TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

D I P L O M A R B E I T

Vermögens- und Konsumexternalitäten in einem Modell mit endogenem Wachstum

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Franz X. Hof

durch

Markus Riegler

Ruzickagasse 88-104/20
1230 Wien

Datum

Unterschrift

Ich danke Prof. Franz X. Hof für die Betreuung meiner Diplomarbeit und das Aufzeigen alternativer Betrachtungsweisen. Meiner Familie bin ich für die Unterstützung meines Studiums sehr dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Modellbeschreibung **2**
2.1 Unternehmen . . . 3
2.2 Haushalte . . . 5

3 Sozial geplante Wirtschaft **10**
3.1 Bedingungen für die Existenz eines Steady State . . . 12
3.1.1 Form der Nutzenfunktion im Fall $\sigma\left(l^p\right) \neq 1$ . . . 13
3.1.2 Form der Nutzenfunktion im Fall $\sigma = 1$ . . . 15
3.2 Eigenschaften des Steady State . . . 16
3.2.1 Steady State im Fall $\sigma \neq 1$ . . . 17
3.2.2 Steady State im Fall $\sigma = 1$ . . . 20
3.3 Transversalitätsbedingung . . . 22
3.4 Übergangsdynamik . . . 23
3.5 Hinreichende Bedingungen . . . 24

4 Dezentrale Wirtschaft **30**
4.1 Bedingungen für die Existenz eines Steady State . . . 31
4.2 Bestimmung des Arbeitsinputs . . . 33
4.2.1 Arbeitsinput im Fall $\sigma \neq 1$ . . . 35
4.2.2 Arbeitsinput im Fall $\sigma = 1$ . . . 39
4.3 Konsum-Kapital-Quote . . . 42
4.4 Wachstumsrate . . . 45
4.5 Übergangsdynamik . . . 47
4.6 Hinreichende Bedingungen . . . 47

5 Optimale Besteuerung **52**
5.1 Soziales Optimum . . . 52
5.2 Besteuerung in der dezentralen Wirtschaft . . . 52
5.2.1 Volkswirtschaft ohne Konsumexternalität . . . 55
5.2.2 Volkswirtschaft mit Konsumexternalität . . . 56

6 Illustratives Beispiel **58**
6.1 Cobb-Douglas Produktionsfunktion . . . 58
6.2 Isoelastische Nutzenfunktion . . . 59
6.3 Sozial geplante Wirtschaft . . . 62
6.4 Dezentrale Wirtschaft . . . 65
6.5 Optimale Besteuerung . . . 71

7 Zusammenfassung **73**

1 Einleitung

In der Diplomarbeit werden die Auswirkungen des Strebens nach Status der Wirtschaftssubjekte in einem Wachstumsmodell einer geschlossenen Volkswirtschaft untersucht. Diese besteht aus homogenen Individuen, die perfekte Voraussicht besitzen und ihren Lebensnutzen durch geeignete Wahl ihres Konsums und ihrer Freizeit maximieren. Der Status eines Individuums wird durch seinen relativen Konsum und/oder sein relatives Vermögen bestimmt. Die Individuen beziehen aus einer ceteris paribus Steigerung ihres Konsums somit nicht nur einen höheren Nutzen aus dem Konsum selbst, sondern auch einen zusätzlichen Nutzen durch die Verbesserung ihres relativen Konsums. Ebenso können sie einen indirekten Nutzen aus einer Steigerung ihres Vermögens beziehen. Neben diesen beiden möglichen Externalitäten in der Nutzenfunktion gibt es eine Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion. Diese führt dazu, dass die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion linear im gesamtwirtschaftlichen Kapitalstock ist und steigende Skalenerträge aufweist, während die für die Einzelfirma relevante Produktionsfunktion linear homogen in den beiden Produktionsfaktoren Kapital und Arbeit ist und sich daher durch eine sinkende Grenzproduktivität des Kapitals auszeichnet. Eine Konsequenz der Produktionsexternalität ist die Ermöglichung von langfristigem, endogenen Wirtschaftswachstum.

Das makroökonomische Verhalten der dezentralen Wirtschaft wird mit dem sozial optimalen Ergebnis verglichen, wobei jeweils die Existenz von eindeutigen langfristigen Wachstumspfaden mit konstantem Arbeitseinsatz vorausgesetzt wird. Außerdem wird gezeigt, dass durch Einführung von Steuern beziehungsweise Subventionen auch in der dezentralen Wirtschaft das sozial optimale Gleichgewicht erreicht werden kann.

In den in der Literatur vorhandenen Status-Modellen mit endogenem Wirtschaftswachstum wird meist entweder eine Konsumexternalität oder eine Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion unterstellt. Eine Ausnahme sind Tournemaine und Tsoukis (2008), die eine multiplikativ separable Nutzenfunktion mit relativem Konsum und relativem Vermögen verwenden. Die in der vorliegenden Arbeit zugelassenen Nutzen- und Produktionsfunktionen sind jedoch allgemeiner. Außerdem untersuchen Tournemaine und Tsoukis (2008) nicht den Fall einer sozial geplanten Wirtschaft und dementsprechend auch keine Fragen einer optimalen Besteuerung. Liu und Turnovsky (2005) untersuchen unter anderem ein endogenes Wachstumsmodell mit einer multiplikativ separablen Nutzenfunktion, die eine Konsumexternalität aufweist. Außerdem werden die Ergebnisse mit einer geplanten Wirtschaft verglichen und Bedingungen für die optimale Besteuerung aufgestellt.

Eine weiterer Unterschied des in der Diplomarbeit untersuchten Modells im Vergleich zu einigen endogenen Wachstumsmodellen in der Literatur ist die endogene Bestimmung des Arbeitsinputs. Ein Modell mit exogen gegebenem Arbeitsinput ist beispielsweise in Futagami und Shibata (1998) enthalten. Die Autoren betrachten eine multiplikativ separable Nutzenfunktion, in der es einen Einfluss von relativem Vermögen gibt. Eine additiv separable Nutzenfunktion, die sich in dieser Arbeit als Grenzfall ergibt, wird von Corneo und Jeanne (1997) verwendet. In ihrem Modell mit exogenem Arbeitseinsatz wird das Streben nach Status durch einen vom relativen Vermögen abhängigen additiven Nutzen beschrieben.

Die vorliegende Arbeit ist somit eine Erweiterung dieser Modelle, indem von einer endogenen Bestimmung des Arbeitseinsatzes, einer allgemeinen Nutzenfunktion mit dem möglichen Einfluss von relativem Konsum und relativem Vermögen und einer allgemeinen Produktionsfunktion ausgegangen wird und die Ergebnisse der dezentralen Wirtschaft mit den sozial optimalen verglichen werden. Im nächsten Kapitel wird das Modell detailliert beschrieben und die Bedingungen für die Gewinnmaximierung der Unternehmen und die Nutzenmaximierung der Haushalte aufgestellt.

Im dritten Kapitel wird dann die sozial geplante Wirtschaft behandelt. Es werden Restriktionen für die Nutzenfunktion hergeleitet, damit ein eindeutiger Steady State mit konstantem Arbeitsinput existiert. In der Folge wird das Optimierungsproblem des sozialen Planers gelöst und die optimalen Pfade von Konsum und Arbeit implizit bestimmt.

Im vierten Kapitel wird die dezentrale Wirtschaft untersucht. Damit auch in dieser ein eindeutiger Steady State existiert, werden zusätzliche Bedingungen für die Nutzenfunktion hergeleitet. Anschließend wird das makroökonomische Verhalten bestimmt und mit jenem in der sozial geplanten Wirtschaft verglichen.

Im fünften Kapitel werden in der dezentralen Wirtschaft Steuern und Subventionen eingeführt und Bedingungen für diese bestimmt, die dazu führen, dass das Verhalten der dezentralen Wirtschaft das sozial optimale repliziert.

Im sechsten Kapitel werden schließlich die in der Arbeit aufgestellten Bedingungen und Ergebnisse an Hand einer speziellen Wahl der Nutzenfunktion und der Produktionsfunktion illustriert.

2 Modellbeschreibung

Es wird ein zeitstetiges Wachstumsmodell vom Ramsey-Typ betrachtet. Die geschlossene Volkswirtschaft besteht aus einem Kontinuum von identischen Individuen mit konstanter Masse N. Diese wird nach der Beschreibung der Unternehmen im nächsten Abschnitt auf $N = 1$ normiert. Die Individuen sind im Besitz des Realkapitals und vermieten es laufend an die Unternehmen. Das Anfangskapital der Volkswirtschaft beträgt k_0 und ist gleichmäßig verteilt. Weiters können die Individuen ihr Arbeitsangebot und damit die Höhe des Arbeitseinkommens endogen wählen. Wegen ihrer großen Anzahl nehmen sie den Realzins und Reallohn als gegeben. Zusätzlich kommen die Gewinne der Unternehmen den Individuen zu Gute. Da die Produktionsfunktion der Unternehmen jedoch konstante Skalenerträge in den Produktionsfaktoren aufweist und auf allen Märkten vollkommene Konkurrenz unterstellt wird, sind die Gewinne der Unternehmen (im Sinne von Extraprofiten) im Gleichgewicht gleich Null. Ihr Arbeits- und Kapitaleinkommen können die Individuen für Konsum oder zur Steigerung ihres Realvermögens verwenden.

Die Individuen verfügen über perfekte Voraussicht und maximieren ihren Lebensnutzen, der das gewichtete Integral über eine Momentan-Nutzenfunktion ist. Diese Nutzenfunktion hängt einerseits positiv vom eigenen Konsum und der eigenen Freizeit ab. Andererseits erlaubt sie auch einen Einfluss des relativen Konsums und des relativen Vermögens der Individuen im Vergleich zum jeweiligen gesamtwirtschaftlichen Durchschnitt. Wegen der Masse an Individuen und der perfekten Voraussicht sind auch die Pfade von durchschnittlichem Konsum und durchschnittlichem Vermögen für die Individuen gegeben und von ihnen nicht beeinflussbar.

Neben diesen beiden Externalitäten in der Nutzenfunktion der Individuen gibt es im Modell auch eine positive Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion der Unternehmen. Dadurch weist die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion konstante Grenzerträge von Kapital auf und erlaubt ein endogenes Wachstum der Volkswirtschaft.

In den folgenden Abschnitten werden die Annahmen für die Unternehmen und die Haushalte näher definiert und ihr jeweiliges Verhalten beschrieben.

2.1 Unternehmen

Die Unternehmen produzieren ein Gut mit Hilfe der beiden Produktionsfaktoren Realkapital und Arbeit, die sie auf den Faktormärkten mieten können. Das produzierte Gut wird auf dem Gütermarkt verkauft. Eine Einheit dieses Outputs kann von den Haushalten entweder als eine Einheit des Konsumguts oder als zusätzliche Einheit Realkapital verwendet werden. Es wird angenommen, dass auf dem Gütermarkt und den beiden Faktormärkten vollkommene Konkurrenz herrscht. Daher nehmen die Unternehmen den Preis des Outputs sowie die Preise der Produktionsfaktoren ausgedrückt in Einheiten des Outputs als gegeben. Der Pfad des Reallohns wird mit $w(t)$ und der Mietpreis des Kapitals mit $R(t)$ bezeichnet. Die Unternehmen passen den Input von Kapital und Arbeit so an, dass ihr Profit maximiert wird. Da diese Anpassung zu jedem Zeitpunkt ohne eine Abhängigkeit von der Vergangenheit möglich ist, ergibt sich für die Unternehmen ein statisches Optimierungsproblem, bei dem der Gewinn zu jedem Zeitpunkt maximiert werden soll.

Die Produktionsfunktion ist für alle Unternehmen identisch. Der Output von Unternehmen j beträgt $y_j = F(k_j, Tl_j)$, wobei der Faktor $T > 0$ den vom Unternehmen nicht beeinflussbaren Stand der Technologie beschreibt. Er wird unten genauer spezifiziert. Die Produktionsfunktion soll positive und fallende Grenzerträge in den beiden Produktionsfaktoren k_j und l_j aufweisen. Außerdem werden konstante Skalenerträge in k_j und l_j angenommen. Das bedeutet, dass $F(\alpha k_j, T\alpha l_j) = \alpha F(k_j, Tl_j)$ für jedes $\alpha \geq 0$ gilt. Durch Wahl von $\alpha = k_j^{-1}$ lässt sich die Produktionsfunktion in der Form $F(k_j, Tl_j) = k_j F\left(1, T\frac{l_j}{k_j}\right) = k_j f\left(T\frac{l_j}{k_j}\right)$ mit der Funktion $f(x) := F(1, x)$ schreiben[1]. Positive und fallende Grenzerträge von Arbeit in der Produktionsfunktion F implizieren $f'(x) > 0$ sowie $f''(x) < 0$. Aus dem positiven Grenzertrag von Kapital folgt weiters $f\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) - T\frac{l_j}{k_j} f'\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) > 0$. Er ist ebenfalls fallend, wenn $f''(x) < 0$ gilt. Außerdem werden Inada-Bedingungen unterstellt, damit das Maximierungsproblem der Unternehmen eine innere Lösung besitzt: Die Grenzerträge von Kapital und Arbeit sollen bei einem jeweils festgehaltenen anderen Faktor unbeschränkt an der Stelle 0 sein: $\lim_{k_j \to 0} F_1(k_j, Tl_j) = \infty$ und $\lim_{l_j \to 0} F_2(k_j, Tl_j) = \infty$. Außerdem sollen sie mit wachsender Größe des Produktionsfaktors gegen 0 konvergieren: $\lim_{k_j \to \infty} F_1(k_j, Tl_j) = 0$ und $\lim_{l_j \to \infty} F_2(k_j, Tl_j) = 0$. Daraus folgt $\lim_{x \to 0} f'(x) = \infty$ und $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

[1] In der Literatur wird meist $f(x) := F(x, 1)$ als Funktion der Kapitalintensität $\frac{k}{l}$ definiert. Wegen der später konkretisierten Kapitalexternalität bietet sich in diesem Modell die Definition in Abhängigkeit von der Arbeitsintensität an.

Die Maximierung des Gewinns bedeutet somit aus Sicht der Unternehmen:

$$\max_{k_j, l_j} k_j f\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) - wl_j - Rk_j \tag{2.1}$$

Bei Existenz einer inneren Lösung der Gewinnmaximierung ist es erforderlich, dass die Grenzproduktivitäten der beiden Produktionsfaktoren mit ihren jeweiligen Preisen übereinstimmen:

$$Tf'\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) = w \tag{2.2}$$

$$f\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) - T\frac{l_j}{k_j}f'\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) = R \tag{2.3}$$

Die linke Seite der ersten Bedingung ist fallend in der Arbeitsintensität $\frac{l_j}{k_j}$. Wegen der Inada-Bedingungen nimmt sie jeden positiven Wert an. Daher ergibt sich aus dem Reallohn ein eindeutiges Verhältnis $\varphi := \frac{l_j}{k_j} > 0$. Dieses muss für eine innere Lösung auch die zweite Bedingung erfüllen. Ist das der Fall, erhält man als Konsequenz der konstanten Skalenerträge, dass der Gewinn der Unternehmen gleich Null ist[2]:

$$wl_j + Rk_j = l_jTf'\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) + k_jf\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) - Tl_jf'\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) = k_jf\left(T\frac{l_j}{k_j}\right) \tag{2.4}$$

Im Falle einer inneren Lösung der Gewinnmaximierung der Unternehmen ist durch die Optimalitätsbedingungen das Verhältnis, aber nicht das Niveau der Produktionsfaktoren festgelegt. Die Größe und die Anzahl der Unternehmen in der Volkswirtschaft sind somit unbestimmt. Die gesamtwirtschaftliche Produktion unter Verwendung von k Einheiten Kapital und dementsprechend $k\varphi$ Einheiten Arbeit ist jedoch unabhängig von der Aufteilung der Produktionsfaktoren auf die Unternehmen:

$$y = kf\left(T\varphi\right) \tag{2.5}$$

Für den Stand der Technologie T wird angenommen, dass er durch das Gesamtkapital der Volkswirtschaft repräsentiert wird und mit ihm übereinstimmt: $T(t) \equiv k(t)$. Kapital führt daher zu einer positiven Externalität in der Produktionsfunktion. Dieser Unterschied zu einer neoklassischen Produktionsfunktion ermöglicht langfristiges, endogenes Wachstum von Pro-Kopf-Output, -Konsum und -Vermögen. Die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion lautet mit dieser Spezifikation:

$$y = kf\left(k\frac{l}{k}\right) = kf(l) \tag{2.6}$$

Ihre Linearität in Kapital ermöglicht langfristiges Wachstum und hat zur Folge, dass dieser Wachstumspfad ohne Übergangsdynamik sofort erreicht werden kann, wie in den folgenden Kapiteln gezeigt wird.

[2] Erfüllt φ die Bedingung (2.3) nicht, sind die möglichen Gewinne entweder unbeschränkt $(f(T\varphi) - T\varphi f'(T\varphi) > R)$ oder die Wahl $l_j = k_j = 0$ ist optimal $(f(T\varphi) - T\varphi f'(T\varphi) < R)$.

Durch Einsetzen der Spezifikation von T in die Maximierungsbedingungen der Unternehmen erhält man in Abhängigkeit von Arbeitsinput und Kapitalinput jenen Reallohn und realen Mietpreis, der mit der Gewinnmaximierung der Unternehmen vereinbar ist:

$$w = kf'(l) \tag{2.7}$$

$$R = f(l) - lf'(l) \tag{2.8}$$

Aus der aggregierten Produktionsfunktion erhält man weiters den Pro-Kopf-Output:

$$\frac{y}{N} = \frac{k}{N} f(l) \tag{2.9}$$

Bei einer gegebenen durchschnittlichen Größe von Kapital und Arbeit hängen die gesamtwirtschaftlichen Werte k und l von der Bevölkerungsgröße ab. Damit ergibt sich auch eine Abhängigkeit der Faktorpreise von der Bevölkerungsgröße. Durch die Einführung einer Funktion $\tilde{f}(x) := f(Nx)$ erhält man $\tilde{f}'(x) = Nf'(Nx)$. Einsetzen in die obigen Gleichungen liefert die Werte für Reallohn, realen Mietpreis und Pro-Kopf-Output, die nur vom durchschnittlichen Kapital $\frac{k}{N}$ und der durchschnittlichen Arbeit $\frac{l}{N}$ abhängig sind:

$$w = \frac{k}{N} \tilde{f}' \left(\frac{l}{N} \right) \tag{2.10}$$

$$R = \tilde{f} \left(\frac{l}{N} \right) - \frac{l}{N} \tilde{f}' \left(\frac{l}{N} \right) \tag{2.11}$$

$$\frac{y}{N} = \frac{k}{N} \tilde{f} \left(\frac{l}{N} \right) \tag{2.12}$$

Da die Größe der Bevölkerung in dieser Diplomarbeit als konstant angenommen wird, kann ihre Größe somit durch passende Definition der Funktion $\tilde{f}$ auf $N = 1$ normiert werden. Die gesamtwirtschaftlichen Werte für Konsum, Kapital und Output stimmen dann mit den jeweiligen durchschnittlichen Werten überein.

2.2 Haushalte

Die Haushalte beziehen ein Arbeitseinkommen für ihre zur Verfügung gestellte Arbeitsleistung und ein Zinseinkommen für ihr nichtmenschliches Vermögen. Ihr Einkommen wird entweder für Konsum ausgegeben oder erhöht ihr Vermögen[3]. Das nichtmenschliche Vermögen $a_i(t)$ von Individuum $i \in [0,1]$ zum Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ besteht aus Nettoforderungen gegen andere Wirtschaftssubjekte und aus Realkapital. Das Vermögen am Anfang besteht aus dem gleichmäßig aufgeteilten Anfangskapital der Volkswirtschaft: $a_i(0) = k_0$. Das Realkapital wird zum Mietpreis $R(t)$ an die Unternehmen vermietet. Die Abschreibungsrate von Kapital wird mit konstant $\delta \geq 0$ angenommen. Damit ergibt sich der Realzinssatz von $r(t) = R(t) - \delta$. Da die Individuen über perfekte Voraussicht verfügen, muss dieser Zinssatz auch mit der realen Ertragsrate der Nettoforderungen gegen

[3] Es soll auch die theoretische Möglichkeit bestehen, den bestehenden Kapitalstock in Konsumgüter umzuwandeln und somit zu konsumieren, falls der produzierte Output geringer als die gesamtwirtschaftlich nachgefragte Konsummenge ist. In einer wachsenden Wirtschaft wird dies allerdings nicht notwendig sein.

andere Individuen übereinstimmen. Das Einkommen durch Zinsen beziehungsweise die Ausgaben für Zinsen, falls die Nettoverbindlichkeiten das Realkapital übersteigen, beträgt somit $r(t)\, a_i(t)$.

Die Individuen können zu jedem Zeitpunkt t ihr Arbeitsangebot $l_i(t) \in [0,1]$ wählen. Das Arbeitsangebot l_i beschreibt somit jenen Anteil der Zeit, den das Individuum i als Arbeitsleistung anbietet - der Anteil der Freizeit beträgt daher $1 - l_i(t)$. Für die geleistete Arbeit erhalten die Individuen einen Reallohn (ausgedrückt in Einheiten des Konsumgutes) von $w(t)$ pro Zeiteinheit. Das reale Arbeitseinkommen von Individuum i zum Zeitpunkt t beträgt somit $w(t)\, l_i(t)$.

Weiters können die Konsumenten ihren Konsumpfad $c_i(t)$ wählen. Daraus ergibt sich die Veränderung ihres Vermögens aus der Differenz von Einnahmen durch Kapital- und Arbeitseinkommen und Ausgaben durch Konsum:

$$\dot{a}_i(t) = r(t)\, a_i(t) + w(t)\, l_i(t) - c_i(t) \tag{2.13}$$

Die Individuen wollen ihren Lebensnutzen Ω_i maximieren. Dieser ist ein gewichtetes Integral über eine Momentan-Nutzenfunktion U, die zweimal stetig differenzierbar sein soll:

$$\Omega_i = \int_0^\infty e^{-\rho t} U\left(c_i(t), l_i(t), \frac{a_i(t)}{A(t)}, \frac{c_i(t)}{C(t)}\right) dt \tag{2.14}$$

Der zukünftige Nutzen der Individuen wird mit der konstanten Zeitpräferenzrate $\rho > 0$ diskontiert. Die Individuen beziehen zu jedem Zeitpunkt einen Nutzen aus ihrem eigenen Konsum c_i: Der direkte Grenznutzen des Konsums soll positiv und fallend sein: $U_1\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) > 0$ und $U_{11}\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) < 0$.[4] Weiters haben sie einen positiven und fallenden Grenznutzen von Freizeit $(1 - l_i)$. Der Grenznutzen von Arbeit ist somit negativ und fallend: $U_2\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) < 0$ und $U_{22}\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) < 0$. Zusätzlich wird auch die gemeinsame, strikte Konkavität der Momentan-Nutzenfunktion in ihren ersten beiden Komponenten unterstellt: $U_{11}U_{22} - (U_{12})^2 > 0$.

Die Nutzenfunktion erlaubt außerdem, dass Individuen einen Nutzen aus ihrer relativen Position in der Volkswirtschaft beziehen. Einerseits ist ein Einfluss des relativen Vermögens von Individuum i möglich. Das durchschnittliche Vermögen wird mit $A(t)$ bezeichnet und ergibt sich aus dem Integral $A(t) = \int_0^1 a_i(t)\, di$. Falls Status durch höheres relatives Vermögen zu einem zusätzlichen Nutzen führt, gilt $U_3\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) > 0$. Ebenso kann der relative Konsum eines Individuums einen Einfluss auf den Nutzen haben. Den durchschnittlichen Konsum $C(t)$ erhält man aus dem Integral $C(t) = \int_0^1 c_i(t)\, di$. Führt ein größeres Verhältnis von individuellem und durchschnittlichem Konsum zu einer Nutzenerhöhung, gilt $U_4\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) > 0$.

Zur Lösung des intertemporalen Nutzenmaximierungsproblem der Haushalte wird das Pontryaginsche Maximumprinzip verwendet. Die Kontrollvariablen der Individuen sind der eigene Konsum (c_i) und das Arbeitsangebot (l_i), wobei zunächst innere Lösungen mit $c_i(t) > 0$ und $l_i(t) \in (0,1)$ gesucht werden. Das Realvermögen der Individuen ist eine Zustandsvariable mit dem Anfangswert $a_i(0)$, die sich gemäß der Differentialgleichung (2.13) verändert:

$$\dot{a}_i = r a_i + w l_i - c_i \tag{2.15}$$

[4] Für eine Funktion $G(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet $G_k(x_1, \ldots, x_n)$ die partielle Ableitung der Funktion nach der k-ten Komponente $(k \in \{1, \ldots, n\})$.

Die Pfade von durchschnittlichem Vermögen ($A(t)$), durchschnittlichem Konsum ($C(t)$), Reallohn ($w(t)$) und Realzinssatz ($r(t)$) sind für die Individuen exogen gegeben. Die Hamilton-Funktion in der current-value Form mit dem Kozustand $\lambda_i(t) > 0$ lautet:

$$H(c_i, l_i, a_i, \lambda_i) = U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + \lambda_i (ra_i + wl_i - c_i) \tag{2.16}$$

Die ersten beiden notwendigen Bedingungen für die Maximierug des Lebensnutzens sind die notwendigen Bedingungen für die Maximierung der Hamilton-Funktion bezüglich der beiden Kontrollvariablen:

$$\frac{\partial H}{\partial c_i} = U_1\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + U_4\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{C} - \lambda_i = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l_i} = U_2\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + \lambda_i w = 0 \tag{2.18}$$

Aus den beiden notwendigen Bedingungen (2.17) und (2.18) erhält man die intratemporale Optimalitätsbedingung:

$$MRS^{1-l_i,c_i} := \frac{-U_2\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)}{U_1\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + U_4\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{C}} = w \tag{2.19}$$

Sie besagt, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für eigenen Konsum (im Fall einer inneren Lösung) mit dem durch den Reallohn gegebenen relativen Preis von Freizeit und Konsum übereinstimmen muss. Der Grenznutzen von Konsum aus Sicht der Individuen besteht einerseits aus dem direkten Nutzenzuwachs (U_1), der durch zusätzlichen Konsum entsteht, und dem indirekten Nutzenzuwachs ($U_4\frac{1}{C}$) wegen einer Erhöhung des relativen Konsums. Das Auftreten der Konsumexternalität in der Nutzenfunktion ($U_4 > 0$) verringert ceteris paribus die Grenzrate der Substitution aus der Sicht des Individuums. Dies bedeutet, dass das Individuum für den Verlust von Freizeit mit weniger zusätzlichem Konsum kompensiert werden kann.

Weiters erhält man als notwendige Bedingung die Differentialgleichung für den Kozustand:

$$\dot{\lambda}_i = \rho\lambda_i - \frac{\partial H}{\partial a_i} = -\left[r + U_3\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{\lambda_i A} - \rho\right]\lambda_i \tag{2.20}$$

Der Kozustand $\lambda_i(t)$ des Individuums kann als Schattenpreis des Vermögens interpretiert werden: Er entspricht jenem marginalen Momentan-Nutzen, den das Individuum zum Zeitpunkt t aus einer zusätzlichen marginalen Einheit des Vermögens ziehen kann: Die erste Möglichkeit, die das Individuum durch eine zusätzliche Einheit des Vermögens hat, ist die sofortige Konsumation. Gemäß der ersten notwendigen Bedingung (2.17) stimmt der Kozustand mit dem Grenznutzen des Individuums bezüglich eigenem Konsum überein. Eine Alternative ist, das Arbeitsangebot soweit einzuschränken, dass das Individuum real eine marginale Einheit weniger verdient. Das sind dementsprechend $\frac{1}{w}$ marginale Arbeitseinheiten. Wegen der intratemporalen Optimierung muss der Grenznutzen daraus derselbe sein. Die zweite notwendige Bedingung (2.18) stellt dies sicher ($\lambda_i = \frac{-U_2}{w}$). Die dritte Möglichkeit ergibt sich daraus, dass das zusätzliche Vermögen auch angespart und samt Zinserträgen zu einem späteren Zeitpunkt konsumiert werden kann. Dass diese Verwendung denselben Grenznutzen bringt, stellt die Differentialgleichung des Kozustandes sicher. Durch Einsetzen der ersten notwendigen Bedingung (2.17) in die Differentialgleichung (2.20) erhält man die Wachstumsrate des Kozustandes:

$$\frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = -\left[r + \frac{U_3\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{A}}{U_1\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + U_4\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{C}} - \rho\right] \tag{2.21}$$

Beziehen die Individuen einen Nutzen durch ihr relatives Vermögen ($U_3 > 0$), ist die Statuskomponente $MRS^{a_i,c_i} := \frac{U_3\frac{1}{A}}{U_1+U_4\frac{1}{C}}$ positiv. Diese beschreibt die Grenzrate der Substitution des Individuums von eigenem Vermögen für eigenen Konsum. Sie gibt an, auf wie viele (marginale) Einheiten von eigenem Konsum das Individuum verzichten kann, wenn das eigene Vermögen um eine (marginale) Einheit erhöht wird.

Die Differentialgleichung für den Kozustand in seiner Interpretation als Schattenpreis des Vermögens kann nun folgendermaßen motiviert werden: Es wird ein marginales Zeitintervall $[t, t+dt]$ betrachtet, auf dem Konsum, Arbeit, Realzinssatz und Grenzrate der Substitution von Vermögen für Konsum konstant sein sollen. Erhält das Individuum zum Zeitpunkt t eine (marginale) zusätzliche Einheit an Vermögen und investiert es sie, erhält es bis zum Zeitpunkt $t + dt$ näherungsweise rdt Einheiten an Zinsen. Außerdem kann es den eigenen Konsum im Intervall $[t, t + dt]$ im Ausmaß von MRS^{a_i,c_i} Einheiten einschränken, ohne dass sich der Momentan-Nutzen verändert. Wegen der intratemporalen Optimalität könnte es genauso seine Freizeit einschränken oder eine Mischung der beiden Optionen wählen. Bis zum Zeitpunkt $t + dt$ hat es daher ohne Nutzenverlust $MRS^{a_i,c_i}dt$ Einheiten weniger konsumiert, wodurch sich das Vermögen um $MRS^{a_i,c_i}dt$ Einheiten zusätzlich erhöht hat. Zusammen mit der Realverzinsung besitzt das Individuum zum Zeitpunkt $t + dt$ somit $1 + (r + MRS^{a_i,c_i})\,dt$ zusätzliche Einheiten. Gemäß der Interpretation des Kozustandes können ihm diese einen Nutzen von $[1 + (r + MRS^{a_i,c_i})\,dt]\,\lambda_i\,(t + dt)$ Einheiten zum Zeitpunkt $t + dt$ bringen. Da der Diskontierungsfaktor im Zeitraum $[t, t + dt]$ um ρdt Einheiten gefallen ist, entspricht dieser Nutzen zum Zeitpunkt $t + dt$ näherungsweise $[1 + (r + MRS^{a_i,c_i} - \rho)\,dt]\,\lambda_i\,(t + dt)$ Einheiten zum Zeitpunkt t. Dieser Nutzen muss gleich $\lambda_i\,(t)$ sein, da die sofortige Konsumation des marginalen zusätzlichen Vermögens bei intertemporaler Optimierung den gleichen Nutzen bringen muss. Man erhält damit die Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda_i\,(t) &= [1 + (r + MRS^{a_i,c_i} - \rho)\,dt]\,\lambda_i\,(t + dt) \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda_i\,(t + dt)}{\lambda_i\,(t)} &= [1 + (r + MRS^{a_i,c_i} - \rho)\,dt]^{-1} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Wegen $[1 + (r + MRS^{a_i,c_i} - \rho)\,dt]^{-1} \approx [1 - (r + MRS^{a_i,c_i} - \rho)\,dt]$ erhält man daraus die relative Veränderung des Kozustandes:

$$\frac{\lambda_i\,(t + dt) - \lambda_i\,(t)}{\lambda_i\,(t)} \approx -\,(r + MRS^{a_i,c_i} - \rho)\,dt \tag{2.23}$$

Dividiert man durch die Länge des Intervalls (dt), erhält man somit die Näherung für die Wachstumsrate des Kozustandes: $\frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \approx \frac{1}{\lambda_i(t)}\frac{\lambda_i(t+dt)-\lambda_i(t)}{dt} = -\,[r + MRS^{a_i,c_i} - \rho]$. Sie entspricht der Differentialgleichung für den Kozustand, welche somit die intertemporale Optimalität der Entscheidungen des Individuums sicherstellt.

