



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

D I P L O M A R B E I T

Cramer Lundberg Prozess mit Investment

Vergleich periodischer und nichtperiodischer Modelle

ausgeführt am
Institut für Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch
Herbert Schellmann
Feldstraße 31B Top 15
2345 Brunn am Gebirge

Datum

Unterschrift

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Ao.Univ.Prof. Peter Grandits der mir die Möglichkeit gab diese Diplomarbeit zu schreiben und sie geduldig betreute.

Ich bedanke mich bei meinen Eltern und meinen Geschwistern, die mir immer eine große Unterstützung bei meinem Studium waren.

Ich bedanke mich bei meiner Freundin Katharina Tichy die es immer wieder verstand mich zu motivieren und zu unterstützen.

Ich bedanke mich stellvertretend für alle meine Studienkollegen bei Andreas Houska, der mir immer ein guter Weggefährte war.

Danke!

Herbert Schellmann

Abstract

Due to the fact, that insurance companies invest a part of their surplus, the question how does it influence the ruin probability occurs. The common ruin model from Cramer and Lundberg gives a bound for ruin probability. In this thesis the expansion of the Cramer Lundberg model with an investment possibility by [Gai. Gra. Sch. 2003] is shown. In analogy to the classic model a martingal approach is chosen to show that an akin bound can be found. Also an optimal strategie for this investment can be shown. In according to the paper from [Köt,Bäu 2007] the expansion of the periodic Cramer Lundberg model with the investment possibility is charackterized. It will be shown, that the two boundaries are similar for the two models if the parameters were chosen in the right way. At least a monte carlo approach is used to show that numerical simulations verify the theoretical results of [Gai. Gra. Sch. 2003] and [Köt,Bäu 2007]. Also the verification of the Cramer Lundberg approximation with a numerical approach will be shown.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
1.1	Motivation	6
1.2	Überblick	6
2	Stochastische Prozesse	8
2.1	Stochastische Prozesse	8
2.2	Martingale	10
2.3	Wichtige Stochastische Prozesse	11
2.4	Sonstige Definitionen	14
3	klassische Ruintheorie	15
3.1	Das Modell	15
3.2	Ruinwahrscheinlichkeit	16
4	Ruintheorie mit Investment	20
4.1	Das Modell	20
4.2	Ruinwahrscheinlichkeit	21
4.3	Asymptotische Optimalität	29
5	Periodische Ruintheorie mit Investment	37
5.1	Modellerweiterung	37
5.2	Ruinwahrscheinlichkeit	40
5.3	Die optimale Investmentstrategie	43
6	Vergleich der Modelle	47
6.1	Vergleich	47
7	Simulation	49
7.1	Simulationsmethode	49
7.2	Cramer Lundberg Approximation	50
7.3	Ergebnisse	53

8 Konklusio	56
8.1 Zusammenfassung der Ergebnisse	56
8.2 Aussagen für die Praxis	56

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

In der heutigen Wirtschaftswelt ist es üblich geworden, dass auch Unternehmen, deren Kerngeschäft nicht dem Investmentbereich zuzuschreiben ist, Teile ihres Kapitals in Aktien oder Ähnliches investieren. Für Versicherungen stellt sich die Frage, ob dadurch die Gefahr, dass Ruin eintritt, steigt. Um diese Frage zu beantworten, wollen wir die klassische Ruintheorie um die Möglichkeit des Investments erweitern.

1.2 Überblick

Im zweiten Kapitel werden wir alle für uns wichtigen Sätze und Definitionen aus dem Bereich der stochastischen Prozesse anführen. Im dritten Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die klassische Ruintheorie, im speziellen gehen wir auf den Ruinprozess von Cramer Lundberg ein und zeigen wie man die Ruinwahrscheinlichkeit von oben beschränken kann. Im vierten Kapitel setzen wir unseren neuen Ruinprozess aus dem klassischen Prozess und einer Investmentmöglichkeit mit passender Strategie zusammen und zeigen mit Hilfe einer Martingalmethode und weiteren Werkzeugen, dass der neue Ruinprozess sogar eine niedrigere obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit besitzt als der herkömmliche Prozess von Cramer und Lundberg. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit dem periodischen Ruinprozess der ebenfalls mit einer Investmentmöglichkeit erweitert wird. Den Vergleich zwischen dem periodischen und dem nichtperiodischen Ruinprozess mit Investment stellen wir im sechsten Kapitel an. Das siebente Kapitel gibt eine Möglichkeit an, Ruinprozesse mit Investmentmöglichkeit zu simulieren und zeigt weiters, dass die analytisch erzielten Ergebnisse auch für unsere Simulationen hal-

ten. Das letzte Kapitel erläutert noch einmal die gewonnenen Ergebnisse aus den Simulationen, weiters werden die Resultate und Erkenntnisse für die Praxis interpretiert. Zum Schluss folgt noch eine Auflistung der verwendeten Literatur.

Kapitel 2

Stochastische Prozesse

2.1 Stochastische Prozesse

Zum leichteren Verständnis der Materie werden wir hier nun einige Definitionen und wichtige Sätze aus der Theorie stochastischer Prozesse und anderen Gebieten anführen.

Generell definieren wir I als Indexmenge, meist ist damit \mathbb{N} , das Intervall $[0, T]$, wobei $T \in \mathbb{R}$ gilt, oder auch \mathbb{R}^+ gemeint.

Definition 2.1. (*Stochastischer Prozess*)

Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in I}$ auf dem Tripel $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$

Eine Realisation $X.(\omega)$, wobei $\omega \in \Omega$ gilt, nennen wir Trajektorie oder Pfad eines stochastischen Prozesses.

Definition 2.2. (*Càdlàg*)

Ein Prozess wird càdlàg genannt, falls fast alle seine Realisationen rechtstetig mit existierenden Limes von links sind.

Weiters spricht man von einem stetigen Prozess, wenn fast alle seine Realisationen stetig sind.

Definition 2.3. (*Filtration*)

Eine Filtration \mathbb{F} ist eine wachsende Familie von σ -Algebren

$$\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$$

das heißt:

$$\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t \text{ für } s \leq t.$$

Weiters fordern wir dass \mathbb{F} rechtsstetig sein soll, d.h. $\forall t \in I: \mathfrak{F}_s = \bigcap_{t>s} \mathfrak{F}_t$

Definition 2.4. (*adaptiert*)

Ein stochastischer Prozess X heißt *adaptiert*, falls für jedes $t \in I$ gilt, dass X_t messbar bezüglich \mathfrak{F}_t ist.

Interpretiert kann man die Filtration als Informationsstand zum Zeitpunkt t verstehen.

Definition 2.5. (*natürliche Filtration*)

\mathfrak{F}_x heißt *natürliche Filtration* von einem stochastischen Prozess X ., falls \mathfrak{F}_x die kleinste rechtsstetige Filtration ist, bezüglich der X . adaptiert ist.

Zur Vollständigkeit sei die nachstehende Definition angegeben, wir beschränken uns hier auf die diskrete Version. Der stetige Fall ist ähnlich, bedarf aber einer komplizierteren Darstellung.

Definition 2.6. *vorhersehbarer Prozess*

Ein stochastischer Prozess X_n heißt *vorhersehbar* wenn für all $n \geq 1$ gilt:

$$X_n \text{ ist } \mathfrak{F}_{n-1} \text{ messbar.}$$

Dies bedeutet, dass der Zustand zum Zeitpunkt n schon zum Zeitpunkt $n-1$ bekannt ist.

Nun wollen wir einen für uns sehr wichtigen Begriff einführen, nämlich den der Stoppzeit.

Definition 2.7. (*Stoppzeit*)

Eine Zufallsvariable τ heißt *Stoppzeit*, wenn für sie gilt:

$$\tau : \Omega \rightarrow R_+ \cup \{\infty\} \text{ und } \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$$

Interpretation: Eine Stoppzeit gibt die Zeit an, die ein Prozess gelaufen ist bis ein bestimmtes Ereignis eintritt.

Weiters gilt falls X_t adaptiert ist, dann folgt daraus, dass auch $X_{\tau \wedge t}$ adaptiert ist, wobei $\tau \wedge t$ eine kurze Schreibweise für $\min\{\tau, t\}$ ist.

2.2 Martingale

Eine in der Finanzmathematik wichtige Klasse von stochastischen Prozessen ist die der Martingale:

Definition 2.8. (*Martingale*)

Ein Prozess M_t heißt Martingale wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- M_t ist adaptiert.
- M_t ist in $L^1(\mathbb{P})$ das heißt für alle $t > 0$ gilt das $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$.
- $\mathbb{E}[M_t | \mathfrak{F}_s] = M_s$ für $s \leq t$.

Punkt drei gibt die wichtige Charaktereigenschaft von Martingalen wieder. Sie wird auch mit einem erwarteten Zuwachs von 0 erklärt.

Definition 2.9. (*Supermartingale*)

Ein Prozess M_t heißt Supermartingale wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- M_t ist adaptiert.
- M_t ist in $L^1(\mathbb{P})$ das heißt für alle $t > 0$ gilt das $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$.
- $\mathbb{E}[M_t | \mathfrak{F}_s] \leq M_s$ für $s \leq t$.

Definition 2.10. (*Submartingale*)

Ein Prozess M_t heißt Submartingale wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- M_t ist adaptiert.
- M_t ist in $L^1(\mathbb{P})$ das heißt für alle $t > 0$ gilt das $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$.
- $\mathbb{E}[M_t | \mathfrak{F}_s] \geq M_s$ für $s \leq t$.

Satz 2.11. (*Supermartingalkonvergenzsatz*)

Falls X_t ein L^1 beschränktes Supermartingale ist, das heißt $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, dann existiert der Limes von $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ fast sicher.

Theorem 2.12. (*Optional stopping theorem*)

Es seien M_t ein Martingale, η und τ zwei beschränkte Stoppzeiten mit $\eta < \tau$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathfrak{F}_\eta] = M_\eta \text{ fast sicher}$$

Da jeder deterministische Zeitpunkt als Stoppzeit interpretiert werden kann, ist eine Folgerung aus diesem Theorem $\mathbb{E}[M_\tau] = M_0$

Ein für uns sehr wichtiges Werkzeug, ist das der momentenerzeugenden Funktion:

Definition 2.13. (*Momentenerzeugende Funktion*)

Existiert der Erwartungswert von e^{tX} für eine stochastische Größe X und $-a < t < a$ mit $a > 0$, dann nennt man diesen Erwartungswert die momentenerzeugende Funktion von X :

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Der Name dieser Funktion folgt aus der Eigenschaft:

$$\frac{d^m}{dt^m} M_X(t)|_{t=0} = \mathbb{E}[X^m] \quad m \in \mathbb{N}.$$

2.3 Wichtige Stochastische Prozesse

Nun wollen wir stochastische Prozesse anführen, die wir später noch brauchen werden. Als erstes sehen wir uns den Poisson Prozess an, welcher zu den Erneuerungsprozessen zu zählen ist. Beginnen wollen wir jedoch mit der Poissonverteilung.

Definition 2.14. (*Poisson Verteilung*)

Eine Zufallsvariabel X mit Poissonverteilung $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ hat folgende Verteilung:

$$\mathbb{P}_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

mit den Momenten

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

Die Poissonverteilung wird auch Verteilung seltener Ereignisse genannt.

Ein Poissonprozess ist ein diskreter stochastischer Prozess in stetiger Zeit. Er gehört zu der Klasse der Zählprozesse. Die Höhe eines Sprunges ist 1 die Wartezeit zwischen den Sprüngen ist exponentialverteilt. Der Parameter λ wird auch Intensität genannt, da er die mittlere Anzahl an Sprüngen in einer Zeiteinheit angibt.

Definition 2.15. (*Poisson Prozess*)

$N_\lambda(t)$ mit $t \in [0, \infty)$, ist ein Poissonprozess wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- $N_\lambda(0) = 0$ f.s.
- $N_\lambda(t) - N_\lambda(s) = D_{s,t} \sim \text{Pois}(\lambda \cdot (t - s))$ für $s < t$.
- $D_{s,t}$ und $D_{v,w}$ mit $s < t < v < w$, sind stochastisch unabhängig.

Es gilt $\mathbb{E}[N_\lambda(t)] = \lambda \cdot t$

Erweitert man den Poissonprozess um die Eigenschaft, dass die Zuwächse nicht 1 sondern zufällig sind, kommt man zu einem zusammengesetzten Poissonprozess mit folgenden Eigenschaften. Zur Vereinfachung schreiben wir statt $N_\lambda(t)$ auch $N(t)$, wenn der Parameter λ eindeutig oder vorher festgesetzt wird.

Definition 2.16. (*zusammengesetzter Poissonprozess*)

$N(t)$ sei ein Poissonprozess mit Parameter λ und X_i , für $i \in [0, 1, 2, 3, \dots)$, unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F , welche auch unabhängig von $N(t)$ ist, dann nennt man

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

einen zusammengesetzten Poissonprozess, mit:

- $\mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}[N(t)] \cdot \mathbb{E}[X_i] = \lambda t \mathbb{E}[X_i]$
- $\text{Var}[Y(t)] = \lambda t \mathbb{E}[X_i^2]$
- $M_{Y(t)}(s) = \mathbb{E}[e^{sY(t)}] = e^{\lambda t (M_{X_i}(s) - 1)}$

Ein für die Theorie stochastischer Prozesse wichtiger Prozesse ist die Brown'sche Bewegung. Sie hat ihren Ursprung in der Physik und wurde erstmals als Beschreibung für die Bewegung kleinster Teile in Flüssigkeiten verwendet.

