DIPLOMARBEIT

Optimale proportionale Rückversicherung und Investition basierend auf der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Ausgeführt am Institut für Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von: Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Glavanovits Andreas

1230 Wien Elisenstrasse 10/10

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1 Rückversicherung

Eine Versicherung wird abgeschlossen, um sich gegen ein Risiko abzusichern, das man selbst nicht tragen kann oder will. Ein analoges Prinzip existiert für Versicherer. Falls diese ein Risiko übernommen haben, oder ein Risiko entstanden ist, das sich die Versicherer nicht leisten können oder möchten, gibt es auch für Versicherer Arten der Risikoteilung. Zum Einen gibt es die Mitversicherung, bei der sich mehrere Versicherer ein Risiko, aber auch die Prämien zu den gleichen Verhältnissen teilen. Die zweite Möglichkeit ist die Rückversicherung, bei der ein Versicherer sich wiederum gegen Risiken versichern läßt. Dies tut er bei einem so genannten Rückversicherer, mit dem er einen Rückversicherungsvertrag abschließt. Die Gegenleistung für das übernommene Risiko ist die sogenannte Rückversicherungsprämie.
Ein Rückversicherer kann nun, sofern er dies möchte, Teile des übernommenen Risikos seinerseits an andere Rückversicherer abgeben. Nehmen wir nun an, dass eine Versicherung ein großes Risiko übernimmt, oder ein solches entsteht, welches den Ruin des Versicherungsunternehmens bedeuten würde. Um sich vor dem Ruin bei Eintreten des versicherten Ereignisses zu schützen, schließt die Versicherung nun einen oder mehrere Rückversicherungsverträge ab, in denen sie den größten Teil des Risikos an einen oder mehrere Rückversicherer abgibt. Doch auch nicht alle Rückversicherer möchten das übernommene Risiko alleine tragen. Daher geben auch sie wieder einen Teil an andere Rückversicherer weiter. Und so passiert es, dass ein ursprünglich großes Risiko in viele kleine Risiken geteilt wird.

1.1 Notwendigkeit der Rückversicherung

Die Rückversicherung ist ein Instrument, Verluste, die den Ruin bedeuten könnten, zu verringern oder gar zu vermeiden. Daher ist sie ein wichtiger wirtschaftlicher Aspekt für Versicherungsunternehmen. Im Folgenden wollen wir die wichtigsten Gründe anführen, warum Rückversicherung notwendig ist.

- Sehr große Einzelrisiken:
  Hier hat das Versicherungsunternehmen ein einzelnes großes Risiko im Bestand, dessen Eintreten eine massive Schadenszahlung zur Folge hätte. So ein Risiko können Gegenstände von großem Wert sein. Ein Öltanker oder große Bauwerke wären solche Beispiele.

- Gefahr der Schadenkumulierung:
  Hier können viele (nicht notwendigerweise hohe) Ansprüche durch ein Ereignis entstehen. Hier besteht die Gefahr für das Versicherungsunternehmen darin, dass die Summe dieser Einzelschäden sehr groß werden kann. Beispiele wären versicherte Häuser entlang eines Flusses. Im Falle eines Hochwassers wären alle Häuser betroffen. Weitere Beispiele wären Hurrikans oder Erdbeben.

- Ein inhomogenes Portfolio:
  Versicherung basiert auf dem Prinzip vieler gleichartiger Risiken. Rückversicherung ist nun eine Möglichkeit, das Portfolio zu homogenisieren. Dadurch entstehen gleichartige Risiken. Ein Beispiel wären einzelne, deutlich höhere Versicherungssummen in einem Lebensversicherungsportfolio.

- Erhöhung der Zeichnungskapazität:
  Rückversicherung kann dazu dienen, die Zeichnungskapazität zu erhöhen, ohne das übernommene Risiko zu erhöhen. Auch können Unternehmen somit ihren Kunden Produkte anbieten, die sie ohne Rückversicherung nicht übernehmen könnten.

- Service Leistungen:
  Mit dem Abschluss von Rückversicherungsverträgen hat man oft auch Zugriff auf Statistiken und Know How des Rückversicherers. Dies kann für Unternehmen, die noch keine Daten aus ihrem Bestand sammeln konnten, weil das Unternehmen oder die Versicherungssparte neu ist, ein immenser Vorteil sein.

Möglichkeiten, um diese Risiken zu verringern, wäre auch eine restriktive Zeichnungspolitik. Mögliche Großschäden und Risiken mit hoher Schadenseintrittswahrscheinlichkeit werden nicht übernommen. Da solche Maßnahmen jedoch die Wettbewerbsfähigkeit stark einschränken, ist die Rückversicherung oft das Mittel der Wahl, um Risiken zu verringern.

1.2 Arten der Rückversicherung

Da - wie wir gesehen haben - die Bedürfnisse nach Rückversicherung, recht unterschiedlich sind, ist es nicht verwunderlich, dass es auch verschiedene Arten der Rückversicherung gibt. Es gibt verschiedene Parameter, die Arten der Rückversicherung einzuteilen; diese können nach Geschäftsrichtung, Art der Rückversicherungsabgabe oder juristisch sein. Das von größtem mathematischen Interesse ist jedoch die Einteilung nach ihrer technischen Form.

- Proportionale Rückversicherung
    1. Quoten
    2. Summenexzedent
- Nicht proportionale Rückversicherung
    1. Schadenexzedent (Excess of Loss)
    2. Jahresüberschadenexzedent (Stop Loss)

Bevor wir uns der technischen Einteilung genauer widmen, wollen wir uns auch kurz die Einteilung nach der juristischen Form etwas genauer ansehen. Hier wird nach fakultativer und obligatorischer Rückversicherung unterschieden.

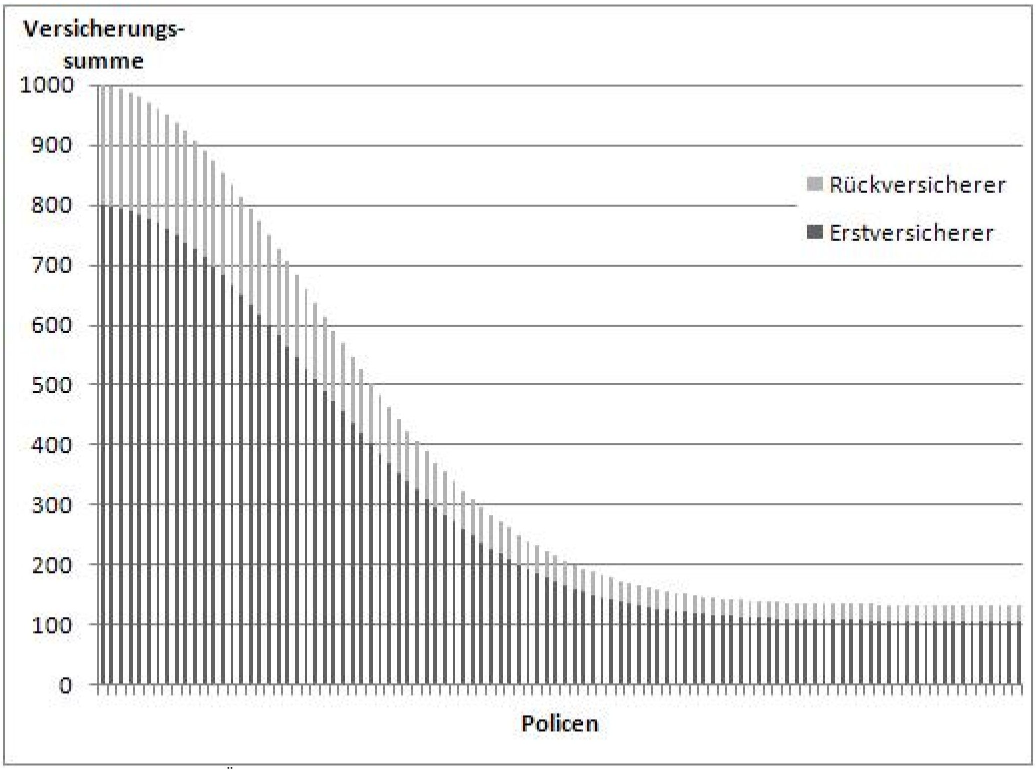
Obligatorische Rückversicherung bedeutet, dass das Versicherungsunternehmen jede Police, die unter den Rückversicherungsvertrag fällt auch rückversichern muss. Im Gegenzug darf der Rückversicherer keine der im Rückversicherungsvertrag enthaltenen Policen ablehnen. Verträge dieser Art werden für gewöhnlich für Portfolios oder ganze Sparten abgeschlossen.
Proportionale Rückversicherungsverträge sind meißt obligatorische Versicherungsverträge.

Die Fakultative Rückversicherung ist - wie der Name schon sagt - freiwilliger Natur. Das Versicherungsunternehmen kann sich entscheiden, ein Risiko rückversichern zu lassen, oder auch nicht. Voraussetzung dafür ist allerdings, dass sich das Unternehmen mit einem Rückversicherer über die Konditionen einig wird. Diese Art der Rückversicherung wird oft genutzt, um Risikospitzen zu entschärfen.

1.2.1 Quoten Rückversicherung

Bei dieser Art der Rückversicherung erhält der Rückversicherer einen prozentuellen Anteil der Prämie, der dem im Vorhinein vereinbarten Beteiligungsausmaß entspricht. Im Schadensfall trägt der Rückversicherer den entsprechenden Anteil der Schäden. Dies bedeutet, dass bei einer vereinbarten Quote von 70% der Rückversicherer 70% der Prämien erhält, im Schadensfall jedoch auch 70% der Leistungen bezahlt.

Folgende Grafik stellt ein Portfolio von 100 Policen da. Die höchste vorkommende Deckungssumme ist 1000. Dieses Portfolio wird mit einer Quote von 70% rückversichert. Dar schwarze Teil jeder Säule entspricht dem Anteil, den das Versicherungsunternehmen an jeder einzelnen Police zu tragen hat. Der graue Teil entspricht dem Anteil des Rückversicherers. Sollte der eintretende Schaden niedriger als die maximale Deckungssumme sein, so wird auch der niedrigere Schaden im vereinbarten Verhältnis geteilt. Das heißt: tritt ein Schaden bei dem Vertrag mit Deckungssumme 1000 ein, der nur 800 ausmacht, so zahlt der Versicherer nur 240, obwohl 300 der Eigenbehalt wäre. Den Rest der Summe begleicht der Rückversicherer.



Grafik 1.1.:Quotenr¨ckversicherung

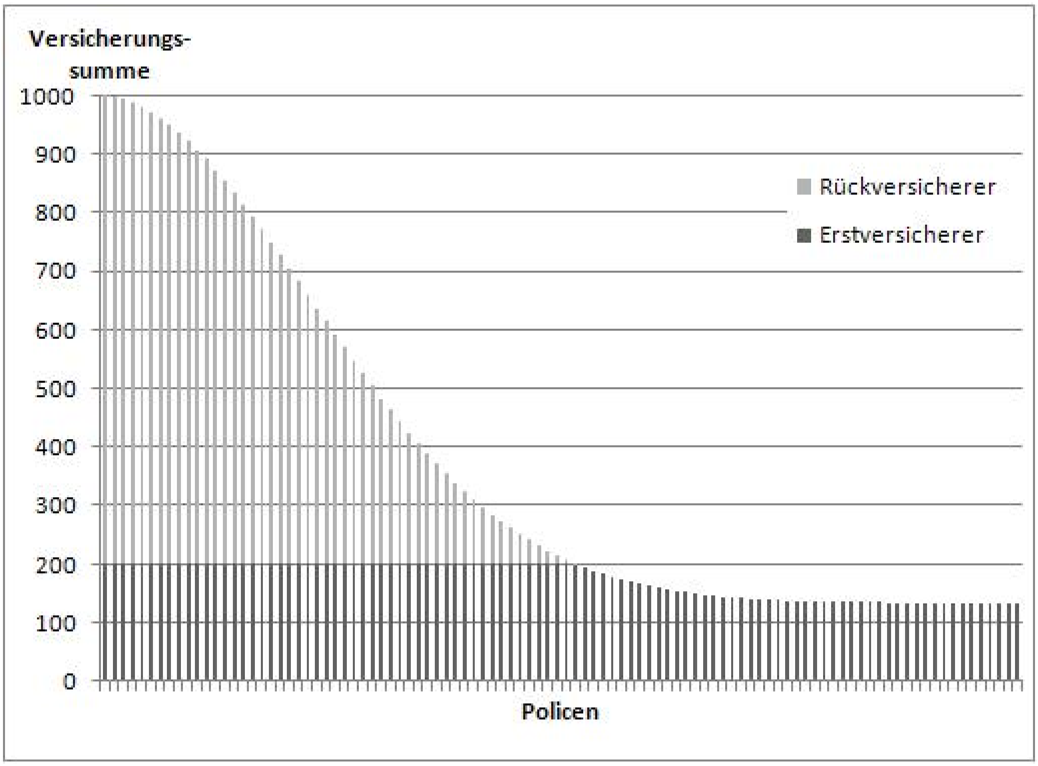
Hier erreicht man durch die Quote von 70% eine Zeichnungskapazität von 1000. Ohne Rückversicherung könnten nur Verträge bis zu einer Höhe von 300 abgeschlossen werden.

Vor-/Nachteile: Diese Form der Rückversicherung ist schnell und einfach, da alles mit der entsprechenden Quote zwischen Versicherer und Rückversicherer geteilt wird. Die Berechnung von abgeschnittenen Verteilungen zur Prämienberechnung, wie in der nicht proportionalen Rückversicherung, ist nicht nötig.
Allerdings gibt das Versicherungsunternehmen auch niedrige Risiken und damit auch einen Teil der dazugehörigen Prämien ab. Diese könnten zwar im Eigenbehalt finanziert werden, müssen aber auf Grund der Vertragsart auch abgegeben werden. Ein weiterer Nachteil dieser Art der Versicherung ist, dass sie keine Risikospitzen abdeckt. Daher wird sie oft auch mit anderen Rückversicherungsverträgen kombiniert.

1.2.2 Summenexzedenten Rückversicherung

Die zweite proportionale Art der Rückverischerung ist der Summenexzedentenvertrag. Er funktioniert ähnlich der Quoten Rückversicherung. Jedoch wird hier der Eigenbehalt festgelegt, der Rückversicherer trägt das Verbleibende Risiko der Verträge. Dadurch entsteht für jede einzelne Police eine eigene Quote.

Folgende Grafik enthält die selben Policen wie in Abschnitt 1.2.1. Hier sieht man deutlich den Eigenbehalt von 300. Alles was darüber hinaus geht, entspricht dem Anteil des Rückversicherers. Der schwarze Teil der Balken entspricht dem Anteil des Versicherungsunternehmens.



Grafik 1.2.:Summenexzedentenrückversicherung

Vor-/Nachteile: Der Summenexzedenten-Vertrag deckt jetzt im Gegensatz zum Quoten-Vertrag auch Risikospitzen ab. Dies hat eine homogenisierende Wirkung auf das Portfolio.
Des Weiteren findet eine Art Risikoselektion zu Gunsten des Versicherungsunternehmens statt.

Beispiel: In diesem Beispiel wollen wir den homogenisierenden Effekt der Summenexzedentenvericherung etwas genauer erörtern.
Gegeben sei ein Bestand von 1.000 Polizzen. Die Prämie sei 1% der Versicherungssumme. Weiters nehmen wir an, dass ein Schaden pro Jahr eintritt.

1. Homogener Bestand:
   Alle Policen haben eine Versicherungssumme von 250.000. Das bedeutet, dass die Jahresgesamtprämie 250.000 ausmacht. Der Jahresschaden hat die gleiche Höhe, also ist das Äquivalenzprinzip erfüllt.

2. Inhomogener Bestand:
   In diesem Bestand haben wir nun 800 Verträge der Höhe 250.000, 100 der Höhe 500.000 und 100 Verträge der Höhe 1.000.000. Dies ergibt eine Prämie von 350.000.

Tritt der Schaden nun in der ersten Kategorie auf, macht das Versicherungsunternehmen 100.000 Gewinn. In den beiden anderen Fällen erleidet es einen Verlust.
Schließt das Versicherungsunternehmen nun einen Summenexzedenten-Vertrag mit Eigenbehalt gleich 250.000 ab, so ändert sich das Ergebnis wie folgt:

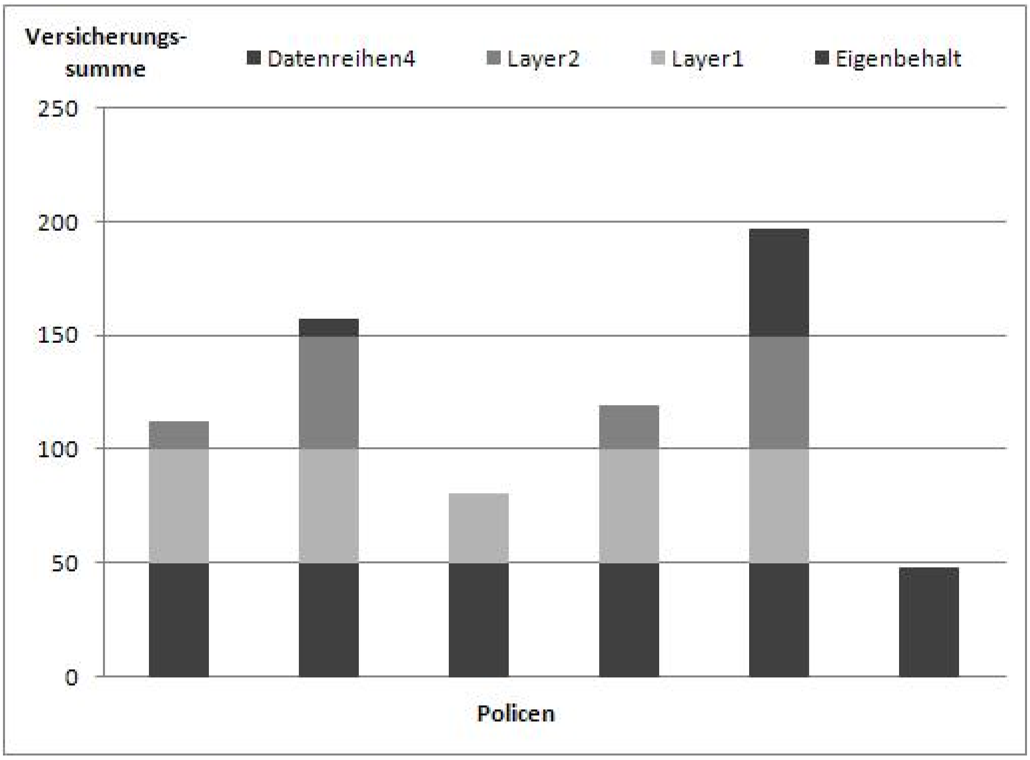
		Eigenbehalt		**Rückversicherung**	
Policen	Vers.Summe	Haftung	Prämie	Haftung	Prämie
800	250.000	250.000	200.000	0	0
100	500.000	250.000	25.000	250.000	25.000
100	1.000.000	250.000	25.000	750.000	75.000
		max. Hftg.	Prämie	max. Hftg.	Prämie
		250.000	**250.000**	**750.000**	**100.000**

Für das Versicherungsunternehmen ist dieses Portfolio nun gleich dem homogenen Bestand aus Punkt 1. Das Risiko wurde auf den Rückversicherer transferiert.
Das Versicherungsunternehmen erleidet nun nur noch Schäden in der Höhe der Prämie. Der Rückversicherer hingegen hat nun einen Gewinn von 100.000, sollte der Schaden bei einer Police mit Versicherungssumme 250000 auftreten. In den beiden anderen Fällen erleidet der Rückversicherer nun den Verlust, der zuvor das Versicherungsunternehmen getroffen hätte.

