

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

Fraktale Dimensionen
mit Anwendung auf Tumorzellen

Ausgeführt am Institut für
Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von Univ.Prof. Dr.phil. Wolfgang Wertz

durch

Ines Stelzer
Ehamgasse 43/9/5/10
1110 Wien

Wien, 11. November 2009

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	iii
Vorwort	v
1 Einleitung	1
2 Fraktale	9
2.1 Die Hausdorff-Metrik	9
2.2 Vollständigkeit von (\mathfrak{F}, h) und (\mathfrak{K}^-, h)	17
2.3 Iterierte Funktionensysteme (IFS)	25
2.4 Das Collage-Theorem	39
2.5 Fraktale Dimensionen	45
2.5.1 Die Hausdorff-Dimension	46
2.5.2 Die Box-Dimension	56
2.5.3 Vergleich der Dimensionen	70
2.5.4 Projektionen, Produkte und Schnitte fraktaler Mengen . .	79
3 Tumoren und Tumorzellen	83
3.1 Die menschliche Zelle	83
3.2 Definition eines Tumors	88
3.3 Tumorrisikofaktoren	89
3.4 Tumorentstehung und Tumorwachstum	91
3.5 Klassifikation der Tumoren	92
3.6 Nomenklatur der Tumoren	93
3.6.1 Epitheliale Tumoren	94
3.6.2 Neuroendokrine Tumoren	95
3.6.3 Mesenchymale Tumoren	95
3.6.4 Keimzelltumoren	95
3.6.5 Embryonale Tumoren	95
3.7 Folgen eines Tumors	95
4 Anwendung der Box-Dimension	97
4.1 Die empirische Box-Dimension	97
4.2 Anwendung der Box-Dimension auf Tumorzellen	101
4.2.1 Beispiel: Dysplasien des Gebärmutterhalsgewebes	103
4.2.2 Toleranzintervalle	104
4.2.3 Fallstudie: Mammakarzinom	107
Referenzen	113

Literaturverzeichnis	117
Abbildungsverzeichnis und Bildnachweis	121
Index	122

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei meinem Diplomarbeitsbetreuer Universitätsprofessor Dr.phil. Wolfgang Wertz für die Betreuung meiner Diplomarbeit und die guten Verbesserungsvorschläge und Ideen herzlich bedanken.

Weiters danke ich dem Vorstand des klinischen Instituts für Pathologie der Medizinischen Universität Wien, Universitätsprofessor Dr. Donscho Kerjaschki für die Bereitstellung der Dünnschnitte und Frau Dr. Zsuzsanna Bago-Horvath der Medizinischen Universität Wien für das Fotografieren des Datenmaterials.

Mein Dank gilt ebenfalls Universitätsprofessor Mag. Dr.rer.nat. Helmut Ahammer von der Medizinischen Universität Graz für die wertvollen Ratschläge und Hinweise, das von ihm programmierte Programm IQM und den Anwendungsteil betreffend.

Meiner Familie danke ich für ihre Unterstützung während meines gesamten Studiums und während des Verfassens dieser Arbeit.

Vorwort

Bereits die Vorlesung „Fraktale und Zufall“, die von Universitätsprofessor Dr. phil. Wolfgang Wertz im Wintersemester 2007/2008 an der TU Wien gehalten wurde, weckte mein Interesse an der mathematischen Theorie der Fraktale. Besonders interessiert haben mich das Hausdorff-Maß bzw. die Hausdorff-Dimension, sodass ich mich mit fraktalen Dimensionen weiter beschäftigt habe. Dabei stieß ich auch auf die Box-Dimension und ihre empirische Anwendung in der Medizin, wobei mich vor allem Anwendungen auf Tumoren fasziniert haben. Dies brachte mich auf die Idee, meine Diplomarbeit über Fraktale bzw. fraktale Dimensionen mit einem Anwendungsteil zu schreiben, auch auf die Gefahr hin, dass diese Anwendung unerwartete Ergebnisse liefern könnte oder auf Grund praktischer Schwierigkeiten nicht wie geplant durchführbar wäre. Ein Großteil der Arbeit sollte der mathematischen Theorie gewidmet sein, ein kurzer medizinischer Teil sollte der Beschreibung von Tumoren dienen, mit denen wir im letzten Teil arbeiten würden.

Eine besondere Herausforderung dieser Arbeit stellte vor allem der Anwendungsteil dar, da sehr viele praktische Probleme, die man ganz außer Acht lässt, wenn man sich mit der Theorie beschäftigt, zu lösen waren. Dennoch war es sehr spannend, diese Probleme aufzuzeigen, aufzuarbeiten und während der Arbeit zu sehen, wo aus praktischer Sicht bzw. auf Grund der zur Verfügung stehenden Mitteln die Grenzen einer Anwendung liegen.

Zu bemerken sei, dass die Zitierweise in der gesamten Arbeit, also auch im medizinischen bzw. biologischen Teil, der mathematisch üblichen entspricht. Bücher, auf die im Text dezitiert verwiesen wurden, finden sich in den Referenzen, alle Quellen, die verwendet wurden, um diese Arbeit zu verfassen, sind in dem Literaturverzeichnis zusammengefasst.

Kapitel 1

Einleitung

Betrachtet man das abgeschlossene Einheitsintervall $\mathcal{C}_0 := [0, 1]$ in \mathbb{R} (wir können aber auch von anderen Intervallen ausgehen) und entfernt das mittlere offene Intervall, d. h. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, so erhält man $\mathcal{C}_1 := I_{1,1} \cup I_{1,2} := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Entfernt man nun aus den beiden Teilintervallen, aus denen sich \mathcal{C}_1 zusammensetzt, wieder jeweils das mittlere offene Intervall und vereinigt die verbleibenden Intervalle, so bildet man \mathcal{C}_2 . Fährt man so induktiv fort, dann besteht $\mathcal{C}_n := I_{n,1} + \dots + I_{n,2^n}$ $n \in \mathbb{N}$ also aus 2^n abgeschlossenen Intervallen der Länge $\frac{1}{3^n}$ und man erhält \mathcal{C}_{n+1} , indem man aus $I_{n,i}$ $i = 1, \dots, 2^n$ jeweils das mittlere offene Intervall entfernt und die verbleibenden vereint.

Den Durchschnitt der Mengen \mathcal{C}_n , $\mathcal{C} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, bezeichnet man als *Cantormenge* oder auch als *Cantorsches Diskontinuum* bzw. *Wischmenge*. Die Cantormenge ist kompakt, abgeschlossen, überabzählbar, *nirgends dicht*, d. h. $\overline{\mathcal{C}}^\circ = \emptyset$, das Innere des Abschlusses ist also leer, *perfekt*, d. h. \mathcal{C} ist abgeschlossen und jeder Punkt von \mathcal{C} ist Häufungspunkt (für die Beweise dieser Eigenschaften verweisen wir auf [1], Seite 37, 40) und sie ist eine der einfachsten *fraktalen Mengen*.

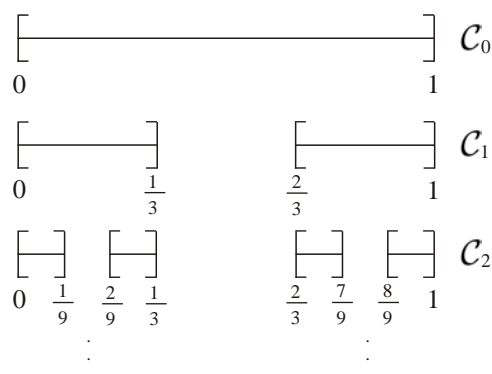


Abbildung 1.1: *Klassische Konstruktion der Cantormenge.*

Ein anderes Standardbeispiel eines Fraktals ist die *von Kochsche Kurve* bzw. *Kochkurve*, auch *Schneeflockenkurve* genannt, die eigentlich als Beispiel einer

überall stetigen aber an keiner Stelle differenzierbaren Funktion konstruiert wurde.

Dabei geht man üblicherweise von einem Streckenzug der Länge $l < \infty$ in der Ebene \mathbb{R}^2 aus und entfernt das mittlere Drittel der Strecke. Über den dadurch entstehenden Spalt legt man nun zwei Strecken der Länge $\frac{1}{3} \cdot l$ in Form eines gleichschenkeligen Dreiecks und wiederholt diese Vorgehensweise nun für alle vier Teilstrecken usw. (siehe Abbildung 1.2).

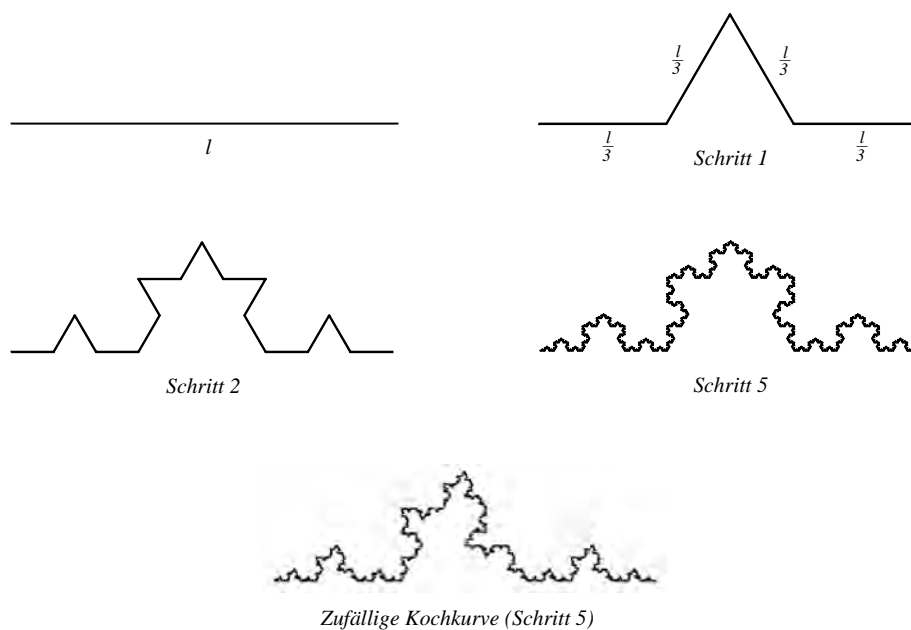


Abbildung 1.2: Konstruktionsschritte der Kochkurve und eine zufällige Kochkurve.

Die Länge der von Kochschen Kurve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} \cdot l$ strebt trivialerweise gegen ∞ , die Fläche zwischen der von Kochschen Kurve und unserer Ausgangsstrecke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l^2 \cdot \frac{1}{12 \cdot \sqrt{3}} + l^2 \cdot \frac{4}{12 \cdot \sqrt{3} \cdot 9} + \dots + l^2 \cdot \frac{4^n}{12 \cdot \sqrt{3} \cdot 9^n}$$

als geometrische Reihe mit multiplikativen Faktor $\frac{4}{9} < 1$ ist beschränkt.

Das *Sierpińskidreieck* oder auch *Sierpińskisieb* in \mathbb{R}^2 erhält man, indem man von einem beliebigen Dreieck ausgeht, jenes Dreieck, das durch Verbinden der Mittelpunkte der drei Seiten entsteht, entfernt und diesen Vorgang für die verbleibenden drei Dreiecke wiederholt usw.. Während der Flächeninhalt des Sierpińskidreiecks gegen 0 strebt, ist sein „Umfang“, d. h. die Summe der Umfänge der kleinen übrigbleibenden Dreiecke ∞ .

Wären die drei angeführten Beispiele fraktale Mengen in \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 , so erhält man ein Fraktal in \mathbb{R}^3 , wenn man das Sierpińskidreieck im Dreidimensionalen betrachtet. Dabei geht man anstatt von einem Dreieck von einem Tetraeder



Abbildung 1.3: Konstruktion des Sierpińskidreiecks ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck in \mathbb{R}^2 .

aus und schneidet keine Dreiecke, sondern die mittleren Oktaeder mit halber Seitenlänge heraus.

Interessant ist, dass wir das Sierpińskidreieck mit einer anderen Konstruktionsmethode, bei der der Zufall stark einfließt, nämlich dem *Chaos-Spiel*, auch erhalten können. Dabei bestimme man drei Punkte A , B und C in der Ebene, die die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks darstellen sollen. Nun wählt man einen beliebigen Punkt x_0 in der Ebene und bestimmt weiters einen der Eckpunkte zufällig. Man verbindet den Eckpunkt mit x_0 und definiert den Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke als x_1 . Danach hält man dann x_1 fest, wählt wieder einen der Punkte A , B oder C aus und verbindet x_1 mit diesem Punkt. Den Mittelpunkt dieser Verbindungsstrecke bezeichnet man dann als x_2 . Fährt man so immer weiter fort, so nähert sich die Figur, die man erhält immer mehr dem Sierpińskidreieck an.

Generell spielt der Zufall beim Aufbau vieler Fraktale eine wichtige Rolle. So sind z. B. die Pfade der Brownschen Bewegung oder die Küste Norwegens zufällige Fraktale und bilden oft die Basis für computergezeichnete Landschaften. Während wir also bei deterministischen Fraktalen unsere Konstruktionsparameter fest wählen, arbeiten wir bei zufälligen Versionen z. B. mit Zufallsvariablen, verschiedenen Verteilungen und flexiblen Parametern. Eine Möglichkeit, die Cantormenge, nicht, wie im obigen Fall, deterministisch zu konstruieren, sondern den Zufall einfließen zu lassen, wollen wir kurz andeuten.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $X_i^k \forall i = 1, \dots, 2^k$ Zufallsvariablen. Weiters setzen wir voraus, dass $X_i^k > 0 \forall i = 1, \dots, 2^k$ und $X_{2j-1}^k + X_{2j}^k < 1 \forall j = 1, \dots, 2^{k-1}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge $\{(x, y) : x + y > 0 \wedge x + y < 1\}$ bezeichnen wir mit \mathbb{P} und es gelte $(X_{2j-1}^k, X_{2j}^k) \sim \mathbb{P} \forall k \in \mathbb{N} \forall j = 1, \dots, 2^{k-1}$.

Es sei wieder $\mathcal{C}_0 := [0, 1]$. Welches Intervall wir nun aber entfernen bzw. wie die Anfangs- und Endpunkte der Intervalle nach jedem Schritt aussehen, hängt von unseren Zufallsvariablen ab. Wir definieren

$$\mathcal{C}_1^{\text{Zufall}} := [0, X_1^1] \cup [1 - X_2^1, 1]$$

$$\mathcal{C}_2^{\text{Zufall}} := [0, X_1^1 \cdot X_1^2] \cup [X_1^1 \cdot (1 - X_2^2), X_1^1] \cup [1 - X_2^1, 1 - X_2^1 + X_2^1 \cdot X_3^2] \cup [1 - X_2^1 \cdot X_4^2, 1]$$

usw. und bilden dann, um die Cantormenge zu erhalten, den Durchschnitt über diese Mengen, d. h.

$$\mathcal{C}^{\text{Zufall}} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n^{\text{Zufall}}.$$

Fraktale können, im Gegensatz zu den oben genannten Beispielen, auch sehr komplizierte geometrische Objekte darstellen. Betrachten wir z. B. folgende

Definition 1.1. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 2$, also $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$ mit $a_i \in \mathbb{C} \forall i = 0, \dots, n$ $a_n \neq 0$ und bezeichne f^k die k -fache Hintereinanderausführung der Funktion f . Dann heißt

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(z) \neq \infty\}$$

die *ausgefüllte Julia-Menge* von f und $J(f) := \partial K(f) := \overline{K(f)} \setminus K(f)^\circ$, also der Rand von $K(f)$, die *Julia-Menge* von f .

Das Komplement einer Julia-Menge $F(f) := \mathbb{C} \setminus J(f)$ nennt man *Fatou-Menge*.

Im Allgemeinen sind Julia-Mengen fraktale Mengen, die mit Hilfe von Computerprogrammen farbig dargestellt werden können - wir wollen auf die Art und Weise wie dies geschieht, d. h. auf die zu Grunde liegenden Algorithmen nicht eingehen und verweisen auf [2] (Seite 131-134), wo die Vorgehensweise anhand von Funktionen der Form $f(z) = z^2 + c$ $c \in \mathbb{C}$ geschildert wird - wobei dies Benoît Mandelbrot erstmals gelang. Auch folgende Definition geht auf ihn zurück.

Definition 1.2. Sei $f_c(z) := z^2 + c$ eine Funktion von \mathbb{C} nach \mathbb{C} mit $c \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$M_J := \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ ist zusammenhängend}\}$$

Mandelbrot-Menge oder auch *Apfelmännchen*.

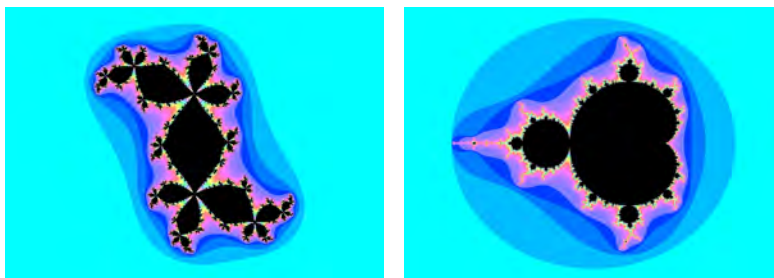


Abbildung 1.4: *Julia-Menge* von $f_c(z) = z^2 + c$ mit $c = 0.28 + 0.528 \cdot i$ (links) und *Mandelbrotmenge* (rechts) in der Gaußschen Zahlenebene in schwarz.

Fraktale (lat. *fractus*=*gebrochen*) sind also äußerst vielfältige geometrische Objekte, die sowohl in eindimensionalen als auch höherdimensionalen Räumen vorkommen, Graphen von Funktionen sein können, einfache wie auch komplizierte Strukturen aufweisen können und nicht in ein einheitliches Schema einzupassen sind. Diese Tatsache erschwert es natürlich, eine mathematisch präzise Definition eines Fraktals zu geben, die auf *alle* fraktalen Mengen zutrifft. Wie in

[3] (Seite xi) geben wir deshalb eine Reihe von Eigenschaften vor, die für viele Fraktale typisch ist:

„**Definition**“: Sei F eine Menge des euklidischen Raumes und besitze alle oder die meisten der folgenden Eigenschaften:

- (1) F hat eine feine Struktur, die auf beliebig kleinen Skalen Unregelmäßigkeiten aufweist.
- (2) F ist zu unregelmäßig, um, sowohl global als auch lokal, mit traditionellen geometrischen Methoden beschrieben werden zu können.
- (3) F ist selbstähnlich oder selbstaffin, mitunter in statistischem oder approximativem Sinn.
- (4) Die „fraktale Dimension“ von F ist strikt größer als die topologische.
- (5) F hat eine sehr einfache, mitunter rekursive, Definition.
- (6) F hat ein „natürliches“ Aussehen.

Dann ist F ein *Fraktal* bzw. eine *fraktale Menge*.

Es müssen also nicht alle der sechs Eigenschaften, aber möglichst viele, erfüllt sein, damit man von einem Fraktal sprechen kann. Man kann nicht erwarten, dass z. B. jede fraktale Menge eine einfache Definition hat, oder, dass die Dimensionswerte immer verschieden sind, auch wenn das gewöhnlicherweise der Fall ist. So gibt es hochirreguläre (fraktale) Mengen, die Punkt (4) verletzen. Auf den Begriff der „fraktalen Dimension“ bzw. generell auf Dimensionsfragen werden wir in Kapitel 2 eingehen, was bedeuten nun aber die Begriffe selbstähnlich oder selbstaffin?

Mathematisch unpräzise formuliert, heißt eine Menge *selbstaffin*, wenn sie eine Zusammensetzung endlich vieler Mengen ist, die Bilder affiner Abbildungen auf die ursprüngliche Menge selbst sind. Ein Spezialfall selbstaffiner Mengen, sind selbstähnliche Menge. Wir sagen, dass eine Menge *selbstähnlich* ist, wenn sie aus Teilen zusammengesetzt ist, die, in gewissem Sinne, der gesamten Menge ähnlich sind.

Betrachten wir z. B. die Kochkurve und schneiden einen beliebig kleinen Teil aus ihr heraus, so ist dieser Teil einfach eine verkleinerte Kopie der ganzen Kurve und wir sagen die Kochkurve ist selbstähnlich bzw. *strikt selbstähnlich* oder *exakt selbstähnlich*.

Eine Abschwächung dieses Begriffes ist der der partiellen Selbstähnlichkeit, der in [4] (Seite 157) erwähnt wird. Wir nennen eine Menge *partiell selbstähnlich*, wenn sie mindestens zu einer ihrer echten Teilmengen ähnlich ist.

Betrachten wir nun die Julia-Menge aus Abbildung 1.4, so ist sie nicht streng

selbstähnlich aber *quasi-selbstähnlich* bzw. *approximativ selbstähnlich*, d. h., dass man beliebig kleine Teile der Menge durch Vergrößerung, leichte Drehung und Verzerrung so transformieren kann, dass sie mit einem größeren Teil der Menge annähernd übereinstimmen. Das Fraktal enthält somit kleine Kopien von sich selbst in degenerierter Form.

Gehen wir nun von der *zufälligen Kochkurve* aus, also der Kurve, die entsteht, wenn man ähnlich zur Konstruktion der Kochkurve vorgeht, aber bei jedem Schritt den Zufall entscheiden lässt auf welcher Seite die neu gebildeten Streckenzüge liegen (siehe Abbildung 1.2). Selbstähnlichkeit ist in diesem Beispiel zweifellos vorhanden, jedoch nicht in strikter Form, da die Gestalt der Kurve ja sehr stark vom Zufall abhängt. Wir sagen unser Fraktal ist *statistisch selbstähnlich* oder *stochastisch selbstähnlich*.

Obwohl man also bei Fraktalen eine feine Struktur - d. h. auf jeder noch so kleinen Skala sind Details vorhanden - voraussetzen kann, gilt das nicht für die strikte Selbstähnlichkeit. So kann ein Fraktal z. B. auch nur approximativ selbstähnlich sein. Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass klarerweise nicht jede Menge, die selbstähnlich ist, ein Fraktal sein muss. Ein einfaches Beispiel dafür erhält man, wenn man ein Quadrat in der Ebene mit Seitenlänge a betrachtet, das aus neun Quadraten mit Seitenlänge $\frac{a}{3}$ zusammengesetzt ist. Diese Menge ist strikt selbstähnlich aber kein Fraktal.

Interessant, wenn auch anschaulich plausibel, ist die Tatsache, dass viele Objekte aus dem biologischen oder medizinischen Bereich annähernd fraktale Struktur haben bzw. durch Fraktale gut approximiert werden können. Mit der *fraktalen Geometrie*, die eine Erweiterung der klassischen Geometrie darstellt, also jener, deren Grundelemente z. B. Geraden, Kreise, Dreiecke, Kugeln, Kegeln und Würfel sind, ist es möglich, diese Objekte genauer beschreiben zu können. So kann man mit ihr - im Gegensatz zu klassischen Methoden - z. B. die physikalischen Strukturen eines Farns modellieren. Es drängt sich also die Frage auf, ob nicht auch Tumoren bzw. Tumorzellen approximativ fraktalen Aufbau aufweisen und man die mathematische Theorie der Fraktale auf sie anwenden kann, um aus ihr auch für die praxisorientierte Medizin nützliche Ergebnisse zu gewinnen.