Definition 2.17. (*Brown'sche Bewegung*)

Ein Prozess W_t heißt Brown'sche Bewegung wenn er folgende Voraussetzungen erfüllt:

- $W_0 = 0$ fast sicher.
- Sei $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ dann gilt, dass $\{W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\}$ unabhängige Zufallszahlen sind.
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ $s < t$.
- Die Pfade von W_t sind stetig.

Wie man leicht sieht, ist die Brownsche Bewegung ein Martingal. Sie wird auch als Wiener Prozess bezeichnet.

Ein in der Finanzmathematik sehr wichtiger Prozess ist die Geometrische Brown'sche Bewegung. Sie kann als Approximation für die Bewegung eines Aktienkurses verwendet.

Definition 2.18. (*Geometrische Brown'sche Bewegung*)

Der Prozess

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right]$$

heißt geometrische Brown'sche Bewegung, wobei W_t einer wie oben beschriebenen Brown'sche Bewegung folgt.

μ wird als Drift und σ als Volatilität bezeichnet. Dieser Prozess löst die stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Definition 2.19. (*Stochastische Differentialgleichung*)

Eine stochastische Differentialgleichung ist eine Verallgemeinerung einer deterministischen Differentialgleichung, wobei die Verallgemeinerung durch einen stochastischen Störterm erfolgt.

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$$

mit:

- a, b sind zwei Funktionen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
- $t \in \mathbb{R}_+$
- W_t ist eine Brown'sche Bewegung

die Differentialgleichung kann man auch als Integralgleichung mit folgender Gestalt anschreiben:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s) ds + \int_0^t b(X_s, s) dW_s$$

Definition 2.20. (*Îto Prozess*)

Ein *Îto Prozess* kann in der Form $X_t = X_0 + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW_s$, wobei $a(s)$ und $b(s)$ adaptierte Prozesse sind, dargestellt werden.

Lemma 2.21. (*Lemma von Îto*)

Für einen *Îto-Prozess* X_t und eine Funktion $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, die in der ersten Komponente einmal und in der zweiten Komponente zweimal stetig differenzierbar ist, gilt, dass auch $Y_t = g(t, X_t)$ ein *Îto-Prozess* ist und es gilt:

$$dY_t = \left(\frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X} a(t) + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X^2} b^2(t) \right) dt + \left(\frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X} b(t) \right) dW_t$$

Eine allgemeine Darstellung des *Îto Lemmas* befindet sich in [Protter 2005]

2.4 Sonstige Definitionen

Für ein späteres Kapitel brauchen wir periodische Funktionen, daher wollen wir hier eine allgemeingültige Definition angeben.

Definition 2.22. (*periodische Funktion*)

Gilt für eine Funktion f , ein festes $T \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{I}$:

$$f(t+T) = f(t)$$

so nennen wir diese periodisch mit Periode T .

Kapitel 3

klassische Ruintheorie

3.1 Das Modell

Eines der Hauptanliegen der Ruintheorie ist es eine obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit zu finden. Das klassische Modell (auch Cramer Lundberg Modell genannt) bestimmt die Reserve zum Zeitpunkt t als Summe aus Startkapital, Summe aller bisher eingehender Prämien und Summe aller bisher eingetretenen Schäden, welche negativ sind.

$$R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (3.1)$$

R ist die Reserve zum Zeitpunkt t . Oft wird statt $R(t)$ auch $R(t,x)$ geschrieben, um die Abhängigkeit vom Startkapital anzugeben. c bestimmt die Prämienrate die im vereinfachten Modell konstant ist. $N(t)$ beschreibt die zufällige Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt t und X_i beschreibt die zufällige

Höhe des i -ten Schadens. $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ ist ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Parameter λ und unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen X_i .

Leicht ersichtlich ergibt sich aus $R(0)$ (oder auch $R(0,x)$) die Anfangsreserve $R(0)=x$ und natürlich gilt $c>0$, da ansonsten der Ruin garantiert ist. Zur einfacheren Schreibweise definieren wir:

$$SC(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct \quad (3.2)$$

$SC(t)$ wird auch claim surplus process oder Schadenüberschussprozess genannt.

3.2 Ruinwahrscheinlichkeit

Eine der wichtigsten Fragen der Ruintheorie ist die Frage nach der Ruinwahrscheinlichkeit, wobei als Ruin $R(t) < 0$ definiert wird. Den Ruinzeitpunkt definieren wir einfach mit $\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\}$ oder auch $\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : SC(t) > x\}$ wobei natürlich $\tau = \infty$ falls $R(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ gilt.

Definition 3.1. (*Ruinwahrscheinlichkeit*)

$$\begin{aligned} \psi(x) & \text{ Ruinwahrscheinlichkeit für } R(0) = x. \quad \psi(x) = \mathbb{P}[\tau < \infty] \\ \psi(x, t) & \text{ Ruinwahrscheinlichkeit vor } t \text{ für } R(0) = x. \quad \psi(x, t) = \mathbb{P}[\tau \leq t] \end{aligned}$$

Für $c \leq \lambda \mathbb{E}[X_1]$ gilt, dass $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$. Daher stellen wir die Anforderung $c > \lambda \mathbb{E}[X_1]$. (An dieser Stelle können wir anstatt von $\mathbb{E}[X_1]$ auch ein anderes beliebiges X_i nehmen, da alle X_i identisch verteilt sind!)

Für die nächste Proposition definieren wir $\xi(x) = SC_{\tau(x)} - x$ und nennen dies Schadensüberschuss.

Hier wollen wir wie in [Asmussen, 2000] vorgehen.

Proposition 3.2. [Asmussen, 2000, S. 24, Prop. 1.1] besagt, dass für ein $r > 0$, $\{e^{rSC_t}\}_{t \geq 0}$ ein Martingal ist. Weiters gilt $SC_t \rightarrow -\infty$ fast sicher für $\tau(u) = \infty$ und es gilt:

$$\psi(x) = \frac{e^{-rx}}{\mathbb{E}[e^{r\xi(x)} | \tau(x) < \infty]} \quad (3.3)$$

Beweis. Dass $\{e^{rSC_t}\}_{t \geq 0}$ ein Martingal ist, wollen wir zunächst annehmen, der Beweis folgt etwas später in diesem Kapitel. Für den Beweis der obigen Gleichungen benutzen wir das optional stopping theorem zur Zeit $\tau(x) \wedge T$, da hier unsere Stoppzeit mit T beschränkt ist.

$$1 = \mathbb{E}[e^{rSC_0}] \quad (3.4)$$

$$= \mathbb{E}[e^{rSC_{\tau(x) \wedge T}}] \quad (3.5)$$

$$= \mathbb{E}[e^{rSC_{\tau(x)}}; \tau(x) \leq T] + \mathbb{E}[e^{rSC_T}; \tau(x) > T] \quad (3.6)$$

Wenn wir nun T gegen ∞ laufen lassen, konvergiert der zweite Term gegen 0, da $SC_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{f.s.} -\infty$ und $e^{rSC_t} \leq e^{rx}$ für $\tau(x) > T$ gilt. Geht man nun zum Grenzwert über erhalten wir:

$$1 = \mathbb{E}[e^{rSC_{\tau(x)}}; \tau(x) < \infty] + 0 \quad (3.7)$$

$$= e^{rx} \mathbb{E}[e^{r\xi(x)}; \tau(x) < \infty] \quad (3.8)$$

$$= e^{rx} \mathbb{E}[e^{r\xi(x)} | \tau(x) < \infty] \psi(x) \quad (3.9)$$

Durch umformen erhält man das gewünschte Resultat:

$$\psi(x) = \frac{e^{-rx}}{\mathbb{E}[e^{r\xi(x)} | \tau(x) < \infty]} \quad (3.10)$$

□

Aufbauend auf den vorherigen Satz ergibt sich einer der wichtigsten Ungleichungen aus der Theorie der Ruinprozesse, nämlich die Lundberg-Ungleichung

Satz 3.3. (*Lundberg Ungleichung*)

Unter den Voraussetzungen aus obiger Proposition folgt

$$\psi(x) \leq e^{-rx} \quad (3.11)$$

Beweis. Der Beweis folgt aus $\xi(x) \geq 0$, daher ist $E[e^{r\xi(x)} | \tau(x) < \infty]$ größer als 1 und somit folgt die Ungleichung.

□

Den gesuchten Wert r erhält man durch Lösung der Gleichung

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r) \quad (3.12)$$

wobei $M(r)$ hier die Momentenerzeugende Funktion von X ist. Dieses r das die obige Gleichung löst, nennt man Lundberg Koeffizient. Um für unseren Ruinprozess die Lundberg Ungleichung anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass $e^{rSC(t)}$ ein Martingal ist. Es ist ausreichend die Martingaleigenschaft für $e^{-rR(t)}$ zu zeigen, weil daraus die Martingaleigenschaft für $e^{rSC(t)}$ folgt. (Dies ist einfach zu sehen, da $SC(t) = x - R(t)$ gilt und x eine Konstante ist.)

Beweis. für $u < t$ muss gelten: $\mathbb{E}[e^{-rR(t)}|\mathfrak{F}_u] = e^{-rR(u)}$.

Wir nehmen die linke Seite und zeigen, dass sie gleich der Rechten ist.

$$\mathbb{E}[e^{-rR(t)}|\mathfrak{F}_u] = \mathbb{E}[e^{-rR(u)}e^{-r(R(t)-R(u))}|\mathfrak{F}_u] \quad (3.13)$$

Den bekannten Teil $e^{-rR(u)}$ können wir nun vorziehen, für $R(t)$ setzen wir den Prozess $x + ct - Z(t)$ ein.

$$e^{-rR(u)}\mathbb{E}[e^{-r(c(t-u)-(Z(t)-Z(u)))}|\mathfrak{F}_u] \quad (3.14)$$

Den deterministischen Teil der Prozessdifferenz $e^{-r(c(t-u))}$ heben wir abermals heraus und verwenden die Eigenschaft des zusammengesetzten Poisson Prozesses. $S(t)-S(u)$ hat die gleiche Verteilung wie $S(t-u)$, wobei $S(t-u)$ unabhängig von unserer Filtration \mathfrak{F}_u ist. Daraus ergibt sich Folgendes.

$$e^{-rR(u)}e^{-rc(t-u)}\mathbb{E}[e^{-r(Z(t-u))}] \quad (3.15)$$

$\mathbb{E}[e^{-r(Z(t-u))}]$ ist nun die Momentenerzeugende Funktion eines zusammengesetzten Poissonprozesses und daraus folgt.

$$\mathbb{E}[e^{-r(Z(t-u))}] = e^{\lambda(t-u)(M_X(r)-1)} \quad (3.16)$$

Nun setzen wir alles zusammen und erhalten schließlich:

$$\mathbb{E}[e^{-rR(t)}|\mathfrak{F}_u] = e^{-rR(u)}e^{-rc(t-u)}e^{\lambda(t-u)(M_X(r)-1)} \quad (3.17)$$

Daraus ist ersichtlich, dass wir ein Martingal erhalten wenn $-rc(t-u) + \lambda(t-u)(M_X(r)-1) = 0$ gilt. Dies ist aber eine Anforderung an r , dass es die Gleichung $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$ löst. Somit haben wir gezeigt, dass $e^{-rR(t)}$ ein Martingal ist.

□

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir noch die Cramer Lundberg Approximation vorstellen. Doch bevor wir diese anführen können, benötigen wir eine Hilfsdefinition.

Definition 3.4. (*mittlerer Schaden pro Zeiteinheit β*)

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} X_i \xrightarrow{a.s.} \beta, t \rightarrow \infty \quad (3.18)$$

Theorem 3.5. (*Cramer-Lundberg Approximation*)

Für das klassische Cramer Lundberg Model mit Prämienrate $c=1$ gilt, dass für $x \rightarrow \infty$

$$\psi(x) \sim Ce^{-rx}$$

wobei

$$C = \frac{(1 - \beta)}{(\lambda M'_X(r) - 1)} \quad (3.19)$$

Der Beweis hierfür ist in Kapitel 3 Theorem 5.3 in [Asmussen, 2000] zu finden.

Kapitel 4

Ruintheorie mit Investment

4.1 Das Modell

Das folgende Kapitel folgern wir zu einem Großteil aus [Gai. Gra. Sch. 2003]. Ausgehend vom klassischen Ruinprozess (siehe Kapitel 3) erweitern wir diesen mit der Möglichkeit in eine Aktie oder einen Aktienindex zu investieren. Diese stochastische Anlageform $S(t)$ wird mit Hilfe der geometrischen Brown'schen Bewegung beschrieben:

$$dS(t) = S(t)(adt + bdW(t)) \quad (4.1)$$

Wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und W einer standard Brown'schen Bewegung folgt welche unabhängig vom laufenden Ruinprozess R ist. Weiters bezeichnen wir mit $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ die von R und S generierte Filtration und $\mathbb{E}_t[\cdot]$ die Kurzform für den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[\cdot | \mathfrak{F}_t]$.

Nun können wir den neuen Ruinprozess, der als Summe aus dem klassischen Ruinprozesses nach Cramer Lundberg und der Möglichkeit in eine Aktie oder einen Aktienindex zu investieren dargestellt wird, anschreiben.

$$Y(t, x, K) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \left(\frac{K}{S} \cdot S\right)(t) \quad (4.2)$$

oder anders

$$Y(t, x, K) = R(t, x) + (K \cdot W_{a,b})(t) \quad (4.3)$$

Der Prozess $K(t)$ beschreibt das Vermögen des Versicherungsunternehmens welches in Aktien investiert wird, daraus folgt, dass die restliche Reserve

$Y(t)-K(t)$ in die Anleihe (welche in unserem Modell keinen Zinns erhält) investiert wird.

