Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Diplomarbeit

Duration in der Spätschadenreserve

ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien
unter Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Christina Pommer
1220 Wien, Kratochwjlestraße 8/6/21

Wien, März 2012

Danksagung

Ich bedanke mich vor allem bei meinem Betreuer Herrn Mag. Krischanitz, der mir trotz seiner vielen Arbeit die Möglichkeit gab, bei ihm meine Diplomarbeit zu schreiben. Er nahm sich immer für mich Zeit und stand mir mit Rat und Tat zur Seite.

Ein besonderer Dank gilt auch meinem Co-Betreuer Herrn Prof. Grandits, der mir jederzeit für Fragen zur Verfügung stand.

Ich möchte mich außerdem bei meiner Familie und meinen Freunden für ihre moralische Unterstützung bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Schadenreservierung und das Chain-Ladder-Verfahren **7**

2.1 Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung 7

2.1.1 Problemstellung 7

2.1.2 Das Abwicklungsdreieck 9

2.1.3 Die Daten 11

2.1.4 Bedeutung der Schätzgenauigkeit 13

2.2 Das Chain-Ladder-Verfahren 14

2.2.1 Grundlagen 14

2.2.2 Sensitivität des Chain-Ladder-Verfahrens 19

2.2.3 Genauigkeit des Chain-Ladder-Verfahrens 20

2.2.4 Beispiel 22

3 Das Duration-Konzept für Zahlungsströme **24**

3.1 Die Bewertung von Zahlungsströmen 24

3.1.1 Das Barwertkonzept 24

3.1.2 Stetige Verzinsung 26

3.1.3 Eigenschaften des Barwerts 27

3.1.4 Nominal- und Realzins 27

3.2 Die Duration von Zahlungsströmen 28

3.2.1 Voraussetzungen 28

3.2.2 Der kompensatorische Effekt 29

3.2.3 Herleitung der Duration-Formel 32

3.2.4 Einflussfaktoren 35

3.3 Duration als Zeitmaß 36

3.3.1 Duration eines Portfolios 36

3.3.2 Immunisierung 37

3.3.3 Beispiel für eine einmalige Zinsänderung 38

3.4 Duration als Risikomaß 39

3.4.1 Preisschwankungen 40
3.4.2 Modifizierte Duration 42
3.4.3 Genauigkeit der Duration: die Konvexität 44

4 Die Duration der Spätschadenreserve 48

4.1 Duration-Matching 48
4.2 Abwicklungsdreieck und Schadenzahlungsstrom 49
4.3 Diskontierte Spätschadenreserve 51
4.4 Besonderheiten der Abwicklungsfaktoren 54
4.4.1 Abwicklungsprozentsatz 55
4.4.2 Das Abwicklungsverhalten 55
4.4.3 Formel für die Abwicklungsfaktoren 58
4.5 Darstellung des Modells in Excel 60
4.6 Anpassung der Formeln für Schadenzahlungen 62
4.6.1 Macaulay-Duration 62
4.6.2 Konvexität 64

5 Analyse der Duration der Spätschadenreserve 66

5.1 Einfluss des Anfangswertes S_{11} 66
5.2 Abwicklungsdauer 66
5.3 Abwicklungshöhe 73
5.4 Abwicklungskrümmung 76
5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse 80

6 Zusammenfassung 82

1 Einleitung

Die Duration gibt die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer einer Kapitalanlage an und dient zur Absicherung einer Investition gegen das Zinsänderungsrisiko.
Die Duration ist jener Zeitpunkt, zu dem der Wert eines Zahlungsstromes vor einer Zinsänderung mit dem Wert des Zahlungsstromes nach der Zinsänderung übereinstimmt, und ist unabhängig von der Höhe der Zinsänderung. Der Zahlungsstrom ist zu diesem Zeitpunkt also vor dem Zinsänderungsrisiko geschützt. Diese wertvolle Eigenschaft wird zur Immunisierung von Kapitalanlagen gegen das Zinsänderungsrisiko verwendet.
Das Duration-Konzept wurde 1938 von F. Macaulay für festverzinsliche Wertpapiere entwickelt, weshalb die Duration oft als Macaulay-Duration bezeichnet wird.

Ziel dieser Arbeit ist die Anwendung des Duration-Konzeptes auf die Spätschadenreserve in der Schadenversicherungsmathematik und dessen Analyse von Auswirkungen von Zinsänderungen.

Bevor wir das Konzept der Duration auf die Schadenreserve anwenden, gibt Kapitel 2 einen Überblick über die Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung. Dieses Kapitel, das schon Thema meiner Seminararbeit im Wintersemester 2008/09 war, orientiert sich an Macks „Schadenversicherungsmathematik“ [9].
In einigen Versicherungssparten kann zwischen dem Schadeneintritt und dessen vollständiger Regulierung eine große zeitliche Differenz liegen. Wegen der langen Abwicklungsdauer muss, vor allem in der Haftpflichtversicherung, eine Spätschadenreserve gebildet werden. Im Laufe der Zeit wurden viele verschiedene Reserveschätzverfahren entwickelt, die alle versuchen, Informationen aus früheren Schadenjahren auf spätere zu übertragen. In diesem Kapitel wird nur das Chain-Ladder-Verfahren vorgestellt, das zu den wichtigsten Verfahren zählt.

Im dritten Kapitel untersuchen wir die Auswirkungen von Zinsänderungen auf den Bar- und Endwert eines Zahlungsstromes und können die Macaulay-Duration für allgemeine Zahlungsströme herleiten. Anhand eines Beispiels wird ihre Anwendung als Immunisierungsmöglichkeit erklärt.
Wir lernen außerdem die modifizierte Duration kennen, die als Maß für die Zinssensitivität einer Investition verwendet wird und Auskunft über die Höhe der Preisveränderung bei einer Zinsänderung gibt.
Diese Informationen stammen aus Uhlir und Steiners „ Wertpapieranalyse“ [14] und Fabozzis „Bond Markets, Analysis and Strategies“ [5].

In Kapitel 4 führen wir die Informationen der letzten beiden Kapitel zusammen und berechnen die Duration der Spätschadenreserve. Hierfür stellen wir ein Modell für das Abwicklungsdreieck der Schadenzahlungen auf, welches sich auch leicht im Programm Excel umsetzen lässt. Wir untersuchen die Eigenschaften der Abwicklungsfaktoren und konzentrieren uns auf drei wesentliche Unterschiede im Abwicklungsverhalten: die Abwicklungsdauer, die Höhe des Anteils der Schadenzahlung nach dem ersten Abwicklungsjahr und die Krümmung der Abwicklungsprozentkurve.
Zum Schluss dieses Kapitels versuchen wir die allgemeine Duration-Formel den Schadenzahlungsströmen anzupassen und zu vereinfachen.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit untersuchen wir die Auswirkungen von Zins- und Volumsänderungen auf die Macaulay-Duration der Spätschadenreserve, wobei wir die Analyse nach den obigen drei Abwicklungsverhalten gliedern.

2 Schadenreservierung und das Chain-Ladder-Verfahren

In diesem Kapitel werden der Vorgang der Schadenabwicklung und die daraus resultierende Problematik der Spätschäden beschrieben. Für die Berechnung der Spätschadenreserve wurden viele verschiedene Verfahren entwickelt.
Die bereits bekannten Daten werden im sogenannten Abwicklungsdreieck dargestellt, welches in Kapitel 2.1.2 beschrieben wird.
Das wohl wichtigste und bekannteste Verfahren ist das Chain-Ladder-Verfahren, das im zweiten Teil dieses Kapitels vorgestellt wird.
Dieses Kapitel basiert hauptsächlich auf Macks „Schadenversicherungsmathematik" [9] sowie ein paar Erweiterungen aus dem „Handbuch zur Schadenreservierung" von Radtke und Schmidt [13].

2.1 Schadenreservierung bei lang andauernder Schadenabwicklung

2.1.1 Problemstellung[1]

Nach dem Eintritt eines Schadenfalles muss der Versicherungsnehmer das Versicherungsunternehmen über den Schaden und dessen Ursache informieren. Daraufhin wird der Fall von Sachbearbeitern überprüft. Es muss geklärt werden, ob der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt des Schadeneintritts überhaupt versichert war und ob der Schaden von der bestehenden Polizze gedeckt ist, nur dann unterliegt der Versicherer der Leistungspflicht. Wenn dies der Fall ist, wird die Höhe der Schadensleistung ermittelt und es kommt zur Entschädigungszahlung an den Versicherungsnehmer und somit zum Abschluss der Schadenregulierung.
Es entsteht also eine zeitliche Differenz zwischen dem Schadeneintritt bzw. der Schadenverursachung und dessen vollständiger Regulierung. In den meisten Versicherungssparten dauert die Abwicklungszeit nur ein bis zwei Monate. In der Haftpflichtversicherung kann diese Zeitspanne jedoch auch mehrere Jahre betragen. Zwei wesentliche Gründe dafür sind:

1. *Späte Manifestation*: Oft werden Schäden erst lange Zeit nach ihrer Verursachung bemerkt, weil sie nur unter bestimmten Gegebenheiten auftreten. Zum Beispiel werden Fehler eines Architekten eventuell erst bei besonderer Belastung eines Bauwerks bemerkbar, oder möglicherweise treten Fehler eines Notars erst bei der Eröffnung eines Testaments auf. Die Haftpflichtversicherung deckt auch solche Schäden, sofern die Polizze zur Zeit der Verursachung des Schadens in Kraft war.

[1] vgl. [9, Kap. 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

2. *Lange Regulierungsdauer*: Selbst nach der Meldung des Schadeneintritts an den Versicherer kann es lange Zeit dauern, bis die endgültige Schadenhöhe bekannt ist, da sie zum Beispiel vom Ausgang eines Gerichtsprozesses, von Kosten einer längeren ärztlichen Behandlung oder einer Reparatur abhängig ist.

Es gibt also zwei Arten von Schäden, deren Höhe zum Ende einer Abrechnungsperiode noch nicht vollständig bekannt ist, weshalb Versicherungsunternehmen Reserven bilden müssen. Es wird unterschieden zwischen:

1. **IBNR-Schäden:** Die Abkürzung IBNR bedeutet „incurred but not reported“ und bezeichnet Schäden, die zwar schon verursacht bzw. eingetreten, dem Versicherer aber noch nicht bekannt sind. Der Versicherer ist verpflichtet eine IBNR-Schadenreserve zu bilden, falls solche Schäden erfahrungsgemäß zu erwarten sind.

2. **IBNER-Schäden:** IBNER steht für „incurred but not enough reserved“. Dies sind Schäden, die zwar dem Versicherer gemeldet, aber noch nicht vollständig reguliert sind. Manchmal werden sie auch RBNS-Schäden (RBNS = reported but not settled) genannt. Für diese Fälle muss, basierend auf der verfügbaren Information des Einzelschadens und aus Erfahrungswerten, eine Einzelfallreserve festgesetzt werden. Die Differenz zwischen den später tatsächlich anfallenden Kosten und der Einzelfallreserve kann ein Abwicklungsgewinn oder -verlust sein. Nimmt die Schadenhöhe im Lauf der Abwicklungszeit stärker zu als angenommen, so tritt ein Abwicklungsverlust ein. Ist aus Erfahrung mit einem negativen Abwicklungsergebnis für den Bestand zu rechnen, wird eine IBNER-Schadenreserve gebildet.

Im Folgenden wird für die zwei eben genannten Reservearten der Überbegriff (Spät-) Schadenreserve verwendet.

Die Schadenrückstellungen stellen in der Regel den größten versicherungstechnischen Passivposten in der Bilanz einer Schaden- und Unfallversicherung dar. Deshalb ist die Bestimmung und Bewertung dieser Reserven von wirtschaftlicher Bedeutung.
Während die IBNR-Reserve Einfluss auf die Erstellung der externen Rechnungslegung (Jahresabschluss und Lagebericht, die veröffentlicht werden) und die Prämienkalkulation, welche ja von dem vergangenen Schadenverlauf abhängt, hat, ist die IBNER-Reserve für die Prämienkalkulation und die interne Rechnungslegung (detaillierter Bericht an die Versicherungsaufsichtsbehörde, der auf der externen Rechnungslegung

aufbaut) wichtig.[2] Daher ist eine möglichst genaue Schätzung der Spätschadenreserve erforderlich.

In vielen Ländern wird von den Aufsichtsbehörden verlangt, dass die Höhe der Spätschadenreserve, ähnlich wie die der Deckungsrückstellung in der Lebensversicherung, von einem Aktuar beglaubigt wird.

Die Spätschadenreservierungsproblematik betrifft den Rückversicherer in der Haftpflichtversicherung bei den häufig vorkommenden Schadenexzedentenrückversicherungsverträgen stark. Hier übernimmt der Rückversicherer jenen Teil der Schadenhöhe eines Schadenfalles, der einen zuvor festgesetzten Betrag, die Priorität, übersteigt. Oft ist dem Erstversicherer bei der Meldung eines Schadens noch nicht bekannt, ob die Schadenhöhe die Priorität übersteigen wird, und er kann deshalb dem Rückversicherer am Ende eines Vertragsjahres nicht definitiv mitteilen, welche Beträge er übernehmen muss. Für den Rückversicherer steigt daher die Spätschadenreservierungsproblematik enorm, da für ihn auch solche Schäden als IBNR-Schäden zählen.

Für die Schätzung der Einzelfallreserven wird kein mathematisches Verfahren benötigt, sie beruht hauptsächlich auf der Erfahrung des zuständigen Sachbearbeiters und den verfügbaren Informationen über den Vorgang des Einzelfalls.
Aufgrund der entscheidenden Bedeutung der IBNR- und IBNER-Reserve sind für deren Schätzung hingegen einige mathematische Schätzverfahren entwickelt worden. Sie alle versuchen, die Erfahrungen und Informationen früherer Schadeneintrittsjahre auf spätere Anfalljahre zu übertragen. Somit kann es jedoch auch passieren, dass sie wegen Trend- oder Strukturänderungen, die sich im Laufe der Zeit ereignen (z.B. Änderungen in der Schadenregulierung, Zeichnungspolitik oder Rechtsprechung), versagen.
Deshalb nehmen wir an, dass im Verlauf der betrachteten Jahre keine solchen Trend- oder Strukturbrüche stattfinden.

2.1.2 Das Abwicklungsdreieck[3]

Den meisten mathematischen Verfahren zur Berechnung der Spätschadenreserve liegt das sogenannte Abwicklungsdreieck zugrunde, das sich folgendermaßen darstellen lässt:
Sei S_{ik}, $1 \leq i \leq I$, $k = 1, 2, \ldots,$ der im Abwicklungsjahr k aufgewendete Betrag für im

[2] vgl. [6, S. 593]
[3] vgl. [9, Kap. 3.1.4], [13, S. 7-12]

Anfalljahr i eingetretene Schäden. Das Anfall- oder Schadenjahr ist jenes Jahr, in dem der Schaden eingetreten ist bzw. verursacht wurde. Das erste Abwicklungsjahr, $k = 1$, ist das Anfalljahr selbst, das zweite Abwicklungsjahr, $k = 2$, ist das dem Anfalljahr folgende Kalenderjahr, usw.
Vom jüngsten Anfalljahr $i = I$ sind nur die Schäden bekannt, die in diesem Jahr eingetreten sind und gemeldet wurden. Von dem am längsten zurückliegenden Anfalljahr, $i = 1$, sind bereits $k = I$ Abwicklungsjahre bekannt. Das erste Anfalljahr wird, wenn möglich, so gewählt, dass es nach fachmännischer Einschätzung nahezu vollständig abgewickelt ist, so dass die zukünftigen Beträge $S_{1,I+1}$, $S_{1,I+2}, \ldots,$ vermutlich alle gleich Null sind.
Im Abwicklungsdreieck (Tabelle 1) sind nur die Beträge S_{ik} mit $i + k \leq I + 1$ bekannt, wobei die Zeilen die Anfalljahre i und die Spalten die Abwicklungsjahre k darstellen.

	Abwicklungsjahre k								
Anfalljahre i	S_{11}	S_{12}	$\ldots$	S_{1k}	$\ldots$	$S_{1,I+1-i}$	$\ldots$	$S_{1,I-1}$	S_{1I}
	S_{21}	S_{22}	$\ldots$	S_{2k}	$\ldots$	$S_{2,I+1-i}$	$\ldots$	$S_{2,I-1}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$			
	S_{i1}	S_{i2}	$\ldots$	S_{ik}	$\ldots$	$S_{i,I+1-i}$			
	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$					
	$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$	$\ldots$	$S_{I+1-k,k}$					
	$\vdots$	$\vdots$							
	$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$							
	S_{I1}								

Tabelle 1: Das Abwicklungsdreieck

Die Parallelen zur Hypotenuse des Dreiecks entsprechen den einzelnen Kalenderjahren (S_{ik} mit konstantem $i + k$). Zur entsprechenden Situation vor einem Jahr sind nur die Werte S_{I1}, $S_{I-1,2}$, $\ldots$, $S_{I+1-k,k}$, $\ldots$, S_{1I} der Hypotenuse (Diagonale) dazugekommen, die das letze Kalenderjahr betreffen.
Nach einem möglichen kurzen Anstieg zu Beginn der Schadenabwicklung nehmen die Beträge S_{ik} für jedes Anfalljahr i mit wachsendem k tendenziell ab und werden schlussendlich gleich Null sein, da Änderungen im Schadenstand nach langer Abwicklungsdauer immer unwahrscheinlicher werden.
Unter der Annahme, dass nach I Abwicklungsjahren alle Schäden eines Anfalljahres bekannt und vollständig reguliert sind, bezeichnet

$$S_{i+} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{iI}$$

den Gesamtschaden für Schadenanfalljahr i. Von S_{i+} ist bis jetzt jedoch nur der Betrag $S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{i,I+1-i}$ bekannt, der noch unbekannte Teil ist

$$R_i := S_{i,I+2-i} + S_{i,I+3-i} + \ldots + S_{iI} = \sum_{k=I+2-i}^{I} S_{ik} \qquad \text{für} \quad i = 2, \ldots, I.$$

Ziel der mathematischen Verfahren ist die Reserve R_i für jedes Anfalljahr zu schätzen. Die Reserve für das Kalenderjahr p ergibt sich durch folgende Formel:

$$R_p = \sum_{i=p-I+1}^{I} S_{i,p+1-i} \qquad \text{für} \quad p = I+1, \ldots, 2I-1$$

Somit ist die gesamte Schadenreserve gegeben durch:

$$R = \sum_{i=2}^{I} \sum_{k=I+2-i}^{I} S_{ik} = \sum_{i=2}^{I} R_i = \sum_{p=I+1}^{2I-1} R_p$$

2.1.3 Die Daten[4]

Es gibt verschiedene Abwandlungen des Abwicklungsdreiecks, so steht häufig an einer Stelle (i, k) der kumulierte Schadenstand $C_{ik} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{ik}$ und nicht der Zuwachs S_{ik}. Die Zuwächse sind durch $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ mit $C_{i0} = 0$ einfach zu bestimmen.

<u>Datenarten</u>

Außerdem gibt es mehrere Arten von Daten, aus denen man ein Abwicklungsdreieck bilden kann. Die zwei häufigsten Datenarten sind:

- Schadenzahlung: C_{ik} beschreibt den bis einschließlich Abwicklungsjahr k bezahlten Schadenbetrag ohne Berücksichtigung der Einzelfallreserven. Dieser Betrag kann als nichtnegativ angenommen werden (außer bei Regressforderungen).
- Schadenaufwand: C_{ik} stellt den bis einschließlich Abwicklungsjahr k angefallenen Schadenbetrag dar, d.h. die Summe aller Schadenzahlungen zuzüglich der Einzelfallreserven. Negative Werte für S_{ik} sind möglich, zum Beispiel durch eine Änderung der Einschätzung eines Schadenfalls.

Der Vorteil bei Verwendung der Schadenzahlungen als Einträge des Abwicklungsdreiecks ist der, dass keine Schätzungen getroffen werden müssen, wodurch die Daten zuverlässiger erscheinen. Ein Nachteil ist jedoch, dass sehr große Abwicklungsdreiecke

[4] vgl. [9, Kap. 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7], [13, S. 1-5]

benötigt werden um den Endschaden schätzen zu können, da die endgültige Regulierung mancher Schäden über 20 Jahre dauern kann.
Der Vorteil eines Abwicklungsdreiecks auf Basis des Schadenaufwands besteht darin, dass durch die Einbeziehung der Einzelfallreserven die Größenordnung der Jahresendschäden früher erkannt werden kann.
Um jedoch zeitlich bestimmen zu können, wann die Schadenzahlungen fällig sind, gibt das Dreieck der Schadenzahlungen bessere Auskunft.

Es gibt noch viele weitere Möglichkeiten ein Abwicklungsdreieck zu bilden, etwa aus Schadenzahlen, wie zum Beispiel ein Dreieck der gemeldeten oder der regulierten Schäden. Um die Komplexität der Daten ausreichend gut darstellen zu können, können auch mehrere Abwicklungsdreiecke erforderlich sein.
Man sollte jedoch bedenken, dass die Wahl der Daten erheblichen Einfluss auf die Modellbildung und die Verfahrensauswahl hat.

Bestandsbildung

In der Schadenreservierung ist es wichtig, die Abwicklungsdreiecke für möglichst große und homogene Teilbestände zu bilden, da einerseits Informationen, nach dem Prinzip vom Ausgleich im Kollektiv, immer zuverlässiger werden, wenn sie auf mehr Schäden beruhen. Andererseits kann es passieren, dass Informationen verloren gehen, wenn Teilbestände zusammengefasst werden, die sich in ihrem Abwicklungsverhalten unterscheiden. Mit einer Segmentierung werden Teilbestände so gebildet, dass eine einheitliche Abwicklung der Schäden angenommen werden kann. Kriterien für eine angemessene Trennung sind zum Beispiel Sparten, Untersparten oder Regionen. Eine zu starke Segmentierung in zu kleine Teilbestände führt jedoch zu einem sehr volatilen Abwicklungsverhalten und daher auch zu Problemen bei der Anwendung von Schätzverfahren.[5]
Die Schätzung der Spätschadenreserve hängt daher stark von der Wahl der Teilbestände ab und ist keine rein mathematische Aufgabe.

Inflation

Bei der Bildung der Abwicklungsdreiecke spielen Kalenderjahreffekte wie die Inflation eine wichtige Rolle. Selbst wenn wir annehmen, dass die Daten des Abwicklungsdreiecks bereits um die monetäre Inflation bereinigt sind, ist das Problem der Inflation dadurch nicht gelöst. Oft wirkt eine sogenannte „superimposed inflation“. Das heißt, dass noch immer ein trendmäßiger Anstieg der jährlichen Schadenzahlungen zu beobachten ist, der zum Beispiel durch Veränderungen in der Rechtsprechung oder stei-

[5] vgl. [13, S. 4]

gendes Anspruchdenken der Geschädigten verursacht wird.
Reserveschätzverfahren nehmen eine Inflation, die in den Daten enthalten ist, als Spätschadeneffekt wahr und setzten diesen in nicht erkennbarer Höhe in die Zukunft fort. Auf ein Abwicklungsdreieck wirkt auch ein Volumenmaß, das durch das Prämienvolumen oder die Polizzenzahl gegeben sein kann. Da das Volumenmaß die einzelnen Anfalljahre betrifft und somit im Abwicklungsdreieck zeilenweise wirkt, kann dadurch keine Inflationsbereinigung erreicht werden, da sich die Inflation kalenderjahrweise, also in den Diagonalen auswirkt.

Wir nehmen im Weiteren an, dass die bis Abwicklungsjahr k bezahlten Schäden, also die Schadenzahlen, die Basis der Abwicklungsdreiecke bilden. Außerdem gehen wir von einem homogenen Teilbestand mit inflationsbereinigten Daten aus und setzen die Unabhängigkeit der Anfalljahre voraus.
Letztere Forderung kann problematisch sein, da sich Kalenderjahreffekte, wie zum Beispiel Änderungen der Reservierungs- und Regulierungsmethoden, immer kalenderjahrweise, also diagonal, auswirken und somit jedes Anfalljahr beeinflussen. Man sollte daher das Abwicklungsdreieck zu Beginn der Reserveschätzung auf Kalenderjahreffekte untersuchen und die Auswirkungen gegebenenfalls durch Weglassen oder Glätten der einzelnen Daten eliminieren.

2.1.4 Bedeutung der Schätzgenauigkeit[6]

Nicht zu vergessen ist, dass es sich bei der zu schätzenden Spätschadenreserve um eine Zufallsvariable handelt, bei der man sich natürlich für ihren Erwartungswert interessiert. Hier gilt jedoch nicht, wie bei der Prämienkalkulation, dass die Abweichung des Gesamtschadens vom Erwartungswert relativ gering ist, da die Schäden mit langer Abwicklungsdauer nur einen kleinen Teil der Gesamtzahl aller Schäden bilden. Da also die Schätzung des Erwartungswertes mit großen Unsicherheiten verbunden ist, ist neben der Punktschätzung für den Erwartungswert der Reserve eine Angabe über die Genauigkeit dieser Schätzung wichtig.
Außerdem gilt, dass die Spätschadenreserve eine Prognose über mehrere Jahre beinhaltet, was nochmals zu höherer Unsicherheit führt. Mit der Reserveschätzung ist die Bindung entsprechender Geldmittel verbunden, die später nicht einfach aus Prämien des damaligen Portfolios aufgestockt werden kann, falls die Reserve zu nieder angesetzt wurde.
Ferner können zwei verschiedene Schätzverfahren nur dann verglichen werden, wenn zumindest von einem die Genauigkeit der Punktschätzung bekannt ist.