Mit dieser Thematik werden wir uns in der folgenden Arbeit beschäftigen.

Kapitel 2 widmet sich dabei der mathematischen Theorie der Fraktale. Dazu führen wir die Hausdorff-Metrik h ein und betrachten, ausgehend von metrischen Räumen, die Räume (\mathfrak{F}, h) und (\mathfrak{K}^-, h) . Wir werden sehen, dass diese metrischen Räume unter bestimmten Voraussetzungen vollständig sind und sich gut eignen, um mit Fraktalen zu arbeiten. In diesem Zusammenhang werden iterierte Funktionensysteme und der Banachsche Fixpunktsatz eine wichtige Rolle spielen. Ein kurzer, das Collage-Theorem beinhaltender, Abschnitt soll zeigen, wie man mit iterierten Funktionensystemen Bilder der realen Welt praktisch approximieren kann. Den größten Teil dieses Kapitels werden die fraktalen Dimensionen ausmachen. Dabei beschäftigen wir uns mit der Hausdorff- und der Box-Dimension und geben auch eine Definition der Ähnlichkeitsdimension an. Wir werden Eigenschaften, Vorteile und Nachteile dieser Dimensionsbegriffe auflisten und ih-

ren Zusammenhang untersuchen. Unter bestimmten Voraussetzungen werden wir zeigen, dass alle drei Dimensionswerte übereinstimmen. Weiters werden wir sehen, wie sich die Dimensionen von Mengen unter Projektionen, Schnitten und Produktbildung verhalten.

In Kapitel 3 gehen wir zuallererst auf den Aufbau und die Funktionen der menschlichen Zelle ein, da Tumoren ja aus entarteten Zellen entstehen. Danach geben wir eine Definition von Tumoren an, Faktoren, die die Entstehung eines Tumors begünstigen und beschäftigen uns auch mit dem Tumorwachstum. Schließlich werden wir die heute gültige Klassifikation und Nomenklatur von Tumoren angeben und die Folgen eines Tumors kurz anführen.

Kapitel 4 umfasst den Anwendungsteil dieser Arbeit. Dabei bildet die empirische Box-Dimension einen zentraler Punkt, deren Vor- und Nachteile wir uns überlegen werden. Wir werden das Resultat einer Publikation, die den Zusammenhang zwischen atypischen Zellen und ihren Box-Dimensionswerten untersucht, anführen, sie einer kritischen Analyse unterziehen und Verbesserungsvorschläge angeben. Danach werden wir selbst Tumorzellen bezüglich ihrer Box-Dimension auswerten.

Kapitel 2

Fraktale

Wir beginnen mit dem Aufbau unserer Theorie ähnlich wie in [5].

2.1 Die Hausdorff-Metrik

Als Erstes wiederholen wir den Begriff eines metrischen Raumes:

Definition 2.1. Sei Ω eine Menge und $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \Omega$, wobei $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \Omega$
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \Omega$ (*Dreiecksungleichung*).

Dann ist d eine *Metrik auf Ω* und (Ω, d) ein *metrischer Raum*.

Lässt man für d auch den Funktionswert ∞ zu, so heißt die Metrik eine *erweiterte Metrik* und (Ω, d) ein *erweiterter metrischer Raum*.

Definition 2.2. Sei Ω eine Menge und seien d_1 und d_2 zwei Metriken auf Ω . Dann heißen sie *äquivalent*, falls Konstanten $\alpha > 0$, $\beta > 0$ existieren, sodass für alle $x, y \in \Omega$

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y) \text{ gilt.}$$

Definition 2.3. Zwei metrische Räume (Ω, d) und $(\tilde{\Omega}, \tilde{d})$ sind *äquivalent*, falls es eine bijektive Abbildung $g : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ gibt, sodass die Metrik $d_g(x, y) := \tilde{d}(g(x), g(y))$ mit $x, y \in \Omega$ zu d äquivalent ist.

Eine Metrik ist also ein Abstands begriff, mit dem wir den Abstand zweier Punkte einer Menge messen können, wobei wir durch unterschiedliche Abstands begriffe auch unterschiedlich große Abstände erhalten.

Im Folgenden wollen wir nun eine Metrik konstruieren, deren Argumente Mengen sind.

Definition 2.4. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $A, B \subseteq \Omega$. Dann definiert

$$\text{dist}(A, B) := \begin{cases} \inf_{x \in A, y \in B} \{d(x, y)\}, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } B \neq \emptyset \\ \infty, & \text{falls entweder } A = \emptyset \text{ oder } B = \emptyset \\ 0, & \text{falls } A = \emptyset \text{ und } B = \emptyset \end{cases}$$

den Abstand der Mengen A und B bezüglich der Metrik d .

Ist $C \subseteq \Omega$ und $x \in \Omega$, dann ist

$$\text{dist}(x, C) := \text{dist}(\{x\}, C)$$

als Abstand der Menge C und des Punktes x bezüglich der Metrik d definiert.

Bemerkung. Es sei bemerkt, dass dist nur dem Aufbau der Metrik, die wir suchen, dient, selbst aber natürlich keine Metrik ist, da z. B. $\text{dist}(A, B) = 0$ für nichtleeres $A \subsetneq B$.

Hilfssatz 2.1. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $x, y \in \Omega$ beliebig und $A \subseteq \Omega$. Dann folgt

- (i) $\text{dist}(x, A) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, A)$, d. h. es gilt eine Art Dreiecksungleichung;
- (ii) $|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq \text{dist}(x, y)$, falls A zusätzlich nichtleer ist;
- (iii) die Abbildung $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ ist gleichmäßig stetig auf Ω , falls A zusätzlich nichtleer ist.

Beweis. (i) Falls A die leere Menge ist, folgt (i) trivialerweise aus der Definition des Abstandes zweier Mengen. Sei im Folgenden also $A \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert $\eta \in A$, sodass

$$d(y, \eta) = \text{dist}(y, \eta) \leq \varepsilon + \text{dist}(y, A).$$

Damit erhalten wir

$$\text{dist}(x, A) \leq \text{dist}(x, \eta) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, \eta) \leq \text{dist}(x, y) + \varepsilon + \text{dist}(y, A)$$

und wenn ε gegen 0 geht die behauptete Ungleichung.

(ii) folgt direkt aus (i), (iii) aus (ii). □

Definition 2.5. Sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, also eine Teilmenge der Potenzmenge von Ω und gelte:

1. $\emptyset \in \mathfrak{G}$, $\Omega \in \mathfrak{G}$
2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G_1, \dots, G_n \in \mathfrak{G}$, so folgt $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathfrak{G}$
3. Sei I eine Indexmenge und $G_i \in \mathfrak{G} \forall i \in I$, so folgt $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{G}$.

Dann ist \mathfrak{G} eine Topologie auf Ω und (Ω, \mathfrak{G}) ein topologischer Raum. Die Elemente von \mathfrak{G} bezeichnet man als offene Mengen.

Definition 2.6. Sei (Ω, \mathfrak{G}) ein topologischer Raum. Dann heißt er *Hausdorff-Raum* oder *T_2 -Raum*, wenn gilt:

Für je zwei Punkte $x, y \in \Omega, x \neq y$, existieren zwei disjunkte offene Mengen

$$G_x \text{ und } G_y, \text{ sodass } x \in G_x \text{ und } y \in G_y.$$

Definition 2.7. Sei (Ω, \mathfrak{G}) ein topologischer Raum, I eine Indexmenge und $A \subseteq \Omega$. Dann heißt eine Familie $\mathcal{G} := \{G_i : i \in I\}$ offener Mengen eine *offene Überdeckung von A* , falls

$$\bigcup_{i \in I} G_i \supseteq A$$

gilt. Existiert eine Teilmenge von \mathcal{G} , die auch eine offene Überdeckung von A ist, so heißt sie eine *Teilüberdeckung von A* .

Definition 2.8. Sei (Ω, \mathfrak{G}) ein topologischer Raum und K eine Teilmenge von Ω . Dann heißt K *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Hilfssatz 2.2. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und seien A und B nichtleere kompakte Teilmengen von Ω .

Dann existieren $\xi \in A$ und $\eta \in B$, sodass $\text{dist}(A, B) = d(\xi, \eta)$.

Beweis. Da die Funktion $f(x) := \text{dist}(x, B)$ für festes nichtleeres $B \subseteq \Omega$ nach Hilfssatz 2.1 (iii) stetig auf Ω , also insbesondere auch auf $A \subseteq \Omega$ ist und A nach Voraussetzung kompakt ist, nimmt f sein Infimum auf A an. D. h. es existiert ein $\xi \in A$, sodass

$$\text{dist}(\xi, B) = \inf_{x \in A} \{\text{dist}(x, B)\} = \text{dist}(A, B).$$

Da auch die Abbildung $g(y) := d(\xi, y)$ für festes $\xi \in A$ stetig auf der kompakten Menge B ist, existiert ein $\eta \in B$, sodass

$$d(\xi, \eta) = \inf_{y \in B} \{d(\xi, y)\} = \text{dist}(\xi, B)$$

und somit $d(\xi, \eta) = \text{dist}(A, B)$ gilt. □

Hilfssatz 2.3. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq \Omega$. Dann gilt $\text{dist}(x, A) = \text{dist}(x, \overline{A})$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Da die leere Menge abgeschlossen ist, also $\emptyset = \overline{\emptyset}$ gilt, ist die Gleichung für $A = \emptyset$ trivial. Sei also $A \neq \emptyset$.

Nach Definition von dist ist die Ungleichung $\text{dist}(x, A) \geq \text{dist}(x, \overline{A})$ trivial.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $y_\varepsilon \in \overline{A}$, sodass $\text{dist}(x, y_\varepsilon) \leq \text{dist}(x, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Da y_ε im Abschluss von A liegt, gibt es auf jeden Fall ein $z_\varepsilon \in A$, sodass $d(y_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, also gilt $d(x, z_\varepsilon) \leq \text{dist}(x, \overline{A}) + \varepsilon$. Lassen wir nun ε gegen 0 gehen, so erhalten wir $\text{dist}(x, A) \leq \text{dist}(x, \overline{A})$. □

Definition 2.9. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und seien A und B Teilmengen von Ω . Dann bezeichnet

$$e(A, B) := \begin{cases} \sup_{x \in A} \{dist(x, B)\}, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } B \neq \emptyset \\ \infty, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } B = \emptyset \\ 0, & \text{falls } A = \emptyset \end{cases}$$

den *Exzess von A über B*.

Bemerkung. Der Exzess sagt aus, um wie viel eine Menge B von einer Menge A überragt wird.

Hilfssatz 2.4. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und seien A, B Teilmengen von Ω . Dann gilt

$$(i) \quad e(A, B) = e(A, \overline{B});$$

$$(ii) \quad e(A, B) = e(\overline{A}, B);$$

$$(iii) \quad e(A, B) = e(\overline{A}, \overline{B}).$$

Beweis. Ist eine der Mengen A und B oder sind beide Mengen gleich der leeren Menge, so folgen (i)-(iii) sofort aus der Definition des Exzesses. Gelte also $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$.

(i) Setzt man einfach in die Definition des Exzesses ein, so erhält man

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} \{dist(x, B)\} \stackrel{\text{Hilfssatz 2.3}}{=} \sup_{x \in A} \{dist(x, \overline{B})\} = e(A, \overline{B}).$$

(ii) Einerseits gilt

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} \{dist(x, B)\} \leq \sup_{x \in \overline{A}} \{dist(x, B)\} = e(\overline{A}, B).$$

Sei andererseits $\varepsilon > 0$, dann existiert $x_\varepsilon \in \overline{A}$, sodass für $y \in \Omega$ beliebig

$$e(\overline{A}, B) = \sup_{x \in \overline{A}} \{dist(x, B)\} \leq dist(x_\varepsilon, B) + \frac{\varepsilon}{2} \stackrel{\text{Hilfssatz 2.1(i)}}{\leq} d(x_\varepsilon, y) + dist(y, B) + \frac{\varepsilon}{2}$$

und für jedes solche $x_\varepsilon \in \overline{A}$ existiert ein $y_\varepsilon \in A$, sodass $dist(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Damit folgt

$$e(\overline{A}, B) \leq dist(y_\varepsilon, B) + \varepsilon,$$

also auch

$$e(\overline{A}, B) \leq \sup_{y \in A} \{dist(y, B)\} + \varepsilon = e(A, B) + \varepsilon.$$

Lassen wir ε gegen 0 gehen, so folgt (ii).

(iii) folgt unmittelbar aus (i) und (ii):

$$e(A, B) \stackrel{(i)}{=} e(A, \overline{B}) \stackrel{(ii)}{=} e(\overline{A}, \overline{B}).$$

□

Hilfssatz 2.5. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq \Omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$(i) \ e(A, B) = 0 \quad (ii) \ A \subseteq \overline{B} \quad (iii) \ \overline{A} \subseteq \overline{B}$$

Beweis. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist trivial, sodass nur (i) \Leftrightarrow (ii) zu zeigen ist.

(i) \Rightarrow (ii): Gelte $e(A, B) = 0$, dann können nach Definition des Exzesses folgende zwei Fälle eintreten:

Fall 1: $A = \emptyset$ und B ist beliebig. In diesem Fall gilt die Implikation trivialerweise.

Fall 2: A und B sind ungleich der leeren Menge. Dann folgt aus Hilfssatz 2.4 (i) für alle $x \in A$

$$0 = e(A, \overline{B}) \geq \text{dist}(x, \overline{B}) = \inf_{y \in \overline{B}} \{d(x, y)\}.$$

Also gilt $\inf_{y \in \overline{B}} \{d(x, y)\} = 0$. Hält man $x \in A$ fest, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass ein $x_n \in \overline{B}$ existiert, sodass

$$d(x, x_n) \leq \frac{1}{n},$$

was $x_n \rightarrow x$ bedeutet. Da \overline{B} abgeschlossen ist, ist $x \in \overline{B}$, also $A \subseteq \overline{B}$.

(ii) \Rightarrow (i): Sei nun umgekehrt $A \subseteq \overline{B}$. Diese Inklusion gilt sicher, falls $A = \emptyset$, woraus sofort $e(A, B) = 0$ folgt, aber nicht für $A \neq \emptyset, B = \emptyset$. Seien also $A, B \neq \emptyset$. Dann folgt $\text{dist}(x, \overline{B}) = 0$ für alle $x \in A$, damit $e(A, \overline{B}) = 0$ und mit Hilfssatz 2.4 (i) $e(A, B) = 0$. \square

Hilfssatz 2.6. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und seien $A, B, C \subseteq \Omega$. Dann gilt folgende Ungleichung:

$$e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C).$$

Beweis. Falls mindestens eine der Mengen A, B oder C gleich der leeren Menge ist, folgt die Ungleichung trivialerweise.

Seien also $A, B, C \neq \emptyset$ und setzen wir voraus, dass $e(A, B) + e(B, C) < \infty$, da die Ungleichung andernfalls trivial ist.

Sei $x \in A$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $y \in B$, sodass $d(x, y) \leq \text{dist}(x, B) + \varepsilon$. Daraus folgt mit Hilfssatz 2.1 (i)

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, C) &\leq d(x, y) + \text{dist}(y, C) \leq \text{dist}(x, B) + \varepsilon + \text{dist}(y, C) \leq \\ &\leq e(A, B) + e(B, C) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $x \in A$ beliebig war, erhalten wir

$$e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C) + \varepsilon$$

und mit ε gegen 0 die behauptete Ungleichung. \square

Hilfssatz 2.7. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, seien A_1, A_2, B und C Teilmengen von Ω und $x \in \Omega$. Dann gilt

$$(i) \quad e(A_1 \cup A_2, B) = \max\{e(A_1, B), e(A_2, B)\};$$

$$(ii) \quad \text{dist}(x, C) \leq \text{dist}(x, B) + e(B, C).$$

Beweis. Ist in (i) bzw. in (ii) mindestens eine der Mengen A_1, A_2, B bzw. C gleich der leeren Menge, so folgt unsere Behauptung sofort aus der Definition des Exzesses und des Abstandes zweier Mengen. Seien also alle Mengen ungleich der leeren.

(i) Nach Definition des Exzesses gilt $e(A_1 \cup A_2, B) \geq e(A_i, B)$ $i = 1, 2$.

Andererseits gilt

$$\text{dist}(x, B) \leq e(A_1, B) \quad \text{für alle } x \in A_1$$

$$\text{dist}(x, B) \leq e(A_2, B) \quad \text{für alle } x \in A_2,$$

also insgesamt

$$e(A_1 \cup A_2, B) = \sup_{x \in A_1 \cup A_2} \{\text{dist}(x, B)\} \leq \max\{e(A_1, B), e(A_2, B)\}$$

(ii) Nach Hilfssatz 2.1 (i) gilt für $x' \in B$

$$\text{dist}(x, C) \leq d(x, x') + \text{dist}(x', C) \leq \text{dist}(x, x') + e(B, C).$$

Da $x' \in B$ beliebig war, gilt sicherlich auch $\text{dist}(x, C) \leq \text{dist}(x, B) + e(B, C)$. \square

Definition 2.10. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq \Omega$. Dann bezeichnet

$$\delta(A) := \begin{cases} \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\}, & \text{falls } A \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } A = \emptyset \end{cases}$$

den Durchmesser von A .

Hilfssatz 2.8. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq \Omega$. Dann gilt

$$e(A, B) \leq \delta(A) + \text{dist}(A, B).$$

Beweis. Da die Ungleichung im Falle, dass mindestens eine der Mengen die leere Menge ist, klarerweise erfüllt ist, müssen wir nur noch den Fall $A, B \neq \emptyset$ betrachten.

Ist A unbeschränkt, so folgt $\delta(A) = \infty$ und die Ungleichung ist trivialerweise erfüllt.

Sei also A beschränkt und somit $\delta(A) < \infty$. Für $\varepsilon > 0$ fest gibt es $\xi \in A, \eta \in B$, sodass $d(\xi, \eta) \leq \text{dist}(A, B) + \varepsilon$ und für beliebiges $x \in A$ gilt $d(x, \xi) \leq \delta(A)$. Sei $c < e(A, B)$, dann existiert $x \in A$, sodass $c \leq \text{dist}(x, B)$. Falls $e(A, B) = 0$ existiert kein solches c , in diesem Fall ist aber die Ungleichung trivialerweise erfüllt.

Insgesamt erhalten wir

$$c \leq \text{dist}(x, B) \stackrel{\eta \in B}{\leq} d(x, \eta) \leq d(x, \xi) + d(\xi, \eta) \leq \delta(A) + \text{dist}(A, B) + \varepsilon$$

Lässt man ε gegen 0 und c gegen $e(A, B)$ gehen, so erhält man schließlich das Ergebnis. \square

Nun können wir eine Metrik definieren, die mit Mengen arbeitet und deren Abstand in gewisser Weise misst.

Definition 2.11. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq \Omega$. Dann ist

$$h(A, B) := \max\{e(A, B), e(B, A)\}$$

die *Hausdorff-Metrik von A und B*. Diese gibt an, um wie viel eine Menge A eine Menge B überragt und umgekehrt.

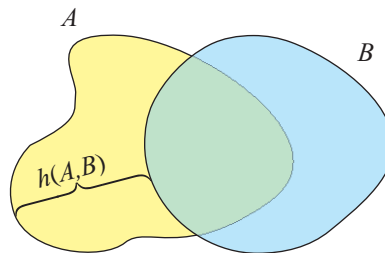


Abbildung 2.1: Hausdorff-Metrik der Mengen A und B aus (\mathbb{R}^2, d_2) .

Bemerkung. In [6] (Seite 330) wird die Hausdorff-Metrik als Metrik der Wahrnehmung beschrieben. Wenn wir also z. B. zwei Bilder betrachten und das eine vom anderen nur gering abweicht, so wird ihr h klein sein. Wächst eine Rose kontinuierlich dahin, so verändert sie sich in einem gewissen Zeitraum nur wenig - wir können sagen, sie wächst *stetig bezüglich der Hausdorff-Metrik*.

Eine Definition der Räume, auf denen h operieren kann, liefert

Definition 2.12. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum. Dann ist

$$\mathfrak{F} := \{F \subseteq \Omega : F \text{ ist abgeschlossen}\}$$

bzw.

$$\mathfrak{F}^- := \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\} = \{F \subseteq \Omega : F \neq \emptyset, \text{ abgeschlossen}\}$$

die Menge aller abgeschlossenen bzw. aller nichtleeren abgeschlossenen Mengen von Ω . Analog dazu bezeichnet

$$\mathfrak{K} := \{K \subseteq \Omega : K \text{ ist kompakt}\}$$

bzw.

$$\mathfrak{K}^- := \mathfrak{K} \setminus \{\emptyset\} = \{K \subseteq \Omega : K \neq \emptyset, \text{ kompakt}\}$$

die Menge aller kompakten bzw. aller nichtleeren kompakten Mengen von Ω .

Satz 2.9. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum. Die Hausdorff-Metrik h ist eine erweiterte Metrik auf $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^-, \mathfrak{K}$ und eine Metrik auf \mathfrak{K}^- .

Beweis. Betrachten wir zunächst die Räume \mathfrak{F} , \mathfrak{K} und \mathfrak{F}^- , so ist offensichtlich, dass die Werte von h in $[0, \infty]$ liegen. Lässt man nämlich wie im Fall \mathfrak{F} oder \mathfrak{K} entweder für A oder B \emptyset zu, so nimmt h nach Definition den Wert ∞ an. Nach Hilfssatz 2.8 erhalten wir die Ungleichung

$$h(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\} \leq \max\{\delta(A) + \text{dist}(A, B), \delta(B) + \text{dist}(B, A)\}.$$

Befindet man sich nun im Raum \mathfrak{K}^- , so sind die Mengen A, B nichtleer, beschränkt und abgeschlossen, also folgt (aus der Beschränktheit) $\delta(A) < \infty, \delta(B) < \infty$. Nach Hilfssatz 2.2 existieren $\xi \in A$ und $\eta \in B$, sodass $\text{dist}(A, B) = d(\xi, \eta)$, was wegen der Beschränktheit der Mengen kleiner als ∞ ist. Damit gilt $h(A, B) < \infty$.

Da die Mengen aus \mathfrak{F}^- zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt sein müssen, kann h auch hier den Wert ∞ annehmen.

Seien A, B, C nun aus $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^-, \mathfrak{K}$ oder \mathfrak{K}^- .

Ist $A = B$, so gilt $e(A, B) = e(B, A) = 0$, also $h(A, B) = 0$.

Umgekehrt folgt aus $h(A, B) = 0$, dass $e(A, B) = e(B, A) = 0$. Nach Hilfssatz 2.5 ist dies äquivalent zu $A \subseteq \overline{B}$ und $B \subseteq \overline{A}$. Da A und B nach Voraussetzung abgeschlossen sind, gilt $A = \overline{A}$ und $B = \overline{B}$, also $A = B$.

Die Symmetrie von h folgt trivialerweise aus seiner Definition.

Aus Hilfssatz 2.6 folgt

$$e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$$

$$e(C, A) \leq e(C, B) + e(B, A) \leq h(B, C) + h(A, B)$$

und insgesamt

$$h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$$

□

Bemerkung. Die Voraussetzung, dass die Mengen, mit denen man arbeitet, abgeschlossen sind, ist also wichtig, um zu zeigen, dass h eine Metrik ist.

Die Hausdorff-Metrik kann man auch über einen anderen Zugang definieren.