$W_{a,b}(t)$ bezeichnet den Wiener Prozess $W_{a,b}(t) = at + bW(t)$ mit dem Drift a und der Volatilität b . $(K \cdot W_{a,b})$ bezeichnet das stochastische Integral von dem Prozess K bezüglich dem Prozess $W_{a,b}$.

4.2 Ruinwahrscheinlichkeit

Wie schon im Teil der klassischen Ruintheorie ist auch hier eine der Kernfragen die Ruinwahrscheinlichkeit mit unendlichem Zeithorizont. Diese ändert sich in der Definiton nur durch die Erweiterung durch die Investmentstrategie.

Definition 4.1. (*Ruinwahrscheinlichkeit*)

$$\psi(x, K) := \mathbb{P}[Y(t, x, K) < 0 \text{ für ein } t \geq 0] \quad (4.4)$$

Aus der Definiton geht hervor, dass die Ruinwahrscheinlichkeit von x , dem Startkapital, und K , der Investmentstrategie des Versicherungsunternehmens, abhängt. Weiters bezeichnen wir den Zeitpunkt des Ruins mit τ .

Der Ruinzeitpunkt τ ist für den Prozess $Y(t, x, K)$ eine Stoppzeit, das heißt, dass wir keine negative Reserve zulassen und dass es keine Rückkehrmöglichkeit aus dem Ruin gibt.

Definition 4.2. (*Ruinzeitpunkt*)

$$\tau(x, K) := \inf\{t : Y(t, x, K) < 0\} \quad (4.5)$$

K bestimmt den Anteil der Reserve, der investiert wird. Hierfür wollen wir aber nicht alle Strategien erlauben und schränken daher die Menge aller zulässigen Strategien K mit folgender Definition ein:

Definition 4.3. (*Menge akzeptabler Strategien*)

$$\mathcal{K} := \{K = (K(t))_{t \geq 0} : K \text{ ist vorhersehbar und adaptiert an } \mathbb{F} \text{ und } \mathbb{P}[\int_0^t K(s)^2 ds < \infty] = 1 \text{ für alle } t \text{ in } [0, \infty)\}$$

$K \in \mathcal{K}$ ist nötig und ausreichend für die Existenz des stochastischen Integrals $(K \cdot W_{a,b})$. Weiters definieren wir:

Definition 4.4. (*Optimale Strategie*)

$$\psi^*(x) := \inf_{K \in \mathcal{K}} \psi(x, K) \quad (4.6)$$

Wird das Infimum von einer bestimmten Strategie K^* erreicht, so nennt man diese die optimale Strategie bezüglich der Startreserve x .

Nun definieren wir uns eine um 1 verschobene momentenerzeugende Funktion von X , die ihre Nullstelle bei 0 hat und nennen diese h , mit $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

$$h(r) = \mathbb{E}[e^{rX}] - 1 \quad (4.7)$$

Wie schon im Kapitel 3 über die klassische Ruinthorie vorgestellt, ist die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ des klassischen Prozesses mit $e^{-\nu x}$ beschränkt, wobei ν die positive Lösung von der Gleichung $\lambda h(r) = cr$ ist.

Nun wollen wir versuchen eine ähnliche Aussage über unseren neuen Prozess zu finden. Da unser neuer Risikoprozess nicht nur vom Startkapital x , sondern auch von der Veranlagungsstrategie K abhängt, werden wir eine Abschätzung für die, bis jetzt noch unbekannte, optimale Strategie K^* suchen.

Wir treffen die Annahme, dass ein $r_\infty \in (0, \infty]$ existiert, sodass $h(r) < \infty$ für $r < r_\infty$ und dass $h(r) \rightarrow \infty$ für $r \uparrow r_\infty$ gilt. Weiters ist die Funktion h wachsend, konvex und stetig auf $[0, r_\infty)$

Wir werden zeigen, dass es ein \hat{r} , mit $0 < \hat{r} < r_\infty$ gibt, für das gilt:

$$\psi^*(x) \leq e^{-\hat{r}x} \quad (4.8)$$

und weiters erfüllt dieses \hat{r} die Gleichung:

$$\lambda h(r) = cr + \frac{a^2}{2b^2} \quad (4.9)$$

Damit werden wir, wie in der klassischen Ruinthorie, eine obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit unseres neuen Ruinprozesses erhalten.

Zum Beweis dieses Resultats definieren wir uns einen Prozess M . $x, r \in \mathbb{R}^+$ sind Konstanten, K eine fixe Strategie aus \mathcal{K} und t die Zeit.

$$M(t, x, K, r) := e^{-rY(t, x, K)} \quad (4.10)$$

Zuerst wollen wir zeigen, dass es für die Gleichung 4.9 eine eindeutige Lösung größer 0 gibt.

Theorem 4.5. *Für $x \geq 0$ und $a \neq 0, b \neq 0$, existiert ein eindeutiges $0 < \hat{r} < r_\infty$, das die Gleichung:*

$$\lambda h(r) = cr + \frac{a^2}{2b^2} \quad (4.11)$$

löst.

Beweis. Der Beweis für diese Aussage ist offensichtlich, wenn wir uns die Beschaffenheit von $h(r)$ ansehen. $h(r)$ ist wachsend, konvex und stetig für $r \in [0, \infty)$. Da für $r=0$ offensichtlich $0 < \frac{a^2}{2b^2}$ und für $r > r_n$, wobei $r_n \in \mathbb{R}$ groß genug ist, $\lambda h(r) > cr + \frac{a^2}{2b^2}$ gilt, folgt aus der Stetigkeit, dass es ein \hat{r} gibt für das die Gleichung gilt.

□

Nun wollen wir zeigen, dass der in Gleichung 4.10 definierte Prozess ein Martingal ist. Zuerst setzen wir die Konstanten fest. Für r nehmen wir \hat{r} aus 4.5 und für K definieren wir die Strategie

Definition 4.6.

$$\hat{K} \equiv \frac{a}{\hat{r}b^2} \quad (4.12)$$

Für diese Konstanten ist $M(t, x, \hat{K}, \hat{r})$ ein Martingal. Zunächst wollen wir ein Lemma angeben.

Lemma 4.7. *$M(t, x, \hat{K}, \hat{r})$ ist ein Martingal bezüglich \mathbb{F} , wobei \hat{r} aus Theorem 4.5 und \hat{K} aus Definition 4.6 zu nehmen ist.*

Beweis. Zuerst definieren wir uns eine Hilfsfunktion f , für die gilt:

$$f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(K, r) := \lambda h(r) - (Ka + c)r + \frac{1}{2}K^2b^2r^2$$

Wenn wir nun \hat{r} und \hat{K} einsetzen, erhalten wir:

$$f(\hat{r}, \hat{K}) = \lambda h(\hat{r}) - (\hat{K}a + c)r + \frac{1}{2}\hat{K}^2 b^2 \hat{r}^2 \quad (4.13)$$

$$= \frac{a^2}{2b^2} + c\hat{r} - \left(\frac{a}{\hat{r}b^2}a + c\right)\hat{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\hat{r}b^2}\right)^2 b^2 \hat{r}^2 = 0 \quad (4.14)$$

Dieses Zwischenergebnis benötigen wir nun im nächsten Schritt

$$\mathbb{E}[M(t, 0, \hat{K}, \hat{r})] = \mathbb{E}[e^{-\hat{r}Y(t, x, \hat{K})}] = \mathbb{E}[\exp\{-\hat{r}(ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \hat{K}W_{a,b}(t))\}] \quad (4.15)$$

Hier verwenden wir nun, dass $W_{a,b}(t) = at + bW(t)$ ist und $e^{-\hat{r}(c+\hat{K}a)t}$ deterministisch ist. Daraus ergibt sich weiters:

$$e^{-\hat{r}(c+\hat{K}a)t} \mathbb{E}[\exp\{\hat{r} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\}] \mathbb{E}[e^{-\hat{r}\hat{K}bW(t)}] \quad (4.16)$$

$\mathbb{E}[\exp\{\hat{r} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\}]$ ist die Momentenerzeugende Funktion eines zusammengesetzten Poissonprozesses. $\mathbb{E}[e^{-\hat{r}\hat{K}bW(t)}]$ ergibt $e^{(\frac{\hat{r}^2 \hat{K}^2 b^2}{2})t}$. Dies bringt uns zum nächsten Schritt:

$$e^{-\hat{r}(c+\hat{K}a)t} e^{h(\hat{r})\lambda t} e^{(\frac{\hat{r}^2 \hat{K}^2 b^2}{2})t} \quad (4.17)$$

Nun nehmen wir das Ergebnis von (4.13) und sehen, dass der Ausdruck im Exponent 0 ergibt und erhalten daher:

$$e^{f(\hat{K}, \hat{r})t} = e^{0t} = 1 \quad (4.18)$$

Nachdem wir alle Vorbereitungen abgeschlossen haben, kommen wir nun zum eigentlichen Beweis der Martingaleigenschaft. Wir wissen, dass $Y(t, x, \hat{K})$ stationäre unabhängige Zuwächse hat und können für $0 \leq t \leq T$ anschreiben:

$$\mathbb{E}_t[M(T, x, \hat{K}, \hat{r})] = \mathbb{E}_t[e^{-\hat{r}Y(T, x, \hat{K})}] \quad (4.19)$$

Nun erweitern wir um den Term $e^{-\hat{r}Y(t, x, \hat{K})}$:

$$e^{-\hat{r}Y(t, x, \hat{K})} \mathbb{E}_t[e^{-\hat{r}(Y(T, x, \hat{K}) - Y(t, x, \hat{K}))}] \quad (4.20)$$

Aufgrund der unabhängigen Zuwächse können wir die Zeit verschieben und erhalten:

$$e^{-\hat{r}Y(t, x, \hat{K})} \mathbb{E}_t[e^{-\hat{r}(Y(T-t, x, \hat{K}) - Y(0, x, \hat{K}))}] \quad (4.21)$$

Da $Y(0, x, \hat{K})$ gleich x , das Startkapital, ist, können wir weiter vereinfachen:

$$e^{-\hat{r}Y(t, x, \hat{K})} \mathbb{E}[e^{-\hat{r}Y(T-t, 0, \hat{K})}] \quad (4.22)$$

Für $\mathbb{E}[e^{-\hat{r}Y(T-t, 0, \hat{K})}]$ wissen wir schon, dass es 1 ist und bekommen als Resultat:

$$e^{-\hat{r}Y(t, x, \hat{K})} = M(t, x, \hat{K}, \hat{r}) \quad (4.23)$$

Damit sind wir fertig und haben die Martingaleigenschaft für unseren Prozess $M(t, x, \hat{K}, \hat{r})$ gezeigt.

□

Neben der Martingaleigenschaft des Prozesses $M(t, x, \hat{K}, \hat{r})$ haben wir gezeigt, dass für jedes $r \in [0, \hat{r}]$ zwei konstante Prozesse $K_{1,2}$ aus \mathcal{K} existieren für die $M(t, x, K_{1,2}, r)$ ein Martingal ist. Die Prozesse $K_{1,2}$ ergeben sich aus der Lösung der eingeführten Hilfsfunktion $f(r, K)$. Da es diese Funktion zu annullieren gilt, genügt es die Funktion $f(r, K)$ für ein fixes r nach K aufzulösen und man erhält 2 konstante Prozesse der Form:

$$K_{1,2}(r) = \frac{a}{b^2 r} \pm \sqrt{\Delta(r)} \quad (4.24)$$

wobei

$$\Delta(r) := \frac{2}{b^2 r^2} \left(\frac{a^2}{2b^2} + cr - \lambda h(r) \right) \geq 0 \text{ für } r \leq \hat{r} \quad (4.25)$$

gilt. Offensichtlich gilt für $r = \hat{r}$ dass $\Delta \hat{r} = 0$ und somit $K_1(\hat{r}) = K_2(\hat{r}) = \hat{K}$ ist.

Von nun an werden wir unsere Prozesse zum Zeitpunkt des Ruins stoppen, um dies zu zeigen definieren wir:

$$\tilde{M}(t, x, K, r) := M(t \wedge \tau(x, K), x, K, r)$$

und

$$\tilde{Y}(t, x, K) := Y(t \wedge \tau(x, K), x, K)$$

Wie schon weiter oben definiert ist auch hier $t \wedge \tau(x, K) := \min(t, \tau(x, K))$.

Nun wollen wir ein Zentrales Theorem der Ruintheorie für unseren erweiterten Ruinprozess anführen und beweisen.

Theorem 4.8. *Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und der konstanten Investmentstrategie $\hat{K}(t) \equiv \frac{a}{\hat{r}b^2}$ kann man die Ruinwahrscheinlichkeit unseres Prozesses $Y(t, x, \hat{K})$ beschränken mit:*

$$\psi(x, \hat{K}) \leq e^{-\hat{r}x} \quad (4.26)$$

wobei $x \in \mathbb{R}_+$ beliebig ist.