1.2.3 Schadenexzedenten (Excess of Loss) Rückversicherung

Bei dieser Art der Rückversicherung trägt der Rückversicherer den Anteil des Schadens, der die sogenannte Priorität übersteigt. Die Priorität wird für jeden Vertrag neu festgelegt. Der Rückversicherer haftet allerdings auch wieder nur bis zu einer gewissen Schadenshöhe. Den Teil des Schadens der darüber liegt, trägt wieder das Versicherungsunternehmen. Der Bereich zwischen Priorität und der Höhe bis zu der der Rückversicherer haftet, nennt man Haftstrecke oder Layer. Der Abschluss von mehreren Rückversicherungen deren Haftstrecken übereinander liegen, um sich besser abzusichern, ist möglich.
Im Gegensatz zur proportionalen Summenexzedentenversicherung zahlt nun das Versicherungsunternehmen den vollen Eigenbehalt, auch wenn der Schaden niedriger als die maximale Deckungssumme ist.

Folgende Grafik soll die Wirkungsweise einer Schadenexzedenten Versicherung veranschaulichen:



Grafik 1.3.:XL-Rückversicherung

Die einzelnen Säulen der Grafik entsprechen den aufgetretenen Schäden. Die maximale Deckungssumme der Policen beträgt 200. In diesem Fall hat das Versicherungsunternehmen zwei Rückversicherungen abgeschlossen. Die Priorität für die Erste liegt bei 50, dies ist zugleich der Eigenbehalt des Versicherungsunternehmens. Die Haftstrecke beträgt ebenfalls 50. Das bedeutet, dass der Rückversicherer für den Teil der Schäden haftet, der zwischen 50 und 100 liegt. In dieser Grafik ist das der dunkelgraue Teil der Säulen. Die zweite Rückversicherung haftet für den hellgrauen Teil der Schäden.
Die Schäden zwei und fünf übersteigen die Rückversicherung und treffen somit wieder das Versicherungsunternehmen.

Vor-/Nachteile: Mit dieser Versicherung kann man sich gut gegen einzelne Risikospitzen absichern. Die Rückversicherungsprämie ist jedoch nicht mehr proportional zu der Prämie die das Versicherungsunternehmen erhält. Die Berechnung kann daher recht aufwändig sein.

1.2.4 Stop Loss Rückversicherung

Die Stop Loss Rückversicherung ist die Letzte, die wir hier behandeln wollen. Bei dieser Art der Rückversicherung übernimmt der Rückversicherer den Teil des Schadens der die Priorität übersteigen. Diese Versicherung wird für gewöhnlich für einzelne Policen oder etwa sogar für das Jahresergebniss einer ganzen Sparte abgeschlossen. Deswegen wird sie manchmal auch Jahresüberschadenexzedenten Rückversicherung genannt.

Vor-/Nachteile: Der Vorteil dieser Art der Rückversicherung ist, dass der maximale Verlust durch die Priorität plus der Rückversicherungsprämie beschränkt ist. Daher eignet sie sich gut, um Risikospitzen abzudecken. Allerdings kann auch beispielsweise das Jahresergebnis der Schadensquote (Schäden /Prämien) stabilisiert werden.
Auch hier kann die Prämie nicht mehr proportional von der Versicherungsprämie abgeleitet werden, sondern muss gesondert berechnet werden.

1.3 Mathematische Eigenschaften der Rückversicherung

Da wir nun die verschiedenen Arten der Rückversicherung kennen gelernt haben, wollen wir uns noch ein wenig mit ihren mathematischen Eigenschaften beschäftigen.
Für unsere weiteren Überlegungen sei gegeben ein Risiko X. Dieses wird nun zwischen Versicherer und Rückversicherer so aufgeteilt, dass gilt:

$$X = X_1 + X_2$$

wobei X_1 der Anteil des Versicherungsunternehmens am Risiko X und X_2 der Anteil des Rückversicherers ist.

X_2 ist für gewöhnlich eine Funktion von X. Für unsere Rückversicherungsverträge gilt:

- Quoten: $X_2 = \alpha X$ mit α konstant.
- Summenexzedent: $X_2 = \alpha X$ wobei α von der Versicherungssumme abhängt.
- Excess of Loss: $X_2 = \min(h; \max(0; X - p))$ wobei p die Priorität und h die Haftstrecke ist.
- Stop Loss: $X_2 = \max(0; X - p)$ wobei p die Priorität ist.

1.3.1 Die varianzreduzierende Wirkung der Rückversicherung

Es gilt:

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$$

Da X_1 und X_2 aber Anteile des gleichen Risikos sind, sind X_1 und X_2 positiv korreliert. Daher ist $Cov(X_1, X_2)$ größer 0 und es folgt:

$$Var(X) > Var(X_1) + Var(X_2) \tag{1.1}$$

Bei dem Abschluss eines Rückversicherungsvertrages gilt es also den Ausdruck $Var(X_1) + Var(X_2)$ in (1.1) zu minimieren.

1.3.2 Varianzminimierung durch Stop Loss Rückversicherung

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Stop Loss Rückversicherung für ein Risiko X definiert als:

$$(X - p)_+ := \max(X - p, 0)$$

mit Priorität p, die zugleich den maximalen Schaden darstellt, den das Versicherungsunternehmen erleiden kann.
Berechnet man nun die Prämie für diese Rückversicherung nach dem Äquivalenzprinzip, so erhält man eine Prämie in Abhängigkeit der Priorität:

$$\pi_p := \mathbb{E}\left[\max(X - p, 0)\right]$$

Im Fall einer stetigen Verteilung von X folgt somit:

$$\pi_p := \int_p^\infty (x-p)f(x)\ dx = \int_p^\infty (1 - F(x))\ dx$$

Da $\pi_p^{'} = F(x) - 1$ folgt, dass die Prämie für die Stop Loss Rückversicherung mit steigender Priorität sinkt, so lange $F(x) < 1$ ist.
Sei nun die Priorität gleich 0, sprich der Rückversicherer übernimmt das ganze Risiko. In diesem Fall erhält der Rückversicherer mit $\pi_0 = \mathbb{E}[X]$ allerdings auch die gesamte Prämie. Setzt man die Priorität gleich undendlich, so erhät man eine Rückversicherungsprämie von 0, da in diesem Fall der Rückversicherer keine Leistung zu erbringen hat.

Satz 1.1: Sei nun $I(X)$ eine beliebige Zahlung die der Rückversicherer im Schadensfall zu zahlen hat. $(X - p)_+$ sei die Zahlung im Falle der Stop Loss Rückversicherung. Ist der Erwartungswert dieser beiden Zahlungen und damit die Rückversicherungsprämie gleich so gilt:

$$Var[X - I(X)] \geq Var[X - (X - p)_+]$$

Dies bedeuted, dass die Stop Loss Rückversicherung bei fixierter Rückversicherungsprämie die Varianz des Schadens für das Versicherungsunternehmen minimiert.

Beweis: Sei $V(X) = X - I(X)$ und $W(X) = X - (X - p)_+$. Nach dem Steinerschen Verschiebungssatz gilt:

$$Var(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2$$

Da gilt, dass $\mathbb{E}V(X) = \mathbb{E}W(X)$ ist, und p konstant ist, genügt es zu zeigen, dass:

$$Var[(V(X) - p)^2] \geq Var[(W(X) - p)^2] \tag{1.2}$$

Eine Bedingung die hinreichend ist damit (1.2) erfüllt ist, ist dass:

$$|(V(X) - p)| \geq |(W(X) - p)| \qquad \text{mit Wahrscheinlichkeit 1}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $X \geq p$

$$\begin{aligned}(W(X) - p) &= X - (X - p)_+ - p = (X - p) - (X - p) = 0\\ (V(X) - p) &= X - p - I(X) \neq 0 \qquad \text{da } I(X) \neq (X - p)_+\end{aligned}$$

2. Fall: $X < p$

$$\begin{aligned}(W(X) - p) &= X - (X - p)_+ - p = (X - p) < 0\\ (V(X) - p) &= X - p - I(X) \leq (X - p)\end{aligned}$$

□

Bemerkung: In diesem Abschnitt haben wir angenommen, dass alle Arten der Rückversicherung die im Erwartungswert den gleichen Betrag leisten, auch gleich teuer sind. In der Realität wird ein risikoscheuer Rückversicherer allerdings für die Stopp Loss Rückversicherung eine höhere Prämie verlangen, als für jede andere Rückversicherung.

1.3.3 Optimale Rückversicherung

In diesem Abschnitt wollen wir uns nun kurz mit der Frage beschäftigen, welche Versicherung unter gewissen Umständen optimal ist. Dazu nehmen wir an, ein Versicherer verlangt für ein Risiko X eine Prämie $\pi_X = (1 + \theta)\mathbb{E}[X]$. θ ist der Sicherheitszuschlag. Das Versicherungsunternehmen sucht nun nach einer Rückversicherung $I(X)$, mit $0 \leq I(X) \leq X$, die den Profit des Versicherungsunternehmens maximiert. Die Rückversicherung soll so abgeschlossen werden, dass $Var[X - I(X)]$ gleich einem vorgegebenen $V(X)$ ist.
Für den Rückversicherer wollen wir zwei mögliche Prämienkalkulationsprinzipien annehmen:

1. $(1+\lambda)\mathbb{E}[I(X)]$ (Erwartungswertprinzip)
2. $\mathbb{E}[I(X)] + \alpha Var[I(X)]$ (Varianzprinzip)

Unter diesen Vorraussetzungen erhält man folgenden Profit für das Versicherungsunternehmen:

1. Rückversicherungsprämie nach dem Erwartungswertprinzip:

$$\begin{aligned}&(1+\theta)\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X - I(X)] - (1+\lambda)\mathbb{E}[I(X)] = \\ &= \theta\mathbb{E}[X] - \lambda\mathbb{E}[I(X)]\end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Rückversicherungsprämie nach dem Varianzprinzip:

$$\begin{aligned}&(1+\theta)\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X - I(X)] - (\mathbb{E}[I(X)] + \alpha Var[I(X)]) = \\ &= \theta\mathbb{E}[X] - \alpha Var[I(X)]\end{aligned} \tag{1.4}$$

Um den Profit zu maximieren, muss man nun die beiden Ausdrücke (2.3) und (2.4) maximieren. Um dies zu erreichen, minimieren wir $\mathbb{E}[I(X)]$ und $Var[I(X)]$.

1. Minimiere $\mathbb{E}[I(X)]$:

   Aus Satz 1.1 wissen wir, dass unter allen Rückversicherungen $I(X)$, welche die gleiche erwartete Leistung $\mathbb{E}[I(X)]$ haben, die Stop Loss Rückversicherung $(X-p)_+$ die geringste Varianz für das Versicherungsunternehmen liefert.
   Dies bedeutet aber, das bei fixer Varianz $Var[X - I(X)]$ die Stop Loss Versicherung den niedrigsten Erwartungswert $\mathbb{E}[I(X)]$ liefert.
   Daher gilt, dass im Fall der Berechnung der Rückversicherungsprämie mittels Erwartungswertprinzip die Stop Loss Rückversicherung den Profit des Versicherungsunternehmens optimiert.

2. Minimiere $Var[I(X)]$:

   $$Var[I(X)] = Var[X] + Var[I(X) - X] - 2Cov[X, I(X) - X]$$

   Der Term $Cov[X, I(X) - X]$ wird am größten, wenn X und $I(X) - X$ linear von einander abhängen. Daher wählen wir eine Rückversicherung

der Form $I(X) = \gamma + \beta x$.
Aus $0 \leq I(X) \leq X$ folgt nun, dass $\gamma = 0$ und $0 \leq \beta \leq 1$.

$$V(X) = Var[X - I(X)] = Var[(1-\beta)X] = (1-\beta)^2 Var[X]$$
$$\Rightarrow \beta = 1 - \sqrt{\frac{V(X)}{Var[X]}}$$

Das heißt für den Fall, dass der Rückversicherer seine Prämie nach dem Varianzprinzip berechnet, optimiert die proportionale Rückversicherung den Profit des Versicherungsunternehmens.

Bemerkung: Für gewöhnlich ist dem Versicherungsunternehmen das Prämienkalkulationsprinzip der Rückversicherer nicht bekannt.

2 Kontrolltheorie

2.1 Stochastische Prozesse und Martingale

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst einige wichtige finanzmathematische Grundlagen, wie stochastische Prozesse oder Martingale, sowie Filtrationen definieren, die wir im weiteren Verlauf benötigen. Es werden auch einige Sätze genannt werden. Da wir allerdings nur die Aussage der Sätze benötigen, werden für die meisten keine Beweise angegeben werden.

2.1.1 Stochastische Prozesse

Sei I eine Indexmenge, hier: $I := \mathbb{N},\ [0, T]$ oder $\mathbb{R}_0^+$

Def 2.1: Ein stochastischer Prozess X ist eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t \mid t \in I)$ auf dem Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Def 2.2: Ein Pfad eines Prozesses ist die Funktion $t \to X_t(\omega)$ bei Fixem ω.
Ein Prozess heißt cadlag, falls fast alle Pfade rechtsstetig mit existierendem Limes von links sind.
Ein Prozess heißt stetig, wenn fast alle Pfade stetig sind.

2.1.2 Filtration

Def 2.3: Eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ist eine wachsende Familie von σ-Algebren in $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad s \leq t$.

Heuristische Erklärung: Eine Filtration beschreibt das Anwachsen der Information mit der Zeit.

Technische Voraussetzungen:

1. $\mathbb{F}$ soll rechtsstetig sein, das heißt $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap\limits_{s<t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$

2. $\mathbb{F}$ soll vollständig sein, das heißt alle $\mathbb{P}$-Nullmengen von $\mathcal{F}$ sind bereits in $\mathcal{F}_0$ enthalten.

Def 2.4: Ein Prozess heißt adaptiert, falls X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist $\forall t \in I$.
Bedeutung: Der Prozess schaut nicht in die Zukunft; oder die Information, die durch Beobachtung des Prozesses gewonnen wird, kann nicht größer sein,

als die Information der Filtration.

Def 2.5: $\mathcal{F}_X$ heißt natürliche Filtration (manchmal auch $\sigma(X_s, s \leq t)$)
$\mathcal{F}_X$ ist die kleinste rechtsstetige Filtration bezüglich der X adaptiert ist.

Def 2.6: Eine Zufallsvariable τ heißt Stoppzeit ($\tau : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cap \{+\infty\}$), falls $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
Bedeutung: üblicherweise benutzt man Stoppzeiten, um Prozesse zu stoppen. $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ bedeutet, dass man erst zum Zeitpunkt t weiß, ob der Prozess gestoppt wird.

Bemerkung:

- jeder deterministische Zeitpunkt s ist Stoppzeit,$\{s \leq t\} \subset \{\varnothing, \mathcal{F}\}$
- falls $X(t)$ adaptiert $\Rightarrow X_{t\wedge\tau}$ ist auch adaptiert, mit $t \wedge \tau = \min(t, \tau)$
- Beispiel für eine Stoppzeit wäre die „Hitting Time“: sei X_t ein stetiger Prozess, $X_0 = 0$:
  $\tau = \inf\{t > 0 | X_t = x\}, \qquad x > 0$

Def 2.7: $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$
$\mathcal{F}_\tau$ ist die Filtration zum Stoppzeitpunkt, und beschreibt die Information, die bis zum Zeitpunkt τ vorhanden ist.

2.1.3 Martingale

Def 2.8: M_t heißt $\mathcal{F}_t$-Martingal, falls:

1. M_t ist adaptiert
2. $M_t \in L^1(\mathbb{P})\ \forall t \qquad$ d.h. $\mathbb{E}\{|M_t|\} < \infty\ \forall t$
3. $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s \qquad s \leq t$

Bemerkung: Das Vermögen eines Spielers in einem fairen Spiel wird durch ein Martingal beschrieben, da er im Mittel weder einen Gewinn noch einen Verlust zu erwarten hat.

Def 2.9: falls man oben Punkt 3 in Definition 2.9 durch $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s$ ersetzt, so sprich man von einem Supermartingal
Ersetzt man Punkt 3 in Definition 2.9 durch $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$, so spricht man

von einem Submartingal.

Satz 2.1: (Supermartingal-Konvergenzsatz)
Es sei X_t ein L^1-beschränktes Supermartingal, d.h. $\sup\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$, dann gilt: $\lim\limits_{t\to\infty}$ existiert fast sicher, und ist gleich X_∞

Bemerkung: Ohne Zusatzvoraussetzungen gilt die obige Aussage nicht im L^1-Sinn. Das heißt im Allgemeinen ist $\lim\limits_{t\to\infty} ||X_t - X_\infty||_{L^1} \neq 0$
Eine Zusatzvorraussetzung die L^1-konvergenz garantieren würde, ist die gleichmäßige Integrabilität $(\lim\limits_{\alpha\to\infty} \sup\limits_{t} \int\limits_{|f_t|\geq\alpha} |f_t| dP \to 0)$.
Hinreichend für gleichmäßige Integrabilität wäre L^2-beschränktheit $(\sup\limits_{t} ||X_t||_{L^2} < \infty)$

Satz 2.2: (Stoppsatz)
Seien τ_1, τ_2 Stoppzeiten und M_t ein Martingal, dann gilt:
$\mathbb{E}\left[M_{\tau_1\wedge t}|\mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1\wedge\tau_1\wedge t}$

2.2 Brownsche Bewegung

Def 2.10: Ein Prozess W_t heißt Brownsche Bewegung, falls gilt:

1. $W_0 = 0$ fast sicher

2. Sei $t_0 < t_1 < t_2 < ......t_n$
$\Rightarrow \left\{W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, ...W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right\}$
sind unabhängige Zufallsvariablen

3. $W_t - W_s \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{N}(0, t-s) \quad s < t$

4. Die Pfade von W_t sind stetig

Bemerkung:

- W_t ist Martingal

- Als Filtration wählt man üblicherweise die natürliche Filtration von W

- Die Pfade von W haben fast sicher unendliche Totalvariation, aber endliche Quadratische Variation. Insbesondere gilt: Sei $0 < t_1 < ... < t_n = t$ und die Feinheit des Gitters $\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dann folgt
$\langle W \rangle_t = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{L^2} t$

Beispiel 2.1: Exponentielles Martingal:
Sei $X_t = \mu t + \sigma W_t \ \ \mu, \sigma > 0$, dann gilt:
$M_t = e^{\frac{-2\mu}{\sigma^2} X_t}$ ist exponentielles Martingal
Beweis der Martingaleigenschaft:

1. M_t ist adaptiert, weil W_t adaptiert ist

2. $M_t = e^{\frac{-2\mu}{\sigma^2}(\mu t + \sigma W_t)} = e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2} t - \frac{-2\mu}{\sigma} W_t}$ dann folgt $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$,
weil $\int e^{const.} \varphi(x)\ dx < \infty$ wenn φ...Dichte von $\mathcal{N}(0, t)$

3. Bleibt noch Punkt (3) aus Definition 2.8 zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}t-\frac{-2\mu}{\sigma}W_t}|\mathcal{F}_s] = e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}t}\mathbb{E}[e^{\frac{-2\mu}{\sigma}W_t}|\mathcal{F}_s] \\
&= e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}t}\mathbb{E}[e^{\frac{-2\mu}{\sigma}W_t-W_s}|\mathcal{F}_s]e^{\frac{-2\mu}{\sigma}W_s} \\
&= e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}t-\frac{-2\mu}{\sigma}W_s}\mathbb{E}[e^{\frac{-2\mu}{\sigma}W_t-W_s}], \qquad \text{da } W_t - W_s \text{ unabh. von } \mathcal{F}_t \\
&= e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}t-\frac{-2\mu}{\sigma}W_s}\mathbb{E}[e^{\frac{-2\mu}{\sigma}\sqrt{t-s}\cdot g}], \qquad g \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{N}(0,1) \\
&= e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}t-\frac{-2\mu}{\sigma}W_s+\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}(t-s)} \\
&= e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}s-\frac{-2\mu}{\sigma}W_s} = e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}s-\frac{-2\mu}{\sigma}W_s} = e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}X_s}
\end{aligned}$$

$\square$

2.3 Stochastische Integration bezüglich einer Brownschen Bewegung

Da der Pfad einer Browschen Bewegung fast sicher unendliche Totalvariation besitzt, ist eine pfadweise Integration nicht möglich. Aus diesem Grund werden wir nun im Folgenden das Itô-Integral definieren, mit dem eine Integration nach einer Brownschen Bewegung möglich ist. Diese Konstruktion erfolgt in drei Schritten, in denen man den Integralbegriff erst einmal für „einfache Integranden“ definiert, und dann zu Grenzwerten übergeht, ähnlich dem Aufbau des Lebesque Integrals.

