Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

DIPLOMARBEIT

Eine Anwendung der Finiten Elemente Methode auf ein nichtlineares Populationsmodell mit Kreuzdiffusion

Ausgeführt am Institut für

Analysis and Scientific Computing

der Technischen Universität Wien

unter der Leitung von

Univ.Prof. Dr.rer.nat. Ansgar JÜNGEL

durch

Horst Osberger
3500 Krems
Steiner Kellergasse 14/1

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die eingereichte Diplomarbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient habe. Ich erkläre weiters, dass ich diese Diplomarbeit bisher weder im In- noch im Ausland in irgendeiner Form als wissenschaftliche Arbeit vorgelegt habe.

Wien, Jänner 2011

Horst Osberger

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen Personen bedanken, die mir bei der Erarbeitung dieser Diplomarbeit geholfen haben. Mein herzlicher Dank gilt Herrn Univ.Prof. Dr.rer.nat. Ansgar Jüngel, dem Betreuer meiner Arbeit. Bereits durch eine abwechslungsreiche Gestaltung der Lehrveranstaltungen hat er mein Interesse auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen geweckt, weshalb ich diesen Zweig der Mathematik für meine Diplomarbeit gewählt habe. Vielen Dank für die hilfreichen Anregungen und die angenehme Leitung.

Ein großes Dankeschön gilt meiner Mutter und meinen Geschwistern, die immer großes Interesse an meiner Arbeit zeigten und in jeder noch so schwierigen Phase meines Lebens für mich da waren.

An dieser Stelle möchte ich auch meine Korrekturleser Günther Koliander und Simon Eberle dankend erwähnen, die sich extra Zeit genommen haben, ihre mathematisch geschulten Augen kritisch über meine Arbeit schweifen zu lassen. Auch Sabine Hittmeir gebührt für ihre umfangreiche Hilfestellung ein großes Dankeschön.

Abschließend geht ein sehr herzliches Dankeschön an all meine Freunde und Kollegen. Dabei möchte ich besonders Simon, Robert, Fabian, Stefan, Gregor und Roman, sowie Johannes hervorheben, die mir während meiner härtesten Prüfung der letzten Jahre eine helfende Hand reichten.

Vielen Dank,
Horst

Abstract

Ziel dieser Diplomarbeit ist die analytische Ausformulierung der Arbeit *„Finite element approximation of a nonlinear cross-diffusion population model“* der Autoren John W. Barrett und James F. Blowey.
In dieser Arbeit wird ein Populationsmodell behandelt, welches aus einem System zweier parabolischer, nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen besteht, die im Diffusionsteil gekoppelt sind. Hierfür diskretisieren die Autoren das Problem mittels Finiter Elemente Methode und zeigen Konvergenz der dadurch approximierten Lösung gegen eine schwache Lösung des ursprünglichen Problems.

This diploma thesis writes out the paper *„Finite element approximation of a nonlinear cross-diffusion population model“* from John W. Barrett and James F. Blowey in full. The paper describes a system of two nonlinear parabolic partial differential equations with cross-diffusion, which is motivated by a population model. The authors made a discretization using the Finite Element Method and show convergence towards a solution of the original problem in a weak sense.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation **6**

1.1 Einführung in die Aufgabenstellung 6

1.2 Notation und bekannte Resultate 9

2 Das Finite Elemente Modell **12**

2.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen 12

2.1.1 Die Projektion π^h und die Bilinearform $(.,.)^h$ 13

2.1.2 Die Abbildungen F_ε, λ_ε und Λ_ε 18

2.1.3 Die Operatoren $\mathcal{Q}^h$ und $\mathcal{G}$ 31

2.2 Die diskrete Formulierung des Modells 36

3 Abschätzungen und Lösbarkeit **38**

3.1 Bekannte Abschätzungen der FEM-Theorie 38

3.2 Abschätzungen für Λ_ε und Lösbarkeit der Finiten Elemente Approximation 45

3.3 A-priori-Abschätzungen des Modells in zeitunabhängigen Sobolevräumen 61

4 Konvergenz **84**

4.1 Einführung der Zeitabhängigkeit und erste Konvergenzresultate 84

4.1.1 Zeitabhängige A-priori-Abschätzungen 86

4.1.2 Erste Konvergenzresultate 93

4.2 Konvergenz der FE-Approximation gegen eine schwache Lösung des Probelms 105

5 Numerik **126**

Literaturverzeichnis **130**

1 Einleitung und Motivation

1.1 Einführung in die Aufgabenstellung

Wir wollen zwei konkurrierende Populationen auf einem beschränkten Gebiet Ω untersuchen, beispielsweise zwei Tierarten in einem gemeinsamen Lebensraum mit der gleichen Nahrungsquelle. Falls man die Populationsdichten u_1 und u_2 der einzelnen Populationen homogen verteilt auf Ω annehmen würde, so könnte man die aus den 30er Jahren stammenden *Lotka-Volterra-Gleichungen* heranziehen, welche in der Form

$$\frac{d\,u_1}{dt} = u_1(\mu_1 - \gamma_1 u_2), \qquad \frac{d\,u_2}{dt} = u_2(\mu_2 - \gamma_2 u_1)$$

bekannt sind. Die Koeffizienten μ_1 und μ_2 beschreiben dabei Reproduktionsraten der einzelnen Spezien, falls diese negativ sind, kann man sie daher als Sterberate interpretieren. Für $i, j = 1, 2$, $j \neq i$, beschreibt wiederum γ_i die Sterberate der Population u_i pro Individuum der Population u_j, welche aus dem rivalisierenden Verhalten der Populationen hervorgeht. Man kann diese Koeffizienten auch als Reproduktionsraten deuten, falls diese negativ sind.

Deutlich schwieriger wird das Problem, wenn man die Populationsdichten auf dem Gebiet Ω inhomogen annimmt und sich überlegen will, wie sich die Größen u_1 und u_2 mit der Zeit auf dem Gebiet verändern. Für diesen Fall wird in der Arbeit von John W. Barrett und James F. Blowey ein nichtlineares Populationsmodell mit Kreuzdiffusion betrachtet, was durch die Gleichungen

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta[c_i u_i + a_i u_i^2 + u_i u_j] - b_i \operatorname{div}(u_i \nabla v) = g_i(u_1, u_2) \tag{1.1a}$$

mit

$$g_i(u_1, u_2) := (\mu_i - \gamma_{ii} u_i - \gamma_{ij} u_j) u_i \tag{1.1b}$$

gegeben ist, wobei $i, j = 1, 2$, $j \neq i$. Wenn man nun für $i = 1, 2$, $j \neq i$, die Funktionen

$$\begin{aligned} \beta_i(u_1, u_2) :&= \nabla \left(c_i u_i + a_i u_i^2 + u_i u_j \right) + b_i u_i \nabla v \\ &= \left(c_i + 2a_i u_i + u_j \right) \nabla u_i + u_i \left(\nabla u_j + b_i \nabla v \right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

definiert, kann man die Gleichungen in (1.1a) umschreiben zu

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \operatorname{div} \beta_i(u_1, u_2) = g_i(u_1, u_2). \tag{1.3}$$

Der wesentliche Unterschied zu den vorhin erwähnten *Lotka-Volterra-Gleichungen* besteht nun in den Diffusionstermen β_i, wobei β_i für $i = 1, 2$ das Wanderverhalten der Spezies u_i innerhalb von Ω beschreibt. Die darin vorkommenden orts- und zeitunabhängigen Koeffizienten a_i und c_i werden als Diffusionskoeffizienten bezeichnet und

beschreiben für $i = 1, 2$ den Fluss der Population u_i in Ω, wobei der vom Koeffizienten a_i beschriebene Fluss noch von der eigenen Population u_i abhängt. Für $i = 1, 2$ steht der Koeffizient b_i, welcher ebenfalls von Raum und Zeit unabhängig ist, für die Geschwindigkeit mit der sich die Spezies u_i durch das Gebiet bewegt, wobei diese in unserem Modell an ein umweltbedingtes Potential v gebunden ist.
Da die rechten Seiten g_i aus (1.1b) die gleiche Struktur wie jene der *Lotka-Volterra-Gleichungen* aufweisen, kann man die dort auftretenden konstanten Koeffizienten ähnlich wie vorhin interpretieren. μ_i beschreibt also die Reproduktionsrate der i-ten Population und γ_{ij} die Sterberate der Spezies u_i pro Individuum der Spezies u_j. Die Koeffizienten γ_{ii} sind wie γ_{ij} zu deuten, mit dem Unterschied, dass γ_{ii} eine Konkurrenz innerhalb der eigenen Population u_i widerspiegelt.

Klarerweise stellen die Gleichungen in (1.1a) bzw. (1.3) ohne Anfangs- und Randwertbedingungen kein wohlgestelltes Problem dar. In der Arbeit von John W. Barrett und James F. Blowey, siehe [2], wurde folgendes nichtlineare Populationsmodell mit Kreuzdiffusion für die Populationen u_1 und u_2 formuliert:

(P) Finde $u_1, u_2 : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$, sodass für $i = 1, 2$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \operatorname{div} \beta_i(u_1, u_2) = g_i(u_1, u_2) \qquad \text{in } \Omega_T := \Omega \times (0, T], \tag{1.4a}$$

$$\beta_i(u_1, u_2) \cdot \nu = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T], \tag{1.4b}$$

$$u_i(., 0) = u_i^0(.) \geq 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.4c}$$

wobei ν für den nach außen zeigenden Normalvektor auf $\partial\Omega$ steht und $\beta_i(u_1, u_2)$ und $g_i(u_1, u_2)$ wie in (1.2) und (1.1b) definiert sind. Für die Koeffizienten soll $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$, $b_i \in \mathbb{R}$ und $c_i, \mu_i, \gamma_{ii}, \gamma_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelten.

Die Funktionen $u_i^0(.)$ stehen für die Populationsdichten der i-ten Spezies zum Zeitpunkt $t = 0$, weshalb die Forderung $u_i^0(.) \geq 0$ sinnvoll ist. Die Forderung (1.4b) an den Rand ist ebenfalls zweckmäßig, da wir das Problem auf einem beschränkten Gebiet Ω betrachten und der Strom β_i für $i = 1, 2$ das Wanderverhalten der Spezies u_i widergibt.

Bemerkung 1.1. Es handelt sich dabei um ein System zweier parabolischer partieller Differentialgleichungen, welche gekoppelt sind. Die Koppelung ist im Diffusionsteil $\beta_i(u_1, u_2)$ zu finden, weshalb man hier auch von Kreuzdiffusion spricht.

Schon vor John W. Barrett und James F. Blowey haben sich Mathematiker mit dem in (P) gestellten Problem beschäftigt. Ein Ansatz war, dabei die Gleichungen in (1.4a) vektorwertig anzuschreiben, was zu

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (A(\vec{u}) \nabla \vec{u}) = \vec{g}$$

führt, wobei $\vec{u}$ bzw. $\vec{g}$ als Vektoren in $\mathbb{R}^2$ aufzufassen sind mit i-ter Komponente u_i bzw. g_i und

$$A(\vec{u}) := \begin{pmatrix} c_1 + 2a_1u_1 + u_2 & u_1 \\ u_2 & c_2 + 2a_2u_2 + u_1 \end{pmatrix}$$

ist (die Operatoren $\frac{\partial}{\partial t}$, div und ∇ sind komponentenweise zu verstehen). Wenn man nun $u_i \geq 0$ annimmt, erhält man mit der Youngschen Ungleichung (siehe z.B. [11], Seite 138) für $i = 1, 2$

$$u_i\xi_1\xi_2 \geq -u_i|\xi_1||\xi_2| \geq -u_i\left(\frac{\delta_i}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2\delta_i}\xi_2^2\right)$$

woraus mit $\delta_1 = \frac{1}{2}$ und $\delta_2 = 2$

$$u_1\xi_1\xi_2 \geq -\frac{1}{4}u_1\xi_1^2 - u_1\xi_2^2 \qquad \text{bzw.} \qquad u_2\xi_1\xi_2 \geq -\frac{1}{4}u_2\xi_2^2 - u_2\xi_1^2$$

folgt. Daher gilt für einen beliebigen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \xi^T A(\vec{u})\,\xi &= c_1\xi_1^2 + c_2\xi_2^2 + (2a_1u_1 + u_2)\,\xi_1^2 + (2a_2u_2 + u_1)\,\xi_2^2 + (u_1 + u_2)\,\xi_1\xi_2 \\ &\geq c_1\xi_1^2 + c_2\xi_2^2 + 2a_1u_1\xi_1^2 + 2a_2u_2\xi_2^2 - \frac{1}{4}u_1\xi_1^2 - \frac{1}{4}u_1\xi_1^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(c_i + \left(2a_i - \frac{1}{4}\right)u_i\right)\xi_i^2 \end{aligned}$$

Man erkennt also, dass unter den zusätzlichen Voraussetzungen $a_i > \frac{1}{8}$ und $c_i > 0$, für $i = 1, 2$, die Matrix $A(\vec{u})$ gleichmäßig elliptisch ist. Mit diesen Einschränkungen an die Koeffizienten konnten Galiano, Garzón und Jüngel im Jahre 2001 das Problem (P) lösen, siehe [9].
Bald darauf, im Jahr 2003, gelang es den gleichen Herren die Lösbarkeit des Problems auch ohne diese Einschränkungen zu zeigen, jedoch benötigten sie dafür die stetige Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, weshalb ihr Beweis, welcher in [10] zu finden ist, nur im eindimensionalen Fall gültig ist.
Im Jahr 2004 gelang es dann schlussendlich in der Arbeit *„Analysis of a multi-dimensional parabolic population model with strong cross-diffusion“* von Chen und Jüngel, siehe [5], die Existenz globaler Lösungen des Problems (P) für den ein- bis dreidimensionalen Fall zu zeigen. Im Gegensatz zu der hier behandelten Arbeit [2] approximierten die Autoren die Ableitungen bezüglich Zeit und Raum mit finiten Differenzen und betrachteten zunächst nur den Positivteil der Populationsdichten u_i.

Wir wollen nun kurz einen Überblick über die in der Arbeit [2] und hier verwendeten Methoden geben. Im Allgemeinen gehen wir ähnlich wie in [5] vor, jedoch benutzen wir zur Approximation im Raum Ω die Finite Elemente Methode und machen bezüglich der Zeit eine Semidiskretisierung durch finite Differenzen. Außerdem werden hier Abschneidefunktionen verwendet, deren Definitionen auf einer Regularisierungsfunktion F_ε basieren.

- In Kapitel 2 werden die für die Finite Elemente Methode relevanten Einzelheiten, v.a. Abbildungen und Operatoren wie F_ε, behandelt und eine daraus resultierende schwache Formulierung für das Problem (P) aufgestellt.
- In Kapitel 3 zeigen wir mit Hilfe eines Fixpunktargumentes die Lösbarkeit der schwachen Formulierung und leiten in Theorem 3.15 zwei wichtige A-priori-Abschätungen her.
- Mit den erzielten Abschätzungen wird in Kapitel 4 Konvergenz für die Lösungen des FE-Modells gezeigt. Diese Grenzwerte erfüllen dann in einem gewissen schwachen Sinn das Problem (P).

1.2 Notation und bekannte Resultate

Die Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ steht für ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitzrand.

Für einen beliebigen Raum X soll $I_X : X \to X$ die Identität auf X bezeichnen, wobei auf den Index verzichtet wird, falls klar ist, welcher Raum gemeint ist. Außerdem steht $\mathcal{I}$ für die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{d\times d}$.

Wir bezeichnen für $m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ sei in dieser Arbeit stets die Menge der natürlichen Zahlen mit 0) und $1 \le p \le \infty$ die Menge aller Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, sodass

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{für alle} \quad |\alpha| \le m,$$

als den Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$, wobei α ein Multiindex ist und $D^\alpha u$ die partiellen Ableitungen im Sinne der Distributionen sind. Für $\omega \subseteq \Omega$ ist der Raum $W^{m,p}(\omega)$ mit der Norm bzw. Seminorm

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\omega)} \text{ bzw. } |u|^p_{W^{m,p}(\omega)} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\omega)} \quad \text{, für } p<\infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\omega)} = \max_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\omega)} \text{ bzw. } |u|_{W^{m,\infty}(\omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\omega)}\text{, für } p=\infty$$

versehen, wobei im Fall $\omega = \Omega$ die kürzere Schreibweise $\|.\|_{W^{m,p}}$ bzw. $\|.\|_{L^p}$ verwendet wird. Falls $p = 2$ gelten sollte, so schreiben wir $H^m(\omega)$ an Stelle von $W^{m,2}(\omega)$.

Außerdem soll $\|.\|_{C(\overline{\omega})}$ mit $\omega \subseteq \Omega$ für die Supremumsnorm auf dem Raum der stetigen Funktionen $C(\overline{\omega})$ und $\|M\|_2 := \max\{|\lambda|\colon \lambda \text{ ist Eigenwert von } M\}$ für die Spektralnorm einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ stehen.

Alle soeben definierten Räume und Normen für $\omega \subseteq \Omega$ wollen wir auf analoge Weise für Teilmengen von $[0,T]$ und $\Omega_T := \Omega \times [0,T]$ für ein $T > 0$ definieren.

Wir bezeichnen außerdem für $p \in (1,\infty)$ mit p' die konjugierte Zahl, welche durch $p' = \frac{p}{p-1}$ gegeben ist.

Mit $(W^{1,p}(\Omega))'$ soll der Dualraum von $W^{1,p}(\Omega)$ und mit $W^{-1,p'}(\Omega)$ der Dualraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$ bezeichnet werden, also der Raum aller linearen und stetigen Funktionen von $W^{1,p}(\Omega)$ bzw. $W_0^{1,p}(\Omega)$ in die reellen Zahlen. Die Norm auf $(W^{1,p}(\Omega))'$ ist durch die Abbildungsnorm

$$\begin{aligned}\|z\|_{(W^{1,p})'} :&= \sup\left\{\frac{\left|\langle z,\eta\rangle_p\right|}{\|\eta\|_{W^{1,p}}} : \eta\in W^{1,p}(\Omega),\, \eta\neq 0\right\}\\ &= \sup\left\{\left|\langle z,\eta\rangle_p\right| : \eta\in W^{1,p}(\Omega),\, \|\eta\|_{W^{1,p}}\leq 1\right\} \qquad (1.5)\end{aligned}$$

gegeben, wobei $\langle .,.\rangle_p$ die Dualitätsklammer auf $(W^{1,p}(\Omega))'$ bezeichnet. Für $W^{-1,p'}(\Omega)$ ist die Norm analog definiert.

Sei mit $(.,.)$ das innere Produkt des $L^2(\Omega)$ und für einen Vektor $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ die euklidische Norm mit $|x|:=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_d^2}$ gegeben.

Als Letztes soll für eine Funktion f punktweise sein Positivteil durch $[f]_+=\max\{f,0\}$ und sein Negativteil durch $[f]_-=\min\{f,0\}$ notiert sein.

Nun gibt es in der Theorie der Sobolevräume viele sehr hilfreiche Resultate, von denen wir einige im Laufe dieser Arbeit benötigen werden. Eines dieser Resultate ist das Lemma von *Deny-Lions*, dessen Beweis in [8], Lemma $B.67$ auf Seite 491, zu finden ist.

Lemma 1.2 (Deny-Lions)**.** *Für $r\in[1,\infty]$ und $m\geq 1$ gilt*

$$\inf_{\pi\in\mathcal{P}^{m-1}}\|u+\pi\|_{W^{m,r}}\leq C\,|u|_{W^{m,r}}\qquad\forall u\in W^{m,r}(\Omega), \qquad (1.6)$$

wobei $\mathcal{P}^m$ der Raum der Polynome mit Grad kleiner gleich m ist.

Weiters brauchen wir folgende Variante der Ungleichung von Poincaré. In der Literatur ist sie auch unter Satz von Bramble-Hilbert zu finden, oder wird mit diesem eng in Zusammenhang gebracht.

Satz 1.3 (Bramble-Hilbert)**.** *Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand. Dann exisitert eine Konstante $C>0$, sodass für alle $m\geq 1$ und $u\in H^m(\Omega)$*

$$\|u\|_{H^m}^2\leq C\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|D^\alpha u|^2\,dx+\sum_{|\alpha|<m}\left|\int_\Omega D^\alpha u\,dx\right|^2\right)$$

gilt.

Dieses Resultat ist unter anderem in [12] zu finden, Lemma 3.3 auf Seite 84. Der Spezialfall $m=1$ dieses Satzes führt zu der Ungleichung

$$\|u\|_{H^1}^2\leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^1}^2\right). \qquad (1.7)$$

Ein weiteres hilfreiches Resultat ist die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung.

Lemma 1.4 (Gagliardo-Nirenberg)**.** *Für $z \in L^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ gilt*

$$\|z\|_{L^r} \leq C \|z\|_{L^1}^{1-\sigma} \|z\|_{H^1}^{\sigma} \quad \text{mit} \quad r \in \begin{cases} [1,\infty] & \text{für } d=1, \\ [1,\infty) & \text{für } d=2, \\ [1,6] & \text{für } d=3, \end{cases} \tag{1.8}$$

wobei $\sigma = \frac{2(r-1)d}{r(d+2)}$ und $C > 0$ eine von Ω und r abhängige Konstante ist.

Dieses Resultat ist in [15] zu finden, wobei dort für $d = 1, 2$ die Einschränkung $0 \leq \sigma < 1$ bzw. $0 \leq \sigma \leq 1$ für $d = 3$ verlangt wird, was wir hier durch die dimensionsabhängigen Bedingungen an r erhalten. Wir werden von diesem Lemma nur einen Spezialfall benötigen. Setzen wir für $r = \frac{2(d+1)}{d}$, dann gilt mit dem oben definierten σ

$$\begin{aligned} r(1-\sigma) &= r - \frac{2(r-1)d}{d+2} = r - \frac{2d}{d+2}\frac{d+2}{d} = r-2 \\ r\sigma &= \frac{2(r-1)d}{(d+2)} = \frac{2d}{d+2}\frac{d+2}{d} = 2. \end{aligned}$$

Außerdem erfüllt r für jedes $d = 1, 2, 3$ die Voraussetzungen von Lemma 1.4. Daher existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für jedes $z \in L^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$

$$\|z\|_{L^r}^r \leq C \|z\|_{L^1}^{r-2} \|z\|_{H^1}^2 \quad \text{für } r = \frac{2(d+1)}{d} \tag{1.9}$$

gilt.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist, zu zeigen, dass die Approximationen der Finiten Elemente Methode in einem gewissen Sinn gegen eine Lösung des Problems (1.1a) konvergieren. Um diese Konvergentresultate zu erhalten, ist es nützlich A-priori-Abschätzungen herzuleiten, um daraus schwache Konvergenzen zu gewinnen.
Um jedoch das Verhalten nichtlinearer Terme untersuchen zu können, ist es meistens erforderlich, Konvergenz im starken Sinn zu haben. Um diese zu erreichen, kann man oft mit kompakten Einbettungen arbeiten, denn diese haben die Eigenschaft, beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abzubilden. Daher wollen wir das folgende Resultat anführen.

Lemma 1.5 (Aubin)**.** *Seien X, Y und Z Banachräume. Falls die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ kompakt und die Einbettung $Y \hookrightarrow Z$ stetig ist, dann ist die Einbettung*

$$\left\{ \eta \in L^2(0,T;X) : \frac{\partial \eta}{\partial t} \in L^1(0,T;Z) \right\} \hookrightarrow L^2(0,T;Y) \tag{1.10}$$

kompakt.

Der Beweis ist z.B. in [17], Korollar 4 auf Seite 85, zu finden.

2 Das Finite Elemente Modell

In diesem Kapitel wollen wir alle notwendigen Ergebnisse der FEM-Theorie einführen, welche wir für das Finite Elemente Modell des Problems (P) brauchen.
Zunächst listen wir die grundlegenden Voraussetzungen an die Zerlegung von Ω auf, welche wir für unser Modell benötigen und legen uns auf einen bestimmten Finiten Elemente Raum von Funktionen fest, welchen wir auf dieser Zerlegung betrachten wollen.
Später beschäftigen wir uns mit speziellen Abbildungen und Operatoren, wie etwa Abschneidefunktionen, und studieren ihre Eigenschaften.

2.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

In dieser Arbeit sollen das Gebiet Ω und seine Triangulierungen stets den folgenden Voraussetzungen genügen:

(V) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sei ein offener und zusammenhängender Polyeder. Wir betrachten die Familie von zulässigen Triangulierungen $\left\{\mathcal{T}^h\right\}_{h>0}$, wobei $\kappa \in \mathcal{T}^h$ offene d-Simplizes sind mit

$$h_\kappa := \operatorname{diam}(\kappa) \quad \text{und} \quad h := \max_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa,$$

sodass für alle $h > 0$ und $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{T}^h$, $\kappa_1 \neq \kappa_2$

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\kappa\in\mathcal{T}^h} \overline{\kappa} \quad \text{und} \quad \kappa_1 \cap \kappa_2 = \emptyset$$

gilt und jede Seitenfläche eines jeden Elements κ die Seitenfläche eines anderen Elements oder Teil von $\partial\Omega$ ist. Außerdem sollen die d-Simplizes κ rechtwinkelig sein, daher soll im Fall $d = 2$ ein jedes Element κ ein rechtwinkeliges Dreieck sein und im Fall $d = 3$ ein Tetraeder mit einer Ecke, in welcher sich alle Kanten im rechten Winkel treffen.
Die letzte Bedingung an die Zerlegung von Ω soll sein, dass $\left\{\mathcal{T}^h\right\}_{h>0}$ eine quasi-uniforme Familie von Triangulierungen sein soll, es sollen also zwei positive Konstanten σ und ν exisitieren, sodass

$$\frac{h_\kappa}{\rho_\kappa} \leq \sigma \quad \text{und} \quad \frac{h}{h_\kappa} \leq \nu \quad \text{für alle } \kappa \in \bigcup_{h>0} \mathcal{T}^h \tag{2.1}$$

gilt, wobei $\rho_\kappa := \sup\{\operatorname{diam}(K)\colon K \subseteq \kappa \text{ ist eine Kugel}\}$.

Für eine Triangulierung $\mathcal{T}^h$ wollen wir nun den Finite Elemente Raum S^h durch

$$S^h := \left\{\chi \in C(\overline{\Omega}), \text{sodass } \chi|_\kappa \text{ ist affin } \forall\, \kappa \in \mathcal{T}^h\right\} \subseteq H^1(\Omega) \tag{2.2}$$

einführen und bemerken, dass für $\chi \in S^h$ auf Grund der Stetigkeit auch $\chi|_{\overline{\kappa}}$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ affin ist. Seien nun die Eckpunkte, auch Knoten genannt, der endlich vielen d-Simplizes $\kappa \in \mathcal{T}^h$ durchnummeriert, so wollen wir mit J die Menge der Nummerierungen und mit $\{p_j\}_{j\in J}$ die Menge der Koordinaten aller Knoten bezeichnen. Wir können mit

$$B^h := \left\{ \chi_j \in S^h \text{ , sodass } \chi_j(p_i) = \delta_i^j \text{ dür alle } i,j \in J \right\}$$

eine Basis von S^h angeben, wobei δ_i^j für das Kronecker-Delta steht, welches $\delta_i^j = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_i^j = 1$ für $i = j$ erfüllt. Mit dieser Basis kann jede Funktion $\chi \in S^h$ durch die Linearkombination $\chi = \sum_{j\in J} \chi(p_j)\chi_j$ geschrieben werden.

Bemerkung 2.1.

- Ein Tripel (κ, S^h, B^h) wird in der Literatur als *Finites Element von Lagrangeschem Typ* bezeichnet.
- Da für alle $\chi \in S^h$ und $\kappa \in \mathcal{T}^h$ die Einschränkung $\chi|_{\overline{\kappa}}$ affin ist, gilt für jede Strecke in $\overline{\kappa}$ von der Gestalt $\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$ mit $\lambda \in [0,1]$, $\xi_i \in \overline{\kappa}$, $i = 1,2$ (Ein Element κ ist als d-Simplex konvex, also auch sein Abschluss, daher sind diese Strecken auch wirklich in $\overline{\kappa}$ enthalten), dass

  $$\chi|_{\overline{\kappa}}(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) = \lambda\chi|_{\overline{\kappa}}(\xi_1) + (1-\lambda)\chi|_{\overline{\kappa}}(\xi_2)\,.$$

  Mit einem induktiven Argument sieht man leicht ein, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle Konvexkombinationen

  $$\sum_{i=1}^N \lambda_i\xi_i \text{ mit } \lambda_i \in [0,1],\ \xi_i \in \overline{\kappa},\ i = 1,\dots,N, \text{ sodass } \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1,$$

  die Gleichung

  $$\chi|_{\overline{\kappa}}\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda_i\chi|_{\overline{\kappa}}(\xi_i)$$

  erfüllt ist.

In den kommenden Abschnitten wollen wir Abbildungen und Operatoren einführen, welche wir für das in [2] aufgestellte Finite Elemente Modell benötigen werden.

2.1.1 Die Projektion π^h und die Bilinearform $(.,.)^h$

Da viele Funktionen, die wir für unser Modell betrachten wollen, nicht in S^h liegen, ist es sinnvoll eine Projektion auf diesen Raum zu definieren. Mit Hilfe dieser Projektion werden wir dann eine Bilinearform auf $C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$ einführen, welche auf $S^h \times S^h$ sogar

ein inneres Produkt darstellt. Diese Eigenschaft werden wir vor allem in Abschnitt 3.2 benötigen, wo der Existenzbeweis für eine Lösung des in Abschnitt 2.2 formulierten FEM-Modelles betrachtet wird.

Wir führen also zunächst die Projektion $\pi^h : C(\overline{\Omega}) \to S^h$ ein, welche für $\eta \in C(\overline{\Omega})$ die Eigenschaft $(\pi^h\eta)(p_j) = \eta(p_j)$ für alle $j \in J$ hat. Man kann die Projektion, welche in der Literatur auch als der *nodale Interpolant* bekannt ist, daher mit Hilfe der Basisfunktionen $\chi_j \in B^h$ von S^h in der Form

$$(\pi^h\eta)(x) = \sum_{j\in J} \eta(p_j)\,\chi_j(x) \qquad \forall \eta \in C(\overline{\Omega})$$

darstellen. Wir wollen nun einige nützliche Eigenschaften der Abbildung π^h aufführen:

Proposition 2.2. *Die Abbildung $\pi^h : C(\overline{\Omega}) \to S^h$, welche durch $(\pi^h\eta)(p_j) = \eta(p_j)$ definiert ist, hat folgende Eigenschaften:*

1. *π^h ist eine Projektion.*
2. *Für $\eta_1 \le \eta_2$ gilt $\pi^h\eta_1 \le \pi^h\eta_2$.*
3. *Für alle $\eta \in C(\overline{\Omega})$ mit der Eigenschaft, dass $\eta|_{\overline{\kappa}}$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ konvex ist, gilt*

   $$\eta \le \pi^h\eta.$$

   Insbesondere erfüllt jede konvexe Funktion $\eta \in C(\overline{\Omega})$ diese Abschätzung.
4. *Für alle $\chi \in S^h$ gilt*

   $$|\chi| \le \pi^h|\chi|, \tag{2.3a}$$

   $$[\chi]_+ \le \pi^h[\chi]_+ \quad \text{bzw.} \quad \pi^h[\chi]_- \le [\chi]_-. \tag{2.3b}$$
5. *Für alle $\eta \in C(\overline{\Omega})$ gilt*

   $$\left(\pi^h\eta\right)^2 \le \pi^h\eta^2. \tag{2.4a}$$

   Insbesondere gilt daher für alle $\chi \in S^h$

   $$\left(\pi^h[\chi]_\pm\right)^2 \le \pi^h[\chi]_\pm^2. \tag{2.4b}$$

Beweis.

ad 1. Da für alle $\eta \in C(\overline{\Omega})$ die Darstellung $(\pi^h\eta)(x) = \sum_{j\in J} \eta(p_j)\,\chi_j(x)$ gilt, ist sofort zu erkennen, dass π^h eine lineare Abbildung ist. Außerdem sieht man, dass wegen

$$\left(\sum_{j\in J} d_j\,\chi_j\right)(p_i) = d_i \qquad d_i \in \mathbb{R},\ \forall j \in J$$

für alle $\eta \in C(\overline{\Omega})$ gelten muss, dass

$$\pi^h\left(\pi^h\eta\right) = \pi^h\left(\sum_{j_1\in J}\eta(p_{j_1})\,\chi_{j_1}\right) = \sum_{j_2\in J}\underbrace{\left(\sum_{j_1\in J}\eta(p_{j_1})\,\chi_{j_1}\right)(p_{j_2})}_{=\eta(p_{j_1})\,\delta_{j_1}^{j_2}}\chi_{j_2}$$

$$= \sum_{j_1\in J}\eta(p_{j_1})\,\chi_{j_1} = \pi^h\eta.$$

Daher ist π^h eine Projektion.

ad 2. Wegen $\chi_j \geq 0$ und $\eta_1(p_j) \leq \eta_2(p_j)$ für alle $j \in J$ gilt

$$\pi^h\eta_1 = \sum_{j\in J}\eta_1(p_j)\,\chi_j \leq \sum_{j\in J}\eta_2(p_j)\,\chi_j = \pi^h\eta_2.$$

ad 3. In den Dimensionen $d = 1, 2$ ist dieser Punkt anschaulich klar, wir wollen ihn jedoch exakt ausführen. Sei dafür η eine stetige Funktion, sodass $\eta|_{\overline{\kappa}}$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ konvex ist. Da jedes Element $\kappa \in \mathcal{T}^h$ als d-Simplex eine konvexe Menge ist, kann man jeden Punkt $x \in \overline{\kappa}$ schreiben als

$$x = \sum_{i=0}^{d}\lambda_{j_i}p_{j_i} \quad \text{mit} \quad \lambda_{j_i} \in [0,1],\, i = 0,\dots,d,\, \sum_{i=0}^{d}\lambda_{j_i} = 1,$$

wobei p_{j_i} für $i = 0,\dots,d$ die Ecken von κ sind. Mit der Jensen-Ungleichung und mit $(\pi^h\eta)(p_j) = \eta(p_j)$ für alle $j \in J$ erhalten wir

$$\eta(x) = \eta\left(\sum_{i=0}^{d}\lambda_{j_i}p_{j_i}\right) \leq \sum_{i=0}^{d}\lambda_{j_i}\eta(p_{j_i}) = \sum_{i=0}^{d}\lambda_{j_i}(\pi^h\eta)(p_{j_i})$$

$$\overset{Bem.2.1}{=} (\pi^h\eta)\left(\sum_{i=0}^{d}\lambda_{j_i}p_{j_i}\right) = (\pi^h\eta)(x)$$

ad 4. Wir beweisen zunächst die erste Ungleichung von (2.3b). Hierfür zeigen wir, dass der Positivteil einer affinen Funktion eine konvexe Funktion ist. Sei daher $x_i \in \overline{\kappa}$ für ein $\kappa \in \mathcal{T}^h$ und $\lambda_i \in [0,1]$, $i = 1,\dots,N$, mit $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = 1$. Wir betrachten nun für ein $\chi \in S^h$ die Funktion $[\chi(.)]_+$ angewandt auf die Konvexkombination $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i$, welche wegen der Konvexität der Menge κ wieder in dieser liegt. Nun gilt wegen Bemerkung 2.1, $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1,\dots,N$ und wegen $[a+b]_+ \leq [a]_+ + [b]_+$ für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left[\chi\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i\right)\right]_+ \overset{Bem.2.1}{=} \left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\chi(x_i)\right]_+ \leq \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[\chi(x_i)\right]_+$$

Daher ist die Funktion $([\chi(.)]_+)|_{\overline{\kappa}}$ konvex und die erste Ungleichung aus (2.3b) folgt aus dem dritten Punkt dieser Proposition. Die zweite Ungleichung zeigt

man analog, indem man verwendet, dass $[\chi(.)]_-$ konkav ist.
Der Punkt (2.3a) ist eine einfache Folgerung der Ungleichungen von (2.3b): Wegen $|\chi| = [\chi]_+ + (-[\chi]_-)$ kann man $|\chi|$ als Summe zweier konvexer Funktionen schreiben und ist daher selber wieder konvex. Wieder folgt die behauptete Ungleichung aus dem Punkt 3.

ad 5. Für alle $x \in \Omega$ und $\chi_j \in B^h$ gilt $\sum_{j\in J} \chi_j(x) = 1$ und $\chi_j(x) \in [0,1]$, daher ist $(\pi^h\eta)(x) = \sum_{j\in J} \eta(p_j)\chi_j(x)$ nichts anderes als eine Konvexkombination. Da $s \mapsto s^2$ eine konvexe Funktion ist, gilt für alle $x \in \Omega$ nach der Jensen-Ungleichung

$$\big((\pi^h\eta)(x)\big)^2 = \left(\sum_{j\in J} \eta(p_j)\chi_j(x)\right)^2 \le \sum_{j\in J} \eta^2(p_j)\chi_j(x) = \pi^h[\eta(x)]^2,$$

womit der Punkt (2.4a) gezeigt ist. Die Ungleichungen in (2.4b) folgen nun sofort aus der soeben gezeigten Ungleichung.

□

Als nächstes wollen wir für $\eta_1, \eta_2 \in C(\overline{\Omega})$ die Bilinearform

$$(\eta_1, \eta_2)^h := \int_\Omega \pi^h(\eta_1(x)\,\eta_2(x))dx = \sum_{j\in J} m_j\,\eta_1(p_j)\,\eta_2(p_j) \tag{2.5}$$

definieren, wobei $m_j := \int_\Omega \chi_j dx > 0$. Die Summendarstellung in (2.5) ist leicht einzusehen, denn $\pi^h(\eta)$ ist genau die Projektion von $C(\overline{\Omega})$ auf den Raum S^h mit $\pi^h(\eta)(p_j) = \eta(p_j)$ für alle $j \in J$. Daher können wir die Funktion $\pi^h(\eta_1\,\eta_2)$ als Linearkombination der Basisfunktionen $\chi_j \in B^h$ schreiben und erhalten

$$\int_\Omega \pi^h(\eta_1(x)\,\eta_2(x))dx = \int_\Omega \sum_{j\in J} \eta_1(p_j)\,\eta_2(p_j)\,\chi_j dx = \sum_{j\in J} \eta_1(p_j)\,\eta_2(p_j) \underbrace{\int_\Omega \chi_j dx}_{=m_j}.$$

Proposition 2.3. *Die Abbildung $(.,.)^h : C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *$(.,.)^h$ ist ein semi-inneres Produkt. Auf dem Raum S^h definiert $(.,.)^h$ sogar ein inneres Produkt. Somit definiert $|\eta|_h := \sqrt{(\eta,\eta)^h}$ eine Seminorm bzw. auf dem Raum S^h sogar eine Norm.*
2. *Für alle $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in C(\overline{\Omega})$ gilt $(\eta_1, \eta_2\,\eta_3)^h = (\eta_1\,\eta_2, \eta_3)^h = (\eta_1\,\eta_2\,\eta_3, 1)^h$.*
3. *Für $\eta_1 \le \eta_2$ gilt $(\eta_1, 1)^h \le (\eta_2, 1)^h$.*
4. *Für alle $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in C(\overline{\Omega})$ gilt $(\pi^h(\eta_1)\,\pi^h(\eta_2), \eta_3)^h = (\eta_1\,\eta_2, \eta_3)^h$.*

5. *Für $\eta \leq 0$ (bzw. ≥ 0) gilt $(\eta, 1)^h \leq 0$ (bzw. ≥ 0)*

Beweis.

ad 1. Mit der Summendarstellung $(\eta_1, \eta_2)^h = \sum_{j\in J} m_j\, \eta_1(p_j)\, \eta_2(p_j)$, für $\eta_1, \eta_2 \in C(\overline{\Omega})$ aus der Definition (2.5) sieht man sofort, dass für $\eta, \eta_1, \eta_2 \in C(\overline{\Omega})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften $(\eta_1 + \eta_2, \eta)^h = (\eta_1, \eta)^h + (\eta_2, \eta)^h$, $(\lambda\, \eta_1, \eta_2)^h = \lambda\, (\eta_1, \eta_2)^h$ und $(\eta_1, \eta_2)^h = (\eta_2, \eta_1)^h$ erfüllt sind. Außerdem gilt wegen $m_j = \int_\Omega \chi_j dx > 0$, dass $(\eta, \eta)^h = \sum_{j\in J} m_j\, \eta^2(p_j) \geq 0$, womit wir alle Eigenschaften für ein semi-inneres Produkt haben, welches mit $|\eta|_h := \sqrt{(\eta, \eta)^h}$ eine Seminorm induziert. Sei nun η aus S^h, also $\eta|_\kappa$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ eine affine Funktion. Wegen $S^h \subseteq C(\overline{\Omega})$ gelten alle Eigenschaften für ein semi-inneres Produkt auch für $(.,.)^h|_{S^h\times S^h}$, daher bleibt uns nur mehr zu zeigen, dass aus $(\eta, \eta)^h|_{S^h\times S^h} = (\eta, \eta)^h = 0$ folgt, dass $\eta \equiv 0$. Nun gilt aber wegen $m_j > 0$, dass aus $(\eta, \eta)^h = \sum_{j\in J} m_j\, \eta^2(p_j)$ folgt, dass $\eta(p_j) = 0$ für alle $j \in J$ gelten muss. Daher ist $\eta|_\kappa$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ eine affine Funktion, welche an ihren Eckpunkten p_j den Wert 0 annimmt, und muss deswegen schon mit der Nullfunktion übereinstimmen. Somit ist $(.,.)^h|_{S^h\times S^h}$ sogar ein inneres Prokukt, welches auf S^h eine Norm induziert.

ad 2. Wir nehmen zwei Funktionen η_1, η_2 aus $C(\overline{\Omega})$. Da das Produkt zweier Funktionen punktweise definiert ist, erhalten wir aus der Summendarstellung in (2.5) die gewünschten Gleichungen

$$\begin{aligned}(\eta_1, \eta_2\, \eta_3)^h &= \sum_{j\in J} m_j\, \eta_1(p_j)\, \eta_2(p_j)\, \eta_3(p_j) = \sum_{j\in J} m_j\, (\eta_1\, \eta_2)\, (p_j)\eta_3(p_j) = (\eta_1\, \eta_2, \eta_3)^h \\ &= \sum_{j\in J} m_j\, (\eta_1\, \eta_2)\, (p_j)\, \eta_3(p_j) = \sum_{j\in J} m_j\, (\eta_1\, \eta_2\, \eta_3)\, (p_j) = (\eta_1\, \eta_2\, \eta_3, 1)^h.\end{aligned}$$

ad 3. Sei $\eta_1 \leq \eta_2$, mit $\eta_1, \eta_2 \in C(\overline{\Omega})$. Daraus folgt insbesondere, dass $\eta_1(p_j) \leq \eta_2(p_j)$ für alle Punkte $j \in J$ und wir bekommen aus (2.5) und wegen $m_j > 0$, dass

$$(\eta_1, 1)^h = \sum_{j\in J} m_j\, \eta_1(p_j) \leq \sum_{j\in J} m_j\, \eta_2(p_j) = (\eta_2, 1)^h$$

gilt.

ad 4. Da π^h die Projektion mit $\pi^h(\eta)(p_j) = \eta(p_j)$ für alle $j \in J$ und $\eta \in C(\overline{\Omega})$ ist, folgt aus der Summendarstellung des semi-inneren Produkts $(.,.)^h$, dass für $\eta_1, \eta_2 \in C(\overline{\Omega})$

$$(\pi^h(\eta_1), \eta_2)^h = \sum_{j\in J} m_j\, \pi^h(\eta_1)(p_j)\eta_2(p_j) = \sum_{j\in J} m_j\, \eta_1(p_j)\eta_2(p_j) = (\eta_1, \eta_2)^h \tag{2.6}$$

gelten muss. In Punkt 2 haben wir gesehen, dass wir innerhalb von $(.,.)^h$ stetige Funktionen beliebig verschieben können. Daher folgt mit einer weiteren Funktion $\eta_3 \in C(\overline{\Omega})$

$$(\pi^h(\eta_1)\,\pi^h(\eta_2),\eta_3)^h = (\pi^h(\eta_1),\pi^h(\eta_2)\,\eta_3)^h \overset{(2.6)}{=} (\eta_1,\pi^h(\eta_2)\,\eta_3)^h = (\pi^h(\eta_2),\eta_1\,\eta_3)^h \overset{(2.6)}{=} (\eta_2,\eta_1\,\eta_3)^h = (\eta_1\,\eta_2,\eta_3)^h.$$

ad 5. Folgt sofort aus Punkt 3 mit $\eta_2 = 0$ (bzw. $\eta_1 = 0$) und der Linearität von $(.,1)^h$ aus Punkt 1.

□

2.1.2 Die Abbildungen F_ε, λ_ε und Λ_ε

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, sowie bei Galerkin-Verfahren und der FEM, werden oft Abschneidefunktionen zu Hilfe genommen. Einerseits lässt sich mit ihnen so mancher Beweis vereinfachen, andererseits sind sie oft sehr nützlich, um die Beschränktheit von Lösungen zu zeigen (was z.B. bei der Positivität von Lösungen von Populationsmodellen hilfreich sein kann).
In diesem Abschnitt führen wir gleich mehrere solcher Abschneidefunktionen und ähnliche Abbildungen ein. Die wichtigsten für unser Modell werden F_ε, λ_ε und Λ_ε sein, die uns in einem gewissen Sinn Positivität gewährleisten werden. Diese Positivität wird in vielen Beweisschritten der kommenden Abschnitte eine tragende Rolle spielen.

Zunächst wollen wir die Funktionen F_ε, die sehr eng mit den Abbildungen λ_ε und Λ_ε zusammenhängt, angeben und studieren.

Lemma 2.4. *Die Funktion F_ε, welche für $\varepsilon \in (0,1)$ durch*

$$F_\varepsilon(s) := \begin{cases} \frac{s^2-\varepsilon^2}{2\varepsilon} + (\ln\varepsilon - 1)s + 1 & s \le \varepsilon, \\ (\ln s - 1)s + 1 & \varepsilon < s < \varepsilon^{-1}, \\ \frac{\varepsilon(s^2-\varepsilon^{-2})}{2} + (\ln\varepsilon^{-1} - 1)s + 1 & \varepsilon^{-1} \le s \end{cases} \tag{2.7}$$

definiert ist, ist konvex und erfüllt $F_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$, wobei für die ersten zwei Ableitungen von F_ε

$$F_\varepsilon{}'(s) = \begin{cases} \varepsilon^{-1}s + \ln\varepsilon - 1 & s \le \varepsilon, \\ \ln s & \varepsilon < s < \varepsilon^{-1}, \\ \varepsilon s + \ln\varepsilon^{-1} - 1 & \varepsilon^{-1} \le s \end{cases} \tag{2.8a}$$

$$F_\varepsilon{}''(s) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} & s \le \varepsilon, \\ s^{-1} & \varepsilon < s < \varepsilon^{-1}, \\ \varepsilon & \varepsilon^{-1} \le s \end{cases} \tag{2.8b}$$

gilt. Weiters gilt $F_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*, d.h. die Funktion nimmt nur nichtnegative Werte an. Außerdem gilt folgende Aussage:*

$$\forall\, s \geq 0\ \exists\, C(s) > 0 \text{ unabhängig von } \varepsilon, \text{ sodass } F_\varepsilon(s) \leq C(s) \tag{2.9}$$

und die Funktion $s \mapsto C(s)$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}_{\geq 0}$*.*

Beweis. Man sieht sofort, dass die Funktion F_ε stetig ist und an allen Stellen $s \notin \left\{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\right\}$ unendlich oft differenzierbar ist. Um $F_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$ nachzuweisen, bleibt daher zu überprüfen, ob die beidseitigen Limites der Differenzenquotienten an den Stellen ε und ε^{-1} existieren und übereinstimmen.

F_ε **zweimal stetig differenzierbar:** Wir betrachten zunächst die erste Ableitung von (2.7) an der Stelle $s = \varepsilon$. Für den linksseitigen Differenzenquotient gilt

$$\begin{aligned}\frac{F_\varepsilon(\varepsilon) - F_\varepsilon(\varepsilon - h)}{h} &= \frac{1}{h}\Bigg[(\ln\varepsilon - 1)\varepsilon + 1 \\ &\qquad - \left(\frac{(\varepsilon - h)^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} + (\ln\varepsilon - 1)(\varepsilon - h) + 1\right)\Bigg] \\ &= \frac{1}{h}\left[\frac{2\varepsilon h - h^2}{2\varepsilon} + (\ln\varepsilon - 1)h\right] = 1 - \frac{h}{2\varepsilon} + (\ln\varepsilon - 1),\end{aligned}$$

daher $\lim_{h\to 0} \frac{F_\varepsilon(\varepsilon) - F_\varepsilon(\varepsilon - h)}{h} = \ln\varepsilon$.
Für die rechtsseitige Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{F_\varepsilon(\varepsilon + h) - F_\varepsilon(\varepsilon)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[((\ln(\varepsilon + h) - 1)(\varepsilon + h)) - ((\ln\varepsilon - 1)\varepsilon)\right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial s}\left((\ln s - 1)s\right)\right]_{s=\varepsilon} = \left[(\ln s - 1) + 1\right]_{s=\varepsilon} = \ln\varepsilon.\end{aligned}$$

Somit gilt auch $\lim_{h\to 0} \frac{F_\varepsilon(\varepsilon+h) - F_\varepsilon(\varepsilon)}{h} = \ln\varepsilon$ und wir sehen, dass F_ε an der Stelle $s = \varepsilon$ differenzierbar ist.
Eine analoge Rechung zeigt, dass die Funktion F_ε auch an der Stelle $s = \varepsilon^{-1}$ differenzierbar ist. Somit erhalten wir für die Ableitung von F_ε tatsächlich die Funktion ${F_\varepsilon}'$ aus (2.8a).
Nun betrachten wir die zweite Ableitung an der Stelle $s = \varepsilon$. Der linksseitige Differenzenquotient erfüllt

$$\frac{{F_\varepsilon}'(\varepsilon) - {F_\varepsilon}'(\varepsilon - h)}{h} = \frac{1}{h}\left[(\ln\varepsilon) - \left(\varepsilon^{-1}(\varepsilon - h) + \ln\varepsilon - 1\right)\right] = \frac{1}{h}\left[\varepsilon^{-1}h\right] = \varepsilon^{-1},$$

und für die rechtsseitige Ableitung ergibt sich

$$\lim_{h\to 0} \frac{{F_\varepsilon}'(\varepsilon + h) - {F_\varepsilon}'(\varepsilon)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\ln(\varepsilon + h) - \ln\varepsilon\right] = \left[\frac{\partial}{\partial s}\ln s\right]_{s=\varepsilon} = \varepsilon^{-1},$$

daher $\lim_{h\to 0} \frac{F_\varepsilon'(\varepsilon)-F_\varepsilon'(\varepsilon-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F_\varepsilon(\varepsilon+h)-F_\varepsilon(\varepsilon)}{h}$. Eine analoge Rechnung bringt uns die Differenzierbarkeit von $F_\varepsilon{}'$ bei $s = \varepsilon^{-1}$, woraus die zweimal stetige Differnzierbarkeit von F_ε folgt. Da außerdem $F_\varepsilon{}''(s) > 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt, ist die Funktion F_ε konvex.

$F_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$**:** Aus $F_\varepsilon{}'(1) = 0$ und der Konvexität von F_ε folgt, dass F_ε ein globales Minimum an der Stelle $s = 1$ hat mit $F_\varepsilon(1) = 0$. Deshalb gilt $F_\varepsilon(s) \geq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und die Behauptung ist gezeigt.