[6] vgl. [9, Kap. 3.1.8, 3.2.5]

Der Angabe der Schätzgenauigkeit kommt bei der Schadenreservierung also eine hohe Bedeutung zu. Sie sagt aus, welchen Informationswert die Punktschätzung hat.
Wir werden im Weiteren das Chain-Ladder-Verfahren zur Schätzung der Schadenreserve und auch eine Möglichkeit der Berechnung zur Schätzung und Genauigkeitsmessung der Spätschadenreserve kennenlernen.
Ziel ist, die Spätschadenreserve R_i für Anfalljahr i möglichst gut durch einen Schätzer $\hat{R}_i$ zu prognostizieren, wobei wir mit der (zur Varianz analogen) bedingten mittleren quadratischen Abweichung als Genauigkeitsmaß arbeiten. Da die Unabhängigkeit der Abwicklungsjahre nicht gegeben ist, berechnen wir die bedingte mittlere quadratische Abweichung, gegeben die Daten D des Abwicklungsdreiecks:

$$\mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D)$$

Dagegen würde

$$\mathbb{E}(R_i - \hat{R}_i)^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 | D))$$

die bisher bekannten Daten nicht berücksichtigen und somit noch über alle anderen Datenmöglichkeiten mitteln. Zur genauen Berechnung siehe Kapitel 2.2.3.

2.2 Das Chain-Ladder-Verfahren

Das Chain-Ladder-Verfahren ist eines der ältesten und einfachsten mathematischen Verfahren zur Schätzung der Schadenreserve, das heute noch eine wichtige Rolle spielt. Das Verfahren ist verteilungsfrei[7] und wird stochastisch modelliert. Dies ermöglicht die Angabe der Genauigkeit des Reserveschätzers.

2.2.1 Grundlagen[8]

Der Grundgedanke des Chain-Ladder-Verfahrens ist folgender: Wir lassen für jedes Anfalljahr i einen individuellen Erwartungswert der Reserve zu, nehmen aber an, dass die Aufteilung des Endschadens auf die einzelnen Abwicklungsjahre im Schnitt für jedes Anfalljahr gleich ist.
Die in Kapitel 2.1.2 bereits kennengelernte additive Zerlegung des Endschaden des Anfalljahres i

$$C_{iI} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{iI}$$

schreiben wir nun in der multiplikativen Form

$$C_{iI} = C_{i1} \cdot F_{i1} \cdot F_{i2} \cdot \ldots \cdot F_{i,I-1}, \qquad \text{wobei} \quad F_{ik} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$$

[7] Verteilungsfreien Modellen liegt keine spezielle Verteilungsform zu Grunde.
[8] vgl. [9, Kap. 3.2.1, 3.2.4]

die multiplikative Zunahme des akkumulierten Schadenstandes C_{ik} von Abwicklungsjahr k zu Abwicklungsjahr $k+1$ ist. Für diese Darstellung fordern wir, dass alle Schadenstände positiv sind, d.h. $C_{ik} > 0$, andernfalls wird die multiplikative Darstellung statt C_{i1} mit dem ersten $C_{ik} > 0$ geschrieben.
Wir haben, wie vorhin erwähnt, die Annahme getroffen, dass die Aufteilung des Endschadens auf die einzelnen Abwicklungsjahre im Schnitt für jedes Anfalljahr gleich ist. Dies lässt sich so formalisieren, dass wir für die Zufallsvariablen F_{ik} einen von Anfalljahr i unabhängigen Erwartungswert

$$\mathbb{E}(F_{ik}) = f_k \qquad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1$$

annehmen.
Die f_k geben die durchschnittliche Erhöhung des Schadenstands von Abwicklungsjahr k auf Abwicklungsjahr $k+1$ an und werden mittels des C_{ik}-gewichteten arithmetischen Mittels

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \qquad 1 \leq k \leq I-1 \tag{1}$$

aus den bis jetzt bekannten Schadenzahlungen, C_{ik} geschätzt. Das Chain-Ladder-Verfahren wird durch die Eigenschaft, dass der Endschaden C_{iI} durch

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}, \quad 2 \leq i \leq I, \tag{2}$$

bzw. die Reserve $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$ der einzelnen Anfalljahre i durch

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} \cdot (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1) \tag{3}$$

geschätzt werden kann, charakterisiert. Dass diese Darstellung möglich ist, wird später gezeigt.
Die Prognose beruht lediglich auf dem aktuellen Schadenstand $C_{i,I+1-i}$ des Anfalljahres i, wobei die vergangenen Schadenstände $C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i}$ nicht berücksichtigt werden, was verwundernswert ist. Daher müssen einige, dem Chain-Ladder-Verfahren zu Grunde liegenden Modellannahmen getroffen werden. Die erste Annahme besagt, dass durch Ausnutzung früherer Schadenstände der Informationsgehalt der Schadenstände nicht verbessert werden kann. Formal lautet diese Modellannahme:[9]

[9] [9, Kap. 3.2.4, S. 244]

(CL1) Es gibt Abwicklungsfaktoren $f_1, \ldots, f_{I-1}$ mit

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}\right) = f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \ 1 \leq k \leq I-1, \ \text{für} \ C_{ik} > 0$$

oder gleichbedeutend $\mathbb{E}(C_{i,k+1} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik} f_k$.

Es ist also zu sehen, dass der bedingte Erwartungswert von $C_{i,k+1}$ nur von C_{ik}, und nicht von den vorigen Werten $C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}$ abhängt.

Unter Verwendung des Satzes vom iterierten Erwartungswert[10] folgt aus (CL1)

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}\right)\right) = f_k\,,$$

was wieder unser eigentliches Modell $\mathbb{E}(F_{ik}) = f_k$ darstellt.

Außerdem verlangen wir:[11]

(CL2) Die Anfalljahre $\{C_{i1}, \ldots, C_{iI}\}, \quad 1 \leq i \leq I,$ sind unabhängig.

Die Formulierung der Modellannahme (CL1) zeigt wieder, dass wir nicht $\mathbb{E}(C_{iI})$ bzw. $\mathbb{E}(R_i)$, sondern vielmehr die bedingten Erwartungswerte $\mathbb{E}(C_{iI}|D)$ bzw. $\mathbb{E}(R_i|D)$, gegeben die bisher bekannten Daten $D = \{C_{ik} \mid i + k \leq I + 1\}$, schätzen wollen. Die Bedingung auf die Daten D ist wesentlich, da einerseits die Unabhängigkeit der Abwicklungsjahre nicht vorausgesetzt wird und andererseits die kumulierten Schadenständen natürlich immer voneinander abhängig sind.

Dass die Chain-Ladder-Projektion (2) tatsächlich auf dem Modell aus (CL1) und (CL2) basiert, zeigt folgender Satz:[12]

Satz. *Unter den Annahmen (CL1) und (CL2) gilt*

$$\mathbb{E}(C_{iI}|D) = C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}\,, \quad 2 \leq i \leq I.$$

[10] Satz vom iterierten EW: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z))$ und $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y,Z)|Y) = \mathbb{E}(X|Y)$, [9, S. 192]

[11] [9, Kap. 3.2.4, S. 244]

[12] [9, Kap. 3.2.4, S. 245]

Beweis. Mit der Abkürzung $D_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{i,I+1-i}\}$ gilt wegen (CL2) und durch wiederholte Anwendung von (CL1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_{iI}|D) &= \mathbb{E}(C_{iI}|D_i) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_{iI}|C_{i1}, \ldots, C_{i,I-1})|D_i) \\
&= \mathbb{E}(C_{i,I-1}f_{I-1}|D_i) \\
&= \mathbb{E}(C_{i,I-1}|D_i) \cdot f_{I-1} \\
&= \ldots \\
&= \mathbb{E}(C_{i,I+1-i}|D_i) \cdot f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} \\
&= C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}.
\end{aligned}$$

□

Ein weiterer Satz zeigt, dass die benutzten Schätzer für $f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}$ vernünftig sind:[13]

Satz. *Unter den Annahmen (CL1) und (CL2) sind die gemäß (1) berechneten Schätzer $\hat{f}_k$ erwartungstreu*[14] *und unkorreliert mit*

$$\mathbb{E}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Erwartungstreue von $\hat{f}_k$. Dazu sei

$$B_k = \{C_{ij} | j \leq k,\ i + j \leq I + 1\}, \quad 1 \leq k \leq I.$$

Dann ist wegen (CL2) und (CL1)

$$\mathbb{E}(C_{i,k+1}|B_k) = C_{ik}f_k, \quad 1 \leq i \leq I - k,$$

und daher

$$\mathbb{E}(\hat{f}_k|B_k) = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} \mathbb{E}(C_{i,k+1}|B_k)}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = f_k.$$

Das liefert

$$\mathbb{E}(\hat{f}_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{f}_k|B_k)) = f_k,$$

d.h. die $\hat{f}_k$ sind erwartungstreu.

Weiter gilt für $j < k$

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{f}_j\hat{f}_k) &= \mathbb{E}[(\hat{f}_j - \mathbb{E}(\hat{f}_j))(\hat{f}_k - \mathbb{E}(\hat{f}_k))] \\
&= \ldots \\
&= \mathbb{E}(\hat{f}_j\hat{f}_k) - f_jf_k \\
&= 0,
\end{aligned}$$

[13] vgl. [9, Kap. 3.2.4, S. 245f.]

[14] $\hat{f}_k$ ist erwartungstreu für f_k, wenn $\mathbb{E}(\hat{f}_k) = f_k$ gilt.

weil

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{f}_j \hat{f}_k) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{f}_j \hat{f}_k | B_k)) \\
&= \mathbb{E}(\hat{f}_j \, \mathbb{E}(\hat{f}_k | B_k)) \\
&= \mathbb{E}(\hat{f}_j) f_k \\
&= f_j f_k
\end{aligned}$$

gilt, d.h. die $\hat{f}_k$ sind unkorreliert.
Der Beweis lässt sich analog auf beliebige Produkte paarweise verschiedener $\hat{f}_k$ übertragen. □

Angesichts der Tatsache, dass f_{k-1} und f_k von denselben Daten $C_{1k}, \ldots, C_{I-k,k}$ abhängen, ist die Unkorreliertheit der $\hat{f}_k$ eher überraschend. Weiters gilt auch, dass die Faktoren F_{ik} für jedes feste Anfalljahr i unkorreliert sind, insbesondere sind also auch aufeinander folgende Abwicklungsfaktoren $F_{i,k-1}$ und F_{ik} unkorreliert. Deshalb sollte das Chain-Ladder-Verfahren nicht bei Portfolios angewandt werden, bei denen im Allgemeinen auf einen eher hohen Abwicklungsfaktor ein niedriger folgt, oder umgekehrt.
Da $F_{ik} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$ für $C_{ik} = 0$ undefiniert ist, wird häufig

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \quad \text{mit } F_{ik} := 0 \text{ falls } C_{ik} = 0$$

an Stelle von

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}$$

verwendet, weil sonst f_k überschätzt wird, falls ein Paar $(C_{ik}, C_{i,k+1})$ mit $C_{ik} = 0$ und $C_{i,k+1} > 0$ enthalten ist.
Nachdem man die Spätschadenreserve $\hat{R}_i$ der einzelnen Anfalljahre berechnet hat, kann die Gesamtreserve R mit

$$\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$$

geschätzt werden.

Das Grundmodell des Chain-Ladder-Verfahren ist also leicht zu verstehen und auch einfach zu implementieren. Das Verfahren wird häufig benutzt, da es durch eine Veränderung der Gewichte sehr flexibel ist und oft sinnvolle Ergebnisse erzielt werden. Wenn allerdings zu wenige Daten vorhanden sind, das Abwicklungsdreieck also nicht die volle Abwicklungsdauer enthält, muss durch Extrapolation ein Tail-Faktor berechnet werden um die Schadenreserven möglichst gut schätzen zu können.

2.2.2 Sensitivität des Chain-Ladder-Verfahrens[15]

Es gibt zwei heikle Stellen im Abwicklungsdreieck, die auch beim Chain-Ladder-Verfahren zu beachten sind:

1. *Das rechte obere Eck:* Hier wird der Schätzer des letzten Abwicklungsfaktors f_{I-1} berechnet, der nur von einem Beobachtungswert S_{1I} abhängt. Mit

$$\hat{f}_{I-1} = \frac{C_{1,I-1} + S_{1I}}{C_{1,I-1}}$$

   wird die im ältesten Anfalljahr beobachtete Veränderung auf alle anderen Anfalljahre übertragen, selbst wenn der Wert untypisch ist.

2. *Das linke untere Eck:* Die Reserve für das jüngste Anfalljahr, $\hat{R}_I$, beruht nur auf dem Wert aus einem Beobachtungsjahr, C_{I1}. In manchen Versicherungsbereichen mit langer Abwicklungsdauer (vor allem bei Schadenexzedenten-Rückversicherungen) sagt der Zahlungsstand C_{I1} selbst am Ende des Anfalljahres noch wenig aus. Der Reserveschätzer $\hat{R}_I = C_{I1} \cdot (\hat{f}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$ für das jüngste Anfalljahr beruht nun auf diesem unsicheren Wert. Im Extremfall $C_{I1} = 0$, wird die ganze Reserve R_I zu $\hat{R}_I = 0$ geschätzt, was keinen Sinn macht.

Es ist möglich ein unplausibles C_{I1} zu korrigieren, indem man es durch den volumsgewichteten Durchschnitt aller bisher beobachteten Anfalljahre

$$C'_{I1} := \frac{v_I \sum_{i=1}^{I} C_{i1}}{\sum_{i=1}^{I} v_i}$$

ersetzt, wobei v_i das Volumen (d.h. die Anzahl der Risiken bzw. deren Gesamtversicherungssumme oder das Prämienvolumen) von Anfalljahr i ist.
Sind mehrere der Erstjahresstände C_{i1} unplausibel, kann man sie durch Rückwärtsprojektion

$$\hat{C}_{i1} = \frac{C_{i,I+1-i}}{\hat{f}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-i}}$$

aus den jeweils aktuellen Schadenständen schätzen.
Statt C_{I1} kann man im Chain-Ladder-Reserveschätzer $\hat{R}_I$ (3) durch $v_I \hat{q}_1$ ersetzen, wobei $\hat{q}_1$ der Schätzer für die mittlere Erstjahresschadenquote ist:

$$\hat{q}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{I} C_{i,I+1-i}}{\sum_{i=1}^{I} (\hat{f}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-i} \cdot v_i)}$$

Diese Methode wird als Cape-Cod-Verfahren bezeichnet, mit dem auch die anderen aktuellen Schadenstände $C_{I-1,2}, C_{i-2,3}, \ldots$ angepasst werden können.

[15] vgl. [9, Kap. 3.2.5]

2.2.3 Genauigkeit des Chain-Ladder-Verfahrens[16]

Auf Grund dieser Sensitivitäten wollen wir nun eine Formel für die Genauigkeit des Reserveschätzers $\hat{R}_i$ herleiten.
Ziel ist, die Spätschadenreserve R_i für Anfalljahr i möglichst gut durch einen Schätzer $\hat{R}_i$ zu prognostizieren. Wir suchen nun den bedingten mittleren quadratischen Fehler

$$\text{mse}(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2 \mid D)$$

zwischen Schätzer und Prognoseziel, gegeben die Daten des Abwicklungsdreiecks

$$D = \{C_{ik} \mid i + k \leq I + 1\}.$$

Wir benutzen den, für beliebige Skalare a, gültigen Verschiebungssatz zur Berechnung der mittleren quadratischen Abweichung.

$$\mathbb{E}(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X) - a)^2$$

Die Verallgemeinerung auf bedingte Erwartungswerte lautet:

$$\mathbb{E}((X - h(Y))^2|Y) = \text{Var}(X|Y) + (\mathbb{E}(X|Y) - h(Y))^2.$$

Da die Reserve $\hat{R}_i$ eine Funktion von D ist, $\hat{R}_i = h_i(D)$, weil sie aus den Daten berechnet wird, gilt mit obiger Formel

$$\text{mse}(\hat{R}_i) = \text{Var}(R_i|D) + (\mathbb{E}(R_i|D) - \hat{R}_i)^2. \tag{4}$$

Da wegen $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$ und $\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I+1-i}$

$$\text{mse}(\hat{R}_i) = \mathbb{E}((R_i - \hat{R}_i)^2|D) = \mathbb{E}((C_{iI} - \hat{C}_{iI})^2|D) = \text{mse}(\hat{C}_{iI})$$

gilt, ersetzen wir in obiger Gleichung $\hat{R}_i$ durch $\hat{C}_{iI}$ und erhalten:

$$\text{mse}(\hat{C}_{iI}) = \underbrace{\text{Var}(C_{iI}|D)}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}(C_{iI}|D) - \hat{C}_{iI})^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

Damit liefert der Verschiebungssatz die Zerlegung in die zwei Komponenten Zufalls- und Schätzfehler.
Betrachtet man Gleichung (4), so kann man erkennen, dass $\mathbb{E}(R_i|D)$ die beste Prognose von R_i im Quadratmittel ist, da $\hat{R}_i = \mathbb{E}(R_i|D)$ den quadratischen Fehler minimiert.

Damit wir diese zwei Komponenten schätzen können, treffen wir eine weitere Modellannahme über die Varianz der C_{ik}:[17]

[16] vgl. [9, Kap. 3.2.5]
[17] [9, Kap. 3.2.5, S. 249]

(CL3) Es gibt Proportionalitätskonstanten $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{I-1}^2$ mit

$$\mathrm{Var}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{ik}}, \quad 1 \leq i \leq I,\ 1 \leq k \leq I-1,\ \text{für } C_{ik} > 0$$

oder gleichbedeutend $\mathrm{Var}(C_{i,k+1} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik}\, \sigma_k^2$.

Für eine genaue Berechnung benötigen wir Schätzer für σ_k^2:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \hat{f}_k\right)^2, \qquad 1 \leq k \leq I-2$$

Wie man sehen kann, erhält man durch Minimierung von $\hat{\sigma}_k^2$ bzgl. $\hat{f}_k$ wieder den Chain-Ladder Faktor $\hat{f}_k$. Wir bekommen durch die Formel jedoch keinen Schätzer für σ_{I-1}. Falls $f_{I-1} = 1$ und unter der Annahme, dass nach $I-1$ Abwicklungsjahren keine weiteren Schadenzahlungen mehr anfallen, können wir $\sigma_{I-1} = 0$ setzen. Ansonsten muss die Folge $\sigma_1, \ldots, \sigma_{I-3}, \sigma_{I-2}$ um einen weiteren Term extrapoliert werden oder mit Hilfe der Forderung

$$\frac{\hat{\sigma}_{I-3}}{\hat{\sigma}_{I-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{I-2}}{\hat{\sigma}_{I-1}},$$

solange $\hat{\sigma}_{I-3} > \hat{\sigma}_{I-2}$ erfüllt ist, das heißt

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2},\ \hat{\sigma}_{I-3}^2\right),$$

berechnet werden.

Dadurch können wir nun einen Schätzer für $\mathrm{mse}(\hat{R}_i)$ herleiten:[18]

Satz. *Unter den Annahmen (CL1), (CL2) und (CL3) kann der mittlere quadratische Fehler des Reserveschätzers $\hat{R}_i$ des Chain-Ladder-Verfahrens durch*

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}\right)$$

geschätzt werden.

Beweis. Siehe [9, Kap. 3.2.5, S. 250ff.]

[18] [9, Kap. 3.2.5, S. 249f.]

Der Standardfehler $s.e.(\hat{R}_i)$ ist die Quadratwurzel des Schätzers $\text{mse}(\hat{R}_i)$, also gilt $(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \text{mse}(\hat{R}_i)$.

Wir haben also jetzt in $\hat{R}_i$ und $s.e.(\hat{R}_i)$ Schätzer für Erwartungswert und Standardfehler der Schadenreserve R_i für Anfalljahr i.

Die Gesamtreserve $R = R_2 + \ldots + R_I$ wird durch $\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$ geschätzt. Da die $\hat{R}_i$ nicht voneinander unabhängig sind, weil sie über die Schätzer $\hat{f}_k$, $\hat{\sigma}_k$ positiv korreliert sind, können wir nicht einfach die quadrierten Standardfehler der einzelnen Anfalljahre $\hat{R}_i$ addieren, um den Standardfehler von $\hat{R}$ zu berechnen. Wir benötigen folgenden Satz:[19]

Satz. *Unter denselben Annahmen wie im vorigen Satz erhalten wir für den mittleren quadratischen Fehler der Gesamtreserve $\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$ den Schätzer*

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^{I} \left(\left(s.e.(\hat{R}_i)\right)^2 + \hat{C}_{iI} \left(\sum_{j=i+1}^{I} \hat{C}_{jI} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\,\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}} \right)$$

Beweis. Siehe [9, Kap. 3.2.5, S. 253ff.]

2.2.4 Beispiel[20]

Um die Anwendung des Chain-Ladder-Verfahrens besser zu verstehen betrachten wir folgendes Beispiel:
Bekannt sind die kumulierten Beträge C_{ik} für $i + k \leq I + 1$, wobei die Zeilen $i = 1, \ldots, 6$ die Anfalljahre und die Spalten $k = 1, \ldots, 6$ die Abwicklungsjahre darstellen:

	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6
2000	4370	6293	10292	12460	13660	14307
2001	2701	5291	7162	8945	9338	
2002	4483	6729	10074	11142		
2003	3254	5804	8351			
2004	8010	12118				
2005	5582					

Tabelle 2: kumulierte Schadenstände

Wir berechnen nun die Schätzer $\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}$ für die Übergangsfaktoren:

[19] [9, Kap. 3.2.5, S.253]
[20] vgl. [9, Kap. 3.2.5]

$\hat{f}_1$	$\hat{f}_2$	$\hat{f}_3$	$\hat{f}_4$	$\hat{f}_5$
1,588	1,488	1,182	1,074	1,047

Tabelle 3: Übergangsfaktoren

Um die fehlenden Beträge $\hat{C}_{i,k+1}$ für $i + k > I + 1$ zu berechnen, multiplizieren wir C_{ik} mit $\hat{f}_k$ und erhalten:

	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6
2000	4370	6293	10292	12460	13660	14307
2001	2701	5291	7162	8945	9338	9780
2002	4483	6729	10074	11142	11971	12538
2003	3254	5804	8351	9874	10608	11111
2004	8010	12118	18028	21315	22901	23986
2005	5582	8864	13187	15592	16752	17546

Tabelle 4: kumulierte Schadenstände für alle Zeiten

Schneller erhält man die Endschäden mit $\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}$ für $2 \leq i \leq I$, womit die Reserve für jedes Anfalljahr bestimmt werden kann durch

$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} \cdot (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$:

$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_4$	$\hat{R}_5$	$\hat{R}_6$
0	442	1396	2760	11868	11964

Tabelle 5: Spätschadenreserven

Die Gesamtreserve R wird mit $\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$ geschätzt:

$$\hat{R} = 28430$$

3 Das Duration-Konzept für Zahlungsströme

Um einen Zahlungsstrom bewerten zu können, benötigen wir das Barwertkonzept, das im ersten Teil des Kapitels vorgestellt wird. Anschließend analysieren wir die Veränderungen des Barwertes bei Änderungen des Zinsniveaus. Dabei lernen wir, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem der Wert des Zahlungsstromes nach einer Zinsänderung mindestens so hoch ist, wie der ursprünglich geplante Wert. Dieser Zeitpunkt wird als Macaulay-Duration bezeichnet. Der Zahlungsstrom ist dann also immun gegen das Zinsänderungsrisiko. Dieser Teil des Kapitels beruht großteils auf Uhlir und Steiners „Wertpapieranalyse“ [14].
Die Duration wird nicht nur gerne als Immunisierungsinstrument verwendet (Kapitel 3.3) sondern gibt auch Auskunft über die Höhe der Veränderung des Barwertes bei Zinsänderungen, wie in Kapitel 3.4 näher erklärt wird. Diese Information stammt hauptsächlich aus Fabozzis „Bond Markets, Analysis, and Strategies“ [5].

3.1 Die Bewertung von Zahlungsströmen

Wir betrachten Zahlungsströme $c_t,\ t = 1, \ldots, n$, deren Zahlungen nicht negativ sind und in regelmäßigen Abständen erfolgen. Um einen Zahlungsstrom zu bewerten, müssen alle Zahlungen zum gleichen Zeitpunkt betrachtet werden. Dazu nehmen wir an, dass ihre Höhe zu Beginn des Betrachtungsraumes bekannt ist.

