasten kann in dieser Arbeit entfallen, da auf den Fußgängersteg nur konstante Lasten einwirken und somit der Index  $j=0$  ist.

Folgende Streckenlasten sind vorhanden:

$$q_x = a_0 q_{x,0} \quad (3.28)$$

$$q_z = a_0 q_{z,0} \quad (3.29)$$

$$q_y = a_0 q_{y,0} \quad (3.30)$$

Aus den Exzentrizitäten ergibt sich ein Streckentorsionsmoment:

$$m_T = z_y q_y - y_z q_z \quad (3.31)$$

und Streckenbiegemomente:

$$m_y = -z_x q_x \quad (3.32)$$

$$m_z = -y_x q_x \quad (3.33)$$

sowie ein Streckenwölbmoment

$$m_\omega = -\omega_x q_x \quad (3.34)$$

wobei  $\omega_x$  die Wölbordinate des Angriffspunktes der Streckenlast  $q_x$  ist (s. **Abbildung 11**)

Dieser Angriffspunkt muss somit ein Punkt des Querschnitts sein; andernfalls

wäre  $\omega_x$  nicht definiert, die Aufgabe also nicht eindeutig.

Die positiven Richtungen von  $m_T$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  und  $m_\omega$  sind entgegengesetzt zu jenen der Schnittgrößen. Siehe **Abbildung 11**.

Die Ableitungen der Schnittgrößen für den Fußgängersteg mit konstanter Flächenlast lauten wie folgt:

$$N' = -q_x \quad (3.35)$$

$$Q'_z = -q_z \quad (3.36)$$

$$M'_y = Q_z + m_y \quad (3.37)$$

$$Q'_y = -q_y \quad (3.38)$$

$$M'_z = Q_y + m_z \quad (3.39)$$

$$M'_T = -m_T \quad (3.40)$$

$$M'_\omega = M_{Ts} + m_\omega \quad (3.41)$$

$M_{Ts}$  ist das sekundäre Torsionsmoment, welches sich ebenso wie  $M_\omega$  auf den Bezugspunkt 0 des Querschnitts bezieht.

Nach Integration der Gleichungen (3.35) bis (3.41) mit den Anfangswerten (Index i) als Integrationskonstanten erhält man:

$$N = N_i - a_1 q_x \quad (3.42)$$

$$Q_z = Q_{z,i} - a_1 q_z \quad (3.43)$$

$$M_y = M_{y,i} + a_1 Q_{z,i} - a_2 q_z + a_1 m_y \quad (3.44)$$

$$Q_y = Q_{y,i} - a_1 q_y \quad (3.45)$$

$$M_z = M_{z,i} + a_1 Q_{y,i} - a_2 q_y + a_1 m_z \quad (3.46)$$

$$M_T = M_{T,i} - a_1 m_T \quad (3.47)$$

### 3.4.5.2 Differenzialgleichung für $M_\omega$ und Lösung

Das Wölbmoment  $M_\omega$  wird durch lösen einer Differenzialgleichung bestimmt.

Für das primäre Torsionsmoment, welches unabhängig vom Bezugspunkt im Querschnitt ist, gilt:

$$M_{Tp} = G I_T \vartheta' = I_T^* \bar{\vartheta}' \quad (3.48)$$

mit

$$I_T^* = \frac{G}{E} I_T = \frac{I_T}{2(1+\nu)} \quad (\nu \text{ Querdehnzahl}) \quad (3.49)$$

$$I_T = \frac{1}{3} \sum A_{fg} t_{fg}^2 + \frac{1}{2} r_f^2 \cdot (A_6 + A_{12}) \quad (3.50)$$

dabei muss die Summe über alle Blechabschnitte fg mit der dazugehörigen Blechdicke gebildet werden.  $A_6$  und  $A_{12}$  sind die beiden vorhandenen Punktflächen,  $r_f$  ist deren Radius.

Für das sekundäre Torsionsmoment gilt gemäß Gleichung (3.41):

$$M_{Ts} = M'_\omega - m_\omega \quad (3.51)$$

$$M_{Tp} + M_{Ts} = M_T \quad (3.52)$$

liefert mit Gleichung (3.41):

$$M_{Tp} + M'_\omega = m_\omega + M_T \quad (3.53)$$

diese Gleichung abgeleitet und mit Gleichung (3.40) eingesetzt, ergibt:

$$M'_{Tp} + M''_\omega = m'_\omega - m_T \quad (3.54)$$

Nach Einsetzen von  $M'_{Tp}$  gemäß Gleichung (3.48),  $\bar{\vartheta}''$  gemäß Gleichung (3.25), den Gleichungen (3.42), (3.44) und (3.46) für  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  sowie  $m_T$  aus Gleichung (3.31) und  $m_\omega$  aus Gleichung (3.34) erhält man folgende Differenzialgleichung 2. Ordnung für  $M_\omega$ :

$$\begin{aligned}
M_{\omega}'' - KM_{\omega} &= a_{-1}m_{\omega} - m_T + \\
&+ I_T^* [d_{41}(N_i - a_1q_x) + d_{42}(M_{y,i} + a_1Q_{z,i} - a_2q_z + a_1m_y) + \\
&+ d_{43}(M_{z,i} + a_1Q_{y,i} - a_2q_y + a_1m_z)]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

mit der Konstanten

$$K = I_T^* d_{44} \tag{3.56}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung (Störfunktion) sind mit den Funktionen  $a_j$  ausschließlich Polynome vorhanden. Wegen  $a_{-1} = 0$  wird der Term  $a_{-1}m_{\omega}$  Null.

Die Differentialgleichung wird nach den Bautabellen für Ingenieure [3], gelöst. Die erforderlichen Lösungsfunktionen können nach 2 Möglichkeiten berechnet werden.

1. Möglichkeit mit hyperbolischen Funktionen:

$$b_0 = \cosh(\sqrt{K}x) \tag{3.57}$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K}x) \tag{3.58}$$

$$j \geq 2: b_j = \frac{1}{K}(b_{j-2} - a_{j-2}) \tag{3.59}$$

2. Möglichkeit mit Reihenformel:

für  $j = \max j$  und  $\max j-1$ :

$$b_j = a_j + \sum_{t=1}^{\infty} K^t a_{j+2t} \tag{3.60}$$

für  $j \leq \max j-2$ :

$$b_j = a_j + Kb_{j+2} \tag{3.61}$$

oder auch nach Reihenformel (3.60).

Trotz exakter Formeln können sich nach der 1. Möglichkeit bei sehr kleinen Argumenten  $\sqrt{K}x (\ll 1)$  und zunehmend bei höheren Indizes  $j$  ungenaue Ergebnisse aufgrund numerischer Probleme ergeben. Diese treten bei der Differenzbildung  $b_{j-2} - a_{j-2}$  auf, wobei die Werte dann nahezu gleich sind.

Im vorliegenden Beispiel treten keine numerischen Probleme auf, weshalb die Gleichungen (3.57) bis (3.59) zur Anwendung kommen.

Eigenschaften der Funktion  $b_j$ :



$$b'_j = b_{j-1}$$

$$\int_0^x b_j dx = b_{j+1} \quad \text{für } j \geq 0 \quad (3.62)$$

gemäß Gleichung (3.61) gilt:

$$b_{-1} = Kb_1 \quad (3.63)$$

Anfangswerte:

$$b_0(0) = 1, b_j(0) = 0 \quad \text{für } j \geq 1 \quad (3.64)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet nun nach [3]:

$$M_{\omega, \text{hom}} = C_0 b_0 + C_1 b_1 \quad (3.65)$$

mit den Konstanten:

$$C_0 = M_{\omega, i} \quad (3.66)$$

$$C_1 = M'_{\omega, i} = M_{T_s, i} + m_{\omega} \quad (3.67)$$

Für  $M_{T_s, i}$  wird eingesetzt:

$$M_{T_s, i} = M_{T, i} - M_{T_p, i} = M_{T, i} - I_T^* \bar{\vartheta}'_i \quad (3.68)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (3.65):

$$M_{\omega, \text{hom}} = M_{\omega, i} b_0 + M_{T, i} b_1 - I_T^* \bar{\vartheta}'_i b_1 + m_{\omega} b_1 \quad (3.69)$$

Die partikuläre Lösung  $M_{\omega, \text{part}}$  erhält man aus der rechten Seite der Differenzialgleichung (3.55), indem dort überall  $a_j$  durch  $b_{j+2}$  ersetzt wird. Konstanten (ohne  $a_j$ ) kann der Faktor  $a_0 = 1$  zugeordnet werden, welcher dann durch  $b_2$  zu ersetzen ist.

Nach der Überlagerung von homogenem und partikulären Lösungsanteil erhält man:

$$M_{\omega} = b_0 M_{\omega, i} + b_1 M_{T, i} - I_T^* b_1 \bar{\vartheta}'_i + b_1 m_{\omega} - b_2 m_T +$$

$$+ I_T^* [d_{41}(b_2 N_i - b_3 q_x) +$$

$$+ d_{42}(b_2 M_{y, i} + b_3 Q_{z, i} - b_4 q_z + b_3 m_y) +$$

$$+ d_{43}(b_2 M_{z, i} + b_3 Q_{y, i} - b_4 q_y + b_3 m_z)] \quad (3.70)$$

Mit  $M_{\omega}$ ,  $M_T$ ,  $M_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $Q_z$  und  $N$  liegen bereits alle für die Übertragungsbeziehung erforderlichen Schnittgrößen vor (Kapitel 3.5)

Nur primäres und sekundäres Torsionsmoment  $M_{Tp}$  bzw.  $M_{Ts}$  werden nicht als Komponenten des Zustandsvektors geführt, da für diese Größen keine Randbedingungen und auch keine korrespondierenden Verschiebungsgrößen existieren!

### 3.4.6 Verschiebungsgrößen

Nachdem die 7 Schnittgrößen des Zustandsvektors formuliert sind, lassen sich die 7 korrespondierenden (zugeordneten) Verschiebungsgrößen durch Einsetzen der Schnittgrößen aus bereits angeschriebenen Formeln bestimmen. Nachfolgend wird nur der jeweilige Herleitungsweg ohne Angabe der endgültigen Beziehung aufgezeigt; diese kann dann den Zeilen 1 bis 7 der Übertragungsbeziehung in Kapitel 3.5 entnommen werden.

Aus den Gleichungen (3.51) und (3.52) erhält man:

$$M_{Tp} = M_T - M_{Ts} = M_T - M'_\omega + m_\omega \quad (3.71)$$

Nach Einsetzen von  $M_{Tp}$  gemäß Gleichung (3.48) und von  $M_T$  nach Gleichung (3.47) ergibt sich:

$$\bar{\vartheta}' = \frac{1}{I_T^*} (M_{T,i} - a_1 m_T - M'_\omega + m_\omega) \quad (3.72)$$

Bei der Ableitung  $M'_\omega$  sind die Gleichungen (3.62) und (3.63) zu beachten.

Die endgültige Beziehung für  $\bar{\vartheta}'$  kann der 7. Zeile der Übertragungsbeziehung entnommen werden.

Die Integration von Gleichung (3.72) ergibt:

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_i + \frac{1}{I_T^*} (a_1 M_{T,i} - a_2 m_T - M_\omega + M_{\omega,i} + a_1 m_\omega) \quad (3.73)$$

Die endgültige Beziehung ist aus der 6. Zeile der Übertragungsbeziehung ersichtlich.

Eine besondere Bedeutung als Kontrollgleichung oder zusätzliche Bestimmungsgleichung erlangt Gleichung (3.73) für  $x = l$ . Diese lautet:

$$\bar{\vartheta}_k = \bar{\vartheta}_i + \frac{1}{I_T^*} (a_1 M_{T,i} - a_2 m_T - M_{\omega,k} + M_{\omega,i} + a_1 m_\omega) \quad (3.74)$$

Da für die Übertragungsbeziehung  $M_\omega$  in Gleichung (3.73) gemäß Gleichung (3.70) ersetzt wird, erscheinen vorstehende Gleichungen (3.73) bzw. (3.74) dort nicht mehr in dieser Form.

Insbesondere beim beidseitig gabelgelagerten Stab, welcher bei der gegebenen Aufgabe vorliegt, ermöglicht Gleichung (3.74) die direkte Bestimmung von  $M_{T,i}$ , weil  $\bar{\vartheta}_i = \bar{\vartheta}_k = 0$  gilt und  $M_{\omega,i}$  sowie  $M_{\omega,k}$  als eingeprägte Größen bekannt (i.d.R. null) sind.

Für die weiteren Verschiebungsgrößen werden folgende Gleichungen aus der Beziehung (3.24) benötigt:

$$\kappa_1 = -\bar{u}' = d_{11}N + d_{12}M_y + d_{13}M_z + d_{14}M_\omega \quad (3.75)$$

$$\kappa_2 = -\bar{w}'' = d_{21}N + d_{22}M_y + d_{23}M_z + d_{24}M_\omega \quad (3.76)$$

$$\kappa_3 = -\bar{v}'' = d_{31}N + d_{32}M_y + d_{33}M_z + d_{34}M_\omega \quad (3.77)$$

wobei  $d_{rs} = d_{sr}$  ist.

In vorstehenden Gleichungen werden die Schnittgrößen  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  und  $M_\omega$  eingesetzt; danach wird wie folgt integriert:

$$\bar{u} = \bar{u}_i + \int_0^x \bar{u}' dx \quad (3.78)$$

$$\bar{w}' = \bar{w}'_i + \Delta \bar{w}' \text{ mit } \Delta \bar{w}' = \int_0^x \bar{w}'' dx \quad (3.79)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_i + a_1 \bar{w}'_i + \int_0^x \Delta \bar{w}' dx \quad (3.80)$$

$$\bar{v}' = \bar{v}'_i + \Delta \bar{v}' \text{ mit } \Delta \bar{v}' = \int_0^x \bar{v}'' dx \quad (3.81)$$

$$\bar{v} = \bar{v}_i + a_1 \bar{v}'_i + \int_0^x \Delta \bar{v}' dx \quad (3.82)$$

Die endgültigen Beziehungen sind aus den Zeilen 1 bis 5 der Übertragungsbeziehung ersichtlich.

### 3.5 Übertragungsbeziehung

Die Übertragungsbeziehung für den Zustandsvektor  $\underline{Z}_x$  an der allgemeinen Stelle  $x$  des Sta-  
bes  $ik$  mit der Länge  $l$  hat folgende Form:

$$\underline{Z}_x = \underline{F}_{xi} \cdot \underline{Z}_i + \underline{Z}_x^0 \quad (3.83)$$



$$c_{rs,j} = c_{sr,j} = d_{rs} a_j + d_{r4} d_{s4} l_T^* b_{j+2} \quad (3.86)$$

$$c_{rs,j}^* = l_T^* c_{rs,j} \quad (3.87)$$

Damit können alle in den Gleichungen (3.84) und (3.85) vorkommenden Glieder bestimmt werden.

Speziell für  $r = 4$  oder  $s = 4$  kann auch folgende einfachere Formel angewendet werden:

$$c_{4s,j} = c_{s4,j} = d_{4s} b_j = d_{s4} b_j \quad (3.88)$$

Diese vereinfachte Form ergibt sich aus Gleichung (3.86) unter Beachtung der Gleichungen (3.56) und (3.61).

Die Übertragungsbeziehung für  $x=l$  lautet:

$$\underline{Z}_k = \underline{F}_{ki} \cdot \underline{Z}_i + \underline{Z}_k^0 \quad (3.89)$$

### 3.6 Berechnung der unbekanntenen Zustandgrößen an der Stelle $i$ und $k$ für einen gabelgelagerten einfeldrigen Stab aus der Übertragungsbeziehung (3.89)

An einem Stabende sind (unabhängig von der Lagerung stets) 7 Komponenten des Zustandsvektors bekannt und 7 unbekannt; konkret ist jeweils eine von zwei korrespondierenden Zustandgrößen bekannt, die andere unbekannt. Korrespondierende Größen sind  $\bar{\vartheta}'$  und  $M_\omega$ ,  $\bar{\vartheta}$  und  $M_T$ ,  $\bar{V}'$  und  $M_z$ ,  $\bar{V}$  und  $Q_y$ ,  $\bar{w}'$  und  $M_y$ ,  $\bar{w}$  und  $Q_z$  sowie  $\bar{u}$  und  $N$ .

Bei einem unverschieblichen Gabellager sind die Größen  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{\vartheta}$ ,  $M_\omega$ ,  $M_z$  und  $M_y$  bekannt, die übrigen (korrespondierenden) Größen unbekannt.

Grundsätzlich lassen sich für einen einfeldrigen Stab aus der Übertragungsbeziehung (3.89) mit 14 Gleichungen die jeweils 7 Unbekannten der Zustandsvektoren  $\underline{Z}_i$  und  $\underline{Z}_k$  bestimmen. Dabei kann in zwei Schritten vorgegangen werden:

Im ersten Schritt werden die 7 Unbekannten von  $\underline{Z}_i$  aus jenen 7 Gleichungen bestimmt, die durch die bekannten Zustandgrößen von  $\underline{Z}_k$  lösbar sind. Im zweiten Schritt erhält man aus den restlichen 7 Gleichungen die unbekanntenen Komponenten von  $\underline{Z}_k$ .

### 3.7 Verschiebungen $U$ , $W$ und $V$ an den Querschnittspunkten $f$

Die positiven Richtungen der Verschiebungen  $U$ ,  $W$  und  $V$  in den Querschnittspunkten  $f$  seien dieselben wie jene von  $u$ ,  $w$  und  $v$  im Bezugspunkt 0 gemäß **Abbildung 11**.

Als Matrix der Verschiebungen in den Querschnittspunkten  $f= 0, 1, 2 \dots$  wird definiert:

$$\underline{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} U_0 & W_0 & V_0 \\ U_1 & W_1 & V_1 \\ U_2 & W_2 & V_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{12} & W_{12} & V_{12} \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

Diese berechnen sich mit Hilfe der Matrix  $\underline{\mathbf{A}}$  gemäß Gleichung (3.8) aus:

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{w} & \bar{v} \\ \bar{w}' & 0 & \bar{\vartheta} \\ \bar{v}' & -\bar{\vartheta} & 0 \\ \bar{\vartheta}' & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{E} \quad (3.91)$$

### 3.8 Schubspannungen und Normalspannungen

Beim vorliegenden Lösungskonzept werden die Spannungen nicht getrennt für die einzelnen Schnittgrößen erhalten, sondern stets für den resultierenden Beanspruchungszustand.

Zusätzlich zu den Schnittgrößen des Zustandsvektors werden nun noch primäres

und sekundäres Torsionsmoment benötigt; hierfür gilt:

$$M_{Tp} = I_T^* \bar{\vartheta}' \quad (3.92)$$

$$M_{Ts} = M_T - M_{Tp} \quad (3.93)$$

Die Schubspannungen aus der primären Torsion betragen an den Blechrändern, wie üblich:

$$\tau_{fg} = \pm \frac{M_{Tp}}{I_T} t_{fg} \quad (3.94)$$

sie sind über die Dicke  $t_{fg}$  des Einzelbleches  $fg$  linear verteilt.

Alle weiteren Spannungen sind (als Näherung) über die Blechdicken jeweils konstant. Zu deren Berechnung wird zunächst die Formänderungsgrößenmatrix  $\underline{\mathbf{k}}$  nach Gleichung (3.21) bzw. (3.24) bestimmt aus:

$$\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \quad (3.95)$$

wobei  $\underline{\mathbf{S}}$  gemäß Gleichung (3.18) an der untersuchten Stelle  $x$  bekannt sein muss.

$N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  und  $M_w$  sind unmittelbar als Komponenten von  $\underline{Z}_x$  bekannt, während die Ableitungen  $N'$ ,  $M'_y$ ,  $M'_z$  und  $M'_w$  aus den Gleichungen (3.35), (3.37), (3.39) und (3.41)

über die Schnittgrößen  $Q_z$ ,  $Q_y$  und  $M_{TS}$  zu bestimmen sind.

Nach Gleichung (3.7) lautet dann die Spannungsmatrix:

$$\underline{\sigma} = \underline{A} \cdot \underline{\kappa}$$

womit die Normalspannungen an allen Querschnittspunkten  $f$  bekannt sind. Der Verlauf von  $\sigma$  ist zwischen benachbarten Punkten  $f$  und  $g$  jeweils linear.

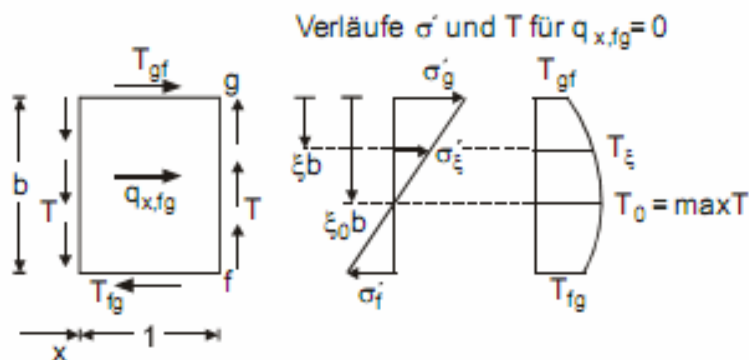
Die in der Matrix  $\underline{\sigma}$  enthaltenen  $\sigma'_f$  stellen die Ableitungen nach  $x$  dar und werden zur Berechnung der Schubflüsse  $T_{fg}$  und  $T_{gf}$  gemäß **Abbildung 12** benötigt. In dieser Abbildung sind für den Blechabschnitt  $fg$  mit der Länge 1 die Änderung der Normalspannungen  $\sigma'$  und die beiden Randschubflüsse  $T_{fg}$  und  $T_{gf}$  sowie eine gegebenenfalls vorhandene Längsstreckenlast  $q_{x,fg}$  im Abschnitt  $fg$  eingetragen.

Die zugehörige Gleichgewichtsbedingung ergibt:

$$T_{fg} = T_{gf} + \Delta T_{fg} \quad (3.96)$$

mit

$$\Delta T_{fg} = \frac{1}{2} (\sigma'_f + \sigma'_g) A_{fg} + q_{x,fg} \quad (3.97)$$

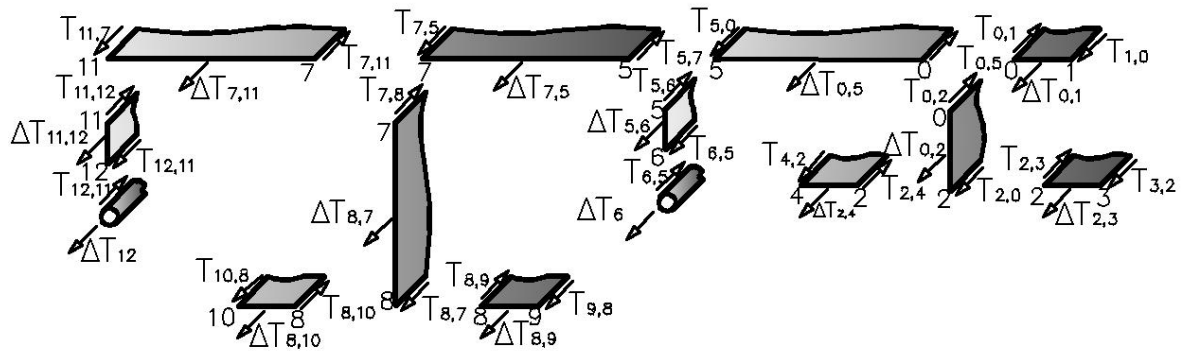


**Abbildung 12: Verläufe der Längsspannungsänderung  $\sigma'$  und der Schubkraft  $T$  am Element der Länge 1 des Einzelblechs  $fg$**

Die Gleichung (3.96) wird an den freien Rändern des Querschnitts mit  $T_{gf}=0$  beginnend entgegen der Pfeilrichtung **Abbildung 12** bis zum Bezugspunkt 0 fortschreitend angewendet, wobei sich an den Gabelungen die Schubflüsse addieren.

Im Querschnitt sind die Schubflüsse  $T$  in Richtung der Pfeile von **Abbildung 10** positiv.

Für den Brückenquerschnitt gilt also:



**Abbildung 13: positive Richtungen der Schubflüsse und der Änderung des Schubflusses an den Knoten**

In Gleichung (3.98) sind sie Schubflüsse und die Änderung des Schubflusses formuliert:

$$\begin{aligned}
 T_{1,0} &= T_{3,2} = T_{4,2} = T_{9,8} = T_{10,8} = 0 \\
 T_{0,1} &= \Delta T_{0,1} = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_0)A_{0,1} + q_{x,0,1} \\
 T_{2,3} &= \Delta T_{2,3} = \frac{1}{2}(\sigma'_2 + \sigma'_3)A_{2,3}, T_{2,4} = \Delta T_{2,4} = \frac{1}{2}(\sigma'_2 + \sigma'_4)A_{2,4} \\
 T_{2,0} &= T_{2,3} + T_{2,4} \\
 T_{0,2} &= T_{2,0} + \Delta T_{0,2} = T_{2,0} + \frac{1}{2}(\sigma'_2 + \sigma'_0)A_{0,2} \\
 T_{8,9} &= \Delta T_{8,9} = \frac{1}{2}(\sigma'_8 + \sigma'_9)A_{8,9} \\
 T_{8,10} &= \Delta T_{8,10} = \frac{1}{2}(\sigma'_8 + \sigma'_{10})A_{8,10} \\
 T_{8,7} &= T_{8,9} + T_{8,10} \\
 T_{7,8} &= T_{8,7} + \Delta T_{8,7} = T_{8,7} + \frac{1}{2}(\sigma'_8 + \sigma'_7)A_{7,8} \\
 T_{12,11} &= \Delta T_{12} = \sigma'_{12}A_{12} \\
 T_{11,12} &= T_{12,11} + \Delta T_{11,12} = T_{12,11} + \frac{1}{2}(\sigma'_{12} + \sigma'_{11})A_{11,12} \\
 T_{11,7} &= T_{11,12} \\
 T_{7,11} &= T_{11,7} + \Delta T_{7,11} = T_{11,7} + \frac{1}{2}(\sigma'_{11} + \sigma'_7)A_{7,11} + q_{x,7,11} \\
 T_{7,5} &= T_{7,8} + T_{7,11}, T_{6,5} = \Delta T_6 = \sigma'_6 A_6 \\
 T_{5,7} &= T_{7,5} + \Delta T_{7,5} = T_{7,5} + \frac{1}{2}(\sigma'_7 + \sigma'_5)A_{5,7} + q_{x,5,7} \\
 T_{5,6} &= T_{6,5} + \Delta T_{5,6} = T_{6,5} + \frac{1}{2}(\sigma'_5 + \sigma'_6)A_{5,6} \\
 T_{5,0} &= T_{5,7} + T_{5,6} \\
 T_{0,5} &= T_{5,0} + \Delta T_{0,5} = T_{5,0} + \frac{1}{2}(\sigma'_5 + \sigma'_0)A_{0,5} + q_{x,0,5}
 \end{aligned} \tag{3.98}$$



Kontrolle:

$$\sum \frac{\sigma'_f + \sigma'_g}{2} A_{fg} + q_x = 0 \quad (3.99)$$

wobei die Summe über alle Blechstreifen fg des Querschnitts zu nehmen ist und  $q_x$  die resultierende Längsstreckenlast bedeutet.