Beweis. Für den Beweis verwenden wir, dass $M(t, x, \hat{K}, \hat{r})$ ein Martingal bezüglich der Filtration \mathbb{F} ist. Aus dem Optional Stopping Theorem geht hervor, dass auch der gestoppte Prozess $\tilde{M}(t, x, \hat{K}, \hat{r})$ ein Martingal bezüglich der Filtration \mathbb{F} ist. Für ein $t \geq 0$ gilt:

$$e^{-\hat{r}x} = \tilde{M}(0, x, \hat{K}, \hat{r}) \quad (4.27)$$

Mit der Martingaleigenschaft folgt weiter,

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(t, x, \hat{K}, \hat{r})] = e^{-\hat{r}x} \quad (4.28)$$

Jetzt können wir unseren Prozess in 2 Teile aufteilen und zwar für $t \leq \tau(x, \hat{K})$ und $t > \tau(x, \hat{K})$

$$E[\tilde{M}(\tau(x, \hat{K}), x, \hat{K}, \hat{r})\chi_{\{\tau(x, \hat{K}) < t\}}] + E[\tilde{M}(t, x, \hat{K}, \hat{r})\chi_{\{t \leq \tau(x, \hat{K})\}}] \quad (4.29)$$

Wir wissen, dass der Prozess \tilde{M} und χ_A die Indikatorfunktion von A nicht negative Funktionen sind daher können wir $e^{-\hat{r}x}$ nach unten abschätzen, indem wir den 2 Teil, also $+E[\tilde{M}(t, x, \hat{K}, \hat{r})\chi_{\{t \leq \tau(x, \hat{K})\}}]$ weglassen. Somit erhalten wir:

$$e^{-\hat{r}x} \geq E[\tilde{M}(\tau(x, \hat{K}), x, \hat{K}, \hat{r})\chi_{\{\tau(x, \hat{K}) < t\}}] \quad (4.30)$$

Wir betrachten nun die untere Schranke und lassen t gegen ∞ laufen, dann erhalten wir aufgrund der Monotonie der Konvergenz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{M}(\tau(x, \hat{K}), x, \hat{K}, \hat{r})\chi_{\{\tau(x, \hat{K}) < t\}}] = E[\tilde{M}(\tau(x, \hat{K}), x, \hat{K}, \hat{r})\chi_{\{\tau(x, \hat{K}) < \infty\}}] \quad (4.31)$$

Da der Erwartungswert der Indikatorfunktion gleich der Eintrittswahrscheinlichkeit der Indikatormenge ist, können wir diese aus dem Erwartungswert herausziehen und bedingen auf ihren Eintritt.

$$e^{-\hat{r}x} \geq E[\tilde{M}(\tau(x, \hat{K}), x, \hat{K}, \hat{r}) | \tau(x, \hat{K}) < \infty] \mathbb{P}[\tau(x, \hat{K}) < \infty] \quad (4.32)$$

Da $\mathbb{P}[\tau(x, \hat{K}) < \infty]$ genau die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x, \hat{K})$ ist, kommen wir durch umformen auf die Form:

$$\psi(x, \hat{K}) = \mathbb{P}[\tau(x, \hat{K}) < \infty] \leq \frac{e^{-\hat{r}x}}{E[\tilde{M}(\tau(x, \hat{K}), x, \hat{K}, \hat{r}) | \tau(x, \hat{K}) < \infty]} \quad (4.33)$$

Nun sind wir fast fertig, es bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{M}(\tau(x, \hat{K}), x, \hat{K}, \hat{r})$ auf $\{\tau(x, \hat{K})\}$ immer größer als 1 ist. Wenn man sich die Bauart von \tilde{M} ansieht erkennt man schnell, dass auf $\{\tau(x, \hat{K}) < \infty\}$ \tilde{Y} immer negativ ist, somit ist $-\hat{r}\tilde{Y}$ immer positiv und $e^{-\hat{r}\tilde{Y}}$ immer größer als 1.

Damit sind wir fertig und haben die Ungleichung gezeigt.

□

Somit haben wir gezeigt, dass die Ruinwahrscheinlichkeit des um eine Investmentmöglichkeit erweiterte Ruinprozesses mit Hilfe einer abgewandelten Form der Lundbergungleichung beschränkt werden kann.

Um Verwechslungen zu vermeiden nennen wir den Lundbergkoeffizienten des klassischen Ruinprozess ν .

Im klassischen Modell ist der Lundbergkoeffizient die Lösung der Gleichung:

$$h(r) = \frac{c}{\lambda}r$$

In unserem Modell mit Investment ist der Lundbergkoeffizient die Lösung der Gleichung:

$$h(r) = \frac{c}{\lambda}r + \frac{a^2}{2\lambda b^2} \quad (4.34)$$

Der Unterschied liegt offensichtlich am nicht negativen Term $\frac{a^2}{2\lambda b^2}$ der rechten Seite. Aufgrund der Eigenschaft von $h(r)$, strikt positiv und monoton wachsend in r , gilt, dass der Lundbergkoeffizient des um eine Investmentmöglichkeit erweiterten Prozesses \hat{r} sicher größer gleich des klassischen Lundbergkoeffizienten ν ist.

Damit haben wir gezeigt, dass sich die asymptotische Ruinwahrscheinlichkeit eines Versicherungsunternehmens stärker beschränken lässt, wenn man ihr gestattet zu investieren.

Zuletzt noch eine Anmerkung bezüglich der Voraussetzung $c > \lambda\mathbb{E}[X_1]$ von dem klassischen Ruinprozess. Im klassischen Modell benötigt man diese Voraussetzung um eine positive Lösung der Lundberggleichung zu erhalten. In unserem neuen Modell ist dies nicht mehr der Fall und man bekommt, solange $a \neq 0$ gilt, immer eine positive Lösung \hat{r} .

4.3 Asymptotische Optimalität

Diesen Teil der Arbeit, widmen wir der asymptotischen Optimalität von \hat{r} bezüglich aller $K \in \mathcal{K}$.

Definition 4.9. *In diesem Abschnitt benötigen wir den linksseitigen Grenzwert. Dafür definieren wir, für $s < t$, die Kurzschreibweise:*

$$\lim_{s \rightarrow t} s = t-$$

Zunächst brauchen wir eine hilfreiche Definition bezüglich der Verteilungsenden.

Definition 4.10. *(gleichmäßiges exponentielles Moment) Gegeben ist $0 < r < \infty$. Wir sagen, dass X ein gleichmäßiges exponentielles Moment am Verteilungsende besitzt, wenn gilt:*

$$\sup_{y \geq 0} \mathbb{E}[e^{-r(y-X)} | X > y] < \infty \quad (4.35)$$

Von nun an setzen wir bei unseren Schäden X_i ein gleichmäßiges exponentielles Moment in den Enden für \hat{r} voraus, um uns einige Schritte in den folgenden Beweisen zu erleichtern. Es ist auch möglich dies ohne dieser Einschränkung zu machen, nachzulesen im Appendix B von [Gai. Gra. Sch. 2003].

Unter der Definition 4.10 können wir nun folgendes Theorem beweisen.

Theorem 4.11. *Für X_i mit gleichmäßigen exponentiellen Moment in den Enden für \hat{r} und $K \in \mathcal{K}$, ist der Prozess $\tilde{M}(t, x, K, \hat{r})$ ein gleichmäßig integrierbares Submartingal.*

Beweis. Für den Beginn nehmen wir uns $\hat{I}tos$ Lemma her und verwenden es für unseren Prozess $M(t, x, K, r)$ wobei $K \in \mathcal{K}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ gilt.

$$\begin{aligned} \frac{dM(t, x, K, r)}{M(t-, x, K, r)} = \\ (- (c + K(t)a)r + \frac{1}{2}r^2b^2K(t)^2)dt - rbK(t)dW(t) + (e^{rX_{N(t)}} - 1)dN(t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Dies können wir umschreiben indem wir innerhalb der Klammer mit $\lambda h(r)$ erweitern und dies mit $\lambda \mathbb{E}[e^{rX_{N(t)}} - 1]dt$ ausgleichen dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dM(t, x, K, r)}{M(t-, x, K, r)} &= -(c + K(t)a)r + \frac{1}{2}r^2b^2K(t)^2 + \lambda \\ &h(r)dt - rbK(t)dW(t) + (e^{rX_{N(t)}} - 1)dN(t) - \lambda \mathbb{E}[e^{rX_{N(t)}} - 1]dt \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nun haben wir in der Klammer unsere bekannte Funktion $f(K(t), r)$ stehen und bekommen daher:

$$\frac{dM(t, x, K, r)}{M(t-, x, K, r)} = f(K(t), r)dt - rbK(t)dW(t) + (e^{rX_{N(t)}} - 1)dN(t) - \lambda \mathbb{E}[e^{rX_{N(t)}} - 1]dt \quad (4.38)$$

Aufgrund der dadurch erhaltenen Gleichung können wir nach Definition 2.19 von der Differentialgleichungsdarstellung in die Integralgleichung übergehen. Wir benützen dafür jedoch nicht $M(t, x, K, r)$ sondern den gestoppten Prozess $\tilde{M}(t, x, K, \hat{r})$, dies stört nicht, da wir unsere Integrale nicht mit t sondern mit $t \wedge \tau$ beschränken. Zuvor bringen wir natürlich den Term $M(t-, x, K, \hat{r})$ wieder auf die rechte Seite und das aus der Definition 2.19 bekannte X_0 wird zu $\tilde{M}(0, x, K, \hat{r})$ und kommt auf die linke Seite. Damit erhalten wir nun folgende Darstellung.

$$\tilde{M}(t, x, K, \hat{r}) - \tilde{M}(0, x, K, \hat{r}) = \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})f(K(s), \hat{r})ds \quad (4.39)$$

$$-rb \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})K(s)dW(s) \quad (4.40)$$

$$+ \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})(e^{\hat{r}X_{N(s)}} - 1)dN(s) \quad (4.41)$$

$$- \mathbb{E}[e^{\hat{r}X} - 1] \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})\lambda ds \quad (4.42)$$

Da der Prozess $K \in \mathcal{K}$ integrierbar bezüglich der Brown'schen Bewegung ist und $0 \leq M(s-, x, \hat{K}, \hat{r}) \leq 1$ für $0 \leq s \leq \tau$ gilt, ist das stochastische Integral $\int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})K(s)dW(s)$ ein lokales Martingal.

Für $\int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})(e^{\hat{r}X_{N(s)}} - 1)dN(s)$ und $-\mathbb{E}[e^{\hat{r}X} - 1] \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})\lambda ds$ kann man zeigen, dass die Differenz der beiden Prozesse ein Martingal ist, nachzulesen in [Gai. Gra. Sch. 2003].

Bleibt nur noch $\int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})f(K(s), \hat{r})ds$ übrig. Um dies abzuschätzen verwenden wir die Definitionen aus 4.9 nämlich $\lambda h(r) = \frac{a^2}{2b^2} + c\hat{r}$ und $\hat{K} \equiv \frac{a}{\hat{r}b^2}$. Setzen wir diese Definitionen in $f(K, \hat{r})$ ein, erhalten wir:

$$f(K, \hat{r}) = -c\hat{r} + Ka\hat{r} + \frac{1}{2}b^2K^2 + \frac{a^2}{2b^2} + c\hat{r} \quad (4.43)$$

Die Terme $c\hat{r}$ fallen weg, für $\frac{a^2}{2b^2}$ können wir auch $\frac{1}{2}\hat{r}^2b^2\hat{K}^2$ und statt $Ka\hat{r}$ können wir $\hat{r}^2b^2K\hat{K}$ schreiben. Dadurch erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\hat{r}^2b^2(K^2 - 2K\hat{K} + \hat{K}^2) \quad (4.44)$$

Dies können wir zusammenfassen als:

$$f(K, \hat{r}) = \frac{1}{2}\hat{r}^2b^2(K - \hat{K})^2 \geq 0 \quad (4.45)$$

Daraus folgt für alle $0 \leq t \leq T$, dass das Integral

$$\int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})f(K(s), \hat{r})ds \quad (4.46)$$

nicht negativ ist!

Betrachten wir nun wieder unseren gestoppten Prozess $\tilde{M}(t, x, K, \hat{r})$:

$$\tilde{M}(t, x, K, \hat{r}) = \tilde{M}(0, x, K, \hat{r}) + \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})f(K(s), \hat{r})ds - \quad (4.47)$$

$$-rb \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})K(s)dW(s) \quad (4.48)$$

$$+ \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})(e^{\hat{r}X_{N(s)}} - 1)dN(s) \quad (4.49)$$

$$- \mathbb{E}[e^{\hat{r}X} - 1] \int_0^{t \wedge \tau} M(s-, x, K, \hat{r})\lambda ds \quad (4.50)$$

Setzen wir nun unsere Abschätzungen ein, wobei K_0 für Konstante steht, erhalten wir:

$$\tilde{M}(t, x, K, \hat{r}) = (K_0) + (\text{lokales Submartingal}) + (\text{lokales Martingal}) \quad (4.51)$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\tilde{M}(t, x, K, \hat{r})$ ein lokales Submartingal ist.

Um nun weiters zeigen zu können, dass $\tilde{M}(t, x, K, \hat{r})$ ein echtes Submartingal und gleichmäßig integrierbar ist, benötigen wir wieder die Definition 4.10 als Voraussetzung.

\tilde{M}^* ist das Supremum über alle Zeiptunkte des Prozesses $|\tilde{M}(t)|$.

$$\tilde{M}^* = \sup_{t \geq 0} |\tilde{M}(t)| \quad (4.52)$$

Daraus können wir folgern:

$$\mathbb{E}[\tilde{M}^*] \leq \mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty] \quad (4.53)$$

Dies können wir damit abschätzen indem wir darauf bedingen dass $Y(\tau-) > 0$ ist. Dies bedeutet, dass der Ruin nicht durch die Brown'sche Bewegung, sondern durch einen Sprung, in unserem Fall einen Schaden, einsetzt.