Schritt 1: Konstuktion für „einfache Integranden“

Def 2.11: Sei $S_0 := \left\{ H \mid H_t = \mathbb{I}_0(t)\phi_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \cdot \mathbb{I}_{]t_{i-1},t_i]}(t), \right\}$

wobei $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ und $\phi_i \in L^\infty(\mathcal{F}_{t_i-1})$
Dann heißt $H \in S_0$ „einfacher Integrant“.

Für $H \in S_0$ definiert man:
$\int\limits_0^t H_s \; dW_s = (H \cdot W)_t := \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t})$

angenommen $t = t_k$:
$(H \cdot W)_t = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$

angenommen $t_k < t < t_{k+1}$:
$(H \cdot W)_t = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{ik})$

- $(H \cdot W)_t$ ist Martingal

- Itô-Isometrie: $\mathbb{E}\left((\int\limits_0^t H_s \; dW_s)^2 \right) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^t H_s^2 \; ds \right]$
  Ist Isometrie von $L^2(ds \times dP) \to L^2(\mathbb{P})$

Schritt 2: L^2-adaptierte Integranden

Betrachte: $\mathcal{H} = \left\{ H \mid H \text{ adaptiert und } \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T H_s^2 \; ds < \infty \right] \right\}$

Um das Integral für die Integranden dieses Typs zu definieren, benutze folgende Tatsachen:

1. $\forall H \in \mathcal{H} \;\; \exists H^{(n)} \in S_0$ sodass $\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t |H - H^{(n)}|^2 ds\right] \to 0$

2. Ang $X_t^{(n)}$ sei eine Folge stetiger Martingale, sodass $X_t^{(n)}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{P})$
$\Rightarrow \exists$ genau ein stetiger Prozess X_t, sodass $||X_t - Xt^{(n)}||_{L^2(\mathbb{P})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\forall t \in [0,T]$

$\overset{\text{Itô Isometrie}}{\Longrightarrow} (H^{(n)} \cdot W)_t$ ist Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{P})$

Definiere nun mit Hilfe von (2): $(H \cdot W)_t = \lim\limits_{n\to\infty} (H^{(n)} \cdot W)_t \quad$ in $L^2(\mathbb{P})$

Lemma 2.1: Eigenschaften des Itô-Integrals:

1. $\mathbb{E}\left[(\int\limits_0^t H_s \; dW_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[(\int\limits_0^t H_s^2 \; ds)\right] \qquad \forall t \in [0,T]$

2. für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $\int\limits_0^t (\lambda H_1 + \mu H_2) \; dW_s = \lambda \int\limits_0^t H_1 \; dW_s + \mu \int\limits_0^t H_2 \; dW_s$

3. $\int\limits_0^{\tau\wedge t} H_s \; dW_s = \int\limits_0^t H_s \cdot \mathbb{I}_{[0,\tau]}(s) \; dW_s$

Beweis: Für $H \in S_0$ nachrechnen, danach geht man zum Grenzwert über.

$\square$

Schritt 3: Lokalisation

Betrachte: $(\widetilde{H}) := \left\{ H \mid H \;\text{ adaptiert und } \mathbb{P}(\int\limits_0^T H_s^2 \; ds < \infty) = 1 \right\}$
Definiere $\tau_n := \inf \left\{ t > 0 \mid \int\limits_0^t H_s^2 \; ds = n \right\}$
Weiters sei $H^{(n)} := H_s \cdot \mathbb{I}_{[0,\tau_n]}(s) \qquad \in \mathbb{H}$

Definiere nun für $H \in \widetilde{\mathbb{H}}$:
$\int\limits_0^t H \; dW_s := \int\limits_0^t H^{(n)} \; dW_s \qquad$ für $t \leq \tau_n$

Dies ist eine konsistente Definition, da für $t < \tau_m < \tau_n$ gilt:
$\int\limits_0^t H^{(m)}\ dW_s = \int\limits_0^t H^{(n)}\ dW_s$

Bemerkung:

- für $H \in \mathcal{H}$ ist $(H \cdot W)_t$ ein L^2-beschränktes Martingal
- für $H \in \mathcal{H}$ gilt $(H \cdot W)_t$ ist nicht notwendigerweise ein Martingal, sondern nur ein lokales Martingal, wobei folgendes gilt:
  Definition: M ist lokales Martingal, falls eine Folge von Stoppzeiten T_n existiert für die gilt, dass $T_n \nearrow \infty \quad f.s.$, und $M_{t \wedge \tau_n}$ ist ein Martingal.

2.4 Itô-Prozesse und die Itô-Formel

Def 2.12: X_t heißt Itô-Prozess , falls sich Xt folgendermaßen darstellen läßt:

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \; ds + \int_0^t H_s \; dW_s, \tag{2.5}$$

wobei X_0 $\mathcal{F}_0$-messbar ist, K_s und H_s adaptiert sind.
Weiters setzen wir voraus:

−) $\mathbb{P}(\int_0^t |K_s| \; ds < \infty) = 1$

−) $\mathbb{P}(\int_0^t H_s^2 \; ds < \infty) = 1$

Die obige Darstellung ist in folgendem Sinne eindeutig:
Angenommen: X_t, X'_t sind Itô-Prozesse mit $X_t = X'_t$ fast sicher.
wobei $X_t = X_0 + \int_0^t K_s \; ds + \int_0^t H_s \; dW_s$ Dann folgt:

1. $X_0 = X'_0$ $\mathbb{P}$-fast sicher
2. $K_t = K'_t$ $ds \times d\mathbb{P}$-fast sicher
3. $H_s = H'_s$ $ds \times d\mathbb{P}$-fast sicher

2.4.1 Die Itô-Formel

Satz 2.3: Angenommen X_t ist ein Itô-Prozess mit Darstellung wie (2.1), und sei $f \in C^2(\mathbb{R})$, dann folgt, dass $f(X_t)$ ist auch Itô-Prozess und es gilt:

$$f(X_t) = f(X_0) \int_0^t f'(X_s) \; K_s \; ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \; H_s^2 \; ds + \int_0^t f'(X_s) \; H_s \; dW_s \tag{2.6}$$

Bemerkung: Man kann die Formel auch kürzer schreiben. Es gilt:

$$dX_t = K_t \; dt + K_t \; dW_t$$

$$\langle X \rangle_t := \int_0^t H_s^2 \; ds$$

Nun kann man Formel (2.2) umschreiben zu:

$$f(X_t) = f(X_0) \int_0^t f'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)\ d\langle X \rangle_s \tag{2.7}$$

Beweisidee für die Itô-Formel:
Laut der Taylorformel gilt:

$$f(y) - f(x) = f'(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2} f''(x) \cdot (y - x)^2 + R(x, y)$$
$$\lim_{y \to x} \frac{R(x, y)}{(y - x)^2} = 0$$

Nun sei: $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = t$ mit $t_i = \frac{i}{n} t$, dann gilt:

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f(X_{t_i^{(n)}}) - f(X_{t_{i-1}^{(n)}}) \Big)$$
$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{i=1}^{n} f'(X_{t_{i-1}^{(n)}}) \cdot (X_{t_i^{(n)}} - X_{t_{i-1}^{(n)}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}^{(n)}}) \cdot (X_{t_i^{(n)}} - X_{t_{i-1}^{(n)}})^2 +$$
$$\underbrace{+ \sum_{i=1}^{n} R(X_{t_i^{(n)}} - X_{t_{i-1}^{(n)}})}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t f'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)\ d\langle X \rangle_s \qquad \Box$$

Verallgemeinerung: Sei $f(t, x)$, sodass

$$\left. \begin{array}{l} f_{\prime 0} := \frac{\delta f}{\delta t} \\ f_{\prime 1} := \frac{\delta f}{\delta x} \\ f_{\prime 11} := \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \end{array} \right\} \text{ stetig sind, dann gilt:}$$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_{\prime 0}(s, X_s)\ ds + \int_0^t f_{\prime 1}(s, X_s)\ dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{\prime 11}(s, X_s)\ d\langle X_s \rangle$$

2.4.2 Die Itô-Formel in n Dimensionen

Def 2.13: W heißt m-dimensionale Brownsche Bewegung, falls gilt:
$W_t = (W_t^1, ..., W_t^m)$, wobei $W_t^1, ..., W_t^m$ m unabhängige eindimensionale Brown-

sche Bewegungen sind, die alle bezüglich einer Filtration $\mathcal{F}$ adaptiert sind.

Nun kann man das stochastische Integral bezüglich der mehrdimensionalen Brownschen Bewegung W komponentenweise definieren:

Def 2.14: Sei A eine $n \times m$-dimensionale Matrix bestehend aus $n * m$ adaptierten Prozessen, dann definiere:

$$\int_0^t A_s\ dW_s := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \int_0^t A_s^{1k}\ dW_s^k \\ \sum_{k=1}^{m} \int_0^t A_s^{2k}\ dW_s^k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} \int_0^t A_s^{nk}\ dW_s^k \end{pmatrix}$$

Def 2.15: X_t ist ein n-dimensionaler Itô-Prozess , falls gilt:

$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\ ds + \int_0^t \sigma_s\ dW_s$, wobei
- X_0 ist $\mathcal{F}_0$-messbar,
- b_t ein $\mathbb{R}^n$-wertiger adaptierter Prozess ,
- σ_t ein $\mathbb{R}^{n \times m}$-wertiger adaptierter Prozess ,
- W ist m-dimensionale Brownsche Bewegung

Satz 2.4: **(Die n-dimensionale Itô-Formel)**
Sei $f(t, X) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass gilt: $f_{\prime 0}, f'i, f_{\prime ij}$ stetig für $\forall i, j = 1, ..., n$ dann gilt:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_{\prime 0}(s, X_s)\ ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t f_{\prime i}(s, X_s)\ dX_s^i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{\prime ij}(s, X_s)\ d\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s$$

wobei

$\langle X^i, X^j \rangle_t = \int_0^t (\sigma\sigma^T)_s^{ij}\ ds$

$(\sigma\sigma^T)_s = \sum_{k=1}^{n} \sigma_s^{ik}\sigma_s^{ik}$

Satz 2.5: **Partielle Integration (Eindimensionaler Fall)**
Seien X_t und Y_t zwei Itô-Prozesse, dann gilt:

$$X_t \cdot Y_t = X_0 Y_0 + \int\limits_0^t X_s \; dY_s + \int\limits_0^t Y_s \; dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

mit: $\langle X, Y \rangle_t = \int\limits_0^t \sigma_s^{(x)} \sigma_s^{(y)} \; ds$

2.5 Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

Def 2.16: Eine Gleichung der Form:

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\ dW_s \tag{2.8}$$

heißt Stochastische Differentialgleichung, falls gilt:

$$\begin{array}{ll} \xi \quad \text{ist } \mathcal{F}_0\text{-messbar} & \\ b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n & \text{ist messbare Funktion} \\ \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m} & \text{ist messbare Funktion} \end{array}$$

Alternativ kann man auch schreiben:

$$dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)\ dW_t$$

dies sind eigentlich n Gleichungen der Form:

$$dX_t^i = b^i(t, X_t)\ dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma^{ik}(t, X_t)\ dW_t^k$$

Def 2.17: X_t heißt Lösung von (2.4), falls gilt:

- X_t erfüllt (2.4)
- X_t ist adaptiert
- $\mathbb{P}(\int_0^t |b^i(t, X_t)|\ dt < \infty) = 1 \qquad \forall i$
  $\mathbb{P}(\int_0^t |\sigma^{ij}(t, X_t)|^2\ dt < \infty) = 1 \quad \forall i, j$

Bemerkung: Man unterscheidet zwischen starken und schwachen Lösungen von Stochastischen Differentialgleichungen:
starke Lösung: gegeben ist die Brownsche Bewegung W mit der natürlichen Filtration $\mathcal{F}^W$, gesucht ist die adaptierte Lösung von (2.4)
schwache Lösung:$(W, \mathcal{F})$ ist Teil des Lösungstriples$(W_t, \mathcal{F}_t, X_t)$

Satz 2.6: (Eindeutigkeit) Es gilt:

$$||b(t,x) - b(t,y)|| + ||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| \leq K\,||x-y|| \quad \forall t \in [0,T] \quad K > 0$$

$\Rightarrow$ falls X_t und X_t' Lösungen von (2.4) sind, dann folgt:

$$\mathbb{P}(X_t = X_t' \ \forall t \in [0,T]) = 1$$

- man nennt solche Prozesse ununterscheidbar
- im Gegensatz dazu nennt man X_t' modifikation von X_t, falls gilt:
  $\mathbb{P}(X_t = W_t') = 1 \ \ \forall t \in [0,T]$
- falls X_t und X_t' rechtsstetig sind, dann folgt:
  X_t ist Modifikation von $X_t' \Rightarrow X_t$ ist ununterscheidbar von X_t'
  die andere Implikation gilt immer.

Um „Explosion„ in endlicher Zeit zu verhindern (auszuschließen), stellt man zusätzlich noch Wachstumsbedingungen an b und σ.

Satz 2.7:Falls:

$$\begin{aligned} &||b(t,x) - b(t,y)|| + ||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| \leq K\,||x-y|| \quad \text{und} \\ &||b(t,x)||^2 + ||\sigma(t,x)||^2 \leq K(1 + ||x||^2), \qquad \mathbb{E}[\xi^2] < \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ es existiert eine eindeutige, stetige, starke Lösung von (2.4) mit
$\mathbb{E}[\int\limits_0^T ||X_t||^2 \ dt] < \infty$

Satz 2.8: Gegeben sei die stochastische Differentialgleichung:

$$dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)\ dW_t \qquad X_0 = \xi$$

Erfüllen b und σ Lipschitz und Wachstumsbedingungen dann folgt:
Es existiert eine eindeutige Lösung.

2.6 Einführung und ein motivierendes Beispiel

In diesem Abschnitt wollen wir nun Folgendes als gegeben erachten:

- ein Wahrscheinlichkeitstrippel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- eine m-dimensionale Brownsche Bewegung W mit ihrer natürlichen Filtration $\mathbb{F}$
- einen endlichen Zeithorizont
- Kontrollprozess $(u_t)_{u=0}^{T}$
- Zustandsprozess der gegeben ist durch:
  $dX_t = b(t, X_t, u_t)\ dt + \sigma(t, X_t, u_t)\ dW_t \qquad X_0 = x$
  $b : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \qquad$ messbar
  $b : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n \times m} \qquad$ messbar
  (oft sind noch zusätzliche Bedingungen an b und σ gestellt), oft schreibt man auch X_t^u statt X_t.

Def 2.18: Ein Kontrollprozess $(u_t)_{u=0}^{T}$ ist ein $\mathcal{F}$-adversibler $\mathcal{U} \leq \mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess.
Das Zielfunktional ist definiert durch:

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T \varphi(t, X_t, u_t)\ dt + \Psi(T; X_t) \mid X_t = x\right].$$

Wobei $\int_t^T \varphi(t, X_t, u_t)\ dt$ den Nutzen über die Zeit und $\Psi(T; X_t)$ den Endnutzen darstellt.
Die adversiblen (zulässigen) Kontrollprozesse $\mathcal{A}(t, x)$ sind jene, für die (2.4) eine eindeutige starke Lösung hat, und für die das Zielfunktional wohl definiert ist.
Des Weiteren sei die Wertfunktion gegeben durch:

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} J(t, x, u)$$

Unser Ziel ist es nun, zu diesem Grundproblem ein $V(0, x)$ und ein u^* zu finden, so dass $V(0, x) = J(0, x, u^*)$. Das heißt, wir versuchen unser Verhalten (den optimalen Kontrollprozess u^*) bis zum Zeitpunkt T im vorhinein so festzulegen, dass unser erwarteter Nutzen im Zeitpunkt 0 maximiert wird.

Dies Vorgehen wollen wir uns nun anhand eines Beispiels etwas genauer ansehen.