Eine weitere Kontrolle ist das Knotengleichgewicht, das immer erfüllt sein muss, wenn man, wie im betrachteten Beispiel entgegen den Pfeilrichtungen rechnet, kommt man von 3 verschiedenen Strängen zum Punkt 0; dort muss dann die Summe der Schubflüsse gleich Null sein.

$$T_{0,1} + T_{0,2} + T_{0,5} = 0 \quad (3.100)$$

Während  $\sigma$  und  $\sigma'$  im Bereich fg linear verteilt sind, verläuft T parabolisch. Die Gleichgewichtsbedingung für den Schnitt an der Stelle  $\xi$  b **Abbildung 12** mit dem Schubfluss  $T_\xi$  liefert:

$$T_\xi = T_{gf} + \left( \sigma'_g + \frac{\sigma'_f - \sigma'_g}{2} \xi \right) \xi A_{fg} \quad (3.101)$$

Haben  $\sigma'_f$  und  $\sigma'_g$  unterschiedliche Vorzeichen, so hat T an der Nullstelle von  $\sigma'$  einen Extremwert. Unter der Voraussetzung, dass  $q_{x,fg} = 0$  erhält man für den Ort und die Größe dieses Extremwertes:

$$\xi_0 = \frac{1}{1 - \sigma'_f / \sigma'_g} \quad (0 < \xi_0 < 1) \quad (3.102)$$

$$T_0 = T_{gf} + \frac{1}{2} \sigma'_g \xi_0 A_{fg} \quad (3.103)$$

Für die (über die Blechdicke t konstanten) Schubspannungen gilt:

$$\tau = \frac{T}{t} \quad (3.104)$$

### 3.9 Übergang zur konventionellen Formulierung

Nachfolgend wird gezeigt, dass mit Hilfe der Matrix **D** auch die Möglichkeit besteht, den Schwerpunkt S, die zugehörigen Hauptachsen, den Schubmittelpunkt M und die maßgebenden Querschnittswerte zu bestimmen.

Die Glieder der nach Gleichung (3.23) berechneten Matrix **D** haben folgende Bedeutung:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} A & A_z & A_y & A_\omega \\ A_z & A_{zz} & A_{zy} & A_{z\omega} \\ A_y & A_{yz} & A_{yy} & A_{y\omega} \\ A_\omega & A_{\omega z} & A_{\omega y} & A_{\omega\omega} \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

mit folgenden Integralen über die Querschnittsfläche:

$$A = \int dA \quad (3.106)$$

$$A_z = \int z dA \quad (3.107)$$

$$A_y = \int y dA \quad (3.108)$$

$$A_\omega = \int \omega dA \quad (3.109)$$

$$A_{zz} = \int z^2 dA \quad (3.110)$$

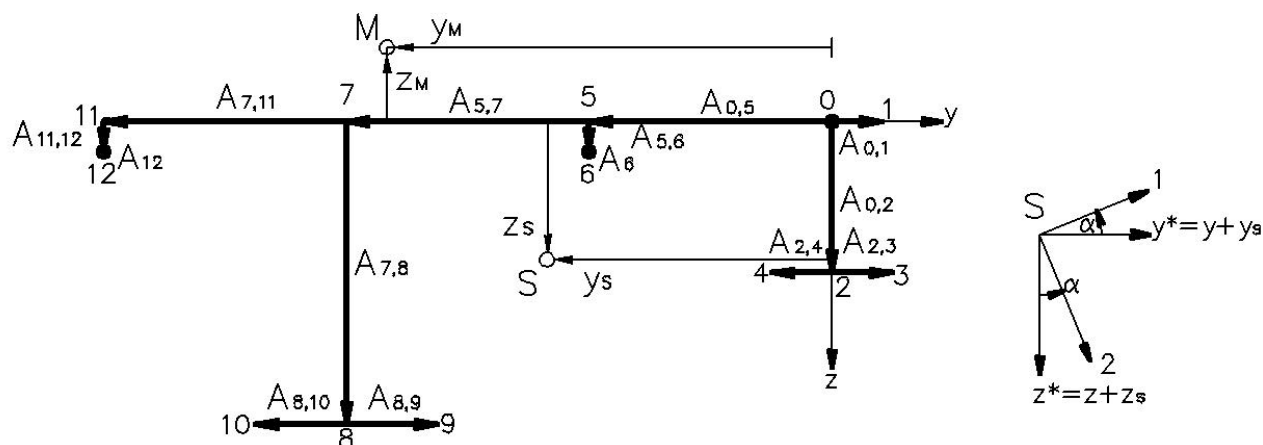
$$A_{zy} = A_{yz} = \int z y dA \quad (3.111)$$

$$A_{yy} = \int y^2 dA \quad (3.112)$$

$$A_{z\omega} = A_{\omega z} = \int z \omega dA \quad (3.113)$$

$$A_{y\omega} = A_{\omega y} = \int y \omega dA \quad (3.114)$$

$$A_{\omega\omega} = \int \omega^2 dA \quad (3.115)$$



**Abbildung 14: Querschnitt mit Lage des Schwerpunktes S, des Schubmittelpunktes M und der Hauptachsen 1 und 2**

Die Normierung ergibt folgende Formeln für die Lage von S, M und die Hauptachsen 1 und 2 gemäß **Abbildung 14** und für die maßgebenden Querschnittswerte:

$$z_s = \frac{A_z}{A} \quad (3.116)$$

$$y_S = \frac{A_y}{A} \quad (3.117)$$

$$I_{y^*} = A_{zz} - A_z z_S \quad (3.118)$$

$$I_{y^*z^*} = A_{zy} - A_y z_S \quad (3.119)$$

$$I_{z^*} = A_{yy} - A_y y_S \quad (3.120)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{y^*z^*}}{I_{y^*} - I_{z^*}} \quad (3.121)$$

Hauptträgheitsmomente:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array} \right\} = \frac{I_{y^*} + I_{z^*}}{2} \pm \frac{I_{y^*z^*}}{\sin 2\alpha} \quad (3.122)$$

Gleichungssystem für  $y_M$  und  $z_M$

$$\begin{pmatrix} I_{y^*} & -I_{y^*z^*} \\ -I_{y^*z^*} & I_{z^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_M \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{z\omega} + A_\omega z_S \\ A_{y\omega} - A_\omega y_S \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

Wölbordinate im Bezugspunkt 0:

$$\omega_0 = \frac{1}{A} (-A_\omega + A_y z_M - A_z y_M) \quad (3.124)$$

Wölbträgheitsmoment:

$$I_\omega = A_\omega \omega_0 + A_{z\omega} y_M - A_{y\omega} z_M + A_{\omega\omega} \quad (3.125)$$

Gemäß **Abbildung 14** hat der Drehwinkel zwischen den Achsen  $y^*$ ,  $z^*$  und den Hauptachsen 1, 2 die Größe  $\alpha$  (im Gegenuhrzeigersinn positiv).

## 4. ANWENDUNG DER GEKOPPELTEN BERECHNUNGSMETHODE FÜR EINEN FUßGÄNGERSTEG

### 4.1 Vorwerte:

In Kapitel 4.1.1 und 4.1.2 angegebene Werte gelten für jeden in dieser Arbeit behandelten Lastfall. Als Einheiten werden kN und cm verwendet

$$\gamma = 5,71^\circ$$

#### 4.1.1 Querschnittsabhängige Beziehungen: Matrix $\underline{A}$ , $\underline{B}$ , $\underline{D}$ sowie die Konstante $K$ und die Torsionsträgheitsmomente $I_T$ und $I_T^*$

Werte aus der Geometrie des Querschnitts werden in [cm] angegeben:

Nach Gleichung (3.8) ergibt sich für  $\underline{A}$ :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 50 & 20 & 1000 \\ 1 & 50 & -20 & -1000 \\ 1 & 0 & -80 & 0 \\ 1 & 10 & -80 & 800 \\ 1 & 0 & -160 & 0 \\ 1 & 100 & -160 & 16000 \\ 1 & 100 & -130 & 19000 \\ 1 & 100 & -190 & 13000 \\ 1 & 0 & -240 & 0 \\ 1 & 10 & -240 & 2400 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Die Blechdicken  $t_{fg}$  und die daraus hervorgehenden Einzelflächen  $A_{fg}$  errechnen sich aus:

fg	0,1	1,2	2,3	2,4	0,5	5,6	5,7	7,8	8,9	8,10	7,11	11,12	
$t_{fg}$	1,2	1,2	3,0	3,0	1,2	1,0	1,2	1,2	4,0	4,0	1,2	1,0	cm
$b_{fg}$	10	50	20	20	80	10	80	100	30	30	80	10	cm
$A_{fg}$	12	60	60	60	96	10	96	120	120	120	96	10	cm <sup>2</sup>

**Tabelle 1: Dicke, Breite und Querschnittsfläche der einzelnen Bleche**

f	6	12	
$r_f$	1,26	1,26	cm
$A_f$	5	5	cm <sup>2</sup>

**Tabelle 2: Radius und Querschnittsfläche der Punktfächen**

Die richtigen Teilflächen in Gleichung (3.16) eingesetzt, ergibt:

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 56 & 2 & 10 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 67,3 & 1,67 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,67 & 8,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 104 & 20 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 120 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 35,3 & 1,67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,67 & 8,33 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Zur Berechnung der Schnittgrößen, wird die Matrix  $\underline{\mathbf{D}}$  nach Gleichung (3.22) verwendet:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 870 & 37700 & -96900 & 4832000 \\ 37700 & 3151666,67 & -4832000 & 448266666,67 \\ -96900 & -4832000 & 15794000 & -766400000 \\ 4832000 & 448266666,67 & -766400000 & 7249333333,3 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

für die Matrix  $\underline{\mathbf{D}}^{-1}$  ergibt sich:

$$\underline{\mathbf{D}}^{-1} = \begin{pmatrix} 7,37830 \times 10^{-3} & -1,41610 \times 10^{-4} & 4,22390 \times 10^{-5} & 8,30407 \times 10^{-7} \\ -1,41610 \times 10^{-4} & 5,35876 \times 10^{-6} & -7,78778 \times 10^{-7} & -3,19305 \times 10^{-8} \\ 4,22390 \times 10^{-5} & -7,78778 \times 10^{-7} & 3,72205 \times 10^{-7} & 5,935157 \times 10^{-9} \\ 8,30407 \times 10^{-7} & -3,19305 \times 10^{-8} & 5,935157 \times 10^{-9} & 2,18635 \times 10^{-10} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Nach Gleichung (3.50) erhält man:

$$I_T = 1885,02 \quad (4.5)$$

Gleichung (3.49) liefert:

$$I_T^* = 725,01 \quad (4.6)$$

Die Konstante K beträgt nach Gleichung (3.56)

$$K = I_T^* \cdot d_{4,4} = 1,58512 \times 10^{-7} \quad (4.7)$$

#### 4.1.2 Schnittstellenabhängige Werte

Der Rechengang für die Zustandsgrößen wird später für die Stelle  $x = 0$ ,  $x = 3000$  und  $x = 500$  gezeigt, daher werden für diese Stellen die Reihenwerte angegeben.

Aus Gleichung (3.26) ergeben sich die erforderlichen  $a_j$  - Werte:

	0	500	3000	
$a_0$	1	1	1	-
$a_1$	0	500	$3 \times 10^3$	cm
$a_2$	0	$1,25 \times 10^5$	$4,5 \times 10^6$	cm <sup>2</sup>
$a_3$	0	$2,0833 \times 10^7$	$4,5 \times 10^9$	cm <sup>3</sup>
$a_4$	0	$2,604167 \times 10^9$	$3,375 \times 10^{12}$	cm <sup>4</sup>

Tabelle 2:  $a_j$  - Werte

Die nötigen  $b_j$ -Werte ergeben sich aus Gleichungen (3.57) bis (3.59):

	0	500	3000	
$b_0$	1	1,0199	1,8022	-
$b_1$	0	503,3090	3765,9500	cm
$b_2$	0	$1,25413 \times 10^5$	$5,06108 \times 10^6$	cm <sup>2</sup>
$b_3$	0	$2,08747 \times 10^7$	$4,83211 \times 10^9$	cm <sup>3</sup>
$b_4$	0	$2,60761 \times 10^9$	$3,53965 \times 10^{12}$	cm <sup>4</sup>
$b_5$	0	$2,60663 \times 10^{11}$	$2,09516 \times 10^{15}$	cm <sup>5</sup>
$b_6$	0	$2,17168 \times 10^{13}$	$1,03871 \times 10^{18}$	cm <sup>6</sup>

Tabelle 3:  $b_j$ -Werte

Die Matrixglieder  $c_{rs,j}$  bzw.  $c_{rs,j}^*$  für die Übertragungsmatrix  $\underline{F}_{xi}$  und die Matrix  $\underline{F}_x^0$  des Lastvektor  $\underline{Z}_x^0$  ergeben sich nach den Gleichungen (3.86) und (3.87). Sie sind für die Stellen  $x = 500$  und  $x = l=3000$  in den betreffenden Matrizen angegeben.

Die Stabkennzahl  $\varepsilon = \sqrt{K} \cdot x$  beträgt für  $x = 3000$ : 1,194.

## 4.2 Randbedingungen

### 4.2.1 Randbedingungen zufolge Gesamtbelastung

Anfangspunkt i:

$$w_i = 0 \quad (4.8)$$

$$v_i = 0 \quad (4.9)$$

$$\vartheta_i = 0 \quad (4.10)$$

$$N_i = 0 \quad (4.11)$$

$$M_{y,i} = 0 \quad (4.12)$$

$$M_{z,i} = 0 \quad (4.13)$$

$$M_{\omega,i} = 0 \quad (4.14)$$

Endpunkt k:

$$w_k = 0 \quad (4.15)$$

$$v_k = 0 \quad (4.16)$$

$$\vartheta_k = 0 \quad (4.17)$$

$$N_k = -q_x \cdot a_1 \quad (4.18)$$

$$M_{y,k} = N_k \cdot z_8 \quad (4.19)$$

$$M_{z,k} = N_k \cdot y_8 \quad (4.20)$$

$$M_{\omega,k} = N_k \cdot \omega_8 \quad (4.21)$$

$$U_8 = 0 \quad (4.22)$$

Die Gleichung (4.18) ergibt sich beim Auflösen von unten sofort aus der letzten Zeile der Übertragungsbeziehung (3.84), somit können auch die Gleichungen (4.19) bis (4.21) gelöst und als Randbedingungen verwendet werden.

Die Gleichungen (4.18) bis (4.21) ergeben sich aus der 9. Zeile der Matrix **A** aus Gleichung (3.8) multipliziert mit  $N_k$ .

Die Verschiebung in Stablängsachse ist nur im Auflagerpunkt A, der dem Querschnittsknotenpunkt 8 am Stabende entspricht, verhindert, daher  $U_8 = 0$ . Für die Längsverschiebung des Bezugspunktes wird der Zusammenhang der Querschnittsdrehwinkel und der Koordinaten wie in Gleichung (3.91) dargestellt, unter Verwendung der bekannten Verschiebung von Punkt 8 wird nun die Verschiebung im Bezugspunkt an der Stelle k ermittelt. Anschließend kann, wenn alle anderen Zustandsgrößen am Anfangspunkt bekannt sind, mittels der ersten Zeile der Übertragungsbeziehung (3.84) die Längsverschiebung am Anfangspunkt i ausgerechnet werden.

### 4.3 Lastfall 1: Eigengewicht mit Aufbau

#### 4.3.1 Einwirkung

Berechnung der Linienlast  $g_{Ed}$  aus der Flächenlast  $g_{Ed}^F$ .

Die Flächenlast wirkt auf dem gesamten Deckblech in Deckblechmitte:

$$g_{Ed}^F = 8,10 \text{ kN/cm}^2$$

$$b_{\text{Deckblech}} = 250 \text{ cm}$$

$$g_{Ed} = g_{Ed}^F \cdot b_{\text{Deckblech}} = 0,2025 \text{ kN/cm}$$

$$y_x = y_z = (-e)$$

$$e = b_{\text{Deckblech}} / 2 - b_{0,1} = 115 \text{ cm}$$

$$z_x = z_y = \omega_x = 0 \quad \text{d.h.: } m_y = m_\omega = 0$$

Aufteilung in die x und z Komponenten des Bezugssystems nach Gleichungen (3.31) bis (3.34):

$$q_x = g_{Ed} \sin \gamma = 2,0150 \times 10^{-2} \text{ kN/cm}$$

$$m_z = -q_x \cdot y_x = 2,317 \text{ kN}$$

$$q_z = g_{Ed} \cos \gamma = 2,0150 \times 10^{-1} \text{ kN/cm}$$

$$m_T = -q_z \cdot y_z = 23,172 \text{ kN}$$

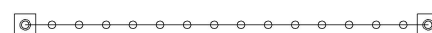
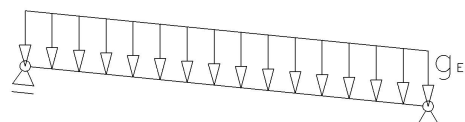


Abbildung 15: Wirkungsrichtung des Eigengewichts

#### 4.3.2 Übertragungsbeziehung für $x = l = 3000$

Zunächst wird der Lastvektor  $\underline{z}_k^0$  nach Gleichung (3.85) angegeben. Es werden nur jene Spalten angeschrieben, die für die vorhandene Belastung notwendig sind. Die Belastungen dieses Lastfalls sind  $m_T$ ,  $m_z$ ,  $q_z$ ,  $q_x$ :

$$\underline{z}_k^0 = \begin{pmatrix} 4012,62 & -202,724 & -677521 & 34972,0 \\ -113023 & 3792,37 & 1,88536 \times 10^7 & -677521 \\ -154,292 & 3,99084 & 25663,1 & -705,29 \\ 21008,4 & -1728,43 & -2,77109 \times 10^6 & 197562 \\ 28,6793 & -1,76532 & -3792,37 & 202,724 \\ 773,890 & -28,6793 & -113023 & 4012,62 \\ 1,05647 & -3,00383 \times 10^{-2} & -154,292 & 4,20275 \\ -5,06108 \times 10^6 & 20792,8 & 8,19426 \times 10^7 & -2,90918 \times 10^6 \\ -3000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,5 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23,172 \\ 2,3172 \\ 2,0150 \times 10^{-1} \\ 2,0150 \times 10^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43302,2 \\ 1,17509 \times 10^6 \\ 1590,79 \\ -71581,1 \\ -99,5945 \\ -4826,61 \\ -6,59356 \\ -1,00774 \times 10^8 \\ -69515,8 \\ 6951,58 \\ 0 \\ -906728 \\ -604,485 \\ -60,4485 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$



Die Übertragungsbeziehung nach Gleichung (3.84), es fallen jene Spalten weg, die mit einer Zustandgröße vom Anfangspunkt i multipliziert würden, die gleich Null ist, lautet mit den entsprechenden  $c_{rs,j}$  und  $c^*_{rs,j}$  – Werten aus Formel (3.86) und (3.87) für die Stelle k:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \\ \bar{w}'_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{v}'_k \\ \bar{\vartheta}'_k \\ \bar{\vartheta}_k \\ M_{\omega,k} \\ M_{T,k} \\ M_{z,k} \\ Q_{y,k} \\ M_{y,k} \\ Q_{z,k} \\ N_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3047,04 & -4,20275 & -202,724 & 705,290 \\ 0 & 3000 & 0 & -111863 & 154,292 & 3792,37 & -25663,1 \\ 0 & 1 & 0 & -117,164 & 1,61603 \times 10^{-1} & 3,99084 & -26,7309 \\ 0 & 0 & 3000 & 20792,8 & -28,6793 & -1728,43 & 3792,37 \\ 0 & 0 & 1 & 21,778 & -3,00383 \times 10^{-2} & -1,76532 & 3,99084 \\ 0 & 0 & 0 & 3765,95 & -1,05647 & -28,6793 & 154,292 \\ 0 & 0 & 0 & 1,80224 & -1,10653 \times 10^{-4} & -3,00383 \times 10^{-2} & 1,61603 \times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -2,73035 \times 10^6 & 3765,95 & 20792,8 & -111863 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}'_i \\ \bar{v}'_i \\ \bar{\vartheta}'_i \\ M_{T,i} \\ Q_{y,i} \\ Q_{z,i} \\ Z_i \end{pmatrix} + Z_k^0 = \mathbf{F}_{-ki} \tag{4.24}$$

### 4.3.3 Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $Z_i$

Durch schrittweises lösen der Übertragungsbeziehung mit den bekannten Randbedingungen beginnend von unten nach oben, werden die Unbekannten des Zustandsvektors vom Anfangspunkt i und am Endpunkt k bestimmt. Dafür werden die bekannten Größen an der Stelle  $x = l=3000$  eingesetzt und jene Zeilen des Gleichungssystems gelöst:

Aus **Zeile 14** ergibt sich  $N_k$  zu:

$$N_k = -60,4485$$

Nun kann für die Randbedingungen (4.19) bis (4.21) eingesetzt werden, und es geben sich:

$$M_{y,k} = N_k \cdot z_8 = -6044,85$$

$$M_{z,k} = N_k \cdot y_8 = 9671,76$$

$$M_{\omega,k} = N_k \cdot \omega_8 = -967176$$

Aus **Zeile 12** ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für  $Q_{z,i}$ :

$$M_{y,k} = -6044,85 = 3000 \cdot Q_{z,i} - 906728 \rightarrow Q_{z,i} = 300,228$$

Mittels **Zeile 10** ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für  $Q_{y,i}$ :

$$M_{z,k} = 9671,76 = 3000 \cdot Q_{y,i} + 6951,58 \rightarrow Q_{y,i} = 0,9067$$

Mit Gleichung (3.74) ergibt sich für die Gabellagerung aus **Zeile 6** eine zusätzliche Bestimmungsgleichung für  $M_{T,i}$ , die umgeformt wie folgt lautet:

$$M_{T,i} = \frac{1}{a_1} (a_2 m_T + M_{w,k}) = 34435,5$$

nun sind alle Schnittgrößen auf den der Stelle  $i$  bekannt!

Für  $\bar{\vartheta}'_i$  ergibt sich aus der **Zeile 8** mit den oben angegebenen Werten zu:

$$M_{w,k} = -l_T^* b_1 \bar{\vartheta}'_i + b_1 M_{T,i} + c_{43,3}^* Q_{y,i} + c_{42,3}^* Q_{z,i} - 1,00759 \times 10^8 \rightarrow \bar{\vartheta}'_i = -1,3516$$

Aus der **Zeile 4** der Übertragungsbeziehung nach Einsetzen errechnet sich  $\bar{v}'_i$  zu:

$$\bar{v}_k = 0 = a_1 \bar{v}'_i + c_{34,3}^* \bar{\vartheta}'_i - c_{34,3} M_{T,i} - c_{33,3} Q_{y,i} - c_{32,3} Q_{z,i} - 71607,4 \rightarrow \bar{v}'_i = -16,5786$$

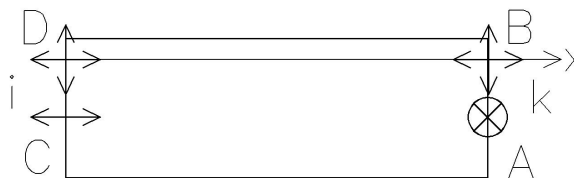
$\bar{w}_i$  kann aus der **Zeile 2** ausgedrückt werden:

$$\bar{w}_k = 0 = a_1 \bar{w}'_i + c_{24,3}^* \bar{\vartheta}'_i - c_{24,3} M_{T,i} - c_{23,3} Q_{y,i} - c_{22,3} Q_{z,i} + 1,17523 \times 10^6 \rightarrow \bar{w}'_i = 353,982$$

#### 4.3.4 Berechnung von $u_i$ aus $u_k$

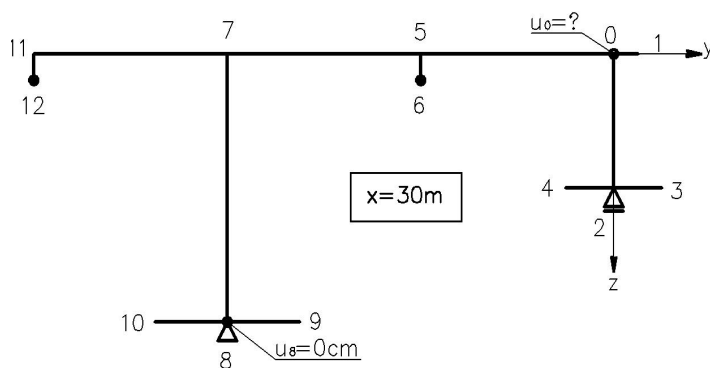
Um genügend Größen zur Lösung des Gleichungssystems zu haben, muss noch die Verschiebung des Bezugspunktes in x-Richtung am Stabanfang bestimmt werden.

Das System ist in Längsrichtung (=x-Richtung) nur im Punkt A (=Querschnittsknotenpunkt Nr. 8) gehalten, somit ist die Längsverschiebung nur im Punkt A am Stabende bekannt und mit Null gegeben.



**Abbildung 16: System von oben betrachtet, zeigt die Verschiebungsrichtungen, die bei der gegebenen Lagerung möglich sind.**

Zuerst wird nun die Verschiebung im Bezugspunkt am Stabende bestimmt; diese Größe kann man über die Zusammenhänge aus Gleichung (3.91) leicht berechnen.