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty] \leq \mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty, Y(\tau-) > 0] \quad (4.54)$$

Die erste Abschätzung folgt aus der Beschaffenheit von $\tilde{M}(t, x, K, r)$. $\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r})$ ist genau 1 wenn der Ruin durch die Brown'sche Bewegung eintritt, also auf $\{\tau < \infty, Y(\tau-) = 0\}$, dies erfolgt aus der Stetigkeit der Brown'schen Bewegung. Folglich gilt $\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) \geq 1$ auf $\{\tau < \infty, Y(\tau-) > 0\}$, falls der Ruin durch einen Sprung entsteht.

Nun führen wir die gemischte Wahrscheinlichkeitsverteilung von τ und $Y(\tau-)$ bedingt auf das Ereignis, dass der Ruin eintritt und dass er durch einen Sprung eintritt, ein. Zur einfacheren Schreibweise definieren wir $\tau = t$ und $Y(\tau-) = y$. Ein Schaden hat die Verteilungsfunktion $\frac{dF(z)}{\int_y^\infty dF(u)}$ (für $z > y$).

Daraus können wir nun folgern:

$$\mathbb{E}[\tilde{M}^*] \leq \mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty, Y(\tau-) > 0] \quad (4.55)$$

Dies ist schon aus obigem Teil bekannt. Dafür setzen wir nun die Integral-schreibweise ein.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty H(dt, dy) \int_y^\infty e^{-\hat{r}(y-z)} \frac{dF(z)}{\int_y^\infty dF(u)} \quad (4.56)$$

Dies können wir damit abschätzen, indem wir das Supremum aller y heranziehen und erhalten:

$$\leq \left(\sup_{y \geq 0} \int_y^\infty e^{-\hat{r}(y-z)} \frac{dF(z)}{\int_y^\infty dF(u)} \right) \int_0^\infty \int_0^\infty H(dt, dy) \quad (4.57)$$

Das Doppelintegral über die gemischte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist 1. Weiters erhalten wir den schon aus Definition 4.10 bekannten Ausdruck und wir erhalten als Resultat:

$$\sup_{y \geq 0} \int_y^\infty e^{-\hat{r}(y-z)} \frac{dF(z)}{\int_y^\infty dF(u)} < \infty \quad (4.58)$$

Wir können nun Aufgrund des Satz von der majorisierten Konvergenz darauf schließen, dass \tilde{M} ein gleichmäßig integrierbares Submartingal ist.

□

Das folgende Lemma gibt uns eine Aussage über die möglichen Ausgänge unseres Ruinprozesses. Zum einen gibt es die Möglichkeit, dass Ruin eintritt, zum anderen, und das ist hier entscheidend, wollen wir zeigen, wenn kein Ruin eintritt, der Ruinprozess gegen unendlich strebt. Für ein Versicherungsunternehmen bedeutet das, dass man entweder ruiniert oder unendlich reich sein wird.

Lemma 4.12. *Hat X ein gleichmäßiges exponentielles Moment in den Enden für \hat{r} , dann gilt für $K \in \mathcal{K}$ und $x \in \mathbb{R}_+$, dass der gestoppte Reserveprozess $\tilde{Y}(t, x, K)_{t \geq 0}$ auf $\{\tau = \infty\}$ fast sicher gegen unendlich konvergiert für $t \rightarrow \infty$. Anders ausgedrückt entweder Ruin tritt ein oder der Versicherte wird unendlich reich.*

Beweis. Aus dem Theorem 4.11 wissen wir, dass der Prozess $\tilde{M}(t, x, K, \hat{r})$ ein gleichmäßig integrierbares Submartingal ist. Wenden wir Doob's Supermartingal Konvergenztheorem auf $-\tilde{M}$ an (siehe dafür [Ro. Wil. 1994]), erhalten wir, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}(t, x, K, \hat{r})$ fast sicher existiert. Dadurch erhalten wir auch eine Konvergenzaussage über den gestoppten Reserveprozess $\tilde{Y}(t, x, K)$, nämlich, dass auch er für $t \rightarrow \infty$ konvergiert.

Aus den oberen Aussagen muss es ein $d > 0$ geben für das $\mathbb{P}[X > d] > 0$ gilt. Wir definieren jene Ereignisse $E_n := \{X_n > d\}$ daher folgt $\mathbb{P}[E_n^c] < 1$ und die Ereignisse $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ sind unabhängig voneinander. Nun können wir weiter folgern:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq k} E_n^c\right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq k} E_n^c\right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n \geq k} \mathbb{P}[E_n^c] = 0 \quad (4.59)$$

Weiters können wir die Umkehrung ansehen und erhalten $\mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} E_n\right] = 1$.

Anders ausgedrückt, Sprünge der Höhe d bzw. noch höher kommen unendlich oft vor.

Weiters wissen wir, dass das stochastische Integral $K \cdot W_{a,b}$ stetig ist. Daher können wir weiters folgern, dass das stochastische Integral die unendlich vielen Sprünge größer d nicht kompensieren kann! Daraus können wir weiter folgern, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Reserveprozess, zum Zeitpunkt des Ruins, gegen einen Wert ungleich 0 konvergiert, gleich 0 ist. Damit sind wir fertig und haben den Beweis erbracht. □

Mit dem Lemma 4.12 und dem Theorem 4.11 können wir nun folgendes Theorem zeigen.

Theorem 4.13. *Besitzt X ein gleichmäßiges exponentielles Moment in der Endverteilung für \hat{r} , dann gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit, für jede zugelassene Strategie $K \in \mathcal{K}$, folgende Abschätzung:*

$$\psi(x, K) \geq Ce^{-\hat{r}x}$$

wobei

$$C = \inf_{y \geq 0} \frac{\int_y^\infty dF(u)}{\int_y^\infty e^{-\hat{r}(y-z)} dF(z)} = \frac{1}{\sup_{y \geq 0} \mathbb{E}[e^{-\hat{r}(y-X)} | X > y]} > 0 \quad (4.60)$$

gilt.

Beweis. Wir wissen, dass $\tilde{M}(t, x, K, \hat{r})$ ein gleichmäßig integrierbares Submartingal ist. Daher können wir nach Doob's optional sampling theorem folgendes anschreiben (mit τ als Stoppzeit):

$$\tilde{M}(0, x, K, \hat{r}) = e^{-\hat{r}x} \leq \mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r})] \quad (4.61)$$

Nun können wir wie in Theorem 4.8 vorgehen, jedoch mit dem Zusatz, dass wir auch auf Lemma 4.12 zurückgreifen.

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r})] = \mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty] \mathbb{P}[\tau < \infty] \quad (4.62)$$

$$+ \mathbb{E}[\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}(t, x, K, \hat{r}) | \tau = \infty] \mathbb{P}[\tau = \infty] \quad (4.63)$$

Jetzt können wir den zweiten Term, $\mathbb{E}[\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}(t, x, K, \hat{r}) | \tau = \infty] \mathbb{P}[\tau = \infty]$ weglassen, da wir in Lemma 4.12 schon gezeigt haben, dass der Limes auf dieser Menge gleich 0 ist!

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r})] = \mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty] \mathbb{P}[\tau < \infty] \quad (4.64)$$

Dies setzen wir nun in die Anfangsungleichung ein und erhalten:

$$e^{-\hat{r}x} \leq \mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty] \mathbb{P}[\tau < \infty] \quad (4.65)$$

Für $\mathbb{P}[\tau < \infty]$ schreiben wir $\psi(x, K)$ und bringen den Term $\mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty]$ auf die andere Seite.

$$\psi(x, K) \geq e^{-\hat{r}x} \frac{1}{\mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty]} \quad (4.66)$$

Am Schluss verwenden wir noch eine Abschätzung aus Theorem 4.11, nämlich

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(\tau, x, K, \hat{r}) | \tau < \infty] \leq \inf_{y \geq 0} \frac{\int_y^\infty dF(u)}{\int_y^\infty e^{-\hat{r}(y-z)} dF(z)} \text{ und erhalten schließlich:}$$

$$\psi(x, K) \geq C e^{-\hat{r}x} \quad (4.67)$$

□

Damit haben wir gezeigt, dass \hat{r} für alle $K \in \mathcal{K}$ asymptotisch optimal ist. Weiters ist Gleichung 4.67 für $K \equiv 0$ die bekannte untere Schranke der Ruinwahrscheinlichkeit des klassischen Ruinprozesses, nachzulesen in [Asmussen, 2000]

Kapitel 5

Periodische Ruintheorie mit Investment

5.1 Modellerweiterung

Das typische Sachversicherungsjahr verläuft natürlich nicht immer gleich, man bedenke Witterungsverhältnisse, die gewisse Branchen stark beeinflussen. Daher ergibt sich der Ansatz, dass man diese unterjährigen Unterschiede periodisch annimmt.

Ausgehend vom vorherigen Kapitel erweitern wir unser Modell mit der Eigenschaft, dass wir nun sämtliche Daten periodisch zulassen. Basierend auf dem Paper von [Köt,Bäu 2007] werden wir ähnliche Ergebnisse wie in Kapitel 4 zeigen, weiters werden wir der Einfachheit wegen unsere Notation an jenes Paper anpassen.

Die Prämienrate zum Zeitpunkt t definieren wir als strikt positive Funktion mit Periode T $c:=c(t)$ und definieren weiters, dass für jedes $t \geq 0$ $c(t)=c(t+T)$ gilt.

$\lambda := \lambda(t)$ definieren wir als nicht negative Funktion mit Periode T .

Der Schadensankunftsprozess $N(t)$ ist ein Poissonprozess mit einem deterministischen Intensitäten Prozess $\{\lambda(t), t \geq 0\}$.

Für einen Schaden X_i der zum Zeitpunkt t eintritt, existiert eine Verteilungsfunktion F_t . Wir definieren weiters mit μ_{F_t} den Erwartungswert von F_t . Auch F_t ist eine Funktion mit Periode T , daher gilt auch für sie $F_t = F_{t+T}$

für alle $t \geq 0$.

Für die Investmentstrategie gilt nun auch, dass sie periodisch ist. Um einen Unterschied zu unseren herkömmlichen Strategien zu machen benennen wir sie nun mit $\alpha := \{\alpha_t, t \geq 0\}$. α_t hat wie auch die Funktionen zuvor die Periode T . Weiters verlangen wir, dass $\int_0^T \alpha_s^2 ds$ endlich ist und fassen alle Strategien, die dies erfüllen mit \mathcal{A} zusammen.

Als minimale Voraussetzungen an unsere Funktionen benötigen wir die Messbarkeit bezüglich t .

Mit der Anwendung der Zeittransformation $T(t) := \int_0^t \frac{c}{c_s} ds$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit unsere Prämienrate konstant setzen, nämlich $c_t \equiv c$, für $c \in \mathbb{R}$. Dies ist für uns insofern ausreichend, da wir ausschließlich an der Ruinwahrscheinlichkeit unseres Ruinprozess interessiert sind.

Nun können wir wieder unseren Ruinprozess zusammenbauen. Wie schon in Kapitel 4 setzt er sich aus dem Startkapital x , der bisher eingenommenen Prämien ct , den bisher gezahlten Schäden $\sum_{i=0}^{N(t)} X_i$ und der Investition, dargestellt als stochastische Differentialgleichung mit der Strategie α , zusammen.

Definition 5.1. (*periodischer Ruinprozess mit Investment*)

$$Y(t, x, \alpha) = x + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i + a \int_0^t \alpha_s ds + b \int_0^t \alpha_s dW_s \quad (5.1)$$

Da wir wie in Kapitel 2.1 vorgehen wollen, benötigen wir auch die Hilfsfunktion h . Auch werden wir hier die Definition unserer Ruinwahrscheinlichkeit $psi(x, \alpha) = \mathbb{P}[Y(t, x, \alpha) < 0 \text{ für ein } t \geq 0]$ benötigen.

Weiter wollen wir nur solche Strategien zulassen, welche nicht automatisch zum Ruin führen. Um dies darzustellen besteht unsere Menge \mathcal{A} aus jenen Strategie für die die erwartete Differenz aus Einkommen und Ausgaben größer als 0 ist. Allgemein definiert:

Definition 5.2. *erlaubte Strategien*

Für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ gilt:

$$c + \frac{a}{T} \int_0^T \alpha_s ds - \frac{1}{T} \int_0^T \lambda_s \mu_{F_s} ds > 0 \quad (5.2)$$

Auch hier suchen wir wieder den Anpassungskoeffizienten \hat{r}_α sodass für eine fixe Strategie α und $\epsilon > 0$ folgendes gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, \alpha) e^{(\hat{r}_\alpha - \epsilon)x} = 0 \quad (5.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, \alpha) e^{(\hat{r}_\alpha + \epsilon)x} = \infty \quad (5.4)$$

Wobei wir mit \hat{r}_α den Anpassungskoeffizienten in Abhängigkeit der fixen Strategie α meinen.

Wie in den vorangegangenen Kapiteln gehen wir auch diesmal wieder einer Martingal-Methode nach um eine obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit zu erhalten.