Zusätzlich zu den drei notwendigen Bedingungen soll die Transversalitätsbedingung gelten, die sicherstellt, dass die Individuen langfristig nicht zu viel Vermögen akkumulieren[5]:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \lambda_i(t) \, a_i(t) = 0 \tag{2.24}$$

In einem dezentralen symmetrischen makroökonomischen Gleichgewicht mit Räumung der Faktormärkte müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1. In einem symmetrischen Gleichgewicht treffen homogene Individuen identische Entscheidungen. Für alle i gilt daher $c_i = c = C$ und $a_i = a = A$.
2. Da eine geschlossene Volkswirtschaft ohne Staatsverschuldung betrachtet wird, gilt $a = k$.
3. Die Räumung der Faktormärkte erfordert, dass der von den Firmen gewählte Input an Realkapital und Arbeit mit dem jeweiligen Angebot der Haushalte übereinstimmt.
4. Ein Gleichgewicht bei Vollauslastung der beiden Produktionsfaktoren kann nur dann vorliegen, wenn die Firmen in dieser Situation keinen Anreiz haben, einen oder beide Inputs zu verändern, das heißt die Grenzprofite der beiden Faktoren gleich Null sind. Dies ist bei Vollbeschäftigung der beiden Inputs genau dann der Fall, wenn die beiden Faktorpreise, welche auf der Marktebene im Unterschied zur Firmenebene endogene Variablen sind, in jedem Zeitpunkt die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$w = kf'(l) \tag{2.25}$$

$$r = f(l) - lf'(l) - \delta \tag{2.26}$$

Berücksichtigt man in der flow budget constraint der Haushalte (2.13) die eben beschriebenen Zusammenhänge, erhält man die folgende Differentialgleichung für k, welche mit der gesamtwirtschaftlichen Ressourcenbeschränkung übereinstimmt:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \dot{a} \\ &= ra + wl - c \\ &= [f(l) - lf'(l) - \delta] k + kf'(l) l - c \\ &= [f(l) - \delta] k - c \end{aligned} \tag{2.27}$$

Die Veränderung des Kapitalstocks ergibt sich somit aus dem produziertem Output abzüglich von Abschreibungen und von Konsum. Außerdem gilt die Anfangsbedingung $k(0) = k_0$. Setzt man den Reallohn und den Realzinssatz in die Bedingungen für die Nutzenmaximierung der Haushalte ein und wertet

[5] Aus Sicht eines Individuums müsste nur $\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} \lambda_i(t) \, a_i(t) \leq 0$ gelten. Es wird jedoch zusätzlich unterstellt, dass die no-Ponzi-Game Bedingung gilt: Die Individuen dürfen sich nicht so sehr verschulden, dass der Gegenwartswert ihrer Verbindlichkeiten negativ ist: $\lim_{t\to\infty} a_i(t) \exp\left(-\int_0^t r(u) \, du\right) \geq 0$. Aus diesen beiden Bedingungen folgt, dass die genannte Transversalitätsbedingung gelten muss.

man die Funktionen im symmetrischen Gleichgewicht aus, erhält man folgende Gleichungen:

$$U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c} = \lambda \tag{2.28}$$

$$-U_2(c,l,1,1) = \lambda k f'(l) \tag{2.29}$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\left[f(l) - \delta - l f'(l) + \frac{U_3(c,l,1,1)\frac{1}{k}}{U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c}} - \rho\right] \tag{2.30}$$

Diese Gleichungen beschreiben gemeinsam mit der Ressourcenbeschränkung und der Anfangsbedingung für den Kapitalstock das makroökonomische Gleichgewicht der dezentralen Wirtschaft. Gesucht sind Bedingungen für die Nutzenfunktion, die die Existenz eines Steady State mit folgenden Eigenschaften erlauben:

1. Der Konsum wächst mit einer konstanten Wachstumsrate[6]: $g_c^d := \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} > 0$.
2. Der gesamtwirtschaftliche Kapitalstock wächst mit einer konstanten Wachstumsrate: $g_k^d := \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} > 0$.
3. Die geleistete Arbeit ist konstant: $l^d = l(t) \in (0,1)$.

Berücksichtigt man in der gesamtwirtschaftlichen Ressourcenbeschränkung (2.27) die geforderten Eigenschaften 2 und 3, sieht man, dass das Verhältnis von Konsum und Kapital ($\frac{c(t)}{k(t)}$) im Steady State konstant sein muss:

$$\frac{c(t)}{k(t)} = f\left(l^d\right) - \delta - g_k^d \tag{2.31}$$

Daher müssen die Wachstumsraten von Konsum und Kapital im Steady-State nicht nur konstant, sondern identisch sein: $g^d := g_c^d = g_k^d$.

Weiters soll ein Steady State mit konstantem Arbeitseinsatz auch in einer sozial geplanten Wirtschaft existieren. Diese Forderung führt zu Restriktionen der Momentan-Nutzenfunktion, die auch die Bestimmung der Bedingungen in der dezentralen Wirtschaft vereinfachen. Daher wird zunächst die sozial geplante Wirtschaft analysiert.

3 Sozial geplante Wirtschaft

Ein sozialer Planer kann als benevolenter Diktator die Pfade von Konsum, Arbeit und Vermögen der Individuen festlegen. Sein Ziel ist es, dadurch den durchschnittlichen Lebensnutzen der Individuen in der Wirtschaft zu maximieren:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \int_0^1 U\left(c_i(t), l_i(t), \frac{a_i(t)}{A(t)}, \frac{c_i(t)}{C(t)}\right) di\; dt \tag{3.1}$$

Mit $A(t)$ und $C(t)$ werden weiterhin das durchschnittliche Vermögen und der durchschnittliche Konsum der Individuen bezeichnet, die wegen der Normierung

[6] Werte im Steady-State der dezentralen Wirtschaft werden in der Folge durch ein hochgestelltes „d“ gekennzeichnet.

der Masse der Individuen auf $N = 1$ dem gesamtwirtschaftlichen Vermögen sowie Konsum entsprechen:

$$A(t) = \int_0^1 a_i(t)\, di \tag{3.2}$$

$$C(t) = \int_0^1 c_i(t)\, di \tag{3.3}$$

Der soziale Planer ist bei der Maximierung nur an die Ressourcenbeschränkung der geschlossenen Volkswirtschaft gebunden: Die Veränderung des Kapitalstocks ergibt sich aus produziertem Output abzüglich von Abschreibungen und Konsum:

$$\dot{k}(t) = k(t) f(l(t)) - \delta k(t) - c(t) \tag{3.4}$$

Da die geschlossene Volkswirtschaft keine Nettoauslandsforderungen besitzt, ist das gesamtwirtschaftliche Kapital gleich dem gesamtwirtschaftlichen Vermögen der Individuen. Zu jedem Zeitpunkt muss daher $0 \leq k(t) = a(t)$ erfüllt sein. Die Anfangsbedingung lautet $k(0) = k_0$, wobei k_0 der exogen gegebene Anfangskapitalstock der Volkswirtschaft ist. Mit $l(t)$ wird die gesamtwirtschaftlich geleistete Arbeit bezeichnet, die gleichzeitig dem durchschnittlichen Arbeitseinsatz der Individuen entspricht:

$$l(t) = \int_0^1 l_i(t)\, di \tag{3.5}$$

Da es sich um homogene Individuen handelt, soll ihnen der soziale Planer auch identische Pfade für Konsum, Arbeit und Vermögen zuweisen. Ist die Periodennutzenfunktion der Individuen $U\left(c, l, \frac{a}{A}, \frac{c}{C}\right)$ gemeinsam konkav in c, l und a, kann die Maximierung des Zielfunktionals durch identische Pfade erreicht werden. Bei strikter Konkavität sind identische Pfade (außer auf einer Nullmenge von $[0,1] \times \mathbb{R}^+$) notwendig, um das Maximum zu erreichen. Das Optimierungsproblem des sozialen Planers lautet daher:

$$\max_{c,l} \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c(t), l(t), 1, 1)\, dt \tag{3.6}$$

unter der Ressourcenbeschränkung (3.4), der Anfangsbedingung $k(0) = k_0$, sowie den Restriktionen $k(t) \geq 0$ und $l(t) \in [0,1]$. Die beiden Kontrollvariablen sind der Konsum $(c(t))$ und der Arbeitsinput $(l(t))$. Die Zustandsvariable des sozialen Planers ist das Realkapital der Volkswirtschaft und der zugehörige Kozustand wird mit $\lambda(t)$ bezeichnet. Die Hamilton-Funktion in der current-value Form lautet somit

$$H(c, l, k, \lambda) = U(c, l, 1, 1) + \lambda [k f(l) - \delta k - c] \tag{3.7}$$

Für eine innere Lösung ist es notwendig, dass ihre Ableitungen nach den beiden Kontrollvariablen gleich Null sind:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U_1(c, l, 1, 1) - \lambda = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l} = U_2(c, l, 1, 1) + \lambda k f'(l) = 0 \tag{3.9}$$

Diese beiden Bedingungen implizieren analog zum Optimierungsproblem der Individuen, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum aus Sicht des sozialen Planers dem relativen Preis von Freizeit entsprechen muss:

$$MRS_p^{1-l,c} := \frac{-U_2\,(c,l,1,1)}{U_1\,(c,l,1,1)} = kf'\,(l) \tag{3.10}$$

Der Unterschied zur Grenzrate der Substitution in der dezentralen Wirtschaft in Gleichung (2.19) besteht darin, dass die Erhöhung des Konsums bei Gleichbehandlung der Individuen zu keiner Veränderung des relativen Konsums der Individuen führt. Bei einer Veränderung des Konsums tritt daher nur der auf der Veränderung des absoluten Konsums beruhende direkte Nutzeneffekt auf.

Die Differentialgleichung für die Veränderung des Kozustandes lautet:

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial k} = -\left[f\,(l) - \delta - \rho\right]\lambda \tag{3.11}$$

Der Kozustand kann in einer sozial geplanten Wirtschaft als Schattenpreis des Kapitals interpretiert werden. Die Nettoertragsrate des Kapitals beträgt $f\,(l) - \delta$. Diese unterscheidet sich auf zwei Arten von der effektiven Ertragsrate von Vermögen in der dezentralen Wirtschaft ($r + MRS^{a_i,c_i}$): Der dezentrale Zinssatz r beträgt wegen der Profitmaximierung der Unternehmen im Gleichgewicht $f\,(l) - lf'\,(l) - \delta$ und ist daher niedriger als die sozial optimale Nettoertragsrate des Kapitals $f\,(l) - \delta$. Der Grund dafür ist, dass der soziale Planer die positive Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion berücksichtigt. Der zweite Unterschied ergibt sich, wenn die Individuen einen positiven Grenznutzen aus ihrem relativen Vermögen beziehen ($MRS^{a_i,c_i} > 0$). Dieser erhöht die effektive Ertragsrate von Vermögen für die Individuen. Bei einem sozialen Planer führt eine Erhöhung des Vermögens aller Individuen hingegen zu keiner Veränderung des relativen Vermögens und lässt daher den Nutzen unverändert.

Die Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion erhöht somit die Ertragsrate des Kapitals in der sozial geplanten Wirtschaft, während die Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion die effektive Verzinsung von Vermögen für die Individuen erhöht. Die Größe der Externalitäten bestimmt, welcher Effekt überwiegt und in welchem Fall sich daher eine größere Ertragsrate von Vermögen beziehungsweise Kapital ergibt.

Es soll außer den obigen Bedingungen auch die folgende Transversalitätsbedingung erfüllt sein:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda\,(t)\,k\,(t) = 0 \tag{3.12}$$

Es werden nun Bedingungen für die Nutzenfunktion hergeleitet, die ein langfristiges Wachstum bei einem konstanten Arbeitseinsatz ermöglichen.

3.1 Bedingungen für die Existenz eines Steady State

Es werden nun Bedingungen hergeleitet, die die Existenz eines Steady State mit konstanten Wachstumsraten von Konsum und Kapital und konstanter Arbeitsleistung $l^p = l\,(t) \in (0,1)$ erlauben[7]. Aus der Differentialgleichung (3.11) für den

[7] Werte im Steady-State einer sozial geplanten Wirtschaft werden in der Folge durch ein hochgestelltes „p“ gekennzeichnet.

Kozustand λ folgt, dass die Wachstumsrate des Kozustandes im Steady State konstant sein muss:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\left[f\left(l^p\right) - \delta - \rho\right] \tag{3.13}$$

Differenziert man die notwendige Bedingung (3.8) nach der Zeit, erhält man unter Berücksichtigung von $\dot{l} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= U_{11}\left(c,l,1,1\right)\dot{c} + U_{12}\left(c,l,1,1\right)\dot{l} \\ &= U_{11}\left(c,l,1,1\right)\dot{c} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung von $\lambda = U_1\left(c,l,1,1\right)$ eine Bedingung für die konstante Wachstumsrate von λ:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{cU_{11}\left(c,l,1,1\right)}{U_1\left(c,l,1,1\right)}\frac{\dot{c}}{c} \tag{3.15}$$

Da die Wachstumsraten von Konsum und Kozustand konstant sind, muss die Elastizität des Grenznutzens von Konsum in Bezug auf Konsum im Steady State konstant sein und darf daher nicht vom (wachsenden) Konsum abhängen: $\sigma\left(l^p\right) := -\frac{cU_{11}}{U_1} > 0$. Da der Grenznutzen von Konsum positiv und fallend in c sein soll, muss $\sigma\left(l^p\right) > 0$ gelten. Durch Integration der Gleichung $\frac{\sigma(l^p)}{c} = -\frac{U_{11}}{U_1}$ nach c erhält man:

$$\sigma\left(l^p\right)\ln c = -\ln U_1\left(c,l^p,1,1\right) + \Phi\left(l^p\right) \tag{3.16}$$

$$\Leftrightarrow U_1\left(c,l^p,1,1\right) = c^{-\sigma\left(l^p\right)}\exp\left[\Phi\left(l^p\right)\right] \tag{3.17}$$

Diese Bedingung muss von der Nutzenfunktion beim optimalen Arbeitseinsatz l^p für alle positiven Werte von c erfüllt werden. Veränderungen der Parameter der Produktionsfunktion oder eine Veränderung der subjektiven Diskontrate ρ haben einen Einfluss auf l^p, ohne einen direkten Einfluss auf die Bedingung (3.17) zu haben. Es wird daher vorausgesetzt, dass die Nutzenfunktion die Bedingung für alle $l \in (0,1)$ erfüllt. In der Folge wird zwischen den beiden Fällen $\sigma\left(l^p\right) \neq 1$ und $\sigma\left(l^p\right) = 1$ unterschieden.

3.1.1 Form der Nutzenfunktion im Fall $\sigma\left(l^p\right) \neq 1$

Da $\sigma\left(l^p\right) \neq 1$ gilt, muss wegen der Stetigkeit von $\sigma\left(l\right)$ zumindest auf einem offenen Intervall $\left(\sigma\left(l^p\right) - \varepsilon, \sigma\left(l^p\right) + \varepsilon\right)$ mit $\varepsilon > 0$ ebenfalls $\sigma\left(l\right) \neq 1$ gelten und die Bedingung (3.17) erfüllt sein. Durch Integration der Bedingung (3.17) nach c erhält man die funktionale Form der Nutzenfunktion:

$$U\left(c,l,1,1\right) = c^{1-\sigma(l)}F_1\left(l\right) + F_2\left(l\right) \tag{3.18}$$

mit von l abhängigen Funktionen F_1 und F_2.

Aus den ersten beiden notwendigen Bedingungen (3.8) und (3.9) folgt:

$$\frac{c}{kf'\left(l\right)} = -\frac{cU_1\left(c,l,1,1\right)}{U_2\left(c,l,1,1\right)} \tag{3.19}$$

Da die Konsum-Kapital-Quote c/k im Steady State konstant ist, muss $\frac{cU_1}{-U_2}$ ebenfalls konstant sein. Dies bedeutet, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum von der Form

$$MRS_p^{1-l,c} = \frac{-U_2\left(c,l,1,1\right)}{U_1\left(c,l,1,1\right)} = c\Theta_p\left(l\right) \tag{3.20}$$

mit der nur vom Arbeitsinput abhängigen Funktion $\Theta_p(l)$ ist. Da aus der Gleichung (3.18) $cU_1(c,l,1,1) = c^{1-\sigma(l)}[1-\sigma(l)]F_1(l)$ folgt, muss $U_2(c,l,1,1)$ die folgende Form besitzen:

$$U_2(c,l,1,1) = c^{1-\sigma(l)}F(l) \tag{3.21}$$

Die Funktion $F(l)$ muss wegen des negativen Grenznutzens von Arbeit negativ sein. Weiters erkennt man, dass die Elastizität des Grenznutzens von Freizeit in Bezug auf Konsum konstant ist:

$$\frac{cU_{12}(c,l,1,1)}{U_2(c,l,1,1)} = 1-\sigma(l) \tag{3.22}$$

Sie ist somit um 1 größer als die Elastizität des Grenznutzens von Konsum in Bezug auf Konsum $(-\sigma(l))$.

Die hergeleitete Bedingung $U_2(c,l,1,1) = c^{1-\sigma(l)}F(l)$ muss von der funktionalen Form der Nutzenfunktion $U = c^{1-\sigma(l)}F_1(l) + F_2(l)$ erfüllt werden. Differenziert man diese nach l erhält man die Bedingung:

$$c^{1-\sigma(l)}\left[-\sigma'(l)F_1(l)\ln c + F_1'(l)\right] + F_2'(l) = c^{1-\sigma(l)}F(l) \tag{3.23}$$

$$\Leftrightarrow c^{1-\sigma(l)}\left[F(l) + \sigma'(l)F_1(l)\ln c - F_1'(l)\right] = F_2'(l) \tag{3.24}$$

Die rechte Seite der Bedingung (3.24) hängt nicht vom Konsum ab. Differenziert man (3.24) nach c, erhält man daher die Bedingung:

$$[1-\sigma(l)]c^{-\sigma(l)}\left[F(l) + \sigma'(l)F_1(l)\ln c - F_1'(l)\right] + \sigma'(l)F_1(l)c^{-\sigma(l)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma'(l)F_1(l)\ln c + \left[F(l) - F_1'(l) + \frac{\sigma'(l)F_1(l)}{1-\sigma(l)}\right] = 0 \tag{3.25}$$

Da der zweite Summand unabhängig von c ist, muss dies auch der erste Summand sein, damit die Bedingung für alle $c > 0$ erfüllt wird. Daraus folgt, dass entweder $\sigma'(l) = 0$ oder $F_1(l) = 0$ gelten muss. $F_1(l) = 0$ würde implizieren, dass der Konsum in der Nutzenfunktion $U(c,l,1,1) = F_2(l)$ nicht mehr enthalten ist, was beispielsweise der Annahme eines positiven Grenznutzens von Konsum widerspricht. Daher muss $\sigma'(l) \equiv 0$ auf dem Intervall $(\sigma(l^p) - \varepsilon, \sigma(l^p) + \varepsilon)$ gelten und $\sigma(l)$ somit dort konstant sein. Daher impliziert $\sigma(l^p) \neq 1$, dass $\sigma(l) = \sigma(l^p)$ für alle $l \in (0,1)$ gelten muss. Da dies für jedes $l^p \in (0,1)$ mit $\sigma(l^p) \neq 1$ gilt, folgt umkehrt aus $\sigma(l^p) = 1$, dass $\sigma(l) = \sigma(l^p) = 1$ für alle $l \in (0,1)$ gilt. Die Elastizität des Grenznutzens von Konsum bezüglich Konsum muss daher in jedem Fall konstant sein:

$$\sigma := -\frac{cU_{11}(c,l,1,1)}{U_1(c,l,1,1)} \tag{3.26}$$

Wegen $\sigma'(l) = 0$ erhält man weiters, dass der zweite Summand der Gleichung (3.25) gleich Null sein muss. Das bedeutet, dass $F(l) \equiv F_1'(l)$ gilt. Setzt man dies in die Bedingung (3.24) ein, erhält man schließlich, dass $F_2'(l) \equiv 0$ gilt und $F_2(l)$ daher ebenfalls konstant ist. Für die Nutzenfunktion ergibt sich somit folgende Form:

$$U(c,l,1,1) = c^{1-\sigma}F_1(l) + F_2 \tag{3.27}$$

Der Grenznutzen von Konsum der Nutzenfunktion (3.27) ist $(1-\sigma)F_1(l)c^{-\sigma}$. Damit dieser positiv ist, muss $(1-\sigma)F_1(l) > 0$ gelten. Daher bietet sich ohne

Beschränkung der Allgemeinheit die Wahl $F_1(l) := \frac{V(l)}{1-\sigma}$ mit $V(l) > 0$ an. Die additive Konstante F_2 hat weder einen Einfluss auf das intratemporale noch auf das intertemporale Optimierungsproblem und kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $F_2 := 0$ festgelegt werden. Man erhält damit eine Nutzenfunktion, die multiplikativ separabel in Konsum und Arbeit beziehungsweise Freizeit ist:

$$U(c, l, 1, 1) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} V(l) \tag{3.28}$$

Wegen $U_{11} = -\sigma V(l) c^{-\sigma-1} < 0$ ist der Grenznutzen von Konsum wie gewünscht fallend. Der Grenznutzen von Freizeit $(1-l)$ beträgt:

$$-U_2 = c^{1-\sigma} \frac{V'(l)}{\sigma - 1} \tag{3.29}$$

Damit dieser positiv ist, muss für das Vorzeichen von $V'(l)$ die Bedingung $sgn(V'(l)) = sgn(\sigma - 1)$ erfüllt sein. Der Grenznutzen von Freizeit ist genau dann fallend in Freizeit, wenn $U_{22} = c^{1-\sigma} \frac{V''(l)}{1-\sigma} < 0$ gilt. Dadurch erhält man Bedingungen für das Vorzeichen von $V''(l)$: $sgn(V''(l)) = sgn(\sigma - 1)$. Ob zusätzliche Freizeit den Grenznutzen von Konsum erhöht oder verringert, hängt von σ ab. Aus $-U_{12} = -c^{-\sigma} V'(l)$ erhält man, dass zusätzliche Freizeit den Grenznutzen von Konsum genau dann erhöht, wenn $\sigma < 1$ gilt.

Es wird nun der Fall behandelt, dass $\sigma = 1$ gilt.

3.1.2 Form der Nutzenfunktion im Fall $\sigma = 1$

Im Fall $\sigma = 1$ vereinfacht sich die Bedingung (3.17) zu:

$$U_1(c, l, 1, 1) = \frac{\exp[\Phi(l)]}{c} \tag{3.30}$$

Durch Integration nach c erhält man daraus die folgende Form der Nutzenfunktion:

$$U(c, l, 1, 1) = \Psi(l) \ln c - V(l)$$

Ebenso wie im Fall $\sigma \neq 1$ gilt die Bedingung (3.22): $\frac{cU_{12}}{U_2} = 1 - \sigma = 0$. Daher muss $U_{12} = 0$ gelten. Das bedeutet, dass der Grenznutzen von Konsum unabhängig von der Freizeit beziehungsweise der Grenznutzen von Freizeit unabhängig vom Konsum ist. Differenziert man $U = \Psi(l) \ln c - V(l)$ nach c und l, erhält man die Bedingung

$$0 = U_{12}(c, l, 1, 1) = \frac{\Psi'(l)}{c} \tag{3.31}$$

Daher muss $\Psi'(l) \equiv 0$ gelten und $\Psi(l) \equiv \Psi$ somit konstant sein. Damit der Grenznutzen von Konsum positiv ist, muss $\Psi > 0$ gelten. Da ein positiver, konstanter Faktor keine Auswirkungen auf die Maximierung des Zielfunktionals (3.6) hat, kann der Faktor Ψ ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch $\Psi = 1$ festgelegt werden. Damit erhält man im Fall $\sigma = 1$ die additiv separable Nutzenfunktion:

$$U(c, l, 1, 1) = \ln c - V(l) \tag{3.32}$$

Sie weist einen positiven und fallenden Grenznutzen des Konsums auf. Damit auch der Grenznutzen von Freizeit positiv und fallend ist, muss $V'(l) > 0$ und $V''(l) > 0$ gelten.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 1 *Wenn in der sozial geplanten Wirtschaft ein Steady State mit konstantem Arbeitsinput existiert, weist die Nutzenfunktion, an symmetrischen Stellen ausgewertet, eine konstante Elastizität des Grenznutzens von Konsum bezüglich Konsum auf* ($\sigma = -\frac{cU_{11}(c,l,1,1)}{U_1(c,l,1,1)} > 0$) *und besitzt darüber hinaus (bis auf eine additive und eine positive multiplikative Konstante) die folgende Form* ($c > 0$, $l \in (0,1)$)*:*

1. *Für* $\sigma \neq 1$ *gilt mit* $V(l) > 0$ *und* $sgn(V'(l)) = sgn(V''(l)) = sgn(\sigma - 1)$*:*
$$U(c,l,1,1) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} V(l) \tag{3.33}$$

2. *Für* $\sigma = 1$ *gilt mit* $V'(l) > 0$ *und* $V''(l) > 0$ *:*
$$U(c,l,1,1) = \ln c - V(l) \tag{3.34}$$

Die Nutzenfunktion ist somit entweder multiplikativ oder additiv separabel in Konsum und Freizeit. Die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum ist von der Form $MRS_p^{1-l,c}(c,l,1,1) = c\Theta_p(l) > 0$*. Die Elastizität des Grenznutzens von Arbeit bezüglich Konsum erfüllt* $\frac{cU_{12}(c,l,1,1)}{U_2(c,l,1,1)} = 1 - \sigma$*.*

3.2 Eigenschaften des Steady State

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Momentan-Nutzenfunktion an symmetrischen Stellen ausgewertet (abgesehen von linearen Transformationen) eine der beiden folgenden Formen besitzt:

1. $U(c,l,1,1) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} V(l)$ mit $0 < \sigma \neq 1$. Für die Funktion $V(l)$ muss außerdem $V(l) > 0$ und $sgn(V'(l)) = sgn(V''(l)) = sgn(\sigma - 1)$ gelten.

2. $U(c,l,1,1) = \ln c - V(l)$. Für die Funktion $V(l)$ wird außerdem $V'(l) > 0$ und $V''(l) > 0$ vorausgesetzt.

Die ersten beiden notwendigen Bedingungen des sozialen Planers (3.8) und (3.9) lauten:
$$U_1(c,l,1,1) = \lambda \tag{3.35}$$
$$-U_2(c,l,1,1) = \lambda k f'(l) \tag{3.36}$$

Daraus erhält man eine Bedingung für das Verhältnis von Konsum und Kapital:
$$\begin{aligned} \frac{c}{k} &= c\frac{U_1(c,l,1,1)}{-U_2(c,l,1,1)} f'(l) \\ &= c\left(MRS_p^{1-l,c}\right)^{-1} f'(l) \\ &= \frac{f'(l)}{\Theta_p(l)} > 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Wegen $\sigma = -\frac{cU_{11}}{U_1}$ ergibt sich in einem Steady State mit konstantem Arbeitsinput gemäß Gleichung (3.15) der Zusammenhang zwischen den Wachstumsraten von Konsum und Kozustand:

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \tag{3.38}$$

Aus der Differentialgleichung (3.11) für den Kozustand ($\dot{\lambda} = -\left[f\left(l\right) - \delta - \rho\right]\lambda$) erhält man damit die Wachstumsrate des Konsums in Abhängigkeit vom Arbeitsinput:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l\right) - \delta - \rho\right] \tag{3.39}$$

Die Wachstumsrate des Kapitalstocks erhält man aus der Ressourcenbeschränkung ($\dot{k} = kf\left(l\right) - \delta k - c$) mit Hilfe der Bedingung (3.37) für das Verhältnis von Konsum und Kapital:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{k}}{k} &= f\left(l\right) - \delta - \frac{c}{k}\\ &= f\left(l\right) - \delta - \frac{f'\left(l\right)}{\Theta_p\left(l\right)}\end{aligned} \tag{3.40}$$

Da die Wachstumsraten von Konsum und Kapital im Steady State gleich groß sein müssen, ist der Wert des Arbeitsinputs im Steady State implizit durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{\sigma}\left[f\left(l\right) - \delta - \rho\right] = f\left(l\right) - \delta - \frac{f'\left(l\right)}{\Theta_p\left(l\right)} \tag{3.41}$$

Eine Umformung dieser Gleichung ergibt die äquivalente Darstellung

$$\sigma\frac{f'\left(l\right)}{\Theta_p\left(l\right)} = \left(\sigma - 1\right)\left[f\left(l\right) - \delta\right] + \rho \tag{3.42}$$

Der Steady State wird nun getrennt für die Fälle $\sigma \neq 1$ und $\sigma = 1$ analysiert.

3.2.1 Steady State im Fall $\sigma \neq 1$

Die Bedingungen für einen eindeutigen Arbeitsinput $l^p \in (0,1)$ werden gesondert für $\sigma > 1$ und $\sigma < 1$ untersucht. Zunächst wird der Fall $\sigma > 1$ betrachtet: Die linke Seite von Gleichung (3.42) ist wegen $\Theta_p\left(l\right) > 0$ und $f'\left(l\right) > 0$ für jedes $l \in (0,1)$ positiv. Die rechte Seite ist wegen $f'\left(l\right) > 0$ wachsend in l. Eine Lösung $l^p \in (0,1)$ der Gleichung kann daher nur existieren, wenn die rechte Seite für $l = 1$ positiv ist, also $\left(\sigma - 1\right)\left[f\left(1\right) - \delta\right] + \rho > 0$ gilt. Unterstellt man $f\left(1\right) - \delta > 0$, um ökonomisch sinnvolle Lösungen zu erhalten, ist die Ungleichung $\left(\sigma - 1\right)\left[f\left(1\right) - \delta\right] + \rho > 0$ in jedem Fall erfüllt. Andernfalls wäre selbst bei vollem Arbeitseinsatz nur ein Schrumpfen des Kapitalstocks möglich.

Im Fall $\sigma > 1$ lautet die Nutzenfunktion $U\left(c, l, 1, 1\right) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}V\left(l\right)$ und für die Ableitungen von $V\left(l\right)$ gilt $V' > 0$ sowie $V'' > 0$. Man erhält damit die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum $MRS_p^{1-l,c}\left(c, l, 1, 1\right) = c\frac{V'(l)}{(\sigma-1)V(l)}$ und die Funktion $\Theta_p\left(l\right) = \frac{V'(l)}{(\sigma-1)V(l)}$. Durch Einsetzen in die Bestimmungsgleichung (3.42) erhält man die Gleichung für den Arbeitsinput im Fall $\sigma \neq 1$:

$$\left(\sigma - 1\right)\sigma\frac{V\left(l\right)}{V'\left(l\right)}f'\left(l\right) = \left(\sigma - 1\right)\left[f\left(l\right) - \delta\right] + \rho \tag{3.43}$$

Für die linke Seite gilt, dass sie für $l \to 0$ unbeschränkt wird: Für die Produktionsfunktion wurde die Inada-Bedingung $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$ vorausgesetzt. Für die Funktion $V(l)$ ist die Annahme $V(0) > 0$ sinnvoll, da andernfalls unabhängig von der Konsummenge der optimale Nutzen allein dadurch erreicht werden kann, dass die Individuen nichts arbeiten. Weiters gilt $V'(0) < \infty$, da $V'(l)$ wachsend in l ist. Daher gilt für die linke Seite der Gleichung (3.43) $\lim_{l\to 0} (\sigma - 1)\,\sigma \frac{V(l)}{V'(l)} f'(l) = \infty$. Da die beschränkte rechte Seite an der Stelle Null somit kleiner als die linke Seite ist, exisitiert aus Stetigkeitsgründen eine Lösung, falls die linke Seite für $l \to 1$ kleiner als die rechte Seite ist. Dies ist wegen der vorausgesetzten Positivität der rechten Seite an der Stelle $l = 1$ in jedem Fall erfüllt, wenn der Grenzwert der linken Seite für $l \to 1$ gleich Null ist. Wegen $f'(1) < \infty$ ist das genau dann der Fall, wenn $\lim_{l\to 1} \Theta_p(l) = \infty$ gilt. Dies bedeutet, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum bei schwindender Freizeit unbeschränkt wird. Diese Forderung bewirkt, dass der Disnutzen durch die Ausweitung des Arbeitsinputs für $l \to 1$ so groß wird, dass es nicht optimal sein kann, wenn die Individuen ihre gesamte verfügbare Zeit arbeiten.

Setzt man des Weiteren voraus, dass die linke Seite der Gleichung (3.43) monoton fallend in l ist, gibt es eine eindeutige Lösung l^p für den langfristigen Arbeitseinsatz in der sozial geplanten Wirtschaft. Da $f'(l)$ monoton fallend ist, ist das sichergestellt, wenn $\Theta_p(l)$ wachsend in l ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum aus Sicht eines sozialen Planers fallend in der Freizeit ist. Die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum beschreibt, wie viele (marginale) Einheiten an Konsum notwendig sind, damit sich der Nutzen der Individuen bei der Aufgabe einer (marginalen) Einheit Freizeit nicht verändert. Ist diese bei festgehaltenem Konsum fallend in Freizeit, bedeutet das, dass mit wachsender Freizeit die Aufgabe von Freizeit durch immer weniger Konsum kompensiert werden muss.

Die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum ist außerdem wegen ihrer Linearität in c ceteris paribus wachsend in Konsum: Je mehr die Individuen in der sozial geplanten Wirtschaft konsumieren, umso mehr zusätzlicher Konsum ist notwendig, damit sie auf einen Teil ihrer Freizeit verzichten können. Diese beiden Eigenschaften der Grenzrate der Substitution sind dazu äquivalent, dass Konsum und Freizeit normale Güter sind. Am einfachsten kann diese Eigenschaft in einem dezentralen Modell ohne Statuseffekte erklärt werden: Zwei Güter sind normal, wenn ein geringeres Sparen eines Individuums dazu führt, dass es von beiden Gütern mehr konsumiert. Geringeres Sparen bedeutet, dass das Individuum ein größeres Budget für die beiden Güter verwendet, weshalb es von mindestens einem Gut mehr konsumieren muss. Die intratemporale Optimierung impliziert, dass die Grenzrate der Substitution des ersten Guts für das zweite Gut dem relativen Preis des ersten Guts entspricht. Ist die Grenzrate der Substitution nun ceteris paribus fallend im ersten Gut und wachsend im zweiten Gut, muss die Erhöhung des Konsums eines Guts auch zu einer Erhöhung des Konsums des anderen Guts führen, damit die Grenzrate der Substitution unverändert bleibt. Aus dieser Eigenschaft der Grenzrate der Substitution folgt daher, dass bei einer Erhöhung des Budgets von beiden Gütern mehr konsumiert wird, weshalb sie normale Güter sind.

In dem konkreten Modell ist die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum fallend in Freizeit und wachsend im Konsum. Dementsprechend sind

Freizeit und Konsum normale Güter. Die Annahme der Normalität stellt somit die Eindeutigkeit des Arbeitsinputs l^p sicher.