**Abbildung 17:** zeigt den Querschnitt an der Stelle  $x=l=3000$  Im Knoten 8 wird der Querschnitt festgehalten, so dass dort die  $x$ -Verschiebung bekannt ist. ( $U_8$  bekannt und gleich Null;  $u_0$  wird gesucht)

Um von der Verschiebung  $u_{8,k}$  auf  $u_{0,k}$  zu kommen, verwendet man den Zusammenhang aus der Gleichung (3.91) mit (3.90). Für den Bezugspunkt an der Stelle  $k$  gilt also mit den Koordinaten aus (4.1):  $z_8 = 100$ ,  $y_8 = -160$ ,  $\omega_8 = 1600$

$$U_{8,k} = (\bar{u}_k + \bar{w}'_k \cdot z_8 + \bar{v}'_k \cdot y_8 + \bar{\vartheta}'_k \cdot \omega_8) \frac{1}{E} = 0 \quad (4.25)$$

Dafür muss zuerst in die Zeilen 3, 5 und 7 der Übertragungsbeziehung ik eingesetzt werden um  $\bar{w}'_k$ ,  $\bar{v}'_k$  und  $\bar{\vartheta}'_k$  zu bekommen:

Aus **Zeile 3** folgt:  $\bar{w}'_k = -353,722$

Die **Zeile 5** liefert:  $\bar{v}'_k = 16,5682$

Mit **Zeile 7** bestimmt man:  $\bar{\vartheta}'_k = 1,35709$

Es sind nun alle Größen außer  $\bar{u}_k$  bekannt, weshalb sich mittels Umformung von Gleichung (4.25)  $\bar{u}_k = 16309,70$  ergibt.

Sobald die Verschiebung am Stabende bekannt ist, wird in die **1. Zeile** der Übertragungsbeziehung eingesetzt, woraus sich die letzte Zustandsgröße für den Anfangspunkt ergibt.

$$\bar{u}_i + 3109,46 = 0 \rightarrow \bar{u}_i = -3109,46$$

Die von Null verschiedenen Zustandsgrößen lauten nun:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= -3109,46 & M_{T,i} &= 34435,5 \\ \bar{w}'_i &= 353,982 & Q_{y,i} &= 0,9067 \\ \bar{v}'_i &= -16,5786 & Q_{z,i} &= 300,228 \\ \bar{\vartheta}'_i &= -1,3516 \end{aligned} \quad (4.26)$$

### 4.3.5 Bestimmen des Zustandvektor $\underline{Z}_x$ für $x = 500$ mittels Übertragungsbeziehung

Die Übertragungsbeziehung für  $x = 500$  lautet nach Gleichung (3.84):

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{w}_x \\ \bar{w}'_x \\ \bar{v}_x \\ \bar{v}'_x \\ \bar{\vartheta}_x \\ \bar{\vartheta}'_x \\ M_{\omega,x} \\ M_{T,x} \\ M_{z,x} \\ Q_{y,x} \\ M_{y,x} \\ Q_{z,x} \\ N_x \\ Z_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 75,5054 & -1,04144 \times 10^{-1} & -5,28919 & 17,7513 \\ 0 & 500 & 0 & -483,247 & 6,66539 \times 10^{-1} & 16,2603 & -111,834 \\ 0 & 0 & 1 & -2,90331 & 4,00451 \times 10^{-3} & 9,77055 \times 10^{-2} & -6,71772 \times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 89,8245 & -1,23894 \times 10^{-1} & -7,76093 & 16,2603 \\ 0 & 0 & 0 & 5,39659 \times 10^{-1} & -7,44348 \times 10^{-4} & -4,65922 \times 10^{-2} & 9,77055 \times 10^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 503,309 & -4,56393 \times 10^{-3} & -1,23894 \times 10^{-1} & 6,66539 \times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1,01988 & -2,74197 \times 10^{-5} & -7,44348 \times 10^{-4} & 4,00451 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & -364904 & 503,309 & 89,8245 & -485,247 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\vartheta}_i \\ M_{T,i} \\ Q_{y,i} \\ Q_{z,i} \end{pmatrix} + Z_x^0 \tag{4.27}$$

mit  $\underline{Z}_x^0$  aus Gleichung (3.85)

$$\underline{Z}_x^0 = \begin{pmatrix} 17,3345 & -5,2892 & -2955,21 & 923,591 \\ -83,2623 & 16,2603 & 13971,2 & -2955,21 \\ -6,66539 \times 10^{-1} & 9,77055 \times 10^{-2} & 111,834 & -17,7513 \\ 15,4766 & -7,76093 & -2031,05 & 880,91 \\ 1,23894 \times 10^{-1} & -4,65922 \times 10^{-2} & -16,2603 & 5,28919 \\ 5,70114 \times 10^{-1} & -1,23894 \times 10^{-1} & -83,2623 & 17,3345 \\ 4,56393 \times 10^{-3} & -7,44348 \times 10^{-4} & -6,66539 \times 10^{-1} & 1,04144 \times 10^{-1} \\ -125413 & 89,8245 & 60366,0 & -12567,6 \\ -500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -125000 & 0 \\ 0 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23,172 \\ 2,3172 \\ 2,0150 \times 10^{-1} \\ 2,0150 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

Nachdem man die Werte von (4.28) in (4.27) eingesetzt hat, und die Zustandsgrößen von  $\underline{Z}_i$ , in Formel (4.26) angegeben, eingesetzt hat. Ergeben sich durch ausrechnen der rechten

Seit des Gleichungssystems (4.27) die Zustandsgrößen von  $\underline{Z}_x$ . Dies kann für jede beliebige Schnittstelle mittels entsprechender Übertragungsbeziehung gemacht werden.

Das primäre Torsionsmoment geht aus Gleichung (3.92) hervor und nach Gleichung (3.93) lässt sich das sekundäre Torsionsmoment bestimmen.

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>500</b>	<b>3000</b>	
$\bar{u}_x$	-3109,46	-1660,55	16309,70	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{w}_x$	0	167900	0	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{w}'_x$	353,982	301,165	-353,722	kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{v}_x$	0	-7853,15	0	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{v}'_x$	-16,5786	-14,0552	16,5682	kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{\vartheta}_x$	0	-640,936	0	kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{\vartheta}'_x$	-1,3516	-1,14927	1,35709	1/cm*kN/cm <sup>2</sup>
$M_{\omega,x}$	0	$1,47859 \cdot 10^7$	-967176	kNcm <sup>2</sup>
$M_{T,x}$	34435,5	22849,5	-35080,3	kNcm
$M_{z,x}$	0	1611,96	9671,76	kNcm
$Q_{y,x}$	0,9067	0,9067	0,9067	kN
$M_{y,x}$	0	124927	-6044,85	kNcm
$Q_{z,x}$	300,228	199,480	-304,258	kN
$N_x$	0	-10,0748	-60,4485	kN
$M_{Tp}$	-979,922	-833,228	983,902	kNcm
$M_{Ts}$	35415,4	23682,8	-36064,2	kNcm

**Tabelle 4: Zustandsgrößen für  $x = 0$ ,  $x = 500$ ,  $x = 3000$**

### 4.3.6 Verschiebungen der einzelnen Querschnittsknoten für die 3 betrachteten Stellen

Mit  $\underline{A}$  aus Gleichung (4.1); es werden die Komponenten aus den Zeilen von  $\underline{A}$  mit den Komponenten der Spalten der Verschiebungsgrößenmatrix multipliziert und anschließend addiert.

x	0			500			3000		
	$U_f$	$W_f$	$V_f$	$U_f$	$W_f$	$V_f$	$U_f$	$W_f$	$V_f$
0	-0,14807	0	0	-0,07907	7,99524	-0,37396	0,77665	0	0
1	-0,15596	0	0	-0,08577	8,30045	-0,37396	0,78454	0	0
2	0,69475	0	0	0,63799	7,99524	-1,9	-0,06554	0	0
3	0,61459	0	0	0,56987	8,60565	-1,9	0,01486	0	0
4	0,77490	0	0	0,7061	7,38482	-1,9	-0,14595	0	0
5	-0,08491	0	0	-0,02553	5,55358	-0,37396	0,71354	0	0
6	0,03216	0	0	0,07410	5,55358	-0,67917	0,59680	0	0
7	-0,02176	0	0	0,02801	3,11191	-0,37396	0,65042	0	0
8	0,63408	0	0	0,58650	3,11191	-3,42604	0	0	0
9	0,41731	0	0	0,40224	4,02754	-3,42604	0,21754	0	0
10	0,85085	0	0	0,77076	2,19629	-3,42604	-0,21754	0	0
11	0,04140	0	0	0,08156	0,67025	-0,37396	0,58730	0	0
12	0,05549	0	0	0,09362	0,67025	-0,67917	0,57396	0	0

**Tabelle 5: Verschiebungen  $U_f$ ,  $W_f$ ,  $V_f$  der Querschnittsknoten für  $x=0$ ,  $x=500$ ,  $x=3000$  in [cm]**

### 4.3.7 Normalspannungen und Schubflüsse

Für die Matrix  $\underline{\sigma}$  aus Gleichung (3.6) werden zunächst nach Gleichung (3.7) die Werte für  $\underline{\kappa}$  aus den Gleichung (3.1) bis (3.5) bestimmt:

x	0	500	3000
$\kappa_1$	0	-5,41877	$1,53785 \times 10^{-2}$
$\kappa_2$	0	$1,97502 \times 10^{-1}$	$-4,82514 \times 10^{-4}$
$\kappa_3$	0	$-9,35895 \times 10^{-3}$	$1,38483 \times 10^{-5}$
$\kappa_4$	0	$-7,55058 \times 10^{-4}$	$-1,12366 \times 10^{-5}$
$\kappa'_1$	$-1,31184 \times 10^{-2}$	$-8,59449 \times 10^{-3}$	$1,31254 \times 10^{-2}$
$\kappa'_2$	$4,78357 \times 10^{-4}$	$3,13105 \times 10^{-4}$	$-4,78552 \times 10^{-4}$
$\kappa'_3$	$-2,32656 \times 10^{-5}$	$-1,44408 \times 10^{-5}$	$2,32512 \times 10^{-5}$
$\kappa'_4$	$-1,84098 \times 10^{-6}$	$-1,18922 \times 10^{-6}$	$1,83262 \times 10^{-6}$

Tabelle 6: Matrixglieder von  $\underline{\kappa}$

Aus Gleichung (3.7) wird nun  $\sigma$  und  $\sigma'$  bestimmt:

x	0		500		3000	
	$\sigma_f$	$\sigma'_f$	$\sigma_f$	$\sigma'_f$	$\sigma_f$	$\sigma'_f$
0	0	$-1,31184 \times 10^{-2}$	-5,41877	$-8,59449 \times 10^{-3}$	$1,53785 \times 10^{-2}$	$1,31254 \times 10^{-2}$
1	0	$-1,33511 \times 10^{-2}$	-5,51236	$-8,7389 \times 10^{-3}$	$1,55170 \times 10^{-2}$	$1,33579 \times 10^{-2}$
2	0	$1,07994 \times 10^{-2}$	4,45632	$7,06078 \times 10^{-3}$	$-8,74721 \times 10^{-3}$	$-1,08022 \times 10^{-2}$
3	0	$8,49313 \times 10^{-3}$	3,51408	$5,58274 \times 10^{-3}$	$-1,97068 \times 10^{-2}$	$-8,50456 \times 10^{-3}$
4	0	$1,31017 \times 10^{-2}$	5,39855	$8,53882 \times 10^{-3}$	$2,21240 \times 10^{-3}$	$-1,30998 \times 10^{-2}$
5	0	$-1,12572 \times 10^{-2}$	-4,67005	$-7,43923 \times 10^{-3}$	$1,42706 \times 10^{-2}$	$1,12653 \times 10^{-2}$
6	0	$-7,94641 \times 10^{-3}$	-3,29908	$-5,25955 \times 10^{-3}$	$4,56247 \times 10^{-4}$	$7,94587 \times 10^{-3}$
7	0	$-9,39596 \times 10^{-3}$	-3,92134	$-6,28396 \times 10^{-3}$	$1,31628 \times 10^{-2}$	$9,40521 \times 10^{-3}$
8	0	$8,98413 \times 10^{-3}$	3,7479	$5,999 \times 10^{-3}$	$-2,14874 \times 10^{-1}$	$-9,12812 \times 10^{-2}$
9	0	$2,76323 \times 10^{-3}$	1,20196	$1,9981 \times 10^{-3}$	$-2,48168 \times 10^{-1}$	$-2,93274 \times 10^{-3}$
10	0	$1,5205 \times 10^{-2}$	6,29384	$9,99989 \times 10^{-3}$	$-1,81580 \times 10^{-1}$	$-1,53235 \times 10^{-2}$
11	0	$-7,53471 \times 10^{-3}$	-3,17262	$-5,1287 \times 10^{-3}$	$1,20549 \times 10^{-2}$	$7,54511 \times 10^{-3}$
12	0	$-7,16948 \times 10^{-3}$	-3,00974	$-4,85178 \times 10^{-3}$	$-1,97380 \times 10^{-2}$	$7,15787 \times 10^{-3}$

Tabelle 7: Matrixglieder von  $\underline{\sigma}$

Die Schubflüsse wie in **Abbildung 13** dargestellt, ergeben sich aus der Beziehung für  $\Delta T_{fg}$  aus Gleichung (3.97) und den Formeln (3.98):

x	0		500		3000	
	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$
0,1	<b>-0,15801</b>	-0,15801	<b>-0,103194</b>	-0,103194	<b>0,15971</b>	0,15971
2,3	0,57878	0,57878	0,379305	0,379305	-0,57920	-0,57920
2,4	0,71715	0,71715	0,467988	0,467988	-0,71706	-0,71706
2,0	1,29593		0,847293		-1,29625	
0,2	<b>1,22636</b>	$-6,9571 \times 10^{-2}$	<b>0,801282</b>	$-4,60115 \times 10^{-2}$	<b>-1,22657</b>	$6,9697 \times 10^{-2}$
12,11	$-3,5847 \times 10^{-2}$		$-2,42589 \times 10^{-2}$		$3,5789 \times 10^{-2}$	
11,12	-0,10937	$-7,3539 \times 10^{-2}$	$-7,41613 \times 10^{-2}$	$-4,99024 \times 10^{-2}$	0,10930	$7,3515 \times 10^{-2}$
11,7	-0,10937		$-7,41613 \times 10^{-2}$		0,10930	
7,11	-0,91559	-0,80622	-0,615521	-0,54136	0,92937	0,82006
8,9	0,70484	0,70484	0,479826	0,479826	-0,72365	-0,72365
8,10	1,45135	1,45135	0,959933	0,959933	-1,4671	-1,4671
8,7	2,15619		1,43976		-2,19075	
7,8	2,13148	$-2,47085 \times 10^{-2}$	1,42266	$-1,70979 \times 10^{-2}$	-2,17412	$1,6625 \times 10^{-2}$
7,5	1,21589		0,80714		-1,24476	
5,7	0,23099	-0,98490	0,154875	-0,652265	-0,24612	0,99863
6,5	$-3,9732 \times 10^{-2}$		$-2,62978 \times 10^{-2}$		$3,97294 \times 10^{-2}$	
5,6	-0,13575	$-9,60181 \times 10^{-2}$	$-8,97917 \times 10^{-2}$	$-6,34939 \times 10^{-2}$	0,13579	$9,6056 \times 10^{-2}$
5,0	$9,52358 \times 10^{-2}$		$6,50834 \times 10^{-2}$		-0,11034	
0,5	<b>-1,06835</b>	-1,16358	<b>-0,698087</b>	-0,763171	<b>1,06686</b>	1,1772

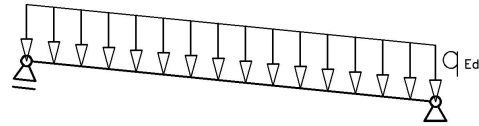
**Tabelle 8: Schubflüsse  $T_{fg}$  und die Änderung des Schubflusses  $\Delta T_{fg}$  über die Blechlänge in [kN/cm]**



#### 4.4 Lastfall 2a: Nutzlast auf dem gesamten Deckblech

$$q_k^F = 5 \text{ kN/cm}^2$$

$$g_k^F = 6 \text{ kN/cm}^2$$



**Abbildung 18: Wirkungsrichtung des Eigengewichts**

Da sich bei diesem Lastfall nur der Betrag der Einwirkung um einen Faktor  $\delta$  von dem Lastfall 1: Eigengewicht mit Aufbau unterscheidet, sind auch die Ergebnisse dieses Lastfalls nur

um diesen Faktor unterschiedlich:  $\delta = \frac{q_k^F}{g_k^F} = \frac{5}{6}$

### 4.5 Ermittlung der maßgebenden Einflussbreite für Lastfall 2b

#### 4.5.1 Einwirkung zur Ermittlung der maximale Durchbiegung des kurzen Steges

$$y_x = y_z = z_x = z_y = \omega_x = 0$$

$$\text{d.h.: } m_y = m_z = m_T = m_\omega = 0$$

$$q = 0,01 \text{ kN/cm}$$

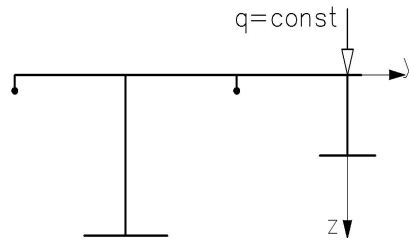


Abbildung 19: Angriffspunkt für die Linienlast

Aufteilung in die x und z Komponenten des Bezugssystems:

$$q_x = q \cdot \sin\gamma = 9,95037 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}$$

$$q_z = q \cdot \cos\gamma = 9,95037 \times 10^{-3} \text{ kN/cm}$$

#### 4.5.2 Gleichungssystem i nach k

Es wird zunächst die Übertragungsbeziehung von i nach k unter Berücksichtigung aller Randbedingungen aufgestellt um die Zustandvektoren von Anfangs- und Endpunkt zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \\ \bar{w}'_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{v}'_k \\ \bar{\vartheta}'_k \\ \bar{\vartheta}_k \\ M_{\omega,k} \\ M_{T,k} \\ M_{z,k} \\ Q_{y,k} \\ M_{y,k} \\ Q_{z,k} \\ N_k \\ \bar{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3047,04 & -4,20275 & -202,724 & 705,290 \\ 0 & 3000 & 0 & -111863 & 154,292 & 3792,37 & -25663,1 \\ 0 & 0 & 1 & -117,164 & 1,61603 \times 10^{-1} & 3,99084 & -26,7309 \\ 0 & 0 & 0 & 20792,8 & -28,6793 & -1728,43 & 3792,37 \\ 0 & 0 & 1 & 21,778 & -3,00383 \times 10^{-2} & -1,76532 & 3,99084 \\ 0 & 0 & 0 & 3765,95 & -1,05647 & -28,6793 & 154,292 \\ 0 & 0 & 0 & 1,80224 & -1,10653 \times 10^{-4} & -3,00383 \times 10^{-2} & 1,61603 \times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -2,73035 \times 10^6 & 3765,95 & 20792,8 & -111863 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\vartheta}'_i \\ \bar{\vartheta}_i \\ M_{T,i} \\ Q_{y,i} \\ Q_{z,i} \\ \bar{z}_i \end{pmatrix} + \underline{\underline{z}}_k^0 \quad (4.29)$$

mit dem Lastvektor  $\underline{z}_k^0$  nach Gleichung (3.85) angegeben. Die Belastungen dieses Lastfalls sind  $q_z, q_x$ :

$$\underline{z}_k^0 = \begin{pmatrix} -677521 & 34972,0 \\ 1,88536 \times 10^7 & -677521 \\ 25663,1 & -705,29 \\ -2,77109 \times 10^6 & 197562 \\ -3792,37 & 202,724 \\ -113023 & 4012,62 \\ -154,292 & 4,20275 \\ 8,19426 \times 10^7 & -2,90918 \times 10^6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4,5 \times 10^6 & 0 \\ -3000 & 0 \\ 0 & -3000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9,95037 \times 10^{-3} \\ 9,95037 \times 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6706,79 \\ 186926 \\ 254,656 \\ -27376,8 \\ -37,5338 \\ -1120,63 \\ -1,53108 \\ 812465 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -44776,7 \\ -29,8511 \\ -2,98511 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

#### 4.5.3 Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $\underline{z}_i$

Durch Einsetzen von (4.30) in (4.29) ergibt sich das lineare Gleichungssystem. Dass von der letzten Zeile an aufwärts gelöst wird, wie im Lastfall 1 vorgeführt wurde. Woraus sich unter Berücksichtigung der Verschiebung die Zustandsgrößen für den Anfangspunkt zu:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= -1298,76 & M_{T,i} &= -15,9206 \\ \bar{w}'_i &= 53,4612 & Q_{y,i} &= 0,159206 \\ \bar{v}'_i &= -7,50668 & Q_{z,i} &= 14,8261 \\ \bar{\vartheta}'_i &= -0,313112 & & \end{aligned} \quad (4.31)$$

### 4.5.4 Durchbiegung in Stabmitte

Nun kann mittels Übertragungsmatrix für  $x=1500$  die Durchbiegung in Stabmitte ausgerechnet werden:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \\ \bar{w}'_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{v}'_k \\ \bar{\vartheta}'_k \\ \bar{\vartheta}_k \\ M_{\omega,k} \\ M_{T,k} \\ M_{z,k} \\ Q_{y,k} \\ M_{y,k} \\ Q_{z,k} \\ N_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 697,68 & -9,62305 \times 10^{-1} & -48,2816 & 163,415 \\ 0 & 1500 & 0 & -13256 & 18,2839 & 446,831 & -3061,48 \\ 0 & 0 & 1 & -26,827 & 3,70022 \times 10^{-2} & 9,05454 \times 10^{-1} & -6,18639 \\ 0 & 0 & 1500 & 2463,99 & -3,39857 & -210,995 & 446,831 \\ 0 & 0 & 0 & 4,98652 & -6,87787 \times 10^{-3} & -4,24182 \times 10^{-1} & 9,05454 \times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1590,77 & -1,25194 \times 10^{-1} & -3,39857 & 18,2839 \\ 0 & 0 & 0 & 1,18369 & -2,53362 \times 10^{-4} & -6,87787 \times 10^{-3} & 3,70022 \times 10^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & -1,15332 \times 10^6 & 1590,77 & 2463,99 & 13256,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}'_i \\ \bar{v}'_i \\ \bar{\vartheta}'_i \\ M_{T,i} \\ Q_{y,i} \\ Q_{z,i} \\ Z_i \end{pmatrix} + \underline{Z}_k^0 \tag{4.32}$$

mit folgendem für  $\underline{Z}_k^0$ :

$$\underline{Z}_k^0 = \begin{pmatrix} -80882,4 & 8407,31 \\ 1,14213 \times 10^6 & -80882,4 \\ 3061,48 & -163,415 \\ -166461 & 23987,5 \\ -446,831 & 48,2816 \\ -6815,93 & 475,505 \\ -18,2839 & 0,962305 \\ 4,94161 \times 10^6 & -344745 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1,125 \times 10^6 & 0 \\ -1500 & 0 \\ 0 & -1500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9,95037 \times 10^{-3} \\ 9,95037 \times 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -796,444 \\ 11284,2 \\ 30,3002 \\ -1632,48 \\ -4,3981 \\ -67,3479 \\ -0,180975 \\ 48827,9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11194,2 \\ -14,9256 \\ -1,49256 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

es sind alle Größen auf der rechten Seite der Übertragsbeziehung bekannt, und es ergibt sich nach Einsetzen von (4.31) und (4.33) in die Übertragungsbeziehung (4.32) der Zustandsvektor für die Schnittstelle  $x=1500$ :

$$\begin{array}{ll}
 \bar{u}_x = 116,775 & M_{\omega,x} = 188479 \\
 \bar{w}_x = 50017,1 & M_{T,x} = -15,9206 \\
 \bar{w}'_x = -3,38469 \times 10^{-3} & M_{z,x} = 238,809 \\
 \bar{v}_x = -7018,74 & Q_{y,x} = 1,59206 \times 10^{-1} \\
 \bar{v}'_x = 1,60988 \times 10^{-4} & M_{y,x} = 11044,9 \\
 \bar{\vartheta}_x = -292,906 & Q_{z,x} = -9,95037 \times 10^{-2} \\
 \bar{\vartheta}'_x = -6,65802 \times 10^{-5} & N_x = -1,49256
 \end{array} \quad (4.34)$$

#### 4.5.5 Durchbiegung aus der Linienlast und Nulldurchgang an der Stelle $x=1500$

Da festgelegt wurde, dass jener Teil des Deckblechs mit der Nutzlast zu belasten ist, der die größte positive Durchbiegung verursacht, muss nun der Nulldurchgang der Biegelinie im Deckblech des Querschnittes in Stabmitte bestimmt werden.