Definition 2.13. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq \Omega$ und $\delta > 0$. Dann heißt

$$A_\delta := \begin{cases} \{x \in \Omega : \exists a \in A : d(a, x) \leq \delta\}, & \text{falls } A \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{falls } A = \emptyset \end{cases}$$

die δ -Umgebung von A .

Definition 2.14. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq \Omega$. Dann bezeichnet

$$\eta(A, B) := \begin{cases} \inf\{\delta > 0 : A \subseteq B_\delta \wedge B \subseteq A_\delta\}, & \text{falls } A \text{ und } B \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } A = B = \emptyset \\ \infty, & \text{falls } A = \emptyset \text{ und } B \neq \emptyset \\ \infty, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } B = \emptyset \end{cases}$$

die Hausdorff-Metrik der Mengen A und B .

Dass sowohl η als auch h als Hausdorff-Metrik bezeichnet werden kann, muss gerechtfertigt werden. Dies liefert

Satz 2.10. *Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq \Omega$. Dann gilt $h(A, B) = \eta(A, B)$.*

Beweis. Falls mindestens eine der Mengen gleich der leeren Menge ist, folgt die Gleichheit sofort aus der Definition. Seien also A und B ungleich der leeren Menge.

Nehmen wir zunächst an, dass sowohl $h(A, B)$ als auch $\eta(A, B)$ kleiner ∞ sind.

„ \geq “ Es gelte $h(A, B) < \varepsilon$. Dann ist nach Definition der Hausdorff-Metrik h $e(A, B) < \varepsilon$ und $e(B, A) < \varepsilon$ und damit $dist(x, B) < \varepsilon$ für alle $x \in A$ bzw. $dist(y, A) < \varepsilon$ für alle $y \in B$.

Daraus folgt

$$\forall x \in A \exists y_x \in B : d(x, y_x) \leq \varepsilon \text{ und } \forall y \in B \exists x_y \in A : d(y, x_y) \leq \varepsilon, \text{ also} \\ A \subseteq B_\varepsilon \text{ und } B \subseteq A_\varepsilon \text{ und damit } \eta(A, B) \leq \varepsilon.$$

Lassen wir nun ε gegen $h(A, B)$ gehen, so erhalten wir $\eta(A, B) \leq h(A, B)$.

„ \leq “ Gelte umgekehrt $\eta(A, B) < \varepsilon$. Dann folgt $A \subseteq B_\varepsilon$ und $B \subseteq A_\varepsilon$. D. h.

$$\forall x \in A \exists y_x \in B : d(x, y_x) \leq \varepsilon \text{ und } \forall y \in B \exists x_y \in A : d(y, x_y) \leq \varepsilon.$$

Also gilt

$$\forall x \in A : dist(x, B) \leq \varepsilon \text{ und } \forall y \in B : dist(y, A) \leq \varepsilon.$$

Somit sind also $e(A, B)$ und $e(B, A)$ kleiner gleich als ε und auch $h(A, B)$. Mit $\varepsilon \downarrow \eta(A, B)$ erhält man $h(A, B) \leq \eta(A, B)$.

Die Gleichheit von $h(A, B)$ und $\eta(A, B)$ gilt auch für den Wert unendlich. Sei $h(A, B) = \infty$. Nehmen wir an, dass $\eta(A, B)$ nicht unendlich ist, so existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\eta(A, B) < \varepsilon$. Aus der vorigen Ungleichung würde daraus aber $h(A, B) < \varepsilon$ und somit ein Widerspruch folgen. Falls $\eta(A, B) = \infty$ geht man analog vor. \square

Folgerung 2.11. *Sei (Ω, d) ein metrischer Raum. η ist eine erweiterte Metrik auf $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^-, \mathfrak{K}$ und eine Metrik auf \mathfrak{K}^- .*

Beweis. Die Aussage folgt offensichtlich aus Satz 2.10 und Satz 2.9. \square

2.2 Vollständigkeit von (\mathfrak{F}, h) und (\mathfrak{K}^-, h)

Wir wiederholen einige Definitionen und einen Satz aus der Analysis.

Definition 2.15. Ein metrischer Raum (Ω, d) heißt *vollständig*, wenn jede *Cauchy-Folge* von Elementen in Ω , d. h. jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Ω , für die

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall m, n \geq N$$

gilt, gegen ein $x \in \Omega$ konvergiert.

Definition 2.16. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $x \in \Omega$. Dann bezeichnet $U_\varepsilon(x) := \{y \in \Omega : d(x, y) < \varepsilon\}$ bzw. $K_\varepsilon(x) := \{y \in \Omega : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ die *offene ε -Kugel* bzw. *abgeschlossene ε -Kugel* in Ω mit Mittelpunkt x und Radius ε . $A \subseteq \Omega$ heißt *total beschränkt*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in \Omega : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i).$$

Satz 2.12. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq \Omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) K ist kompakt.
- (ii) K ist total beschränkt und $(K, d|_{K \times K})$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
- (iii) K ist schwach abzählbar kompakt, d. h. jede unendliche Teilmenge von K besitzt einen Häufungspunkt.
- (iv) K ist folgenkompakt, d. h. jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K .

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) findet sich in [7] (Seite 276, Theorem 45.1 mit Beweis), für die Äquivalenz von (i), (iii) und (iv) verweisen wir auf [7] (Seite 179-181, Theorem 28.2 mit Beweis). \square

Dass (\mathfrak{F}, h) und (\mathfrak{K}, h) metrische Räume sind, haben wir bereits im letzten Abschnitt gesehen. Um die Vollständigkeit der beiden Räume zeigen zu können, benötigen wir einige Hilfssätze, die wir im Folgenden bereitstellen werden.

Hilfssatz 2.13. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und für $n \in \mathbb{N}$ A_n und $A \in \mathfrak{F}$ mit $A_n \rightarrow A$ bezüglich h . Dann ist

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}.$$

Beweis. Wir definieren $B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$ und bemerken, dass diese Menge aus \mathfrak{F} ist. Ist $A = \emptyset$, so können höchstens endlich viele A_n ungleich der leeren Menge sein, woraus $B = \emptyset$ folgt.

Sei also $A \neq \emptyset$. Um zu beweisen, dass $A = B$, zeigen wir $A \subseteq B$ und $A \supseteq B$.

„ \subseteq “ Sei $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$.

Wegen der Konvergenz der Folge bezüglich h existiert eine natürliche Zahl $k \geq n$, sodass $h(A, A_k) < \varepsilon$, d. h. es existiert $k \geq n$, sodass $\text{dist}(x, A_k) \leq e(A, A_k) < \varepsilon$. Daraus folgt aber, dass $\text{dist}(x, \bigcup_{k \geq n} A_k) < \varepsilon$ und mit ε gegen 0 $\text{dist}(x, \bigcup_{k \geq n} A_k) = 0$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $x \in \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$, d. h. $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k} = B$.

„ \supseteq “ Sei $x \in B$. Wir behaupten, dass A_n gegen $A \cup \{x\}$ bezüglich h konvergiert. Wir müssen also zeigen, dass

$$h(A_n, A \cup \{x\}) = \max\{e(A_n, A \cup \{x\}), e(A \cup \{x\}, A_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Da $h(A_n, A) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, folgt auch $e(A_n, A \cup \{x\}) \leq e(A_n, A) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Nach Hilfssatz 2.7 (i) gilt $e(A \cup \{x\}, A_n) = \max\{e(A, A_n), e(\{x\}, A_n)\}$, wobei auch $e(A, A_n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Es bleibt also zu zeigen, dass $e(\{x\}, A_n) = \text{dist}(x, A_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, um die Behauptung zu beweisen.

Da die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung konvergiert, ist sie eine Cauchyfolge, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : h(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, n \geq n_0(\varepsilon).$$

Außerdem folgt, da $x \in B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in \bigcup_{k \geq n} A_k : d(x, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \geq n$ existiert, sodass $y_n \in A_{k_n}$, d. h.

$$\text{dist}(x, A_{k_n}) \leq \text{dist}(x, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus Hilfssatz 2.7 (ii) folgt für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\text{dist}(x, A_n) \leq \text{dist}(x, A_{k_n}) + e(A_{k_n}, A_n) \leq \text{dist}(x, A_{k_n}) + h(A_{k_n}, A_n) < \varepsilon.$$

Also gilt $e(\{x\}, A_n) \rightarrow 0$ und $A_n \rightarrow A \cup \{x\}$ bezüglich h .

Da aber $A_n \rightarrow A$ bezüglich h , folgt aus der Eindeutigkeit des Limes und der Tatsache, dass $h(A_n, A) = h(A_n, \overline{A})$, dass $x \in \overline{A}$ gelten muss. Da A nach Voraussetzung abgeschlossen ist, ist $x \in A$. \square

Satz 2.14. (Ausdehnungssatz für Cauchy-Folgen oder Erweiterungslemma)
Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (\mathfrak{F}, h) und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $n_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, eine streng monoton wachsende Folge. Weiters sei $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Ω mit $x_{n_k} \in A_{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Dann existiert eine Cauchy-Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (Ω, d) mit $y_n \in A_n$, $y_{n_k} = x_{n_k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Idee: Wir konstruieren eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei wir $y_{n_k} := x_{n_k}$ definieren, die anderen y_m aus A_m mit $m \in \mathbb{N}$, $m \neq n_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ wählen, und zeigen, dass sie eine Cauchy-Folge ist.

Da nach Voraussetzung $x_{n_k} \in A_{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, können wir die $A_{n_k} \quad \forall n_k$ als nichtleer voraussetzen und $y_{n_k} := x_{n_k}$ setzen.

Nun zeigen wir, dass $A_n \neq \emptyset$ ab einem Index.

Da $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (\mathfrak{F}, h) ist, gilt $h(A_n, A_m) \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$.
D. h.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : h(A_m, A_n) \leq 1 \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Wäre nun $A_m = \emptyset$, $A_n \neq \emptyset$ $m, n \geq n_0$ (oder umgekehrt), so würde $h(A_n, A_m) = h(A_n, \emptyset) = \infty$ folgen, was ein Widerspruch zu $h(A_m, A_n) \leq 1$ ist. Damit die Eigenschaft einer Cauchy-Folge erfüllt ist, müssen die A_n also ab einem Index entweder gleich oder ungleich der leeren Menge sein, wobei der 1.

Fall die Voraussetzung, dass $A_{n_k} \neq \emptyset$, verletzen würde.

Setzen wir nun o. B. d. A. $n_0 := 1$ voraus und geben uns ε fest vor. Dann folgt

$$\forall n \in \{n_0, 2, \dots, n_1\} \exists y_n \in A_n : d(x_{n_1}, y_n) \leq \text{dist}(x_{n_1}, A_n) + \frac{\varepsilon}{6}$$

und

$$\forall k > 1 \forall n \in \{n_{k-1}, \dots, n_k\} \exists y_n \in A_n : d(x_{n_k}, y_n) \leq \text{dist}(x_{n_k}, A_n) + \frac{\varepsilon}{6},$$

wobei die Ungleichung für alle $k \geq 1$ für $n = n_k$ trivialerweise erfüllt ist. Da $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind, gilt: Für ε existiert $n_0(\varepsilon)$, sodass

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n_k, n_l \geq n_0(\varepsilon) \quad \text{und} \quad h(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{6} \quad \forall m, n \geq n_0(\varepsilon).$$

Um zu zeigen, dass $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, schätzen wir jeden der drei Summanden der Ungleichung

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, y_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_l}) + d(x_{n_l}, y_n)$$

ab.

Da $k, l \geq 1$ existieren, sodass $n_{k-1} + 1 \leq m \leq n_k$ und $n_{l-1} + 1 \leq n \leq n_l$, folgt aus $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ auch $n_k, n_l \geq n_0(\varepsilon)$.

Also gilt $h(A_{n_k}, A_m) < \frac{\varepsilon}{6}$ und $h(A_n, A_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{6}$ für $m, n \geq n_0(\varepsilon)$.

Es ist nun $y_m \in A_m, y_{n_k} \in A_{n_k}$ bzw. $y_n \in A_n, y_{n_l} \in A_{n_l}$ und es gilt

$$\text{dist}(y_{n_k}, A_m) \leq e(A_{n_k}, A_m) < \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{bzw.} \quad \text{dist}(y_{n_l}, A_n) \leq e(A_{n_l}, A_n) < \frac{\varepsilon}{6},$$

also

$$d(y_{n_k}, y_m) \leq \text{dist}(x_{n_k}, A_m) + \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{bzw.} \quad d(y_{n_l}, y_n) \leq \text{dist}(x_{n_l}, A_n) + \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir erhalten schließlich für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, y_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_l}) + d(y_{n_l}, y_n) < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0(\varepsilon),$$

womit folgt, dass $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. \square

Hilfssatz 2.15. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine h -Cauchy-Folge mit $A_n \in \mathfrak{F}$. Weiters existiere eine Teilfolge $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $A_{n_k} \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k} \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

Beweis. O. B. d. A. können wir die $A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen, da sie ab einem gewissen Index sowieso ungleich der leeren Menge sind, wenn wir von einer Cauchy-Folge ausgehen und $A_{n_k} \neq \emptyset$ voraussetzen, wie wir im Beweis

des Ausdehnungssatzes für Cauchy-Folgen gesehen haben. Da $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine h -Cauchy-Folge ist, existiert eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(N_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, sodass

$$\forall k \geq 0 \exists N_k : h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \forall m, n \geq N_k$$

Wir konstruieren eine Folge $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$, indem wir $x_{N_0} \in A_{N_0} \neq \emptyset$ wählen. Da $h(A_{N_0}, A_{N_1}) < \frac{1}{2}$, existiert $x_{N_1} \in A_{N_1}$, sodass $d(x_{N_0}, x_{N_1}) \leq \frac{1}{2}$. Angenommen $x_{N_j} \in A_{N_j}$ $j = 1, \dots, k$ für $k \geq 1$ seien so konstruiert, dass $d(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \leq \frac{1}{2^j}$ gilt.

Da $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ und $x_{N_k} \in A_{N_k}$, existiert $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$, sodass $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$.

Mittels Induktion haben wir also eine Folge $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_{N_k} \in A_{N_k}$ und $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ konstruiert.

Sei ε nun fest und N_ε so, dass $\sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$. Dann folgt für alle $n \geq m \geq N_\varepsilon$:

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + \dots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) < \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon.$$

Die Folge $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist also eine Cauchy-Folge in (Ω, d) und da dieser Raum vollständig ist, konvergiert sie gegen ein $x \in \Omega$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für alle $k \in \mathbb{N}_0 : N_k \geq n$, dass $x_{N_k} \in \bigcup_{j \geq n} A_j$ und da $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ gegen x konvergiert $x \in \overline{\bigcup_{j \geq n} A_j}$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{j \geq n} A_j} \text{ und } B \neq \emptyset.$$

□

Folgerung 2.16. *Es gelten die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.15 und B sei so definiert wie in (2.1). Wir definieren*

$$C := \{x \in \Omega : \exists (x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}, \text{ sodass } x_{n_j} \in A_{n_j} \forall j \in \mathbb{N} \text{ und } x_{n_j} \rightarrow x\}$$

und

$$C^* := \{x \in \Omega : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ sodass } x_n \in A_n \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } x_n \rightarrow x\}.$$

Dann gilt $B = C = C^*$.

Beweis. Dass $C^* = C$ folgt, ist klar, da nach Definition $C^* \subseteq C$ und nach dem Ausdehnungssatz für Cauchy-Folgen $C \subseteq C^*$ gilt.

Nun zeigen wir, dass $B \subseteq C$. Sei $x \in B \neq \emptyset$. Dann folgt

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \exists x_{n,\varepsilon} \in \bigcup_{k \geq n} A_k : d(x_{n,\varepsilon}, x) < \varepsilon.$$

Nun konstruieren wir eine Folge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$.

Für

$$j = 1 \exists n_1 \in \mathbb{N} : \xi_1 := x_{1, \frac{1}{2}} \in A_{n_1}, d(\xi_1, x) < \frac{1}{2} \text{ und wir definieren } x_{n_1} := \xi_1.$$

Für

$$j = 2 \exists n_2 \geq n_1 + 1 \geq 2 : \xi_2 := x_{n_1+1, \frac{1}{4}} \in A_{n_2}, d(\xi_2, x) < \frac{1}{4} \text{ und wir definieren}$$

$$x_{n_2} := \xi_2.$$

Mittels Induktion folgt nun, wenn wir von $j \geq 2$ ausgehen, für $j + 1$:

$$\exists n_{j+1} \geq n_j + 1 \geq j + 1 : \xi_{j+1} := x_{n_j+1, \frac{1}{2^{j+1}}} \in A_{n_{j+1}}, d(\xi_{j+1}, x) < \frac{1}{2^{j+1}}$$

und wir setzen

$$x_{n_{j+1}} := \xi_{j+1}.$$

Offensichtlich gilt für $j \rightarrow \infty$, dass $x_{n_j} := \xi_j \rightarrow x$, also $x \in C$, womit wir $B \subseteq C$ gezeigt haben.

Um $C \subseteq B$ zu zeigen, gehen wir von $x \in C = C^*$ aus. Dann existiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $x_n \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$ und $x_n \rightarrow x$. Da $x_k \in \bigcup_{l \geq n} A_l \forall k \geq n \forall n \in \mathbb{N}$, folgt $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in \overline{\bigcup_{l \geq n} A_l} \forall n \in \mathbb{N}$ und somit $x \in B$. \square

Hilfssatz 2.17. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{F}$ die Menge aller total beschränkten abgeschlossenen Teilmengen von Ω . Dann ist \mathfrak{T} abgeschlossen in \mathfrak{F} bezüglich h .

Beweis. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathfrak{T} , die bezüglich h gegen ein $A \in \mathfrak{F}$ konvergiert. Da diese Folge wegen ihrer Konvergenz eine Cauchy-Folge ist, müssen die A_n ab einem Index entweder gleich oder ungleich der leeren Menge sein. Der erste Fall ist uninteressant, da die A_n gegen die leere Menge konvergieren und diese ein Element aus \mathfrak{T} ist. Seien also die $A_n \neq \emptyset$ ab einem Index. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : e(A, A_n) \leq h(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N.$$

Da A_n für $n \in \mathbb{N}$ total beschränkt ist, folgt für $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists p_n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_{p_n} \in \Omega : A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{p_n} U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i).$$

Sei $x \in A$ und sei $n \geq N$ fest gewählt. Dann ist $\text{dist}(x, A_n) \leq e(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, also $\exists y_n \in A_n : d(x, y_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Außerdem

$$\exists i \in \{1, \dots, p_n\} : d(x_i, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und somit } \exists i \in \{1, \dots, p_n\} : d(x_i, x) < \varepsilon.$$

Also ist $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p_n} U_\varepsilon(x_i)$ und somit total beschränkt. \square

Nun kommen wir zu den zwei Hauptsätzen dieses Abschnittes.

Satz 2.18. *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist auch (\mathfrak{F}, h) vollständig.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchy-Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathfrak{F}$ für $n \in \mathbb{N}$, gegen ein $A \in \mathfrak{F}$ konvergiert. Da $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, wissen wir bereits aus dem Beweis des Ausdehnungssatzes für Cauchy-Folgen, dass A_n ab einem Index gleich oder ungleich der leeren Menge sein muss. Im ersten Fall konvergiert die Folge gegen $A = \emptyset$ und der Grenzwert liegt somit in \mathfrak{F} . Betrachten wir also den Fall, dass die A_n ab einem Index ungleich der leeren Menge sind. Da (Ω, d) nach Voraussetzung vollständig und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine h -Cauchy-Folge in \mathfrak{F} ist mit einer Teilfolge nichtleerer Mengen, folgt nach Hilfssatz 2.15, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \neq \emptyset$. Da wir aus Hilfssatz 2.13 wissen, dass aus der Konvergenz von $A_n \in \mathfrak{F}$ gegen $A \in \mathfrak{F}$ bezüglich h folgt, dass $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$, wollen wir nun zeigen, dass $A_n \rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k} =: A$.

Wir müssen also beweisen, dass $h(A_n, A) \rightarrow 0$ oder äquivalent dazu, dass $e(A_n, A)$ und $e(A, A_n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren.

Als Erstes schätzen wir $e(A_n, A)$ ab.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine h -Cauchy-Folge ist, gilt

$$\forall k \geq 0 \exists N_{k,\varepsilon} =: N_k \in \mathbb{N} : h(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad \forall m, n \geq N_k \quad (2.2)$$

mit $(N_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend.

Nun konstruieren wir eine Folge $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$, indem wir, ähnlich wie im Beweis von Hilfssatz 2.15, $x_{N_k} \in A_{N_k} \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ wählen, sodass $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ und $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ gilt. Mit dieser Konstruktion erhalten wir für $x_{N_0} \in A_{N_0} \neq \emptyset$

$$d(x_{N_0}, x_{N_k}) \leq d(x_{N_0}, x_{N_1}) + \dots + d(x_{N_{k-1}}, x_{N_k}) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon. \quad (2.3)$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} d(x_{N_l}, x_{N_m}) &\leq d(x_{N_l}, x_{N_{l+1}}) + \dots + d(x_{N_{m-1}}, x_{N_m}) \leq \\ &\leq \sum_{i=l}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{1}{2^l} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2^l} \leq \frac{\varepsilon}{2^k} \end{aligned}$$

für alle $N_m \geq N_l \geq N_0$.

Daraus folgt, dass $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist, die wegen der Vollständigkeit von Ω gegen ein $x \in \Omega$ konvergiert. Als Grenzwert von $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist $x \in C$, das wir in Folgerung 2.16 definiert haben und nach Folgerung 2.16 gilt somit, dass $x \in A$. Nach Ungleichung (2.3) gilt $d(x_{N_0}, x) < \varepsilon$ und daher $\text{dist}(x_{N_0}, A) < \varepsilon$. Da x_{N_0} beliebig war, gilt

$$e(A_{N_0}, A) = \sup_{\tilde{x} \in A_{N_0}} \{\text{dist}(\tilde{x}, A)\} \leq \varepsilon.$$

Weiters gilt für $n \geq N_0$ wegen (2.2)

$$h(A_n, A_{N_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit insgesamt mittels Hilfssatz 2.6 und der Definition von h

$$e(A_n, A) \leq e(A_n, A_{N_0}) + e(A_{N_0}, A) \leq h(A_n, A_{N_0}) + e(A_{N_0}, A) < \frac{3}{2} \cdot \varepsilon$$

für hinreichend großes n .

Es bleibt nun $e(A, A_n)$ abzuschätzen. Sei $x \in A \neq \emptyset$ beliebig, dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ $x \in \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$, also auch $x \in \overline{\bigcup_{k \geq N_0} A_k}$. Es existiert also $n_0 \geq N_0$ und $y \in A_{n_0}$, sodass $d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Weiters gilt, da $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine h -Cauchy-Folge ist, für hinreichend großes $n \geq n_0 \geq N_0$

$$h(A_{n_0}, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit Hilfssatz 2.7 (ii) und da $x \in A$, $y \in A_{n_0}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, A_n) &\leq \text{dist}(x, A_{n_0}) + e(A_{n_0}, A_n) \leq \text{dist}(x, A_{n_0}) + h(A_{n_0}, A_n) \leq \\ &\leq d(x, y) + h(A_{n_0}, A_n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $x \in A$ beliebig war, gilt somit $e(A, A_n) \leq \varepsilon$ für hinreichend großes n . \square

Bemerkung. Satz 2.18 und die in ihn einfließenden Hilfssätze und Sätze gelten natürlich auch für den Raum (\mathfrak{F}^-, h) .