Aussage (2.9)**:** Wir bemerken zunächst, dass $F_\varepsilon(0) = -\frac{\varepsilon}{2} + 1 \leq 1$ und $F_\varepsilon(1) = 0$ gilt, also sind die zwei Fälle $s \in (0,1)$ und $s \in (1,\infty)$ zu untersuchen.
Sei zunächst $s \in (0,1)$ fest gewählt. Da in diesem Fall $\varepsilon \in (0,1)$ nicht $\varepsilon^{-1} \leq s$ erfüllen kann, sind nur die Fälle

$$F_\varepsilon(s) = \begin{cases} \frac{s^2-\varepsilon^2}{2\varepsilon} + (\ln\varepsilon - 1)s + 1 & \varepsilon \geq s > 0, \\ (\ln s - 1)s + 1 & \varepsilon < s < 1 \end{cases}$$

möglich und da für $\varepsilon < s$ der Wert $F_\varepsilon(s) = (\ln s - 1)s + 1$ unabhängig von ε ist, müssen wir nur den Fall $\varepsilon \geq s$ betrachten. Wir definieren also für $s \in (0,1)$ und $\varepsilon \in [s,1)$ die Funktion $G(\varepsilon) := F_\varepsilon(s) = \frac{s^2-\varepsilon^2}{2\varepsilon} + (\ln\varepsilon - 1)s + 1$, welche offensichtlich stetig ist. Nun gilt für die Ableitungen von G wegen $\varepsilon \geq s$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}G(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[-\frac{s^2}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2} + \frac{s}{\varepsilon}\right] = s^2\varepsilon^{-3} - s\varepsilon^{-2} \leq s\varepsilon^{-3}(s-\varepsilon) \leq 0 \qquad \text{bzw.}$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}G(\varepsilon)\right]_{\varepsilon=s} = \left[-\frac{s^2}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2} + \frac{s}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon=s} = 0,$$

also ist die Funktion G konkav und hat ein Maximum an der Stelle $\varepsilon = s$, wobei $G(s) = (\ln s - 1)s + 1$ gilt. Daher gilt für $s \in (0,1)$ stets $F_\varepsilon(s) \leq (\ln s - 1)s + 1$.
Sei nun $s \in (1,\infty)$ fest gewählt. In diesem Fall ist klarerweise $\varepsilon \geq s$ nicht möglich, weshalb für F_ε

$$F_\varepsilon(s) = \begin{cases} (\ln s - 1)s + 1 & \varepsilon < s^{-1}, \\ \frac{\varepsilon(s^2-\varepsilon^{-2})}{2} + (\ln\varepsilon^{-1} - 1)s + 1 & \varepsilon^{-1} \leq s \end{cases} \tag{2.10}$$

gilt und da für $\varepsilon < s^{-1}$ der Wert $F_\varepsilon(s) = (\ln s - 1)s + 1$ wieder unabhängig von ε ist, ist nur der Fall $\varepsilon^{-1} \leq s \Leftrightarrow \varepsilon \in [s^{-1},1)$ interessant. Wir definieren nun für $s \in (1,\infty)$ und $\varepsilon \in [s^{-1},1)$ die Funktion $G(\varepsilon) := F_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s^2-\varepsilon^{-2})}{2} + (\ln\varepsilon^{-1} - 1)s + 1$ und leiten wieder ab, was wegen $\varepsilon s \geq 1$ zu

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}G(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{s^2}{2} + \frac{\varepsilon^{-2}}{2} - \varepsilon^{-1}s\right] = -\varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-2}s = \varepsilon^{-3}(\varepsilon s - 1) \geq 0 \qquad \text{bzw.}$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}G(\varepsilon)\right]_{\varepsilon=s^{-1}} = \left[\frac{s^2}{2} + \frac{\varepsilon^{-2}}{2} - \varepsilon^{-1}s\right]_{\varepsilon=s^{-1}} = 0$$

führt. Daher ist die Funktion G konvex und nimmt ein Minimum an der Stelle $\varepsilon = s^{-1}$ an, somit muss diese Funktion im Intervall $[s^{-1}, 1)$ streng monoton wachsend sein, weshalb

$$G(\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \to 1} G(\varepsilon) = \frac{s^2 - 1}{2} - s + 1 \tag{2.11}$$

gelten muss, wobei diese Schranke wegen $G(\varepsilon) = F_\varepsilon(s) \geq 0$ positiv ist. Daher gilt für $s \in (1, \infty)$ stets $F_\varepsilon(s) \leq \frac{s^2-1}{2} - s + 1$.
Es gilt also für alle $s \in [0, \infty)$, dass $F_\varepsilon(s) \leq C(s)$ mit

$$C(s) := \begin{cases} 1 & s = 0, \\ (\ln s - 1)s + 1 & 0 < s < 1, \\ \frac{s^2-1}{2} - s + 1 & 1 \leq s < \infty, \end{cases}$$

denn es gilt $\lim_{s\to 0}(\ln s - 1)s + 1 = 1$ und $\lim_{s\to 1}(\ln s - 1)s + 1 = \lim_{s\to 1} \frac{s^2-1}{2} - s + 1 = 0$. Offensichtlich ist die Funktion $C(s)$ unabhängig von ε und sogar stetig, womit dieser Punkt vollständig bewiesen ist.

□

In der folgenden Definition werden wir zwei Abschneidefunktionen auf den reellen Zahlen einführen. Im Gegensatz zur ersten Funktion λ_ε, welche im Finiten Elemente Modell einen wichtigen Bestandteil darstellen wird, wird die Funktion $\widetilde{\lambda}_\varepsilon$ nur als Hilfsmittel im Beweis von Lemma 4.4 benötigt.

Definition 2.5. *Wir definieren die zwei Abschneidefunktionen* $\lambda_\varepsilon : \mathbb{R} \to [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ *und* $\widetilde{\lambda}_\varepsilon : \mathbb{R} \to (-\infty, \varepsilon^{-1}]$ *durch*

$$\lambda_\varepsilon(s) := \left[F_\varepsilon''(s)\right]^{-1} = \begin{cases} \varepsilon & s \leq \varepsilon, \\ s & \varepsilon < s < \varepsilon^{-1}, \\ \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \leq s \end{cases} \quad \text{und} \quad \widetilde{\lambda}_\varepsilon(s) := \begin{cases} s & s < \varepsilon^{-1}, \\ \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \leq s. \end{cases} \tag{2.12}$$

Bemerkung 2.6.

- Man sieht leicht durch Fallunterscheidungen ein, dass für $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$

  $$|\lambda_\varepsilon(s_1) - \lambda_\varepsilon(s_2)| \leq |s_1 - s_2|$$

  gilt. Die Funktion $\lambda_\varepsilon(s)$ ist also Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1.

- Aus dem letzten Punkt von Proposition 2.2 folgt

  $$\left(\pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right)^2 \leq \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]^2 \qquad \forall\, \chi \in S^h. \tag{2.13}$$

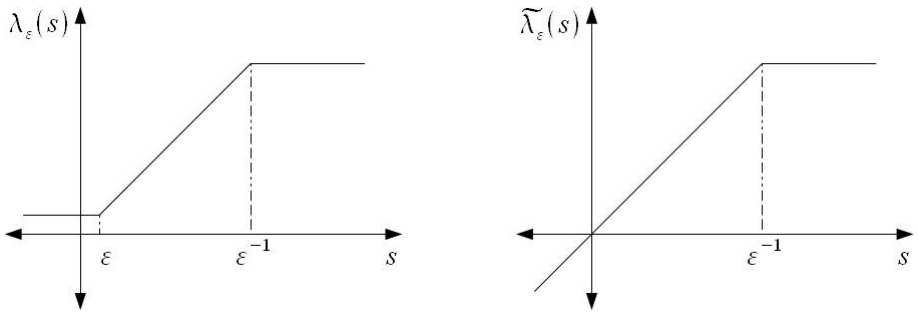

Abbildung 1: Die Abschneidefunktionen $\lambda_\varepsilon(s)$ und $\widetilde{\lambda}_\varepsilon(s)$

- Später werden wir daran interessiert sein, die Funktionen ${\lambda_\varepsilon}^n(s)$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ nach oben durch n-te Potenzen von affinen Funktionen abzuschätzen. Für $s \geq \varepsilon$ gilt offensichtlich, dass ${\lambda_\varepsilon}^n(s) \leq s^n$. Für den Fall, dass s kleiner ε oder sogar negativ ist, sieht man leicht die Gültigkeit von ${\lambda_\varepsilon}^n(s) = \varepsilon^n \leq \varepsilon^n + |s|^n$. Somit gilt in Summe

$$ {\lambda_\varepsilon}^n(s) \leq \varepsilon^n + s^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \text{ gerade}, \tag{2.14} $$

  wobei ε^n und s^n n-te Potenzen affiner Funktionen sind.

- Es ist durch Fallunterscheidungen leicht einzusehen, dass für $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$

$$ \lambda_\varepsilon(s_1 + s_2) \leq \lambda_\varepsilon(s_1) + \lambda_\varepsilon(s_2) \qquad \text{und} \qquad \lambda_\varepsilon(ts) \leq \lambda_\varepsilon(s) \tag{2.15} $$

  gilt.

- Es gilt

$$ \|\lambda_\varepsilon(\chi)\|_{W^{1,p}} + \|\lambda_\varepsilon(\chi)\|_{L^\infty} \leq C \qquad \forall\, \chi \in S^h,\, p \in [1,\infty], \tag{2.16} $$

  wobei $C > 0$ nur von den Werten $\|\chi\|_{W^{1,p}}$ und $\|\chi\|_{L^\infty}$ abhängt. Ähnlich wie im zweiten Punkt dieser Bemerkung sieht man, dass $\lambda_\varepsilon(\chi)$ wegen $\varepsilon \in (0,1)$ und $\varepsilon \leq \lambda_\varepsilon(\chi) \leq \varepsilon + \|\chi\|_{L^\infty} \leq 1 + \|\chi\|_{L^\infty}$ beschränkt ist. Außerdem gilt wegen ${\lambda_\varepsilon}' \leq 1$ (im distributionellen Sinne) und der Kettenregel

$$ \|\nabla\lambda_\varepsilon(\chi)\|_{L^p} \leq \left\|{\lambda_\varepsilon}'(\chi)\nabla\chi\right\|_{L^p} \leq \|\nabla\chi\|_{L^p} $$

  und somit

$$ \|\lambda_\varepsilon(\chi)\|_{W^{1,p}}^p = \|\lambda_\varepsilon(\chi)\|_{L^p}^p + \|\nabla\lambda_\varepsilon(\chi)\|_{L^p}^p \leq \mu(\Omega)\,(1 + \|\chi\|_{L^\infty})^p + \|\nabla\chi\|_{L^p}^p \leq C. $$

Wie schon erwähnt, zeichnen sich die Funktionen F_ε und λ_ε vor allem durch ihre Positivität aus. Wir wollen jedoch noch andere Eigenschaften zeigen, die in den Beweisen von Kapitel 3 sehr hilfreich sein werden.

Proposition 2.7. *Die Funktionen F_ε, ${F_\varepsilon}'$ und λ_ε erfüllen für alle $\varepsilon \in (0, e^{-2})$ die Abschätzungen*

$$F_\varepsilon(s) \geq \frac{\varepsilon}{2}s^2 - 2 \quad \forall s \geq 0 \qquad \text{und} \qquad F_\varepsilon(s) \geq \frac{s^2}{2\varepsilon} \quad \forall s \leq 0, \tag{2.17a}$$

$$\max\left\{\lambda_\varepsilon(s), s{F_\varepsilon}'(s)\right\} \leq 2F_\varepsilon(s) + \mathfrak{c} \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.17b}$$

$$\lambda_\varepsilon(s){F_\varepsilon}'(s) \geq s - 1 \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.17c}$$

$$F_\varepsilon(\lambda_\varepsilon(s)) \leq F_\varepsilon(s) \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.17d}$$

wobei $\mathfrak{c} := 2(e^{\frac{1}{2}} - 1)$. Außerdem gilt

$$\frac{\varepsilon^{-1}}{2}[s]_-^2 \leq F_\varepsilon([s-1]_- + 1) \leq F_\varepsilon(s) \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Bemerkung 2.8. Eine einfache Kurvendiskussion zeigt, dass die Ungleichung

$$s(\ln s - 1) + 1 \geq 0 \qquad \forall s \geq 0 \tag{2.19}$$

erfüllt ist. Es gilt nämlich $(s(\ln s - 1) + 1)' = \ln s$ und $(s(\ln s - 1) + 1)'' = \frac{1}{s}$, was einerseits zeigt, dass $s(\ln s - 1) + 1$ konvex für $s \geq 0$ ist und andererseits, dass die Funktion $s \mapsto s(\ln(s) - 1) + 1$ bei $s = 1$ als Tangente die konstante Nullfunktion hat. Somit muss $s(\ln s - 1) + 1$ stets über dieser Tangente liegen, was die Behauptung zeigt.

Beweis von Proposition 2.7.

ad (2.17a)**:** Wir betrachten zunächst die erste Ungleichung und beginnen mit dem Fall $0 \leq s \leq \varepsilon$. Wegen der Wahl von ε gilt $\ln \varepsilon - 1 \leq 0$ und wir erhalten mit Hilfe von (2.19)

$$F_\varepsilon(s) = \frac{s^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} + (\ln \varepsilon - 1)s + 1 \geq \frac{s^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} + (\ln \varepsilon - 1)\varepsilon + 1 \geq \frac{s^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}.$$

Außerdem erhält man durch einfaches Umformen

$$\frac{s^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} \geq \frac{\varepsilon}{2}s^2 - 2 \iff s^2(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon(4 - \varepsilon) \geq 0,$$

wobei man sieht, dass wegen $\varepsilon \in (0, e^{-2})$ die Summanden $s^2(1-\varepsilon^2)$ und $\varepsilon(4-\varepsilon)$ größer Null sind und daher die letzte Ungleichung erfüllt ist.
Für den zweiten Fall $\varepsilon < s < \varepsilon^{-1}$ ist

$$F_\varepsilon(s) = s(\ln s - 1) + 1 \geq \frac{\varepsilon}{2}s^2 - 2 =: f(s)$$

zu zeigen. Da ${F_\varepsilon}'(s) = \ln s$ monoton steigend ist und $f'(s) = \varepsilon s$, mit $0 < \varepsilon s \leq 1$, gilt, können wir

$$ {F_\varepsilon}'(s) \geq 1 \geq f'(s) > 0 \qquad \text{für alle } s \geq e^1 \in (\varepsilon, \varepsilon^{-1}) \tag{2.20} $$

folgern. Zudem folgt, dass $f(s)$ monoton steigend ist, was wegen $f(e^1) = \frac{\varepsilon}{2}e^2 - 2 \leq 0$ auch $f(s) \leq 0$ für alle $s \in (\varepsilon, e^1)$ impliziert. Daher gilt einerseits wegen (2.19)

$$ F_\varepsilon(s) = s(\ln s - 1) + 1 \geq 0 \geq f(s) = \frac{\varepsilon}{2}s^2 - 2 \qquad \text{für alle } s \in (\varepsilon, e^1), $$

und andererseits wegen $F_\varepsilon(e^1) = 1$ und (2.20)

$$ F_\varepsilon(e^1) \geq f(e^1) \qquad \text{und} \qquad {F_\varepsilon}'(s) \geq f'(s) \quad \forall s \in [e^1, \varepsilon^{-1}), $$

woraus auch die Gültigkeit von $F_\varepsilon(s) \geq \frac{\varepsilon}{2}s^2 - 2$ auf dem Intervall (e^1, ε^{-1}), und somit für alle s zwischen ε und ε^{-1} folgt.
Für den letzten Fall $s \geq \varepsilon^{-1}$ können wir

$$ \begin{aligned} F_\varepsilon(s) \geq \frac{\varepsilon}{2}s^2 - 2 &\iff \frac{\varepsilon(s^2 - \varepsilon^{-2})}{2} + (\ln \varepsilon^{-1} - 1)s + 1 \geq \frac{\varepsilon}{2}s^2 - 2 \\ &\iff 2\varepsilon s \left(\ln \varepsilon^{-1} - 1\right) + 6\varepsilon \geq 1 \end{aligned} $$

umformen. Man sieht nun leicht ein, dass $\varepsilon^{-1} \in (e^{-2}, \infty)$ die Abschätzungen $2\varepsilon s(\ln \varepsilon^{-1} - 1) \geq 2\varepsilon s \geq 2$ impliziert, und daher die letzte Ungleichung auch für diesen Fall erfüllt ist.

Nun wollen wir die zweite Ungleichung beweisen. Für $s \leq 0$ gilt $F_\varepsilon(s) = \frac{s^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} + \ln(\varepsilon - 1)s + 1$ und wir erhalten, dass die gewünschte Ungleichung

$$ F_\varepsilon(s) = \frac{s^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} + (\ln \varepsilon - 1)s + 1 \geq \frac{s^2}{2\varepsilon} $$

äquivalent zu

$$ (\ln \varepsilon - 1)s \geq \frac{\varepsilon}{2} - 1 $$

ist. Nun gilt aber wegen $\varepsilon \in (0, e^{-2})$, dass $\ln \varepsilon - 1 \leq 0$, und somit die linke Seite der Ungleichung $(\ln \varepsilon - 1)s \geq 0$ erfüllt. Für die rechte Seite hingegen gilt wegen $\varepsilon \in (0, e^{-2})$ sicherlich $\frac{\varepsilon}{2} - 1 \leq 0$. Damit ist die Ungleichung erfüllt und (2.17a) gezeigt.

ad (2.17b)**:** Sei zunächst $s \leq \varepsilon$, wofür $\lambda_\varepsilon(s) \equiv \varepsilon$ gilt und wir daher

$$ \max\left\{\varepsilon, s(\varepsilon^{-1}s + \ln \varepsilon - 1)\right\} \leq 2\left(\frac{s^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} + (\ln \varepsilon - 1)s + 1\right) + \mathfrak{c} $$

zu zeigen haben. Klarerweise ist die rechte Seite größer als ε, denn es gilt $\mathfrak{c} > 1 > \varepsilon$ und außerdem wegen Lemma 2.4 $F_\varepsilon(s) \geq 0$. Für den zweiten Term $s(\varepsilon^{-1}s + \ln\varepsilon - 1)$ ist die Ungleichung äquivalent zu

$$0 \leq s\underbrace{(\ln\varepsilon - 1)}_{\leq 0} + 2 + \underbrace{\mathfrak{c} - \varepsilon}_{\geq 0},$$

was stets erfüllt ist, denn ist s negativ, so ist $s(\ln\varepsilon - 1) \geq 0$ und für $0 \leq s \leq \varepsilon$ gilt $s(\ln\varepsilon - 1) + 2 + \mathfrak{c} \geq \varepsilon(\ln\varepsilon - 1) + 2 + \mathfrak{c}$, was wegen (2.19) größer als Null ist. Sei nun $\varepsilon < s < \varepsilon^{-1}$. Wir wollen zuerst

$$f(s) := \lambda_\varepsilon(s) = s \leq 2F_\varepsilon(s) + \mathfrak{c} = 2\left((\ln s - 1)s + 1\right) + \mathfrak{c} =: g(s)$$

beweisen. Man rechnet leicht nach, dass $g'(s) = 2\ln s$ ist, woraus folgt, dass diese Funktion an der Stelle $s_1 = e^{\frac{1}{2}}$ eine Tangente mit Steigung 1 hat und dort den Wert $g(s_1) = -e^{\frac{1}{2}} + 2 + \mathfrak{c} = e^{\frac{1}{2}} = s_1$ annimmt (man beachte die Definition von $\mathfrak{c}$). Nun gilt aber auch $f'(s) = 1$, für alle s mit $\varepsilon < s < \varepsilon^{-1}$, und $f(s_1) = s_1$, woraus folgt, dass $f_1(s)$ die Tangente von $g(s)$ an der Stelle s_1 ist. Da nun wegen Lemma 2.4 die Funktion $g(s)$ konvex ist, muss insbesondere $f(s) \leq g(s)$ gelten. Für den zweiten Term $sF_\varepsilon{}'(s) = s\ln s$ können wir die zu zeigende Ungleichung $s\ln s \leq g(s)$ auf

$$0 \leq s(\ln s - 2) + 2 + \mathfrak{c} =: h(s)$$

umformen. Man sieht leicht, dass wegen $h''(s) = \frac{1}{s} > 0$, für $\varepsilon < s < \varepsilon^{-1}$, die Funktion $h(s)$ konvex ist. Daher gilt weiters wegen $h'(s) = \ln s - 1 = 0 \Leftrightarrow s = e^1$, dass die Funktion ein globales Minimum bei $s = e^1 > 0$ hat, was die obige Ungleichung zeigt.
Für den letzten Fall $s \geq \varepsilon^{-1}$ bekommt man die Gültigkeit der Ungleichung für $\lambda_\varepsilon(s)$ wegen $\varepsilon^{-1} > e^2$ durch

$$\lambda_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-1} \leq 1s \leq \underbrace{\varepsilon(s^2 - \varepsilon^{-2})}_{\geq 0} + \underbrace{2\left(\ln\varepsilon^{-1} - 1\right)}_{\geq 1}s + 2 + \mathfrak{c} = 2F_\varepsilon(s) + \mathfrak{c}.$$

Für $sF_\varepsilon{}'(s) = s(\varepsilon s + \ln\varepsilon^{-1} - 1)$ ist die Ungleichung (2.17b), ähnlich wie beim ersten Fall, äquivalent zu

$$0 \leq s(\ln\varepsilon^{-1} - 1) + 2 + \mathfrak{c} - \varepsilon^{-1}.$$

Diese Ungleichung ist nun erfüllt, denn wegen $\varepsilon^{-1} > e^2$ ist wieder $\ln\varepsilon^{-1} - 1 > 1$ und somit $s(\ln\varepsilon^{-1} - 1) \geq \varepsilon^{-1}(\ln\varepsilon^{-1} - 1) > \varepsilon^{-1}$.

ad (2.17c)**:** Wir betrachten zunächst den Fall $s \leq \varepsilon$, womit wir $\lambda_\varepsilon(s) \equiv \varepsilon$ und

$$\lambda_\varepsilon(s)F_\varepsilon{}'(s) = \varepsilon\left(\varepsilon^{-1}s + \ln\varepsilon - 1\right) \geq s - 1 \Longleftrightarrow \varepsilon(\ln\varepsilon - 1) + 1 \geq 0$$

erhalten, wobei letztere Ungleichung wegen (2.19) erfüllt ist.
Für $\varepsilon < s < \varepsilon^{-1}$ gilt $\lambda_\varepsilon(s) = s$ und ${F_\varepsilon}'(s) = \ln s$. Daher ist $s \ln s \geq s - 1$ zu zeigen, was wieder leicht auf die schon bekannte Ungleichung (2.19) umzuformen ist.
Der letzte Fall geht analog zum ersten. Wegen $s \geq \varepsilon^{-1}$ gilt $\lambda_\varepsilon(s) \equiv \varepsilon^{-1}$, was zu

$$\lambda_\varepsilon(s){F_\varepsilon}'(s) = \varepsilon^{-1}\left(\varepsilon s + \ln \varepsilon^{-1} - 1\right) \geq s - 1 \Longleftrightarrow \varepsilon^{-1}(\ln \varepsilon^{-1} - 1) + 1 \geq 0,$$

führt, womit die Gültigkeit wieder durch (2.19) gegeben ist.

ad (2.17d)**:** Wir wollen nun $F_\varepsilon(\lambda_\varepsilon(s)) \leq F_\varepsilon(s)$ zeigen. Da für den Fall $\varepsilon < s < \varepsilon^{-1}$ die Abschneidefunktion $\lambda_\varepsilon(s) = s$ erfüllt, müssen wir nur die anderen beiden Fälle betrachten. Wir haben bereits im letzten Punkt des Beweises von Lemma 2.4 gesehen, dass F_ε ein globales Minimum bei $s = 1$ hat. Da nun für alle $\varepsilon \in (0, e^{-2})$ stets $\varepsilon \leq 1 \leq \varepsilon^{-1}$ erfüllt ist, ist F_ε auf $(-\infty, \varepsilon)$ monoton fallend und auf $(\varepsilon^{-1}, \infty)$ monoton steigend. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\lambda_\varepsilon(s) = \varepsilon \geq s \Longrightarrow F_\varepsilon(\lambda_\varepsilon(s)) \leq F_\varepsilon(s) \text{ für } s \leq \varepsilon, \text{ bzw.}\\
&\lambda_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-1} \leq s \Longrightarrow F_\varepsilon(\lambda_\varepsilon(s)) \leq F_\varepsilon(s) \text{ für } s \geq \varepsilon^{-1},
\end{aligned}$$

und die Behauptung ist gezeigt.

ad (2.18)**:** Die ersten Ungleichung

$$\frac{\varepsilon^{-1}}{2}[s]_- \leq F_\varepsilon\left([s-1]_- + 1\right) \tag{2.21}$$

ist klarerweise erfüllt, da wegen Lemma 2.4 $F_\varepsilon \geq 0$ gilt und die linke Seite stets kleiner gleich Null ist.
Für $s \leq 0$ gilt offensichtlich $[s]_- = s$ und $[s-1]_- = s - 1$, und wir erhalten mit (2.17a), dass

$$\frac{\varepsilon^{-1}}{2}[s]_- \leq F_\varepsilon\left([s]_-\right) = F_\varepsilon(s - 1 + 1) = F_\varepsilon\left([s-1]_- + 1\right).$$

Damit ist (2.21) erfüllt. Für die zweite Ungleichung $F_\varepsilon\left([s-1]_- + 1\right) \leq F_\varepsilon(s)$ bemerken wir für $s \leq 1$, dass $[s-1]_- = s-1$ und somit wegen $F_\varepsilon\left([s-1]_- + 1\right) = F_\varepsilon(s - 1 + 1) = F_\varepsilon(s)$ die Ungleichung klarerweise erfüllt ist.
Für $s \geq 1$ gilt, dass $[s-1]_- = 0$. Außerdem wissen wir aus dem letzten Beweisteil von Lemma 2.4, dass $F_\varepsilon(s)$ an der Stelle $s = 1$ ein globales Minimum hat und somit

$$F_\varepsilon(\underbrace{[s-1]_-}_{=0} + 1) = F_\varepsilon(1) \leq F_\varepsilon(s)$$

erfüllt ist. Daher gilt auch die zweite Ungleichung für alle $s \in \mathbb{R}$ und wir haben (2.18) gezeigt.

□

Ähnlich wie in [14] benötigen wir für die Approximation der Diffusionsterme in unserem Modell eine weitere Funktion $\Lambda_\varepsilon : S^h \to [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$, für $\varepsilon \in (0,1)$. Dabei wäre es wünschenswert, wenn die matrixwertige Funktion $\Lambda_\varepsilon(z^h)$ für alle $z^h \in S^h$ eine „positive Struktur" trägt, ähnlich wie die Funktionen F_ε und λ_ε.
Zunächst definieren wir diese Funktion für den eindimensionalen Fall $d = 1$ durch

$$\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa := \begin{cases} \frac{z^h(p_k)-z^h(p_j)}{F_\varepsilon'(z^h(p_k))-F_\varepsilon'(z^h(p_j))} = \frac{1}{F_\varepsilon''(z^h(\xi))} & \\ \qquad = \lambda_\varepsilon(z^h(\xi)) \text{ , für } \xi \in \kappa, & \text{wenn } z^h(p_k) \neq z^h(p_j), \\ \frac{1}{F_\varepsilon''(z^h(p_k))} = \lambda_\varepsilon(z^h(p_k)), & \text{wenn } z^h(p_k) = z^h(p_j). \end{cases} \tag{2.22}$$

für alle $z^h \in S^h$ und $\kappa \in \mathcal{T}^h$ mit Intervallgrenzen p_k und p_j.
Für den Fall $d = 2, 3$ können wir die obige Definition ,ähnlich wie in [14], erweitern. Wie in der FEM-Theorie üblich, wollen wir diese stückweise definierte Erweiterung $\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa$ auf einem geeigneten Referenzelement $\widehat{\kappa}$ vornehmen.
Seien also für ein $\kappa \in \mathcal{T}^h$ die Knoten durch p_{j_i}, für $i = 0, \dots, d$ gegeben, wobei wir mit p_{j_0} jenen Knoten bezeichnen wollen, in dem sich nach (V) alle Kanten im rechten Winkel treffen. Weiters setzen wir für $i = 1, \dots, d$ die Kantenlängen durch $\rho_i = |p_{j_i} - p_{j_0}|$ fest. Bezeichne außerdem $\{e_i\}_{i=1}^d$ die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^d$, also jene Vektoren, deren j-te Komponente δ_i^j ist. Dann definieren wir für $\kappa \in \mathcal{T}^h$ das Referenzelement $\widehat{\kappa}$ als den offenen d-Simplex mit den Eckpunkten

$$\widehat{p}_0 = \vec{0} \quad \text{und} \quad \widehat{p}_i = \rho_i \, e_i. \tag{2.23}$$

Nach dieser Definition des Referenzelementes treffen sich alle Kanten im Ursprung $\widehat{p}_0$ im rechten Winkel und seine Kanten sind gleich lang wie jende von κ. Man sieht also, dass die Tetraeder κ und $\widehat{\kappa}$ bis auf ihre Lage bezüglich des Ursprungs und einer Drehung bzw. Spiegelung gleich sind. Es existiert daher eine Matrix R_κ, welche eine Rotation bzw. Reflexion beschreibt, sodass die Abbildung

$$\mathcal{R}_\kappa : \begin{cases} \overline{\widehat{\kappa}} \longrightarrow \overline{\kappa} \\ \widehat{x} \longmapsto p_{j_0} + R_\kappa \widehat{x} \end{cases} \tag{2.24}$$

die Knoten $\widehat{p}_i$ auf p_{j_i} für $i = 0, \dots, d$ aufeinander abbildet und somit die Elemente κ und $\widehat{\kappa}$ ineinander überführt.

Wir können nun Funktionen $z^h \in S^h$ stückweise auf dem Referenzelement $\widehat{\kappa}$ durch

$$\widehat{z}^h(\widehat{x}) = z^h\left(\mathcal{R}_\kappa \widehat{x}\right) \qquad \forall\, \widehat{x} \in \overline{\widehat{\kappa}} \tag{2.25}$$

definieren. Da außerdem Rotations- bzw. Reflexionsmatrizen wie R_κ die Eigenschaft $R_\kappa^T = R_\kappa^{-1}$ haben, erhält man wegen

$$\widehat{\nabla}\left[\widehat{z}^h(\widehat{x})\right] \overset{(2.25)}{=} \widehat{\nabla}\left[z^h\left(\mathcal{R}_\kappa \widehat{x}\right)\right] = R_\kappa^T \nabla z^h\left(\mathcal{R}_\kappa \widehat{x}\right),$$

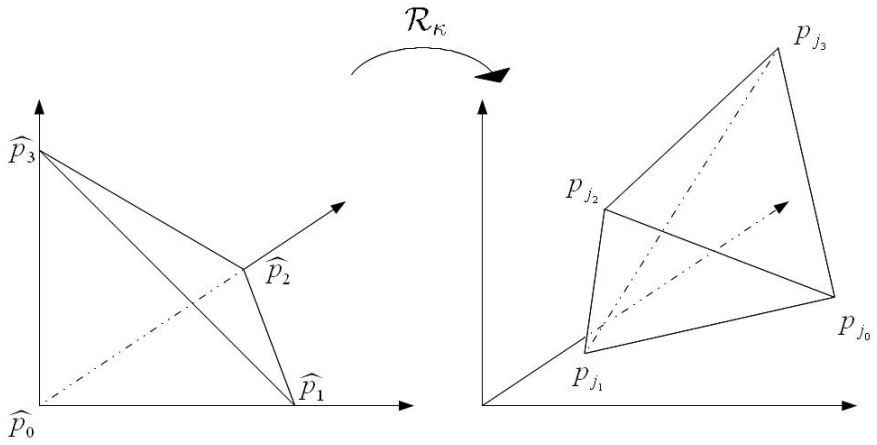

Abbildung 2: Abbildung von $\widehat{\overline{\kappa}}$ nach $\overline{\kappa}$ im Fall $d = 3$

wobei $x = (x_1, \dots, x_d)^T$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d})$, $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d)^T$ und $\widehat{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial \widehat{x}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_d})$, die Gleichung

$$\nabla z^h = R_\kappa \widehat{\nabla} \widehat{z}^h \qquad \forall\, \kappa \in \mathcal{T}^h, \tag{2.26}$$

denn z^h ist auf $\overline{\kappa}$ affin und somit von $x \in \overline{\kappa}$ unabhängig.
Wir haben nun alle notwendigen Resultate, um die Abbildung $\Lambda_\varepsilon : S^h \to [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$ definieren zu können.

Definition 2.9. *Wir definieren für $\varepsilon \in (0,1)$ die Abbildung $\Lambda_\varepsilon : S^h \to [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$ stückweise für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ durch*

$$\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa := R_\kappa \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}} R_\kappa^T, \tag{2.27}$$

wobei $\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}$ die $d \times d$-Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen

$$\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]_{kk} := \begin{cases} \frac{\widehat{z}^h(\widehat{p}_k) - \widehat{z}^h(\widehat{p}_0)}{F_\varepsilon{}'(\widehat{z}^h(\widehat{p}_k)) - F_\varepsilon{}'(\widehat{z}^h(\widehat{p}_0))} = \frac{z^h(p_{j_k}) - z^h(p_{j_0})}{F_\varepsilon{}'(z^h(p_{j_k})) - F_\varepsilon{}'(z^h(p_{j_0}))} = \frac{1}{F_\varepsilon{}''(z^h(\xi))} \\ \qquad = \lambda_\varepsilon(z^h(\xi)) \text{ , für } \xi \in g_{j_0}^{j_k}, \qquad \text{wenn } z^h(p_{j_k}) \neq z^h(p_{j_0}), \\ \frac{1}{F_\varepsilon{}''(\widehat{z}^h(\widehat{p}_0))} = \frac{1}{F_\varepsilon{}''(z^h(p_{j_0}))} \\ \qquad = \lambda_\varepsilon(z^h(p_{j_0})), \qquad \text{wenn } z^h(p_{j_k}) = z^h(p_{j_0}) \end{cases} \tag{2.28}$$

mit $k = 1, \dots, d$ ist. Hier bezeichnet $g_{j_0}^{j_k} \subseteq \kappa$ die Strecke zwischen den Punkten p_{j_0} und p_{j_k}.

Bemerkung 2.10. Wenn wir im Fall $d = 1$ für ein $\kappa \in \mathcal{T}^h$, $\kappa = (p_{j_0}, p_{j_1})$, die 1×1-Matrix $R_\kappa \equiv 1$ setzen, so sind die Definitionen von Λ_ε in (2.22) und (2.27) äquivalent.

Wie man an der Definition von Λ_ε erkennen kann, hängt diese eng mit den Funktionen F_ε und λ_ε zusammen, weshalb die Hoffnung groß ist, dass Λ_ε in einem gewissen Sinn eine positive Struktur trägt. Tatsächlich zeigt die folgende Proposition neben anderen nützlichen Eigenschaften, dass für jede Funktion z^h aus S^h die Matrix $\Lambda_\varepsilon(z^h)$ positiv definit ist.

Proposition 2.11. *Die Abbildung $\Lambda_\varepsilon : S^h \to [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$ hat für z^h, z_1^h und z_2^h aus S^h folgende Eigenschaften:*

1. *Für $\nu \in \{-1, 1\}$ gilt die Gleichung*

$$\left[\Lambda_\varepsilon(z_1^h)\right]^\nu \Lambda_\varepsilon(z_2^h) = \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\left[\Lambda_\varepsilon(z_1^h)\right]^\nu. \tag{2.29a}$$

   Außerdem gilt

$$\Lambda_\varepsilon(z^h) = \Lambda_\varepsilon(z^h)^T \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_\varepsilon(z^h)^{-1} = \Lambda_\varepsilon(z^h)^{-T}. \tag{2.29b}$$

2. *Die Matrix $\Lambda_\varepsilon(z^h)$ ist symmetrisch, positiv definit und erfüllt*

$$\Lambda_\varepsilon(z^h)\nabla\pi^h\left[F_\varepsilon{}'(z^h)\right] = \nabla z^h. \tag{2.30}$$

Beweis.

ad 1. Seien $z_1^h, z_2^h \in S^h$. Da Diagonalmatrizen miteinander kommutieren, und daher klarerweise auch ihre inversen Matrizen, gilt mit $\nu \in \{-1, 1\}$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ und ihre Referenzelemente $\widehat{\kappa}$

$$\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_1}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]^\nu \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_2}^h)|_{\widehat{\kappa}} = \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_2}^h)|_{\widehat{\kappa}}\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_1}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]^\nu$$

und somit wegen $R_\kappa^T = R_\kappa^{-1}$

$$\begin{aligned}
\left[\Lambda_\varepsilon(z_1^h)|_\kappa\right]^\nu \Lambda_\varepsilon(z_2^h)|_\kappa &= \left[R_\kappa\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_1}^h)|_{\widehat{\kappa}}R_\kappa^T\right]^\nu R_\kappa\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_2}^h)|_{\widehat{\kappa}}R_\kappa^T \\
&= R_\kappa\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_1}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]^\nu \underbrace{R_\kappa^T R_\kappa}_{=\mathcal{I}}\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_2}^h)|_{\widehat{\kappa}}R_\kappa^T = R_\kappa\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_2}^h)|_{\widehat{\kappa}}\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_1}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]^\nu R_\kappa^T \\
&= R_\kappa\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_2}^h)|_{\widehat{\kappa}}\underbrace{R_\kappa^T R_\kappa}_{=\mathcal{I}}\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_1}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]^\nu R_\kappa^T \\
&= \Lambda_\varepsilon(z_2^h)|_\kappa\left[\Lambda_\varepsilon(z_1^h)|_\kappa\right]^\nu,
\end{aligned}$$

womit die erste Gleichung in Punkt 1 gezeigt ist.
Da jede Diagonalmatrix gleich ihrer Transponierten ist, erhalten wir für $\kappa \in \mathcal{T}^h$

$$\left[\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa\right]^T = \left[R_\kappa\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}R_\kappa^T\right]^T = R_\kappa\underbrace{\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]^T}_{\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}}R_\kappa^T = \Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa,$$

und somit auch die Gleichungen in (2.29b).

ad 2. Sei $\kappa \in \mathcal{T}^h$ beliebig. Wie wir in Punkt 1 gesehen haben ist die Matrix symmetrisch. Um zu zeigen, dass sie auch positiv definit ist, nehmen wir einen Vektor $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\zeta \neq \vec{0}$, und betrachten für eine Funktion $z^h \in S^h$

$$\zeta^T \Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa \zeta \overset{(2.27)}{=} \zeta^T \left(R_\kappa \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}} R_\kappa^T \right) \zeta = \left(R_\kappa^T \zeta \right)^T \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}} \left(R_\kappa^T \zeta \right).$$

Da nun $\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge nach Definition (2.28) von der Gestalt $[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}]_{kk} = \lambda_\varepsilon(z^h(\xi_k))$ für $z^h(\xi_k) \in [z^h(p_{j_0}), z^h(p_{j_k})]$ (sei oBdA. $z^h(p_{j_0}) \leq z^h(p_{j_k})$) und $k = 1, \ldots, d$, sind die Diagonaleinträge nach Definition 2.5 der Funktion λ_ε sicherlich strikt größer Null. Daher gilt weiter

$$\begin{aligned} \zeta^T \Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa \zeta &= \left(R_\kappa^T \zeta \right)^T \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}} \left(R_\kappa^T \zeta \right) = \sum_{k=1}^d \left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}} \right]_{kk} \left(R_\kappa^T \zeta \right)_k^2 \\ &\geq \underbrace{\min_{k=1,\ldots,d} \lambda_\varepsilon(z^h(\xi_k))}_{>0} \left(R_\kappa^T \zeta \right)^2 > 0, \end{aligned}$$

denn die Matrix R_κ hat als Rotations- bzw. Reflexionsmatrix vollen Rang.
Wir wollen nun (2.30) zeigen. Wegen

$$\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa \nabla \pi^h \left[{F_\varepsilon}'(z^h|_\kappa) \right] = R_\kappa \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}} R_\kappa^T \nabla \pi^h \left[{F_\varepsilon}'(z^h|_\kappa) \right]$$

und (2.26) ist die zu zeigende Gleichung äquivalent zu

$$\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}} \widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h \left[{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h|_{\widehat{\kappa}}) \right] = \widehat{\nabla} \widehat{z}^h|_{\widehat{\kappa}} \tag{2.31}$$

Wir wollen diese Gleichung komponentenweise zeigen und betrachten zunächst die rechte Seite. Man sieht, dass die einzelnen Kanten des Referenzelements auf den Achsen liegen. Da nun die Funktion $\widehat{z}^h|_{\widehat{\kappa}}$ affin ist, können wir also deren partielle Ableitungen als Differenzenquotienten schreiben. Es gilt also für die k-te Komponente der rechten Seite, $k = 1, \ldots, d$

$$\left(\widehat{\nabla} \widehat{z}^h|_{\widehat{\kappa}} \right)_k = \begin{cases} \frac{\widehat{z}^h(\widehat{p}_k) - \widehat{z}^h(\widehat{p}_0)}{|\widehat{p}_k - \widehat{p}_0|} & \text{für } z^h(p_{j_k}) \neq z^h(p_{j_0}) \\ 0 & \text{für } z^h(p_{j_k}) = z^h(p_{j_0}). \end{cases} \tag{2.32}$$

Da $\widehat{\pi}^h[{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h|_{\widehat{\kappa}})]$ ebenfalls eine affine Funktion ist, können wir ihre partiellen Ableitungen ebenso als Differenzenquotienten darstellen. Aus der Definition von π^h und (2.25) folgt wegen $\mathcal{R}\widehat{p}_k = p_{j_k} \in \kappa$ für alle Knoten p_{j_k}, $k = 1, \ldots, d$

$$\widehat{\pi}^h \left[{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h(\widehat{p}_j)) \right] = \pi^h \left[{F_\varepsilon}'(z^h(\mathcal{R}p_j)) \right] = {F_\varepsilon}'(z^h(\mathcal{R}p_j)) = {F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h(\widehat{p}_j))$$

und somit für den Differenzenquotienten für $k = 1, \ldots, d$

$$\left(\nabla \widehat{\pi}^h \left[{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h|_{\widehat{\kappa}}) \right] \right)_k = \begin{cases} \frac{{F_\varepsilon}'(z^h(\widehat{p}_k)) - {F_\varepsilon}'(z^h(\widehat{p}_0))}{|\widehat{p}_k - \widehat{p}_0|} & \text{für } z^h(p_{j_k}) \neq z^h(p_{j_0}) \\ 0 & \text{für } z^h(p_{j_k}) = z^h(p_{j_0}). \end{cases}$$

Daher erhalten wir mit der Definition von $\widehat{\Lambda_\varepsilon}$ für die k-te Komponente der linken Seite von (2.31)

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}\widehat{\nabla}\widehat{\pi}^h\left[{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h|_{\widehat{\kappa}})\right]\right)_k &= \begin{cases}\frac{\widehat{z}^h(\widehat{p}_k)-\widehat{z}^h(\widehat{p}_0)}{{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h(\widehat{p}_k))-{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h(\widehat{p}_0))}\frac{{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h(\widehat{p}_k))-{F_\varepsilon}'(\widehat{z}^h(\widehat{p}_0))}{|\widehat{p}_k-\widehat{p}_0|} \\ 0\end{cases} \\ &= \begin{cases}\frac{\widehat{z}^h(\widehat{p}_k)-\widehat{z}^h(\widehat{p}_0)}{|\widehat{p}_k-\widehat{p}_0|} & \text{für } z^h(p_{j_k})\neq z^h(p_{j_0}) \\ 0 & \text{für } z^h(p_{j_k})=z^h(p_{j_0}).\end{cases}\end{aligned} \tag{2.33}$$

Wir haben also die Gleichheit von (2.32) und (2.33) gezeigt, womit wir (2.31) und somit die gewünschte Aussage bewiesen haben.

□

2.1.3 Die Operatoren $\mathcal{Q}^h$ und $\mathcal{G}$

In diesem Abschnitt betrachten wir einerseits die Abbildung $\mathcal{Q}^h$, die ähnlich wie π^h eine Projektion auf den Finiten Elemente Raum S^h ist, und andererseits den Operator $\mathcal{G}$, den wir als inverse Abbildung eines elliptischen Lösungsoperators einführen werden. Wenn wir im folgenden Abschnitt 2.2 das Finite Elemente Modell zum Problem ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) aufstellen werden, werden ad hoc weder irgendwelche Gemeinsamkeiten dieser beiden Abbildungen, noch eine konkrete Beziehung zu dem Finite Elemente Modell erkennbar sein (einmal davon abgesehen, dass $\mathcal{Q}^h$ zur Diskretisierung der Anfangswerte $U^0_{\varepsilon,i}$ herangezogen werden kann). Tatsächlich wird sich herausstellen, dass die beiden Operatoren durch ihre Eigenschaften in (2.35) und (2.43) gut miteinander kombinierbar sind, was später für eine A-priori-Abschätzung der Zeitableitung der FE-Approximation ausgenutzt werden kann.

Wie wir schon in Proposition 2.3 gezeigt haben, ist die Bilinearform $(.,.)^h$ ein inneres Produkt auf dem Raum S^h. Da dieser endlichdimensional ist, ist er klarerweise bezüglich jeder Norm abgeschlossen, also ebenfalls bezüglich der Norm $|z^h|_h := \sqrt{(z^h,z^h)^h}$. Daher ist der Raum $(S^h,(.,.)^h)$ sogar ein Hilbertraum.
Nehmen wir nun eine beliebige Funktion $\eta\in L^2(\Omega)$. Dann ist die Funktion $f_\eta(\chi) := (\eta,\chi)$ klarerweise ein Funktional auf S^h. Daher existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz eine eindeutige Funktion $z^h\in S^h$ sodass

$$\left(z^h,\chi\right)^h = f_\eta(\chi) = (\eta,\chi) \qquad \forall\chi\in S^h. \tag{2.34a}$$

Wir können also eine Abbildung $\mathcal{Q}^h : L^2(\Omega)\to S^h$ durch

$$\mathcal{Q}^h : \begin{cases} L^2(\Omega)\longrightarrow S^h \\ \qquad \eta\longmapsto z^h, \quad \text{wobei } z^h \text{ die eindeutige Lösung von (2.34a) ist.}\end{cases} \tag{2.34b}$$

definieren. Diese ist wegen der eindeutigen Lösbarkeit von (2.34a) wohldefiniert und erfüllt

$$\left(\mathcal{Q}^h\eta, \chi\right)^h = (\eta, \chi) \qquad \forall \chi \in S^h. \tag{2.35}$$

Proposition 2.12. *Die Abbildung $\mathcal{Q}^h$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *Die Abbildung $\mathcal{Q}^h$ ist ein linearer und stetiger Operator von $L^2(\Omega)$ nach S^h.*
2. *Für $\eta \in L^\infty(\Omega)$ gilt*

   $$(\mathcal{Q}^h\eta)(p_j)\,(1, \chi_j) = (\eta, \chi_j) \quad \forall\, \chi_j \in B^h \quad \text{und} \quad \left\|\mathcal{Q}^h\eta\right\|_{L^\infty} \leq \|\eta\|_{L^\infty}. \tag{2.36}$$

   Es folgt also insbesondere aus $\eta \geq 0$, dass $\mathcal{Q}^h\eta \geq 0$.
3. *Der Operator $\mathcal{Q}^h$ erfüllt auf $\mathcal{P}_0$, dem Raum aller Polynome mit Grad Null (also die Menge aller Konstanten), die Gleichung*

   $$\mathcal{Q}^h\pi = \pi \qquad \forall\, \pi \in \mathcal{P}_0 \tag{2.37}$$

Beweis.

ad 1. Klarerweise ist $\mathcal{Q}^h$ linear, denn es gilt für η_1, η_2 aus $L^2(\Omega)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left(\lambda_1\mathcal{Q}^h\eta_1 + \lambda_2\mathcal{Q}^h\eta_2, \chi\right)^h &= \lambda_1\left(\mathcal{Q}^h\eta_1, \chi\right)^h + \lambda_2\left(\mathcal{Q}^h\eta_2, \chi^h\right) = \lambda_1(\eta_1, \chi) + \lambda_2(\eta_2, \chi)\\ &= (\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2, \chi) = f_{\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2}(\chi).\end{aligned}$$

Daher ist $\lambda_1\mathcal{Q}^h\eta_1 + \lambda_2\mathcal{Q}^h\eta_2 \in S^h$ die eindeutige Lösung von (2.34a) mit rechter Seite $f_{\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2}$. Daher gilt nach Definition (2.34b) $\lambda_1\mathcal{Q}^h\eta_1 + \lambda_2\mathcal{Q}^h\eta_2 = \mathcal{Q}^h(\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2)$.
Außerdem ist $\mathcal{Q}^h$ beschränkt, und somit stetig, denn wegen der Normäquivalenz auf S^h existiert eine Konstante $C > 0$ mit $\|.\|_{L^2} \leq C|.|_h$, was mit (2.35) und der Youngschen Ungleichung zu

$$\left|\mathcal{Q}^h\eta\right|_h^2 = \left(\eta, \mathcal{Q}^h\eta\right) \leq \frac{\delta}{2}\|\eta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\delta}\left\|\mathcal{Q}^h\eta\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{\delta}{2}\|\eta\|_{L^2}^2 + \frac{C^2}{2\delta}\left|\mathcal{Q}^h\eta\right|_h^2$$

für alle $\delta > 0$ führt. Damit können wir mit $\delta = C^2$ den Term auf der rechten Seite absorbieren und erhalten die Beschränktheit

$$\left|\mathcal{Q}^h\eta\right|_h \leq C\|\eta\|_{L^2}.$$

ad 2. Sei $\eta \in L^\infty(\Omega)$. Für die Basisfunktionen $\chi_j \in B^h$ gilt mit der Definition von $(.,.)^h$ für alle $j \in J$ die Gleichung

$$\left(\mathcal{Q}^h\eta, \chi_j\right)^h = \sum_{i\in J}(1, \chi_i)\,(\mathcal{Q}^h\eta)(p_i)\underbrace{\chi_j(p_i)}_{=\delta_i^j} = (1, \chi_j)\,(\mathcal{Q}^h\eta)(p_j).$$

Da nun $(\mathcal{Q}^h\eta, \chi)^h = (\eta, \chi)$ für alle $\chi \in S^h$ gilt, also insbesondere für die Basisfunktionen von S^h, erhalten wir für $j \in J$

$$(\mathcal{Q}^h\eta)(p_j)\,(1, \chi_j) = (\eta, \chi_j) \Longrightarrow (\mathcal{Q}^h\eta)(p_j) = \frac{(\eta, \chi_j)}{(1, \chi_j)} \leq \frac{\|\eta\|_{L^\infty}\,(1, \chi_j)}{(1, \chi_j)} \leq \|\eta\|_{L^\infty}.$$

Nun nimmt $\mathcal{Q}^h\eta$ als stückweise affine Funktion ihr Maximum an den Eckpunkten p_j der Elemente $\kappa \in \mathcal{T}^h$ an, also ist (2.36) gezeigt.

ad 3. Sei $\pi \in \mathcal{P}_0$ eine konstante Funktion. Nach Definition (2.34b) ist die Funktion $\mathcal{Q}^h\pi$ die einzige Funktion aus S^h, welche für alle $\chi \in S^h$ die Gleichheit $(\mathcal{Q}^h\pi, \chi)^h = (\pi, \chi)$ erfüllt. Nun gilt aber wegen $\pi\chi = \pi^h(\pi\chi)$ ($\pi\chi$ ist ja in S^h) die Gleichung

$$(\pi, \chi) = \int_\Omega \pi\chi\,dx = \int_\Omega \pi^h\,(\pi\chi)\,dx = (\pi, \chi)^h$$

für alle $\chi \in S^h$, also erfüllt $\pi \in S^h$ die gleiche Gleichung wie $\mathcal{Q}^h\pi$, weshalb $\mathcal{Q}^h\pi = \pi$ gelten muss.

□

Wir wollen nun den Operator $\mathcal{G}$ als eine Art „inversen Laplace-Operator“ einführen. Hierfür betrachten wir zunächst das folgende Problem mit homogener Neumann-Randbedingung

$$-(\Delta + I)\,u = z \qquad \text{in } \Omega \tag{2.38a}$$

$$\nabla u \cdot \nu = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \tag{2.38b}$$

wobei ν wieder für die äußere Normale auf $\partial\Omega$ steht. Dieses motiviert für $q \in (1, 2]$ und seine konjugierte Zahl $q' \in [2, \infty)$ folgende schwache Formulierung: Finde $u \in W^{1,q}(\Omega)$, sodass für $z \in (W^{1,q'}(\Omega))'$

$$\langle \mathcal{A}u, \eta\rangle_{q'} = \langle z, \eta\rangle_{q'} \qquad \forall\,\eta \in W^{1,q'}(\Omega), \tag{2.39}$$

wobei $\mathcal{A} : W^{1,q}(\Omega) \to (W^{1,q'}(\Omega))'$ durch

$$\langle \mathcal{A}u, \eta\rangle_{q'} := \int_\Omega \nabla u \nabla\eta + u\eta\,dx \qquad \forall\,\eta \in W^{1,q'}(\Omega)$$

definiert ist.

Nun kann man zeigen, dass die schwache Formulierung (2.39) für jede rechte Seite $z \in (W^{1,q'}(\Omega))'$ eine eindeutige Lösung $u \in W^{1,q}(\Omega)$ besitzt. Eine Möglichkeit sich von dieser Tatsache zu überzeugen bietet die Arbeit [13] von K. Gröger und J. Rehberg, worin eine Verallgemeinerung des Problem (2.38a-b) mit homogener Dirichlet-Randbedingung, also mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ anstatt (2.38b), behandelt wurde. Die Autoren

konnten in Theorem 2 von [13] zeigen, dass die, zu (2.39) analog definierte, schwache Formulierung

$$\text{Finde } u \in W_0^{1,q'}(\Omega), \text{ sodass } \int_\Omega \nabla u \nabla \eta + u\eta \, dx = \langle z, \eta \rangle_q \text{ für alle } \eta \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

eine eindeutige Lösung $u \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ für jede rechte Seite $z \in W^{-1,q'}(\Omega)$ besitzt (man beachte, dass die Rollen von q und q' vertauscht sind). Außerdem zeigten sie die Abschätzung $\|u\|_{W^{1,q'}} \leq C\|z\|_{W^{-1,q'}}$ (Referenz (4.6) auf Seite 111). Tatsächlich kann man diese Resultate auf unsere schwache Formulierung in (2.39) übertragen.
Eine andere Möglichkeit die eindeutige Lösbarkeit von (2.39) zu zeigen, skizziert die folgende Überlegung: Für $q' = 2$ folgt die eindeutige Lösbarkeit von (2.39) sofort aus dem Lemma von Lax-Milgram, welches unter anderem in [11], Seite 78, zu finden ist. Sei also $q' \in (2, \infty)$ und $z \in (W^{1,q'}(\Omega))'$ beliebig. Man kann zeigen, dass es eine Folge von Funktionen $z_\varepsilon \in (W^{1,2}(\Omega))' \hookrightarrow (W^{1,q'}(\Omega))'$ gibt, welche $z_\varepsilon \to z$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ erfüllt. Wie schon erwähnt, gibt es für die Funktionen z_ε eindeutige Lösungen $u_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$, sodass

$$(\nabla u_\varepsilon, \nabla \eta) + (u_\varepsilon, \eta) = \langle z_\varepsilon, \eta \rangle_2 \qquad \forall\, \eta \in W^{1,2}(\Omega)$$

gilt, also gilt wegen $W^{1,q'}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$ und $(W^{1,2}(\Omega))' \hookrightarrow (W^{1,q'}(\Omega))'$ insbesondere

$$(\nabla u_\varepsilon, \nabla \eta) + (u_\varepsilon, \eta) = \langle z_\varepsilon, \eta \rangle_{q'} \qquad \forall\, \eta \in W^{1,q'}(\Omega). \tag{2.40}$$

Wenn man nun auf beiden Seiten durch $\|\eta\|_{W^{1,q'}}$ dividiert und das Supremum über alle η mit Norm kleiner gleich 1 bildet, kann man einerseits mit Hilfe der Variationsrechnung zeigen, dass die linke Seite den Wert $\|u_\varepsilon\|_{W^{1,q}}$ annimmt, und andererseits bekommt man auf der rechten Seite die Norm $\|z_\varepsilon\|_{(W^{1,q'}(\Omega))'}$. Da die Folge z_ε als konvergente Folge in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ auch beschränkt ist, erhält man also

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,q}} \leq \|z_\varepsilon\|_{(W^{1,q'}(\Omega))'} \leq C,$$

woraus folgt, dass die Folge u_ε schwach gegen eine Funktion u in $W^{1,q}(\Omega)$ konvergiert. Daher kann man in (2.40) den Grenzwert bilden, was zu

$$(\nabla u, \nabla \eta) + (u, \eta) = \langle z, \eta \rangle_{q'} \qquad \forall\, \eta \in W^{1,q'}(\Omega)$$

führt. Somit ist $u \in W^{1,q}(\Omega)$ die schwache Lösung für die rechte Seite $z \in (W^{1,q'}(\Omega))'$.