Nach Gleichung (3.91) ergeben sich also für die 5 Knoten des Deckblechs folgende Verschiebungen in z-Richtung:

f	11	7	5	0	1
$W_f$	-0,965732	0,1501	1,26544	2,38177	2,52124

**Tabelle 9: Knotenverschiebungen [cm] des Deckbleches, Knoten von links nach rechts**

Der Vorzeichenwechsel findet zwischen 11 und 7 statt, also befindet sich hier der Nulldurchgang. Die Stelle des Nulldurchgangs errechnet sich zu:

$$b_{\text{Nulldurchgang}} = \frac{W_7 \cdot b_{7,11}}{|W_7| + |W_{11}|} = 10,7615$$

## 4.6 Lastfall 2b: Nutzlast über dem kurzen Steg

### 4.6.1 Einwirkungsbreite aus der maximalen Durchbiegung

Aus der Einflusslinie folgen nun die belasteten Einzelbleche und Blechabschnitte des Deckblechs:

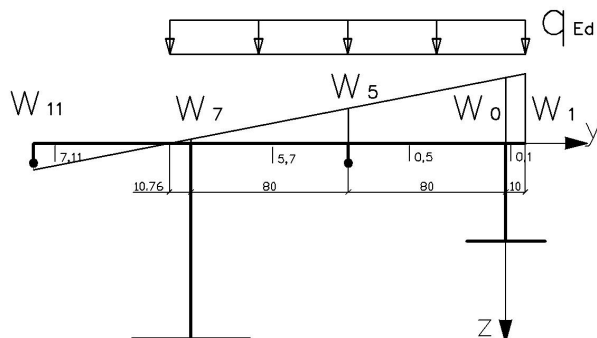


Abbildung 20: Durchbiegung des Deckblechs in Stabmitte

$$b = b_{0,1} + b_{0,5} + b_{5,7} + b_{\text{Nulldurchgang}} = 180,76 \text{ cm}$$

$$q_{\text{Ed}} = q_{\text{Ed}}^F \cdot b = 0,122014 \text{ kN/cm}$$

$$y_x = y_z = (-e)$$

$$e = b / 2 - b_{0,1} = 80,3807 \text{ cm}$$

$$z_x = z_y = \omega_x = 0 \quad \text{d.h.:} \quad m_y = m_\omega = 0$$

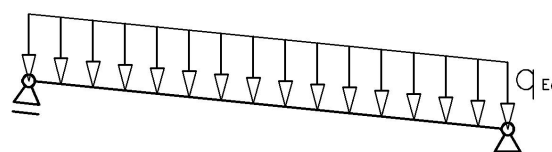


Abbildung 21: Wirkungsrichtung der Nutzlast

Aufteilung in die x und z Komponenten des Bezugssystems:

$$q_x = q_{\text{Ed}} \cdot \sin \gamma = 1,21408 \times 10^{-2} \text{ kN/cm}$$

$$m_z = -q_x \cdot y_x = 0,97589 \text{ kN}$$

$$q_z = q_{\text{Ed}} \cdot \cos \gamma = 1,21408 \times 10^{-1} \text{ kN/cm}$$

$$m_T = -q_z \cdot y_z = 9,7589 \text{ kN}$$

### 4.6.2 Übertragungsbeziehung für $x = l = 3000$

Weiter geht man nun wie in Lastfall 1 vor:

Übertragungsbeziehung für  $x = l$  nach Gleichung (3.84) ist die gleiche wie in Lastfall 1 nach Gleichung (4.24) mit dem Lastvektor  $\underline{z}_k^0$  nach Gleichung (3.85):

$$\underline{Z}_k^0 = \begin{pmatrix} 4012,62 & -202,724 & -677521 & 34972,0 \\ -113023 & 3792,37 & 1,88536 \times 10^7 & -677521 \\ -154,292 & 3,99084 & 25663,1 & -705,29 \\ 21008,4 & -1728,43 & -2,77109 \times 10^6 & 197562 \\ 28,6793 & -1,76532 & -3792,37 & 202,724 \\ 773,890 & -28,6793 & -113023 & 4012,62 \\ 1,05647 & -3,00383 \times 10^{-2} & -154,292 & 4,20275 \\ -5,06108 \times 10^6 & 20792,8 & 8,19426 \times 10^7 & -2,90918 \times 10^6 \\ -3000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,5 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9,7589 \\ 0,97589 \\ 1,21408 \times 10^{-1} \\ 1,21408 \times 10^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42871,3 \\ 1,18149 \times 10^6 \\ 1605,34 \\ -130704 \\ -179,809 \\ -6148,88 \\ -8,40065 \\ -3,94571 \times 10^7 \\ -29276,7 \\ 2927,67 \\ 0 \\ -546338 \\ -364,225 \\ -36,4225 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

#### 4.6.3 Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $\underline{Z}_i$

Durch Einsetzen von (4.35) in (4.24) ergibt sich das lineare Gleichungssystem. Das von der letzten Zeile an aufwärts gelöst wird, wie im Lastfall 1 vorgeführt wurde. Woraus sich unter Berücksichtigung der Verschiebung (siehe Lastfall 1) die Zustandsgrößen für den Anfangspunkt zu:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= -6079,98 & M_{T,i} &= 14444,1 \\ \bar{w}'_i &= 345,447 & Q_{y,i} &= 0,966645 \\ \bar{v}'_i &= -34,5547 & Q_{z,i} &= 180,899 \\ \bar{\vartheta}'_i &= -1,71931 & & \end{aligned} \quad (4.36)$$

#### 4.6.4 Bestimmen des Zustandvektor $\underline{Z}_x$ für $x=500$ mittels Übertragungsbeziehung

Auch für den allgemeiner Punkt  $x = 500$  geht man wie in Lastfall 1 vor:

Übertragungsbeziehung für  $x = 500$  nach Gleichung (3.84) ist die gleiche wie in Lastfall 1 nach Gleichung (4.27) mit dem Lastvektor  $\underline{Z}_x^0$  nach Gleichung (3.85):

$$\underline{Z}_x^0 = \begin{pmatrix} 17,3345 & -5,2892 & -2955,21 & 923,591 \\ -83,2623 & 16,2603 & 13971,2 & -2955,21 \\ -6,66539 \times 10^{-1} & 9,77055 \times 10^{-2} & 111,834 & -17,7513 \\ 15,4766 & -7,76093 & -2031,05 & 880,91 \\ 1,23894 \times 10^{-1} & -4,65922 \times 10^{-2} & -16,2603 & 5,28919 \\ 5,70114 \times 10^{-1} & -1,23894 \times 10^{-1} & -83,2623 & 17,3345 \\ 4,56393 \times 10^{-3} & -7,44348 \times 10^{-4} & -6,66539 \times 10^{-1} & 1,04144 \times 10^{-1} \\ -125413 & 89,8245 & 60366,0 & -12567,6 \\ -500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -125000 & 0 \\ 0 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9,7589 \\ 0,97589 \\ 1,21408 \times 10^{-1} \\ 1,21408 \times 10^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -183,571 \\ 863,657 \\ 6,95268 \\ -92,4312 \\ -0,746325 \\ -4,45551 \\ -3,58465 \times 10^{-2} \\ -1,21663 \times 10^6 \\ -4879,45 \\ 487,945 \\ 0 \\ -15176,1 \\ -60,7042 \\ -6,07042 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Nachdem dem Einsetzten der Werte von (4.37) in (4.27) sowie der Zustandsgrößen  $Z_i$ , aus Formel (4.36), ergeben sich durch ausrechnen der rechten Seite des Gleichungssystems (4.27) die Zustandsgrößen von  $Z_x$ . Dies kann für jede beliebige Schnittstelle mittels entsprechender Übertragungsbeziehung gemacht werden.

Das primäre Torsionsmoment geht aus Gleichung (3.92) hervor und nach Gleichung (3.93) lässt sich das sekundäre Torsionsmoment bestimmen.



<b>x</b>	<b>0</b>	<b>500</b>	<b>3000</b>	
$\bar{u}_x$	-6079,98	-4691,55	12494,9	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{w}_x$	0	163831	0	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{w}'_x$	345,447	293,805	-345,291	kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{v}_x$	0	-16379,8	0	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{v}'_x$	-34,5547	-29,3505	34,5291	kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{\vartheta}_x$	0	-815,267	0	kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{\vartheta}'_x$	-1,71931	-1,4617	1,72262	1/cm*kN/cm <sup>2</sup>
$M_{\omega,x}$	0	6,596326*10 <sup>6</sup>	-582761	kNcm <sup>2</sup>
$M_{T,x}$	14444,1	9564,65	-14832,6	kNcm
$M_{z,x}$	0	971,268	5827,61	kNcm
$Q_{y,x}$	0,966645	0,966645	0,966645	kN
$M_{y,x}$	0	75273,3	-3642,25	kNcm
$Q_{z,x}$	180,899	120,194	-183,327	kN
$N_x$	0	-6,07042	-36,4225	kN
$M_{Tp}$	-1246,52	-1059,75	1248,92	kNcm
$M_{Ts}$	15690,6	10624,4	-16081,5	kNcm

Tabelle 10: Zustandsgrößen für x=0, x=500, x=3000

#### 4.6.5 Verschiebungen der einzelnen Querschnittsknoten für die 3 betrachteten Stellen

Vorgehensweise wie in Lastfall 1:

x	0			500			3000		
f	$U_f$	$W_f$	$V_f$	$U_f$	$W_f$	$V_f$	$U_f$	$W_f$	$V_f$
0	-0,289523	0	0	-0,223407	7,80147	-0,779989	0,594994	0	0
1	-0,305977	0	0	-0,237384	8,1897	-0,779989	0,611445	0	0
2	0,532971	0	0	0,476129	7,80147	-2,7211	-0,227127	0	0
3	0,41819	0	0	0,378571	8,57792	-2,7211	-0,112194	0	0
4	0,647752	0	0	0,573686	7,02503	-2,7211	-0,34206	0	0
5	-0,157886	0	0	-0,111596	4,69569	-0,779989	0,463381	0	0
6	-0,0588847	0	0	-0,0273723	4,69569	-1,16821	0,36458	0	0
7	-0,026249	0	0	0,00021590	1,58991	-0,779989	0,331768	0	0
8	0,308785	0	0	0,285611	1,58991	-4,66221	0	0	0
9	0,0138051	0	0	0,0348668	2,75458	-4,66221	0,29544	0	0
10	0,603765	0	0	0,536354	0,425247	-4,66221	-0,29544	0	0
11	0,105388	0	0	0,112027	-1,51587	-0,779989	0,200155	0	0
12	0,0733937	0	0	0,0848831	-1,51587	-1,16821	0,232602	0	0

**Tabelle 11: Verschiebungen  $U_f$ ,  $W_f$ ,  $V_f$  der Querschnittsknoten für  $x=0$ ,  $x=500$ ,  $x=3000$  in [cm]**

#### 4.6.6 Normalspannungen und Schubflüsse

Für die Matrix  $\underline{\sigma}$  aus Gleichung (3.6) werden zunächst nach Gleichung (3.7) die Werten für  $\underline{\kappa}$  aus den Gleichung (3.1) bis (3.5) bestimmt:

x	0	500	3000
$\kappa_1$	0	-5,1881	$9,26614 \times 10^{-3}$
$\kappa_2$	0	$1,92948 \times 10^{-1}$	$-2,9073 \times 10^{-4}$
$\kappa_3$	0	$-1,9384 \times 10^{-2}$	$8,34412 \times 10^{-6}$
$\kappa_4$	0	$-9,61273 \times 10^{-4}$	$-6,77047 \times 10^{-6}$
$\kappa'_1$	$-1,25949 \times 10^{-2}$	$-8,20566 \times 10^{-3}$	$1,25991 \times 10^{-2}$
$\kappa'_2$	$4,68589 \times 10^{-4}$	$3,05057 \times 10^{-4}$	$-4,68706 \times 10^{-4}$
$\kappa'_3$	$-4,75433 \times 10^{-5}$	$-3,0337 \times 10^{-5}$	$4,75346 \times 10^{-5}$
$\kappa'_4$	$-2,34422 \times 10^{-6}$	$-1,51356 \times 10^{-6}$	$2,33919 \times 10^{-6}$

Tabelle 12: Matrixglieder von  $\underline{\kappa}$ 

Aus Gleichung (3.7) wird nun  $\sigma$  und  $\sigma'$  bestimmt:

x	0		500		3000	
	$\sigma_f$	$\sigma'_f$	$\sigma_f$	$\sigma'_f$	$\sigma_f$	$\sigma'_f$
0	0	$-1,25949 \times 10^{-2}$	-5,1881	$-8,20566 \times 10^{-3}$	$9,26614 \times 10^{-3}$	$1,25991 \times 10^{-2}$
1	0	$-1,30704 \times 10^{-2}$	-5,38194	$-8,50903 \times 10^{-3}$	$9,34958 \times 10^{-3}$	$1,30745 \times 10^{-2}$
2	0	$1,08345 \times 10^{-2}$	4,45931	$7,04718 \times 10^{-3}$	$-5,27053 \times 10^{-3}$	$-1,08362 \times 10^{-2}$
3	0	$7,53942 \times 10^{-3}$	3,11035	$4,92688 \times 10^{-3}$	$-1,18741 \times 10^{-2}$	$-7,54631 \times 10^{-3}$
4	0	$1,41296 \times 10^{-2}$	5,80826	$9,16748 \times 10^{-3}$	$1,33306 \times 10^{-3}$	$-1,41261 \times 10^{-2}$
5	0	$-8,7915 \times 10^{-3}$	-3,63738	$-5,77869 \times 10^{-3}$	$8,59861 \times 10^{-3}$	$8,79636 \times 10^{-3}$
6	0	$-5,98097 \times 10^{-3}$	-2,47692	$-3,93897 \times 10^{-3}$	$2,74906 \times 10^{-4}$	$5,98065 \times 10^{-3}$
7	0	$-4,98802 \times 10^{-3}$	-2,08667	$-3,35173 \times 10^{-3}$	$7,93108 \times 10^{-3}$	$4,99359 \times 10^{-3}$
8	0	$4,3633 \times 10^{-3}$	1,82777	$2,937 \times 10^{-3}$	$-1,2947 \times 10^{-1}$	$-4,45006 \times 10^{-3}$
9	0	$-4,09567 \times 10^{-3}$	-1,63757	$-2,51379 \times 10^{-3}$	$-1,49531 \times 10^{-1}$	$3,99354 \times 10^{-3}$
10	0	$1,28223 \times 10^{-2}$	5,29311	$8,38779 \times 10^{-3}$	$-1,09409 \times 10^{-1}$	$-1,28937 \times 10^{-2}$
11	0	$-1,18455 \times 10^{-3}$	-0,53595	$-9,2466 \times 10^{-4}$	$7,26355 \times 10^{-3}$	$1,19082 \times 10^{-3}$
12	0	$-2,1248 \times 10^{-3}$	-0,913525	$-1,50674 \times 10^{-3}$	$-1,18929 \times 10^{-3}$	$2,1178 \times 10^{-3}$

Tabelle 13: Matrixglieder von  $\underline{\sigma}$

Die Schubflüsse wie in **Abbildung 12** dargestellt, ergeben sich aus der Beziehung für  $\Delta T_{fg}$  aus Gleichung (3.97) und den Formeln (3.98):

x fg	0		500		3000	
	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$
0,1	$-1,5332 \times 10^{-1}$	$-1,5332 \times 10^{-1}$	$-9,96164 \times 10^{-2}$	$-9,96164 \times 10^{-2}$	$1,54713 \times 10^{-1}$	$1,54713 \times 10^{-1}$
2,3	$5,51218 \times 10^{-1}$	$5,51218 \times 10^{-1}$	$3,59222 \times 10^{-1}$	$3,59222 \times 10^{-1}$	$-5,51475 \times 10^{-1}$	$-5,51475 \times 10^{-1}$
2,4	$7,48923 \times 10^{-1}$	$7,48923 \times 10^{-1}$	$4,8644 \times 10^{-1}$	$4,8644 \times 10^{-1}$	$-7,48867 \times 10^{-1}$	$-7,48867 \times 10^{-1}$
2,0	1,30014		$8,45662 \times 10^{-1}$		-1,30034	
0,2	1,24733	$-5,2813 \times 10^{-2}$	$8,10908 \times 10^{-1}$	$-3,47542 \times 10^{-2}$	-1,24745	$5,28883 \times 10^{-2}$
12,11	$-1,0624 \times 10^{-2}$		$-7,53372 \times 10^{-3}$		$1,0589 \times 10^{-2}$	
11,12	$-2,71708 \times 10^{-2}$	$-1,65468 \times 10^{-2}$	$-1,96913 \times 10^{-2}$	$-1,21576 \times 10^{-2}$	$2,71321 \times 10^{-2}$	$1,65431 \times 10^{-2}$
11,7	$-2,71708 \times 10^{-2}$		$-1,96913 \times 10^{-2}$		$2,71321 \times 10^{-2}$	
7,11	$-3,22731 \times 10^{-1}$	$-2,9556 \times 10^{-1}$	$-2,24241 \times 10^{-1}$	$-2,04549 \times 10^{-1}$	$3,24706 \times 10^{-1}$	$2,97574 \times 10^{-1}$
8,9	$1,60574 \times 10^{-2}$	$1,60574 \times 10^{-2}$	$2,53925 \times 10^{-2}$	$2,53925 \times 10^{-2}$	$-2,73909 \times 10^{-2}$	$-2,73909 \times 10^{-2}$
8,10	1,03113	1,03113	$6,79487 \times 10^{-1}$	$6,79487 \times 10^{-1}$	-1,04062	-1,04062
8,7	1,04719		$7,0488 \times 10^{-1}$		-1,06801	
7,8	1,00971	$-3,74831 \times 10^{-2}$	$6,79995 \times 10^{-1}$	$-2,4884 \times 10^{-2}$	-1,0354	$3,2612 \times 10^{-2}$
7,5	$6,86977 \times 10^{-1}$		$4,55755 \times 10^{-1}$		$-7,10695 \times 10^{-1}$	
5,7	$3,09345 \times 10^{-2}$	$-6,56043 \times 10^{-1}$	$2,28677 \times 10^{-2}$	$-4,32887 \times 10^{-1}$	$-4,34043 \times 10^{-2}$	$6,67291 \times 10^{-1}$
6,5	$-2,99048 \times 10^{-2}$		$-1,96949 \times 10^{-2}$		$2,99032 \times 10^{-2}$	
5,6	$-1,03767 \times 10^{-1}$	$-7,38622 \times 10^{-2}$	$-6,82832 \times 10^{-2}$	$-4,85883 \times 10^{-2}$	$1,03788 \times 10^{-1}$	$7,3885 \times 10^{-2}$
5,0	$-7,27833 \times 10^{-2}$		$-4,54155 \times 10^{-2}$		$6,03839 \times 10^{-2}$	
0,5	-1,09401	-1,02118	$-7,11291 \times 10^{-1}$	$-6,65876 \times 10^{-1}$	1,09274	1,03236

**Tabelle 14: Schubflüsse  $T_{fg}$  und die Änderung des Schubflusses  $\Delta T_{fg}$  über die Blechlänge in [kN/cm]**

## 4.7 Lastfall 2c: Nutzlast über dem langen Steg

### 4.7.1 Einwirkung zur Ermittlung der maximale Durchbiegung des langen Steges

$$q = 0,01 \text{ kN/cm}$$

$$y_x = y_z = (-e)$$

$$e = 160 \text{ cm}$$

$$z_x = z_y = \omega_x = 0 \quad \text{d.h.: } m_y = m_\omega = 0$$

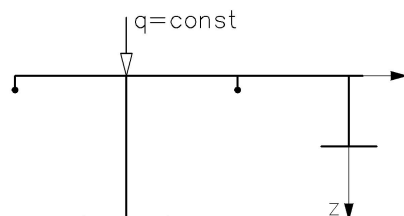


Abbildung 22: Angriffspunkt für die Liniennlast

$$q_x = q \sin \gamma = 9,95037 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}$$

$$m_z = -q_x \cdot y_x = 0,159206 \text{ kN}$$

$$q_z = q \cdot \cos \gamma = 9,95037 \times 10^{-3} \text{ kN/cm}$$

$$m_T = -q_z \cdot y_z = 1,59206 \text{ kN}$$

### 4.7.2 Gleichungssystem i nach k

Es wird zunächst die Übertragungsbeziehung von i nach k unter Berücksichtigung aller Randbedingungen aufgestellt um die Zustandsvektoren von Anfangs- und Endpunkt zu bestimmen, dies entspricht Gleichung (4.24) mit dem Lastvektor  $\underline{z}_k^0$  nach Gleichung (3.85) angegeben. Die Belastungen dieses Lastfalls sind  $m_T$ ,  $m_z$ ,  $q_z$ ,  $q_x$ :

$$\underline{z}_k^0 = \begin{pmatrix} 4012,62 & -202,724 & -677521 & 34972,0 \\ -113023 & 3792,37 & 1,88536 \times 10^7 & -677521 \\ -154,292 & 3,99084 & 25663,1 & -705,29 \\ 21008,4 & -1728,43 & -2,77109 \times 10^6 & 197562 \\ 28,6793 & -1,76532 & -3792,37 & 202,724 \\ 773,890 & -28,6793 & -113023 & 4012,62 \\ 1,05647 & -3,00383 \times 10^{-2} & -154,292 & 4,20275 \\ -5,06108 \times 10^6 & 20792,8 & 8,19426 \times 10^7 & -2,90918 \times 10^6 \\ -3000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,5 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,59206 \\ 0,159206 \\ 9,95037 \times 10^{-3} \\ 9,95037 \times 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -286,19 \\ 6383,52 \\ 8,37896 \\ 6344,94 \\ 8,40646 \\ 116,019 \\ 0,155663 \\ -7,24838 \times 10^6 \\ -4776,18 \\ -477,618 \\ 0 \\ -44776,7 \\ -29,8511 \\ -2,98511 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

### 4.7.3 Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $\underline{Z}_i$

Durch Einsetzen von (4.38) in (4.24) ergibt sich das lineare Gleichungssystem. Dass von der letzten Zeile an aufwärts gelöst wird, wie im Lastfall 1 vorgeführt wurde. Woraus sich unter Berücksichtigung der Verschiebung die Zustandsgrößen für den Anfangspunkt zu:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i &= 294,569 & M_{T,i} &= 2372,17 \\
 \bar{w}'_i &= 3,40122 & Q_{y,i} &= 0,318412 \\
 \bar{v}'_i &= 1,79834 & Q_{z,i} &= 14,8261 \\
 \bar{\vartheta}'_i &= 0,0296588 & & 
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

### 4.7.4 Durchbiegung in Stabmitte

Nun kann mittels Übertragungsmatrix für  $x=1500$ , diese entspricht Gleichung (4.32) die Durchbiegung in Stabmitte ausgerechnet werden, mit folgendem für  $\underline{Z}_k^0$ :

$$\underline{Z}_k^0 = \begin{pmatrix} 475,505 & -48,2816 & -80882,4 & 8407,31 \\ -6815,93 & 446,831 & 1,14213 \times 10^6 & -80882,4 \\ -18,2839 & 0,905454 & 3061,48 & -163,415 \\ 1266,93 & -210,995 & -166461 & 23987,5 \\ 3,39857 & -0,424182 & -446,831 & 48,2816 \\ 46,6701 & -3,39857 & -6815,93 & 475,505 \\ 0,125194 & -0,00687787 & -18,2839 & 0,962305 \\ -1,15884 \times 10^6 & 2463,99 & 4,94161 \times 10^6 & -344745 \\ -1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,125 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -1500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,59206 \\ 0,159206 \\ 9,95037 \times 10^{-3} \\ 9,95037 \times 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31,7259 \\ 361,657 \\ 1,04697 \\ 418,133 \\ 1,08016 \\ 7,4947 \\ 0,0194366 \\ -1,7965 \times 10^6 \\ -2388,09 \\ -238,809 \\ 0 \\ -11194,2 \\ -14,9256 \\ -1,49256 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

es sind alle Größen auf der rechten Seite der Übertragsbeziehung bekannt und es ergibt sich nach einsetzen von (4.39) und (4.40) in die Übertragungsbeziehung (4.32) der Zustandvektor für die Schnittstelle  $x=1500$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_x &= 408,204 & M_{\omega,x} &= 1,74711 \times 10^6 \\
 \bar{w}_x &= 3195,56 & M_{T,x} &= -15,9206 \\
 \bar{w}'_x &= -3,38469 \times 10^{-3} & M_{z,x} &= 238,809 \\
 \bar{v}_x &= 1684,31 & Q_{y,x} &= 3,18412 \times 10^{-1} \\
 \bar{v}'_x &= 1,60988 \times 10^{-4} & M_{y,x} &= 11044,9 \\
 \bar{\vartheta}_x &= 27,6904 & Q_{z,x} &= -9,95037 \times 10^{-2} \\
 \bar{\vartheta}'_x &= -6,65802 \times 10^{-5} & N_x &= -1,49256
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

#### 4.7.5 Durchbiegung aus der Linienlast und Nulldurchgang an der Stelle $x=1500$

Da festgelegt wurde, dass jener Teil des Deckblechs mit der Nutzlast zu belasten ist, der die größte positive Durchbiegung verursacht, muss nun der Nulldurchgang der Biegelinie im Deckblech des Querschnittes in Stabmitte bestimmt werden.

Nach Gleichung (3.91) ergeben sich also für die 5 Knoten des Deckblechs folgende Verschiebungen in z-Richtung:

f	11	7	5	0	1
$W_f$	0,468631	0,363144	0,257657	0,15217	0,138984

**Tabelle 15: Knotenverschiebungen [cm] des Deckbleches, Knoten von links nach rechts**

Es findet kein Vorzeichenwechsel statt, daher muss das gesamte Deckblech belastet werden. Dies entspricht exakt dem Lastfall 2a: Nutzlast auf dem gesamten Deckblech.

## 4.8 Lastfall 3a: Wind; Druck

### 4.8.1 Einwirkung

Die Windlast wirkt als Linienlast entlang des Deckblechrandes.

$$w_{Ed} = 0,03 \text{ kN/cm}$$

$$q_y = w_{Ed} = 0,03 \text{ kN/cm}$$

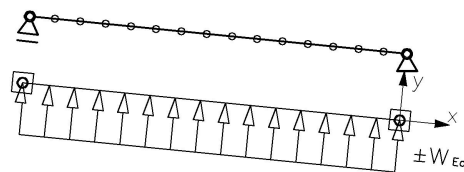


Abbildung 23: Wirkungsrichtung der Windlast

Die Berechnung erfolgt analog zu LF 1 Eigengewicht, allerdings mit nur einer Einwirkungskomponenten  $q_y$ .

### 4.8.2 Übertragungsbeziehung für $x = l = 3000$

Die Übertragungsbeziehung von  $i$  nach  $k$  ist in Gleichung (4.24) angegeben. Mit dem Lastvektor  $\underline{z}_k^0$  nach Gleichung (3.85). Er ergibt sich auf Grund der vorhandenen Belastung mit  $q_y$  zu:

$$\underline{z}_k^0 = \begin{pmatrix} 197562 \\ -2,77109 \times 10^6 \\ -3792,37 \\ 1,28272 \times 10^6 \\ 1728,43 \\ 21008,4 \\ 28,6793 \\ -1,52313 \times 10^7 \\ 0 \\ -4,5 \times 10^{-6} \\ -3000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0,03 = \begin{pmatrix} 5926,86 \\ -83132,7 \\ -113,771 \\ 38481,6 \\ 51,853 \\ 630,251 \\ 0,860638 \\ -456938 \\ 0 \\ -135000 \\ -90 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$



### 4.8.3 Bestimmen der fehlenden Zustandsgrößen für den Zustandvektor $\underline{Z}_i$

Wie in Lastfall 1 wird beginnend von unten nach oben zuerst der Zustandsvektors vom Anfangspunkt  $i$  und vom Endpunkt  $k$  bestimmt. Dafür werden die bekannten Größen an der Stelle  $x=l=3000$  eingesetzt und jene Zeilen des Gleichungssystems von unten schrittweise gelöst:

Aus **Zeile 14** ergibt sich  $N_k$  zu:

$$N_k = 0$$

Nun kann für die Randbedingungen (4.19) bis (4.21) eingesetzt werden und es geben sich:

$$M_{y,k} = N_k \cdot z_8 = 0$$

$$M_{z,k} = N_k \cdot y_8 = 0$$

$$M_{\omega,k} = N_k \cdot \omega_8 = 0$$

Aus **Zeile 12** ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für  $Q_{z,i}$ :

$$M_{y,k} = 0 = 3000 \cdot Q_{z,i} \rightarrow Q_{z,i} = 0$$

Mittels **Zeile 10** ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für  $Q_{y,i}$ :

$$M_{z,k} = 0 = 3000 \cdot Q_{y,i} - 135000 \rightarrow Q_{y,i} = 45$$

Mit Gleichung (3.74) ergibt sich für die Gabellagerung eine zusätzliche Bestimmungsgleichung für  $M_{T,i}$ , die umgeformt wie folgt lautet:

$$M_{T,i} = \frac{1}{a_1} (M_{\omega,k}) = 0$$

nun sind alle Schnittgrößen auf den der Stelle  $i$  bekannt!