Zunächst bauen wir uns, ähnlich wie in Kapitel 4, einen Prozess auf, der uns einiges vereinfacht.

$$M_t^\alpha := \frac{\exp(-rY(t, x, \alpha))}{\exp\left(\int_0^t \lambda_s h_s(r) + \frac{1}{2} r^2 b^2 \alpha_s^2 - r(c + a\alpha_s) ds\right)} \quad (5.5)$$

Wobei $\alpha \in \mathcal{A}$ und $x, r \geq 0$ fixe Konstanten sind.

Auch für diesen Prozess definieren wir eine zum Zeitpunkt des Ruins gestoppte Version:

$$\tilde{M}^\alpha := \tilde{M}_{t \wedge \tau^\alpha}^\alpha \quad (5.6)$$

Wobei mit τ^α die Stoppzeit zum dazugehörigen Prozess $Y(t, x, \alpha)$ gemeint ist. Nun führen wir ein Theorem an, dass unser Prozess \tilde{M}^α ein Martingal ist. Der Beweis dafür ist in [Köt, Bäu 2007] im Appendix A nachzulesen.

Theorem 5.3. *Für α in \mathcal{A} und fixe $x, r \geq 0$, ist der Prozess:*

$$\tilde{M}_t^\alpha$$

ein Martingal bezüglich \mathfrak{F} .

Wobei hier \mathfrak{F} wieder die von R und $W_{a,b}$ erzeugte Filtration ist. Den Beweis für dieses Theorem ist in [Köt, Bäu 2007] zu finden.

Nun kommen wir zu einem wesentlichen Teil dieses Kapitels.

5.2 Ruinwahrscheinlichkeit

Theorem 5.4. Für $\alpha \in \mathcal{A}$ und $r > 0$ existiert eine Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\psi(x, \alpha) \leq C(\alpha, r)e^{-rx}$$

für alle positiven x und

$$C(\alpha, r) := \sup_{t \geq 0} \exp\left(\int_0^t \lambda_s h_s(r) + \frac{1}{2} r^2 b^2 \alpha_s^2 - r(c + a\alpha_s) ds\right). \quad (5.7)$$

Beweis. Wir definieren $\tau := \tau^\alpha$ wieder als Zeitpunkt des Ruins unter der Strategie α . Weiters wissen wir, dass \tilde{M}_t^α ein Martingal ist, daher können wir anschreiben:

$$e^{-rx} = \tilde{M}_0^\alpha = \mathbb{E}_x[\tilde{M}_t^\alpha \chi_{\tau \leq t}] + \mathbb{E}_x[\tilde{M}_t^\alpha \chi_{\tau > t}] \quad (5.8)$$

Dies können wir nun nach unten abschätzen indem wir den zweiten Teil, nämlich $\mathbb{E}_x[\tilde{M}_t^\alpha \chi_{\tau > t}]$, weglassen. Weiters ziehen wir die Indikatorfunktion aus dem Erwartungswert heraus und erhalten dadurch:

$$\geq \mathbb{E}_x[\tilde{M}_\tau^\alpha | \tau \leq t] \mathbb{P}_x(\tau \leq t) \quad (5.9)$$

Der nächste Schritt ist rein technischer Natur. Wir wissen, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}_x[\tilde{M}_\tau^\alpha]$ auf der Menge $\{\tau \leq t\}$ größer gleich 1 ist. Daher haben wir für $\mathbb{E}_x[\tilde{M}_\tau^\alpha | \tau \leq t]$ mit 1 eine untere Schranke. Für den Divisor nehmen wir einfach das Supremum über alle möglichen Zeitpunkte. Damit können wir weiter nach unten abschätzen und erhalten:

$$\frac{\mathbb{P}_x(\tau \leq t)}{\sup_{0 \leq v \leq t} \exp\left(\int_0^v \lambda_s h_s(r) + \frac{1}{2} r^2 b^2 \alpha_s^2 - r(c + a\alpha_s) ds\right)} \quad (5.10)$$

Durch Umformen erhalten wir schon fast unser gewünschtes Resultat

$$\mathbb{P}_x(\tau \leq t) \leq C(\alpha, r)e^{-rx} \quad (5.11)$$

Zuletzt lassen wir noch t gegen ∞ laufen und sind fertig.

$$\psi(x, \alpha) \leq C(\alpha, r)e^{-rx} \quad (5.12)$$

□

Nun wollen wir uns nocheinmal die Beschaffenheit von $C(\alpha, r)$ ansehen. Um eine brauchbare Schranke für $\psi(x, \alpha)$ zu erhalten, fordern wir, dass $C(\alpha, r)$ endlich ist! Zur Vereinfachung definieren wir:

$$\theta(r) := \int_0^T \lambda_s h_s(r) + \frac{1}{2} r^2 b^2 \alpha_s^2 - r(c + a\alpha_s) ds \quad (5.13)$$

Da T die Periodendauer ist, ist es für die Endlichkeit von $C(\alpha, r)$ hinreichend $e^{\theta(r)} \leq 1$ zu fordern. Aus $e^{\theta(r)} \leq 1$ folgt $\theta(r) \leq 0$ und daher auch $C(\alpha, r) < \infty$. Aus diesen Argumenten heraus definieren wir nun den Anpassungskoeffizienten $\hat{r}^{(\alpha)}$.

Definition 5.5. Für $\alpha \in \mathcal{A}$ definieren wir:

$$\hat{r}^{(\alpha)} := \sup\{r > 0 \mid \theta(r) \leq 0\} \quad (5.14)$$

Wir nennen dies Anpassungskoeffizient bezüglich der Investmentstrategie α .

Betrachten wir die Beschaffenheit von $\theta(r)$ so sehen wir leicht, dass sie eine Konvexe Funktion mit $\theta(0) = 0$ ist. Weiters gilt:

$$\theta'(r) = \int_0^T \lambda_s h'_s(r) + r b^2 \alpha_s^2 - (c + a\alpha_s) ds \quad (5.15)$$

Dadurch gilt $\theta'(0) = -T(c + \frac{a}{T} \int_0^T \alpha_s ds - \frac{1}{T} \int_0^T \lambda_s \mu_{F_s} ds)$, der Ausdruck in der Klammer ist aus der Definition 5.2 und somit ist $\theta'(0)$ strikt negativ. Daher existiert für $\theta(r) = 0$ eine Lösung $\hat{r}^{(\alpha)}$ und sie ist eindeutig!

Nun können wir unsere obere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit allgemein Anschreiben:

Theorem 5.6. *Für $\alpha \in \mathcal{A}$ und $r \leq \hat{r}^{(\alpha)}$ gilt:*

$$\psi(x, \alpha) \leq C(\alpha, x)e^{-rx} \quad (5.16)$$

wobei

$$C(x, r) = \sup_{0 \leq t \leq T} \exp\left(\int_0^t \lambda_s h_s(r) + \frac{1}{2} r^2 b^2 \alpha_s^2 - r(c + a\alpha_s) ds\right) < \infty \quad (5.17)$$

Dies gilt für alle $x \geq 0$.

Den Beweis ersparen wir uns hier, da er aus der Herleitung hervorgeht.

Weiters gilt für $r > 0$:

$$\lambda_t h_t(r) + \frac{1}{2} r^2 b^2 \alpha_t^2 - r(c + a\alpha_t) = \lambda_t h_t(r) + \frac{r^2 b^2}{2} \left(\alpha_t - \frac{a}{rb^2}\right)^2 - \left(rc + \frac{a^2}{2b^2}\right) \quad (5.18)$$

Daraus folgt dass $\hat{r}^{(\alpha)}$ die strikt positive Lösung der Gleichung

$$\int_0^T \lambda_t h_t(r) + \frac{r^2 b^2}{2} \left(\alpha_t - \frac{a}{rb^2}\right)^2 - \left(rc + \frac{a^2}{2b^2}\right) dt = 0 \quad (5.19)$$

ist. Daraus motivieren wir die konstante Investmentstrategie $\alpha^{(r)}$.

Definition 5.7. *(konstante Investmentstrategie)*

$$\alpha_t^{(r)} \equiv \frac{a}{rb^2}$$

Diese in Gleichung 5.19 eingesetzt ergibt nun die neue Gleichung:

$$\int_0^T \lambda_t h_t(r) - \left(rc + \frac{a^2}{2b^2} \right) dt = \int_0^T \lambda_t h_t(r) dt - \left(rc + \frac{a^2}{2b^2} \right) T = 0 \quad (5.20)$$

Aufgrund unserer Voraussetzungen existiert die Lösung R und sie ist eindeutig, solange der Driftparameter der Investmentmöglichkeit nicht gleich 0 ist. Ist a jedoch 0, so existiert die Lösung R , wenn für die Prämienrate $c > \frac{1}{T} \int_0^T \lambda_s \mu_{B_s} ds$ gilt.

Nun können wir wiederum für die konstante Investmentstrategie unser schon bekanntes Theorem formulieren:

Theorem 5.8. Für R , wobei R die Lösung der Gleichung 5.19 ist, und die konstante Strategie $\alpha^{(R)}$, wobei $\alpha_t^{(R)} \equiv \frac{a}{rb^2}$ ist, gilt:

$$\psi(x, \alpha^{(R)}) \leq C(\alpha^{(R)}, R) e^{-Rx} \quad (5.21)$$

wobei

$$C(\alpha^{(R)}, R) < \infty$$

Dies gilt für alle $x \geq 0$.

5.3 Die optimale Investmentstrategie

Nun wollen wir uns mehr der Investmentstrategie widmen. Zunächst fordern wir, dass sämtliche Strategieprozesse vorhersehbar bezüglich der Filtration \mathbb{F} sind. Weiters verlangen wir für alle möglichen Strategien $\alpha \in \mathcal{A}$, dass das Integral $\int_0^t \alpha_s^2 ds$ endlich ist für alle $t \geq 0$. Diese Bedingung benötigen wir

für die Existenz des stochastischen Integrals $\int_0^t \alpha_s dW_s$. Wir fassen nun alle Strategien die diese Anforderungen erfüllen in \mathcal{A}^* zusammen.

Ziel ist es, ein $R > 0$ und eine Strategie $\alpha^* \in \mathcal{A}^*$ zu finden, sodass für alle $\alpha \in \mathcal{A}^*$ und alle $\epsilon > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, \alpha^*) e^{(R-\epsilon)x} = 0 \quad (5.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, \alpha) e^{(R+\epsilon)x} = \infty \quad (5.23)$$

gilt.

R nennen wir dann optimaler Anpassungskoeffizient und α^* die dazugehörige optimale Investmentstrategie. Der Beweis folgt ähnlich dem aus Kapitel 4.3.

Wie auch in Kapitel 4.3 benötigen wir eine Zusatzforderung an die Schadensverteilung, die uns einiges erleichtert! Zur Erinnerung die Zufallsvariable X_t hat die Verteilung F_t für $t \in [0, T)$. Nun setzen wir, gleich wie in Kapitel 4.3, voraus dass für X_t :

Definition 5.9. *gleichmäßiges exponentielles Moment*

$$\sup_{0 \leq t \leq T, y > 0} \mathbb{E}[e^{-R(y-X_t)} | X_t > y] < \infty$$

gilt. Weiters wissen wir aus Theorem 5.3, dass \tilde{M}^α ein Martingal bezüglich der Filtration \mathbb{F} , für alle $r, x > 0$ und $\alpha \in \mathcal{A}$ ist. Setzen wir nun R und $\alpha^{(R)} \in \mathcal{A}$ ein, bekommen wir abermals ein Martingal mit:

$$M_t^{\alpha^{(R)}} = \frac{\exp(-RY_t^{\alpha^{(R)}})}{\exp\left(\int_0^t \lambda_s h_s(R) ds - \left(Rc + \frac{a^2}{2b^2}\right)t\right)} \quad (5.24)$$

Nun wollen wir eine beliebige Strategie $\alpha \in \mathcal{A}^*$ wählen und erhalten, ähnlich wie in Kapitel 4.3 folgendes Resultat:

Definition 5.10. *Mit den Voraussetzungen $R > 0$, R ist Lösung von 5.20 und Definition 5.9 ist erfüllt, erhalten wir für $\alpha \in \mathcal{A}^*$ den Prozess:*

$$M_t^{*,\alpha} = \frac{\exp(-RY_t^\alpha)}{\exp\left(\int_0^t \lambda_s h_s(R) ds - \left(Rc + \frac{a^2}{2b^2}\right)t\right)} \quad (5.25)$$

Für den Prozess $M_t^{*,\alpha}$ definieren wir die gestoppte Version $\tilde{M}_t^{*,\alpha} := M_{t \wedge \tau^\alpha}^{*,\alpha}$

Theorem 5.11. *$M_{t \wedge \tau^\alpha}^{*,\alpha}$ ist ein Submartingal bezüglich \mathbb{F} für $\alpha \in \mathcal{A}^*$ und ein Martingal für $\alpha = \alpha^{(R)}$. Weiters ist $\tilde{M}_t^{*,\alpha}$ gleichmäßig integrierbar für alle $\alpha \in \mathcal{A}^*$.*

Der Beweis hierzu läuft ähnlich wie der zu 4.11 und kann im Appendix von [Köt,Bäu 2007] nachgelesen werden.

Unser nächster Schritt, ist wie im vorherigen Kapitel, dass wir zeigen, dass der Versicherer entweder unendlich reich oder aber ruiniert wird. Anders formuliert, es gibt keinen positiven Wert gegen den unser Ruinprozess konvergiert.