Die gerade angeführten Überlegungen stellen klarerweise keinen vollständigen Beweis dar, geben aber einen guten Einblick in die dafür notwendigen Techniken. Man kann also zeigen, dass für jedes $z \in (W^{1,q'}(\Omega))'$ die schwache Formulierung (2.39) eine eindeutige Lösung $u \in W^{1,q}(\Omega)$ hat, welche die A-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{W^{1,q}} \leq C \, \|z\|_{(W^{1,q'})'} \tag{2.41}$$

erfüllt. Daher ist der Operator $\mathcal{A} : W^{1,q}(\Omega) \to (W^{1,q'}(\Omega))'$ bijektiv und wir können seine inverse Abbildung $\mathcal{G}$ durch

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \left(W^{1,q'}(\Omega)\right)' \longrightarrow W^{1,q}(\Omega) \\ z \longmapsto u = \mathcal{A}^{-1} z \end{cases} \tag{2.42}$$

definieren, welche wegen der eindeutigen Lösbarkeit von (2.39) wohldefiniert ist und

$$(\nabla \mathcal{G} z, \nabla \eta) + (\mathcal{G} z, \eta) = \langle z, \eta \rangle_{q'} \qquad \forall\, \eta \in W^{1,q'}(\Omega) \tag{2.43}$$

erfüllt.

Proposition 2.13. *Die Abbildungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{G}$ haben die folgenden Eigenschaften:*

- *Die Abbildung $\mathcal{A}$ ist linear und erfüllt*

$$\|\mathcal{A}u\|_{(W^{1,q'})'} \leq C \|u\|_{W^{1,q}} \qquad \forall\, u \in W^{1,q}(\Omega). \tag{2.44}$$

- *Die Abbildung $\mathcal{G}$ ist ein linearer und stetiger Operator von $(W^{1,q'}(\Omega))'$ nach $W^{1,q}(\Omega)$ und erfüllt für $C_1, C_2 > 0$ und alle $z \in (W^{1,q'}(\Omega))'$*

$$C_1 \|z\|_{(W^{1,q'})'} \leq \|\mathcal{G} z\|_{W^{1,q}} \leq C_2 \|z\|_{(W^{1,q'})'} . \tag{2.45}$$

- *Der Operator $\mathcal{G}$ ist schwach folgenstetig, d.h. es gilt die Inklusion*

$$z_n \rightharpoonup z \text{ in } (W^{1,q'}(\Omega))' \Longrightarrow \mathcal{G} z_n \rightharpoonup \mathcal{G} z \text{ in } W^{1,q}(\Omega).$$

Beweis. Wir wollen zuerst die Eigenschaften des Operators $\mathcal{A}$ betrachten. Die Linearität folgt sofort aus der Integralgestalt von $\mathcal{A}$.
Sei nun $u \in W^{1,q}(\Omega)$, dann gilt $\mathcal{A}u \in (W^{1,q'}(\Omega))'$. Daher gilt für alle $\eta \in W^{1,q'}(\Omega)$ wegen der Hölder-Ungleichung (siehe z.B. [11], Seite 138)

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathcal{A}u, \eta \rangle_{q'} \right| &\leq \int_\Omega |\nabla u \nabla \eta + u\eta| \, dx \leq \|\nabla u\|_{L^q} \|\nabla \eta\|_{L^{q'}} + \|u\|_{L^q} \|\eta\|_{L^{q'}} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,q}} \|\eta\|_{W^{1,q'}} \end{aligned}$$

und somit

$$\|\mathcal{A}u\|_{(W^{1,q'})'} \leq C \|u\|_{W^{1,q}} .$$

Die Linearität der Abbildung $\mathcal{G}$ folgt aus der Linearität von $\mathcal{A}$. Sei nun $u \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $\mathcal{G} z = u$. Dann gilt wegen der A-priori-Abschätzung (2.41) für eine Konstante $C_2 > 0$

$$\|\mathcal{G} z\|_{W^{1,q}} = \|u\|_{W^{1,q}} \overset{(2.41)}{\leq} C_2 \|z\|_{(W^{1,q'})'} ,$$

also ist $\mathcal{G}$ beschränkt und somit stetig. Außerdem ist $\mathcal{A}u = z$, daher gilt mit der vorhin gezeigten Abschätzung (2.44) und einer weiteren Konstanten $C_1 > 0$

$$\|z\|_{(W^{1,q'})'} = \|\mathcal{A}u\|_{(W^{1,q'})'} \overset{(2.44)}{\leq} C_1^{-1} \|u\|_{W^{1,q}} = \|\mathcal{G}z\|_{W^{1,q}} ,$$

womit auch (2.45) gezeigt ist.
Wir zeigen nun, dass $\mathcal{G}$ schwach folgenstetig ist. Gelte also $z_n \rightharpoonup z$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$, d.h. für jedes Funktional ι auf dem Raum $(W^{1,q'}(\Omega))'$ gilt $\iota(z_n) \to \iota(z)$ für $n \to \infty$. Sei nun $\widetilde{\iota}$ ein Funktional auf $W^{1,q}(\Omega)$, dann ist sicherlich $\widetilde{\iota} \circ \mathcal{G}$ ein Funktional auf $(W^{1,q'}(\Omega))'$, da $\mathcal{G} : (W^{1,q'}(\Omega))' \to W^{1,q}(\Omega)$ linear und beschränkt ist. Somit gilt

$$\widetilde{\iota}(\mathcal{G}z_n) = (\widetilde{\iota} \circ \mathcal{G})(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} (\widetilde{\iota} \circ \mathcal{G})(z) = \widetilde{\iota}(\mathcal{G}z)$$

und $\mathcal{G}z_n$ konvergiert schwach gegen $\mathcal{G}z$ in $W^{1,q}(\Omega)$. □

Bemerkung 2.14. Falls die eindeutige Lösung u von (2.39) und die rechte Seite z hinreichend regulär sind, kann man durch partielle Integration zeigen, dass u die Lösung des Problems (2.38a-b) ist. Da nun der Operator $\mathcal{G}$ die rechte Seite z auf die Lösung u abbildet, kann man in diesem Fall $\mathcal{G}$ als inverse Abbildung von $-(\Delta + I)$ interpretieren, woher auch die Bezeichung „inverser Laplace-Operator“ stammt.

2.2 Die diskrete Formulierung des Modells

Bevor wir nun eine diskrete Formulierung für das Problem (P) angeben können, müssen wir noch eine Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$ einführen. Für $N \in \mathbb{N}$ definiern wir also die Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$$

und die dazugehörigen Zeitschritte $\tau_n := t_n - t_{n-1}$ für $n = 1, \ldots, N$. Wir definieren außerdem mit

$$\tau := \max_{n=1,\ldots,N} \tau_n$$

den größten Zeitschritt.

Als Motivation für die diskrete Formulierung wollen wir annehmen, dass die Funktionen $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ und u_i für $i = 1, 2$ glatt genug sind. Wir multiplizieren die Gleichungen

(1.4a) mit einer Testfunktion $\chi \in C^1(\overline{\Omega})$ und integrieren partiell, was zu

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t}\,\chi - \operatorname{div}\beta_i(u_1,u_2)\,\chi\,dx = \int_\Omega g_i(u_1,u_2)\,\chi\,dx \\
\iff &\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t}\,\chi + \beta_i(u_1,u_2)\nabla\chi\,dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega}\beta_i(u_1,u_2)\nu\,\chi\,ds}_{=0,\text{ wegen (1.4b)}} = \int_\Omega g_i(u_1,u_2)\,\chi\,dx \\
\iff &\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t}\,\chi + \left[(c_i + 2a_iu_i + u_j)\,\nabla u_i + u_i\,(\nabla u_j + b_i\nabla v)\right]^T\nabla\chi\,dx \\
&\qquad\qquad = \int_\Omega (\mu_i - \gamma_{ii}u_i - \gamma_{ij}u_j)u_i\,\chi\,dx
\end{aligned}$$

führt. Mit dieser Motivation und den Resultaten der bisherigen Abschnitte von Kapitel 2 haben wir alle notwendigen Hilfsmittel eingeführt, um eine diskrete Formulierung des Problems (P) wie in [2] für ein beliebiges $\varepsilon \in (0,1)$ anzugeben:

$(\mathbf{P}_\varepsilon^{h,\tau})$ Finde für $n = 1,\dots,N$ zwei Funktionen $\{U_{\varepsilon,1}^n, U_{\varepsilon,2}^n\} \in [S^h]^2$, sodass für $i = 1,2$, $j \neq i$, und für alle $\chi \in S^h$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n},\chi\right)^h + \left([c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) + \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^n)]\nabla U_{\varepsilon,i}^n,\nabla\chi\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\left[\nabla U_{\varepsilon,j}^n + b_i\nabla(\pi^h v)\right],\nabla\chi\right) \\
&\qquad = \left(\mu_i U_{\varepsilon,i}^n - [\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})]\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),\chi\right)^h \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

gilt, wobei $U_{\varepsilon,i}^0 \in S^h$ die approximierte Funktion von u_i^0 ist, welche für $i = 1,2$

$$U_{\varepsilon,i}^0 = \pi^h u_i^0 \qquad \text{oder} \qquad U_{\varepsilon,i}^0 = \mathcal{Q}^h u_i^0$$

erfüllt.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, liegt hier eine Semidiskretisierung in der Zeit und eine Finite Elemente Approximation bezüglich des Raumes vor.

3 Abschätzungen und Lösbarkeit

In diesem Kapitel wollen wir zunächst einige grundlegende und teilweise gut bekannte Resultate aus der Theorie der Finiten Elemente Methode anführen, siehe Abschnitt 3.1.
Danach gehen wir konkret auf die diskrete Formulierung ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) in (2.46) des Modells ein und machen uns Gedanken über Lösbarkeit und A-priori-Abschätzungen. Zuerst zeigen wir in Abschnitt 3.2 mit Hilfe eines Fixpunktargumentes die Lösbarkeit des Problems ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$). In Abschnitt 3.3 beweisen wir dann zwei A-priori-Abschätzungen, welche für die Konvergenzresultate des darauffolgenden Kapitels von entscheidender Bedeutung sind.

3.1 Bekannte Abschätzungen der FEM-Theorie

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Ungleichungen einführen, wobei einige (v.a. jene aus Proposition 3.1) in der Theorie der Finiten Elemente Methode häufig zum Einsatz kommen. Bevor wir das jedoch tun, führen wir, ähnlich wie bei der Definition von Λ_ε, ein Referenzelement ein, welches im Gegensatz zu $\widehat{\kappa}$ mit den Eckpunkten in (2.23) für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ gleich sein soll. Es ist durchaus üblich, sich Probleme auf solch einem allgemeineren Referenzelement zu überlegen, denn dadurch kann man gewonnene Resulate leicht auf alle Elemente in $\mathcal{T}^h$ übertragen. Die Beweise vieler in diesem Abschnitt aufgelisteter Abschätzungen basieren auf dieser Methode.

Sei also $\widehat{\kappa}_e$ definiert als der offene d-Simplex mit den Eckpunkten

$$\widehat{p}_0 = \vec{0} \quad \text{und} \quad \widehat{p}_i = e_i$$

für $i = 1 \ldots, d$, wobei $\{e_i\}_{i=1}^d$ wieder die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^d$ darstellen, deren j-te Komponente δ_i^j ist. Genau wie bei der Funktion $\mathcal{R}_\kappa$ in (2.24) sehen wir, dass es für jedes $\kappa \in \mathcal{T}^h$ mit Eckpunkten p_{j_i}, $i = 1, \ldots, d$, eine affine Abbildung

$$\mathcal{F}_\kappa : \begin{cases} \overline{\widehat{\kappa}}_e \longrightarrow \overline{\kappa} \\ \widehat{x} \longmapsto p_{j_0} + F_\kappa \widehat{x} \end{cases} \tag{3.1}$$

gibt, welche die Eckpunkte der beiden Elemente aufeinander abbildet. Klarerweise ist die Matrix F_κ im Gegensatz zur Matrix R_κ keine reine Rotations- oder Reflexionsmatrix, denn für kleines h ist das Referenzelement $\widehat{\kappa}_e$ wesentlich größer als κ.
Da wir nun eine Familie quasi-uniformer Triangulierungen haben, und somit die Eigenschaften in (2.1) gelten, erhalten wir mit Theorem 3.1.3 in [6], Seite 120f, die Existenz einer Konstanten $C > 0$, sodass

$$\|F_\kappa\|_2 \leq C h_\kappa \quad \text{und} \quad \left\|F_\kappa^{-1}\right\|_2 \leq C h_\kappa^{-1}$$

gilt. Außerdem folgt aus Bemerkung 3.1.3 auf Seite 124 in [6], dass

$$|\det F_\kappa| \leq C h_\kappa^d$$

Somit folgt zusammen mit Theorem 3.1.2 in [6], Seite 117f, dass für $r \in [1,\infty]$ und $m \geq 0$

$$|\widehat{\eta}|_{W^{m,r}(\widehat{\kappa}_e)} \leq C h_\kappa^{m-\frac{d}{r}} |\eta|_{W^{m,r}(\kappa)} \qquad \forall\, \eta \in W^{m,r}(\kappa), \tag{3.2a}$$

$$|\eta|_{W^{m,r}(\kappa)} \leq C h_\kappa^{-\left(m-\frac{d}{r}\right)} |\widehat{\eta}|_{W^{m,r}(\widehat{\kappa}_e)} \quad \forall\, \widehat{\eta} \in W^{m,r}(\widehat{\kappa}_e) \tag{3.2b}$$

gilt.
Man kann nun mit

$$\widehat{S}_e = \left\{ \widehat{\chi} \in C(\widehat{\overline{\kappa}}_e) : \widehat{\chi} \text{ ist affin} \right\}$$

die Menge aller affinen Funktionen auf $\widehat{\kappa}_e$ einführen. Man sieht sofort, dass dieser Raum durch $(d+1)$-viele Funktionen aufgespannt wird, die durch $\widehat{\chi}_i(\widehat{p}_j) = \delta_i^j$ für $i = 1, \ldots, d+1$ gegeben sind.
Außerdem lässt sich mit $\widehat{S}_e$ der Raum S^h durch

$$S^h = \left\{ \chi \in C(\overline{\Omega}) : \chi|_{\overline{\kappa}} \circ \mathcal{F}_\kappa \in \widehat{S}_e \quad \forall\, \kappa \in \mathcal{T}^h \right\}$$

angeben. Es ist leicht einzusehen, dass diese Definition äquivalent zu jener in (2.2) ist, da die Transformation $\mathcal{F}_\kappa$ affin ist und dadurch wieder affine Funktionen auf affine Funktionen abbildet.
Wir wollen noch bemerken, dass alle Normen auf $\widehat{S}_e$ äquivalent sind, wobei diese Äquivalenz unabhängig von h ist. Diese Tatsache ist in vielen Beweisideen von entscheidender Bedeutung und macht daher die Transformation von S^h auf $\widehat{S}_e$ mittels $\mathcal{F}_\kappa$ so attraktiv. Viele Beweise in diesem Abschnitt basieren auf den gerade angeführten Überlegungen.

Wir wollen nun zu den ersten Abschätzungen kommen, welche in der FEM-Theorie häufig eingesetzt werden:

Proposition 3.1. *Sei $h_\kappa \leq 1$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$, $p \in [1,\infty]$, $s \in [2,\infty]$ für $d = 1$ und $s \in (d,\infty]$ für $d = 2$ oder 3. Dann gilt für alle $\chi, z^h \in S^h$, $\eta \in W^{1,s}(\Omega)$ und $\kappa \in \mathcal{T}^h$*

$$\|\nabla \chi\|_{L^p(\kappa)} \leq C h_\kappa^{-1} \|\chi\|_{L^p(\kappa)} \tag{3.3}$$

$$|\chi|_{W^{m,r}(\kappa)} \leq C h_\kappa^{-d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} |\chi|_{W^{m,p}(\kappa)} \qquad \forall\, r \in [p,\infty], \tag{3.4}$$

$$\left|(I-\pi^h)\eta\right|_{W^{m,s}} \leq C h^{1-m} \|\nabla \eta\|_{L^s}, \tag{3.5}$$

$$\int_\kappa \chi^2 dx \leq \int_\kappa \pi^h[\chi^2] dx \leq C \int_\kappa \chi^2 dx, \tag{3.6}$$

$$\left|(\chi, z^h) - (\chi, z^h)^h\right| \leq \left\|(I-\pi^h)\chi z^h\right\|_{L^1} \leq C h^{1+m} |\chi|_{W^{m,p}} \left\|\nabla z^h\right\|_{L^{p'}}. \tag{3.7}$$

Für den Fall, dass zusätzlich $s \neq \infty$ erfüllt ist, gilt außerdem

$$\lim_{h\to 0} \left\|(I-\pi^h)\eta\right\|_{W^{1,s}} = 0. \tag{3.8}$$

Beweis. Bis auf die Punkte (3.7) und (3.8) handelt es sich um Standardresultate, deshalb sind viele Beweise in der Literatur zu finden.

ad (3.3) **und** (3.4)**.** Diese Abschätzungen sind Spezialfälle von Lemma 1.138 bzw. Korollar 1.141 in [8], Seite 75f.

ad (3.5)**.** Diese Abschätzung folgt aus Theorem 3.1.6 in [6], Seite 124.

ad (3.6)**.** Die erste Ungleichung ist eine einfache Folgerung des dritten Punktes von Proposition 2.2. Der Beweis der zweiten Abschätzung ist in Lemma 5 in [16], Seite 254, zu finden.

ad (3.7)**.** Man sieht leicht, dass für $\chi, z^h \in S^h$

$$\begin{aligned}\left|(\chi,z^h)-(\chi,z^h)^h\right| &= \left|\int_\Omega \chi z^h - \pi^h\left(\chi z^h\right)\,dx\right| = \left|\int_\Omega (I-\pi^h)(\chi z^h)\,dx\right| \\ &\leq \left\|(I-\pi^h)\chi z^h\right\|_{L^1}\end{aligned}$$

gilt, woraus die erste Abschätzung folgt. Für die zweite Ungleichung wollen wir das Problem zunächst auf einem Element $\kappa \in \mathcal{T}^h$ betrachten. Klarerweise ist $(\chi z^h)|_\kappa$ als Produkt zweier affiner Funktionen in $W^{2,1}(\kappa)$. Damit erhalten wir wieder aus Theorem 3.1.6 in [6] die Gültigkeit von

$$\left\|(I-\pi^h)\chi z^h\right\|_{L^1(\kappa)} \leq C h_\kappa^2 \left|\chi z^h\right|_{W^{2,1}(\kappa)}.$$

Da die Funktionen χ und z^h affin sind, verschwinden ihre zweiten Ableitungen, daher gilt mit der Produktregel für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$, $|\alpha| = 2$, dass

$$\begin{aligned}D^\alpha(\chi z^h) &= D^\alpha\chi\, z^h + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial z^h}{\partial x_j} + \frac{\partial\chi}{\partial x_j}\frac{\partial z^h}{\partial x_i} + \chi\, D^\alpha z^h \\ &= \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial z^h}{\partial x_j} + \frac{\partial\chi}{\partial x_j}\frac{\partial z^h}{\partial x_i} \quad \text{, wobei } i,j\in\{1,\dots,d\} \text{ mit } \alpha_i,\alpha_j \neq 0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Daher gilt mit der Hölder-Ungleichung und (3.3)

$$\begin{aligned}\left\|(I-\pi^h)\chi z^h\right\|_{L^1(\kappa)} &\overset{(3.9)}{\leq} C h_\kappa^2 \left\|\nabla\chi\right\|_{L^p(\kappa)} \left\|\nabla z^h\right\|_{L^{p'}(\kappa)} \\ &\overset{(3.3)}{\leq} C h_\kappa^{1+m} \left|\chi\right|_{W^{m,p}(\kappa)} \left\|\nabla z^h\right\|_{L^{p'}(\kappa)}.\end{aligned}$$

Da nun die Funktionen χ und z^h klarerweise auch in $W^{1,p}(\Omega)$ bzw. $W^{1,p'}(\Omega)$ liegen, können wir über $\kappa \in \mathcal{T}^h$ aufsummieren und erhalten mit $h = \max_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa$ die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned}\left\|(I-\pi^h)\chi z^h\right\|_{L^1} &= \sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h} \left\|(I-\pi^h)\chi z^h\right\|_{L^1(\kappa)} \\ &\leq C \sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa^{1+m} \left|\chi\right|_{W^{m,p}(\kappa)} \left\|\nabla z^h\right\|_{L^{p'}(\kappa)} \leq Ch^{1+m} \left|\chi\right|_{W^{m,p}} \left\|\nabla z^h\right\|_{L^{p'}} .\end{aligned}$$

ad (3.8)**.** Sei $\widetilde{\varepsilon} > 0$ und $\eta \in W^{1,s}(\Omega)$. Für alle φ aus der Menge M mit

$$M = \left\{ \varphi|_\Omega \,,\, \text{sodass } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \right\}$$

gilt klarerweise

$$\left\|(I-\pi^h)\eta\right\|_{W^{1,s}} \leq \left\|(I-\pi^h)(\eta-\varphi)\right\|_{W^{1,s}} + \left\|(I-\pi^h)\varphi\right\|_{W^{1,s}} .$$

Nun folgt wieder aus Theorem 3.1.6 in [6], dass für $m \in \{0,1\}$

$$\left\|(I-\pi^h)\eta\right\|_{W^{1,s}} \leq Ch^m \left\|\eta\right\|_{W^{1+m,s}}$$

gilt. Da nun klarerweise jedes $\varphi \in M$ ebenfalls in $W^{2,s}(\Omega)$ liegt, folgt aus den beiden Abschätzungen

$$\left\|(I-\pi^h)\eta\right\|_{W^{1,s}} \leq C\left(\left\|\eta-\varphi\right\|_{W^{1,s}} + h\left\|\varphi\right\|_{W^{2,s}}\right).$$

Aus [1], Theorem 3.18 auf Seite 54, wissen wir nun, dass die Menge M dicht in $W^{1,s}(\Omega)$ liegt. Wir können also φ so wählen, dass $\|\eta-\varphi\|_{W^{1,s}} < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2C}$ gilt. Für diese konkrete Funktion existiert klarerweise ein $\overline{h} > 0$, sodass $h\|\varphi\|_{W^{2,s}} < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2C}$ für alle $h < \overline{h}$. Wir haben also für alle $\widetilde{\varepsilon} > 0$ ein $\overline{h} > 0$ gefunden, sodass

$$\left\|(I-\pi^h)\eta\right\|_{W^{1,s}} < \widetilde{\varepsilon} \qquad \forall\, h \in (0,\overline{h}).$$

Somit ist auch (3.8) gezeigt.

□

Bemerkung 3.2. Die Bedingungen an s in Proposition 3.1 sind so gewählt, dass der Raum $W^{1,s}(\Omega)$ stets in den Raum der stetigen Funktionen $C(\overline{\Omega})$ eingebettet werden kann, damit für $\eta \in W^{1,s}(\Omega)$ die Projektion $\pi^h\eta$ sinnvoll definiert ist.

Weitere nützliche Abschätzungen für Funktionen χ aus dem Finite Elemente Raum S^h sind folgender Proposition zu entnehmen:

Proposition 3.3. *Unter den Grundvoraussetzungen (V) gelten für alle $\chi \in S^h$ die folgenden beiden Abschätzungen:*

$$\left\|\nabla\pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right\|_{L^2}^2 \leq \left(\nabla\chi, \nabla\pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right) \tag{3.10a}$$

$$\left\|\nabla\pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right\|_{L^2}^2 \leq \left\|\nabla\chi\right\|_{L^2}^2 . \tag{3.10b}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Ungleichung auf einem Element $\kappa \in \mathcal{T}^h$. Dafür wollen wir uns die Abbildung in (2.24) aus Abschnitt 2.1.2 zu Nutze machen, also jene Abbildung $\mathcal{R}_\kappa : \overline{\widehat{\kappa}} \to \overline{\kappa}$ mit $\widehat{x} \mapsto p_{j_0} + R_\kappa \widehat{x}$, die das Referenzelement $\widehat{\kappa}$ mit den Eckpunkten in (2.23) auf κ abbildet.
Da die Matrix R_κ eine Rotations- Reflexionsmatrix ist, nimmt ihre Determinante den Wert 1 an. Damit erhalten wir wegen $\nabla z^h = R_\kappa \widehat{\nabla} \widehat{z}^h$ aus (2.26) und einer Integralsubstitution

$$\begin{aligned}\left\|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right\|^2_{L^2(\kappa)} &= \int_\kappa \left|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right|^2 dx = \int_{\widehat{\kappa}} \left|R_\kappa \widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi})]\right|^2 |\det R_\kappa| \, d\widehat{x} \\ &\overset{\mathrm{R}_\kappa^{\mathrm{T}} = \mathrm{R}_\kappa^{-1}}{=} \int_{\widehat{\kappa}} \left(\widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi})]\right)^T \left(\widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi})]\right) d\widehat{x}.\end{aligned}$$

Da der Integrand auf der rechten Seite positiv sein muss, können wir o.B.d.A annehmen, dass die einzelnen Komponenten von $\widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi})]$ nichtnegativ sind. Wir können nun weiter für den Term $\widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi})]$, ähnlich wie im Beweis von Proposition 2.11, die rechtwinkelige Gestalt von $\widehat{\kappa}$ und die Affinität von $\widehat{\pi}^h[.]$ ausnutzen, wodurch dieser Gradient als Vektor von Differenzenquotienten geschrieben werden kann. Daher erhalten wir für die k-te Komponente von $\widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi})]$, $k = 1, \ldots, d$

$$\left(\widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi})]\right)_k = \frac{\widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi}(\widehat{p}_k))] - \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi}(\widehat{p}_0))]}{|\widehat{p}_k - \widehat{p}_0|} = \frac{\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi}(\widehat{p}_k)) - \lambda_\varepsilon(\widehat{\chi}(\widehat{p}_0))}{|\widehat{p}_k - \widehat{p}_0|}$$

und da o.B.d.A $\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi}(\widehat{p}_k)) - \lambda_\varepsilon(\widehat{\chi}(\widehat{p}_0)) \geq 0$ und λ_ε Lipschitz-stetig ist weiter

$$\leq \frac{\widehat{\chi}(\widehat{p}_k) - \widehat{\chi}(\widehat{p}_0)}{|\widehat{p}_k - \widehat{p}_0|} = \left(\widehat{\nabla} \widehat{\chi}\right)_k.$$

Wir erhalten also zusammen mit einer Rücksubstitution für $\kappa \in \mathcal{T}^h$

$$\left\|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right\|^2_{L^2(\kappa)} \leq \int_{\widehat{\kappa}} \left(\widehat{\nabla} \widehat{\chi}\right)^T \left(\widehat{\nabla} \widehat{\pi}^h[\lambda_\varepsilon(\widehat{\chi})]\right) d\widehat{x} = \int_\kappa (\nabla \chi)^T \left(\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right) dx,$$

womit wir durch Aufsummieren aller Elemente in $\mathcal{T}^h$

$$\begin{aligned}\left\|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right\|^2_{L^2} &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \left\|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right\|^2_{L^2(\kappa)} \leq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \int_\kappa (\nabla \chi)^T \left(\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right) dx \\ &= \left(\nabla \chi, \nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right)\end{aligned}$$

erhalten. Damit ist (3.10a) gezeigt.

Die zweite Ungleichung folgt leicht aus (3.10a) und der Youngschen Ungleichung, denn es gilt

$$\begin{aligned}\left\|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right\|^2_{L^2} &\leq \left(\nabla \chi, \nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right) \leq \int_\Omega |\nabla \chi| \left|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \chi|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \left|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla \chi\|^2_{L^2} + \frac{1}{2} \left\|\nabla \pi^h[\lambda_\varepsilon(\chi)]\right\|^2_{L^2},\end{aligned}$$

wobei man hier nur mehr den zweiten Summanden auf beiden Seiten abziehen muss, um (3.10b) zu erhalten. □

Zu guter Letzt wollen wir noch zwei Abschätzungen hinzufügen, welche in Zusammenhang mit den in Abschnitt 2.1.3 definierten Operatoren $\mathcal{Q}^h$ und $\mathcal{G}$ stehen.

Proposition 3.4. *Für $m \in \{0,1\}$ gilt*

$$\left|(I-\mathcal{Q}^h)\eta\right|_{W^{m,r}} \leq Ch^{1-m}\left\|\nabla\eta\right\|_{L^r} \qquad \forall\,\eta \in W^{1,r}(\Omega),\, r\in[2,\infty]. \tag{3.11}$$

Außerdem gilt

$$\left\|z^h\right\|_{L^q} \leq Ch^{-1}\|\mathcal{G}z^h\|_{W^{1,q}} \qquad \forall\, z^h \in S^h,\, q\in(1,2]. \tag{3.12}$$

Beweis.

ad (3.11)**.** Der Beweis verläuft ähnlich wie jene von (3.5) und (3.7), denn auch hier nimmt die Transformation $\mathcal{F}_\kappa$ eine wichtige Rolle ein.
Sei $\kappa \in \mathcal{T}^h$ beliebig. Wir wollen zunächst den Operator $\mathcal{Q}^h$ auf natürliche Weise auf $\widehat{\kappa}_e$ für ein $\eta \in W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$\left(\widehat{\mathcal{Q}^h\eta}\right)|_{\overline{\widehat{\kappa}}_e} := \left[\left(\mathcal{Q}^h\eta\right)|_{\overline{\kappa}}\right]\circ\mathcal{F}_\kappa \quad \text{mit } \widehat{\eta} = \eta\circ\mathcal{F}_\kappa \tag{3.13}$$

definieren. Man sieht leicht, dass

$$\left(\widehat{\mathcal{Q}^h\eta}\right)|_{\overline{\widehat{\kappa}}_e} = \left(\widehat{\mathcal{Q}}^h\widehat{\eta}\right)|_{\overline{\widehat{\kappa}}_e} \tag{3.14}$$

gilt, denn beides sind affine Funktionen auf $\overline{\widehat{\kappa}}_e$ und nehmen an den Eckpunkten $\widehat{p}_i$ die Werte $([(\mathcal{Q}^h\eta)|_{\overline{\kappa}}]\circ\mathcal{F}_\kappa)(\widehat{p}_i)$ für $i=1,\dots,d$ an. Somit gilt für $m\in\{0,1\}$ und alle konstanten Funktion $\pi\in\mathcal{P}_0$ wegen $\mathcal{Q}^h\pi=\pi$ aus Proposition 2.12

$$\begin{aligned}
\left|(I-\mathcal{Q}^h)\eta\right|_{W^{m,r}(\kappa)} &\overset{(3.2b)}{\leq} Ch_\kappa^{-\left(m-\frac{d}{r}\right)}\left|\widehat{\eta}-\widehat{\mathcal{Q}^h\eta}\right|_{W^{m,r}(\widehat{\kappa}_e)} \\
&\overset{(3.13)}{=} Ch_\kappa^{-\left(m-\frac{d}{r}\right)}\left|\widehat{\eta}-\pi-\widehat{\mathcal{Q}}^h\left(\widehat{\eta}-\pi\right)\right|_{W^{m,r}(\widehat{\kappa}_e)} \\
&\leq Ch_\kappa^{-\left(m-\frac{d}{r}\right)}\left(\|\widehat{\eta}-\pi\|_{W^{m,r}(\widehat{\kappa}_e)} + \left\|\widehat{\mathcal{Q}}^h\left(\widehat{\eta}-\pi\right)\right\|_{W^{m,r}(\widehat{\kappa}_e)}\right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Da $\widehat{\mathcal{Q}}^h(\widehat{\eta}-\pi)$ eine affine Funktion auf $\widehat{\kappa}_e$ bzw. $\overline{\widehat{\kappa}}_e$ ist und die Normen auf $\widehat{S}_e$ äquivalent sind, sind die Normen $\|.\|_{W^{m,r}(\widehat{\kappa}_e)}$ und $|.|_{h,\kappa}$ auf $\widehat{S}_e$ äquivalent, wobei $|.|_{h,\kappa} := \sqrt{(.,.)^{h,\kappa}}$ (Die Bilinearform $(.,.)^{h,\kappa}$ ist analog zu $(.,.)^h$ in (2.5), mit $\widehat{\kappa}_e$ anstelle von Ω, definiert). Es existiert also eine von h unabhängige Konstante C, sodass $\|.\|_{W^{1,r}(\widehat{\kappa}_e)} \leq C|.|_{h,\kappa}$. Außerdem ist $\mathcal{Q}^h$ nach Proposition 2.12 ein

beschränkter Operator von $L^2(\Omega)$ nach S^h, also ist auch $\widehat{\mathcal{Q}}^h : L^2(\widehat{\kappa}_e) \to \widehat{S}_e$ beschränkt. Daher gilt wegen $W^{1,r}(\widehat{\kappa}_e) \hookrightarrow L^2(\widehat{\kappa}_e)$ und der Normäquivalenz von $\|.\|_{W^{1,r}(\widehat{\kappa}_e)}$ und $|.|_{h,\kappa}$

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{\mathcal{Q}}^h\left(\widehat{\eta}-\pi\right)\right\|_{W^{1,r}(\widehat{\kappa}_e)} &\leq C\left|\widehat{\mathcal{Q}}^h\left(\widehat{\eta}-\pi\right)\right|_{h,\kappa} \leq C\left\|\widehat{\eta}-\pi\right\|_{L^2(\widehat{\kappa}_e)} \\ &\leq C\left\|\widehat{\eta}-\pi\right\|_{W^{1,r}(\widehat{\kappa}_e)}.\end{aligned}$$

Damit, und mit (1.6) aus dem Lemma von *Deny-Lions*, folgt für (3.15)

$$\begin{aligned}\left|\left(I-\mathcal{Q}^h\right)\eta\right|_{W^{m,r}(\kappa)} &\leq \inf_{\pi\in\mathcal{P}_0} C h_\kappa^{-\left(m-\frac{d}{r}\right)}\left\|\widehat{\eta}-\pi\right\|_{W^{1,r}(\widehat{\kappa}_e)} \\ &\overset{(1.6)}{\leq} C h_\kappa^{-\left(m-\frac{d}{r}\right)}\left\|\nabla\widehat{\eta}\right\|_{L^r(\widehat{\kappa}_e)} \overset{(3.2a)}{\leq} C h_\kappa^{-\left(m-\frac{d}{r}\right)} h_\kappa^{1-\left(\frac{d}{r}\right)}\left\|\nabla\eta\right\|_{L^r(\kappa)} \\ &= C h_\kappa^{1-m}\left\|\nabla\eta\right\|_{L^r(\kappa)}\end{aligned}$$

Durch Aufsummieren erhalten wir wegen $h \geq h_\kappa$, für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$,

$$\begin{aligned}\left|\left(I-\mathcal{Q}^h\right)\eta\right|_{W^{m,r}} &= \left(\sum_{\kappa\in\mathcal{T}}\left|\left(I-\mathcal{Q}^h\right)\eta\right|^r_{W^{m,r}(\kappa)}\right)^{\frac{1}{r}} \leq C h^{1-m}\left(\sum_{\kappa\in\mathcal{T}}\left\|\nabla\eta\right\|^r_{L^r(\kappa)}\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C h^{1-m}\left\|\nabla\eta\right\|_{L^r}\end{aligned}$$

und die gewünschte Ungleichung (3.11) ist gezeigt.

ad (3.12)**.** Um dies zu zeigen, benötigen wir eine inverse Abschätzung in der Form $\|.\|_{L^q} \leq h^{-1}\|.\|_{(W^{1,q'}(\Omega))'}$. Aus Theorem 4.6 in [7], Seite 1121, folgt die Gültigkeit von

$$\left\|h(x)z^h\right\|_{L^q} \leq C\left\|z^h\right\|_{(W^{1,q'}(\Omega))'}$$

für alle $z^h \in S^h$ und $q \in (1,2]$ (tatsächlich gilt diese Ungleichung sogar für $q \in (1,\infty]$), wobei $C > 0$ nur von den Konstanten σ und ν aus den Grundvoraussetzungen (V) abhängt und $h(x)$ eine Funktion aus S^h ist, welche $\min_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa \leq h(x) \leq \max_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt. Da nun $\{\mathcal{T}^h\}_{h>0}$ eine quasi-uniforme Familie von Triangulierungen ist, gilt insbesondere $h \leq \nu\, h_\kappa$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$ und somit $h \leq \nu \min_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa$. Daher gilt

$$\frac{h}{\nu}\left\|z^h\right\|_{L^q} \leq \left\|h(x)z^h\right\|_{L^q} \leq C\left\|z^h\right\|_{(W^{1,q'}(\Omega))'}$$

und es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\left\|z^h\right\|_{L^q} \leq C h^{-1}\left\|z^h\right\|_{(W^{1,q'}(\Omega))'} \qquad \forall\, z^h \in S^h,\ q \in (1,2].$$

Somit gilt zusammen mit der Eigenschaft (2.43) von $\mathcal{G}$ für alle $z^h \in S^h$

$$\begin{aligned}\left\|z^h\right\|_{L^q} &\leq Ch^{-1}\left\|z^h\right\|_{(W^{1,q'})'} \\ &= Ch^{-1}\sup\left\{\left|\left\langle z,\eta\right\rangle_{q'}\right| : \eta \in W^{1,q'}(\Omega),\ \|\eta\|_{W^{1,q'}} \leq 1\right\} \\ &= Ch^{-1}\sup_{\eta\in W^{1,q'}(\Omega),\,\|\eta\|_{W^{1,q'}}\leq 1}\left|\left(\nabla\mathcal{G}z^h,\nabla\eta\right)+\left(\mathcal{G}z^h,\eta\right)\right|\end{aligned}$$

und weiter mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}&\leq Ch^{-1}\sup_{\eta\in W^{1,q'}(\Omega),\,\|\eta\|_{W^{1,q'}}\leq 1}\left(\left\|\nabla\mathcal{G}z^h\right\|_{L^q}+\left\|\mathcal{G}z^h\right\|_{L^q}\right)\underbrace{\|\eta\|_{W^{1,q'}}}_{\leq 1} \\ &\leq Ch^{-1}\left\|\nabla\mathcal{G}z^h\right\|_{L^q}+\left\|\mathcal{G}z^h\right\|_{L^q} \leq Ch^{-1}\left\|\mathcal{G}z^h\right\|_{W^{1,q}}.\end{aligned}$$

Damit ist auch die Ungleichung in (3.12) gezeigt.

□

Bemerkung 3.5. In den Beweisen der Ungleichungen von Proposition 3.4 fließt wesentlich ein, dass es sich bei $\{\mathcal{T}^h\}_{h>0}$ um eine quasi-uniforme Familie von Triangulierungen handelt.

3.2 Abschätzungen für Λ_ε und Lösbarkeit der Finiten Elemente Approximation

Hauptziel dieses Abschnittes ist Theorem 3.10, in dem unter einer Bedingung an die Zeitschritte τ_n des Modells Lösbarkeit des diskreten Problems ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) gezeigt wird. Bei dem Beweis dieses Theorems handelt es sich um einen Widerspruchsbeweis: Wir werden annehmen, dass das Problem nicht lösbar ist, was die Definition einer stetigen Abbildung zulässt auf die wir den *Fixpunktsatz von Schauder* (siehe z.B. [11], Theorem 10.1 auf Seite 221) anwenden können, was uns schlussendlich einen Widerspruch liefern wird.

Bevor wir den Beweis von Theorem 3.10 angehen können, brauchen wir ein Resultat für Λ_ε, das uns bei der Stetigkeit des gerade erwähnten Fixpunktoperators behilflich sein wird.

Lemma 3.6. *Es gelten die Grundbedingungen (V). Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0,1)$, dass die Funktion $\Lambda_\varepsilon : S^h \to [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$*

$$\varepsilon\xi^T\xi \leq \xi^T\left[\Lambda_\varepsilon(z^h)\right]^\nu\xi \leq \varepsilon^{-1}\xi^T\xi, \qquad \forall z^h \in S^h,\ \xi\in\mathbb{R}^d \text{ und } \nu\in\{-1,1\} \tag{3.16}$$

erfüllt. Außerdem gilt für alle $z_1^h, z_2^h \in S^h, \kappa \in \mathcal{T}^h$

$$\left\|(\Lambda_\varepsilon(z_1^h)-\Lambda_\varepsilon(z_2^h))|_\kappa\right\|_2 \leq \varepsilon^{-2}\max_{k=1\ldots d}\left[|z_1^h(p_{j_k})-z_2^h(p_{j_k})|+|z_1^h(p_{j_0})-z_2^h(p_{j_0})|\right] \tag{3.17}$$

Beweis. Mit (2.27), $R_\kappa^T = R_\kappa^{-1}$ und der Diagonalgestalt von $\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)$ erkennt man, dass für $z^h \in S^h$ und für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$

$$\begin{aligned}\xi^T \left[\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa\right]^\nu \xi &= (R_\kappa^T\xi)^T \left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]^\nu (R_\kappa^T\xi) \\ &= \sum_{k=1}^d \left(R_\kappa^T\xi\right)_k^2 \left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)|_{\widehat{\kappa}}\right]_{kk}^\nu = \sum_{k=1}^d \left(R_\kappa^T\xi\right)_k^2 {\lambda_\varepsilon}^\nu(\zeta_k) \qquad (3.18)\end{aligned}$$

gilt, wobei $\zeta_k \in \kappa$ wie in (2.28) aus der Definition von Λ_ε zu wählen ist. Nun gilt wegen $\varepsilon \le {\lambda_\varepsilon}^\nu(s) \le \varepsilon^{-1}$ und $R_\kappa^T R_\kappa = \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\varepsilon\xi^T\xi = \varepsilon(R^T\xi)^T(R^T\xi) &\le \sum_{k=1}^d \left(R_\kappa^T\xi\right)_k^2 {\lambda_\varepsilon}^\nu(\zeta_k) \overset{(3.18)}{=} \xi^T \left[\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa\right]^\nu \xi \\ &= \sum_{k=1}^d \left(R_\kappa^T\xi\right)_k^2 {\lambda_\varepsilon}^\nu(\zeta_k) \le \varepsilon^{-1}(R^T\xi)^T(R^T\xi) = \varepsilon^{-1}\xi^T\xi,\end{aligned}$$

und somit (3.16).

Für die Gleichung in (3.17) folgt mit der Definition der Spektralnorm

$$\begin{aligned}\left\|(\Lambda_\varepsilon(z_1^h) - \Lambda_\varepsilon(z_2^h))|_\kappa\right\|_2 &= \left\|(\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_1}^h) - \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_2}^h))|_{\widehat{\kappa}}\right\|_2 \\ &= \max_{k=1\dots d} \left|\left(\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_1^h)\right]_{kk} - \left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_2^h)\right]_{kk}\right)|_{\widehat{\kappa}}\right|. \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Für jedes $k \in \{1,\dots,d\}$ erhalten wir durch Einschieben einer Funktion $z_{1,2}^h \in S^h$ mit $z_{1,2}^h(p_{j_0}) = z_2^h(p_{j_0})$ und $z_{1,2}^h(p_{j_k}) = z_1^h(p_{j_k})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left|\left(\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_1^h)\right]_{kk} - \left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_2^h)\right]_{kk}\right)|_{\widehat{\kappa}}\right| \\ &\quad\le \left|\left(\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_1^h)\right]_{kk} - \left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_{1,2}^h)\right]_{kk}\right)|_{\widehat{\kappa}}\right| + \left|\left(\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_{1,2}^h)\right]_{kk} - \left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_2^h)\right]_{kk}\right)|_{\widehat{\kappa}}\right| \\ &\quad\le \left|\frac{1}{{F_\varepsilon}''(\mu_1)} - \frac{1}{{F_\varepsilon}''(\zeta)}\right| + \left|\frac{1}{{F_\varepsilon}''(\zeta)} - \frac{1}{{F_\varepsilon}''(\mu_2)}\right|,\end{aligned} \qquad (3.20)$$

wobei für $i = 1,2$ der Wert μ_i zwischen $z_i^h(p_{j_0})$ und $z_i^h(p_{j_k})$ liegt, und ζ zwischen $z_1^h(p_{j_k})$ und $z_2^h(p_{j_0})$.
Zunächst wollen wir für ein $k \in \{1,\dots,d\}$ und für $z_1^h(p_{j_0}) \ne z_2^h(p_{j_0})$ die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{{F_\varepsilon}''(\mu_1)} - \frac{1}{{F_\varepsilon}''(\zeta)}\right| \le \varepsilon^{-2}|z_1^h(p_{j_0}) - z_2^h(p_{j_0})| \qquad (3.21)$$

zeigen (wäre $z_1^h(p_{j_0}) = z_2^h(p_{j_0})$, so wäre nach dem Mittelwertsatz $\mu_1 = \zeta$ und somit (3.21) trivialerweise erfüllt). Sei γ zwischen $z_1^h(p_{j_0})$ und $z_2^h(p_{j_0})$, sodass

$$\frac{1}{{F_\varepsilon}''(\gamma)} = \frac{z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0})}{{F_\varepsilon}'(z_2^h(p_{j_0})) - {F_\varepsilon}'(z_1^h(p_{j_0}))}. \qquad (3.22)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0}))F_\varepsilon{}''(\gamma) &= F_\varepsilon{}'(z_2^h(p_{j_0})) - F_\varepsilon{}'(z_1^h(p_{j_0})) \\ &= F_\varepsilon{}'(z_2^h(p_{j_0})) - F_\varepsilon{}'(z_1^h(p_{j_k})) + F_\varepsilon{}'(z_1^h(p_{j_k})) - F_\varepsilon{}'(z_1^h(p_{j_0})) \\ &= (z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_k}))F_\varepsilon{}''(\zeta) + (z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0}))F_\varepsilon{}''(\mu_1), \quad (3.23)\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $F_\varepsilon{}''(\zeta) = \frac{F_\varepsilon{}'(z_2^h(p_{j_0})) - F_\varepsilon{}'(z_1^h(p_{j_k}))}{z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_k})}$ für $z_2^h(p_{j_0}) \neq z_1^h(p_{j_k})$ bzw. $F_\varepsilon{}''(\mu_1) = \frac{F_\varepsilon{}'(z_1^h(p_{j_k})) - F_\varepsilon{}'(z_1^h(p_{j_0}))}{z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})}$ für $z_1^h(p_{j_k}) \neq z_1^h(p_{j_0})$ erfüllt ist (falls $z_2^h(p_{j_0}) = z_1^h(p_{j_k})$ oder $z_1^h(p_{j_k}) = z_1^h(p_{j_0})$ gelten sollte, so stünde auf beiden Seiten der letzten Gleichung von (3.23) der Wert Null, womit die Gleichheit ebenfalls erfüllt wäre). Wir haben also

$$(z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0}))F_\varepsilon{}''(\gamma) = (z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_k}))F_\varepsilon{}''(\zeta) + (z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0}))F_\varepsilon{}''(\mu_1). \quad (3.24)$$

Außerdem bemerken wir, dass für zwei reelle Zahlen a und b der Betrag $|a+b|$ genau die Werte $|a|+|b|$, $|a|-|b|$ oder $|b|-|a|$ annehmen kann. Mit dieser Überlegung erhalten wir für $|z_1^h(p_{j_0}) - z_2^h(p_{j_0})| = |(z_1^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_k})) + (z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_0}))|$ folgende 3 Fälle:

$$|z_1^h(p_{j_0}) - z_2^h(p_{j_0})| = \begin{cases} |z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})| + |z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_0})| & \text{(i), oder} \\ |z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})| - |z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_0})| & \text{(ii), oder} \\ |z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_0})| - |z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})| & \text{(iii).} \end{cases} \quad (3.25)$$

Im Fall (i) haben wir dank der Lipschitz-Stetigkeit von λ_ε

$$\left| \frac{1}{F_\varepsilon{}''(\mu_1)} - \frac{1}{F_\varepsilon{}''(\zeta)} \right| = |\lambda_\varepsilon(\mu_1) - \lambda_\varepsilon(\zeta)| \leq |\mu_1 - \zeta| \leq |\mu_1 - z_1^h(p_{j_k})| + |z_1^h(p_{j_k}) - \zeta|.$$

Da μ_1 zwischen $z_1^h(p_{j_0})$ und $z_1^h(p_{j_k})$, und ζ zwischen $z_1^h(p_{j_k})$ und $z_2^h(p_{j_0})$ liegt, gilt

$$|\mu_1 - z_1^h(p_{j_k})| + |z_1^h(p_{j_k}) - \zeta| \leq |z_1^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_k})| + |z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_0})|,$$

sodass wir mit (3.25) und $\varepsilon^{-2} \geq 1$ in Summe

$$\left| \frac{1}{F_\varepsilon{}''(\mu_1)} - \frac{1}{F_\varepsilon{}''(\zeta)} \right| \leq |z_1^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_k})| + |z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_0})| \leq \varepsilon^{-2}|z_1^h(p_{j_0}) - z_2^h(p_{j_0})|$$

erhalten, womit (3.21) für den Fall (i) gezeigt ist.
Im Fall (ii) kommen wir sogar ohne (3.25) aus. Wir betrachten

$$\begin{aligned}&(z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})) \left[\frac{1}{F_\varepsilon{}''(\zeta)} - \frac{1}{F_\varepsilon{}''(\mu_1)} \right] = (z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})) \left[\frac{F_\varepsilon{}''(\mu_1) - F_\varepsilon{}''(\zeta)}{F_\varepsilon{}''(\zeta)F_\varepsilon{}''(\mu_1)} \right] \\ &= \frac{1}{F_\varepsilon{}''(\zeta)F_\varepsilon{}''(\mu_1)} \left[F_\varepsilon{}''(\mu_1)(z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})) - F_\varepsilon{}''(\zeta)(z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})) \right], \quad (3.26)\end{aligned}$$

wobei wegen (3.24) die Gleichung $F_\varepsilon''(\mu_1)(z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})) = F_\varepsilon''(\gamma)(z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0})) - F_\varepsilon''(\zeta)(z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_k}))$ gilt. Daher haben wir weiter

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{F_\varepsilon''(\zeta)F_\varepsilon''(\mu_1)}\left[F_\varepsilon''(\mu_1)(z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})) - F_\varepsilon''(\zeta)(z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0}))\right] \\
&\quad = \frac{1}{F_\varepsilon''(\zeta)F_\varepsilon''(\mu_1)}\left[F_\varepsilon''(\gamma)(z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0})) - F_\varepsilon''(\zeta)(z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0}))\right] \\
&\qquad = (z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0}))\left[\frac{F_\varepsilon''(\gamma) - F_\varepsilon''(\zeta)}{F_\varepsilon''(\zeta)F_\varepsilon''(\mu_1)}\right] \\
&\qquad = (z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0}))\frac{F_\varepsilon''(\gamma)}{F_\varepsilon''(\mu_1)}\left[\lambda_\varepsilon(\zeta) - \lambda_\varepsilon(\gamma)\right].
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich mit (3.26)

$$(z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0}))\left[\frac{1}{F_\varepsilon''(\zeta)} - \frac{1}{F_\varepsilon''(\mu_1)}\right] = (z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0}))\frac{F_\varepsilon''(\gamma)}{F_\varepsilon''(\mu_1)}\left[\lambda_\varepsilon(\zeta) - \lambda_\varepsilon(\gamma)\right].$$

Da wegen der Lage von ζ und γ die Abschätzung $|\zeta - \gamma| \leq |z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})|$ erfüllt ist, folgt aus der letzten Gleichung mit der Lipschitz-Stetigkeit von λ_ε und der Eigenschaft $\varepsilon \leq F_\varepsilon'' \leq \varepsilon^{-1}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{F_\varepsilon''(\zeta)} - \frac{1}{F_\varepsilon''(\mu_1)}\right| &\leq \underbrace{\frac{F_\varepsilon''(\gamma)}{F_\varepsilon''(\mu_1)}}_{\leq \varepsilon^{-2}} \underbrace{\frac{|\lambda_\varepsilon(\zeta) - \lambda_\varepsilon(\gamma)|}{|z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})|}}_{\leq \frac{|\zeta-\gamma|}{|z_1^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_0})|} \leq 1} |z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0})| \\
&\leq \varepsilon^{-2}|z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0})|, \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

womit auch in diesem Fall (3.21) erfüllt ist.
Im letzten Fall (iii) führt eine zu jener in (ii) analoge Rechnung zu der Gleichung

$$(z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_0}))\left[\frac{1}{F_\varepsilon''(\zeta)} - \frac{1}{F_\varepsilon''(\mu_1)}\right] = (z_2^h(p_{j_0}) - z_1^h(p_{j_0}))\frac{F_\varepsilon''(\gamma)}{F_\varepsilon''(\zeta)}\left[\lambda_\varepsilon(\mu_1) - \lambda_\varepsilon(\gamma)\right].$$

Daraus folgt wie in (3.27) die Ungleichung (3.21) und somit ist diese für alle Fälle und für alle $k \in \{1, \ldots, d\}$ erfüllt.
Es bleibt noch der zweite Summand in (3.20) abzuschätzen, dh.

$$\left|\frac{1}{F_\varepsilon''(\zeta)} - \frac{1}{F_\varepsilon''(\mu_2)}\right| \leq \varepsilon^{-2}|z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_k})| \qquad (3.28)$$

zu zeigen. Hierfür wählen wir (ähnlich wie in (3.22)) ein γ zwischen $z_1^h(p_{j_k})$ und $z_2^h(p_{j_k})$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{F_\varepsilon''(\gamma)} = \frac{z_2^h(p_{j_k}) - z_1^h(p_{j_k})}{F_\varepsilon'(z_2^h(p_{j_k})) - F_\varepsilon'(z_1^h(p_{j_k}))}.$$

Nun sieht man schnell, dass die weitere Beweisführung für (3.28) genau die gleiche ist, wie jene von (3.21). Tatsächlich muss man nur in allen Gleichungen ab (3.22) die

Funktionen $z_1^h(.)$ mit $z_2^h(.)$, μ_1 mit μ_2 und p_{j_0} mit p_{j_k} vertauschen.
Somit ergibt sich durch Einsetzen der Abschätzungen (3.21) und (3.28) in (3.19) bzw. (3.20)

$$\begin{aligned}
\left\|(\Lambda_\varepsilon(z_1^h) - \Lambda_\varepsilon(z_2^h))|_\kappa\right\|_2 &= \left\|(\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_1}^h) - \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z_2}^h))|_{\widehat{\kappa}}\right\|_2 \\
&= \max_{k=1\dots d} \left| \left(\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_1^h)\right]_{kk} - \left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(z_2^h)\right]_{kk} \right) |_{\widehat{\kappa}} \right| \\
&\leq \max_{k=1\dots d} \left[\left| \frac{1}{{F_\varepsilon}''(\mu_1)} - \frac{1}{{F_\varepsilon}''(\zeta)} \right| + \left| \frac{1}{{F_\varepsilon}''(\zeta)} - \frac{1}{{F_\varepsilon}''(\mu_2)} \right| \right] \\
&\leq \varepsilon^{-2} \max_{k=1\dots d} \left[|z_1^h(p_{j_k}) - z_2^h(p_{j_k})| + |z_1^h(p_{j_0}) - z_2^h(p_{j_0})| \right].
\end{aligned}$$

Damit sind alle Behauptungen gezeigt. □

Korollar 3.7. *Es gelten die Grundbedingungen (V). Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0,1)$ und $z_1^h, z_2^h, \widetilde{z_1}^h, \widetilde{z_2}^h, \chi \in S^h$ die Abschätzung*

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h)\nabla\widetilde{z_1}^h - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\widetilde{z_2}^h, \nabla\chi \right) \right| \\
&\quad \leq C \left(\left\|\widetilde{z_1}^h\right\|_{C(\overline{\Omega})} \left\|z_1^h - z_2^h\right\|_{C(\overline{\Omega})} + \left(1 + \left\|z_2^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\right) \left\|\widetilde{z_1}^h - \widetilde{z_2}^h\right\|_{C(\overline{\Omega})} \right) \|\nabla\chi\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Beweis. Durch Einschieben des Terms $\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\widetilde{z_1}^h$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h)\nabla\widetilde{z_1}^h - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\widetilde{z_2}^h, \nabla\chi \right) \right| \\
&\quad = \left| \left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h)\nabla\widetilde{z_1}^h - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\widetilde{z_1}^h + \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\widetilde{z_1}^h - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\widetilde{z_2}^h, \nabla\chi \right) \right| \\
&\quad \leq \left| \left(\left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h) - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right) \nabla\widetilde{z_1}^h, \nabla\chi \right) \right| + \left| \left(\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\left(\widetilde{z_1}^h - \widetilde{z_2}^h\right), \nabla\chi \right) \right|.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Für den ersten Summanden bemerken wir zunächst, dass die Funktion $\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa$ wegen der Definition in (2.27) bzw. (2.28) für festes $z^h \in S^h$ und $\kappa \in \mathcal{T}^h$ eine Matrix ist, deren Einträge nicht von Werten $x \in \kappa$ abhängen. Daher ist auch die Spektralnorm $\|\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa\|$ unabhängig von $x \in \Omega$ weshalb wir

$$\begin{aligned}
\left| \left(\left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h) - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right) \nabla\widetilde{z_1}^h, \nabla\chi \right) \right| &\leq \int_\Omega \left\|\Lambda_\varepsilon(z_1^h) - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right\|_2 \left|\nabla\widetilde{z_1}^h\right| |\nabla\chi| \, dx \\
&\leq \max_{\kappa\in\mathcal{T}^h} \left\| \left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h) - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right) |_\kappa \right\|_2 \int_\Omega \left|\nabla\widetilde{z_1}^h\right| |\nabla\chi| \, dx \\
&\leq \max_{\kappa\in\mathcal{T}^h} \left\| \left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h) - \Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right) |_\kappa \right\|_2 \left\|\nabla\widetilde{z_1}^h\right\|_{L^2} \|\nabla\chi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

schreiben können. Daher erhalten wir zusammen mit der Ungleichung (3.17) aus dem

letzten Lemma

$$\begin{aligned}&\left|\left(\left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h)-\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right)\nabla\widetilde{z_1}^h,\nabla\chi\right)\right|\\&\quad\le\varepsilon^{-2}\max_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\max_{k=1\dots d}\left[|z_1^h(p_{j_k})-z_2^h(p_{j_k})|+|z_1^h(p_{j_0})-z_2^h(p_{j_0})|\right]\left\|\nabla\widetilde{z_1}^h\right\|_{L^2}\|\nabla\chi\|_{L^2}\\&\qquad\le 2\varepsilon^{-2}\left\|z_1^h-z_2^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\left\|\widetilde{z_1}^h\right\|_{H^1}\|\nabla\chi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Da alle Normen auf S^h äquivalent sind, gibt es ein $C>0$, sodass $\|\widetilde{z_1}^h\|_{H^1}\le C\|\widetilde{z_1}^h\|_{C(\overline{\Omega})}$ gilt. Somit erhalten wir durch Zusammenfassen aller Konstanten, dass für den ersten Summanden in (3.30)

$$\left|\left(\left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h)-\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right)\nabla\widetilde{z_1}^h,\nabla\chi\right)\right|\le C\left\|\widetilde{z_1}^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\left\|z_1^h-z_2^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\|\nabla\chi_2\|_{L^2}\tag{3.31}$$

gilt.