Satz 2.19. *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist auch (\mathfrak{K}^-, h) vollständig.*

Beweis. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine h -Cauchy-Folge in \mathfrak{K}^- . Da nach Satz 2.18 bzw. aus nachfolgender Bemerkung aus der Vollständigkeit des Raumes (Ω, d) die Vollständigkeit von (\mathfrak{F}, h) bzw. (\mathfrak{F}^-, h) folgt und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere eine h -Cauchy-Folge in \mathfrak{F}^- ist, existiert ein $A \in \mathfrak{F}^-$, sodass $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ bezüglich h . Da die A_n kompakt und somit total beschränkt und abgeschlossen sind, muss A , da \mathfrak{T} nach Hilfssatz 2.17 abgeschlossen bezüglich h ist, auch in \mathfrak{T} liegen. Da Ω vollständig und A abgeschlossen ist, ist A vollständig bezüglich h . Als vollständige, total beschränkte Menge ist A somit kompakt, also aus \mathfrak{K}^- . \square

Bemerkung. Satz 2.19 kann analog für den Raum (\mathfrak{K}, h) formuliert und bewiesen werden.

Der Raum (\mathfrak{K}^-, h) ist jener Raum, in dem wir mit Fraktalen arbeiten werden. Ein Fraktal sei also im Folgenden einfach eine nichtleere kompakte Menge eines (vollständigen) metrischen Raumes. Obwohl (\mathfrak{K}^-, h) für unsere Zwecke ausreicht, wollen wir dennoch abschließend einen anderen Raum anführen, den man Fraktalen zuordnen kann:

Für die Definition eines Maßes verweisen wir auf Definition 2.43.

Definition 2.17. Sei Ω eine Menge und \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf Ω . Dann bezeichnet $\mathbb{M}(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge der Maße auf (Ω, \mathfrak{A}) .

Sei $\mu \in \mathbb{M}(\Omega, \mathfrak{A})$ und gelte $\mu(\Omega) = 1$, dann heißt μ *Wahrscheinlichkeitsmaß* oder *normiertes Maß auf (Ω, \mathfrak{A})* . Die Menge der Wahrscheinlichkeitsmäße auf (Ω, \mathfrak{A}) sei mit $\mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet.

Definition 2.18. Sei (Ω, \mathfrak{G}) ein Hausdorff-Raum, also \mathfrak{G} das *System der offenen Mengen von Ω* . Dann heißt $\mathfrak{B}_\Omega := A_\sigma(\mathfrak{G})$, also die kleinste σ -Algebra, die \mathfrak{G} enthält, das *System der Borelschen Mengen von Ω* . Gehen wir von $\Omega := \mathbb{R}^n$ $n \in \mathbb{N}$ aus, so bezeichnet $\mathfrak{B}_n := A_\sigma(\mathfrak{G})$ das *System der n -dimensionalen Borelschen Mengen*.

Definition 2.19. Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann heißt die Abbildung d_H mit $\mu, \nu \in \mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$

$$d_H(\mu, \nu) := \sup\left\{ \left| \int_\Omega f d\mu - \int_\Omega f d\nu \right| : f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \forall x, y \in \Omega \right\}$$

die *Hutchinson-Metrik auf $\mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$* .

Es lässt sich zeigen, dass $(\mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega), d_H)$ ein kompakter metrischer Raum ist. Für die Beweisidee dieser Behauptung verweisen wir auf [6] (Seite 398). Diesen Raum können wir also den Fraktalen zuordnen, ein Fraktal selbst wird dann mit einem Maß, das bestimmte Eigenschaften erfüllen muss, identifiziert.

2.3 Iterierte Funktionensysteme (IFS)

Iterierte Funktionensysteme sind in der fraktalen Theorie von großer Bedeutung, da man mit ihnen viele fraktale Mengen angeben bzw. beschreiben kann.

Definition 2.20. Seien (Ω, d) und $(\tilde{\Omega}, \tilde{d})$ metrische Räume, f eine Abbildung von Ω nach Ω und $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$. Dann heißt

\tilde{f} eine *Isometrie von Ω nach $\tilde{\Omega}$* , wenn

$$\tilde{d}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) = d(x, y) \forall x, y \in \Omega;$$

f eine *Bewegung oder Kongruenz in Ω* , wenn

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall x, y \in \Omega;$$

f eine *Ähnlichkeitsabbildung in Ω* , wenn ein $r > 0$ existiert, sodass

$$d(f(x), f(y)) = r \cdot d(x, y) \forall x, y \in \Omega; \quad (2.4)$$

\tilde{f} *Lipschitz-stetig auf Ω* , wenn ein $L \geq 0$ existiert, sodass

$$\tilde{d}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq L \cdot d(x, y) \forall x, y \in \Omega; \quad (2.5)$$

f eine *Kontraktion oder kontrahierend in Ω* , wenn ein $p \in [0, 1)$ existiert, sodass

$$d(f(x), f(y)) \leq p \cdot d(x, y) \forall x, y \in \Omega; \quad (2.6)$$

\tilde{f} *bi-Lipschitz-stetig* auf Ω , wenn $L_1, L_2 > 0$ existieren, sodass

$$L_1 \cdot d(x, y) \leq \tilde{d}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq L_2 \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in \Omega.$$

\tilde{f} erfüllt eine *Hölder-Bedingung* oder ist *Hölder-stetig* auf Ω , wenn ein $\alpha > 0$ und ein $H \geq 0$ existieren, sodass

$$\tilde{d}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq H \cdot d(x, y)^\alpha \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (2.7)$$

Das r aus Gleichung (2.4) nennt man dann *Ähnlichkeitsfaktor*, L aus Ungleichung (2.5) *Lipschitz-Konstante*, p aus Ungleichung (2.6) *Kontraktionsfaktor* oder *Verkleinerungsfaktor* und α bzw. H aus Ungleichung (2.7) heißt *Hölder-Exponent* bzw. *Hölder-Konstante*.

Definition 2.21. Sei V ein Vektorraum und $a \in V$. Dann heißt

$$\tau_a : \begin{cases} V \longrightarrow V \\ v \mapsto a + v \end{cases}$$

eine *Translation* oder *Verschiebung um a in V* .

Definition 2.22. Seien V, W Vektorräume über demselben Körper und $N := v + U$ bzw. $M := w + U'$ Nebenräume in V bzw. in W mit $v \in V, w \in W$ und den Unterräumen U bzw. U' von V bzw. W . Weiters bezeichne $\mathcal{A}(N)$ bzw. $\mathcal{A}(M)$ den affinen Raum oder die affine Geometrie von N bzw. von M . Dann heißt die Abbildung

$$f : \mathcal{A}(N) \longrightarrow \mathcal{A}(M)$$

eine *affine Abbildung* oder *affine Transformation*, falls

$$f := \tau_{a'} \circ \alpha \circ \tau_{-a} \quad (2.8)$$

mit $a \in N, a' \in M$ und $\alpha : U \longrightarrow U'$ linear.

Ist α zusätzlich bijektiv, so heißt f *Affinität*.

Der folgende Satz ist aus der linearen Algebra bekannt.

Satz 2.20. Sei V ein n -dimensionaler und W ein m -dimensionaler Vektorraum über einem Körper K . Dann lässt sich die affine Abbildung (2.8) in der Form

$$f(x) = A \cdot x + b$$

schreiben mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$.

Affine Abbildungen setzen sich also aus einer linearen Abbildung, mit der man z. B. Rotationen (Drehungen), Spiegelungen, Scherungen oder Skalierungen realisieren kann und einer Translation (Verschiebung) zusammen. Sie sind kollinear (Bilder von Punkten, die auf einer Gerade liegen, liegen wieder auf einer Gerade; das Bild einer Gerade ist also wieder eine Gerade), *teilverhältnistreu* (das Teilverhältnis einer Gerade entspricht dem Teilverhältnis des Bildes der Gerade), *paralleltreue* (parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet), *ebenentreue* aber nicht *längentreue*, *verhältnistreu*, *flächentreue* oder *konform* (also *winkeltreu*).

Der Vollständigkeit halber wiederholen wir den Begriff einer *winkeltreuen* Abbildung in der Gaußschen Zahlenebene. Es sei dabei erwähnt, dass wir eine Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ als *Weg* und dessen Bild, also $\gamma([a, b])$, als *Kurve* bezeichnen.

Definition 2.23. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung und G ein *Gebiet*, d. h. eine offene zusammenhängende Menge, das im Definitionsbereich von f enthalten ist. Dann *bildet f G winkeltreu auf $f(G)$ ab*, wenn f für alle $z_0 \in G$ auf einer Umgebung von z_0 stetig ist und für alle stetigen Wege γ_1 und γ_2 mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = z_0$, die an z_0 Tangenten besitzen auch die Bildkurven an $f(z_0)$ Tangenten besitzen und die Winkel zwischen beiden Tangentenpaaren nach Größe und Drehsinn übereinstimmen.

Somit werden Dreiecke unter affinen Abbildungen auf Dreiecke und Parallelogramme auf Parallelogramme abgebildet.

Betrachten wir nun den n -dimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^n über \mathbb{R} bezüglich der kanonischen Basis, mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ bzw. der euklidischen Metrik d_2 und dem kanonischen inneren Produkt $(\cdot, \cdot)_2$. Dann können wir eine affine Abbildung von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in der Form

$$f(x) = A \cdot x + b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

schreiben mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, also $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $1 \leq i, j \leq n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist f trivialerweise eine Affinität, falls A invertierbar ist, also $\det(A) \neq 0$.

Für uns sind besonders die *ebenen affinen Abbildungen* interessant, also affine Abbildungen von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 . Gehen wir wieder von der Darstellung

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot x + b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

aus und multiplizieren A mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir, da man Vektoren aus \mathbb{R}^2 eindeutig mittels Polarkoordinaten darstellen kann,

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos\varphi_1 \\ r_1 \cdot \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \cdot \cos\varphi_2 \\ r_2 \cdot \sin\varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Transformation A kann man also schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos\varphi_1 & r_2 \cdot \cos\varphi_2 \\ r_1 \cdot \sin\varphi_1 & r_2 \cdot \sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

mit $r_1, r_2 \geq 0$ und $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$.

Sucht man eine affine Abbildung, die drei Punkte der Ebene auf drei andere Punkte der Ebene abbildet, so kann man diese trivialerweise eindeutig festlegen.

Seien $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} p_{31} \\ p_{32} \end{pmatrix}$ drei Punkte in der Ebene, die nicht alle auf einer Gerade liegen und P'_1, P'_2 und P'_3 beliebige Punkte des \mathbb{R}^2 . Wir suchen eine affine Abbildung f , sodass

$$f(P_1) = P'_1 \quad f(P_2) = P'_2 \quad \text{und} \quad f(P_3) = P'_3.$$

Um f zu bestimmen, müssen wir die Einträge der Matrix A , also a_{ij} $1 \leq i, j \leq 2$ und den Vektor b , also b_1, b_2 festlegen. Da wir aber aus $A \cdot (P_i) + b = P'_i$ $i = 1, 2, 3$ ein Gleichungssystem bestehend aus sechs Gleichungen mit sechs Variablen erhalten, können wir A und b eindeutig bestimmen (siehe [4], Seite 107-109). Da nun affine Transformationen Geraden auf Geraden und parallele Geraden auf parallele abbilden, kann man somit auch eine eindeutige affine Abbildung konstruieren, die Dreiecke auf Dreiecke und Parallelelogramme auf Parallelelogramme abbildet.

Kongruenzen oder Bewegungen sind bijektive Abbildungen, die sich aus Rotationen, Spiegelungen und Translationen zusammensetzen und längentreu als auch konform sind, sodass eine Figur und ihr Bild kongruent, also deckungsgleich, sind.

Auch Kongruenzen kann man in der Form $A \cdot x + b$ unter zusätzlichen Voraussetzungen schreiben. Gehen wir wieder vom \mathbb{R}^n aus, so ist die affine Abbildung $f(x) := A \cdot x + b$ eine Bewegung, falls A orthogonal ist, denn dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \|A \cdot x + b - A \cdot y - b\|_2 = \|A(x - y)\|_2 = \|x - y\|_2.$$

Ist $\det(A)=1$, so spricht man von einer *eigentlichen Bewegung*.

Möchte man Bewegungen in der Ebene durchführen, so kann man die Matrizen A , die Rotationen und Spiegelungen realisieren, angeben. So führt

$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ eine Drehung mit Zentrum im Ursprung um $0 \leq \varphi < 2\pi$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung an der x -Achse bzw. an der Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Anstieg $\frac{\varphi}{2}$ durch.

Ähnlichkeitsabbildungen setzen sich aus Kongruenzabbildungen und zentrischen Streckungen (also Abbildungen, die die Figur um einen bestimmten festen Faktor vergrößern und verkleinern, wobei die Strecken der ursprünglichen Figur und die des Bildes parallel sind) zusammen - die Figur und ihr Bild unter einer Ähnlichkeitstransformation sind ähnlich. Diese Abbildungen sind also konform und längenverhältnistreu, aber nicht längentreu.

In \mathbb{R}^n ist eine affine Abbildung speziell eine Ähnlichkeitsabbildung mit Ähnlichkeitsfaktor r , wenn

$$f(x) = r \cdot A \cdot x + b$$

mit A orthogonal, denn dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \|r \cdot A \cdot x + b - r \cdot A \cdot y - b\|_2 = r \cdot \|A \cdot (x - y)\|_2 = r \cdot \|x - y\|_2.$$

In der Ebene sind somit affine Abbildungen der Bauart

$$f(x) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot x + b \quad \text{oder} \quad f(x) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot x + b$$

Ähnlichkeitsabbildungen mit Skalierungsfaktor r .

Definition 2.24. Sei Ω eine nichtleere Menge und $f : \Omega \rightarrow \Omega$ eine Abbildung. Dann heißt $\xi \in \Omega$ *Fixpunkt* von f , wenn ξ invariant unter f ist, d. h. $f(\xi) = \xi$.

Satz 2.21. (*Banachscher Fixpunktsatz*)

Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : \Omega \rightarrow \Omega$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor p . Weiters bezeichne $f^1(x) := f(x)$, $f^2(x) = f \circ f(x)$ und $f^{k+1}(x) := f \circ f^k(x)$ die $(k+1)$ -fache Hintereinanderausführung der Abbildung f an der Stelle $x \in \Omega$. Dann existiert genau ein $\xi \in \Omega$, sodass ξ Fixpunkt von f ist und für alle $x_0 \in \Omega$ gilt $x_k := f^k(x_0) \rightarrow \xi$ für $k \rightarrow \infty$.

Beweis. Als Erstes zeigen wir, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in Ω ist. Sei $x_0 \in \Omega$, dann gilt wegen der Kontraktionseigenschaft von f

$$d(f(x_0), f(x_1)) = d(f(x_0), f \circ f(x_0)) \leq p \cdot d(x_0, x_1) := p \cdot a$$

und mit vollständiger Induktion für alle $k \geq 0$

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+1}) &= d(f^k(x_0), f^{k+1}(x_0)) = d(f(f^k(x_0)), f(f^{k-1}(x_0))) \leq \\ &\leq p \cdot d(f^k(x_0), f^{k-1}(x_0)) \leq p^k \cdot a. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun für $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$d(x_k, x_{k+l}) \leq \sum_{i=1}^l d(x_{k+i-1}, x_{k+i}) \leq a \cdot p^k \cdot \sum_{i=0}^{l-1} p^i \leq a \cdot p^k \cdot \frac{1}{1-p},$$

was kleiner als jedes beliebige ε ist für hinreichend großes k . Somit ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge und da (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum ist, konvergiert sie gegen ein $\xi \in \Omega$. Aus

$$f(\xi) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \xi$$

folgt, dass ξ Fixpunkt von f ist.

Um die Eindeutigkeit des Fixpunktes zu beweisen, nehmen wir an, dass ξ und η zwei verschiedene Fixpunkte von f sind, also $d(\xi, \eta) > 0$ gilt. Wir erhalten mit

$$d(\xi, \eta) = d(f(\xi), f(\eta)) \leq p \cdot d(\xi, \eta) < d(\xi, \eta)$$

einen Widerspruch, also ist $d(\xi, \eta) = 0$ und somit $\xi = \eta$. □

Bemerkung. Im Gegensatz zu anderen Fixpunktsätzen wie jenem von Schauder, Leray-Schauder oder von Brouwer, besitzt der Fixpunktsatz von Banach die gute Eigenschaft zusätzlich zur Existenz eines Fixpunktes auch dessen Eindeutigkeit zu liefern und setzt die Funktion f als Kontraktion voraus.

Definition 2.25. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und f_i Kontraktionen in Ω mit Kontraktionsfaktoren p_i für alle $i = 1, \dots, N$ $N \geq 2$. Dann heißt $\mathcal{F} := (f_1, f_2, \dots, f_N)$ ein *iteriertes Funktionensystem* (IFS) oder ein *hyperbolisches iteriertes Funktionensystem* und

$$F : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega) \\ A \mapsto \bigcup_{1 \leq j \leq N} f_j(A) \end{cases}$$

die *Hutchinson-Abbildung*.

F ist also eine Abbildung von der Potenzmenge von Ω in die Potenzmenge von Ω . Unser Ziel ist es nun, mit F eine Kontraktion auf $\mathcal{P}(\Omega)$ zu erhalten. Dazu benötigen wir eine Metrik auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Schränken wir die Potenzmenge von Ω auf die nichtleeren kompakten Teilmengen von Ω ein, so erhalten wir mit (\mathfrak{K}^-, h) einen metrischen Raum und da die f_i $i = 1, \dots, N$, da sie ja Kontraktionen und somit stetig sind, eine Menge $A \in \mathfrak{K}^-$ auf eine Menge $f_i(A) \in \mathfrak{K}^-$ abbilden, also $F(A) \in \mathfrak{K}^-$, erscheint es sinnvoll, F als Abbildung von \mathfrak{K}^- nach \mathfrak{K}^- zu definieren.

Definition 2.26. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann erfüllt \mathcal{F} die *offene Mengenbedingung* (OMB) oder *Morans offene Mengenbedingung*, falls eine nichtleere beschränkte Menge $G \in \mathfrak{G}$ existiert, sodass für alle $1 \leq i, j \leq N$ $i \neq j$

$$f_i(G) \cap f_j(G) = \emptyset \quad \text{und} \quad f_i(G) \subseteq G$$

gilt.

Hilfssatz 2.22. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ eine Kontraktion auf Ω mit Kontraktionsfaktor p . Dann folgt für alle $B, C \in \mathfrak{K}^-$

$$h(f(B), f(C)) \leq p \cdot h(B, C).$$

f ist also auch als Mengenabbildung von (\mathfrak{K}^-, h) nach (\mathfrak{K}^-, h) eine Kontraktion mit gleichem Kontraktionsfaktor p .

Beweis. Wie wir bereits erwähnt haben, ist es sinnvoll, f als Abbildung von und nach \mathfrak{K}^- zu betrachten.

Sei $\delta > h(B, C)$ gegeben. Dann folgt $B \subseteq C_\delta$ und $C \subseteq B_\delta$. Sei $x \in B_\delta$, dann existiert ein $y \in B$, sodass $d(x, y) \leq \delta$, woraus $d(f(x), f(y)) \leq p \cdot d(x, y) \leq p \cdot \delta$ und somit $f(x) \in (f(B))_{p\delta}$ folgt. Also gilt $f(C) \subseteq f(B_\delta) \subseteq (f(B))_{p\delta}$.

Analog dazu kann man zeigen, dass $f(B) \subseteq (f(C))_{p\delta}$ gilt, also ist

$$h(f(B), f(C)) \leq p \cdot \delta.$$

Lässt man δ gegen $h(B, C)$ gehen, so erhält man schließlich

$$h(f(B), f(C)) \leq p \cdot h(B, C).$$

□

Hilfssatz 2.23. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $B_i, C_i \in \mathfrak{K}^-$ $i = 1, \dots, N$. Dann gilt

$$h\left(\bigcup_{1 \leq i \leq N} B_i, \bigcup_{1 \leq i \leq N} C_i\right) \leq \max_{i=1, \dots, N} \{h(B_i, C_i)\}.$$

Beweis. Sei $\delta > \max_{i=1, \dots, N} \{h(B_i, C_i)\}$. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, N$

$$B_i \subseteq (C_i)_\delta \quad \text{und} \quad C_i \subseteq (B_i)_\delta,$$

also auch

$$B_i \subseteq \left(\bigcup_{1 \leq j \leq N} C_j \right)_\delta =: C_\delta \quad \text{und} \quad C_i \subseteq \left(\bigcup_{1 \leq j \leq N} B_j \right)_\delta =: B_\delta.$$

Es folgt, dass $B \subseteq C_\delta$ und $C \subseteq B_\delta$, also gilt $h(B, C) \leq \delta$. Lassen wir δ gegen $\max_{i=1, \dots, N} \{h(B_i, C_i)\}$ gehen, so folgt die Behauptung. \square

Satz 2.24. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, (f_1, \dots, f_N) ein IFS mit den Kontraktionsfaktoren (p_1, \dots, p_N) und sei $p := \max\{p_1, \dots, p_N\}$. Dann ist die Hutchinson-Abbildung

$$F : (\mathfrak{K}^-, h) \longrightarrow (\mathfrak{K}^-, h)$$

eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor p .

Beweis. Seien B und $C \in \mathfrak{K}^-$. Dann folgt aus der Definition der Hutchinson-Abbildung, Hilfssatz 2.23 und Hilfssatz 2.22

$$\begin{aligned} h(F(B), F(C)) &= h\left(\bigcup_{1 \leq i \leq N} f_i(B), \bigcup_{1 \leq i \leq N} f_i(C)\right) \leq \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N} \{h(f_i(B), f_i(C))\} \leq \max_{i=1, \dots, N} \{p_i \cdot h(B, C)\} = p \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

\square

Nun können wir den entscheidenden Satz dieses Abschnittes herleiten.

Satz 2.25. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_N)$ ein IFS mit den Kontraktionsfaktoren (p_1, \dots, p_N) und F die Hutchinson-Abbildung auf (\mathfrak{K}^-, h) . Weiters sei $K \in \mathfrak{K}^-$ eine beliebige nichtleere kompakte Menge und $F^n(K)$ für $n \in \mathbb{N}$ die n -fache Hintereinanderausführung der Abbildung F an der Stelle K .

Dann existiert genau ein $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}^-$, sodass

$$F(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \quad \text{und es gilt} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(K) = \mathcal{A}.$$

Diese nichtleere kompakte Menge \mathcal{A} nennt man den *Attraktor des IFS* oder *invariante Menge des IFS*.

Beweis. Da wir (Ω, d) als vollständigen metrischen Raum vorausgesetzt haben, ist auch (\mathfrak{K}^-, h) vollständig. Weiters gilt nach Satz 2.24, dass F eine Kontraktion auf \mathfrak{K}^- ist und die Aussage unseres Satzes folgt somit sofort aus dem Banachschen Fixpunktsatz. \square

Die nichtleere kompakte Menge \mathcal{A} ist also invariant unter der Abbildung F und kann als eindeutiger Limes eines iterierten Funktionensystems aufgefasst werden, denn nehmen wir eine beliebige nichtleere kompakte Menge her und wenden ein IFS darauf mehrmals an, so konvergiert die so gebildete Mengenfolge eindeutig gegen den Attraktor des IFS bezüglich der Hausdorff-Metrik.