Als nächstes wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen die Gleichung (3.42) eine (eindeutige) Lösung im Fall $\sigma < 1$ besitzt. Die linke Seite der Gleichung ist weiterhin positiv. Der Unterschied zum Fall $\sigma > 1$ besteht darin, dass die rechte Seite jetzt nicht mehr wachsend, sondern fallend in l ist. Damit eine Lösung existieren kann, muss daher jedenfalls ihr Funktionswert an der Stelle 0 positiv sein:

$$\begin{aligned} &(\sigma - 1)\left[f(0) - \delta\right] + \rho > 0 \\ &\Leftrightarrow f(0) < \delta + \frac{\rho}{1-\sigma} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Man erhält somit eine obere Schranke für den Grenzwert der Grenzproduktivität von Kapital, die auch der Durchschnittsproduktivität von Kapital entspricht, für kleiner werdenden Arbeitseinsatz.

Im Fall $\sigma < 1$ gilt für die ersten beiden Ableitungen der Funktion $V(l)$, dass sie negativ sind ($V' < 0, V'' < 0$). Die Nutzenfunktion hat daher die Eigenschaft, dass der Grenznutzen von Konsum wachsend mit der Freizeit ist ($U_{12}(c, l, 1, 1) = c^{-\sigma} V'(l) < 0$). Damit sind Konsum und Freizeit ohne zusätzliche Voraussetzung normale Güter: U_1 ist fallend in l und $-U_2$ ist wachsend in l. Daher ist die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum ($MRS_p^{1-l,c}(c, l) = \frac{-U_2}{U_1}$) ceteris paribus wachsend in l und somit fallend in der Freizeit. Außerdem ist sie ebenso wie im Fall $\sigma > 1$ wachsend im Konsum. Somit sind Konsum und Freizeit normale Güter und die linke Seite von (3.42) ist monoton fallend. Sie ist für $l \to 0$ wie im Fall $\sigma > 1$ unbeschränkt: Wegen der Inada-Bedingung für die Produktionsfunktion gilt $\lim_{l \to 0} f'(l) = \infty$. Da $V(l)$ in diesem Fall positiv, fallend und konkav ist, gilt weiters $V(0) > 0$. $V'(l)$ ist negativ und fallend, weshalb auch $\lim_{l \to 0} V'(l) > -\infty$ gilt. Somit gilt wie oben $\lim_{l \to 0} \sigma \frac{f'(l)}{\Theta_p(l)} = \infty$. Setzt man wiederum voraus, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum für $l \to 1$ unbeschränkt wird, gilt wie im obigen Fall, dass die linke Seite für $l \to 1$ gegen Null konvergiert. Für die Existenz eines Arbeitsinputs l^p, der die Gleichung (3.42) erfüllt, ist nun hinreichend, dass die rechte Seite für $l \to 1$ positiv bleibt. Analog zur Bedingung (3.44) bedeutet dies:

$$f(1) < \delta + \frac{\rho}{1-\sigma} \tag{3.45}$$

Hinreichend für die Eindeutigkeit der Lösung ist, dass die Differenz von linker und rechter Seite streng monoton fallend ist. Dies bedeutet, dass $\left[\sigma \frac{V(l)}{-V'(l)} f'(l) + f(l)\right]$ streng monoton fallend in l sein muss. Diese Bedingung wird im Abschnitt 6.3 an Hand eines Beispiels mit der Wahl $V(l) = (1-l)^{\eta(1-\sigma)}$ und $f(l) = Bl^{1-\alpha}$ illustriert.

Die hinreichenden Bedingungen, die die Existenz eines eindeutigen langfristigen Arbeitsinputs sicherstellen, werden im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 2 *In einer sozial geplanten Wirtschaft ergibt sich für den Fall der multiplikativ separablen Nutzenfunktion $U(c, l, 1, 1) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} V(l)$ der Steady-State-Arbeitsinput l^p aus der Gleichung:*

$$(\sigma - 1)\,\sigma \frac{V(l^p)}{V'(l^p)} f'(l^p) = (\sigma - 1)\left[f(l^p) - \delta\right] + \rho \tag{3.46}$$

Für die Existenz einer eindeutigen Lösung ist es im Fall $\sigma > 1$ hinreichend, dass Konsum und Freizeit normale Güter sind ($\Theta_p' (l) > 0$), die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum für $l \to 1$ unbeschränkt wird ($\lim_{l \to 1} \Theta_p (l) = \infty$) und die maximale Durchschnittsproduktivität (=Grenzproduktivität) des Kapitals die Bedingung

$$(\sigma - 1) [f (1) - \delta] > -\rho \tag{3.47}$$

erfüllt. Im Fall $\sigma < 1$ wird die Eindeutigkeit des Arbeitsinputs durch die zusätzliche Bedingung, dass $\left[\sigma \frac{V(l)}{-V'(l)} f' (l) + f (l)\right]$ streng monoton fallend in l ist, sichergestellt.

Die Anforderung an die Durchschnittsproduktivität des Kapitals in Gleichung (3.47) ist leichter erfüllbar, wenn σ nahe bei 1 liegt. Im Grenzfall $\sigma = 1$ ist dementsprechend eine derartige Bedingung nicht notwendig, wie auch weiter unten gezeigt wird.

Setzt man den langfristigen Arbeitseinsatz aus Gleichung (3.42) in die Gleichung (3.37) ein, erhält man das gleichgewichtige Verhältnis von Konsum und Kapital:

$$\left(\frac{c}{k}\right)^p = \frac{f' (l^p)}{\Theta_p (l^p)} \tag{3.48}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \{(\sigma - 1) [f (l^p) - \delta] + \rho\} \tag{3.49}$$

Mit Hilfe der Konsum-Kapital-Quote erhält man nun aus den Gleichungen (3.39) oder (3.40) die Wachstumsrate g^p, mit der Konsum, Kapital und Output langfristig wachsen:

$$g^p = \frac{1}{\sigma} [f (l^p) - \delta - \rho] \tag{3.50}$$

$$= f (l^p) - \delta - (\sigma - 1) \frac{V (l^p)}{V' (l^p)} f' (l^p) \tag{3.51}$$

3.2.2 Steady State im Fall $\sigma = 1$

Es wird nun das Optimierungsproblem des sozialen Planers für die Nutzenfunktion $U (c, l, 1, 1) = \ln c - V (l)$ $(V' (l) > 0,\ V'' (l) > 0)$ gelöst. Dieser entspricht die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum:

$$MRS_p^{1-l,c} = cV' (l) \tag{3.52}$$

Das heißt, dass $\Theta_p (l)$ in diesem Fall der Grenznutzen von Freizeit ist: $\Theta_p (l) = V' (l)$. Setzt man dies in die Gleichung (3.37) ein, erhält man die Konsum-Kapital-Quote:

$$\frac{c}{k} = \frac{f' (l)}{\Theta_p (l)} = \frac{f' (l)}{V' (l)} > 0 \tag{3.53}$$

Setzt man dies in die Bestimmungsgleichung (3.42) für den Arbeitseinsatz ein, erhält man:

$$\rho = \frac{f' (l)}{\Theta_p (l)} = \frac{f' (l)}{V' (l)} \tag{3.54}$$

Wegen der Voraussetzung $V''(l) > 0$ sind Freizeit und Konsum in diesem Fall normale Güter. Außerdem ist $\frac{f'(l)}{V'(l)}$ streng monoton fallend in l. Unter den Bedingungen $\lim_{l\to 0} \frac{f'(l)}{V'(l)} = \infty$ und $\lim_{l\to 1} \frac{f'(l)}{V'(l)} = 0$ existiert eine eindeutige Lösung l^p. Die Inada-Bedingung für die Produktionsfunktion ($\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$) stellt $\lim_{l\to 0} \frac{f'(l)}{V'(l)} = \infty$ sicher, da $V'(l)$ als positive, wachsende Funktion einen endlichen Grenzwert an der Stelle 0 besitzen muss. Setzt man voraus, dass $\lim_{l\to 1} \Theta_p(l) = \infty$ gilt, ist auch die zweite Bedingung erfüllt. Diese Voraussetzung bedeutet wiederum, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum für $l \to 1$ unbeschränkt ist. Es ist somit nicht optimal für die Individuen auch die letzte Freizeit aufzugeben und die ganze Zeit für Arbeit zu verwenden. Die hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines eindeutigen langfristigen Arbeitsinputs und seine Bestimmung werden im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 3 *In einer sozial geplanten Wirtschaft ergibt sich für den Fall der additiv separablen Nutzenfunktion $U(c, l, 1, 1) = \ln c - V(l)$ der langfristige Arbeitsinput l^p aus der Gleichung:*

$$\frac{f'(l^p)}{V'(l^p)} = \rho \tag{3.55}$$

Für die Existenz einer eindeutigen Lösung ist es hinreichend, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum für $l \to 1$ unbeschränkt wird:

$$\lim_{l\to 1} \Theta_p(l) = \infty \tag{3.56}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (3.53) erhält man, dass die Konsum-Kapital-Quote im langfristigen Gleichgewicht genau der Zeitpräferenzrate entspricht:

$$\left(\frac{c}{k}\right)^p = \frac{f'(l^p)}{V'(l^p)} = \rho > 0 \tag{3.57}$$

Die langfristige Wachstumsrate von Konsum, Kapital und Output beträgt somit

$$g^p = f(l^p) - \delta - \rho \tag{3.58}$$

Das langfristige Verhältnis von Konsum und Kapital und die Wachstumsrate können für $\sigma \neq 1$ und $\sigma = 1$ folgendermaßen zusammengefasst werden:

Satz 4 *In einer sozial geplanten Wirtschaft entspricht dem Steady-State-Arbeitsinput l^p die Konsum-Kapital-Quote*

$$\left(\frac{c}{k}\right)^p = \frac{1}{\sigma}\left\{(\sigma - 1)\left[f(l^p) - \delta\right] + \rho\right\} \tag{3.59}$$

und die gemeinsame Wachstumsrate von Kapital, Konsum und Output beträgt

$$g^p = \frac{1}{\sigma}\left[f(l^p) - \delta - \rho\right] \tag{3.60}$$

3.3 Transversalitätsbedingung

Als nächstes wird überprüft, ob die Transversalitätsbedingung $\lim_{t\to\infty}\left[e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)\right] = 0$ erfüllt ist: Die Wachstumsrate des Kapitals im Steady State beträgt:

$$\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^p = \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^p\right) - \delta - \rho\right] \tag{3.61}$$

Die Wachstumsrate des Kozustandes λ ergibt sich gemäß Gleichung (3.38):

$$\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^p = -\sigma\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^p = -\left[f\left(l^p\right) - \delta - \rho\right] \tag{3.62}$$

Damit erhält man die Wachstumsrate des Produkts $e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)$ als die Summe der Wachstumsraten der Faktoren:

$$\begin{aligned} \frac{d\left[e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)\right]}{dt}\left[e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)\right]^{-1} &= -\rho + \frac{1-\sigma}{\sigma}\left[f\left(l^p\right) - \delta - \rho\right] \\ &= \frac{(1-\sigma)\left[f\left(l^p\right) - \delta\right] - \rho}{\sigma} \end{aligned} \tag{3.63}$$

Im Fall $\sigma = 1$ ist diese gleich $-\rho < 0$. Im Fall $\sigma \neq 1$ erfüllt der langfristige Arbeitsinput l^p die Gleichung (3.42), wobei die rechte Seite, wie bereits erwähnt, positiv sein muss: $(\sigma - 1)\left[f\left(l^p\right) - \delta\right] + \rho > 0$. Dementsprechend ist $(1-\sigma)\left[f\left(l^p\right) - \delta\right] - \rho < 0$ und daher sichergestellt, dass der Ausdruck $e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t) > 0$ im langfristigen Gleichgewicht eine konstante, negative Wachstumsrate hat. Er konvergiert daher für $t \to \infty$ gegen 0 und die Transversalitätsbedingung ist erfüllt.

Mit Hilfe dieser Überlegungen kann außerdem gezeigt werden, dass der Lebensnutzen der Individuen gemäß Gleichung (2.14) konvergiert:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} U\left(c(t), l^p, 1, 1\right) dt < \infty \tag{3.64}$$

Für den Integranden gilt nämlich, dass er (zumindest asymptotisch) eine negative Wachstumsrate besitzt: Im Fall $\sigma = 1$ hat die Nutzenfunktion die Form $U\left(c, l^p, 1, 1\right) = \ln c - V\left(l^p\right)$. Wegen des konstanten Arbeitsinputs ist die Konvergenz von $\int_0^\infty e^{-\rho t} V\left(l^p\right) dt$ sichergestellt. Weiters gilt für die Wachstumsrate von $\ln c$ für $c > 1$:

$$\frac{1}{\ln c}\frac{d\ln c}{dt} = \frac{1}{\ln c}\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\ln c} g^p \tag{3.65}$$

Diese konvergiert wegen $\lim_{t\to\infty} c(t) = \infty$ gegen Null, weshalb auch $\int_0^\infty e^{-\rho t}\ln c(t)\,dt$ konvergiert. Im Fall $\sigma \neq 1$ hat die Nutzenfunktion die Form $U\left(c, l^p, 1, 1\right) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} V\left(l^p\right)$. Es genügt, die Konvergenz von $\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$ zu zeigen. Die Wachstumsrate des Integranden beträgt:

$$\begin{aligned} -\rho + \frac{cU_1}{U}\frac{\dot{c}}{c} &= -\rho + (1-\sigma)\, g^p \\ &= \frac{(1-\sigma)\left[f\left(l^p\right) - \delta\right] - \rho}{\sigma} \end{aligned} \tag{3.66}$$

Diese Wachstumsrate entspricht daher genau der Wachstumsrate des Produkts $e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)$ in Gleichung (3.63). Bei der Überprüfung der Transversalitätsbedingung wurde gezeigt, dass diese negativ ist. Die Wachstumsrate des diskontierten Momentan-Nutzens ist daher auch im Fall $\sigma \neq 1$ negativ, weshalb der Lebensnutzen der Individuen konvergiert.

3.4 Übergangsdynamik

In den vorherigen Abschnitten wurden die Werte von Arbeitsinput, Konsum-Kapital-Quote und Wachstumsrate in einem langfristigen Gleichgewicht mit einem konstanten Arbeitsinput bestimmt. Die aus der positiven Kapitalexternalität resultierende Linearität der gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion im Kapital ermöglicht endogenes langfristiges Wachstum ($g^p > 0$).

Außerdem bewirkt die Linearität, dass keine Übergangsdynamik notwendig ist, sondern der langfristige Wachstumspfad von Anfang an erreicht werden kann: Unabhängig von der gewählten Kapitalexternalität gilt in einer sozial geplanten Wirtschaft, dass ein konstantes Wachstum des Kozustandes gemäß der Differentialgleichung (3.11) impliziert, dass die Grenzproduktivität von Kapital konstant ist. Bei einer neoklassischen Produktionsfunktion ist die Grenzproduktivität des Kapitals bei festgehaltenem Arbeitseinsatz fallend. Ein langfristiges Wachstum ist dann nur möglich, wenn die Grenzproduktivität für $k \to \infty$ gegen einen positiven Wert konvergiert. In diesem Fall gibt es mit Hilfe einer Übergangsdynamik eine langfristige Konvergenz der Wachstumsraten gegen die gleichgewichtigen Werte. Ist die Inada-Bedingung erfüllt, dass die Grenzproduktivität von Kapital bei festgehaltenem Arbeitsinput gegen Null konvergiert, ist kein positives Wachstum möglich. Ein Steady State besteht dann aus gleichgewichtigen Werten von Kapital, Arbeit und Konsum, sodass die notwendigen Bedingungen erfüllt und die Wachstumsraten gleich Null sind. Da das Niveau des Kapitalstocks als Zustandsvariable nur stetig verändert werden kann, ist im Allgemeinen eine Übergangsdynamik notwendig, sodass der Kapitalstock gegen den gleichgewichtigen Wert konvergiert.

Bei einer gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion, die linear im Kapital ist, ist die Grenzproduktivität bei festgehaltener Arbeit konstant - in der Notation dieser Arbeit ist sie durch $f(l)$ gegeben. Durch geeignete Wahl des Arbeitsinputs, der als Kontrollvariable am Anfang frei gewählt werden kann, kann die Grenzproduktivität des Kapitals somit ohne eine Veränderung des Kapitalstocks an das nötige Niveau angepasst werden. Eine Übergangsdynamik ist daher nicht notwendig und der langfristige Wachstumspfad kann von Anfang an realisiert werden.

Aus den hergeleiteten notwendigen Bedingungen ergibt sich somit folgende Vorgangsweise eines sozialen Planers, um den Lebensnutzen zu maximieren: Zunächst lässt sich durch die Gleichungen (3.46) beziehungsweise (3.55) unter oben hergeleiteten Voraussetzungen eine eindeutige Lösung für den Arbeitseinsatz l^p bestimmen. Damit erhält man aus der Gleichung (3.59) das Verhältnis von Konsum und Kapital $\left(\frac{c}{k}\right)^p$. Da das Anfangskapital k_0 bekannt ist, erhält man daraus den Anfangswert für den Konsum $c(0)$. Durch Einsetzen von Arbeitsinput l^p und Anfangskonsum $c(0)$ in die erste notwendige Bedingung (3.8), ergibt sich der Anfangswert des Kozustandes $\lambda(0)$. Damit sind die wählbaren Anfangswerte bestimmt. Die Wachstumsrate von Konsum und Kapital erhält man beispielsweise aus der Ressourcenbeschränkung der Volkswirtschaft

$g^p = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^p = f\left(l^p\right) - \delta - \left(\frac{c}{k}\right)^p$. Konsum und Kapital wachsen in der Folge mit dieser Wachstumsrate: $c(t) = c(0)\exp(g^p t)$ und $k(t) = k_0 \exp(g^p t)$. Da die Wachstumsrate des Kozustandes $-\sigma g^p$ beträgt, erhält man $\lambda(t) = \lambda(0)\exp(-\sigma g^p t)$. Der Output beträgt $y(t) = k(t) f(l^p) = k_0 f(l^p)\exp(g^p t)$ und wächst mit derselben Wachstumsrate wie Konsum und Kapital.

3.5 Hinreichende Bedingungen

Damit die Optimalität des aus den notwendigen Bedingungen gewonnenen Wachstumspfades sichergestellt wird, müssen Konkavitätsvoraussetzungen erfüllt sein. Für eine innere Lösung ($c > 0$ und $0 < l < 1$) des intratemporalen Optimierungsproblems müssen die beiden bereits bekannten notwendigen Bedingungen (3.8) und (3.9) gelten[8]:

$$U_1(c, l, 1, 1) = \lambda \tag{3.67}$$

$$-U_2(c, l, 1, 1) = \lambda k f'(l) \tag{3.68}$$

Damit diese beiden Bedingungen auch hinreichend für die intratemporale Optimalität sind, wird vorausgesetzt, dass die Hamilton-Funktion ($H(c, l, k, \lambda) = U(c, l, 1, 1) + \lambda [kf(l) - \delta k - c]$) strikt gemeinsam konkav in Konsum und Arbeit ist. Dafür muss die Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen nach Konsum und Arbeit negativ definit sein. Für ihre Determinante gilt:

$$\begin{aligned} H_{11}H_{22} - (H_{12})^2 &= U_{11}(U_{22} + \lambda k f'') - (U_{12})^2 \\ &= \left[U_{11}U_{22} - (U_{12})^2\right] + U_{11}\lambda k f'' > 0 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Es ist hinreichend, dass die Nutzenfunktion $U(c, l, 1, 1)$ gemeinsam strikt konkav in Konsum und Arbeit ist. Daraus folgt $U_{11}U_{22} - (U_{12})^2 > 0$. Der zweite Summand in der letzten Gleichung ist wegen $U_{11} < 0$ und $f'' < 0$ ebenfalls positiv, sodass die Determinante positiv ist. Wegen $H_{11} = U_{11} < 0$ ist die Hesse-Matrix somit negativ definit und die Hamilton-Funktion gemeinsam strikt konkav in c und l.

Hinreichend für die Optimalität wäre die gemeinsam Konkavität der Hamilton-Funktion in Konsum, Arbeit und Kapital ist. Da jedoch die Produktionsfunktion für den sozialen Planer wachsende Skalenerträge in Kapital und Arbeit aufweist, ist die Hamilton-Funktion nicht gemeinsam konkav in l und k: Die Hesse-Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nach Arbeit und Kapital lautet:

$$D^2_{(l,k)} H(c, l, k, \lambda) = \begin{pmatrix} U_{22} + \lambda k f''(l) & \lambda f'(l) \\ \lambda f'(l) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

[8] Randlösungen können wegen der folgenden Annahmen nicht optimal sein: Den Arbeitsinput durch $l = 0$ festzulegen ist bei einem positiven Kapitalstock wegen der unbeschränkten Grenzproduktivität der Arbeit bei $l \to 0$ nicht optimal. Daher kann bei einer optimalen Lösung auch der Kapitalstock nicht in endlicher Zeit aufgebraucht werden. Da der Grenznutzen von Konsum für $c \to 0$ unbeschränkt wird, kann auch $c = 0$ ausgeschlossen werden. Schließlich kann $l = 1$ keine optimale Wahl des sozialen Planers sein, weil die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum für $l \to 1$ unbeschränkt wird, weshalb es besser wäre, den Konsum einzuschränken und positive Freizeit zu wählen.

Wegen $U_{22} + \lambda k f''(l) < 0$ und ihrer negativen Determinante $-\left[\lambda f'(l)\right]^2$ ist die Hesse-Matrix indefinit. Die Hamilton-Funktion ist daher nicht gemeinsam konkav in Konsum, Arbeit und Kapital, und die Optimalität der gefundenen Lösung muss auf eine andere Art sichergestellt werden.

Unter den für die Sätze 2 und 3 hergeleiteten Bedingungen existiert ein eindeutiger Steady State mit konstantem Arbeitsinput $l^p \in (0,1)$. Im Gegensatz zu einem Modell ohne Kapitalexternalität kann dieser ohne Übergangsdynamik sofort erreicht werden. Mit dem bisherigen Wissen kann nicht ausgeschlossen werden, dass es für den sozialen Planer optimal ist, den Arbeitsinput nicht konstant zu halten und den Steady State nur asymptotisch oder gar nicht zu erreichen. Es werden nun Bedingungen hergeleitet, die die Optimalität solcher Pfade ausschließen. Daraus kann dann geschlossen werden, dass der konstante Arbeitsinput gemäß den Sätzen 2 und 3 die Lösung des Optimierungsproblems eines sozialen Planers darstellt.

Es wird nun gezeigt, dass die Pfade von Konsum, Kapital, Arbeit und Kozustand durch den exogen gegebenen Anfangskapitalstock k_0 und den vom Planer wählbaren Anfangskonsum $c(0)$ festgelegt sind: Bezeichnet man den Pfad der Konsum-Kapital-Quote mit $\chi(t)$, ist sein Anfangswert $\chi(0) = \frac{c(0)}{k_0}$. Aus dem intratemporalen Optimierungsproblem erhält man die bereits bekannte Bedingung:

$$\chi(t) = \frac{f'(l(t))}{\Theta_p(l(t))} \tag{3.71}$$

Für eine gegebene Konsum-Kapital-Quote $\chi(t) > 0$ ist dadurch gemäß den für die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum und für die Produktionsfunktion getroffenen Annahmen ein eindeutiger Arbeitsinput $l(t) \in (0,1)$ implizit bestimmt. Aus dem Anfangswert der Konsum-Kapital-Quote erhält man somit den Anfangswert des Arbeitsinputs $l(0)$. Den Anfangswert des Kozustandes $\lambda(0)$ erhält man beispielsweise aus der ersten notwendigen Bedingung $(U_1(c,l,1,1) = \lambda)$. Damit sind die Anfangswerte von Konsum, Kapital, Arbeit und Kozustand bestimmt. Für die Bestimmung ihrer Veränderung im Zeitverlauf werden die Differentialgleichung (3.11) für den Kozustand und die Ressourcenbeschränkung herangezogen:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\left[f(l) - \delta - \rho\right] \tag{3.72}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = f(l) - \delta - \chi \tag{3.73}$$

Aus diesen beiden Differentialgleichungen und den notwendigen intratemporalen Bedingungen können auch die notwendigen Wachstumsraten von Konsum und Arbeitsinput bestimmt werden. Differenziert man die erste notwendige Bedingung $(U_1(c,l,1,1) = \lambda)$ nach der Zeit, erhält man:

$$U_{11}\dot{c} + U_{12}\dot{l} = \dot{\lambda} \tag{3.74}$$

Dividiert man diese Differentialgleichung durch die Bedingung $U_1(c,l,1,1) = \lambda$ und setzt man die notwendige Wachstumsrate des Kozustandes ein, erhält man die Bedingung:

$$\frac{cU_{11}}{U_1}\frac{\dot{c}}{c} + \frac{lU_{12}}{U_1}\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\left[f(l) - \delta - \rho\right] \tag{3.75}$$

Damit die Nutzenfunktion einen Steady State mit konstantem Arbeitsinput erlaubt, wurde vorausgesetzt, dass $\frac{cU_{11}}{U_1}$ konstant ist ($\frac{cU_{11}}{U_1} = -\sigma$) und $\frac{lU_{12}}{U_1}$ nur vom Arbeitsinput abhängt ($\varphi_{12}(l) := \frac{lU_{12}}{U_1}$). Die Funktion $\varphi_{12}(l)$ ist positiv im Fall $\sigma > 1$, negativ im Fall $\sigma < 1$ und identisch der Nullfunktion im Fall $\sigma = 1$. Man kann damit die Wachstumsrate des Konsums aus dem Arbeitsinput und dessen Wachstumsrate erhalten:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[\varphi_{12}(l)\frac{\dot{l}}{l} + f(l) - \delta - \rho\right] \tag{3.76}$$

Ebenso kann man die zweite notwendige Bedingung ($-U_2(c, l, 1, 1) = \lambda k f'(l)$) nach der Zeit differenzieren:

$$-U_{12}\dot{c} - U_{22}\dot{l} = \dot{\lambda}kf' + \lambda\dot{k}f' + \lambda k f''\dot{l} \tag{3.77}$$

Setzt man in diese Gleichung die Bedingung $-U_2 = \lambda k f'$ ein, ist folgende Umformung möglich:

$$-U_{12}\dot{c} - U_{22}\dot{l} = -U_2\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - U_2\frac{\dot{k}}{k} - U_2\frac{f''}{f'}\dot{l} \tag{3.78}$$

$$\Leftrightarrow \frac{cU_{12}}{U_2}\frac{\dot{c}}{c} + \left(\frac{lU_{22}}{U_2} - \frac{lf''}{f'}\right)\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{\dot{k}}{k} \tag{3.79}$$

Für die Elastizität des Grenznutzens von Arbeit bezüglich Konsum wurde $\frac{cU_{12}}{U_2} = 1 - \sigma$ vorausgesetzt, damit ein Steady State mit konstantem Arbeitsinput existieren kann. Ebenso gilt für die möglichen Nutzenfunktionen, dass die Elastizität des Grenznutzens von Arbeit bezüglich Arbeit nur von l abhängig ist: $\varphi_{22}(l) := \frac{lU_{22}}{U_2}$. Sie ist wegen des negativen und fallenden Grenznutzens von Arbeit in jedem Fall positiv ($\varphi_{22}(l) > 0$). Weiters kann man die Wachstumsraten von Kozustand, Kapital und Konsum gemäß den Gleichungen (3.72), (3.73) und (3.76) in die letzte Gleichung einsetzen:

$$\frac{1-\sigma}{\sigma}\left(\varphi_{12}\frac{\dot{l}}{l} + f - \delta - \rho\right) + \left(\varphi_{22} - \frac{lf''}{f'}\right)\frac{\dot{l}}{l} = \rho - \chi \tag{3.80}$$

$$\Leftrightarrow \left(\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}\right)\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\rho}{\sigma} - \chi - \frac{1-\sigma}{\sigma}(f - \delta) \tag{3.81}$$

Es gilt $\varphi_{22} > 0$, $-\frac{lf''}{f'} > 0$ und $\frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} \leq 0$. Für $\sigma = 1$ erhält man $\varphi_{12} = 0$ und $\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}$ ist daher positiv. Für den Fall $\sigma > 1$ wird nun gezeigt, dass aus der Normalität von Freizeit und Konsum $\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} > 0$ folgt. Wegen der Normalität ist $\Theta_p(l) = \frac{V'(l)}{(\sigma-1)V(l)}$ monoton wachsend in l. Daher gilt:

$$\frac{V''(l)}{V(l)} - \left[\frac{V'(l)}{V(l)}\right]^2 \geq 0 \tag{3.82}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V''(l)}{V'(l)} \geq \frac{V'(l)}{V(l)} \tag{3.83}$$

Mit dieser Ungleichung erhält man nun:

$$\begin{aligned}
\varphi_{22}(l) + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12}(l) &= \frac{lV''(l)}{V'(l)} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{lV'(l)}{V(l)} \\
&\geq \frac{lV'(l)}{V(l)} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{lV'(l)}{V(l)} \\
&= \frac{1}{\sigma}\frac{lV'(l)}{V(l)} > 0 \qquad (3.84)
\end{aligned}$$

Im Fall $\sigma < 1$ hingegen muss man $\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'} > 0$ voraussetzen. Mit dieser Voraussetzung folgt $\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'} > 0$ in allen Fällen.

Aus Gleichung (3.81) erhält man somit die Wachstumsrate des Arbeitsinputs in Abhängigkeit von Arbeitsinput und Konsum-Kapital-Quote:

$$\frac{\dot{l}}{l} = \left[\frac{\rho}{\sigma} - \chi - \frac{1-\sigma}{\sigma}(f-\delta)\right]\left(\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}\right)^{-1} \qquad (3.85)$$

Setzt man diese in die Gleichung (3.76) ein, erhält man auch die Wachstumsrate von Konsum in Abhängigkeit von l und χ:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\sigma}\left(\varphi_{12}\frac{\dot{l}}{l} + f - \delta - \rho\right) \\
&= \frac{\varphi_{12}}{\sigma}\frac{\frac{\rho}{\sigma} - \chi - \frac{1-\sigma}{\sigma}(f-\delta)}{\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}} + \frac{1}{\sigma}(f-\delta-\rho) \qquad (3.86)
\end{aligned}$$

Somit sind die Pfade von Konsum, Arbeit, Kapital und Kozustand alleine durch den Anfangskapitalstock und die Wahl des Anfangskonsums gegeben. Äquivalent zur Vorgabe des Anfangskonsums ist, bei gegebenem Anfangswert des Kapitals, die Vorgabe eines Anfangswertes für die Konsum-Kapital-Quote χ. Deren Wachstumsrate erhält man durch Differenzieren von $\chi(t) = \frac{f'(l(t))}{\Theta_p(l(t))}$ nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
\dot{\chi} &= \left[\frac{f''(l)}{\Theta_p(l)} - \frac{f'(l)}{\Theta_p(l)}\frac{\Theta_p'(l)}{\Theta_p(l)}\right]\dot{l} \\
&= \left[\frac{lf''(l)}{f'(l)} - \frac{l\Theta_p'(l)}{\Theta_p(l)}\right]\frac{f'(l)}{\Theta_p(l)}\frac{\dot{l}}{l} \\
&= -\chi\left[-\frac{lf''(l)}{f'(l)} + \frac{l\Theta_p'(l)}{\Theta_p(l)}\right]\frac{\dot{l}}{l} \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

Da $-\frac{lf''(l)}{f'(l)} > 0$ und $\frac{l\Theta_p'(l)}{\Theta_p(l)} > 0$ gilt, ist das Vorzeichen der Wachstumsrate der Konsum-Kapital-Quote entgegengesetzt zu jenem der Wachstumsrate des Arbeitsinputs. Weiters gilt wegen der Definition von $\Theta_p(l) = \frac{-U_2}{cU_1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{l\Theta_p'(l)}{\Theta_p(l)} &= \frac{lU_1}{U_2}\left[\frac{U_{22}}{U_1} - \frac{U_2U_{12}}{(U_1)^2}\right] \\
&= \frac{lU_{22}}{U_2} - \frac{lU_{12}}{U_1} \\
&= \varphi_{22} - \varphi_{12} > 0 \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

Setzt man dies und die Wachstumsrate des Arbeitsinputs aus Gleichung (3.85) in die Wachstumsrate der Konsum-Kapital-Quote ein, erhält man diese in Abhängigkeit von χ und l:

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}}{\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'} + \frac{1}{\sigma}\varphi_{12}} \left[\chi - \frac{\rho}{\sigma} + \frac{1-\sigma}{\sigma}(f - \delta)\right] \tag{3.89}$$

Der Nenner des ersten Faktors wurde bereits als positiv vorausgesetzt. Sein Zähler ist im Fall $\sigma \leq 1$ wegen $\varphi_{12} \leq 0$ größer als der Nenner und somit ebenfalls positiv. Im Fall $\sigma > 1$ folgt die Positivität wegen $\varphi_{22} - \varphi_{12} > 0$ gemäß Gleichung (3.88). Damit ist der erste Faktor eindeutig positiv. Stationäre Punkte dieser Differentialgleichung in $\mathbb{R}^+$ sind genau jene, die

$$\sigma\chi - \rho + (1-\sigma)\left[f\left(l\left(\chi\right)\right) - \delta\right] = 0 \tag{3.90}$$

erfüllen, wobei mit $l(\chi)$ der von der Konsum-Kapital-Quote abhängige Arbeitsinput bezeichnet wird, der aus der intratemporalen Optimalitätsbedingung (3.71) eindeutig bestimmt ist. Die stationären Punkte der Konsum-Kapital-Quote stimmen gemäß Gleichung (3.87) mit jenen des Arbeitsinputs überein. Außerdem gilt bei einer konstanten Konsum-Kapital-Quote, dass die Wachstumsraten von Konsum und Kapital gleich groß sind. Da die Konsum-Kapital-Quote und der Arbeitsinput konstant sind, folgt aus der Ressourcenbeschränkung, dass die Wachstumsrate von Kapital (und somit auch von Konsum) konstant ist. Daher stimmen die stationären Punkte von χ mit den Steady States mit konstantem Arbeitsinput überein. Gemäß den Voraussetzungen dieses Kapitels existiert ein eindeutiger Steady State mit konstantem Arbeitsinput. Daher gibt es auch einen eindeutigen positiven stationären Punkt χ^p der Konsum-Kapital-Quote.