Für den zweiten Term in (3.30) nehmen wir zunächst ein beliebiges $\kappa\in\mathcal{T}^h$. Wenn man in die Definition von $\Lambda_\varepsilon(.)|_\kappa$ die Funktion $0\in S^h$ einsetzt erhalten wir wegen $\lambda_\varepsilon(0)=\varepsilon$

$$\Lambda_\varepsilon(0)|_\kappa=R_\kappa\underbrace{\widehat{\Lambda_\varepsilon(0)}}_{=\mathrm{diag}\{\lambda_\varepsilon(0)\}}R_\kappa^T=\varepsilon R_\kappa R_\kappa^T=\varepsilon\mathcal{I}.$$

Somit erhalten wir mit der Dreiecksungleichung und der Abschätzung (3.17) für ein $z^h\in S^h$

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa\right\|_2&=\left\|\left(\Lambda_\varepsilon(z^h)-\Lambda_\varepsilon(0)+\Lambda_\varepsilon(0)\right)|_\kappa\right\|_2\le\left\|\left(\Lambda_\varepsilon(z^h)-\Lambda_\varepsilon(0)\right)|_\kappa\right\|_2+\|\varepsilon\mathcal{I}\|_2\\&\le\varepsilon^{-2}\max_{k=1\dots d}\left[|z^h(p_{j_k})|+|z^h(p_{j_0})|\right]+\varepsilon\\&\le 2\varepsilon^{-2}\left\|z^h\right\|_{C(\overline{\kappa})}+\varepsilon,\end{aligned}$$

und daher

$$\max_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\left\|\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa\right\|_2\le C\left(1+\left\|z^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\right).$$

Damit erhält man, ähnlich wie vorhin, für den zweiten Summanden in (3.30)

$$\begin{aligned}\left(\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\left(\widetilde{z_1}^h-\widetilde{z_2}^h\right),\nabla\chi\right)&\le\int_\Omega\left\|\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right\|_2\left|\nabla\left(\widetilde{z_1}^h-\widetilde{z_2}^h\right)\right||\nabla\chi|\,dx\\&\le\max_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\left\|\Lambda_\varepsilon(z_2^h)|_\kappa\right\|_2\left\|\nabla\left(\widetilde{z_1}^h-\widetilde{z_2}^h\right)\right\|_{L^2}\|\nabla\chi\|_{L^2}\end{aligned}$$

und da wie vorher $\|.\|_{H^1}\le C\|.\|_{C(\overline{\Omega})}$ gilt, führt dies letzten Endes zu

$$\begin{aligned}\left(\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\left(\widetilde{z_1}^h-\widetilde{z_2}^h\right),\nabla\chi\right)&\le\max_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\left\|\Lambda_\varepsilon(z_2^h)|_\kappa\right\|_2\left\|\nabla\left(\widetilde{z_1}^h-\widetilde{z_2}^h\right)\right\|_{L^2}\|\nabla\chi\|_{L^2}\\&\le C\left(1+\left\|z_2^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\right)\left\|\widetilde{z_1}^h-\widetilde{z_2}^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\|\nabla\chi\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Wenn wir nun (3.31) und (3.32) in (3.30) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\left|\left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h)\nabla\widetilde{z_1}^h-\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\widetilde{z_2}^h,\nabla\chi\right)\right|\\&\quad\le\left|\left(\left(\Lambda_\varepsilon(z_1^h)-\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\right)\nabla\widetilde{z_1}^h,\nabla\chi\right)\right|+\left|\left(\Lambda_\varepsilon(z_2^h)\nabla\left(\widetilde{z_1}^h-\widetilde{z_2}^h\right),\nabla\chi\right)\right|\\&\quad\le C\left(\left\|\widetilde{z_1}^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\left\|z_1^h-z_2^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}+\left(1+\left\|z_2^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\right)\left\|\widetilde{z_1}^h-\widetilde{z_2}^h\right\|_{C(\overline{\Omega})}\right)\|\nabla\chi_2\|_{L^2},\end{aligned}$$

womit wir das gewünschte Resultat erzielt haben. □

Bevor wir uns der Lösbarkeit des Problems ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) widmen, führen wir eine weitere Abschätzung für Λ_ε ein, welche wir später im Kapitel über Konvergenzen benötigen werden.
Als kleine Motivation überlegen wir zuerst, wie sich für ein $z^h \in S^h$ die Differenz von $\lambda_\varepsilon(z^h)$ zu seiner Projektion $\pi^h[\lambda_\varepsilon(z^h)]$ verhält, also was man über den Term $\|(I-\pi^h)\lambda_\varepsilon(z^h)\|_{L^\infty(\kappa)}$ für $\kappa \in \mathcal{T}^h$ aussagen kann. Tatsächlich ist wegen (2.16) aus Bemerkung 2.6 die Funktion $\lambda_\varepsilon(z^h)$ in $W^{1,\infty}(\kappa)$ für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$. Somit können wir die Ungleichung (3.5) für $m=0$ und $s=\infty$ anwenden und erhalten

$$\left\|\left(I-\pi^h\right)\lambda_\varepsilon(z^h)\right\|_{L^\infty(\kappa)} \le Ch_\kappa \left\|\nabla\lambda_\varepsilon(z^h)\right\|_{L^\infty(\kappa)} \le Ch_\kappa \left\|\nabla z^h\right\|_{L^\infty(\kappa)} \tag{3.33}$$

für alle $z^h \in S^h$.

Bemerkung 3.8. Man kann durch genauere Beweisführung zeigen, dass die Konstante in (3.33) $C=1$ erfüllt. Auf das wollen wir jedoch nicht genauer eingehen, da es für unser Modell nicht von Belang ist.

Wir formulieren nun die zu (3.33) ähnliche Abschätzung für Λ_ε.

Lemma 3.9. *Es gelten die Grundbedingungen (V). Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0,1)$, dass die Funktion $\Lambda_\varepsilon : S^h \to [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$*

$$\sup_{x\in\kappa}\left\|\left\{\Lambda_\varepsilon(z^h)-\lambda_\varepsilon(z^h)\mathcal{I}\right\}(x)\right\|_2 \le h_\kappa \left\|\nabla z^h|_\kappa\right\|_{L^\infty(\kappa)}, \qquad \forall z^h \in S^h \text{ und } \kappa\in\mathcal{T}^h \tag{3.34}$$

erfüllt.

Beweis. Seien $z^h \in S^h$ und $\kappa \in \mathcal{T}^h$ beliebig. Aus der Definition von Λ_ε und der Spektralnorm folgt

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\kappa}\left\|\left\{\Lambda_\varepsilon(z^h)-\lambda_\varepsilon(z^h)\mathcal{I}\right\}(x)\right\|_2 &= \sup_{\widehat{x}\in\widehat{\kappa}}\left\|\left\{\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)-\lambda_\varepsilon(\widehat{z}^h)\mathcal{I}\right\}(\widehat{x})\right\|_2 \\ &\overset{\widehat{\Lambda_\varepsilon}\ diagonal}{=} \sup_{\widehat{x}\in\widehat{\kappa}}\max_{k=1\dots d}\left|\left\{\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)\right]_{kk}-\lambda_\varepsilon(\widehat{z}^h)\right\}(\widehat{x})\right|.\end{aligned}$$

Wegen $[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)]_{kk} = \lambda_\varepsilon(z^h(\xi_k))$ für ein $\xi_k \in \widehat{\kappa}$ und der Lipschitz-Stetigkeit von λ_ε erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}\sup_{\widehat{x}\in\widehat{\kappa}}\max_{k=1\dots d}\left|\left(\left[\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\widehat{z}^h)\right]_{kk}-\lambda_\varepsilon(\widehat{z}^h)\right)(\widehat{x})\right| &= \sup_{\widehat{x}\in\widehat{\kappa}}\max_{k=1\dots d}\left|\lambda_\varepsilon(z^h(\xi_k))-\lambda_\varepsilon(\widehat{z}^h(\widehat{x}))\right| \\ &\le \sup_{\widehat{x}\in\widehat{\kappa}}\max_{k=1\dots d}|\widehat{z}^h(\xi_k)-\widehat{z}^h(\widehat{x})|.\end{aligned}$$

Da die Funktion z^h auf $\widehat{\kappa}$ affin ist, können wir sie für jedes $k \in \{1,\dots,d\}$ und für jedes $\widehat{x} \in \widehat{\kappa}$ in der Form $\widehat{z}^h(\widehat{x}) = \widehat{z}^h(\xi_k) + (\widehat{x}-\xi_k)^T\nabla\widehat{z}^h(\xi_k)$ schreiben. Aus dieser

Darstellung und wegen $|\widehat{x} - \xi_k| \leq h_\kappa$ folgt

$$\begin{aligned}\sup_{\widehat{x}\in\widehat{\kappa}} \max_{k=1\dots d} |\widehat{z}^h(\xi_k) - \widehat{z}^h(\widehat{x})| &= \sup_{\widehat{x}\in\widehat{\kappa}} \max_{k=1\dots d} |(\widehat{x} - \xi_k)^T \nabla \widehat{z}^h| \leq h_\kappa \sup_{\widehat{x}\in\widehat{\kappa}} |\nabla \widehat{z}^h|_{\widehat{\kappa}}| \\ &= h_\kappa \left\| \nabla z^h|_\kappa \right\|_{L^\infty(\kappa)},\end{aligned}$$

somit ist die Behauptung (3.34) bewiesen. □

Wir kommen nun zur Kernaussage dieses Abschnittes. Im folgenden Theorem zeigen wir, dass für zwei Funktionen $U_{\varepsilon,1}^{n-1}$ und $U_{\varepsilon,2}^{n-1}$ aus S^h, unter einer gewissen Bedingung an die Zeitschritte τ_n, stets Funktionen $U_{\varepsilon,1}^n$ und $U_{\varepsilon,2}^n$ aus dem Finite Elemente Raum existieren, sodass die Gleichungen in (2.46) erfüllt sind. Wenn wir also mit zwei Funktionen $U_{\varepsilon,1}^0$ und $U_{\varepsilon,2}^0$ starten, welche die Anfangsbedingunen u_i^0 für $i = 1, 2$ approximieren, so können wir schrittweise für jede natürliche Zahl $n = 1, \dots, N$ das Gleichungssystem in (2.46) lösen, was die Lösbarkeit des Finiten Elemente Modells ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) impliziert.

Theorem 3.10. *Es gelten die Grundbedingungen (V) und sei* $\{U_{\varepsilon,1}^{n-1}, U_{\varepsilon,2}^{n-1}\} \in [S^h]^2$ *mit* $n \geq 1$. *Dann existiert für jedes* $\varepsilon \in (0, e^{-2})$, *für alle* $h > 0$ *und für alle* τ_n, *welche*

$$\omega\tau_n \leq 1 \quad \text{mit} \quad \omega := \max\{2\mu_1 + \gamma_{11} + \gamma_{12}, 2\mu_2 + \gamma_{21} + \gamma_{22}\}$$

erfüllen, ein Paar $\{U_{\varepsilon,1}^n, U_{\varepsilon,2}^n\} \in [S^h]^2$, *welches eine Lösung für den n-ten Schritt des Problems* ($P_\varepsilon^{h,\tau}$) *ist.*

Beweis. Zunächst definieren wir für $i = 1, 2$, $i \neq j$, die Abbildungen $A_i^n : [S^h]^2 \to S^h$, sodass für alle $\chi \in S^h$

$$\begin{aligned}(A_i^n(U_1, U_2), \chi)^h = &\left(U_i - U_{\varepsilon,i}^{n-1}, \chi\right)^h \\ &+ \tau_n \Big[\left([c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_i) + \Lambda_\varepsilon(U_j)]\nabla U_i, \nabla\chi\right) \\ &\quad + \left(\Lambda_\varepsilon(U_i)\left[\nabla U_j + b_i \nabla(\pi^h v)\right], \nabla\chi\right) \\ &\quad - \left(\mu_i U_i - [\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})]\lambda_\varepsilon(U_i), \chi\right)^h \Big] \quad (3.35)\end{aligned}$$

gilt. Da $(.,.)^h$ für Funktionen aus S^h sogar ein inneres Produkt und S^h endlichdimensional ist, ist $A_i^n(.,.)$ wohldefiniert.

Mit Hilfe dieser Operatoren können wir das Problem ($P_\varepsilon^{h,\tau}$) auf folgendes umformen: Finde $\left\{U_{\varepsilon,1}^n, U_{\varepsilon,2}^n\right\} \in [S^h]^2$, sodass für $i = 1, 2$

$$A_i^n(U_{\varepsilon,1}^n, U_{\varepsilon,2}^n) = 0. \quad (3.36)$$

Wir wollen nun folgende Annahme machen:

Für alle $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und für alle $\{U_1, U_2\} \in [S^h]_R^2$ gilt, dass $A_i^n(U_1, U_2) \neq 0$, (A)

wobei $[S^h]^2_R := \left\{(z_1^h; z_2^h) \in [S^h]^2 : |z_1^h|_h^2 + |z_2^h|_h^2 \leq R^2\right\}$.
Da unter der Annahme (A) die A_i^n nullstellenfrei sind, können wir eine Funktion $B^n(U_1, U_2)$ durch

$$B^n = \begin{pmatrix} B_1^n \\ B_2^n \end{pmatrix} : [S^h]^2_R \to [S^h]^2_R \text{ , mit } B_i^n(U_1, U_2) := \frac{-RA_i^n(U_1, U_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 |A_i^n(U_1, U_2)|_h^2}}$$

definieren. Wir möchten auf diese Funktion den *Fixpunktsatz von Schauder* anwenden, wofür wir folgende drei Eigenschaften benötigen:

$\left([S^h]^2, \|.\|_\sum\right)$ **ist ein Banachraum:** [1] Ist erfüllt, da $\left(S^h, \|.\|_{C(\overline{\Omega})}\right)$ ein Banachraum ist.

$[S^h]^2_R \subseteq [S^h]^2$ **konvex und kompakt:** Wir zeigen zuerst die Konvexität. Hierfür nehmen wir $(z_1^h; z_2^h), (\widetilde{z_1}^h; \widetilde{z_2}^h) \in [S^h]^2_R$ und betrachten ihre Konvexkombination $\lambda(z_1^h; z_2^h) + (1-\lambda)(\widetilde{z_1}^h; \widetilde{z_2}^h)$. Wir müssen zeigen, dass $|\lambda z_1^h + (1-\lambda)\widetilde{z_1}^h|_h^2 + |\lambda z_2^h + (1-\lambda)\widetilde{z_2}^h|_h^2 \leq R^2$.
Da die Funktion $x \mapsto x^2$ konvex ist, gilt für $i = 1, 2$

$$|\lambda z_i^h + (1-\lambda)\widetilde{z_i}^h|_h^2 = \sum_{j\in J} m_j \left[\lambda z_i^h(p_j) + (1-\lambda)\widetilde{z_i}^h(p_j)\right]^2 \leq \lambda |z_i^h|_h^2 + (1-\lambda)|\widetilde{z_i}^h|_h^2.$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} &|\lambda z_1^h + (1-\lambda)\widetilde{z_1}^h|_h^2 + |\lambda z_2^h + (1-\lambda)\widetilde{z_2}^h|_h^2 \\ &\quad \leq \lambda(|z_1^h|_h^2 + |z_2^h|_h^2) + (1-\lambda)(|\widetilde{z_1}^h|_h^2 + |\widetilde{z_2}^h|_h^2) \leq \lambda R^2 + (1-\lambda)R^2 = R^2 \end{aligned}$$

und somit die Konvexität von $[S^h]^2_R$.
Weiters bemerken wir, dass $[S^h]^2_R$ eine abgeschlossene Teilmenge von $[S^h]^2$ ist: Sei $(z_{1,l}^h; z_{2,l}^h)$ eine Folge in $[S^h]^2_R$, welche mit $l \to \infty$ gegen ein Paar $(z_1^h; z_2^h) \in [S^h]^2$ bezüglich $\|.\|_\sum$ konvergiert. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der einzelnen Komponenten und insbesondere die punktweise Konvergenz. Daher gilt

$$\left|z_{i,l}^h\right|_h^2 = \sum_{j\in J} m_j \left[z_{i,l}^h(p_j)\right]^2 \xrightarrow{l\to\infty} \sum_{j\in J} m_j \left[z_i^h(p_j)\right]^2 = \left|z_i^h\right|_h^2$$

und somit $|z_{1,l}^h|_h^2 + |z_{2,l}^h|_h^2 \xrightarrow{l\to\infty} |z_1^h|_h^2 + |z_2^h|_h^2 \leq R^2$. Daher ist auch $(z_1^h; z_2^h) \in [S^h]^2_R$.
Wir wissen aus Proposition 2.3, dass $(.,.)^h$ auf S^h sogar ein inneres Produkt ist, und somit $|.|_h^2$ eine Norm darstellt. Deshalb definiert $\sqrt{|z_1^h|_h^2 + |z_2^h|_h^2}$ für ein Paar $(z_1^h; z_2^h) \in [S^h]^2$ eine Norm auf $[S^h]^2$. Da nun S^h endlichdimensional ist, muss diese Norm mit der Summennorm $\|.\|_\sum$ äquivalent sein, woraus die

[1] Für ein Paar $(z_1^h; z_2^h) \in [S^h]^2$ ist $\|(z_1^h; z_2^h)\|_\sum := \|z_1^h\|_{C(\overline{\Omega})} + \|z_2^h\|_{C(\overline{\Omega})}$ die Summennorm auf $[S^h]^2$.

Beschränktheit von $[S^h]^2_R$ bezüglich $\|.\|_\sum$ folgt.
Wir erhalten also, dass $[S^h]^2_R$ eine beschränkte und abgeschlossene Menge des endlichdimensionalen Raumes $([S^h]^2, \|.\|_\sum)$ ist, daher ist $[S^h]^2_R$ sogar kompakt.

$\underline{B^n}$ **stetig:** Die Stetigkeit ist klarerweise erfüllt, wenn die beiden Komponenten B^n_i für $i = 1, 2$ Zusammensetzungen stetiger Funktionen sind. Dafür müssen wir zeigen, dass die Funktionen A^n_i für $i = 1, 2$ auf $[S^h]^2$ stetig sind:
Sei also $\{(U_{1,l}; U_{2,l})\}_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[S^h]^2$, sodass

$$\|(U_{1,l}; U_{2,l}) - (U_1; U_2)\|_\sum \xrightarrow{l\to\infty} 0.$$

Mit (3.35) bekommen wir nun für $i = 1, 2$ und $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_n}\Big|\big(A^n_i(U_{1,l}, U_{2,l}) - A^n_i(U_1, U_2), \chi\big)^h\Big| &\le \frac{1}{\tau_n}\Big|(U_{i,l} - U_i, \chi)^h\Big| \\
&+ |([c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_{i,l}) + \Lambda_\varepsilon(U_{j,l})]\nabla U_{i,l} - [c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_i) + \Lambda_\varepsilon(U_j)]\nabla U_i, \nabla\chi)| \\
&+ \Big|\big(\Lambda_\varepsilon(U_{i,l})\left[\nabla U_{j,l} + b_i\nabla(\pi^h v)\right] - \Lambda_\varepsilon(U_i)\left[\nabla U_j + b_i\nabla(\pi^h v)\right], \nabla\chi\big)\Big| \\
&+ \mu_i\Big|(U_{i,l} - U_i, \chi)^h\Big| \\
&+ \Big|\left([\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,i}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,j})]\left(\lambda_\varepsilon(U_{i,l}) - \lambda_\varepsilon(U_i)\right), \chi\right)^h\Big|
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Da $(.,.)^h$ auf S^h ein inneres Produkt ist, können wir darauf die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anwenden, daher erhalten wir für den ersten Summanden in (3.37)

$$\frac{1}{\tau_n}\Big|(U_{i,l} - U_i, \chi)^h\Big| \le \frac{1}{\tau_n}|U_{i,l} - U_i|_h\,|\chi|_h\,. \tag{3.38}$$

Wir sehen also, dass dieser Summand wegen $\|(U_{1,l}; U_{2,l}) - (U_1; U_2)\|_\sum \to 0$, für $l \to \infty$, und der schon erwähnten Normäquivalenz gegen Null konvergiert. Genauso sieht man, dass auch der vierte Summand von (3.37) mit $l \to \infty$ gegen Null geht.
Für den zweiten Summanden erhalten wir wegen $a_i, c_i \ge 0$ für $i, j = 1, 2$, $j \ne i$

$$\begin{aligned}
|([c_i+2a_i\Lambda_\varepsilon(U_{i,l}) + \Lambda_\varepsilon(U_{j,l})]\nabla U_{i,l} - [c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_i) + \Lambda_\varepsilon(U_j)]\nabla U_i, \nabla\chi)| \\
\le c_i\,|(\nabla\left(U_{i,l} - U_i\right), \nabla\chi)| + 2a_i\,|(\Lambda_\varepsilon(U_{i,l})\nabla U_{i,l} - \Lambda_\varepsilon(U_i)\nabla U_i, \nabla\chi)| \\
+ |(\Lambda_\varepsilon(U_{j,l})\nabla U_{i,l} - \Lambda_\varepsilon(U_j)\nabla U_i, \nabla\chi)|\,.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Der erste Teil ist leicht mittels Cauchy-Schwarz-Ungleichung nach oben durch

$$c_i\,|(\nabla\left(U_{i,l} - U_i\right), \nabla\chi)| \le c_i\,\|U_{i,l} - U_i\|_{H^1}\,\|\nabla\chi\|_{L^2}$$

abzuschätzen, und geht daher wieder wegen der Normäquivalenz auf S^h mit $l \to \infty$ gegen Null. Für die beiden anderen Terme in (3.39) erhalten wir mit

Hilfe von (3.29) aus Korollar 3.7 für $i,j=1,2$, $j\neq i$

$$\begin{aligned}
&2a_i\,|(\Lambda_\varepsilon(U_{i,l})\nabla U_{i,l}-\Lambda_\varepsilon(U_i)\nabla U_i,\nabla\chi)|+|(\Lambda_\varepsilon(U_{j,l})\nabla U_{i,l}-\Lambda_\varepsilon(U_j)\nabla U_i,\nabla\chi)|\\
&\quad\le C\Big(\|U_{i,l}\|_{C(\overline\Omega)}\,\|U_{i,l}-U_i\|_{C(\overline\Omega)}+\big(1+\|U_i\|_{C(\overline\Omega)}\big)\,\|U_{i,l}-U_i\|_{C(\overline\Omega)}\\
&\qquad+\|U_{i,l}\|_{C(\overline\Omega)}\,\|U_{j,l}-U_j\|_{C(\overline\Omega)}+\big(1+\|U_j\|_{C(\overline\Omega)}\big)\,\|U_{i,l}-U_i\|_{C(\overline\Omega)}\Big)\,\|\nabla\chi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

führt, wobei klarerweise die Folgen $U_{i,l}$ für $i=1,2$ in jeder Norm beschränkt sind. Damit konvergiert auch dieser Teil gegen Null für $l\to\infty$, womit wir gezeigt haben, dass auch der Summand in (3.39) verschwindet.
Für den dritten Summanden in (3.37) gilt, ähnlich wie gerade vorgerechnet, für $i,j=1,2$, $j\neq i$

$$\begin{aligned}
&\big|\big(\Lambda_\varepsilon(U_{i,l})\left[\nabla U_{j,l}+b_i\nabla(\pi^h v)\right]-\Lambda_\varepsilon(U_i)\left[\nabla U_j+b_i\nabla(\pi^h v)\right],\nabla\chi\big)\big|\\
&\quad\le|(\Lambda_\varepsilon(U_{i,l})\nabla U_{j,l}-\Lambda_\varepsilon(U_i)\nabla U_j,\nabla\chi)|\\
&\qquad+|b_i|\,\big|\big((\Lambda_\varepsilon(U_{i,l})-\Lambda_\varepsilon(U_i))\,\nabla(\pi^h v),\nabla\chi\big)\big|\\
&\quad\overset{(3.29)}{\le} C\Big(\|U_{j,l}\|_{C(\overline\Omega)}\,\|U_{i,l}-U_i\|_{C(\overline\Omega)}+\big(1+\|U_i\|_{C(\overline\Omega)}\big)\,\|U_{j,l}-U_j\|_{C(\overline\Omega)}\\
&\qquad\qquad+\big\|\pi^h v\big\|_{C(\overline\Omega)}\,\|U_{i,l}-U_i\|_{C(\overline\Omega)}\Big)\,\|\nabla\chi\|_{L^2}\,,
\end{aligned}\tag{3.40}$$

was wegen der gleichen Gründe wie vorhin gegen Null konvergiert.
Für den letzten Summanden in (3.37) gilt für $i,j=1,2$, $j\neq i$

$$\begin{aligned}
&\Big|\big([\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1})+\gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})]\,(\lambda_\varepsilon(U_{i,l})-\lambda_\varepsilon(U_i))\,,\chi\big)^h\Big|\\
&\qquad\le\max_{k=1,2}\big\|\gamma_{ik}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\big\|_{C(\overline\Omega)}\,\Big|\big((\lambda_\varepsilon(U_{i,l})-\lambda_\varepsilon(U_i))\,,\chi\big)^h\Big|\\
&\qquad\le\max_{k=1,2}\big\|\gamma_{ik}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\big\|_{C(\overline\Omega)}\,\|\lambda_\varepsilon(U_{i,l})-\lambda_\varepsilon(U_i)\|_{L^2}\,\|\chi\|_{L^2}\,,
\end{aligned}$$

und da λ_ε Lipschitz-stetig ist wegen der Normäquivalenz weiter

$$\le C\max_{k=1,2}\big\|\gamma_{ik}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\big\|_{C(\overline\Omega)}\,\|U_{i,l}-U_i\|_{C(\overline\Omega)}\,\|\chi\|_{L^2}\,.\tag{3.41}$$

Daher konvergiert auch dieser Summand mit $l\to\infty$ gegen Null.
Wenn wir die Konvergenzen der einzelnen Summanden in (3.38), (3.39), (3.40) und (3.41) nun kombinieren, erhalten wir mit (3.37)

$$\Big|\big(A_i^n(U_{1,l},U_{2,l})-A_i^n(U_1,U_2),\chi\big)^h\Big|\xrightarrow{l\to\infty}0,$$

also konvergiert $A_i^n(U_{1,l},U_{2,l})$ schwach gegen $A_i^n(U_1,U_2)$ in S^h. Da aber S^h endlichdimensional ist, sind alle Topologien auf diesem Raum äquivalent zuein-

ander, also insbesondere auch die schwache Topologie und die von der Summennorm $\|.\|_{\sum}$ induzierte Topologie. Daher ist die Funktionen A_i^n auch in $([S^h]^2, \|.\|_{\sum})$ stetig.

Wir haben also alle Voraussetzungen für den *Fixpunktsatz von Schauder* gegeben, daher existieren Funktionen $\{U_1, U_2\} \in [S^h]_R^2$ mit $B_i^n(U_1, U_2) = U_i$ für $i = 1, 2$. Aus der Definition von B^n folgt außerdem, dass diese Funktionen $|U_1|_h^2 + |U_2|_h^2 = R^2$ erfüllen. Mit Hilfe dieser Fixpunkte wollen wir nun für ein R hinreichend groß einen Widerspruch zur Annahme (A) herleiten.
Zunächst setzen wir $\chi = \pi^h[{F_\varepsilon}'(U_i)]$ in die Gleichung (3.35) und erhalten für $i = 1, 2$, $i \neq j$, wegen der Eigenschaft $\nabla\pi^h[{F_\varepsilon}'(U_i)] = {\Lambda_\varepsilon}^{-1}(U_i)\nabla U_i$ aus (2.30) und Proposition 2.3

$$\begin{aligned}
\left(A_i^n(U_1,U_2), \pi^h[{F_\varepsilon}'(U_i)]\right)^h &\overset{Prop.2.3}{=} \left(A_i^n(U_1,U_2), {F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h = \left(U_i - U_i^{n-1}, {F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h \\
&\quad + \tau_n \Big[\left([c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_i) + \Lambda_\varepsilon(U_j)]\nabla U_i, {\Lambda_\varepsilon}^{-1}(U_i)\nabla U_i \right) \\
&\qquad + \left(\Lambda_\varepsilon(U_i)\left[\nabla U_j + b_i\nabla(\pi^h v)\right], {\Lambda_\varepsilon}^{-1}(U_i)\nabla U_i \right) \\
&\qquad - \left(\mu_i U_i - [\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})]\lambda_\varepsilon(U_i), {F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h \Big] \\
&= \left(U_i - U_i^{n-1}, {F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h \\
&\quad + \tau_n \Big[\Big(\left[c_i \left[\Lambda_\varepsilon(U_i)\right]^{-1} + 2a_i\mathcal{I} + \left[\Lambda_\varepsilon(U_i)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_j)\right]\nabla U_i, \nabla U_i \Big) \\
&\qquad + \left(\left[\nabla U_j + b_i\nabla(\pi^h v)\right], \nabla U_i \right) \\
&\qquad - \left(\mu_i U_i - [\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})]\lambda_\varepsilon(U_i), {F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h \Big].
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\begin{aligned}
\left([(\ldots)], {\Lambda_\varepsilon}^{-1}(U_i)\nabla U_i\right) &= \int_\Omega [(\ldots)]^T \left({\Lambda_\varepsilon}^{-1}(U_i)\nabla U_i\right) dx \\
&= \int_\Omega [{\Lambda_\varepsilon}^{-T}(U_i)(\ldots)]^T (\nabla U_i)\, dx \overset{(2.29b)}{=} \left({\Lambda_\varepsilon}^{-1}(U_i)[(\ldots)], \nabla U_i\right).
\end{aligned}$$

Zunächst wollen wir den ersten Summanden in (3.42) nach unten abschätzen. Da $F_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$ können wir die Funktion nach Taylor entwickeln und erhalten für ein ξ zwischen $U_{\varepsilon,i}^{n-1}$ und U_i

$$F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) = F_\varepsilon(U_i) + {F_\varepsilon}'(U_i)\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1} - U_i\right) + \frac{{F_\varepsilon}''(\xi)}{2}\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1} - U_i\right)^2,$$

was wir mit $F_\varepsilon{}''(s) \geq \varepsilon$ und der Youngschen Ungleichung auf

$$\begin{aligned} F_\varepsilon{}'(U_i)\left(U_i - U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right) &\geq F_\varepsilon(U_i) - F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2}\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1} - U_i\right)^2 \\ &= F_\varepsilon(U_i) - F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right)^2 - 2U_{\varepsilon,i}^{n-1}U_i + U_i^2\right) \\ &\geq F_\varepsilon(U_i) - F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{U_i^2}{2} - \left(U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3.43}$$

umformen können. Aus der Ungleichung (3.43) und den Eigenschaften aus Proposition 2.3 bekommt man nun die Gültigkeit von

$$\left(U_i - U_i^{n-1}, F_\varepsilon{}'(U_i)\right)^h \geq \left(F_\varepsilon(U_i) - F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1\right)^h + \frac{\varepsilon}{4}\left|U_i\right|_h^2 - \frac{\varepsilon}{2}\left|U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right|_h^2,$$

was über $i = 1, 2$ aufsummiert wegen $|U_1|_h^2 + |U_2|_h^2 = R^2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\left(U_i - U_i^{n-1}, F_\varepsilon{}'(U_i)\right)^h \geq \frac{\varepsilon}{4}R^2 &+ \sum_{i=1}^{2}\left[\left(F_\varepsilon(U_i), 1\right)^h - \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1\right)^h\right] \\ &- \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\left|U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right|_h^2 \end{aligned} \tag{3.44}$$

liefert.

Wir versuchen nun die Summe über $i = 1, 2$ des zweiten und dritten Summanden in (3.42) nach unten abzuschätzen. Wegen $a_i, c_i \geq 0$ für $i = 1, 2$ gilt

$$\begin{aligned} &\tau_n \sum_{i=1,j\neq i}^{2}\Big[\Big(\left[c_i\left[\Lambda_\varepsilon(U_i)\right]^{-1} + 2a_i\mathcal{I} + \left[\Lambda_\varepsilon(U_i)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_j)\right]\nabla U_i, \nabla U_i\Big) \\ &\qquad + \left(\left[\nabla U_j + b_i\nabla(\pi^h v)\right], \nabla U_i\right)\Big] \\ &= \tau_n\Bigg[\int_\Omega \underbrace{\sum_{i=1}^{2} c_i\left(\nabla U_i\right)^T\left[\Lambda_\varepsilon(U_i)\right]^{-1}\nabla U_i}_{\geq \varepsilon\sum_{i=1}^{2} c_i|\nabla U_i|^2 \geq 0 \text{ , wegen (3.16)}}\, dx + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{2} a_i\left\|\nabla U_i\right\|_{L^2}^2}_{\geq 0} \\ &\qquad + \sum_{i=1,j\neq i}^{2}\Big(\left[\Lambda_\varepsilon(U_i)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_j)\nabla U_i, \nabla U_i\Big) + 2\left(\nabla U_1, \nabla U_2\right) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{2} b_i\left(\nabla(\pi^h v), \nabla U_i\right)\Bigg] \\ &\geq \tau_n\Bigg[\left\|\sqrt{\left[\Lambda_\varepsilon(U_1)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_2)}\nabla U_1 + \sqrt{\left[\Lambda_\varepsilon(U_2)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_1)}\nabla U_2\right\|_{L^2}^2 \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{2} b_i\left(\nabla(\pi^h v), \nabla U_i\right)\Bigg] \\ &\geq \tau_n\sum_{i=1}^{2} b_i\left(\nabla(\pi^h v), \nabla U_i\right). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Mit Hilfe der Youngschen Ungleichung bekommen wir für $\delta > 0$ weiter

$$\begin{aligned}\tau_n \sum_{i=1}^{2} b_i \left(\nabla(\pi^h v), \nabla U_i\right) &= \int_\Omega \tau_n \sum_{i=1}^{2} b_i \left(\nabla(\pi^h v)\right)^T \nabla U_i dx \\ &\geq \int_\Omega \tau_n \sum_{i=1}^{2} \left[-\frac{|b_i|}{2\delta} \left|\nabla(\pi^h v)\right|^2 - \frac{\delta}{2} \left|\nabla U_i\right|^2 dx\right],\end{aligned}$$

und da wegen der Normäquivalenz im Endlichdimensionalen ein $\widetilde{C}$ existiert, sodass $\|\nabla(.)\|_{L^2}^2 \leq \|.\|_{H^1}^2 \leq \frac{\widetilde{C}}{\tau_n}|.|_h^2$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\tau_n \sum_{i=1}^{2} b_i \left(\nabla(\pi^h v), \nabla U_i\right) &\geq -\tau_n \sum_{i=1}^{2} \frac{|b_i|}{2\delta} \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2 - \frac{\delta\tau_n}{2} \sum_{i=1}^{2} \|\nabla U_i\|_{L^2}^2 \\ &\geq -C - \frac{\delta\widetilde{C}}{2} \sum_{i=1}^{2} |U_i|_h^2 = -C - \frac{\delta\widetilde{C}}{2} R^2, \end{aligned} \tag{3.46}$$

wobei $C > 0$ von dem Potenzial v abhängt. Somit erhalten wir mit (3.45) und der gerade gezeigten Ungleichung (3.46)

$$\begin{aligned}&\tau_n \sum_{i=1,j\neq i}^{2} \Big[\Big(\left[c_i \left[\Lambda_\varepsilon(U_i)\right]^{-1} + 2a_i\mathcal{I} + \left[\Lambda_\varepsilon(U_i)\right]^{-1} \Lambda_\varepsilon(U_j)\right]\nabla U_i, \nabla U_i\Big) \\ &\qquad + \left(\left[\nabla U_j + b_i \nabla(\pi^h v)\right], \nabla U_i\right)\Big] \\ &\geq -\frac{\delta\widetilde{C}}{2} R^2 - C \end{aligned} \tag{3.47}$$

Für den vierten Summanden bemerken wir zunächst, dass wegen (2.17c) die Ungleichung $\lambda_\varepsilon(U_i) F_\varepsilon{}'(U_i) \geq U_i - 1 \geq [U_i]_- - 1$ gilt. Zusätzlich wissen wir aus (2.17b), dass $-U_i F_\varepsilon{}'(U_i) \geq -2F_\varepsilon(U_i) - \mathfrak{c}$ erfüllt ist. Diese beiden Eigenschaften und jene aus Proposition 2.3 führen unter Berücksichtigung von $\mu_i, \gamma_{ii}, \gamma_{ij} \geq 0$ für $i = 1, 2$, $j \neq i$, zu

$$\begin{aligned}&- \tau_n \sum_{i=1,j\neq i}^{2} \left(\mu_i U_i - [\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})]\lambda_\varepsilon(U_i), F_\varepsilon{}'(U_i)\right)^h \\ &= \tau_n \sum_{i=1,j\neq i}^{2} \left(-\mu_i U_i F_\varepsilon{}'(U_i) + [\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})]\lambda_\varepsilon(U_i) F_\varepsilon{}'(U_i), 1\right)^h \\ &\geq -2\sum_{i=1}^{2} \mu_i \tau_n \left(F_\varepsilon(U_i), 1\right)^h + \tau_n \sum_{i=1,j\neq i}^{2} \left(\left[\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})\right]\left([U_i]_- - 1\right), 1\right)^h \\ &\quad - C\left(\mathfrak{c}, 1\right)^h. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Wenn man nun die Abschätzungen (3.44), (3.47) und (3.48) kombiniert, erhält man

für (3.42)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\big(A_i^n(U_1,U_2),\pi^h[F_\varepsilon{}'(U_i)]\big)^h &\geq \left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\delta\widetilde{C}}{2}\right)R^2+\sum_{i=1}^{2}[1-2\mu_i\tau_n]\,(F_\varepsilon(U_i),1)^h\\
&\quad-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\big|U_{\varepsilon,i}^{n-1}\big|_h^2+\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}\big([\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1})+\gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})]\,([U_i]_--1),1\big)^h-C\\
&\geq \left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\delta\widetilde{C}}{2}\right)R^2+\sum_{i=1}^{2}[1-2\mu_i\tau_n]\,(F_\varepsilon(U_i),1)^h\\
&\quad+\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}\big([\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1})+\gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})][U_i]_-,1\big)^h-C,
\end{aligned}\tag{3.49}$$

wobei $C>0$ eine von $U_{\varepsilon,1}^{n-1},U_{\varepsilon,2}^{n-1}$ und $\mathfrak{c}$ abhängige Konstante ist. Wir nutzen wieder die Youngsche Ungleichung für die Abschätzung des folgenden Termes

$$\begin{aligned}
&\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}\left[\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1})+\gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})\right][U_i]_-\\
&\geq-\tau_n\left[\sum_{i=1,j\neq i}^{2}\gamma_{ii}\left(\frac{\varepsilon}{2}\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1})\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}[U_i]_-^2\right)+\gamma_{ij}\left(\frac{\varepsilon}{2}\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}[U_i]_-^2\right)\right]\\
&=-\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}(\gamma_{ii}+\gamma_{ij})\,\frac{1}{2\varepsilon}[U_i]_-^2-\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}(\gamma_{ii}+\gamma_{ji})\,\frac{\varepsilon}{2}\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1})\right]^2.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir mit den Eigenschaften aus Proposition 2.3 und dem Punkt (2.18) aus Proposition 2.7

$$\begin{aligned}
&\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}\big([\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1})+\gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})][U_i]_-,1\big)^h\\
&\qquad\geq-\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}(\gamma_{ii}+\gamma_{ij})\,\frac{1}{2\varepsilon}\big([U_i]_-^2,1\big)^h-\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}(\gamma_{ii}+\gamma_{ji})\,\frac{\varepsilon}{2}\big({\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,i}^{n-1}),1\big)^h\\
&\qquad\overset{(2.18)}{\geq}-\tau_n\sum_{i=1,j\neq i}^{2}(\gamma_{ii}+\gamma_{ij})\,(F_\varepsilon(U_i),1)^h-C
\end{aligned}\tag{3.50}$$

mit einer von $U_{\varepsilon,1}^{n-1}$ und $U_{\varepsilon,2}^{n-1}$ abhängigen Konstante $C>0$. Mit (3.50) können wir

(3.49) weiter abschätzen zu

$$\sum_{i=1}^{2}\left(A_i^n(U_1,U_2),\pi^h[{F_\varepsilon}'(U_i)]\right)^h \geq \left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\delta\widetilde{C}}{2}\right)R^2+\sum_{i=1,j\neq i}^{2}\underbrace{\left[1-\tau_n(2\mu_i+\gamma_{ii}+\gamma_{ij})\right]}_{\geq 1-\omega\tau_n\geq 0}\left(F_\varepsilon(U_i),1\right)^h-C.$$

Nun können wir δ so wählen, dass $\left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\delta\widetilde{C}}{2}\right)>0$ und wir erhalten mit einem R hinreichend groß, dass

$$\sum_{i=1}^{2}\left(A_i^n(U_1,U_2),\pi^h[{F_\varepsilon}'(U_i)]\right)^h \geq \left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\delta\widetilde{C}}{2}\right)R^2-C>0. \tag{3.51}$$

Genau wie zuvor in (3.43) bekommen wir mit der Taylorentwicklung von F_ε und der Eigenschaft ${F_\varepsilon}''(s)\geq\varepsilon$, dass ${F_\varepsilon}'(U_i)(U_i-0)\geq F_\varepsilon(U_i)-F_\varepsilon(0)+\frac{\varepsilon}{2}\left(0-U_i\right)^2$. Diese Ungleichung zusammen mit Proposition 2.3 führt zu

$$\sum_{i=1}^{2}\left(U_i,{F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h\geq\sum_{i=1}^{2}\left[\left(F_\varepsilon(U_i)-F_\varepsilon(0),1\right)^h+\frac{\varepsilon}{2}\left|U_i\right|_h^2\right],$$

und da $\sum_{i=1}^{2}|U_i|_h^2=R^2$ zusammen mit

$$\left(F_\varepsilon(U_i)-F_\varepsilon(0),1\right)^h=\int_\Omega\pi^h(\underbrace{F_\varepsilon(U_i)}_{\geq 0}-\underbrace{F_\varepsilon(0)}_{\leq 1})dx\geq-\mu(\Omega)$$

(wobei $\mu(\Omega)$ das Maß von Ω bezeichnet) gilt, ergibt sich mit einem hinreichend großen R, dass

$$\sum_{i=1}^{2}\left(U_i,{F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h\geq\frac{\varepsilon}{2}R^2-2\mu(\Omega)>0. \tag{3.52}$$

Nun haben wir den Widerspruch, denn von der Annahme (A) ausgehend erhalten wir die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}0\overset{(3.52)}{<}\sum_{i=1}^{2}\left(U_i,{F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h&=\sum_{i=1}^{2}\left(B_i^n(U_1,U_2),{F_\varepsilon}'(U_i)\right)\\&=-\frac{R\sum_{i=1}^{2}\left(A_i^n(U_1,U_2),{F_\varepsilon}'(U_i)\right)^h}{\sqrt{\sum_{i=1}^{2}|A_i^n(U_1,U_2)|_h^2}}\overset{(3.51)}{<}0,\end{aligned}$$

welche offensichtlich nicht richtig ist. Daher war die Annahme (A) falsch und es existiert ein $R\in\mathbb{R}_{>0}$ und Funktionen $\{U_1,U_2\}\in[S^h]_R^2$, sodass $A_i^n(U_1,U_2)=0$ für $i=1,2$ gilt. Das ist wiederum äquivalent zur Existenz einer Lösung $\{U_{\varepsilon,1}^n,U_{\varepsilon,2}^n\}\in[S^h]^2$ für den n-ten Schritt des Problems ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$). □

3.3 A-priori-Abschätzungen des Modells in zeitunabhängigen Sobolevräumen

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist das Interesse an A-priori-Abschätzungen groß, denn man gewinnt mit ihnen wertvolle Informationen über Lösungen von Gleichungen, ohne diese explizit zu kennen, wie z.B. Langzeitverhalten oder Beschränktheit.

Dieser Abschnitt widmet sich den A-priori-Abschätzungen für Lösungen des Finiten Elemente Modells $(\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau})$. Dabei handelt es sich um, vom Index n unabhängige, Abschätzungen für die Lösungsfunktionen $U_{\varepsilon,1}^n$ und $U_{\varepsilon,2}^n$ in den verschiedensten Sobolevräumen. In Kapitel 4 werden wir die Lösungsfunktionen mit Hilfe des Index n so verknüpfen, dass zeitabhängige Lösungsfunktionen für ein zu $(\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau})$ analoges Problem entstehen. Daher ist die Unabhängigkeit von diesem zeitlichen Index wesentlich, denn sonst könnte man keine Konvergenzresultate aus den A-priori-Abschätzungen gewinnen.