Für  $\bar{\vartheta}'_i$  ergibt sich aus der **Zeile 8** mit den oben angegebenen Werten zu:

$$M_{\omega,k} = -l_T^* b_1 \bar{\vartheta}'_i + b_1 M_{T,i} + c_{43,3}^* Q_{y,i} + c_{42,3}^* Q_{z,i} - 458959 \rightarrow \bar{\vartheta}'_i = 0,175339$$

Aus der **Zeile 4** der Übertragungsbeziehung nach Einsetzen errechnet sich  $\bar{v}'_i$  zu:

$$\bar{v}_k = 0 = a_1 \bar{v}'_i + c_{34,3}^* \bar{\vartheta}'_i - c_{34,3} M_{T,i} - c_{33,3} Q_{y,i} - c_{32,3} Q_{z,i} + 38485,1 \rightarrow \bar{v}'_i = 11,884$$

$\bar{w}_i$  kann aus der **Zeile 2** ausgedrückt werden:

$$\bar{w}_k = 0 = a_1 \bar{w}'_i + c_{24,3}^* \bar{\vartheta}'_i - c_{24,3} M_{T,i} - c_{23,3} Q_{y,i} - c_{22,3} Q_{z,i} - 83152,1 \rightarrow \bar{w}'_i = -22,6367$$

#### 4.8.4 Berechnung von $u_i$ aus $u_k$

Man geht analog wie bei Lastfall 1 Eigengewicht mit Aufbau vor.

Um die Gleichung (4.25) für  $\bar{u}_k$  lösen zu können, werden  $\bar{w}'_k$ ,  $\bar{v}'_k$  und  $\bar{\vartheta}'_k$  bestimmt:

Aus **Zeile 3** folgt:  $\bar{w}'_k = 22,6367$

Die **Zeile 5** liefert:  $\bar{v}'_k = -11,884$

Mit **Zeile 7** bestimmt man:  $\bar{\vartheta}'_k = -0,175339$

Es sind alle nun Größen außer  $\bar{u}_k$  bekannt, weshalb sich mittels Umformung von Gleichung (4.25)  $\bar{u}_k = -1359,68$  ergibt.

Sobald die Verschiebung am Stabende bekannt ist, wird in die **1. Zeile** der Übertragungsbeziehung eingesetzt, woraus sich die letzte Zustandsgröße für den Anfangspunkt ergibt.

$$\bar{u}_i + 1301,75 = 0 \rightarrow \bar{u}_i = 1301,75$$

Damit ist der Zustandsvektor  $\underline{z}_i$  vollständig bestimmt.

Die von Null verschiedenen Zustandsgrößen lauten also:

$$\begin{array}{ll}
 \bar{u}_i = 1301,75 & M_{T,i} = 0 \\
 \bar{w}'_i = -22,6367 & Q_{y,i} = 45 \\
 \bar{v}'_i = 11,884 & Q_{z,i} = 0 \\
 \bar{\vartheta}'_i = 0,175339 &
 \end{array}
 \tag{4.43}$$

#### 4.8.5 Bestimmen des Zustandsvektor $\underline{Z}_x$ für $x = 500$ mittels Übertragungsbeziehung

Die Übertragungsbeziehung für  $x = 500$  lautet nach Gleichung (3.84) wie in Gleichung (4.27) mit  $\underline{Z}_x^0$  aus Gleichung (3.85)

$$\underline{Z}_x^0 = \begin{pmatrix} 880,91 \\ -2031,05 \\ -16,2603 \\ 969,839 \\ 7,76093 \\ 15,4766 \\ 0,123894 \\ -11220,71 \\ 0 \\ -125000 \\ -500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0,03 = \begin{pmatrix} 26,4273 \\ -60,9315 \\ -0,48781 \\ 29,0952 \\ 0,232828 \\ 0,464297 \\ 3,71683 \times 10^{-3} \\ -336,62 \\ 0 \\ -3750 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Nachdem man die Werte von (4.44) in (4.27) eingesetzt hat, und die Zustandsgrößen von  $\underline{Z}_i$ , in Formel (4.43) angegeben, eingesetzt hat. Ergeben sich durch ausrechnen der rechten Seit des Gleichungssystems die Zustandsgrößen von  $\underline{Z}_x$ . Dies kann für jede beliebige Schnittstelle gemacht werden.

Das primäre Torsionsmoment geht aus Gleichung (3.92) hervor und nach Gleichung (3.93) lässt sich das sekundäre Torsionsmoment bestimmen.

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>500</b>	<b>3000</b>	
$\bar{U}_x$	1301,75	1103,41	-1359,68	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{W}_x$	0	-10732,3	0	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{W}'_x$	-22,6367	-19,2368	22,6367	N/cm <sup>2</sup>
$\bar{V}_x$	0	5637,61	0	cm*kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{V}'_x$	-11,884	10,1148	-11,884	kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{\vartheta}_x$	0	83,1389	0	kN/cm <sup>2</sup>
$\bar{\vartheta}'_x$	-0,175339	0,149046	-0,175339	1/cm*kN/cm <sup>2</sup>
$M_{\omega,x}$	0	-60276,5	0	kNcm <sup>2</sup>
$M_{T,x}$	0	$-7,92497 \times 10^{-13}$	0	kNcm
$M_{z,x}$	0	18750	0	kNcm
$Q_{y,x}$	45	30	-45	kN
$M_{y,x}$	0	0	0	kNcm
$Q_{z,x}$	0	0	0	kN
$N_x$	0	0	0	kN
$M_{Tp}$	-127,123	108,06	-127,123	kNcm
$M_{Ts}$	-127,123	-108,06	-127,123	kNcm

**Tabelle 16: Zustandsgrößen für  $x = 0$ ,  $x = 500$ ,  $x = 3000$**

#### 4.8.6 Verschiebungen der einzelnen Querschnittsknoten für die 3 betrachteten Stellen

Man geht wie in Lastfall 1 vor:

x	0			500			3000		
f	$U_f$	$W_f$	$V_f$	$U_f$	$W_f$	$V_f$	$U_f$	$W_f$	$V_f$
0	$6,196883 \times 10^{-2}$	0	0	$5,25432 \times 10^{-2}$	$-5,11061 \times 10^{-1}$	$2,68458 \times 10^{-1}$	$-6,47467 \times 10^{-2}$	0	0
1	$6,76473 \times 10^{-2}$	0	0	$5,73598 \times 10^{-2}$	$-5,50651 \times 10^{-1}$	$2,68458 \times 10^{-1}$	$-7,04058 \times 10^{-2}$	0	0
2	$8,09146 \times 10^{-3}$	0	0	$6,74128 \times 10^{-3}$	$-5,11061 \times 10^{-1}$	$4,66407 \times 10^{-1}$	$-1,08499 \times 10^{-2}$	0	0
3	$2,77591 \times 10^{-2}$	0	0	$2,34719 \times 10^{-2}$	$-5,90241 \times 10^{-1}$	$4,66407 \times 10^0$	$-3,05175 \times 10^{-2}$	0	0
4	$-1,15561 \times 10^{-2}$	0	0	$-9,98931 \times 10^{-3}$	$-4,31881 \times 10^{-1}$	$4,66407 \times 10^0$	$8,8177 \times 10^{-3}$	0	0
5	$1,67158 \times 10^{-2}$	0	0	$1,40105 \times 10^{-2}$	$-1,94342 \times 10^{-1}$	$2,68458 \times 10^{-1}$	$-1,94743 \times 10^{-2}$	0	0
6	$1,26161 \times 10^{-2}$	0	0	$1,05281 \times 10^{-2}$	$-1,94342 \times 10^{-1}$	$3,08048 \times 10^{-1}$	$-1,53745 \times 10^{-2}$	0	0
7	$-2,85566 \times 10^{-2}$	0	0	$-2,45221 \times 10^{-2}$	$1,22378 \times 10^{-1}$	$2,68458 \times 10^{-1}$	$2,57982 \times 10^{-2}$	0	0
8	$-2,75844 \times 10^{-3}$	0	0	$-2,56695 \times 10^{-3}$	$1,22378 \times 10^{-1}$	$6,64357 \times 10^{-1}$	0	0	0
9	$3,92672 \times 10^{-2}$	0	0	$3,31751 \times 10^{-2}$	$3,60813 \times 10^{-4}$	$6,64357 \times 10^0$	$-4,20256 \times 10^{-2}$	0	0
10	$-4,47741 \times 10^{-2}$	0	0	$-3,8309 \times 10^{-2}$	$2,41148 \times 10^{-1}$	$6,64357 \times 10^0$	$4,20256 \times 10^{-2}$	0	0
11	$-7,38291 \times 10^{-2}$	0	0	$-6,30547 \times 10^{-2}$	$4,39097 \times 10^{-1}$	$2,68458 \times 10^{-1}$	$7,10706 \times 10^{-2}$	0	0
12	$-6,45697 \times 10^{-2}$	0	0	$-5,51813 \times 10^{-2}$	$4,39097 \times 10^{-1}$	$3,08048 \times 10^{-1}$	$6,18112 \times 10^{-2}$	0	0

**Tabelle 17: Verschiebungen  $U_f$ ,  $W_f$ ,  $V_f$  der Querschnittsknoten für  $x=0$ ,  $x=500$ ,  $x=3000$  in [cm]**

#### 4.8.7 Normalspannungen und Schubflüsse

Für die Matrix  $\underline{\sigma}$  aus Gleichung (3.6) werden zunächst nach Gleichung (3.7) die Werte für  $\underline{\kappa}$  aus den Gleichung (3.1) bis (3.5) bestimmt und in **Tabelle 18** angegeben:

x	0	500	3000
$\kappa_1$	0	$7,41927 \times 10^{-1}$	0
$\kappa_2$	0	$-1,26774 \times 10^{-2}$	0
$\kappa_3$	0	$6,621 \times 10^{-3}$	0
$\kappa_4$	0	$9,81057 \times 10^{-5}$	0
$\kappa'_1$	$1,79519 \times 10^{-3}$	$1,17744 \times 10^{-3}$	$-1,79519 \times 10^{-3}$
$\kappa'_2$	$-3,09859 \times 10^{-5}$	$-1,99129 \times 10^{-5}$	$3,09859 \times 10^{-5}$
$\kappa'_3$	$1,59947 \times 10^{-5}$	$1,05248 \times 10^{-5}$	$-1,59947 \times 10^{-5}$
$\kappa'_4$	$2,39289 \times 10^{-7}$	$1,54429 \times 10^{-7}$	$-2,39289 \times 10^{-7}$

Aus Gleichung (3.7) wird nun  $\sigma$  und  $\sigma'$  bestimmt:

x	0		500		3000	
	$\sigma_f$	$\sigma'_f$	$\sigma_f$	$\sigma'_f$	$\sigma_f$	$\sigma'_f$
0	0	$1,79519 \times 10^{-3}$	$7,41927 \times 10^{-1}$	$1,17744 \times 10^{-3}$	0	$-1,79519 \times 10^{-3}$
1	0	$1,95514 \times 10^{-3}$	$8,08138 \times 10^{-1}$	$1,28268 \times 10^{-3}$	0	$-1,95514 \times 10^{-3}$
2	0	$2,45896 \times 10^{-4}$	$1,08056 \times 10^{-1}$	$1,8179 \times 10^{-4}$	0	$-2,45896 \times 10^{-4}$
3	0	$8,0508 \times 10^{-4}$	$3,38584 \times 10^{-1}$	$5,46715 \times 10^{-4}$	0	$-8,0508 \times 10^{-4}$
4	0	$-3,13287 \times 10^{-4}$	$-1,22472 \times 10^{-1}$	$-1,83135 \times 10^{-4}$	0	$3,13287 \times 10^{-4}$
5	0	$5,15612 \times 10^{-4}$	$2,12239 \times 10^{-1}$	$3,354552 \times 10^{-4}$	0	$-5,15612 \times 10^{-4}$
6	0	$3,97184 \times 10^{-4}$	$1,6395 \times 10^{-1}$	$2,59866 \times 10^{-4}$	0	$-3,97184 \times 10^{-4}$
7	0	$-7,63968 \times 10^{-4}$	$-3,17449 \times 10^{-1}$	$-5,06533 \times 10^{-4}$	0	$7,63968 \times 10^{-4}$
8	0	$-3,39395 \times 10^{-5}$	$-1,55001 \times 10^{-2}$	$-2,69596 \times 10^{-5}$	0	$3,39395 \times 10^{-5}$
9	0	$1,16377 \times 10^{-3}$	$4,7745 \times 10^{-1}$	$7,52072 \times 10^{-4}$	0	$-1,16377 \times 10^{-3}$
10	0	$-1,23165 \times 10^{-3}$	$-5,0845 \times 10^{-1}$	$-8,05991 \times 10^{-4}$	0	$1,23165 \times 10^{-3}$
11	0	$-2,04355 \times 10^{-3}$	$-8,47136 \times 10^{-1}$	$-1,34852 \times 10^{-3}$	0	$2,04355 \times 10^{-3}$
12	0	$-1,77911 \times 10^{-3}$	$-7,38457 \times 10^{-1}$	$-1,17702 \times 10^{-3}$	0	$1,77911 \times 10^{-3}$

**Tabelle 19: Matrixglieder von  $\underline{\sigma}$**

Die Schubflüsse ergeben sich aus der Beziehung für  $\Delta T_{fg}$  aus Gleichung (3.97) und den Formeln (3.98):

x[cm] fg	0		500		3000	
	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$	$T_{fg}$	$\Delta T_{fg}$
0,1	$-2,2502 \times 10^{-2}$	$-2,2502 \times 10^{-2}$	$1,47607 \times 10^{-2}$	$1,47607 \times 10^{-2}$	$-2,2502 \times 10^{-2}$	$-2,2502 \times 10^{-2}$
2,3	$-3,15293 \times 10^{-2}$	$-3,15293 \times 10^{-2}$	$2,18552 \times 10^{-2}$	$2,18552 \times 10^{-2}$	$-3,15293 \times 10^{-2}$	$-3,15293 \times 10^{-2}$
2,4	$2,02173 \times 10^{-3}$	$2,02173 \times 10^{-3}$	$-4,0346 \times 10^{-5}$	$-4,0346 \times 10^{-5}$	$2,02173 \times 10^{-3}$	$2,02173 \times 10^{-3}$
2,0	$-2,95075 \times 10^{-2}$		$2,18148 \times 10^{-2}$		$-2,95075 \times 10^{-2}$	
0,2	$-9,07402 \times 10^{-2}$	$-6,12326 \times 10^{-2}$	$6,25916 \times 10^{-2}$	$4,07768 \times 10^{-2}$	$-9,07402 \times 10^{-2}$	$-6,12326 \times 10^{-2}$
12,11	$8,89557 \times 10^{-3}$		$-5,88508 \times 10^{-3}$		$8,89557 \times 10^{-3}$	
11,12	$2,80089 \times 10^{-2}$	$1,91133 \times 10^{-2}$	$-1,85127 \times 10^{-2}$	$-1,26277 \times 10^{-2}$	$2,80089 \times 10^{-2}$	$1,91133 \times 10^{-2}$
11,7	$2,80089 \times 10^{-2}$		$-1,85127 \times 10^{-2}$		$2,80089 \times 10^{-2}$	
7,11	$1,6277 \times 10^{-2}$	$1,34761 \times 10^{-1}$	$-1,07555 \times 10^{-1}$	$-8,90424 \times 10^{-2}$	$1,6277 \times 10^{-2}$	$1,34761 \times 10^{-1}$
8,9	$-6,77897 \times 10^{-2}$	$-6,77897 \times 10^{-2}$	$4,35067 \times 10^{-2}$	$4,34779 \times 10^{-2}$	$-6,77897 \times 10^{-2}$	$-6,77897 \times 10^{-2}$
8,10	$7,59352 \times 10^{-2}$	$7,59352 \times 10^{-2}$	$-4,9977 \times 10^{-2}$	$-4,9977 \times 10^{-2}$	$7,59352 \times 10^{-2}$	$7,59352 \times 10^{-2}$
8,7	$8,14549 \times 10^{-3}$		$-6,47032 \times 10^{-3}$		$8,14549 \times 10^{-3}$	
7,8	$5,60199 \times 10^{-2}$	$4,78744 \times 10^{-2}$	$-3,84799 \times 10^{-2}$	$-3,20095 \times 10^{-2}$	$5,60199 \times 10^{-2}$	$4,78744 \times 10^{-2}$
7,5	$2,18789 \times 10^{-1}$		$-1,46035 \times 10^{-1}$		$2,18789 \times 10^{-1}$	
5,7	$2,30711 \times 10^{-1}$	$1,19211 \times 10^{-2}$	$-1,54247 \times 10^{-1}$	$-8,21188 \times 10^{-3}$	$2,30711 \times 10^{-1}$	$1,19211 \times 10^{-2}$
6,5	$-1,98592 \times 10^{-3}$		$1,29933 \times 10^{-3}$		$-1,98592 \times 10^{-3}$	
5,6	$-6,5499 \times 10^{-3}$	$-4,56398 \times 10^{-3}$	$4,27592 \times 10^{-3}$	$2,97659 \times 10^{-3}$	$-6,5499 \times 10^{-3}$	$-4,56398 \times 10^{-3}$
5,0	$2,24161 \times 10^{-1}$		$-1,49971 \times 10^{-1}$		$2,24161 \times 10^{-1}$	
0,5	$1,13242 \times 10^{-1}$	$-1,10919 \times 10^{-1}$	$-7,73523 \times 10^{-2}$	$7,26186 \times 10^{-2}$	$1,13242 \times 10^{-1}$	$-1,10919 \times 10^{-1}$

**Tabelle 20: Schubflüsse  $T_{fg}$  und die Änderung des Schubflusses  $\Delta T_{fg}$  über die Blechlänge in [kN/cm]**

## **4.9 Lastfall 3b: Wind; Sog**

Die Zustandsgrößen dieses Lastfalls entsprechen denjenigen vom Lastfall 3a) mit entgegengesetztem Vorzeichen, gleiches gilt für die Spannungen und Verschiebungen.



## 4.10 Übergang zur konventionellen Formulierung

Die Matrix  $\underline{D}$  ist aus Gleichung (4.3) bekannt.

Aus den Gleichung (3.116) bis (3.121) ergibt sich:

$$z_S = 43,333\text{cm}, y_S = -111,379\text{cm}$$

$$I_{y^*} = 1,518 \times 10^6 \text{cm}^4, I_{y^*z^*} = -633000 \text{cm}^4, I_{z^*} = 5,00134 \times 10^6 \text{cm}^4$$

$$\alpha = 9,98668^\circ$$

Gleichung (3.122) liefert Hauptträgheitsmomente:

$$I_1 = 5,11281 \times 10^6 \text{cm}^4, I_2 = 1,40654 \times 10^6 \text{cm}^4$$

Aus dem Gleichungssystem (3.123) folgt der Schubmittelpunkt

$$y_M = -146,045\text{cm}, z_M = -27,146\text{cm}$$

und aus Gleichung (3.124):

$$\omega_0 = 3798,14\text{cm}^2$$

Nach Gleichung (3.125) errechnet sich schließlich das Wölbträgheitsmoment zu:

$$I_\omega = 4,57384 \times 10^9 \text{cm}^6$$

Diese Werte stimmen exakt mit denen aus der parallel geführten Arbeit [2], die die konventionelle Rechenmethode verwendet, überein. Der Übergang mit den gegebenen Formeln ist somit möglich!

## 5. VERGLEICH „ENTKOPPELTES“ – „GEKOPPELTES VERFAHREN“

### 5.1 Allgemein

Die Berechnung nach dem „entkoppelten Verfahren“ ist in [2] gezeigt. Sie liefert exakt dieselben Spannungen sowie Schubflüsse, wie die vorliegende Arbeit. Für den Vergleich werden die Unterschiede bei der Anwendung des jeweiligen Verfahrens erfasst und anschließend zusammengefasst.

### 5.2 Unterschiede

#### 5.2.1 Querschnittswerte

Zu Beginn der Berechnung nach dem „entkoppelten Verfahren“ muss das Hauptachsensystem für vorliegenden Querschnitt ermittelt werden (Schwerpunkt, Schubmittelpunkt und Hauptachsen). Dies entfällt beim „gekoppelten Verfahren“.

#### 5.2.2 Rechenweise

Für die „entkoppelte Methode“ werden lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen 4. Ordnung bzw. 2. Ordnung aufgestellt und gelöst. Die Lösungen liefern unmittelbar die Funktionen der Biegelinien für alle Schnittstellen. Aus den Biegelinien können dann über die Differentialbeziehungen alle Zustandsgrößen bestimmt werden.

Bei der „gekoppelten Methode“ resultieren die Ergebnisse aus linearen Gleichungssystemen. Die Matrixglieder der Gleichungssysteme sind von der Schnittstelle  $x$  abhängig, daher ist es notwendig, für jedes  $x$  eine eigene Übertragungsbeziehung zu formulieren.

#### 5.2.3 Handrechnung

Da für jede unbekannte Verschiebung jeweils eine eigene Differentialgleichung vorhanden ist, kann das „entkoppelte Verfahren“ leicht händisch angewandt werden.

Das „gekoppelte Verfahren“ kann ebenfalls per Hand gerechnet werden, da man das Gleichungssystem als einzelne Gleichungen mit jeweils nur einer Unbekannten lösen kann. Eine

händische Rechnung empfiehlt sich allerdings nur, wenn wenige Schnittstellen gefragt sind, da für jedes  $x$  alle Matrixglieder neu berechnet werden müssen.

#### **5.2.4 Schwerpunkt und Schubmittelpunkt**

Bei der Anwendung der „gekoppelten Methode“ muss die Schwerpunktlage sowie die Lage des Schubmittelpunkts nicht berechnet werden. Dies stellt eine erhebliche Erleichterung dar.

#### **5.2.5 Transparenz**

Beim „entkoppelten Verfahren“ können die Spannungen für jede Schnittgröße separat ausgerechnet werden, sodass parallel zur Berechnung eine Querschnittsoptimierung erfolgen kann. Zudem ist die Fehlersuche während des Rechenvorgangs einfacher.

### **5.3 Zusammenfassung**

Die entkoppelten Differentialgleichungen gliedern das Biege- und Torsionsproblem in vier Teilprobleme. Die Berechnung ist dadurch gut strukturiert und nachvollziehbar. Die vier einzelnen Teilprobleme lassen sich nacheinander lösen, was die Fehleranfälligkeit reduziert.

Dies ist bei der „gekoppelten Methode“ nicht gegeben.

Bei der „gekoppelten Berechnung“ erspart man sich eine eigene Ermittlung der Querschnittswerte. Sie liefert über die Übertragungsbeziehung neben den Schnittgrößen sofort alle Verschiebungsgrößen im betrachteten Punkt. Allerdings werden die Zustandsgrößen nicht als Funktion ausgedrückt, weshalb für jede Schnittstelle eine neue Übertragungsbeziehung aufgestellt werden muss. Sind die Zustandsgrößen bekannt, ermöglicht die „gekoppelte Berechnung“ durch eine einfache Matrizenmultiplikation die Bestimmung der Normalspannungen in jedem Querschnittspunkt.

Da die Übertragungsbeziehung auch die Verwölbung berücksichtigt, resultieren nach Eingabe der richtigen Lastkomponenten sofort die exakten Ergebnisse und es werden alle Spannungserzeugenden Einflüsse erfasst.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] *Rubin, Helmut*: Berechnung dünnwandiger Stäbe mit offenem Querschnitt bei Beanspruchung durch Längskraft, zweiachsige Biegung und Torsion ohne Bestimmung von Schwerpunkt, Schubmittelpunkt und Hauptachsen, Institut für Baustatik, TU Wien 2008
- [2] *Söllner, Christina*: Berechnung eines Fußgängersteiges aus Stahl unter Normalkraft, zweiachsiger Biegung und Wölbkrafttorsion nach zwei Methoden“, Teil 1: Entkoppelte Berechnung unter Berücksichtigung von Schwerpunkt, Hauptachsen und Schubmittelpunkt sowie Ermittlung der Wölbspannungen nach dem Drillträgerverfahren. Diplomarbeit am Institut für Stahlbau, TU Wien 2008
- [3] *Bautabellen für Ingenieure*, Kapitel 2A Mathematik, S. 2.31 bis 2.33, 18. Auflage, Köln: Wolters Kluwer 2008

**ANHANG A: AUFSATZ VON O.PROF. DR.TECHN. DIPL-ING.  
HELMUT RUBIN**

# Berechnung dünnwandiger Stäbe mit offenem Querschnitt bei Beanspruchung durch Längskraft, zweiachsige Biegung und Torsion ohne Bestimmung von Schwerpunkt, Schubmittelpunkt und Hauptachsen

*Helmut Rubin*

Für einen allgemeinen beanspruchten, prismatischen Stab wird ein Berechnungskonzept gezeigt, bei dem die Beziehungen zwischen den Schnittgrößen und Verzerungen des Stabelements nicht normiert, sondern in gekoppelter Form dargestellt werden. Dies bedeutet, daß der gesamten Berechnung ein beliebig wählbares Koordinatensystem  $y, z$  im Querschnitt zugrunde gelegt wird und daß Schwerpunkt, Schubmittelpunkt und Hauptachsen mit zugehörigen Querschnittsgrößen nicht bestimmt werden müssen.