Beispiel 2.2: Marktmodell:

- Bond (Anleihe) B_t : $\frac{dB_t}{B_t} = r\ dt$

  also $B_t = B_o \cdot e^{rt}$

- Aktie S_t : $\frac{dS_t}{S_t} = (\mu\ dt + \sigma\ dW_t)$

  Itô-Lemma $\Rightarrow S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\ dW_t}$

- $N_t^B \ldots$ Anzahl der Bonds im Portfolio

- $N_t^S \ldots$ Anzahl der Aktien im Portfolio

- Zustandsprozess $X_t \ldots$ Vermögen des Investors

$$X_t = N_t^B \cdot B_t + N_t^S \cdot S_t$$

- Wir setzen voraus, dass das Portfolio selbsfinanzierend sein soll

$$dX_t = N_t^B \cdot dB_t + N_t^S \cdot dS_t$$

- $u_t \ldots$ Anteil des Vermögens in Aktien, das heißt:

$$u_t = \frac{N_t^s \cdot S_t}{X_t} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} N_t^S &= \frac{u_t \cdot X_t}{S_t} \\ N_t^B &= \frac{(1-u_t) \cdot X_t}{B_t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dX_t &= \frac{(1-u_t) \cdot X_t}{B_t} \cdot dB_t + \frac{u_t \cdot X_t}{S_t} \cdot dS_t \\ &= (1-u_t) \cdot X_t \cdot (r\ dt) + u_t \cdot X_t \cdot (\mu\ dt + \sigma\ dW_t) \\ &= X_t \cdot (r + u_t \cdot (\mu - r))\ dt + X_t \cdot \sigma \cdot u_t\ dW_t \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ansatz: $X_t = X_0 \cdot e^{\int_0^t g_s\ ds + \int_0^t h_s\ dW_s} =: X_0 \cdot e^{Z_t}$

$$(dZ_t = g_t\ dt + h_t\ dW_t\ ,\ d\left\langle Z \right\rangle_t = h_t^2\ dt)$$

$$\overset{\text{Itô-Lemma}}{\Rightarrow} dX_t = X_t\ dZ_t + \frac{1}{2} X_t\ d\langle Z \rangle_t$$
$$= X_t \cdot (g_t\ dt + h_t\ dW_t) + \frac{1}{2} X_t h_t^2\ dt$$
$$\frac{dX_t}{X_t} = (g_t + \frac{1}{2} h_t^2)\ dt + h_t\ dW_t \tag{2.10}$$

Vergleicht man nun (2.5) und (2.6) folgt:

$$h_t = \sigma \cdot u_t$$
$$g_t + \frac{1}{2} h_t^2 = r + u_t \cdot (\mu - r)$$
$$g_t = r + u_t \cdot (\mu - r) - \frac{1}{2} \sigma^2 u_t^2$$

$$\Rightarrow \qquad X_t = X_0 \cdot e^{\int\limits_0^t (r + u_t \cdot (\mu - r) - \frac{1}{2}\sigma^2 u_t^2)\ ds + \int\limits_0^t \sigma \cdot u_t\ dW_s}$$

Nun wollen wir den logarithmierten Endnutzen maximieren. Dazu setze man $\varphi \equiv 0, \Psi(T, X_T) = \ln X_T^u$. Wir erhalten das Zielfunktional:

$$J(0, x, u) = \mathbb{E}\left[\ln X_T^u \mid X_0 = x_0\right]$$

Als Nächstes wollen wir nun die Menge der adversiblen Kontrollprozesse bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u, x_0) = \{u \mid u &\text{ist progressiv messbar};\\ &\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \left| r + u_s \cdot (\mu - r) - \tfrac{1}{2}\sigma^2 u_s^2 \right|\ ds\right] < \infty;\\ &\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \sigma^2 u_s^2\ ds\right] < \infty\}\end{aligned}$$

Damit folgt nun:

$$\ln X_T = \ln X_0 + \int_0^t (r + u_t \cdot (\mu - r) - \frac{1}{2}\sigma^2 u_t^2) \; ds + \int_0^t \sigma \cdot u_t \; dW_s$$

$$u \in \mathcal{A}(0, x_0) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \sigma \cdot u_t \; dW_s \;\; \text{ist Martingal}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma \cdot u_t \; dW_s\right] = 0$$

$$\mathbb{E}\left[\ln X_T\right] = \ln X_0 + \left[\int_0^t (r + u_t \cdot (\mu - r) - \frac{1}{2}\sigma^2 u_t^2) \; ds + \int_0^t \sigma \cdot u_t \; dW_s\right]$$

um nun $\mathbb{E}\left[\ln X_T\right]$ zu maximieren, genügt es, den Integranden für jedes feste s zu maximieren:

$$\frac{\delta}{\delta u_s} : \;\; (\mu - r) - \sigma^2 u_s = 0$$

$$\frac{\delta^2}{\delta u_s^2} : -\sigma < 0$$

$$\Rightarrow u_s^* = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2} \ldots \textit{Merton Strategie}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\ln X_T^*\right] = \ln X_0 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{(\mu - r)}{\sigma^2}^2\right) \; ds\right]$$

$$= \ln X_0 + T \cdot \left(r + \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}\right)$$

Bemerkungen:

- An der Form des optimalen Kontrollprozesses $u^* = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2}$ kann man leicht erkennen, dass der Anteil des Vermögens in Aktien mit dem Drift (μ) zunimmt. Steigt hingegen der Zinssatz des Bonds oder die Volatilität, so wird der Anteil der Aktien kleiner.

- u konstant erfordert dauerhaftes Umschichten des Portfolios, da sich S_t und B_t mit der Zeit ändern. Um ein realistischeres Ergebnis zu erhalten, müßte man die Transaktionskosten berücksichtigen.

- Analoge Vorgehensweise in höheren Dimensionen möglich

$$\begin{aligned}
dS_t =& Diag(S_t) \cdot (\mu \ dt + \sigma \ dW_t) \\
& W_t \ldots n-\text{dimensionale Brownsche Bewegung} \\
& Diag(S_t) = \begin{pmatrix} S_t^1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_t^n \end{pmatrix} \\
& \mu \in \mathbb{R}^n \\
& u \in \mathbb{R}^n \ \ \ldots \text{Anteil des Vermögens in } i\text{-ter Aktie} \\
& \sigma \in \mathbb{R}^{n\times n} \ \ \ldots \text{regulär} \\
\Rightarrow dS_t^i =& S_t^i \cdot \left(\mu^i \ dt + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} \ dW_t^k \right) \\
\Rightarrow u^* =& (\sigma\sigma^t)^{-1} \cdot (\mu - r \cdot \underline{1})
\end{aligned}$$

2.7 Dynamische Programmierung

2.7.1 Diffusion und ihr Generator

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form:

$$dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)\ dW_t$$

wobei $\mathcal{F}$ die natürliche Filtration einer m-dimensionalen Brownschen Bewegung ist.
b, σ seien so, dass eine eindeutige starke Lösung existiert.

Def 2.19: Eine Diffusionsmatrix hat die Form:

$$a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^t(t, x)$$

Notation: Für eine Zufallsvariable Y definiere:

$$\mathbb{E}_{t,x}[Y] := \mathbb{E}[Y|X_t = x]$$
$$\mathbb{E}_x[Y] := \mathbb{E}[Y|X_0 = x]$$

Satz 2.9: (ohne Beweis)
Sei f eine beschränkte messbare reellwertige Funktion und X_t die Lösung einer zeithomogenen stochastischen Differentialgleichung wie oben, dann gilt:

1. $\mathbb{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{X_t}[f(X_s)]$ fast sicher
2. $\mathbb{E}[f(X_{\tau+s})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}_{X_\tau}[f(X_s)]$ fast sicher für alle Stoppzeiten

Punkt 1. heißt Markoveigenschaft. Das zukünftige Verhalten des Prozesses hängt nur von der Gegenwart und nicht von der gesamten Vergangenheit (beschrieben durch $\mathcal{F}$) ab.
Punkt 2. heißt starke Markoveigenschaft

Def 2.20: Der Operator $Lf(t, x) = \lim_{s \searrow t} \mathbb{E}_{t,x}[f(s, X_s)] = f(t, x)$ heißt Generator des Prozesses X.
Der Definitionsbereich des Operators ist:
$\mathcal{D}_L = \{f \mid \text{obiger limes } \exists\ \forall t \in [0, T],\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

Sei jetzt:

$$\mathcal{L} := \frac{\delta}{\delta t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\frac{\delta}{\delta x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t, x)\frac{\delta^2}{\delta x_i \delta x_j}$$

dieser Operator ist definiert auf

$$C^{1,2} := \left\{ f \mid \frac{\delta f}{\delta t} \text{ stetig und } \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \text{ stetig } \forall i, j = 1, \ldots, n \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}f =& \frac{\delta f(t,x)}{\delta t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\delta f(t,x)}{\delta x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\delta^2 f(t,x)}{\delta x_i \delta x_j} \\ =& f\prime_0 + b(t,x) D_x f + \frac{1}{2} tr(a(t,x) \cdot D_{xx} f) \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Das Itô-Lemma kann man nun folgendermaßen schreiben:

$$df(t, X_t) = \mathcal{L}f(t, X_t)\ dt + D_x f(t, X_t) \cdot \sigma(t, X_t)\ dW_t \tag{2.11}$$

- einfacher Fall: $n = 1$ und $b, \sigma \ldots$konstant $\Rightarrow a = \sigma^2$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = b \frac{\delta}{\delta x} + \frac{1}{2} a \frac{\delta^2}{\delta x^2}$$

Satz 2.10: Sei $f \in C^{1,2}$ und es gelte:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^u |\mathcal{L}f(s, X_s)|\ ds \right] < \infty, \\ &\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^u ||D_x f(s, X_s) \cdot \sigma(s, X_s)||^2\ ds \right] < \infty, \quad \forall u \in [t, T] \end{aligned}$$

Dann folgt: $f \in \mathcal{D}_L$ und $Lf = \mathcal{L}f$.

Beweisidee: Setze Itô-Lemma in die Definition des Generators ein und benutze, dass die obigen Bedingungen garantieren, dass die dort auftretenden Integrale existieren und, dass das Stochastische Integral ein Martingal ist. □

Bemerkung: Für Funktionen $f \in C^{1,2}$, die einen kompakten Träger haben, sind die obigen Bedingungen automatisch erfüllt.

Satz 2.11: (Dynkin-Lemma) Sei $f \in C^{1,2}$ mit kompakten Träger und τ sei Stoppseit mit $\mathbb{E}_{t,x}[\tau] < \infty$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[f(\tau, X_\tau)] = f(0, x) + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \mathcal{L}f(s, X_s)\ ds \right]$$

Beweisidee: Wende Itô-Lemma bis $\tau \wedge n$ an und gehe zum Limes $\lim\limits_{n\to\infty}$ über.
Zu zeigen ist noch, dass $\int\limits_0^{\tau\wedge n} \mathcal{L}f(s, X_s)\ ds$ gleichmäßig integrierbar ist.
Da es sich um Zufallsvariablen handelt, ist das Vertauschen von Limes und Erwartungswert möglich.

$\square$

Bemerkung: falls τ Austrittszeit aus einer beschränkten Menge A ist, folgt dass das Dynkin-Lemma für alle $f \in C^{1,2}$ gilt.
Grund dafür ist, dass man $f_{\prime A}$ glatt zu einer Funktion mit kompakten Träger fortsetzen kann.

Beispiel 2.3: Sei $X_t = x_0 + W_t$ weiters sei $a < x_0 < b$ sowie
$\tau = \inf\{t | x_t \notin [a, b]\}$
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_\tau = b \mid X_0 = x_0] = p_0$

- Aus dem Martingalkonvergenzsatz für $X_{t\wedge\tau}$ und der Tatsache, dass $X_{t+\delta} - X_t$ Normalverteilt nach $\mathcal{N}(0, \delta)$ ist, folgt dass $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}f(X_\tau t) = p_0 f(b) + (1 - p_0) f(b) \tag{2.12}$$

- Bestimme zunächst alle f_0, sodass gilt: $\mathcal{L}f_0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \mathcal{L}f_0 &= \frac{1}{2} f_0'' \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow f_0(x) &= c_0 x + d_0 \qquad \text{für } c_0, d_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Mit dem Dynkin-Lemma folgt:

$$\mathbb{E}[f_0(X_\tau)] = f_0(X_0) + \int\limits_0^\tau 0\ ds \tag{2.13}$$

- Vergleicht man nun die beiden Formeln (2.8) und (2.9), folgt:

$$c_0 x + d_0 = p_0(c_0 b + d_0) + (1 - p_0)(c_0 a + d_0) \qquad \forall c_0, d_0$$

- Ein Koeffizientenvergleich in c_0 liefert nun folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} x_0 &= p_0 b + (1 - p_0) a \\ x_0 &= p_0(b - a) + a \\ \Rightarrow p_0 &= \frac{x_0 - a}{b - a} \end{aligned}$$

- Für $x_0 \to b$ folgt, dass $p_0 \nearrow 1$

2.7.2 Motivation der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Das Bellman-Prinzip:

$$V(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s)\ ds + V(t_1, X_{t_1}) \right]$$

Bedeutung: Falls man sich im Intervall$[t, t_1]$ optimal verhält, so ist dieses Verhalten auch global optimal, falls wir uns auch nach t_1 optimal verhalten.

Wir nehmen an: $V \in C^{1,2}$. Wendet man nun das Itô-Lemma (2.7) auf $V(t_1, X_{t_1})$ an, so folgt:

$$\begin{aligned} V(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E}_{t,x} \Bigg[& \int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s)\ ds + V(t,x) + \int_t^{t_1} V'_0(s, X_s)\ ds + \\ & + \int_t^{t_1} b(s, X_s, u_s) D_x V(s, X_s)\ ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_t^{t_1} tr(a(s, X_s, u_s) \cdot D_{xx} V(s, X_s))\ ds + \\ & + \int_t^{t_1} D_x V(s, X_s) \cdot (s, X_s, u_s)\ dW_s \Bigg] \end{aligned}$$

$V(t,x)$ kann man nun auf beiden Seiten kürzen. Nimmt man weiters an, dass das dW Integral ein Martingal ist, folgt, dass der Erwartungswert davon 0 ist und auch dieses gekürzt werden kann.

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E}_{t,x} \Bigg[& \int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s)\ ds + \int_t^{t_1} V'_0(s, X_s)\ ds + \\ & + \int_t^{t_1} b(s, X_s, u_s) D_x V(s, X_s)\ ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_t^{t_1} tr(a(s, X_s, u_s) \cdot D_{xx} V(s, X_s))\ ds \Bigg] \end{aligned}$$

Dividiert man nun durch $(t_1 - t)$ und bildet anschließend den Grenzwert $\lim\limits_{t \to t_1}$

erhalten wir:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \{\varphi(s, X_s, u_s)\ ds + V\prime_0(s, X_s)\ ds +$$
$$+ b(s, X_s, u_s) D_x V(s, X_s)\ ds +$$
$$+ \frac{1}{2} tr(a(s, X_s, u_s) \cdot D_{xx} V(s, X_s))\ ds\}$$

Def 2.21: $\mathcal{L}^u f := f\prime_0 + b \cdot Dx_x f + \frac{1}{2} tr(a \cdot D_{xx} f)$

$$\Rightarrow 0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{\varphi(t, x, u) + \mathcal{L}^u V(t, x)\} \tag{2.14}$$

(2.10) heißt Hamilton-Jakobi-Bellman-Gleichung.

Wir haben nun gesehen, dass unter bestimmten Vorraussetzungen die Gültigkeit der Hamilton-Jakobi-Bellman-Gleichung notwendig für die Wertfunktion V ist.
Umgekehrt kann man jedoch auch fragen, ob eine Lösung der Hamilton-Jakobi-Bellman-Gleichung die Wertfunktion beschreibt. Ist dies der Fall, kann man die Hamilton-Jakobi-Bellman-Gleichung lösen, um die Wertfunktion zu erhalten.

Algorithmus HJB $\rightarrow$ Wertfunktion

1. Löse Extremalproblem in HJB-Gleichung $\rightarrow u = \widehat{\mathrm{u}}(t,x)$
2. Falls $\widehat{u}$ $\exists$ hängte es von $V(t,x)$, $D_xV(t,x)$ und $D_{xx}V(t,x)$ ab.
$$\widehat{u}(t,x) = \widetilde{u}(t,x,V(t,x),D_xV(t,x),D_{xx}V(t,x))$$
3. Setze dieses $\widehat{u}$ in die HJB-Gleichung ein, um eine partielle Differentialgleichung für V mit Randbedingung $V(T,x) = \Psi(T,x)$ zu erhalten.
4. Kann man dieses Randwertproblem lösen, erhält man einen Lösungskandidaten $\Phi(t,x)$.
5. Unter bestimmten Bedingungen an Φ und wenn $u_t^* = \widehat{u}(t,X_t^*)$ zulässig ist, ist Φ die gesuchte Wertfunktion, wobei dann X_t^* die Lösung der stochastischen Differentialgleichung mit optimaler Kontrolle ist.

Bemerkung: Sätze, die Bedingungen angeben, unter denen die Lösung der Hamilton-Jakobi-Bellman-Gleichung die Wertfunktion ist, heißen Verifikations-Theoreme.

2.8 Ein Verifikationssatz

$$dx_t = b(t, X_t, u_t)\ dt + \sigma(t, X_t, u_t)\ dW_t \tag{2.15}$$

$$J(t, x, u) = \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s)\ ds + \Psi(T, X_T) | X_t = x \right]$$

Bedingungen an $\mathcal{A}(t, x)$:

- $a \dots$ progressiv messbar und $\mathbb{E}\left[\int_t^T ||u_s||^2\ ds\right] < \infty$
- (2.11) hat eine eindeutige starke Lösung mit $\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [t,T]} ||X_s||^2\right] < \infty$
- $J(t, x, u)$ ist wohldefiniert

Satz 2.12: Sei $\sigma(t, x, u)$ so, dass $||\sigma(t, x, u)||^2 \leq C_\sigma(1 + ||x||^2||u||^2)$, φ stetig und $||\varphi(t, x, u)|| \leq C_\varphi(1 + ||x||^2||u||^2)$ $\quad \forall t \in [0, T]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathcal{U}$

1. Falls $\Phi(t, x) \in C^{1,2}$ und $|\Phi(t, x)| \leq C_\Phi(1+||x||^2)$ und die HJB-Gleichung erfüllt:

$$\begin{cases} \sup_{u \in \mathcal{U}} \varphi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x) = 0 \\ \Phi(T, x) = \Psi(T, x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi(t, x) \geq V(t, x)$$

2. Falls $u_t^* = \widehat{u}(t, X_t^*) \in \mathcal{A}(t, x)$

$$\Rightarrow \phi(t, x) = V(t, x) \text{ und } J(t, x, u^*) = V(t, x)$$

Beweis: Zunächst wollen wir einmal den ersten Punkt des Satzes zeigen. Dazu sei $\tau_n := \inf \{s > t|\ ||X_s - X_t|| = n\}$ und u eine beliebige Kontrolle aus $\mathcal{A}(t, x)$, dann folgt:

$$\Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) = \Phi(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^{u_s} \Phi(s, X_s)\ ds + \int_t^{\tau_n} D_x \Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s)\ dW_s$$

Da X_s bei τ_n gestoppt wird und $D_x\Phi$ beschränkt ist, folgt, dass das Integral bezüglich der Brownschen Bewegung ein Martingal ist.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^{\tau_n}\varphi(s,X_s,u_s)\ ds+\Phi(\tau_n,X_{\tau_n})\right]=\\
&\mathbb{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^{\tau_n}\varphi(s,X_s,u_s)\ ds+\Phi(t,x)+\int\limits_t^{\tau_n}\mathcal{L}^{u_s}\Phi(s,X_s)\ ds\right]=\\
&\mathbb{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^{\tau_n}\underbrace{[\varphi(s,X_s,u_s)+\mathcal{L}^{u_s}\Phi(s,X_s)]}_{\leq 0 \text{ wegen der HJB-Gleichung}}\ ds\right]+\Phi(t,x)\\
\Rightarrow&\mathbb{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^{\tau_n}\varphi(s,X_s,u_s)\ ds+\Phi(\tau_n,X_{\tau_n})\right]\leq\Phi(t,x)
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\int\limits_t^{\tau_n}\varphi(s,X_s,u_s)\ ds\right|+|\Phi(\tau_n,X_{\tau_n})|\leq\\
&\int\limits_t^{\tau_n}C_\varphi(1+||X_s||^2+||u_s||^2)\ ds+C_\Phi(1+||X_{\tau_n}||^2)\leq\\
&\int\limits_t^{\tau_n}C_\varphi(1+||X_s||^2+||u_s||^2)\ ds+C_\Phi(1+\sup_{s\in[o,t]}||X_s||^2)\qquad\in L^1(P)
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz über die Dominierte Konvergenz sowie den Tatsachen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=T$ und Φ stetig ist, folgt nun:

$$
\Rightarrow\mathbb{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^{T}\varphi(s,X_s,u_s)\ ds+\underbrace{\Phi(T,X_T)}_{=\Psi(T,X_t)}\right]\leq\Phi(t,x)
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow J(t,x,u)\leq\Phi(t,x)\qquad\forall u\in\mathcal{A}\\
&\Rightarrow V(t,x)\leq\Phi(t,x)
\end{aligned}
$$

Der Beweis für Teil zwei des Satzes erfolgt analog mit u^* statt u. Als Folge erhält man in der Gleichung (2.12) statt einer Ungleichung Gleichheit. Damit folgt, dass:

$$
\begin{aligned}
&J(t,x,u^*)\leq\Phi(t,x)\\
\Rightarrow&V(t,x)\leq\Phi(t,x)
\end{aligned}
\qquad\square
$$

Bemerkungen:

- unter den Bedingungen des Satzes 2.12 gilt das verallgemeinerte Bellman Prinzip:

$$V(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^\tau \varphi(s, X_s, u_s)\ ds + \Phi(\tau, X_\tau)\right]$$

  für alle Stoppzeiten τ.