Bemerkung. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\mathcal{S} = (f_1, \dots, f_N)$ ein iteriertes Funktionensystem.

Besteht \mathcal{S} aus affinen Transformationen (man sagt \mathcal{S} ist ein *affines iteriertes Funktionensystem* oder *affines IFS*) bzw. aus konformen Transformationen, so sagt man häufig, dass die Menge \mathcal{A} *selbstaffin* bzw. *selbstkonform* sei.

Enthält ein affines IFS mindestens eine Ähnlichkeitsabbildung, so nennt man \mathcal{A} *partiell selbstähnlich*.

Sind alle f_i $i = 1, \dots, N$ eines beliebigen IFS Ähnlichkeitsabbildungen, so nennt man \mathcal{A} (*strikt*) *selbstähnlich*. Vergrößerungen eines kleinen Teils der Menge sind also identisch mit der gesamten Menge. Bei zufälligen Fraktalen spricht man analog dazu von *statistischer Selbstähnlichkeit*, wenn Vergrößerungen kleiner Teile dieselbe statistische Verteilung wie die ganze Menge haben.

Geht man wieder von Ähnlichkeitsabbildungen aus, so heißt jede (bezüglich d) nichtleere kompakte Menge $K \subseteq \mathcal{A}$ *super-selbstähnlich*, falls

$$K \supseteq \bigcup_{i=1}^N f_i(K)$$

gilt und jede nichtleere kompakte Menge K mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N f_i(K)$$

sub-selbstähnlich.

Es sei darauf hingewiesen, dass diese Begriffe in der Literatur nicht ganz einheitlich verwendet werden. So bezeichnet [8] (Seite 10) den Attraktor eines *beliebigen* IFS als selbstähnliche Menge.

Beispiel 2.1. Betrachten wir nun das Intervall bzw. die nichtleere kompakte Menge $\mathcal{C}_0 := [0, 1]$ des vollständigen metrischen Raumes (\mathbb{R}, d_2) und die Funktionen $f_1(x) := \frac{x}{3}$ und $f_2(x) := \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Es ist klar, dass $\mathcal{S} := (f_1, f_2)$ aus Ähnlichkeitsabbildungen mit Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{3}$, also insbesondere aus Kontraktionen besteht und somit ein IFS bildet. Wenden wir die Hutchinson-Abbildung auf \mathcal{C}_0 an, so gilt

$$F(\mathcal{C}_0) = \bigcup_{i=1}^2 f_i(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_1.$$

Die Hutchinson-Abbildung realisiert also den ersten Schritt der Konstruktion der Cantormenge und konvergiert bei wiederholter Hintereinanderausführung gegen \mathcal{A} , also wegen Hilfssatz 2.13 gegen die Cantormenge, die somit den Attraktor von \mathcal{S} darstellt.

Analog dazu gehen wir beim Sierpińskidreieck von einer beliebigen Mengen aus und wenden ein IFS bestehend aus drei Kontraktionen darauf an.

In vielen Fällen kann man also deterministische Fraktale, die aus verkleinerten und transformierten Kopien ihrer selbst aufgebaut sind, wie im vorigen Abschnitt bereits erwähnt, als nichtleere kompakte Menge betrachten, die man durch ein IFS beschreiben kann, da der Attraktor eines IFS für gewöhnlich ein Fraktal ist. Ist dies der Fall, also \mathcal{A} ein Fraktal, so approximiert $F^n(K)$ diese Menge mit steigendem $n \in \mathbb{N}$ beliebig gut, weshalb man diese Approximationen als *Präfraktale von \mathcal{A}* bezeichnet.

Folgerung 2.26. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\mathcal{I} := (f_1, \dots, f_N)$ ein IFS. Weiters existiere ein $K \in \mathfrak{K}^-$, sodass für alle $i = 1, \dots, N$ $f_i(K) \subseteq K$ gilt. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$F^n(K) \text{ ist monoton fallend, } F^n(K) \in \mathfrak{K}^- \text{ und } \mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F^n(K).$$

Beweis. Dass $F^n(K)$ für $n \in \mathbb{N}$ eine kompakte nichtleere Menge ist, ist klar. Es gilt $F(K) = \bigcup_{1 \leq i \leq N} f_i(K) \subseteq K$, woraus $F \circ F(K) \subseteq F(K) \subseteq K$ und somit $F^n(K) \subseteq F^{n-1}(K) \subseteq \dots \subseteq F^1(K) = F(K) \subseteq K$ folgt. Da \mathcal{A} und $F^n(K)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kompakt, also insbesondere abgeschlossen sind, und $\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(K)$ bezüglich h gilt, folgt aus Hilfssatz 2.13 und der Monotonie von $(F^n(K))_{n \in \mathbb{N}}$, dass

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} F^k(K) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} F^k(K).$$

Aus der Monotonie folgt nun sofort die Aussage der Folgerung. \square

Definition 2.27. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann erfüllt \mathcal{I} die strenge Trennungsbedingung, falls für alle $1 \leq i, j \leq N$ $i \neq j$

$$f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset$$

gilt.

Eine Erweiterung des Begriffes eines iterierten Funktionensystems erhält man mit folgender

Definition 2.28. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und (f_1, \dots, f_N) ein IFS mit zugehörigen Kontraktionsfaktoren (p_1, \dots, p_N) . Weiters existiere eine Menge $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}^-$ und eine Mengenabbildung f_0 , sodass für alle $K \in \mathfrak{K}^-$

$$f_0 : \begin{cases} \mathfrak{K}^- \longrightarrow \mathfrak{K}^- \\ K \longmapsto \mathcal{K} \end{cases}$$

gilt.

Dann heißt $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} := (f_0, f_1, \dots, f_N)$ ein *iteriertes Funktionensystem mit Kondensationsmenge \mathcal{K}* oder *IFS mit Kondensationsmenge \mathcal{K}* und f_0 eine *Kondensations-Transformation*. Die Abbildung

$$F_{\mathcal{K}} : \begin{cases} \mathfrak{K}^- \longrightarrow \mathfrak{K}^- \\ A \longmapsto \bigcup_{0 \leq j \leq N} f_j(A) \end{cases}$$

ist eine Verallgemeinerung der Hutchinson-Abbildung.

Satz 2.27. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} := (f_0, f_1, \dots, f_N)$ ein IFS mit Kondensationsmenge \mathcal{K} . Dann gilt

(i) f_0 ist eine Kontraktion auf (\mathfrak{K}^-, h) mit Kontraktionsfaktor 0;

(ii) Die Abbildung

$$F_{\mathcal{K}} : \begin{cases} (\mathfrak{K}^-, h) \longrightarrow (\mathfrak{K}^-, h) \\ K \longmapsto \bigcup_{0 \leq j \leq N} f_j(K) \end{cases}$$

ist eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $p := \max_{i=1, \dots, N} \{p_i\}$;

(iii) Es existiert genau ein $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}^-$, sodass

$$F_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \text{ und es gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mathcal{K}}^n(K) = \mathcal{A}$$

für alle $K \in \mathfrak{K}^-$;

Diese nichtleere kompakte Menge \mathcal{A} nennt man den Attraktor des IFS mit Kondensationsmenge \mathcal{K} .

(iv) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$.

Beweis. Die einzelnen Punkte dieses Satzes folgen entweder aus der vorhergegangenen Definition oder sind analog zu den vorigen Hilfssätzen und Sätzen zu beweisen. \square

Beispiel 2.2. Wir gehen von dem vollständigen metrischen Raum (\mathbb{R}^2, d_2) aus und betrachten die Abbildungen

$$f_1(x) := r_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$f_2(x) := r_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

mit $r_1, r_2 < 1$. Wir wissen bereits, dass diese Abbildungen Ähnlichkeitsabbildungen und in diesem Fall insbesondere Kontraktionen sind, mit dem Translationsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$, den Skalierungsfaktoren r_1, r_2 und den Drehwinkeln φ_1 und φ_2 . (f_1, f_2) bildet also ein IFS. Weiters definieren wir mit $c_2 > c_1$ und $b_2 > b_1$ die kompakte nichtleere Menge

$$\mathcal{K} := [c_1, c_2] \times [b_1, b_2]$$

als Kondensationsmenge und mit f_0 bezeichnen wir die Kondensations-Transformation. Dann ist der Attraktor dieses iterierten Funktionensystems mit Kondensationsmenge \mathcal{K} (f_0, f_1, f_2) je nach den Werten der Parameter mehr oder weniger „baumähnlich“ aufgebaut.

Wählen wir z. B. $r_1 = r_2 := r$ mit $0 < r < 1$, $\varphi_1 := \varphi$ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_2 := -\varphi$, $[c_1, c_2] := [-c, c]$ mit $c > 0$ und $[b_1, b_2] := [0, 1]$, so ist der Attraktor des IFS mit Kondensationsmenge \mathcal{K} eine um die y -Achse annähernd symmetrische Figur, deren iterativen Aufbau wir in nachfolgender Abbildung skizzieren. f_0 sorgt dabei in jedem Schritt dafür, dass eine beliebige Menge $K \in \mathfrak{K}^-$ auf die Menge $[-c, c] \times [0, 1]$ abgebildet wird, die den „Stamm“ des „Baumes“ bildet, während f_1 bzw. f_2 die entsprechenden Mengen symmetrisch um die y -Achse links bzw. rechts als bei jedem Schritt immer kleiner werdende „Äste“ des „Baumes“ abbilden. In Abbildung 2.2 sei dies für $r := 0.7$, $\varphi := \frac{\pi}{4}$ und $c := 0.16$ illustriert.

Mit der Theorie der Adressräume können wir iterierte Funktionensysteme weiter klassifizieren. Dazu benötigen wir folgende

Definition 2.29. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann heißt $E := \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ *endliches Alphabet* und jedes

$$\alpha := \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$$

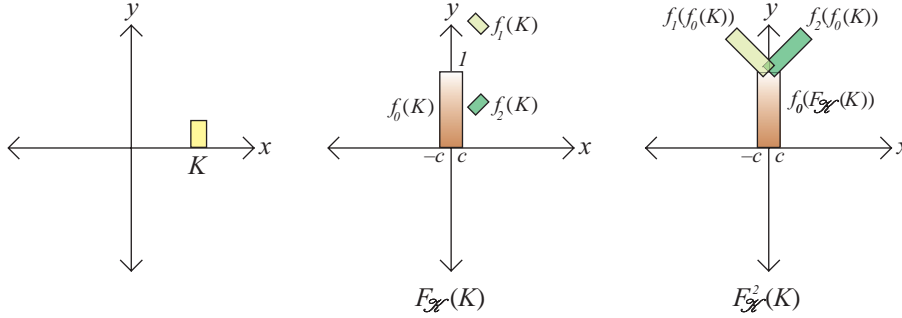


Abbildung 2.2: Aufbau eines „Baumes“ im \mathbb{R}^2 durch ein IFS mit Kondensationsmenge (rechts: $f_1(f_1(K) \cup f_2(K))$ und $f_2(f_1(K) \cup f_2(K))$ nicht mehr dargestellt).

mit $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i \in E \ i = 1, \dots, k$ heißt *Wort*. Weiters bezeichnet man mit Λ das *leere Wort* und mit

$$|\alpha| := k \text{ bzw. } |\Lambda| := 0$$

die *Länge des Wortes* α oder die *Wortlänge* von α .

Definition 2.30. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, dann bezeichnet

$$E^k := \{\alpha : |\alpha| = k, \alpha_i \in E \ \forall i = 1, \dots, k\} \text{ bzw. } E^* := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} E^k$$

die Menge aller Wörter der Länge k bzw. die Menge aller Wörter endlicher Länge und

$$E^\infty := \{\alpha := \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots : \alpha_i \in E \ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

die Menge aller Wörter unendlicher Länge. Jedes $\alpha \in E^\infty$ heißt *Kette*.

Definition 2.31. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, \mathcal{I} ein IFS mit N Kontraktionen und $E := \{e_1, \dots, e_N\}$ ein Alphabet bestehend aus N Elementen. Dann definiert

$$d_{E^\infty}(\alpha, \beta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n - \beta_n|}{(N + 1)^n}$$

für alle $\alpha, \beta \in E^\infty$ eine Metrik auf E^∞ und der metrische Raum (E^∞, d_{E^∞}) heißt der *Adressraum des IFS*.

Man kann zeigen, dass man eine *Ultrametrik*, also eine Metrik, die $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ erfüllt, auf E^∞ erhält, wenn man von $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ und $R := (r_{e_1}, \dots, r_{e_N})$ mit $r_{e_i} \in (0, 1) \ 1 \leq i \leq N$ ausgeht, $\prod_{i=1}^0 r_{\alpha_i} := 1$ setzt und für alle $\alpha, \beta \in E^\infty$

$$d_R(\alpha, \beta) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha = \beta \\ \prod_{i=1}^k r_{\alpha_i}, & \text{falls } \alpha_i = \beta_i \text{ für } i = 1, \dots, k \text{ und } \alpha_{k+1} \neq \beta_{k+1}, k \geq 0 \end{cases}$$

definiert. Wir verweisen auf [5]. Gehen wir von einem vollständigen metrischen Raum (Ω, d) , einem endlichen Alphabet E und einem IFS $(f_{e_1}, \dots, f_{e_N})$ aus

mit Kontraktionsfaktoren $(r_{e_1}, \dots, r_{e_N})$ $0 < r_{e_i} < 1$ bzw. gehen wir von den Voraussetzungen von Definition 2.31 aus, dann gilt, dass es eine Funktion $\varphi : E^\infty \rightarrow \mathcal{A}$, wobei \mathcal{A} den Attraktor des IFS bezeichnet, gibt, die stetig ist (siehe [5] bzw. [6], Seite 142-146). Für beliebiges $x \in \mathcal{A}$ nennt man dann

$$\varphi^{-1}(x) = \{\alpha \in E^\infty : \varphi(\alpha) = x\}$$

die *Menge der Adressen von $x \in \mathcal{A}$* und jedes $\alpha \in \varphi^{-1}(x)$ eine *Adresse von x* .

Definition 2.32. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\mathcal{F} := (f_1, \dots, f_N)$ ein IFS mit Attraktor \mathcal{A} und $E := \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ ein Alphabet.

Dann heißt das IFS *total unzusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in \mathcal{A}$ eine eindeutige Adresse besitzt.

Das IFS heißt *gerade berührend*, wenn es nicht total unzusammenhängend ist, aber eine nichtleere offene Menge $G \subseteq \mathcal{A}$ existiert, sodass für alle $1 \leq i, j \leq N$ $i \neq j$

$$f_i(G) \cap f_j(G) = \emptyset \text{ und } f_i(G) \subseteq G \text{ gilt.}$$

Da \mathcal{A} kompakt und somit beschränkt ist und $G \subseteq \mathcal{A}$, ist auch G beschränkt, also folgt, dass jedes gerade berührende IFS die offene Mengenbedingung erfüllt.

Ist das IFS weder total unzusammenhängend noch gerade berührend, so nennt man es *überlappend*.

Auch Wahrscheinlichkeiten können bei der Definition eines IFS eine Rolle spielen

Definition 2.33. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_N)$ ein iteriertes Funktionensystem und

$$\mathcal{P} := (p_1, \dots, p_N) \text{ mit } 0 < p_i < 1 \text{ } i = 1, \dots, N \text{ und } \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Dann heißt $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} := (f_1, \dots, f_N; p_1, \dots, p_N)$ ein *iteriertes Funktionensystem mit Wahrscheinlichkeiten* oder *IFS mit Wahrscheinlichkeiten*.

Bemerkung. (i) Um in der Praxis fraktale Mengen mit Hilfe eines IFS am Bildschirm eines Computers darzustellen, bedient man sich beispielsweise des *deterministischen Algorithmus* oder des, aus Speicherplatzgründen günstigeren, *Zufalls-Iterations-Algorithmus*, auch *Chaos-Spiel* genannt. Während man ersterem eine beliebige nichtleere kompakte Anfangsmenge K übergibt und daraus die Mengenfolge $(F^n(K))_{n \in \mathbb{N}}$ berechnet wird, spielen beim Zufalls-Iterations-Algorithmus Wahrscheinlichkeiten eine große Rolle. Man geht dabei von einem IFS mit Wahrscheinlichkeiten oder einem IFS aus und wählt einen Anfangspunkt $x_0 \in \Omega$. Der Algorithmus wendet nun zufällig eine der Kontraktionen des IFS an, wobei p_i , im Falle eines IFS mit Wahrscheinlichkeiten, die Wahrscheinlichkeit ist, dass die i -te Kontraktion f_i $i = 1, \dots, N$ ausgewählt wird. Damit erhalten wir x_1 und gehen analog, aber was die Wahl der Kontraktion betrifft, unabhängig zum vorigen Schritt vor. Die Häufungspunkte der dadurch entstehenden

Folge von Punkten $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind nach Folgerung 2.16 Punkte des Fraktals. Unterschied zwischen dem deterministischen Algorithmus und dem Zufalls-Iterations-Algorithmus mit IFS mit Wahrscheinlichkeiten ist, dass bei zweiterem Kontraktionen mit größerem p_i öfters angewendet werden, wodurch die Teile des Bildes heller und dunkler wirken. Mit Maßen können wir dieses Verhalten gut beschreiben. Liegt ein IFS mit Kondensationsmenge vor, wird der Algorithmus leicht abgeändert - wir gehen darauf aber nicht ein.

- (ii) Algorithmen und Verfahren im Bereich der digitalen Bilderstellung bzw. der digitalen Visualisierung von Fraktalen oder annähernd fraktalen Mengen, wo man u. a. mit iterierten Funktionensystemen arbeitet, unterliegen einer ständigen Verbesserung. Wir wollen auf die neuesten Entwicklungen nicht eingehen, verweisen aber dennoch auf [9], wo einige neue Methoden vorgestellt werden, wobei neben der IFS-Theorie, die auch im Bereich der Computergrafik oder der Bildkompression Anwendung findet, auch mit Adressen gearbeitet wird. Dadurch kann man etwa Hintergründe oder geometrische Objekte animieren, den Attraktor des IFS einfärben und eine Brücke zwischen IFS-Attraktoren und zufälligen Fraktalen schlagen.

Bereits im vorigen Abschnitt haben wir den Raum $(\mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega), d_H)$ angeführt. Analog zur Hutchinson-Abbildung definieren wir:

Definition 2.34. Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{I}_{\mathcal{P}} := (f_1, \dots, f_N; p_1, \dots, p_N)$ ein IFS mit Wahrscheinlichkeiten. Dann heißt die Funktion

$$M : \begin{cases} \mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega) & \longrightarrow \mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega) \\ \nu & \longmapsto \sum_{i=1}^N p_i \cdot \nu \circ f_i^{-1} \end{cases}$$

der zum IFS gehörende Markov-Operator.

Es lässt sich zeigen, dass M eine Kontraktion auf $\mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ bezüglich der Hutchinson-Metrik ist und es analog zum Attraktor eines IFS ein eindeutiges Maß μ aus $\mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ gibt, das Fixpunkt der Abbildung M ist, also, das $M(\mu) = \mu$ erfüllt. Dieses Maß nennt man *invariantes Maß des IFS mit Wahrscheinlichkeiten*. Für die Sätze und Beweise, die diese Behauptungen rechtfertigen, verweisen wir auf [6] (Seite 398-400).

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch folgende

Definition 2.35. Sei $\mathcal{I} = (f_1, \dots, f_N)$ ein iteriertes Funktionensystem und \mathcal{P}' eine quadratische Matrix mit den Einträgen p_{ij} $i, j = 1, \dots, N$, wobei für alle $1 \leq i, j \leq N$

$$p_{ij} \in [0, 1], \quad \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$$

gilt und für alle $1 \leq i, j \leq N$ eine endliche Folge natürlicher Zahlen $k_l \in \{1, 2, \dots, N\}$ $l = 1, \dots, m$ existiert, sodass

$$p_{ik_1} p_{k_1 k_2} \cdot \dots \cdot p_{k_m j} > 0.$$

Dann heißt $\mathcal{I}_{\mathcal{P}'} := (f_1, \dots, f_N; \mathcal{P}')$ ein *rekurrentes iteriertes Funktionensystem* oder *rekurrentes IFS*.

Dabei ist p_{ij} die Wahrscheinlichkeit des Prozesses vom Zustand i in den Zustand j überzugehen, falls der Prozess gerade im Zustand i ist, d. h. die zuletzt angewendete Abbildung f_i war. Durch die Forderung, dass $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, werden alle möglichen Zustände beschrieben, in die das System im nächsten Schritt springen kann und durch die Existenz einer endlichen Folge, sodass $p_{ik_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_m j} > 0$, ist gesichert, dass es eine positive Wahrscheinlichkeit gibt, um, vom Zustand i ausgehend, in endlich vielen Schritten Zustand j zu erreichen.

Analog zu deterministischen Fraktalen wollen wir nun auch zufällige fraktale Mengen mittels iterierten Funktionensystemen darstellen. Dazu setzen wir für $N \in \mathbb{N}$ $E := \{0, 1, \dots, N-1\}$ als endliches Alphabet voraus und versehen es mit der diskreten Topologie. Für E^k , E^* und E^∞ verwenden wir die Produkttopologie. Im Gegensatz zu Definition 2.30 bezeichne $\alpha := \alpha_0 \dots \alpha_{k-1}$ mit $\alpha_i \in E$ $i = 0, \dots, k-1$ ein Wort. Für $\alpha \in E^*$ und $\beta \in E^* \cup E^\infty$ definieren wir

$$\alpha * \beta := \alpha_0 \dots \alpha_{|\alpha|-1} \beta_0 \beta_1 \dots$$

mit $\alpha * \Lambda = \Lambda * \alpha = \alpha$ und für $n \in \mathbb{N}$ $\alpha | n := \alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$.

Definition 2.36. Sei (Ω, d) ein beschränkter separabler metrischer Raum. Dann bezeichnet $Con(\Omega)$ die Menge aller Kontraktionen auf Ω und $X := X(\Omega, N) := (Con(\Omega)^N)^{E^*}$. Die Elemente von X sind

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in E^*}$$

mit

$$\mathcal{F}_\alpha := \{f_{\alpha*0}, \dots, f_{\alpha*N-1}\} \in Con(\Omega)^N \text{ und } \mathcal{F}_\Lambda := \{f_0, \dots, f_{N-1}\}.$$

X_0 bezeichnet jene Elemente aus X , für die für alle $\alpha \in E^\infty$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^q \text{Lip}(f_{\alpha|n}) = 0$$

gilt, wobei

$$\text{Lip}(f) := \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in \Omega, x \neq y \right\}$$

die kleinste Lipschitz-Konstante einer beliebigen Funktion $f : \Omega \rightarrow \Omega$ ist und nicht endlich sein muss.