3.1.1 Das Barwertkonzept[21]

Der Wert eines Zahlungsstromes zu $t = 0$ wird durch den Barwert aller Zahlungen bestimmt. Mit dem Barwertansatz werden alle Zahlungen $c_t,\ t = 1, \ldots, n$ durch Diskontierung zum gleichen Zeitpunkt ($t = 0$) betrachtet. Hierfür nehmen wir an, dass bereits erfolgte Zahlungen wiederveranlagt werden. Für die Berechnung des Barwertes spielt die Wahl der Zinsen eine wichtige Rolle. Es gibt zwei mögliche Zinsstrukturen:

<u>Flache Zinskurve</u>

Von einer flachen Zinskurve spricht man, wenn alle Zahlungen mit unterschiedlichen Laufzeiten dem gleichen Zinssatz r unterliegen. Der Barwert (engl. Present Value) des Zahlungsstromes c_t wird durch

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r)^t} \tag{5}$$

[21] vgl. [14, S.7f., 19f.], [5, S.17f., 20f.]

berechnet. Spätere Zahlungen werden stärker abgezinst als frühere, wodurch sie klarerweise einen niedrigeren Barwert haben (wenn die Auszahlungen c_t gleich hoch sind).
Zinst man den Barwert eines Zahlungsstromes auf τ Perioden auf,

$$V_\tau = PV \cdot (1+r)^\tau,$$

so erhält man den Wert des Zahlungsstromes zum Zeitpunkt τ. Zahlungen, die bereits vor τ erfolgten müssen aufgezinst, Zahlungen nach dem Zeitpunkt τ, müssen abgezinst werden:

$$V_\tau = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r)^{t-\tau}}$$

Der Endwert (engl. Future Value) eines Zahlungsstromes ist

$$FV = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r)^{t-n}} = PV \cdot (1+r)^n.$$

<u>Nicht-flache Zinskurve</u>

In der Realität hängen Zinssätze von Fristigkeiten der Zahlungsströme ab. Eine Zinsstrukturkurve zeigt den Zusammenhang der Zinssätze r_t und der Laufzeit der Zahlungsströme t. Meistens ist der Zinssatz für Investitionen mit längerer Dauer höher. Ist das Gegenteil der Fall, spricht man von einer inversen Zinsstruktur. In beiden Fällen stellen die Zinssätze eine gekrümmte Zinskurve dar.

Um den Barwert eines sicheren Zahlungsstromes zu berechnen, muss nun jede Zahlung mit einem anderen Zinssatz abgezinst werden. Bezeichne r_t den Jahreszins (engl. spot rate) für Zahlungsströme mit Fristigkeit t. Unter der Annahme, dass alle Zinssätze bereits zur Zeit $t = 0$ bekannt sind, kann der Barwert wie folgt berechnet werden:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r_t)^t}$$

Stellt jedoch f_t den Zins, der zwischen t und $t+1$ bezahlt wird, dar (engl. forward rate), muss jede Zahlung mit den passenden Zinssätzen so lange abgezinst werden, bis man den Wert zu $t = 0$ erhält. Man erhält folgende Gleichung für den Barwert:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} c_t \prod_{i=0}^{t-1} \frac{1}{(1+f_i)}$$

Um den Zusammenhang erkennen zu können, betrachten wir ein einfaches Beispiel: Sei der Zins für ein Jahr $r_1 = 5\%$ und der zwei-Jahres Zins $r_2 = 6\%$. Nach einem Jahr

ist 1 Euro $(1 + r_1) = 1,05$ Euro wert. Hätten wir den einen Euro für 2 Jahre veranlagt, hätten wir dann $(1 + r_2)^2 = 1,1236$ Euro. Das ergibt ein Wachstum von $7,01\%$ von $1,05$ auf $1,1236$ und stellt die forward rate f_2 dar. f_2 kann also durch

$$1 + f_2 = \frac{(1 + r_2)^2}{(1 + r_1)}$$

berechnet werden. Umgekehrt gilt:

$$(1 + r_2)^2 = (1 + r_1)(1 + f_2)$$

Eine Investition für zwei Jahre wird also im ersten Jahr mit der spot rate r_1 und im zweiten Jahr mit der forward rate f_2 verzinst.[22]

Der Einfachheit halber gehen wir im Folgenden immer von einer flachen Zinsstrukturkurve aus.

3.1.2 Stetige Verzinsung[23]

Bis jetzt sind wir von jährlichen Zinszahlungen ausgegangen. Wird ein Zahlungsstrom m-mal im Jahr verzinst, gilt

$$V_n = PV \cdot \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{nm}$$

für dem Wert zur Zeit n. $r^{(m)}$ ist der jährliche Zinssatz für eine Auszahlung jedes m-tel Jahr. Für eine kontinuierliche Verzinsung, also $m \to \infty$, gilt

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{nm} = e^{r_c n},$$

da

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r_c}{m}\right)^{nm} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r_c}}\right)^{\frac{m}{r_c} r_c n} = e^{r_c n}.$$

Der Wert zur Zeit n ist also

$$V_n = PV \cdot e^{r_c n}.$$

Damit die Verzinsung durch r, $r^{(m)}$ und r_c äquivalent sind, muss

$$(1 + r) = \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m = e^{r_c}$$

[22] vgl. [3, S. 69f.]
[23] vgl. [14, S. 10f.], [10, S. 57]

erfüllt sein, was durch

$$r^{(m)} = m \cdot \left((1+r)^{\frac{1}{m}}) - 1 \right) \qquad \text{und} \qquad r_c = \ln(1+r)$$

gegeben ist. Weiters gilt

$$0 \leq r_c \leq r^{(m)} \leq r \leq \infty.$$

3.1.3 Eigenschaften des Barwerts[24]

Der Barwert eines Zahlungsstromes hängt von der Laufzeit, der Zahlungen und dem Zinssatz ab.
Der Zusammenhang zwischen Barwert und Zahlungshöhe ist eindeutig: Je höher die Zahlungen desto höher auch ihr Barwert oder ihr Preis.
Eine wichtige Eigenschaft über den Zusammenhang von Barwert und Laufzeit ist:
Je weiter eine Zahlung in der Zukunft liegt, desto geringer ist ihr Barwert. Um den Wert in der Zukunft erreichen zu können muss heute weniger Geld investiert werden, da der Wert durch Zinserträge über eine lange Laufzeit stärker steigt als über eine kürzere Laufzeit.

Ein Investor profitiert nicht nur durch die laufenden Zahlungen c_t zu $t = 1, \ldots, n$, er kann durch Wiederanlage (zum Zinssatz r) dieser Beträge auch Zinserträge erwirtschaften. Dabei spielt die Höhe des Zinssatzes eine entscheidende Rolle:

- Bei einem *höheren Zinssatz*, verbessern sich die Anlagebedingungen. Es muss weniger Kapital zu Beginn investiert werden, um einen bestimmten Endwert zu erreichen. Der (Bar-)Wert des Zahlungsstromes sinkt also auf Grund der stärkeren Diskontierung. Hingegen können höhere Zinseszinsen erwirtschaftet werden.

- Gegenteiliges ist bei einem *kleineren Zins* zu beobachten: Der Barwert steigt wegen einer schwächeren Diskontierung. Außerdem ist mit niedrigeren Zinseszinserträgen zu rechnen, da sich die Reinvestitionsbedingungen verschlechtern.

Veränderungen des Zinsniveaus wirken sich also gegenläufig auf den Barwert aus. Diese Eigenschaft analysieren wir in Kapitel 3.2.2 genauer.

3.1.4 Nominal- und Realzins[25]

Bis jetzt haben wir Zahlungsströme mit dem Nominalzins bewertet, der die Wertsteigerung durch Zinsgewinne für ein Zeitintervall angibt (Nominalwert).

[24] vgl. [14, S. 16f.], [5, S.24f]
[25] vgl. [3, S.72-75]

Jedoch steigt der Wert nicht nur durch die Verzinsung, er verändert sich auch wegen der Inflation. Der Realwert berücksichtigt sowohl den Einfluss der Verzinsung, als auch den der Inflation.
Der Zusammenhang zwischen Nominal- und Realwert zur Zeit t ist durch

$$Realwert_t = \frac{Nominalwert_t}{(1 + Inflationsrate)^t}$$

gegeben.
Wir können auch zwischen dem Nominal- und Realzins unterscheiden. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen Inflationsrate i , Real- und Nominalzins:

$$1 + r_{real} = \frac{1 + r_{nom}}{1 + i},$$

also

$$r_{real} = \frac{1 + r_{nom}}{1 + i} - 1 = \frac{r_{nom} - i}{1 + i} \approx r_{nom} - i.$$

Der Realzins ist also der Nominalzins, der um die Wirkung der Inflation bereinigt wurde. Mit ihm wird der tatsächliche Wert des Kapitals berechnet.

Für die stetige Verzinsung gilt:

$$e^{r_{real}} = \frac{e^{r_{nom}}}{e^i} = e^{r_{nom} - i} \tag{6}$$

3.2 Die Duration von Zahlungsströmen

Ein Investor ist dem Zinsänderungsrisiko immer ausgesetzt. Eine Zinsänderung verändert nicht nur den Preis (Barwert) einer Investition, auch die Wiederveranlagungsbedingungen ändern sich. Wir interessieren uns nun für die Auswirkungen von sich ändernden Reinvestitionsbedingungen auf die zukünftigen Werte und fragen uns, ob es einen Zeitpunkt gibt, in dem der tatsächliche Wert eines Zahlungsstromes mindestens so groß ist wie der geplante Wert vor der Zinsänderung?[26]
In diesem Kapitel werden wir uns mit dem Einfluss von Zinsänderungen auf Zahlungsströme beschäftigen und das Duration-Konzept kennenlernen.

3.2.1 Voraussetzungen[27]

Für die Herleitung und Verwendung des Duration-Konzeptes müssen wir einige Annahmen treffen:

[26] vgl. [14, S. 70]
[27] vgl. [14, S. 70, 81]

- Es existiert eine flache Zinskurve.
- Es findet nur ein einmaliger Zinssprung unmittelbar nach Beginn der Investition ($t = 0^+$) statt, der
- eine Parallelverschiebung der Zinskurve bewirkt (von r auf $r + \lambda$).
- Investoren haben einen festen Planungshorizont.
- Zwischenzeitlich anfallende Zahlungen werden bis zum Laufzeitende wiederveranlagt.
- Es werden keine Beträge vor Ablauf der Dauer entnommen.
- Es existieren weder Steuern noch Transaktionskosten.

Wir wollen die Duration allgemein für Zahlungsströme herleiten und ihre Anwendungsmöglichkeiten untersuchen. Um das Prinzip der Duration jedoch anschaulich erklären zu können, wird uns der Begriff der Anleihe häufig begleiten. Eine Anleihe mit Nominalwert N, Kuponrate k und n Jahren Laufzeit hat folgenden Zahlungsstrom:

$$c_t = \begin{cases} k \cdot N & t = 1, \cdots, n-1 \\ k \cdot N + N & t = n \end{cases}$$

3.2.2 Der kompensatorische Effekt[28]

Wie wir bereits aus Kapitel 3.1.3 wissen, wirkt sich eine Zinsänderung auf den heutigen Preis (1) und die zukünftigen Wiederveranlagungsbedinungen und damit auf den Endwert (2) eines Zahlungsstromes aus. Wichtig dabei ist, dass eine Zinsänderung gegenläufige Veränderungen von (1) und (2) bewirkt.
Wir wollen nun untersuchen, ob sich die schlechteren Wiederveranlagungsbedingungen bei einer Zinssenkung durch den steigenden Preis bzw. der niedrigere Preis bei einem Zinsanstieg durch die besseren Reinvestitionsbedingungen bis zum Laufzeitende ausgleichen.
Wir nehmen dafür an, dass sich unmittelbar nach Beginn einer Investition, der Zinssatz von r auf $r + \lambda$ ändert. Für den Bar- bzw. Endwert des Zahlungsstromes gilt nach der Zinsänderung:

$$PV^* = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1 + r + \lambda)^t} \quad \text{bzw.} \quad FV^* = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1 + r + \lambda)^{t-n}}$$

[28] vgl. [14, S. 70-74]

Für die Differenz der Bar- bzw. Endwerte vor und nach der Änderung gilt:

$$\begin{aligned}\Delta PV &= \sum_{t=1}^{n} c_t \cdot \left(\frac{1}{(1+r+\lambda)^t} - \frac{1}{(1+r)^t} \right) \\ \Delta FV &= \sum_{t=1}^{n} c_t \cdot \left(\frac{1}{(1+r+\lambda)^{t-n}} - \frac{1}{(1+r)^{t-n}} \right)\end{aligned}$$

Diese Formeln verdeutlichen die gegenläufigen Auswirkungen einer Zinsänderung auf den Bar- bzw. Endwert. Steigt der Zins ($\lambda > 0$), so ist ΔPV negativ – der Barwert (Preis) des Zahlungsstromes sinkt. Für eine Zinssenkung ($\lambda < 0$) ist ΔPV positiv – der Preis steigt.
Für den Endwert eines Zahlungsstromes gilt hingegen: Mit einer Erhöhung des Zinses steigt der Endwert, da $\Delta FV > 0$ und umgekehrt. Folgende Abbildung verdeutlicht dies:

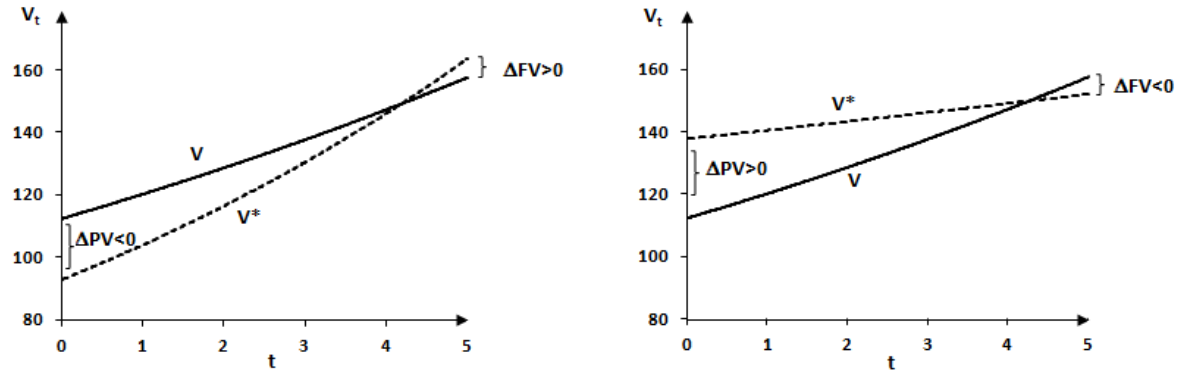

Abbildung 1: Wertverlauf bei Zinssteigung und Zinssenkung

Abbildung 1 zeigt eine Zinserhöhung von 7% auf 12% (links) und eine Zinssenkung von 7% auf 2% (rechts) für eine 10%-Kupon-Anleihe mit 5 Jahren Laufzeit.

Es gilt immer

$$sgn(\Delta PV) \neq sgn(\Delta FV)$$

und somit gilt, dass eine Erhöhung bzw. Senkung des Preises bei einer Veränderung des Zinssatzes, durch die schlechteren bzw. besseren Wiederanlagebedingungen nicht nur ausgeglichen, sondern sogar überkompensiert wird. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Höhe der Zinsänderung.

Betrachten wir noch einmal Abbildung 1, sehen wir, dass es einen (noch unbekannten) Zeitpunkt (t_D) gibt, zu dem der Wert des Zahlungsstromes vor der Zinsänderung gleich dem Wert nach der Zinsänderung ist. Die Auswirkung der Zinsänderung auf den Bar- und den Endwert heben sich in t_D also auf.

Sei V_t der Wert des Zahlungsstroms zur Zeit t vor der Zinsänderung und V_t^* der Wert zur Zeit t nach der Zinsänderung. Dann gilt zum Zeitpunkt t_D

$$V_{t_D} = V_{t_D}^*,$$

also

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r)^{t-t_D}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r+\lambda)^{t-t_D}} \ .$$

Durch umformen und logarithmieren erhalten wir:

$$(1+r)^{t_D} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r)^t} = (1+r+\lambda)^{t_D} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r+\lambda)^t}$$

$$t_D = \frac{\ln\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r+\lambda)^t}}\right)}{\ln\left(\frac{1+r+\lambda}{1+r}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{PV}{PV^*}\right)}{\ln\left(\frac{1+r+\lambda}{1+r}\right)} \tag{7}$$

Auf Grund der Eigenschaft, dass bei einer Zinsänderung eine Preisveränderung durch die Veränderung der Wiederveranlagungsbedingung überkompensiert wird, müssen sich die Wertfunktionen innerhalb der Laufzeit schneiden, unabhängig von der Richtung der Zinsänderung. Es existiert also immer ein Zeitpunkt t_D, in dem der geplante Wert der Zahlungsstromes gleich dem tatsächlichen Wert ist (=kompensatorischer Effekt). Der Zahlungsstrom ist zu t_D unabhängig vom Zinssatz, er ist also gegen Zinsänderungen geschützt.

Beispiel

Für eine Anleihe mit 10% Kupon, 5 Jahren Laufzeit, $r = 7\%$ und $\lambda = +1\%$ erhalten wir für den immunisierenden Zeitpunkt $t_D = 4,2121$. Für $\lambda = -1\%$ liegt der Zeitpunkt, in dem geplanter und tatsächlicher Wert übereinstimmen, bei $4,2288$. Wir erkennen, dass für $\lambda = \pm 1\%$ die Zeitpunkte nicht gleich sind.

Im nächsten Kapitel wollen wir die Berechnung dieses Zeitpunktes und die Auswirkung der Höhe der Zinsänderung genauer untersuchen und eine Formel für t_D herleiten, die unabhängig von der Höhe der Zinsänderung ist.

3.2.3 Herleitung der Duration-Formel[29]

Aus Formel (7) erkennen wir, dass t_D vom Barwert des Zahlungsstromes, des Zinssatzes und der Höhe der Zinsänderung abhängt, d.h. der kompensatorische Zeitpunkt t_D ist nicht für alle Zinsänderungen gleich. Nun stellt sich die Frage, ob es einen Zeitpunkt t_D gibt, für den, unabhängig von der Höhe der Zinsänderung, $V_{t_D} = V^*_{t_D}$ gilt.

Um erkennen zu können, wie weit die Zeitpunkte t_D für verschiedene Zinsänderungen variieren, untersuchen wir obige Anleihe mit $r = 7\%$ und zwei extremen Zinsänderungen ($\lambda = \pm 5\%$). Mit Formel (7) erhalten wir folgende Werte für die Schnittpunkte der Kurven:

λ	t_D
$+5\%$	4,1786
$+1\%$	4,2121
-1%	4,2288
-5%	4,2618

Tabelle 6: t_D für unterschiedliche Zinsänderungen

Abbildung 2 zeigt den Wertverlauf für die verschiedenen Zinsniveaus.

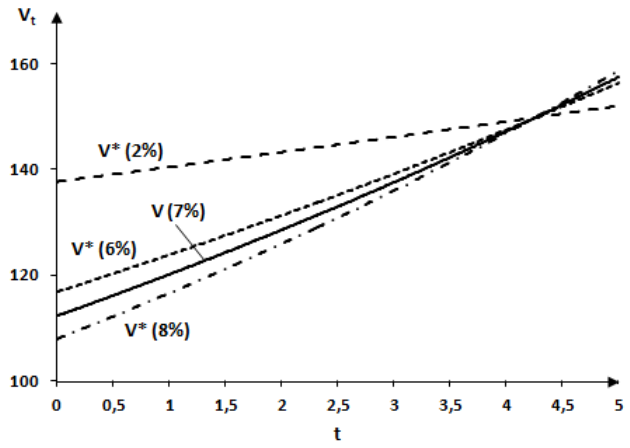

Abbildung 2: Wertverlauf für unterschiedliche Zinssätze

Es fällt auf, dass der kompensierende Zeitpunkt t_D für größere Zinsanstiege früher eintritt bzw. immer später eintritt, je stärker der Zinssatz fällt. Diese Eigenschaft wollen wir weiter untersuchen:

[29] vgl. [14, Kap. 2, S. 75-80]

Für den Zeitpunkt $t = 4,2288$ gilt $V_t = V_t^*$ nur bei einer Zinssenkung von 1%.
Bei einem Zinsanstieg gilt $V_t = V_t^*$ schon früher. Also muss zu $t = 4,2288$ V_t^* bereits größer sein als V_t.
Für den Fall, dass der Zinssatz in $t = 0^+$ mehr als 1% sinkt, gilt $V_t = V_t^*$ erst zu einem späteren Zeitpunkt. Das heißt, dass zu $t = 4,2288$ V_t^* noch größer als V_t ist.
Wir erhalten also, dass $V_t^* > V_t$ für $t = 4,2288$ gilt. V_t ist nur dann kleiner als V_t^*, wenn der Zinssatz um weniger als 1% fällt. Dann gilt nämlich $V_t = V_t^*$ schon vor $t = 4,2288$ und zu t wird ein schlechteres Ergebnis erzielt: $V_t^* < V_t$.

Abbildung 3 zeigt den Ausschnitt der Schnittpunkte aus Abbildung 2 vergrößert und verdeutlicht obige Gedankengänge.

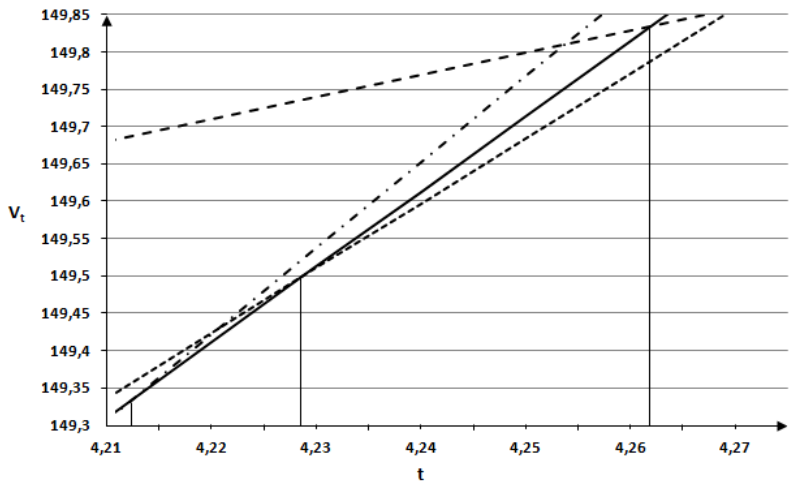

Abbildung 3: Schnittpunkte

Wir hätten als Ausgangspunkt auch t_D für eine Zinssenkung von nur 0,1% wählen können. Dann würden wir nur mehr für $\lambda \in (-0,1\%, 0\%)$ ein negatives Ergebnis erhalten. Wir wollen dieses Intervall immer weiter verkleinern und bilden daher den Grenzübergang für $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\ln \frac{PV}{PV^*}}{\ln \frac{1+r+\lambda}{1+r}}$$

Für $\lambda \to 0$ ist wegen $\ln(1) = 0$ sowohl Zähler, als auch Nenner gleich 0, es ergibt sich der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$. Da die Ableitungen von Zähler und Nenner existieren und die Ableitung des Nenners ungleich Null ist, können wir die Regel von De l'Hospital anwenden, die besagt, dass

$$t_D(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\ln \frac{PV}{PV^*}}{\ln \frac{1+r+\lambda}{1+r}} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left(\ln \frac{PV}{PV^*}\right)'}{\left(\ln \frac{1+r+\lambda}{1+r}\right)'}$$

gilt. Wir erhalten nun

$$t_D(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{PV^*}{PV} \cdot \frac{-PV \cdot (PV^*)'}{(PV^*)^2}}{\frac{1+r}{1+r+\lambda} \cdot \frac{1}{1+r}} = \lim_{\lambda \to 0} -\frac{\frac{(PV^*)'}{PV^*}}{\frac{1}{1+r+\lambda}},$$

mit

$$(PV^*)' = \sum_{t=1}^{n} -t \cdot \frac{c_t}{(1+r+\lambda)^{t+1}} = -\frac{1}{1+r+\lambda} \sum_{t=1}^{n} t \cdot \frac{c_t}{(1+r+\lambda)^t}.$$

Also gilt mit $\lambda \to 0$

$$t_D(0) = -\frac{\frac{1}{PV} \cdot \left(-\frac{1}{1+r}\right) \cdot \sum\limits_{t=1}^{n} t \cdot \frac{c_t}{(1+r)^t}}{\frac{1}{1+r}} = \left(\sum_{t=1}^{n} t \cdot \frac{c_t}{(1+r)^t}\right) \cdot \frac{1}{PV}.$$

Damit haben wir also einen Zeitpunkt gefunden, zu dem der Wert des Zahlungsstromes nach einer beliebigen Zinsänderung (in $t = 0^+$) mindestens so hoch wie der zu $t = 0$ geplante Endwert ist:

$$V^*_{t_D} \geq V_{t_D}$$

Für unser Beispiel mit der 10%-Kupon-Anleihe, 5 Jahre Laufzeit und $r = 7\%$ erhalten wir $t_D(0) = 4,2205$. Wie Tabelle 7 zeigt, gilt stets $V^*_{t_D} \geq V_{t_D}$.

λ	-5%	-1%	$-0,5\%$	$\pm 0\%$	$+0,5\%$	$+1\%$	$+5\%$
$V^*_{t_D}$	149,7114	149,4271	149,4184	$V_{t_D} = 149,4155$	149,4184	149,4270	149,7017

Tabelle 7: Werte im Zeitpunkt t_D

Dieser besondere Zeitpunkt wird als Macaulay-Duration bezeichnet.[30] „Im deutschen Sprachraum findet man dafür auch Bezeichnungen wie „durchschnittliche Fristigkeit“, „ökonomische Laufzeit eines Zahlungsstromes“, „mittlere Selbstliquidierungsperiode“ etc.“[31] Im Weiteren wird die Duration mit D abgekürzt und wir schreiben D statt t^D:

$$\boxed{D = \left(\sum_{t=1}^{n} t \cdot \frac{c_t}{(1+r)^t}\right) \cdot \frac{1}{PV}}$$

Die Duration ist also die Summe der gewichteten Zahlungszeitpunkte eines Zahlungsstromes. Dabei bilden die Barwertanteile der einzelnen zukünftigen Zahlungen am Gesamtbarwert,

$$\frac{c_t \cdot (1+r)^{-t}}{PV},$$

[30] wurde 1938 von Frederick R. Macaulay entwickelt

[31] [14, S. 78]

die Gewichte. Dies erklärt auch die Bezeichnung „durchschnittliche Kapitalbindungsdauer“.