- Ist die Wertfunktion eindeutig, dann folgt, dass die Lösung der HJB-Gleichung, in der Klasse der $C^{1,2}$-Funktionen mit quadratischer Wachstumsbedingung eindeutig ist.

- Für die Existenz einer Lösung der HJB-Gleichung benötigt man im Allgemeinen sehr starke Bedingungen.

z.B.: $-\mathcal{U}$ ist kompakt
$-\Psi \in C^3$ in x und beschränkt
$-b, \sigma, \phi \in C^{1,2}$ und beschränkt
$-a$ ist gleichmäßig positiv definit,
d.h. $y^t a(t,x,u) y \geq \delta ||y||^2 \quad \forall t \in [0,T];\ x \in \mathbb{R}^n;\ u \in \mathcal{U}$

3 Optimale proportionale Rückversicherung und Investition basierend auf der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Rückversicherung und Investment sind wichtige Fragen für ein Versicherungsunternehmen. Daher sind auch Modelle zur Berechnung und Optimierung der Gleichen sehr gefragt. Genau mit dieser Fragestellung beschäftigt sich auch der Artikel von Cao und Wan, dem wir uns nun genauer widmen wollen. Genauer gesagt, widmet sich der Artikel der Optimierung des Verhältnisses von Aktien und Bonds sowie der optimalen Rückversicherungsquote, um den Endnutzen zu maximieren.
Die Ausgangssituation ist eine Versicherung, die die Möglichkeit hat, in eine Aktie und einen Bond zu investieren, wobei Leerverkäufe nicht zugelassen werden. Darüber hinaus besteht für die Versicherung die Möglichkeit, eine proportionale Rückversicherung abzuschließen.
Es wird die Hamilton-Jacobi-Bellman Theorie, deren Grundzüge wir in Kapitel 2 erörtert haben, genutzt werden, um aus dem Vermögensprozess, der mit Brownschen Bewegungen modelliert wird, mit den Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichungen eine optimale Strategie, wie investiert und rückversichert werden soll, abzuleiten.

3.1 Das Modell

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst einmal die entsprechenden Prozesse modellieren, die wir in dem nun folgenden Abschnitt benötigen. Ziel ist es, die Dynamik eines Prozesses $X(t)$ zu modellieren, welcher uns das Vermögen des Unternehmens widerspiegelt. Diese Modellierung werden wir in zwei Schritten durchführen. Zuerst werden wir die versicherungstechnischen Komponenten modellieren, und diese anschließend um einen Prozess, der die Möglichkeit in ein Asset und einen Bond zu investieren wiederspiegelt, erweitern. Die treibenden Komponenten dieses Vermögensprozesses X_t sind:

- Schäden
- Erhaltene Prämien
- Rückversicherungsprämien
- Investitionen in den Markt

3.1.1 Modellierung der versicherungstechnischen Zahlungsflüsse

Zunächst wollen wir die Zahlungen für Schäden definieren. Entsprechend Promislow und Young (2005) modellieren wir diese Zahlungen durch einen Prozess $C(t)$ mit Drift und einer Brownschen Bewegung.

$$dC(t) = a\ dt - b\ dW^0(t) \tag{3.1}$$

a und b sind hier positive Konstanten und $W^0(t)$ eine Standard Brownsche Bewegung.

Weiter wollen wir annehmen, dass die Prämien mit einer konstanten Rate $c_0 = (1+\theta)a$ gezahlt werden, wobei $\theta > 0$ einen Sicherheitszuschlag darstellt.

Nun wollen wir als letzten versicherungstechnischen Faktor auch noch den Einfluss der Rückversicherung modellieren. Dazu sei $B : B^+ \to B^+$ die Rückversicherungsfunktion. Da wir nur den Fall der proportionalen Rückversicherung behandeln wollen, gilt: sei Y der Gesamtschaden, dann ist $B(Y) = qY$, wobei q der Prozentsatz des Schadens der vom Rückversicherer getragen wird. Damit ändert sich der Schadensprozess des Versicherers bei proportionaler Rückversicherung von $dC(t)$ zu $(1-q)\ dC(t)$.

Die Rückversicherungsprämie definieren wir wie die Prämie zuvor durch eine konstante Zahlung $c_1 = (1+\mu)aq$. μ ist wieder ein Sicherheitszuschlag, der in der Regel höher ist als jener des Erstversicherers. Daher wollen wir annehmen: $\mu > \theta > 0$

Nun haben wir alles was wir brauchen, um einen vorläufigen Vermögensprozess zu definieren:

$$\begin{aligned} dR(t) &= c_0\ dt - (1-q)dC(t) - c_1\ dt \\ &= (1+\theta)a\ dt - (1-q)(a\ dt - b\ dW^0(t)) - (1+\mu)aq\ dt \\ &= [(1+\theta) - (1-q) - (1+\mu)q]\, a + b(1-q)\ dW^0(t) \\ &= (\theta - \mu q)a\ dt + b(1-q)\ dW^0(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1.2 Modellierung des Investments

Zusätzlich zur Rückversicherung hat der Versicherer die Möglichkeit, in zwei Assets zu investieren, ein risikoloses Asset(Bond oder Bank Konto) und ein riskantes Asset (Aktie). Das risikolose Asset $S_0(t)$ sei modelliert durch

$$dS_0(t) = r_0 S_0(t)\; dt \tag{3.3}$$

mit über die Zeit konstanten Zinssätzen $r_0 > 0$

Der Aktienpreis am Markt ist ein diskreter Prozess. Da wir für unsere Zwecke allerdings einen stetigen stochastischen Prozess brauchen, wählen wir eine für die Modellierung von Finanzmärkten übliche Approximation. Die geometrische Brownsche Bewegung hat sich in den letzten Jahren als gute Modellannahme etabliert, und ist mittlerweile zum Herzstück der modernen Kapitalmarkttheorie geworden. Sei also $S_1(t)$ der Aktienpreis zum Zeitpunkt t:

$$dS_1(t) = S_1(t) r_1\; dt + \sigma S^1(t)$$

mit über die Zeit konstanten Drift $r_1 > r_0$, der Brownschen Bewegung $S^1(t)$ und deren Volatilität σ ebenfalls konstant über die Zeit.

Nun haben wir alles, um den Prozess $X(t)$ des Vermögens eines Unternehmens zu modellieren. Ausgehend von den Gleichungen (3.1),(3.2) und (3.3) erhält man nun:

$$\begin{aligned} dX(t) =& [r_0(1-l(t))X(t) + r_1 l(t)X(t)]\, dt + \sigma l(t)X(t)\; dW^1(t) + dR(t) \\ =& [r_0(1-l(t))X(t) + (\theta - \mu q)a] + r_1 l(t)X(t)\; dt + \\ &+ b(1-q)\; dW^0(t) + \sigma l(t)X(t)\; dW^1(t) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wollen wir nun noch für die weiteren Berechnungen so umformen, dass je ein Teil unabhängig von $q(t)$ bzw. $l(t)$ ist.

$$\begin{aligned} dX(t) = [r_0 X(t) + (\theta - \mu q)a]\, dt + b(1-q)\; dW^0(t) + \\ + (r_1 - r_0)l(t)X(t)\; dt + \sigma l(t)X(t)\; dW^1(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Abschließend wollen wir noch definieren, welche Stategien dem Versicherungsunternhemen zur Verfügung stehen.

Def 3.1: Eine Strategie α ist ein stochastischer Prozess $(q(t), l(t))$, wobei $q(t)$ der rückversicherte Anteil zum Zeitpunkt t, und $l(t)$ der Anteil des Vermögens ist, der in das riskante Asset investiert wird.

Def 3.2: α heißt zulässige Strategie, falls $0 \leq q(t) \leq 1$ und $0 \leq l(t) \leq 1$
Die Menge aller zulässigen Strategien sei $\mathcal{A}$.

3.2 Maximierung des erwarteten Endnutzens

In Abschnitt (3.1) haben wir eine Differentialgleichung für den Vermögensprozess X_t des Versicherungsunternehmens hergeleitet. Jetzt können wir diese wie in Kapitel 2 nutzen, um unser Zielfunktional

$$J(t,x,u) = \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^T \varphi(s,X_s,u_s)\ ds + \Phi(T,X_T)\right]$$

mittels der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung zu maximieren.
Da wir nur den erwarteten Endnutzen berechnen wollen, ist die Funktion $\varphi(t,X_s;u_s$, die den laufend akquirierten Nutzen darstellt, in unserem Fall identisch 0. Der Endnutzen wird mittels einer Nutzenfunktion $u(x)$, die typischerweise wachsend und konkav ($u''(x)\ <\ 0$) ist, berechnet. Damit erhalten wir nun das für eine Strategie α unser Zielfunktional, die folgende einfache Form hat:

$$J_\alpha(t,x) = \mathbb{E}[u(X_T^\alpha)|X_t^\alpha = x]$$

Ziel ist es nun

$$V(t,x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} J_\alpha(t,x)$$

und die dazugehörige Strategie $\alpha^* = (q^*(t), l^*(t))$ zu finden, so dass gilt:

$$V_{\alpha^*}(t,x) = V(t,x)$$

Dieses Problem werden wir im Folgenden für zwei spezielle Nutzenfunktionen, nämlich die Exponentielle Nutzenfunktion und die „Power“ Nutzenfunktion lösen.

3.2.1 Exponentielle Nutzenfunktion

Wir wollen annehmen, dass der Versicherer seinen Überlegungen die Exponentielle Nutzenfuntkion

$$u(x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m}e^{-mx}$$

zu Grunde legt. Diese Nutzenfunktion spielt in der Versicherungsmathematik eine wichtige Rolle, da sie die einzige Nutzenfunktion ist, welche unter dem Nullnutzenprinzip zur Berechnung der Prämien, eine Prämie liefert, die nicht vom Vermögen des Versicherers abhängt (siehe Gerber/1979).

Um nun das Problem des erwarteten Endnutzens zu lösen, nutzen wir die Dynamische Programmierung wie in Abschnitt (2.7).
Sind nun also die Wertfunktion V sowie ihre partiellen Ableitungen $V_t,\ V_x,\ V_{xx}$ stetig auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, und nutzt man die Gleichung (3.4) sowie (2.10) dann folgt, dass V die folgende HJB-Gleichung, für alle Paare $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$ mit der Randbedingung $V(T,x) = u(x)$, erfüllt:

$$\begin{aligned} 0 =& \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{\mathcal{L}^\alpha V(t,x)\} \\ =& V_t + \sup_{0 \le q \le 1} \left\{ [r_0 x + (\theta - \mu q) a]\, V_x(t,x) + \frac{1}{2}(1-q)^2 b^2 V_{xx}(t,x) \right\} \\ &+ \sup_{0 \le l \le 1} \left\{ (r_1 - r_0) l x V_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 l(t)^2 x^2 V_{xx}(t,x) \right\} = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nun wollen wir die Gleichung (3.5) mit der dazugehörenden Randbedingung lösen. Dazu nehmen wir an, dass das Maximum im Kontrollbereich angenommen wird. Das heißt, dass die optimale Rückversicherungsquote $q^*(t,x)$, für alle Paare $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$, im Intervall $[0,1]$ liegt. Analog gilt, dass $l^*(t,x)$ im Intervall $[0,1]$ liegt. Um die Maxima zu bestimmen, differenzieren wir zunächst (3.5) nach q und l und setzen anschließend die erhaltenen Ausdrücke gleich 0. Hier erweist sich nun unsere Formulierung der Gleichung (3.4) als praktisch, zumal beim Differenzieren nach q und l jeweils nur der Inhalt einer der beiden Klammern in (3.5) zu berechnen ist, da der jeweilige Rest der Gleichung nicht von q oder l abhängt.

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta q} \left\{ [r_0 x + (\theta - \mu q) a]\, V_x + \frac{1}{2}(1-q)^2 b^2 V_{xx} \right\} \\ &= -a\mu V_x + (q-1) b^2 V_{xx} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q^0(t,x) = 1 + \frac{a\mu}{b^2} \frac{V_x}{V_{xx}} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta q} \left\{ (r_1 - r_0) l x V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 l^2 x^2 V_{xx} \right\} \\ &= (r_1 - r_0) x V_x + \sigma^2 l x^2 V_{xx} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l^0(t,x) = \frac{(r_1 - r_0) x V_x}{\sigma^2 x^2 V_{xx}} \tag{3.7}$$

Zur Vergewisserung, dass es sich bei den beiden erhaltenen Ergebnissen auch tatsächlich um Maxima handelt, überprüfen wir noch die zweiten Ableitungen:

$$\frac{\delta}{\delta q} - a\mu V_x + (q-1)b^2 V_{xx} = b^2 V_{xx}$$
$$\frac{\delta}{\delta q}(r_1 - r_0)xV_x + \sigma^2 l x^2 V_{xx} = \sigma^2 x^2 V_{xx}$$

Da $V_{xx} < 0$ folgt, dass auch die beiden obigen Ausdrücke kleiner 0 sind und somit (3.6) und (3.7) tatsächlich Maxima sind.

Da a, b, μ sowie V_x positiv sind, V_{xx} jedoch negativ ist, folgt dass $q^0(t,x) < 1$ ist. Gilt darüber hinaus, dass $q^0(t,x) \geq 0$, so folgt dass $q^*(t,x)$ mit $q^0(t,x)$ übereinstimmt. Ist jedoch $q^0(t,x) < 0$, was in der Realität nicht möglich ist und daher auch nicht in der Menge der zulässigen Strategien *mathcalA* enthalten ist , dann setzen wir $q^*(t,x) = 0$.
Analog folgt, dass $l^0(t,x) > 0$ ist. Gilt ebenfalls, dass $l^0(t,x) \leq 1$ so folgt, dass $l^*(t,x)$ mit $l^0(t,x)$ übereinstimmt. Sollte $l^0(t,x) > 1$ sein, so setzen wir wieder $l^*(t,x) = 0$, da wir Leerverkäufe nicht zugelassen haben, und somit $l^0(t,x) \geq 1$ keine zulässige Strategie ist.

Obige Argumentation führt zu folgenden vier Lemmata, die wir später für die Analyse der Lösung von (3.5) brauchen werden:

Lemma 3.1: Sei $\mathcal{A}_1 = \{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} : 0 < q^*(t,x) < 1,\ 0 < l^*(t,x) < 1\}$. Angenommen $V(t,x)$ ist Lösung von

$$V_t + (r_0 x + \theta a - \mu a)V_x - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2}\right)\frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0 \tag{3.8}$$

wobei $(t,x) \in \mathcal{A}_1$, $V(T,x) = u(x)$, und $V(t,x)$ ist eine konkave und wachsende Funktion in x.
Dann gilt, dass $V(t,x)$ die HJB-Gleichung (3.5) mit der dazugehörenden Randbedingung $V(T,x) = u(x)$ erfüllt.

Beweis: Man sieht leicht, dass das Supremum im Bereich $\mathcal{A}_1$ in der Gleichung (3.5) erreicht wird, wenn man für q $q^0 = 1 + \frac{a\mu}{b^2}\frac{V_x}{V_{xx}}$ und für l $l^0(t,x) = \frac{(r_1 - r_0)xV_x}{\sigma^2 x^2 V_{xx}}$ wählt. Diese wurden ja genau so gewählt, dass sie den Ausdruck (3.5) maximieren. Setzt man nun q^0 und l^0 in die Gleichung (3.5) ein, so erhält man die linke Seite der Gleichung (3.8).

□

Lemma 3.2: Sei $\mathcal{A}_2 = \{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} : q^*(t,x) < 0,\ 0 < l^*(t,x) < 1\}$. Angenommen $V(t,x)$ ist Lösung von

$$V_t + (r_0 x + \theta a)V_x + \frac{1}{2}b^2 V_{xx} - \frac{1}{2}\frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0 \tag{3.9}$$

wobei $(t,x) \in \mathcal{A}_2$, $V(T,x) = u(x)$, und $V(t,x)$ ist eine konkave und wachsende Funktion in x.
Dann gilt, dass $V(t,x)$ die HJB-Gleichung (3.5) mit der dazugehörenden Randbedingung $V(T,x) = u(x)$ erfüllt.

Beweis: Analog zu dem Beweis von Lemma 3.1 kann man zeigen, dass die Gleichung (3.5) ihr Maximum im Bereich $\mathcal{A}_2$ bei $q^0(t,x) = 0$ und $l^0(t,x)$ wie in (3.7) annimmt. Setzt man diese wiederum in (3.5) ein, erhält man die linke Seite der obigen Gleichung.

□

Lemma 3.3: Sei $\mathcal{A}_3 = \{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} : 0 < q^*(t,x) < 1,\ 1 < l^*(t,x)\}$. Angenommen $V(t,x)$ ist Lösung von

$$V_t + (r_0 x + \theta a - \mu a)V_x - \frac{1}{2}\frac{a^2\mu^2}{b^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx} = 0 \tag{3.10}$$

wobei $(t,x) \in \mathcal{A}_3$, $V(T,x) = u(x)$, und $V(t,x)$ ist eine konkave und wachsende Funktion in x.
Dann gilt, dass $V(t,x)$ die HJB-Gleichung (3.5) mit der dazugehörenden Randbedingung $V(T,x) = u(x)$ erfüllt.

Beweis: Analog zu dem Beweis von Lemma 3.1 kann man zeigen, dass die Gleichung (3.5) ihr Maximum im Bereich $\mathcal{A}_3$ bei $l^0(t,x) = 1$ und $q^0(t,x)$ wie in (3.6) annimmt. Setzt man diese wiederum in (3.5) ein, erhält man die linke Seite der obigen Gleichung.

□

Lemma 3.4: Sei $\mathcal{A}_4 = \{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} : q^*(t,x) < 0,\ 1 < l^*(t,x)\}$. Angenommen $V(t,x)$ ist Lösung von

$$V_t + (r_0 x + \theta a)V_x + \frac{1}{2}b^2 V_{xx} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx} = 0 \tag{3.11}$$

wobei $(t,x) \in \mathcal{A}_4$, $V(T,x) = u(x)$, und $V(t,x)$ ist eine konkave und wachsende Funktion in x.
Dann gilt, dass $V(t,x)$ die HJB-Gleichung (3.5) mit der dazugehörenden

Randbedingung $V(T,x) = u(x)$ erfüllt.