Satz 2.28. Sei $\mathcal{F} \in X_0$. Dann ist

$$\mathcal{A}_z := \mathcal{A}_z(\mathcal{F}) := \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} \overline{f_{\alpha|1} \circ \dots \circ f_{\alpha|q+1}(\Omega)}$$

kompakt und für jede Familie kompakter Mengen $(K_\alpha)_{\alpha \in E^*}$ gilt bezüglich der Hausdorff-Metrik

$$\mathcal{A}_z = \lim_{q \rightarrow \infty} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} f_{\alpha|1} \circ \dots \circ f_{\alpha|q+1}(K_\alpha).$$

Beweis. Wir verweisen auf [10] (Seite 361-363). □

Bemerkung. Die Konstruktion verallgemeinert jene für deterministische Fraktale und wir können \mathcal{A}_z als *zufälliges Fraktal* betrachten.

Versieht man $Con(\Omega)$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, X mit der Produkttopologie und bezeichnet mit μ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $Con(\Omega)^N$, sowie mit μ_{E^*} das entsprechende Produktmaß auf $(Con(\Omega)^N)^{E^*}$, so kann man ein Bildmaß $\mu_{E^*}^\psi$ von μ_{E^*} unter ψ definieren mit

$$\psi : \begin{cases} X \rightarrow \mathfrak{K}^- \\ \mathcal{F} \mapsto \begin{cases} \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} \overline{f_{\alpha|1} \circ \dots \circ f_{\alpha|q+1}}(\Omega), & \text{falls } \mathcal{F} \in X_0 \\ \tilde{K}, & \text{falls } \mathcal{F} \notin X_0 \end{cases} \end{cases} .$$

\tilde{K} ist dabei eine nichtleere kompakte Teilmenge von Ω .

Geht man nun von einer beliebigen nichtleeren kompakten Menge K aus, wählt $\{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ zufällig bezüglich μ aus, definiert $A_1 := \bigcup_{k=0}^{N-1} f_k(K)$ und wählt danach für jedes $k = 0, \dots, N-1$ unabhängig vom vorigen Schritt und wieder zufällig bezüglich μ ein N -Tupel $\{f_{k,0}, \dots, f_{k,N-1}\}$ aus und bildet $A_2 := \bigcup_{k=0}^{N-1} f_k(\bigcup_{l=0}^{N-1} f_{k,l}(K))$ usw., so ist der Limes bezüglich der Hausdorff-Metrik ein typisches $\mu_{E^*}^\psi$ -zufälliges Fraktal.

2.4 Das Collage-Theorem

Im letzten Abschnitt sind wir von einem iterierten Funktionensystem ausgegangen und haben gezeigt, dass wir damit, beginnend mit einer beliebigen Menge, einen eindeutig bestimmten Attraktor erzeugen können, der oft ein Fraktal ist. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem umgekehrten Zugang. Wir gehen also von einem bestimmten Bild bzw. von einem Fraktal aus und beschäftigen uns mit jenen iterierten Funktionensystemen, deren Attraktoren das Bild möglichst gut approximieren. „Möglichst gut“ bedeutet dabei in diesem Zusammenhang, dass der Hausdorff-Abstand der beiden Mengen möglichst klein ist. Wir benötigen folgenden

Hilfssatz 2.29. *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, die Funktion $f : \Omega \rightarrow \Omega$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor p und $\xi \in \Omega$ der Fixpunkt von f . Dann gilt für alle $x \in \Omega$*

$$d(x, \xi) \leq d(x, f(x)) \cdot \frac{1}{1-p}.$$

Beweis. Sei $x \in \Omega$ beliebig. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes $\xi \in \Omega$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \xi.$$

Daraus und aus der Tatsache, dass eine Metrik als Funktion in einer Variablen, d. h. einen Punkt halten wir fest, stetig und f eine Kontraktion ist, folgt

$$\begin{aligned} d(x, \xi) &= d(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \leq \\ &\stackrel{\text{Dreiecks-}}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x, f^1(x)) + d(f^1(x), f^2(x)) + \dots + d(f^{n-1}(x), f^n(x))) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x, f(x)) + p \cdot d(x, f(x)) + p^2 \cdot d(x, f(x)) + \dots + p^{n-1} \cdot d(x, f(x))) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x)) \cdot \sum_{m=0}^{n-1} p^m = d(x, f(x)) \cdot \frac{1}{1-p}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt, da $p < 1$ und die geometrische Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} p^m$ somit $\frac{1}{1-p}$ ergibt. \square

Satz 2.30. (*Collage-Theorem*)

Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\mathcal{E} \in \mathfrak{K}^-$ und $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_N)$ ein iteriertes Funktionensystem mit den Kontraktionsfaktoren (p_1, \dots, p_N) und $p := \max\{p_1, \dots, p_N\}$. Gilt

$$h(\mathcal{E}, F(\mathcal{E})) = h(\mathcal{E}, \bigcup_{i=1}^N f_i(\mathcal{E})) \leq \varepsilon \text{ mit } \varepsilon > 0,$$

dann folgt für den Attraktor \mathcal{A} des IFS

$$h(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \leq \frac{\varepsilon}{1-p}.$$

Beweis. Da (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum ist, folgt nach Satz 2.19 auch die Vollständigkeit des Raumes (\mathfrak{K}^-, h) . Weiters gilt mit Hilfssatz 2.24, dass F von \mathfrak{K}^- nach \mathfrak{K}^- eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor p ist, deren eindeutig existierender Fixpunkt nach Satz 2.25 \mathcal{A} ist. Somit sind alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.29 erfüllt und es gilt für alle $K \in \mathfrak{K}^-$, also insbesondere auch für $\mathcal{E} \in \mathfrak{K}^-$,

$$h(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \leq h(\mathcal{E}, F(\mathcal{E})) \cdot \frac{1}{1-p} \leq \frac{\varepsilon}{1-p}.$$

\square

Ist also der Hausdorff-Abstand einer Menge \mathcal{E} und jener Menge, die entsteht, wenn man die Hutchinson-Abbildung *einmal* auf sie anwendet, hinreichend klein, so approximiert der Attraktor des IFS die Menge \mathcal{E} beliebig gut.

Wenn wir also eine Menge \mathcal{E} gegeben haben und ein IFS geschickt wählen, d. h. so, dass der Abstand von \mathcal{E} und $F(\mathcal{E})$ gering ist, so stellt \mathcal{A} die Menge \mathcal{E} näherungsweise dar.

Bemerkung. Das Collage-Theorem kann man analog für iterierte Funktionensysteme mit Kondensationsmenge formulieren und beweisen.

Wir wollen ein äußerst einfaches Beispiel anführen:

Beispiel 2.3. Sei $(\Omega, d) := (\mathbb{R}^2, d_2)$ unser vollständiger metrischer Raum und \mathcal{E} ein Quadrat in der Ebene, das wir durch die drei Eckpunkte A, B, C festlegen. Diese Menge ist trivialerweise kompakt und nichtleer.

Wir suchen nun ein IFS, dessen Attraktor \mathcal{A} die Menge \mathcal{E} möglichst gut approximiert.

Dazu überdecken wir das Quadrat mit vier gleich großen Quadraten und legen die Eckpunkte der neuen Quadrate wiederum durch jeweils drei Punkte fest, wie in Abbildung 2.3 skizziert. Wir definieren jene affinen Abbildungen, die \mathcal{E} auf

die vier kleinen Quadrate abbilden, indem wir fordern, dass die drei Eckpunkte A, B, C auf die entsprechenden drei Eckpunkte der kleinen Quadrate abgebildet werden. Da wir uns in der Ebene befinden und die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen, sind die affinen Abbildungen durch diese Forderung eindeutig festgelegt:

$$f_1 : (A, B, C) \longrightarrow (1, 2, 4) \quad f_2 : (A, B, C) \longrightarrow (2, 3, 5)$$

$$f_3 : (A, B, C) \longrightarrow (4, 5, 7) \quad f_4 : (A, B, C) \longrightarrow (5, 6, 8).$$

Da die f_i für $i = 1, \dots, 4$ Ähnlichkeitsabbildungen mit Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$ sind, bildet $\mathcal{S} := (f_1, f_2, f_3, f_4)$ ein IFS und da

$$h(\mathcal{E}, F(\mathcal{E})) = h(\mathcal{E}, \bigcup_{i=1}^4 f_i(\mathcal{E})) = h(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$$

gilt, folgt aus dem Collage-Theorem

$$h(\mathcal{E}, \mathcal{A}) = 0, \text{ also gilt } \mathcal{E} = \mathcal{A}.$$

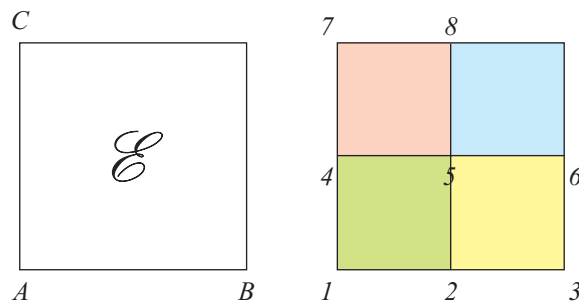


Abbildung 2.3: Quadrat das durch die Eckpunkte A, B und C festgelegt ist (links) und seine Überdeckung durch vier kleinere Quadrate (rechts).

Ein weiteres Beispiel findet sich z. B. in [4] (Seite 127-132):

Beispiel 2.4. Sei wieder $(\Omega, d) := (\mathbb{R}^2, d_2)$ unser vollständiger metrischer Raum und \mathcal{E} eine kompakte ebene Figur, wie die Giraffe in der nachfolgenden Abbildung.

Gesucht sei ein IFS, dessen Attraktor die Menge \mathcal{E} möglichst genau approximiert.

Dazu gehen wir nach der *Dreiecksmethode* vor. Diese Vorgehensweise ist in diesem Fall sinnvoll, da der Umriss unserer Figur dreiecksähnlich ist.

Schritt 1: Wir legen ein Dreieck G mit den Eckpunkten A, B, C möglichst überdeckend über unsere Figur, sodass

$$h(\mathcal{E}, G) \leq \varepsilon_1$$

für $\varepsilon_1 > 0$ ist.

Schritt 2: Wir überdecken die Menge \mathcal{E} mit beliebigen Dreiecken G_i $i = 1, \dots, 7$, sodass sie damit möglichst ausgefüllt ist, d. h.

$$h\left(\bigcup_{i=1}^7 G_i, \mathcal{E}\right) \leq \varepsilon_2$$

für $\varepsilon_2 > 0$ gilt, achten aber darauf, die Anzahl der G_i möglichst gering zu halten.

Schritt 3: Wir definieren jene eindeutig bestimmten affinen Abbildungen f_i $i = 1, \dots, 7$, die das Dreieck G auf die Dreiecke G_i abbilden:

$$f_1 : (A, B, C) \longrightarrow (1, 2, 3) \quad f_2 : (A, B, C) \longrightarrow (4, 5, 6)$$

und

$$f_3 : (A, B, C) \longrightarrow (6, 7, 8)$$

für die Vorder- und Hinterbeine,

$$f_4 : (A, B, C) \longrightarrow (10, 8, 9) \quad f_5 : (A, B, C) \longrightarrow (10, 9, 3)$$

für den Rumpf und

$$f_6 : (A, B, C) \longrightarrow (3, 9, 11) \quad \text{bzw.} \quad f_7 : (A, B, C) \longrightarrow (12, 13, 14)$$

für den Hals bzw. den Kopf.

Wir nehmen nun an, dass die f_i $i = 1, \dots, 7$ Kontraktionen mit Kontraktionsfaktoren (p_1, \dots, p_7) sind mit $p := \max\{p_1, \dots, p_7\}$ und somit ein IFS bilden, was sicher der Fall ist, weil die G_i entsprechend klein sind. Der Attraktor dieses IFS approximiert dann die Menge \mathcal{E} , denn da F eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $p < 1$ ist, erhalten wir

$$h(F(\mathcal{E}), F(G)) \leq p \cdot h(\mathcal{E}, G) \leq \varepsilon_1.$$

und mit Schritt 2

$$h(\mathcal{E}, F(G)) = h\left(\mathcal{E}, \bigcup_{i=1}^7 f_i(G)\right) = h\left(\mathcal{E}, \bigcup_{i=1}^7 G_i\right) \leq \varepsilon_2.$$

Damit gilt

$$h(\mathcal{E}, F(\mathcal{E})) \leq h(\mathcal{E}, F(G)) + h(F(G), F(\mathcal{E})) \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_1 =: \varepsilon$$

und mit dem Collage-Theorem

$$h(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \leq \frac{\varepsilon}{1-p}.$$

Bemerkung. (i) Um bei der Dreiecksmethode aus Beispiel 2.4 eine gute Approximation der Menge \mathcal{E} zu erhalten, sollte der Hausdorff-Abstand des Dreieckes G und der Figur \mathcal{E} aber auch $h(\bigcup_{i=1}^7 G_i, \mathcal{E})$ klein sein, was durch eine Verfeinerung der Überdeckung der Figur mit G_i erreicht werden kann. Damit wird zwar der h -Abstand zwischen \mathcal{A} und \mathcal{E} kleiner, aber die Anzahl der Dreiecke G_i steigt, was aus rein mathematischer Sicht zwar irrelevant ist, aber für die Praxis Probleme darstellt (siehe Punkt (ii)).

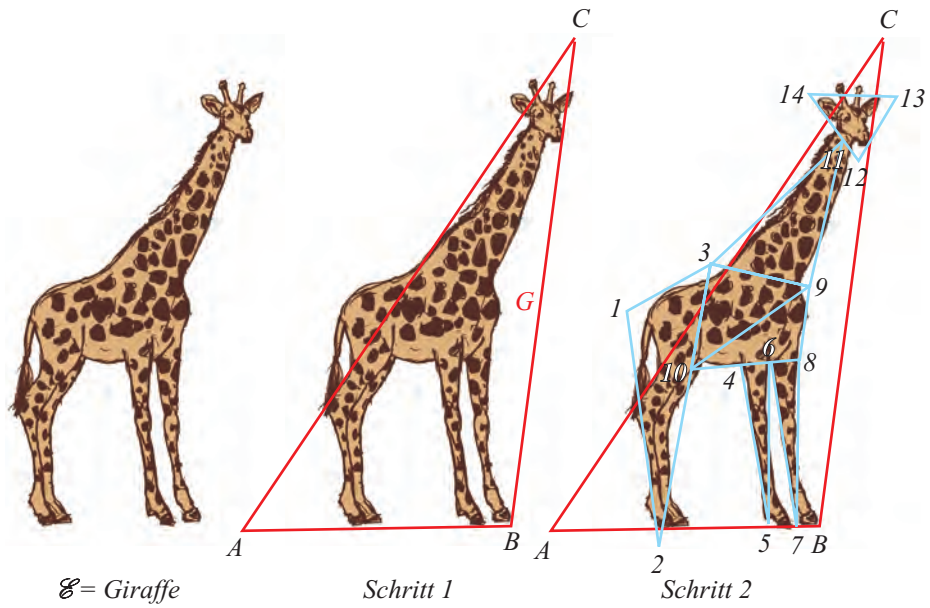


Abbildung 2.4: Prinzip der Dreiecksmethode.

- (ii) Iterierte Funktionensysteme werden im Bereich der Bildkompression verwendet. Ist ein großes Bild nämlich z. B. in Pixel codiert, so muss es auch pixelweise beschrieben werden, wodurch eine große Datenmenge ent-

steht, die viel Speicherplatz benötigt, und diese Vorgehensweise somit unökonomisch ist. Der Ansatz Barnsleys war es deshalb mit iterierten Funktionensystemen zu arbeiten, deren Attraktor das Bild möglichst genau approximiert. In der Ebene muss man dann im Falle eines IFS mit n Kontraktionen nur $6 \cdot n$ Werte speichern. Die Firma, die er gegründet hat, beschäftigt sich mit Bildkompressionsalgorithmen, basierend auf dieser Idee.

- (iii) Zu diesen Algorithmen zählen z. B. die *Dreiecksmethode* oder die *Parallelogrammmethode*. Erstere haben wir bereits anhand eines Beispiels skizziert, die Überdeckung erfolgt hier mit Dreiecken. Liegt aber z. B. ein Bild einer Schildkröte vor, so ist es sinnvoller, diese mit Parallelogrammen zu überdecken. G sowie G_i $i = 1, \dots, n$ $n \in \mathbb{N}$ sind also jeweils Parallelogramme. Es sei bemerkt, dass wir beim Trivialbeispiel 2.3 auch die Parallelogrammmethode verwendet haben.

Das entsprechende Programm prüft, ob die errechneten f_i tatsächlich Kontraktionen sind, im negativen Fall wird dies angezeigt, damit der Anwender die Eingabe korrigieren kann. Liegt eine kompliziertere Figur vor, so wird diese normalerweise zerstückelt und die einzelnen einfacheren Teile betrachtet bzw. die genannten Methoden auf diese Einzelteile angewendet.

- (iv) In [11] (Seite 94-95) findet sich ein weiterer Algorithmus, nämlich der *IFS-Kompressionsalgorithmus*. Dabei geht man von einem digitalisierten Bild \mathcal{E} , z. B. einem weißen Blatt auf schwarzem Hintergrund, oder einer Annäherung durch eine Streckenzug (z. B. dem vektorisierten Rand eines Blattes) aus, das am Bildschirm, also in \mathbb{R}^2 , dargestellt wird. Die affine Abbildung f_1 erstellen wir, indem wir die Einträge der zugehörigen Matrix jeweils mit einem Wert kleiner 1 initialisieren, sodass wir eine Ähnlichkeitsabbildung erhalten. Die Menge $f_1(\mathcal{E})$ wird am Bildschirm als verkleinerte Kopie von \mathcal{E} in anderer Farbe dargestellt und - z. B. mit der Maus - so transformiert, dass sie eine Kontraktion darstellt und einen Teil von \mathcal{E} überdeckt. Diese Lage wird fixiert und die Koeffizienten aufgezeichnet. f_2 legen wir analog fest und achten zusätzlich darauf, dass $f_2(\mathcal{E})$ \mathcal{E} aber aus Effizienzgründen möglichst wenig von $f_1(\mathcal{E})$ überdeckt. So verfährt man weiter bis die ursprüngliche Figur mit $f_i(\mathcal{E})$ ganz überdeckt ist. Der Hausdorff-Abstand von $F(\mathcal{E})$ und \mathcal{E} ist dann klarerweise gering.

Das obige Collage-Theorem wird manchmal auch *Collage-Theorem für IFS* genannt. Analog dazu existiert ein

Satz 2.31. (*Collage-Theorem für Maße*)

Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum, $\nu \in \mathbb{M}_1(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ und $\mathcal{I} = (f_1, \dots, f_N; p_1, \dots, p_N)$ ein iteriertes Funktionensystem mit Wahrscheinlichkeiten mit den Kontraktionsfaktoren (r_1, \dots, r_N) und $r := \max\{r_1, \dots, r_N\}$. Dann gilt für das eindeutig existierende invariante Maß μ , den Fixpunkt des Markov-Operators M ,

$$d_H(\mu, \nu) \leq \frac{d_H(\nu, M(\nu))}{1 - r}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist eine Folgerung aus [6], Satz 9.10 (Seite 399).

2.5 Fraktale Dimensionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Dimensionsfragen beschäftigen. Dabei ist es schwierig zu definieren, was eine *Dimension* überhaupt sei oder welche Eigenschaften sie zu erfüllen habe bzw. welche wünschenswert seien, so wie die Monotonie oder geometrische Invarianz z. B.. Dimensionsbegriffe wie der der *Hamel-Dimension*, mit der man die Dimension eines Vektorraumes angeben kann, sind uns bereits bekannt. Diese ist für einen endlich erzeugten Vektorraum als Anzahl der Elemente einer Basis dieses Vektorraumes und für nicht endlich erzeugte Vektorräume als ∞ definiert. So hat ein Punkt Hamel-Dimension 0, eine Gerade Hamel-Dimension 1 und eine Ebene Hamel-Dimension 2.

Welche Dimension haben nun aber die Küstenlinie Norwegens oder die Pfade der Brownschen Bewegung bzw. haben raumfüllende Kurven Dimension 1 oder 2?

Dabei sei eine raumfüllende Kurve wie in [12] (Seite 5) definiert:

Definition 2.37. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiger Weg und gelte für den n -dimensionalen Jordanschen Inhalt $j(\gamma([0, 1])) > 0$, so wird $\gamma([0, 1])$ eine *raumfüllende Kurve* genannt.

Anschaulich bedeutet dies im zwei- oder dreidimensionalen Raum, dass eine Fläche oder ein Raum durch die Kurve komplett ausgefüllt wird, d. h. betrachten wir einen beliebigen Teil dieser Fläche oder des Raumes, so wird jeder seiner Punkte durch die Kurve erwischt. Solche Kurven sind z. B. in der Natur wichtig, was man am Beispiel der Niere erkennen kann, die mit drei Gefäßsystemen, nämlich dem arteriellen, dem venösen und jenem, das für den Transport des Harns zuständig ist, in Verbindung steht. Jedes dieser Gefäße muss jeden Teil der Niere ansteuern können.

Mit Dimensionsfragen, Kurven allgemeiner Natur betreffend, beschäftigt sich z. B. [13] ausführlich.

Eng mit dem Dimensionsbegriff verknüpft, ist der des d -dimensionalen Volumens einer Menge. Gehen wir von beschränkten Mengen aus, so haben typisch eindimensionale, zweidimensionale bzw. dreidimensionale Mengen Länge, Flächeninhalt bzw. Volumen größer als 0 und kleiner als ∞ . Das Sierpińskidreieck aus Kapitel 1 hat z. B. unendliche „Länge“ und den Flächeninhalt 0. Dieses Fraktal hat also weder Dimension 1 noch 2, intuitiv würde man sagen, die Dimension liegt zwischen diesen Werten, ist also eine gebrochene Zahl.

Betrachten wir eine Gerade, ein Quadrat oder einen Würfel mit Länge oder Seitenlänge a und vervielfachen jede der Längen um den Faktor k , so ist in allen Fällen die d -dimensionale Volumszunahme gleich k^d , wobei d die Hamel-Dimension der Gerade, des Quadrates oder des Würfels ist. Vergrößert man nun die Approximation einer Kochkurve z. B. um den Faktor 3, so steigt ihre Länge um das Vierfache an und wir erhalten

$$4 = 3^d \iff d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}.$$

Um den genannten Objekten wie auch generell fraktalen Mengen eine Dimension zuordnen zu können, führen wir den Begriff der *fraktalen Dimension* ein, der sich aus mehreren Dimensionsbegriffen zusammensetzt. Gehen wir wieder von einem metrischen Raum (Ω, d) aus, so ist dies für jede seiner Teilmengen eine mitunter gebrochene Zahl, die angibt, wie dicht die Menge den Raum ausfüllt bzw. wie viel Platz eine Menge neben jedem seiner Punkte in Anspruch nimmt, die ein Maß für die Komplexität und Größe eines Fraktals ist und mit der sich Fraktale untereinander vergleichen lassen. Normalerweise ist diese Zahl kleiner gleich als die Hamel-Dimension, aber größer gleich der *topologischen Dimension*, die wir definieren wollen:

Definition 2.38. Sei (Ω, \mathfrak{G}) ein topologischer Raum und \mathcal{C} sowie \mathcal{C}' Teilmengen von $\mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist \mathcal{C}' eine *Verfeinerung* von \mathcal{C} , wenn für jedes $C' \in \mathcal{C}'$ ein $C \in \mathcal{C}$ existiert, sodass $C' \subseteq C$.

Definition 2.39. Sei (Ω, \mathfrak{G}) ein topologischer Raum und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann hat \mathcal{C} die *Ordnung* $m + 1$, wenn jedes Element von Ω in höchstens $m + 1$ Mengen von \mathcal{C} enthalten ist.