Ein Zahlungsstrom ist im Zeitpunkt D gegen Zinsänderungen geschützt, da der Wert nach einer Zinsänderung mindestens so groß wie der geplante Wert (vor der Zinsänderung) ist. Das heißt, dass die Duration den Zeitpunkt der Immunisierung gegenüber dem Zinsänderungsrisiko darstellt.
Bevor wir auf diese wertvolle Eigenschaft der Immunisierung näher eingehen, untersuchen wir die Duration-Formel genauer.

3.2.4 Einflussfaktoren[32]

Wir wollen nun die Duration-Formel und ihre Abhängigkeit von Zinsniveau und Dauer des Zahlungsstromes untersuchen.

Da die Duration als Summe der gewichteten Zahlungszeitpunkte eines Zahlungsstromes dargestellt wird, und somit als mittlere Kapitalbindungsdauer interpretiert werden kann, muss die Duration immer kleiner als die Laufzeit n des Zahlungsstromes sein. Im Falle einer einmaligen Zahlung im Zeitpunkt $T \leq n$, tritt der immunisierende Zeitpunkt genau dann ein, also $D = T$. Es gilt also $D \leq n$.

Wie wir bereits in Kapitel 3.2.3 gesehen haben, triff die Duration bei einem großen Zinsanstieg früher ein. Es lässt sich vermuten: Je größer der Zinssatz, desto kleiner die Duration. Wir prüfen diese Aussage durch die 1. Ableitung der Duration nach r nach:

$$\begin{aligned}
\frac{dD}{dr} &= \frac{-\frac{1}{1+r} \cdot \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 \cdot c_t \, (1+r)^{-t} \cdot PV + \frac{1}{1+r} \left(\sum\limits_{t=1}^{n} t \cdot c_t \, (1+r)^{-t} \right)^2}{(PV)^2} \\
&= \frac{1}{(1+r)(PV)^2} \cdot \left(\left(\sum_{t=1}^{n} t \cdot c_t \, (1+r)^{-t} \right)^2 - \sum_{t=1}^{n} t^2 \cdot c_t \, (1+r)^{-t} \cdot \sum_{t=1}^{n} c_t \, (1+r)^{-t} \right)
\end{aligned}$$

Da der zweite Term in der Klammer für $n > 1$ größer als der erste ist, ist $\frac{dD}{dr}$ immer negativ. Daraus folgt, dass die Duration eines Zahlungsstromes für einen höheren Zinssatz kleiner wird und umgekehrt und somit wird obige Aussage bestätigt.

Eine zweite Eigenschaft, die bereits in Tabelle (6) aufgefallen ist, ist dass sich die Unterschiede der kompensatorischen Zeitpunkte D, selbst für relativ große Zinssprünge, als gering erweisen. Der Grund dafür ist die relativ kurze Laufzeit des Zahlungsstromes.

[32] vgl. [14, S. 77, 94, 96f.]

Zinsänderungen bei Zahlungsströmen mit längeren Laufzeiten wirken sich stärker auf die Duration aus, wie Tabelle (8) anhand einer Anleihe mit 10% Kupon verdeutlicht.

Duration	r	1%	5%	10%	20%
n					
5		4,318	4,253	4,170	3,993
10		7,657	7,270	6,759	5,722
15		10,568	9,600	8,367	6,183

Tabelle 8: Duration in Abhängigkeit von Zins und Laufzeit

Bei kurzen Laufzeiten bewirken selbst sehr große Zinssprünge kaum eine Veränderung der Duration. Im Gegensatz dazu führt eine Zinsänderung von 5% auf 10% für die Anleihe mit 15 Jahren Laufzeit zu einer Veränderung um 1,23 Jahre.

3.3 Duration als Zeitmaß

Wie wir aus dem vorigen Kapitel wissen, kann für jeden Zahlungsstrom der Zeitpunkt berechnet werden zu dem der Wert des Zahlungsstromes nach einer Veränderung der flachen Zinsstruktur nicht kleiner als der zu Beginn erwartete Wert ist. Diese Eigenschaft eignet sich als Instrument zur Immunisierung von Zahlungsströmen gegen das Zinsänderungsrisiko.
Ob Immunisierung zu jedem Zeitpunkt erreicht werden kann, hängt von der Verfügbarkeit am Markt ab. Da jedoch durch Portfoliobildung viele verschiedene Zahlungsstomstrukturen gebildet werden können, kann so das Zinsänderungsrisiko zu (fast) jedem beliebigen Zeitpunkt ausgeschaltet werden.

3.3.1 Duration eines Portfolios[33]

Wir betrachten ein Portfolio aus zwei Zahlungsströmen C^1 und C^2 mit unterschiedlichen Durations D_1 und D_2 und wollen die Duration des gesamten Portfolios berechnen.

Als Barwerte der beiden Zahlungsströme erhalten wir

$$PV_1 = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t^1}{(1+r)^t} \qquad \text{und} \qquad PV_2 = \sum_{t=1}^{m} \frac{c_t^2}{(1+r)^t},$$

[33] vgl. [14, S. 81f.]

mit einer Duration von

$$D_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot \frac{c_t^1}{(1+r)^t}}{PV_1} \qquad \text{und} \qquad D_2 = \frac{\sum_{t=1}^{m} t \cdot \frac{c_t^2}{(1+r)^t}}{PV_2} \,. \tag{8}$$

Der Barwert des Portfolios ist

$$PV_{PF} \;=\; \sum_{t=1}^{\max(n,m)} \frac{c_t^1 + c_t^2}{(1+r)^t} \;=\; PV_1 + PV_2$$

und die Duration

$$D_{PF} = \left(\sum_{t=1}^{\max(n,m)} t \cdot \frac{c_t^1 + c_t^2}{(1+r)^t} \right) \cdot \frac{1}{PV_{PF}} \,. \tag{9}$$

Aus den Formeln der Duration der einzelnen Zahlungsströme (8) folgt

$$\sum_{t=1}^{\max(n,m)} t \cdot \frac{c_t^1 + c_t^2}{(1+r)^t} \;=\; \underbrace{\sum_{t=1}^{n} t \cdot \frac{c_t^1}{(1+r)^t}}_{=D_1 \cdot PV_1} + \underbrace{\sum_{t=1}^{m} t \cdot \frac{c_t^2}{(1+r)^t}}_{=D_2 \cdot PV_2}$$

und mit Formel (9) erhalten wir schließlich:

$$D_{PF} = \frac{PV_1}{PV_{PF}} \cdot D_1 + \frac{PV_2}{PV_{PF}} \cdot D_2 \tag{10}$$

Wir erkennen, dass somit jede Duration zwischen D_1 und D_2 erreicht werden kann, es reichen also zwei Zahlungsströme aus, um zu jedem Zeitpunkt zwischen D_1 und D_2 Immunisierung erzielen zu können.

Die Duration eines Portfolios lässt sich als Linearkombination der Durations der einzelnen Zahlungsströme darstellen. Dabei bilden die prozentualen Portfolioanteile der Barwerte der einzelnen Zahlungsströme die Gewichte.

3.3.2 Immunisierung[34]

Wenn ein Investor über sein Vermögen zu einem fixen Planungshorizont T verfügen will, kann er mit Hilfe der Duration, den Wert der Investition zum Zeitpunkt T gegen Wertverluste aus Zinsänderungen schützen. So erhält er am Ende des Planungshorizonts einen mindestens genauso hohen Wert wie den am Anfang erwarteten.

[34] vgl. [14, S. 82f.]

Dafür muss er sein Portfolio so wählen, dass dessen Duration mit dem Planungshorizont übereinstimmt. Die Immunisierungsbedingung lautet also:

$$T = D$$

Wenn keine Anleihe mit $D = T$ am Markt verfügbar ist, muss er sein Geld in mindestens zwei Anleihen mit $D_1 < T < D_2$ veranlagen. Aus Formel (10) erhalten wir die Beziehung der Duration des Portfolios mit D_1 und D_2:

$$D_{PF} = w \cdot D_1 + (1 - w) \cdot D_2$$

w stellt den prozentualen Anteil von Anleihe 1 am Gesamtvermögen dar. $(1 - w)\%$ wird in Anleihe 2 veranlagt. Durch diese variablen Gewichtsfaktoren kann die gewünschte Duration $D_{PF} = T$ erreicht werden. Der bisher unbekannte Anteil w kann durch

$$w = \frac{D_2 - D_{PF}}{D_2 - D_1} \tag{11}$$

berechnet werden. Es gilt: $0 < w < 1$

Will der Investor in mehrere Anleihen investieren, ist w nicht mehr eindeutig bestimmt. Es gibt daher mehrere Möglichkeiten das Kapital zu veranlagen.

Das eben berechnete Portfolio ist im gewünschten Zeitpunkt T gegen eine Zinsänderung zu $t = 0^+$ geschützt. In der Realität ist jedoch nicht sicher, wann und wie viele Zinsänderungen eintreten. Um auch hier den immunisierenden Effekt beibehalten zu können, muss das Portfolio nach jeder Zinsänderung entsprechend umgeschichtet werden, sodass die Immunisierungsbedingung stets erfüllt ist. Eine genaue Ausführung findet sich in Uhlir/Steiner, S. 85-90.

3.3.3 Beispiel für eine einmalige Zinsänderung[35]

Ein Investor besitzt 10 Stück der Anleihe A mit folgenden Merkmalen:

Nominalwert:	100 Euro
Restlaufzeit:	8 Jahre
Kupon:	10%
Duration:	5,87

Der Zinssatz liegt bei 10%. Der Preis (Barwert) der Anleihe A ist 100 Euro, d.h. der Wert seines Portfolios beträgt 1.000 Euro. Dem Investor stehen weitere 3.000 Euro zur

[35] vgl. [15, S. 35-37]

Verfügung, die er veranlagen will. Er benötigt jedoch sein gesamtes Vermögen in 5 Jahren und will das Portfolio für diesen Zeitpunkt gegen Zinsänderungsrisiken absichern. Er muss die 3.000 Euro also so anlegen, dass die Duration des gesamten Portfolios 5 ist.

Da nun 25% des Vermögens (1.000 von 4.000 Euro) in Anleihe A mit einer Duration von 5,87 angelegt sind und wir eine Gesamtduration von 5 erreichen wollen, erhalten wir mit Formel (10)

$$5 = 0,25 \cdot 5,87 + 0,75 \cdot x$$

und somit $x = 4,71$. Das bedeutet, dass die 3.000 Euro so veranlagt werden, dass der Zahlungsstrom die Duration 4,71 hat. Eine Anleihe mit genau der gewünschten Duration wird schwer zu finden sein, also muss ein Subportfolio gebildet werden. Dazu stehen folgende Anleihen zur Verfügung:

	Anleihe B	Anleihe C
Nominalwert:	100 Euro	100 Euro
Restlaufzeit:	3 Jahre	6 Jahre
Kupon:	11%	5%
Marktpreis:	102,49	78,22
Duration:	2,72	5,23

Die Aufteilung der 3.000 Euro in Anleihe B und C lässt sich mit Formel (11) berechnen:

$$w = \frac{5,23 - 4,71}{5,23 - 2,72} = 0,206$$

Der Investor muss also 6,02 Stück ($= 20,6\% \cdot 3.000/102,49$) von Anleihe B und 30,46 Stück (=$79,4\% \cdot 3.000/78,22$) von Anleihe C kaufen, dann hat die Duration des Portfolios mit Anleihe A, B und C den gewünschten Wert 5. Der Investor ist somit gegen das Zinsänderungsrisiko geschützt und muss mit keinen Wertverlusten rechnen.

3.4 Duration als Risikomaß

Die Duration eines Zahlungsstromes wird nicht nur als Immunisierungsinstrument verwendet, sie wird häufig als Risikomaß interpretiert und dient als Maßstab für Preisschwankungen.
Wir werden im folgenden Kapitel untersuchen, wie sich der Barwert eines Zahlungsstromes bei einer kleinen Änderung des Zinssatzes verändert. Eine wichtige Aussage darüber kann mit Hilfe der modifizierten Duration (engl. modified duration) getroffen werden.

3.4.1 Preisschwankungen[36]

Der Preis eines Zahlungsstromes (Barwert) verändert sich in die entgegengesetzte Richtung der Zinsänderung. Die Preis-Zins-Kurve hat also folgende Form:

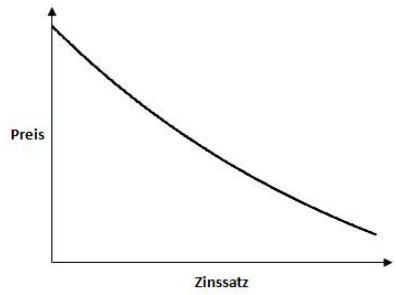

Abbildung 4: Preis-Zins-Kurve

Tabelle 9 zeigt die Preise einer 10%- und einer 5%-Kupon-Anleihe für 5 und 15 Jahre Laufzeit für verschiedene Zinssätze.

Preise der Anleihen mit unterschiedlicher Kuponhöhe und Laufzeit

Zins (%)	10%, 5J	10%, 15J	5%, 5J	5%, 15J
5,00	121,65	151,90	100,00	100,00
6,00	116,85	138,85	95,79	90,29
6,90	112,74	128,41	92,19	82,59
6,99	112,34	127,43	91,84	81,86
7,00	112,30	127,32	91,80	81,78
7,01	112,26	127,22	91,76	81,70
7,10	111,86	126,25	91,41	80,99
8,00	107,99	117,12	88,02	74,32
9,00	103,89	108,06	84,44	67,76

Tabelle 9: Zusammenhang zwischen Preis und Zinssatz

Tabelle 10 gibt die prozentuale Veränderung für die Anleihen aus Tabelle 9 für verschiedene Zinsänderungen, ausgehend von $r = 7\%$, an. Auffallend dabei ist, dass:

1. Je größer der Zinssprung, desto größer sind die Preisschwankungen.
2. Für kleine Zinsänderungen ist die prozentuale Veränderung für steigenden und fallenden Zinssatz ungefähr gleich groß.

[36] vgl. [5, S. 59-62]

Veränderung der Preise (in %)					
neuer Zins	Änderung in %	10%, 5J	10%, 15J	5%, 5J	5%, 15J
5,00	-2	8,33	19,31	8,93	22,28
6,00	-1	4,05	9,06	4,35	10,41
6,90	-0,1	0,39	0,86	0,42	0,99
6,99	-0,01	0,04	0,09	0,04	0,1
7,01	+0,01	-0,04	-0,08	-0,04	-0,1
7,10	+0,1	-0,39	-0,84	-0,42	-0,97
8,00	+1	-3,84	-8,01	-4,12	-9,12
9,00	+2	-7,49	-15,13	-8,02	-17,14

Tabelle 10: prozentuale Veränderung des Preises

3. Für große Zinssprünge gilt obige Aussage nicht mehr. Bei einer gegebenen Höhe der Zinsänderung ist die prozentuale Veränderung bei einem Zinsabfall größer als bei einem Zinsanstieg.

4. Die Höhe der prozentualen Veränderung des Preises ist nicht für alle Zahlungsströme gleich. Es gilt: Je länger die Laufzeit, desto größer ist die Preisvolatilität. Die prozentualen Veränderungen steigen mit fallendem Kupon.

Die Gültigkeit der Aussagen 2.–3. hängt mit der Konvexität der Preis-Zins-Kurve (Abb. 4) zusammen.

Um den Zusammenhang zwischen Höhe des Zinssatzes und Preisschwankungen genauer zu untersuchen, betrachten wir Tabelle 11. Spalte 2 zeigt den Preis einer 10%-Kupon Anleihe mit 15 Jahren Laufzeit bei verschiedenen Zinssätzen. Der Preis nach einem Zinsanstieg von 1% (=100 Basispunkte) steht in Spalte 3. Spalten 4 und 5 geben die absolute und die prozentuale Veränderung an.

Zins (%)	Anfangs-preis	neuer Preis[1]	Preis-abfall	Abfall in %
7	127,32	117,12	10,2	8,01
8	117,12	108,06	9,06	7,74
9	108,06	100,00	8,06	7,46
10	100,00	92,81	7,19	7,19
11	92,81	86,38	6,43	6,93

[1] nach einer Zinserhöhung um 1%

Tabelle 11: Preisveränderungen für verschiedene Zinsniveaus

Es wird deutlich, dass die Preisvolatilität umso höher ist, je kleiner der Zinssatz ist und umgekehrt.

3.4.2 Modifizierte Duration[37]

Wir wollen nun ein Maß für die Preisvolatilität eines Zahlungsstromes herleiten. Dazu betrachten wir die erste Ableitung des Preises (PV) nach dem Zinssatz r:

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+r)^t} \\ \frac{dPV}{dr} &= \sum_{t=1}^{n} \frac{(-t)\cdot c_t}{(1+r)^{t+1}} = -\frac{1}{1+r}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{t\cdot c_t}{(1+r)^t}\right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung gibt die ungefähre Veränderung des Preises bei einer kleinen Veränderung der Zinskurve an. Der Ausdruck in der Klammer stellt den gewichteten Durchschnitt der Zeitpunkte des Zahlungsstromes mit den Barwerten der einzelnen Zahlungen als Gewichte dar.
Wir erhalten die prozentuale Veränderung des Preises, indem wir obige Gleichung durch PV dividieren. Hier finden wir die, uns bereits bekannte, Macaulay-Duration D wieder:

$$\frac{dPV}{dr}\frac{1}{PV} = -\frac{1}{1+r}\underbrace{\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{t\cdot c_t}{(1+r)^t}\right)\frac{1}{PV}}_{Macaulay\ Duration}$$

Wir erhalten somit

$$\frac{dPV}{dr}\frac{1}{PV} = -\frac{1}{1+r}\cdot D \tag{12}$$

Die Duration durch $1+r$ dividiert ist als modifizierte Duration (MD) bekannt:

$$MD = \frac{D}{1+r}$$

Daraus folgt

$$\frac{dPV}{dr}\frac{1}{PV} = -MD. \tag{13}$$

Gleichung (13) zeigt den inversen Zusammenhang zwischen der modifizierten Duration und der ungefähren prozentualen Preisveränderung bei einer Zinsänderung, der auf die Form der Preis-Zins-Kurve zurückzuführen ist.

[37] vgl. [5, S. 64-72]

Prozentuale Preisveränderung

Mutiplizieren wir beide Seiten von Gleichung (13) mit dr, erhalten wir folgende Beziehung:

$$\frac{dPV}{PV} = -MD \cdot dr \tag{14}$$

Damit können wir die ungefähre prozentuale Preisveränderung bei gegebener Zinsveränderung berechnen.

Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen: Der Preis einer Anleihe mit 10% Kupon und 15 Jahren Laufzeit ist 127,32 für $r = 7\%$ (siehe Tab. 9). Die modifizierte Duration ist $\frac{9,104}{1+0,07} = 8,5088$. Steigt der Zins auf $7,10\%$ (+10 BP), erhalten wir mit Formel (14) als ungefähre prozentuale Veränderung $-8,5088 \cdot 0,001 = -0,0085088 = -0,85088\%$.
Aus Tabelle 9 können wir den neuen Preis (126,25) und aus Tabelle 10 die tatsächliche prozentuale Veränderung von $-0,84\%$ ablesen.
Analog erhalten wir $-8,5088 \cdot (-0,001) = 0,85088\%$ aus Formel (14) und $0,86\%$ aus Tabelle 10 für einen Zinsabfall von 10 BP auf $r = 6,9\%$.

Für kleine Zinsänderungen ergibt die modifizierte Duration also eine gute Approximation der prozentualen Preisänderung. Was passiert bei größeren Zinssprüngen?
Nehmen wir eine Zinsänderung von $\pm 2\%$ an. Die approximierten Preisschwankungen sind $-8,5088 \cdot (-0,02) = 0,17018 = 17,017606\%$ für 5% und $-17,017606\%$ für 9%. Aus Tabelle 10 lesen wir $19,31\%$ und $-15,13\%$ für die tatsächlichen Werte ab.
Vergleichen wir diese mit den approximierten Werten, sehen wir, dass sich bereits für einen Zinsänderung von 2% größere Unterschiede ergeben.
Außerdem lässt sich erkennen, dass die modifizierte Duration eine symmetrische Veränderung angibt. Wie wir jedoch aus Kapitel 3.4.1 wissen, ist dies nicht der Fall.

Die modifizierte Duration kann als approximierte prozentuale Preisveränderung für eine Zinsänderung um 1% (100 BP) interpretiert werden, da

$$\frac{dPV}{PV} = -MD = -MD \cdot 1\%$$

gilt.

Da zwischen der prozentualen Veränderung des Preises bei einer Zinsänderung und der modifizierten Duration ein enger Zusammenhang besteht, gelten die Eigenschaften (1.–4.) aus Kapitel 3.4.1 auch für die modifizierte Duration.
Natürlich ist die Preisvolatilität (und die Zinssensitivität) umso größer, je größer die modifizierte Duration ist.

Absolute Preisveränderung

Multiplizieren wir Gleichung (13) mit PV, erhalten wir

$$\frac{dPV}{dr} = -MD \cdot PV.$$

$MD \cdot PV$ wird als „Dollar Duration“ (DD) bezeichnet und gibt die absolute Veränderung des Barwerts bei einer Zinsänderung um 1% (100 BP) an:

$$DD = MD \cdot PV \tag{15}$$

Durch

$$dPV = -MD \cdot PV \cdot dr = -DD \cdot dr \tag{16}$$

können wir die absolute Preisveränderung bei einer Zinsänderung von dr berechnen.

Um die Genauigkeit der Approximation durch Formel (16) zu untersuchen, betrachten wir die Anleihe aus obigem Beispiel. Die DD ist $8,5088 \cdot 127,32 = 1083,3726$. Für eine Zinserhöhung auf $7,01\%$ (1 BP) erhalten wir als Approximation:

$$dPV = -1083,3726 \cdot (0,0001) = -0,1083373$$

Analog erhalten wir 0,1083373 für einen Zinsabfall um 1 BP. Aus Tabelle 9 können wir die tatsächlichen Veränderungen berechnen: $-0,10$ $(= 127,22 - 127,32)$ für $+1BP$ und $+0,11$ $(= 127,43 - 127,32)$ für $-1BP$.

Für eine größere Zinsänderung erhalten wir $\mp 21,6675$ $(-1083,3726 \cdot \pm 0,02)$ für $\pm$ 200 BP als Approximationen für die Preisveränderung und $-19,26$ $(+200BP)$ und $+24,58$ $(-200BP)$ aus Tabelle 9.
Dieses Ergebnis stimmt mit vorigem überein, Gleichung (16) liefert eine gute Approximation für kleine Zinsänderungen, für große ist die Annäherung jedoch zu ungenau.

Die Duration überschätzt die Preisveränderung bei steigendem Zinssatz, der neue Preis wird also unterschätzt. Bei fallendem Zinssatz unterschätzt die Duration die Preisveränderung, der neue Preis wird aber auch unterschätzt.
Der Grund für die ungenaue Approximation bei größeren Zinsänderungen ist die konvexe Form der Preis-Zins-Kurve. Die modifizierte und die Dollar Duration berücksichtigen diese Konvexität nicht.

3.4.3 Genauigkeit der Duration: die Konvexität[38]

Damit wir die Genauigkeit der Approximation der Preisveränderung für große Zinsänderungen verbessern können, untersuchen wir die Konvexität der Preis-Zins-Kurve

[38] vgl. [5, S. 72-81], [15, S. 48-55]

genauer. Dazu zeichnen wir eine Tangente im Punkt r^* ein. Diese Tangente stellt die geschätzte Preiskurve dar und ist durch die modifizierte Duration gegeben. Wir erinnern uns an

$$\frac{dPV}{dr}\frac{1}{PV} = -MD,$$

d.h. die Steigung der Tangente an die Preis-Zins-Kurve ist $-MD \cdot PV$.