Beweis: Analog zu dem Beweis von Lemma 3.1 kann man zeigen, dass die Gleichung (3.5) ihr Maximum im Bereich $\mathcal{A}_4$ bei $q^0(t,x) = 0$ und $l^0(t,x) = 1$ annimmt. Setzt man diese wiederum in (3.5) ein, erhält man die linke Seite der obigen Gleichung.

□

Nun wollen wir die Gleichung (3.5) mit der dazugehörigen Randbedingung $V(T,x) = u(x)$ lösen. Dazu sei $(q^*(t,x), l^*(t,x))$ der Ausdruck der die linke Seite der Gleichung (3.5)

$$\begin{aligned} V_t + \sup_{0\leq q\leq 1} &\left\{ [r_0 x + (\theta - \mu q)a]\, V_x(t,x) + \frac{1}{2}(1-q)^2 b^2 V_{xx}(t,x) \right\} \\ + \sup_{0\leq l\leq 1} &\left\{ (r_1 - r_0) l x V_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 l(t)^2 x^2 V_{xx}(t,x) \right\} \end{aligned}$$

maximiert.

Das bedeutet: es gibt vier möglichen Fälle für $(q^*(t,x), l^*(t,x))$, die wir im Folgenden einzeln behandeln werden:

1. Fall $(0 < q^*(t,x) < 1,\ 0 < l^*(t,x) < 1)$
2. Fall $(q^*(t,x) < 0,\ 0 < l^*(t,x) < 1)$
3. Fall $(0 < q^*(t,x) < 1,\ 1 < l^*(t,x))$
4. Fall $(q^*(t,x) < 0,\ 1 < l^*(t,x))$

1. Fall $(0 < q^*(t,x) < 1,\ 0 < l^*(t,x) < 1)$

Aus den bisherigen Überlegungen wissen wir, dass in diesem Fall $q^*(t,x)$ gleich $q^0(t,x)$ aus (3.6) ist, und $l^*(t,x)$ gleich $l^0(t,x)$ aus (3.7). Setzt man diese in die Gleichung (3.5) ein, erhält man die Gleichung (3.7) aus Lemma 3.1. Diese erhaltene Differentialgleichung wollen wir nun lösen. Dazu wählen wir einen analogen Ansatz zur Gleichung (79) in Browne (1995):

$$\begin{aligned} V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp &\left\{ -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{(r_1-r_0)^2}{\sigma^2}\right) \right. \\ &\left. \times (T-t) + h(T-t) \right\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei $h(x)$ noch so zu bestimmen ist, dass der Ausdruck (3.12) auch tatsächlich Lösung der HJB-Gleichung (3.7) ist. Setzen man die Ableitungen $V_t,\ V_x$

und V_{xx} von (3.12) in die Gleichung (3.7) ein, so erhält man, dass h' folgende Form hat:

$$h'(T-t) = ma(\mu-\theta)e^{r_0(T-t)}$$

integrieren wir diesen Ausdruck erhalten wir:

$$h(T-t) = \int_t^T h'(T-t) = ma(\mu-\theta)\frac{e^{r_0(T-t)}-1}{r_0} + k$$

Die Konstante k brauchen wir vorerst nicht, da sie in sämtlichen Ableitungen wegfällt. Daher werden wir k zu einem später Zeitpunkt so wählen, dass die Lösungen der vier Fälle stetig zusammenpassen.

Setzen wir nun das erhaltene $h(T-t)$ in unseren Lösungskandidaten (3.12) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp\Bigg\{ & -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{(r_1-r_0)^2}{\sigma^2}\right) \\ & \times(T-t) + ma(\mu-\theta)\frac{e^{r_0(T-t)}-1}{r_0} + k\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nun können wir die Ableitungen V_x und V_{xx}, die wir für die Bestimmung von $q^0(t,x)$ und $l^0(t,x)$ brauchen, berechnen und sie anschließend in die Gleichungen (3.6) und (3.7) einsetzen, um unser Lösungspaar $(0 < q^*(t,x) < 1,\ 0 < l^*(t,x) < 1)$ zu erhalten:

$$\begin{aligned} V_x &= -\gamma e^{r_0(T-t)} exp(-mxe^{r_0(T-t)}) \\ V_{xx} &= \gamma e^{(r_0(T-t))^2} exp(-mxe^{r_0(T-t)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^0(t,x) &= 1 + \frac{a\mu}{b^2}\frac{-\gamma e^{r_0(T-t)} exp(-mxe^{r_0(T-t)})}{\gamma e^{(r_0(T-t))^2} exp(-mxe^{r_0(T-t)})} \\ \Rightarrow q^0(t,x) &= 1 - \frac{a\mu}{mb^2}e^{-r_0(T-t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l^0(t,x) &= \frac{(r_1-r_0)}{x\sigma^2}\frac{-\gamma e^{r_0(T-t)} exp(-mxe^{r_0(T-t)})}{\gamma e^{(r_0(T-t))^2} exp(-mxe^{r_0(T-t)})} \\ \Rightarrow l^0(t,x) &= \frac{(r_1-r_0)}{mx\sigma^2}e^{-r_0(T-t)} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir unser Lösungspaar

$$(q^*(t,x)\ ,\ l^*(t,x)) = \left(1 - \frac{a\mu}{mb^2} e^{-r_0(T-t)}\ ,\ \frac{(r_1 - r_0)}{mx\sigma^2} e^{-r_0(T-t)}\right) \tag{3.14}$$

Bemerkung: Da x das Vermögen des Versicherungsunternehmens darstellt, wollen wir aus Gründen der Plausibilität annehmen, dass $x \geq M$, wobei M eine positive Konstante ist. Ein negatives x würde den Ruin des Unternehmens bedeuten.

Nun können wir aus der Form unseres Lösungspaares (3.13) folgende Aussagen ableiten:

$$0 < q^*(t,x) < 1 : \quad \begin{cases} a\mu \leq mb^2, & \text{or} \\ mb^2 < a\mu < mb^2 e^{r_0 T} & \text{and} \\ \quad t < T - \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0} \end{cases} \tag{3.15}$$

$$q^*(t,x) < 0 : \quad \begin{cases} a\mu > mb^2, & \text{or} \\ mb^2 < a\mu < mb^2 e^{r_0 T} & \text{and} \\ \quad t > T - \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0} \end{cases} \tag{3.16}$$

$$0 < l^*(t,x) < 1 : \quad \begin{cases} r_1 - r_0 \leq Mm\sigma^2, & \text{or} \\ Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0} T & \text{and} \\ \quad t < T - \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \end{cases} \tag{3.17}$$

$$l^*(t,x) > 1 : \quad \begin{cases} r_1 - r_0 > Mm\sigma^2, & \text{or} \\ Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0} T & \text{and} \\ \quad t > T - \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \end{cases} \tag{3.18}$$

Mit den obigen Informationen können wir nun überprüfuen, unter welcher Parameterkonstellation die Voraussetzungen $0 \leq q^*(t,x) < 1$ und $0 \leq q^*(t,x) < 0$ von Lemma 3.1 erfüllt sind. Die Voraussetzungen sind unter folgenden vier Fällen erfüllt:

$$
\begin{cases}
(I): & a\mu \leq mb^2, \quad r_1 - r_0 \leq Mm\sigma^2 \\
(II): & a\mu \leq mb^2, \\
& Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0 T}, \\
& t < T - \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \\
(III): & mb^2 < a\mu < mb^2 e^{r_0 T}, \\
& t < T - \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0}, \\
& r_1 - r_0 \leq Mm\sigma^2 \\
(IV): & mb^2 < a\mu < mb^2 e^{r_0 T}, \\
& t > T - \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0} \\
& Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0 T}, \\
& t < T - \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0}
\end{cases}
$$

Sei nun $V(t,x)$ wie in (3.13) die Lösung der HJB-Gleichung (3.5) mit der dazugehörigen Randwertbedingung, dann wählen wir k gleich 0 im Fall (I). Für die übrigen Fälle (II), (III) und (IV) werden wir k etwas später bestimmen.

2. Fall $(q^*(t,x) < 0,\ 0 < l^*(t,x) < 1)$

Lemma 3.2 liefert (3.9)

$$
V_t + (r_0 x + \theta a)V_x + \frac{1}{2}b^2 V_{xx} - \frac{1}{2}\frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0
$$

als zu lösende Differentialgleichung. Analog zum ersten Fall erhält man wieder durch die Methode von Browne(1995) eine Lösung :

$$
\begin{aligned}
V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp\Bigg\{ & -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \\
& \times (T-t) + h_2(T-t) \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

mit

$$
h_2(T-t) = -m\theta a \frac{e^{r_0(T-t)} - 1}{r_0} + \frac{1}{4}m^2 b^2 \frac{e^{2r_0(T-t)} - 1}{r_0} \tag{3.20}
$$

Durch einsetzen der Ableitungen von (3.19) in die Gleichung (3.7), und der Tatsache dass $q^*(t,x) < 0$ und somit gleich 0 gesetzt wird, erhält man wieder ein Lösungspaar:

$$
(q^*(t,x),\ l^*(t,x)) = \left(0\ ,\ \frac{(r_1 - r_0)}{mx\sigma^2} e^{-r_0(T-t)}\right) \tag{3.21}
$$

Auch hier können wir nun wieder analog zum ersten Fall vier Parameterkonstellationen unterscheiden, unter welchen die Vorraussetzugen $q^*(t,x) < 0$ und $0 < l^*(t,x) \leq 1$ des Lemmas (3.2) erfüllt sind:

$$\begin{cases} (I): & a\mu > mb^2e^{r_0T}, \quad r_1 - r_0 \leq Mm\sigma^2 \\ (II): & a\mu > mb^2e^{r_0T}, \\ & Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2e^{r_0T}, \\ & t < T - \frac{(\ln(r_1-r_0)-\ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \\ (III): & mb^2 < a\mu < mb^2e^{r_0T}, \\ & t > T - \frac{(\ln(a\mu)-\ln(mb^2))}{r_0}, \\ & r_1 - r_0 \leq Mm\sigma^2 \\ (IV): & mb^2 < a\mu < mb^2e^{r_0T}, \\ & t > T - \frac{(\ln(a\mu)-\ln(mb^2))}{r_0} \\ & Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2e^{r_0T}, \\ & t < T - \frac{(\ln(r_1-r_0)-\ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \end{cases}$$

Da wir nun Bedingungen gefunden haben, unter denen unsere Fälle 1 und 2 eintreten, wollen wir uns nun der Bestimmung von k näher widmen.

Wenn gilt, dass $a\mu > mb^2e^{r_0T}$ und $Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2e^{r_0T}$, dann wählen wir k so, dass die Lösungen (3.13) und (3.19) an der Selle $t = T - \frac{(\ln(r_1-r_0)-\ln(Mm\sigma^2))}{r_0}$ stetig zusammenpassen. Man erhält:

$$\begin{aligned} \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp\Bigg\{ & -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{(r_1-r_0)^2}{\sigma^2}\right) \times (T-t) \\ & + ma(\mu - \theta)\frac{e^{r_0(T-t)}-1}{r_0} + k \Bigg\} = \\ = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp\Bigg\{ & -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\frac{(r_1-r_0)^2}{\sigma^2} \times (T-t) \\ & -m\theta a\frac{e^{r_0(T-t)}-1}{r_0} + \frac{1}{4}m^2b^2\frac{e^{2r_0(T-t)}-1}{r_0} \Bigg\} \end{aligned}$$

Kürzen liefert:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2}\right) \times (T-t) + ma\mu\frac{e^{r_0(T-t)}-1}{r_0} + k \\ & = \frac{1}{4}m^2b^2\frac{e^{2r_0(T-t)}-1}{r_0} \end{aligned}$$

Einsetzen von $t = T - \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0}$ liefert:

$$
\begin{aligned}
k =& \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2}\right) \times \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \\
& - ma\mu \frac{exp\left\{\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2)\right\} - 1}{r_0} \\
& + \frac{1}{4} m^2 b^2 \frac{exp\left\{2(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))\right\} - 1}{r_0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k =& \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2}\right) \times \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \\
& - \frac{ma\mu}{r_0}\left(\frac{r_1 - r_0}{Mm\sigma^2} - 1\right) + \frac{1}{4}\frac{m^2 b^2}{r_0}\left(\left(\frac{r_1 - r_0}{Mm\sigma^2}\right)^2 - 1\right)
\end{aligned}
$$

Wenn gilt, dass $mb^2 < a\mu < mb^2 e^{r_0 T}$, erhält man äquivalent zu den vorangegangenen Überlegungen:

$$
\begin{aligned}
k =& \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2}\right) \times \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0} \\
& - \frac{ma\mu}{r_0}\left(\frac{a\mu}{mb^2} - 1\right) + \frac{1}{4}\frac{m^2 b^2}{r_0}\left(\left(\frac{a\mu}{mb^2}\right)^2 - 1\right)
\end{aligned}
$$

Diese Ergebnisse weichen jedoch von jenen von (Cao,Wan/2009) ab.

Nun wollen wir uns noch kurz mit der Relevanz, der von uns berechneten Lösungen befassen. Zunächst sei erwähnt, dass in der Realität für die Zinsrate der risikolosen Anlagen r_0 gilt, dass sie größer Null ist. Also: $r_0 > 0$.
Für den Drift von Aktien r_1 wiederum gilt, dass es meist unter Eins liegt. Daher: $r_1 < 1$.
In den Bedingungen *(II)* und *(IV)* der beiden Fälle 1 und 2 kam der Ausdruck $Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0 T}$ vor. Da $r_1 < 1$, $r_0 > 0$ nach unseren realistischen Annahmen und $r_1 > r_0$ folgt nun: $0 < r_1 - r_0 < 1$.
Im Allgemeinen werden sich auch r_1 und r_0 nicht zu sehr voneinander unterscheiden, wodurch die Differenz klein wird und der Ausdruck $r_1 - r_0$ gegen Null geht.
Da aber M so gewählt war, dass das Vermögen x des Versicherers größer als

M ist, kann man davon ausgehen, dass M groß ist. Auch m und σ waren positive Konstanten. Daher folgt, dass $Mm\sigma^2 < r_1 - r_0$ unter realistischen Marktbedingungen nicht gelten wird, und somit die Bedingungen *(II)* und *(IV)* im Allgemeinen nicht erfüllt sind.

Aus den gleichen Gründen folgt, dass $l^0(t,x) > 1$ nicht eintreten wird, da auch hierfür die Bedingung $Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0 T}$ erfüllt sein müsste. Daher können wir annehmen, dass unter Verwendung der Exponentiellen Nutzenfunktion die Fälle $(0 < q^*(t,x) < 1,\ 1 < l^*(t,x))$ und $(q^*(t,x) < 0,\ 1 < l^*(t,x))$ ohne Signifikanz sind. Daher vereinfacht sich unser Prozess und lediglich die hier bereits behandelten Fälle $(0 < q^*(t,x) < 1,\ 0 < l^*(t,x) < 1)$ und $(q^*(t,x) < 0,\ 0 < l^*(t,x) < 1)$ sind von wirtschaftlicher Bedeutung.

Die in diesem Kapitel erhaltenen Ergebnisse wollen wir nun noch in folgendem Satz kompakt formulieren:

Satz 3.1: Unter Verwendung der Exponentiellen Nutzenfunktion
$u(x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} e^{-mx}$ existiert für die Differentialgleichung (3.5)

$$\begin{aligned} V_t &+ \sup_{0 \le q \le 1} \left\{ \left[r_0 x + (\theta - \mu q) a \right] V_x(t,x) + \frac{1}{2}(1-q)^2 b^2 V_{xx}(t,x) \right\} \\ &+ \sup_{0 \le l \le 1} \left\{ (r_1 - r_0) l x V_x(t,x) + \frac{1}{2} \sigma^2 l(t)^2 x^2 V_{xx}(t,x) \right\} = 0 \end{aligned}$$

mit der Randwertbedingung $V(T,x) = u(x)$ eine Lösung $V(t,x)$.
Die Lösung $V(t,x)$ und das dazugehörige Paar $(q^*(t,x), l^*(t,x))$ sehen wie folgt aus:

1. Sei $a\mu \le mb^2$ und $r_1 - r_0 \le Mm\sigma^2$:

$$\begin{aligned} V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp \Bigg\{ & -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \right) \\ & \times (T-t) + ma(\mu - \theta) \frac{e^{r_0(T-t)} - 1}{r_0} + k \Bigg\} \end{aligned}$$

$$k = 0$$

$$(q^*(t,x), l^*(t,x)) = \left(1 - \frac{a\mu}{mb^2} e^{-r_0(T-t)} \ ,\ \frac{(r_1 - r_0)}{mx\sigma^2} e^{-r_0(T-t)} \right)$$

2. Sei $a\mu \leq mb^2$ und $Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0 T}$:

$$\begin{aligned} V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp \Bigg\{ & -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{(r_1-r_0)^2}{\sigma^2}\right) \\ & \times (T-t) + ma(\mu-\theta)\frac{e^{r_0(T-t)}-1}{r_0} + k \Bigg\}, \\ & \text{wenn } t < T - \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = & \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2}\right) \times \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} \\ & - \frac{ma\mu}{r_0}\left(\frac{r_1-r_0}{Mm\sigma^2} - 1\right) + \frac{1}{4}\frac{m^2b^2}{r_0}\left(\left(\frac{r_1-r_0}{Mm\sigma^2}\right)^2 - 1\right) \end{aligned}$$

$$(q^*(t,x), l^*(t,x)) = \left(1 - \frac{a\mu}{mb^2}e^{-r_0(T-t)} \ , \ \frac{(r_1-r_0)}{mx\sigma^2}e^{-r_0(T-t)}\right)$$

3. Sei $mb^2 < a\mu < mb^2 e^{r_0 T}$ und $r_1 - r_0 \leq Mm\sigma^2$:

$$\begin{aligned} V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp \Bigg\{ & -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{(r_1-r_0)^2}{\sigma^2}\right) \\ & \times (T-t) + ma(\mu-\theta)\frac{e^{r_0(T-t)}-1}{r_0} + k \Bigg\}, \\ & \text{wenn } 0 < t < T - \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(mb^2))}{r_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = & \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2}\right) \times \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0} \\ & - \frac{ma\mu}{r_0}\left(\frac{a\mu}{mb^2} - 1\right) + \frac{1}{4}\frac{m^2b^2}{r_0}\left(\left(\frac{a\mu}{mb^2}\right)^2 - 1\right) \end{aligned}$$

$$(q^*(t,x), l^*(t,x)) = \left(1 - \frac{a\mu}{mb^2}e^{-r_0(T-t)} \ , \ \frac{(r_1-r_0)}{mx\sigma^2}e^{-r_0(T-t)}\right)$$

4. Sei $mb^2 < a\mu < mb^2e^{r_0T}$ und $Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2e^{r_0T}$:

$$V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m}exp\left\{-mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{(r_1-r_0)^2}{\sigma^2}\right)\right.$$
$$\left.\times(T-t) + ma(\mu-\theta)\frac{e^{r_0(T-t)}-1}{r_0} + k\right\},$$
$$\text{wenn } 0 < t < \min\left[T - \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0},\right.$$
$$\left.T - \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(mb^2))}{r_0}\right]$$

ist $T - \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} > T - \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(mb^2))}{r_0}$:

$$k = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2}\right) \times \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0}$$
$$- \frac{ma\mu}{r_0}\left(\frac{r_1-r_0}{Mm\sigma^2} - 1\right) + \frac{1}{4}\frac{m^2b^2}{r_0}\left(\left(\frac{r_1-r_0}{Mm\sigma^2}\right)^2 - 1\right)$$

ist $T - \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0} < T - \frac{(\ln(r_1-r_0) - \ln(mb^2))}{r_0}$:

$$k = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2}\right) \times \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0}$$
$$- \frac{ma\mu}{r_0}\left(\frac{a\mu}{mb^2} - 1\right) + \frac{1}{4}\frac{m^2b^2}{r_0}\left(\left(\frac{a\mu}{mb^2}\right)^2 - 1\right)$$

$$(q^*(t,x), l^*(t,x)) = \left(1 - \frac{a\mu}{mb^2}e^{-r_0(T-t)}\ ,\ \frac{(r_1-r_0)}{mx\sigma^2}e^{-r_0(T-t)}\right)$$