Definition 2.40. ([7], Seite 305)

Sei (Ω, \mathfrak{G}) ein topologischer Raum. Dann ist die kleinste ganze Zahl m , sodass für jede offene Überdeckung von Ω eine offene Überdeckung von Ω existiert, die eine Verfeinerung der ersten ist und höchstens Ordnung $m + 1$ hat, die *topologische Dimension* von Ω . Wir schreiben $\dim_{\mathcal{T}}(\Omega) = m$

Fraktale Dimensionen sollen also ein objektives Hilfsmittel bieten, um Fraktale bzw. Mengen aus der Realität mit konstruierten fraktalen Mengen miteinander vergleichen zu können und Fragen wie „Wie groß ist das Fraktal?“, „Sind sich die beiden Fraktale ähnlich?“, „Welches der Fraktale ist größer?“ zumindest teilweise beantworten zu können, wobei unterschiedliche fraktale Dimensionen auch unterschiedliche Werte ein und derselben Menge liefern. Wie bereits erwähnt, haben viele Formen aus Natur und Medizin annähernd fraktale Gestalt und somit oft fraktale Dimension - so können wir Teilen des Nervensystems einen Dimensionswert zuweisen - aber auch in rein mathematischen Gebieten, wie nichtlinearen Differentialgleichungen, spielen fraktale Dimensionen eine Rolle.

Wir werden uns im Folgenden mit einigen fraktalen Dimensionen, wie der *Hausdorff-Dimension*, der *Ähnlichkeitsdimension* und der *Box-Dimension* beschäftigen. Dabei sei erwähnt, dass die Bezeichnungen der einzelnen Dimensionsbegriffe in der Literatur nicht einheitlich verwendet werden. In [6] (Seite 199) wird die in dieser Arbeit als Box-Dimension z. B. bezeichnete Dimension als fraktale Dimension bezeichnet.

2.5.1 Die Hausdorff-Dimension

Um die Hausdorff-Dimension zu definieren, gehen wir von dem metrischen Raum (\mathbb{R}^n, d_2) mit $n \in \mathbb{N}$ aus und konstruieren ein äußeres Maß, doch im Gegensatz zu der aus der Maßtheorie bekannten Methode I gehen wir nun nach Methode II, d. h. nach der Carathéodory-Methode, vor.

Definition 2.41. Sei Ω eine Menge. Dann ist μ^* genau dann ein *äußeres Maß* auf Ω , falls

- (i) $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$
- (ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$
- (iii) $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Isotonie von μ^*)
- (iv) $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ (Sub- σ -Additivität von μ^*)

gilt.

Definition 2.42. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und μ^* ein äußeres Maß auf Ω . Dann heißt μ^* *metrisch*, falls für alle Mengen A, B aus $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $\text{dist}(A, B) > 0$

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

gilt.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den Begriff eines Maßes wiederholen.

Definition 2.43. Sei Ω eine Menge, \mathfrak{A} eine σ -Algebra über Ω und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ mit A_n disjunkt. Dann heißt jede Funktion mit

- (i) $\mu : \mathfrak{A} \longrightarrow [0, \infty]$
- (ii) $\mu(\emptyset) = 0$
- (iii) $\mu\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (Volladditivitat oder σ -Additivität von μ),

ein Maß auf (Ω, \mathfrak{A}) und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Sei (Ω, \mathfrak{G}) ein Hausdorff-Raum und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$. Dann definiert

$$\text{supp}(\mu) := \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ \mu(A^c) = 0}} A$$

den Träger von μ .

Ist der Träger in einer kompakten Menge enthalten und gilt $0 < \mu(\Omega) < \infty$, dann nennen wir μ eine *Masseverteilung*.

Satz 2.32. (*Carathéodory-Kriterium*)

Sei μ^* ein äußeres Maß auf dem metrischen Raum (Ω, d) . Dann ist $\mu^*|_{\mathfrak{B}_\Omega}$ genau dann ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$, falls für alle $A, B \subseteq \Omega$ mit $\text{dist}(A, B) > 0$

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

gilt, also falls μ^* metrisch ist.

Beweis. Die eine Richtung des Beweises ist trivial, die andere findet sich z. B. in [14] (Seite 74-75). \square

Definition 2.44. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und

$$\mathcal{C}_\varepsilon := \{C \in \mathcal{C} : \delta(C) \leq \varepsilon\}$$

für $\varepsilon > 0$ fest, jene Mengen aus \mathcal{C} , deren Durchmesser kleiner gleich ε ist. Für jede Menge $A \subseteq \Omega$ heißt dann

$$\mathcal{U}_\varepsilon(A) := \{(C_n)_{n \in \mathbb{N}} : C_n \in \mathcal{C}_\varepsilon, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \supseteq A\}$$

das ε -Überdeckungssystem der Menge A .

Definition 2.45. Sei \mathcal{C} eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge Ω , also von $\mathcal{P}(\Omega)$, die auch die leere Menge beinhaltet. Dann heißt eine Funktion

$$\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty] \text{ mit } \Phi(\emptyset) = 0$$

eine *Belegungsfunktion auf \mathcal{C}* .

Beispiel 2.5. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\emptyset \in \mathcal{C}$ und $h : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige und auf $(0, \infty]$ positive Funktion. Dann ist

$$\Phi_h(C) := \begin{cases} h(\delta(C)), & \text{falls } C \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } C = \emptyset \end{cases}$$

mit $C \in \mathcal{C}$ eine Belegungsfunktion auf \mathcal{C} .

Definition 2.46. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$ gegeben und Φ eine Belegungsfunktion auf \mathcal{C} . Wir definieren

$$\mu_\varepsilon^* : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty] \\ A \mapsto \begin{cases} \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi(C_n) : (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}, & \text{falls } \mathcal{U}_\varepsilon(A) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{falls } \mathcal{U}_\varepsilon(A) = \emptyset \end{cases} \end{cases} .$$

Die Abbildung von $\mathcal{P}(\Omega)$ nach $[0, \infty]$ mit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu^*(A) := \sup_{\varepsilon > 0} \mu_\varepsilon^*(A) \tag{2.9}$$

nennen wir dann ein *nach Methode II konstruiertes äußeres Maß auf Ω* .

Satz 2.33. *Es gelten die Voraussetzungen von Definition 2.46. Dann wird durch (2.9) ein äußeres Maß auf Ω definiert.*

Beweis. Da für jedes $\varepsilon > 0$ die Abbildung μ_ε^* offensichtlich ein äußeres Maß auf Ω ist und aus der Maßtheorie bekannt ist, dass das Supremum äußerer Maße auf einer Menge wieder ein äußeres Maß auf dieser Menge ist, gilt dies auch für μ^* . \square

Definition 2.47. Sei $(\Omega, d) := (\mathbb{R}^n, d_2)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C} := \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ und Φ_h die Belegungsfunktion aus Beispiel 2.5. Dann heißt das nach Methode II konstruierte äußere Maß (2.9)

$$\mathcal{H}^h(A) := \mathcal{H}^{h*}(A) := \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^{h*}(A) :=$$

$$\begin{aligned}
& := \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_h(C_n) : (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A) \right\} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_h(C_n) : (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A) \right\}
\end{aligned}$$

mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ das h -dimensionale (äußere) Hausdorff-Maß.

Für den Fall, dass

$$h : \begin{cases} [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty] \\ x \mapsto x^s \end{cases}$$

mit $s \in [0, \infty)$ und $0^0 := 1$ ist, schreiben wir für das nach Methode II konstruierte Maß \mathcal{H}^s und nennen es das s -dimensionale Hausdorff-Maß.

Bemerkung. Das Hausdorff-Maß lässt sich auch für allgemeinere Räume definieren. So geht [15] (Seite 55, 59-60) von beliebigen separablen metrischen Räumen aus. Für unsere Zwecke reicht der \mathbb{R}^n mit $n \in \mathbb{N}$ aber vollkommen aus.

Satz 2.34. *Das h -dimensionale Hausdorff-Maß ist ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$.*

Beweis. Nach Satz 2.32 genügt es zu zeigen, dass \mathcal{H}^h ein metrisches äußeres Maß auf \mathbb{R}^n ist. Da das h -dimensionale Hausdorff-Maß nach Satz 2.33 ein äußeres Maß auf \mathbb{R}^n ist, gilt $\mathcal{H}^h(A \cup B) \leq \mathcal{H}^h(A) + \mathcal{H}^h(B)$ für alle $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Seien nun A und B Teilmengen des \mathbb{R}^n und gelte $\text{dist}(A, B) := \tau > 0$. Wir wählen $0 < \varepsilon < \tau$ und betrachten eine beliebige ε -Überdeckung $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $A \cup B$. Schneidet man nun die Mengen C_n mit A bzw. B und bezeichnet die dadurch entstehende Folge mit $(C_{n,A})_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(C_{n,B})_{n \in \mathbb{N}}$, so erhält man eine ε -Überdeckung von A bzw. B . Es gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_h(C_n) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_h(C_{n,A}) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_h(C_{n,B}) \geq \mathcal{H}_\varepsilon^{h^*}(A) + \mathcal{H}_\varepsilon^{h^*}(B)$$

und da $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig war

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{h^*}(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\varepsilon^{h^*}(A) + \mathcal{H}_\varepsilon^{h^*}(B).$$

Lässt man ε nun gegen 0 gehen, erhält man die Aussage des Satzes. \square

Satz 2.35. *Das h -dimensionale Hausdorff-Maß \mathcal{H}^h ist bewegungsinvariant.*

Beweis. Sei f eine Bewegung in \mathbb{R}^n und $A = \emptyset$. Dann folgt aus der Tatsache, dass $f(\emptyset) = \emptyset$, dass $\mathcal{H}^h(f(A)) = \mathcal{H}^h(A)$.

Sei also nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer. Für beliebige Mengen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\delta(f(C)) = \sup_{\xi, \eta \in f(C)} \{d_2(\xi, \eta)\} = \sup_{x, y \in C} \{d_2(x, y)\} = \delta(C)$$

und somit für $\varepsilon > 0$

$$(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A) \text{ genau dann, wenn } (f(C_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(A)).$$

Daraus folgt

$$\mathcal{H}^h(f(A)) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} h(\delta(f(C_n))) : (f(C_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(A)) \right\} = \mathcal{H}^h(A).$$

\square

Bemerkung. Das h -dimensionale Hausdorff-Maß ist also insbesondere translations- und rotationsinvariant.

Satz 2.36. Sei $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{B}_n das System der n -dimensionalen Borelschen Mengen und λ_n das n -dimensionale Lebesgue-Borel-Maß. Dann existiert ein $c_n \in (0, \infty)$, sodass $\mathcal{H}^n(A) = c_n \cdot \lambda_n(A) \forall A \in \mathfrak{B}_n$.

Beweis. Der Beweis findet sich in [16] (Seite 94). \square

Satz 2.37. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in (0, \infty)$ und $c \cdot A := \{c \cdot x : x \in A\}$. Dann gilt für $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^s(c \cdot A) = c^s \cdot \mathcal{H}^s(A).$$

Beweis. Für $A = \emptyset$ ist die Gleichung trivial. Gelte also $A \neq \emptyset$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varepsilon c}^{s*}(c \cdot A) &= \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(c \cdot C_n)^s : (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(A) \right\} = \\ &= c^s \cdot \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^s : (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(A) \right\} = c^s \cdot \mathcal{H}_{\varepsilon}^{s*}(A) \end{aligned}$$

und lässt man ε gegen 0 gehen, folgt die Behauptung. \square

Satz 2.38. (i) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, die die Hölder-Bedingung mit Hölder-Exponent α und Hölder-Konstante H erfüllt. Dann folgt für alle $s \geq 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}_{\alpha}^s(f(A)) \leq H^{\frac{s}{\alpha}} \cdot \mathcal{H}^s(A).$$

(ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, die Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L ist. Dann gilt für alle $s \geq 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \cdot \mathcal{H}^s(A).$$

(iii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bi-Lipschitz-stetig mit Konstanten L_1, L_2 . Dann gilt für alle $s \geq 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$L_1^s \cdot \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(f(A)) \leq L_2^s \cdot \mathcal{H}^s(A).$$

(iv) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Ähnlichkeitsfaktor r . Dann gilt für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^s(f(A)) = r^s \cdot \mathcal{H}^s(A).$$

Beweis. Da die Aussagen (i)-(iv) für $A = \emptyset$ trivialerweise erfüllt sind, setzen wir voraus, dass unsere Mengen ungleich \emptyset sind.

(i) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann folgt aus der Hölder-Bedingung der Funktion f , dass $\delta(f(C)) \leq H \cdot \delta(C)^\alpha$. Sei nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(A)$ für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\delta(f(C_n)) \leq H \cdot \delta(C_n)^\alpha. \quad (2.10)$$

Da für geeignetes $\varepsilon' > 0$ $(f(C_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\varepsilon'}(f(A))$ gilt, ist

$$\mathcal{H}_{\varepsilon'}^{\frac{s}{\alpha}*}(f(A)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(f(C_n))^{\frac{s}{\alpha}} \stackrel{\text{Ungleichung (2.10)}}{\leq} H_{\alpha}^{\frac{s}{\alpha}} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^s.$$

Gehen wir nun auf der rechten Seite zum Infimum der ε -Überdeckungen von A über, so erhalten wir

$$\mathcal{H}_{\varepsilon'}^{\frac{s}{\alpha}*}(f(A)) \leq H_{\alpha}^{\frac{s}{\alpha}} \cdot \mathcal{H}_{\varepsilon}^{s*}(A)$$

und mit $\varepsilon', \varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir unsere Ungleichung.

(ii) folgt aus (i) mit $\alpha := 1$.

(iii) Aus der bi-Lipschitz-Stetigkeit von f folgt auch dessen Injektivität. Somit ist die Abbildung f von \mathbb{R}^n nach $f(\mathbb{R}^n)$ bijektiv und wir können ihre Inverse bilden. Es gilt für alle $u, v \in f(\mathbb{R}^n)$

$$L_1 \cdot d_2(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \leq d_2(f \circ f^{-1}(u), f \circ f^{-1}(v)) = d_2(u, v),$$

also ist f^{-1} Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\frac{1}{L_1} \in (0, \infty)$. Damit erhalten wir mit (ii)

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(f^{-1}(f(A))) \leq \frac{1}{L_1^s} \cdot \mathcal{H}^s(f(A)).$$

Die zweite Ungleichung folgt ebenfalls aus (ii).

(iv) folgt direkt aus (iii), wenn wir $L_1 = L_2 = r$ und $m = n$ setzen. \square

Satz 2.39. *Um das h -dimensionale Hausdorff-Maß zu konstruieren, kann man auch von anderen Mengensystemen als $\mathcal{C}_{\varepsilon}$ ausgehen, wie*

$$\mathcal{C}_{\varepsilon}^{\mathfrak{O}} := \{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ ist offen, } \delta(C) \leq \varepsilon\},$$

$$\mathcal{C}_{\varepsilon}^{\mathfrak{S}} := \{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ ist abgeschlossen, } \delta(C) \leq \varepsilon\},$$

oder

$$\mathcal{C}_{\varepsilon}^{\mathfrak{K}} := \{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ ist kompakt, } \delta(C) \leq \varepsilon\}.$$

Beweis. Wir verweisen auf [5]. \square

Hilfssatz 2.40. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ höchstens abzählbar unendlich und $t > 0$. Dann gilt $\mathcal{H}^t(A) = 0$.*

Beweis. Für $A = \emptyset$ gilt die Aussage klarerweise, sei also $A \neq \emptyset$. Da \mathcal{H}^t als äußeres Maß sub- σ -additiv ist, genügt es zu zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^t(\{x\}) = 0$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann erhalten wir

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{t*}(\{x\}) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^t : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq x, (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(\{x\}) \right\}.$$

Wählen wir $C_1 := \{x\}$ und alle anderen $C_n := \emptyset$, so haben wir ein Element aus $\mathcal{U}_{\varepsilon}(\{x\})$ gefunden mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^t = 0$, also gilt $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{t*}(\{x\}) = 0$ \square

Satz 2.41. Sei $0 \leq s < t < \infty$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$(i) \mathcal{H}^s(A) < \infty \implies \mathcal{H}^t(A) = 0$$

und

$$(ii) \mathcal{H}^t(A) > 0 \implies \mathcal{H}^s(A) = \infty.$$

Beweis. (i) Da die Aussage für $A = \emptyset$ klarerweise gilt, betrachten wir nichtleere Mengen A .

Sei $s = 0$. Da \mathcal{H}^0 das Zählmaß ist, muss die Anzahl der Elemente der Menge A kleiner unendlich sein. Daraus folgt aber aus Hilfssatz 2.40, dass $\mathcal{H}^t(A) = 0$ für $t > 0$.

Sei $s > 0$ und gelte $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ für $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Für festes $\varepsilon > 0$ betrachten wir $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$ und hier wiederum jene C_n mit positivem Durchmesser. Dann gilt

$$\frac{\delta(C_n)^t}{\delta(C_n)^s} = \delta(C_n)^{t-s} \leq \varepsilon^{t-s}. \quad (2.11)$$

Sei nun $\tau > 0$, dann existiert nach Definition ein $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$, sodass

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^s \leq \mathcal{H}_\varepsilon^{s*}(A) + \frac{\tau}{\varepsilon^{t-s}}.$$

Daraus folgt

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{t*}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^t \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon^{t-s} \cdot \delta(C_n)^s \leq \varepsilon^{t-s} \cdot \mathcal{H}_\varepsilon^{s*}(A) + \tau.$$

Mit $\tau, \varepsilon \rightarrow 0$ folgt schließlich, da $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, dass $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

(ii) Sei $s = 0$. Da $\mathcal{H}^t(A) > 0$, folgt aus Hilfssatz 2.40, dass A überabzählbar ist, also gilt $\mathcal{H}^0(A) = \infty$.

Sei $s > 0$, $\mathcal{H}^t(A) > 0$ und ε fest. Dann folgt für alle $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$ aus Ungleichung (2.11)

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{t*}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^t \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^s \cdot \varepsilon^{t-s}$$

und somit

$$\varepsilon^{s-t} \cdot \mathcal{H}_\varepsilon^{t*}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(C_n)^s$$

für alle $\varepsilon > 0$. Bilden wir rechts das Infimum über alle $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$ und lassen ε gegen 0 gehen, so erhalten wir schließlich $\infty \leq \mathcal{H}^s(A)$. \square

Definition 2.48. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$ und h so definiert wie in Beispiel 2.5. Dann heißt A eine s -Menge, falls $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ und eine h -Menge, falls $0 < \mathcal{H}^h(A) < \infty$.

Das s -dimensionale Hausdorff-Maß einer Menge ändert sich also bei verschiedenen s . Die Stelle, an der es von ∞ auf 0 springt, nennen wir die Hausdorff-Dimension der Menge A . Ihre Existenz ist durch Satz 2.41 gesichert.

Definition 2.49. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \iota_{s_0}(\mathcal{H}^s(A) = \infty \forall s < s_0 \wedge \mathcal{H}^s(A) = 0 \forall s > s_0) :=$$

:= jenes s_0 , sodass $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ für alle $s < s_0$ und $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für alle $s > s_0$ die *Hausdorff-Dimension* von A oder die *Hausdorff-Besicovitch-Dimension* von A .

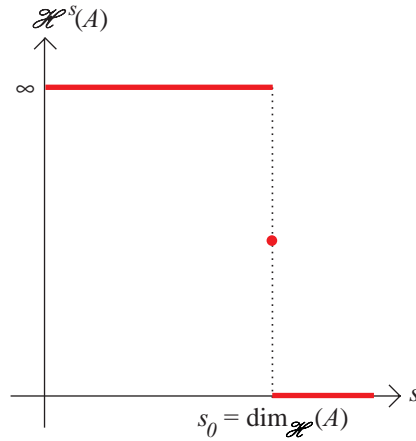


Abbildung 2.5: Hausdorff-Dimension einer Menge A .

Bemerkung. Die Hausdorff-Dimension kann man nicht nur für Mengen, sondern auch für Maße definieren. Wir wollen aber darauf nicht eingehen.

Satz 2.42. Sei $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann folgt $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(B)$ (Monotonie).

Beweis. Sei $s > \dim_{\mathcal{H}}(B)$, dann folgt, dass $\mathcal{H}^s(B) = 0$ und $\mathcal{H}^s(A) = 0$ und damit $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq s$. Lassen wir nun s gegen $\dim_{\mathcal{H}}(B)$ gehen, so folgt die Behauptung. \square

Satz 2.43. Seien A, B und $A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(i) \dim_{\mathcal{H}}(A \cup B) = \max\{\dim_{\mathcal{H}}(A), \dim_{\mathcal{H}}(B)\}$$

und für $N \in \mathbb{N}$

$$\dim_{\mathcal{H}}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = \max\{\dim_{\mathcal{H}}(A_1), \dim_{\mathcal{H}}(A_2), \dots, \dim_{\mathcal{H}}(A_N)\};$$

$$(ii) \dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_{\mathcal{H}}(A_n)\}.$$

Beweis. Es genügt (ii) zu zeigen, da wir endliche Vereinigungen mit Hilfe der leeren Menge als unendliche darstellen können und $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = 0$, da $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ für alle $s \in [0, \infty)$ ist.

„ \geq “ Aus Satz 2.42 folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \geq \dim_{\mathcal{H}}(A_n)$$

also gilt dies auch für das Supremum.

„ \leq “ Sei $s > \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_{\mathcal{H}}(A_n)\} \geq \dim_{\mathcal{H}}(A_n)$. Daraus folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{H}^s(A_n) = 0$ gilt, also auch

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_n) = 0$$

und somit $\dim_{\mathcal{H}}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq s$. Lassen wir s gegen $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_{\mathcal{H}}(A_n)\}$ gehen, folgt die Behauptung. \square

Folgerung 2.44. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ höchstens abzählbar. Dann ist $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$.

Beweis. Da für $A = \emptyset$ die Aussage direkt aus der Definition der Hausdorff-Dimension folgt, setzen wir $A \neq \emptyset$ voraus.

Da A höchstens abzählbar ist, können wir $A = \{x_i : i \in I\}$ mit $I \subseteq \mathbb{N}$ schreiben. Aus Satz 2.43 folgt $\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup_{i \in I} \dim_{\mathcal{H}}(\{x_i\})$ und aus Hilfssatz 2.40 für alle $s > 0$ $\mathcal{H}^s(\{x_i\}) = 0$, womit wir $\dim_{\mathcal{H}}(\{x_i\}) = 0$ für alle $i \in I$ erhalten. \square

Satz 2.45. Sei $K_\varepsilon(x_0)$ eine abgeschlossene und $U_\varepsilon(x_0)$ eine offene Kugel in \mathbb{R}^n mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\dim_{\mathcal{H}}(K_\varepsilon(x_0)) = \dim_{\mathcal{H}}(U_\varepsilon(x_0)) = n.$$

Beweis. Nach Satz 2.36 existiert ein $c_n \in (0, \infty)$, sodass für alle n -dimensionalen Borelschen Mengen A $\mathcal{H}^n(A) = c_n \cdot \lambda_n(A)$ gilt. Da $\lambda_n(K_\varepsilon(x_0))$ und $\lambda_n(U_\varepsilon(x_0))$ einen Wert größer 0 und kleiner ∞ annehmen, sind die offene und abgeschlossene Kugel n -Mengen und somit gilt

$$\dim_{\mathcal{H}}(K_\varepsilon(x_0)) = \dim_{\mathcal{H}}(U_\varepsilon(x_0)) = n.$$

\square

Folgerung 2.46. (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) = n$.