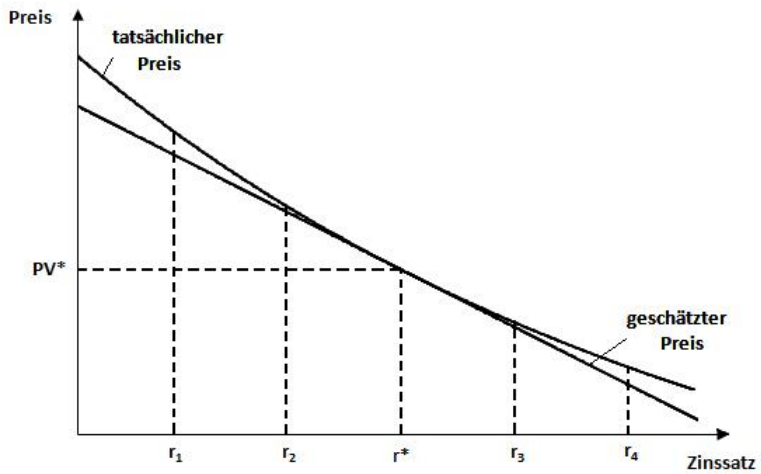

Abbildung 5: tatsächlicher und geschätzter Preisverlauf

Abbildung 5 bestätigt unser Ergebnis aus dem vorigen Kapitel: Für kleine Zinsänderungen (r_2 und r_3) liefert die Approximation durch die modifizierte Duration gute Werte, für größere Zinssprünge (r_1 und r_4) wird die Annäherung jedoch immer ungenauer. Außerdem zeigt die Abbildung, dass die, mittels der modifizierten Duration, geschätzten Barwerte immer unterschätzt werden.
Um die Approximation des neuen Preises mit Hilfe der modifizierten Duration zu verbessern, müssen wir also die Konvexität der Preis-Zins-Kurve berücksichtigen. Dazu betrachten wir die ersten zwei Terme der Taylorreihe:

$$dPV = \frac{dPV}{dr}dr + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2PV}{dr^2}(dr)^2 \tag{17}$$

und erhalten durch Division durch PV

$$\frac{dPV}{PV} = \frac{dPV}{dr}\frac{1}{PV}dr + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2PV}{dr^2}\frac{1}{PV}(dr)^2 \tag{18}$$

Im ersten Teil dieser Gleichung erkennen wir die modifizierte Duration wieder. Wir nutzen nun den 2. Term um die Approximation für die prozentuale Preisveränderung zu verbessern. Dabei wird

$$C = \frac{d^2PV}{dr^2} \cdot \frac{1}{PV}$$

als Konvexitätsmaß bezeichnet. Es gilt:

$$\frac{d^2PV}{dr^2} \cdot \frac{1}{PV} = \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)c_t}{(1+r)^{t+2}} \cdot \frac{1}{PV} = \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)c_t}{(1+r)^t} \cdot \frac{1}{PV}$$

Wie wir sehen, wird in obiger Summe die Duration D mit $(t+1)$ multipliziert. Daraus folgt, dass mit zunehmender Duration auch die Konvexität (sogar überproportional) steigt.

Zusammengesetzt gilt:

$$\frac{dPV}{PV} = -MD \cdot dr + \frac{1}{2} \cdot C \cdot (dr)^2 \tag{19}$$

Mit Hilfe der Konvexität können wir die prozentuale Veränderung des Barwertes wesentlich genauer schätzen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Für unsere Anleihe aus dem vorigen Beispiel (10% Kupon, 15 Jahren Laufzeit und $r = 7\%$) erhalten wir folgende Werte:
Das Konvexitätsmaß ist $C = 103,5665$, die modifizierte Duration kennen wir bereits: $MD = 8,5088$.
Bei einer Zinsänderung von 200 BP, von 7% auf 9%, erhalten wir nun als approximierte prozentuale Veränderung $-8,5088 \cdot 0,02 + \frac{1}{2} \cdot 103,5665 \cdot (0,02)^2 = -0,14947 = -14,947\%$, im Vergleich zum Ergebnis aus dem vorigen Kapitel ($-17,0176\%$) ist dies eine deutliche Verbesserung der Approximation zum tatsächlichen Wert von $-15,13\%$.
Auch im Fall einer Zinssenkung sehen wir, dass Formel (18) ein deutlich besseres Ergebnis liefert:
Bei einer Zinssenkung von -200 BP, von 7% auf 5%, erhalten wir als approximierte prozentuale Veränderung $-8,5088 \cdot (-0,02) + \frac{1}{2} \cdot 103,5665 \cdot (-0,02)^2 = 19,088\%$. Dies ist eine deutlich bessere Annäherung an den tatsächlichen Wert, $19,31\%$, im Vergleich zum Ergebnis nur aus der modifizierten Duration ($+17,0176\%$).

Die Approximation der prozentualen Preisveränderung durch die modifizierte Duration liefert symmetrische Werte für Zinssteigungen und Senkungen. Für kleine Änderungen im Zinsniveau lieferte sie gute Annäherungen.
Für größere Zinssprünge bemerkten wir allerdings, dass die Höhe des Preisverlustes bei einer Zinserhöhung kleiner war als der Gewinn bei einer Zinssenkung der gleichen Höhe - die Symmetrie ging verloren.
Durch Multiplikation des Konvexitätsmaßes mit $(dr)^2$ erhalten wir auch hier symmetrische Werte, der entscheidende Unterschied ist jedoch, dass nun alle Werte, selbst bei einer negativen Zinsverschiebung, positiv sind.
Durch Addition der zwei Terme aus Gleichung (19) wird der Preisverlust für einen

Zinsanstieg vermindert und der Gewinn bei einer Zinssenkung verstärkt - die Symmetrie ist nun aufgehoben und die prozentuale Veränderung des Barwertes kann wesentlich genauer geschätzt werden.

Gleichung (17) gibt die absolute Preisveränderung an. Auch hier kann durch die Berücksichtigung des sogenannten Dollar-Konvexitätsmaßes

$$\frac{d^2PV}{dr^2}$$

eine bessere Annäherung an den tatsächlichen Preis erreicht werden.

Abschließend betrachten wir Abbildung 6, die drei Tangenten an die Preis-Zins-Kurve zeigt.

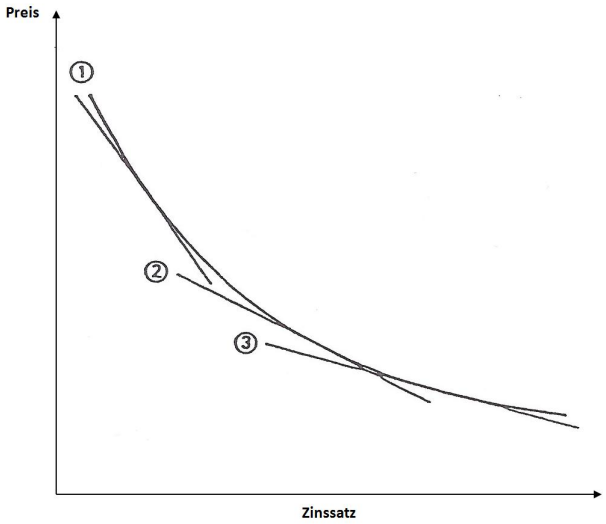

Abbildung 6: Änderung der Duration bei Zinsänderungen
(Quelle: [5, S. 81])

Wir erkennen, dass der Anstieg der Tangente für größere Zinssätze flacher ist. Eine Zinserhöhung bedeutet eine kleinere Duration und auch eine kleinere Konvexität, was wiederum zu einer kleineren prozentualen Preisänderung führt (vgl. auch Tab. 11).
Für eine Zinssenkung, wird die Tangente steiler - Konvexität, Duration und damit auch die prozentuale Preisveränderung werden größer.

4 Die Duration der Spätschadenreserve

Nachdem wir uns in Kapitel 2 mit der Problematik der Spätschadenregulierung und dem Chain-Ladder-Verfahren zur Schätzung der zukünftigen Schadenzahlungen beschäftigt haben und in Kapitel 3 die Duration-Formel und deren Anwendung kennengelernt haben, wollen wir nun die Duration für Schadenzahlungsströme berechnen und ihre Besonderheiten in Kapitel 5 untersuchen.
Bevor wir die Berechnungen in ein Modell umsetzten, müssen wir einige Vorbereitungen über das Abwicklungsdreieck, die Abwicklungsfaktoren und die Diskontierung der Schadenzahlungen treffen.
Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir die Duration-Formel aus Kapitel 3.2.3 den Schadenzahlungen anpassen und eine Vereinfachung finden.
Doch zu aller erst beschäftigen wir uns mit der Frage, inwiefern die Duration in Versicherungsunternehmen eine Rolle spielt.

4.1 Duration-Matching

Das Duration-Konzept wird bei Versicherungen und Banken häufig im Asset-Liability-Management angewandt. Unter ALM ist eine Aktiv-Passiv-Steuerung zu verstehen, bei der es darum geht, Aktionäre und Versicherer gegen Zinsänderungsrisiken abzusichern. Mit dem sogenannten Duration-Matching soll erreicht werden, dass die Wertänderung des Vermögens bei einer Zinsänderung der Wertschwankungen der Verbindlichkeiten entsprechen, damit der Wert des Eigenkapitals unverändert bleibt und immun gegen Zinsänderungen ist.[39]

Wir erhalten also folgende Forderung:

$$\frac{dPV_A}{dr} = \frac{dPV_L}{dr}$$

Mit der modifizierten Duration ergibt sich:

$$MD_A \cdot PV_A = MD_L \cdot PV_L$$

Durch Multiplikation mit $1 + r$ erhalten wir:

$$D_A \cdot PV_A = D_L \cdot PV_L$$

Wegen der Duration-Formel für Portfolios erhalten wir auch

$$D_A = \frac{PV_L}{V} \cdot D_L + \frac{PV_{EK}}{V} \cdot D_{EK},$$

[39] vgl. [4], [7, S. 10f.]

mit Gesamtvermögen der Passiv-Seite V. Da $PV_A = V$, gilt

$$D_{EK} = 0.$$

Das Eigenkapital ist also gegen Zinsänderungen immun.

4.2 Abwicklungsdreieck und Schadenzahlungsstrom

Das Abwicklungsdreieck wird aus den tatsächlichen Schadenzahlungen eines Versicherungsunternehmens gebildet. Da uns keine echten Daten zur Verfügung stehen, müssen wir unser Abwicklungsdreieck der Schadenzuwächse S_{ik} nach einer Formel konstruieren.

Die Schadenzahlung im ersten Abwicklungsjahr für das erste Anfalljahr, S_{11}, bildet unseren Anfangswert, der beliebig gewählt werden kann. Alle anderen Werte des Schadendreiecks bauen auf ihm auf.
Wir nehmen an, dass die Schadenzahlungen jährlich wachsen (oder sinken) können, was zum Beispiel auf eine steigende (oder fallende) Anzahl an Schäden zurückzuführen ist. Mit dem Volumsfaktor v_i für $i = 1, \ldots, I-1$ wird diese Veränderung der Schadenzahlungen der Anfalljahre berücksichtigt. Wir erhalten die erste Spalte unseres Abwicklungsdreiecks durch:

$$S_{i1} = S_{11} \cdot v_{i-1}, \qquad i = 2, \ldots, I$$

Die Abwicklungsfaktoren f_k, $k = 1, \ldots, I-1$ bestimmen die Höhe der kumulierten Schadenzahlungen ab dem zweiten Abwicklungsjahr:

$$C_{ik} = S_{i1} \cdot f_1 \, f_2 \cdot \ldots \cdot f_{k-1}, \qquad k \geq 2$$

Die Schadenzuwächse können durch

$$S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1} = S_{i1} \cdot f_1 \, f_2 \cdot \ldots \cdot f_{k-2} \cdot (f_{k-1} - 1), \qquad k \geq 2$$

berechnet werden.

Wir können nun die Formeln zur Berechnung des Abwicklungsdreiecks der Schadenzuwächse für $i + k \leq I + 1$ aufstellen:

$$S_{ik} = \begin{cases} S_{11} \cdot v_{i-1} & k = 1,\ i = 2, \ldots, I \\ S_{11} \cdot \prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1} - 1) & i = 1,\ k = 2, \ldots, I \\ S_{11} \cdot v_{i-1} \cdot \prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1} - 1) & i, k = 2, \ldots, I \end{cases} \tag{20}$$

Das Abwicklungsdreieck der kumulierten Schadenzahlungen C_{ik} für I Abwicklungsjahre lässt sich wie folgt darstellen:

	Abwicklungsjahre k						
Anfalljahre i	S_{11}	$S_{11}f_1$	$S_{11}f_1f_2$	$\dots$	$S_{11}\prod_{j=1}^{k-1} f_j$	$\dots$	$S_{11}\prod_{j=1}^{I-1} f_j$
	$S_{11}v_1$	$S_{11}v_1f_1$	$S_{11}v_1f_1f_2$	$\dots$	$\dots$		
	$S_{11}v_2$	$S_{11}v_2f_1$	$S_{11}v_2f_1f_2$	$\dots$			
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
	$S_{11}v_{i-1}$	$\dots$					
	$\vdots$						
	$S_{11}v_{I-1}$						

Tabelle 12: Das Abwicklungsdreieck der Schadenstände C_{ik}

Wie wir aus Kapitel 2.2.1 (Formel (1)) wissen, lassen sich die Chain-Ladder-Faktoren durch

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \qquad 1 \leq k \leq I-1$$

berechnen. Da wir annehmen, dass die Abwicklungsfaktoren f_k für jedes Anfalljahr i gleich sind, was bedeutet, dass jedes Anfalljahr das gleiche Abwicklungsverhalten hat, erhalten wir

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} S_{11}v_{i-1}\prod_{j=1}^{k} f_j}{\sum_{i=1}^{I-k} S_{11}v_{i-1}\prod_{j=1}^{k-1} f_j} = \frac{S_{11}\prod_{j=1}^{k} f_j \cdot \sum_{i=1}^{I-k} v_{i-1}}{S_{11}\prod_{j=1}^{k-1} f_j \cdot \sum_{i=1}^{I-k} v_{i-1}} = f_k.$$

Somit gilt Formel (20) nicht nur für S_{ik} mit $i+k \leq I+1$ sondern auch für die geschätzten zukünftigen Schadenzahlungen S_{ik} mit $i+k > I+1$. Das vollständige Abwicklungsquadrat der jährlichen Schadenzahlungen sieht wie folgt aus:

Anfalljahre i \ Abwicklungsjahre k				
S_{11}	$\dots$	$S_{11}\prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1}-1)$	$\dots$	$S_{11}\prod_{j=1}^{I-2} f_j \cdot (f_{I-1}-1)$
$\vdots$				$\vdots$
$S_{11}v_{i-1}$	$\dots$	$S_{11}v_{i-1}\prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1}-1)$	$\dots$	$S_{11}v_{i-1}\prod_{j=1}^{I-2} f_j \cdot (f_{I-1}-1)$
$\vdots$				$\vdots$
$S_{11}v_{I-1}$	$\dots$	$S_{11}v_{I-1}\prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1}-1)$	$\dots$	$S_{11}v_{I-1}\prod_{j=1}^{I-2} f_j \cdot (f_{I-1}-1)$

Tabelle 13: Das Abwicklungsquadrat der Schadenzuwächse S_{ik}

Mit Tabelle 13 können wir nun die Zahlungsströme, die für die Berechnung der Duration der Schadenzahlungen benötigt werden, leicht ablesen.
Da die Nebendiagonale im Abwicklungsquadrat die Schadenzahlungen für das aktuelle Jahr angibt, bildet die Summe der Zahlungen für das nächste Kalenderjahr c_1 des Zahlungsstromes. c_2 ist dann die Summe der Zahlungen für das übernächste Jahr, usw. Es gilt:

$$c_t = \sum_{k=t+1}^{I} S_{I+t+1-k,k} \qquad t = 1, \dots, I-1 \tag{21}$$

Wie zu erkennen ist, gilt für alle Zahlungen S_{ik} im Jahr t $i+k = I+1+t$.
Die Spätschadenreserve $\hat{R}$ kann durch

$$\hat{R} = \sum_{t=1}^{I-1} c_t$$

berechnet werden.

Wir nehmen an, dass alle Schadenzahlungen die während eines Jahres anfallen, erst am Ende dieses Jahres ausbezahlt werden.
Die Konstruktion des Abwicklungsdreiecks mit Formel (20) liefert homogene Schadenzahlungen, die keine Inflation enthalten. Wir können die Inflation jedoch bei der Berechnung der Duration berücksichtigen, wenn wir statt dem Nominal- den Realzins als Diskontierungsfaktor verwenden (vgl. Kapitel 3.1.4).

4.3 Diskontierte Spätschadenreserve

Im Abwicklungsquadrat der Schadenzuwächse aus Kapitel 4.2 sind die nichtdiskontierten Schadenzahlungen dargestellt. Um die diskontierte Reserve $\hat{R}'$ zu erhalten,

müssen die jährlichen Zahlungen c_t mit dem Diskontierungsfaktor v^t abgezinst werden. Mit

$$c'_t = \sum_{k=t+1}^{I} S_{I+t+1-k,k} \cdot v^t \qquad t = 1, \ldots, I-1$$

gilt

$$\hat{R}' = \sum_{t=1}^{I-1} c'_t.$$

Wenn wir jedoch die bisherigen Schadenzahlungen auf das aktuelle Kalenderjahr mit dem Aufzinsungsfaktor r aufzinsen, erhalten wir mit dem Chain-Ladder-Verfahren die diskontierten zukünftigen Schadenzahlungen und somit auch die diskontierte Reserve. Tabelle 14 zeigt die, auf das aktuelle Kalenderjahr, aufgezinsten Schadenzahlungen.

Abwicklungsjahre k							
$S_{11} \cdot r^{I-1}$	$S_{12} \cdot r^{I-2}$	$\ldots$	$S_{1k} \cdot r^{I-k}$	$S_{1,k+1} \cdot r^{I-k-1}$	$\ldots$	$S_{1,I-1} \cdot r$	S_{1I}
$S_{21} \cdot r^{I-2}$	$S_{22} \cdot r^{I-3}$	$\ldots$	$S_{2k} \cdot r^{I-k-1}$	$S_{2,k+1} \cdot r^{I-k-2}$	$\ldots$	$S_{2,I-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$		$\vdots$			
$S_{I-k,1} \cdot r^k$	$S_{I-k,2} \cdot r^{k-1}$	$\ldots$	$S_{I-k,k} \cdot r$	$S_{I-k,k+1}$			
$S_{I+1-k,1} \cdot r^{k-1}$	$S_{I+1-k,2} \cdot r^{k-2}$	$\ldots$	$S_{I+1-k,k}$				
$\vdots$	$\vdots$						
$S_{I-1,1} \cdot r$	$S_{I-1,2}$						
S_{I1}							

Tabelle 14: Das aufgezinste Abwicklungsdreieck

Mit den Modellannahmen aus dem vorigen Kapitel gilt:

$$S'_{ik} = S_{11} v_{i-1} \cdot \prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1} - 1) \cdot r^{I+1-k-i} \qquad i + k \leq I + 1$$

Die kalenderjahrweise Diskontierung verändert die Daten diagonalweise und wirkt wie eine Änderung der Abwicklungsfaktoren. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Chain-Ladder-Faktoren des aufgezinsten Abwicklungsdreiecks f'_k und den bisherigen Chain-Ladder-Faktoren f_k:

$$
\begin{aligned}
f'_k &= \frac{S_{11} \cdot \left(r^{I-1} + (f_1 - 1) r^{I-2} + \ldots + \prod_{j=1}^{k-2} f_j \, (f_{k-1} - 1) r^{I-k} + \prod_{j=1}^{k-1} f_j \, (f_k - 1) r^{I-k-1} \right)}{S_{11} \cdot \left(r^{I-1} + (f_1 - 1) r^{I-2} + \ldots + \prod_{j=1}^{k-2} f_j \, (f_{k-1} - 1) r^{I-k} \right)} \\
&\quad \frac{+ S_{11} v \cdot \left(r^{I-2} + (f_1 - 1) r^{I-3} + \ldots + \prod_{j=1}^{k-2} f_j \, (f_{k-1} - 1) r^{I-k-1} + \prod_{j=1}^{k-1} f_j \, (f_k - 1) r^{I-k-2} \right)}{+ S_{11} v \cdot \left(r^{I-2} + (f_1 - 1) r^{I-3} + \ldots + \prod_{j=1}^{k-2} f_j \, (f_{k-1} - 1) r^{I-k-1} \right)} \\
&\quad \frac{+ \ldots + S_{11} v_{I-k-1} \cdot \left(r^{k} + (f_1 - 1) r^{k-1} + \ldots + \prod_{j=1}^{k-2} f_j \, (f_{k-1} - 1) r + \prod_{j=1}^{k-1} f_j \, (f_k - 1) \right)}{+ \ldots + S_{11} v_{I-k-1} \cdot \left(r^{k} + (f_1 - 1) r^{k-1} + \ldots + \prod_{j=1}^{k-2} f_j \, (f_{k-1} - 1) r \right)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{k-1} f_j \, (f_k - 1) \cdot (r^{I-k-1} + v \, r^{I-k-2} + v_2 \, r^{I-k-3} + \ldots + v_{I-k-1})}{r^k \cdot (\ldots) + (f_1 - 1) r^{k-1} \cdot (\ldots) + \ldots + \prod_{j=1}^{k-2} f_j \, (f_{k-1} - 1) r \cdot (\ldots)} + 1 \\
&\quad \text{mit } (\ldots) = (r^{I-k-1} + v \, r^{I-k-2} + v_2 \, r^{I-k-3} + \ldots + v_{I-k-1}) \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{k-1} f_j \, (f_k - 1)}{\sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{k-i-1} f_j \, (f_{k-i} - 1) \cdot r^i} + 1
\end{aligned}
$$

Die Formel der Chain-Ladder-Faktoren f'_k gilt nur für unsere Annahmen an das Abwicklungsdreieck. Wenn das Abwicklungsmuster nicht für jedes Schadenanfalljahr i gleich ist, lässt sich der Zusammenhang zwischen f_k und f'_k nicht so einfach darstellen.

Wir erhalten den geschätzten diskontierten Endschaden durch Multiplikation der aktuellen Schadenstände mit den Faktoren f'_k:

$$
\hat{C}'_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \prod_{k=I+1-i}^{I-1} f'_k, \quad 2 \leq i \leq I
$$

Die diskontierte Reserve der einzelnen Anfalljahre i ist (vgl. Formel (3))

$$
\hat{R}'_i = C_{i,I+1-i} \cdot \left(\prod_{k=I+1-i}^{I-1} f'_k - 1 \right).
$$

Die Summe der Jahresreserven $\hat{R}'_i$ ergibt die diskontierte Gesamtreserve $\hat{R}'$.
Für die Berechnung der diskontierten Reserve müssen also die einzelnen Schadenzahlungen S_{ik} für $i + k > I + 1$ nicht mehr berechnet werden. Wir benötigen nur die aktuellen Schadenstände und die neuen Chain-Ladder-Faktoren f'_k.

Da wir für die Duration-Formel jedoch die jährlichen Zahlungsströme benötigen, führen wir das Chain-Ladder-Verfahren wie gewohnt durch und zinsen die zukünftigen Zahlungsströme erst für die Berechnung der Duration ab. Somit geht die zeitliche Vergleichbarkeit der Schadenzahlungen durch die kalenderjahrweise Diskontierung auch nicht verloren.[40]

Die Wahl der Zinsen hat einen großen Einfluss auf den Barwert der zukünftigen Zahlungsströme und somit auch auf die Duration.
Nach dem Unternehmensgesetzbuch durften Schadenrückstellungen nicht abgezinst werden, sondern mussten in Höhe der endgültig erwarteten Verpflichtungen gebildet werden.[41]
Unter Solvency II werden Versicherungsunternehmen zu einer marktwertnahen Bewertung ihrer Vermögensgegenstände und Verbindlichkeiten aufgefordert. Für die Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen gilt nun, im Gegensatz zu den bisherigen UGB-Regelungen, dass die zukünftigen Zahlungsströme mit einer risikolosen (zeitabhängigen) Zinsstrukturkurve zu diskontieren sind. Dieser Zins wird von EIOPA (europäische Aufsichtsbehörde für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersversorgung) vorgegeben.[42]
Der risikolose Zinssatz spiegelt nur den Zeitwert des Geldes wider, das Ausfallrisiko wird nicht mit einbezogen.[43]

4.4 Besonderheiten der Abwicklungsfaktoren

Die Abwicklungsfaktoren f_k bestimmen die Höhe der Schadenzahlungen der einzelnen Abwicklungsjahre und somit auch die Dauer der Regulierungszeit. Im Folgenden werden wir 3 unterschiedliche Abwicklungsverhalten untersuchen.
Um aus den Abwicklungsfaktoren mehr Information ablesen zu können, wollen wir zuerst den Abwicklungsprozentsatz herleiten und erklären.

[40] vgl. [11]
[41] § 211 Abs. 1 UGB
[42] vgl. [11], [12], [2]
[43] vgl. [1, S. 2]

4.4.1 Abwicklungsprozentsatz

Sei p_k der Abwicklungsprozentsatz für das k-te Abwicklungsjahr, der angibt, welcher Anteil des Gesamtschadens nach k Jahren bereits abgewickelt ist. Für das i-te Schadenanfalljahr gilt

$$p_k = \frac{C_{ik}}{C_{iI}}, \tag{22}$$

also auch

$$C_{iI} \cdot p_k = C_{ik} \quad \text{und} \quad C_{iI} = \frac{C_{ik}}{p_k}.$$

Für den aktuellen Schadenstand $C_{i,I+1-i}$ gilt:

$$C_{iI} = \frac{C_{i,I+1-i}}{p_{I+1-i}}.$$

Aus Kapitel 2.2.1 wissen wir, dass

$$C_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \prod_{j=I+1-i}^{I-i} f_j$$

gilt. Daraus folgt

$$p_{I+1-i} = \frac{1}{\prod\limits_{j=I+1-i}^{I-1} f_j}. \tag{23}$$

Aus Gleichung (22) und (23) erhalten wir

$$\frac{C_{ik}}{C_{iI}} = p_k = \frac{1}{\prod\limits_{j=k}^{I-1} f_j},$$

diese Beziehung gilt für alle i, da wir für jedes Anfalljahr das gleiche Abwicklungsverhalten annehmen.
Da wir annehmen, dass nach I Jahren alle Schäden vollständig abgewickelt sind, muss $p_I = 100\%$ gelten.