Lemma 5.12. *Ausgehend von Definition 5.9, gilt für $\alpha \in \mathcal{A}^*$, dass der gestoppte Reserveprozess \tilde{Y}_t^α auf $\tau^\alpha = \infty$ fast sicher gegen ∞ für $t \rightarrow \infty$ konvergiert.*

Der Beweis zu diesem Theorem ist genauso zu führen wie der für das Lemma 4.12 aus dem vorherigen Kapitel!

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir zeigen, dass R tatsächlich der optimale Anpassungskoeffizient ist.

Theorem 5.13. *Für R , Lösung der Gleichung 5.19 und mit der Voraussetzung 5.9 gilt für alle $\alpha \in \mathcal{A}^*$:*

$$\psi(x, \alpha) \geq C^* e^{-Rx} \quad (5.26)$$

mit $C^* > 0$ für alle $x \geq 0$.

Beweis. Wir wissen, dass $\tilde{M}_t^{*,\alpha}$ ein gleichmäßig integrierbares Submartingal ist, daher können wir aus Doobs Optional Sampling Theorem folgern:

$$e^{-Rx} = \tilde{M}_0^{*,\alpha} \leq \mathbb{E}_x(\tilde{M}_t^{*,\alpha}) \quad (5.27)$$

$$= \mathbb{E}_x[\tilde{M}_t^{*,\alpha} | \tau < \infty] \mathbb{P}_x(\tau < \infty) \quad (5.28)$$

$$+ \mathbb{E}_x[\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}_t^{*,\alpha} | \tau = \infty] \mathbb{P}_x(\tau = \infty) = \mathbb{E}_x[\tilde{M}_t^{*,\alpha} | \tau < \infty] \quad (5.29)$$

Durch gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz 4.67 können wir nun nochmal abschätzen

$$\leq \frac{\sup_{0 \leq t \leq T, y > 0} \mathbb{E}[e^{-R(y-X_t)} | X_t > y]}{\inf_{0 \leq t < T} \exp\left(\int_0^t \lambda_s h_s(R) ds - \left(Rc + \frac{a^2}{2b^2}\right)t\right)} \mathbb{P}_x(\tau < \infty) \quad (5.30)$$

Als Resultat erhalten wir $\psi(x, \alpha) \geq C^* e^{-Rx}$ wobei

$$C^* := \frac{\inf_{0 \leq t < T} \exp\left(\int_0^t \lambda_s h_s(R) ds - \left(Rc + \frac{\sigma^2}{2b^2}\right)t\right)}{\sup_{0 \leq t \leq T, y > 0} \mathbb{E}[e^{-R(y-X_t)} | X_t > y]} \quad (5.31)$$

gilt.

Damit haben wir, wie in Kapitel 4 für \hat{r} , die asymptotische Optimalität von R für alle $\alpha \in \mathcal{A}^*$ gezeigt.

Kapitel 6

Vergleich der Modelle

6.1 Vergleich

In diesem kurzen Kapitel wollen wir die vorgestellten Modelle aus dem Kapitel 4 und Kapitel 5 vergleichen.

Auf den ersten Blick erkennt man, dass das Modell aus Kapitel 4 ein Spezialfall des Modells aus Kapitel 5 ist. Um nun einen guten Vergleich zu erhalten, mitteln wir über die periodischen Funktionen des periodischen Modells und nehmen diese als Parameter für das nichtperiodische Modell.

Wir definieren für das nichtperiodische Modell:

Die Schadensintensität:

$$\lambda^* = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda_t dt \quad (6.1)$$

und die Schadenhöhenverteilung:

$$X^* = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\lambda_t}{\lambda^*} B_t dt \quad (6.2)$$

Für die verschobene Momentenerzeugende Funktion gilt dann:

$$h^*(r) = \int_0^{\infty} e^{rx} dB^*(x) - 1 \quad (6.3)$$

$$= \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\lambda_t}{\lambda^*} \int_0^{\infty} e^{rx} dB_t(x) dt \right) - 1 \quad (6.4)$$

$$= \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\lambda_t}{\lambda^*} (h_t(r) + 1) dt \right) - 1 \quad (6.5)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\lambda_t}{\lambda^*} h_t(r) dt \quad (6.6)$$

Für das nichtperiodische Modell ist \hat{r} die positive Lösung der Gleichung 4.9:

$$\lambda h(r) = cr + \frac{a^2}{2b^2} \quad (6.7)$$

Setzen wir nun λ^* und $h^*(r)$ in die obige Gleichung ein so erhalten wir:

$$\lambda^* h^*(r) - \left(rc + \frac{a^2}{2b^2} \right) \quad (6.8)$$

$$= \lambda^* \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\lambda_t}{\lambda^*} h_t(r) dt - \left(rc + \frac{a^2}{2b^2} \right) \quad (6.9)$$

$$= \frac{1}{T} \left(\int_0^T \lambda_t h_t(r) dt - \left(rc + \frac{a^2}{2b^2} \right) T \right) \quad (6.10)$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Anpassungskoeffizienten unter optimalem Investment gleich sind. Gleichzeitig haben wir damit auch gezeigt, dass die optimalen Investmentstrategien der Modelle ident sind.

Zum Schluss noch eine Anmerkung: Aufgrund der Unabhängigkeit von der Reserve, ist das Maximieren des Anpassungskoeffizient ein sehr schwaches Kriterium für die Optimierung des Reserveprozesses.

Kapitel 7

Simulation

7.1 Simulationsmethode

Um unsere asymptotischen Schranken zu verifizieren, nehmen wir uns der Monte-Carlo-Methode an. Sie hat den Vorteil, dass sie auch für komplexe Prozesse noch recht einfach zu implementieren ist und weiters auch geringer Rechenleistung bedarf. Als allgemeine Definition möchte ich einen Satz von einem Artikel [Witter 2004] verwenden

Definition 7.1. *Monte Carlo Simulation*

Monte Carlo simulation is a method for iteratively evaluating a deterministic model using sets of random numbers as inputs. This method is often used when the model is complex, nonlinear, or involves more than just a couple uncertain parameters.

Die Idee dahinter ist relativ simpel. Man versucht durch eine große Anzahl an Zufallsexperimenten, über deren Ergebnisse man am Ende mittelt, auf eine numerische Lösung zu kommen. Solche Verfahren kommen dann zur Anwendung, wenn direkte Verfahren zu aufwendig oder gar nicht anwendbar sind. Als Beispiel dafür können wir komplizierte Derivatbewertungen aus dem Bereich der Finanzmathematik anführen (wobei gesagt werden muss, dass auch hier die MC-Simulation auf ihre Grenze stossen kann!).

In unserem Fall möchte ich die Modelle aus Kapitel 3, Kapitel 4 und Kapitel 5 miteinander vergleichen. Die Vorgangsweise ist eine intuitive Diskretisierung des Prozesses.

Zunächst die Darstellung des klassischen Ruinprozesses für n Schritte:

Definition 7.2. *Algorithmus für den klassischen Ruinprozess*

```

    R(0) = x
    Do For i from 1:n
    nt = RandPoisson( $\lambda$ )
    R(i) = R(i-1) + c
    if nt > 0 then do
    Do For j from 1:nt
    R(i) = R(i) - RandSchadenverteilung( $\theta$ )
    end do
    end do

```

Es sei hier an dieser Stelle erwähnt, dass der Ausdruck $R(i) = R(i) - \text{RandSchadenverteilung}(\theta)$ nicht mathematisch zu verstehen ist!

Wobei mit RandPoisson eine Poissonverteilte und mit RandSchadenverteilung eine nach der Schadenverteilung verteilte Zufallsvariable ist. Zu der Erzeugung der Zufallszahlen möchte ich an dieser Stelle auf [Niederreiter 1992] verweisen, der eine gute Einführung dazu gibt. Wie man leicht erkennt, besteht unser Algorithmus aus festen Zeitschritten der Länge 1. Eine andere Möglichkeit wäre es hier die Zeitschritte mit Länge der Schadenseintrittszeitpunkte zu wählen die natürlich zufällig und exponentialverteilt sind! (Die Zwischenankunftszeiten eines zusammengesetzten Poissonprozesses sind exponentialverteilt!)

Als Schadenverteilung bieten sich viele Verteilungen an! Gerne werden die Exponential-, Lognormal-, oder auch Weibullverteilungen angenommen. Für unsere Simulationen nehmen wir unabhängige exponentialverteilte Schäden an.

7.2 Cramer Lundberg Approximation

Zunächst wollen wir zeigen, dass Theorem 3.5 für einen klassischen Ruin Prozess hält. Für unsere Simulationen verwenden wir den oben genannten Prozess mit exponentialverteilten Schäden.

Definition 7.3. *Zwischenergebnisse*

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}$$

$$M_x(t) = \frac{1}{1-t\theta}$$

$$M'_x(t) = \frac{t}{(1-t\theta)^2}$$

$$r = \frac{1}{\theta} - \lambda$$

$$\beta = \lambda\theta$$

Damit haben wir alles was man für die Berechnung der Schranke C braucht und erhält:

$$C = \frac{1 - \beta}{\frac{1}{\lambda\theta} - 1} = \frac{1 - \beta}{\frac{1}{\beta} - 1} = \beta \quad (7.1)$$

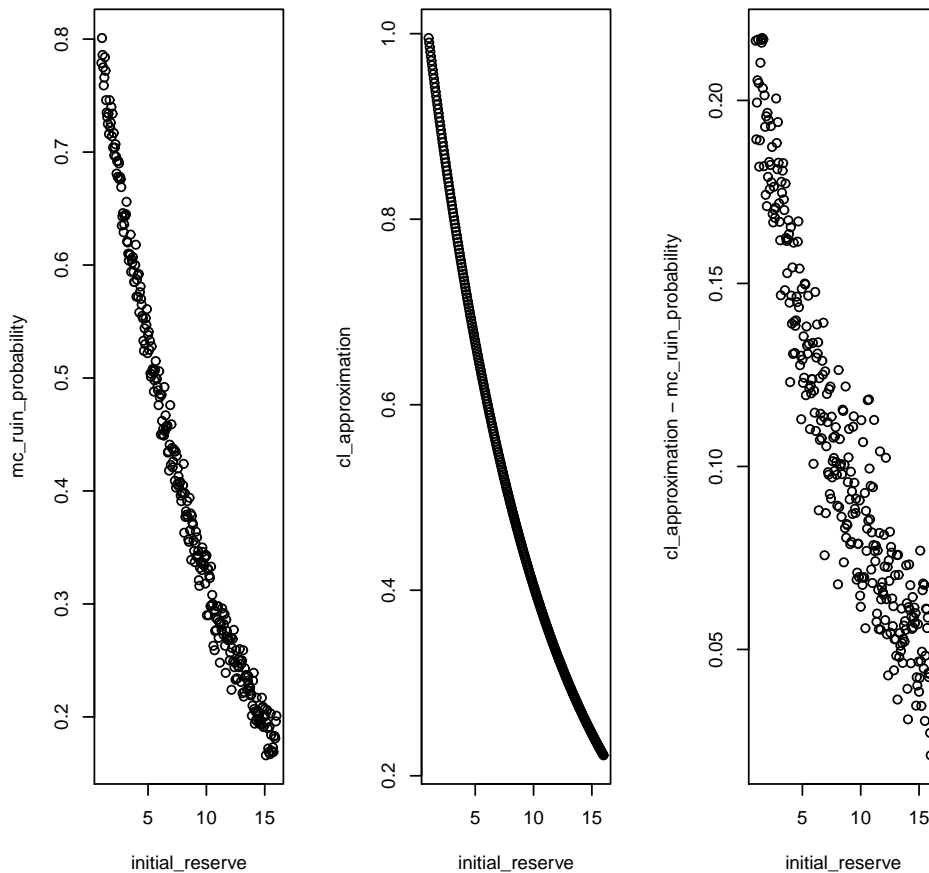


Abbildung 7.1: Parameter: $c = 1$ $\lambda = 1$ $\theta = 1.1$.

Das Startkapital x lief von 1 bis 16 in $\frac{1}{20}$ Schritten. Für jeden Wert von x wurden 10000 Pfade mit je 1000 Punkten berechnet. Die Ausfallswahrscheinlichkeit ergibt sich durch die intuitive Formel $\frac{\text{Anzahl aller Pfade } < 0}{\text{Gesamtzahl der Pfade}}$.

Die Grafiken zeigen, dass sich für wachsende x die Ruinwahrscheinlichkeit aus der Simulation jener der Cramer Lundberg Approximation annähert. Eine Schwachstelle der Monte Carlo Methode ist, dass die Anzahl der Beobachtungspunkte pro Pfad endlich ist. Da Ausfälle nach dem Beobachtungshorizont nicht berücksichtigt werden können, kommt es zu niedrigeren Ruinwahrscheinlichkeiten in der Simulation als mit unendlichem Zeithorizont auftreten würden.

Definition 7.4. *Algorithmus für den Ruinprozess mit Investment und exponentialverteilten Schäden*

```

R(0) = x
Do For i from 1:n
nt = RandPoisson( $\lambda$ )
R(i) = R(i-1) + c + K*GWa,b(t)
if nt > 0 do
Do For j from 1:nt
R(i) = R(i) - RandExp( $\theta$ )
end do
end do

```

Wobei hier $GW_{a,b}(t)$ einer diskretisierten geometrischen Brown'schen Bewegung folgt.