Für die Existenz eines eindeutigen Steady State wurde (im Fall $\sigma < 1$) vorausgesetzt, dass $\sigma\frac{f'(l)}{\Theta_p(l)} - \rho + (1-\sigma)\left[f(l) - \delta\right]$ streng monoton fallend in l ist. Da $l(\chi)$ fallend in χ ist, ist damit $\sigma\chi - \rho + (1-\sigma)\left[f\left(l\left(\chi\right)\right) - \delta\right]$ streng monoton wachsend in der Konsum-Kapital-Quote. Die Wachstumsrate der Konsum-Kapital-Quote ist damit positiv, wenn $\chi > \chi^p$ gilt, und negativ für $\chi < \chi^p$. Der stationäre Punkt ist daher instabil. Für das optimale Verhalten des sozialen Planers gibt es somit 3 Möglichkeiten: Wählt er den Anfangswert der Konsum-Kapital-Quote $\chi(0) = \chi^p$, befindet sich die Wirtschaft von Anfang an im Steady State mit konstantem Arbeitsinput. Wählt er $\chi(0) > \chi^p$, ist die Konsum-Kapital-Quote im Zeitverlauf streng monoton wachsend und strebt mangels eines weiteren stationären Punktes gegen unendlich. Wird der Anfangswert $\chi(0) < \chi^p$ gewählt, ist die Konsum-Kapital-Quote streng monoton fallend. Da es keinen weiteren positiven stationären Punkt gibt, muss sie entweder in endlicher Zeit oder asymptotisch $\chi = 0$ erreichen.

Die Optimalität der Wahl $\chi(0) \neq \chi^p$ wird nun ausgeschlossen, womit im Umkehrschluss der Steady State mit konstantem Arbeitsinput die sozial optimale Wahl darstellt. Bei der Wahl des Anfangswerts $\chi(0) < \chi^p$ konvergiert die Konsum-Kapital-Quote gegen Null und der Arbeitsinput gegen 1. Die Optimalität dieser Lösung wird durch die Verletzung der Transversalitätsbedingung $\lim_{t\to\infty}\left[e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)\right] = 0$ ausgeschlossen: Die Wachstumsrate des Ausdrucks

$e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)$ erhält man als Summe der Wachstumsraten der drei Faktoren:

$$\begin{aligned} \frac{d\left[e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)\right]}{dt}\left[e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)\right]^{-1} &= -\rho - [f(l) - \delta - \rho] + f(l) - \delta - \chi \\ &= -\chi \end{aligned} \tag{3.91}$$

Man erhält damit durch Integration nach der Zeit:

$$e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t) = \lambda(0)\,k(0)\exp\left[-\int_0^t \chi(u)\,du\right] \tag{3.92}$$

Die Transversalitätsbedingung ist daher genau dann erfüllt, wenn die Konsum-Kapital-Quote nicht bezüglich der Zeit integrierbar ist. Damit die Transversalitätsbedingung im Fall $\chi(0) < \chi^p$ verletzt ist, muss aus der Wahl $\chi(0) < \chi^p$ die Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty \chi(u)\,du$ folgen. Gemäß der Gleichung (3.89) gilt für die Wachstumsrate der Konsum-Kapital-Quote und somit des Integranden:

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}}{\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'} + \frac{1}{\sigma}\varphi_{12}}\left[\chi - \frac{\rho}{\sigma} + \frac{1-\sigma}{\sigma}(f - \delta)\right] \tag{3.93}$$

Der zweite Faktor ist bei der Wahl des Anfangswerts $\chi(0) < \chi^p$ negativ und wachsend in χ. Da $\chi(t)$ fallend in t ist, ist der zweite Faktor im Zeitverlauf fallend. Der erste Faktor wurde bereits als positiv vorausgesetzt. Ist der Grenzwert des Produkts für $t \to \infty$ negativ, ergibt sich zumindest asymptotisch eine negative obere Schranke für die Wachstumsrate des Integranden und er ist integrierbar.

Die Optimalität des Anfangswerts $\chi(0) > \chi^p$ soll durch die Verletzung der Ressourcenbeschränkung wegen des Aufbrauchens des Kapitalstocks in endlicher Zeit ausgeschlossen werden. In diesem Fall ist die Konsum-Kapital-Quote wachsend und strebt gegen unendlich, während der Arbeitsinput dementsprechend gegen Null strebt. Bleibt die Veränderung des Arbeitsinputs $\dot{l}$ nach endlicher Zeit unter einer negativen oberen Schranke, ist die Trajektorie nur für eine endliche Zeitspanne definiert, nach der der Kapitalstock aufgebraucht ist. Die zeitliche Veränderung des Arbeitsinputs erhält man aus der Gleichung (3.85):

$$\dot{l} = l\,\frac{\frac{\rho}{\sigma} - \chi - \frac{1-\sigma}{\sigma}(f - \delta)}{\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}} \tag{3.94}$$

Setzt man voraus, dass der positive Nenner für $l \to 0$ nicht unbeschränkt wird, ist für die asymptotische Negativität von $\dot{l}$ das Produkt $l\chi$ die entscheidende Größe. Mit Hilfe der Gleichungen (3.87) und (3.88) erhält man die Wachstumsrate des Produkts:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\chi}}{\chi} + \frac{\dot{l}}{l} &= \left[1 + \frac{lf''(l)}{f'(l)} - \frac{l\Theta_p'(l)}{\Theta_p(l)}\right]\frac{\dot{\chi}}{\chi} \\ &= \left[1 - \varphi_{22} + \varphi_{12} + \frac{lf''(l)}{f'(l)}\right]\frac{\dot{\chi}}{\chi} \end{aligned} \tag{3.95}$$

Wenn diese Wachstumsrate nicht negativ ist, besitzt das Produkt $l\chi$ eine positive untere Schranke. Unter Berücksichtigung von $\lim_{l\to 0}\frac{\dot{\chi}}{\chi} \geq 0$ genügt die zusätzliche Voraussetzung:

$$\lim_{l\to 0}\left[1 - \varphi_{22} + \varphi_{12} + \frac{lf''(l)}{f'(l)}\right] > 0 \tag{3.96}$$

Daraus folgt, dass zumindest für einen nahe bei Null liegenden Arbeitsinput $-l\chi < 0$ nicht wachsend ist und damit auch $\lim_{l\to 0} \dot{l} < 0$ gilt. Dadurch wird der Kapitalstock bereits in endlicher Zeit aufgebraucht und die Wahl des Anfangswerts $\chi(0) > \chi^p$ kann auch nicht optimal sein. Somit erfüllt unter den im folgenden Satz wiederholten Voraussetzungen nur $\chi(0) = \chi^p$ die notwendigen Bedingungen und stellt die Lösung des Optimierungsproblems des sozialen Planers dar.

Satz 5 *Hinreichend für die soziale Optimalität des Steady State mit konstantem Arbeitsinput sind die folgenden zusätzlichen Bedingungen:*

- *Die Momentan-Nutzenfunktion, ausgewertet an symmetrischen Stellen, ist gemeinsam strikt konkav in Konsum und Freizeit.*
- *Die Produktionsfunktion und die Momentan-Nutzenfunktion erfüllen die Randbedingungen*

$$\lim_{l\to 0}\left(\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}\right) < \infty \tag{3.97}$$

$$\lim_{l\to 0}\left(1 - \varphi_{22} + \varphi_{12} + \frac{lf''}{f'}\right) > 0 \tag{3.98}$$

$$\lim_{l\to 1}\frac{\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}}{\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'} + \frac{1}{\sigma}\varphi_{12}}\left[\frac{f'}{\Theta_p} - \frac{\rho}{\sigma} + \frac{1-\sigma}{\sigma}(f-\delta)\right] < 0 \tag{3.99}$$

.

- *Es gilt* $\frac{lU_{22}}{U_2} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{lU_{12}}{U_1} - \frac{lf''}{f'} > 0$ *für jedes* $l \in (0,1)$ *(nur für* $\sigma < 1$ *notwendig).*

Im sechsten Kapitel wird gezeigt, dass die hinreichenden Bedingungen (3.97)-(3.99) für die Wahl einer isoelastischen Nutzenfunktion und einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ohne weitere Voraussetzungen erfüllt sind.

4 Dezentrale Wirtschaft

Nach der Bestimmung der Ergebnisse in der sozial geplanten Wirtschaft wird nun das makroökonomische Verhalten der dezentralen Wirtschaft untersucht. Neben der Anfangsbedingung $k(0) = k_0$ wird das symmetrische Gleichgewicht durch die Gleichungen (2.27), (2.28), (2.29) und (2.30) beschrieben:

$$U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c} = \lambda \tag{4.1}$$

$$-U_2(c,l,1,1) = \lambda k f'(l) \tag{4.2}$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\left[f(l) - \delta - lf'(l) + \frac{U_3(c,l,1,1)\frac{1}{k}}{U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c}} - \rho\right] \tag{4.3}$$

$$\dot{k} = [f(l) - \delta]\,k - c \tag{4.4}$$

Vergleicht man die ersten drei Gleichungen mit den entsprechenden Gleichungen (3.8), (3.9) und (3.11) in der sozial geplanten Wirtschaft, ergeben sich folgende Unterschiede: Ein positiver Grenznutzen von relativem Konsum führt in der ersten Bedingung zu einer direkten intratemporalen Verzerrung. Dies verringert die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum aus Sicht eines Individuums in einem symmetrischen Gleichgewicht gegenüber der sozial geplanten Wirtschaft:

$$MRS_d^{1-l,c} := \frac{-U_2(c,l,1,1)}{U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c}} < \frac{-U_2(c,l,1,1)}{U_1(c,l,1,1)} = MRS_p^{1-l,c} \tag{4.5}$$

Bei gegebenem Konsum und Arbeitsinput sind die Individuen in der dezentralen Wirtschaft also bereit, Freizeit für Konsum in einem Verhältnis zu tauschen, das niedriger als das sozial optimale ist.

Außerdem gibt es wegen der Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion und der Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion zwei intertemporale Verzerrungen: Einerseits ist der Realzinssatz in der dezentralen Wirtschaft $(f(l) - lf'(l) - \delta)$ kleiner als die Nettoertragsrate des Kapitals $(f(l) - \delta)$, die ein sozialer Planer für seine Investitionsentscheidungen heranzieht, da er die Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion internalisiert. Andererseits ergibt sich die „effektive Ertragsrate“ aus Sicht der Individuen durch die Summe von Realzinssatz und der Grenzrate der Substitution von eigenem Vermögen für eigenen Konsum. In einem symmetrischen Gleichgewicht wird der Realzinssatz somit um $MRS_d^{a,c}(c,l,a) := \frac{U_3(c,l,1,1)\frac{1}{a}}{U_1(c,l,1,1)+U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c}}$ erhöht. Diese Grenzrate der Substitution ist genau dann positiv, wenn die Individuen einen Nutzen aus höherem relativen Vermögen ziehen. Ob die effektive Ertragsrate der Individuen größer ist als ihr sozial optimaler Wert, ist von der Größe der drei Externalitäten abhängig. Sie ist genau dann größer, wenn $MRS_d^{a,c} > lf'(l)$ gilt.

4.1 Bedingungen für die Existenz eines Steady State

Damit die Nutzenfunktion einen Steady State mit konstantem Arbeitsinput in der sozial geplanten Wirtschaft erlaubt, sollen die ihr bisher auferlegten Restriktionen weiterhin gelten. Zusätzlich werden nun Bedingungen für die Statuskomponenten, die bei einem sozialen Planer keine Rolle spielten, aufgestellt. Gesucht ist weiterhin ein Steady State mit konstanten Wachstumsraten von Konsum und Kapital sowie einem konstanten Arbeitsinput. Aus der Ressourcenbeschränkung folgt ebenso wie in der sozial geplanten Wirtschaft, dass die Wachstumsraten von Konsum und Kapital gleich sein müssen, damit die Konsum-Kapital-Quote konstant ist.

Aus den ersten beiden notwendigen Bedingungen (2.28) und (2.29) kann die folgende Bedingung abgeleitet werden:

$$\frac{U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c}}{-U_2(c,l,1,1)} = \frac{1}{kf'(l)} \tag{4.6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{k} = c\frac{U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c}}{-U_2(c,l,1,1)}f'(l) \tag{4.7}$$

In der sozial geplanten Wirtschaft wurde gezeigt, dass $\frac{cU_1}{-U_2} = (\Theta_p)^{-1}$ sowohl für $\sigma \neq 1$ als auch für $\sigma = 1$ im Steady State konstant ist. Da $f'(l)$ und $\frac{c}{k}$ im Steady

State ebenfalls konstant sind, muss das auch für $\frac{U_4}{-U_2}$ gelten[9]. Im Fall $\sigma \neq 1$ gilt für die multiplikativ separable Nutzenfunktion im symmetrischen Gleichgewicht: $U_2(c, l, 1, 1) = c^{1-\sigma} \frac{V'(l)}{1-\sigma}$. Im Fall $\sigma = 1$ gilt $U_2(c, l, 1, 1) = -V'(l)$. Daher muss der Grenznutzen von relativem Konsum ausgewertet im symmetrischen Gleichgewicht von der Form $U_4(c, l, 1, 1) = c^{1-\sigma} W(l)$ sein, wobei die Funktion $W(l)$ im Falle eines positiven Effekts von höherem relativen Konsum positiv ist: $W(l) > 0$.

Die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum aus Sicht der Individuen hat daher die Form $MRS_d^{1-l,c}(c, l) = \frac{-U_2(c,l,1,1)}{U_1(c,l,1,1)+U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c}} = c\Theta_d(l)$, wobei die Funktion $\Theta_d(l)$ positiv ist. Mit dieser Definition lässt sich die Konsum-Kapital-Quote im Steady State folgendermaßen schreiben:

$$\frac{c}{k} = \frac{f'(l)}{\Theta_d(l)} \tag{4.8}$$

Differenziert man die notwendige Bedingung (2.29) ($-U_2(c, l, 1, 1) = \lambda k f'(l)$) nach der Zeit und beachtet, dass der Arbeitseinsatz im Steady State konstant sein soll, erhält man:

$$-U_{12}\dot{c} = \dot{\lambda} k f' + \lambda \dot{k} f' \tag{4.9}$$

Dividiert man diese Gleichung durch die Bedingung (2.29) selbst, kann man gemäß der Gleichung (3.22) verwenden, dass die Elastizität des Grenznutzens von Arbeit bezüglich Konsum konstant ist ($\frac{cU_{12}}{U_2} = 1 - \sigma$) und dass die Wachstumsraten von Konsum und Kapital im Steady State gleich groß sind:

$$\frac{U_{12}\dot{c}}{U_2} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{\dot{k}}{k}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad (1-\sigma)\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{\dot{c}}{c} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{c}}{c} &= -\frac{1}{\sigma}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Der aus der sozial geplanten Wirtschaft bereits bekannte Zusammenhang zwischen den Wachstumsraten von Konsum und Kozustand muss daher auch in der dezentralen Wirtschaft gelten. Da der Arbeitseinsatz konstant ist, muss gemäß Bedingung (2.30) im symmetrischen Steady State auch $MRS_d^{a,c}(l) := \frac{U_3\frac{1}{k}}{U_1+U_4\frac{1}{c}}$ unabhängig von Konsum und Kapital sein. Im Fall $\sigma \neq 1$ kann man $U_1(c, l, 1, 1) = c^{-\sigma} V(l)$ und $U_4(c, l, 1, 1) = c^{1-\sigma} W(l)$ einsetzen und erhält

$$\begin{aligned} U_3(c, l, 1, 1)\frac{1}{k} &= c^{-\sigma}[V(l) + W(l)]\, MRS_d^{a,c}(l) \\ U_3(c, l, 1, 1) &= c^{1-\sigma}[V(l) + W(l)]\, MRS_d^{a,c}(l)\left(\frac{c}{k}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Wegen der Konstanz von $\frac{c}{k}$ und $MRS_d^{a,c}(l)$ ist $[V(l) + W(l)]\, MRS_d^{a,c}(l)\left(\frac{c}{k}\right)^{-1}$ im Steady State konstant. Da der Grenznutzen von relativem Vermögen im

[9] So wie in der sozial geplanten Wirtschaft, soll der Arbeitsinput l^d im Steady State alle Werte in $(0, 1)$ annehmen können. Daher müssen diese Bedingungen für alle $l \in (0, 1)$ gelten.

symmetrischen Gleichgewicht nur von Konsum und Arbeit abhängig ist, gilt $U_3(c,l,1,1) = c^{1-\sigma} X(l)$.

Im Fall $\sigma = 1$ kann man $U_1(c,l,1,1) = \frac{1}{c}$ und $U_4(c,l,1,1) = W(l)$ in die Gleichung $MRS_d^{a,c}(l) = \frac{U_3 \frac{1}{k}}{U_1 + U_4 \frac{1}{c}}$ einsetzen und erhält

$$U_3(c,l,1,1) = [1 + W(l)]\, MRS_d^{a,c}(l) \left(\frac{c}{k}\right)^{-1} \tag{4.12}$$

Daher gilt in diesem Fall $U_3(c,l,1,1) = X(l)$ und die Auswertung der partiellen Ableitung im symmetrischen Gleichgewicht kann allgemein als $U_3(c,l,1,1) = c^{1-\sigma} X(l)$ geschrieben werden. Die Funktion $X(l)$ ist im Falle eines positiven Effekts von höherem relativen Vermögen positiv: $X(l) > 0$.

Diese notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Steady State mit konstantem Arbeitsinput werden im folgenden Satz zusammengefasst und in der Folge unterstellt.

Satz 6 *Damit die Nutzenfunktion $U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)$ einen symmetrischen dezentralen Steady State mit konstantem Arbeitsinput erlaubt, müssen die partiellen Ableitungen nach relativem Vermögen und relativem Konsum, ausgewertet im symmetrischen Gleichgewicht, die folgende Form haben:*

$$U_3(c,l,1,1) = c^{1-\sigma} X(l) \tag{4.13}$$

$$U_4(c,l,1,1) = c^{1-\sigma} W(l) \tag{4.14}$$

Ein positiver Grenznutzen von höherem relativen Vermögen bzw. höherem relativen Konsum impliziert $X(l) > 0$ bzw. $W(l) > 0$.

4.2 Bestimmung des Arbeitsinputs

Mit den hergeleiteten Bedingungen für die Form des Grenznutzens von relativem Vermögen und relativem Konsum kann nun analog zur sozial geplanten Wirtschaft eine Bestimmungsgleichung für den Arbeitsinput im Steady State der dezentralen Wirtschaft hergeleitet werden. Die Konsum-Kapital-Quote bei gegebenem Arbeitsinput lautet gemäß Gleichung (4.8):

$$\frac{c}{k} = \frac{f'(l)}{\Theta_d(l)} \tag{4.15}$$

Die Funktion $\Theta_d(l)$ hat die folgende Eigenschaft: $0 < \Theta_d(l) \leq \Theta_p(l)$. Nur wenn es in der Nutzenfunktion eine Konsumexternalität gibt ($U_4(c,l,1,1) > 0$), gilt $\Theta_d(l) < \Theta_p(l)$. Für jeden gegebenen Arbeitsinput übersteigt die dezentrale Konsum-Kapital-Quote daher in diesem Fall den entsprechenden sozial optimalen Wert. Der Grund dafür liegt darin, dass die Individuen bereit sind, Freizeit durch weniger Konsum zu substituieren als es sozial optimal ist.

Aus der Ressourcenbeschränkung der Volkswirtschaft erhält man mit dem Verhältnis von Konsum und Kapital die Wachstumsrate des Kapitalstocks:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{k}}{k} &= f(l) - \delta - \frac{c}{k} \\ &= f(l) - \delta - \frac{f'(l)}{\Theta_d(l)} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Bei gegebenem Arbeitsinput ergibt sich ein Unterschied zur sozial geplanten Wirtschaft nur dann, wenn es eine negative Konsumexternalität in der Nutzenfunktion gibt. In diesem Fall gilt $\Theta_d(l) < \Theta_p(l)$ und die Wachstumsrate des Kapitals ist bei gegebenem Arbeitsinput in der dezentralen Wirtschaft geringer.

Aus der Differentialgleichung des Kozustandes (2.30) erhält man unter Verwendung des Zusammenhangs $\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ gemäß Gleichung (4.10) die Wachstumsrate des Konsums:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &= -\frac{1}{\sigma}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\sigma}\left[f(l) - \delta - lf'(l) + \frac{U_3(c,l,1,1)\frac{1}{k}}{U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c}} - \rho\right] \end{aligned} \tag{4.17}$$

Zur Analyse der Auswirkungen der Externalitäten ist es weiters hilfreich, das Ergebnis zu verwenden, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum dem Reallohn und somit der Grenzproduktivität der Arbeit entspricht: Setzt man $U_1(c,l,1,1) + U_4(c,l,1,1)\frac{1}{c} = \frac{-U_2(c,l,1,1)}{kf'(l)}$ in die Wachstumsrate ein, erhält man für die Wachstumsrate des Konsums:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[f(l) - \delta - lf'(l) + \frac{U_3(c,l,1,1)}{-U_2(c,l,1,1)}f'(l) - \rho\right] \tag{4.18}$$

Im vorherigen Abschnitt wurde durch die Bedingung $U_3(c,l,1,1) = c^{1-\sigma}X(l)$ bereits sichergestellt, dass der Quotient $\frac{U_3(c,l,1,1)}{-U_2(c,l,1,1)}$ unabhängig vom Konsum ist. Dieser Ausdruck kann als Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für Freizeit interpretiert werden[10]. Sie gibt an, auf wie viel Freizeit die Individuen verzichten würden, um ihr relatives Vermögen um eine (marginale) Einheit steigern zu können. Sie wird in der Folge mit $MRS_d^{a/A,1-l}(l)$ bezeichnet. Mit dieser Notation erhält man für die Wachstumsrate des Konsums:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[f(l) - \delta - lf'(l) + MRS_d^{a/A,1-l}(l)\,f'(l) - \rho\right] \tag{4.19}$$

Aus dieser Gleichung erhält man die Wachstumsrate des Konsums in Abhängigkeit vom Arbeitsinput. Sie unterscheidet sich von jener in der sozial geplanten Wirtschaft ($\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}[f(l) - \delta - \rho]$) durch die Effekte der Produktionsexternalität und einer möglichen Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion. Die Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion ($-lf'(l)$) verringert die Wachstumsrate gegenüber der sozial optimalen. Gibt es eine negative Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion ($U_3(c,l,1,1) > 0$), hat diese einen positiven Effekt auf die Wachstumsrate des Konsums. Der Gesamteffekt ist daher nicht eindeutig, sondern von der Größe der Externalitäten abhängig. Spielt relatives Vermögen keine Rolle, ist die Wachstumsrate des Konsums bei gegebenem Arbeitsinput wegen der Produktionsexternalität niedriger.

In einem Steady State muss nun gelten, dass die Wachstumsraten von Konsum und Kapital übereinstimmen. Man erhält daher folgende Bedingung, die

[10] Im Unterschied zur Grenzrate der Substitution von Vermögen für Freizeit ($MRS_d^{a,1-l} = \frac{U_3(c,l,1,1)\frac{1}{k}}{-U_2(c,l,1,1)}$) ist sie nicht vom Kapitalstock abhängig und daher im Steady State konstant.

der langfristige Arbeitsinput l^d erfüllen muss:

$$\begin{aligned} & f(l) - \delta - \frac{f'(l)}{\Theta_d(l)} \\ = \; & \frac{1}{\sigma}\left[f(l) - \delta + \left(MRS_d^{a/A,1-l}(l) - l\right) f'(l) - \rho\right] \end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen inneren Lösung $l^d \in (0,1)$ werden in der Folge getrennt für die Fälle $\sigma \neq 1$ und $\sigma = 1$ analysiert.

4.2.1 Arbeitsinput im Fall $\sigma \neq 1$

Im Fall $\sigma \neq 1$ gilt für die partiellen Ableitungen der Nutzenfunktion ausgewertet im symmetrischen Gleichgewicht $U_1 = c^{-\sigma} V(l)$, $U_2 = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} V'(l)$, $U_3 = c^{1-\sigma} X(l)$ und $U_4 = c^{1-\sigma} W(l)$. Daraus erhält man die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum: $MRS_d^{1-l,c} = \frac{c}{\sigma-1} \frac{V'(l)}{V(l)+W(l)}$ und somit die Funktion $\Theta_d(l) = \frac{1}{\sigma-1} \frac{V'(l)}{V(l)+W(l)}$. Außerdem gilt $MRS_d^{a/A,1-l}(l) = \frac{U_3(c,l,1,1)}{-U_2(c,l,1,1)} = X(l) \frac{\sigma-1}{V'(l)}$. Man erhält die Bestimmungsgleichung für den Arbeitsinput durch Einsetzen in die Gleichung (4.20):

$$\begin{aligned} & f(l) - \delta - \frac{\sigma-1}{V'(l)}\left[V(l) + W(l)\right] f'(l) \\ = \; & \frac{1}{\sigma}\left[f(l) - \delta + \left[X(l)\frac{\sigma-1}{V'(l)} - l\right] f'(l) - \rho\right] \end{aligned} \tag{4.21}$$

Durch Umformungen erhält man eine äquivalente Form:

$$\begin{aligned} & \left[(\sigma-1)\,\sigma\frac{V(l)}{V'(l)} + \frac{\sigma-1}{V'(l)}\left[\sigma W(l) + X(l)\right] - l\right] f'(l) \\ = \; & (\sigma-1)\left[f(l) - \delta\right] + \rho \end{aligned} \tag{4.22}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von Gleichung (3.43) in der sozial geplanten Wirtschaft ($(\sigma-1)\,\sigma\frac{V(l)}{V'(l)} f'(l) = (\sigma-1)\left[f(l) - \delta\right] + \rho$) wegen der drei Externalitäten, die in der dezentralen Wirtschaft auftreten: Eine negative Konsumexternalität ($W(l) > 0$) und eine negative Vermögensexternalität ($X(l) > 0$) in der Nutzenfunktion vergrößern wegen $\frac{\sigma-1}{V'(l)} f'(l) > 0$ die linke Seite. Setzt man nun wie in der sozial geplanten Wirtschaft voraus, dass die Differenz von linker und rechter Seite streng monoton fallend ist, führen beide negativen Externalitäten ceteris paribus zu einer Erhöhung des Arbeitsinputs. Die dritte Externalität ist die positive Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion der Unternehmen. Sie führt zu dem zusätzlichen Term $-lf'(l)$ auf der linken Seite, der diese veringert. Dies bewirkt eine Verringerung des Arbeitsinputs in der dezentralen Wirtschaft. Die Effekte der negativen Externalitäten in der Nutzenfunktion und der positiven Externalität in der Produktionsfunktion sind daher gegenläufig. Um den Gesamteffekt auf den Arbeitseinsatz bestimmen zu können, ist daher die Kenntnis der Größe der Externalitäten notwendig. Gilt

$$\frac{\sigma-1}{V'(l^p)}\left[\sigma W(l^p) + X(l^p)\right] > l^p \tag{4.23}$$

ist die linke Seite von Gleichung (4.22) an der Stelle l^p größer als die rechte Seite, da gemäß Gleichung (3.43) $(\sigma - 1)\,\sigma\frac{V(l^p)}{V'(l^p)}f'(l^p) = (\sigma - 1)\,[f(l^p) - \delta] + \rho$ gilt. Wegen der fallenden Monotonie der linken Seite muss dann $l^d > l^p$ gelten. An der Stelle l^d ist die Gleichung (4.22) erfüllt, während in der Bestimmungsgleichung der sozial geplanten Wirtschaft wegen der fallenden Monotonie die linke Seite kleiner als die rechte Seite ist. Daher gilt die Ungleichung (4.23) auch an der Stelle l^d und wegen der Monotonie der beiden Bestimmungsgleichungen auch zumindest für alle $l \in \left[l^p, l^d\right]$. Ebenso kann man sich überlegen, dass das Arbeitsangebot in der dezentralen Wirtschaft geringer als das sozial optimale ist, wenn die Ungleichung $\frac{\sigma-1}{V'(l)}\,[\sigma W(l) + X(l)] < l$ für alle $l \in \left[l^d, l^p\right]$ gilt. Im Grenzfall $\frac{\sigma-1}{V'(l^p)}\,[\sigma W(l^p) + X(l^p)] = l^p$ erfüllt l^p die Bestimmungsgleichung der dezentralen Wirtschaft und es kommt zu keiner Abweichung des Arbeitsinputs.

Um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Gleichung (3.43) in der sozial geplanten Wirtschaft sicherzustellen, wurde vorausgesetzt, dass $(\sigma - 1)\left[\sigma\frac{V(l)}{V'(l)}f'(l) - [f(l) - \delta]\right]$ strikt monoton fallend in l ist, für $l \to 0$ unbeschränkt und für $l \to 1$ kleiner als ρ wird. In der dezentralen Wirtschaft kann eine eindeutige Lösung der Gleichung (4.22) ebenso gewährleistet werden. Formt man sie so um, dass die rechte Seite konstant gleich ρ ist, erhält man

$$(\sigma - 1)\left[\sigma\frac{V(l)}{V'(l)}f'(l) - [f(l) - \delta]\right] + \left[\frac{\sigma - 1}{V'(l)}\,[\sigma W(l) + X(l)] - l\right] f'(l) = \rho \tag{4.24}$$

Der erste Summand ist gemäß den Voraussetzungen in der sozial geplanten Wirtschaft monoton fallend. Es genügen nun die zusätzlichen Voraussetzungen, dass $\frac{\sigma-1}{V'(l)}f'(l)\,[\sigma W(l) + X(l)]$ fallend in l und $lf'(l)$ wachsend in l sind, damit die Monotonie der linken Seite sichergestellt ist.

Die Konkavität der Nutzenfunktion in Freizeit impliziert, dass $\frac{\sigma-1}{V'(l)} > 0$ monoton fallend ist und aus der fallenden Grenzproduktivität der Arbeit folgt, dass auch $f'(l)$ fallend ist. Sind die beiden Externalitäten in der Nutzenfunktion entweder nicht vorhanden oder negativ, gilt $[\sigma W(l) + X(l)] \geq 0$. Es genügt nun, dass die Stärke der Externalitäten nicht zu sehr in l wächst, damit das Produkt fallend ist.

Ist die Nutzenfunktion beispielsweise auch multiplikativ separabel in relativem Vermögen und relativem Konsum ($U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) = \frac{c_i^{1-\sigma}}{1-\sigma}V(l_i)\,G\left(\frac{a_i}{A}\right)H\left(\frac{c_i}{C}\right)$), sind die Funktionen $X(l) = \frac{U_3(c,l,1,1)}{c^{1-\sigma}}$ und $W(l) = \frac{U_4(c,l,1,1)}{c^{1-\sigma}}$ proportional zu $V(l)$. Da wegen der Annahme der Normalität von Freizeit und Konsum $(\sigma - 1)\,\frac{V(l)}{V'(l)}$ fallend ist, ist bei einer multiplikativ separablen Nutzenfunktion sichergestellt, dass $\frac{\sigma-1}{V'(l)}f'(l)\,[\sigma W(l) + X(l)]$ fallend in l ist.

Eine alternative Formulierung der ersten Bedingung ist die Voraussetzung, dass $(\sigma - 1)\,\frac{V(l)+W(l)}{V'(l)} = [\Theta_d(l)]^{-1}$ und $\frac{\sigma-1}{V'(l)}X(l)$ fallend in l sind. Das bedeutet, dass $\Theta_d(l)$ und daher die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum aus Sicht der Individuen wachsend in l sind. Damit ist die Grenzrate der Substitution fallend in Freizeit und wachsend in Konsum, was gleichbedeutend dazu ist, dass Freizeit und Konsum normale Güter sind. Diese Voraussetzung ist bereits aus der sozial geplanten Wirtschaft bekannt. Der Unterschied ist jedoch, dass Freizeit und Konsum in der sozial geplanten Wirtschaft normale Güter aus Sicht des sozialen Planers sein müssen, während sie in der dezentralen Wirtschaft normal aus Sicht der Individuen sein müssen. Der Term $\frac{\sigma-1}{V'(l)}X(l)$ ist die Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für Freizeit: $\frac{\sigma-1}{V'(l)}X(l) = \frac{U_3(c,l,1,1)}{-U_2(c,l,1,1)} = MRS_d^{a/A,1-l}(l)$. Die Voraussetzung, dass $\frac{\sigma-1}{V'(l)}X(l)$ monoton fallend in l ist, entspricht daher der Voraussetzung, dass die Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für Freizeit in der dezentralen Wirtschaft fallend in Arbeit bzw. wachsend in Freizeit ist. Dies ist äquivalent dazu, dass die Grenzrate der Substitution von absolutem Vermögen für Freizeit wachsend in Freizeit ist. Die Individuen müssen daher bei wachsender Freizeit für den Verlust einer marginalen Einheit ihres Vermögens mit immer mehr Freizeit kompensiert werden, damit ihr Nutzen erhalten bleibt. Da die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Vermögen invers zur Grenzrate der Substitution von Vermögen für Freizeit ist, lautet eine äquivalente Formulierung, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Vermögen fallend in Freizeit ist.