4.4.2 Das Abwicklungsverhalten

Das Abwicklungsverhalten der einzelnen Versicherungssparten unterscheidet sich deutlich.
In der Analyse der Duration für Schadenzahlungsströme (Kapitel 5) werden wir drei Abwicklungsmerkmale genauer untersuchen: Die Abwicklungsdauer, die Höhe des

Abwicklungsprozentsatzes nach dem ersten Abwicklungsjahr und die Abwicklungsgeschwindigkeit, also die Krümmung der Kurve der Abwicklungsfaktoren.

Abwicklungsdauer

Für unterschiedliche Versicherungssparten variiert die Dauer der Regulierungszeit. Abbildung 7 zeigt drei Kurven für unterschiedlich lange Abwicklungsdauern. Sie haben jedoch gemein, dass sie zu Beginn ungefähr 40% des Gesamtschadens abgewickelt haben. Links sind die Abwicklungsfaktoren f_k und rechts der Abwicklungsprozentsatz abgebildet.

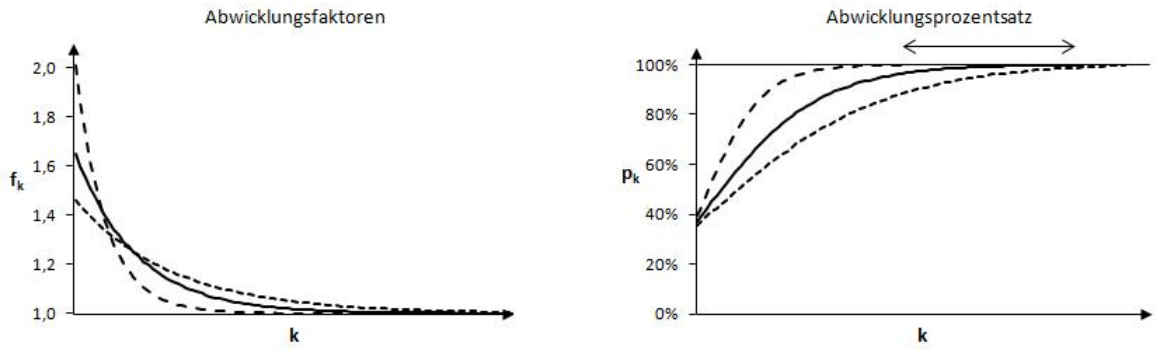

Abbildung 7: unterschiedliche Abwicklungsdauer

Wie aus der Abbildung zu erkennen ist, ist die Abwicklungsdauer umso kürzer, je schneller die Abwicklungsfaktoren f_k gegen 1 gehen. Für eine lange Regulierungsdauer bilden die f_k eine flache Kurve, die langsamer gegen 1 konvergiert.

Während Schäden in der Haushalts- und Gebäudeversicherung oder Kfz-Kasko-Versicherung meisten schon nach kurzer Zeit (2 – 4 Jahre) vollständig abgewickelt sind, kann die Regulierung von Schäden in der Kfz- oder Privathaftpflichtversicherung mehrere Jahrzehnte betragen.[44]

Abwicklungshöhe

Auch wenn verschiedene Sparten die gleiche Regulierungsdauer haben, kann die Höhe der Schadenzahlungen stark variieren. Abbildung 8 zeigt unterschiedlich hohe Abwicklungsfaktoren und deren Auswirkungen auf den Abwicklungsanteil zu Beginn der Abwicklung.

[44] vgl. [8, S. 25]

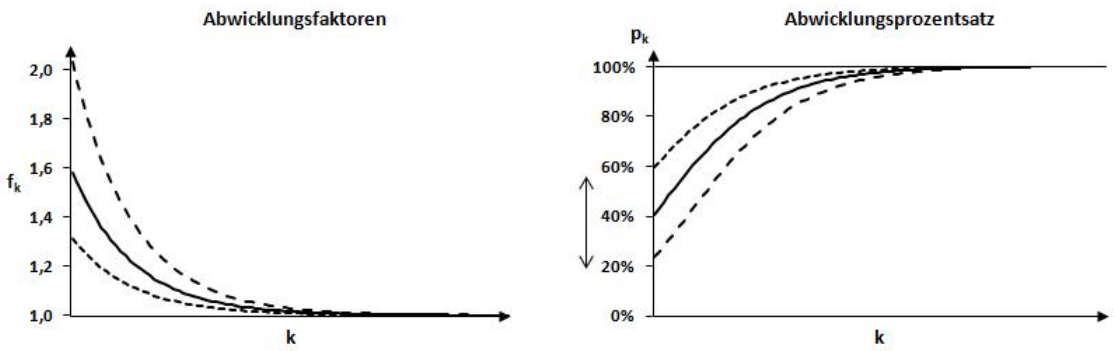

Abbildung 8: Abwicklungshöhe zu Beginn

Für die kleinsten Abwicklungsfaktoren in unserem Beispiel startet die Kurve des Abwicklungsprozentsatzes weiter oben, d.h. dass bereits im ersten Abwicklungsjahr ca. 60% des Gesamtschadens bezahlt wurden.
Bei großen Abwicklungsfaktoren ist jedoch mit hohen Schadenzahlungen für die nächsten Jahre zu rechnen, der Abwicklungsprozentsatz ist also niedrig. Allgemein gilt:
Je kleiner die Abwicklungsfaktoren, desto niedriger die zukünftigen Schadenzahlungen aber desto höher die Abwicklungsprozentsätze und umgekehrt.

Abwicklungskrümmung

Selbst wenn die Dauer und der Abwicklungsanteil zu Beginn zweier Kurven gleich sind, muss das Abwicklungsmuster nicht dasselbe sein. Wie Abbildung 9 zeigt, sehen wir rechts drei Kurven, die im gleichen Punkt anfangen und enden, sie unterscheiden sich jedoch in der Krümmung der Kurve.

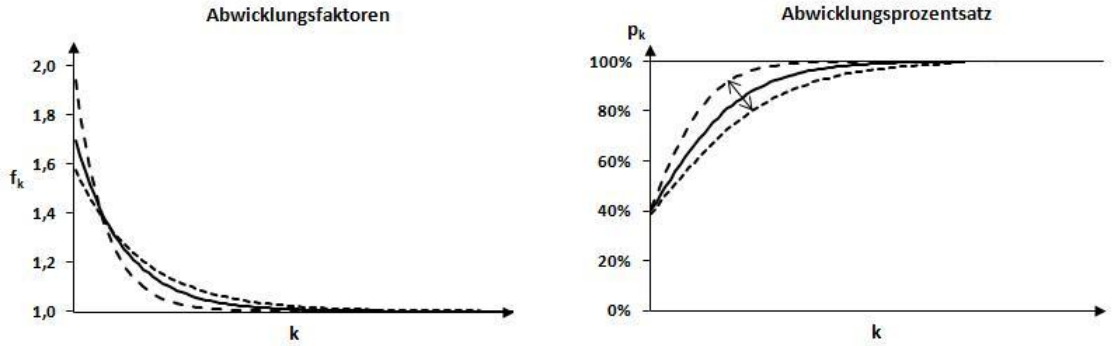

Abbildung 9: Krümmung

Hier ist zu erkennen, dass der Großteil an Schadenzahlungen früher bezahlt wird, wenn sich die Kurve der Abwicklungsfaktoren schneller an 1 annähert und somit steiler ist. Die Schadenzahlungen sind in den ersten Jahren größer, in den letzten Abwicklungsjahren werden nur mehr kleine Beträge auszubezahlen sein.

Wenn hingegen die Kurve der f_k flacher ist, dann werden bis zum Ende der Abwicklungsdauer größere Beträge auszubezahlen sein, die Abwicklungskurve ist weniger gekrümmt und geht somit langsamer gegen 100%.

In der Unfallversicherung ist der erste Abwicklungsfaktor f_1 oft viel höher als die folgenden Faktoren. Die Zahlungen im zweiten Abwicklungsjahr sind somit höher als die der anderen Abwicklungsjahre. Der Grund liegt darin, dass der endgültige Invaliditätsgrad und damit die Höhe der Schadenzahlung zu Beginn noch nicht feststellbar ist.
Nach der hohen Schadenzahlung im zweiten Abwicklungsjahr ist in der Unfallversicherung der Großteil der Schäden abgewickelt, es ist nur noch mit sehr kleinen Zahlungen zu rechnen.[45]
In der Haftpflichtversicherung nehmen die Abwicklungsfaktoren hingegen nur sehr schwach ab, weshalb mit einer langsamen Abwicklungsgeschwindigkeit zu rechnen ist.[46]

4.4.3 Formel für die Abwicklungsfaktoren

Die Abwicklungsfaktoren F_{ik} wie auch die Chain-Ladder-Faktoren $\hat{f}_k$ werden normalerweise aus den bekannten Schadenstände berechnet. Für unser Modell benötigen wir jedoch eine Formel für die Abwicklungsfaktoren f_k, (die, wie wir annehmen, für jedes Anfalljahr i gleich sind) um das Schadendreieck nach Formel (20) zu bilden. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten:[47]

- Exponentialfunktion: $f_k = 1 + b \cdot \exp(-ak)$
- Inverse Potenzfunktion: $f_k = 1 + b \cdot (c + k)^{-a}$
- Weibull-Funktion: $f_k = \frac{1}{1-\exp(-ak^b)}$
- Potenzfunktion: $f_k = a^{b^k}$

Wir werden uns im Weiteren hauptsächlich auf die Exponentialfunktion konzentrieren.

Die Abwicklungsfaktoren bestimmen den Schadenverlauf der nächsten Jahre. Je größer die Abwicklungsfaktoren sind, desto größer sind klarerweise die zukünftigen Zahlungen und somit auch der Endschaden.

[45] vgl. [8, S. 108, 110]
[46] vgl. [8, S. 108]
[47] [8, S. 55]

Mit $f_k < 1$ erhalten wir negative Zahlungen, die aus Storno- oder Regressfällen folgen würden. Wir wollen diesen Fall ausschließen und nehmen deshalb $f_k \geq 1$ an.
Die Abwicklungsfaktoren nehmen im Lauf der Zeit ab, bis sie schließlich eins erreichen und somit alle Schäden eines Anfalljahres vollständig abgewickelt sind.

Um im nächsten Kapitel die Duration für verschiedene Abwicklungsmuster zu analysieren, wollen wir die Funktion der Abwicklungsfaktoren f_k und der Abwicklungsprozentsätze p_k und ihren Zusammenhang mit den Koeffizienten a und b untersuchen. Betrachten wir

$$f_k = 1 + b \cdot \exp(-ak), \tag{24}$$

so ist zu erkennen:

- Je größer a ist, desto kleiner sind die Faktoren f_k und desto schneller konvergieren sie gegen eins, d.h. desto schneller sind die Schäden vollständig abgewickelt.
- Mit einem größeren b werden auch die Abwicklungsfaktoren größer, d.h. es ist mit höheren zukünftigen Zahlungen zu rechnen. Also gilt: Je größer b ist, desto größer sind die f_k aber desto kleiner ist der bereits abgewickelte Anteil im ersten Abwicklungsjahr. Eine Veränderung von b wirkt sich jedoch nur minimal auf die Abwicklungsdauer aus.

Abbildung 10 verdeutlicht dieses Ergebnis.

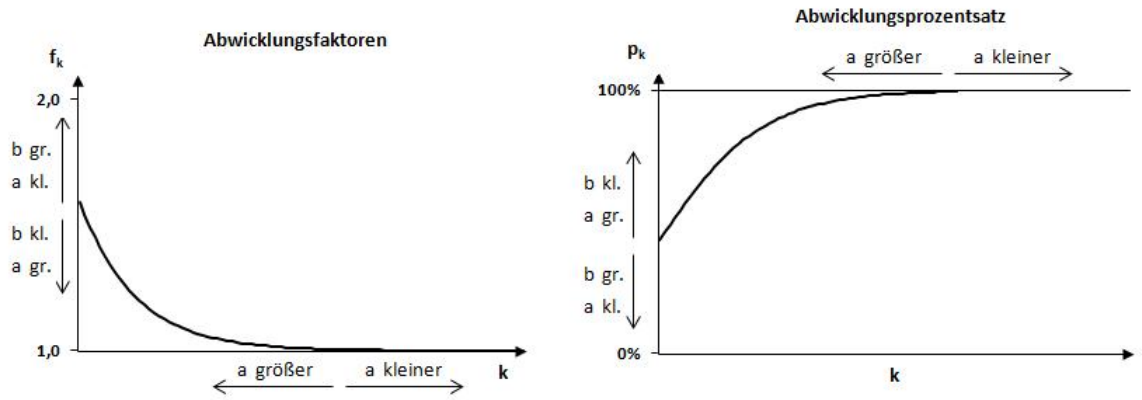

Abbildung 10: Veränderung der Koeffizienten

Um die Krümmung zu untersuchen, werden wir die Exponentialfunktion und die inverse Potenzfunktion

$$f_k = 1 + b \cdot (c + k)^{-a} \tag{25}$$

für die Berechnung der Abwicklungsfaktoren verwenden und diese dann vergleichen.

4.5 Darstellung des Modells in Excel

Mit den Annahmen, die wir bis jetzt getroffen haben, können wir nun ein Modell für die Abwicklungsdreiecke in Excel konstruieren, das die Duration des zukünftigen Schadenzahlungsstromes berechnet. Zur Wiederholung:
S_{11} kann beliebig gewählt werden. Mit Formel (20) werden die Einträge des Abwicklungsdreiecks der Inkremente berechnet, aus denen die kumulierten Beträge durch Addition ermittelt werden können. Wir verwenden Formel (24) und (25) für die Berechnung der Abwicklungsfaktoren, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt werden können.
Für die Zu- oder Abnahme der Schadenzahlungen über die einzelnen Anfalljahre durch den Volumsfaktor und die Abzinsungsfunktion verwenden wir die Exponentialfunktion mit

$$v_i = \exp(vi) \quad \text{und} \quad \exp(-rt).$$

r stellt den risikofreien Zins (bei flacher Zinskurve) dar und wir als „Nominalzins“, v als „Volumen“ beliebig eingegeben. Abbildung 11 zeigt die Tabelle der Eingabewerte.

Eingabewerte					Formel
S_{11}	€ 100,00				
Volumen v	2%				$v_i = e^{iv}$
Abwicklungsfaktoren f_k					
	Typ	a	1,30	1	$f_k = 1+be^{-ak}$
	1	b	1,60	2	$f_k = 1+b(c+k)^{-a}$
		c	0,00		
Zinssatz					
nominal	5,0%				$d_t = e^{-rt}$
real	2,0%				
Inflation u	3,0%				$u_t = e^{ut}$

Abbildung 11: Eingabewerte

Zu sehen sind noch zwei weitere Felder, die noch nicht erwähnt wurden: die Inflation und der Realzins. Da wir von einem inflationsbereinigten Schadendreieck ausgehen, wird auch keine Inflation auf die zukünftigen Schadenzahlungen übertragen. Wir wollen später jedoch die Duration des Zahlungsstromes mit und ohne Inflation berechnen. Wir nehmen eine konstante Inflation u an, die beliebig gewählt werden kann. Der Realzins berechnet sich durch $Nominalzins - Inflation$.
Mit den Werten wird das Abwicklungsdreieck der Schadenzuwächse und der Schadenstände gebildet. Abbildung 12 zeigt diese für $I = 5$.

Zuwächse	1	2	3	4	5
2007	100,00	43,61	17,07	5,20	1,4641
2008	102,02	44,49	17,41	5,31	1,4937
2009	104,08	45,38	17,76	5,42	1,5238
2010	106,18	46,30	18,12	5,53	1,5546
2011	108,33	47,24	18,49	5,64	1,5860

kumulierte Werte	1	2	3	4	5	Reserve
2007	100,00	143,61	160,67	165,87	167,3385	0,00
2008	102,02	146,51	163,92	169,23	170,7190	1,49
2009	104,08	149,47	167,23	172,64	174,1677	6,94
2010	106,18	152,49	170,61	176,13	177,6862	25,20
2011	108,33	155,57	174,05	179,69	181,2757	72,95

Abbildung 12: Abwicklungsdreiecke

Unter der Annahme, dass nach 5 Jahren alle Schäden vollständig abgewickelt sind, steht im Dreieck der kumulierten Werte im 5. Abwicklungsjahr der Endschaden des jeweiligen Schadenanfalljahres. Die Differenz aus Endschaden und aktuellen Schadenstand ergibt die Reserve.
Wir können nun die zukünftigen Zahlungsströme ablesen und deren Duration berechnen. Wie oben erwähnt, sind diese Daten von der Inflation bereinigt und werden mit dem Nominalzins abgezinst.
Wollen wir die Inflation in den Zahlungsströmen c_t berücksichtigen, müssen wir diese erst mit $\exp(ut)$ multiplizieren und dann mit $\exp(-rt)$ diskontieren. Das heißt, wir zinsen den ursprünglichen Zahlungsstrom mit dem Realzins $r - u$ ab.
Abbildung 13 zeigt den Zahlungsstrom mit und ohne Berücksichtigung der Inflation, dessen Barwert und Duration.

Jahr	2012	2013	2014	2015	Σ	Duration
ohne Inflation						
CF	72,27	25,54	7,19	1,59	106,58	**1,3964**
BW	68,74	23,11	6,19	1,30	99,34	
mit Inflation						
CF	74,47	27,12	7,87	1,79	111,24	**1,4099**
BW	70,84	24,54	6,77	1,46	103,61	

Abbildung 13: Berechnung der Duration

In Kapitel 5 wollen wir die Auswirkungen von Änderungen der Eingabewerte auf die Duration anhand dieses Modells analysieren.

4.6 Anpassung der Formel für Schadenzahlungen

4.6.1 Macaulay-Duration

In Kapitel 3.2.3 haben wir die Formel für die Berechnung der Duration kennengelernt. Diese lautet:

$$D = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} t \cdot c_t \, (1+r)^{-t}}{\sum\limits_{t=1}^{n} c_t \, (1+r)^{-t}}$$

Wir wollen diese Formel nun den zukünftigen Schadenzahlungen anpassen und wenn möglich vereinfachen. Wir erinnern uns an Formel (20) und (21) aus Kapitel 4.2:

$$\begin{aligned} c_t &= \sum_{k=t+1}^{I} S_{I+t+1-k,k} \qquad t = 1, \ldots, I-1 \\ S_{ik} &= S_{11} \cdot v_{i-1} \cdot \prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1} - 1) \qquad i, k = 2, \ldots, I \end{aligned}$$

Setzen wie diese Gleichungen erstmals nur in den Zähler der Duration-Formel ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} D_Z &= \sum_{t=1}^{I-1} t \cdot (1+r)^{-t} \cdot \sum_{k=t+1}^{I} S_{I+t+1-k,k} \\ &= \sum_{t=1}^{I-1} t \cdot (1+r)^{-t} \cdot \sum_{k=t+1}^{I} S_{11} \cdot v_{I+t-k} \cdot \prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1} - 1) \\ &= \sum_{t=1}^{I-1} t \cdot (1+r)^{-t} \cdot \sum_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot v_{I-k} \cdot \prod_{j=1}^{k+t-2} f_j \cdot (f_{k+t-1} - 1) \end{aligned}$$

Für die Duration gilt:

$$D^{(1)} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot (1+r)^{-t} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot v_{I-k} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} f_j \cdot (f_{k+t-1} - 1)}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} (1+r)^{-t} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot v_{I-k} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} f_j \cdot (f_{k+t-1} - 1)} \tag{26}$$

Mit dem Wissen über den Zusammenhang von Abwicklungsfaktoren f_k und Abwicklungsanteile p_k aus Kapitel 4.4.1 können wir Gleichung (26) umschreiben. Aus

$$S_{11} \cdot v_{I-k} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} f_j = C_{I-k+1,k} = C_{I-k+1,I} \cdot p_k \tag{27}$$

$$\prod_{j=k}^{k+t-2} f_j = \frac{p_{k+t-1}}{p_k} \tag{28}$$

$$f_{k+t-1} - 1 = \frac{p_{k+t}}{p_{k+t-1}} - 1, \quad \text{da } f_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$$

folgt

$$\begin{aligned} D_Z &= \sum_{t=1}^{I-1} t \cdot (1+r)^{-t} \cdot \sum_{k=1}^{I-t} C_{I-k+1,k} \cdot \frac{p_{k+t} - p_{k+t-1}}{p_k} \\ &= \sum_{t=1}^{I-1} t \cdot (1+r)^{-t} \cdot \sum_{k=1}^{I-t} C_{I-k+1,I} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1}) \end{aligned}$$

Die Duration kann also mit

$$D = \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot (1+r)^{-t} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} C_{I-k+1,I} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} (1+r)^{-t} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} C_{I-k+1,I} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}$$

berechnet werden. Dieses Ergebnis ist nicht verwunderswert, da wir durch die Multiplikation von $C_{I-k+1,I}$ mit $(p_{k+t} - p_{k+t-1})$ den gewünschten Zuwachs $C_{I-k+1,k+t} - C_{I-k+1,k+t-1} = S_{I-k+1,k+t}$ erhalten.

Wir werden in Zukunft jedoch eine Formel verwenden, die auf S_{11} und nicht auf dem Endschaden aufbaut. Mit Formel (27) und (28) erhalten wir:

$$D^{(2)} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot (1+r)^{-t} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot v_{I-k} \cdot \frac{p_k}{p_1} \cdot \left(\frac{p_{k+t} - p_{k+t-1}}{p_k}\right)}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} (1+r)^{-t} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot v_{I-k} \cdot \frac{p_k}{p_1} \cdot \left(\frac{p_{k+t} - p_{k+t-1}}{p_k}\right)} \tag{29}$$

Setzten wir nun die Faktoren unseres Modells (Kapitel 4.5) in die neuen Duration-Formeln (26) und (29) ein,

$$v_i = e^{v \cdot i}, \qquad f_k = 1 + be^{-a \cdot k} \quad \text{und} \quad e^{r \cdot t} \text{ als Diskontierungsfaktor,}$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot e^{v \cdot (I-k)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j}) \cdot (be^{-a \cdot (k+t-1)})}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot e^{v \cdot (I-k)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j}) \cdot (be^{-a \cdot (k+t-1)})} \\ &= \frac{S_{11} \cdot b \cdot e^{vI+a} \cdot \sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot e^{-t(r+a)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})}{S_{11} \cdot b \cdot e^{vI+a} \cdot \sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-t(r+a)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})} \\ &= \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot e^{-t(r+a)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-t(r+a)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})} \end{aligned} \tag{30}$$

und

$$
\begin{aligned}
D^{(2)} &= \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot e^{v(I-k)} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} S_{11} \cdot e^{v(I-k)} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})} \\
&= \frac{S_{11} \cdot e^{vI} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}{S_{11} \cdot e^{vI} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})} \\
&= \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t \cdot e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})} \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Diese Darstellungen (Formel (30) und (31)) der Duration-Formel gelten nur für unsere Modellannahmen und nicht für den allgemeinen Fall.
Die neuen Formeln vereinfachen die Berechnungen, da weder das Abwicklungsdreieck der Zuwächse noch das der kumulierten Werte berechnet werden muss.

4.6.2 Konvexität

Aus Kapitel 3.4.3 kennen wir die Formel für das Konvexitätsmaß:

$$C = \frac{d^2 PV}{dr^2} \cdot \frac{1}{PV}$$

Aus den obigen Formeln für die Duration können wir den Barwert des Zahlungsstromes ablesen:

$$S_{11} \cdot b \cdot e^{vI+a} \cdot \sum_{t=1}^{I-1} e^{-t(r+a)} \cdot \sum_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})$$

und

$$S_{11} \cdot e^{vI} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \sum_{t=1}^{I-1} e^{-rt} \cdot \sum_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})$$

für die Darstellung mit Hilfe der p_k. Wir erhalten somit

$$
\begin{aligned}
C^{(1)} &= \frac{S_{11} \cdot b \cdot e^{vI+a} \cdot \sum\limits_{t=1}^{I-1} (-t)^2 \cdot e^{-t(r+a)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})}{S_{11} \cdot b \cdot e^{vI+a} \cdot \sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-t(r+a)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})} \\
&= \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t^2 \cdot e^{-t(r+a)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-t(r+a)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-k(v+a)} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k+t-2} (1 + be^{-a \cdot j})}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
C^{(2)} &= \frac{S_{11} \cdot e^{vI} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \sum\limits_{t=1}^{I-1} (-t)^2 \cdot e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}{S_{11} \cdot e^{vI} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})} \\
&= \frac{\sum\limits_{t=1}^{I-1} t^2 \cdot e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}{\sum\limits_{t=1}^{I-1} e^{-rt} \cdot \sum\limits_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}
\end{aligned}
$$

für die Berechnung des Konvexitätsmaßes für den Schadenszahlungsstrom.