Um diese Abschätzungen zu erhalten, ist es günstig sich zunächst zu überlegen, wie die Lösungsfunktionen des Problems $(\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau})$ zweier direkt aufeinanderfolgender Schritte $n-1$ und n zusammenhängen. Wie wir im folgendem Lemma sehen, kann man in einem gewissen Sinn die Lösungen des n-ten Schrittes mit jenen des $(n-1)$-ten Schrittes nach oben beschränken:

Lemma 3.11. *Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem 3.10. Dann erfüllt eine Lösung* $\{U_{\varepsilon,1}^n, U_{\varepsilon,2}^n\} \in [S^h]^2$ *für den n-ten Schritt des Problems* $(P_\varepsilon^{h,\tau})$ *für alle* $\varepsilon \in (0, e^{-2})$*, für alle* $h > 0$ *und für alle* τ_n*, sodass* $\omega\tau_n \leq 1$*, die Ungleichung*

$$\begin{aligned}(1-\omega\tau_n)\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1)^h + \tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 \\ \leq (1+3\omega\tau_n)\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}),1)^h + C\tau_n\left[1+\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right]. \quad (3.53)\end{aligned}$$

Beweis. Ähnlich wie in Theorem 3.10 verwenden wir für $i=1,2$, $i\neq j$ die Eigenschaft $\nabla\pi^h[F_\varepsilon{}'(U_{\varepsilon,i}^n)] = \Lambda_\varepsilon{}^{-1}(U_{\varepsilon,i}^n)\nabla U_{\varepsilon,i}^n$ aus (2.30) und die Eigenschaften aus Proposition 2.3. Wir erhalten zunächst mit den gleichen Rechnungen wie in (3.42) die Gleichung

$$\begin{aligned}&\left(U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}, \pi^h[F_\varepsilon{}'(U_{\varepsilon,i}^n)]\right)^h + \tau_n\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\left[\nabla U_{\varepsilon,j}^n + b_i\nabla(\pi^h v)\right], \nabla\pi^h[F_\varepsilon{}'(U_{\varepsilon,i}^n)]\right)\\ &\qquad + \tau_n\left(\left[c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) + \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^n)\right]\nabla U_{\varepsilon,i}^n, \nabla\pi^h[F_\varepsilon{}'(U_{\varepsilon,i}^n)]\right)\\ &= \left(U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}, F_\varepsilon{}'(U_{\varepsilon,i}^n)\right)^h + \tau_n\left(\nabla U_{\varepsilon,j}^n + b_i\nabla(\pi^h v), \nabla U_{\varepsilon,i}^n\right)\\ &\qquad + \tau_n\left(\left[c_i\left[\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]^{-1} + 2a_i\mathcal{I} + \left[\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^n)\right]\nabla U_{\varepsilon,i}^n, \nabla U_{\varepsilon,i}^n\right).\end{aligned}$$

Mit $\chi = \pi^h[F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i})]$ in die Gleichung (2.46) des Problems $(\mathrm{P}^{h,\tau}_\varepsilon)$ eingesetzt und mit obiger Gleichung bekommen wir somit

$$\begin{aligned}
&\left(U^n_{\varepsilon,i} - U^{n-1}_{\varepsilon,i}, F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i})\right)^h + \tau_n \left(\nabla U^n_{\varepsilon,j} + b_i \nabla(\pi^h v), \nabla U^n_{\varepsilon,i}\right) \\
&\qquad + \tau_n \left(\left[c_i \left[\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i})\right]^{-1} + 2a_i \mathcal{I} + \left[\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i})\right]^{-1} \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j})\right] \nabla U^n_{\varepsilon,i}, \nabla U^n_{\varepsilon,i}\right) \\
&\quad = \tau_n \left(\mu_i U^n_{\varepsilon,i} - \left[\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,i}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,j})\right] \lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}), F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i})\right)^h \\
&\quad = \tau_n \left(\mu_i U^n_{\varepsilon,i} F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i}), 1\right)^h \\
&\qquad + \tau_n \left(\left[\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,i}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,j})\right] \left(-\lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i})\right), 1\right)^h .
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Wir wissen aus (2.17b), dass $U^n_{\varepsilon,i} F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i}) \le 2F_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) + \mathfrak{c}$, was zu

$$\tau_n \left(\mu_i U^n_{\varepsilon,i} F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i}), 1\right)^h \le \mu_i \tau_n \left[2\left(F_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}), 1\right)^h + (\mathfrak{c}, 1)^h\right] = 2\mu_i \tau_n \left(F_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}), 1\right)^h + \tau_n C \tag{3.55}$$

führt. Zudem haben wir die Abschätzung $-\lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i}) \le 1 - U^n_{\varepsilon,i}$ aus (2.17c) und damit insbesondere $-\lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i}) \le [1 - U^n_{\varepsilon,i}]_+$. Wenn wir diese Ungleichung und (3.55) in (3.54) einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left(U^n_{\varepsilon,i} - U^{n-1}_{\varepsilon,i}, F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i})\right)^h + \tau_n \left(\nabla U^n_{\varepsilon,j}, \nabla U^n_{\varepsilon,i}\right) \\
&\qquad + \tau_n \left(\left[c_i \left[\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i})\right]^{-1} + 2a_i \mathcal{I} + \left[\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i})\right]^{-1} \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j})\right] \nabla U^n_{\varepsilon,i}, \nabla U^n_{\varepsilon,i}\right) \\
&\quad \le 2\mu_i \tau_n \left(F_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}), 1\right)^h + \tau_n \left(\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,i}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,j}), [1 - U^n_{\varepsilon,i}]_+\right)^h \\
&\qquad - \tau_n \left(b_i \nabla(\pi^h v), \nabla U^n_{\varepsilon,i}\right) + \tau_n C_1 .
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Wir wollen in (3.56) weiter Abschätzungen vornehmen und betrachten hierfür zuerst die linke Seite der Ungleichung.
Mit der Taylorentwicklung von F_ε sieht man genau wie in (3.43), dass $F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i})(U^n_{\varepsilon,i} - U^{n-1}_{\varepsilon,i}) \ge F_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) - F_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,i})$, wodurch wir den Term $(U^n_{\varepsilon,i} - U^{n-1}_{\varepsilon,i}, F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i}))^h$ auf der linken Seite von (3.56) nach unten abschätzen können durch

$$\left(U^n_{\varepsilon,i} - U^{n-1}_{\varepsilon,i}, F_\varepsilon{}'(U^n_{\varepsilon,i})\right)^h \ge \left(F_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}), 1\right)^h - \left(F_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,i}), 1\right)^h . \tag{3.57}$$

Für den zweiten und dritten Summanden der linken Seite bemerken wir zunächst, wie in (3.45) im Beweis des Theorems 3.10, dass wegen der Kommutativität der Matrizen $[\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i})]^{-1}$ und $\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j})$ aus Proposition 2.11 die Gleichheit

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1, j\neq i}^{2} \left(\left[\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i})\right]^{-1} \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j}) \nabla U^n_{\varepsilon,i}, \nabla U^n_{\varepsilon,i}\right) + 2\left(\nabla U^n_{\varepsilon,1}, \nabla U^n_{\varepsilon,2}\right) \\
&\qquad = \left\| \sqrt{\left[\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,1})\right]^{-1} \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,2})} \nabla U^n_{\varepsilon,1} + \sqrt{\left[\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,2})\right]^{-1} \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,1})} \nabla U^n_{\varepsilon,2} \right\|^2_{L^2} .
\end{aligned}$$

gegeben ist. Wenn wir nun die Summe über den zweiten und dritten Summanden der linken Seite von (3.56) bilden, erhalten wir mit Lemma 3.6 und $c_i \geq 0$ für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\tau_n \sum_{i=1,j\neq i}^{2} &\left(\left[c_i \left[\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]^{-1} + 2a_i\mathcal{I} + \left[\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^n)\right]\nabla U_{\varepsilon,i}^n, \nabla U_{\varepsilon,i}^n\right) \\
&\quad + \tau_n \sum_{i=1,j\neq i}^{2} \left(\nabla U_{\varepsilon,j}^n, \nabla U_{\varepsilon,i}^n\right) \\
&= \tau_n \sum_{i=1,j\neq i}^{2} \left(\left[\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^n)\nabla U_{\varepsilon,i}^n, \nabla U_{\varepsilon,i}^n\right) + 2\tau_n\left(\nabla U_{\varepsilon,1}^n, \nabla U_{\varepsilon,2}^n\right) \\
&\quad + \tau_n \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega c_i \underbrace{\left(\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right)^T \left[\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]^{-1}\nabla U_{\varepsilon,i}^n}_{\geq \varepsilon|\nabla U_{\varepsilon,i}^n|^2 \geq 0 \text{ , wegen (3.16)}} dx + 2\tau_n \sum_{i=1}^{2} a_i \left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 \\
&\geq \tau_n \left\| \sqrt{\left[\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,1}^n)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,2}^n)}\nabla U_{\varepsilon,1}^n + \sqrt{\left[\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,2}^n)\right]^{-1}\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,1}^n)}\nabla U_{\varepsilon,2}^n \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + 2\tau_n \sum_{i=1}^{2} a_i \left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 \\
&\geq 2\tau_n \sum_{i=1}^{2} a_i \left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Somit wissen wir zusammen mit (3.57), dass die Summe über $i = 1, 2$ der linken Seite von (3.56) nach unten durch den Term

$$\sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h - \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1\right)^h + 2\tau_n \sum_{i=1}^{2} a_i \left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 \tag{3.58}$$

abgeschätzt werden kann.
Nun wollen wir die rechte Seite von (3.56) nach oben abschätzen. Hierfür bemerken wir zunächst, dass wegen der Youngschen Ungleichung und $\gamma_{ii}, \gamma_{ij} \geq 0$ für $i = 1, 2$

$$\gamma_{ik}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\left(-[U_{\varepsilon,i}^n]_-\right) \leq \gamma_{ik}\frac{\varepsilon}{2}{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,k}^{n-1}) + \gamma_{ik}\frac{\varepsilon^{-1}}{2}[U_{\varepsilon,i}^n]_-^2 \quad \text{für} \quad k = i, j \tag{3.59}$$

gilt. Weiters können wir wegen (2.17a) und (2.17d)

$$\frac{\varepsilon}{2}{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,k}^{n-1}) \leq F_\varepsilon(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})) + 2 \leq F_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1}) + 2 \quad \text{für} \quad k = i, j$$

und wegen (2.18)

$$\frac{\varepsilon^{-1}}{2}[U_{\varepsilon,i}^n]_-^2 \leq F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)$$

abschätzen und erhalten somit mit (3.59) für $i = 1, 2$, dass

$$\begin{aligned}
&\left(\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})\right)\left(-[U_{\varepsilon,i}^n]_-\right) \\
&\qquad \le \frac{\varepsilon}{2}\left(\gamma_{ii}{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,j}^{n-1})\right) + \left(\gamma_{ii}+\gamma_{ij}\right)\frac{\varepsilon^{-1}}{2}[U_{\varepsilon,i}^n]_-^2 \\
&\qquad \le \gamma_{ii}F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}F_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1}) + \left(\gamma_{ii}+\gamma_{ij}\right)F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) + C. \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

Wegen $[1-s]_+ \le 1-[s]_-$ für alle $s \in \mathbb{R}$, bekommen wir für den ersten Teil der rechten Seite von (3.56) mit (3.60) und wegen $\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \le 2F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \mathfrak{c}$ für $i = 1, 2$, $j \ne i$ (siehe (2.17b)), dass

$$\begin{aligned}
&2\mu_i\tau_n\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h + \tau_n\big(\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1}), [1-U_{\varepsilon,i}^n]_+\big)^h \\
&\le 2\mu_i\tau_n\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h + \tau_n\left(\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1}), 1\right)^h \\
&\qquad + \tau_n\left(\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})\left(-[U_{\varepsilon,i}^n]_-\right), 1\right)^h \\
&\le 2\mu_i\tau_n\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h + 2\tau_n\left(\gamma_{ii}F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}F_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1}), 1\right)^h \\
&\qquad + \tau_n\left(\gamma_{ii}F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}F_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1}), 1\right)^h + \tau_n\left(\gamma_{ii}+\gamma_{ij}\right)\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h + \tau_n C \\
&\le 3\tau_n\left(\gamma_{ii}F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}F_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1}), 1\right)^h + \underbrace{\tau_n\left(2\mu_i+\gamma_{ii}+\gamma_{ij}\right)}_{\le\omega\tau_n}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h + \tau_n C.
\end{aligned} \qquad (3.61)$$

Es bleibt noch der zweite Teil der rechten Seite von (3.56) zu untersuchen. Hierfür bilden wir die Summe über die Terme $-\tau_n(b_i\nabla(\pi^h v), \nabla U_{\varepsilon,i}^n)$, bekommen zunächst mit $b_m := \max\{|b_1|, |b_2|\}$

$$-\tau_n\sum_{i=1}^2\left(b_i\nabla(\pi^h v), \nabla U_{\varepsilon,i}^n\right) \le \tau_n b_m\sum_{i=1}^2\int_\Omega\left|\nabla(\pi^h v)\right|\left|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right|dx,$$

und erhalten für $\delta_i = \frac{b_m}{2a_i} > 0$, $i = 1, 2$, mit der Youngschen Ungleichung weiter

$$\begin{aligned}
&\le \tau_n b_m\sum_{i=1}^2\left(\frac{\delta_i}{2}\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\delta_i}\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2\right) \\
&= \tau_n\sum_{i=1}^2 a_i\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 + \frac{\tau_n b_m(\delta_1+\delta_2)}{2}\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Abschätzung

$$-\tau_n\sum_{i=1}^2\left(b_i\nabla(\pi^h v), \nabla U_{\varepsilon,i}^n\right) \le \tau_n\sum_{i=1}^2 a_i\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 + \tau_n C\|\nabla(\pi^h v)\|_{L^2}^2. \qquad (3.62)$$

Aus der Abschätzung (3.58) nach unten von der linken Seite und den Abschätzungen (3.61) bzw. (3.62) nach oben der Terme der rechten Seite von (3.56) erhalten wir für

die Summe über $i = 1, 2$ von (3.56) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h - \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1\right)^h + 2\tau_n \sum_{i=1}^{2} a_i \left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 \\
&\quad \le 3\tau_n \sum_{i=1, j\neq i}^{2} \left(\gamma_{ii} F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij} F_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1}), 1\right)^h + \omega\tau_n \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h \\
&\qquad + \tau_n \sum_{i=1}^{2} a_i \left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 + C\tau_n \left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] \\
&\quad \le 3\tau_n\omega \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1\right)^h + \omega\tau_n \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h \\
&\qquad + \tau_n \sum_{i=1}^{2} a_i \left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 + \tau_n C \left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right],
\end{aligned}$$

Nun sind nur mehr die Terme mit $U_{\varepsilon,i}^n$ auf die linke, und jene mit $U_{\varepsilon,j}^n$ auf die rechte Seite zu bringen, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
(1 - \omega\tau_n) \sum_{i=1}^{2} (F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1)^h + \tau_n \sum_{i=1}^{n} a_i \|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\|_{L^2}^2 & \\
\le (1 + 3\omega\tau_n) \sum_{i=1}^{2} (F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1)^h + C\tau_n \left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right], &
\end{aligned}$$

womit (3.53) bewiesen ist. □

Das gerade gezeigte Lemma motiviert nun die A-priori-Abschätzungen für die Funktionen $U_{\varepsilon,1}^n$ und $U_{\varepsilon,2}^n$ zu gewinnen, indem man die Abschätzung (3.53) solange rekursiv anwendet, bis man beim Index $n = 0$ angekommen ist. Daher ist es sinnvoll, sich Abschätzungen für die Funktionen $U_{\varepsilon,i}^0 \in S^h$ für $i = 1, 2$ zu überlegen. Nun sind diese Funktionen nichts anderes als Approximationen der Anfangswerte u_i^0 durch die Projektionen π^h und $\mathcal{Q}^h$, womit wir uns die Eigenschaften dieser Abbildungen zu Hilfe nehmen können.

Lemma 3.12. *Sei $\beta > d$. Dann existieren Konstenten C, C_1, sodass*

$$\left\|\nabla\left(\pi^h \eta\right)\right\|_{L^2} \le C_1(1 + C) \left\|\nabla\eta\right\|_{L^\nu} \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega), \tag{3.63a}$$

$$\left\|\nabla\left(\mathcal{Q}^h \eta\right)\right\|_{L^r} \le (1 + C) \left\|\nabla\eta\right\|_{L^r} \qquad \forall\, \eta \in W^{1,r}(\Omega), r \in [2, \infty], \tag{3.63b}$$

$$\text{wobei } \nu = \begin{cases} 2 & \text{für } d = 1, \\ \beta & \text{für } d = 2, 3. \end{cases}$$

Insbesondere existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\left\|\pi^h \eta\right\|_{H^1} + \left\|\pi^h \eta\right\|_{L^\infty} \le C \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega), \tag{3.64a}$$

$$\left\|\mathcal{Q}^h \eta\right\|_{H^1} + \left\|\mathcal{Q}^h \eta\right\|_{L^\infty} \le C \qquad \forall\, \eta \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \tag{3.64b}$$

wobei $C > 0$ nur von η und Ω abhängt, also insbesondere von h unabhängig ist. Außerdem folgt für jede Funktion $\eta \in C(\overline{\Omega})$ mit $\eta \geq 0$, dass

$$(F_\varepsilon(\eta), 1)^h \leq C, \tag{3.65}$$

wobei die Konstante $C > 0$ nur von $\|\eta\|_{L^\infty}$ und Ω abhängt, also insbesondere von h und ε unabhängig ist.

Beweis. Wir wollen uns zunächst die Abschätzung für π^h und $\eta \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$ überlegen. Sei zunächst $d = 1$, dann wissen wir, dass die Ungleichung (3.5) für alle $\eta \in H^1(\Omega)$ gilt, und wir erhalten wieder

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\pi^h\eta\right)\right\|_{L^2} &= \left\|\nabla(I-\pi^h)\eta - \nabla\eta\right\|_{L^2} \leq \left\|\nabla(I-\pi^h)\eta\right\|_{L^2} + \|\nabla\eta\|_{L^2} \\ &\leq (1+C)\,\|\nabla\eta\|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

Für $d = 2$ oder 3 gilt hingegen (3.5) nur für alle $\eta \in W^{1,\beta}(\Omega)$ mit $\beta > d$. Nun impliziert $2 \leq d < \beta$ die stetige Einbettung $L^\beta \hookrightarrow L^2$ und somit

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\pi^h\eta\right)\right\|_{L^2} &\leq C_1\left\|\nabla\left(\pi^h\eta\right)\right\|_{L^\beta} \leq C_1\left(\left\|\nabla(I-\pi^h)\eta\right\|_{L^\beta} + \|\nabla\eta\|_{L^\beta}\right) \\ &\leq C_1(1+C)\,\|\nabla\eta\|_{L^\beta}\,,\end{aligned}$$

womit wir (3.63a) für alle $d = 1, 2$ und 3 gezeigt haben.
Die Ungleichung (3.63b) ist noch einfacher einzusehen, da wir keine Fallunterscheidung in der Dimension vornehmen müssen. Da mit $\eta \in W^{1,r}(\Omega)$ und $r \in [2, \infty]$ die Voraussetzungen der Ungleichung (3.11) aus Proposition 3.4 erfüllt sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\mathcal{Q}^h\eta\right)\right\|_{L^r} &= \left\|\nabla(I-\mathcal{Q}^h)\eta - \nabla\eta\right\|_{L^r} \leq \left\|\nabla(I-\mathcal{Q}^h)\eta\right\|_{L^r} + \|\nabla\eta\|_{L^r} \\ &\leq (1+C)\,\|\nabla\eta\|_{L^r}\,,\end{aligned}$$

und (3.63b) ist gezeigt.
Wir wollen nun (3.64a) und (3.64b) zeigen. Wir bemerken zunächst, dass die Bedingung $\beta > d$ äquivalent zu $1 - \frac{d}{\beta} > 0$ ist, daher gilt die Einbettung $W^{1,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ und da Funktionen aus $C(\overline{\Omega})$ beschränkt sind, gilt $\eta \in L^\infty(\Omega)$ für alle $\eta \in W^{1,\beta}(\Omega)$. Somit können wir für die in (3.64a) und (3.64b) betrachteten Funktionen stets voraussetzen, dass sie beschränkt sind. Da weiter π^h die Projektion auf S^h mit $(\pi^h\eta)(p_j) = \eta(p_j)$ für $j \in J$ ist, muss $\|\pi^h\eta\|_{L^\infty} \leq \|\eta\|_{L^\infty}$ gelten. Für die Projektion $\mathcal{Q}^h\eta$ haben wir die Beschränktheit durch $\|\mathcal{Q}^h\eta\|_{L^\infty} \leq \|\eta\|_{L^\infty}$ aus (2.36) gegeben. Daher erhalten wir mit (3.63a) und (3.63b), dass

$$\begin{aligned}&\left\|\pi^h\eta\right\|_{H^1}^2 = \left\|\pi^h\eta\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\left(\pi^h\eta\right)\right\|_{L^2}^2 \leq \|\eta\|_{L^\infty}^2\,\mu(\Omega) + C_1^2(1+C)^2\,\|\nabla\eta\|_{L^\nu}^2 < \infty \text{ bzw.} \\ &\left\|\mathcal{Q}^h\eta\right\|_{H^1}^2 = \left\|\mathcal{Q}^h\eta\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\left(\mathcal{Q}^h\eta\right)\right\|_{L^2}^2 \leq \|\eta\|_{L^\infty}^2\,\mu(\Omega) + (1+C)^2\,\|\nabla\eta\|_{L^2}^2 < \infty\end{aligned}$$

gilt, womit die Aussagen in (3.64a) und (3.64b) gezeigt sind.
Als Letztes wollen wir den Punkt (3.65) zeigen, sei also η stetig und erfülle $\eta \geq 0$.

Nun haben wir vorhin gezeigt, dass $\|\pi^h[F_\varepsilon(\eta)]\|_{L^\infty} \leq \|F_\varepsilon(\eta)\|_{L^\infty}$ gelten muss, daher erhalten wir mit den Rechenregeln aus Proposition 2.3

$$(F_\varepsilon(\eta),1)^h = \left\|\pi^h[F_\varepsilon(\eta)]\right\|_{L^1} \leq \mu(\Omega)\,\|F_\varepsilon(\eta)\|_{L^\infty} \leq \mu(\Omega) \max_{s\in[0,\|\eta\|_{L^\infty}]} F_\varepsilon(s).$$

Wegen Punkt (2.9) aus Lemma 2.4 existiert eine auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetige Funktion $C(s)$, welche unabhängig von ε ist und $F_\varepsilon(s) \leq C(s)$ erfüllt. Daher nimmt $C(s)$ auf $[0,\|\eta\|_{L^\infty}]$ ein Maximum an und wir erhalten

$$(F_\varepsilon(\eta),1)^h \leq \mu(\Omega) \max_{s\in[0,\|\eta\|_{L^\infty}]} F_\varepsilon(s) \leq \mu(\Omega) \max_{s\in[0,\|\eta\|_{L^\infty}]} C(s) \leq C,$$

wobei die Konstante $C > 0$ unabhängig von ε ist. Daher ist der Term $(F_\varepsilon(\eta),1)^h$ unabhängig von h und ε beschränkt und somit alle Punkte bewiesen. □

Bemerkung 3.13. Die Unabhängigkeit der Konstanten in (3.65) von h und ε ist wesentlich, denn der Term $(F_\varepsilon(.),1)^h$ wird im Beweis der A-priori-Abschätzungen in Theorem 3.15 eine tragende Rolle spielen.

Bemerkung 3.14. Bevor wir die A-priori-Abschätzungen für das Modell $(\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau})$ im nachfolgenden Theorem beweisen, wollen wir uns zwei Punkte überlegen.

- Für zwei Funktionen $f \in L^r(\Omega)$ und $g \in L^2(\Omega)$ ist

$$\|fg\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^r}\,\|g\|_{L^2} \tag{3.66}$$

  erfüllt, wobei $r = \frac{2(d+1)}{d}$ und $q = \frac{2(d+1)}{2d+1}$. Man findet nämlich mit $\tilde{p} = \frac{2d+1}{d}$ und $\tilde{q} = \frac{2d+1}{d+1}$ ein konjugiertes Paar, für das

$$\tilde{p}q = \frac{2d+1}{d}\frac{2(d+1)}{2d+1} = \frac{2(d+1)}{d} = r \quad \text{und} \quad \tilde{q}q = \frac{2d+1}{d+1}\frac{2(d+1)}{2d+1} = 2 \tag{3.67}$$

  gilt. Somit haben wir für zwei Funktionen $f \in L^r$ und $g \in L^2$ wegen der Hölder-Ungleichung

$$\|fg\|_{L^q}^q = \||fg|^q\|_{L^1} \leq \|f^q\|_{L^{\tilde{p}}}\,\|g^q\|_{L^{\tilde{q}}} \leq \left\|f^{q\tilde{p}}\right\|_{L^1}^{\frac{1}{\tilde{p}}}\left\|g^{q\tilde{q}}\right\|_{L^1}^{\frac{1}{\tilde{q}}} = \|f^r\|_{L^1}^{\frac{1}{\tilde{p}}}\left\|g^2\right\|_{L^1}^{\frac{1}{\tilde{q}}}$$

  und somit

$$\|fg\|_{L^q} \leq \|f^r\|_{L^1}^{\frac{1}{q\tilde{p}}}\left\|g^2\right\|_{L^1}^{\frac{1}{q\tilde{q}}} = \|f^r\|_{L^1}^{\frac{1}{r}}\left\|g^2\right\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^r}\,\|g\|_{L^2}\,.$$

  Tatsächlich können wir Ω mit jeder beliebigen Menge ersetzten, wie z.B. mit $\Omega_T := \Omega \times [0,T]$.

- Da für $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 1$, und Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,l$, die Summen

$$\sum_{i=1}^{l} |a_i| \qquad \text{und} \qquad \left(\sum_{i=1}^{l} |a_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

Normen auf $\mathbb{R}^l$ darstellen, müssen diese äquivalent sein. Daher existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, l$,

$$\left(\sum_{i=1}^{l} a_i \right)^r \leq C \sum_{i=1}^{l} a_i^r \tag{3.68}$$

gilt. Diese Summenabschätzung werden wir im nächsten Theorem benötigen.

Mit Lemma 3.11, Lemma 3.12 und der letzten Bemerkung haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um die gesuchten A-priori-Abschätzungen zu zeigen.

Theorem 3.15. *Es gelten die Grundbedingungen (V) und $\beta > d$. Weiters sei $v \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$ und für $i = 1, 2$ gelte $u_i^0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $u_i^0 \geq 0$ fast überall und*

$$\begin{aligned} &u_i^0 \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega) \quad \text{für } U_{\varepsilon,i}^0 = \pi^h u_i^0 \text{ bzw.} \\ &u_i^0 \in H^1(\Omega) \qquad\qquad\quad \text{für } U_{\varepsilon,i}^0 = \mathcal{Q}^h u_i^0. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Dann erfüllt eine Lösung $\{U_{\varepsilon,1}^n, U_{\varepsilon,2}^n\} \in [S^h]^2$ für den n-ten Schritt des Problems $(P_\varepsilon^{h,\tau})$ für alle $\varepsilon \in (0, e^{-2})$, für alle $h > 0$ und für alle τ_n, sodass $\omega\tau_n \leq 1 - \delta < 1$ mit $\delta \in (0,1)$, die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \max_{n=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{2} \left[\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h + \varepsilon^{-1} \left\| \pi^h [U_{\varepsilon,i}^n]_- \right\|_{L^2}^2 + \left\| U_{\varepsilon,i}^n \right\|_{L^1} \right] \\ + \sum_{n=1}^{N} \tau_n \sum_{i=1}^{2} a_i \left\| U_{\varepsilon,i}^n \right\|_{H^1}^2 \\ \leq C e^{\frac{4\omega T}{\delta}} \left[1 + \left\| \nabla(\pi^h v) \right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0), 1\right)^h \right] \leq C \end{aligned} \tag{3.70}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \tau_n \sum_{i=1}^{2} \Bigg[\left\| \Lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^n\right) \right\|_{L^r}^r + \left\| \pi^h [\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)] \right\|_{L^r}^r + \left\| U_{\varepsilon,i}^n \right\|_{L^r}^r \\ + \left\| \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \right\|_{L^r}^r + \left\| \mathcal{G} \left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n} \right] \right\|_{W^{1,q}}^q \Bigg] \leq C, \end{aligned} \tag{3.71}$$

wobei $r = \frac{2(d+1)}{d}$, $q = \frac{2(d+1)}{2d+1}$ und $C > 0$ unabhängig von h und ε ist.

Beweis. Aus (3.53) von Lemma 3.11 und wegen

$$\frac{1}{1-\omega\tau_n} \leq \frac{1}{\delta} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1+3\omega\tau_n}{1-\omega\tau_n} \leq 1 + \frac{4\omega\tau_n}{1-\omega\tau_n} \leq e^{\frac{4\omega\tau_n}{1-\omega\tau_n}} \leq e^{\frac{4\omega\tau_n}{\delta}}$$

erhalten wir für alle $n = 1, \dots, N$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h &\leq \frac{C\tau_n}{1-\omega\tau_n}\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] + \frac{1+3\omega\tau_n}{1-\omega\tau_n}\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1\right)^h \\ &\leq C\tau_n\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] + e^{\frac{4\omega\tau_n}{\delta}}\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1\right)^h.\end{aligned}$$

Wir können diese Abschätzung nun iterativ fortsetzen, was zu

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h &\leq C\tau_n\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] + e^{\frac{4\omega\tau_n}{\delta}}\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}), 1\right)^h. \\ &\leq C\tau_n\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] \\ &\quad + e^{\frac{4\omega\tau_n}{\delta}}\left[C\tau_{n-1}\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] + e^{\frac{4\omega\tau_{n-1}}{\delta}}\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{i,\varepsilon}^{n-2}), 1\right)^h\right] \\ &\leq C\tau_n\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] \\ &\quad + e^{\frac{4\omega\tau_n}{\delta}}\Bigg[C\tau_{n-1}\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] \\ &\quad + e^{\frac{4\omega\tau_{n-1}}{\delta}}\left[\dots\left[\dots + e^{\frac{4\omega\tau_2}{\delta}}\left[C\tau_1\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] + e^{\frac{4\omega\tau_1}{\delta}}\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0), 1\right)^h\right]\right]\dots\right]\Bigg]\end{aligned}$$

führt. Indem wir alle Terme ausmultiplizieren erhalten wir wegen $\sum_{j=1}^{n}\tau_j = t_n \leq T$ und $1 \leq e^{\frac{4\omega t_n}{\delta}} \leq e^{\frac{4\omega T}{\delta}}$ weiter

$$\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h \leq Ce^{\frac{4\omega T}{\delta}}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\tau_j}_{\leq T}\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right] + \underbrace{\prod_{j=1}^{n} e^{\frac{4\omega\tau_j}{\delta}}}_{=e^{\frac{4\omega t_n}{\delta}} \leq e^{\frac{4\omega T}{\delta}}}\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0), 1\right)^h,$$

und somit die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h \leq Ce^{\frac{4\omega T}{\delta}}\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0), 1\right)^h\right], \tag{3.72}$$

wobei die Konstante $C > 0$ von T abhängt. Wir bemerken, dass alle Terme der rechten Seite unabhängig von n sind. Außerdem wissen wir aus den Voraussetzungen an die Funktionen v und u_i^0, dass $U_{\varepsilon,i}^0 \in S_{\geq 0}^h$ für $i = 1, 2$ und somit wegen (3.64a), (3.64b) und (3.65) aus Lemma 3.12 eine von h und ε unabhängige Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\left\|\pi^h v\right\|_{H^1} \leq C \quad \text{und} \quad \left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{L^\infty} \leq \left\|u_i^0\right\|_{L^\infty} \Rightarrow \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0), 1\right)^h \leq C \quad \text{für } i = 1, 2. \tag{3.73}$$

Daher können wir in (3.72) das Maximum über alle $n = 1, \dots, N$ nehmen und erhalten wegen (3.73)

$$\max_{n=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h \leq C e^{\frac{4\omega T}{\delta}} \left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0), 1\right)^h\right] \leq C, \tag{3.74}$$

womit wir den ersten Summanden in (3.70) abgeschätzt haben.
Wir wollen nun die Terme $\|U_{\varepsilon,i}^n\|_{L^1}$ und $\varepsilon^{-1}\|\pi^h[U_{\varepsilon,i}^n]_-\|_{L^2}$ in (3.70) abschätzen. Hierfür betrachten wir zunächst die Gleichungen in (2.46) aus unserem Problem $(\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau})$ mit $\chi \equiv 1$. Wegen $\nabla 1 \equiv 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}, 1\right)^h &= \Big(\mu_i U_{\varepsilon,i}^n - \underbrace{\left[\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})\right]\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)}_{\geq 0}, 1\Big)^h \\ &\leq \left(\mu_i U_{\varepsilon,i}^n, 1\right)^h,\end{aligned}$$

was wir mit Hilfe der Rechenregeln für $(.,.)^h$ aus Proposition 2.3 leicht zu

$$(1 - \mu_i\tau_n)\left(U_{\varepsilon,i}^n, 1\right) = (1 - \mu_i\tau_n)\left(U_{\varepsilon,i}^n, 1\right)^h \leq \left(U_{\varepsilon,i}^{n-1}, 1\right)^h = \left(U_{\varepsilon,i}^{n-1}, 1\right)$$

alle für $n = 1, \dots, N$ und $i = 1, 2$ umformen können. Wegen $(1 - \mu_i\tau_n) \geq (1 - \omega\tau_n) \geq \delta > 0$ können wir, ähnlich wie vorhin, diese Ungleichgung iterativ fortsetzen, was zu

$$\left(U_{\varepsilon,i}^n, 1\right) \leq \frac{1}{1 - \mu_i\tau_n}\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1}, 1\right) \leq \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \mu_i\tau_j}\left(U_{\varepsilon,i}^0, 1\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{\mu_i\tau_j}{1 - \mu_i\tau_j}\right)\left(U_{\varepsilon,i}^0, 1\right) \tag{3.75}$$

für $i = 1, 2$ führt. Da einerseits $U_{\varepsilon,i}^0$ wegen (3.64a) bzw. (3.64b) von Lemma 3.12 beschränkt ist und andererseits $1 + \frac{\mu_i\tau_j}{1-\mu_i\tau_j} \leq 1 + \frac{\omega\tau_j}{\delta} \leq e^{\frac{\omega\tau_j}{\delta}}$ gilt, haben wir weiter

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{\mu_i\tau_j}{1 - \mu_i\tau_j}\right)\left(U_{\varepsilon,i}^0, 1\right) &\leq \prod_{j=1}^{n} e^{\frac{\omega\tau_j}{\delta}}\left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{L^1} \leq \underbrace{\prod_{j=1}^{n} e^{\frac{\omega\tau_j}{\delta}}}_{\leq e^{\frac{\omega T}{\delta}}}\left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{L^\infty}\mu(\Omega) \\ &\leq e^{\frac{\omega T}{\delta}} C.\end{aligned}$$

Man sieht, dass diese Schranke unabhängig von n ist, daher können wir auf der linken Seite von (3.75) das Maximum über alle $n = 1, \dots, N$ nehmen und erhalten

$$\max_{n=1,\dots,N}\left(U_{\varepsilon,i}^n, 1\right) \leq e^{\frac{\omega T}{\delta}} C \qquad \text{für } i = 1, 2. \tag{3.76}$$

Da nun $|s| = s - 2[s]_-$ für alle $s \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, erhalten wir mit (2.3b) aus Proposition

2.2 und der Youngschen Ungleichung angewendet auf $|\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-| \cdot 1$

$$\begin{aligned}\left\|U^n_{\varepsilon,i}\right\|_{L^1} &= \int_\Omega U^n_{\varepsilon,i} - 2[U^n_{\varepsilon,i}]_- dx \leq \left(U^n_{\varepsilon,i}, 1\right) - 2\left(\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-, 1\right) \\ &\leq \left(U^n_{\varepsilon,i}, 1\right) + 2\int_\Omega \left|\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-\right| dx \leq \left(U^n_{\varepsilon,i}, 1\right) + \mu(\Omega) + \left\|\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-\right\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

was wir mit (3.76) und $\varepsilon^{-1} > 1$ weiter zu

$$\leq C\left[1 + \left\|\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-\right\|^2_{L^2}\right] \leq C\left[1 + \varepsilon^{-1}\left\|\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-\right\|^2_{L^2}\right] \tag{3.77}$$

abschätzen können. Weiters gilt wegen Proposition 2.2 und der Eigenschaft $\frac{\varepsilon^{-1}}{2}[s]^2_- \leq F_\varepsilon(s)$, $s \in \mathbb{R}$, aus (2.18) für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\left\|\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-\right\|^2_{L^2} &= \varepsilon^{-1}\int_\Omega \left(\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-\right)^2 dx \overset{(2.4b)}{\leq} \varepsilon^{-1}\int_\Omega \pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]^2_- dx \\ &= \varepsilon^{-1}\left([U^n_{\varepsilon,i}]^2_-, 1\right)^h \leq 2\left(F_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}), 1\right)^h.\end{aligned} \tag{3.78}$$

Aus dieser Ungleichung erhalten wir einerseits für den zweiten Summanden in (3.70) mit (3.74)

$$\begin{aligned}\max_{n=1,\dots,N}\sum_{i=1}^2 \varepsilon^{-1}\left\|\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-\right\|^2_{L^2} &\leq Ce^{\frac{4\omega T}{\delta}}\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^2\left(F_\varepsilon(U^0_{\varepsilon,i}), 1\right)^h\right] \\ &\leq C,\end{aligned} \tag{3.79}$$

und andererseits für den dritten Summanden in (3.70) mit (3.77) und (3.79)

$$\begin{aligned}\max_{n=1,\dots,N}\sum_{i=1}^2 \left\|U^n_{\varepsilon,i}\right\|_{L^1} &\leq \max_{n=1,\dots,N} C\sum_{i=1}^2\left[1 + \varepsilon^{-1}\left\|\pi^h[U^n_{\varepsilon,i}]_-\right\|^2_{L^2}\right] \\ &\leq Ce^{\frac{4\omega T}{\delta}}\left[1 + \left\|\nabla(\pi^h v)\right\|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^2\left(F_\varepsilon(U^0_{\varepsilon,i}), 1\right)^h\right] \leq C.\end{aligned} \tag{3.80}$$

Somit bleibt für die Gültigkeit von (3.70) nur mehr der vierte Summand, also der Term $\sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 a_i \|U^n_{\varepsilon,i}\|_{H^1}$, abzuschätzen. Hierfür summieren wir zunächst über

die Ungleichung (3.53) aus dem Lemma 3.11 und bekommen mit $\sum_{n=1}^{N}\tau_n = T$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1)^h - \sum_{n=1}^{N}\omega\tau_n\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1)^h + \sum_{n=1}^{N}\tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2\\
&\quad= \sum_{n=1}^{N}\left[(1-\omega\tau_n)\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1)^h + \tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2\right]\\
&\quad\overset{(3.53)}{\leq} \sum_{n=1}^{N}\left[(1+3\omega\tau_n)\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}),1)^h + C\tau_n\left[1+\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right]\right]\\
&\quad= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}),1)^h + \sum_{n=1}^{N}3\omega\tau_n\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}),1)^h + CT\left[1+\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2\right]
\end{aligned}$$

was wegen $CT[1+\|\nabla(\pi^h v)\|_{L^2}^2] \leq C$ aus (3.74) zu

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\left[(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}),1)^h - F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1)^h\right]\\
&\quad+\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\left[3\omega\tau_n(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}),1)^h + \omega\tau_n\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1)^h\right] + C\\
&\leq \sum_{i=1}^{2}\left[(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0),1)^h - (F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^N),1)^h\right] + 4\omega T\max_{n=0,\dots,N}\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1)^h + C\\
&\leq (2+4\omega T)\max_{n=0,\dots,N}\sum_{i=1}^{2}(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1)^h + C
\end{aligned}$$

führt. Wir wollen nun mit der Ungleichung (3.74) weiter abschätzen, wobei dort nur das Maximum über $n = 1,\dots,N$ genommen wird. Es ist aber wegen $(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0),1) \leq C$ für $i = 1,2$ offensichtlich, dass diese Abschätzung ebenfalls für den Fall $n = 0$ gültig bleibt, daher können wir in (3.74) $\max_{n=1,\dots,N}$ durch $\max_{n=0,\dots,N}$ ersetzen, und die Ungleichung auf obige anwenden. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 &\leq (2+4\omega T)\,C\left[1+\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0),1\right)^h\right] + C\\
&\leq Ce^{\frac{4\omega T}{\delta}}\left[1+\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0),1\right)^h\right] \leq C,
\end{aligned} \tag{3.81}$$

was uns eine Abschätzung für die H^1-Seminorm liefert. Um die Abschätzung auf die ganze Norm anwenden zu können, erinneren wir an den Satz 1.3 von Bramble-Hilbert und dessen Folgerung (1.7). Wir erhalten also

$$\left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2 \leq C\left(\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 + \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^1}^2\right),$$

und somit mit der Maximumsabschätzung aus (3.80) und wegen (3.81)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2 &= C\left(\sum_{n=1}^{N}\tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2+\sum_{n=1}^{N}\tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^1}^2\right)\\ &\le C\Bigg(e^{\frac{4\omega T}{\delta}}\left[1+\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0),1\right)^h\right]\\ &\qquad+\max_{n=1,\dots,N}\left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^1}^2\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i}_{=T(a_1+a_2)}\Bigg)\\ &\le Ce^{\frac{4\omega T}{\delta}}\left[1+\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0),1\right)^h\right].\end{aligned} \tag{3.82}$$

Nun haben wir mit (3.74), (3.79), (3.80) und (3.82) alle vier Terme aus (3.70) abgeschätzt, und erhalten

$$\begin{aligned}\max_{n=1,\dots,N}\sum_{i=1}^{2}&\left[\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1\right)^h+\varepsilon^{-1}\left\|\pi^h[U_{\varepsilon,i}^n]_-\right\|_{L^2}^2+\left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^1}\right]\\ &\qquad+\sum_{n=1}^{N}\tau_n\sum_{i=1}^{2}a_i\left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2\\ &\qquad\le Ce^{\frac{4\omega T}{\delta}}\left[1+\left\|\nabla(\pi^h v)\right\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^{2}\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0),1\right)^h\right]\le C,\end{aligned}$$

womit die erste Ungleichung des Theorems gezeigt ist.

Um die zweite Ungleichung (3.71) zu zeigen, wollen wir zunächst ihre ersten zwei Terme abschätzen. Betrachten wir für $i=1,2$ und für $r=\frac{2(d+1)}{d}$

$$\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r}^r=\sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\int_\kappa\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_2^r\overset{(2.27)}{=}\sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\int_\kappa\left\|R_\kappa\widehat{\Lambda_\varepsilon}(U_{\varepsilon,i}^n)R_\kappa^T\right\|_2^r$$

und wegen $\|R_\kappa^{(T)}\|_2\le 1$ weiter

$$\le\sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\int_\kappa\max_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\left|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n(\xi_\kappa))\right|^r\le\sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\mu(\kappa)\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^\infty(\kappa)}^r,$$

wobei wieder $\|.\|_2$ für die Spektralnorm steht und die Punkte $\xi_\kappa\in\kappa$ die in der Definitionen (2.28) erwähnten Punkte sind. Aufgrund ihrer affinen Gestalt auf jedem $\kappa\in\mathcal{T}^h$, nehmen die Funktionen in S^h ihr Maximum in den Eckpunkten p_j, $j\in J$ an. Daher gilt sogar $\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\|_{L^\infty}=\|\pi^h[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)]\|_{L^\infty}$ und wir können wegen $\mu(\kappa)\le h_\kappa^d$,

für alle $\kappa \in \mathcal{T}^h$, die obige Abschätzung weiterführen zu

$$\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r}^r \leq \sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h} \mu(\kappa) \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^\infty(\kappa)}^r \leq \sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa^d \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^\infty(\kappa)}^r. \quad (3.83)$$

Wir können nun auf $\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\|_{L^\infty(\kappa)}$ die Ungleichung (3.4) mit $m=0$, $r=\infty$ und $p=\frac{2(d+1)}{d}$ (= r von diesem Theorem) anwenden und erhalten für $i=1,2$

$$\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^\infty(\kappa)} \leq h_\kappa^{-\frac{d}{r}} \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^r(\kappa)}. \quad (3.84)$$

Als nächstes wollen wir den Spezialfall (1.9) der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung aus Lemma 1.4 anwenden. Damit, und mit den obigen Abschätzungen (3.83) und (3.84) erhalten wir

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r}^r &\leq \sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa^d \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^\infty(\kappa)}^r \overset{(3.84)}{\leq} \sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h} \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^r(\kappa)}^r \\ &= \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^r}^r \overset{(1.9)}{\leq} C \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^1}^{r-2} \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{H^1}^2 \end{aligned} \quad (3.85)$$

für $i=1,2$. Da $\pi^h[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)]$ wegen $\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \geq 0$ größer als Null ist, können wir die L^1-Norm mit Hilfe der Abschätzungen (2.17b) und (3.70) mit

$$\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^1} = \left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h \leq 2\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h + \mu(\Omega)\mathfrak{c} \overset{(3.70)}{\leq} C$$

beschränken. Somit gilt wegen dem Satz von Bramble-Hilbert, (3.85) und (3.10b) für $i=1,2$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r}^r + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^r}^r &\leq 2C \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^1}^{r-2} \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{H^1}^2 \\ &\leq C \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^1}^{r-2} \left(\left\|\nabla\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^2}^2 + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^1}^2\right) \\ &\leq C\left(1 + \left\|\nabla\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^2}^2\right) \overset{(3.10b)}{\leq} C\left(1 + \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2\right).\end{aligned}$$

Zusammen mit $\sum_{n=1}^N \tau_n = T$ und (3.70) liefert dies eine Abschätzung für die ersten zwei Summanden von (3.71) durch

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \left[\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r}^r + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right]\right\|_{L^r}^r\right] &\leq C \sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \left(1 + \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2\right) \\ &= C\left(2T + \sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2\right) \leq C, \end{aligned} \quad (3.86)$$

denn wir erhalten mit $a_{min} := \min\{a_1, a_2\} > 0$ und (3.70)

$$\sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2 \leq a_{min}^{-1} \sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 a_i \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2 \leq a_{min}^{-1} C = C. \quad (3.87)$$

Als nächstes werden wir den dritten und vierten Summanden von (3.71) analysieren. Für den dritten wollen wir genau wie in (3.85) die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung aus (1.9) anwenden und erhalten damit für $i = 1, 2$

$$\left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^r}^r \overset{(1.9)}{\leq} C \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^1}^{r-2} \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2 .$$

Da nun wieder wegen (3.70) die L^1-Norm von $U_{\varepsilon,i}^n$ für $i = 1, 2$ beschränkt ist, können wir die Summen über die obige Ungleichung bilden und mit Hilfe von (3.87) weiter zu

$$\sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^r}^r \leq C \sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \underbrace{\left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^1}^{r-2}}_{\leq C^{r-2}} \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2 \leq C \sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2 \leq C \tag{3.88}$$

abschätzen. Die Abschätzung für den vierten Summanden funktioniert ähnlich. Wir bemerken zunächst, dass die Funktion $(F_\varepsilon \circ \chi)|_{\overline{\kappa}}$ für alle $\chi \in S^h$ und $\kappa \in \mathcal{T}^h$ konvex ist, denn auf Grund der Konvexität von F_ε und wegen Bemerkung 2.1 gilt für jedes $\kappa \in \mathcal{T}^h$ und für jede Konvexkombination $\sum_{l=1}^L \lambda_l \xi_l$ mit $\xi_l \in \overline{\kappa}$, $\sum_{l=1}^L \lambda_l = 1$, $\lambda_l \in [0, 1]$ für $l = 1, \ldots, L$, dass

$$\begin{aligned}(F_\varepsilon \circ \chi)\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l \xi_l\right) &= F_\varepsilon\left(\chi\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l \xi_l\right)\right) = F_\varepsilon\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l \chi(\xi_l)\right) \leq \sum_{l=1}^L \lambda_l F_\varepsilon(\chi(\xi_l)) \\ &= \sum_{l=1}^L \lambda_l (F_\varepsilon \circ \chi)(\xi_l).\end{aligned}$$

Wie vorhin können wir die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung aus (1.9) verwenden und bekommmen damit und mit dem Satz von Bramble-Hilbert

$$\begin{aligned}\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r}^r &\overset{(1.9)}{\leq} C \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^1}^{r-2} \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{H^1}^2 \\ &\leq C \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^1}^{r-2} \left(\left\|\nabla\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^1}^2\right)\end{aligned}$$

und weiter wegen $\nabla\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) = \underbrace{\lambda_\varepsilon{}'(U_{\varepsilon,i}^n)}_{\leq 1} \nabla U_{\varepsilon,i}^n$

$$\leq C \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^1}^{r-2} \left(\left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^2}^2 + \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^1}^2\right) \tag{3.89}$$

Wir müssen wieder die L^1-Norm in den Griff bekommen. Da wir dieses Mal hierfür keine Abschätzung aus 3.70 haben, werden wir die Konvexität von $(F_\varepsilon \circ U_{\varepsilon,i}^n)|_{\overline{\kappa}}$ für $i = 1, 2$ nutzen. Aus dieser folgt mit Proposition 2.2, dass $F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \leq \pi^h[F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)]$ erfüllt ist. Da weiters $\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \geq 0$ ist, können wir mit (2.17b) für $i = 1, 2$

$$\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^1} = \left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right) \leq 2\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right) + \mathfrak{c}\mu(\Omega)$$

schreiben. Nun erhalten wir aus der letzen Ungleichung, der schon erwähnten Konvexität und den Rechenregeln aus Proposition 2.3

$$\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^1} \leq 2\left(\pi^h\left[F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right],1\right) + \mathfrak{c}\mu(\Omega) = 2\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n),1\right)^h + \mathfrak{c}\mu(\Omega) \overset{(3.70)}{\leq} C$$

für $i = 1, 2$. Somit können wir den Term $\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\|_{L^r}^r$ mit Hilfe von (3.89), ähnlich wie die ersten beiden Summanden von (3.71), mit

$$\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r}^r \leq C\left(1 + \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2\right)$$

abschätzen, was mit (3.87)

$$\sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r}^r \leq C \sum_{n=1}^N \tau_n \sum_{i=1}^2 \left(1 + \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}^2\right) \leq C. \tag{3.90}$$

liefert, womit wir auch den vierten Summanden von (3.71) abgeschätzt haben.
Für den letzen Summanden bedarf es etwas mehr Aufwand. Man sieht leicht ein, dass die zu $q = \frac{2(d+1)}{2d+1}$ konjugierte Zahl $q' = 2(d+1)$ ist. Da weiter $q' > 2$ ist, können wir den Raum $W^{1,q'}(\Omega)$ in den $L^2(\Omega)$ einbetten, woraus unter anderem folgt, dass jede Funktion $z \in L^2(\Omega)$ auch in dem Dualraum $(W^{1,q'}(\Omega))'$ liegt. Somit können wir $z = \frac{1}{\tau_n}(U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1})$ in die Gleichung (2.43) einsetzten, und erhalten für $\eta \in W^{1,q'}(\Omega)$ und $i = 1, 2$

$$\left(\nabla\mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right], \nabla\eta\right) + \left(\mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right], \eta\right) = \left\langle \frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}, \eta \right\rangle_{q'},$$

wobei wir wegen $W^{1,q'}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ die Klammern $\langle ., . \rangle_q$ durch $(.,.)$ ersetzen können und erhalten mit der Eigenschaft (2.35) von $\mathcal{Q}^h$ (η liegt auch in $L^2(\Omega)$) weiter

$$= \left(\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}, \eta\right) = \left(\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}, \mathcal{Q}^h\eta\right)^h. \tag{3.91}$$

Wenn wir nun in (2.46) die Funktion $\chi = \mathcal{Q}^h\eta$ einsetzten, erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}, \mathcal{Q}^h\eta\right)^h &= \left(\mu_i U_{\varepsilon,i}^n - \left[\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{n-1})\right]\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), \mathcal{Q}^h\eta\right)^h \\ &\quad - \left(\left[c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) + \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^n)\right]\nabla U_{\varepsilon,i}^n, \nabla\left(\mathcal{Q}^h\eta\right)\right) \\ &\quad - \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\left[\nabla U_{\varepsilon,j}^n + b_i\nabla(\pi^h v)\right], \nabla\left(\mathcal{Q}^h\eta\right)\right) \\ &\leq \left(\mu_i U_{\varepsilon,i}^n, \mathcal{Q}^h\eta\right)^h + \sum_{k=1}^{2}\gamma_{ik}\left|\left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), \mathcal{Q}^h\eta\right)^h\right| \\ &\quad + \left\|\left(\left[c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) + \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^n)\right]\nabla U_{\varepsilon,i}^n\right)\nabla\left(\mathcal{Q}^h\eta\right)\right\|_{L^1} \\ &\quad + \left\|\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\left[\nabla U_{\varepsilon,j}^n + b_i\nabla(\pi^h v)\right]\right)\nabla\left(\mathcal{Q}^h\eta\right)\right\|_{L^1}.\end{aligned} \tag{3.92}$$

Wir wollen diese Summanden weiter nach oben beschränken und betrachten hierfür den ersten Term. Diesen können wir mit Hinzunahme der Definition (2.35) und der bereits gezeigten Ungleichung (3.70) mit

$$\left(\mu_i U_{\varepsilon,i}^n, \mathcal{Q}^h\eta\right)^h = \left(\mu_i U_{\varepsilon,i}^n, \eta\right) \leq \mu_i \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{L^1}\|\eta\|_{L^\infty} \overset{(3.70)}{\leq} C\|\eta\|_{L^\infty} \tag{3.93}$$

abschätzen. Für den zweiten Term beachten wir zunächst, dass wegen (2.5), (2.36) und $\lambda_\varepsilon \geq 0$ für $i,k = 1,2$

$$\begin{aligned}\left|\left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), \mathcal{Q}^h\eta\right)^h\right| &\leq \left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n), 1\right)^h \left\|\mathcal{Q}^h\eta\right\|_{L^\infty} \\ &\leq \left(\sum_{j\in J} m_j\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})(p_j)\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)(p_j)\right)\|\eta\|_{L^\infty} \\ &= \left(\sum_{j\in J}\sqrt{m_j}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})(p_j)\sqrt{m_j}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)(p_j)\right)\|\eta\|_{L^\infty}\end{aligned} \tag{3.94}$$

gilt. Wenn wir zunächst nur die Summe analysieren, sieht man, dass wir den Spezialfall der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für endliche Summen anwenden können, was für $i,k = 1,2$ zu