Die zweite zusätzliche hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit des Arbeitsinputs ist, dass $lf'(l)$ wachsend in l ist. Da der Reallohn durch $kf'(l)$ gegeben ist, ist das Arbeitseinkommen der Individuen in einem symmetrischen Gleichgewicht gleich $klf'(l)$. Die Bedingung bedeutet daher, dass das gesamte Arbeitseinkommen der Individuen bei einer Ausweitung ihres Arbeitsangebots bei festgehaltenem Kapitalstock nicht fallend sein darf. Differenziert man $lf'(l)$ nach der Arbeit, erhält man die Bedingung

$$f'(l) + lf''(l) \geq 0 \tag{4.25}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{lf''(l)}{f'(l)}\right| = \left|\frac{lkf''(l)}{kf'(l)}\right| \leq 1 \tag{4.26}$$

Dies bedeutet, dass für die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion $kf(l)$ gelten muss, dass die Elastizität der Grenzproduktivität von Arbeit bezüglich Arbeit betragsmäßig nicht größer als 1 sein darf.

Mit diesen beiden zusätzlichen Bedingungen ist die Eindeutigkeit des Arbeitsinputs sichergestellt. Für die Existenz einer Lösung müssen die bei der Analyse der sozial geplanten Wirtschaft verwendeten Bedingungen teilweise angepasst werden: In der sozial geplanten Wirtschaft wurde bereits gezeigt, dass aus der Inada-Bedingung für die Produktionsfunktion $\lim_{l\to 0}(\sigma-1)\left[\sigma\frac{V(l)}{V'(l)}f'(l) - [f(l)-\delta]\right] = \infty$ folgt. Da $\frac{\sigma-1}{V'(l)}[\sigma W(l) + X(l)]$ nicht negativ ist und $-lf'(l)$ laut obiger Voraussetzungen fallend in l ist, ist der Grenzwert $\lim_{l\to 0}\left[\frac{\sigma-1}{V'(l)}[\sigma W(l) + X(l)] - l\right] f'(l)$ jedenfalls größer als $-\infty$. Daher gilt auch im symmetrischen Gleichgewicht der dezentralen Wirtschaft, dass die linke Seite der Gleichung (4.24) für $l \to 0$ unbeschränkt ist. Damit die Gleichung eine innere Lösung besitzt, muss noch sichergestellt werden, dass der Grenzwert der linken Seite für $l \to 1$ kleiner als ρ ist. In der sozial geplanten Wirtschaft wurde vorausgesetzt, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum ausgewertet im symmetrischen Gleichgewicht für $l \to 1$ unbeschränkt ist. Dadurch wird sichergestellt, dass der Arbeitseinsatz $l = 1$ nicht optimal sein kann. Aus dieser Voraussetzung folgt $\lim_{l\to 1}\frac{V(l)}{V'(l)}f'(l) = 0$. Es wird nun zusätzlich vorausgesetzt, dass $\lim_{l\to 1}\frac{\sigma-1}{V'(l)}[\sigma W(l) + X(l)] \leq 1$ gilt.

Ist die Momentan-Nutzenfunktion multiplikativ separabel in ihren 4 Komponenten, sind die Funktionen $W(l)$ und $X(l)$, die die Stärke der Externalitäten in der Nutzenfunktion bestimmen, proportional zu $V(l)$. In diesem Fall gilt $\lim_{l\to 1} \frac{\sigma W(l)+X(l)}{V'(l)} = 0$ und die Voraussetzung ist erfüllt.

Mit dieser Voraussetzung gilt für den Grenzwert des zweiten Summanden auf der linken Seite von Gleichung (4.24) für $l \to 1$, dass er nicht positiv ist:

$$\lim_{l\to 1}\left[\frac{\sigma-1}{V'(l)}\left[\sigma W(l)+X(l)\right]-l\right]f'(l) \leq \lim_{l\to 1}\left[1-1\right]f'(l) = 0 \tag{4.27}$$

Der Grenzwert der linken Seite ist daher nicht größer als $-(\sigma-1)\left[f(1)-\delta\right]$, was wiederum wegen der Bedingung (3.47) für die maximale Nettoertragsrate von Kapital in der sozial geplanten Wirtschaft ($(\sigma-1)\left[f(1)-\delta\right] > -\rho$) kleiner als ρ ist. Daher ist die Existenz einer Lösung der Gleichung (4.24) sichergestellt.

Eine alternative Formulierung dieser Bedingung verwendet die Grenzraten der Substitution von Freizeit für Konsum bzw. Freizeit für Vermögen aus Sicht der Individuen. Es genügt vorauszusetzen, dass $\lim_{l\to 1}(\sigma-1)\frac{V(l)+W(l)}{V'(l)} = 0$ und $\lim_{l\to 1}\frac{\sigma-1}{V'(l)}X(l) = 0$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\lim_{l\to 1}\left[MRS_d^{1-l,c}(c,l)\right]^{-1} = 0$ und $\lim_{l\to 1}\left[MRS_d^{1-l,a}(c,l)\right]^{-1} = 0$. Die Grenzraten der Substitution von Freizeit für Konsum und Freizeit für Vermögen aus Sicht der Individuen müssen daher bei schwindender Freizeit unbeschränkt werden. Dies stellt sicher, dass die Randlösung $l = 1$ für die Individuen nicht optimal sein kann.

Die obigen Überlegungen für die Existenz eines eindeutigen Steady-State-Arbeitsinputs werden im folgenen Satz zusammengefasst:

Satz 7 *In der dezentralen Wirtschaft ergibt sich bei einer im symmetrischen Gleichgewicht multiplikativ separablen Nutzenfunktion ($\sigma \neq 1$) der langfristige Arbeitseinsatz l^d aus der Gleichung*

$$\begin{aligned}&(\sigma-1)\left[\sigma\frac{V\left(l^d\right)+W\left(l^d\right)}{V'\left(l^d\right)}+\frac{X\left(l^d\right)}{V'\left(l^d\right)}\right]f'\left(l^d\right)\\ =\;&(\sigma-1)\left[f\left(l^d\right)-\delta\right]+l^d f'\left(l^d\right)+\rho\end{aligned} \tag{4.28}$$

Die negativen Status-Externalitäten in der Nutzenfuktion erhöhen l^d gegenüber dem sozial optimalen Wert, während die positive Produktionsexternalität den umgekehrten Effekt hat. Wenn $(\sigma-1)\frac{\sigma W(l^p)+X(l^p)}{V'(l^p)} > l^p$ gilt, folgt $l^d > l^p$.

Für die Existenz einer eindeutigen inneren Lösung sind folgende Bedingungen hinreichend:

- *Freizeit und Konsum sind aus Sicht der Individuen normale Güter.*
- *Die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Vermögen ist fallend in Freizeit.*
- *Die Grenzraten der Substitution von Freizeit für Konsum und Freizeit für Vermögen werden bei schwindender Freizeit unbeschränkt.*
- *Die Elastizität der Grenzproduktivität der Arbeit bezüglich Arbeit ist betragsmäßig kleiner als 1.*
- *Die maximale soziale Nettoertragsrate des Kapitals erfüllt die Bedingung $(\sigma-1)\left[f(1)-\delta\right] > -\rho$.*

- *Die Differenz von linker und rechter Seite der Gleichung (4.28) ist fallend in l (Voraussetzung nur für $\sigma < 1$ notwendig).*

4.2.2 Arbeitsinput im Fall $\sigma = 1$

Im Fall $\sigma = 1$ erhält man, wie in der sozial geplanten Wirtschaft gezeigt, die folgenden partiellen Ableitungen im symmetrischen Gleichgewicht: $U_1 = \frac{1}{c}$ und $U_2 = -V'(l)$. Außerdem wurden für den Satz 6 die partiellen Ableitungen in der dezentralen Wirtschaft $U_3 = X(l)$ und $U_4 = W(l)$ hergeleitet. Damit ergibt sich $\Theta_d(l) = \frac{V'(l)}{1+W(l)}$ und $MRS_d^{a/A,1-l}(l) = \frac{X(l)}{V'(l)}$. Die Bestimmungsgleichung (4.20) lautet in diesem Fall somit:

$$\begin{aligned} & f(l) - \delta - \frac{1+W(l)}{V'(l)} f'(l) \\ = \quad & f(l) - \delta + \left[\frac{X(l)}{V'(l)} - l\right] f'(l) - \rho \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(l)}{V'(l)} + \left[\frac{W(l)+X(l)}{V'(l)} - l\right] f'(l) = \rho \tag{4.30}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der entsprechenden Gleichung (3.54) in der sozial geplanten Wirtschaft ($\frac{f'(l^p)}{V'(l^p)} = \rho$) wiederum durch die drei Externalitäten. Positive Grenznutzen aus höherem relativen Konsum ($W(l) > 0$) und höherem relativen Vermögen ($X(l) > 0$) erhöhen wegen $f'(l) > 0$ und $V'(l) > 0$ jeweils die linke Seite der Gleichung. Für die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung wird in der Folge wieder vorausgesetzt, dass die linke Seite fallend in l ist. Daher führt die Erhöhung der linken Seite in Folge von negativen Externalitäten in der Nutzenfunktion ceteris paribus zu einem höheren Arbeitsinput. Dem entgegengesetzt ist der Effekt der positiven Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion. Dieser verringert die linke Seite um $lf'(l)$ und dementsprechend auch den Arbeitseinsatz. Der Gesamteffekt ist wie im Fall $\sigma \neq 1$ von der Größe der Externalitäten abhängig. Der Arbeitsinput im Steady State der dezentralen Wirtschaft l^d ist genau dann höher als der sozial optimale Wert l^p, wenn

$$\frac{W(l)+X(l)}{V'(l)} > l \tag{4.31}$$

für alle $l \in \left[l^p, l^d\right]$ gilt.

Eine Lösung der Gleichung (4.30) ist eindeutig, wenn die linke Seite strikt monoton fallend ist. Bei der Betrachtung der sozial geplanten Wirtschaft wurde wegen der fallenden Grenzproduktivität der Arbeit und des fallenden Grenznutzens von Freizeit bereits festgestellt, dass $\frac{f'(l)}{V'(l)}$ strikt fallend in l ist. Die linke Seite ist daher strikt fallend in l, wenn $\frac{W(l)+X(l)}{V'(l)} f'(l)$ fallend in l ist und $lf'(l)$ wachsend in l ist. Die erste zusätzliche Bedingung ist daher ebenso wie im Fall $\sigma \neq 1$, dass der Grenznutzen von relativem Konsum und relativem Vermögen nicht zu stark wachsend in l sein darf. Ist die Nutzenfunktion additiv separabel in den 4 Komponenten ($U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) = \ln c_i - V(l_i) + G\left(\frac{a_i}{A}\right) + H\left(\frac{c_i}{C}\right)$), sind $W(l)$ und $X(l)$ konstant und die Bedingung daher erfüllt.

Eine alternative Formulierung mit Hilfe der Grenzraten der Substitution ist wie im Fall $\sigma \neq 1$ möglich: Es wird vorausgesetzt, dass die Grenzraten der

Substitution von Freizeit für Konsum und Freizeit für (relatives) Vermögen aus Sicht der Individuen fallend in Freizeit sind. Die erste Voraussetzung ist wiederum gleichbedeutend dazu, dass Freizeit und Konsum aus Sicht der Individuen normale Güter sind. Unter diesen Voraussetzungen ist $\Theta_d(l) = \frac{V'(l)}{1+W(l)}$ wachsend und $\frac{X(l)}{V'(l)}$ fallend in Arbeit. Damit ist $\frac{1+W(l)+X(l)}{V'(l)} f'(l)$ wie gewünscht fallend in Arbeit.

Die zweite zusätzliche Bedingung für die Eindeutigkeit des Arbeitsinputs betrifft die Produktionsfunktion: Ebenso wie im Fall $\sigma \neq 1$ ist es hinreichend vorauszusetzen, dass das gesamte Arbeitseinkommen bei festgehaltenem Kapital wachsend in Arbeit ist. Somit ist $-lf'(l)$ fallend in Arbeit.

Damit die Gleichung (4.30) eine Lösung besitzt, müssen noch Randbedingungen überprüft beziehungsweise vorausgesetzt werden. Wegen der Inada-Bedingung $\lim_{l\to 0} f'(l) = \infty$ und der Beschränktheit von $V'(0)$ gilt so wie in der sozial geplanten Wirtschaft $\lim_{l\to 0} \frac{f'(l)}{V'(l)} = \infty$. Da $\frac{W(l)+X(l)}{V'(l)} f'(l)$ positiv und $-lf'(l)$ fallend in Arbeit ist, ist der zweite Summand für $l \to 0$ nach unten beschränkt. Somit gilt für die linke Seite, dass sie für $l \to 0$ unbeschränkt wird.

Für die Existenz einer (eindeutigen) Lösung genügt es nun noch vorauszusetzen, dass der Grenzwert der linken Seite für $l \to 1$ kleiner als ρ ist. In der Analyse der sozial geplanten Wirtschaft wurde bereits vorausgesetzt, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum für $l \to 1$ unbeschränkt wird ($\lim_{l\to 1} \Theta'_p(l) = \infty$). Es ist nun hinreichend weiters vorauszusetzen, dass $\lim_{l\to 1} \frac{W(l)+X(l)}{V'(l)} \leq 1$ gilt. Im Falle einer additiv separablen Nutzenfunktion ist dies wegen der Konstanz von $W(l)$ und $X(l)$ sowie der Unbeschränktheit von $V'(l)$ erfüllt.

Mit Hilfe der obigen Voraussetzung erhält man unter Verwendung der Beschränktheit von $f'(l)$ für $l \to 1$:

$$\begin{aligned} & \lim_{l\to 1} \left\{ \frac{f'(l)}{V'(l)} + \left[\frac{W(l)+X(l)}{V'(l)} - l \right] f'(l) \right\} \\ \leq \; & \lim_{l\to 1} \{0 + [1-1] f'(l)\} = 0 < \rho \end{aligned}$$

Die Existenz einer eindeutigen Lösung von Gleichung (4.30) ist somit sichergestellt.

Auch diese Bedingung kann alternativ mit Hilfe der Grenzraten der Substitution formuliert werden: Hinreichend ist wieder die Unbeschränktheit der Grenzraten der Substitution von Freizeit für Konsum und Freizeit für Vermögen bei kleiner werdender Freizeit. Dann gilt $\lim_{l\to 1} \frac{1+W(l)}{V'(l)} = 0$ und $\lim_{l\to 1} \frac{X(l)}{V'(l)} = 0$. Die linke Seite von (4.30) wird für $l \to 1$ damit negativ und ist also in jedem Fall kleiner als ρ. Die Charakterisierung des Arbeitsinputs im Fall $\sigma = 1$ wird im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 8 *In der dezentralen Wirtschaft ergibt sich bei einer im symmetrischen Gleichgewicht additiv separablen Nutzenfunktion ($\sigma = 1$) der Steady-State-Arbeitsinput l^d aus der Gleichung:*

$$\left[\frac{1 + W(l^d) + X(l^d)}{V'(l^d)} - l^d \right] f'(l^d) = \rho \tag{4.32}$$

Die negativen Status-Externalitäten in der Nutzenfuktion haben einen positiven Effekt, während die positive Produktionsexternalität einen negativen Effekt auf *den Arbeitsinput hat. Es gilt $l^d > l^p$ genau dann, wenn $\frac{W(l^p)+X(l^p)}{V'(l^p)} > l^p$ erfüllt ist.*

Für die Existenz einer eindeutigen inneren Lösung sind folgende Bedingungen hinreichend:

- *Freizeit und Konsum sind aus Sicht der Individuen normale Güter.*
- *Die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Vermögen ist fallend in Freizeit.*
- *Die Grenzraten der Substitution von Freizeit für Konsum und Freizeit für Vermögen werden bei schwindender Freizeit unbeschränkt.*
- *Die Elastizität der Grenzproduktivität der Arbeit bezüglich Arbeit ist betragsmäßig kleiner als 1.*

Kehrt man nun zur allgemeinen Bestimmungsgleichung (4.20) zurück, kann zusammenfassend Folgendes festgestellt werden: Die Existenz einer eindeutigen Lösung wurde dadurch sichergestellt, dass die linke Seite der folgenden Umformung von Gleichung (4.20) streng monoton fallend, für $l \to 0$ unbeschränkt und für $l \to 1$ kleiner als ρ ist:

$$\sigma \frac{f'(l)}{\Theta_d(l)} + (1-\sigma)\left[f(l) - \delta\right] + \left[MRS_d^{a/A,1-l}(l) - l\right] f'(l) = \rho \tag{4.33}$$

Es ergeben sich daraus die folgenden Unterschiede zur Bestimmungsgleichung in der sozial geplanten Wirtschaft ($\sigma \frac{f'(l)}{\Theta_p(l)} + (1-\sigma)\left[f(l) - \delta\right] = \rho$): Die positive Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion führt ceteris paribus wegen $-lf'(l) < 0$ zu einer Verringerung der linken Seite der Gleichung, was einen negativen Effekt auf den Arbeitsinput hat. Eine allfällige Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion erhöht die linke Seite wegen $MRS_d^{a/A,1-l}(l)\, f'(l) > 0$, wodurch sich ein positiver Effekt auf den Arbeitsinput ergibt. Gibt es eine Konsumexternalität in der Nutzenfunktion, gilt $\Theta_d(l) < \Theta_p(l)$. Dadurch wird die linke Seite der letzten Gleichung ceteris paribus erhöht, wodurch sich ebenfalls ein positiver Effekt auf den Arbeitsinput ergibt.

Für den Gesamteffekt der drei Externalitäten auf den Arbeitsinput im Steady State gilt: Sein Vorzeichen entspricht dem Vorzeichen der Differenz der beiden Bestimmungsgleichungen, ausgewertet an der Stelle l^p: Hat die linke Seite der Bestimmungsgleichung (4.33) der dezentralen Wirtschaft an der Stelle l^p beispielsweise einen größeren Wert als ρ, gilt wegen der fallenden Monotonie der linken Seite $l^d > l^p$. Das Vorzeichen des Gesamteffekts auf den Arbeitsinput im Steady State erhält man somit durch:

$$\begin{aligned} sgn\left(l^d - l^p\right) &= sgn\left[\frac{\sigma}{\Theta_d(l^p)} - \frac{\sigma}{\Theta_p(l^p)} + MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) - l^p\right] \\ &= sgn\left[\sigma \frac{cU_1 + U_4 - cU_1}{-U_2} + MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) - l^p\right] \\ &= sgn\left[\sigma \frac{U_4}{-U_2} + MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) - l^p\right] \end{aligned} \tag{4.34}$$

Analog zur Definition der Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für Freizeit bietet sich die Definition der Grenzrate der Substitution von relativem Konsum für Freizeit an: $MRS_d^{c/C,1-l}(l) := \frac{U_4(c,l,1,1)}{-U_2(c,l,1,1)} \geq 0$. Sie gibt an, auf wie viel Freizeit die Individuen ohne Nutzenverlust verzichten können, wenn sich (nur) ihr relativer Konsum um eine marginale Einheit erhöht[11]. Bei einer Konsumexternalität in der Nutzenfunktion ist sie positiv. Mit dieser Definition erhält man das Vorzeichen der Abweichung des Steady-State-Arbeitsinputs vom sozial optimalen Wert:

$$sgn\left(l^d - l^p\right) = sgn\left[\sigma MRS_d^{c/C,1-l}\left(l^p\right) + MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) - l^p\right] \tag{4.35}$$

4.3 Konsum-Kapital-Quote

Es wurden Bedingungen aufgestellt, die die Existenz eines eindeutigen Steady State mit konstantem Arbeitsinput l^d sicherstellen. Durch Einsetzen von l^d in die Gleichung (4.15) erhält man die Konsum-Kapital-Quote im Steady State der dezentralen Wirtschaft:

$$\left(\frac{c}{k}\right)^d = \frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)} \tag{4.36}$$

Für die Existenz eines eindeutigen Arbeitsinputs wurde vorausgesetzt, dass Konsum und Freizeit aus Sicht der Individuen normale Güter sind. Dies impliziert, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum im symmetrischen Gleichgewicht der dezentralen Wirtschaft wachsend in Arbeit ist. Daher gilt $\Theta_d'(l) > 0$. Wegen $f''(l) < 0$ besteht damit ein negativer Zusammenhang zwischen den Steady-State-Werten von Arbeitsinput und Konsum-Kapital-Quote.

Es werden nun die Auswirkungen der Externalitäten auf die Konsum-Kapital-Quote im Steady State der dezentralen Wirtschaft bestimmt. Sie unterscheidet sich vom sozial optimalen Wert ($\left(\frac{c}{k}\right)^p = \frac{f'(l^p)}{\Theta_p(l^p)}$) einerseits durch einen möglicherweise unterschiedlichen Arbeitsinput $l^d \neq l^p$ und andererseits, sofern relativer Konsum eine Rolle für die Individuen spielt, durch einen Unterschied in der Funktion $\Theta_d(l) < \Theta_p(l)$.

In Abwesenheit einer Konsumexternalität in die Nutzenfunktion stimmt die dezentrale Konsum-Kapital-Quote, bei gegebenem Arbeitsinput, mit der sozial optimalen überein. Die Abweichung des Arbeitsinputs l^d vom sozial optimalen Wert l^p bestimmt dann ihre Abweichung vom sozialen Optimum, wobei ein höherer Arbeitsinput einen negativen Effekt auf die Konsum-Kapital-Quote hat.

Die negative Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion hat einen negativen Effekt auf das Arbeitsangebot und damit einen positiven Effekt auf die Konsum-Kapital-Quote. Treten keine Externalitäten in der Nutzenfunktion auf, gilt daher $\left(\frac{c}{k}\right)^d > \left(\frac{c}{k}\right)^p$. Die Einführung einer Vermögensexternalität in die Nutzenfunktion hat einen positiven Effekt auf das Arbeitsangebot und dementsprechend einen negativen Effekt auf die Konsum-Kapital-Quote.

In Abwesenheit einer Konsumexternalität wird der Gesamteffekt von Vermögensexternalität und Kapitalexternalität durch ihren Gesamteffekt auf den Arbeitsinput bestimmt. Dessen Vorzeichen wird gemäß Gleichung (4.35) von der Größenordnung der Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für Freizeit $MRS_d^{a/A,1-l}(l^p)$ bestimmt. Gilt $MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) > l^p$ überwiegt der Effekt der Vermögensexternalität und es gilt $l^d > l^p$, woraus $\left(\frac{c}{k}\right)^d < \left(\frac{c}{k}\right)^p$

[11] Der Statuseffekt wird somit vom direkten Nutzengewinn durch eine absolute Erhöhung des Konsums isoliert.

folgt. Im Fall $MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) < l^p$ kann die Vermögensexternalität den Einfluss der Produktionsexternalität auf den Arbeitsinput nicht zur Gänze kompensieren und es gilt $\left(\frac{c}{k}\right)^d > \left(\frac{c}{k}\right)^p$. Im Grenzfall $MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) = l^p$ stimmt der Arbeitsinput l^d mit dem sozial optimalen Wert überein, wodurch auch die Konsum-Kapital-Quote in der dezentralen Wirtschaft mit der sozial optimalen übereinstimmt.

Die Einführung einer Konsumexternalität in die Nutzenfunktion führt neben den positiven Auswirkungen auf l^d auch zu einer direkten Verzerrung der Konsum-Kapital-Quote: Bei gegebenem Arbeitsinput führt sie zu einer höheren Konsum-Kapital-Quote in der dezentralen Wirtschaft ($\frac{f'(l)}{\Theta_d(l)} > \frac{f'(l)}{\Theta_p(l)}$). Somit ergibt sich für $\left(\frac{c}{k}\right)^d$ in Gleichung (4.36) keine eindeutige Auswirkung einer Konsumexternalität, da dem direkten positiven Effekt ein indirekter negativer Effekt durch die Erhöhung des Arbeitsinputs gegenübersteht.

Der Gesamteffekt der drei Externalitäten auf die Konsum-Kapital-Quote kann aus Gleichung (4.36) bei Vorhandensein einer Konsumexternalität nur dann eindeutig bestimmt werden, wenn der indirekte Effekt und der direkte Effekt qualitativ übereinstimmen. Da der direkte Effekt ceteris paribus zu einer Erhöhung von $\left(\frac{c}{k}\right)^d$ führt, kann daher nur dann etwas ausgesagt werden, wenn $l^d \leq l^p$ gilt. In diesem Fall gilt dementsprechend $\left(\frac{c}{k}\right)^d > \left(\frac{c}{k}\right)^p$. Die Bedingung $l^d \leq l^p$ bedeutet, dass der Einfluss der Externalitäten in der Nutzenfunktion auf den Arbeitsinput nicht größer als der Einfluss der Produktionsexternalität sein darf. Gemäß der Gleichung (4.35) bedeutet dies $\sigma MRS_d^{c/C,1-l}(l^p) + MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) \leq l^p$.

Eine alternative Darstellung der Konsum-Kapital-Quote erhält man wegen $\left(\frac{c}{k}\right)^d = \frac{f'(l^d)}{\Theta_d(l^d)}$ aus der Gleichung (4.33):

$$\left(\frac{c}{k}\right)^d = \frac{1}{\sigma}\left[(\sigma-1)\left[f\left(l^d\right)-\delta\right] + \left[l^d - MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right)\right] f'\left(l^d\right) + \rho\right] \tag{4.37}$$

Sie entspricht der folgenden Gleichung in der sozial geplanten Wirtschaft:

$$\left(\frac{c}{k}\right)^p = \frac{1}{\sigma}\left[(\sigma-1)\left[f\left(l^p\right)-\delta\right] + \rho\right] \tag{4.38}$$

Die Unterschiede zwischen den beiden Wirtschaften ergeben sich in dieser Darstellung, abgesehen von abweichenden Arbeitsinputs, durch den positiven Einfluss der Produktionsexternalität ($\frac{1}{\sigma} l^d f'\left(l^d\right) > 0$) und den negativen Einfluss der Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion ($-\frac{1}{\sigma} MRS_d^{a/A,1-l} f'\left(l^d\right) < 0$). Diese Darstellung erlaubt die Bestimmung des Einflusses der Konsumexternalität auf die Konsum-Kapital-Quote im Fall $\sigma \geq 1$ und in Abwesenheit einer Vermögensexternalität: In diesem Fall ist $(\sigma-1)\left[f(l)-\delta\right] + l f'(l)$ wachsend in Arbeit. Daher führt die Einführung einer Konsumexternalität durch den positiven Einfluss auf den Arbeitsinput auch zu einem positiven Effekt auf die Konsum-Kapital-Quote. In diesem Fall ist auch der Gesamteffekt von Produktionsexternalität und Konsumexternalität wegen der folgenden Überlegungen eindeutig positiv ($\left(\frac{c}{k}\right)^d > \left(\frac{c}{k}\right)^p$): Abstrahiert man vorerst von den Externalitäten in der Nutzenfunktion, ergibt sich wegen der Produktionsexternalität in der dezentralen Wirtschaft eine über dem sozial optimalen Wert liegende Konsum-Kapital-Quote. Eine anschließende Einführung der Konsumexternalität führt zu einem Anstieg des Arbeitsinputs und damit in Gleichung (4.37) zu einer noch höheren Konsum-Kapital-Quote. Es kann daher in diesem Fall, unabhängig vom Gesamteffekt auf den Arbeitsinput, festgestellt werden, dass $\left(\frac{c}{k}\right)^d > \left(\frac{c}{k}\right)^p$ gilt. Die positiven Auswirkungen auf die Konsum-Kapital-Quote können ökonomisch dadurch begründet werden, dass die positive Kapitalexternalität tendenziell zu einem in der dezentralen Wirtschaft zu niedrigen Kapitalstock und die negative Konsumexternalität zu einem zu hohen Konsum führt. Ob in diesem Fall der Arbeitseinsatz höher oder niedriger als der sozial optimale ist, wird durch die Größe der beiden Externalitäten bestimmt. Gemäß Gleichung (4.35) gilt $l^d < l^p$ genau dann, wenn $\sigma MRS_d^{c/C,1-l}(l^p) < l^p$ gilt, was bei einer geringen Konsumexternalität der Fall ist.

Über die Einzeleffekte, die die drei Externalitäten ceteris paribus auf die Konsum-Kapital-Quote haben, kann damit zusammenfassend folgendes ausgesagt werden: Die Produktionsexternalität hat einen positiven Effekt, die Vermögensexternalität einen negativen Effekt und die Konsumexternalität hat für $\sigma \geq 1$ in Abwesenheit einer Vermögensexternalität einen positiven Effekt. Der Gesamteffekt der drei Externalitäten ist in den im folgenden Satz zusammengefassten Fällen eindeutig bestimmt.

Satz 9 *Aus dem Arbeitsinput l^d erhält man die Konsum-Kapital-Quote im Steady State der dezentralen Wirtschaft:*

$$\left(\frac{c}{k}\right)^d = \frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)} \tag{4.39}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[(\sigma-1)\left[f\left(l^d\right)-\delta\right]+\rho\right]+\ldots$$

$$+\frac{1}{\sigma}\left[l^d - MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right)\right]f'\left(l^d\right) \tag{4.40}$$

Diese ist höher als der sozial optimale Wert $\left(\frac{c}{k}\right)^p$, wenn der Einfluss der beiden Externalitäten in der Nutzenfunktion gering ist ($\sigma MRS_d^{c/C,1-l}(l^p) + MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) < l^p$), wobei in der Ungleichung auch Gleichheit gelten darf, sofern eine Konsumexternalität ($MRS_d^{c/C,1-l}(l^p) > 0$) existiert.

Spielt relatives Vermögen keine Rolle und gilt $\sigma \geq 1$, ist sie unabhängig von der Größe der Konsumexternalität größer als der sozial optimale Wert.

Gibt es keine Konsumexternalität in der Nutzenfunktion, ist sie genau dann geringer, wenn der Einfluss der Vermögensexternalität groß genug ist ($MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) > l^p$). Im Grenzfall $MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) = l^p$ stimmt $\left(\frac{c}{k}\right)^d$ mit dem sozial optimalen Wert überein.

In den anderen Fällen ist eine eindeutige Aussage nicht möglich. Durch gegenläufige Effekte besteht auch die Möglichkeit, dass die Konsum-Kapital-Quote der dezentralen Wirtschaft mit der sozial optimalen übereinstimmt, ohne dass der dezentrale Arbeitsinput dem sozial optimalen entspricht. In diesem Fall würde zwar der gewählte Anfangskonsum $c(0)$ in beiden Wirtschaften übereinstimmen, nicht aber die Investitionen und somit die Wachstumsrate[12].

[12] Für dieses Argument wird bereits benützt, dass es auch in der dezentralen Wirtschaft keine Übergangsdynamik gibt.

4.4 Wachstumsrate

Die Wachstumsrate im Steady State kann man aus der Wachstumsrate des Kapitals erhalten:

$$g^d = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^d = f\left(l^d\right) - \delta - \left(\frac{c}{k}\right)^d \tag{4.41}$$

Die Ressourcenbeschränkung in der dezentralen Wirtschaft unterscheidet sich nicht von jener in der sozial geplanten Wirtschaft. Daher ergeben sich Unterschiede in der Wachstumsrate gemäß dieser Gleichung nur durch die indirekten Effekte einer Veränderung des Arbeitsinputs und der Konsum-Kapital-Quote. Die Wachtumsrate hängt dabei positiv von l^d und negativ von $\left(\frac{c}{k}\right)^d$ ab. Es werden nun die Auswirkungen der Externalitäten auf die Wachstumsrate bestimmt. Es kann keine eindeutige Aussage getroffen werden, wenn es entweder zu einer gleichzeitigen Erhöhung oder Verringerung von l^d und $\left(\frac{c}{k}\right)^d$ kommt.

Die Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion wirkt sich negativ auf den Arbeitseinsatz aus und hat einen positiven Effekt auf die Konsum-Kapital-Quote. Damit ergibt sich ein eindeutiger negativer Effekt auf die Wachstumsrate.

Eine Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion hat einen positiven Effekt auf den Arbeitseinsatz und einen negativen auf die Konsum-Kapital-Quote. Daher ergibt sich ein eindeutiger positiver Effekt auf die Wachstumsrate.

Die Konsumexternalität hat ebenfalls einen positiven Effekt auf den Arbeitseinsatz, aber der Effekt auf die Konsum-Kapital-Quote konnte in keinem Fall als negativ identifiziert werden, weshalb aus dieser Darstellung der Wachstumsrate keine Aussage getroffen werden kann. Deshalb wird nun die alternative Darstellung der Wachstumsrate im Steady State mit Hilfe der Wachstumsrate des Konsums aus Gleichung (4.19) betrachtet:

$$g^d = \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^d = \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^d\right) - \delta + \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) - l^d\right] f'\left(l^d\right) - \rho\right] \tag{4.42}$$

Sie entspricht der Darstellung der sozial geplanten Wachstumsrate in Gleichung (3.60):

$$g^p = \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^p\right) - \delta - \rho\right] \tag{4.43}$$

In dieser Darstellung unterscheidet sich die Wachstumsrate in der dezentralen Wirtschaft von der sozial optimalen abgesehen von einer möglichen Abweichung des Arbeitsinputs $l^d \neq l^p$ durch den Summanden $\frac{1}{\sigma}\left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) - l^d\right] f'\left(l^d\right)$. Im Allgemeinen können jedoch die Auswirkungen einer Veränderung des Arbeitsinputs nicht bestimmt werden: Die Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für Freizeit ist laut Voraussetzung fallend in l. Damit ist $MRS_d^{a/A,1-l}(l) f'(l)$ fallend in l. Weiters wurde vorausgesetzt, dass $lf'(l)$ wachsend in l ist. Somit ist der zusätzliche Term fallend in l. Da jedoch $f(l)$ wachsend in l ist, kann keine allgemeine Aussage über die Abhängigkeit der Wachstumsrate des Konsums vom Arbeitsinput getroffen werden. In Abwesenheit einer Vermögensexternalität sind die Auswirkungen der Konsumexternalität auf die Wachstumsrate eindeutig positiv, da $f(l) - lf'(l)$ monoton wachsend in l ist:

$$\frac{d\left[f(l) - lf'(l)\right]}{dl} = -lf''(l) > 0 \tag{4.44}$$

Wenn es keine Vermögensexternalität gibt, führt daher eine Konsumexternalität wegen des positiven Effekts auf den Arbeitsinput auch zu einer höheren Wachstumsrate.