5 Analyse der Duration der Spätschadenreserve

In diesem Kapitel wollen wir die Macaulay-Duration der zukünftigen (geschätzten) Schadenzahlungen und ihre Abhängigkeiten der einzelnen Faktoren analysieren.
Wir verwenden dafür das in Kapitel 4.5 vorgestellte Excel-Modell für 10 Jahre. Wir nehmen also an, dass nach spätestens 10 Jahren alle Schäden vollständig abgewickelt sind.
Die Duration hängt allgemein von dem Zinssatz r, der Laufzeit I und dem Zahlungsstrom c_t ab. Der Zahlungsstrom hängt von dem Anfangswert S_{11}, dem Volumsfaktor v_i und den Abwicklungsfaktoren f_k ab (siehe Kap. 4.2). Die Laufzeit I entspricht klarerweise der Abwicklungsdauer und wird durch die Abwicklungsfaktoren mitbestimmt.
Wir gliedern die Analyse in die verschiedenen Abwicklungsmuster und konzentrieren uns dann auf Zins- und Volumsänderungen und ihre Auswirkung auf die Duration.

5.1 Einfluss des Anfangswertes S_{11}

Bevor wir jedoch mit der Analyse beginnen, erinnern wir uns an die in Kapitel 3.2.3 hergeleitete Duration-Formel und erhalten unsere erste interessante Aussage:

Die Duration ist unabhängig von der Schadenzahlung im ersten Anfalljahr nach dem ersten Abwicklungsjahr, S_{11}.

Natürlich hat der Anfangswert Einfluss auf die Höhe der restlichen Zahlungen und somit auch auf Endschaden und Reserve. Je größer die Schadenzahlung im ersten Anfalljahr, desto größer sind auch Endschaden und Reserve. Sie sind proportional zueinander.
Die Unabhängigkeit der Duration von S_{11} lässt sich durch die multiplikative Darstellung des Schadendreiecks erklären, sodass sich S_{11} im Zähler und Nenner der Duration-Formel herausheben lässt und gekürzt werden kann (siehe Formel (30)).

5.2 Abwicklungsdauer

Wir betrachten drei unterschiedlich lange Abwicklungsmuster, die nach dem ersten Abwicklungsjahr alle ca. 50% ihres Gesamtschadens abgewickelt haben:

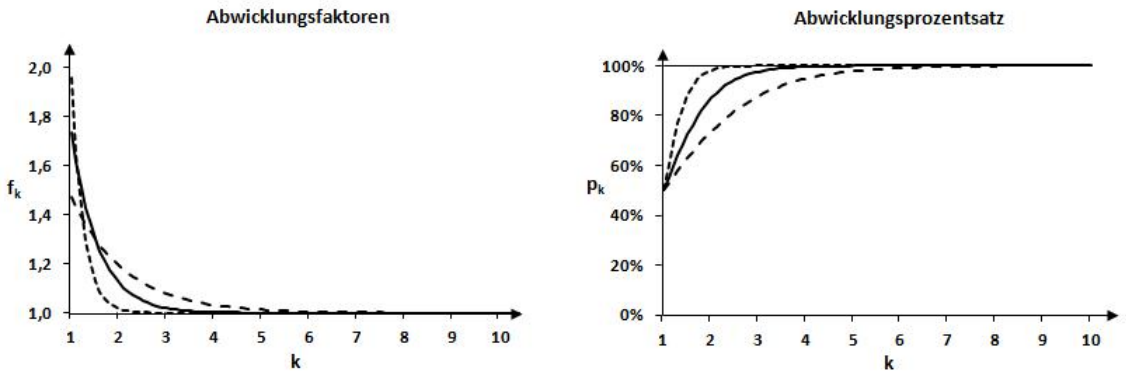

Abbildung 14: unterschiedliche Abwicklungsdauer

Alle drei Abwicklungskurven wurden mit der Exponentialfunktion $f_k = 1 + be^{-ak}$ berechnet. Folgende Werte wurden für a und b verwendet:

Linienart	Abwicklungsdauer	a	b
- - - -	4 Jahre	4	52,4
——	7 Jahre	1,8	4,455
– – –	10 Jahre	0,9	1,162

Tabelle 15: Koeffizienten

Abbildung 15 zeigt die Duration der zukünftigen Schadenzahlungsströme für die obigen drei Abwicklungsmuster in Abhängigkeit vom Zinssatz r. Wir nehmen vorerst $v = 0\%$ an.

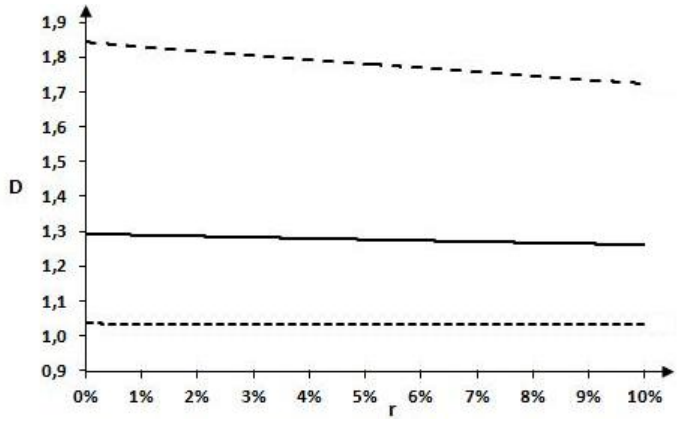

Abbildung 15: Duration für verschiedene Zinssätze

Auffallend dabei ist:

1. Die Duration ist für das Abwicklungsmuster mit 10 Jahren Abwicklungsdauer am größten und für 4 Jahre am kleinsten. Dies ist wenig verwunderlich, da die

Duration bekanntlich als „durchschnittlich gewichtete Fälligkeit eines künftigen Zahlungsstromes“[48] interpretiert werden kann, die natürlich für eine kürzer Abwicklungsdauer auch kleiner ist.
Also gilt: Je kürzer die Abwicklungsdauer, desto kleiner die Duration (bei gleichem p_1).

2. Die Duration ist überraschend klein. Selbst bei 10 Jahren Abwicklungsdauer nimmt die Duration nur einen Wert um $1,8$ herum an. Dieses - anfangs unerwartete - Ergebnis lässt sich jedoch schnell erklären: Die Hauptzahlungen finden in den ersten Jahren statt, in den späteren Jahren erfolgen nur mehr niedrige Zahlungen. Dadurch fließt das meiste Geld in den ersten Jahren.

3. Für alle drei Abwicklungsmuster nimmt die Duration mit steigendem Zinssatz ab. Diese Eigenschaft der Duration kennen wir bereits aus Kapitel 3.2.4.

4. Die Duration nimmt jedoch nicht für alle drei Abwicklungsmuster gleich stark ab. Die Kurve der Duration für eine lange Abwicklungsdauer ist steiler, die Duration fällt hier am stärksten. Für eine kurze Regulierungsdauer zeigt die sehr flache Kurve, dass sich die Duration nur wenig verändert. Wir beobachten folgende Werte:

Dauer	$r = 0\%$	$r = 10\%$	Differenz
10 Jahre	1,843	1,724	0,119
4 Jahre	1,035	1,032	0,003

Tabelle 16: Anfangs- und Endwerte

5. Es hat sich zwar herausgestellt, dass die Duration eines Zahlungsstromes mit längerer Abwicklungsdauer stärker auf Zinsänderungen reagiert als die eines Zahlungsstromes mit kürzerer Laufzeit. In beiden Fällen verändert sich die Duration trotz der großen Spannweite von 0% auf 10% jedoch nur minimal.
Der Grund dafür ist, dass sich der Zinssatz auf später anfallende Zahlungen durch die längere Diskontierung viel stärker auswirkt als auf frühere Zahlungen. Da die Schadenzahlungen jedoch mit der Zeit stark abnehmen, ist die Auswirkung einer Zinsänderung eher gering.

6. Abbildung 16 zeigt die Duration des Zahlungsstromes mit 10 Jahren Abwicklungsdauer zu verschiedenen Zinssätzen und die daraus resultierende Differenz.

[48] vgl. [16, Stichwort: Duration]

r	Differenz	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.
1,0%	-3%	1,8299	0,0376	2,10%
3,0%	-1%	1,8046	0,0123	0,69%
4,0%		1,7924		
5,0%	1%	1,7803	-0,0120	-0,67%
7,0%	3%	1,7569	-0,0354	-1,98%

Abbildung 16: Veränderung der Duration bei Zinsänderungen

Wir sehen, dass sich die Duration nicht symmetrisch in beide Richtungen verändert. Sinkt der Zins z.B. um 3% so steigt die Duration mehr als sie bei einer Zinserhöhung um 3% abnehmen würde. Diese Aussage lässt sich, genau wie bei den Änderungen des Barwertes aus Kapitel 3.4.1, durch die konvexe Form des Graphen erklären.

7. Betrachten wir zusätzlich Abbildung 17, so erkennen wir, dass sich die Duration, ausgehend von kleineren Zinssätzen, stärker verändert, als bei der gleichen Zinsverschiebung bei höheren Zinssätzen. Auch dieses Ergebnis folgt aus der Konvexität.

r	Differenz	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.
4,0%	-3%	1,7924	0,0354	2,02%
6,0%	-1%	1,7685	0,0116	0,66%
7,0%		1,7569		
8,0%	1%	1,7456	-0,0114	-0,65%
10,0%	3%	1,7235	-0,0334	-1,90%

Abbildung 17: Veränderung der Duration bei Zinsänderungen

Abbildung 18 zeigt die schwache Konvexität der Duration-Kurve mit 7 Jahren Abwicklungsdauer.

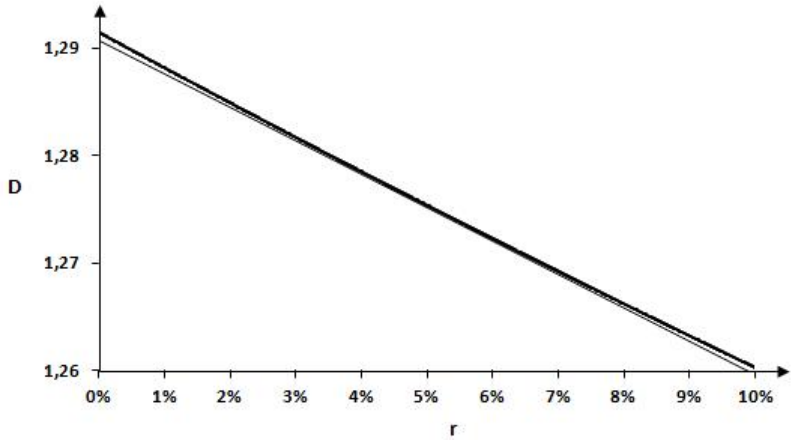

Abbildung 18: Konvexität der Duration

8. Obwohl sich die Abwicklungsdauern 4, 7 und 10 Jahre jeweils um 3 unterscheiden, ist in Abbildung 15 deutlich erkennbar, dass der Unterschied der Duration der Kurven nicht gleich ist. Außerdem variiert er mit unterschiedlichem Zinssatz.

9. Nachstehende Abbildung zeigt die Höhe der Endschaden und der Reserve für alle drei Abwicklungsmuster.

Abwicklungsdauer	Endschaden	Reserve
4 Jahre	1.994,84	103,06
7 Jahre	1.994,89	131,00
10 Jahre	1.994,67	192,78

Abbildung 19: Endschaden und Reserve

Auffallend ist, dass die Höhe des Endschadens für unsere drei Abwicklungsdauern ungefähr gleich hoch ist. Dieses Ergebnis ist jedoch nicht überraschend. Für den Endschaden eines Anfalljahres gilt:

$$C_{iI} = S_{11} \cdot \frac{1}{p_1}$$

Da alle drei Abwicklungsmuster das gleiche p_1 haben und wir für alle $S_{11} = 100$ angenommen haben, müssen die Endschäden jedes Anfalljahres und somit auch der Gesamtendschaden gleich sein.
Für die Reserve gilt: Je länger die Abwicklungsdauer, desto höher die Reserve. Bei einer schnelleren Abwicklung sind mehrere vergangene Schadenanfalljahre bereits vollständig abgewickelt, bei einer langen Abwicklungsdauer sind jedoch noch mit Schadenzahlungen zu rechnen.

Da der Realzins bei positiver Inflation kleiner als der Nominalzins ist, ist die Duration größer, wenn wir den Realzins zur Diskontierung verwenden (vgl. Abb. 13). Der Graph der Duration hat dieselbe Form, ist jedoch nur um die Inflation verschoben. Wir werden im Weiteren nur den Nominalzins verwenden.

Einfluss des Volumsfaktors

Wir wollen nun den Einfluss des Volumsfaktors analysieren. Abbildung 20 zeigt die Duration für obigen Zahlungsstrom mit 7 Jahren Abwicklungsdauer und die Auswirkungen eines zu- bzw. abnehmenden Volumen auf die Kurve.

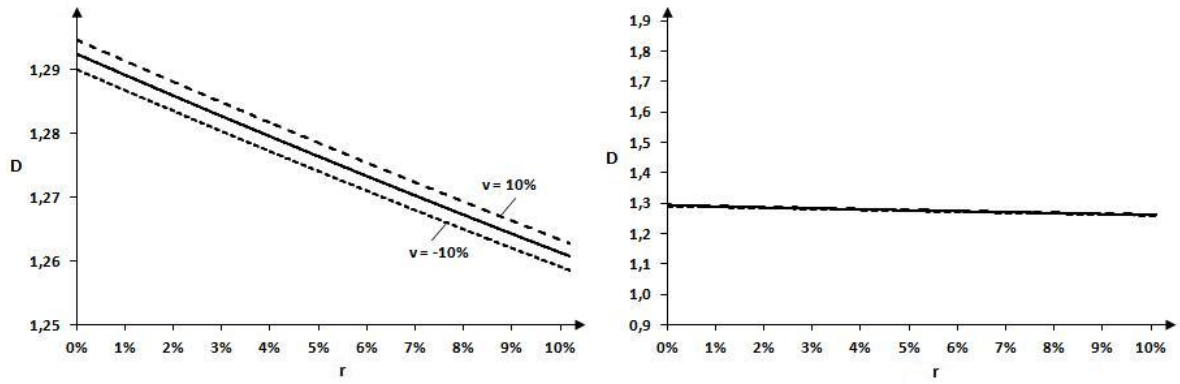

Abbildung 20: Duration mit -10%, 0% und 10% Volumen

Die linke Abbildung zeigt eine deutliche Veränderung der Duration bei steigendem und fallendem Volumen. Diese Differenz ist jedoch nicht zu überschätzen. Die rechte Abbildung zeigt die gleichen Kurven bei anderer Skalierung - eine Veränderung der Schadenzahlungshöhe um $\pm 10\%$ hat viel kleineren Einfluss auf die Duration als eine Veränderung der Abwicklungsdauer um ± 3 Jahre (vgl. Abb. 15).

Wir beobachten:

1. Mit steigendem Volumen nimmt die Duration (minimal) zu (vgl. auch Abb. 25)

2. Abbildung 21 zeigt Duration, Endschaden und Reserve für die 7-jährige Abwicklungsdauer und $r = 4\%$.

v	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.	Endschaden	abs. Diff.	proz. Diff.	Reserve	abs. Diff.	proz. Diff.
-10%	1,2772	-0,0023	-0,183%	1325,11	-669,78	-33,57%	54,94	-76,06	-58,06%
-2%	1,2790	-0,0005	-0,035%	1826,20	-168,69	-8,46%	110,07	-20,93	-15,98%
0%	1,2795			1994,89			131,00		
2%	1,2799	0,0004	0,035%	2186,36	191,47	9,60%	155,93	24,93	19,03%
10%	1,2816	0,0021	0,167%	3259,25	1264,36	63,38%	313,41	182,42	139,25%

Abbildung 21: Duration, Endschaden und Reserve bei unterschiedlichem Volumen für 7-jährige Abwicklungsdauer, $r = 4\%$

   Wir sehen, dass sich die Duration nicht symmetrisch verändert. Die Abnahme der Duration bei sinkendem Volumen ist größer als die Zunahme bei wachsendem Volumen.

3. Mit steigendem Volumen nehmen auch Endschaden und Reserve zu. Dabei nimmt der Endschaden bei einem Wachstum von 10% fast doppelt so viel zu, wie er bei einem Verlust von 10% abnimmt. Der Grund dafür liegt in der Berechnung mit der Exponentialfunktion ($S_{i1} = S_{11} \cdot e^{vi}$).

v	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.	Endschaden	abs. Diff.	proz. Diff.	Reserve	abs. Diff.	proz. Diff.
-10%	1,2650	-0,0023	-0,178%	1325,11	-669,78	-33,57%	54,94	-76,06	-58,06%
-2%	1,2668	-0,0004	-0,034%	1826,20	-168,69	-8,46%	110,07	-20,93	-15,98%
0%	1,2672			1994,89			131,00		
2%	1,2676	0,0004	0,034%	2186,36	191,47	9,60%	155,93	24,93	19,03%
10%	1,2693	0,0021	0,163%	3259,25	1264,36	63,38%	313,41	182,42	139,25%

Abbildung 22: Duration, Endschaden und Reserve bei unterschiedlichem Volumen für 7-jährige Abwicklungsdauer, $r = 8\%$

4. Abbildung 22 zeigt nun Duration, Endschaden und Reserve für die 7-jährige Abwicklungsdauer für $r = 8\%$.

   Vergleichen wir Abbildungen 21 und 22, so erkennen wir wieder, dass die Veränderungen bei kleinerem Zinsniveau größer sind.
   Endschaden und Reserve sind unabhängig vom Zinssatz und bleiben unverändert.
   Auch die nächsten Abbildungen (für 10-jährige Abwicklungsdauer mit $r = 4\%$ und 8%) bestätigt diese Aussage.

v	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.	Endschaden	abs. Diff.	proz. Diff.	Reserve	abs. Diff.	proz. Diff.
-10%	1,7803	-0,0121	-0,67%	1324,96	-669,70	-33,57%	85,87	-106,90	-55,45%
-2%	1,7901	-0,0023	-0,13%	1826,00	-168,67	-8,46%	163,80	-28,97	-15,03%
0%	1,7924			1994,67			192,78		
2%	1,7945	0,0022	0,12%	2186,36	191,69	9,61%	227,00	34,22	17,75%
10%	1,8027	0,0103	0,57%	3258,88	1264,22	63,38%	438,52	245,74	127,48%

Abbildung 23: Duration, Endschaden und Reserve bei unterschiedlichem Volumen für 10-jährige Abwicklungsdauer, $r = 4\%$

v	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.	Endschaden	abs. Diff.	proz. Diff.	Reserve	abs. Diff.	proz. Diff.
-10%	1,7342	-0,0113	-0,65%	1324,96	-669,70	-33,57%	85,87	-106,90	-55,45%
-2%	1,7435	-0,0021	-0,12%	1826,00	-168,67	-8,46%	163,80	-28,97	-15,03%
0%	1,7456			1994,67			192,78		
2%	1,7476	0,0021	0,12%	2186,36	191,69	9,61%	227,00	34,22	17,75%
10%	1,7553	0,0097	0,56%	3258,88	1264,22	63,38%	438,52	245,74	127,48%

Abbildung 24: Duration, Endschaden und Reserve bei unterschiedlichem Volumen für 10-jährige Abwicklungsdauer, $r = 8\%$

5. Vergleichen wir Abbildung 21 mit 23 und 22 mit 24, erkennen wir wieder, dass eine kürzere Abwicklungsdauer eine kleinere Duration hat.
   Die Duration bei einer kürzeren Dauer verändert sich weniger als die bei längerer Dauer, wie auch an der flachen Kurve in folgender Abbildung zu sehen ist:

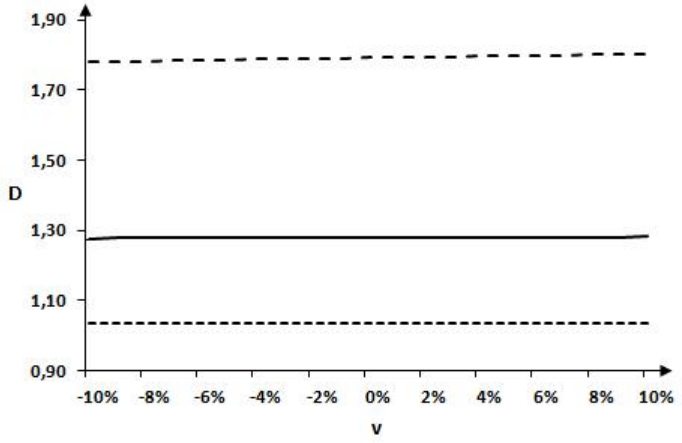

Abbildung 25: Duration in Abhängigkeit vom Volumen

Abbildung 25 zeigt die Duration für die Schadenzahlungsströme für drei unterschiedliche Abwicklungsdauern (4, 7 und 10 Jahre) bei $r = 4\%$ in Abhängigkeit vom Volumen. Wir beobachten folgende minimale Steigerung:

Dauer	$v = -10\%$	$v = 10\%$	Differenz
4 Jahre	1,03392	1,03403	0,00011
7 Jahre	1,27716	1,28164	0,00448
10 Jahre	1,78027	1,80266	0,02239

Tabelle 17: Anfangs- und Endwerte

5.3 Abwicklungshöhe

Wir analysieren in diesem Kapitel die Duration für verschiedene Abwicklungsprozentsätze nach dem ersten Abwicklungsjahr, aber gleicher Abwicklungsdauer (7 Jahre). Dazu verwenden wir folgende Abwicklungsfaktoren:

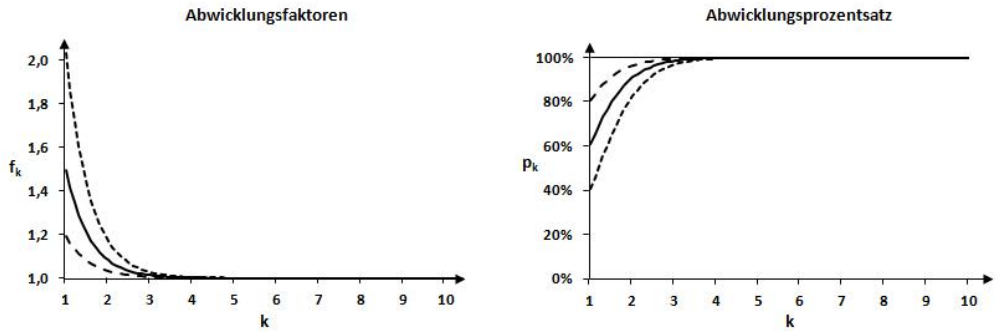

Abbildung 26: unterschiedliche Abwicklungshöhe

Linienart	p_1	a	b
- - - -	40%	1,8	6,25
——	60%	1,8	3
– – –	80%	1,8	1,162

Tabelle 18: Koeffizienten

Abbildung 27 zeigt die Duration der drei verschiedenen Abwicklungsmuster für verschiedene Zinssätze (bei unterschiedlicher Skalierung).

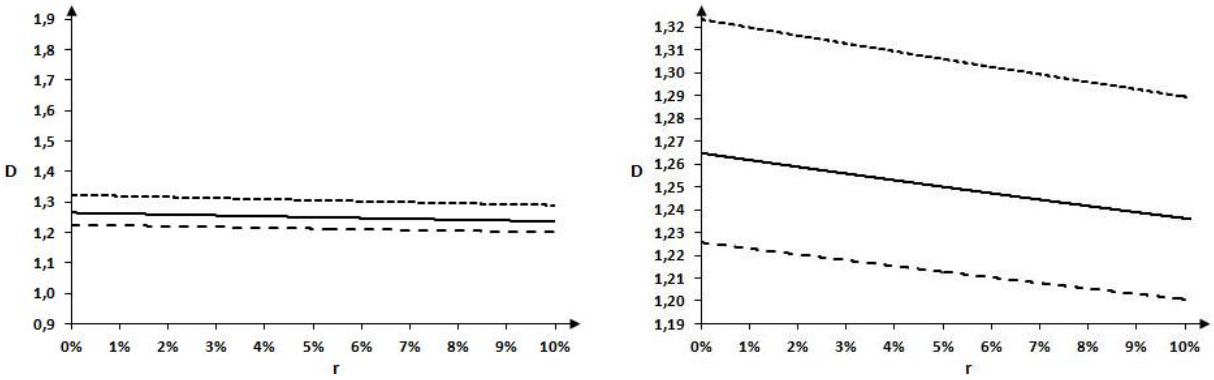

Abbildung 27: Duration für verschiedene Zinssätze

Diese Abbildung zeigt:

1. Die Duration fällt mit steigendem Zinssatz.

2. Das Abwicklungsmuster, das das kleinste p_1 hat, also den kleinsten Anteil am Gesamtschaden nach einem Jahr abgewickelt hat, hat die größte Duration. Die zukünftigen Zahlungen sind höher, immerhin müssen noch $(1 - p_1)$ % des Gesamtschadens bezahlt werden.

3. Wenn wir für alle drei Abwicklungsmuster den gleichen Anfangswert S_{11} wählen, hat der Abwicklungstyp, der nach einem Jahr am wenigsten abgewickelt hat, klarerweise den größten Endschaden und Reserve.

4. Abbildung 28 zeigt die Veränderung der Duration bei Zinsänderungen für das Abwicklungsmuster mit niedrigstem p_1.

r	Differenz	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.
1,0%	-4%	1,3198	0,0139	1,063%
4,0%	-1%	1,3093	0,0034	0,261%
5,0%		1,3059		
6,0%	1%	1,3025	-0,0034	-0,258%
9,0%	4%	1,2927	-0,0132	-1,012%

Abbildung 28: Veränderung der Duration bei Zinsänderungen

Es ist zu erkennen, dass die Veränderungen nicht symmetrisch sind, was sich wieder durch die leicht konvexe Form der Kurve erklären lässt.