5. Sei $a\mu > mb^2 e^{r_0 T}$ und $r_1 - r_0 \leq Mm\sigma^2$:

$$V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp \Bigg\{ -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \times (T-t) + h_2(T-t) \Bigg\}$$

$$(q^*(t,x),\ l^*(t,x)) = \left(0\ ,\ \frac{(r_1 - r_0)}{mx\sigma^2} e^{-r_0(T-t)}\right)$$

6. Sei $a\mu > mb^2 e^{r_0 T}$ und $Mm\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0 T}$:

$$V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp \Bigg\{ -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \times (T-t) + h_2(T-t) \Bigg\} \quad \text{wenn } 0 < t < T - \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0}$$

$$(q^*(t,x),\ l^*(t,x)) = \left(0\ ,\ \frac{(r_1 - r_0)}{mx\sigma^2} e^{-r_0(T-t)}\right)$$

7. Sei $mb^2 < a\mu < mb^2 e^{r_0 T}$ und $r_1 - r_0 \leq Mm\sigma^2$:

$$V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp \Bigg\{ -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2} \times (T-t) + h_2(T-t) \Bigg\} \quad \text{wenn } t > T - \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0}$$

$$(q^*(t,x),\ l^*(t,x)) = \left(0\ ,\ \frac{(r_1 - r_0)}{mx\sigma^2} e^{-r_0(T-t)}\right)$$

8. Sei $mb^2 < a\mu < mb^2 e^{r_0 T}$ und $m\sigma^2 < r_1 - r_0 < Mm\sigma^2 e^{r_0 T}$:

$$V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp\Bigg\{ -mxe^{r_0(T-t)} - \frac{1}{2}\frac{(r_1-r_0)^2}{\sigma^2} \times (T-t) + h_2(T-t) \Bigg\}$$

$$\text{wenn } T - \frac{(\ln(a\mu) - \ln(mb^2))}{r_0} < t$$

$$t < T - \frac{(\ln(r_1 - r_0) - \ln(Mm\sigma^2))}{r_0}$$

$$(q^*(t,x),\ l^*(t,x)) = \left(0\ ,\ \frac{(r_1-r_0)}{mx\sigma^2} e^{-r_0(T-t)}\right)$$

Bemerkung: Wie wir bereits angemerkt haben, sind die Bedingungen in den Punkten 2., 4., 6. und 8. des Satzes 3.1 im Allgemeinen jedoch nicht erfüllt.

Nun wollen wir noch annehmen, dass das Versicherungsunternehmen lediglich in Aktien investiert, und das restliche Vermögen unverzinst ruht. Dies bedeutet, dass r_0 gleich 0 wäre. Dies vereinfacht das Ergebnis, da nun viele Exponentialausdrücke wegfallen. Auch die Funktionen h_1 und h_2 fallen beispielsweise komplett weg. Die Auswirkungen finden sich in folgendem Korollar:

Korollar 3.1: Sei $r_0 = 0$, dann sind die optimale Wertefunktion $V(t,x)$ und die optimale Strategie $(q^*(t,x), l^*(t,x))$ gegeben durch:

1. Sei $a\mu \leq mb^2$ und $r_1 \leq Mm\sigma^2$:

$$V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp\left\{ -mx - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\mu^2}{b^2} + \frac{r_1^2}{\sigma^2}\right) \times (T-t) \right\}$$

$$(q^*(t,x), l^*(t,x)) = \left(1 - \frac{a\mu}{mb^2}\ ,\ \frac{r_1}{mx\sigma^2}\right)$$

2. Sei $a\mu > mb^2 e^{r_0 T}$ und $r_1 \leq Mm\sigma^2$:

$$V(t,x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m} exp\left\{-mx - \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{\sigma^2} \times (T-t)\right\}$$

$$(q^*(t,x),\ l^*(t,x)) = \left(0\ ,\ \frac{r_1}{mx\sigma^2}\right)$$

3.2.2 Power Nutzenfunktion

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir uns mit der Exponentiellen Nutzenfunktion und einem allgemeineren Setting auseinander gesetzt. In diesem Abschnitt wollen wir nun etwas einfachere Annahmen treffen, um den erwarteten Endnutzen zu bestimmen.
Den Überlegungen des Versicherungsunternehmens wollen wir nun eine „Power“ Nutzenfunktion der follgenden Form zu Grunde legen:

$$u(x) = x^{\alpha}$$

Darüber hinaus wollen wir annehmen, dass sowohl das Versicherungsunternehmen als auch dessen Rückversicherer keinen Sicherheitszuschlag verlangen. Dies bedeutet: $\theta = 0$ und $\mu = 0$. Damit ändert sich allerdings auch die Dynamik unseres Prozesses $X(t)$ der das Vermögen des Unternehmens darstellt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} dX(t) = [r_0 X(t)]\, dt + b(1-q)\ dW^0(t) + \\ + (r_1 - r_0) l(t) X(t)\ dt + \sigma l(t) X(t)\ dW^0(t) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Des Weiteren fordern wir, analog zu Abschnitt 3.2.1, wieder die üblichen Stetigkeitsvoraussetzungen. Sei also die Wertfunktion V sowie ihre partiellen Ableitungen $V_t,\ V_x,\ V_{xx}$ stetig auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
Mit dem Veränderten Vermögensprozess (3.22) und der HJB-Gleichung (2.10) kommt man nun zu folgender Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} 0 =& \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{\mathcal{L}^{\alpha} V(t,x)\} \\ =& V_t + \sup_{0 \le q \le 1} \left\{ r_0 x V_x(t,x) + \frac{1}{2}(1-q)^2 b^2 V_{xx}(t,x) \right\} \\ &+ \sup_{0 \le l \le 1} \left\{ (r_1 - r_0) l x V_x(t,x) + \frac{1}{2} \sigma^2 l(t)^2 x^2 V_{xx}(t,x) \right\} = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

mit der dazugehörigen Randbedingung $V(T,x) = u(x)$.

Wir gehen wieder analog zur Lösung der Gleichung (3.5) vor. Es werden erst die Ableitungen nach q und l gebildet. Anschließend wird durch Nullsetzen dieser Ableitungen das Maximum ermittelt.

$$\frac{\delta}{\delta q}\left\{r_0 x V_x + \frac{1}{2}(1-q)^2 b^2 V_{xx}\right\}$$
$$= (q-1)b^2 V_{xx} = 0$$

$$\overset{V_{xx}<0}{\Rightarrow} q^0(t,x) = 1 \tag{3.24}$$

$$\frac{\delta}{\delta q}\left\{(r_1 - r_0) l x V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 l^2 x^2 V_{xx}\right\}$$
$$= (r_1 - r_0) x V_x + \sigma^2 l x^2 V_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow l^0(t,x) = \frac{(r_1 - r_0) x V_x}{\sigma^2 x^2 V_{xx}} \tag{3.25}$$

Es gilt wieder, dass beide Lösungen ein Maximum sind, da $V_{xx} < 0$.

Bemerkung: Da $q^0(t,x) = 1$ gilt, existieren die Fälle aus Lemma 3.2 und Lemma 3.4 nicht. Das heißt, wir haben nur noch zwei statt der bisherigen vier Fälle.
Der Teil der Differentialgleichung (3.23) der den Anteil des Vermögens l, das in Aktien investiert wird, darstellt, unterscheidet sich nicht vom Teil der Differentialgleichung (3.5). Daher ist $l^0(t,x)$ gleich dem Ergebnis (3.7)

Folgende zwei Lemmata sind die analogen Aussagen zu den Lemmata 3.1 und 3.3:

Lemma 3.5: Sei $\mathcal{A}_1^* = \{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} : q^0(t,x) = 1,\ 0 < l^0(t,x) < 1\}$.
Angenommen $V(t,x)$ ist Lösung von

$$V_t + r_0 x V_x - \frac{1}{2}\frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} = 0 \tag{3.26}$$

wobei $(t,x) \in \mathcal{A}_1^*$, $V(T,x) = u(x)$, und $V(t,x)$ ist eine konkave und wachsende Funktion in x.
Dann gilt, dass $V(t,x)$ die HJB-Gleichung (3.23) mit der dazugehörenden Randbedingung $V(T,x) = u(x)$ erfüllt.

Beweis: Man sieht leicht, dass das Supremum im Bereich $\mathcal{A}_1^*$ in der Gleichung (3.23) erreicht wird, wenn man für q $q^0 = 1$ und für l $l^0(t,x) = \frac{(r_1-r_0)xV_x}{\sigma^2 x^2 V_{xx}}$ wählt. Diese wurden ja genau so gewählt, dass sie den Ausdruck (3.23) maximieren. Setzt man nun q^0 und l^0 in die Gleichung (3.23) ein, so erhält man die linke Seite der Gleichung (3.26).

□

Lemma 3.6: Sei $\mathcal{A}_3^* = \{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} : 0 < q^0(t,x) = 1,\ l^0(t,x) > 1\}$. Angenommen $V(t,x)$ ist Lösung von

$$V_t + r_1 x V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx} = 0 \tag{3.27}$$

wobei $(t,x) \in \mathcal{A}_3^*$, $V(T,x) = u(x)$, und $V(t,x)$ ist eine konkave und wachsende Funktion in x.
Dann gilt, dass $V(t,x)$ die HJB-Gleichung (3.23) mit der dazugehörenden Randbedingung $V(T,x) = u(x)$ erfüllt.

Beweis: Man sieht leicht, dass das Supremum im Bereich $\mathcal{A}_1^*$ in der Gleichung (3.23) erreicht wird, wenn man für q $q^0 = 1$ und für l $l^0(t,x) = \frac{(r_1-r_0)xV_x}{\sigma^2 x^2 V_{xx}}$ wählt. Diese wurden ja genau so gewählt, dass sie den Ausdruck (3.23) maximieren. Setzt man nun q^0 und l^0 in die Gleichung (3.23) ein, so erhält man die linke Seite der Gleichung (3.26).

□

Nun wollen wir äquivalent zum Fall der Exponentiellen Nutzenfunktion die Lemmata 3.5 und 3.6 nutzen, um die Lösungen für unsere Gleichung (3.23) und der dazugehörigen Randbedingung $V(T,x) = u(x)$ zu finden.

Sei nun $(q^*(t,x), l^*(t,x))$ so das es

$$\begin{aligned} V_t + \sup_{0\le q\le 1} &\left\{ r_0 x V_x(t,x) + \frac{1}{2}(1-q)^2 b^2 V_{xx}(t,x) \right\} \\ + \sup_{0\le l\le 1} &\left\{ (r_1 - r_0) l x V_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 l(t)^2 x^2 V_{xx}(t,x) \right\} \end{aligned}$$

maximiert. Dann gibt es zwei Möglichkeiten für ein optimales Paar $(q^*(t,x), l^*(t,x))$. Diese wären:

1. Fall $(q^*(t,x) = 1, 0 < l^*(t,x) < 1)$
2. Fall $(q^*(t,x) = 1, 1 < l^*(t,x))$

1. Fall $(q^*(t,x) = 1,\ 0 < l^*(t,x) < 1)$

Die bisherigen Überlegungen haben gezeigt, dass $l^*(t,x)$ gleich dem $l^0(t,x)$ aus Gleichung (3.25) ist. Setzt man nun dieses l^0 und $q^*(t,x) = 1$ in die Gleichung (3.23) ein, so erhält man die Gleichung (3.26) aus Lemma 3.5. Diese erhaltene Differentialgleichung wollen wir nun lösen. Dazu wählen wir einen analogen Ansatz zur Gleichung (79) in Browne (1995). Das heißt, wir suchen eine Lösung der Form:

$$V(t,x) = h(t)x^{\alpha}$$

Setzt man diese Lösung nun in Gleichung (3.26) ein erhält man die Lösung:

$$h(t) = e^{\lambda(T-t)}, \qquad \lambda = \frac{\alpha(r_1 - r_0)^2}{2(\alpha-1)\sigma^2}$$

$$V(t,x) = \exp\left(\frac{\alpha(r_1 - r_0)^2}{2(\alpha-1)\sigma^2}(T-t)\right)x^{\alpha} \tag{3.28}$$

Nun können wir die Ableitungen V_x und V_{xx}, die wir für die Bestimmung von $l^0(t,x)$ brauchen, berechnen und sie anschließend in die Gleichung (3.25) einsetzen, um unser Lösungspaar $(q^*(t,x) = 1,\ 0 < l^*(t,x) \leq 1)$ zu erhalten:

$$\begin{aligned}
V_x &= \alpha \exp\left(\frac{\alpha(r_1 - r_0)^2}{2(\alpha-1)\sigma^2}(T-t)\right)x^{\alpha-1}\\
V_{xx} &= \alpha(\alpha-1)\exp\left(\frac{\alpha(r_1 - r_0)^2}{2(\alpha-1)\sigma^2}(T-t)\right)x^{\alpha-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l^0(t,x) &= \frac{(r_1 - r_0)}{x\sigma^2}\frac{\alpha \exp\left(\frac{\alpha(r_1-r_0)^2}{2(\alpha-1)\sigma^2}(T-t)\right)x^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha-1)\exp\left(\frac{\alpha(r_1-r_0)^2}{2(\alpha-1)\sigma^2}(T-t)\right)x^{\alpha-2}}\\
\Rightarrow l^0(t,x) &= \frac{(r_1 - r_0)}{(\alpha-1)\sigma^2}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir unser Lösungspaar

$$(q^*(t,x),\ l^*(t,x)) = \left(1\ ,\ \frac{(r_1 - r_0)}{(\alpha-1)\sigma^2}\right) \tag{3.29}$$

2. Fall $(q^*(t,x) = 1,\ 1 < l^*(t,x))$

äquivalent zum 1.Fall gilt, dass $l^*(t,x)$ gleich dem $l^0(t,x)$ aus Gleichung (3.25) ist. Setzt man nun dieses l^0 und $q^*(t,x) = 1$ in die Gleichung (3.23) ein, so erhält man die Gleichung (3.27) aus Lemma 3.6. Diese erhaltene Differentialgleichung lösen wir wieder mit dem gleichen Ansatz von Browne (1995). Das heißt, wir suchen eine Lösung der Form:

$$V(t,x) = h(t)x^\alpha$$

Setzt man diese Lösung nun in Gleichung (3.27) ein, erhält man die Lösung:

$$h(t) = e^{\lambda(T-t)}, \qquad \lambda = -r_1 - \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\sigma^2$$

$$V(t,x) = \exp\left(\left(r_1 - \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\sigma^2\right)(T-t)\right)x^\alpha \tag{3.30}$$

Da jedoch $1 < l^*(t,x)$ wählen wir $l^*(t,x) = 1$und erhalten somit unser optimale Strategie:

$$(q^*(t,x),\ l^*(t,x)) = (1\ ,\ 1) \tag{3.31}$$

Bemerkung: In diesem Abschnitt haben wir nun immer $q^*(t,x) = 1$ erhalten. Dies bedeutet, dass der Versicherer die gesamte Police rückversichert. Damit gibt er auch das gesamte Risko aber auch die Prämie an den Rückversicherer ab, der Versicherer agiert lediglich als Mittelsmann. Dies ist im Versicherungsgeschäft durchaus üblich, da man so die guten Kontakte mit einem Kunden halten kann, auch wenn man sein Risiko eigentlich gar nicht versichern möchte oder kann. Ein weiterer Vorteil ist, dass das Prämienvolumen des Unternehmens wächst.

Zum Abschluss wollen wir auch hier wieder einen Satz formulieren, der die erhaltenen Ergebnisse enthält.

Satz 3.2: Unter Verwendung der „Power“ Nutzenfunktion $u(x) = x^\alpha$ existiert für die Differentialgleichung (3.23)

$$\begin{aligned} V_t &+ \sup_{0\leq q\leq 1}\left\{r_0 x V_x(t,x) + \frac{1}{2}(1-q)^2 b^2 V_{xx}(t,x)\right\} \\ &+ \sup_{0\leq l\leq 1}\left\{(r_1-r_0) l x V_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 l(t)^2 x^2 V_{xx}(t,x)\right\} = 0 \end{aligned}$$

mit der Randwertbedingung $V(T,x) = u(x)$ eine Lösung $V(t,x)$.
Die Lösung $V(t,x)$ und das dazugehörige Paar $(q^*(t,x), l^*(t,x))$ sehen wie folgt aus:

1. Sei $\frac{r_1-r_0}{\sigma^2(\alpha-1)} < 1$:

$$V(t,x) = \exp\left(\frac{\alpha(r_1-r_0)^2}{2(\alpha-1)\sigma^2}(T-t)\right)x^\alpha$$

$$(q^*(t,x), l^*(t,x)) = \left(1\ ,\ \frac{(r_1-r_0)}{(\alpha-1)\sigma^2}\right)$$

2. Sei $\frac{r_1-r_0}{\sigma^2(\alpha-1)} > 1$:

$$V(t,x) = \exp\left(\left(r_1 - \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\sigma^2\right)(T-t)\right)x^\alpha$$

$$(q^*(t,x), l^*(t,x)) = (1\ ,\ 1)$$

4 Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Wir haben in diesem Kapitel abgehandelt wie man optimal investiert und rückversichert. Ausgehend von einer Brownschen Bewegung, die den Schadensprozess modelliert, haben wir durch sukzessive Erweiterung einen Prozess (3.4) hergeleitet, der das Vermögen des Versicherers widerspiegelt. Dieses können wir mit den beiden Kontrollvariablen l (=Anteil des Vermögens in Aktien) und q (=Rückversicherungsquote) beeinflussen.
Ziel war es l und q so zu bestimmen, dass der erwartete Endnutzen optimal wird. Dies erreicht man, indem man die Extrema der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (3.5) berechnet. Das Einsetzen dieser optimalen Strategien hat uns Differentialgleichungen geliefert, die wir mit dem Ansatz von Brown (1995) explizit lösen konnten.
Mit dieser Vorgehensweise konnten wir die optimalen Kontrollen für die Exponentielle und die Power Nutzenfunktion erhalten. Die Ergebnisse sind jedoch von der Zeit abhängig. Dies bedeutet, dass man zu jedem Zeitpunkt die Rückversicherungsquote und die Investmentstrategie ändern müsste, wenn man sich optimal verhalten will. Dieses Vorgehen ist schon alleine aus Kostengründen in der Realität nicht möglich. Jedoch liefern diese Berechnungen, wie wir auch noch im folgenden Kapitel sehen werden, auch im Falle einer Diskreditierung noch gute Ergebnisse. Daher kann man die berechnete optimale Strategie durchaus als Hilfe für die Entscheidung über Rückversicherung und Investment nutzen.