Auf Basis dieses Konzepts wird die Übertragungsbeziehung entwickelt, welche die vollständige Berechnung der Schnitt- und Verschiebungsgrößen eines beliebig gelagerten Stabes erlaubt. Schließlich lassen sich damit für beliebige Querschnittspunkte alle Normal- und Schubspannungen bestimmen.

**Analysis of thin-walled bars with open cross section loaded by normal force, biaxial bending and torsion without use of centroid, shear centre and principal axis.** *For a generally loaded prismatic bar an analysis is presented, where the relations between stress resultants and deformations are not normalized, but written in a coupled form. This means that any system of coordinates  $y, z$  in the section can be chosen and is then maintained for all calculations.*

*On this basis the equation of transfer matrix is developed, which allows the calculation of all stress resultants and displacements for a beam with arbitrary support. Finally at any point of the sections normal and shear stresses can be determined.*

## 1 Einleitung

Die übliche Berechnung von Stäben mit offenem Querschnitt bei Beanspruchung durch Längskraft, zweiachsige Biegung und Wölbkrafttorsion erfordert im allgemeinen Fall die Bestimmung von Schwerpunkt mit Hauptachsen für die Biegung und die Bestimmung des Schubmittelpunktes für die Torsion, siehe z.B. [1], [2]. Die Normalspannungen und Schubspannungen werden nach getrennten Formeln für die einzelnen Schnittgrößen berechnet, wobei zahlreiche Querschnittsgrößen erforderlich sind.

Das nachfolgend dargestellte Berechnungskonzept geht von einem beliebigen, aber auf der Querschnittskontur liegenden Bezugspunkt 0 mit beliebigen (orthogonalen) Querschnittsachsen  $y$  und  $z$  aus.

Der allgemeine Dehnungs- und Normalspannungszustand im Querschnitt wird durch vier Grundzustände beschrieben, die ausschließlich auf den Punkt 0 und die Achsen  $y$  und  $z$  bezogen sind.

Schwerpunkt, Hauptachsen und Schubmittelpunkt des Querschnitts bleiben außer Betracht, so dass die Beziehungen zwischen den vier Dehnungszuständen und den damit verbundenen Schnittgrößen  $N, M_y, M_z$  und  $M_\omega$  gekoppelt sind.

Auf dieser Basis wird die Übertragungsbeziehung entwickelt, welche das Tragverhalten eines Stabes vollständig beschreibt. Im allgemeinen Fall hat der Zustandsvektor 14 Komponenten (7 Verschiebungs- und 7 Schnittgrößen). Die Übertragungsbeziehung, formuliert für  $x = \ell$ , erlaubt die Berechnung aller Zustandsgrößen an den Enden eines beliebig gelagerten Einzelstabes und danach der Zustandsgrößen an beliebiger Schnittstelle  $0 \leq x \leq \ell$ .

Alle Normal- und Schubspannungen lassen sich schließlich für beliebige Punkte im Querschnitt bestimmen, wobei stets der resultierende Beanspruchungszustand betrachtet wird.

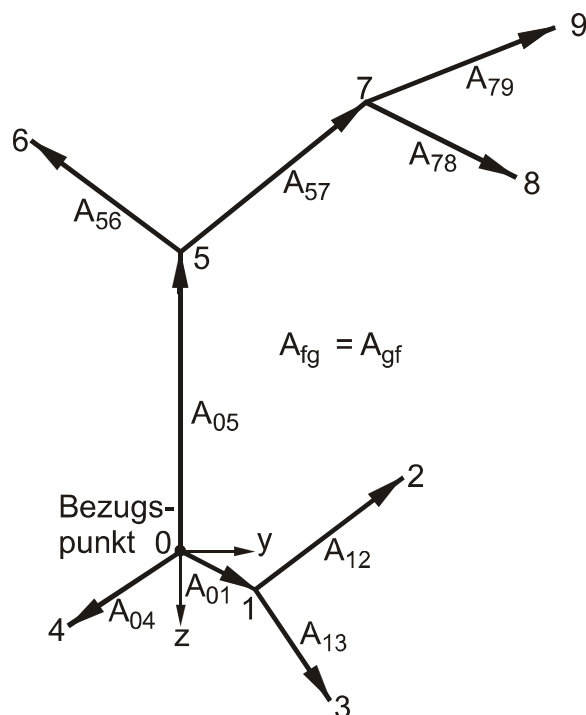
Die gesamte Berechnung erfolgt mit Hilfe von Matrizen, deren Elemente nach einfachen Formeln bestimmt werden können. Spezielle Kenntnisse – insbesondere bei der Theorie der Wölbkrafttorsion – sind bei der Anwendung nicht erforderlich.

## 2 Annahmen

Es werden folgende (üblichen) Annahmen getroffen:

- Der Querschnitt ist über die Stablänge konstant.
- Der Querschnitt ist offen und besteht aus ebenen, dünnwandigen Blechabschnitten; deren Anzahl und die Form der Verzweigungen sind beliebig.
- Querkraft- und Wölbkraftschubverformungen werden vernachlässigt.
- Die einzelnen Blechabschnitte bleiben eben (*Wagner-Hypothese*).
- Der Querschnitt ist formtreu.
- Es wird Elastizitätstheorie I. Ordnung angewendet.
- Als Einwirkungen werden (gemäß einem beliebigen Polynom) veränderliche Streckenlasten, Streckentorsionsmomente und zusätzlich Einzeleinwirkungen berücksichtigt.
- Es werden nur Querschnitte mit Verwölbung betrachtet.

### 3 Allgemeines Beispiel eines aus 9 Blechen zusammengesetzten Querschnitts



**Bild 1.** Betrachteter, allgemeiner Querschnitt mit Bezugspunkt 0 sowie Achsen  $y$  und  $z$ , Blickrichtung entgegen  $x$ -Achse (s. Bild 3)



**Bild 2.** Möglicher Sonderfall: Brückenquerschnitt, symmetrisch oder unsymmetrisch

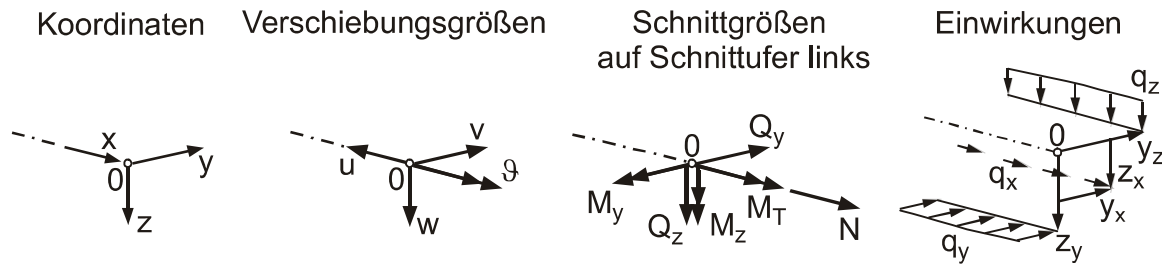
Bild 1 zeigt den aus 9 Blechen zusammengesetzten, allgemeinen Querschnitt, für welchen die erforderlichen Matrizen und Formeln angegeben werden. Der Bezugspunkt 0 mit den Achsen  $y$  und  $z$  wurde willkürlich in einen Knoten gelegt.

Die Knotenpunkte und Endpunkte der einzelnen Abschnitte werden mit  $f$  und  $g$  (0, 1, 2, ...) bezeichnet. Dementsprechend erhalten auf Knoten bezogene Größen einen, auf Abschnitte bezogene Größen zwei Indizes, z.B.  $A_{fg}$  ( $= A_{gf}$ ) als Fläche des Abschnitts  $fg$ . Die im Querschnitt eingetragenen Pfeile sind vom Bezugspunkt 0 nach „außen“ fortschreitend gerichtet. Sie dienen der Festlegung der Rechenrichtung, z.B. bei den Wölbordinaten  $\omega$  und den Schubflüssen  $T$ , und definieren die positive Richtung von  $T$ .

Bild 2 zeigt einen Brückenquerschnitt als möglichen Sonderfall des allgemeinen Querschnitts von Bild 1.



#### 4 Verschiebungsgrößen, Schnittgrößen und Einwirkungen



**Bild 3.** Koordinaten, Verschiebungsgrößen, Schnittgrößen und Einwirkungen

Bild 3 zeigt die positiven Richtungen der Stabachse  $x$ , der Querschnittsachsen  $y$  und  $z$ , der Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und des Torsionsdrehwinkels  $\vartheta$ , der Schnittgrößen  $N$ ,  $M_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_z$ ,  $Q_y$  und  $M_T$  sowie der Streckenlasten  $q_x$ ,  $q_z$  und  $q_y$ , welche einen gemäß einem beliebigen Polynom veränderlichen Verlauf haben dürfen, während die Exzentrizitäten  $y_x$ ,  $z_x$ ,  $y_z$  und  $z_y$  als konstant angenommen werden.

Für alle Größen ist der Punkt 0 Bezugspunkt und sind die Achsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  Bezugsachsen; dies bleibt für das gesamte Berechnungskonzept gültig.

#### 5 Berechnung der Spannungen $\sigma_f$ aus den Verschiebungsgrößen $u$ , $w$ , $v$ und $\vartheta$ mit Hilfe der Matrix $\underline{\mathbf{A}}$

Zunächst wird vereinbart:

- Bezeichnungen für eine Matrix sind fett und unterstrichen, z.B.  $\underline{\mathbf{A}}$ .
- Formänderungs- und Verschiebungsgrößen mit Querstrich (oben) sind E-fach, z.B.  $\bar{w} = Ew$ .
- Ableitungen nach  $x$  werden mit Strich versehen, z.B.  $du/dx = u'$ .

Als Formänderungsgrößen, die den Dehnungs- und Normalspannungszustand im Querschnitt vollständig beschreiben, werden definiert:

$$\kappa_1 = -\bar{u}' \quad (1)$$

$$\kappa_2 = -\bar{w}'' \quad (2)$$

$$\kappa_3 = -\bar{v}'' \quad (3)$$

$$\kappa_4 = -\bar{\vartheta}'' \quad (4)$$

Als zugehörige Matrix wird vereinbart:

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_1' \\ \kappa_2 & \kappa_2' \\ \kappa_3 & \kappa_3' \\ \kappa_4 & \kappa_4' \end{bmatrix} \quad (5)$$

Weiterhin wird als Spannungsmatrix definiert:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma'_0 \\ \sigma_1 & \sigma'_1 \\ \sigma_2 & \sigma'_2 \\ \sigma_3 & \sigma'_3 \\ \sigma_4 & \sigma'_4 \\ \sigma_5 & \sigma'_5 \\ \sigma_6 & \sigma'_6 \\ \sigma_7 & \sigma'_7 \\ \sigma_8 & \sigma'_8 \\ \sigma_9 & \sigma'_9 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Die Ableitungen  $\kappa'_{...}$  und  $\sigma'_{...}$  werden zur Berechnung der Schubflüsse bzw. Schubspannungen benötigt.

Die Matrix  $\underline{\sigma}$  berechnet sich aus der Matrix  $\underline{\kappa}$  wie folgt:

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\kappa} \quad (7)$$

Diese Gleichung beinhaltet eine rein kinematische Beziehung (mit E-Modul erweitert).

Für die Matrix  $\underline{\mathbf{A}}$  gilt:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & z_0 & y_0 & \omega_0 \\ 1 & z_1 & y_1 & \omega_1 \\ 1 & z_2 & y_2 & \omega_2 \\ 1 & z_3 & y_3 & \omega_3 \\ 1 & z_4 & y_4 & \omega_4 \\ 1 & z_5 & y_5 & \omega_5 \\ 1 & z_6 & y_6 & \omega_6 \\ 1 & z_7 & y_7 & \omega_7 \\ 1 & z_8 & y_8 & \omega_8 \\ 1 & z_9 & y_9 & \omega_9 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Anschaulich bedeuten die Matrixglieder Längsverschiebungen der Querschnittspunkte  $f$  in  $x$ -Richtung, und zwar die der 1. Spalte aus  $u = -1$ , die der 2. Spalte aus  $w' = -1$ , die der 3. Spalte aus  $v' = -1$  und jene der 4. Spalte aus  $\vartheta' = -1$ , d.h., die Glieder  $\omega_f$  sind die üblichen Einheitsverwölbungen. Diese können rekursiv mit  $\omega_0 = 0$  beginnend in Pfeilrichtung fortschreitend berechnet werden aus:

$$\omega_g = \omega_f + z_f y_g - z_g y_f \quad (9)$$

Für den Querschnitt des Bildes 1 gilt im einzelnen:

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= \omega_1 = \omega_4 = \omega_5 = 0 \\
 \omega_2 &= z_1 y_2 - z_2 y_1 \\
 \omega_3 &= z_1 y_3 - z_3 y_1 \\
 \omega_6 &= z_5 y_6 - z_6 y_5 \quad (y_5 = 0) \\
 \omega_7 &= z_5 y_7 - z_7 y_5 \\
 \omega_8 &= \omega_7 + z_7 y_8 - z_8 y_7 \\
 \omega_9 &= \omega_7 + z_7 y_9 - z_9 y_7
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

### 6 Berechnung der Knotenkräfte $F_f$ aus den Spannungen $\sigma_f$ mit Hilfe der Matrix $\underline{\mathbf{B}}$

Die Knotenkräfte  $F_f$  ersetzen den Normalspannungszustand im Querschnitt statisch gleichwertig. Für den allgemeinen Abschnitt fg lauten die Knotenkräfte an den Enden f bzw. g:

$$F_{fg} = \left( \frac{\sigma_f}{3} + \frac{\sigma_g}{6} \right) A_{fg} \tag{11}$$

$$F_{gf} = \left( \frac{\sigma_g}{3} + \frac{\sigma_f}{6} \right) A_{fg} \tag{12}$$

Die Summe der am Knoten f vorhandenen Kräfte beträgt:

$$F_f = \sum_g F_{fg} \tag{13}$$

Aus diesen Formeln erhält man die Beziehung:

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{14}$$

Als Matrix  $\underline{\mathbf{F}}$  wird definiert:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_0 & F'_0 \\ F_1 & F'_1 \\ F_2 & F'_2 \\ F_3 & F'_3 \\ F_4 & F'_4 \\ F_5 & F'_5 \\ F_6 & F'_6 \\ F_7 & F'_7 \\ F_8 & F'_8 \\ F_9 & F'_9 \end{bmatrix} \tag{15}$$



$M_\omega$  ist das auf den Punkt 0 bezogene Wölbmoment.

Die Matrix  $\underline{\mathbf{S}}$  läßt sich zunächst aus der Matrix  $\underline{\mathbf{F}}$  wie folgt bestimmen:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} \quad (19)$$

wobei  $\underline{\mathbf{A}}^T$  die Transponierte von  $\underline{\mathbf{A}}$  ist.

Aus den Gln. (7), (14) und (19) erhält man:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}} \quad (20)$$

und nach Inversion

$$\underline{\boldsymbol{\kappa}} = \underline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{S}} \quad (21)$$

Die Matrix  $\underline{\mathbf{D}}$  selbst berechnet sich aus:

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \quad (22)$$

Da  $\underline{\mathbf{B}}$  symmetrisch ist, folgt aus Gl. (22), daß auch  $\underline{\mathbf{D}}$  und damit  $\underline{\mathbf{D}}^{-1}$  symmetrisch sind. Bezeichnet man die Glieder von  $\underline{\mathbf{D}}^{-1}$  mit  $d_{...}$ , so lautet Gl. (21) ausführlich:

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_1' \\ \kappa_2 & \kappa_2' \\ \kappa_3 & \kappa_3' \\ \kappa_4 & \kappa_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N & N' \\ M_y & M_y' \\ M_z & M_z' \\ M_\omega & M_\omega' \end{bmatrix} \quad (23)$$

Von besonderer Bedeutung in dieser Beziehung ist die Formel für  $\kappa_4$ , die wie folgt lautet:

$$\kappa_4 = -\bar{\mathcal{G}}'' = d_{41}N + d_{42}M_y + d_{43}M_z + d_{44}M_\omega \quad (24)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß  $1/d_{44}$  gleich dem auf den Schubmittelpunkt bezogenen Wölbträgheitsmoment  $I_\omega$  gemäß üblicher Vorgehensweise ist, wo anstelle von Gl. (24) die Beziehung  $-\bar{\mathcal{G}}'' = M_\omega/(EI_\omega)$  gilt ( $M_\omega$  dann auf Schubmittelpunkt bezogen).

Wird die Matrix  $\underline{\mathbf{D}}$  singulär, so liegt ein wölbfreier Querschnitt vor, und  $\underline{\mathbf{D}}^{-1}$  existiert nicht.

## 8 Streckenlasten $q_x$ , $q_z$ und $q_y$ sowie Schnittgrößen $N$ , $M_y$ , $Q_z$ , $M_z$ , $Q_y$ und $M_T$

Zur Schreiberleichterung wird zunächst vereinbart:

$$a_0 = 1, \quad a_j = \frac{x^j}{j!} \quad \text{für } j \geq 1, \quad a_j = 0 \quad \text{für } j < 0 \quad (25)$$

Für die Ableitung bzw. Integration gilt:

$$\left. \begin{aligned} a'_j &= a_{j-1} \\ \int_0^x a_j dx &= a_{j+1} \quad \text{für } j \geq 0 \end{aligned} \right\} (26)$$

Die Streckenlasten dürfen gemäß eines beliebigen Polynoms in Längsrichtung veränderlich sein; z.B. hat  $q_z$  allgemein die Form:

$$q_z = a_0 q_{z,0} + a_1 q_{z,1} + a_2 q_{z,2} + \dots = \sum_{j=0} a_j q_{z,j} \quad (27)$$

Für die Konstanten  $q_{z,j}$  gilt:

$$q_{z,j} = q_z^{(j)}(x=0) \quad (28)$$

das heißt,  $q_{z,j}$  ist der Anfangswert der  $j$ -fachen Ableitung von  $q_z$ .

Der Einfachheit halber wird nachfolgend bei allen Streckenlasten das Summenzeichen  $\sum_{j=0}$  weggelassen. Im Anwendungsfall ist dann  $q_z$  für alle vorhandenen

Konstanten  $q_{z,j}$  zu bilden und zu überlagern.

Ist  $q_z$  konstant, existiert nur  $q_{z,0}$ ; ist  $q_z$  linear, existieren nur  $q_{z,0}$  und  $q_{z,1}$  ( $= q'_z$ ), usw.

Diese vereinfachte Schreibweise gilt auch für alle aus den Streckenlasten hervorgehenden Formeln. Beim meist vorliegenden Fall konstanter Streckenlasten sind die entsprechenden Ausdrücke nur für  $j=0$  auszuwerten.

Für die Streckenlasten gilt somit:

$$q_x = a_j q_{x,j} \quad (29)$$

$$q_z = a_j q_{z,j} \quad (30)$$

$$q_y = a_j q_{y,j} \quad (31)$$

Aufgrund der Exzentrizitäten gemäß Bild 3 erhält man:

das Streckentorsionsmoment

$$m_T = z_y q_y - y_z q_z \quad (32)$$

die Streckenbiegemomente

$$m_y = -z_x q_x \quad (33)$$

$$m_z = -y_x q_x \quad (34)$$

und das Streckenwölbmoment

$$m_\omega = -\omega_x q_x \quad (35)$$

wobei  $\omega_x$  die Wölbordinate des Angriffspunktes der Streckenlast  $q_x$  ist (s. Bild 3). Dieser Angriffspunkt muß somit ein Punkt des Querschnitts sein; andernfalls wäre  $\omega_x$  nicht definiert, die Aufgabe also nicht eindeutig.

Die positiven Richtungen von  $m_T$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  und  $m_\omega$  sind entgegengesetzt zu jenen der Schnittgrößen  $M_T$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  bzw.  $M_\omega$  gemäß Bild 3.

Nach Einsetzen der Gln. (29) bis (31) ergibt sich:

$$m_T = a_j m_{T,j} \quad (36)$$

$$m_y = a_j m_{y,j} \quad (37)$$

$$m_z = a_j m_{z,j} \quad (38)$$

$$m_\omega = a_j m_{\omega,j} \quad (39)$$

mit den Konstanten

$$m_{T,j} = z_y q_{y,j} - y_z q_{z,j} \quad (40)$$

$$m_{y,j} = -z_x q_{x,j} \quad (41)$$

$$m_{z,j} = -y_x q_{x,j} \quad (42)$$

$$m_{\omega,j} = -\omega_x q_{x,j} \quad (43)$$

Liegt eine Längsflächenlast vor, so kann diese im Bereich der einzelnen Blechabschnitte fg zur resultierenden Längslinienlast  $q_{x,fg}$  zusammengefaßt und in den Gln. (32), (33) und (35) berücksichtigt werden. Gegebenenfalls sind mehrere Längslinienlasten  $q_{x,fg}$  zu überlagern.

Für die Ableitungen der Schnittgrößen gilt:

$$N' = -q_x = -a_j q_{x,j} \quad (44)$$

$$Q'_z = -q_z = -a_j q_{z,j} \quad (45)$$

$$M'_y = Q_z + m_y = Q_z + a_j m_{y,j} \quad (46)$$

$$Q'_y = -q_y = -a_j q_{y,j} \quad (47)$$

$$M'_z = Q_y + m_z = Q_y + a_j m_{z,j} \quad (48)$$

$$M'_T = -m_T = -a_j m_{T,j} \quad (49)$$

$$M'_\omega = M_{Ts} + m_\omega = M_{Ts} + a_j m_{\omega,j} \quad (50)$$

$M_{Ts}$  ist das sekundäre Torsionsmoment, welches sich ebenso wie  $M_\omega$  auf den Bezugspunkt 0 des Querschnitts bezieht.

Nach Integration der Gln. (44) bis (49) mit den Anfangswerten (Index i) als Integrationskonstanten erhält man:

$$N = N_i - a_{j+1} q_{x,j} \quad (51)$$

$$Q_z = Q_{z,i} - a_{j+1} q_{z,j} \quad (52)$$

$$M_y = M_{y,i} + a_1 Q_{z,i} - a_{j+2} q_{z,j} + a_{j+1} m_{y,j} \quad (53)$$

$$Q_y = Q_{y,i} - a_{j+1} q_{y,j} \quad (54)$$

$$M_z = M_{z,i} + a_1 Q_{y,i} - a_{j+2} q_{y,j} + a_{j+1} m_{z,j} \quad (55)$$

$$M_T = M_{T,i} - a_{j+1} m_{T,j} \quad (56)$$

Vorstehende Beziehungen ergeben bereits die letzten 6 Zeilen der aufzustellenden Übertragungsbeziehung (Abschn. 11).

## 9 Differentialgleichung für $M_\omega$ und Lösung

Das Wölbmoment  $M_\omega$  muß, wie stets bei gemischter Torsion, durch Lösen einer Differentialgleichung bestimmt werden.

Für das primäre Torsionsmoment, welches unabhängig vom Bezugspunkt im Querschnitt ist, gilt:

$$M_{Tp} = GI_T \vartheta' = I_T^* \bar{\vartheta}' \quad (57)$$

mit

$$I_T^* = \frac{G}{E} I_T = \frac{I_T}{2(1+\nu)} \quad (\nu \text{ Querdehnzahl}) \quad (58)$$

$$I_T = \frac{1}{3} \sum A_{fg} t_{fg}^2 \quad (59)$$

wobei die Summe über alle Blechabschnitte  $fg$  mit der jeweiligen Dicke  $t_{fg}$  zu bilden ist.

Für das sekundäre Torsionsmoment gilt gemäß Gl. (50):

$$M_{Ts} = M'_\omega - m_\omega \quad (60)$$

Die Beziehung

$$M_{Tp} + M_{Ts} = M_T \quad (61)$$

liefert mit Gl. (50):

$$M_{Tp} + M'_\omega = m_\omega + M_T \quad (62)$$

und nach Ableitung sowie mit Gl. (49):

$$M'_{Tp} + M''_\omega = m'_\omega - m_T \quad (63)$$

Nach Einsetzen von  $M'_{Tp}$  gemäß Gl. (57),  $\bar{\vartheta}''$  gemäß Gl. (24),  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  gemäß den Gln. (51), (53), (55) und von  $m_T$  gemäß Gl. (36) sowie von  $m_\omega$  gemäß Gl. (39) erhält man folgende Differentialgleichung 2. Ordnung für  $M_\omega$ :

$$\begin{aligned} M''_\omega - KM_\omega = & a_{j-1} m_{\omega,j} - a_j m_{T,j} + \\ & + I_T^* [d_{41}(N_i - a_{j+1} q_{x,j}) + \\ & + d_{42}(M_{y,i} + a_1 Q_{z,i} - a_{j+2} q_{z,j} + a_{j+1} m_{y,j}) + \\ & + d_{43}(M_{z,i} + a_1 Q_{y,i} - a_{j+2} q_{y,j} + a_{j+1} m_{z,j})] \end{aligned} \quad (64)$$



mit der Konstanten

$$K = I_T^* d_{44} \quad (65)$$

Auf der rechten Seite (Störungsfunktion) sind mit den Funktionen  $a_j$  ausschließlich Polynome vorhanden. Wegen  $a_{-1} = 0$  wird für  $j = 0$  der Term  $a_{j-1} m_{\omega, j}$  Null.

Die Differentialgleichung wird nach [3] gelöst. Die erforderlichen Lösungsfunktionen  $b_j$  können nach zwei Möglichkeiten berechnet werden:

**1. Möglichkeit** mit hyperbolischen Funktionen:

$$b_0 = \cosh(\sqrt{K} x), \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K} x) \quad (66)$$

$$j \geq 2: \quad b_j = \frac{1}{K} (b_{j-2} - a_{j-2}) \quad (67)$$

**2. Möglichkeit** mit Reihenformel:

für  $j = \max j$  und  $\max j - 1$ :

$$b_j = a_j + \sum_{t=1}^{\infty} K^t a_{j+2t} \quad (68)$$

für  $j \leq \max j - 2$ :

$$b_j = a_j + K b_{j+2} \quad (69)$$

oder auch nach Reihenformel (68)

Trotz exakter Formeln können sich nach der 1. Möglichkeit bei sehr kleinen Argumenten  $\sqrt{K} x (\ll 1)$  und zunehmend bei höheren Indizes  $j$  ungenaue Ergebnisse aufgrund numerischer Probleme ergeben. Diese treten bei der Differenzbildung  $b_{j-2} - a_{j-2}$  auf, wobei die Werte dann nahezu gleich sind.

Die Reihenformel konvergiert stets gut und liefert auch bei kleinen Werten  $\sqrt{K} x$  genaue Ergebnisse für alle  $b_j$ .