5. Im Vergleich zu Abbildung 15, wo klar ersichtlich war, welche Kurve sich am stärksten verändert, sind die Kurven in Abbildung 27 fast parallel zueinander. Betrachten wir die Differenz zwischen Anfangs- und Endwert der drei Muster, Abbildungen 28 und 29, erkennen wir, dass die Duration-Kurve des niedrigsten p_1 ein wenig steiler ist als die anderen und somit am stärksten auf Zinsänderungen reagiert.

p_1	$r = 0\%$	$r = 10\%$	Differenz
40%	1,3233	1,2895	0,034
60%	1,2647	1,2361	0,029
80%	1,2256	1,2007	0,025

Tabelle 19: Anfangs- und Endwerte

r	Differenz	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.
1,0%	-4%	1,2617	0,0117	0,938%
4,0%	-1%	1,2528	0,0029	0,230%
5,0%		1,2500		
6,0%	1%	1,2471	-0,0028	-0,227%
9,0%	4%	1,2388	-0,0111	-0,891%

$p_1 = 60\%$

r	Differenz	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.
1,0%	-4%	1,2229	0,0102	0,842%
4,0%	-1%	1,2152	0,0025	0,206%
5,0%		1,2127		
6,0%	1%	1,2103	-0,0025	-0,204%
9,0%	4%	1,2031	-0,0097	-0,798%

$p_1 = 80\%$

Abbildung 29: Veränderung der Duration bei Zinsänderungen

Einfluss des Volumsfaktors

Da wir die Auswirkungen des Volumsfaktors im letzten Kapitel sehr ausführlich analysiert haben und die Aussagen auch für die Analyse der Abwicklungshöhe gelten, betrachten wir nur die Duration in Abhängigkeit des Volumens für $r = 4\%$:

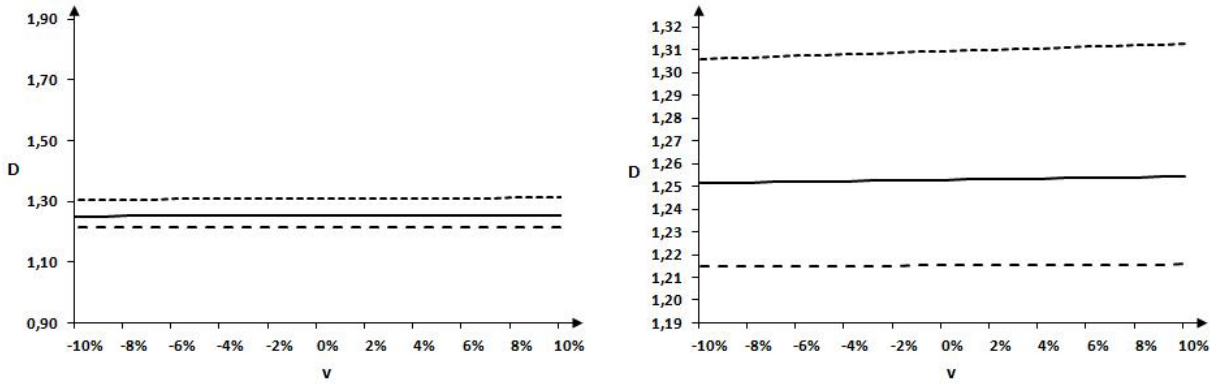

Abbildung 30: Duration in Abhängigkeit vom Volumen

Wir erkennen wieder:
Das Abwicklungsmuster, das nach einem Jahr den kleinsten Anteil abgewickelt hat, hat die größte Duration. Diese Kurve ist minimal steiler als die anderen Duration-Kurven, d.h. die Veränderungen sind hier am größten, wie auch folgende Tabelle zeigt:

p_1	$v = -10\%$	$v = 10\%$	Differenz
40%	1,3059	1,3124	0,0065
60%	1,2513	1,2542	0,0029
80%	1,2147	1,2157	0,0010

Tabelle 20: Anfangs- und Endwerte

5.4 Abwicklungskrümmung

Zum Schluss wollen wir die Krümmung der Abwicklungsprozentkurve untersuchen. Dazu betrachten wir die folgenden drei Abwicklungskurven:

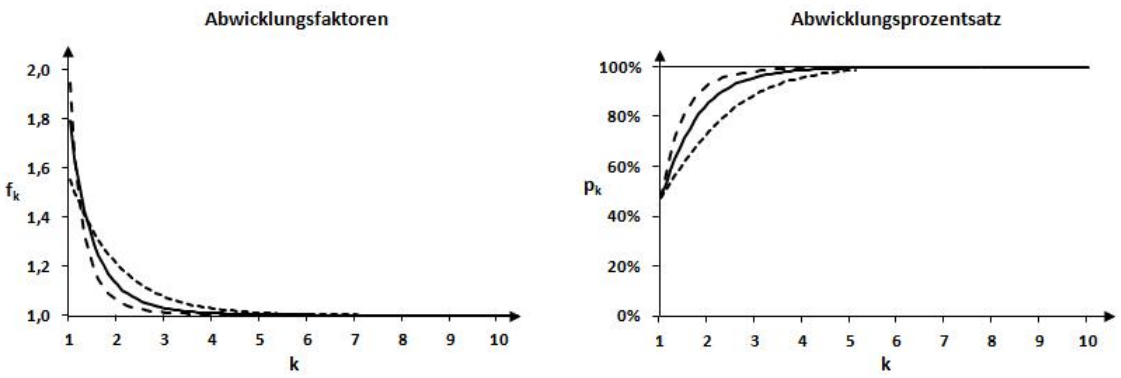

Abbildung 31: unterschiedliche Krümmung

Tabelle 21 zeigt welche Formel zur Berechnung der Abwicklungsfaktoren benutzt worden ist. Bisher haben wir mit der Exponentialfunktion (Typ 1) gearbeitet, nun verwenden wir zusätzlich $f_k = 1 + b \cdot (c + k)^{-a}$ (Typ 2).

Linienart	Krümmung	Typ	a	b	c
- - - -	leicht	1	1	1,51	–
——	mittel	2	6,5	1000	2
– – –	stark	2	4	0,95	0

Tabelle 21: Koeffizienten

Abbildung 32 zeigt die Duration für die drei unterschiedlichen Abwicklungsmuster.

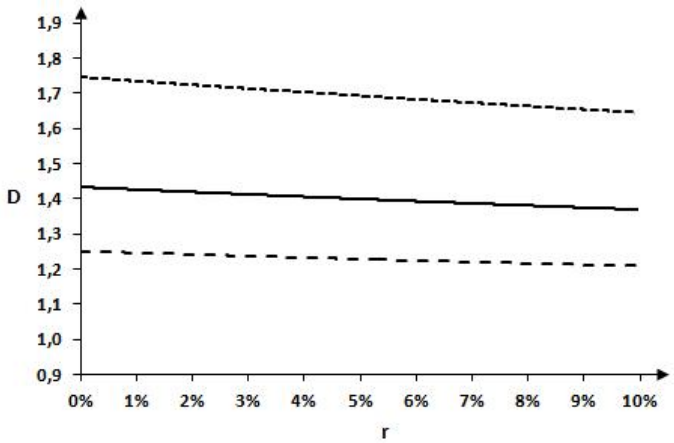

Abbildung 32: Duration für verschiedene Zinssätze

Für Anfangs- und Endwerte gilt:

Krümmung	$r = 0\%$	$r = 10\%$	Differenz
leicht	1,7457	1,6450	0,1007
mittel	1,4333	1,3690	0,0643
stark	1,2510	1,2084	0,0427

Tabelle 22: Anfangs- und Endwerte

Da einige Punkte aus der Analyse der vorigen Kapitel übernommen werden können, wird nur das Wesentliche erwähnt:

1. Mit steigendem Zins fällt die Duration.

2. Das Abwicklungsmuster mit der kleinsten Krümmung in der Abwicklungsprozentkurve hat die größte Duration. In Abbildung 31 sehen wir, dass die Abwicklungsfaktoren in diesem Fall langsamer gegen eins gehen, die zukünftigen Zahlungen sind höher, weshalb die Duration größer wird.

3. Nach Punkt 2. möchte man nun meinen, dass das Abwicklungsmuster mit der kleinsten Krümmung den größten Endschaden hat.
   Dies ist jedoch nicht möglich, da alle drei Abwicklungsmuster (ungefähr) das gleiche p_1 und S_{11} haben.
   Wir betrachten die drei Abwicklungsquadrate der Schadenzuwächse. Es reicht jedoch, wenn wir uns die Schadenzahlungen nur für eine Zeile (ein beliebiges Anfalljahr i) des Abwicklungsquadrates anschauen, da die restlichen Zeilen wegen der Annahme $v = 0\%$ identisch sind.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
i	100,00	55,55	31,79	14,08	5,57	2,11	0,78	0,29	0,11	0,04	210,3

leichte Krümmung

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
i	100,00	79,20	21,87	5,76	1,81	0,67	0,28	0,13	0,07	0,04	209,8

mittlere Krümmung

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
i	100,00	95,00	11,58	2,42	0,78	0,32	0,15	0,08	0,05	0,03	210,4

starke Krümmung

Abbildung 33: Schadenzuwächse für ein Anfalljahr

Wir erkennen, dass die drei Abwicklungsmuster die gleiche Abwicklungsdauer, die gleiche Anfangszahlung sowie den gleichen Anfalljahresendschaden haben. Sie unterscheiden sich nur in der Aufteilung der Schadenzahlungen über die Jahre. Im ersten Fall nehmen die Schadenzahlungen nur langsam ab. Dagegen ist im dritten Fall der Großteil der Schäden schon nach wenigen Jahren fast vollständig

abgewickelt, weshalb hier der zukünftige Zahlungsstrom, also die Reserve kleiner ist.

4. Die Graphen aus Abbildung 32 sind nicht parallel, die Kurve für die kleinste Krümmung (größte Duration) ist steiler als die anderen zwei. In diesem Fall ändert sich die Duration bei Zinsänderungen am stärksten.

5. Abbildung 34 zeigt die Duration für verschiedene Zinssätze für das Abwicklungsmuster mit mittlerer Krümmung. Wir sehen, dass die Differenzen auch für Abwicklungsformel 2 nicht symmetrisch sind. Bei einer Zinsabnahme nimmt die Duration mehr zu als sie bei einer Zinserhöhung abnimmt.

r	Differenz	Duration	abs. Diff.	proz. Diff.
1,0%	-4%	1,4261	0,0269	1,919%
4,0%	-1%	1,4058	0,0065	0,463%
5,0%		1,3993		
6,0%	1%	1,3930	-0,0063	-0,453%
9,0%	4%	1,3748	-0,0245	-1,750%

Abbildung 34: Veränderung der Duration bei Zinsänderungen

<u>Einfluss des Volumsfaktors</u>

Für eine Zu- oder Abnahme der Schadenhöhen durch einen Volumsfaktor lässt sich erstaunliches beobachten. Abbildung 35 zeigt die Duration für das Abwicklungsmuster der mittleren Krümmung in Abhängigkeit von r für $v = \pm 10\%$.

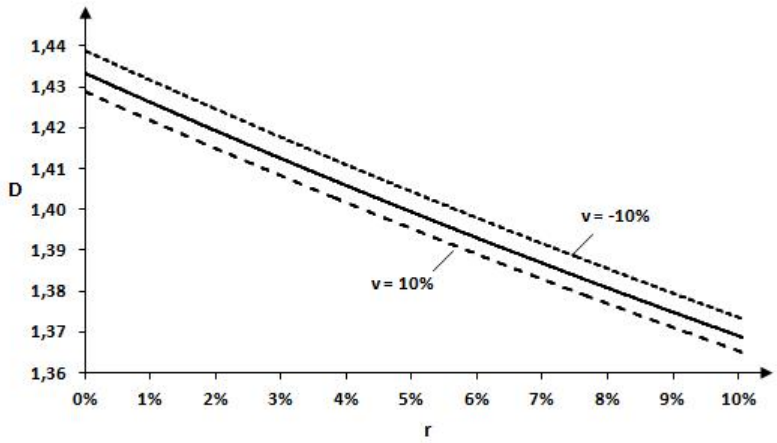

Abbildung 35: Duration mit -10%, 0% und 10% Volumen

Interessanterweise nimmt die Duration mit steigendem Volumen ab.
Abbildung 36 zeigt die Duration in Abhängigkeit vom Volumen für alle drei Abwicklungsmuster bei $r = 4\%$. Die Duration fällt für steigendes Volumen jedoch nur für das

Abwicklungsmuster der mittleren und starken Krümmung (die beide mit Formeltyp 2 berechnet wurden), wie folgende Tabelle zeigt:

Krümmung	$v = -10\%$	$v = 10\%$	Differenz
leicht	1,6932	1,7119	0,0188
mittel	1,4109	1,4016	-0,0093
stark	1,2416	1,2252	-0,0163

Tabelle 23: Anfangs- und Endwerte

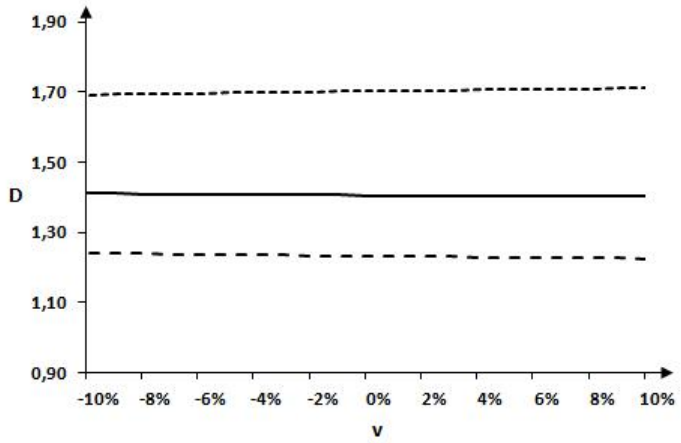

Abbildung 36: Duration in Abhängigkeit vom Volumen

Dies lässt sich möglicherweise durch die eher hohen Zahlungen am Anfang erklären, die durch ein Wachstum die Duration noch kleiner machen, da mehr Geld am Anfang fließt.
Da diese Abnahme der Duration jedoch so gering ist, wollen wir diese Fälle nicht weiter untersuchen. Wir können auch nicht verallgemeinern, dass die Duration für Formeltyp 2 immer fällt, wenn das Volumen steigt. Zum Beispiel steigt die Duration mit steigendem Volumen für $1 + 1000 \cdot (2 + k)^{-5}$.
Wichtig ist, dass die Duration stärker durch die unterschiedliche Krümmung der Abwicklungsprozentkurve als durch den Volumsfaktor beeinflusst wird.

5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Wir wollen nun die wichtigsten Erkenntnisse über Duration, Endschaden und Reserve zusammenfassen:

1. Die Duration ist unabhängig von der Schadenzahlung im ersten Abwicklungsjahr im ersten Schadenanfalljahr, S_{11}.

2. Je kleiner der Zinssatz, desto größer die Duration.
3. Die Zins-Duration-Kurve ist konvex. Die Duration verändert sich nicht symmetrisch bei Zinsänderungen.
4. Je kürzer die Abwicklungsdauer, desto kleiner die Duration.
5. Die Duration reagiert bei langer Abwicklungsdauer sensibler auf Zinsänderungen als bei kürzerer Dauer.
6. Je kleiner p_1, desto größer die Duration.
7. Je schwächer die Krümmung der Abwicklungsprozentkurve, desto größer die Duration.
8. Die Abwicklungsfaktoren beeinflussen die Duration am stärksten. Zins- und Volumsänderungen haben nur minimale Auswirkung auf die Duration.
9. Je größer das Volumen, desto größer die Duration. (i.A. nur für Formeltyp 1)
10. Je größer das Volumen, desto größer sind Endschaden und Reserve.
11. S_{11} ist proportional zum Endschaden und zur Reserve.
12. Haben verschiedene Abwicklungsmuster das gleiche p_1 und S_{11}, so ist der Endschaden gleich hoch.
13. Je kleiner p_1, desto größer der Endschaden.

6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde das Duration-Konzept erklärt und die Macaulay-Duration für die Spätschadenreserve berechnet und analysiert.
Dazu haben wir im zweiten Kapitel die Problematik und Ursachen der Spätschadenreservierung behandelt. In Abwicklungsdreiecken, die für möglichst große und homogene Teilbestände gebildet werden, können die bereits bekannten Schadenzahlungen dargestellt werden.
Das wohl wichtigste Reserveschätzverfahren ist das Chain-Ladder-Verfahren, für das angenommen wird, dass die Aufteilung des Endschadens auf die einzelnen Abwicklungsjahre für jedes Anfalljahr gleich ist. Der Endschaden und die Reserve können durch Multiplikation der aktuellen Schadenstände mit den passenden Chain-Ladder-Faktoren geschätzt werden.

Im dritten Kapitel wurde das Duration-Konzept und dessen Anwendung vorgestellt. Dafür haben wir das Barwertkonzept zur Bewertung von Zahlungsströmen kennengelernt. Ausgehend von einer flachen Zinskurve haben wir die Auswirkungen einer einmaligen Zinsänderung untersucht. Bei einer Zinserhöhung fällt der Barwert, der Endwert steigt weil sich die Anlagebedingungen verbessern. Der Verlust im Barwert wird jedoch durch die besseren Anlagebedingungen ausgeglichen und sogar überkompensiert. Für einen Zinsabfall gilt umgekehrtes.
Die Macaulay-Duration bezeichnet nun jenen Zeitpunkt, zu dem der Wert eines Zahlungsstromes nach einer Zinsänderung mit dem geplanten Wert übereinstimmt und wird wie folgt berechnet:

$$D = \left(\sum_{t=1}^{n} t \cdot \frac{c_t}{(1+r)^t} \right) \cdot \frac{1}{PV}$$

Die Duration kann als mittlere Kapitalbindungsdauer einer Kapitalanlage interpretiert werden. Ein Zahlungsstrom ist im Zeitpunkt der Duration gegen das Zinsänderungsrisiko geschützt.
Mit dieser immunisierenden Eigenschaft können Investoren ihr Kapital bewusst so veranlagen, dass ihr Portfolio zu einem gewünschten Zeitpunkt keinen Zinsschwankungen unterliegt und sie keinen Verlust machen.
Die modifizierte Duration ist ein Maßstab für die Preisvolatilität und die Zinssensitivität. Sie wird mit der Macaulay-Duration berechnet, und gibt die absolute und die prozentuale Preisveränderung einer Investition bezüglich einer Zinsänderung an. Für kleine Zinsschwankungen ist die Approximation der tatsächlichen Veränderung durch die modifizierte Duration sehr gut, für größere Zinssprünge wird sie jedoch ungenau. Diese Abweichung folgt aus der Konvexität der Preis-Zins-Kurve und kann

durch Berücksichtigung des Konvexitätsmaßes verbessert werden.
Je größer die Duration ist, desto größer sind auch das Konvexitätsmaß und die Preisvolatilität.

In Kapitel 4 haben wir die Duration auf die Spätschadenreserve umgelegt und einige Vorbereitungen für die Analyse in Kapitel 5 getroffen.
Wir haben das Abwicklungsdreieck der Schadenzuwächse durch folgende Modellannahme gebildet:

$$S_{ik} = S_{11} \cdot v_{i-1} \cdot \prod_{j=1}^{k-2} f_j \cdot (f_{k-1} - 1)$$

Die Werte S_{ik} werden mit einem Volumsfaktor v_i, der anfalljahrweise wirkt und den Abwicklungsfaktoren f_k, aufbauend auf dem Anfangswert S_{11} berechnet. Dieses Modell ist einfach im Excel-Programm umzusetzen, wodurch auch die Duration der zukünftigen Schadenzahlungsströme leicht berechnet werden kann.
Weiters haben wir verschiedene Abwicklungsmuster betrachtet und den Zusammenhang zum Abwicklungsprozentsatz p_k hergeleitet. p_k gibt an, wie viel Prozent des Gesamtschadens nach k Abwicklungsjahren bezahlt wurde.
Die Duration-Formel für Schadenzahlungsströme lässt sich mit unseren Modellannahmen des Abwicklungsdreiecks umlegen und vereinfachen:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{I-1} t \cdot e^{-rt} \cdot \sum_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}{\sum_{t=1}^{I-1} e^{-rt} \cdot \sum_{k=1}^{I-t} e^{-vk} \cdot (p_{k+t} - p_{k+t-1})}$$

Im letzten Kapitel haben wir die Auswirkungen von Zins- und Volumsänderungen auf die Macaulay-Duration der Schadenreserve untersucht. Die Analyse wurde in drei verschiedene Merkmale des Abwicklungsverhaltens unterteilt: die Abwicklungsdauer, die Höhe des bezahlten Anteils am Gesamtschaden nach dem ersten Abwicklungsjahr und die Krümmung der Abwicklungsprozentkurve. Es hat sich gezeigt, dass die Duration mit steigendem Zinssatz fällt. Sie steigt jedoch mit wachsender Abwicklungsdauer und schwächerer Krümmung der Abwicklungsprozentkurve. Je größer der Anteil der bereits abgewickelten Schäden am Gesamtschaden nach dem ersten Abwicklungsjahr (p_1) ist, desto kleiner ist die Duration und der Endschaden. Mit steigendem Volumen steigt auch die Duration, wenn die Abwicklungsfaktoren durch die Exponentialfunktion berechnet werden. Es hat sich herausgestellt, dass eine Veränderung der Abwicklungsfaktoren größeren Einfluss auf die Duration hat als eine Zins- oder Volumsänderung. Außerdem gilt: Je größer die Duration, desto sensibler reagiert sie auf Zinsänderungen.

Das Duration-Konzept bietet eine Möglichkeit, das Zinsänderungsrisiko von Geldanlagen zu beschränken. Auch in Versicherungsunternehmen wird oft Gebrauch davon gemacht, zum Beispiel wird es häufig im Asset-Liability-Management zur Immunisierung des Eigenkapitals gegen Zinsänderungen verwendet.
Nicht zu vergessen ist jedoch, dass die Annahmen für die Herleitung der Duration nicht immer der Realität entsprechen. Problematisch sind vor allem die Annahme einer flachen Zinskurve, sowie die einmalige Zinsänderung in Form einer Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve. Die sogenannte Key-Rate-Duration lässt diese Annahmen fallen, so dass die Eigenschaft der Begrenzung des Zinsänderungsrisikos auch für eine nicht-flache Zinskurve erhalten bleibt.

Literatur

[1] Actuarial Standards Board, *Discounting of Property and Casualty Loss and Loss Adjustment Expense Reserves*, No. 20, 1992
http://www.actuarialstandardsboard.org/pdf/asops/asop020_037.pdf

[2] ASSEKURATA Assekuranz-Rating Agentur GmbH: *Solvency II-kompakt: Bewertung versicherungstechnischer Verpflichtungen*, Köln
http://www.solvency-ii-kompakt.de/content/bewertung-versicherungstechnischer-verpflichtungen

[3] BREALEY, Richard A., MYERS, Stewart C., ALLEN Franklin: *Principles of Corporate Finance*, Ninth Edition, McGraw-Hill Verlag, 2008

[4] CALLSEN-BRACKER Hans-Markus und GRÄDLER Martin: *Die Duration*, 2006-2011
http://www.hans-markus.de/finance/116/hauptstudium_eins/duration/

[5] FABOZZI, Frank J.: *Bond Markets, Analysis, and Strategies*, Fifth Edition, Pearson Prentice Hall, 2004

[6] FARNY D., HELTEN E., KOCH P. und SCHMIDT R.: *Handbuch der Versicherung: HdV*, Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe, 1988

[7] FRIESE Sebastian und MITTENDORF Thomas: *Asset-Liability Management bei Komposit- und Lebensversicherern*, Hannover, November 2003
http://www.econstor.eu/bitstream/10419/22400/1/dp-288.pdf

[8] Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e. V.: *Methoden zur Schätzung von Schaden- und Prämienrückstellungen in der Kompositversicherung*, 2011
http://www.gdv.de/wp-content/uploads/2011/11/Broschuere_Schaden_und_Praemienrueckstellungen_in_der_Kompositversicherung_2011.pdf

[9] MACK, Thomas: *Schadenversicherungsmathematik*, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 28, Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe, 1997

[10] PERRIDON, Louis und STEINER, Manfred: *Finanzwirtschaft der Unternehmung*, Sechste Auflage, Verlag Vahlen, 1991

[11] PFEIFER Dietmar: *Solvency II-kompakt: Chain-Ladder-Verfahren*, Oldenburg
http://www.solvency-ii-kompakt.de/content/chain-ladder-verfahren

[12] PFEIFER Dietmar: *Solvency II-kompakt: Best Estimate Schadenrückstellung Non-Life*, Oldenburg
http://www.solvency-ii-kompakt.de/content/best-estimate-schadenrueckstellung-non-life

[13] RADTKE, Michael und SCHMIDT, Klaus D.: *Handbuch zur Schadenreservierung*, Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe, 2004

[14] UHLIR, Helmut und STEINER, Peter: *Wertpapieranalyse*, Dritte Auflage, Physica-Verlag Heidelberg, 1994

[15] UNGER, Günther: *Zinsimmunisierung von Anleihenportefeuilles auf der Basis des Duration-Konzeptes*, Diplomarbeit, Innsbruck, 1993

[16] Wirtschaftslexikon: *Duration*, 2009-2010
http://www.wirtschaftslexikon24.net/d/duration/duration.htm