Die Darstellung der Wachstumsrate in Gleichung (4.42) eignet sich außerdem für die Bestimmung des Gesamteffekts der drei Externalitäten: Der zusätzliche Summand in der Gleichung ist positiv, wenn es eine starke Vermögensexternalität gibt, die die Kapitalexternalität kompensiert ($MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) > l^d$). In diesem Fall gilt gemäß Gleichung (4.35) außerdem, dass $l^d > l^p$ gilt. Daher ist in der dezentralen Wirtschaft auch $f\left(l^d\right) > f\left(l^p\right)$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} g^d &= \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^d\right) - \delta + \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) - l^d\right] f'\left(l^d\right) - \rho\right] \\ &> \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^p\right) - \delta - \rho\right] = g^p \end{aligned}$$

Die Wachstumsrate im Steady State ist in diesem Fall also höher als die sozial optimale. Existiert eine Konsumexternalität, folgt $l^d > l^p$ bereits aus $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) = l^d$, weshalb sich in diesem Fall ebenfalls $g^d > g^p$ gilt. Gibt es jedoch keine Konsumexternalität und gilt $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) = l^d$, folgt $l^d = l^p$, $\left(\frac{c}{k}\right)^d = \left(\frac{c}{k}\right)^p$ und $g^d = g^p$. Das makroökonomische Verhalten der dezentralen Wirtschaft entspricht dann dem sozial optimalen.

Bei einer geringeren Vermögensexternalität ($MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) < l^d$) ist der direkte Effekt in Gleichung (4.42) negativ. Es kommt in diesem Fall eindeutig zu einem niedrigeren Wachstum, wenn $l^d \leq l^p$ gilt. Gemäß Gleichung (4.35) ist das der Fall, wenn die Externalitäten in der Nutzenfunktion nicht zu groß sind ($\sigma MRS_d^{c/C,1-l}\left(l^d\right) + MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) \leq l^d$).

Es bleibt noch der Fall übrig, dass die Vermögensexternalität gering ist ($MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) < l^d$), aber die Konsumexternalität dazu führt, dass der Arbeitsinput trotzdem höher als der sozial optimale Wert ist. In der Gleichung (4.42) erhält man dann einen negativen direkten Effekt und einen positiven indirekten Effekt, weshalb keine Aussage getroffen werden kann. Kehrt man zur Darstellung der Wachstumsrate durch die Ressourcenbeschränkung in Gleichung (4.41) zurück, führt $l^d > l^p$ zu einem positiven Effekt auf die Wachstumsrate. Damit eine Aussage getroffen werden kann, muss $\left(\frac{c}{k}\right)^d \leq \left(\frac{c}{k}\right)^p$ gelten. Es konnte jedoch $\left(\frac{c}{k}\right)^d \leq \left(\frac{c}{k}\right)^p$ nur für den Fall, dass keine Konsumexternalität auftritt, festgestellt werden. Daher ist auch über die Ressourcenbeschränkung keine Aussage über den Gesamteffekt in diesem Fall möglich.

Der folgende Satz fasst die Ergebnisse für die Wachstumsraten in der dezentralen Wirtschaft zusammen:

Satz 10 *Die Wachstumsrate von Konsum, Kapital und Output im Steady State der dezentralen Wirtschaft erhält man bei gegebenem Arbeitsinput aus der Gleichung*

$$g^d = \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^d\right) - \delta + \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) - l^d\right] f'\left(l^d\right) - \rho\right] \tag{4.45}$$

Sie ist größer als die sozial optimale Wachstumsrate g^p, wenn die Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion stark ist ($MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) > l^d$). Im Grenzfall

$MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) = l^d$ gilt $g^d > g^p$ bei Vorhandensein von relativem Konsum in der Nutzenfunktion. Gilt $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) = l^d$ und gibt es keinen Einfluss von relativem Konsum, stimmt der Steady State der dezentralen Wirtschaft mit dem sozial optimalen überein ($l^d = l^p$, $\left(\frac{c}{k}\right)^d = \left(\frac{c}{k}\right)^p$, $g^d = g^p$).

Ist die Summe der beiden Externalitäten in der Nutzenfunktion gering ($\sigma MRS_d^{c/C,1-l}\left(l^d\right) + MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) < l^d$), gilt $g^d < g^p$. Gibt es eine Konsumexternalität in der Nutzenfunktion, kann in der letzten Bedingung auch Gleichheit gelten.

4.5 Übergangsdynamik

In der dezentralen Wirtschaft ist so wie in der sozial geplanten Wirtschaft keine Übergangsdynamik notwendig, da der Realzinssatz im Gleichgewicht unabhängig vom Kapitalstock ist. Aus Sicht der Unternehmen führt eine Änderung der Größe des Inputfaktors Kapital wegen der fallenden Grenzerträge zu einer Veränderung seiner Grenzproduktivität. Durch die postive Kapitalexternalität gilt jedoch im Gleichgewicht für den Realzinssatz $r = f(l) - lf'(l) - \delta$. Er wird somit nur durch den Arbeitseinsatz, der von den Individuen frei wählbar ist, festgelegt. Durch Wahl des langfristigen Arbeitsinputs zum Zeitpunkt 0 kann der Zinssatz im Steady State sofort realisiert werden. Durch Gleichung (4.39) ergibt sich aus dem Arbeitsinput l^d die Konsum-Kapital-Quote $\left(\frac{c}{k}\right)^d = \frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)}$. Da das Anfangskapital k_0 gegeben ist, lässt sich daraus der Anfangswert für den Konsum $c(0) = k_0 \frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)}$ bestimmen. Seine Wachstumsrate ist dann durch die Wachstumsrate des Steady State $g^d = f\left(l^d\right) - \delta - \left(\frac{c}{k}\right)^d$ festgelegt. Es muss nun noch überprüft werden, dass die Wahl dieses Arbeitsinputs und Konsums aus Sicht der Individuen tatsächlich optimal ist.

4.6 Hinreichende Bedingungen

Für die Individuen sind die Pfade von Reallohn, Realzinssatz, durchschnittlichem Konsum und durchschnittlichem Vermögen exogen gegeben und nicht beeinflussbar. Es wurde ein makroökonomisches Gleichgewicht hergeleitet, in dem folgende Beziehungen gelten: Aus der Gleichung (4.20) erhält man den eindeutigen Wert des Arbeitsinputs, der von Anfang an gewählt wird:

$$\begin{aligned} & f\left(l^d\right) - \delta - \frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)} \\ = \quad & \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^d\right) - \delta + \left(MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) - l^d\right) f'\left(l^d\right) - \rho\right] \end{aligned} \tag{4.46}$$

Aus Gleichung (4.39) erhält man durch Einsetzen von l^d und des exogen gegebenen Anfangskapitalstock den Anfangswert des Konsums:

$$c(0) = k_0 \frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)} \tag{4.47}$$

Konsum und Kapital wachsen dann mit der gleichen Wachstumsrate, die man entweder aus Gleichung (4.41) oder (4.42) erhält:

$$\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^d = f\left(l^d\right) - \delta - \left(\frac{c}{k}\right)^d \quad (4.48)$$

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^d = \frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^d\right) - \delta + \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) - l^d\right] f'\left(l^d\right) - \rho\right] \quad (4.49)$$

Den Pfad des Reallohns erhält man aus Gleichung (2.25):

$$w\left(t\right) = k\left(t\right) f'\left(l^d\right) \quad (4.50)$$

Er wächst mit derselben Wachstumsrate wie der Kapitalstock. Aus der Gleicung (2.26) erhält man den konstanten Realzinssatz:

$$r^d = f\left(l^d\right) - lf'\left(l^d\right) - \delta \quad (4.51)$$

Es wurde angenommen, dass es für die Individuen unter Kenntnis dieser Pfade optimal ist, den Arbeitseinsatz $l_i\left(t\right) = l^d$ und den Konsum $c_i\left(t\right) = c\left(t\right)$ zu wählen. Verhalten sich alle Individuen dementsprechend, erhält man eben jenes Gleichgewicht, das durch die obigen Gleichungen bestimmt wird. Es wird nun überprüft, unter welchen Voraussetzungen diese Wahl für die Individuen optimal ist.

Zunächst wird die Erfüllung der notwendigen Bedingungen (2.17), (2.18) und (2.20) sowie der Transversalitätsbedingung (2.24) überprüft:

$$\frac{\partial H}{\partial c_i} = U_1\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + U_4\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{C} - \lambda_i = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial H}{\partial l_i} = U_2\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + \lambda_i w = 0 \quad (4.53)$$

$$\frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = -\left[r + \frac{U_3\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{A}}{U_1\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + U_4\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{C}} - \rho\right] \quad (4.54)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_i\left(t\right) a_i\left(t\right) = 0 \quad (4.55)$$

Man kann nun die Pfade von Reallohn und Realzins sowie die mögliche Wahl des Individuums $l_i\left(t\right) = l^d$ und $c_i\left(t\right) = c\left(t\right)$, die auch $a_i\left(t\right) = a\left(t\right) = k\left(t\right)$ und gemäß der ersten Gleichung $\lambda_i\left(t\right) = \lambda\left(t\right)$ impliziert, in diese Bedingungen einsetzen. Damit erhält man jene Bedingungen, die für das makroökonomische Gleichgewicht hergeleitet wurden (Gleichungen (2.28), (2.29) und (2.30)) und die Transversalitätsbedingung:

$$U_1\left(c, l^d, 1, 1\right) + U_4\left(c, l^d, 1, 1\right)\frac{1}{c} = \lambda \quad (4.56)$$

$$-U_2\left(c, l^d, 1, 1\right) = \lambda k f'\left(l^d\right) \quad (4.57)$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\left[f\left(l^d\right) - \delta - l^d f'\left(l^d\right) + MRS_d^{a,c}\left(l^d\right) - \rho\right] \quad (4.58)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda\left(t\right) k\left(t\right) = 0 \quad (4.59)$$

Aus der ersten Bedingung erhält man den Pfad des Kozustandes $\lambda(t) = U_1\left(c(t), l^d, 1, 1\right) + U_4\left(c(t), l^d, 1, 1\right)\frac{1}{c(t)}$. Die Wahl der Konsum-Kapital-Quote $\left(\frac{c}{k}\right)^d = \frac{f'(l^d)}{\Theta_d(l^d)}$ stellt sicher, dass die zweite notwendige Bedingung erfüllt wird:

$$\begin{aligned}
\lambda(t)\, k(t)\, f'\left(l^d\right) &= \left[U_1\left(c(t), l^d, 1, 1\right) + U_4\left(c(t), l^d, 1, 1\right)\frac{1}{c(t)}\right] k(t)\, f'\left(l^d\right) \\
&= \frac{-U_2\left(c(t), l^d, 1, 1\right)}{c(t)\,\Theta_d\left(l^d\right)} k(t)\, f'\left(l^d\right) \\
&= -U_2\left(c(t), l^d, 1, 1\right)\left[\left(\frac{c}{k}\right)^d\right]^{-1} \frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta^d\left(l^d\right)} \\
&= -U_2\left(c(t), l^d, 1, 1\right)
\end{aligned}$$

Da der Arbeitseinsatz konstant gewählt wird, erhält man aus der ersten notwendigen Bedingung den bereits mehrfach verwendeten Zusammenhang zwischen den Wachstumsraten von Kozustand und Konsum und man kann die Wachstumsrate des Konsums einsetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= -\sigma\frac{\dot{c}}{c} \\
&= -\sigma\frac{1}{\sigma}\left[f\left(l^d\right) - \delta - l^d f'\left(l^d\right) + MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) f'\left(l^d\right) - \rho\right] \\
&= -\left[f\left(l^d\right) - \delta - l^d f'\left(l^d\right) + MRS_d^{a,c}\left(l^d\right) MRS_d^{c,1-l}\left(c, l^d\right) k f'\left(l^d\right) - \rho\right] \\
&= -\left[f\left(l^d\right) - \delta - l^d f'\left(l^d\right) + MRS_d^{a,c}\left(l^d\right) - \rho\right]
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde dabei die Gleichung $\left(MRS_d^{c,1-l}\left(c, l^d\right)\right)^{-1} = kf'\left(l^d\right)$, die aus den ersten beiden Bedingungen folgt, verwendet. Damit ist auch die Differentialgleichung des Kozustandes erfüllt.

Schließlich kann die Transversalitätsbedingung überprüft werden: Wie in der sozial geplanten Wirtschaft kann mit Hilfe der Wachstumsrate von $\lambda(t)\, k(t)$, die man aus der Summe der Wachstumsraten von Kozustand und Kapital erhält, argumentiert werden. Für die Wachstumsrate des Kozustandes gilt $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\sigma g^d$. Dementsprechend erhält man die Wachstumsrate von $\lambda(t)\, k(t)$ als $(1-\sigma)\, g^d$. Die Transversalitätsbedingung ist erfüllt, wenn die Wachstumsrate von $e^{-\rho t}\lambda(t)\, k(t)$ asymptotisch negativ ist. Diese Wachstumsrate lautet:

$$\begin{aligned}
& -\rho + (1-\sigma)\, g^d \\
= & -\rho + \frac{(1-\sigma)}{\sigma}\left[f\left(l^d\right) - \delta - l^d f'\left(l^d\right) + MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) f'\left(l^d\right) - \rho\right] \\
= & \frac{(1-\sigma)\left[f\left(l^d\right) - \delta - l^d f'\left(l^d\right) + MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) f'\left(l^d\right)\right] - \rho}{\sigma}
\end{aligned}$$

Für $\sigma = 1$ ist diese negativ und die Transversalitätsbedingung erfüllt. Ist der Realzinssatz positiv ($f\left(l^d\right) - \delta - l^d f'\left(l^d\right) > 0$), ist die Wachstumsrate von $e^{-\rho t}\lambda(t)\, k(t)$ für $\sigma > 1$ ebenfalls negativ und die Transversalitätsbedingung erfüllt. Gibt es eine starke Vermögensexternalität ($MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) \geq l^d$) ist die

Transversalitätsbedingung ebenfalls erfüllt: In diesem Fall ist die Wachstumsrate von $e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)$ kleiner als:

$$\frac{(1-\sigma)\left[f\left(l^d\right)-\delta\right]+\left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right)-l^d\right]f'\left(l^d\right)-\rho}{\sigma}$$

Dieser Ausdruck ist gemäß der Bestimmungsgleichung (4.33) für den Arbeitseinsatz negativ, da $\frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)}$ positiv ist. Um auch in anderen Fällen eine Aussage über die Gültigkeit der Transversalitätsbedingung treffen zu können, ist eine Umformung der Wachstumsrate von $e^{-\rho t}\lambda(t)\,k(t)$ mit Hilfe von Gleichung (4.33) möglich:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-\sigma)\left[f\left(l^d\right)-\delta-l^d f'\left(l^d\right)+MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right)f'\left(l^d\right)\right]-\rho}{\sigma}\\
=&\ -\frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)}-\left(MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right)-l^d\right)f'\left(l^d\right)\\
=&\ -\left[\frac{cU_1\left(c,l^d,1,1\right)+U_4\left(c,l^d,1,1\right)+U_3\left(c,l^d,1,1\right)}{-U_2\left(c,l^d,1,1\right)}-l^d\right]f'\left(l^d\right)\\
=&\ -\left[(\sigma-1)\frac{V\left(l^d\right)+W\left(l^d\right)+X\left(l^d\right)}{V'\left(l^d\right)}-l^d\right]f'\left(l^d\right)
\end{aligned}$$

Gilt $(\sigma-1)\frac{V\left(l^d\right)+W\left(l^d\right)+X\left(l^d\right)}{V'\left(l^d\right)} > l^d$, ist die Transversalitätsbedingung daher ebenfalls erfüllt.

Damit die notwendigen Bedingungen auch hinreichend für die Optimalität sind, müssen Konkavitätsannahmen erfüllt sein. Damit die ersten beiden Bedingungen hinreichend für die intratemporale Optimierung sind, muss die Hamilton-Funktion der Individuen strikt konkav gemeinsam in Konsum c_i und Arbeitsangebot l_i sein. Gemäß Gleichung (2.16) lautet sie

$$H\left(c_i,l_i,a_i,\lambda_i\right)=U\left(c_i,l_i,\frac{a_i}{A},\frac{c_i}{C}\right)+\lambda_i\left(ra_i+wl_i-c_i\right) \tag{4.60}$$

Die Konkavität der Hamilton-Funktion in Konsum und Arbeit ist somit gleichbedeutend mit der Konkavität der Momentan-Nutzenfunktion $U\left(c_i,l_i,\frac{a_i}{A},\frac{c_i}{C}\right)$. Diese ist äquivalent zu den folgenden Bedingungen:

$$U_{11}+2\frac{U_{14}}{C}+\frac{U_{44}}{C^2}<0 \tag{4.61}$$

$$U_{22}<0 \tag{4.62}$$

$$\left(U_{11}+2\frac{U_{14}}{C}+\frac{U_{44}}{C^2}\right)U_{22}-\left(U_{12}+\frac{U_{24}}{C}\right)^2>0 \tag{4.63}$$

Die erste Bedingung stellt die strikte Konkavität der Nutzenfunktion in eigenem Konsum sicher, die zweite Bedingung die strikte Konkavität in Arbeit bzw. Freizeit. Die dritte Bedingung ist schließlich notwendig und hinreichend, damit die Nutzenfunktion auch gemeinsam strikt konkav in Konsum und Arbeit ist.

In der sozial geplanten Wirtschaft wurde gezeigt, dass die gesamtwirtschaftliche Hamilton-Funktion nicht konkav in Kapital ist. Für die Individuen ist aber nur das eigene Vermögen (im Zeitverlauf) veränderbar und sie nehmen den Pfad des gesamtwirtschaftlichen Kapitals als gegeben. Da sie die Produktionsexternalität von Kapital nicht internalisieren, kann die Hamilton-Funktion konkav in eigenem Vermögen sein. Wegen der Linearität der Ressourcenbeschränkung in Vermögen, Arbeit und Konsum, ist die Konkavität der Hamilton-Funktion in Vermögen, Arbeit und Konsum gleichbedeutend zur Konkavität der Nutzenfunktion. Die notwendigen Bedingungen sind daher hinreichend, wenn noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{U_{33}}{A^2} < 0 \tag{4.64}$$

$$\det \begin{pmatrix} U_{11} + 2\frac{U_{14}}{C} + \frac{U_{44}}{C^2} & U_{12} + \frac{U_{24}}{C} & \frac{U_{13}}{A} + \frac{U_{34}}{AC} \\ U_{12} + \frac{U_{24}}{C} & U_{22} & \frac{U_{23}}{A} \\ \frac{U_{13}}{A} + \frac{U_{34}}{AC} & \frac{U_{23}}{A} & \frac{U_{33}}{A^2} \end{pmatrix} < 0 \tag{4.65}$$

Die erste Bedingung stellt dabei die strikte Konkavität der Nutzenfuktion in Vermögen sicher und die zweite die strikte gemeinsame Konkavität in Konsum, Arbeit und Vermögen. Im Spezialfall, in dem relatives Vermögen keinen Einfluss auf den Nutzen der Individuen hat ($U_3 = 0$) sind diese beiden Bedingungen nicht notwendig und die Hamilton-Funktion gemeinsam konkav in Konsum, Freizeit und Vermögen, was die Optimalität der Lösung sicherstellt.

Kann die Nutzenfunktion diese zusätzlichen Bedingungen nicht erfüllen, können schwächere hinreichende Bedingungen überprüft werden. Für die Optimalität ist es auch hinreichend, wenn die in den Kontrollvariablen c_i und l_i maximierte Hamilton-Funktion $H^0(a_i, \lambda_i, t)$ für gegebenes λ_i und gegebenen Zeitpunkt t konkav im Vermögen a_i ist. Da die die Hamilton-Funktion maximierenden Werte für Konsum und Arbeit im Allgemeinen nur implizit bestimmt sind, verzichte ich auf die weitere Analyse dieser Bedingung.

Da es sich im Modell um homogene Individuen handelt und dementsprechend nur symmetrische Gleichgewichte betrachtet werden, ist für den Einfluss von Status auf das makroökonomische Verhalten nur der Grenznutzen von relativem Konsum und relativem Vermögen ausgewertet an den symmetrischen Stellen entscheidend. Die Annahme der Konkavität ist daher nur wichtig, um die Optimalität des makroökonomischen Gleichgewichts aus Sicht der Individuen sicherzustellen. Für die Zusammenfassung der hinreichenden Bedingungen wird daher im folgenden Satz die gemeinsame Konkavität der Nutzenfunktion vorausgesetzt.

Satz 11 *Für die Optimalität des Steady State mit konstantem Arbeitsinput aus Sicht der Individuen ist es hinreichend, dass die Nutzenfunktion* $U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)$ *gemeinsam konkav in eigenem Konsum* c_i*, Arbeitseinsatz* l_i *und Vermögen* a_i *ist und die Transversalitätsbedingung*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} \lambda(t)\, k(t) = 0 \tag{4.66}$$

erfüllt ist. Bei einem positiven Realzinssatz ist die Transversalitätsbedingung für $\sigma \geq 1$ *erfüllt. Andernfalls ist es hinreichend, dass* $\frac{1}{\Theta_d(l^d)} + MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^d\right) > l^d$ *gilt.*

5 Optimale Besteuerung

Das Ziel dieses Kapitels ist es, durch Einführung von Steuern bzw. Subventionen in der dezentralen Wirtschaft das sozial optimale Gleichgewicht zu erreichen. Zunächst werden die Ergebnisse in der sozial geplanten Wirtschaft, welche repliziert werden sollen, zusammengefasst.

5.1 Soziales Optimum

Das makroökonomische Verhalten der sozial geplanten Wirtschaft wird durch die Gleichungen (3.8), (3.9) und (3.11) und die Ressourcenbeschränkung bestimmt:

$$U_1(c, l, 1, 1) - \lambda = 0 \tag{5.1}$$

$$U_2(c, l, 1, 1) + \lambda k f'(l) = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -[f(l) - \delta - \rho] \tag{5.3}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = f(l) - \delta - \frac{c}{k} \tag{5.4}$$

Aus den ersten beiden Bedingungen erhält man die Konsum-Kapital-Quote:

$$\left(\frac{c}{k}\right)^p = c\frac{f'(l^p)}{MRS_p^{1-l,c}(l^p)} = \frac{f'(l^p)}{\Theta_p(l^p)} \tag{5.5}$$

Der Arbeitsinput ergibt sich aus der Gleichsetzung der Wachstumsraten von Kapital und Konsum, wobei für die letztere der Zusammenhang $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{-1}{\sigma}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ verwendet wird:

$$\begin{aligned} f(l^p) - \delta - \left(\frac{c}{k}\right)^p &= \frac{1}{\sigma}[f(l^p) - \delta - \rho] \\ \Leftrightarrow \sigma\frac{f'(l^p)}{\Theta_p(l^p)} - (\sigma - 1)[f(l^p) - \delta] &= \rho \end{aligned} \tag{5.6}$$

Die Wachstumsrate lässt sich zum Beispiel durch die Ressourcenbeschränkung darstellen:

$$\begin{aligned} g^p &= f(l^p) - \delta - \left(\frac{c}{k}\right)^p \\ &= f(l^p) - \delta - \frac{f'(l^p)}{\Theta_p(l^p)} \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2 Besteuerung in der dezentralen Wirtschaft

Um die Wachstumspfade der sozial geplanten Wirtschaft in der dezentralen Wirtschaft zu replizieren, werden Steuern auf den Konsum (τ_c), das Arbeitseinkommen (τ_w), das Kapitaleinkommen (τ_r) und das Vermögen (τ_a) der Individuen eingeführt[13]. Die Summe aus den Steuereinnahmen bzw. Subventionsausgaben wird als Pauschaltransfer (Q) an die Individuen zurückgegeben bzw. von ihnen eingehoben, sodass das Staatsbudget zu jedem Zeitpunkt ausgeglichen ist.

[13] Damit Konsum für die Individuen nicht kostenlos ist, wird $\tau_c > -1$ vorausgesetzt. Damit Arbeit und Vermögen aus Sicht der Individuen mit einem positiven Reallohn und Realzinssatz entlohnt werden, soll $\tau_w < 1$ und $\tau_r < 1$ gelten.

Man erhält somit die abgeänderte Differentialgleichung für das Vermögen der Individuen:

$$\dot{a}_i = [r(1-\tau_r) - \tau_a] a_i + w(1-\tau_w) l_i - c_i(1+\tau_c) + Q \tag{5.8}$$

Die current-value Hamilton-Funktion lautet nun:

$$\begin{aligned} H(c_i, l_i, a_i, \lambda_i) = U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + ... \\ +\lambda_i \{[r(1-\tau_r) - \tau_a] a_i + w(1-\tau_w) l_i - c_i(1+\tau_c) + Q\} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Man erhält damit die notwendigen Optimalitätsbedingungen der Individuen:

$$\frac{\partial H}{\partial c_i} = U_1\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + U_4\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{C} - \lambda_i(1+\tau_c) = 0 \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l_i} = U_2\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) + \lambda_i w(1-\tau_w) = 0 \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} &= \rho - \frac{\partial H}{\partial a_i}\frac{1}{\lambda_i} \\ &= -\left[r(1-\tau_r) - \tau_a + U_3\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right)\frac{1}{\lambda_i A} - \rho\right] \\ &= -\left[r(1-\tau_r) - \tau_a + MRS^{a_i,c_i}(1+\tau_c) - \rho\right] \end{aligned} \tag{5.12}$$

In einem symmetrischen Gleichgewicht gilt $a_i = a$, $c_i = c$, $l_i = l$, $w = kf'(l)$ und $r = f(l) - lf'(l) - \delta$. Da es sich um eine geschlossene Volkswirtschaft handelt, wird die Ressourcenbeschränkung der Volkswirtschaft durch die Einführung von Steuern nicht verändert. Bei einem zu jedem Zeitpunkt ausgeglichenen Staatshaushalt, stimmt das Vermögen der Individuen mit dem Realkapital überein ($a = k$). Die Höhe des Pauschaltransfers, der ein ausgeglichenes Staatsbudget sicherstellt, beträgt:

$$\begin{aligned} Q &= (r\tau_r + \tau_a) k + w\tau_w l + c\tau_c \\ &= [(f(l) - lf'(l) - \delta)\tau_r + \tau_a] k + kf'(l)\tau_w l + c\tau_c \\ &= [(f(l) - \delta)\tau_r + \tau_a + (\tau_w - \tau_r) lf'(l)] k + \tau_c c \end{aligned} \tag{5.13}$$

Es genügt durch die Wahl der Steuern sicherzustellen, dass der Arbeitseinsatz und die Konsum-Kapital-Quote der dezentralen Volkswirtschaft mit den sozial optimalen Werten übereinstimmen. Wegen der unveränderten Ressourcenbeschränkung ergibt sich dann auch die gleiche Wachstumsrate. In einem symmetrischen, makroökonomischen Gleichgewicht mit stets ausgegeglichenem Staatsbudget wird die Entwicklung durch das folgende System beschrieben:

$$U_1(c, l, 1, 1) + U_4(c, l, 1, 1)\frac{1}{c} = \lambda(1+\tau_c) \tag{5.14}$$

$$-U_2(c, l, 1, 1) = \lambda kf'(l)(1-\tau_w) \tag{5.15}$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\left[[f(l) - \delta - lf'(l)](1-\tau_r) - \tau_a + MRS_d^{a,c}(1+\tau_c) - \rho\right] \tag{5.16}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = f(l) - \delta - \frac{c}{k},\ k(0) = k_0 \tag{5.17}$$

Die Bedingung (5.16) kann man wegen $MRS_d^{a,c} = MRS_d^{a,1-l} MRS_d^{1-l,c} = MRS_d^{a,1-l} k f'(l) \frac{1-\tau_w}{1+\tau_c} = MRS_d^{a/A,1-l} f'(l) \frac{1-\tau_w}{1+\tau_c}$ wie im vorherigen Kapitel auch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\left[[f(l) - \delta - l f'(l)](1-\tau_r) - \tau_a + MRS_d^{a/A,1-l}(l) f'(l)(1-\tau_w) - \rho \right] \tag{5.18}$$

Aus den ersten beiden Bedingungen erhält man wieder die Konsum-Kapital-Quote:[14]

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{k}\right)^d &= c \frac{f'\left(l^d\right)}{MRS_d^{1-l,c}} \frac{1-\tau_w}{1+\tau_c} \\ &= \frac{f'\left(l^d\right)}{\Theta_d\left(l^d\right)} \frac{1-\tau_w}{1+\tau_c} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Diese muss bei gegebenem Arbeitsinput mit der sozial optimalen in Gleichung (5.5) übereinstimmen, damit bei gleichem Arbeitsinput und (Anfangs-)Kapital in den beiden Wirtschaften auch der gleiche Konsum resultiert. Daher muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{1-\tau_w}{1+\tau_c} = \frac{\Theta_d\left(l^p\right)}{\Theta_p\left(l^p\right)} = \left.\frac{U_1}{U_1 + U_4 \frac{1}{c}}\right|_{l=l^p} \tag{5.20}$$

Falls die Individuen einen positiven Nutzen aus höherem relativen Konsum ziehen, ist der Quotient $\frac{U_1}{U_1+U_4\frac{1}{c}}$ kleiner als 1 und die linke Seite muss daher ebenfalls kleiner als 1 sein. Dies kann durch eine alleinige Besteuerung von Konsum oder Arbeitseinkommen erreicht werden. Ebenso ist eine Kombination der beiden Steuern möglich, wobei mindestens eine der beiden positiv sein muss, damit der Quotient $\frac{1-\tau_w}{1+\tau_c}$ kleiner als 1 ist.

Es wird nun angenommen, dass die Lohnsteuer konstant gewählt wird. Aus der Bedingung (5.20) folgt damit, dass auch die Konsumsteuer konstant sein muss. In der Folge wird gezeigt, dass diese Annahme nicht zu restriktiv ist und es trotzdem möglich ist, in der dezentralen Wirtschaft das soziale Optimum zu erreichen. Bei einer konstanten Konsumsteuer, erhält man aus der zweiten notwendigen Bedingung (5.15) durch Differenzieren nach der Zeit unter Berücksichtigung, dass der Arbeitseinsatz konstant ist:

$$-U_{12}\dot{c} = \dot{\lambda} k f'(l)(1-\tau_w) + \dot{k}\lambda f'(l)(1-\tau_w) \tag{5.21}$$

Dividiert man diese Gleichung durch die Bedingung (5.15) selbst und verwendet man, dass $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k}$ und $\frac{cU_{12}}{U_2} = 1-\sigma$ gilt, erhält man auch in der dezentralen Wirtschaft mit Steuern den bekannten Zusammenhang zwischen den Wachstumsraten von Konsum und Kozustand:

$$\frac{cU_{12}}{U_2}\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{\dot{k}}{k}$$

[14] Mit einem hochgestellten „d“ sind nun Steady-State-Werte in der dezentralen Wirtschaft mit Besteuerung gekennzeichnet.

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \tag{5.22}$$

Damit die Wachstumsrate des Konsums mit der sozial optimalen übereinstimmt, ist es daher notwendig, dass die Wachstumsrate des Kozustandes mit jener in der sozial geplanten Wirtschaft übereinstimmt:

$$\begin{aligned} & \left[f\left(l^p\right) - \delta - l^p f'\left(l^p\right)\right]\left(1-\tau_r\right) - \tau_a + MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) f'\left(l^p\right)\left(1-\tau_w\right) - \rho \\ = \; & f\left(l^p\right) - \delta - \rho \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\Leftrightarrow \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right)\left(1-\tau_w\right) - l^p\right] f'\left(l^p\right) = \left[f\left(l^p\right) - l^p f'\left(l^p\right) - \delta\right]\tau_r + \tau_a \tag{5.24}$$

Da die Wachstumsrate von k in der dezentralen Wirtschaft nicht verändert ist, erhält man bei Erfüllung der letzten Bedingung auch den gleichen Arbeitsinput $l^d = l^p$, Wegen der ersten Bedingung (5.20) ist die dem Arbeitsinput l^p entsprechende Konsum-Kapital-Quote $\left(\frac{c}{k}\right)^d$ identisch dem sozial optimalen Wert. In der dezentralen Wirtschaft stimmen damit Arbeitsinput, Konsum und Wachstumsrate überein, wodurch sich derselbe Steady State wie in der sozial geplanten Wirtschaft ergibt.

Um den sozial optimalen Steady State zu erreichen, muss der Kozustand zwar dieselbe Wachstumsrate wie in der sozial geplanten Wirtschaft haben, sein Niveau kann jedoch unterschiedlich sein: In der zweiten Gleichung (5.15) kann man erkennen, dass es bei einer von Null verschiedenen Lohnsteuer um den Faktor $\left(1-\tau_w\right)^{-1}$ abweicht. Eine Interpretation dieser Abhängigkeit des Niveaus des Kozustandes von der Lohnsteuer ergibt sich durch die Betrachtung des Kozustandes als Schattenpreis des Vermögens: Eine Erhöhung der Lohnsteuer führt zu einer Verringerung des relativen Preises von Freizeit. Daher kann der Arbeitseinsatz bei einer zusätzlichen Einheit des Vermögens in größerem Ausmaß eingeschränkt werden als in einer Wirtschaft ohne Lohnsteuer. Daraus ergibt sich ein höherer Nutzengewinn aus einer zusätzliche Einheit des Vermögens, was einem höheren Kozustand entspricht.