Eigenschaften der Funktionen  $b_j$ :

$$\left. \begin{aligned} b_j' &= b_{j-1} \\ \int_0^x b_j dx &= b_{j+1} \quad \text{für } j \geq 0 \end{aligned} \right\} (70)$$

gemäß Gl. (69) gilt:

$$b_{-1} = K b_1 \quad (71)$$

Anfangswerte:

$$b_0(0) = 1, \quad b_j(0) = 0 \quad \text{für } j \geq 1 \quad (72)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet nach [3]:

$$M_{\omega, \text{hom}} = C_0 b_0 + C_1 b_1 \quad (73)$$

mit den Konstanten

$$C_0 = M_{\omega, i} \quad (74)$$

$$C_1 = M'_{\omega, i} = M_{T_s, i} + m_{\omega, 0} \quad (75)$$

Für  $M_{T_s, i}$  wird gesetzt:

$$M_{T_s, i} = M_{T, i} - M_{T_p, i} = M_{T, i} - I_T^* \bar{\mathfrak{G}}'_i \quad (76)$$

Damit ergibt sich aus Gl. (73):

$$M_{\omega, \text{hom}} = b_0 M_{\omega, i} + b_1 M_{T, i} - I_T^* b_1 \bar{\mathfrak{G}}'_i + b_1 m_{\omega, 0} \quad (77)$$

Die partikuläre Lösung  $M_{\omega, \text{part}}$  erhält man aus der rechten Seite der Differentialgleichung (64), indem dort überall  $a_j$  durch  $b_{j+2}$  ersetzt wird. Konstanten (ohne  $a_j$ ) kann der Faktor  $a_0 = 1$  zugeordnet werden, welcher dann durch  $b_2$  zu ersetzen ist.

Nach Überlagerung von homogenem und partiellem Lösungsanteil erhält man:

$$\begin{aligned} M_{\omega} = & b_0 M_{\omega, i} + b_1 M_{T, i} - I_T^* b_1 \bar{\mathfrak{G}}'_i + b_{j+1} m_{\omega, j} - b_{j+2} m_{T, j} + \\ & + I_T^* [d_{41} (b_2 N_i - b_{j+3} q_{x, j}) + \\ & + d_{42} (b_2 M_{y, i} + b_3 Q_{z, i} - b_{j+4} q_{z, j} + b_{j+3} m_{y, j}) + \\ & + d_{43} (b_2 M_{z, i} + b_3 Q_{y, i} - b_{j+4} q_{y, j} + b_{j+3} m_{z, j})] \end{aligned} \quad (78)$$

Beim Ausdruck  $b_{j+1} m_{\omega, j}$  wird der Term für  $j = 0$  aus  $M_{\omega, \text{hom}}$  die übrigen Terme für  $j \geq 1$  aus  $M_{\omega, \text{part}}$  erhalten.

Mit  $M_{\omega}$ ,  $M_T$ ,  $M_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $Q_z$  und  $N$  liegen bereits alle für die Übertragungsbeziehung erforderlichen Schnittgrößen vor (Abschn. 11).

Primäres und sekundäres Torsionsmoment  $M_{T_p}$  bzw.  $M_{T_s}$  werden nicht als Komponenten des Zustandsvektors geführt, da für diese Größen keine Randbedingungen und auch keine korrespondierenden Verschiebungsgrößen existieren.

## 10 Verschiebungsgrößen $\bar{u}$ , $\bar{w}$ , $\bar{w}'$ , $\bar{v}$ , $\bar{v}'$ , $\bar{\mathfrak{G}}$ , $\bar{\mathfrak{G}}'$ (E-fach)

Nachdem die 7 Schnittgrößen des Zustandsvektors formuliert sind, lassen sich die 7 korrespondierenden (zugeordneten) Verschiebungsgrößen durch Einsetzen der Schnittgrößen aus bereits angeschriebenen Formeln bestimmen. Nachfolgend wird nur der jeweilige Herleitungsweg ohne Angabe der endgültigen Beziehung aufgezeigt; diese kann dann den Zeilen 1 bis 7 der Übertragungsbeziehung in Abschn. 11 entnommen werden. Zur Vereinfachung der Beziehungen ist Gl. (69) mit Gl. (65) zu beachten.

Aus den Gln. (60) und (61) erhält man:

$$M_{T_p} = M_T - M_{T_s} = M_T - M'_{\omega} + m_{\omega} \quad (79)$$

Nach Einsetzen von  $M_{Tp}$  gemäß Gl. (57) ergibt sich:

$$\bar{\vartheta}' = \frac{1}{I_T^*} (M_T - M'_\omega + m_\omega) = \frac{1}{I_T^*} (M_{T,i} - a_{j+1} m_{T,j} - M'_\omega + a_j m_{\omega,j}) \quad (80)$$

Bei der Ableitung  $M'_\omega$  sind die Gln. (70) und (71) zu beachten.

Die endgültige Beziehung für  $\bar{\vartheta}'$  kann der 7. Zeile der Übertragungsbeziehung entnommen werden.

Die Integration von Gl. (80) ergibt:

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_i + \frac{1}{I_T^*} (a_1 M_{T,i} - a_{j+2} m_{T,j} - M_\omega + M_{\omega,i} + a_{j+1} m_{\omega,j}) \quad (81)$$

Die endgültige Beziehung ist aus der 6. Zeile der Übertragungsbeziehung ersichtlich.

Eine besondere Bedeutung als Kontrollgleichung oder zusätzliche Bestimmungsgleichung erlangt Gl. (81) für  $x = \ell$ . Diese lautet:

$$\bar{\vartheta}_k = \bar{\vartheta}_i + \frac{1}{I_T^*} [a_1 M_{T,i} - a_{j+2} m_{T,j} - M_{\omega,k} + M_{\omega,i} + a_{j+1} m_{\omega,j}] \quad (82)$$

wobei hier  $a_j = \ell^j / j!$  gilt.

Da für die Übertragungsbeziehung  $M_\omega$  in Gl. (81) gemäß Gl. (78) ersetzt wird, erscheinen vorstehende Gleichungen (81) bzw. (82) dort nicht mehr in dieser Form.

Insbesondere beim beidseitig gabelgelagerten Stab ermöglicht Gl. (82) die direkte Bestimmung von  $M_{T,i}$ , weil  $\bar{\vartheta}_i = \bar{\vartheta}_k = 0$  gilt und  $M_{\omega,i}$ ,  $M_{\omega,k}$  als eingeprägte Größen bekannt (i.d.R. null) sind.

Für die weiteren Verschiebungsgrößen werden folgende Gleichungen aus der Beziehung (23) benötigt:

$$\kappa_1 = -\bar{u}' = d_{11}N + d_{12}M_y + d_{13}M_z + d_{14}M_\omega \quad (83)$$

$$\kappa_2 = -\bar{w}'' = d_{21}N + d_{22}M_y + d_{23}M_z + d_{24}M_\omega \quad (84)$$

$$\kappa_3 = -\bar{v}'' = d_{31}N + d_{32}M_y + d_{33}M_z + d_{34}M_\omega \quad (85)$$

wobei  $d_{rs} = d_{sr}$  ist.

In vorstehende Gleichungen werden die Schnittgrößen  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  und  $M_\omega$  eingesetzt; danach wird wie folgt integriert:

$$\bar{u} = \bar{u}_i + \int_0^x \bar{u}' dx \quad (86)$$

$$\bar{w}' = \bar{w}'_i + \Delta \bar{w}' \quad \text{mit} \quad \Delta \bar{w}' = \int_0^x \bar{w}'' dx \quad (87)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_i + a_1 \bar{w}'_i + \int_0^x \Delta \bar{w}' dx \quad (88)$$

$$\bar{v}' = \bar{v}'_i + \Delta\bar{v}' \quad \text{mit} \quad \Delta\bar{v}' = \int_0^x \bar{v}'' dx \quad (89)$$

$$\bar{v} = \bar{v}_i + a_1 \bar{v}'_i + \int_0^x \Delta\bar{v}' dx \quad (90)$$

Die endgültigen Beziehungen sind aus den Zeilen 1 bis 5 der Übertragungsbeziehung ersichtlich.

### 11 Übertragungsbeziehung

Die Übertragungsbeziehung für den Zustandsvektor  $\underline{Z}_x$  an der allgemeinen Stelle x des Stabes ik mit der Länge  $\ell$  hat folgende Form:

$$\underline{Z}_x = \underline{F}_{xi} \cdot \underline{Z}_i + \underline{Z}_x^0 \quad (91)$$

In ausführlicher Darstellung lautet diese Übertragungsbeziehung:

$\bar{u}$	1			$c_{14,2}^*$	$-c_{14,1}$	$-c_{14,2}$	$-c_{13,1}$	$-c_{13,2}$	$-c_{12,1}$	$-c_{12,2}$	$-c_{11,1}$	$\bar{u}_i$	
$\bar{w}$		1	$a_1$	$c_{24,3}^*$	$-c_{24,2}$	$-c_{24,3}$	$-c_{23,2}$	$-c_{23,3}$	$-c_{22,2}$	$-c_{22,3}$	$-c_{21,2}$	$\bar{w}_i$	
$\bar{w}'$			1	$c_{24,2}^*$	$-c_{24,1}$	$-c_{24,2}$	$-c_{23,1}$	$-c_{23,2}$	$-c_{22,1}$	$-c_{22,2}$	$-c_{21,1}$	$\bar{w}'_i$	
$\bar{v}$			1	$a_1$	$c_{34,3}^*$	$-c_{34,2}$	$-c_{34,3}$	$-c_{33,2}$	$-c_{33,3}$	$-c_{32,2}$	$-c_{32,3}$	$-c_{31,2}$	$\bar{v}_i$
$\bar{v}'$			1	$a_1$	$c_{34,2}^*$	$-c_{34,1}$	$-c_{34,2}$	$-c_{33,1}$	$-c_{33,2}$	$-c_{32,1}$	$-c_{32,2}$	$-c_{31,1}$	$\bar{v}'_i$
$\bar{\vartheta}$				1	$b_1$	$-c_{44,2}$	$-c_{44,3}$	$-c_{43,2}$	$-c_{43,3}$	$-c_{42,2}$	$-c_{42,3}$	$-c_{41,2}$	$\bar{\vartheta}_i$
$\bar{\vartheta}'$					$b_0$	$-c_{44,1}$	$-c_{44,2}$	$-c_{43,1}$	$-c_{43,2}$	$-c_{42,1}$	$-c_{42,2}$	$-c_{41,1}$	$\bar{\vartheta}'_i$
$M_\omega$					$-\mathbf{I}_T^* b_1$	$b_0$	$b_1$	$c_{43,2}^*$	$c_{43,3}^*$	$c_{42,2}^*$	$c_{42,3}^*$	$c_{41,2}^*$	$M_{\omega,i}$
$M_T$							1						$M_{T,i}$
$M_z$								1	$a_1$				$M_{z,i}$
$Q_y$									1				$Q_{y,i}$
$M_y$										1	$a_1$		$M_{y,i}$
$Q_z$											1		$Q_{z,i}$
$N$												1	$N_i$
$\underline{Z}_x$	$\underline{F}_{xi}$											$\underline{Z}_i$	

$+ \underline{Z}_x^0$

$(92)$

mit

$$\underline{\mathbf{Z}}_x^0 = \begin{bmatrix}
 -c_{14,j+2} & c_{14,j+3} & -c_{13,j+2} & c_{13,j+3} & -c_{12,j+2} & c_{12,j+3} & c_{11,j+2} \\
 -c_{24,j+3} & c_{24,j+4} & -c_{23,j+3} & c_{23,j+4} & -c_{22,j+3} & c_{22,j+4} & c_{21,j+3} \\
 -c_{24,j+2} & c_{24,j+3} & -c_{23,j+2} & c_{23,j+3} & -c_{22,j+2} & c_{22,j+3} & c_{21,j+2} \\
 -c_{34,j+3} & c_{34,j+4} & -c_{33,j+3} & c_{33,j+4} & -c_{32,j+3} & c_{32,j+4} & c_{31,j+3} \\
 -c_{34,j+2} & c_{34,j+3} & -c_{33,j+2} & c_{33,j+3} & -c_{32,j+2} & c_{32,j+3} & c_{31,j+2} \\
 \hline
 -c_{44,j+3} & c_{44,j+4} & -c_{43,j+3} & c_{43,j+4} & -c_{42,j+3} & c_{42,j+4} & c_{41,j+3} \\
 -c_{44,j+2} & c_{44,j+3} & -c_{43,j+2} & c_{43,j+3} & -c_{42,j+2} & c_{42,j+3} & c_{41,j+2} \\
 \hline
 b_{j+1} & -b_{j+2} & c_{43,j+3}^* & -c_{43,j+4}^* & c_{42,j+3}^* & -c_{42,j+4}^* & -c_{41,j+3}^* \\
 \hline
 & -a_{j+1} & & & & & \\
 & & a_{j+1} & -a_{j+2} & & & \\
 & & & -a_{j+1} & & & \\
 & & & & a_{j+1} & -a_{j+2} & \\
 & & & & & -a_{j+1} & \\
 & & & & & & -a_{j+1}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{\omega,j} \\ m_{T,j} \\ m_{z,j} \\ q_{y,j} \\ m_{y,j} \\ q_{z,j} \\ q_{x,j} \end{bmatrix} \quad (93)$$

Die Matrix  $\underline{\mathbf{F}}_{xi}$  ist quadratisch, bezüglich der eingetragenen Diagonale symmetrisch und nur systemabhängig. Der Lastvektor  $\underline{\mathbf{Z}}_x^0$  in Gl. (93) berücksichtigt die Einwirkungen auf den Stab im Bereich vom Anfangspunkt  $i$  bis zur Stelle  $x$ .

Für die Streckenmomente  $m_{T,j}$ ,  $m_{y,j}$ ,  $m_{z,j}$  und  $m_{\omega,j}$  gelten die Gln. (40) bis (43).

Die Matrixglieder  $c_{rs,j}$  bzw.  $c_{rs,j}^*$  berechnen sich wie folgt:

$$c_{rs,j} = c_{sr,j} = d_{rs} a_j + d_{r4} d_{s4} \mathbf{I}_T^* b_{j+2} \quad (94)$$

$$c_{rs,j}^* = \mathbf{I}_T^* c_{rs,j} \quad (95)$$

Damit können alle in den Gln. (92) und (93) vorkommenden Glieder bestimmt werden.

Speziell für  $r = 4$  oder  $s = 4$  kann auch folgende einfachere Formel angewendet werden:

$$c_{4s,j} = c_{s4,j} = d_{4s} b_j = d_{s4} b_j \quad (96)$$

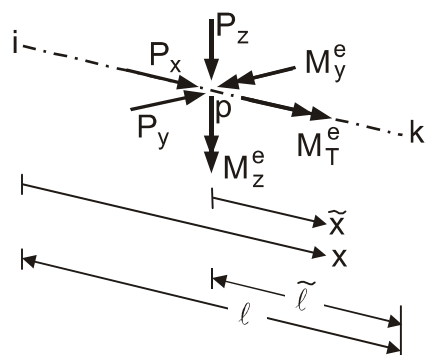
Diese vereinfachte Form ergibt sich aus Gl. (94) unter Beachtung der Gln. (65) und (69).

Für  $x = \ell$  lautet die Übertragungsbeziehung:

$$\underline{\mathbf{Z}}_k = \underline{\mathbf{F}}_{ki} \cdot \underline{\mathbf{Z}}_i + \underline{\mathbf{Z}}_k^0 \quad (97)$$

## 12 Erweiterung des Lastvektors $\underline{\mathbf{Z}}_x^0$ für Einzeleinwirkungen im

### Feld des Stabes ik



**Bild 4.** Einzellasten  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  und eingeprägte Momente  $M_T^e$ ,  $M_y^e$ ,  $M_z^e$  an der Stelle  $p$  im Feld eines Stabes

Einzeleinwirkungen an beliebiger Stelle  $p$  im Feld des betrachteten Stabes  $ik$  können wie die stetigen Einwirkungen mit Hilfe des Lastvektors  $\underline{Z}_x^0$  erfaßt werden. Berücksichtigt werden die in Bild 4 dargestellten Einzellasten, eingeprägten Momente und darüber hinaus ein eingeprägtes Wölbmoment  $M_\omega^e$ . Wenn  $P_y$  bzw.  $P_z$  eine Exzentrizität hinsichtlich des Bezugspunktes  $0$  des Querschnitts aufweist, so ist deren Moment bezüglich der Stabachse als  $M_T^e$  zu berücksichtigen. Eine nicht im Bezugspunkt  $0$  angreifende Längslast  $P_x$  würde nicht nur eingeprägte Momente  $M_y^e$  und  $M_z^e$  hervorrufen, sondern auch ein eingeprägtes Wölbmoment  $M_\omega^e$ ; dabei gilt:

$$M_y^e = P_x z_P \quad (98)$$

$$M_z^e = P_x y_P \quad (99)$$

$$M_\omega^e = P_x \omega_P \quad (100)$$

Die Werte  $z_P$ ,  $y_P$  und  $\omega_P$  des Angriffspunktes von  $P_x$  im Querschnitt können für alle Querschnittspunkte  $f$  der Matrix  $\underline{A}$  entnommen werden.

Liegt die Stelle von  $\underline{Z}_x$  zwischen den Punkten  $i$  und  $p$  ( $\tilde{x} < 0$ ), so gilt:

$$\underline{Z}_x^0 = 0 \quad (101)$$

da der Lastvektor  $\underline{Z}_x^0$  grundsätzlich nur von Einwirkungen zwischen  $i$  und der Stelle  $x$  beeinflußt wird.

Liegt die Stelle von  $\underline{Z}_x$  zwischen den Punkten  $p$  und  $k$  ( $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}$ ), kann  $\underline{Z}_x^0$  dadurch erhalten werden, daß der Punkt  $p$  als Stabanfangspunkt angesehen wird und die Einzellasten und eingeprägten Momente als Anfangswerte betrachtet werden; dies bedeutet praktisch, daß der Stababschnitt  $ip$  als nicht vorhanden angenommen wird. Die aus den eingeprägten Größen hervorgehenden Schnittgrößen wirken dann auf den Querschnitt rechts von  $p$  und sind deshalb nach De-

definition gemäß Bild 3 (wo sie auf den Querschnitt links vom Schnitt wirken) negativ.

In diesem Sinne wird  $\underline{\mathbf{Z}}_x^0$  durch Modifikation der letzten 7 Spalten der Matrix  $\underline{\mathbf{F}}_{xi}$  nach Gl. (92) wie folgt erhalten:

$$\underline{\mathbf{Z}}_x^0 = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{14,1} & \tilde{c}_{14,2} & \tilde{c}_{13,1} & \tilde{c}_{13,2} & \tilde{c}_{12,1} & \tilde{c}_{12,2} & \tilde{c}_{11,1} \\ \tilde{c}_{24,2} & \tilde{c}_{24,3} & \tilde{c}_{23,2} & \tilde{c}_{23,3} & \tilde{c}_{22,2} & \tilde{c}_{22,3} & \tilde{c}_{21,2} \\ \tilde{c}_{24,1} & \tilde{c}_{24,2} & \tilde{c}_{23,1} & \tilde{c}_{23,2} & \tilde{c}_{22,1} & \tilde{c}_{22,2} & \tilde{c}_{21,1} \\ \tilde{c}_{34,2} & \tilde{c}_{34,3} & \tilde{c}_{33,2} & \tilde{c}_{33,3} & \tilde{c}_{32,2} & \tilde{c}_{32,3} & \tilde{c}_{31,2} \\ \tilde{c}_{34,1} & \tilde{c}_{34,2} & \tilde{c}_{33,1} & \tilde{c}_{33,2} & \tilde{c}_{32,1} & \tilde{c}_{32,2} & \tilde{c}_{31,1} \\ \hline \tilde{c}_{44,2} & \tilde{c}_{44,3} & \tilde{c}_{43,2} & \tilde{c}_{43,3} & \tilde{c}_{42,2} & \tilde{c}_{42,3} & \tilde{c}_{41,2} \\ \tilde{c}_{44,1} & \tilde{c}_{44,2} & \tilde{c}_{43,1} & \tilde{c}_{43,2} & \tilde{c}_{42,1} & \tilde{c}_{42,2} & \tilde{c}_{41,1} \\ \hline -\tilde{b}_0 & -\tilde{b}_1 & -\tilde{c}_{43,2}^* & -\tilde{c}_{43,3}^* & -\tilde{c}_{42,2}^* & -\tilde{c}_{42,3}^* & -\tilde{c}_{41,2}^* \\ \hline & -\tilde{a}_0 & & & & & \\ & & -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & & & \\ & & & -\tilde{a}_0 & & & \\ & & & & -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & \\ & & & & & -\tilde{a}_0 & \\ & & & & & & -\tilde{a}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_\omega^e \\ M_T^e \\ M_z^e \\ P_y \\ M_y^e \\ P_z \\ P_x \end{bmatrix} \quad \text{für } \tilde{x} \geq 0 \quad (102)$$

Alle Matrixglieder werden nach den bisher gültigen Formeln berechnet, allerdings ist dabei überall  $x$  durch  $\tilde{x}$  zu ersetzen. Vereinbart man, daß sowohl die Funktionen  $\tilde{a}_j$  als auch  $\tilde{b}_j$  für negative Argumente  $\tilde{x}$  Null gesetzt werden, so enthält Gl. (102) auch die Gl. (101), ist also für alle  $\underline{\mathbf{Z}}_x^0$  im Bereich des ganzen Stabes gültig. Damit die ursprünglich vorhandenen Matrixglieder 1 für negative  $\tilde{x}$  auch Null werden, müssen diese durch  $\tilde{a}_0$  ersetzt werden.

Gegebenenfalls sind die Lastvektoren  $\underline{\mathbf{Z}}_x^0$  nach Gl. (93) und Gl. (102) zu überlagern.

### 13 Berechnung der unbekanntenen Zustandsgrößen an den Stabenden $i$ und $k$ für einen beliebig gelagerten einfeldrigen Stab aus der Übertragungsbeziehung (97)

An einem Stabende sind unabhängig von der Lagerung stets 7 Komponenten des Zustandsvektors bekannt und 7 unbekannt; konkret ist jeweils eine von zwei korrespondierenden Zustandsgrößen bekannt, die andere unbekannt. Korrespondierende Größen sind  $\bar{\vartheta}'$  und  $M_\omega$ ,  $\bar{\vartheta}$  und  $M_T$ ,  $\bar{v}'$  und  $M_z$ ,  $\bar{v}$  und  $Q_y$ ,  $\bar{w}'$  und  $M_y$ ,  $\bar{w}$  und  $Q_z$  sowie  $\bar{u}$  und  $N$ . Bei einer starren Einspannung beispielsweise sind

alle Verschiebungsgrößen bekannt (i.d.R. Null) und alle Schnittgrößen unbekannt, während an einem freien Ende der umgekehrte Sachverhalt vorliegt. Andererseits sind z.B. an einem unverschieblichen Gabellager die Größen  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\vartheta}$ ,  $M_o$ ,  $M_z$  und  $M_y$  bekannt, die übrigen (korrespondierenden) Größen unbekannt.

Grundsätzlich lassen sich für einen einfeldrigen Stab aus der Übertragungsbeziehung (97) mit 14 Gleichungen die jeweils 7 Unbekannten der Zustandsvektoren  $\underline{Z}_i$  und  $\underline{Z}_k$  bestimmen. Dabei kann in zwei Schritten vorgegangen werden: Im ersten Schritt werden die 7 Unbekannten von  $\underline{Z}_i$  aus jenen 7 Gleichungen bestimmt, die die bekannten Zustandsgrößen von  $\underline{Z}_k$  liefern. Im zweiten Schritt erhält man dann aus den restlichen 7 Gleichungen die unbekannt Komponenten von  $\underline{Z}_k$ .

#### 14 Verschiebungen U, W und V an den Querschnittspunkten f

Die positiven Richtungen der Verschiebungen U, W und V in den Querschnittspunkten f seien dieselben wie jene von u, w und v im Bezugspunkt 0 gemäß Bild 3.

Als Matrix der Verschiebungen in den Querschnittspunkten  $f = 0, 1, 2 \dots$  wird definiert:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} U_0 & W_0 & V_0 \\ U_1 & W_1 & V_1 \\ U_2 & W_2 & V_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (103)$$

Diese berechnet sich mit Hilfe der Matrix  $\underline{A}$  gemäß Gl. (8) aus:

$$\underline{V} = \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{w} & \bar{v} \\ \bar{w}' & 0 & \bar{\vartheta} \\ \bar{v}' & -\bar{\vartheta} & 0 \\ \bar{\vartheta}' & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{E} \quad (104)$$

#### 15 Normal- und Schubspannungen

Beim vorliegenden Lösungskonzept werden die Spannungen nicht getrennt für die einzelnen Schnittgrößen erhalten, sondern stets für den resultierenden Beanspruchungszustand.

Zusätzlich zu den Schnittgrößen des Zustandsvektors werden nun noch primäres und sekundäres Torsionsmoment benötigt; hierfür gilt:

$$M_{Tp} = I_T^* \bar{\vartheta}' \quad (105)$$

$$M_{Ts} = M_T - M_{Tp} \quad (106)$$



Die Schubspannungen aus der primären Torsion betragen an den Blechrändern, wie üblich:

$$\tau_{fg} = \pm \frac{M_{Tp}}{I_T} t_{fg} \quad (107)$$

sie sind über die Dicke  $t_{fg}$  des Einzelblechs  $fg$  linear verteilt.

Alle weiteren Spannungen sind (als Näherung) über die Blechdicken jeweils konstant. Zu deren Berechnung wird zunächst die Formänderungsgrößenmatrix  $\underline{\kappa}$  nach Gl. (21) bzw. (23) bestimmt aus:

$$\underline{\kappa} = \underline{D}^{-1} \cdot \underline{S} \quad (108)$$

wobei  $\underline{S}$  gemäß Gl. (18) an der untersuchten Stelle  $x$  bekannt sein muß.

$N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  und  $M_\omega$  sind unmittelbar als Komponenten von  $\underline{Z}_x$  bekannt, während die Ableitungen  $N'$ ,  $M'_y$ ,  $M'_z$  und  $M'_\omega$  aus den Gln. (44), (46), (48) und (50) über die Schnittgrößen  $Q_z$ ,  $Q_y$  und  $M_{Ts}$  zu bestimmen sind.