5 Simulation

In diesem Kapitel wollen wir nun die bisher erhaltenen Ergebnisse durch Simulation überprüfen. Für die Simulationen wird das Programm Maple verwendet werden.
Simulieren werden wir den Verlauf der in Kapitel 3 erhaltenen optimalen Strategie. Des Weiteren wollen wir dieses Ergebnis im Anschluss mit anderen Strategien vergleichen. Um diese Berechnungen durchführen zu können benötigen wir zunächst gewisse Grundbausteine, die wir uns zunächst einmal herleiten wollen.

5.1 Simulation des Vermögensprozesses

Um den Endnutzen bestimmen zu können, brauchen wir eine Simulation des Vermögensprozesses (3.4):

$$\begin{aligned} dX(t) = &[r_0 X(t) + (\theta - \mu q)a]\, dt + b(1-q)\ dW^0(t) + \\ &+ (r_1 - r_0)l(t)X(t)\ dt + \sigma l(t)X(t)\ dW^1(t) \end{aligned}$$

Diesen Prozess werden wir für unsere Simutaion diskretisieren. Dies macht durchaus Sinn, da ja auch in der Realität schon allein aus Kostengründen nicht zu jedem Zeitpunkt gehandelt werden kann. Man erhält:

$$\begin{aligned} \Delta X(t) = &[r_0 X(t) + (\theta - \mu q)a]\, \Delta t + b(1-q)\ \Delta W^0(t) + \\ &+ (r_1 - r_0)l(t)X(t)\ \Delta t + \sigma l(t)X(t)\ \Delta W^1(t) \end{aligned}$$

Es gilt, dass $\Delta W(t) \sim N(0,t)$. Daher können wir nun die Brownschen Bewegungen W^0 und W^1 durch zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen simulieren. Δt ist die Änderung der Zeit und somit entspricht dies einer Multiplikation mit $t_{n+1} - t_n$.
Wir wollen für unsere Simulation annehmen, dass wir eine Zeitspanne von 20 Jahren in Jahresschritten betrachten. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} X(t_n) = &[r_0 X(t_{n-1}) + (\theta - \mu q)a]\, (t_n - t_{n-1}) + b(1-q)Z_1^n + \\ &+ (r_1 - r_0)l(t)X(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) + \sigma l(t)X(t)Z_2^n \end{aligned} \tag{5.32}$$

wobei $n = 1 \dots 20$ und Z_1^n sowie Z_2^n verteilt nach $N(0,t)$. Das bedeuted wir brauchen in Summe 40 unabhängig gleichverteilte Zufallsvariablen. Diese werden mit dem in Maple vorhandenen Befehl $(stats[random, normald[0,1]](1))$ erzeugt werden.

Der Algorithmus der nun (4.1) berechnet, sieht wie folgt aus:

Algorithmus 4.1:

$$q = 1 - (a * \mu)/(m * b^2) * exp(-r_0 * (T - t))$$
$$l = (r_1 - r_0)/(m * Vermogen * \sigma^2) * exp(-r_0 * (T - t))$$

$$z_1 = (stats[random, normald[0,1]](1))$$
$$z_2 = (stats[random, normald[0,1]](1))$$

$$\begin{aligned} Vermogen = {} & (1 + r_0) * Vermogen + (\theta - \mu * q) * a + b(1 - q) * z1 \\ & + ((r_1 - r_0)) * l * Vermogen + \sigma * l * Vermogen * z_2 \end{aligned}$$

$$Ergebnis[1] = q$$
$$Ergebnis[2] = l$$
$$Ergebnis[3] = Vermogen$$

Der Algorithmus liefert als Ergebnis einen Vektor, der die verwendete optimale Strategie sowie das Vermögen zum Zeitpunkt $t + 1$ enthält. Zusätzlich zu den Variablen aus (4.1) brauchen wir nun noch eine weitere, den Endzeitpunkt T. q und l sind wie in Satz 3.1 Punkt 1, da wir die Parameter entsprechend wählen werden.

Nun haben wir alles was wir brauchen, um uns einen Verlauf des Vermögens von 20 Jahren zu simulieren. Doch zuerst wollen wir noch die Variablen für die folgenden Berechnungen festlegen.

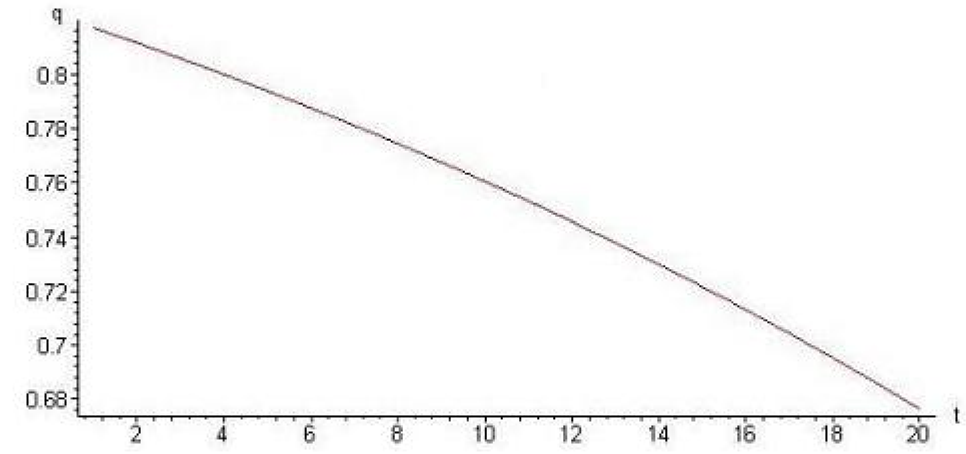
- $r_0 = 0.03$
- $r_1 = 0.08$
- $\sigma = 0.02$
- $\mu = 0.03$
- $\theta = 0.02$
- $a = 100$

- $b = 3$
- $Vermogen = 1000$
- $T = 20$

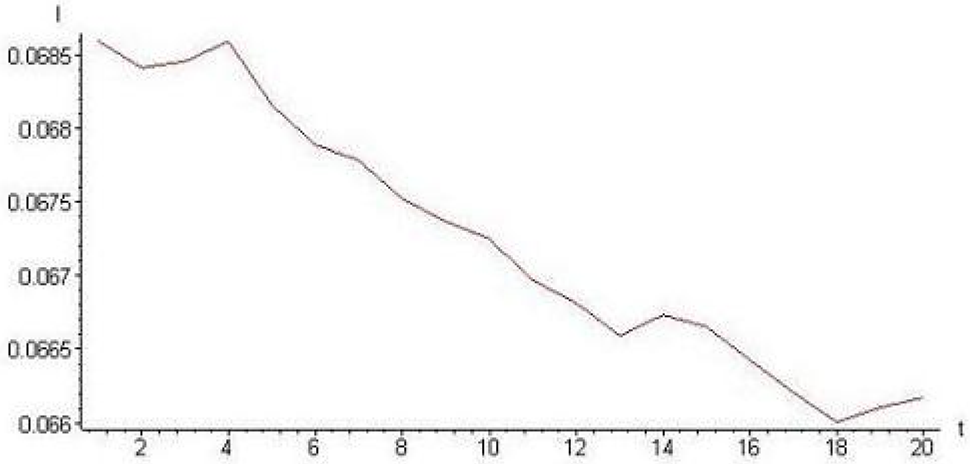
Wendet man nun Algorithmus wiederholt an, erhält man folgende 20 Ergebnisvektoren:

$$
\begin{aligned}
Ergebnis_{t=1} &= (0.817 \ , \ 0.0686 \ , \ 1030)\\
Ergebnis_{t=2} &= (0.811 \ , \ 0.0684 \ , \ 1060)\\
Ergebnis_{t=3} &= (0.806 \ , \ 0.0685 \ , \ 1090)\\
Ergebnis_{t=4} &= (0.800 \ , \ 0.0686 \ , \ 1130)\\
Ergebnis_{t=5} &= (0.794 \ , \ 0.0682 \ , \ 1170)\\
Ergebnis_{t=6} &= (0.787 \ , \ 0.0679 \ , \ 1210)\\
Ergebnis_{t=7} &= (0.781 \ , \ 0.0678 \ , \ 1250)\\
Ergebnis_{t=8} &= (0.774 \ , \ 0.0675 \ , \ 1290)\\
Ergebnis_{t=9} &= (0.767 \ , \ 0.0674 \ , \ 1340)\\
Ergebnis_{t=10} &= (0.760 \ , \ 0.0673 \ , \ 1380)\\
Ergebnis_{t=11} &= (0.753 \ , \ 0.0670 \ , \ 1430)\\
Ergebnis_{t=12} &= (0.746 \ , \ 0.0668 \ , \ 1480)\\
Ergebnis_{t=13} &= (0.738 \ , \ 0.0666 \ , \ 1520)\\
Ergebnis_{t=14} &= (0.730 \ , \ 0.0667 \ , \ 1570)\\
Ergebnis_{t=15} &= (0.722 \ , \ 0.0667 \ , \ 1620)\\
Ergebnis_{t=16} &= (0.713 \ , \ 0.0664 \ , \ 1670)\\
Ergebnis_{t=17} &= (0.704 \ , \ 0.0662 \ , \ 1730)\\
Ergebnis_{t=18} &= (0.695 \ , \ 0.0660 \ , \ 1780)\\
Ergebnis_{t=19} &= (0.686 \ , \ 0.0661 \ , \ 1830)\\
Ergebnis_{t=20} &= (0.677 \ , \ 0.0662 \ , \ 1900)
\end{aligned}
$$

Man sieht hier nun gut, dass sowohl der Anteil der Rückversicherung q als auch der Anteil des Vermögens l der in Aktien investiert wird, im Laufe der Zeit sinkt. Folgende Grafiken sollen das Ergebnis veranschaulichen.

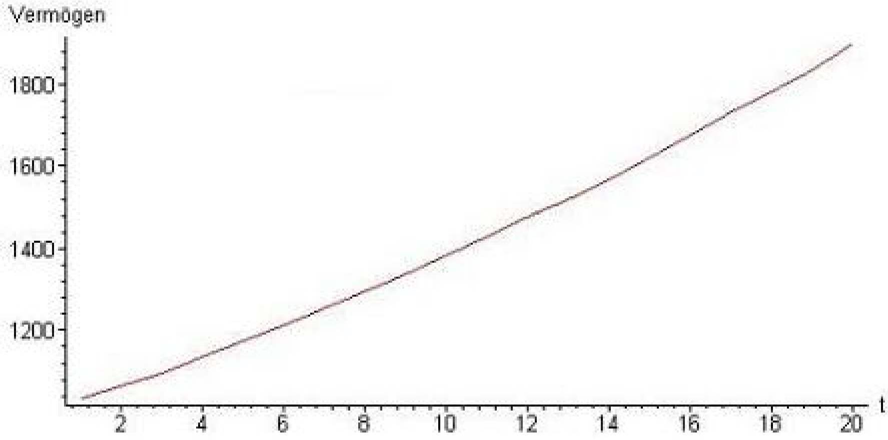


Grafik 4.1.



Grafik 4.2.

Hier sieht man nun gut, dass der Verlauf von l wesentlich volatiler ist als jener von q. Dies resultiert aus der Tatsache, dass l im Gegensatz zu q nicht nur von t sondern auch von dem stochastischen Prozess des Vermögens x abhängt.



Grafik 4.3.

5.2 Berechnung des erwarteten Endnutzens

Die bisherigen Berechnungen liefern uns jedoch nur das Vermögen zum Zeitpunkt T. Wir wollten aber den Endnutzen unter Annahme einer Exponentiellen Nutzenfunktion $u(x) = \lambda_0 - \frac{\gamma}{m}e^{-mx}$ bestimen. Um dies tun zu können, brauchen wir noch weitere Parameter:

- $\lambda = 10$
- $\gamma = 1$
- $m = 1$

Nun können wir in unsere Nutzenfunktion $u(x) = 10 - e^{-x}$ unser Endvermögen von 1900 einsetzen und erhalten einen Nutzen von $10 - (0.69e^{-825})$.

Dies war nun ein möglicher Ausgang. Wir interessieren uns allerdings nicht nur für einen möglichen Pfad, sondern für den erwarteten Endnutzen $\mathbb{E}[u(x)]$. Diesen wollen wir mittels Monte-Carlo Simulation berechnen. Dazu führen wir die bisherigen Berechnungen des Endnutzens 10000 mal durch. Folgender Algorithmus bewerkstelligt diese Aufgabe.

Algorithmus 4.2:

$$MC = 0$$

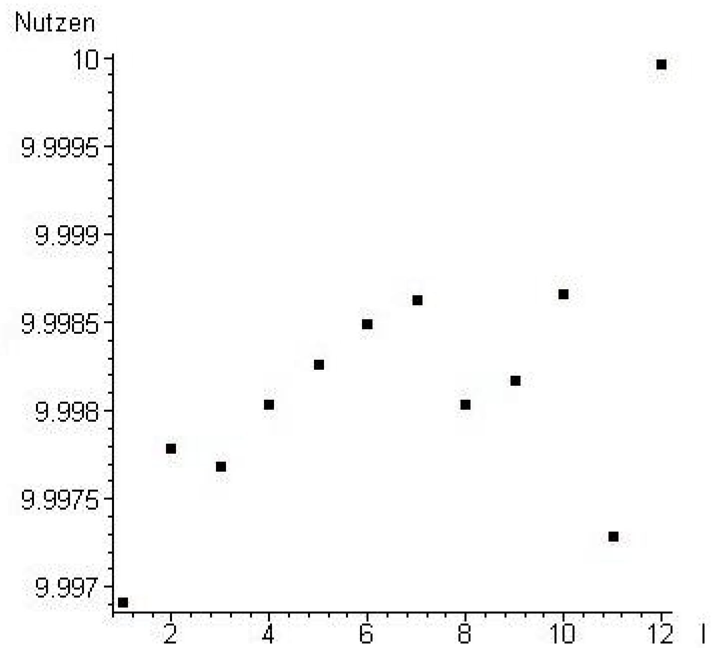
$$for\ i\ from\ 1\ to\ 10000\ do$$
$$temp = Vermogen$$

$$for\ j\ from\ 0\ to\ 4\ do$$
$$Algorithmus 4.1$$
$$temp = f(Ergebnis[3])$$

$$MC = (MC * (i-1) + temp)/i$$

Die zweite Schleife berechnet mittels Algorithmus 4.1 einen Pfad. Die erste Schleife mittelt die erhaltenen Ergebnisse und bildet so den Monte-Carlo Schätzer. Die hier verwendeten 10000 Durchläufe sind eine vergleichsweise geringe Zahl für eine Monte-Carlo Simulation, sie ist für die hier benötigten

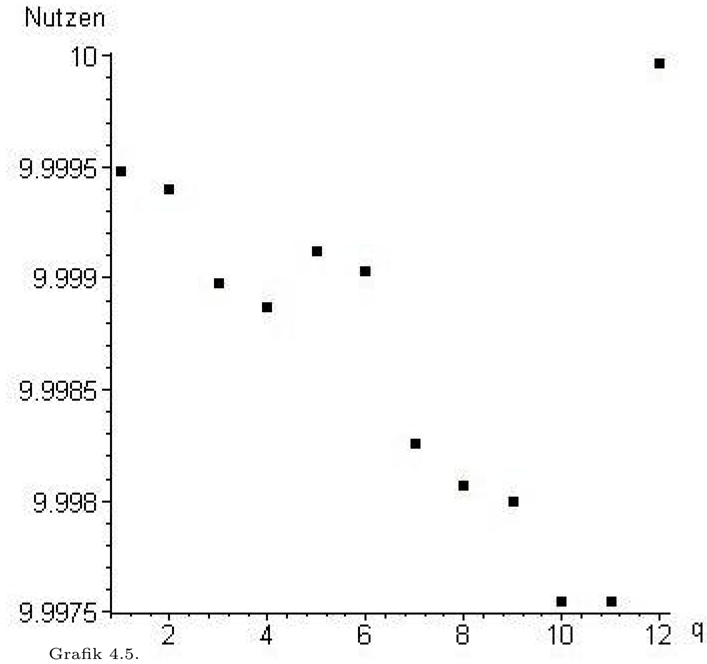
Ergebnisse aber völlig ausreichend.
Algorithmus 4.2 liefert nun einen erwarteten Endnutzen von 9.999962959.
Die beiden Algorithmen 4.1 und 4.2 versetzen einen nun auch in die Lage, die Optimalität der in Kapitel 3 erhaltenen Strategien (3.6) und (3.7) mittels Simulation zu überprüfen. Dies wollen wir nun auch im Folgenden tun.
Zunächst wollen wir sehen was passiert, wenn man den Anteil des Vermögens l, das in Aktien investiert wird verändert. Um unsere Vergleichswerte zu erhalten, führen wir unsere Berechnungen mit Algorithmus 4.2 erneut durch, wobei wir in Algorithmus 4.1 $l = (r_1 - r_0)/(m * Vermogen * \sigma^2) * exp(-r_0 * (T - t))$ durch eine beliebige andere Strategie ersetzten.
Wir interessieren uns konkret für die einfacheren Strategien $l = \frac{i}{10}$ mit $i = 0 \ldots 10$. Folgende Grafik enthält die Ergebnisse dieser Berechnung. Der x-Werte entsprechen den Strategie $l = \frac{x-1}{10}$. Der Wert für $x = 12$ entspricht dem Ergebnis bei Verwendung der optimalen Strategie.
Aufgrund der gewählten Parameter liegen die Ergebnisse nahe bei einander. Was aber auffällt ist, dass der erwartete Nutzen der optimalen Strategie doch deutlich über den anderen liegt.



Grafik 4.4.

Da wir jetzt die Auswirkungen einer Änderung der Investmentstrategie kennen, wollen wir auch noch untersuchen, wie sich eine Änderung der Rückversicherungsquote auswirkt. Als Vergleichswerte wählen wir, äquivalent zu unserer Wahl von den alternativen Strategien für l, $q = \frac{i}{10}$ mit $i = 0 \ldots 10$.

Um die gewünschten Ergebnisse zu erhalten, ersetzen wir diesmal in Algorithmus 4.1 $q = 1-(a*\mu)/(m*b^2)*exp(-r_0*(T-t))$ durch die gewünschten Strategien. Folgende Grafik enthält die Ergebnisse.



Grafik 4.5.

Damit hätten wir auch durch Simulation gezeigt, dass die in Kapitel 3 erhaltenen Ergebnisse auch tatsächlich einen optimalen Endnutzen liefern.

6 Literaturverzeichnis

Brown, S.;1995; Optimal investment polices for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin. Mathematics of Operations Reserch 20 (4); 937-958

Dum, Karl; WS 2008/09; Lecture notes: AKFVM Rückversicherung; TU-Wien

Gerber, H.U.; 1979; An Introduction to Mathematical Risk Theory. In Huebner Foundation Monograph, vol. 8.

Grandits, Peter; WS 2008/09; Lecture notes: Stochastische Kontrolltheorie für FVM; TU-Wien

Krischanitz, Christoph; SS 2010; Lecture notes: Schadensversicherungs-mathematik 2

Promislow, D.S.; Young, V.R.; 2005; Optima investment for insurer with jump-diffusion risk prozess; Insurance: MAthematics and Economics 28 (2001), 61-67

Yusong, Cao; Nianqing, Wan; 2009; Optimal proportional reinsurance and investment based on Hamilton-Jacobi-Bellman equation; Insurance: Mathematics and Economics 45 (2009), 157-162