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in J}\sqrt{m_j}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})(p_j)\sqrt{m_j}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)(p_j) \\ &\qquad\leq \left(\sum_{j\in J} m_j{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,k}^{n-1})(p_j)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j\in J} m_j{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,i}^n)(p_j)\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

führt, wobei diese Abschätzung wegen der Definition in (2.5) und den Rechenregeln für $(.,.)^h$ äquivalent zu

$$\sum_{j\in J} \sqrt{m_j}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})(p_j)\,\sqrt{m_j}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n})(p_j)$$
$$\leq \left(\int_\Omega \pi^h\left[{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \pi^h\left[{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,i}^{n})\right]dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.95}$$

ist. Wir würden nun gerne die Ungleichung (3.6) auf die obigen zwei Integrale anwenden, was leider daran scheitert, dass $\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)$, für $i=1,2$, im Allgemeinen nicht in S^h liegt. Daher erinnern wir an (2.14) in Bemerkung 2.6., womit wir

$$\left(\int_\Omega \pi^h\left[{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \pi^h\left[{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,i}^{n})\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left(\int_\Omega \pi^h\left[\varepsilon^2+(U_{\varepsilon,k}^{n-1})^2\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \pi^h\left[\varepsilon^2+(U_{\varepsilon,i}^{n})^2\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\varepsilon^2\mu(\Omega)+\int_\Omega \pi^h\left[(U_{\varepsilon,k}^{n-1})^2\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\varepsilon^2\mu(\Omega)+\int_\Omega \pi^h\left[(U_{\varepsilon,i}^{n})^2\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

erreichen. Nun können wir (3.6) anwenden, was zu

$$\left(\int_\Omega \pi^h\left[{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \pi^h\left[{\lambda_\varepsilon}^2(U_{\varepsilon,i}^{n})\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C\left(\varepsilon^2\mu(\Omega)+\int_\Omega (U_{\varepsilon,k}^{n-1})^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\varepsilon^2\mu(\Omega)+\int_\Omega (U_{\varepsilon,i}^{n})^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C\left(\varepsilon\sqrt{\mu(\Omega)}+\left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^2}\right)\left(\varepsilon\sqrt{\mu(\Omega)}+\left\|U_{\varepsilon,i}^{n}\right\|_{L^2}\right)$$

führt. Wenn man die letzte Ungleichung mit (3.94) und (3.95) kombiniert, bekommt man für $i,k=1,2$

$$\left|\left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n}),\mathcal{Q}^h\eta\right)^h\right| \leq C\left(1+\left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^2}\right)\left(1+\left\|U_{\varepsilon,i}^{n}\right\|_{L^2}\right)\|\eta\|_{L^\infty},$$

was letzten Endes für den zweiten Summanden von (3.92)

$$\sum_{k=1}^{2}\gamma_{ik}\left|\left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^{n-1})\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n}),\mathcal{Q}^h\eta\right)^h\right|$$
$$\leq C\sum_{k=1}^{2}\gamma_{ik}\left(1+\left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^2}\right)\left(1+\left\|U_{\varepsilon,i}^{n}\right\|_{L^2}\right)\|\eta\|_{L^\infty}$$
$$\overset{r\geq 2}{\leq} C\sum_{k=1}^{2}\left(1+\left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^r}\right)\left(1+\left\|U_{\varepsilon,i}^{n}\right\|_{H^1}\right)\|\eta\|_{L^\infty} \tag{3.96}$$

bedeutet.
Nun wenden wir uns den letzten zwei Summanden von (3.92) zu, wo man leicht mittels der vorhin gezeigten Ungleichung (3.66), Dreiecksungleichung, Hölder-Ungleichung und wegen $a_i, c_i \geq 0$ für $i, j = 1, 2$ die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\left[c_i + 2a_i \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) + \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j}) \right] \nabla U^n_{\varepsilon,i} \right) \nabla \left(\mathcal{Q}^h \eta \right) \right\|_{L^1} \\
&\qquad + \left\| \left(\Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) \left[\nabla U^n_{\varepsilon,j} + b_i \nabla(\pi^h v) \right] \right) \nabla \left(\mathcal{Q}^h \eta \right) \right\|_{L^1} \\
&\leq \Big(\left\| \left[c_i + 2a_i \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) + \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j}) \right] \nabla U^n_{\varepsilon,i} \right\|_{L^q} \\
&\qquad + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) \left[\nabla U^n_{\varepsilon,j} + b_i \nabla(\pi^h v) \right] \right\|_{L^q} \Big) \left\| \nabla \left(\mathcal{Q}^h \eta \right) \right\|_{L^{q'}} \\
&\overset{(3.66)}{\leq} \Big(\left\| c_i + 2a_i \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) + \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j}) \right\|_{L^r} \left\| \nabla U^n_{\varepsilon,i} \right\|_{L^2} \\
&\qquad + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) \right\|_{L^r} \left\| \nabla U^n_{\varepsilon,j} + b_i \nabla(\pi^h v) \right\|_{L^2} \Big) \left\| \nabla \left(\mathcal{Q}^h \eta \right) \right\|_{L^{q'}} \\
&\leq C \Big(\left(1 + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) \right\|_{L^r} + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j}) \right\|_{L^r} \right) \left\| U^n_{\varepsilon,i} \right\|_{H^1} \\
&\qquad + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) \right\|_{L^r} \left(\left\| U^n_{\varepsilon,j} \right\|_{H^1} + \left\| \pi^h v \right\|_{H^1} \right) \Big) \left\| \nabla \left(\mathcal{Q}^h \eta \right) \right\|_{L^{q'}}
\end{aligned}$$

nachprüfen kann. An diesem Punkt bemerken wir, dass die H^1-Norm von $\pi^h v$ wegen der Voraussetzung $v \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$ und (3.64a) aus Lemma 3.12 beschränkt ist. Daher können wir $\|\pi^h v\|_{H^1}$ als Konstante herausziehen und bekommen für die letzten beiden Summanden eine Abschätzung der Form

$$\begin{aligned}
&C \Big(\left(1 + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) \right\|_{L^r} + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j}) \right\|_{L^r} \right) \left\| U^n_{\varepsilon,i} \right\|_{H^1} \\
&\qquad + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) \right\|_{L^r} \left(\left\| U^n_{\varepsilon,j} \right\|_{H^1} + \left\| \pi^h v \right\|_{H^1} \right) \Big) \left\| \nabla \left(\mathcal{Q}^h \eta \right) \right\|_{L^{q'}} \\
&\quad \leq C \Big(1 + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,i}) \right\|_{L^r} + \left\| \Lambda_\varepsilon(U^n_{\varepsilon,j}) \right\|_{L^r} \Big) \left(1 + \sum_{k=1}^{2} \left\| U^n_{\varepsilon,k} \right\|_{H^1} \right) \left\| \nabla \left(\mathcal{Q}^h \eta \right) \right\|_{L^{q'}} .
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Bevor wir die Abschätzungen der vier Summanden von (3.92) zusammensetzen, bemerken wir, dass wegen $1 - \frac{d}{q'} = 1 - \frac{d}{2(d+1)} > 0$ der Raum $W^{1,q'}(\Omega)$ ebenfalls in den Raum $C(\overline{\Omega})$ einbettbar ist (sogar kompakt), weswegen $\|\eta\|_{L^\infty} \leq C \|\eta\|_{W^{1,q'}}$ erfüllt ist. Außerdem können wir wegen $q' \geq 2$ die Ungleichung (3.63b) aus Lemma 3.12 anwenden, womit wir $\|\nabla \left(\mathcal{Q}^h \eta \right)\|_{L^{q'}} \leq C \|\eta\|_{W^{1,q'}}$ gewinnen. Wenn wir nun diese zwei Schranken mit den Abschätzungen der Summanden (3.93),(3.96) und (3.97) kombi-

nieren, erhalten wir für (3.92), $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}, \mathcal{Q}^h\eta\right)^h &\le C\Bigg[\|\eta\|_{L^\infty} + \sum_{k=1}^2 \left(1 + \left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^r}\right)\left(1 + \left\|U_{\varepsilon,i}^n\right\|_{H^1}\right)\|\eta\|_{L^\infty} \\
&\quad + \left(1 + \left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)\right\|_{L^r} + \left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^n)\right\|_{L^r}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right)\left\|\nabla\left(\mathcal{Q}^h\eta\right)\right\|_{L^{q'}}\Bigg] \\
&\le C\Bigg[1 + \sum_{k=1}^2 \left(1 + \left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^r}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right) \\
&\qquad\qquad + \left(1 + \sum_{k=1}^2 \left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^n)\right\|_{L^r}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right)\Bigg]\|\eta\|_{W^{1,q'}}.
\end{aligned}$$

In dieser Abschätzung können wir nun den Term $(1 + \sum_{i=1}^2 \|U_{\varepsilon,i}^n\|_{H^1})$ herausheben, was zusammen mit der ursprünglichen Gleichung (3.91)

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla\mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right], \nabla\eta\right) + \left(\mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right], \eta\right) \\
&\qquad \overset{(3.91)}{=} \left(\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}, \mathcal{Q}^h\eta\right)^h \le CM_n\left[1 + \sum_{k=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right]\|\eta\|_{W^{1,q'}} \qquad (3.98)
\end{aligned}$$

liefert, wobei

$$M_n := 1 + \sum_{k=1}^2 \left[\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^n)\right\|_{L^r} + \left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^r}\right] \qquad \forall\, n = 1, \dots, N.$$

Wenn wir nun auf beiden Seiten durch $\|\eta\|_{W^{1,q'}}$ dividieren und das Supremum über alle $\eta \in W^{1,q'}(\Omega)$ nehmen, bekommen wir wegen (2.43) und der Stetigkeit des Operators $\mathcal{G}$ aus Proposition 2.13

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right]\right\|_{W^{1,q}} &\overset{(2.45)}{\le} C\left\|\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right\|_{(W^{1,q'})'} \\
&= \sup\left\{\left|\left\langle\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}, \eta\right\rangle_{q'}\right| : \|\eta\|_{W^{1,q'}} \le 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\left(\nabla\mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right], \nabla\eta\right) + \left(\mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right], \eta\right)\right| : \|\eta\|_{W^{1,q'}} \le 1\right\} \\
&\overset{(3.98)}{\le} CM_n\left[1 + \sum_{k=1}^2 \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right].
\end{aligned}$$

Wenn man diese Abschätzung mit τ_n multipliziert und die Summe über $n = 1, \dots, N$

bildet, erhält man

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right] \right\|_{W^{1,q}}^q \leq C \sum_{n=1}^{N} \tau_n M_n^q \left[1 + \sum_{k=1}^{2} \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right]^q$$
$$= C \sum_{n=1}^{N} \tau_n^{\frac{1}{\tilde{p}}} M_n^q \tau_n^{\frac{1}{\tilde{q}}} \left[1 + \sum_{k=1}^{2} \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right]^q, \qquad (3.99)$$

wobei $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ wieder das konjugierte Paar mit den Eigenschaften aus (3.67) ist. Für die letzte Summe gilt nun dank der Hölder-Ungleichung und wegen $\tilde{p}q = r$ und $\tilde{q}q = 2$ aus (3.67)

$$C \sum_{n=1}^{N} \left(\tau_n^{\frac{1}{\tilde{p}}} M_n^q\right) \left(\tau_n^{\frac{1}{\tilde{q}}} \left[1 + \sum_{k=1}^{2} \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right]^q\right)$$
$$\leq C \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\tau_n^{\frac{1}{\tilde{p}}} M_n^q\right)^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\tau_n^{\frac{1}{\tilde{q}}} \left[1 + \sum_{k=1}^{2} \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right]^q\right)^{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}$$
$$= C \left(\sum_{n=1}^{N} \tau_n M_n^r\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \left(\sum_{n=1}^{N} \tau_n \left[1 + \sum_{k=1}^{2} \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right]^2\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}. \qquad (3.100)$$

Nun wollen wir uns an die Bemerkung 3.14 zurückerinnern. Aus der darin aufgeführten Ungleichung (3.68) geht hervor, dass für alle $n = 1, \ldots, N$

$$M_n^r = \left(1 + \sum_{k=1}^{2} \left[\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^n)\right\|_{L^r} + \left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^r}\right]\right)^r$$
$$\leq C \left(1 + \sum_{k=1}^{2} \left[\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^n)\right\|_{L^r}^r + \left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^r}^r\right]\right)$$

gilt. Daher können wir mit $\sum_{n=1}^{N} \tau_n = T$

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_n M_n^r \leq C \left(T + \sum_{n=1}^{N} \tau_n \sum_{k=1}^{2} \left[\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,k}^n)\right\|_{L^r}^r + \left\|U_{\varepsilon,k}^{n-1}\right\|_{L^r}^r\right]\right)$$

abschätzen, was wegen der bereits gezeigten Ungleichungen (3.86) und (3.88), bzw. wegen $U_{\varepsilon,i}^0 \in L^\infty(\Omega) \subseteq L^r(\Omega)$, beschränkt ist. Mit der gleichen Argumentation sieht man, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_n \left[1 + \sum_{k=1}^{2} \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}\right]^2 \leq C \sum_{n=1}^{N} \tau_n \left[1 + \sum_{k=1}^{2} \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}^2\right]$$
$$= C \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \tau_n \sum_{k=1}^{2} \left\|U_{\varepsilon,k}^n\right\|_{H^1}^2\right)$$

erfüllt ist, was wiederum wegen der ersten Ungleichung (3.70) beschränkt ist. Somit haben wir gemeinsam mit (3.99) und (3.100) gezeigt, dass für $i = 1, 2$

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right] \right\|_{W^{1,q}}^q \leq C \left(\sum_{n=1}^{N} \tau_n M_n^r \right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \left(\sum_{n=1}^{N} \tau_n \left[1 + \sum_{k=1}^{2} \left\| U_{\varepsilon,k}^n \right\|_{H^1} \right]^2 \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \leq C$$

gilt, was schlussendlich mit den bereits hergeleiteten Ungleichungen (3.86), (3.88) und (3.90) zu

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_n \sum_{i=1}^{2} \left[\left\| \Lambda_\varepsilon\left(U_{\varepsilon,i}^n\right) \right\|_{L^r}^r + \left\| \pi^h[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)] \right\|_{L^r}^r + \left\| U_{\varepsilon,i}^n \right\|_{L^r}^r + \left\| \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \right\|_{L^r}^r + \left\| \mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right] \right\|_{W^{1,q}}^q \right] \leq C$$

führt. Somit ist (3.71) gezeigt, und das Theorem bewiesen. □

Bemerkung 3.16. Wir haben Theorem 3.15 wie in [2] formuliert. Tatsächlich kann man in der A-priori-Abschätzung (3.70) sogar das Maximum üder $n = 0, \ldots, N$ nehmen. Einerseits gilt wegen Lemma 3.12 $\|U_{\varepsilon,i}^0\|_{L^\infty} \leq \|u_i^0\|_{L^\infty}$ und somit für $i = 1, 2$

$$\left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0), 1\right)^h \leq C \qquad \text{und} \qquad \left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{L^1} \leq \mu(\Omega) \left\|u_i^0\right\|_{L^\infty} \leq C,$$

wobei $C > 0$ unabhängig von h und ε ist. Andererseits gelten die Abschätzungen (3.78) und (3.79) im Beweis von Theorem 3.15 klarerweise auch für $n = 0$, weshalb

$$\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{2} \left\| \pi^h[U_{\varepsilon,i}^0]_- \right\|_{L^2}^2 \leq C e^{\frac{4\omega T}{\delta}} \left[1 + \left\| \nabla(\pi^h v) \right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(F_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0), 1\right)^h \right] \leq C$$

gilt.

4 Konvergenz

Im Abschnitt 2.2 haben wir für das ursprüngliche Problem (P) ein diskretes Modell ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) motiviert und im Laufe von Kapitel 3 gezeigt, dass dieses auch lösbar ist. Nun stellt sich die Frage, ob diese approximierten Lösungen auch in einem gewissen Sinn gegen Lösungen des ursprünglichen Probelms konvergieren. Mit dieser Frage wollen wir uns in diesem Kapitel beschäftigen.

Das Problem (P) ist im Grunde ein System zweier parabolischer Gleichungen, dennoch haben wir zur Vereinfachung das zeitunabhängige Modell ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) betrachtet. Daher sind alle Resultate aus Kapitel 3, also Lösbarkeit und A-priori-Abschätzungen, von der Zeitvariable $t \in [0,T]$ unabhängig. Ziel von Abschnitt 4.1 wird es sein, diese Resultate neu zu formulieren bzw. zu verallgemeinern, um Zeitabhängigkeit und erste Konvergenzresultate in zeitabhängigen Sobolevräumen zu erreichen.
In Abschnitt 4.2 zeigen wir dann, dass diese neuformulierten, diskreten Lösungen in einem gewissen Sinn schwach gegen Lösungen des ursprünglichen Problems (P) konvergieren.

4.1 Einführung der Zeitabhängigkeit und erste Konvergenzresultate

In den vorhigen Kapiteln haben wir die Zeitableitung des ursprünglichen Problems (P) also Differenzenquotienten angenähert und für jeden Zeitschritt $n = 1, \dots, N$ Lösungen $U_{\varepsilon,i}^n$ gesucht, indem wir nur den Ortsraum Ω diskretisiert haben. Um zeitlich abhängige Lösungen zu erhalten, kann man nun für $i = 1, 2$ die Funktion $U_{\varepsilon,i}^n$ geschickt zusammensetzen, indem man die benachbarten Funktionen für Indices $n-1$ und n mit Hilfe der Zeitvariablen $t \in [0,T]$ verbindet.

Definition 4.1. *Wir definieren auf* $\Omega_T := \Omega \times [0,T]$ *für* $i = 1, 2$ *die Funktionen*

$$U_{\varepsilon,i}(t) := \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \qquad t \in [t_{n-1}, t_n]\,,\ n \geq 1, \tag{4.1a}$$

sowie

$$U_{\varepsilon,i}^+(t) := U_{\varepsilon,i}^n\,, \qquad U_{\varepsilon,i}^-(t) := U_{\varepsilon,i}^{n-1} \qquad t \in (t_{n-1}, t_n]\,,\ n \geq 1 \tag{4.1b}$$

und

$$\overline{\tau}(t) := \tau_n \qquad t \in (t_{n-1}, t_n]\,,\ n \geq 1. \tag{4.1c}$$

Wenn wir zusätzlich $t_n^+ := t_n$ und $t_n^- := t_{n-1}$ definieren, kann man mit obigen Definitionen die Gleichung (4.1a) leicht auf $U_{\varepsilon,i}(t) = \frac{t-t_n^-}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^+(t) + \frac{t_n^+ - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^-(t)$, für

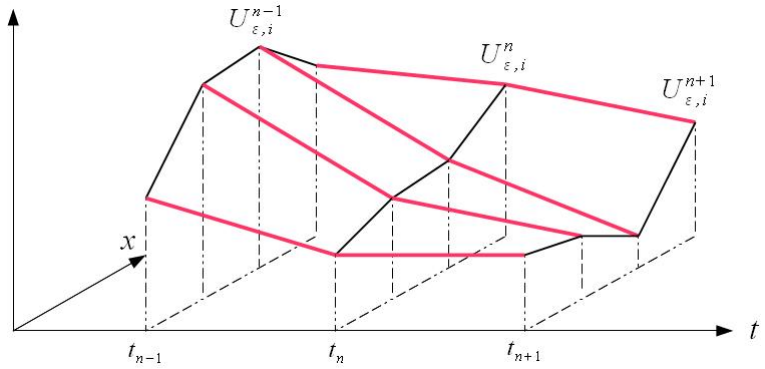

Abbildung 3: $U_{\varepsilon,i}$ für $i = 1, 2$ im Fall $d = 1$

$t \in (t_{n-1}, t_n]$, $n \geq 1$ umschreiben. Es ist auch einfach einzusehen, dass die schwache Ableitung von (4.1a) durch

$$\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} = \frac{1}{\overline{\tau}(t)} \left(U_{\varepsilon,i}^{+}(t) - U_{\varepsilon,i}^{-}(t) \right) \tag{4.2}$$

gegeben ist. Man erhält außerdem mit folgender Rechnung

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^{\pm} &= \frac{t - t_n^-}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{+} + \frac{t_n^+ - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{-} - \frac{t_n^+ - t_n^-}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{\pm} \\ &= \frac{t - t_n^{\pm}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{+} + \frac{t_n^{\pm} - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{-} = \frac{t - t_n^{\pm}}{\tau_n} \left(U_{\varepsilon,i}^{+} - U_{\varepsilon,i}^{-} \right) = (t - t_n^{\pm}) \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \end{aligned}$$

dass für $t \in (t_{n-1}, t_n)$, $n \geq 1$ die Gleichung

$$U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^{\pm} = (t - t_n^{\pm}) \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \tag{4.3}$$

erfüllt ist, welche wir später noch verwenden werden.

Wir können nun das Problem $(\mathrm{P}_{\varepsilon}^{h,\tau})$ mit Definition 4.1 und der schwachen Zeitableitung in (4.2) wie folgt umschreiben:

$(\mathbf{P}_{\varepsilon}^{h,\tau})$ Finde Funktionen $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\} \in [C([0,T]; S^h)]^2$, sodass für $i = 1, 2$, $j \neq i$ und für alle $\chi \in L^2(0,T; S^h)$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \int_0^T \Bigg[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \chi \right)^h &+ \left([c_i + 2a_i \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{+}) + \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{+})] \nabla U_{\varepsilon,i}^{+}, \nabla \chi \right) \\ &+ \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{+}) [\nabla U_{\varepsilon,j}^{+} + b_i \nabla(\pi^h v)], \nabla \chi \right) \Bigg] dt \\ = \int_0^T \left(\mu_i U_{\varepsilon,i}^{+} - [\gamma_{ii} \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{-}) + \gamma_{ij} \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^{-})] \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{+}), \chi \right)^h dt \end{aligned} \tag{4.4}$$

und

$$U_{\varepsilon,i}(.,0) = \pi^h u_i^0 \qquad \text{oder} \qquad U_{\varepsilon,i}(.,0) = \mathcal{Q}^h u_i^0.$$

4.1.1 Zeitabhängige A-priori-Abschätzungen

Wie schon erwähnt, wollen wir zeigen, dass die in Definition 4.1 neuformulierten Funktionen, welche das Problem $(\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau})$ lösen, in einem gewissen Sinn gegen Lösungen des ursprünglichen Problems (P) konvergieren. Dafür ist es hilfreich, die A-priori-Abschätzungen (3.70) und (3.71) aus Theorem 3.15 auf die Funktionen $U_{\varepsilon,i}$ für $i = 1, 2$ zu erweitern.

Lemma 4.2. *Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem 3.15. Zudem soll gelten, dass*

$$\tau_n \leq \tau_{n-1} \qquad \forall n = 1, \dots, N, \tag{4.5}$$

wobei $\tau_0 := \tau_1$, und die Anfangswerte sollen $u_i^0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $u_i^0 \geq 0$ fast überall und

$$\begin{aligned} &u_i^0 \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega),\ \beta > d \quad \text{für } U_{\varepsilon,i}^0 = \pi^h u_i^0 \text{ bzw.} \\ &u_i^0 \in H^1(\Omega) \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } U_{\varepsilon,i}^0 = \mathcal{Q}^h u_i^0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

für $i = 1, 2$ erfüllen. Dann ist für $i = 1, 2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left\| U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \varepsilon^{-1} \left\| \pi^h \left[U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right]_- \right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad + \left\| U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \left\| \pi^h \left[\lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right) \right] \right\|^r_{L^r(\Omega_T)} \\ &\quad + \left\| \lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right) \right\|^r_{L^r(\Omega_T)} + \left\| \Lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right) \right\|^r_{L^r(\Omega_T)} \\ &\quad + \left\| U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right\|^r_{L^r(\Omega_T)} + \left\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|^q_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \leq C, \end{aligned} \tag{4.7}$$

gültig, wobei $U_{\varepsilon,i}^{(\pm)}$ für die Funktionen $U_{\varepsilon,i}$, $U_{\varepsilon,i}^+$ und $U_{\varepsilon,i}^-$ stehen kann.

Um den Beweis dieses Lemmas übersichtlich zu halten, wollen wir zuerst folgendes Hilfslemma beweisen.

Hilfslemma 4.3. *Es gelte die Voraussetzung (4.5), also $\tau_n \leq \tau_{n-1}$ für alle $n = 1, \dots, N$. Sei $\pi : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ linear und $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion, welche entweder linear ist, oder die Eigenschaften*

$$l(s_1 + s_2) \leq l(s_1) + l(s_2) \qquad \text{und} \qquad l(\alpha s) \leq l(s) \tag{4.8}$$

für $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in [0, 1]$ hat.
Falls für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ eine von h und ε unabhängige Konstante $C > 0$

existiert, sodass für $i = 1, 2$

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \leq C \quad \text{und} \quad \tau_0 \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^0) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \leq C \quad \text{für } q \in [2, \infty), \tag{4.9a}$$

bzw.

$$\left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p \leq C \quad \text{für } n \geq 0 \tag{4.9b}$$

erfüllt ist, so gilt für $i = 1, 2$

$$\left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{(\pm)}) \right] \right\|_{L^q(0,T;W^{k,q}(\Omega))}^q \leq C \tag{4.10a}$$

bzw.

$$\left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{(\pm)}) \right] \right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p \leq C, \tag{4.10b}$$

wobei auch diese Konstante von h *und* ε *unabhängig ist. Falls die Funktion* π *zusätzlich die Eigenschaft* $\eta \leq 0 \Rightarrow \pi[\eta] \leq 0$ *hat, so gilt für* $i = 1, 2$ *die Inklusion*

$$\varepsilon^{-1} \left\| \pi \left[U_{\varepsilon,i}^n \right]_- \right\|_{W^{k,p}}^p \leq C \quad \text{für } n \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon^{-1} \left\| \pi \left[U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right]_- \right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p \leq C. \tag{4.11}$$

Beweis. Wir wollen zuerst (4.10a) zeigen, wofür wir die Voraussetzungen (4.9a) annehmen. Da die Funktionen $U_{\varepsilon,i}^{(\pm)}$ in (4.1a) und (4.1b) bezüglich der Zeit stückweise definiert sind, können wir die Zeitintegrale als Summen schreiben und erhalten somit für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} &\left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^+) \right] \right\|_{L^q(0,T;W^{k,q}(\Omega))}^q + \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^-) \right] \right\|_{L^q(0,T;W^{k,q}(\Omega))}^q + \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}) \right] \right\|_{L^q(0,T;W^{k,q}(\Omega))}^q \\ &\quad = \sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^+) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^-) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \end{aligned} \tag{4.12}$$

und weiter mit der Voraussetzung (4.5) und den Definitionen von $U_{\varepsilon,i}^{(\pm)}$ für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^+) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^-) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \\ &\qquad \overset{(4.5)}{\leq} \sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \sum_{n=1}^{N} \tau_{n-1} \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \\ &\qquad\quad + \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \pi \left[l \left(\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q dt. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die erste Summe ist klarerweise wegen (4.9a) beschränkt. Die zweite Summe ist ebenfalls beschränkt, denn es gilt für $i = 1, 2$

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_{n-1} \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q = \tau_0 \left\| \pi \left[l\left(U_{\varepsilon,i}^0\right) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \sum_{n=1}^{N-1} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q,$$

was wegen (4.9a) und (4.5) beschränkt ist.
Für den dritten Summanden wollen wir zunächst annehmen, dass die Funktion l linear ist. Daraus folgt, dass die Hintereinanderausführung von π und l ebenfalls linear ist. Somit würden wir wegen $|\frac{t-t_n^{\pm}}{\tau_n}| \leq 1$ und (3.68) aus Bemerkung 3.14 für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&\left\| \pi \left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \\
&\qquad = \left\| \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} \pi \left[l\left(U_{\varepsilon,i}^n\right) \right] + \frac{t_n - t}{\tau_n} \pi \left[l\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \\
&\qquad \leq \left(\left| \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} \right| \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{W^{k,q}} + \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right| \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,q}} \right)^q \\
&\qquad \overset{(3.68)}{\leq} C \left(\left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \right)
\end{aligned}$$

erhalten. Falls andererseits l die Eigenschaft (4.8) besitzt, so folgt wiederum aus (3.68) und $\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}, \frac{t_n-t}{\tau_n} \in [0, 1]$ für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&\left\| \pi \left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \\
&\qquad \leq \left\| \pi \left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n \right) \right] + \pi \left[l\left(\frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \\
&\qquad \leq \left\| \pi \left[l\left(U_{\varepsilon,i}^n\right) \right] + \pi \left[l\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \\
&\qquad \leq C \left(\left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \right).
\end{aligned}$$

Wir bekommen also in beiden Fällen die gleiche Abschätzung, was zusammen mit der Voraussetzung (4.5) an die τ_n für den dritten Summanden in (4.13) für $i = 1, 2$ zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \pi \left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q dt \\
&\qquad = C \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q dt \\
&\qquad \leq C \left(\sum_{n=1}^{N} \tau_n \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q + \sum_{n=1}^{N} \tau_{n-1} \left\| \pi \left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,q}}^q \right),
\end{aligned}$$

führt. Daraus folgt, dass auch dieser wegen (4.9a) beschränkt ist. Kombiniert mit

(4.12) und (4.13) folgt daher die Exisitenz einer Konstanten $C > 0$, sodass

$$\begin{aligned}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{+})\right]\right\|_{L^q(0,T;W^{k,q}(\Omega))}^q + \left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{-})\right]\right\|_{L^q(0,T;W^{k,q}(\Omega))}^q \\ + \left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i})\right]\right\|_{L^q(0,T;W^{k,q}(\Omega))}^q \leq C\end{aligned}$$

für $i = 1, 2$ erfüllt ist. Damit ist (4.10a) gezeigt.

Wir wollen nun (4.10b) beweisen, wofür wir die Bedingungen in (4.9b) annehmen. Da die Funktionen $U_{\varepsilon,i}^{\pm}$ bzw. $U_{\varepsilon,i}$ für jedes $t \in (0,T]$ bzw. $t \in [0,T]$ definiert sind, können wir statt dem essentiellen Supremum sogar das Supremum über die Zeit nehmen. Wir erhalten somit wegen der stückweisen Definition der Funktionen $U_{\varepsilon,i}^{(\pm)}$ bezüglich der Zeit für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}&\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{+})\right]\right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p + \left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{-})\right]\right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p \\ &\qquad + \left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i})\right]\right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p \\ &= \sup_{t\in[0,T]}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{+})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p + \sup_{t\in[0,T]}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{-})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p + \sup_{t\in[0,T]}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p \\ &= \max_{n=1,\dots,N}\sup_{t\in(t_{n-1},t_n]}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p + \max_{n=1,\dots,N}\sup_{t\in(t_{n-1},t_n]}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p \\ &\qquad + \max_{n=1,\dots,N}\sup_{t\in[t_{n-1},t_n]}\left\|\pi\left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}U_{\varepsilon,i}^{n} + \frac{t_n-t}{\tau_n}U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right)\right]\right\|_{W^{k,p}}^p.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Da die Funktionen $U_{\varepsilon,i}^{n}$ und $U_{\varepsilon,i}^{n-1}$ für $i = 1, 2$ unabhängig von der Zeit sind, können wir bei den ersten zwei Summanden $\sup_{t\in(t_{n-1},t_n]}$ weglassen. Da außerdem wegen der Voraussetzung (4.9b) für alle $n = 0, \dots, N$ die Abschätzung $\left\|\pi[l(U_{\varepsilon,i}^{n})]\right\|_{W^{k,p}}^p \leq C$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\max_{n=1,\dots,N}\sup_{t\in(t_{n-1},t_n]}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p + \max_{n=1,\dots,N}\sup_{t\in(t_{n-1},t_n]}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p \\ &\qquad = \max_{n=1,\dots,N}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p + \max_{n=1,\dots,N}\left\|\pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1})\right]\right\|_{W^{k,p}}^p \leq C,\end{aligned} \tag{4.15}$$

woraus die Beschränktheit der ersten zwei Summanden folgt.
Für den dritten Summanden nehmen wir zunächst an, dass l linear ist. Wie im ersten Teil des Beweises bemerken wir, dass dann auch $\pi \circ l$ linear sein muss. Daher erhalten wir, ähnlich wie vorhin, mit (3.68) aus Bemerkung 3.14 und $|\frac{t-t_n^{\pm}}{\tau_n}| \leq 1$ für den dritte

Summanden und $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&\max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in[t_{n-1},t_n]} \left\| \pi\left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p \\
&\quad = \max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in[t_{n-1},t_n]} \left\| \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} \pi\left[l\left(U_{\varepsilon,i}^n \right) \right] + \frac{t_n - t}{\tau_n} \pi\left[l\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p \\
&\quad \le \max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in[t_{n-1},t_n]} \left(\left| \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} \right| \left\| \pi\left[l\left(U_{\varepsilon,i}^n \right) \right] \right\|_{W^{k,p}} + \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right| \left\| \pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,p}} \right)^p \\
&\quad \overset{(3.68)}{\le} \max_{n=1,\dots,N} C \left(\left\| \pi\left[l\left(U_{\varepsilon,i}^n \right) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p + \left\| \pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p \right) \overset{(4.9b)}{\le} C.
\end{aligned}$$

Falls jedoch l die Eigenschaften in (4.8) haben sollte, so bekommen wir wegen $\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} \in [0,1]$ und $\frac{t_n - t}{\tau_n} \in [0,1]$ für $t \in [t_{n-1}, t_n]$ trotzdem die gleiche Abschätzung durch

$$\begin{aligned}
&\max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in[t_{n-1},t_n]} \left\| \pi\left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p \\
&\qquad \le \max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in[t_{n-1},t_n]} \left\| \pi\left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n \right) \right] + \pi\left[l\left(\frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p \\
&\qquad \le \max_{n=1,\dots,N} \left(\left\| \pi\left[l\left(U_{\varepsilon,i}^n \right) \right] \right\|_{W^{k,p}} + \left\| \pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,p}} \right)^p \\
&\qquad \overset{(3.68)}{\le} \max_{n=1,\dots,N} C \left(\left\| \pi\left[l\left(U_{\varepsilon,i}^n \right) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p + \left\| \pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p \right) \overset{(4.9b)}{\le} C.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir in beiden Fällen für den dritten Summanden in (4.14)

$$\max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in[t_{n-1},t_n]} \left\| \pi\left[l\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right) \right] \right\|_{W^{k,p}}^p \le C. \tag{4.16}$$

Wenn wir nun die Punkte (4.14)-(4.16) zusammenfügen, erhalten wir die Existenz einer Konstante $C > 0$, sodass

$$\begin{aligned}
&\left\| \pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^+) \right] \right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p + \left\| \pi\left[l(U_{\varepsilon,i}^-) \right] \right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p \\
&\qquad + \left\| \pi\left[l(U_{\varepsilon,i}) \right] \right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p \le C.
\end{aligned}$$

Wir kommen nun zu (4.11), wobei dieser Punkt ähnlich wie (4.10b) zu zeigen ist. Für die Funktionen $U_{\varepsilon,i}^{(\pm)}$ erhalten wir, genau wie in (4.14), für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1} \left\| \pi\left[U_{\varepsilon,i}^+ \right]_- \right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p + \varepsilon^{-1} \left\| \pi\left[U_{\varepsilon,i}^- \right]_- \right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p \\
&\qquad + \varepsilon^{-1} \left\| \pi\left[U_{\varepsilon,i} \right]_- \right\|_{L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))}^p \\
&\quad = \max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in(t_{n-1},t_n]} \varepsilon^{-1} \left\| \pi\left[U_{\varepsilon,i}^n \right]_- \right\|_{W^{k,p}}^p + \max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in(t_{n-1},t_n]} \varepsilon^{-1} \left\| \pi\left[U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right]_- \right\|_{W^{k,p}}^p \\
&\qquad + \max_{n=1,\dots,N} \sup_{t\in[t_{n-1},t_n]} \varepsilon^{-1} \left\| \pi\left[\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right]_- \right\|_{W^{k,p}}^p,
\end{aligned}$$

wobei die ersten beiden Summanden exakt wie in (4.15) abgeschätzt werden können, wenn man $l(.)$ durch $[.]_-$ ersetzt. Für den dritten Summanden bekommen wir wegen $-[U_{\varepsilon,i}^n + U_{\varepsilon,i}^{n-1}]_- \leq -[U_{\varepsilon,i}^n]_- - [U_{\varepsilon,i}^{n-1}]_-$, der zusätzlichen Eigenschaft von π und $\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}$, $\frac{t_n-t}{\tau_n} \in [0,1]$ für $t \in [t_{n-1}, t_n]$

$$\begin{aligned}\left|\pi\left[\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n-t}{\tau_n}U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right]_-\right| &= -\pi\left[\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n-t}{\tau_n}U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right]_- \\ &\leq -\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\pi\left[U_{\varepsilon,i}^n\right]_- - \frac{t_n-t}{\tau_n}\pi\left[U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right]_- \leq \left|\pi\left[U_{\varepsilon,i}^n\right]_-\right| + \left|\pi\left[U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right]_-\right|\end{aligned}$$

für $i = 1, 2$. Diese Abschätzung führt nun für $i = 1, 2$ zu

$$\begin{aligned}&\max_{n=1,\dots,N}\sup_{t\in[t_{n-1},t_n]}\varepsilon^{-1}\left\|\pi\left[\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}U_{\varepsilon,i}^n + \frac{t_n-t}{\tau_n}U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right]_-\right\|_{W^{k,p}}^p \\ &\qquad \overset{(3.68)}{\leq} \max_{n=1,\dots,N}\varepsilon^{-1}C\left(\left\|\pi\left[U_{\varepsilon,i}^n\right]_-\right\|_{W^{k,p}}^p + \left\|\pi\left[U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right]_-\right\|_{W^{k,p}}^p\right),\end{aligned}$$

wobei die rechte Seite wegen der Voraussetzung beschränkt ist. □

Wir kommen nun zum Beweis von Lemma 4.2.

Beweis von Lemma 4.2. Zu Beginn stellen wir fest, dass es für $i = 1, 2$ eine von u_i^0 und Ω abhängige Konstante $C > 0$ gibt, sodass

$$\left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{H^1}^2 \leq C \qquad \text{und} \qquad \left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{L^r} \leq C\left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{L^\infty} \leq C \tag{4.17a}$$

erfüllt ist, da dies wegen der Voraussetzungen an die Anfangswerte in (4.6) sofort aus den Punkten (3.64a) bzw. (3.64b) aus Lemma 3.12 folgt. Daraus folgt mit Punkt (2.16) aus Bemerkung 2.6, dass auch für $i = 1, 2$

$$\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right\|_{H^1}^2 + \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right\|_{L^\infty} \leq C$$

gilt, wobei diese Konstante von den Werten $\|U_{\varepsilon,i}^0\|_{H^1}^2$ und $\|U_{\varepsilon,i}^0\|_{L^\infty}$, also insbesondere wegen (4.17a) nur von u_i^0 und Ω, abhängt. Daher ist diese Konstante C unabhängig von h und ε. Wir erhalten also für $i = 1, 2$ wegen $L^\infty(\Omega) \subseteq L^r(\Omega)$

$$\begin{aligned}&\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right\|_{L^r} \leq C\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right\|_{L^\infty} \leq C \qquad \text{bzw.} \\ &\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right]\right\|_{L^r} \leq C\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right]\right\|_{L^\infty} \leq C\left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right\|_{L^\infty} \leq C.\end{aligned} \tag{4.17b}$$

Wegen (4.17a) und (3.8)b existiert also eine von h und ε unabhängige Konstante $C > 0$, sodass für kleines τ_0 und $i = 1, 2$

$$\tau_0\left(\left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{H^1}^2 + \left\|U_{\varepsilon,i}^0\right\|_{L^r}^r + \left\|\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right\|_{L^r}^r + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^0)\right]\right\|_{L^r}^r\right) \leq C \tag{4.18}$$

gilt. Außerdem haben wir wegen der Abschätzungen (3.70), (3.71) und Bemerkung

3.16 aus dem letzten Kapitel für $i = 1, 2$

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_n \Bigg[\left\| U_{\varepsilon,i}^n \right\|_{H^1}^2 + \left\| \pi^h [\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n)] \right\|_{L^r}^r + \left\| U_{\varepsilon,i}^n \right\|_{L^r}^r + \left\| \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \right\|_{L^r}^r + \left\| \mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n} \right] \right\|_{W^{1,q}}^q \Bigg] \leq C \tag{4.19a}$$

bzw.

$$\varepsilon^{-1} \left\| \pi^h [U_{\varepsilon,i}^n]_- \right\|_{L^2}^2 + \left\| U_{\varepsilon,i}^n \right\|_{L^1} \leq C \qquad \text{für } n \geq 0 \tag{4.19b}$$

Wir bemerken zusätzlich, dass die Funktionen $\pi^h, I_{C(\overline{\Omega})} : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ linear sind. Klarerweise ist auch die Identität auf den reellen Zahlen $I_{\mathbb{R}}$ linear und $\lambda_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt wegen (2.15) aus Bemerkung 2.6 die Eigenschaften (4.8) aus dem Hilfslemma 4.3. Daher können wir dieses Hilfslemma auf die Funktionen

$$U_{\varepsilon,i}^{(\pm)}, \quad \pi^h \left[U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right]_-, \quad \lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right) \quad \text{und} \quad \pi^h \left[\lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right) \right]$$

anwenden und erhalten für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} &\left\| U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \varepsilon^{-1} \left\| \pi^h \left[U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right]_- \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + \left\| U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \left\| \lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right) \right\|_{L^r(\Omega_T)}^r \\ &\quad + \left\| \pi^h \left[\lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right) \right] \right\|_{L^r(\Omega_T)}^r + \left\| U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right\|_{L^r(\Omega_T)}^r \leq C, \end{aligned} \tag{4.20}$$

da die Bedingungen (4.9a), (4.9b) und (4.11) wegen der Abschätzungen (4.18), (4.19a) und (4.19b) erfüllt sind. Um die gewünschte Abschätzung (4.7) zu erhalten, bleibt noch

$$\left\| \Lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right) \right\|_{L^r(\Omega_T)}^r + \left\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}^n}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))}^q \leq C, \tag{4.21}$$

zu zeigen. Wir haben im letzten Beweis des vorherigen Kapitels in (3.85) gesehen, dass für $i = 1, 2$

$$\left\| \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \right\|_{L^r}^r \leq \left\| \pi^h \left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{L^r}^r$$

gilt, daher erhalten wir für den ersten Summanden in (4.21) und der punktweisen Definition der Funktionen $U_{\varepsilon,i}^{\pm}$

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right) \right\|_{L^r(\Omega_T)}^r &= \sum_{i=1}^{N} \tau_n \left\| \Lambda_\varepsilon \left(U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right) \right\|_{L^r}^r \leq \begin{cases} \sum_{i=1}^N \tau_n \left\| \pi^h \left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^n) \right] \right\|_{L^r}^r & \text{für } U_{\varepsilon,i}^+ \\ \sum_{i=1}^N \tau_n \left\| \pi^h \left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{n-1}) \right] \right\|_{L^r}^r & \text{für } U_{\varepsilon,i}^- \end{cases} \\ &= \left\| \pi^h \left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \right] \right\|_{L^r(\Omega_T)}^r, \end{aligned}$$

was wegen des bereits gezeigten Punktes (4.20) beschränkt ist. Für die Abschätzung des zweiten Summanden gilt mit $\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_n}\left(U_{\varepsilon,i}^+(t) - U_{\varepsilon,i}^-(t)\right)$ aus (4.2) für $i = 1, 2$

$$\left\|\mathcal{G}\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\right\|^q_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} = \sum_{n=1}^N \tau_n \left\|\mathcal{G}\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\right\|^q_{W^{1,q}} = \sum_{n=1}^N \tau_n \left\|\mathcal{G}\left[\frac{U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1}}{\tau_n}\right]\right\|^q_{W^{1,q}}.$$

Nun ist wegen (4.19a) auch diese Summe beschränkt, womit (4.7) schlussendlich gezeigt ist. □

4.1.2 Erste Konvergenzresultate

Die in Lemma 4.2 gezeigten Abschätzungen können wir nun für erste Konvergenzresultate heranziehen, denn wie aus der Funktionalanalysis bekann ist, haben in reflexiven Banachräumen beschränkte Folgen schwach konvergente Teilfolgen. Interessant wird daher vor allem die Identifikation der einzelnen Grenzwerte sein. Wie wir im Beweis des folgenden Lemmas sehen werden, spielt bei der Identifikation der Zeitableitung mit den restlichen Grenzwerten der Operator $\mathcal{G}$ eine entscheidende Rolle.

Lemma 4.4. *Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem 3.15 und Lemma 4.2. Es seien außerdem* $\{\mathcal{T}^h, \{\tau_n\}_{n=1}^N, \varepsilon\}_{h>0}$ *so gewählt, dass*

$$\tau := \max_{n=1,\dots,N} \tau_n \xrightarrow{h\to 0} 0 \qquad \text{und} \qquad \varepsilon h^{-\frac{d}{d+1}} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Dann existieren Teilfolgen $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\}_{h'>0}$ *von* $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\}_{h>0}$*, wobei* $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\}_{h>0}$ *das Problem* $(P_\varepsilon^{h,\tau})$ *löst, und Funktionen*

$$u_i \in L^2\left(0,T; H^1_{\geq 0}(\Omega)\right) \cap L^r(\Omega_T) \cap W^{1,q}\left(0,T; \left(W^{1,q'}(\Omega)\right)'\right) \tag{4.22}$$

mit $u_i(\cdot,0) = u_i^0$ *in* $(W^{1,q'}(\Omega))'$ *für* $i = 1, 2$*, wobei* $r = \frac{2(d+1)}{d}$, $q = \frac{2(d+1)}{2d+1}$ *und* $q' = 2(d+1)$*, sodass für* $h' \to 0$ *und* $\varepsilon \to 0$ *gilt:*

$$U_{\varepsilon,i}, U_{\varepsilon,i}^\pm \rightharpoonup u_i \qquad \text{in } L^2\left(0,T; H^1(\Omega)\right) \cap L^r(\Omega_T), \tag{4.23a}$$

$$\mathcal{G}\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \rightharpoonup \mathcal{G}\frac{\partial u_i}{\partial t} \qquad \text{in } L^q\left(0,T; W^{1,q}(\Omega)\right), \tag{4.23b}$$

$$U_{\varepsilon,i}, U_{\varepsilon,i}^\pm \to u_i \qquad \text{in } L^2\left(0,T; L^s(\Omega)\right), \tag{4.23c}$$

$$\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^\pm),\ \pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^\pm)\right] \to u_i \qquad \text{in } L^2\left(0,T; L^r(\Omega)\right), \tag{4.23d}$$

$$\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^\pm) \to u_i\mathcal{I} \qquad \text{in } L^2\left(0,T; L^r(\Omega)\right). \tag{4.23e}$$

Für $s \geq r$ *gilt* $s \in [4,\infty]$ *falls* $d = 1$*,* $s \in [3,\infty)$ *falls* $d = 2$ *und* $s \in [\frac{8}{3}, 6)$ *falls* $d = 3$*.*

Bemerkung 4.5. Die Schranken von s sind so gewählt, dass für alle Dimensionen $d = 1, \dots, 3$ die Ungleichungen $1 - \frac{d}{2} > -\frac{d}{s}$ und $s \geq r \geq 2$ erfüllt sind. Daher gelten

die Einbettungen

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega) \quad \text{und} \quad L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Man erhält sogar, dass die erste Einbettung kompakt ist.

Beweis von Lemma 4.4.

Wir wollen nun aus den Abschätzungen in (4.7) die Konvergenzresultate (4.23a-c) zeigen. Wie bereits bemerkt, gelten die Einbettungen $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ und da $q' > 2$ gilt, bekommen wir zusätzlich die Einbettung $W^{1,q'}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$. Wenn wir die Dualräume betrachten, erhalten wir also die Einbettung $L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))' \hookrightarrow (W^{1,q'}(\Omega))'$ und somit zusammen mit $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega) \hookrightarrow \left(W^{1,q'}(\Omega)\right)',$$

wobei die erste Einbettung sogar kompakt ist. Somit folgt aus der Einbettung in (1.10), welche wir im ersten Kapitel unter dem Lemma von Aubin angegeben haben, dass die Einbettung

$$\left\{\eta \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) : \frac{\partial \eta}{\partial t} \in L^1\left(0,T;\left(W^{1,q'}(\Omega)\right)'\right)\right\} \hookrightarrow L^2\left(0,T;L^s(\Omega)\right) \quad (4.24)$$

kompakt ist. Wir wissen bereits aus Proposition 2.13, Punkt (2.45), dass für alle $z \in (W^{1,q'}(\Omega))'$ die Ungleichung $\|z\|_{(W^{1,q'})'} \leq C\|\mathcal{G}z\|_{W^{1,q}}$ gilt. Somit gilt also für $i = 1, 2$

$$\left\|\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\right\|_{L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} \leq C\left\|\mathcal{G}\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \overset{(4.7)}{\leq} C$$

und daher insbesondere die Abschätzung (q ist ja in $(1,2]$)

$$\left\|\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\right\|_{L^1(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} \leq C.$$

Wir erhalten also zusammen mit (4.7), dass für $i = 1, 2$

$$U_{\varepsilon,i} \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \in L^1\left(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))'\right)$$

Daher folgt aus der kompakten Einbettung in (4.24) die Existenz zweier Funktionen u_1, u_2 und einer Teilfolge h' von h, sodass

$$U_{\varepsilon,i} \xrightarrow{h' \to 0} u_i \qquad \text{in } L^2\left(0,T;L^s(\Omega)\right). \quad (4.25)$$

Nun wollen wir versuchen, dieses starke Konvergenzresultat auch für die Funktionen $U^{\pm}_{\varepsilon,i}$ zu erreichen. Wir betrachten also für $i = 1, 2$

$$\left\|u_i - U^{\pm}_{\varepsilon,i}\right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \leq \|u_i - U_{\varepsilon,i}\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} + \left\|U_{\varepsilon,i} - U^{\pm}_{\varepsilon,i}\right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))}, \quad (4.26)$$

wobei der erste Summand klarerweise wegen (4.25) gegen Null für $h' \to 0$ konvergiert. Die Konvergenz des zweiten Summanden ist etwas trickreicher. Um diese zu erhalten, werden wir, ähnlich wie vorhin, das Lemma von Aubin anwenden. Da leider die Differenz $U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^{\pm}$ für $i = 1, 2$ unstetig ist, und daher die Zeitableitung nicht beschränkt ist (zumindest nicht in einem für uns brauchbaren Sinn), schieben wir noch eine regularisierende Funktion ein. Wir betrachten also für $U_{\varepsilon,i}^{+}$ (für $U_{\varepsilon,i}^{-}$ gilt eine analoge Rechnung) und $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}\left\|U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^{+}\right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} &\leq \left\|U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^{+})\right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \\ &\quad + \left\|\Theta(U_{\varepsilon,i}^{+}) - U_{\varepsilon,i}^{+}\right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \end{aligned} \tag{4.27}$$

mit

$$\Theta(U_{\varepsilon,i}^{+}) := \begin{cases} \frac{t-t_{n-1}}{\delta_{k,n}} U_{\varepsilon,i}^{n} + \frac{(t_{n-1}+\delta_{k,n})-t}{\delta_{k,n}} U_{\varepsilon,i}^{n-1} & t \in [t_{n-1}, t_{n-1}+\delta_{k,n}),\ n \geq 1, \\ U_{\varepsilon,i}^{n} & t \in [t_{n-1}+\delta_{k,n}, t_n],\ n \geq 1, \end{cases}$$

wobei $\delta_{k,n} := \frac{\tau_n}{k}$ und $k \geq 2$ beliebig ist. Wie man nun leicht sieht, ist die Funktion $\Theta(U_{\varepsilon,i}^{+})$ (und somit auch $U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^{+})$) stetig bezüglich der Zeit, da wir die Sprungstellen durch lineare Interpolation überbrückt haben. Außerdem ist diese Funktion für große k auf einem Großteil des Zeitintervalls identisch gleich $U_{\varepsilon,i}^{+}$.
Für den ersten Summanden von (4.27) erhalten wir mit festem $k \geq 2$ und der Definition von $U_{\varepsilon,i}$ in (4.1a) für $i = 1, 2$

$$U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^{+}) = \begin{cases} (1-k)\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\left(U_{\varepsilon,i}^{n} - U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right) & t \in [t_{n-1}, t_{n-1}+\delta_{k,n}),\ n \geq 1, \\ \frac{t-t_n}{\tau_n}\left(U_{\varepsilon,i}^{n} - U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right) & t \in [t_{n-1}+\delta_{k,n}, t_n],\ n \geq 1. \end{cases} \tag{4.28}$$

Daher sehen wir mit $|\frac{t-t_n^{\pm}}{\tau_n}| \leq 1$ für $t \in [t_{n-1}, t_n]$, $n \geq 1$, und (4.7), dass $U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^{+}) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Für die schwache Ableitung bezüglich der Zeit sieht man nun, dass für $i = 1, 2$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^{+})\right) = \begin{cases} (1-k)\frac{1}{\tau_n}\left(U_{\varepsilon,i}^{n} - U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right) & t \in [t_{n-1}, t_{n-1}+\delta_{k,n}),\ n \geq 1, \\ \frac{1}{\tau_n}\left(U_{\varepsilon,i}^{n} - U_{\varepsilon,i}^{n-1}\right) & t \in [t_{n-1}+\delta_{k,n}, t_n],\ n \geq 1 \end{cases}$$

gilt. Man erkennt also leicht, dass die Funktion $\frac{\partial}{\partial t}\left(U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^{+})\right)$ für festes $k \geq 2$ beschränkt in $L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ (und somit insbesondere in $L^1(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$) ist, denn es gilt wegen (4.2) für $i = 1, 2$ die Gleichung

$$\frac{1}{\overline{\tau}(t)}\left(U_{\varepsilon,i}^{+}(t) - U_{\varepsilon,i}^{-}(t)\right) = \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}$$

und wegen der Eigenschaft (2.45) von $\mathcal{G}$ und (4.7) weiter

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\overline{\tau}(t)}\left(U_{\varepsilon,i}^{+}(t) - U_{\varepsilon,i}^{-}(t)\right)\right\|_{L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} &= \left\|\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\right\|_{L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} \\ &\leq \left\|\mathcal{G}\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \leq C. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass für beliebiges $k \geq 2$ und $i = 1, 2$

$$U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^+) \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial t}\left(U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^+)\right) \in L^1\left(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))'\right)$$

gilt, woraus aus der kompakten Einbettung in (4.24) die Existenz von Funktionen $\beta_{k,i}$ und einer Teilfolge h' (o.B.d.A die gleiche wie in (4.25)) folgt, sodass für $i = 1, 2$

$$U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^+) \xrightarrow{h' \to 0} \beta_{k,i} \qquad \text{in } L^2\left(0,T;L^s(\Omega)\right).$$

Wir wollen nun zeigen, dass für alle $k \geq 2$ und $i = 1, 2$ die Funktionen $\beta_{k,i} = 0$ erfüllen, indem wir die Konvergenz $U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^+) \rightharpoonup 0$ in $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ für $h' \to 0$ beweisen ($\beta_{k,i} = 0$ folgt dann aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes). Wenn wir die Gleichung (4.28) mit $U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^+ = \frac{t-t_n}{\tau_n}(U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1})$ bzw. $U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^- = \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}(U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1})$ für $t \in (t_{n-1}, t_n]$, $n \geq 1$, vergleichen, sieht man, dass die schwache Konvergenz von $U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^+) \rightharpoonup 0$ aus der schwachen Konvergenz von $U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^\pm \rightharpoonup 0$ in $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ folgt. Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass wegen (4.7) die Differenz $U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^\pm$ beschränkt in $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ ist, denn sogar die einzelnen Terme $U_{\varepsilon,i}$ und $U_{\varepsilon,i}^\pm$ sind in diesem Raum beschränkt. Da in reflexiven Banachräumen beschränkte Folgen eine schwach konvergente Teilfolge besitzen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Teilfolge h' so wählen, dass $U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^\pm$ schwach in $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ konvergiert. Außerdem wissen wir wegen der Darstellung $U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^\pm = (t - t_n^\pm)\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}$ für $t \in (t_{n-1}, t_n)$ und $n \geq 1$ aus (4.3) und wegen (2.45), dass für $i = 1, 2$

$$\left\|U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^\pm\right\|_{L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} \leq \left\|\mathcal{G}\left[U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^\pm\right]\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \leq C\tau \left\|\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\right\| \overset{(4.7)}{\leq} C\tau$$

gilt, also konvergiert die Differenz $U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^\pm$ stark (also insbesondere auch schwach) gegen Null in $L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$. Da aber die schwache Konvergenz in Sobolevräumen nichts anderes als die distributionelle Konvergenz im Distributionenraum ist und dort die Grenzwerte eindeutig sind, muss sogar für $i = 1, 2$ $h' \to 0$

$$U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^\pm \rightharpoonup 0 \qquad \text{in } L^2\left(0,T;L^s(\Omega)\right)$$

gelten. Wir haben also mit obiger Argumentation gezeigt, dass für beliebiges $k \geq 2$ und $i = 1, 2$

$$U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^+) \xrightarrow{h' \to 0} 0 \qquad \text{in } L^2\left(0,T;L^s(\Omega)\right), \tag{4.29}$$

daher verschwindet der erste Summand von (4.27) mit $h' \to 0$.
Der zweite Summand von (4.27) ist nun für beliebiges $k \geq 2$ beschränkt, denn es gilt für $n \geq 1$ und $i = 1, 2$

$$\frac{t - t_{n-1}}{\delta_{k,n}} U_{\varepsilon,i}^n + \frac{(t_{n-1} + \delta_{k,n}) - t}{\delta_{k,n}} U_{\varepsilon,i}^{n-1} - U_{\varepsilon,i}^n = \frac{(t_{n-1} + \delta_{k,n}) - t}{\delta_{k,n}}\left(U_{\varepsilon,i}^{n-1} - U_{\varepsilon,i}^n\right)$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\left\|\Theta(U_{\varepsilon,i}^+) - U_{\varepsilon,i}^+\right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \\
&\qquad = \left(\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+\delta_{k,n}} \left| \frac{(t_{n-1}+\delta_{k,n}) - t}{\delta_{k,n}} \right|^2 dt}_{=\frac{1}{3}\delta_{k,n} = \frac{1}{3k}\tau_n} \left\| U_{\varepsilon,i}^n - U_{\varepsilon,i}^{n-1} \right\|_{L^s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad = \frac{1}{3k} \left\| U_{\varepsilon,i}^+ - U_{\varepsilon,i}^- \right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \overset{(4.7)}{\leq} \frac{C}{k}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Wir können nun beide Summanden von (4.27) kombinieren und erhalten aus (4.27), (4.29) und (4.30) für $k \geq 2$ und $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h' \to 0} \left\| U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^+ \right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \\
&\qquad \leq \lim_{h' \to 0} \left(\left\| U_{\varepsilon,i} - \Theta(U_{\varepsilon,i}^+) \right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} + \left\| \Theta(U_{\varepsilon,i}^+) - U_{\varepsilon,i}^+ \right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \right) \leq \frac{C}{k}.
\end{aligned}$$

Da $k \geq 2$ beliebig gewählt war, folgt mit $k \to \infty$ für $i = 1, 2$

$$U_{\varepsilon,i} - U_{\varepsilon,i}^+ \xrightarrow{h' \to 0} 0 \qquad \text{in } L^2\left(0, T; L^s(\Omega)\right).$$

Wie schon erwähnt, erhält man für $U_{\varepsilon,i}^-$ durch analoge Rechnung das gleiche Resultat, womit wir zusammen mit (4.26) und der bereits gezeigten Konvergenz in (4.25) für $i = 1, 2$

$$U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \xrightarrow{h' \to 0} u_i \qquad \text{in } L^2\left(0, T; L^s(\Omega)\right)$$

erreichen. Damit ist das erste Konvergenzresultat (4.23c) für die Teilfolge h' gezeigt.