Nach Gl. (7) lautet dann die Spannungsmatrix:

$$\underline{\sigma} = \underline{A} \cdot \underline{\kappa}, \quad (109)$$

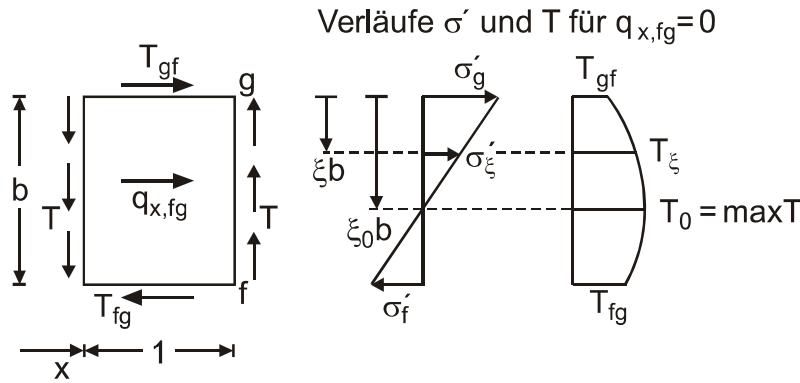
womit die Normalspannungen an allen Querschnittspunkten  $f$  bekannt sind. Der Verlauf von  $\sigma$  ist zwischen benachbarten Punkten  $f$  und  $g$  jeweils linear.

Die in der Matrix  $\underline{\sigma}$  enthaltenen  $\sigma'_f$  stellen die Ableitungen nach  $x$  dar und werden zur Berechnung der Schubflüsse  $T_{fg}$  und  $T_{gf}$  gemäß Bild 5 benötigt. In diesem Bild sind für den Blechabschnitt  $fg$  mit der Länge 1 die Änderung der Normalspannungen  $\sigma'$  und die beiden Randschubflüsse  $T_{fg}$  und  $T_{gf}$  sowie eine gegebenenfalls vorhandene Längsstreckenlast  $q_{x,fg}$  im Abschnitt  $fg$  eingetragen. Die zugehörige Gleichgewichtsbedingung ergibt:

$$T_{fg} = T_{gf} + \Delta T_{fg} \quad (110)$$

mit

$$\Delta T_{fg} = \frac{1}{2} (\sigma'_f + \sigma'_g) A_{fg} + q_{x,fg} \quad (111)$$



**Bild 5.** Verläufe der Längsspannungsänderungen  $\sigma'$  und der Schubkräfte  $T$  am Element der Länge 1 des Einzelblechs  $fg$

Gl. (110) wird an den freien Rändern des Querschnitts mit  $T_{gf} = 0$  beginnend entgegen der Pfeilrichtung (Bild 1) bis zum Bezugspunkt 0 fortschreitend angewendet, wobei sich an den Gabelungen die Schubflüsse addieren.

Während eine Längsstreckenlast  $q_{x,fg}$  innerhalb eines Abschnitts  $fg$  in Gl. (111) bereits erfaßt ist, muß eine am Knoten  $g$  angreifende Längsstreckenlast  $q_{x,g}$  dort als additives Glied bei der Schubflußberechnung berücksichtigt werden.

Im Querschnitt sind die Schubflüsse  $T$  in Richtung der Pfeile von Bild 1 positiv.

Für den Querschnitt nach Bild 1 erhält man:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{21} = T_{31} = T_{40} = T_{65} = T_{87} = T_{97} &= 0 \\
 T_{12} = \Delta T_{12}, \quad T_{13} = \Delta T_{13}, \quad T_{10} &= T_{12} + T_{13} \\
 T_{01} = T_{10} + \Delta T_{01}, \quad T_{04} = \Delta T_{04}, \quad T_{56} &= \Delta T_{56} \\
 T_{78} = \Delta T_{78}, \quad T_{79} = \Delta T_{79}, \quad T_{75} &= T_{78} + T_{79} \\
 T_{57} = T_{75} + \Delta T_{57}, \quad T_{50} = T_{56} + T_{57} \\
 T_{05} = T_{50} + \Delta T_{05}
 \end{aligned} \right\} (112)$$

Greift beispielsweise im Knoten 5 die Längsstreckenlast  $q_{x,5}$  an, so würde dort gelten:

$$T_{50} = T_{56} + T_{57} + q_{x,5}$$

Kontrolle:

$$\sum \frac{\sigma'_f + \sigma'_g}{2} A_{fg} + q_x = 0 \tag{113}$$

wobei die Summe über alle Blechstreifen  $fg$  des Querschnitts zu nehmen ist und  $q_x$  die resultierende Längsstreckenlast bedeutet.

Greift am Element  $fg$  keine Längsstreckenlast  $q_{x,fg}$  an, sind  $\sigma$  und  $\sigma'$  über die Breite  $b$  linear verteilt, während  $T$  parabolisch verläuft. Die Gleichgewichtsbedingung für den Schnitt an der Stelle  $\xi b$  (Bild 5) mit dem Schubfluß  $T_\xi$  liefert:

$$T_\xi = T_{gf} + \left( \sigma'_g + \frac{\sigma'_f - \sigma'_g}{2} \xi \right) \xi A_{fg} \tag{114}$$

Haben  $\sigma'_f$  und  $\sigma'_g$  unterschiedliche Vorzeichen, so hat T an der Nullstelle von  $\sigma'$  einen Extremwert. Für dessen Ort und Größe erhält man:

$$\xi_0 = \frac{1}{1 - \sigma'_f / \sigma'_g} \quad (0 < \xi_0 < 1) \quad (115)$$

$$T_0 = T_{gf} + \frac{1}{2} \sigma'_g \xi_0 A_{fg} \quad (116)$$

Für die (über die Blechdicke t konstanten) Schubspannungen gilt:

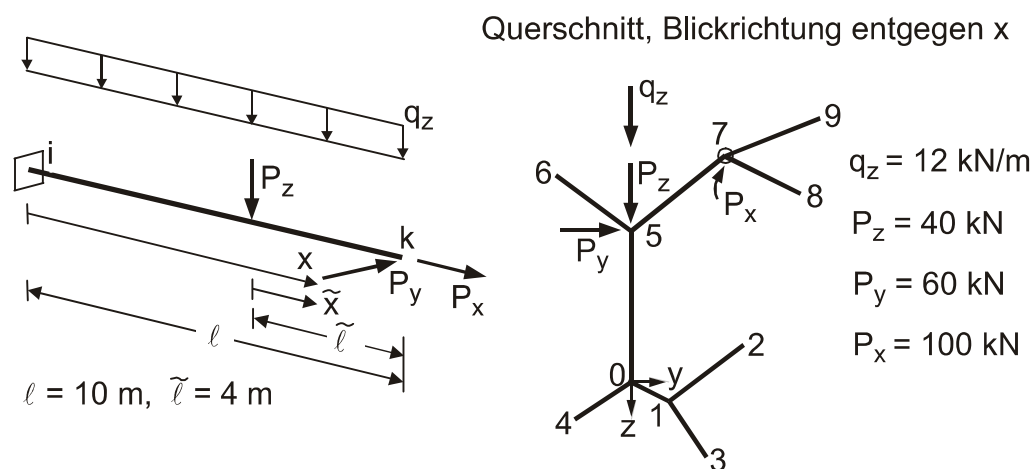
$$\tau = \frac{T}{t} \quad (117)$$

Liegt im Bereich des Elements fg eine über die Breite b konstante Längsflächenlast  $q_{x,fg}^F = q_{x,fg} / b$  vor, so kann diese am einfachsten dadurch berücksichtigt werden, daß in den Gln. (114) bis (116)  $\sigma'$  durch

$$\bar{\sigma}' = \sigma' + q_{x,fg}^F / t \quad (118)$$

ersetzt wird.

## 16 Beispiel



**Bild 6.** Beispiel: System und Einwirkungen  $q_z$ ,  $P_z$ ,  $P_y$  und  $P_x$

Als Beispiel wird ein Stab mit  $\ell = 10 \text{ m}$  Länge und dem Querschnitt nach Bild 1 gewählt, welcher als Testquerschnitt (d. h. ohne Anspruch auf Praxisnähe) zu verstehen ist. Die Geometrie des Querschnitts geht aus den Koordinaten  $z_f$  und  $y_f$  hervor, welche in der 2. und 3. Spalte der Matrix  $\underline{\mathbf{A}}$  enthalten sind. Nach Gl. (8) lautet diese:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 1 & -0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 1 & 0,4 & 0,4 & -0,04 \\ 1 & 0,2 & -0,3 & 0 \\ 1 & -0,8 & 0 & 0 \\ 1 & -1,1 & -0,4 & 0,32 \\ 1 & -1,2 & 0,5 & -0,4 \\ 1 & -1,0 & 0,9 & -0,98 \\ 1 & -1,4 & 1,0 & -0,9 \end{bmatrix}$$

wobei, wie auch im folgenden, die Längeneinheit m verwendet wird.

Die Blechdicken  $t_{fg}$  und die daraus hervorgehenden Einzelflächen  $A_{fg}$  betragen:

fg	0-1	1-2	1-3	0-4	0-5	5-6	5-7	7-8	7-9
$10^3 t_{fg}$	16	20	21	17	15	18	19	22	23
$10^3 A_{fg}$	3,5777	10,0	7,5717	6,1294	12,0	9,0	12,1659	9,8387	12,3859

Die Matrix  $\underline{\mathbf{B}}$  läßt sich nach den Gln. (16) und (17) leicht bestimmen, auf deren Wiedergabe kann verzichtet werden.

Die Matrix  $\underline{\mathbf{D}}$  folgt aus Gl. (22). Für die inverse Matrix  $\underline{\mathbf{D}}^{-1}$  mit den Gliedern  $d_{rs}$  erhält man:

$$\underline{\mathbf{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} 37,522 & 34,975 & -69,792 & -82,011 \\ 34,975 & 72,509 & -57,802 & -134,944 \\ -69,792 & -57,802 & 440,819 & 473,415 \\ -82,011 & -134,944 & 473,415 & 707,233 \end{bmatrix}$$

### System und Belastung

Als Beispiel wird ein Stab gewählt, der in i starr eingespannt ist und in k ein freies Ende hat. Die Belastung besteht aus der Gleichlast  $q_z$  und den Einzellasten  $P_z$ ,  $P_y$  und  $P_x$ , wobei  $P_z$  eine Einzeleinwirkung im Feld gemäß Abschn. 12 darstellt.

Die Randbedingungen in i lauten:

$$\bar{u}_i = 0, \quad \bar{w}_i = 0, \quad \bar{w}'_i = 0, \quad \bar{v}_i = 0, \quad \bar{v}'_i = 0, \quad \bar{\vartheta}_i = 0, \quad \bar{\vartheta}'_i = 0$$

In der Übertragungsmatrix  $\underline{\mathbf{F}}_{xi}$  gemäß Gl. (92) sind damit die ersten 7 Spalten entbehrlich.

Die Randbedingungen in k lauten:

$$M_{\omega,k} = P_x \omega_7 = 100 \cdot (-0,4) = -40 \text{ kNm}^2$$

$$M_{T,k} = P_y z_5 = 60 \cdot (-0,8) = -48 \text{ kNm}$$

$$M_{z,k} = P_x y_7 = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ kNm}, \quad Q_{y,k} = P_y = 60 \text{ kN}$$

$$M_{y,k} = P_x z_7 = 100 \cdot (-1,2) = -120 \text{ kNm}, \quad Q_{z,k} = 0$$

$$N_k = P_x = 100 \text{ kN}$$

### Übertragungsbeziehung nach Gl. (97)

Nach Gl. (59) erhält man:

$$I_T = 1,04495 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Gl. (58) liefert mit  $\nu = 0,3$  (Stahl):

$$I_T^* = 0,40190 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Die Konstante  $K$  beträgt nach Gl. (65):

$$K = 0,0028424 \text{ m}^{-2}$$

Nach den Gln. (68) und (69) – oder alternativ nach den Gln. (66) und (67) – ergibt sich mit  $x = \ell = 10 \text{ m}$ :

$$b_6 = 1395,96 \text{ m}^6, \quad b_5 = 838,995 \text{ m}^5$$

$$b_4 = 420,635 \text{ m}^4, \quad b_3 = 169,051 \text{ m}^3$$

$$b_2 = 51,1956 \text{ m}^2, \quad b_1 = 10,4805 \text{ m}$$

$$b_0 = 1,14552$$

Für die Einzellast  $P_z$  erhält man mit  $\tilde{x} = \tilde{\ell} = 4 \text{ m}$ :

$$\tilde{b}_5 = 8,54258 \text{ m}^5, \quad \tilde{b}_4 = 10,6828 \text{ m}^4$$

Weitere  $\tilde{b}_j$  werden nicht benötigt.

Der Lastvektor  $\underline{Z}_k^0$  in Gl. (97) geht nur aus den beiden Einwirkungen  $q_z = q_{z,0}$  (Gl. (93), 6. Spalte) und  $P_z$  (Gl. (102), 6. Spalte) hervor.

Nach Streichung der ersten 7 Spalten von  $\underline{F}_{ki}$  und Zusammenfassung der rechten Seite in Gl. (97) lautet die Übertragungsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \\ \bar{w}'_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{v}'_k \\ \bar{g}_k \\ \bar{g}'_k \\ 10^3 M_{\omega,k} \\ M_{T,k} \\ M_{z,k} \\ Q_{y,k} \\ M_{y,k} \\ Q_{z,k} \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 859,52 & 4198,6 & 724,30 & 3555,2 & -357,27 & -1767,4 & -379,79 & 5866,4 & 280,27 \\ 6908,5 & 22812 & 2998,1 & 9849,1 & -3656,2 & -12146 & -1767,4 & 30314 & 774,06 \\ 1414,3 & 6908,5 & 621,43 & 2998,1 & -737,46 & -3656,2 & -357,27 & 12146 & 580,86 \\ -24237 & -80031 & -22420 & -74225 & 2998,1 & 9849,1 & 3555,2 & -24443 & -618,75 \\ -4961,6 & -24237 & -4560,5 & -22420 & 621,43 & 2998,1 & 724,30 & -9849,1 & -465,16 \\ -36207 & -119560 & -24237 & -80031 & 6908,5 & 22812 & 4198,6 & -56762 & -1442,7 \\ -7412,2 & -36207 & -4961,6 & -24237 & 1414,3 & 6908,5 & 859,52 & -22812 & -1083,6 \\ 1145,5 & 10481 & 97,408 & 321,65 & -27,765 & -91,684 & -16,874 & 228,13 & 5,7981 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & -50 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{\omega,i} \\ M_{T,i} \\ M_{z,i} \\ Q_{y,i} \\ M_{y,i} \\ Q_{z,i} \\ N_i \\ q_z \\ P_z \end{bmatrix}$$

Mit bekannten Schnittgrößen in k stellen die letzten 7 Gleichungen der Übertragungsbeziehung Bestimmungsgleichungen für die 7 unbekannt Schnittgrößen in i dar (wobei sukzessiv von unten nach oben fortschreitend jeweils nur eine Gleichung mit einer Unbekannten vorliegt).

Nach deren Bestimmung liefern die ersten 7 Gleichungen der Übertragungsbeziehung die Verschiebungsgrößen in k.

Es ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$$\begin{bmatrix} M_{\omega,i} \\ M_{T,i} \\ M_{z,i} \\ Q_{y,i} \\ M_{y,i} \\ Q_{z,i} \\ N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 422,58 \\ -48 \\ -550 \\ 60 \\ -960 \\ 160 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \\ \bar{w}'_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{v}'_k \\ \bar{g}_k \\ \bar{g}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,0446 \\ 255,10 \\ 36,037 \\ 21,205 \\ 4,8506 \\ -433,45 \\ -60,308 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Die verwendeten Einheiten sind m und kN.

### Zustandsgrößen und Spannungen exemplarisch für Schnittstelle $x = 5 \text{ m}$

Mit bekanntem Zustandsvektor  $\underline{Z}_i$  liefert die Übertragungsbeziehung (91) für  $x = 5 \text{ m}$  (Stabmitte) folgende Komponenten von  $\underline{Z}_x$ :

$$\bar{u} = 7,3285 \cdot 10^4$$

$$\bar{w} = 8,6198 \cdot 10^5, \quad \bar{w}' = 2,9367 \cdot 10^5$$

$$\bar{v} = 1,3890 \cdot 10^4, \quad \bar{v}' = 1,8916 \cdot 10^4$$

$$\bar{9} = -1,4847 \cdot 10^6, \quad \bar{9}' = -5,0132 \cdot 10^5$$

$$M_{\omega} = 188,55, \quad M_T = -48, \quad M_z = -250, \quad Q_y = 60, \quad M_y = -310, \quad Q_z = 100, \quad N = 100$$

$$\text{Gl. (105): } M_{T_p} = -2,015$$

$$\text{Gl. (106): } M_{T_s} = -45,985$$

Wegen  $q_x = 0$ ,  $m_y = 0$ ,  $m_z = 0$  und  $m_{\omega} = 0$  gilt  $N' = 0$ ,  $M'_y = Q_z$ ,  $M'_z = Q_y$  sowie  $M'_{\omega} = M_{T_s}$ . Damit ist die Matrix  $\underline{S}$  bekannt. Aus Gl. (21) ergeben sich dann für die Matrix  $\underline{\kappa}$  folgende Zahlenwerte:

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa'_1 \\ \kappa_2 & \kappa'_2 \\ \kappa_3 & \kappa'_3 \\ \kappa_4 & \kappa'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5104,9 & 3081,3 \\ -29973 & 9988,2 \\ -10004 & -1101,2 \\ 48624 & -17612 \end{bmatrix}$$

Nach Gl. (7) erhält man für die Matrix  $\underline{\sigma}$  folgende Zahlenwerte:

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma'_0 \\ \sigma_1 & \sigma'_1 \\ \sigma_2 & \sigma'_2 \\ \sigma_3 & \sigma'_3 \\ \sigma_4 & \sigma'_4 \\ \sigma_5 & \sigma'_5 \\ \sigma_6 & \sigma'_6 \\ \sigma_7 & \sigma'_7 \\ \sigma_8 & \sigma'_8 \\ \sigma_9 & \sigma'_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5104,9 & 3081,3 \\ -10103 & 3859,8 \\ -250,50 & -1338,3 \\ -23041 & 7340,5 \\ -8098,3 & 5409,3 \\ 18873 & -4909,3 \\ 47427 & -13101 \\ 6410,8 & -2410,5 \\ -31788 & 9361,5 \\ -16909 & 3847,2 \end{bmatrix}$$

Für die Schubflüsse  $T_{fg}$  erhält man aus Gl. (112):

$$T_{12} = 12,608, \quad T_{13} = 42,403, \quad T_{10} = 55,011, \quad T_{01} = 67,427$$

$$T_{04} = 26,021, \quad T_{56} = -81,046, \quad T_{78} = 34,194, \quad T_{79} = 8,897$$

$$T_{75} = 43,092, \quad T_{57} = -1,434, \quad T_{50} = -82,480, \quad T_{05} = -93,448$$

Der größte Schubfluß tritt im Abschnitt 0-5 auf. Mit  $\sigma'_0 = 3081,3$  und  $\sigma'_5 = -4909,3$  liegt dort ein Vorzeichenwechsel und deshalb ein Extremwert  $T_0$  vor.

Nach den Gln. (115) und (116) erhält man mit  $T_{50} = -82,480$ :

$$\xi_0 = 0,6144$$

$$T_0 = -100,58$$

Die zugehörige Schubspannung beträgt:

$$\tau_0 = \frac{-100,58}{0,015} = -6705 \text{ kN/m}^2$$

Die Schubspannung aus primärer Torsion lautet nach Gl. (107) für den Abschnitt 0-5:

$$\tau_p = \pm \frac{2,015}{1,04495} 10^5 \cdot 0,015 = \pm 2892 \text{ kN/m}^2$$

## 17 Übergang zur konventionellen Formulierung

Nachfolgend wird gezeigt, daß mit Hilfe der Matrix  $\underline{\mathbf{D}}$  auch die Möglichkeit besteht, den Schwerpunkt S, die zugehörigen Hauptachsen, den Schubmittelpunkt M und die maßgebenden Querschnittswerte zu bestimmen.

Die Glieder der nach Gl. (22) berechneten Matrix  $\underline{\mathbf{D}}$  haben folgende Bedeutung:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} A & A_z & A_y & A_\omega \\ A_z & A_{zz} & A_{zy} & A_{z\omega} \\ A_y & A_{yz} & A_{yy} & A_{y\omega} \\ A_\omega & A_{\omega z} & A_{\omega y} & A_{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (119)$$

mit folgenden Integralen über die Querschnittsfläche:

$$A = \int dA \quad (120)$$

$$A_z = \int z dA \quad (121)$$

$$A_y = \int y dA \quad (122)$$

$$A_\omega = \int \omega dA \quad (123)$$

$$A_{zz} = \int z^2 dA \quad (124)$$

$$A_{zy} = A_{yz} = \int z y dA \quad (125)$$

$$A_{yy} = \int y^2 dA \quad (126)$$

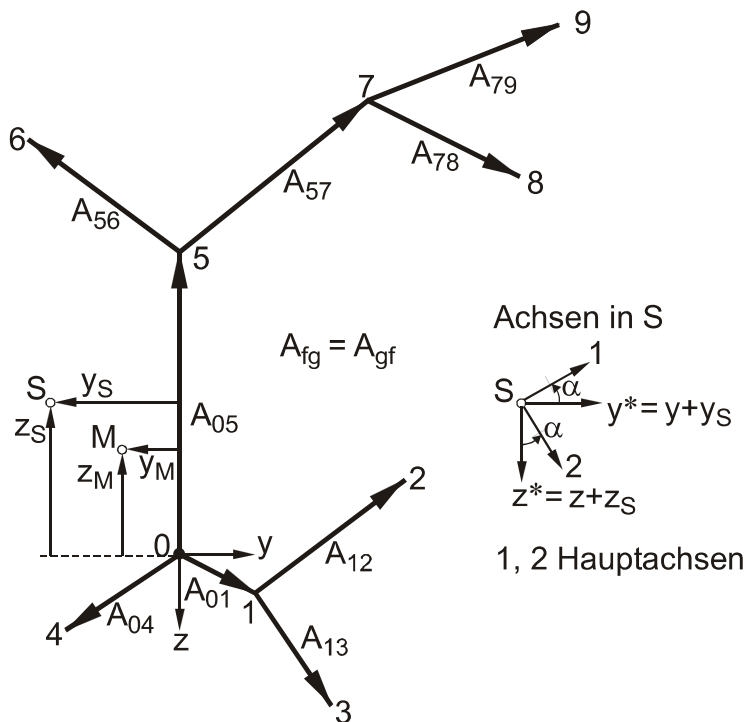
$$A_{z\omega} = A_{\omega z} = \int z \omega dA \quad (127)$$

$$A_{y\omega} = A_{\omega y} = \int y \omega dA \quad (128)$$

$$A_{\omega\omega} = \int \omega^2 dA \quad (129)$$

Die Normierung (siehe z.B. [4]) ergibt folgende Formeln für die Lage von S, M, für die Hauptachsen 1 und 2 gemäß Bild 7 und für die maßgebenden Querschnittswerte:





**Bild 7.** Querschnitt mit Lage des Schwerpunktes S, des Schubmittelpunktes M und der Hauptachsen 1 und 2

$$z_S = \frac{A_z}{A} \quad (130)$$

$$y_S = \frac{A_y}{A} \quad (131)$$

$$I_{y^*} = A_{zz} - A_z z_S \quad (132)$$

$$I_{y^*z^*} = A_{zy} - A_y z_S \quad (133)$$

$$I_{z^*} = A_{yy} - A_y y_S \quad (134)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 I_{y^*z^*}}{I_{y^*} - I_{z^*}} \quad (135)$$

Hauptträgheitsmomente:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array} \right\} = \frac{I_{y^*} + I_{z^*}}{2} \pm \frac{I_{y^*z^*}}{\sin 2\alpha} \quad (136)$$

Gleichungssystem für  $y_M$  und  $z_M$ :

$$\begin{bmatrix} I_{y^*} & -I_{y^*z^*} \\ -I_{y^*z^*} & I_{z^*} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_M \\ z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{z\omega} + A_\omega z_S \\ A_{y\omega} - A_\omega y_S \end{bmatrix} \quad (137)$$

Wölbordinate im Bezugspunkt 0:

$$\omega_0 = \frac{1}{A} (-A_\omega + A_y z_M - A_z y_M) \quad (138)$$

Wölbträgheitsmoment:

$$I_{\omega} = A_{\omega} \omega_0 + A_{z\omega} y_M - A_{y\omega} z_M + A_{\omega\omega} \quad (139)$$

Gemäß Bild 7 hat der Drehwinkel zwischen den Achsen  $y^*$ ,  $z^*$  und den Hauptachsen 1, 2 die Größe  $\alpha$  (im Gegenuhrzeigersinn positiv).

Für den Querschnitt des Beispiels im vorigen Abschnitt erhält man:

$$A = 0,08267 \text{ m}^2$$

$$z_S = -0,6079 \text{ m}, \quad y_S = 0,2798 \text{ m}$$

$$I_{y^*} = 0,02616 \text{ m}^4, \quad I_{y^*z^*} = -0,006867 \text{ m}^4, \quad I_{z^*} = 0,009872 \text{ m}^4$$

$$\alpha = -0,3502 \hat{=} -20,07^\circ, \quad I_1 = 0,02867 \text{ m}^4, \quad I_2 = 0,007364 \text{ m}^4$$

$$y_M = -0,1908 \text{ m}, \quad z_M = -0,6694 \text{ m}$$

$$\omega_0 = -0,1160 \text{ m}^2, \quad I_{\omega} = 0,001414 \text{ m}^6$$

## Literatur

- [1] *Wlassow, W.S.*: Dünnwandige elastische Stäbe, Band 1, Berlin: Verlag für Bauwesen 1964
- [2] *Roik, K., Carl, J., Lindner, J.*: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe, Berlin: Verlag Ernst & Sohn 1972
- [3] Bautabellen für Ingenieure, Kapitel 2A Mathematik, S. 2.31 bis 2.33, 17. Auflage, Köln: Wolters Kluwer 2006
- [4] *Eilering, S.*: Zur Berechnung der Wölbfunktion und Torsionskennwerte dünnwandiger Querschnitte von prismatischen Stäben. Bauingenieur, Band 80, März 2005, S. 142-150