Für die Simulation periodischer Ruinprozesse wurde eine Periode von 12 gewählt. Dies erscheint eine vernünftige Annahme, wenn man sich ein Versicherungsjahr einer Elementarversicherung ansieht (als Beispiel sei hier eine Sturmversicherung erwähnt). Als Basis für die periodische Funktion wurde eine Kosinus Funktion gewählt, die entsprechend parametrisiert und skaliert wurden. Weiters ist als Bezugspunkt jeweils der Parameter des nicht periodischen Fall gewählt worden.

Definition 7.5. *(Parameter periodischer Ruinprozess)*

$$\lambda_t = \frac{12 + \cos\left(\frac{t \cdot \pi}{6}\right)}{12} - 1 + \lambda_{\text{nichtperiodisch}}$$

Wobei $t \in \{1, 2, \dots, 12\}$ gilt.

Zur Vollständigkeit schauen wir uns die Exponentialverteilung etwas genauer an, um unsere numerischen Ergebnisse mit den Analytischen vergleichen zu können.

Definition 7.6. *Exponentialverteilung*

Dichte: $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}$

Erwartungswert: θ

Varianz: θ^2

Momentenerzeugende Funktion: $\frac{1}{1-t\theta}$

Nun wollen wir uns die analytischen Ergebnisse unseres Modells ausrechnen. Für den klassischen Ruinprozess, mit Anpassungskoeffizient ν , gilt:

$$h(r) = \frac{\theta r}{1 - \theta r} \quad (7.2)$$

für $r \in [0, \frac{1}{\theta})$. Lösen wir diese Gleichung nach r auf, erhalten wir als Lösung ν :

$$\nu = \frac{\rho}{(\rho + 1)\theta} \quad (7.3)$$

wobei $\rho = \frac{c}{\lambda\theta} - 1$ gilt.

Mit diesen Ergebnissen, können wir uns auch den Anpassungskoeffizienten des erweiterten Prozesses angeben. Dieser kann angegeben werden mit:

$$\hat{r} = \nu + \left(\sqrt{\left(\frac{\nu + \frac{a^2}{2b^2c}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2b^2c}\left(\frac{1}{\theta} - \nu\right)} - \frac{\nu + \frac{a^2}{2b^2c}}{2} \right) \quad (7.4)$$

7.3 Ergebnisse

Nun können wir unsere Simulationen mit den analytischen Ergebnissen vergleichen.

Für die Simulationen wurden jeweils 1000 Pfade mit jeweils 10000 (für die Versuche mit Variation des Startkapitlas) bzw. 1000 (für jene Versuche mit Variation der Diffusion) Schritten verwendet. Wie auch bei den Monte Carlo Ergebnissen der Cramer Lundberg Approximation sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass durch die Endlichkeit der Pfade eine leichte Unterschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit passiert! Weiters ist noch zu erwähnen, dass die Pfade für den klassischen und den neuen Prozess sich nur um die Möglichkeit der Investition unterscheiden. Anders ausgedrückt, ist ein Schaden aufgetreten, so ist er bei beiden Prozessen wirksam. Dies gilt auch für den periodischen Fall.

Die erste Versuchsreihe lässt das Startkapital variieren. Dies tun wir einerseits um die Auswirkungen auf die verschiedenen Modelle zu beobachten, andererseits wollen wir versuchen die Konstante der Cramer Lundberg Approximation darzustellen. Veränderter Parameter: Startkapital x .

$$c = 1, \lambda = 1, \theta = 1.1, a = 0.01, b = 0.1$$

Nr.	α	$e^{-\nu x}$	num. $\psi(x)$	$e^{-\hat{r}x}$	num. $\psi(x, K)$	$e_{per}^{-\nu x}$	num. $\psi(x)_{per}$	$e_{per}^{-\hat{r}x}$	num. $\psi(x, K)_{per}$
1	5	0.60653	0.52650	0.50771	0.41942	0.60653	0.52515	0.50771	0.41791
2	10	0.36788	0.31680	0.25777	0.21204	0.36788	0.31710	0.25777	0.21135
3	15	0.22313	0.19434	0.13087	0.10940	0.22313	0.19397	0.13087	0.10748
4	20	0.13534	0.11519	0.06644	0.05430	0.13534	0.11562	0.06644	0.05460
5	25	0.08208	0.07023	0.03373	0.02817	0.08208	0.06886	0.03373	0.02710
6	30	0.04979	0.04289	0.01713	0.01389	0.04979	0.04195	0.01713	0.01365
7	35	0.03020	0.02564	0.00870	0.00742	0.03020	0.02507	0.00870	0.00687
8	40	0.01832	0.01528	0.00441	0.00346	0.01832	0.01576	0.00441	0.00383
9	45	0.01111	0.00955	0.00224	0.00214	0.01111	0.00897	0.00224	0.00183
10	50	0.00674	0.00505	0.00114	0.00084	0.00674	0.00526	0.00114	0.00103
11	55	0.00409	0.00343	0.00058	0.00055	0.00409	0.00339	0.00058	0.00050
12	60	0.00248	0.00167	0.00029	0.00034	0.00248	0.00204	0.00029	0.00022
13	65	0.00150	0.00111	0.00015	0.00015	0.00150	0.00103	0.00015	0.00011
14	70	0.00091	0.00050	0.00008	0.00004	0.00091	0.00070	0.00008	0.00006
15	75	0.00055	0.00044	0.00004	0.00005	0.00055	0.00040	0.00004	0.00006
16	80	0.00034	0.00031	0.00002	0.00003	0.00034	0.00016	0.00002	0.00002
17	85	0.00020	0.00012	0.00001	0.00002	0.00020	0.00008	0.00001	0.00002
18	90	0.00012	0.00006	0.00001	0.00000	0.00012	0.00009	0.00001	0.00000
19	95	0.00007	0.00004	0.00000	0.00000	0.00007	0.00003	0.00000	0.00001
20	100	0.00005	0.00002	0.00000	0.00001	0.00005	0.00004	0.00000	0.00000

Betrachtet man die Ergebnisse so erkennt man die eindeutig niedrigere Ruinwahrscheinlichkeit der Prozesse mit Investmentmöglichkeit. Weiters sieht man, dass nur in wenigen Simulationsversuchen die analytische Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit von einer Simulierten Ruinwahrscheinlichkeit überboten wird. Dies ist aber eher auf die Volatilität der Monte Carlo Methode für selten Ereignisse zurückzuführen, als dass die Cramer Lundberg Schranke nicht hält! Vergleicht man die Ergebnisse der nicht-periodischen Modell mit denen der periodischen, so kann man keine gravierende Unterschiede erkennen.

Versucht man die Konstante C von der Cramer Lundberg Approximation zu ermitteln kommt man mit der Umformung: $\frac{\psi(x)}{e^{-rx}} \sim C$ auf folgende Ergebnisse:

Nr.	$\psi(x)/e^{-\nu x}$	$\psi(x, K)/e^{-\hat{r}x}$	$\psi(x)_{per}/e_{per}^{-\nu x}$	$\psi(x, K)_{per}/e_{per}^{-\hat{r}x}$
1	0,8681	0,8261	0,8658	0,8231
2	0,8612	0,8226	0,8620	0,8199
3	0,8710	0,8359	0,8693	0,8213
4	0,8511	0,8173	0,8543	0,8218
5	0,8556	0,8352	0,8389	0,8034
6	0,8614	0,8109	0,8425	0,7968
7	0,8490	0,8529	0,8301	0,7897
8	0,8341	0,7846	0,8603	0,8685
9	0,8596	0,9554	0,8074	0,8170
10	0,7493	0,7368	0,7804	0,9035
11	0,8386	0,9483	0,8289	0,8621
12	0,6734	1,1724	0,8226	0,7586
13	0,7400	1,0000	0,6867	0,7333
14	0,5495	0,5000	0,7692	0,7500
15	0,8000	1,2500	0,7273	1,5000
16	0,9118	1,5000	0,4706	1,0000
17	0,6000	2,0000	0,4000	2,0000
18	0,5000	0,0000	0,7500	0,0000
19	0,5714	DIV/0!	0,4286	DIV/0!
20	0,4000	DIV/0!	0,8000	DIV/0!

Für die Versuche bis einschließlich Nummer 10 entwickeln sich die Ergebnisse um 0.84 für die Modelle ohne Investmentmöglichkeit und um 0.82 mit. Danach nimmt die durch die Monte Carlo Methode entstehende Volatilität drastisch zu. Es zeigt sich, dass die Konstante der Prozesse mit Investmentmöglichkeit ähnlich stabil sind wie jene ohne!

Im nächsten Versuch lassen wir den Parameter b variieren. Dieser ist für die Diffusion der Investmentmöglichkeit verantwortlich.
Veränderter Parameter: Diffusion b .

$$x = 40 \quad c = 1, \quad \lambda = 1, \quad \theta = 1.1, \quad a = 0.01$$

Nr.	α	$e^{-\nu x}$	num. $\psi(x)$	$e^{-\hat{r}x}$	num. $\psi(x, K)$	$e_{per}^{-\nu x}$	num. $\psi(x)_{per}$	$e_{per}^{-\hat{r}x}$	num. $\psi(x, K)_{per}$
1	0.1	0.01832	0.0139	0.00441	0.0041	0.01832	0.0174	0.00441	0.0046
2	0.2	0.01832	0.0164	0.01174	0.0103	0.01832	0.0162	0.01174	0.0114
3	0.3	0.01832	0.0139	0.01485	0.0126	0.01832	0.0164	0.01485	0.0117
4	0.4	0.01832	0.0142	0.01623	0.0128	0.01832	0.0153	0.01623	0.0141
5	0.5	0.01832	0.0166	0.01694	0.0152	0.01832	0.0131	0.01694	0.0127
6	0.6	0.01832	0.0146	0.01734	0.0145	0.01832	0.0160	0.01734	0.0158
7	0.7	0.01832	0.0147	0.01759	0.0145	0.01832	0.0156	0.01759	0.0154
8	0.8	0.01832	0.0140	0.01776	0.0123	0.01832	0.0136	0.01776	0.0139
9	0.9	0.01832	0.0140	0.01787	0.0132	0.01832	0.0146	0.01787	0.0145
10	1.0	0.01832	0.0139	0.01795	0.0140	0.01832	0.0162	0.01795	0.0166

Wieder hielten sämtliche Schranken. Weiters ist gut zu sehen, dass der Anstieg der Diffusion auch die Unsicherheit das Ruin eintritt steigen lässt. Dies gilt für den periodischen als auch den nicht periodischen Fall.

Kapitel 8

Konklusio

8.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Rückblickend haben wir gezeigt, dass auch für die Ruinwahrscheinlichkeit von Ruinprozessen mit Investmentmöglichkeit eine obere Schranke existiert. Wir haben weiters gezeigt, dass die asymptotische Ruinwahrscheinlichkeit des Ruinprozesses mit Investmentmöglichkeit kleiner ausfällt als jene des Ruinprozesses ohne dieser Option. Am Ende haben wir noch die analytischen Ergebnisse mit numerischen Simulationen überprüft und gesehen, dass sämtliche Resultate der vorangegangenen Theorie gehalten haben.

8.2 Aussagen für die Praxis

Die von uns erzielten Ergebnisse lassen die Aussagen zu, dass es für ein Unternehmen klüger ist, Teile seines Kapitals nach einer bestimmten Strategie zu investieren. Die Verbesserung des Ausfallrisikos kommt vor allem aus Diversifikationseffekten, die das Ausfallpotential stärker streuen. Für Versicherungen ist es heutzutage üblich geworden, sich ausserhalb seines Stammgeschäfts zu bewegen. Dass dies nicht immer eine Gewinnsituation für eine Versicherung ist, zeigt der bekannte Fall von AIG (American International Group). AIG hat im Jahr 2007 enorme Verluste durch ausfallende Kredite seiner Kunden, die sie durch Credit Default Swaps abgesichert hatten, hinnehmen müssen. Eine für die Praxis wichtige Erkenntniss muss daher lauten, dass sich eine Risikodiversifikation über Investitionen dann lohnt, wenn diese selbst ein minimales Verlustrisiko enthält bzw. selbst wieder breit genug gestreut ist.

Literaturverzeichnis

- [Asmussen, 2000] Asmussen: Ruin Probabilities
- [Gai. Gra. Sch. 2003] J.Gaier, P.Grandits and W.Schachermayer: Asymptotic ruin probabilities and optimal investment; The Annals of Applied Probability 2003, Vol.13, No.3, 1054-1076
- [Köt,Bäu 2007] Kötter, Bäuerle: The periodic risk model with investment; Insurance: Mathematics and Economics 42(2008)962-967
- [Protter 2005] Philip E. Protter: Stochastic Integration and Differential Equations
- [Ro. Wil. 1994] Rogers L.C.G. and Williams D.:Diffusions, Markov Processes and MARTingales Vol. 1
- [Witter 2004] Wittwer, J.W., MMonte Carlo Simulation BasicsFFrom Vertex42.com, June 1, 2004, <http://vertex42.com/ExcelArticles/mc/MonteCarloSimulation.html>
- [Niederreiter 1992] Harald Niederreiter: Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods

curriculum vitae

Persönliche Daten

Name: Herbert Schellmann

Geburtsdatum: 16. Dezember 1983

Geburtsort: Wien

Schulbildung

1990 - 1994 Volksschule St.Ursula Wien Mauer

1994 - 1998 AHS St.Ursula Wien Mauer

1998 - 2002 ORG/DG St.Ursula Wien Mauer

Universitäre Laufbahn

Seit Oktober 2003 Studium der techn. Mathematik / Finanz- und Versicherungsmathematik

Arbeitgeber: Allianz Elementar AG