Als nächstes sehen wir, dass wegen der Abschätzung (4.7) die Funktionen $U_{\varepsilon,i}$ und $U_{\varepsilon,i}^{\pm}$ in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ und $L^r(\Omega_T)$ beschränkt sind. Da in reflexiven Banachräumen beschränkte Folgen eine schwach konvergente Teilfolge besitzen, können wir ohne Beschränktheit der Allgemeinheit die Teilfolge h' so wählen, dass für $i = 1, 2$

$$U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \rightharpoonup u_i^{(\pm),1} \quad \text{in } L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right) \text{ und} \tag{4.31a}$$

$$U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \rightharpoonup u_i^{(\pm),2} \quad \text{in } L^r\left(\Omega_T\right), \tag{4.31b}$$

für $h' \to 0$. Wegen der Wahl von s gilt $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \subseteq L^2(0,T;L^s(\Omega))$, woraus folgt, dass jedes Funktional ι auf $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ ebenfalls ein Funktional auf $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ ist. Wir wollen nun mit $\langle ., . \rangle$ die Dualitätsklammer auf $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ bezeichnen. Dann gilt für jedes Funktional ι auf $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ und $i = 1, 2$

$$\left\langle \iota, u_i^{(\pm),1} - u_i \right\rangle = \left\langle \iota, u_i^{(\pm),1} - U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right\rangle + \left\langle \iota, U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} - u_i \right\rangle.$$

Da die rechte Seite wegen der Resultate (4.31a) und (4.23c) gegen Null konvergiert (aus starker Konvergenz folgt bekannterweise schwache Konvergenz), müssen alle

Funktionen $u_i^{(\pm),1}$ für $i = 1, 2$ mit u_i in $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ übereinstimmen.
Analog folgt für jedes Funktional ι auf $L^r(\Omega_T) \cap L^2(0,T;L^s(\Omega))$ und der dazu entsprechenden Dualitätsklammer, dass

$$\left\langle \iota, u_i^{(\pm),2} - u_i \right\rangle = \left\langle \iota, u_i^{(\pm),2} - U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \right\rangle + \left\langle \iota, U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} - u_i \right\rangle \xrightarrow{h' \to 0} 0.$$

Streng genommen haben wir gezeigt, dass $U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \rightharpoonup u_i$ in $L^r(\Omega_T) \cap L^2(0,T;L^s(\Omega))$, da ja die Funktionale nur auf dem Schnitt definiert sind. Da aber die schwache Konvergenz in Sobolevräumen nichts anderes als die distributionelle Konvergenz im Distributionenraum ist und dort die Grenzwerte eindeutig sind, muss schon $U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} \rightharpoonup u_i$ in $L^r(\Omega_T)$ gelten. Somit gilt zusammen mit (4.31a-b) sogar, dass

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} &\rightharpoonup u_i \quad \text{in } L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \text{ und} \\ U_{\varepsilon,i}^{(\pm)} &\rightharpoonup u_i \quad \text{in } L^r\left(\Omega_T\right), \end{aligned}$$

womit auch die Konvergenzresultate in (4.23a) für die Teilfolge h' bewiesen sind.

Wir wollen nun das Konvergenzresultat (4.23b) zeigen, also die schwache Konvergenz von $\mathcal{G}\frac{\partial u_{\varepsilon,i}}{\partial t}$ gegen $\mathcal{G}\frac{\partial u_i}{\partial t}$ in $L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$ für $i = 1, 2$. Wir wissen bereits aus Proposition 2.13, Punkt (2.45), dass für alle $z \in (W^{1,q'}(\Omega))'$ die Ungleichung $\|z\|_{(W^{1,q'})'} \le C\|\mathcal{G}z\|_{W^{1,q}}$ gilt. Somit gilt also für $i = 1, 2$

$$\left\| \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} \le C \left\| \mathcal{G}\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \overset{(4.7)}{\le} C.$$

Daher existieren für $i = 1, 2$ Funktionen β_i und eine Teilfolge h', sodass für $i = 1, 2$

$$\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \rightharpoonup \beta_i \quad \text{in } L^q\left(0,T;\left(W^{1,q'}(\Omega)\right)'\right) \tag{4.32}$$

mit $h' \to 0$, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass die Teilfolge h' die gleiche ist, wie jene in den vorherigen Konvergenzresultaten. Um nun das gewünschte Konvergenzresultat (4.23b) zu erhalten, müssen wir zeigen, dass $\beta_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ in $L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ für $i = 1, 2$, was äquivalent zu

$$\int_0^T \langle \beta_i, \varphi \rangle_{q'} \, dt = -\int_0^T \left\langle u_i, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle_{q'} dt \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty\left(0,T;W^{1,q'}(\Omega)\right) \tag{4.33}$$

ist. Klarerweise ist die Funktion $\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}$ für $i = 1, 2$ und alle $n = 1, \dots, N$ auch in $L^1(\Omega_T)$ enthalten, da Ω_T beschränkt ist. Somit gilt für $\varphi \in C_0^\infty(0,T;W^{1,q'}(\Omega)) \subseteq C_0^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ wegen des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{q'} &= \int_\Omega \int_0^T \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \, \varphi \, dt dx = -\int_\Omega \int_0^T U_{\varepsilon,i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dt dx + \int_\Omega \underbrace{[U_{\varepsilon,i}\varphi]_0^T}_{=0} dx \\ &= -\int_0^T \int_\Omega U_{\varepsilon,i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx dt. \end{aligned}$$

Wenn wir nun den Grenzwert $h' \to 0$ bilden, so gilt für $i = 1, 2$ einerseits wegen (4.32) und andererseits wegen der schon bekannten schwachen Konvergenz von $U_{\varepsilon,i}$ gegen u_i in $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ aus (4.23c)

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^T \left\langle \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{q'} dt = -\int_0^T \int_\Omega U_{\varepsilon,i} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dxdt & & \\ \Big\downarrow (4.32) & & \Big\downarrow (4.23c) \\ \displaystyle\int_0^T \langle \beta_i, \varphi \rangle_{q'} \, dt \quad = -\int_0^T \int_\Omega u_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dxdt. & & \end{array}$$

Daher erhalten wir wegen der Einbettung $L^2(0,T;L^s(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ $(q < 2)$ die Gleichung

$$\int_0^T \langle \beta_i, \varphi \rangle_{q'} \, dt = -\int_0^T \int_\Omega u_i, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dxdt = -\int_0^T \left\langle u_i, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle_{q'} dt,$$

womit (4.33) und somit die Gleichheit $\beta_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ in $L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ für $i = 1, 2$ gezeigt ist. Nun haben wir in Proposition 2.13 ebenfalls gesehen, dass der Operator $\mathcal{G}$ schwach folgenstetig ist, es gilt also für $i = 1, 2$

$$\mathcal{G}\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \rightharpoonup \mathcal{G}\beta_i = \mathcal{G}\frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \text{ in } L^q\left(0,T;W^{1,q}(\Omega)\right)$$

für $h' \to 0$. Damit ist auch (4.23b) gezeigt.

Aus den soeben gezeigten Konvergenzresultaten (4.23a-c) folgt nun, dass

$$u_i \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \cap L^r(\Omega_T) \cap W^{1,q}\left(0,T;\left(W^{1,q'}(\Omega)\right)'\right).$$

Um die Aussage in (4.22) zu bekommen, müssen wir daher nur noch zeigen, dass sogar $u_i \in L^2(0,T;H^1_{\geq 0}(\Omega))$ für $i = 1, 2$. Das sieht man jedoch leicht ein, denn aus dem bereits gezeigten Konvergenzresultat (4.23c) folgt auch, dass die Negativteile $[U^\pm_{\varepsilon,i}]_-$ in $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ gegen $[u_i]_-$ konvergieren. (Es gilt für jede Folge u_n, die gegen ein u in einer gewissen Norm konvergiert, wegen der Dreiecksungleichung nach unten und $[u]_- = \frac{u-|u|}{2}$

$$\begin{aligned} \|[u_n]_- - [u]_-\| &\leq \frac{1}{2}\|u_n - u - (|u_n| - |u|)\| \leq \frac{1}{2}\left(\|u_n - u\| + \||u_n| - |u|\|\right) \\ &\leq \|u_n - u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

weshalb auch der Negativteil in dieser Norm konvergiert.) Da außerdem wegen $s \geq 2$ die Einbettung $L^2(0,T;L^s(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ gilt, muss auch $[U^\pm_{\varepsilon,i}]_-$ gegen $[u_i]_-$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ konvergieren. Wegen (2.3b) gilt $|[U^\pm_{\varepsilon,i}]_-| \leq |\pi^h[U^\pm_{\varepsilon,i}]_-|$, was kombiniert mit (4.7) und der Einbettung $L^\infty(0,T;L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ zu

$$\begin{aligned} \left\|[U^\pm_{\varepsilon,i}]_-\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C\left\|[U^\pm_{\varepsilon,i}]_-\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left\|\pi^h[U^\pm_{\varepsilon,i}]_-\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

führt, woraus mit $h \to 0$ (was wegen der Voraussetzungen ebenfalls $\varepsilon \to 0$ liefert)

$$\|[u_i]_-\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq 0$$

folgt. Somit ist $u_i \geq 0$ (im $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ - Sinne) und $u_i \in L^2(0,T;H^1_{\geq 0}(\Omega))$ für $i = 1, 2$.

Wir wollen nun die Konvergenzen (4.23c-e) behandeln. Sei dafür $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\}_{h'>0}$ jene Teilfolge, welche die Konvergenzresultate (4.23a-c) erfüllt. Zünächst wollen wir an die Abschneidefunktion $\widetilde{\lambda}_\varepsilon$ aus (2.12) erinnern, welche $\widetilde{\lambda}_\varepsilon(s) = s$ für $s < \varepsilon^{-1}$ und $\lambda_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-1}$ für $s \geq \varepsilon^{-1}$ erfüllt. Betrachte nun

$$\begin{aligned}\left\|u_i - \lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} &\\ \leq \left\|u_i - \widetilde{\lambda}_\varepsilon(u_i)\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} &+ \left\|\widetilde{\lambda}_\varepsilon(u_i) - \widetilde{\lambda}_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \\ &+ \left\|\widetilde{\lambda}_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i}) - \lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))}. \quad (4.34)\end{aligned}$$

Um also die starke Konvergenz von $\lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})$ gegen die Funktion u_i zu zeigen, müssen wir die drei Summanden auf der rechten Seite abschätzen. Für den ersten Summanden definieren wir zunächst die Funktion $g_\varepsilon(t) := \|u_i(x,.) - \widetilde{\lambda}_\varepsilon(u_i)(x,.)\|_{L^r}$. Auf Grund der Definition von $\widetilde{\lambda}_\varepsilon(s)$ in (2.12) und $\varepsilon \in (0, e^{-2})$ erhalten wir

$$\begin{aligned}g^r_\varepsilon(t) = \int_\Omega \left|u_i(x,t) - \widetilde{\lambda}_\varepsilon(u_i)(x,t)\right|^r dx &= \int_{\{x:u_i(x,t)>\varepsilon^{-1}\}} |u_i - \varepsilon|^r \, dx \\ &\leq \mu\left(\left\{x : u_i(x,t) > \varepsilon^{-1}\right\}\right) \|u_i - \varepsilon\|^r_{L^\infty} \\ &\leq \mu\left(\left\{x : u_i(x,t) > \varepsilon^{-1}\right\}\right) C.\end{aligned}$$

Da $u_i(x,.)$ in $L^\infty(\Omega)$ liegt, folgt aus obiger Abschätzung $g_\varepsilon(t) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ fast überall. Zudem gilt, dass $\mu(\{x : u_i(x,t) > \varepsilon^{-1}\}) \leq \mu(\Omega) \in L^2([0,T])$. Daher können wir auf das Integral $\left\|g^2_\varepsilon(t)\right\|_{L^2([0,T])}$ den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten für den ersten Summanden in (4.34)

$$\left\|u_i - \widetilde{\lambda}_\varepsilon(u_i)\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} = \left\|g^2_\varepsilon(t)\right\|_{L^2([0,T])} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad (4.35)$$

Für den zweiten Summanden bemerken wir wegen der Voraussetzung $s \geq r$ die Einbettung $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$. Damit, mit der Lipschitz-Stetigkeit von $\widetilde{\lambda}_\varepsilon$ und der bereits gezeigten Konvergenz $U^\pm_{\varepsilon,i} \to u_i$ in $L^2(0,T;L^s(\Omega))$ folgt leicht

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\lambda}_\varepsilon(u_i) - \widetilde{\lambda}_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} &\leq \left\|u_i - U^\pm_{\varepsilon,i}\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \\ &\leq C \left\|u_i - U^\pm_{\varepsilon,i}\right\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0. \quad (4.36)\end{aligned}$$

Bevor wir den dritten Summanden von (4.34) untersuchen, bemerken wir, dass die Funktionen $\lambda_\varepsilon(s)$ und $\widetilde{\lambda}_\varepsilon(s)$ sich nur für $s \leq \varepsilon$ unterscheiden und für solche Zahlen

ihre Differenz $0 \leq \lambda_\varepsilon(s) - \widetilde{\lambda}_\varepsilon(s) \leq \varepsilon - s \leq \varepsilon - s_-$ erfüllt. Zudem bemerken wir, dass für ein festes $t \in [0,T]$ die Funktion $U^\pm_{\varepsilon,i}(.,t)$ nichts anderes als eine Linearkombination der Funktionen $U^+_{\varepsilon,i}$ und $U^-_{\varepsilon,i}$ ist, woraus man $U^\pm_{\varepsilon,i}(.,t) \in S^h$ für alle $t \in [0,T]$ folgern kann. Daher kann man Punkt 4 aus Proposition 2.2 auf $U^\pm_{\varepsilon,i}(.,t)$ anwenden und erhält $0 \leq \varepsilon - [U^\pm_{\varepsilon,i}(.,t)]_- \leq \varepsilon - \pi^h[U^\pm_{\varepsilon,i}(.,t)]_-$. Mit diesen Überlegungen bekommt man

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\lambda}_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i}) - \lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} &\leq \left\|\varepsilon - \left[U^\pm_{\varepsilon,i}\right]_-\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \\ &\leq \left\|\varepsilon - \pi^h\left[U^\pm_{\varepsilon,i}\right]_-\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))}\end{aligned}$$

Wir können nun wegen $r \geq 2$ die Abschätzung (3.4) (mit $p = 2$) verwenden, was zu

$$\left\|\varepsilon - \pi^h\left[U^\pm_{\varepsilon,i}\right]_-\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \leq Ch^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}\left\|\varepsilon - \pi^h\left[U^\pm_{\varepsilon,i}\right]_-\right\|_{L^2(\Omega_T)}$$

und wegen $\varepsilon \leq \sqrt{\varepsilon}$ für $\varepsilon \in (0, e^{-2})$ und $\|\pi^h[U^\pm_{\varepsilon,i}]_-\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \varepsilon C$ aus (4.7) weiter zu

$$\begin{aligned}&\leq Ch^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}\sqrt{T}\left(\varepsilon\mu(\Omega) + \left\|\pi^h\left[U^\pm_{\varepsilon,i}\right]_-\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right) \\ &\leq Ch^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}\sqrt{T}\left(\sqrt{\varepsilon}\mu(\Omega) + \sqrt{\varepsilon C}\right) = C_1\sqrt{\varepsilon}h^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)},\end{aligned}$$

mit $C_1 := C\sqrt{T}(\mu(\Omega) + \sqrt{C})$, führt. Schlussendlich erhalten wir mit $r = \frac{2(d+1)}{d}$ und den obigen Abschätzungen

$$\left\|\widetilde{\lambda}_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i}) - \lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \leq C_1\sqrt{\varepsilon}h^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)} = C_1\left(\varepsilon h^{-\frac{d}{d+1}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.37}$$

und da die rechte Seite laut Voraussetzung für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert, konvergiert auch der dritte Summand von (4.34) gegen 0. Da aus der Voraussetzung $\varepsilon h^{-\frac{d}{d+1}} \to 0$ für $h \to 0$ insbesondere folgt, dass ε gegen 0 konvergiert, können wir aus den Ungleichungen (4.35), (4.36) und (4.37)

$$\left\|u_i - \lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \xrightarrow{h\to 0} 0 \tag{4.38}$$

folgern und haben damit den ersten Punkt von (4.23d) bewiesen.
Wir wenden uns nun dem zweiten Punkt von (4.23d) zu. Wir schätzen zunächst wie folgt ab

$$\begin{aligned}\left\|\left(I - \pi^h\right)\left[\lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right]\right\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} &= \int_0^T\left(\sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\int_\Omega\left|\left(I-\pi^h\right)\left[\lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right]\right|^r dx\right)^{\frac{2}{r}} dt \\ &\leq \int_0^T\left(\sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h}\mu(\kappa)\left\|\left(I-\pi^h\right)\left[\lambda_\varepsilon(U^\pm_{\varepsilon,i})\right]\right\|^r_{L^\infty(\kappa)}\right)^{\frac{2}{r}} dt \end{aligned} \tag{4.39}$$

Weiter oben im Beweis haben wir bereits argumentiert, dass für jedes feste $t \in [0,T]$ die Funktion $U_{\varepsilon,i}^{\pm}(.,t)$ in S^h liegt. Daher können wir die Ungleichung (3.33) anwenden und erhalten mit $\mu(\kappa) \leq h^d$ weiter

$$\int_0^T \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \mu(\kappa) \left\| \left(I - \pi^h\right) \left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm})\right] \right\|_{L^\infty(\kappa)}^r \right)^{\frac{2}{r}} dt$$

$$\leq h^{\frac{2d}{r}} h^2 \int_0^T \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \left\| \nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right\|_{L^\infty(\kappa)}^r \right)^{\frac{2}{r}} dt. \quad (4.40)$$

Wir können nun auf $\|\nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm}\|_{L^\infty(\kappa)}$ die Abschätzung (3.4), mit $m = 0$, $r = \infty$ und $p = 2$, anwenden, womit wir $\|\nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm}\|_{L^\infty(\kappa)} \leq C h^{-\frac{d}{2}} \|\nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm}\|_{L^2(\kappa)}$ erhalten. Das führt zu

$$h^{\frac{2d}{r}} h^2 \int_0^T \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \left\| \nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right\|_{L^\infty(\kappa)}^r \right)^{\frac{2}{r}} dt \leq C^2 h^{\frac{2d}{r}} h^2 h^{-d} \left\| \nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right\|_{L^2(\Omega_T)}^2$$

$$= \left(C h^{1-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)} \left\| \nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right\|_{L^2(\Omega_T)} \right)^2 \overset{\mathrm{r}=\frac{2(\mathrm{d}+1)}{\mathrm{d}}}{=} \left(C h^{1-\frac{1}{r}} \left\| \nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right\|_{L^2(\Omega_T)} \right)^2. \quad (4.41)$$

Auf Grund von (4.7) erhalten wir

$$\left\| \nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \left\| U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C. \quad (4.42)$$

was zusammengesetzt mit (4.39)-(4.41)

$$\left\| \left(I - \pi^h\right) \left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm})\right] \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \leq C h^{1-\frac{1}{r}} \xrightarrow{h \to 0} 0 \quad (4.43)$$

bringt. Um nun die gewünschte starke Konvergenz von $\pi^h[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm})]$ gegen u_i in $L^2(0,T;L^r(\Omega))$ zu bekommen, bedarf es nurmehr einer Dreiecksungleichung, dem gerade gezeigten (4.43) und (4.38).

$$\left\| u_i - \pi^h \left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm})\right] \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))}$$

$$\leq \left\| u_i - \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \left\| \left(I - \pi^h\right) \left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm})\right] \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Der Beweis von (4.23e) ist fast mit dem gerade erbrachten Beweis des zweiten Punktes von (4.23d) ident. Wir betrachten zuerst

$$\left\| \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) - \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \mathcal{I} \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))}^2$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \int_\Omega \left\| \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) - \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \mathcal{I} \right\|_2^r dx \right)^{\frac{2}{r}} dt$$

$$\leq \int_0^T \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \mu(\kappa) \sup_{x \in \kappa} \left\| \left\{ \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) - \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \mathcal{I} \right\}(x) \right\|_2^r \right)^{\frac{2}{r}} dt, \quad (4.44)$$

wobei $\|.\|_2$ für die Spektralnorm steht. Wieder mit der Argumentation, dass für jedes feste $t \in [0,T]$ die Funktion $U_{\varepsilon,i}^{\pm}(.,t)$ in S^h liegt, können wir die Ungleichung (3.34) aus Lemma 3.9 anwenden und erreichen zusammen mit $\mu(\kappa) \leq h^d$

$$\int_0^T \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \mu(\kappa) \sup_{x \in \kappa} \left\| \left\{ \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) - \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \mathcal{I} \right\}(x) \right\|_2^r \right)^{\frac{2}{r}} dt$$

$$\leq h^{\frac{2d}{r}} h^2 \int_0^T \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}^h} \left\| \nabla U_{\varepsilon,i}^{\pm} \right\|_{L^\infty(\kappa)}^r \right)^{\frac{2}{r}} dt. \quad (4.45)$$

Wenn wir nun die gerade hergeleiteten Abschätzungen (4.44) und (4.44) zusammenfügen und mit den schon bekannten Ungleichungen (4.41) und (4.42) weiter abschätzen, bekommen wir

$$\left\| \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) - \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \mathcal{I} \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \leq C h^{1-\frac{1}{r}} \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

was wiederum mit einer Dreieckungleichung und (4.38) zu

$$\begin{aligned} &\left\| u_i \mathcal{I} - \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \\ &\quad \leq \left\| u_i \mathcal{I} - \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \mathcal{I} \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \left\| \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) - \lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^{\pm}) \mathcal{I} \right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} \xrightarrow{h \to 0} 0. \end{aligned}$$

führt. Somit ist auch der letzte Punkt (4.23e) gezeigt und das Lemma bewiesen.

Als Letztes bleibt zu zeigen, dass die Grenzfunktionen u_i aus (4.22) die Anfangswertbedingungen $u_i(\cdot,0) = u_i^0$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ für $i = 1,2$ erfüllen. Es ist also zu zeigen, dass für $i = 1,2$

$$\left\langle u_i(.,0) - u_i^0, \eta \right\rangle_{q'} = 0 \qquad \forall\, \eta \in W^{1,q'}(\Omega) \quad (4.46)$$

gilt, wobei wegen $u_i \in W^{1,q}(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ und der Einbettung $W^{1,q}(0,T;X) \hookrightarrow C(0,T;X)$ der Ausdruck $u_i(.,0)$ sinnvoll definiert ist. Sei dafür wieder $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\}_{h'>0}$ jene Teilfolge, für welche die Konvergenzresultate (4.23a-e) gelten. Wir wollen zuerst für $i = 1,2$

$$U_{\varepsilon,i}^0 \xrightarrow{h' \to 0} u_i^0 \quad \text{in} \quad L^q(\Omega) \quad (4.47)$$

zeigen. Sei zunächst $U_{\varepsilon,i}^0 = \pi^h u_i^0$, also insbesondere $u_i^0 \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$ für $i = 1,2$. Dann erhalten wir wegen der Einbettung $W^{1,\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $(\beta > d)$ und des Konvergenzresultats (3.8)

$$\left\| u_i^0 - U_{\varepsilon,i}^0 \right\|_{L^q} \leq C \left\| (I - \pi^h) u_i^0 \right\|_{W^{1,\beta}} \xrightarrow{h' \to 0} 0.$$

Für $U_{\varepsilon,i}^0 = \mathcal{Q}^h u_i^0$ ist $u_i^0 \in H^1(\Omega)$ für $i = 1,2$ und wir bekommen wegen $q < 2$ und (3.11)

$$\left\| u_i^0 - U_{\varepsilon,i}^0 \right\|_{L^q} \leq C \left\| (I - \mathcal{Q}^h) u_i^0 \right\|_{L^2} \xrightarrow{h' \to 0} 0,$$

somit ist (4.47) gezeigt.
Wir haben bereits für die in (4.32) erwähnten Funktionen β_i gezeigt, dass sie in $L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ gleich den Funtkionen $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ für $i=1,2$ sind, womit wir wegen (4.32) die schwache Konvergenz von $\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}$ gegen $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ in $L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ erhalten. Außerdem gilt wegen der schon erwähnten Einbettung $L^2(0,T;L^s(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ und (4.23c)

$$\|U_{\varepsilon,i}-u_i\|_{L^q(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} \le C\,\|U_{\varepsilon,i}-u_i\|_{L^2(0,T;L^s(\Omega))} \xrightarrow{h'\to 0} 0.$$

Man sieht leicht ein, dass daher für $i=1,2$ und $h'\to 0$ die schwache Konvergenz

$$U_{\varepsilon,i} \rightharpoonup u_i \quad \text{in} \quad W^{1,q}\left(0,T;\left(W^{1,q'}(\Omega)\right)'\right) \tag{4.48a}$$

gilt und somit die Folge $U_{\varepsilon,i}$ in $W^{1,q}(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ beschränkt ist. Daher existieren für $i=1,2$ Funktionen $\widetilde{u}_{i,0}$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ und eine Teilfolge h' von h (welche o.B.d.A jene ist, welche die Konvergenzresultate (4.23a-e) erfüllt), sodass

$$U_{\varepsilon,i}(.,0) \rightharpoonup \widetilde{u}_{i,0} \quad \text{in} \quad \left(W^{1,q'}(\Omega)\right)' \tag{4.48b}$$

für $h'\to 0$, denn es gilt für $i=1,2$

$$\begin{aligned}\|U_{\varepsilon,i}(.,0)\|_{(W^{1,q'}(\Omega))'} &\le \sup_{t\in[0,T]} \|U_{\varepsilon,i}\|_{(W^{1,q'}(\Omega))'} = \|U_{\varepsilon,i}\|_{C(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} \\ &\le C\,\|U_{\varepsilon,i}\|_{W^{1,q}(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')} \le C,\end{aligned}$$

weshalb $U_{\varepsilon,i}(.,0)$ beschränkt in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ ist und somit in diesem Raum schwach konvergiert. Wir hätten nun gerne, dass für $i=1,2$ die Funktionen $\widetilde{u}_{i,0}$ und $u_i(.,0)$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ übereinstimmen. Wir nehmen also eine beliebige Funktion $\eta \in W^{1,q'}(\Omega)$ und bemerken, dass die Funktion $\| <.,\eta>_{q'} \|_{C[0,T]}$ ein Elemenet aus dem Dualraum von $W^{1,q}(0,T;(W^{1,q'}(\Omega))')$ ist. Daher gilt wegen (4.48a) für $i=1,2$

$$\left\| \langle U_{\varepsilon,i}-u_i,\eta\rangle_{q'} \right\|_{C[0,T]} \xrightarrow{h'\to 0} 0. \tag{4.48c}$$

Nun gilt für $i=1,2$, dass

$$\left|\langle \widetilde{u}_{i,0}-u_i(.,0),\eta\rangle_{q'}\right| \le \left|\langle \widetilde{u}_{i,0}-U_{\varepsilon,i}(.,0),\eta\rangle_{q'}\right| + \left|\langle U_{\varepsilon,i}(.,0)-u_i(.,0),\eta\rangle_{q'}\right|,$$

wobei der erste Summand wegen (4.48b) für $h'\to 0$ gegen Null geht. Für den zweiten Summanden gilt für $i=1,2$

$$\left|\langle U_{\varepsilon,i}(.,0)-u_i(.,0),\eta\rangle_{q'}\right| \le \sup_{t\in[0,T]} \left|\langle U_{\varepsilon,i}-u_i,\eta\rangle_{q'}\right| = \left\|\langle U_{\varepsilon,i}-u_i,\eta\rangle_{q'}\right\|_{C[0,T]},$$

was wegen (4.48c) ebenfalls mit $h'\to 0$ verschwindet. Somit gilt tatsächlich $\widetilde{u}_{i,0} = u_i(.,0)$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ und wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten und (4.48b)

$$U_{\varepsilon,i}(.,0) \rightharpoonup u_i(.,0) \quad \text{in} \quad \left(W^{1,q'}(\Omega)\right)'. \tag{4.49}$$

Sei nun $\eta \in W^{1,q'}(\Omega)$ beliebig. Klarerweise ist wegen $L^q(\Omega) \subseteq (W^{1,q'}(\Omega))'$ die Funktion u_i^0 auch ein Dualelement auf $W^{1,q'}(\Omega)$, daher können wir für $i = 1, 2$ die Differenz

$$\begin{aligned}\left|\left\langle u_i(.,0) - u_i^0, \eta\right\rangle_{q'}\right| \leq \left|\left\langle u_i(.,0) - U_{\varepsilon,i}(.,0), \eta\right\rangle_{q'}\right| + \left|\left\langle U_{\varepsilon,i}(.,0) - U_{\varepsilon,i}^0, \eta\right\rangle_{q'}\right| \\ + \left|\left\langle U_{\varepsilon,i}^0 - u_i^0, \eta\right\rangle_{q'}\right|\end{aligned}$$

bilden. Nun ist der zweite Summmand wegen der Definition von $U_{\varepsilon,i}$ in (4.1a) gleich Null und die anderen zwei Summanden konvergieren wegen (4.47) und (4.49) mit $h' \to 0$ gegen Null. Daher ist tatsächlich (4.46) erfüllt und $u_i(\cdot, 0) = u_i^0$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ für $i = 1, 2$ gezeigt. □

4.2 Konvergenz der FE-Approximation gegen eine schwache Lösung des Probelms

In diesem Abschnitt zeigen wir mit Theorem 4.7 das Hauptresultat dieser Arbeit. Dieses Theorem beweist schlussendlich die Konvergenz von Teilfolgen der Finiten Elemente Approximationen $U_{\varepsilon,i}$ gegen Lösungen des ursprünglichen Problems (P) in einem gewissen schwachen Sinn. Dabei werden die Lösungsfunktionen von (P) jene Grenzfunktionen u_i aus Lemma 4.4 sein.

Bemerkung 4.6. Bevor wir das kommende Theorem behandeln, wollen wir die folgenden Punkte aufführen, welche im Beweis öfters auftreten werden:

- Es gilt für $\eta \in W^{k,l}(0,T; W^{1,p}(\Omega))$ und für k, l beliebig

$$\left\|\pi^h \eta\right\|_{W^{k,l}(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \leq (1 + C) \left\|\eta\right\|_{W^{k,l}(0,T;W^{1,p}(\Omega))}, \tag{4.50}$$

  wobei $p \geq 2$ für $d = 1$ oder $p > d$ für $d = 2, 3$ gelten muss. Wir können nämlich wegen der Bedingungen an das p die Abschätzung (3.5) für $m \in \{0, 1\}$ anwenden, was

$$\left|\pi^h \eta\right|_{W^{m,p}} \leq \left|\left(I - \pi^h\right)\eta\right|_{W^{m,p}} + \left|\eta\right|_{W^{m,p}} \leq (1 + Ch^m) \left\|\eta\right\|_{L^p}$$

  liefert. Daher erhalten wir für h klein

$$\left\|\pi^h \eta\right\|_{W^{1,p}}^p = \sum_{m=1}^{2} \left|\pi^h \eta\right|_{W^{m,p}}^p \leq (1 + C)^p \sum_{m=1}^{2} \left|\eta\right|_{W^{m,p}}^p = (1 + C)^p \left\|\eta\right\|_{W^{1,p}}^p,$$

  was die obige Ungleichung impliziert. Wir sehen, dass die Ungleichung (4.50) eine Erweiterung zu jener in (3.63a) in Lemma 3.12 ist.

- Für $\eta \in L^{q'}(0,T; W^{1,q'}(\Omega))$ gilt

$$\left\|\left(I - \pi^h\right)\eta\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \xrightarrow{h \to 0} 0. \tag{4.51}$$

Wir wissen bereits aus (3.8), dass für ein festes $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ und festes $t \in [0,T]$ die fast überall definierte Funktion $g_h(.,t) := \|(\mathcal{I}-\pi^h)\eta(.,t)\|_{W^{1,q'}}$ für $h \to 0$ gegen 0 geht. Daher exisitiert sicherlich ein $h' > 0$, sodass $|g_h(.,t)| \leq 1$ für alle $h \leq h'$. Somit können wir den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{h\to 0} \left\| \left(I-\pi^h\right)\eta \right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} = \lim_{h\to 0} \int_0^T g_h(.,t)\,dt = \int_0^T \lim_{h\to 0} g_h(.,t)\,dt = 0,$$

womit (4.51) gezeigt ist.

- Für Funktionen $f \in L^r(\Omega_T)$, $g \in L^2(\Omega_T)$ und $h \in L^{q'}(\Omega_T)$ mit r und q' aus Lemma 4.4 gilt

$$\left| \int_0^T (fg,h)\ dt \right| \leq \|f\|_{L^r(\Omega_T)} \|g\|_{L^2(\Omega_T)} \|h\|_{L^{q'}(\Omega_T)}\,. \tag{4.52}$$

Wenn wir wie bei (3.67) das konjugierte Paar $\tilde{p} = \frac{2d+1}{d}$ und $\tilde{q} = \frac{2d+1}{d+1}$ mit den Eigenschaften $\tilde{p}q = r$ und $\tilde{q}q = 2$ heranziehen, bekommen wir mit zweifacher Anwendung der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\left| \int_0^T (fg,h)\ dt \right| &\leq \int_0^T \|fg\|_{L^q} \|h\|_{L^{q'}} \\ &\leq \left(\|fg\|_{L^q}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\|h\|_{L^{q'}}^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} = \|fg\|_{L^q(\Omega_T)} \|h\|_{L^{q'}(\Omega_T)}\,.\end{aligned}$$

Nun gilt wegen der Ungleichung (3.66) aus Bemerkung 3.14 $\|fg\|_{L^q(\Omega_T)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega_T)}\|g\|_{L^2(\Omega_T)}$, woraus (4.52) folgt.

- Wir haben bereits in (3.7) gesehen, dass für zwei Funktionen $\chi, z^h \in S^h$, $m \in \{0,1\}$ und dem konjugierten Paar $q = \frac{2(d+1)}{2d+1}$ und $q' = 2(d+1)$

$$\left\|(I-\pi^h)\chi z^h\right\|_{L^1} \leq Ch^{1+m}\,|\chi|_{W^{m,q}} \left\|\nabla z^h\right\|_{L^{q'}}$$

gilt. Im Beweis hatten wir die Ungleichung für ein Element κ betrachtet und unter Verwendung, dass das Produkt χz^h in $W^{2,1}(\kappa)$ liegt, gezeigt, dass

$$\left\|(I-\pi^h)\chi z^h\right\|_{L^1(\kappa)} \leq Ch_\kappa^2\,\left|\chi z^h\right|_{W^{2,1}(\kappa)}\,.$$

gilt. Wenn wir nun drei Funktionen χ_1, χ_2 und χ_3 aus S^h herannehmen, liegt ihr Produkt klarerweise wieder in $W^{2,1}(\kappa)$. Daher erhalten wir analog zum Beweis von (3.7)

$$\left\|(I-\pi^h)\chi_1\chi_2\chi_3\right\|_{L^1(\kappa)} \leq Ch_\kappa^2\,|\chi_1\chi_2\chi_3|_{W^{2,1}(\kappa)}\,. \tag{4.53}$$

Da die Funktionen χ_i auf κ affin sind, verschwinden wieder ihre zweiten Ableitungen. Damit folgt, ähnlich wie in (3.9), für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$,

$|\alpha| = 2$, dass

$$D^\alpha(\chi_1\chi_2\chi_3) = \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\chi_3}{\partial x_j} + \frac{\partial\chi_2}{\partial x_j}\frac{\partial\chi_3}{\partial x_i}\right)\chi_1 + \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\chi_3}{\partial x_j} + \frac{\partial\chi_1}{\partial x_j}\frac{\partial\chi_3}{\partial x_i}\right)\chi_2 + \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_j} + \frac{\partial\chi_1}{\partial x_j}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_i}\right)\chi_3,$$

wobei $i, j \in \{1, \dots, d\}$ mit $\alpha_i, \alpha_j \neq 0$. Daher können wir auf der rechten Seite von (4.53) die Seminorm durch volle Normen nach oben abschätzen, denn es gilt für beliebige Funktionen $f_1 \in H^1(\Omega)$, $f_2 \in W^{1,r}(\Omega)$ und $f_3 \in W^{1,q'}(\Omega)$ wegen der Hölder-Ungleichung und (3.66)

$$\begin{aligned}\|f_1\nabla f_2\nabla f_3\|_{L^1} &\leq C\,\|f_1\nabla f_2\|_{L^q}\,\|\nabla f_3\|_{L^{q'}} \overset{(3.66)}{\leq} C\,\|f_1\|_{L^2}\,\|\nabla f_2\|_{L^r}\,\|\nabla f_3\|_{L^{q'}} \\ &\leq C\,\|f_1\|_{H^1}\,\|f_2\|_{W^{1,r}}\,\|f_3\|_{W^{1,q'}}\,,\end{aligned}$$

mit $r = \frac{2(d+1)}{d}$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\big\|(I-\pi^h)\chi_1\chi_2\chi_3\big\|_{L^1(\kappa)} &\leq Ch_\kappa^2\,|\chi_1\chi_2\chi_3|_{W^{2,1}(\kappa)} \\ &\leq Ch_\kappa^2\,\|\nabla\chi_1\nabla\chi_2\chi_3 + \nabla\chi_1\chi_2\nabla\chi_3 + \chi_1\nabla\chi_2\nabla\chi_3\|_{L^1(\kappa)} \\ &\leq Ch_\kappa^2\,\|\nabla\chi_1\nabla\chi_2\chi_3 + \nabla\chi_1\chi_2\nabla\chi_3 + \chi_1\nabla\chi_2\nabla\chi_3\|_{L^1(\kappa)} \\ &\leq Ch_\kappa^2\left(\|\nabla\chi_1\nabla\chi_2\chi_3\|_{L^1(\kappa)} + \|\nabla\chi_1\chi_2\nabla\chi_3\|_{L^1(\kappa)} + \|\chi_1\nabla\chi_2\nabla\chi_3\|_{L^1(\kappa)}\right) \\ &\leq Ch_\kappa^2\,\|\chi_1\|_{H^1(\kappa)}\,\|\chi_2\|_{W^{1,r}(\kappa)}\,\|\chi_3\|_{W^{1,q'}(\kappa)}\,.\end{aligned}$$

Durch Aufsummieren folgt also

$$\big\|(I-\pi^h)\chi_1\chi_2\chi_3\big\|_{L^1} \leq Ch^2\,\|\chi_1\|_{H^1}\,\|\chi_2\|_{W^{1,r}}\,\|\chi_3\|_{W^{1,q'}}\,.$$

Da nun die Funktionen χ_i insbesondere in $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^r(0,T;W^{1,r}(\Omega)) \cap L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ liegen, gilt mit (4.52) aus dem vorherigen Punkt dieser Bemerkung, dass

$$\begin{aligned}\int_0^T \big\|(I-\pi^h)\chi_1\chi_2\chi_3\big\|_{L^1}\,dt \leq Ch^2\,&\|\chi_1\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\,\|\chi_2\|_{L^r(0,T;W^{1,r}(\Omega))} \\ &\times \|\chi_3\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}\,. \qquad (4.54)\end{aligned}$$

Wir haben nun alle notwendigen Mittel in der Hand, um das Hauptresultat zeigen zu können.

Theorem 4.7. *Es gelten die Voraussetzungen aus Lemma 4.4. Dann lösen die Funktionen u_1 und u_2 aus Lemma 4.4, welche* (4.22)-(4.23c) *erfüllen, das Anfangswertproblem:*

Finde Funktionen u_i, sodass für alle $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ und $i=1,2$, $j\neq i$, gilt

$$\int_0^T \left[\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t}, \chi \right\rangle_{q'} + \left([c_i + 2a_i u_i + u_j]\nabla u_i + u_i \nabla u_j + b_i \nabla v, \nabla \eta \right) \right] dt = \int_0^T \left([\mu_i - \gamma_{ii} u_i - \gamma_{ij} u_j]\, u_i, \eta \right) dt, \quad (4.55a)$$

$$u_i(\cdot,0) = u_i^0 \qquad \text{in } (W^{1,q'}(\Omega))', \quad (4.55b)$$

mit dem konjugierten Paar $q = \frac{2(d+1)}{2d+1}$ und $q' = 2(d+1)$.

Beweis. Wir wissen bereits aus dem Lemma 4.4, dass die Folgen $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\}_{h'>0}$, welche Teilfolgen von $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\}_{h>0}$ sind, das Problem (4.4) aus ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) lösen. Es liegt also nahe zu zeigen, dass die einzelnen Komponenten aus (4.4) gegen jene von (4.55a) konvergieren, wobei wir die Konvergenzresultate (4.22)-(4.23c) verwenden werden. Aus Notationsgründen werden wir h statt h' schreiben, obwohl wir die Teilfolge $\{U_{\varepsilon,1}, U_{\varepsilon,2}\}_{h'>0}$ betrachten. Dies ist aber nicht weiter schlimm, da ja mit $h \to 0$ auch ihre Teilfolge h' gegen 0 geht.

Wir wählen zunächst ein beliebiges $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ aus und setzten $\chi = \pi^h \eta$ in die Gleichung (4.4) ein.

Der Term $\int_0^T (\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta)^h$:

Als erstes wollen wir die Konvergenz der ersten Komponenten betrachten und zeigen für $i = 1, 2$

$$\int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right)^h dt \xrightarrow{h\to 0} \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t}, \eta \right\rangle_{q'} dt. \quad (4.56)$$

Zuerst bemerken wir, dass für ein $\widetilde{\eta} \in H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ die partielle Integration

$$\int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \widetilde{\eta} \right)^h dt = -\int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \frac{\partial \pi^h \widetilde{\eta}}{\partial t} \right)^h dt + \left[\left(U_{\varepsilon,i}(.,t), \pi^h \widetilde{\eta}(.,t) \right)^h \right]_0^T \quad (4.57)$$

möglich ist, wobei $[\ldots]_0^T$ die Funktionsauswertung in den Punkten $0, T$ bezüglich der

Zeit ist. Es gilt nämlich mit der Summendarstellung von $(.,.)^h$

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h\widetilde{\eta}\right)^h dt &= \int_0^T \sum_{j\in J} m_j \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}(p_j,t)\pi^h\widetilde{\eta}(p_j,t)\,dt \\ &= \sum_{j\in J} m_j \int_0^T \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}(p_j,t)\pi^h\widetilde{\eta}(p_j,t)\,dt\end{aligned}$$

und weiter mit partieller Integration

$$\begin{aligned}&= -\sum_{j\in J} m_j \int_0^T U_{\varepsilon,i}(p_j,t)\,\frac{\partial \pi^h\widetilde{\eta}}{\partial t}(p_j,t)\,dt + \sum_{j\in J} m_j \left[U_{\varepsilon,i}(p_j,t)\,\pi^h\widetilde{\eta}(p_j,t)\right]_0^T \\ &= -\int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \frac{\partial \pi^h\widetilde{\eta}}{\partial t}\right)^h dt + \left[\left(U_{\varepsilon,i}(.,t), \pi^h\widetilde{\eta}(.,t)\right)^h\right]_0^T,\end{aligned}$$

wobei wegen der stetigen Einbettung $H^1(0,T;X) \hookrightarrow C(0,T;X)$, für einen beliebigen Banachraum X, die Funktionsauswertungen an den Stellen $t = 0$ und $t = T$ auch Sinn machen.
Wir wollen bemerken, dass man wegen der Dichtheit des Raumes $H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ in $L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ stets für jedes $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ eine Funktion $\widetilde{\eta}$ aus $H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ finden kann, sodass der Abstand

$$\|\eta - \widetilde{\eta}\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \tag{4.58}$$

beliebig klein wird. Diese Eigenschaft werden wir später benötigen, um den Grenzwert $h \to 0$ bilden zu können.