Da eine intratemporale Verzerrung nur bei Vorhandensein einer Konsumexternalität auftritt, wird in der Folge zwischen $U_4 = 0$ und $U_4 > 0$ unterschieden.

5.2.1 Volkswirtschaft ohne Konsumexternalität

Gibt es keine Konsumexternalität in der Nutzenfunktion, ergibt sich aus der ersten Bedingung (5.20) keine Notwendigkeit einer Besteuerung. Kommt es dennoch zu einer Besteuerung von Konsum, muss das Arbeitseinkommen im gleichen Ausmaß subventioniert werden und umgekehrt: $-\tau_w = \tau_c$.

Die Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion verringert die linke Seite der zweiten Bedingung (5.24) um $l^p f'\left(l^p\right)$ und die rechte Seite um $l^p f'\left(l^p\right)\tau_r < l^p f'\left(l^p\right)$. Daher muss die rechte Seite verringert oder die linke Seite erhöht werden. Dies kann durch eine Subvention des Kapitaleinkommens oder des Vermögens geschehen. Eine Vermögensexternalität führt ceteris paribus zu einer Erhöhung der linken Seite von Bedingung (5.24). Dies kann durch eine Besteuerung von Kapitaleinkommen oder Vermögen kompensiert werden. Der Gesamteffekt der Produktionsexternalität und einer möglichen Vermögensexternalität wird durch die Größe der Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für

Freizeit bestimmt. Behebt man die intertemporalen Verzerrungen durch eine alleinige Besteuerung bzw. Subvention von Zinserträgen oder Vermögen, ergeben sich folgende Steuersätze aus der Bedingung (5.24):

$$\tau_r = \frac{MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) - l^p}{f\left(l^p\right) - l^p f'\left(l^p\right) - \delta} f'\left(l^p\right) \tag{5.25}$$

$$\tau_a = \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) - l^p\right] f'\left(l^p\right) \tag{5.26}$$

Ist die Vermögensexternalität stark ($MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) > l^p$), kommt es zu einer Besteuerung von Kapitaleinkommen oder Vermögen. Es ist auch eine Mischung der beiden Steuersätze möglich, sodass Bedingung (5.24) erfüllt ist. Eine starke Vermögensexternalität kann aber nicht zu einer gleichzeitigen Subvention von Kapitalerträgen und Vermögen führen. Bei einer schwacher Vermögensexternalität ($MRS_d^{a/A,1-l} < l^p$) gilt umgekehrt, dass eine alleinige Subvention von Kapitalerträgen oder Vermögen ausreicht, wobei es bei einer Mischung nicht jeweils zu einer Besteuerung kommen kann. Im Grenzfall $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) = l^p$ wird der Effekt der Produktionsexternalität durch die Vermögensexternalität perfekt kompensiert und es ist keine Besteuerung notwendig.

5.2.2 Volkswirtschaft mit Konsumexternalität

Gibt es eine Konsumexternalität in der Nutzenfunktion, ist die Besteuerung von Konsum oder Arbeitseinkommen notwendig, damit die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum aus Sicht der Individuen mit der sozial optimalen übereinstimmt. Die intertemporalen Verzerrungen durch die Produktionsexternalität und durch eine etwaige Vermögensexternalität können mittels einer einzigen zusätzlichen Steuer behoben werden.

Wenn die Individuen einen positiven Nutzen aus höherem relativen Vermögen ziehen, ist die Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für Freizeit positiv: $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l\right) > 0$. Dadurch wird die linke Seite der Bedingung (5.24) erhöht, was durch eine Erhöhung von Lohnsteuer, Kapitalertragssteuer oder Vermögenssteuer kompensiert werden kann. In diesem Fall ist es möglich, die Erfüllung der beiden Bedingungen (5.20) und (5.24) alleine durch eine Besteuerung von Arbeitseinkommen und Konsum zu erreichen: Die Besteuerung des Arbeitseinkommens ergibt sich aus der Bedingung (5.24). Damit kann aus Bedingung (5.20) die Konsumsteuer bestimmt werden. Man erhält daher in diesem Fall durch folgende Steuersätze in der dezentralen Wirtschaft das sozial optimale Ergebnis:

$$\tau_w = 1 - \frac{l^p}{MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right)} < 1 \tag{5.27}$$

$$\tau_c = \frac{l^p}{MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right)}\left(1 + \frac{U_4}{cU_1}\right) - 1 > -1 \tag{5.28}$$

$$\tau_r = 0,\ \tau_a = 0 \tag{5.29}$$

Ob Arbeitseinkommen und Konsum besteuert oder subventioniert werden, hängt von der Größe der Externalitäten ab. Wegen der obigen Überlegungen zur ersten Bedingung kann es jedoch nicht zu einer gleichzeitigen Subventionierung von Arbeit und Konsum kommen.

Für die Wahl einer alleinigen Besteuerung von Konsum ($\tau_w = 0$) und Vermögen oder Kapitaleinkommen ergibt sich die Konsumsteuer aus der ersten Bedingung (5.20):

$$\tau_c = \frac{U_4}{cU_1} > 0 \tag{5.30}$$

Die Besteuerung von Vermögen oder Kapitaleinkommen ergibt sich aus der zweiten Bedingung (5.24).

$$\tau_a = \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) - l^p \right] f'\left(l^p\right) \tag{5.31}$$

$$\tau_r = \frac{\left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) - l^p \right] f'\left(l^p\right)}{f\left(l^p\right) - l^p f'\left(l^p\right) - \delta} \tag{5.32}$$

Diese Steuern sind genau dann positiv, wenn die Vermögensexternalität stark ist ($MRS_d^{a/A,1-l} > l^p$). Zu einer Subvention von Vermögen oder Kapitaleinkommen kommt es umgekehrt im Fall $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) < l^p$. Im Grenzfall $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) = l^p$ genügt eine alleinige Besteuerung des Konsums, um das sozial optimale Gleichgewicht zu erhalten. Damit die Besteuerung des Kapitaleinkommens sinnvoll ist, muss $\frac{\left[MRS_d^{a/A,1-l}(l^p) - l^p \right] f'(l^p)}{f(l^p) - l^p f'(l^p) - \delta} < 1$ gelten, was äquivalent zur Bedingung $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) < \frac{f(l^p)-\delta}{f'(l^p)}$ ist.

Alternativ kann auch nur das Arbeitseinkommen ($\tau_c = 0$) und Vermögen oder Kapitaleinkommen besteuert werden. Die Höhe der Lohnsteuer ergibt sich wieder aus der ersten Bedingung:

$$\tau_w = \frac{U_4 \frac{1}{c}}{U_1 + U_4 \frac{1}{c}} > 0 \tag{5.33}$$

Die Höhe einer alleinigen zusätzlichen Vermögensteuer oder Kapitalertragssteuer erhält man aus der zweiten Bedingung:

$$\begin{aligned} \tau_a &= \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right)\left(1 - \tau_w\right) - l^p \right] f'\left(l^p\right) \\ &= \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) \frac{U_1}{U_1 + U_4 \frac{1}{c}} - l^p \right] f'\left(l^p\right) \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\tau_r = \frac{MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) \frac{U_1}{U_1 + U_4 \frac{1}{c}} - l^p}{f\left(l^p\right) - l^p f'\left(l^p\right) - \delta} f'\left(l^p\right) \tag{5.35}$$

Diese sind genau dann positiv, wenn $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) \frac{U_1}{U_1+U_4\frac{1}{c}} > l^p$ gilt. Umgekehrt muss Vermögen oder Zinsertrag subventioniert werden, wenn $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) \frac{U_1}{U_1+U_4\frac{1}{c}} < l^p$ gilt. Im Grenzfall $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) \frac{U_1}{U_1+U_4\frac{1}{c}} = l^p$ genügt eine alleinige Besteuerung des Arbeitseinkommens. Damit die Kapitalertragssteuer kleiner als 1 ist, muss die Bedingung $MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) \frac{U_1}{U_1+U_4\frac{1}{c}} < \frac{f(l^p)-\delta}{f'(l^p)}$ gelten.

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnitts werden im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 12 *Durch die Einführung von maximal zwei konstanten Steuersätzen kann in der dezentralen Wirtschaft das sozial optimale Gleichgewicht erreicht werden ($l^d = l^p$, $\left(\frac{c}{k}\right)^d = \left(\frac{c}{k}\right)^p$, $g^d = g^p$). Die Steuersätze müssen die Gleichungen*

$$\frac{1-\tau_w}{1+\tau_c} = \frac{U_1}{U_1 + U_4 \frac{1}{c}} \tag{5.36}$$

$$\left[\frac{U_3}{-U_2}(1-\tau_w) - l^p\right] f'(l^p) = \left[f(l^p) - l^p f'(l^p) - \delta\right]\tau_r + \tau_a \tag{5.37}$$

erfüllen, wobei die Funktionen $\frac{U_1}{U_1+U_4\frac{1}{c}}$ und $\frac{U_3}{-U_2}$ aufgrund der Annahmen bezüglich der Form der Nutzenfunktion nur von l abhängig sind und an $l = l^p$ ausgewertet werden.

Dies ist im Allgemeinen zum Beispiel durch die Wahl einer Konsumsteuer und einer Kapitalertragssteuer möglich:

$$\tau_c = \frac{U_4 \frac{1}{c}}{U_1} \tag{5.38}$$

$$\tau_r = \frac{\frac{U_3}{-U_2} - l^p}{f(l^p) - l^p f'(l^p) - \delta} f'(l^p) \tag{5.39}$$

Gibt es eine Vermögensexternalität in der Nutzenfunktion, ist eine alleinige Besteuerung von Konsum und Arbeitseinkommen zur Erreichung des sozialen Optimums möglich.

Gibt es eine Konsumexternalität in der Nutzenfunktion, ist die Besteuerung von Konsum oder Arbeitseinkommen notwendig. Gilt $\frac{U_3}{-U_2} = l^p$, genügt eine alleinige Besteuerung des Konsums. Gilt $\frac{U_3}{-U_2}\frac{U_1}{U_1+U_4\frac{1}{c}} = l^p$, genügt eine alleinige Besteuerung des Arbeitseinkommens.

Gibt es keine Konsumexternalität in der Nutzenfunktion, genügt eine alleinige Besteuerung des Kapitaleinkommens oder Vermögens. Im Fall $\frac{U_3}{-U_2} = l^p$ entspricht das Gleichgewicht der dezentralen Wirtschaft ohne Besteuerung dem sozialen Optimum.

6 Illustratives Beispiel

In diesem Kapitel werden für die Produktionsfunktion und die Nutzenfunktion spezielle Formen gewählt. An Hand dieser werden die Bedingungen und Ergebnisse der bisherigen Abschnitte illustriert.

6.1 Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Es wird die Cobb-Douglas Produktionsfunktion unterstellt:

$$F(k_i, Tl_i) = Bk_i^{\alpha}(Tl_i)^{1-\alpha} \tag{6.1}$$

Mit der Definition $f(x) := F(1,x)$ erhält man die Produktionsfunktion in intensiver Form in Abhängigkeit von der Arbeitsintensität:

$$f\left(T\frac{l_i}{k_i}\right) = B\left(T\frac{l_i}{k_i}\right)^{1-\alpha} \tag{6.2}$$

Mit der Spezifikation der Produktionsexternalität ($T = k$) erhält man die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion in intensiver Form:

$$f(l) = Bl^{1-\alpha} \tag{6.3}$$

Für die beiden Parameter gilt $\alpha \in (0,1)$ und $B > 0$. Für die ersten beiden Ableitungen gilt daher:

$$f'(l) = (1-\alpha) Bl^{-\alpha} > 0 \tag{6.4}$$
$$f''(l) = -\alpha(1-\alpha) Bl^{-\alpha-1} < 0 \tag{6.5}$$

Veränderungen der Parameter haben daher folgende Auswirkungen: Eine Erhöhung des Faktors B führt jeweils zu einer absoluten Vergrößerung von $f(l)$ und $f'(l)$. Eine Veränderung des Parameters α hat einen Einfluss auf Niveau, Steigung und Krümmung der Produktionsfunktion im Intervall $(0,1)$. Aus

$$\frac{\partial f(l)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \left(Bl^{1-\alpha}\right)}{\partial \alpha} = -Bl^{1-\alpha} \ln l \tag{6.6}$$

und $l \in (0,1)$ folgt, dass eine Erhöhung von α zu einer Erhöhung von $f(l)$ und daher auch zu einer Steigerung der gesamtwirtschaftlichen Grenzproduktivität (= Durchschnittsproduktivität) von Kapital führt. Differenziert man $f'(l)$ partiell nach α, erhält man

$$\frac{\partial f'(l)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \left((1-\alpha) Bl^{-\alpha}\right)}{\partial \alpha} = Bl^{-\alpha} \left[-1-(1-\alpha)\ln l\right] \tag{6.7}$$

Diese Ableitung ist genau dann positiv, wenn

$$-1-(1-\alpha)\ln l > 0 \Leftrightarrow l < \exp\left(-\frac{1}{1-\alpha}\right).$$

Für kleine l kommt es durch einen Anstieg von α dementsprechend zu einer Erhöhung der Grenzproduktivität von Arbeit und für $l > \exp\left(-\frac{1}{1-\alpha}\right)$ zu einer Verringerung.

6.2 Isoelastische Nutzenfunktion

Für $\sigma \neq 1$ wird die folgende Nutzenfunktion definiert:

$$U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) := \frac{\left[c_i (1-l_i)^{\eta} \tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right) \tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right)\right]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \tag{6.8}$$

wobei für die Funktionen $\tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right) > 0$ und $\tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right) > 0$ im symmetrischen Gleichgewicht $\tilde{X}(1) = \tilde{W}(1) = 1$ gelten soll. Es wird die additive Konstante $\frac{-1}{1-\sigma}$ hinzugefügt und die Funktion $V(l_i) = (1-l_i)^{\eta(1-\sigma)}$ abhängig von σ definiert, damit der Grenzübergang $\sigma \to 1$ möglich ist. Die Funktionen $\tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right)$ und $\tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right)$ sollen nicht von σ abhängig sein. Dann erhält man mit Hilfe der Regel von

L'Hospital den Grenzwert:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\sigma\to 1} \frac{\left[c_i\left(1-l_i\right)^\eta \tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right)\tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right)\right]^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \\
= & \lim_{\sigma\to 1} \frac{-\ln\left[c_i\left(1-l_i\right)^\eta \tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right)\tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right)\right]\left[c_i\left(1-l_i\right)^\eta \tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right)\tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right)\right]^{1-\sigma}}{-1} \\
= & \ln\left[c_i\left(1-l_i\right)^\eta \tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right)\tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right)\right] \\
= & \ln c_i + \eta\ln\left(1-l_i\right) + \ln\tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right) + \ln\tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right)
\end{aligned}$$

Damit erhält man als Grenzfunktion im symmetrischen Gleichgewicht eine additiv separable Nutzenfunktion, wie sie für die Existenz eines Steady State mit konstantem Arbeitsinput im Fall $\sigma = 1$ gefordert wurde.

Es wird nun überprüft, unter welchen Bedingungen die Nutzenfunktion einen positiven und fallenden Grenznutzen von Konsum und Freizeit aus Sicht eines sozialen Planers aufweist. Die Ableitung der Nutzenfunktion nach der ersten Komponente, ausgewertet im symmetrischen Gleichgewicht, lautet[15]:

$$U_1\left(c,l,1,1\right) = c^{-\sigma}\left(1-l\right)^{\eta(1-\sigma)} > 0 \tag{6.9}$$

Der Grenznutzen von Konsum aus Sicht eines sozialen Planers ist daher ohne zusätzliche Voraussetzungen positiv. Außerdem ist er wie vorausgesetzt streng monoton fallend:

$$U_{11}\left(c,l,1,1\right) = -\sigma c^{-\sigma-1}\left(1-l\right)^{\eta(1-\sigma)} < 0 \tag{6.10}$$

Der Grenznutzen von Freizeit ist nur dann positiv und fallend, wenn η bestimmte Bedingungen erfüllt. Es gilt:

$$-U_2\left(c,l,1,1\right) = \eta c^{1-\sigma}\left(1-l\right)^{\eta(1-\sigma)-1} \tag{6.11}$$

Für die Positivität des Grenznutzens muss daher $\eta > 0$ gelten. Die zweite partielle Ableitung nach der 2. Komponente soll negativ sein:

$$U_{22}\left(c,l,1,1\right) = \eta\left[\eta\left(1-\sigma\right)-1\right]c^{1-\sigma}\left(1-l\right)^{\eta(1-\sigma)-2} \tag{6.12}$$

Dafür muss $\eta\left(1-\sigma\right)-1 < 0$ gelten. Im Fall $\sigma \geq 1$ stellt dies keine Einschränkung dar. Für $\sigma < 1$ erhält man die Bedingung $\eta < \frac{1}{1-\sigma}$. Für die gemischte partielle Ableitung nach Konsum und Freizeit gilt:

$$-U_{12}\left(c,l,1,1\right) = \eta\left(1-\sigma\right)c^{-\sigma}\left(1-l\right)^{\eta(1-\sigma)-1} \tag{6.13}$$

Der Grenznutzen von Konsum hängt, wie bereits allgemein festgestellt, im Fall $\sigma > 1$ negativ und im Fall $\sigma < 1$ positiv von der Freizeit ab und ist im Fall $\sigma = 1$ unabhängig von der Freizeit. Es wird nun überprüft, ob die Nutzenfunktion auch gemeinsam konkav in Konsum und Freizeit ist:

$$\begin{aligned}
U_{11}U_{22}-\left(U_{12}\right)^2 &= -\sigma\eta\left[\eta\left(1-\sigma\right)-1\right]c^{-2\sigma}\left(1-l\right)^{2\eta(1-\sigma)-2} - ... \\
&\quad -\eta^2\left(1-\sigma\right)^2 c^{-2\sigma}\left(1-l\right)^{2\eta(1-\sigma)-2} \qquad (6.14) \\
&= \frac{-\sigma\left[\eta\left(1-\sigma\right)-1\right]-\eta\left(1-\sigma\right)^2}{c^{2\sigma}\left(1-l\right)^{-2\eta(1-\sigma)+2}}\eta \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

[15]Durch die Wahl einer Nutzenfunktion, die den Grenzübergang für $\sigma \to 1$ erlaubt, müssen die Fälle $\sigma = 1$ und $\sigma \neq 1$ nicht getrennt betrachtet werden.

Damit dieser Ausdruck positiv ist, was die strikte gemeinsame Konkavität in Konsum und Freizeit bedeutet, muss

$$-\sigma\left[\eta\left(1-\sigma\right)-1\right]-\eta\left(1-\sigma\right)^{2}>0 \tag{6.16}$$

gelten. Eine Umformung dieser Ungleichung ergibt die Bedingung:

$$\eta\left(1-\sigma\right)<\sigma \tag{6.17}$$

Im Fall $\sigma \geq 1$ ist diese Bedingung erfüllt. Für $\sigma < 1$ muss $\eta < \frac{\sigma}{1-\sigma}$ vorausgesetzt werden. Dies ist eine stärkere Voraussetzung als die für die alleinige Konkavität in Freizeit notwendige Bedingung $\eta < \frac{1}{1-\sigma}$. Je näher σ bei 1 ist, umso leichter ist diese Bedingung zu erfüllen.

Für den Einfluss der Statuskomponenten auf das makroökonomische Verhalten der dezentralen Wirtschaft sind nur ihre Grenznutzen ausgewertet an symmetrischen Stellen von Bedeutung. Der Grenznutzen von relativem Vermögen beträgt:

$$U_3\left(c,l,1,1\right)=\left[c\left(1-l\right)^{\eta}\right]^{1-\sigma}\tilde{X}'\left(1\right) \tag{6.18}$$

Die Bedeutung von relativem Vermögen für die homogenen Individuen wird daher alleine durch $\tilde{X}'(1) =: \nu \geq 0$ bestimmt. Sie ist umso größer, je größer ν gewählt wird - im Fall $\nu = 0$ gibt es keine Auswirkungen von relativem Vermögen. Eine Funktion, die dies leistet[16] und ab sofort unterstellt wird, ist $\tilde{X}\left(\frac{a_i}{A}\right) = \left(\frac{a_i}{A}\right)^{\nu}$. Die Funktion $X(l)$ aus Satz 6 hat mit dieser Definition die Form $X(l) = \nu\left(1-l\right)^{\eta(1-\sigma)}$. Der Grenznutzen von relativem Konsum beträgt:

$$U_4\left(c,l,1,1\right)=\left[c\left(1-l\right)^{\eta}\right]^{1-\sigma}\tilde{W}'\left(1\right) \tag{6.19}$$

Die Größe von $\tilde{W}'(1) =: \omega \geq 0$ ist für die Stärke des Effekts von relativem Konsum entscheidend, wobei ein stärkerer Effekt einem höheren Wert von ω entspricht. Es bietet sich daher analog zur Vermögensexternalität die Wahl der Funktion $\tilde{W}\left(\frac{c_i}{C}\right) = \left(\frac{c_i}{C}\right)^{\omega}$ an. Die Funktion $W(l)$ aus Satz 6 lautet damit $W(l) = \omega\left(1-l\right)^{\eta(1-\sigma)}$.

Mit der konkreten Wahl der Statuskomponenten ergibt sich die folgende Nutzenfunktion der Individuen:

$$U\left(c_i,l_i,\frac{a_i}{A},\frac{c_i}{C}\right) = \frac{\left[c_i\left(1-l_i\right)^{\eta}\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\nu}\left(\frac{c_i}{C}\right)^{\omega}\right]^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \tag{6.20}$$

$$= \frac{\left[c_i^{1+\omega}\left(1-l_i\right)^{\eta}a_i^{\nu}\frac{1}{A^{\nu}C^{\omega}}\right]^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \tag{6.21}$$

Die letzte Darstellung erlaubt unmittelbar die Bestimmung der Bedingungen für die Konkavität in Konsum und Vermögen aus Sicht der Individuen. Damit sie strikt konkav in c_i ist, muss

$$\left(1+\omega\right)\left(1-\sigma\right)<1 \tag{6.22}$$

gelten, was im Fall $\sigma \geq 1$ in jedem Fall erfüllt ist. Für $\sigma < 1$ muss $\omega < \frac{\sigma}{1-\sigma}$ vorausgesetzt werden. Für die strikte Konkavität in Vermögen muss

$$\nu\left(1-\sigma\right)<1 \tag{6.23}$$

[16] Diese Funktion ist nicht für negative Werte des Vermögens definiert. Da sich die Individuen im symmetrischen Gleichgewicht nicht verschulden können, ist diese Einschränkung für das vorliegende Modell nicht problematisch.

gelten, was im Fall $\sigma \geq 1$ wiederum automatisch erfüllt ist. Im Fall $\sigma < 1$ muss $\nu < \frac{1}{1-\sigma}$ vorausgesetzt werden. Für die gemeinsame Konkavität in Konsum, Freizeit und Vermögen muss außerdem

$$(1 + \omega + \eta + \nu)(1 - \sigma) < 1 \tag{6.24}$$

vorausgesetzt werden[17]. Dies stellt ebenfalls nur eine Einschränkung für $\sigma < 1$ dar. Außerdem ist es eine stärkere Bedingung als die bisher genannten. Die in der Folge verwendete Nutzenfunktion wird nun zusammengefasst:

Annahme 6.2.1 *Die Nutzenfunktion hat die Form:*

$$U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) = \frac{\left[c_i (1 - l_i)^\eta \left(\frac{a_i}{A}\right)^\nu \left(\frac{c_i}{C}\right)^\omega\right]^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \tag{6.25}$$

Für die vier Parameter werden folgende Annahmen getroffen, damit die Nutzenfunktion gemeinsam strikt konkav in Konsum, Freizeit und Vermögen ist:

$$\sigma > 0,\ \eta > 0,\ \nu \geq 0,\ \omega \geq 0 \tag{6.26}$$

$$(1 + \omega + \eta + \nu)(1 - \sigma) < 1 \tag{6.27}$$

Im Grenzfall $\sigma = 1$ ergibt sich die Nutzenfunktion

$$U\left(c_i, l_i, \frac{a_i}{A}, \frac{c_i}{C}\right) = \ln c_i + \eta \ln (1 - l_i) + \nu \ln \left(\frac{a_i}{A}\right) + \omega \ln \left(\frac{c_i}{C}\right) \tag{6.28}$$

6.3 Sozial geplante Wirtschaft

Für die konkrete Nutzenfunktion werden zunächst die Bedingungen und Ergebnisse in der sozial geplanten Wirtschaft bestimmt. Für die Funktion $\Theta_p(l)$ erhält man gemäß ihrer Definition:

$$\begin{aligned}\Theta_p(l) &= \frac{1}{c} MRS_p^{1-l,c}(c, l, 1, 1) \\ &= \frac{-U_2(c, l, 1, 1)}{cU_1(c, l, 1, 1)} \\ &= \frac{\eta}{1 - l}\end{aligned} \tag{6.29}$$

Damit erhält man aus Gleichung (3.37) die Konsum-Kapital-Quote:

$$\begin{aligned}\frac{c}{k} &= \frac{f'(l)}{\Theta_p(l)} \\ &= \frac{B(1 - \alpha)}{\eta} \frac{1 - l}{l^\alpha}\end{aligned} \tag{6.30}$$

Aus den Gleichungen (3.39) und (3.40) erhält man die Wachstumsraten von Konsum und Kapital in Abhängigkeit vom Arbeitsinput:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\sigma}\left[f(l) - \delta - \rho\right] \\ &= \frac{1}{\sigma}\left(Bl^{1-\alpha} - \delta - \rho\right)\end{aligned} \tag{6.31}$$

[17]Bei $\nu > 0$ darf in der Bedingung auch Gleichheit gelten. Die Nutzenfunktion ist dann strikt gemeinsam konkav in Konsum und Freizeit und gemeinsam konkav in Konsum, Freizeit und Vermögen.

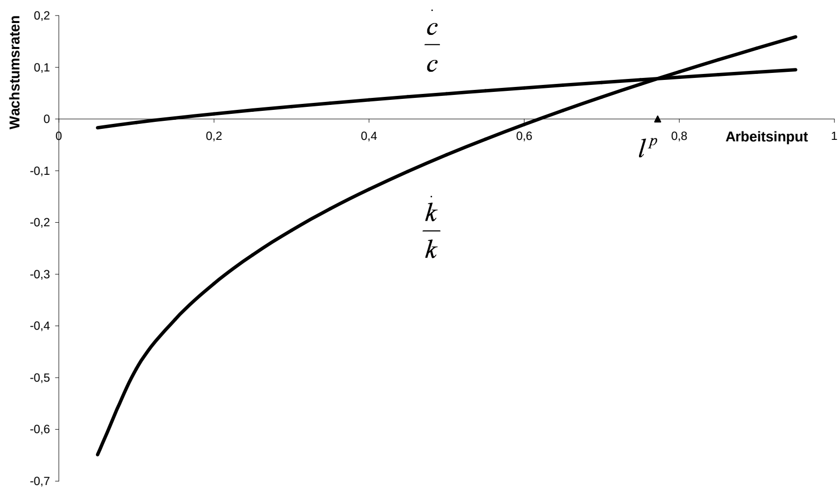

Abbildung 1: Bestimmung des Arbeitsinputs in der sozial geplanten Wirtschaft

$$\begin{aligned}\frac{\dot{k}}{k} &= f(l) - \delta - \frac{c}{k} \\ &= Bl^{1-\alpha} - \delta - \frac{B(1-\alpha)}{\eta}\frac{1-l}{l^{\alpha}}\end{aligned} \tag{6.32}$$

Die Wachstumsraten sind beide streng monoton wachsend in l. Die Bedingungen von Satz 2 stellen sicher, dass die Differenz von $\frac{\dot{c}}{c}$ und $\frac{\dot{k}}{k}$ streng monoton fallend ist und an der Stelle l^p den Wert 0 annimmt. In der Abbildung 1 sind die beiden Wachstumsraten in Abhängigkeit vom Arbeitsinput eingezeichnet. Die verwendeten Parameter sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Parameter	**Wert**
B	$0,2$
α	$0,3$
δ	$0,02$
ρ	$0,03$
σ	$1,5$
η	$0,5$

Der sozial optimale Wert von Arbeitsinput und Wachstumsrate ergibt sich im Schnittpunkt der beiden Kurven. Bei der gewählten Parametrisierung erhält man $l^p = 0,772$ und $g^p = 0,078$. Die Konsum-Kapital-Quote beträgt $\left(\frac{c}{k}\right)^p = 0,069$.

Für die Existenz einer eindeutigen Lösung wurden in den Sätzen 2 und 3 die folgenden Bedingungen vorausgesetzt: Die Funktion $\Theta_p(l)$ muss streng monoton wachsend sein und für $l \to 1$ unbeschränkt werden, damit Freizeit und Konsum normale Güter sind und die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum bei schwindender Freizeit unbeschränkt wird. Für die gewählte Nutzenfunktion gilt:

$$\Theta_p'(l) = \frac{\eta}{(1-l)^2} > 0 \tag{6.33}$$

$$\lim_{l\to 1} \Theta_p(l) = \lim_{l\to 1} \frac{\eta}{1-l} = \infty \tag{6.34}$$

Diese beiden Bedingungen sind daher ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Parameter erfüllt. Weiters muss die maximale Nettoertragsrate des Kapitals die folgende Ungleichung erfüllen:

$$(\sigma - 1)[f(1) - \delta] + \rho = (\sigma - 1)(B - \delta) + \rho > 0 \tag{6.35}$$

Im Fall $\sigma < 1$ muss auch noch überprüft werden, dass die Differenz der Wachstumsraten von Konsum und Kapital streng monoton fallend in l ist. Für ihre Differenz erhält man:

$$\sigma\left(\frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{k}}{k}\right) = \left(Bl^{1-\alpha} - \delta - \rho\right) - \sigma\left[Bl^{1-\alpha} - \delta - \frac{B(1-\alpha)}{\eta}\frac{1-l}{l^\alpha}\right]$$

$$= \left(1 - \sigma - \frac{\sigma}{\eta}(1-\alpha)\right)Bl^{1-\alpha} - (1-\sigma)\delta + \sigma\frac{(1-\alpha)}{\eta}Bl^{-\alpha} - \rho \tag{6.36}$$

Differenziert man nach l, erhält man die Bedingung:

$$\left(1 - \sigma - \frac{\sigma}{\eta}(1-\alpha)\right)(1-\alpha)Bl^{-\alpha} - \sigma\alpha\frac{1-\alpha}{\eta}Bl^{-\alpha-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \sigma - \frac{\sigma}{\eta}(1-\alpha)\right)l - \frac{\sigma}{\eta}\alpha < 0 \tag{6.37}$$

Für kleine l ist diese Bedingung ohne zusätzliche Voraussetzungen erfüllt. Es genügt, sie auch für $l = 1$ zu überprüfen. Damit erhält man die Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &> 1 - \sigma - \frac{\sigma}{\eta}(1-\alpha) - \frac{\sigma}{\eta}\alpha \\ &= 1 - \sigma - \frac{\sigma}{\eta} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sigma > \frac{\eta}{1+\eta} \tag{6.38}$$

Damit erhält man bei gegebenem η eine untere Schranke für σ. Zur Überprüfung der hinreichenden Bedingungen für die Optimalität des Steady State in der sozial geplanten Wirtschaft werden zunächst die Elastizitäten des Grenznutzens von Konsum und Arbeit bezüglich Arbeit und die Elastizität der Grenzproduktivität der Arbeit bezüglich Arbeit berechnet:

$$\varphi_{12}(l) := \frac{lU_{12}}{U_1} = -\eta(1-\sigma)\frac{l}{1-l} \tag{6.39}$$

$$\varphi_{22}(l) := \frac{lU_{22}}{U_2} = [1 - \eta(1-\sigma)]\frac{l}{1-l} \tag{6.40}$$

$$\frac{lf''}{f'} = -\alpha \tag{6.41}$$

Damit kann überprüft werden, dass die hinreichenden Bedingungen aus Satz 5 ohne weitere Voraussetzungen erfüllt sind. Es gilt:

$$\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'} = \left[1 - \frac{1}{\sigma}\eta\left(1-\sigma\right)\right]\frac{l}{1-l} + \alpha \tag{6.42}$$

Wegen der Voraussetzung $\sigma > \frac{\eta}{1+\eta}$ ist dieser Ausdruck auch für $\sigma < 1$ positiv:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sigma}\eta\left(1-\sigma\right) &= \frac{1}{\sigma}\left(\sigma - \eta + \eta\sigma\right) \\ &> \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\eta}{1+\eta} - \eta + \eta\frac{\eta}{1+\eta}\right) = 0 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Außerdem ist die Bedingung (3.97) erfüllt, da der Grenzwert für $l \to 0$ beschränkt ist:

$$\lim_{l\to 0}\left(\varphi_{22} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}\right) = \alpha \tag{6.44}$$

Weiters gilt:

$$\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'} = \frac{l}{1-l} + \alpha \tag{6.45}$$

Damit erhält man für den Faktor aus Satz 5:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'}}{\varphi_{22} - \varphi_{12} - \frac{lf''}{f'} + \frac{1}{\sigma}\varphi_{12}} &= \frac{\frac{l}{1-l} + \alpha}{\left[1 - \frac{1}{\sigma}\eta\left(1-\sigma\right)\right]\frac{l}{1-l} + \alpha} \\ &= \frac{l + \left(1-l\right)\alpha}{\left[1 - \frac{1}{\sigma}\eta\left(1-\sigma\right)\right] l + \left(1-l\right)\alpha} \end{aligned} \tag{6.46}$$

Er ist für $l \to 1$ positiv und muss daher für die Überprüfung der Bedingung (3.99) nicht beachtet werden. Für den zweiten Faktor in dieser Bedingung gilt

$$\lim_{l\to 1}\left[\frac{f'}{\Theta_p} - \frac{\rho}{\sigma} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\left(f - \delta\right)\right] = -\frac{\rho}{\sigma} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\left[f\left(1\right) - \delta\right] < 0 \tag{6.47}$$

wegen der Voraussetzung $(\sigma - 1)\left[f\left(1\right) - \delta\right] + \rho > 0$. Damit bleibt noch die Überprüfung der Bedingung (3.98):

$$\begin{aligned} \lim_{l\to 0}\left(1 - \varphi_{22} + \varphi_{12} + \frac{lf''}{f'}\right) &= \lim_{l\to 0}\left(1 - \frac{l}{1-l} - \alpha\right) \\ &= 1 - \alpha > 0 \end{aligned} \tag{6.48}$$

Diese ist somit ebenfalls ohne zusätzliche Voraussetzungen erfüllt und die Optimalität des Steady State in der sozial geplanten Wirtschaft sichergestellt.