Um nun die Konvergenz in (4.56) zu erhalten, wollen wir zunächst

$$\left|\int_0^T \left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h\eta\right)^h - \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h\eta\right)\right] dt\right| \xrightarrow{h\to 0} 0 \tag{4.59}$$

zeigen. Dafür schieben wir die Terme

$$\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h\widetilde{\eta}\right)^h \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h\widetilde{\eta}\right)$$

ein, wobei $\widehat{\eta}$ aus dem dichten Teilraum $H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ von $L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$

ist, und erhalten so für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right)^h - \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right) \right] dt \right| \\
&\quad \leq \left| \int_0^T \left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right)^h - \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right) \right] dt \right| \\
&\qquad + \left| \int_0^T \left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \widetilde{\eta} \right)^h - \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \widetilde{\eta} \right) \right] dt \right|
\end{aligned}$$

und weiter mit (4.57) und der gewöhnlichen partiellen Integration auf den zweiten Summanden angewendet

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^T \left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right)^h - \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right) \right] dt \right| \\
&\qquad + \left| \int_0^T \left[\left(U_{\varepsilon,i}, \frac{\partial \left(\pi^h \widetilde{\eta} \right)}{\partial t} \right)^h - \left(U_{\varepsilon,i}, \frac{\partial \left(\pi^h \widetilde{\eta} \right)}{\partial t} \right) \right] dt \right| \\
&\qquad + \left| \left(U_{\varepsilon,i}(.,t) - \pi^h \widetilde{\eta}(.,t) \right)^h - \left(U_{\varepsilon,i}(.,t) - \pi^h \widetilde{\eta}(.,t) \right) \right|_0^T
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Wie man in (4.2) sehen kann, ist die schwache Ableitung für jedes $t \in [0, T]$ eine Funktion in S^h. Somit gilt mit $q \in (1, 2]$ nach (3.12) die Ungleichung $\| \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \|_{L^q} \leq C h^{-1} \| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \|_{W^{1,q}}$, und wir erhalten mit (3.7) für den ersten Summanden und $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right)^h - \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right) \right] dt \right| \\
&\quad \leq \int_0^T C h \left\| \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{L^q} \left\| \nabla \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right\|_{L^{q'}} dt \\
&\quad \leq C \int_0^T \left\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{W^{1,q}} \left\| \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right\|_{W^{1,q'}} dt,
\end{aligned}$$

was mit der Youngschen Ungleichung weiter zu

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\int_0^T \left\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{W^{1,q}}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \left\| \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right\|_{W^{1,q'}}^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&= C \left\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \left\| \pi^h \left[\eta - \widetilde{\eta} \right] \right\|_{L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

führt. Nun gilt einerseits $\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \leq C$, wegen (4.7), und andererseits

existiert eine weitere Konstante $C > 0$, sodass

$$\left\|\pi^h\left[\eta-\widetilde{\eta}\right]\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \leq (1+C)\left\|\eta-\widetilde{\eta}\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))},$$

da wir wegen $q' = 2(d+1) > \max\{2,d\}$ die Abschätzung (4.50) aus der letzten Bemerkung anwenden können. Damit erhalten wir zusammen mit (4.61) für den ersten Summanden in (4.60)

$$\left|\int_0^T\left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t},\pi^h\left[\eta-\widetilde{\eta}\right]\right)^h-\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t},\pi^h\left[\eta-\widetilde{\eta}\right]\right)\right]dt\right| \leq C\left\|\eta-\widetilde{\eta}\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}. \tag{4.62}$$

Für den zweiten Summanden in (4.60) erhalten wir wieder mit (3.7) und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\left[\left(U_{\varepsilon,i},\frac{\partial\left(\pi^h\widetilde{\eta}\right)}{\partial t}\right)^h-\left(U_{\varepsilon,i},\frac{\partial\left(\pi^h\widetilde{\eta}\right)}{\partial t}\right)\right]dt\right| &\leq Ch\int_0^T\left\|U_{\varepsilon,i}\right\|_{L^1}\left\|\nabla\frac{\partial\left(\pi^h\widetilde{\eta}\right)}{\partial t}\right\|_{L^\infty}dt\\ &\leq Ch\left\|U_{\varepsilon,i}\right\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}\left\|\nabla\frac{\partial\left(\pi^h\widetilde{\eta}\right)}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}.\end{aligned}$$

Klarerweise gilt $\|\nabla\frac{\partial(\pi^h\widetilde{\eta})}{\partial t}\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq \|\pi^h\widetilde{\eta}\|_{H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}$, und da außerdem nach (4.7) die Norm $\|U_{\varepsilon,i}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}$ beschränkt ist, erhalten wir aus der obigen Abschätzung und der Einbettung $L^\infty([0,T]) \hookrightarrow L^2([0,T])$ für $i=1,2$ sogar

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\left[\left(U_{\varepsilon,i},\frac{\partial\left(\pi^h\widetilde{\eta}\right)}{\partial t}\right)^h-\left(U_{\varepsilon,i},\frac{\partial\left(\pi^h\widetilde{\eta}\right)}{\partial t}\right)\right]dt\right| &\leq Ch\left\|U_{\varepsilon,i}\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\left\|\pi^h\widetilde{\eta}\right\|_{H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\\ &\leq Ch\left\|\pi^h\widetilde{\eta}\right\|_{H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\\ &\overset{(4.50)}{\leq} Ch\left\|\widetilde{\eta}\right\|_{H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Da die Funktionen $U_{\varepsilon,i}$ und $\widetilde{\eta}$ insbesondere stetig bezüglich der Zeit sind, können wir für den dritten Summanden in (4.60) anstatt der Auswertung an den Stellen 0 und T

das Supremum über das ganze Intervall $[0,T]$ nehmen, womit wir wieder mit (3.7)

$$\begin{aligned}
&\left|\left(U_{\varepsilon,i}(.,t)-\pi^h\widetilde{\eta}(.,t)\right)^h-\left(U_{\varepsilon,i}(.,t)-\pi^h\widetilde{\eta}(.,t)\right)\right|_0^T\\
&\qquad\le 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\left(U_{\varepsilon,i}-\pi^h\widetilde{\eta}\right)^h-\left(U_{\varepsilon,i}-\pi^h\widetilde{\eta}\right)\right|\\
&\qquad\overset{(3.7)}{\le} 2\sup_{t\in[0,T]} Ch\left\|U_{\varepsilon,i}\right\|_{L^1}\left\|\pi^h\widetilde{\eta}\right\|_{W^{1,\infty}}\\
&\qquad= Ch\left\|U_{\varepsilon,i}\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\left\|\pi^h\widetilde{\eta}\right\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\\
&\qquad\le Ch\left\|\pi^h\widetilde{\eta}\right\|_{H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\\
&\qquad\overset{(4.50)}{\le} Ch\left\|\widetilde{\eta}\right\|_{H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}
\end{aligned}\tag{4.64}$$

erreichen, wobei die letzte Ungleichung wegen der Beschränktheit von $U_{\varepsilon,i}$ in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ (wieder nach (4.7))und der Einbettung $H^2(0,T;X)\hookrightarrow C(0,T;X)$ gilt. Wenn wir die Abschätzungen der drei Summanden in (4.62), (4.63) und (4.64) nun zusammensetzen, erhalten wir mit (4.60) die Existenz einer Konstanten $C>0$, sodass für $i=1,2$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T\left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t},\pi^h\eta\right)^h-\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t},\pi^h\eta\right)\right]dt\right|\\
&\qquad\le\left|\int_0^T\left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t},\pi^h\left[\eta-\widetilde{\eta}\right]\right)^h-\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t},\pi^h\left[\eta-\widetilde{\eta}\right]\right)\right]dt\right|\\
&\qquad\quad+\left|\int_0^T\left[\left(U_{\varepsilon,i},\frac{\partial\left(\pi^h\widetilde{\eta}\right)}{\partial t}\right)^h-\left(U_{\varepsilon,i},\frac{\partial\left(\pi^h\widetilde{\eta}\right)}{\partial t}\right)\right]dt\right|\\
&\qquad\quad+\left|\left(U_{\varepsilon,i}(.,t)-\pi^h\widetilde{\eta}(.,t)\right)^h-\left(U_{\varepsilon,i}(.,t)-\pi^h\widetilde{\eta}(.,t)\right)\right|_0^T\\
&\qquad\le C\left(\left\|\eta-\widetilde{\eta}\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}+h\left\|\widetilde{\eta}\right\|_{H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\right)
\end{aligned}$$

gilt. Auf Grund der Dichtheit von $H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ in $L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ können wir nun für jedes beliebige $\widetilde{\varepsilon}>0$ eine Funktion $\widetilde{\eta}\in H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ und ein $\overline{h}>0$ finden, sodass

$$C\left\|\eta-\widetilde{\eta}\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}<\widetilde{\varepsilon}\quad\text{und}\quad Ch\left\|\widetilde{\eta}\right\|_{H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}<\widetilde{\varepsilon}\quad\forall\,h\in(0,\overline{h})$$

und somit

$$\left|\int_0^T\left[\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t},\pi^h\eta\right)^h-\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t},\pi^h\eta\right)\right]dt\right|<\widetilde{\varepsilon}\quad\forall\,h\in(0,\overline{h}).$$

Das bedeutet aber, dass dieser Ausdruck für $h\to 0$ gegen 0 konvergiert, womit (4.59) gezeigt ist.

Der nächste Schritt für die Konvergenz in (4.56) wird sein zu zeigen, dass für $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ und $i = 1,2$

$$\left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \left(I - \pi^h\right) \eta \right) \, dt \right| \xrightarrow{h \to 0} 0 \tag{4.65}$$

erfüllt ist. Wir sehen einerseits, dass $\eta(.,t)$ fast überall in $W^{1,q'}(\Omega)$ liegt. Andererseits gilt wegen $W^{1,q'}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, dass die Dualräume der Eigenschaft

$$L^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)' \hookrightarrow \left(W^{1,q'}(\Omega)\right)' \tag{4.66}$$

genügen. Daher können wir für festes $t \in [0,T]$ die Funktion $U_{\varepsilon,i}(.,t) \in S^h \subseteq L^2(\Omega)$ als Element des $(W^{1,q'}(\Omega))'$ auffassen und können $(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \eta) = \langle \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \eta \rangle_{q'}$ schreiben. Somit erhalten wir mit der Definition von $\mathcal{G}$ aus (2.43)

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \left(I - \pi^h\right) \eta \right) \, dt \right| &= \left| \int_0^T \left\langle \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \left(I - \pi^h\right) \eta \right\rangle_{q'} \, dt \right| \\
&\leq \int_0^T \left(\nabla \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \nabla \left(I - \pi^h\right) \eta \right) + \left(\mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \left(I - \pi^h\right) \eta \right) \, dt \\
&\leq \int_0^T \left\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{W^{1,q}} \left\| \left(I - \pi^h\right) \eta \right\|_{W^{1,q'}} \, dt.
\end{aligned}$$

Letzteres können wir wegen $\|\mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \leq C$ aus (4.7) und der Hölder-Ungleichung für $i = 1,2$ auf

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{W^{1,q}} \left\| \left(I - \pi^h\right) \eta \right\|_{W^{1,q'}} \, dt \\
&\qquad \leq \left\| \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} \right\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \left\| \left(I - \pi^h\right) \eta \right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \\
&\qquad \leq C \left\| \left(I - \pi^h\right) \eta \right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}
\end{aligned}$$

weiter abschätzen. Nun haben wir in (4.51) von Bemerkung 4.6 festgestellt, dass $\| \left(I - \pi^h\right) \eta\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}$ gegen 0 konvergiert. Daher erhalten wir weiter für $i = 1,2$

$$\left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \left(I - \pi^h\right) \eta \right) \, dt \right| \leq C \left\| \left(I - \pi^h\right) \eta \right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

womit (4.65) hergeleitet ist.
Mit dem gerade gezeigten (4.65) und dem vorhin schon bewiesenen (4.59) können wir nun die gewünschte Konvergenz in (4.56) herleiten. Wegen der Definition von $\mathcal{G}$

erhalten wir für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right)^h - \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t}, \eta \right\rangle_{q'} dt \right| \\
&\quad = \left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right)^h \underbrace{- \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right) + \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right)}_{=0} \right. \\
&\qquad \left. - \left(\nabla \mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \nabla \eta \right) - \left(\mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \eta \right) dt \right|
\end{aligned}$$

und da $(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta) = -(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, (I - \pi^h)\eta) + (\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \eta)$ weiter

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right)^h - \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \pi^h \eta \right) dt \right| + \left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \left(I - \pi^h \right) \eta \right) dt \right| \\
&\qquad + \left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \eta \right) - \left(\nabla \mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \nabla \eta \right) - \left(\mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \eta \right) dt \right|
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Die ersten zwei Summanden auf der rechten Seite konvergieren wegen (4.59) und (4.65) für $h \to 0$ gegen 0. Es bleibt daher nurmehr zu zeigen, dass der dritte Summand ebenfalls gegen 0 geht.
Wie in (4.66) schon erwähnt, können wir Funktionen aus $L^2(\Omega)$ als Elemente des $(W^{1,q'}(\Omega))$ auffassen, also auch die Funktion $\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}$. Somit können wir für den dritten Summanden in (4.67)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \eta \right) - \left(\nabla \mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \nabla \eta \right) - \left(\mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \eta \right) dt \right| \\
&\quad = \left| \int_0^T \left(\nabla \mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \nabla \eta \right) + \left(\mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \eta \right) - \left(\nabla \mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \nabla \eta \right) - \left(\mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \eta \right) dt \right| \\
&\qquad = \left| \int_0^T \left(\nabla \left(\mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} - \mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right), \nabla \eta \right) + \left(\mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t} - \mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \eta \right) dt \right|
\end{aligned}$$

schreiben, was aber wegen der schwachen Konvergenz von $\mathcal{G} \frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}$ gegen $\mathcal{G} \frac{\partial u_i}{\partial t}$ in $L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega))$, welche wir im Lemma 4.4 gezeigt haben, für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert. Das heißt also, dass die rechte Seite der Abschätzung (4.67) für $h \to 0$ gegen 0 geht und damit die Konvergenz der Komponente in (4.56) bewiesen ist.

Die Terme $\int_0^T (\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) \nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla(\pi^h \eta))\, dt$ und $\int_0^T (\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) \nabla(\pi^h v), \nabla(\pi^h \eta))\, dt$:

Wir erinnern zunächst an die Funktion $\Lambda_\varepsilon : S^h \to [L^\infty(\Omega)]^{d \times d}$, welche für $z^h \in S^h$ und $\kappa \in \mathcal{T}^h$ durch $\Lambda_\varepsilon(z^h)|_\kappa = R_\kappa \widehat{\Lambda_\varepsilon}(\hat{z}^h)|_{\hat{\kappa}} R_\kappa^T$ definiert ist, wobei $\widehat{\Lambda_\varepsilon}(\hat{z}^h)|_{\hat{\kappa}}$ jene

Diagonalmatrix aus (2.28) ist. Bevor wir nun das Konvergenzverhalten der nächsten Komponenten aus (4.4) betrachten, wollen wir für Funktionen $\widetilde{u} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^r(\Omega_T)$ und $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'})$ für $i,j=1,2$

$$\left| \int_0^T \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) \nabla \widetilde{u}, \nabla \left(I - \pi^h \right) \eta \right) \, dt \right| \xrightarrow{h \to 0} 0 \qquad \text{und} \tag{4.68a}$$

$$\left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j \mathcal{I} \right) \nabla \widetilde{u}, \nabla \eta \right) \, dt \right| \xrightarrow{h \to 0} 0 \tag{4.68b}$$

herleiten. Für den ersten Teil machen wir uns die Abschätzung (4.52) zu Nutze und erhalten

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) \nabla \widetilde{u}, \nabla \left(I - \pi^h \right) \eta \right) \, dt \right| \\ &\qquad \overset{(4.52)}{\leq} \left\| \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) \right\|_{L^r(\Omega_T)} \left\| \nabla \widetilde{u} \right\|_{L^2(\Omega_T)} \left\| \nabla \left(I - \pi^h \right) \eta \right\|_{L^{q'}(\Omega_T)} \\ &\qquad\quad \leq \left\| \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) \right\|_{L^r(\Omega_T)} \left\| \widetilde{u} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \left\| \left(I - \pi^h \right) \eta \right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} . \end{aligned}$$

Der erste Faktor ist wegen (4.7) beschränkt, der zweite aus der Voraussetzung $\widetilde{u} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)))$. Der dritte Faktor konvergiert für $h \to 0$ gegen 0, was wir bereits in (4.51) gezeigt haben. Damit ist die erste Behauptung (4.68a) gezeigt.
Für die zweite Behauptung (4.68b) nehmen wir wieder ein $\widetilde{\eta}$ aus $H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$, den dichten Teilraum von $L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$. Wir erhalten somit für $j=1,2$

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j \mathcal{I} \right) \nabla \widetilde{u}, \nabla \eta \right) \, dt \right| \\ &= \left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j \mathcal{I} \right) \nabla \widetilde{u}, \nabla \widetilde{\eta} \right) - \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j \mathcal{I} \right) \nabla \widetilde{u}, \nabla \left(\widetilde{\eta} - \eta \right) \right) \, dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j \mathcal{I} \right) \nabla \widetilde{u}, \nabla \widetilde{\eta} \right) \, dt \right| \\ &\qquad + \left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j \mathcal{I} \right) \nabla \widetilde{u}, \nabla \left(\widetilde{\eta} - \eta \right) \right) \, dt \right| \end{aligned}$$

und weiter mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und (3.66)

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^T \left\| \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right) \nabla\widetilde{u} \right\|_{L^1} \, dt \right| \|\nabla\widetilde{\eta}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \\
&\qquad + \left\| \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right) \nabla\widetilde{u} \right\|_{L^q(\Omega_T)} \|\nabla\left(\widetilde{\eta}-\eta\right)\|_{L^{q'}(\Omega_T)} \\
&\leq \left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right\|_{L^2(\Omega_T)} \|\nabla\widetilde{u}\|_{L^2(\Omega_T)} \|\nabla\widetilde{\eta}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \\
&\qquad + \left(\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\nabla\widetilde{u}\right\|_{L^q(\Omega_T)} + \|u_j\nabla\widetilde{u}\|_{L^q(\Omega_T)} \right) \|\nabla\left(\widetilde{\eta}-\eta\right)\|_{L^{q'}(\Omega_T)} \\
&\overset{(3.66),r\geq 2}{\leq} \left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right\|_{L^2(,0,T;L^r(\Omega))} \|\widetilde{u}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \|\widetilde{\eta}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} \\
&\qquad + \left(\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right\|_{L^r(\Omega_T)} + \|u_j\|_{L^r(\Omega_T)} \right) \|\nabla\widetilde{u}\|_{L^2(\Omega_T)} \|(\widetilde{\eta}-\eta)\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Für den ersten Summanden wissen wir wegen der Voraussetzung an $\widetilde{u}$, dass die Norm $\|\widetilde{u}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ beschränkt ist. Daher erhalten wir zusätzlich mit der Einbettung $H^1(0,T;X) \hookrightarrow C(0,T;X)$ für den erste Summanden

$$\begin{aligned}
&\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right\|_{L^2(,0,T;L^r(\Omega))} \|\widetilde{u}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \|\widetilde{\eta}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} \\
&\qquad\qquad \leq C \left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right\|_{L^2(,0,T;L^r(\Omega))} \|\widetilde{\eta}\|_{H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} .
\end{aligned}$$

Im zweiten Summanden sind ebenfalls wegen der Voraussetzung an $\widetilde{u}$ und (4.7) die Normen $\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\|_{L^r(\Omega_T)}$, $\|u_j\|_{L^r(\Omega_T)}$ und $\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^2(\Omega_T)}$ beschränkt. Somit erhalten wir wegen der Dichtheit von $H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ in $L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ für $j=1,2$ die Existenz einer Konstante $C>0$, sodass

$$\begin{aligned}
&\left(\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right\|_{L^r(\Omega_T)} + \|u_j\|_{L^r(\Omega_T)} \right) \|\nabla\widetilde{u}\|_{L^2(\Omega_T)} \|(\widetilde{\eta}-\eta)\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \\
&\qquad\qquad \leq C \|(\widetilde{\eta}-\eta)\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} .
\end{aligned}$$

Damit können wir mit (4.69) folgern, dass für $j=1,2$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right) \nabla\widetilde{u}, \nabla\eta \right) \, dt \right| \\
&\leq C \left(\left\|\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right\|_{L^2(,0,T;L^r(\Omega))} \|\widetilde{\eta}\|_{H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} + \|(\widetilde{\eta}-\eta)\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \right)
\end{aligned}$$

gilt. Da wir bereits in Lemma 4.4 gezeigt haben, dass für $j=1,2$ die Funktion $\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)$ in $L^2(0,T;L^r(\Omega))$ gegen $u_i\mathcal{I}$ konvergiert, siehe (4.23e), und zusätzlich der Raum $H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ dicht in $L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ liegt, finden wir wieder für jedes beliebige $\widetilde{\varepsilon}>0$ eine Funktion $\widetilde{\eta} \in H^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ und ein $\overline{h}>0$, sodass

$$\left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+) - u_j\mathcal{I}\right) \nabla\widetilde{u}, \nabla\eta \right) \, dt \right| < \widetilde{\varepsilon} \quad \forall\, h \in (0,\overline{h}).$$

Somit konvergiert dieser Ausdruck für $h \to 0$ gegen 0 und (4.68b) ist gezeigt.
Mit den soeben gezeigten Punkten (4.68a) und (4.68b) können wir nun leicht die Konvergenz der beiden Komponenten für $i, j = 1, 2,\ j \neq i$

$$\int_0^T \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\left(\pi^h\eta\right)\right)\, dt \xrightarrow{h\to 0} \int_0^T (u_j\,\nabla u_i, \nabla\eta)\, dt \qquad \text{und} \tag{4.70a}$$

$$\int_0^T \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla(\pi^h v), \nabla\left(\pi^h\eta\right)\right)\, dt \xrightarrow{h\to 0} \int_0^T (u_j\,\nabla v, \nabla\eta)\, dt \tag{4.70b}$$

herleiten. Für die erste Konvergenz erhalten wir sofort wegen $U_{\varepsilon,i}^+ \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^r(\Omega_T)$ für $i, j = 1, 2,\ j \neq i$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\left(\pi^h\eta\right)\right) - (u_j\,\nabla u_i, \eta)\, dt \right| \\
&\qquad = \left| \int_0^T \Big[\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\left(I-\pi^h\right)\eta\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\eta\right) - (u_j\,\nabla u_i, \nabla\eta) \Big]\, dt \right| \\
&\qquad \le \left| \int_0^T \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\left(I-\pi^h\right)\eta\right)\, dt \right| \\
&\qquad\qquad + \left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) - u_j\right)\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\eta\right)\, dt \right| \xrightarrow{h\to 0} 0,
\end{aligned}$$

wegen (4.68a) und (4.68b). Für die zweite Konvergenz (4.70b) setzen wir für $\widetilde{u} = \pi^h v$, wobei nach Voraussetzung $v \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\beta}(\Omega)$ für $\beta > d$. Wir sehen nun, dass im Fall $d = 1$ wegen $v \in H^1(\Omega)$ und in den Fällen $d = 2, 3$ wegen $v \in W^{1,\beta}(\Omega)$ die Abschätzung (4.50) anwendbar ist, woraus folgt, dass

$$\pi^h v \in \begin{cases} L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) & \text{für } d = 1 \\ L^2\left(0,T;W^{1,\beta}(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \quad \text{wegen } \beta > d \geq 2 & \text{für } d = 2, 3. \end{cases}$$

Insbesondere ist $\pi^h v \in S^h \subseteq H^1(\Omega)$, und da weiter $[0,T]$ eine beschränkte Menge ist und $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ gilt, haben wir ebenfalls $v \in L^r(\Omega_T)$. Damit erfüllt $\widetilde{u} = \pi^h v$ die Bedingungen für (4.68a) und (4.68b) und wir erhalten, ähnlich wie in der letzten

Rechnung,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla(\pi^h v), \nabla\left(\pi^h\eta\right)\right) - \int_0^T \left(u_j\,\nabla v, \eta\right)\,dt \right| \\
&\quad = \left| \int_0^T \Big[\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla(\pi^h v), \nabla\left(I-\pi^h\right)\eta\right) + \left(u_j\nabla\left(I-\pi^h\right)v, \nabla\eta\right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) - u_j\right)\nabla(\pi^h v), \nabla\eta\right)\Big]\,dt \right| \\
&\quad \le \left| \int_0^T \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)\nabla(\pi^h v), \nabla\left(I-\pi^h\right)\eta\right)\,dt \right| + \left| \int_0^T \left(u_j\nabla\left(I-\pi^h\right)v, \nabla\eta\right)\,dt \right| \\
&\qquad + \left| \int_0^T \left(\left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) - u_j\right)\nabla(\pi^h v), \nabla\eta\right)\,dt \right|,
\end{aligned} \tag{4.71}$$

wobei der erste und der dritte Summand wegen (4.68a) und (4.68b) gegen 0 konvergiert. Für den zweiten Summanden erhalten wir für $j = 1, 2$ wegen (4.52)

$$\left| \int_0^T \left(u_j\nabla\left(I-\pi^h\right)v, \nabla\eta\right)\,dt \right| \le \|u_j\|_{L^r(\Omega_T)} \left\|\nabla\left(I-\pi^h\right)v\right\|_{L^{q'}(\Omega_T)} \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega_T)}\,. \tag{4.72}$$

Nun gilt wegen $q' > 2$ klarerweise $\|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega_T)} \le \|\nabla\eta\|_{L^{q'}(\Omega_T)} \le \|\eta\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}$. Außerdem wissen wir aus Lemma 4.4, dass $u_j \in L^r(\Omega_T)$ für $j = 1, 2$ liegt. Da außerdem $S^h \subseteq W^{1,q'}(\Omega)$ gilt, liegt die Funktion $\pi^h v$ ebenfalls in $L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$, denn sie ist unabhängig von der Zeit, was

$$\left\|\pi^h v\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}^{q'} = \int_0^T \left\|\pi^h v\right\|_{W^{1,q'}}^{q'} \le T\left\|\pi^h v\right\|_{W^{1,q'}}^{q'} < \infty$$

liefert. Daher können wir für (4.72) wegen des Konvergenzresultats aus (4.51)

$$\left| \int_0^T \left(u_j\nabla\left(I-\pi^h\right)v, \nabla\eta\right)\,dt \right| \le C\left\|\left(I-\pi^h\right)v\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

schreiben. Damit konvergiert auch der zweite Summand in (4.71), womit auch (4.70b) gezeigt ist.

Der Term $\int_0^T (\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla(\pi^h\eta))\,dt$:

Wir wollen nun die Konvergenz einer weiteren Komponente aus (4.4) zeigen, nämlich

$$\int_0^T \left(\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\left(\pi^h\eta\right)\right)\,dt \xrightarrow{h\to 0} \int_0^T \left(\nabla u_i, \nabla\eta\right)\,dt \tag{4.73}$$

für $i = 1, 2$ und $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$. Im Prinzip ist die Beweisführung ähnlich wie bei den letzten Punkten, denn wir betrachten wieder die Differenz für $i = 1, 2$ und

erhalten

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left(\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\left(\pi^h\eta\right)\right) - \left(\nabla u_i, \nabla\eta\right) \right| \\
&\quad = \left| \int_0^T \left(\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\left(I-\pi^h\right)\eta\right) - \left(\nabla\left(U_{\varepsilon,i}^+ - u_i\right), \nabla\eta\right) \right| \\
&\quad \overset{(4.52)}{\leq} \|1\|_{L^r(\Omega_T)} \left\|\nabla U_{\varepsilon,i}^+\right\|_{L^2(\Omega_T)} \left\|\nabla\left(I-\pi^h\right)\eta\right\|_{L^{q'}(\Omega_T)} + \left| \int_0^T \left(\nabla U_{\varepsilon,i}^+ - \nabla u_i, \nabla\eta\right)\, dt \right| \\
&\quad \leq (\mu(\Omega)T)^{\frac{1}{r}} \left\|U_{\varepsilon,i}^+\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \left\|\left(I-\pi^h\right)\eta\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \\
&\qquad\qquad + \left| \int_0^T \left(\nabla U_{\varepsilon,i}^+ - \nabla u_i, \nabla\eta\right)\, dt \right|.
\end{aligned}$$

Da die $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ - Norm von $U_{\varepsilon,i}^+$ wieder nach (4.7) beschränkt ist, konvergiert die erste Summe dank (4.51) gegen 0. Für das Integral bemerken wir, dass nach (4.23a) $U_{\varepsilon,i}^+ \rightharpoonup u_i$ in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ gilt, daher konvergiert insbesondere $\nabla U_{\varepsilon,i}^+$ schwach gegen ∇u_i in $L^2(\Omega_T)$. Damit verschwindet auch die zweite Summe für h gegen 0, und (4.73) ist gezeigt.

Der Term $\int_0^T (U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta)^h dt$:

Als nächstes wollen wir für $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$ und $i = 1,2$

$$\int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right)^h dt \xrightarrow{h\to 0} \int_0^T \left(u_i, \eta\right)\, dt \tag{4.74}$$

herleiten. Wieder schätzen wir die Differenz nach oben ab, was

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right)^h - \left(u_i, \eta\right)\, dt \right| \\
&\quad = \left| \int_0^T \left[\left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right)^h - \left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right) - \left(U_{\varepsilon,i}, \left(I-\pi^h\right)\eta\right) + \left(U_{\varepsilon,i}, \eta\right) - \left(u_i, \eta\right) \right] dt \right| \\
&\quad \leq \left| \int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right)^h - \left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right)\, dt \right| + \left| \int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \left(I-\pi^h\right)\eta\right)\, dt \right| \\
&\qquad\qquad + \left| \int_0^T \left(U_{\varepsilon,i} - u_i, \eta\right)\, dt \right|
\end{aligned} \tag{4.75}$$

liefert. Für den ersten Summanden verwenden wir, ähnlich wie zu Begin des Beweises, den Punkt (3.7), was mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und $\eta \in L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$

für $i = 1, 2$ zu

$$\begin{aligned}\left| \int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right)^h - \left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right)\, dt \right| &\le Ch \int_0^T \|U_{\varepsilon,i}\|_{L^q} \left\|\nabla\left(\pi^h\eta\right)\right\|_{L^{q'}} dt \\ &\le Ch \|U_{\varepsilon,i}\|_{L^q(\Omega_T)} \left\|\pi^h\eta\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \\ &\le Ch \underbrace{\|1\|_{L^r(\Omega_T)} \|U_{\varepsilon,i}\|_{L^2(\Omega_T)}}_{\le C \text{ wegen (4.7)}} \left\|\pi^h\eta\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \le Ch \quad (4.76)\end{aligned}$$

führt. Auf den zweiten Summanden können wir wieder (4.52) anwenden, daher gilt

$$\begin{aligned}\left| \int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \left(I - \pi^h\right)\eta\right)\, dt \right| &\le \|1\|_{L^r(\Omega_T)} \|U_{\varepsilon,i}\|_{L^2(\Omega_T)} \left\|\left(I - \pi^h\right)\eta\right\|_{L^q(\Omega_T)} \\ &\overset{(4.7)}{\le} C \left\|\left(I - \pi^h\right)\eta\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}. \quad (4.77)\end{aligned}$$

Mit (4.76) und (4.77) erhalten wir also für (4.75)

$$\begin{aligned}&\left| \int_0^T \left(U_{\varepsilon,i}, \pi^h\eta\right)^h - \left(u_i, \eta\right)\, dt \right| \\ &\qquad \le C \left(h + \left\|\left(I - \pi^h\right)\eta\right\|_{L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \right) + \left| \int_0^T \left(U_{\varepsilon,i} - u_i, \eta\right)\, dt \right|,\end{aligned}$$

wobei die erste Summe wegen (4.51) für $h \to 0$ gegen 0 geht. Das Integral konvergiert ebenfalls gegen 0, denn aus (4.23a) geht hervor, dass für $i = 1, 2$ $U_{\varepsilon,i}$ schwach gegen u_i in $L^2(0,t;H^1(\Omega))$ konvergiert, also insbesondere in $L^2(\Omega_T)$. Das zeigt (4.74).

Der Term $\int_0^T (\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+), \pi^h\eta)^h dt$:

Um die Konvergenz von (4.4) gegen (4.55a) vollständig zu beweisen, fehlt noch zu zeigen, dass für $\eta \in L^q(0,T;W^{1,q'}(\Omega))$

$$\int_0^T \left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+), \pi^h\eta\right)^h dt \xrightarrow{h\to 0} \int_0^T \left(u_i\, u_j, \eta\right)\, dt \quad (4.78)$$

gilt. Zunächst sehen wir, dass man wegen Punkt 4 aus Proposition 2.3

$$\left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+), \pi^h\eta\right)^h = \left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right)^h$$

für $i, j = 1, 2$, $j \ne i$, schreiben kann. Damit erhalten wir zusammen mit (4.54), der

Verallgemeinerung von (3.7), dass

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left[\left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+), \pi^h\eta\right)^h - \left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right)\right] dt \right| \\
&= \left| \int_0^T \left[\left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right)^h - \left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right)\right] dt \right| \\
&\le \int_0^T \left\| \left(I-\pi^h\right)\left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right]\pi^h\eta\right)\right\|_{L^1} dt \\
&\overset{(4.54)}{\le} Ch^2 \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \left\|\nabla\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right]\right\|_{L^r(\Omega_T)} \\
&\qquad\qquad \times \left\|\pi^h\eta\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Für den ersten Faktor können wir den Spezialfall des Satzes von Bramble-Hilbert aus (1.7) anwenden und erhalten zusammen mit (3.10b)

$$\begin{aligned}
\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\right\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &= \int_0^T \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\right\|^2_{H^1} dt \\
&\overset{(1.7)}{\le} C\int_0^T \left\|\nabla\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\right\|^2_{L^2} + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\right\|^2_{L^1} dt \\
&\overset{(3.10b)}{\le} \left\|\nabla\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\right\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \left\|U_{\varepsilon,i}^-\right\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \\
&\overset{r\ge 2}{\le} \left\|U_{\varepsilon,i}^-\right\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\right\|^2_{L^r(\Omega_T)},
\end{aligned}$$

wobei wegen (4.7) die Normen $\|U_{\varepsilon,i}^-\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ und $\|\pi^h[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)]\|^r_{L^r(\Omega_T)}$ beschränkt sind, daher finden wir eine Konstante $C>0$, sodass

$$\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\right\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C. \tag{4.80}$$

Da für jedes $t\in[0,T]$ die Funktion $\pi^h[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)]$ klarerweise in S^h ist, können wir für den zweiten Faktor die Ungleichung (3.3) benutzen (da $r\in[1,\infty]$), womit wir

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right]\right\|_{L^r(\Omega_T)} &= \left(\int_0^T \sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h} \left\|\nabla\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right]\right\|^r_{L^r(\kappa)} dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\le C\left(\int_0^T \sum_{\kappa\in\mathcal{T}^h} h_\kappa^{-r}\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right]\right\|^r_{L^r(\kappa)} dt\right)^{\frac{1}{r}} = Ch^{-1}\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right]\right\|_{L^r(\Omega_T)}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

erreichen. Somit können wir in (4.79) mit Hilfe von (4.80) und (4.81) weiter abschätzen

durch

$$\begin{aligned} Ch^2 \big\|\pi^h\big[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\big]\big\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &\big\|\nabla\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right]\big\|_{L^r(\Omega_T)} \\ &\times \big\|\pi^h\eta\big\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \\ \le Ch \underbrace{\big\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right]\big\|_{L^r(\Omega_T)}}_{\le C \text{ wegen (4.7)}} &\big\|\pi^h\eta\big\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \le Ch, \end{aligned}$$

womit wir für (4.79) in Summe

$$\left|\int_0^T \Big[\big(\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j}),\pi^h\eta\big)^h - \big(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\pi^h\eta\big)\Big]\right| \le Ch \quad (4.82)$$

bekommen. Als nächstes betrachten wir für $i=1,2$, $j\neq i$

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^T \Big[\big(\pi^h\big[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\big]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\pi^h\eta\big) - (u_i\,u_j,\eta)\Big]\,dt\right| \\ &\qquad = \left|\int_0^T \Big[\big(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\big(I-\pi^h\big)\eta\big) \right. \\ &\qquad\quad \left. - \big(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\eta\big) - (u_i\,u_j,\eta)\Big]\,dt\right| \\ &\qquad \le \left|\int_0^T \big(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\big(I-\pi^h\big)\eta\big)\;dt\right| \\ &\qquad\quad + \left|\int_0^T \big(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\eta\big) - (u_i\,u_j,\eta)\Big]\,dt\right|, \end{aligned}$$

was weiter mit (4.52) zu

$$\begin{aligned} &\le \big\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\big\|_{L^2(\Omega_T)}\big\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right]\big\|_{L^r(\Omega_T)}\big\|\big(I-\pi^h\big)\eta\big\|_{L^{q'}(\Omega_T)} \\ &\quad + \left|\int_0^T \big[\big(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\eta\big) - (u_i\,u_j,\eta)\big]\;dt\right|, \end{aligned} \quad (4.83)$$

nach oben abschätzbar ist. Da nach (4.80) sogar $\|\pi^h[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})]\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ beschränkt ist, ist sicherlich auch $\pi^h[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})]$ in $L^2(\Omega_T)$ beschränkt. Da $\|\pi^h[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})]\|_{L^r(\Omega_T)}$ nach (4.7) ebenfalls beschränkt ist, erhalten wir für den ersten Summanden in (4.83)

$$\begin{aligned} \big\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\big\|_{L^2(\Omega_T)}&\big\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right]\big\|_{L^r(\Omega_T)}\big\|\big(I-\pi^h\big)\eta\big\|_{L^{q'}(\Omega_T)} \\ &\le C\big\|\big(I-\pi^h\big)\eta\big\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Für den zweiten Summanden bekommen wir durch Einschieben der 0 in Form von $(\pi^h[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})]u_j,\eta) - (\pi^h[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})]u_j,\eta)$ für $i=1,2$, $j\neq i$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \left[\left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\eta\right) - (u_i\,u_j,\eta)\right]dt\right| \\
&= \left|\int_0^T \left[\left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right]-u_j\right),\eta\right) + \left(\left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]-u_i\right)u_j,\eta\right)\right]dt\right| \\
&\overset{(4.52)}{\leq} \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\right\|_{L^r(\Omega_T)}\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right]-u_j\right\|_{L^2(\Omega_T)}\|\eta\|_{L^{q'}(\Omega_T)} \\
&\qquad + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]-u_i\right\|_{L^2(\Omega_T)}\|u_i\|_{L^r(\Omega_T)}\|\eta\|_{L^{q'}(\Omega_T)}
\end{aligned}$$

und da nach (4.22) bzw. (4.7) $\|\pi^h[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})]\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C$ bzw. $u_i \in L^r(\Omega_T)$ weiter

$$\leq C\left(\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right]-u_j\right\|_{L^2(\Omega_T)} + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]-u_i\right\|_{L^2(\Omega_T)}\right)\|\eta\|_{L^{q'}(\Omega_T)}.$$

Wenn wir nun die Punkte (4.83), (4.84) und (4.2) miteinander kombinieren, bekommen wir die Existenz einer Konstante $C>0$, sodass für $i=1,2$, $j\neq i$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \left[\left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right],\pi^h\eta\right) - (u_i\,u_j,\eta)\right]dt\right| \\
&\leq C\Big[\left\|\left(I-\pi^h\right)\eta\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \\
&\quad + \left(\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^+_{\varepsilon,j})\right]-u_j\right\|_{L^2(\Omega_T)} + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U^-_{\varepsilon,i})\right]-u_i\right\|_{L^2(\Omega_T)}\right)\|\eta\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}\Big]
\end{aligned} \tag{4.85}$$

erfüllt ist. Nun haben wir alle Mittel, um die Konvergenz von (4.78) zu zeigen, denn

es gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \left(\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+), \pi^h\eta\right)^h - (u_i\,u_j,\eta)\ dt \right| \\
&= \left| \int_0^T \Big[\left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right)^h - \left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right) + (u_i\,u_j,\eta) \Big] \right| \\
&\le \left| \int_0^T \left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right)^h - \left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right)\ dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^T \left(\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right]\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right], \pi^h\eta\right) + (u_i\,u_j,\eta)\ dt \right|
\end{aligned}$$

und mit den gerade hergeleiteten Punkten (4.82) und (4.85)

$$\begin{aligned}
&\le C\Bigg[h + \left\|\left(I-\pi^h\right)\eta\right\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \\
&\quad + \left(\left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)\right] - u_j\right\|_{L^2(\Omega_T)} + \left\|\pi^h\left[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-)\right] - u_i\right\|_{L^2(\Omega_T)} \right) \|\eta\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))} \Bigg].
\end{aligned}$$

Wieder verschwindet mit $h \to 0$ der Term $\|(I-\pi^h)\eta\|_{L^{q'}(0,T;W^{1,q'}(\Omega))}$. Außerdem haben wir in Lemma 4.4 gezeigt, dass die Terme $\pi^h[\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^\pm)]$ für $i = 1,2$ stark gegen u_i in $L^2(0,T;L^r(\Omega))$ konvergieren. Wegen der stetigen Einbettung $L^2(0,T;L^r(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ gilt dieses Konvergenzverhalten auch in $L^2(\Omega_T)$, womit alle Summanden gegen 0 konvergieren. Damit ist schlussendlich auch (3.36) gezeigt.

Wir haben nun für alle Komponenten in (4.4) das Konvergenzverhalten untersucht. Wenn wir daher alle gezeigten Konvergenzen (4.56), (4.70a), (4.73), (4.70b), (4.74) und (4.78) auf die Gleichung (4.4) des Problems ($\mathrm{P}_\varepsilon^{h,\tau}$) anwenden, erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Bigg[&\left(\frac{\partial U_{\varepsilon,i}}{\partial t}, \chi\right)^h + \left([c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+) + \Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^+)]\nabla U_{\varepsilon,i}^+, \nabla\chi\right) \\
&+ \left(\Lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+)[\nabla U_{\varepsilon,j}^+ + b_i\nabla(\pi^h v)], \nabla\chi\right) \Bigg] dt \\
&= \int_0^T \left(\mu_i U_{\varepsilon,i}^+ - [\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^-) + \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,j}^-)]\lambda_\varepsilon(U_{\varepsilon,i}^+), \chi\right)^h dt
\end{aligned}$$

für $h \to 0$ gegen

$$\int_0^T \left[\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t}, \chi \right\rangle_{q'} + \left(\left[c_i + 2a_i u_i + u_j \right] \nabla u_i + u_i \nabla u_j + b_i \nabla v, \nabla \eta \right) \right] dt$$
$$= \int_0^T \left(\left[\mu_i - \gamma_{ii} u_i - \gamma_{ij} u_j \right] u_i, \eta \right) dt$$

konvergiert. Damit ist der erste Teil (4.55a) des Anfangswertproblems bewiesen.

Die Anfangswerte $u_i(.,0) = u_i^0(.)$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$:

Wir haben bereits in Lemma 4.4 gezeigt, dass $u_i(.,0) = u_i^0(.)$ in $(W^{1,q'}(\Omega))'$ erfüllt ist. Damit ist auch der Punkt (4.55b) gezeigt und somit das Theorem vollständig bewiesen.

□

5 Numerik

In diesem Kapitel wollen wir kurz auf den in [2] für den Fall $d = 1$ verwendeten Algorithmus eingehen. Es handelt sich dabei um einen iterativen Algorithmus, es werden daher die Lösungen $U^n_{\varepsilon,1}$ und $U^n_{\varepsilon,2}$ der Gleichungen (2.46) in ($\mathrm{P}^{h,\tau}_{\varepsilon}$) für jeden Zeitschritt $n = 1, \dots, N$ iterativ approximiert. Dabei wird in jeder Iteration ein lineares Gleichungssystem gelöst. Wir betrachten also folgendes Problem:

($\mathbf{P}^{h,\tau}_{\varepsilon,\mathrm{num}}$) Finde für gegebene Funktionen $\{U^{n,0}_{\varepsilon,1}, U^{n,0}_{\varepsilon,2}\} \in [S^h]^2$ und für $k \geq 1$ ein Paar $\{U^{n,k}_{\varepsilon,1}, U^{n,k}_{\varepsilon,2}\} \in [S^h]^2$, welches das lineare Problem

$$\begin{aligned}\left(\frac{U^{n,k}_{\varepsilon,i} - U^{n-1}_{\varepsilon,i}}{\tau_n}, \chi\right)^h &+ \left([c_i + 2a_i\Lambda_\varepsilon(U^{n,k-1}_{\varepsilon,i}) + \Lambda_\varepsilon(U^{n,k-1}_{\varepsilon,j})]\nabla U^{n,k}_{\varepsilon,i}, \nabla\chi\right) \\ &+ \left(\Lambda_\varepsilon(U^{n,k-1}_{\varepsilon,i})\left[\nabla U^{n,k}_{\varepsilon,j} + b_i\nabla(\pi^h v)\right], \nabla\chi\right) \\ = \left(\mu_i U^{n,k}_{\varepsilon,i} - [\gamma_{ii}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,i}) &+ \gamma_{ij}\lambda_\varepsilon(U^{n-1}_{\varepsilon,j})]\lambda_\varepsilon(U^{n,k-1}_{\varepsilon,i}), \chi\right)^h \qquad (5.1)\end{aligned}$$

für alle $\chi \in S^h$ und $i = 1, 2$, $j \neq i$ löst.

Um dieses Problem zu lösen, setzen wir wie in [2] die Startwerte $U^{n,0}_{\varepsilon,i} = U^{n-1}_{\varepsilon,i}$ für $n \geq 1$ und lassen die Iteration laufen. Sobald der maximale Abstand zwischen den benachbarten Iterationsschritten einen gewünschten Wert unterschreitet, also

$$\max_{i=1,2} \left\| U^{n,k}_{\varepsilon,i} - U^{n,k-1}_{\varepsilon,i} \right\|_{L^\infty} < tol$$

erfüllt ist, stoppen wir die Iteration und setzen $U^n_{\varepsilon,i} = U^{n,k}_{\varepsilon,i}$.

Wie kann man nun das Problem ($\mathrm{P}^{h,\tau}_{\varepsilon,\mathrm{num}}$) einfach implementieren? Da das Problem für alle $\chi \in S^h$ zu lösen ist, bietet es sich an, die Basisfunktionen χ_j aus B^h zu verwenden. Falls wir ein Intervall $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ mit den Grenzen x_0 und x_{N_h} betrachten und dieses in N_h-viele Teile zerlegen, so erhalten wir (N_h+1)-viele Knoten $x_0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_{N_h-1} < p_{N_h} = x_{N_h}$ und somit auch $(N_h + 1)$-viele Basisfunktionen mit $\chi_j(p_i) = \delta^j_i$ für $i, j = 0, \dots, N_h$. Wenn wir also die Basisfunktionen in (5.1) einsetzten, bekommen wir für jedes $i = 1, 2$ $(N_h + 1)$-viele Gleichungen.
Das Geschickte an dieser Vorgehensweise ist, dass die auftretenden Integrale in (5.1) nur auf den Trägern der Basisfunktionen zu betrachten sind, welche für χ_j nur aus den direkt anliegenden Intervallen $[p_{j-1}, p_{j+1}]$ für $j = 1, \dots, N_h - 1$ bzw. $[x_0, p_1]$ und $[p_{N_h-1}, x_{N_h}]$ für $j = 0, N_h$ bestehen. Die Matrix, welche für ein $i = 1, 2$ durch die $(N_h + 1)$-viele Gleichungen entsteht, ist daher nur sehr schwach besetzt, was man bei der Implementierung ausnutzen kann, um Speicherplatz und Rechenzeit zu sparen.

Wir wollen für alle Experimente in diesem Kapitel $\Omega = (0,3)$ und $v = 1.5(x-0.5)^2$ wählen. Außerdem sei stets $\mu_i, \gamma_{i,j} = 0$ für $i,j = 1,2$, falls diese Parameter nicht expliziet angegeben werden.

A: Diffusionskoeffizienten I

Für diesen Versuch betrachten wir für Ω eine äquidistante Zerlegung mit $h = 1.5 \times 10^{-2}$, also $N_h = 200$. Außerdem setzen wir $\tau_n = \tau = 10^{-2}$, $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$ und $tol = 10^{-5}$.

Wir wollen den Einfluss der Diffusionskoeffizienten a_i, $i = 1,2$ auf das Wanderverhalten der Populationen untersuchen. Dafür setzen wir $b_i = c_i = 1$, $u_1^0(x) = 10$, $u_2^0(x) = 20$ und $a_i = 0, 0.1, 10$ für $i = 1,2$. Die Graphen der Funktionen u_i zum Zeitpunkt $t = 5$ sind in Abbildung 4.A zu sehen, wobei nach [2] die Populationen zu diesem Zeitpunkt eine stationäre Lösung annehmen. Man kann gut erkennen, dass für kleine a_i das umweltbedingte Potential großen Einfluss auf den Verlauf der Populationen nimmt, wohingegen bei größeren Werten für a_i dieser Einfluss stets weniger wird.

B: Diffusionskoeffizienten II

Wir wählen die Parameter h, τ, ε und tol wie in Experiment A.

Nun betrachten wir den Einfluss der Diffusionskoeffizienten c_i, $i = 1,2$. Dafür setzen wir $a_i = 0.01$, $b_i = 1$, $u_1^0(x) = 10$, $u_2^0(x) = 20$ und $c_i = 1, 10, 100$ für $i = 1,2$ und geben die Graphen der stationären Lösungen u_i aus, siehe Abbildung 4.B (Die Zeiten, zu denen stationäre Lösungen gefunden werden, sind wieder aus [2] entnommen). Die Resultate ähneln jenen aus Experiment A, was zu erwarten war.

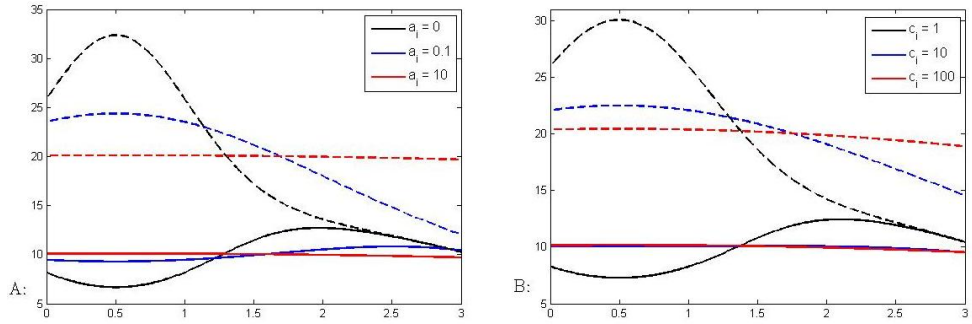

Abbildung 4: A: Kurven mit den Werten a_i B: Kurven mit Werten c_i

Bemerkung 5.1. Es sei bemerkt, dass die in [2] verwendeten Parameter h, τ, ε und tol wesentlich kleiner gewählt wurden, was die Approximationen klarerweise verfeinert.

Wenn man jedoch die erreichten Ergebnisse betrachtet, stellt man fest, dass die erzielten Resultate kaum von jenen in [2] abweichen.
Es gibt jedoch einen großen Nachteil, welcher aus der Wahl der Parameter hervorgeht: Der in [2] implementierte Algorithmus überprüft, ob stationäre Lösungen für $i = 1, 2$ erreicht werden. Dabei wird für $n \geq 1$ kontrolliert, ob die erste Iteration $U_{\varepsilon,i}^{n,1}$ zur Berechnung des neuen Wertes $U_{\varepsilon,i}^{n}$ wesentlich von dem vorherigen Wert $U_{\varepsilon,i}^{n-1}$ abweicht. Falls das nicht der Fall sein sollte, also

$$\max_{i=1,2} \left\| U_{\varepsilon,i}^{n,1} - U_{\varepsilon,i}^{n,0} \right\|_{L^\infty} < tol_s \tag{5.2}$$

für $tol_s << tol$ gilt, so erkennt der Algorithmus dies als Erreichen einer stationären Lösung an und bricht ab.
Diese Methode zum Erkennen von stationären Lösungen wurde auch in den Experimenten A und B dieser Arbeit betrachtet, wobei man erkennen konnte, dass die hier verwendeten Parameter nicht klein genug sind und daher für $tol_s << tol$ das Abbruchkriterium (5.2) nicht erreicht werden konnte.

C: Trennung der Spezien
Für diesen Versuch wurden exakt die gleichen Parameter wie in [2] gewählt, also $h = 10^{-2}$, $\tau_n = \tau = 10^{-3}$, $\varepsilon = 5 \times 10^{-7}$ und $tol = 10^{-7}$. Außerdem ist $a_1 = 1$, $a_2 = 0.01$, $b_1 = 40$, $b_2 = 1$ und $c_1 = c_2 = 1$, sowie $u_1^0(x) = u_2^0(x) = 10$. Für die in Abbildung 5.C dargestellten Graphen wurden wie in [2] die Lösungen u_i zum Zeitpunkt $t = 1.5$ ausgewertet.
Man kann gut erkennen, dass auf Grund des umweltbedingten Potentials und der wesentlich schnelleren Fortbewegung der Spezies u_1 ($b_1 >> b_2$) eine Aufteilung der Populationen auf dem Gebiet Ω stattfindet.

Bemerkung 5.2. Wie man in den Abbildungen 4 und 5.C erkennen bzw. durch numerische Integration nachrechnen kann, bleibt bei den Experimenten A,B und C stets die Fläche unter den Kurven gleich. Grund dafür ist, dass wegen der homogenen Reaktionsterme $\mu_i, \gamma_{i,j} = 0$ die Funktionen $g_i(u_1, u_2)$ für $i, j = 1, 2$ gleich Null sind, und daher Massenerhaltung vorliegt.

D: Inhomogene Reaktionsterme
Wir wählen alle Parameter wie in Experiment A, außer $a_1 = 0.1$ und $a_2 = 0.05$. Außerdem seien die Reaktionsterme $\mu_i = 1$ und

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Laut [2] nehmen die Populationen zum Zeitpunkt $t = 100$ stationäre Lösungen an. Man kann nun in Abbildung 5.D erkennen, dass im Gegensatz zu den vorherigen Experimenten die Flächen der Graphen sich mit der Zeit ändern, was auf Grund der inhomogenen Reaktionsterme plausibel ist.

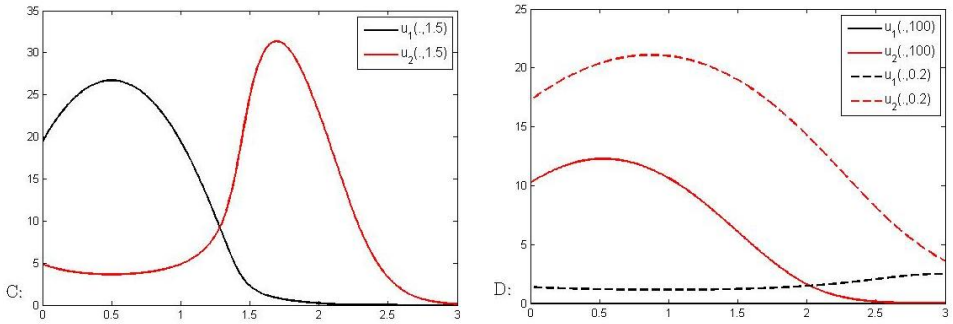

Abbildung 5: C: Trennung der Spezien D: Reaktionsterme

Literatur

[1] R. A. Adams: Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975

[2] J. W. Barrett, J. F. Blowey: Finite element approximation of a nonlinear cross-diffusion population model. Numer. Math. 98, 2004, 195-221

[3] J. W. Barrett, R. Nürnberg: Finite element approximation of a nonlinear degenerate parabolic system describing bacterial pattern formation. Interfaces Free Bound. 4, 2002, 277-307

[4] J. W. Barrett, R. Nürnberg: Convergence of a finite element approximation of surfactant spreading on a thin film in the presence of van der Waals forces. IMA J. Numer. Anal. 24, 2004, 323-363

[5] L. Chen, A. Jüngel: Analysis of a multi-dimensional parabolic population model with strong cross-diffusion. SIAM J. Math. Anal. 36, 2004, 301-322

[6] P. G. Ciarlet: The finite element method for elliptic problems, Vol.4. North-Holland, New York, 1978

[7] W. Dahmen, B. Faermann, I. G. Graham, W. Hackbusch, S. A. Sauter: Inverse inequalities on non-quasi-uniform meshes and application to the mortar element method. Math. Comp. 73, 2004, 1107-1138

[8] A. Ern, J.-L. Guermond: Theory and practice of finite elements, Vol.159. Springer, New York, 2004

[9] G. Galiano, M. L. Garzón, A. Jüngel: Analysis and numerical solution of a nonlinear cross-diffusion system arising in population dynamics. Rev. Real. Acad. Ciencias, Serie A. Mat. 95, 2001, 281-295

[10] G. Galiano, M. L. Garzón, A. Jüngel: Semi-discretization in time and numerical convergence of solutions of a nonlinear cross-diffusion population model. Numer. Math. 93, 2003, 655-673

[11] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order. Springer, Berlin Heidelberg, 1977

[12] C. Großmann, H.-G. Roos: Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart, 1992

[13] K. Gröger, J. Rehberg: Resolvent estimates in $W^{-1,p}$ for second order elliptic differential operators in case of mixed boundary conditions. Math. Ann. 285, 1989, 105-113

[14] G. Grün, M. Rumpf: Nonnegativity preserving convergent schemes for the thin film equation. Numer. Math. 87, 2000, 113-152

[15] L. Nirenberg: On elliptic partial differential equations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. Ser. 3 13, 1959, 115-162

[16] P. A. Raviart: The use of numerical integration in finite element methods for solving parabolic equations. Topics in Numerical Analysis, Proceedings of the Royal Irish Academy Conference on Numerical Analysis 1972, Dublin, 1973, 233-264

[17] J. Simon: Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Ann. Math. Pura. Appl. 146, 1987, 65-96