6.4 Dezentrale Wirtschaft

Es werden nun die Ergebnisse in der dezentralen Wirtschaft hergeleitet. Die Funktion $\Theta_d\left(l\right)$ lautet:

$$\Theta_d\left(l\right) = \frac{-U_2(c,l,1,1)}{cU_1\left(c,l,1,1\right) + U_4\left(c,l,1,1\right)} = \frac{\eta}{1+\omega}\frac{1}{1-l} \tag{6.49}$$

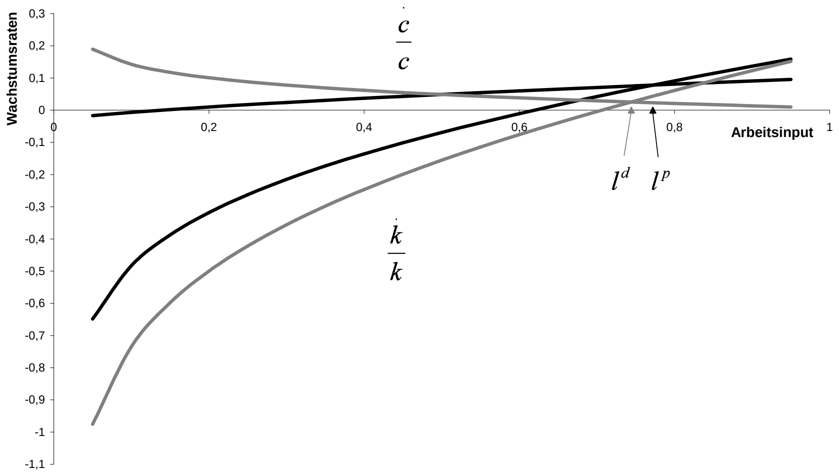

Abbildung 2: Bestimmung des Arbeitsinputs in der dezentralen Wirtschaft: Die sozial optimalen Kurven sind schwarz und die dezentralen grau eingezeichnet.

Sie unterscheidet sich von jener in der sozial geplanten Wirtschaft durch den zusätzlichen Faktor $(1+\omega)^{-1}$ und ist somit genau dann geringer, wenn es eine Konsumexternalität gibt ($\omega > 0$). Ohne zusätzliche Voraussetzungen ist sie streng monoton wachsend in l und für $l \to 1$ unbeschränkt, wie für die Existenz eines eindeutigen Arbeitsinputs vorausgesetzt wurde. Mit der Funktion $\Theta_d(l)$ erhält man die dezentrale Konsum-Kapital-Quote und die Wachstumsrate des Kapitals in Abhängigkeit vom Arbeitsinput:

$$\frac{c}{k} = \frac{f'(l)}{\Theta_d(l)} = \frac{1+\omega}{\eta} B(1-\alpha)\frac{1-l}{l^\alpha} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{k}}{k} &= f(l) - \delta - \frac{c}{k} \\ &= Bl^{1-\alpha} - \delta - \frac{1+\omega}{\eta} B(1-\alpha)\frac{1-l}{l^\alpha} \end{aligned} \tag{6.51}$$

Es kommt damit genau dann zu einer Verschiebung der $\frac{\dot{k}}{k}$-Kurve nach unten, wenn es eine Konsumexternalität gibt. Dieser Fall ist in Abbildung 2 illustriert, wobei der Parameter $\omega = 0,5$ gewählt wurde. Die absolute Verschiebung ist umso größer, je geringer l ist.

Für die Bestimmung der Wachstumsrate des Konsums muss noch die Grenzrate der Substitution von relativem Vermögen für Freizeit bestimmt werden:

$$MRS_d^{a/A,1-l}(l) = \frac{U_3(c,l,1,1)}{-U_2(c,l,1,1)} = \frac{\nu}{\eta}(1-l) \tag{6.52}$$

Sie ist wachsend in Freizeit und ihr Grenzwert für $l \to 1$ ist Null, wie es für die Existenz eines eindeutigen Steady-State-Arbeitsinputs in der dezentralen Wirtschaft gefordert wird. Gemäß Gleichung (4.19) erhält man die Wachstumsrate des Konsums in Abhängigkeit von l:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\sigma}\left[f(l)-\delta-lf'(l)+MRS_d^{a/A,1-l}(l)\,f'(l)-\rho\right] \\
&= \frac{1}{\sigma}\left[Bl^{1-\alpha}-\delta-B(1-\alpha)\,l^{1-\alpha}+\frac{\nu}{\eta}B(1-\alpha)(1-l)\,l^{-\alpha}-\rho\right] \\
&= \frac{1}{\sigma}\left[Bl^{1-\alpha}-\delta+B(1-\alpha)\,l^{-\alpha}\left[\frac{\nu}{\eta}-\left(1+\frac{\nu}{\eta}\right)l\right]-\rho\right] \qquad (6.53)
\end{aligned}$$

Sie unterscheidet sich bei gegebenem Arbeitsinput von jener in der sozial geplanten Wirtschaft durch den zusätzlichen Term $\frac{1}{\sigma}B(1-\alpha)\,l^{-\alpha}\left[\frac{\nu}{\eta}-\left(1+\frac{\nu}{\eta}\right)l\right]$. Die Kapitalexternalität verringert sie bei gegebenem l, während eine vorhandene Vermögensexternalität einen positiven Effekt hat. Der Gesamteffekt ist negativ, wenn

$$l > \frac{\frac{\nu}{\eta}}{1+\frac{\nu}{\eta}} \qquad (6.54)$$

gilt. In Abbildung 2 gibt es eine Vermögensexternalität, wobei $\nu = 0{,}5$ angenommen wurde. Die $\frac{\dot{c}}{c}$-Kurve der dezentralen Wirtschaft liegt daher für kleine l über der sozial optimalen und für große l unter der sozial optimalen Kurve. Außerdem geht durch die Einführung der beiden Externalitäten in diesem Beispiel die wachsende Monotonie verloren. Dadurch wird es schwieriger den Gesamteffekt der Externalitäten auf Arbeitsinput und Wachstumsrate festzustellen. Der dezentrale Arbeitsinput muss die folgende Gleichung erfüllen, die man durch das Gleichsetzen der Wachstumsraten von Konsum und Kapital erhält:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma}\left[Bl^{1-\alpha}-\delta+B(1-\alpha)\,l^{-\alpha}\left[\frac{\nu}{\eta}-\left(1+\frac{\nu}{\eta}\right)l\right]-\rho\right] \\
=\;& Bl^{1-\alpha}-\delta-\frac{1+\omega}{\eta}B(1-\alpha)\,\frac{1-l}{l^{\alpha}} \qquad (6.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\;& l^{1-\alpha}\left[1-\sigma-\left(\frac{\sigma}{\eta}+1+\frac{\sigma\omega+\nu}{\eta}\right)(1-\alpha)\right]+(1-\alpha)\,l^{-\alpha}\frac{\sigma+\sigma\omega+\nu}{\eta} \\
=\;& \frac{1}{B}\left[(1-\sigma)\,\delta+\rho\right] \qquad (6.56)
\end{aligned}$$

In dieser Darstellung erkennt man, dass die Auswirkungen der beiden Externalitäten in der Nutzenfunktion auf den Arbeitsinput nur durch den Term $\sigma\omega+\nu$ bestimmt werden. Eine Veränderung der Konsumexternalität um $d\omega$ hat somit denselben Effekt wie eine Veränderung der Vermögensexternalität um $\sigma d\omega$.

Es ergeben sich folgende Unterschiede zur Gleichung (6.36) in der sozial geplanten Wirtschaft: Wegen der Produktionsexternalität wird die linke Seite um $(1-\alpha)\,l^{1-\alpha}$ verringert. Die beiden Externalitäten in der Nutzenfunktion erhöhen sie um $\frac{\sigma\omega+\nu}{\eta}(1-\alpha)\,\frac{1-l}{l^{\alpha}}$. Der Gesamteffekt der drei Externalitäten auf die linke Seite ist daher genau dann positiv, wenn

$$\frac{\sigma\omega+\nu}{\eta} > \frac{l}{1-l} \qquad (6.57)$$

gilt. Entscheidend für den Gesamteffekt der Externalitäten auf den Arbeitsinput der dezentralen Wirtschaft ist, ob diese Ungleichung an der Stelle l^p gilt. Es gilt genau dann $l^d > l^p$, wenn $\frac{\sigma\omega+\nu}{\eta} > \frac{l^p}{1-l^p}$ erfüllt ist. Dies ist eher erfüllt, wenn die Externalitäten in der Nutzenfunktion (ω und ν) groß sind.

Für die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichung (6.56) muss im Fall $\sigma < 1$ vorausgesetzt werden, dass die linke Seite monoton fallend ist. Daraus erhält man durch Differenzieren nach l die Bedingung:

$$l^{-\alpha}\left[1-\sigma-\left(\frac{\sigma}{\eta}+1+\frac{\sigma\omega+\nu}{\eta}\right)(1-\alpha)\right] < \alpha l^{-\alpha-1}\frac{\sigma+\sigma\omega+\nu}{\eta} \tag{6.58}$$

$$\Leftrightarrow l\left[\alpha-\sigma-\frac{\sigma(1+\omega)+\nu}{\eta}(1-\alpha)\right] < \alpha\frac{\sigma(1+\omega)+\nu}{\eta} \tag{6.59}$$

Für kleine l ist diese Bedingung erfüllt. Wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer kleiner als die rechte Seite ist, ist die Bedingung für alle $l \in (0,1]$ erfüllt. Man erhält daher die Bedingung:

$$\alpha-\sigma-\frac{\sigma(1+\omega)+\nu}{\eta}(1-\alpha) < \alpha\frac{\sigma(1+\omega)+\nu}{\eta} \tag{6.60}$$

$$\Leftrightarrow \sigma-\alpha+\frac{\sigma(1+\omega)+\nu}{\eta} > 0 \tag{6.61}$$

Diese Bedingung ist in jedem Fall erfüllt, wenn $\sigma > \alpha$ gilt.

Die Auswirkungen der drei Externalitäten auf den Steady State der dezentralen Wirtschaft können nun beschrieben werden: Die Einführung der Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion führt bekanntlich zu einem niedrigeren Arbeitsinput, einer höheren Konsum-Kapital-Quote und einer niedrigeren Wachstumsrate. In dieser Wirtschaft ohne Statuseffekte arbeiten die Individuen daher weniger als im sozialen Optimum und konsumieren am Anfang zu viel. Dadurch ergibt sich für sie ein höherer Anfangsnutzen. Durch die niedrigere Wachstumsrate können sie ihren Konsum im Zeitverlauf jedoch weniger steigern, sodass sie langfristig weniger Konsum und damit auch weniger Momentan-Nutzen haben als die Individuen einer sozial geplanten Wirtschaft. Insgesamt verringert sich ihr Lebensnutzen.

Es wird nun das Streben nach Status in Form von relativem Vermögen und relativem Konsum eingeführt: Es werden drei Möglichkeiten betrachtet: Entweder gibt es nur eine Konsumexternalität ($\omega > 0$), nur eine Vermögensexternalität ($\nu > 0$) oder beide Externalitäten. Die Größe der beiden Externalitäten wird zur Vergleichbarkeit so gewählt, dass der Gesamteffekt auf den Arbeitsinput jeweils gleich groß ist. Einer Konsumexternalität in der Höhe von ω wird dementsprechend eine Vermögensexternalität in der Höhe von $\sigma\omega$ gegenübergestellt. Im Beispiel mit beiden Externalitäten werden diese so gewählt, dass sie den gleichen Einfluss haben ($\frac{\omega}{2}$ bzw. $\frac{\sigma\omega}{2}$). In der Abbildung 3 ist der Arbeitsinput der dezentralen Wirtschaft in Abhängigkeit von der Gesamtgröße der Externalitäten eingezeichnet. Er wächst mit der Größe der Statusexternalitäten und erreicht den sozial optimalen Wert an der Stelle $\frac{\sigma\omega+\nu}{\eta} = \frac{l^p}{1-l^p}$.

Mit dem Arbeitsinput kann der Effekt auf die Konsum-Kapital-Quote bestimmt werden. Bei gegebenem Arbeitsinput beträgt sie gemäß Gleichung (6.50):

$$\left(\frac{c}{k}\right)^d = \frac{1+\omega}{\eta}B(1-\alpha)\frac{1-l^d}{\left(l^d\right)^\alpha} \tag{6.62}$$

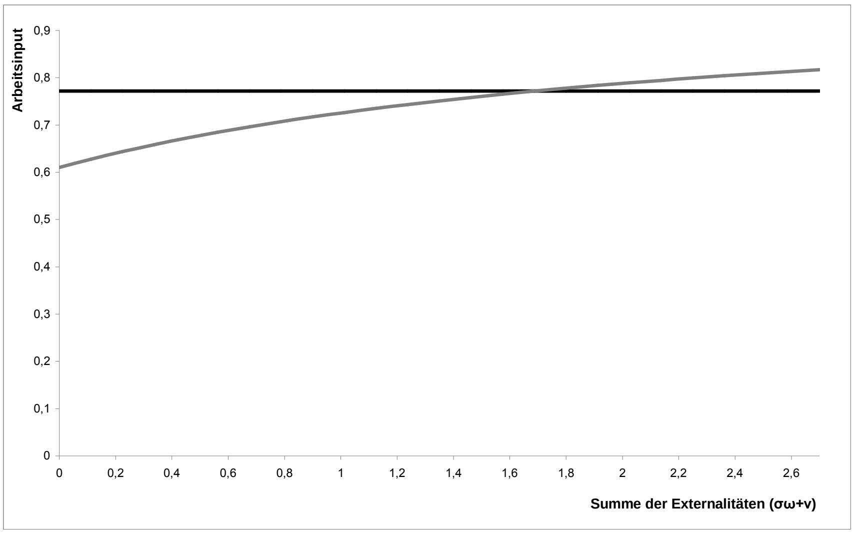

Abbildung 3: Arbeitsinput in der dezentralen Wirtschaft (grau) in Abhängigkeit von der Gesamtgröße der Externalitäten in der Nutzenfunktion

Ohne Externalitäten in der Nutzenfunktion ist sie wegen $l^d < l^p$ höher als der sozial optimale Wert $\frac{1}{\eta}B\left(1-\alpha\right)\frac{1-l^p}{(l^p)^\alpha}$. Die Einführung und Erhöhung einer Vermögensexternalität verändert sie nur durch den positiven Einfluss auf den Arbeitsinput. Daher führt dies zu einer Verringerung der Konsum-Kapital-Quote. Bei einer Konsumexternalität ($\omega > 0$) gibt es hingegen in dieser Darstellung neben dem indirekten Effekt durch die Veränderung des Arbeitsinputs auch einen direkten positiven Effekt. Deshalb bietet es sich an, die Darstellung der Konsum-Kapital-Quote gemäß Gleichung (4.37) zu verwenden:

$$\begin{aligned}\sigma\frac{c}{k} &= (\sigma-1)\left[f(l)-\delta\right]+\left[l-MRS_d^{a/A,1-l}(l)\right]f'(l)+\rho \\ &= (\sigma-1)\left(Bl^{1-\alpha}-\delta\right)+\left[l-\frac{\nu}{\eta}(1-l)\right]B(1-\alpha)l^{-\alpha}+\rho \\ &= Bl^{1-\alpha}\left[\sigma-\alpha+(1-\alpha)\frac{\nu}{\eta}\right]-\frac{\nu}{\eta}B(1-\alpha)l^{-\alpha}-... \\ & \quad -(\sigma-1)\delta+\rho \qquad (6.63)\end{aligned}$$

Gilt $\sigma-\alpha+(1-\alpha)\frac{\nu}{\eta}>0$, was im Fall $\sigma \geq \alpha$ ohne zusätzliche Voraussetzungen erfüllt ist, ist die Konsum-Kapital-Quote in dieser Darstellung monoton wachsend in l[18]. Damit führt die Einführung und Erhöhung einer Konsumexternalität zu einer höheren Konsum-Kapital-Quote. In Abbildung 4 sind die Konsum-Kapital-Quoten im Fall einer alleinigen Konsumexternalität, einer alleinigen Vermögensexternalität und einer Mischung der beiden Externalitäten eingezeichnet. Wie bereits beschrieben, ist die Konsum-Kapital-Quote in einer

[18] Durch partielles Differenzieren der obigen Gleichung nach dem Arbeitsinput kann man die Bedingung für die Monotonie abschwächen: Die Konsum-Kapital-Quote ist monoton wachsend in l, wenn $\sigma-\alpha+\frac{\nu}{\eta}>0$ gilt.

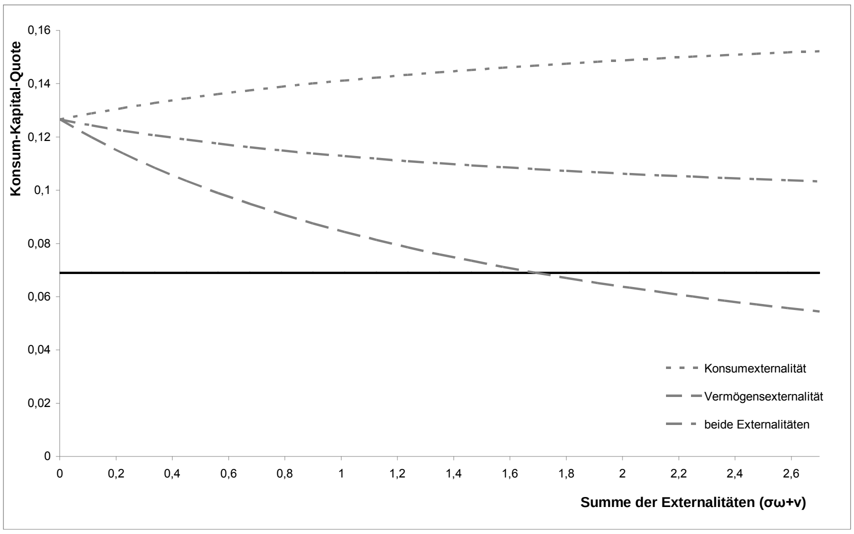

Abbildung 4: Konsum-Kapital-Quote in Abhängigkeit von der Größe der Externalitäten in der Nutzenfunktion

dezentralen Wirtschaft größer als die sozial optimale, wenn Status keine Bedeutung für die Individuen hat. Die Einführung einer Konsumexternalität führt wegen $\sigma > 1$ zu einer höheren und eine Vermögensexternalität zu einer geringeren Konsum-Kapital-Quote[19]. Gibt es nur eine Vermögensexternalität, stimmt die Konsum-Kapital-Quote genau dann mit der sozial optimalen überein, wenn $l^d = l^p$ gilt.

Die Wachstumsrate in der dezentralen Wirtschaft erhält man beispielsweise durch Einsetzen des Arbeitsinputs in die Wachstumsrate des Kapitals:

$$g^d = B\left(l^d\right)^{1-\alpha} - \delta - \frac{1+\omega}{\eta} B\left(1-\alpha\right)\frac{1-l^d}{\left(l^d\right)^{\alpha}} \tag{6.64}$$

Es wurde bereits allgemein festgestellt, dass sie ohne Externalitäten in der Nutzenfunktion geringer als die sozial optimale ist. Die Einführung einer Vermögensexternalität führt zu einer Erhöhung der Wachstumsrate. Ohne Vermögensexternalität führt auch die Einführung und Erhöhung der Konsumexternalität zu einer höheren Wachstumsrate. Da in diesem Beispiel eine Kombination der beiden Externalitäten bei gegebener Gesamtgröße der Externalitäten zu einer Wachstumsrate zwischen den beiden Extremfällen führt, kommt es in jedem Fall durch eine Einführung der Bedeutung von Status zu einer Erhöhung der Wachstumsrate gegenüber einer dezentralen Wirtschaft ohne Externalitäten in der Nutzenfunktion. In der Abbildung 5 sind die Wachstumsraten für die gewählte Parametrisierung abgebildet. Im Fall einer alleinigen Vermögensexternalität, die die Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion perfekt kompensiert, stimmen die Wachstumsraten überein. In diesem Fall ergibt sich wegen

[19]Durch eine Mischung von Konsumexternalität und Vermögensexternalität ist bei vorgebener Gesamtgröße der Externalitäten für die Konsum-Kapital-Quote jeder Zwischenwert zwischen diesen beiden Extremen möglich.

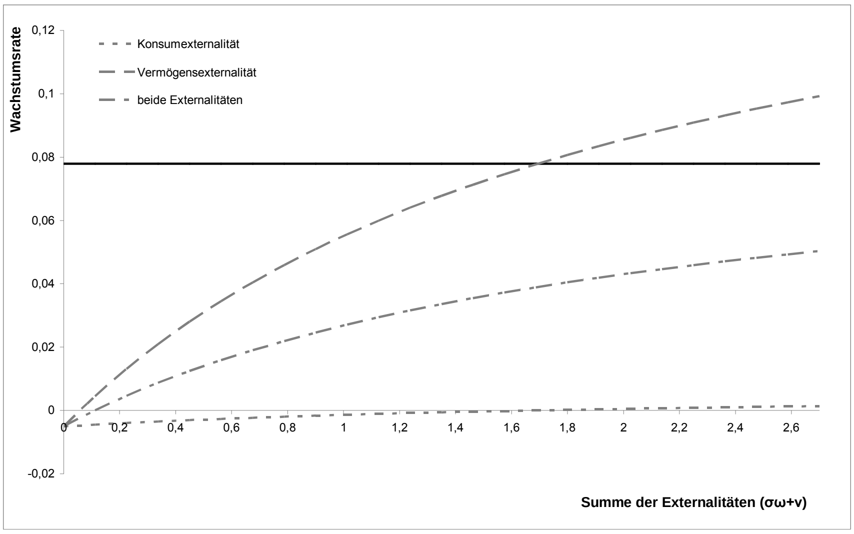

Abbildung 5: Wachstumsrate in Abhängigkeit von der Größe der Externalitäten in der Nutzenfunktion

der Übereinstimmung von Arbeitsinput, Konsum-Kapital-Quote und Wachstumsrate in der dezentralen Wirtschaft das sozial optimale Ergebnis.

6.5 Optimale Besteuerung

Es werden nun die Steuersätze aus dem fünften Kapitel, die das soziale Optimum replizieren, für die spezielle Wahl von Produktionsfunktion und Nutzenfunktion bestimmt. Bei einer vorhandenen Vermögensexternalität ist die Wahl einer Lohnsteuer und einer Konsumsteuer gemäß den Gleichungen (5.27) und (5.28) möglich:

$$\begin{aligned}\tau_w &= 1 - \frac{l^p}{MRS_d^{a/A,1-l}(l^p)} \\ &= 1 - \frac{\eta}{\nu}\frac{l^p}{1-l^p} \qquad (6.65)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_c &= \frac{l^p}{MRS_d^{a/A,1-l}(l^p)}\left(1 + \frac{U_4}{cU_1}\right) - 1 \\ &= \frac{\eta}{\nu}\frac{l^p}{1-l^p}(1+\omega) - 1 \qquad (6.66)\end{aligned}$$

Die Lohnsteuer hängt positiv von der Vermögensexternalität und die Konsumsteuer negativ von der Vermögensexternalität und positiv von der Konsumexternalität in der Nutzenfunktion ab. Im gewählten Beispiel mit $\omega = 0,5$ und $\nu = 0,5$ erhält man die Steuersätze $\tau_w = -2,385$ und $\tau_c = 4,078$. Die theoretische Möglichkeit, die Kapitalexternalität und die Vermögensexternalität durch eine Besteuerung von Arbeit auszugleichen, führt daher in diesem Beispiel zu betragsmäßig sehr hohen Steuersätzen.

Bei einer Besteuerung von Konsum und Vermögen oder Kapitalertrag ergeben sich die Steuersätze gemäß den Gleichungen (5.30), (5.31) und (5.32):

$$\tau_c = \frac{U_4}{cU_1} = \omega \tag{6.67}$$

$$\begin{aligned}
\tau_a &= \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) - l^p\right] f'\left(l^p\right) \\
&= \left[\frac{\nu}{\eta}\left(1 - l^p\right) - l^p\right] \frac{B\left(1-\alpha\right)}{\left(l^p\right)^{\alpha}} \qquad (6.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_r &= \frac{\left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) - l^p\right] f'\left(l^p\right)}{f\left(l^p\right) - l^p f'\left(l^p\right) - \delta} \\
&= \frac{\frac{\nu}{\eta}\left(1 - l^p\right) - l^p}{B\alpha\left(l^p\right)^{1-\alpha} - \delta} \frac{B\left(1-\alpha\right)}{\left(l^p\right)^{\alpha}} \qquad (6.69)
\end{aligned}$$

In diesem Fall hängt die Konsumsteuer nur von der Konsumexternalität ab. Die Vermögenssteuer und die Kapitalertragssteuer hängen positiv von der Vermögensexternalität ab. Bei der gewählten Parametrisierung erhält man die folgenden Steuersätze: $\tau_c = 0,5$ und $\tau_a = -0,082$ oder $\tau_r = -2,738$.

Bei einer alleinigen Besteuerung von Arbeitseinkomen und Vermögen oder Kapitalertrag ergeben sich die Steuersätze gemäß den Gleichungen (5.33), (5.34) und (5.35):

$$\begin{aligned}
\tau_w &= \frac{U_4 \frac{1}{c}}{U_1 + U_4 \frac{1}{c}} \qquad (6.70) \\
&= \frac{\omega}{1+\omega} \qquad (6.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_a &= \left[MRS_d^{a/A,1-l}\left(l^p\right) \frac{U_1}{U_1 + U_4 \frac{1}{c}} - l^p\right] f'\left(l^p\right) \\
&= \left[\frac{\nu}{\eta}\left(1 - l^p\right) \frac{1}{1+\omega} - l^p\right] \frac{B\left(1-\alpha\right)}{\left(l^p\right)^{\alpha}} \qquad (6.72)
\end{aligned}$$

$$\tau_r = \frac{\frac{\nu}{\eta}\left(1 - l^p\right) \frac{1}{1+\omega} - l^p}{B\alpha\left(l^p\right)^{1-\alpha} - \delta} \frac{B\left(1-\alpha\right)}{\left(l^p\right)^{\alpha}} \tag{6.73}$$

Die Lohnsteuer hängt bei dieser Wahl der Besteuerung positiv von der Konsumexternalität ab. Die Vermögenssteuer und die Kapitalertragssteuer hängen positiv von der Vermögensexternalität und negativ von der Konsumexternalität ab. Im gewählten Beispiel erhält man $\tau_w = 0,333$ und $\tau_a = -0,094$ oder $\tau_r = -3,121$.

Im gewählten Beispiel ergeben sich betragsmäßig relativ große Steuersätze, die notwendig sind, um das soziale Optimum zu erreichen. Eine Begründung dafür ist, dass jeweils nur zwei Steuersätze ungleich Null gewählt wurden. Durch eine Mischung aller vier Steuern sind betragsmäßig kleinere Steuersätze möglich. Ein weiterer Grund ist, dass die Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion bei der gewählten Parametrisierung relativ groß ist: Einem Exponenten von $\alpha = 0,3$ von Kapital in der Produktionsfunktion der Unternehmen steht eine Kapitalexternalität in Höhe von $1 - \alpha = 0,7$ gegenüber. Es werden deshalb noch alternativ die Ergebnisse für die Wahl $\alpha = 0,6$ berechnet und mit den bisherigen verglichen. Wegen der gestiegenen Grenzproduktivität von Kapital aus Sicht der Unternehmen, steigt bei gegebenem Arbeitsinput auch der Realzinssatz. Deshalb wird der Parameter B in der Produktionsfunktion auf $B = 0,1$ halbiert. Die Parameter der Nutzenfunktion werden unverändert gelassen. Durch die geringere Kapitalexternalität bei der Wahl $\alpha = 0,6$ kommt es bei gleicher Wahl der Parameter der Nutzenfunktion zu einem Anstieg von Arbeitsinput und Konsum-Kapital-Quote gegenüber den sozial optimalen Werten. Würde man eine Veränderung der Externalitäten in der Nutzenfunktion betrachten, wird die geringere Externalität in der Produktionsfunktion bereits durch geringeres Statusbewusstsein der Individuen kompensiert. Die Ergebnisse werden in der folgenden Tabelle verglichen:

	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,6$
l^p	$0,772$	$0,618$
$\left(\frac{c}{k}\right)^p$	$0,069$	$0,041$
g^p	$0,078$	$0,022$
l^d	$0,744$	$0,659$
$\left(\frac{c}{k}\right)^d$	$0,117$	$0,052$
g^d	$0,025$	$0,012$
r	$0,029$	$0,031$
τ_c	$4,078$	$1,424$
τ_w	$-2,385$	$-0,616$
τ_c	$0,5$	$0,5$
τ_a	$-0,082$	$-0,013$
τ_r	$-2,738$	$-0,426$
τ_w	$0,333$	$0,333$
τ_a	$-0,094$	$-0,019$
τ_r	$-3,121$	$-0,657$

7 Zusammenfassung

In der Diplomarbeit wurden die Auswirkungen von Statusbewusstsein in einem Modell mit endogenem Wirtschaftswachstum untersucht. Es wurde von einer allgemeinen Nutzenfunktion und Produktionsfunktion ausgegangen. Dieser wurden Bedingungen auferlegt, sodass die Existenz eines eindeutigen Steady State, in welchem Konsum und Kapital mit konstanten Wachstumsraten wachsen und der Arbeitsinput konstant ist, sichergestellt wird. Eine Einschränkung der Arbeit beruht darauf, dass nur homogene Individuen und daher symmetrische Gleichgewichte betrachtet wurden. Diese vereinfachende Annahme ist in der Literatur weit verbreitet und es gibt nur wenige Statusmodelle mit heterogenen Agenten. Das Streben nach Status verändert somit das Verhalten der Individuen, auch wenn sie tatsächlich (d.h. im symmetrischen Gleichgewicht) keine Verbesserung ihres relativen Konsums und ihres relativen Vermögens erlangen, da sich alle Individuen gleich verhalten. Die Optimalitätsbedingungen stellen jedoch sicher, dass es aus Sicht eines einzelnen Individuums nicht optimal wäre, vom Verhalten der anderen abzuweichen. Es liegt also in der Regel ein ineffizientes Gleichgewicht vor.

Ohne Externalitäten in der Nutzenfunktion ist der Arbeitsinput in der dezentralen Wirtschaft wegen der positiven Kapitalexternalität in der Produktionsfunktion niedriger als der sozial optimale. Außerdem ist der Anfangskonsum in einem solchen Modell zu hoch, weshalb sich eine zu niedrige Wachstumsrate ergibt. Die Einführung der Bedeutung von relativem Konsum oder relativem Vermögen für die Individuen führt ausgehend von diesem zu niedrigen Niveau zu einer Erhöhung des Arbeitsinputs.

Eine Vermögensexternalität wirkt entgegengesetzt zur Kapitalexternalität: Sie führt zu einer Erhöhung des Arbeitsinputs, einer Verringerung des Anfangskonsums und einer Erhöhung der Wachstumsrate. Gleicht die negative Vermögensexternalität die positive Kapitalexternalität genau aus, ergibt sich auch in der dezentralen Wirtschaft das sozial optimale Verhalten.

Eine Konsumexternalität führt zu einer intratemporalen Verzerrung: Die Individuen sind für weniger zusätzlichen Konsum bereit ihr Arbeitsangebot zu erhöhen. Daher führt auch die Einführung oder Erhöhung der Bedeutung von relativem Konsum zu einem höheren Arbeitsinput. Es kann in diesem Fall jedoch das sozial optimale Gleichgewicht nicht ohne Besteuerung erreicht werden. Die Auswirkungen der Konsumexternalität auf den Anfangskonsum und die Wachstumsrate sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Durch die Einführung von höchstens zwei konstanten Steuern oder Subventionen ist es möglich, auch in der dezentralen Wirtschaft das sozial optimale Ergebnis zu erreichen.

Weiters wurde gezeigt, dass wegen der aus der Kapitalexternalität resultierenden Linearität der gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion keine Übergangsdynamik auftritt und der Wachstumspfad mit konstantem Arbeitsinput und konstanten identischen Wachstumsraten von Konsum, Kapital und Output von Anfang an realisiert wird.

Literaturverzeichnis

[1] Barro Robert J. und Sala-i-Martin Xavier, 2003: *Economic Growth.* The MIT Press, 2nd edition.

[2] Corneo Giacomo und Jeanne Olivier, 1997: *On relative wealth effects and the optimality of growth.* Economics Letters 54: pp 87-92.

[3] Futagami Koichi und Shibata Akihisa, 1998: *Keeping one step ahead of the Joneses: Status, the distribution of wealth, and long run growth.* Journal of Economic Behavior & Organization 36: pp 109-126.

[4] Liu Wen-Fang und Turnovsky Stephen J., 2005: *Consumption externalities, production externalities, and long-run macroeconomic efficiency.* Journal of Public Economics 89: pp 1097-1129.

[5] Tournemaine Frederic und Tsoukis Christopher, 2008: *Relative consumption, relative wealth and growth.* Economics Letters 100(2), pp 314-316.