(ii) Sei G eine nichtleere offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann ist $\dim_{\mathcal{H}}(G) = n$. Ist G zusätzlich beschränkt, dann ist es eine n -Menge.

Beweis. (i) folgt direkt aus Satz 2.43 (ii) und Satz 2.45 wegen

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) = \dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k(0)\right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{\dim_{\mathcal{H}}(U_k(0))\} = n.$$

(ii) Da G nichtleer und offen ist, existiert für ein beliebiges $x_0 \in G$ ein $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq G$. Aus Satz 2.45, Satz 2.42 und Punkt (i) folgt damit

$$n = \dim_{\mathcal{H}}(U_\varepsilon(x_0)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(G) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) = n.$$

Falls G beschränkt ist, existiert $\varepsilon' > 0$, sodass $G \subseteq U_{\varepsilon'}(0)$ und da Kugeln n -Mengen sind, wie wir im Beweis von Satz 2.45 gesehen haben, folgt die Behauptung. \square

Satz 2.47. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und

(i) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, die die Hölder-Bedingung mit Hölder-Exponent α und Hölder-Konstante H erfüllt. Dann gilt für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}}(A);$$

(ii) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig. Dann gilt für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A);$$

(iii) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bi-Lipschitz-stetig mit Konstanten L_1 und L_2 . Dann gilt für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) = \dim_{\mathcal{H}}(A);$$

(iv) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Ähnlichkeitsabbildung. Dann ist für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) = \dim_{\mathcal{H}}(A).$$

Beweis. Da (i)-(iv) für $A = \emptyset$ gilt, setzen wir $A \neq \emptyset$ voraus.

(i) Sei $s > \dim_{\mathcal{H}}(A)$, dann folgt $\mathcal{H}^s(A) = 0$. Aus Satz 2.38 (i) wissen wir bereits, dass $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq H^{\frac{s}{\alpha}} \cdot \mathcal{H}^s(A) = 0$ gilt. Also ist $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \frac{s}{\alpha}$. Lassen wir nun s gegen $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ gehen, erhalten wir die Aussage.

(ii) folgt unmittelbar aus (i) mit $\alpha := 1$.

(iii) Da f bi-Lipschitz-stetig ist, folgt aus Satz 2.38 (iii) $L_1^s \cdot \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(f(A)) \leq L_2^s \cdot \mathcal{H}^s(A)$. Also ist

$$\mathcal{H}^s(A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^s(f(A)) = 0$$

und damit gilt die Aussage.

(iv) folgt sofort aus (iii) mit $L_1 = L_2$ und $m = n$. □

Satz 2.48. Sei (Ω, d) ein beschränkter separabler metrischer Raum und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\text{Con}(\Omega)^N$. Gelte für μ -fast alle $\{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ aus $\text{Con}(\Omega)^N$ und alle $\rho \in \{0, \dots, N-1\}$, es existiere ein $c > 0$, sodass für alle $x, y \in \Omega$

$$d(f_\rho(x), f_\rho(y)) \geq c \cdot d(x, y).$$

Dann existiert ein $s_0 \geq 0$, sodass $\dim_{\mathcal{H}}(K) = s_0$ für $\mu_{E^*}^\psi$ -fast alle $K \in \mathfrak{K}^-$ gilt.

Beweis. Siehe [10] (Seite 388). □

Mit Hilfe des Hausdorff-Maßes oder der Hausdorff-Dimension können wir nun die Selbstähnlichkeit einer nichtleeren kompakten Menge definieren. Wir gehen dabei wie [17] (Seite 119) vor, obwohl wir die Definition auch für allgemeine metrische Räume angeben könnten (siehe [18], Seite 734).

Definition 2.50. Sei $\mathcal{S} = (f_1, \dots, f_N)$ ein IFS in (\mathbb{R}^n, d_2) mit $n \in \mathbb{N}$ bestehend aus Ähnlichkeitsabbildungen. Dann ist eine unter \mathcal{S} invariante Menge \mathcal{A} *selbstähnlich bezüglich \mathcal{S}* , falls

$$\mathcal{H}^s(f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A})) = 0 \text{ für alle } i \neq j, 1 \leq i, j \leq N \quad (2.12)$$

und

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{A}) > 0 \text{ mit } s = \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$$

gilt. (2.12) sichert dabei, dass die Selbstähnlichkeit von \mathcal{A} nicht durch Überlappungen verloren geht.

Satz 2.49. Sei (\mathbb{R}^n, d_2) mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben und $\mathcal{S} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ ein IFS bestehend aus Ähnlichkeitsabbildungen mit Ähnlichkeitsfaktoren r_i $1 \leq i \leq N$, das die offene Mengenbedingung erfüllt. Dann ist der Attraktor \mathcal{A} des IFS selbstähnlich bezüglich \mathcal{S} im Sinn von Definition 2.50 und es gilt $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{A}) < \infty$ mit $s = \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$, wobei s die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^N r_i^s = 1 \quad (2.13)$$

ist.

Beweis. Da der Beweis etwas länglich ist, verzichten wir auf ihn und verweisen auf [17] (Seite 123-124). Für den Beweis der zweiten Aussage siehe auch Satz 2.66 mit Beweis. \square

Das s aus Gleichung (2.13) ist selbst wieder eine fraktale Dimension, welche den Vorteil hat, dass man sie sehr leicht berechnen kann:

Definition 2.51. Sei (\mathbb{R}^n, d_2) mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben, $\mathcal{S} := (f_1, \dots, f_N)$ ein IFS bestehend aus Ähnlichkeitsabbildungen mit den Ähnlichkeitsfaktoren r_i $1 \leq i \leq N$ und \mathcal{A} der Attraktor des IFS. Dann heißt

$$\dim_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) := \iota_s \left(\sum_{i=1}^N r_i^s = 1 \right)$$

die *Ähnlichkeitsdimension* von \mathcal{A} .

Die Hausdorff-Dimension, die auf einer Konstruktion nach Carathéodory basiert, ist die älteste und mathematisch gesehen die wichtigste fraktale Dimension. Ihr Vorteil besteht darin, dass sie für beliebige Mengen definiert ist und relativ leicht manipulierbar ist, da ihre Definition auf einem Maß aufbaut. Leider ist sie - wie auch das Hausdorff-Maß - oft sogar für einfache Mengen, auch mittels Computer, schwer zu berechnen oder zu schätzen.

2.5.2 Die Box-Dimension

Eine sehr häufig verwendete Dimension ist die sogenannte *Box-Dimension*, mit der man in der Praxis leichter arbeiten kann als mit der Hausdorff-Dimension. Ihre Definition ist weniger komplex, sie ist generell leichter zu berechnen oder zu schätzen und eignet sich gut, um die fraktale Dimension einer physikalischen

Menge zu berechnen, da sie annähernd mit Hilfe von Experimenten gemessen werden kann. Somit kann realen Systemen wie Küstenlinien oder Tumoren ein Wert zugewiesen werden.

Viele Dimensionen basieren auf der Idee, Mengen mit einer Größe $\varepsilon > 0$ zu messen, wobei Irregularitäten der Menge, die kleiner als ε sind, ignoriert werden, und dann den Grenzwert dieser Messungen für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu betrachten. Gehen wir z. B. von einer Kurve $\gamma([a, b])$ endlicher Länge in \mathbb{R}^n aus und bezeichnen mit $M_\varepsilon(\gamma)$ die Anzahl der Schritte, die man benötigt, um vom Anfangspunkt zum Endpunkt der Kurve zu kommen, wenn man mit einem Zirkel jeweils Strecken der Länge ε abträgt. Verkleinert man dabei ε , steigt der Wert von $M_\varepsilon(\gamma)$. Nimmt man nun an, dass zwischen den Größen ε und $M_\varepsilon(\gamma)$ eine skaleninvariante Beziehung vorliegt, wie es bei selbstähnlichen Mengen der Fall ist, kann man diese mathematisch formulieren, indem man sich eines *Potenzgesetzes* (*power law*) der Art

$$M_\varepsilon(\gamma) \simeq c \cdot \varepsilon^{-s} \quad (2.14)$$

mit dem konstanten Faktor $c > 0$ und dem konstanten nichtnegativen Exponenten s bedient. Man sagt s ist die *divider dimension*, die *compass dimension* („Zirkeldimension“) oder die *rule dimension von γ* . Nehmen wir nun an, dass der Unterschied zwischen der linken und rechten Seite von (2.14) für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 geht, so erhalten wir durch Anwenden des Logarithmus, Umformungen und schließlicher Grenzwertbildung

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(M_\varepsilon(\gamma)) - \ln(c)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(M_\varepsilon(\gamma))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}.$$

Sei nun A eine beliebige Menge und gelte

$$M_\varepsilon(A) \simeq c \cdot \varepsilon^{-s}, \quad (2.15)$$

wobei $M_\varepsilon(A)$ eine Messung von A ist. Damit sich s aus (2.15) wie eine Dimension verhält, muss die Methode der Messung mit der entsprechenden Menge „mitskalieren“, d. h. es muss für alle $\varepsilon > 0$ $M_\varepsilon(\varepsilon \cdot A) = M_1(A)$ gelten.

Modifizieren wir da Beispiel der Kurve, indem $M_\varepsilon(\gamma)$ als die Summe der Zirkelschrittweiten definieren, dann ist $M_\varepsilon(\gamma)$ homogen vom Grad 1, d. h.

$M_\varepsilon(\varepsilon \cdot \gamma) = \varepsilon^1 \cdot M_1(\gamma)$ für $\varepsilon > 0$, was man beachten muss, wenn man die Dimension definiert. Ist $M_\varepsilon(A)$ homogen vom Grad d , d. h. $M_\varepsilon(\varepsilon A) = \varepsilon^d M_1(A)$, dann entspricht ein Potenzgesetz der Art

$$M_\varepsilon(A) \simeq c \cdot \varepsilon^{d-s}$$

einer Dimension s .

Fraktale Dimensionen, deren Definition auf dieser Idee aufbaut, können trotz ähnlicher Konstruktion unterschiedliche Eigenschaften und Werte für ein und dieselbe Menge aufweisen, so auch die Box-Dimension. Man versucht also den Grad der Komplexität des Gebildes im z. B. Ein- bzw. Zwei- bzw. Dreidimensionalen zu messen, indem man betrachtet, wie schnell die Länge bzw. der Flächeninhalt bzw. das Volumen wächst, wenn man mit immer kleiner werdenden Skalen misst. Dann behauptet man, dass die zwei Größen Länge bzw. Flächeninhalt bzw. Volumen und die Skala in einem bestimmten Verhältnis stehen und nützt dieses, um die fraktale Dimension zu bestimmen.

Definition 2.52. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $A \in \mathfrak{K}^-$ und sei für $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{N}_\varepsilon(A) := \min\{k \in \mathbb{N} : A \subseteq \bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(x_i), x_i \in \Omega\}$$

die kleinste Anzahl an abgeschlossenen ε -Kugeln, die A überdecken. Dann heißt

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \text{ bzw.}$$

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}$$

die *untere* bzw. *obere Box-Dimension* von A oder die *untere* bzw. *obere Box-Counting-Dimension* von A . Stimmen die beiden Dimensionen überein, existiert also der Limes

$$\dim_{\mathcal{B}}(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\},$$

so erhält man die *Box-Dimension der Menge* A oder die *Box-Counting-Dimension* von A .

Bemerkung. (i) In der Literatur hat die bei uns als Box-Dimension bezeichnete Dimension viele verschiedene Namen. [19] (Seite 11) oder [15] (Seite 76) bezeichnet sie z. B. als *Minkowski-Dimension*, [20] (Seite 41) führt auch Namen wie *Kolmogorov entropy*, *entropy dimension*, *logarithmische Dichte* oder *information dimension* an, aber auch *fraktale Dimension*, *capacity dimension* und *metrische Dimension* sind gebräuchlich.

(ii) Definition 2.52 ist sinnvoll, denn da die Menge A kompakt also insbesondere beschränkt ist und wir voraussetzen, dass sie nichtleer ist, können wir sie mit offenen ε -Kugeln überdecken. Aus der Kompaktheit folgt für diese offene Überdeckung, dass eine endliche Teilüberdeckung von A existiert. Bilden wir den Abschluss über jede der Mengen der Teilüberdeckung, so haben wir für jedes $\varepsilon > 0$ mindestens eine Überdeckung von A bestehend aus abgeschlossenen ε -Kugeln gefunden und es gilt $0 < \mathcal{N}_\varepsilon(A) < \infty$. Somit werden Ausdrücke wie $\ln(\infty)$ und $\ln(0)$ vermieden und die untere bzw. obere Box-Dimension ist stets nichtnegativ.

(iii) Die obere und untere Box-Dimension als auch die Box-Dimension sind bewegungsinvariant, denn sei f eine Bewegung in (Ω, d) , $A \in \mathfrak{K}^-$ und $\varepsilon > 0$, dann werden abgeschlossene ε -Kugeln auf abgeschlossene ε -Kugeln abgebildet. Für $x_i \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ gilt also

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(x_i) \Leftrightarrow f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k f(K_\varepsilon(x_i)) = \bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(f(x_i))$$

und somit $\mathcal{N}_\varepsilon(A) = \mathcal{N}_\varepsilon(f(A))$.

(iv) Obwohl wir die Box-Dimension für beliebige metrische Räume definieren können, werden wir im Folgenden meist vom (\mathbb{R}^n, d_2) ausgehen.

Satz 2.50. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum, $A \in \mathfrak{K}^-$ und für $l \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_l := c \cdot q^l$ mit $c > 0$ und $0 < q < 1$. Dann gilt

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\} \quad \text{und} \quad \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\}.$$

Stimmen obere und untere Box-Dimension überein, so gilt

$$\dim_{\mathcal{B}}(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\}. \quad (2.16)$$

Beweis. Sei $0 < \varepsilon \leq q$ und

$$f : \begin{cases} (0, q] \longrightarrow (0, q] \\ \varepsilon \mapsto \max\{\varepsilon_l \in (\varepsilon_l)_{l \in \mathbb{N}} : \varepsilon_l \leq \varepsilon\}. \end{cases}$$

Es gilt nach Definition von f

$$0 < f(\varepsilon) \leq \varepsilon < \frac{f(\varepsilon)}{q} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(\varepsilon)} \geq \frac{1}{\varepsilon} > \frac{q}{f(\varepsilon)} \geq 1,$$

also auch

$$\mathcal{N}_{f(\varepsilon)}(A) \geq \mathcal{N}_{\varepsilon}(A) \geq \mathcal{N}_{\frac{f(\varepsilon)}{q}}(A)$$

und da der natürliche Logarithmus auf $(0, \infty)$ monoton wachsend bzw. auf $[1, \infty)$ nichtnegativ ist, gilt

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_{\frac{f(\varepsilon)}{q}}(A))}{\ln(\frac{1}{f(\varepsilon)})} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}_{f(\varepsilon)}(A))}{\ln(\frac{q}{f(\varepsilon)})}. \quad (2.17)$$

Es gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0$ und da f monoton wachsend ist und $f(\varepsilon) = \varepsilon_l = c \cdot q^l$, für ein bestimmtes ε_l ist, ist dies äquivalent zu $\lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l = 0$, was somit auch für den Limes Inferior und Limes Superior gilt.

Für die rechte Seite der Ungleichung (2.17) gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{f(\varepsilon)}(A))}{\ln(\frac{q}{f(\varepsilon)})} \right\} &= \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}(A))}{\ln(\frac{q}{\varepsilon_l})} \right\} = \\ &= \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}(A))}{\ln(q) + \ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\} = \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\}, \end{aligned}$$

für die linke

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\frac{f(\varepsilon)}{q}}(A))}{\ln(\frac{1}{f(\varepsilon)})} \right\} &= \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_{l-1}}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\} = \\ &= \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_{l-1}}(A))}{\ln(\frac{1}{q}) + \ln(\frac{1}{\varepsilon_{l-1}})} \right\} = \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\} \end{aligned}$$

und somit

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\}.$$

Analog gilt die Aussage für den \limsup bzw. $\overline{\dim}_{\mathcal{B}}$ und somit Gleichung (2.16). \square

Satz 2.51. Sei (\mathbb{R}^n, d_2) gegeben, $A \in \mathfrak{K}^-$ und ersetze man $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ aus Definition 2.52 durch

- (i) $\mathcal{N}_\varepsilon^U(A) := \min\{k \in \mathbb{N} : A \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_\varepsilon(x_i), x_i \in \Omega\}$, also durch die kleinste Anzahl an offenen ε -Kugeln, die A überdecken;
- (ii) $\mathcal{N}_\varepsilon^Q(A) := \min\{k \in \mathbb{N} : A \text{ wird von } k \text{ beliebigen } n\text{-dimensionalen Würfeln der Seitenlänge } \varepsilon \text{ überdeckt}\}$;
- (iii) $\mathcal{N}_\varepsilon^D(A) := \min\{k \in \mathbb{N} : A \text{ wird von } k \text{ Mengen mit Durchmesser kleiner gleich } \varepsilon \text{ überdeckt}\}$;
- (iv) $\mathcal{N}_\varepsilon^B(A) := \text{Anzahl der } n\text{-dimensionalen Würfel eines, über den } \mathbb{R}^n \text{ gelegten, achsenparallelen Netzes, bestehend aus } n\text{-dimensionalen Würfeln der Seitenlänge } \varepsilon, \text{ die } A \text{ schneiden}$;
- (v) $\mathcal{N}_\varepsilon^C(A) := \max\{k \in \mathbb{N} : U_\varepsilon(x_i) \text{ sind disjunkt mit } x_i \in A, i = 1, \dots, k\}$.

Dann erhält man zur Box-Dimension äquivalente Definitionen.

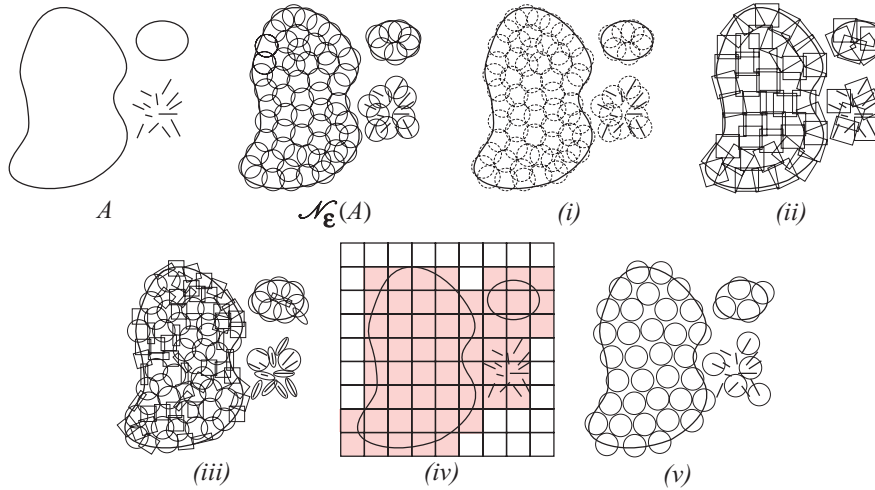


Abbildung 2.6: $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$, $\mathcal{N}_\varepsilon^U(A)$ (i), $\mathcal{N}_{2\varepsilon}^Q(A)$ (ii), $\mathcal{N}_{2\varepsilon}^D(A)$ (iii), $\mathcal{N}_{2\varepsilon}^B(A)$ (iv) farbig dargestellt und $\mathcal{N}_\varepsilon^C(A)$ (v) für eine nichtleere kompakte Menge A des \mathbb{R}^2 und $\varepsilon > 0$.

Beweis. (iv) Wir legen über den \mathbb{R}^n ein achsenparalleles Netz bestehend aus n -dimensionalen Würfeln der Seitenlänge ε , d. h. Würfeln der Form $\times_{i=1}^n [a_i \cdot \varepsilon, (a_i + 1) \cdot \varepsilon]$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Sei $\mathcal{N}_\varepsilon^B(A)$ die Anzahl der ε -Würfel, die A schneiden und ersetzen wir diese durch abgeschlossene Kugeln mit Radius $\frac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon}{2}$, dann wird die Menge A trivialerweise von diesen $\mathcal{N}_\varepsilon^B(A)$ Kugeln überdeckt. Es gilt

$$\mathcal{N}_{\frac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon}{2}}(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon^B(A)$$

und mit $\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon}{2}$ hinreichend klein, d. h. $0 < \frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon}{2} < 1$,

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_{\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon}{2}}(A))}{\ln(\frac{2}{\sqrt{n}\cdot\varepsilon})} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(\frac{2}{\sqrt{n}\cdot\varepsilon})} = \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{-\ln(\frac{\sqrt{n}}{2}) + \ln(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Mit $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ bzw. $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0}$ erhalten wir schließlich, da der Term $-\ln(\frac{\sqrt{n}}{2})$ vernachlässigbar ist,

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \quad \text{bzw.}$$

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}.$$

Umgekehrt gilt für jede abgeschlossene Kugel mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$, dass sie in der Vereinigung von höchstens 2^n Würfeln des über \mathbb{R}^n gespannten Netzes mit Maschenbreite ε enthalten ist. Daraus folgt

$$\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A) \leq 2^n \cdot \mathcal{N}_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)$$

und mit $\frac{\varepsilon}{2} \in (0, 1)$

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \leq \frac{\ln(2^n \cdot \mathcal{N}_{\frac{\varepsilon}{2}}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}, \text{ also } \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(2) + \ln(\frac{1}{\varepsilon})} \leq \frac{\ln(2^n) + \ln(\mathcal{N}_{\frac{\varepsilon}{2}}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})},$$

sodass wir mit $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ bzw. $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0}$ die Ungleichungen

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A)$$

erhalten.

(iii) Um zu zeigen, dass $\mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A)$ eine äquivalente Definition der Box-Dimension liefert, nützen wir aus, dass

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad \text{und} \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} = \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A).$$

Jene n -dimensionalen Würfel des Netzes mit Seitenlänge ε , die A schneiden, sind insbesondere eine Überdeckung von A mit Mengen vom Durchmesser kleiner gleich $\varepsilon \cdot \sqrt{n}$, also gilt $\mathcal{N}_{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}^D(A) \leq \mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A)$ und mit $\varepsilon \cdot \sqrt{n} \in (0, 1)$

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}^D(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon \cdot \sqrt{n}})} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^B(A))}{-\ln(\sqrt{n}) + \ln(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Somit erhalten wir

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}^D(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon \cdot \sqrt{n}})} \right\} \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}^D(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon \cdot \sqrt{n}})} \right\} \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A).$$

Andererseits ist eine Menge mit Durchmesser kleiner gleich ε in der Vereinigung von höchstens 2^n Würfeln des ε -Netzes enthalten, also gilt

$$\mathcal{N}_\varepsilon^B(A) \leq 2^n \cdot \mathcal{N}_\varepsilon^D(A).$$

Daraus folgt für $0 < \varepsilon < 1$

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon^B(A)) - \ln(2^n)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon^D(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$$

und mit dem Limes Inferior bzw. Limes Superior

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon^D(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon^D(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}.$$

(ii) Legen wir über den \mathbb{R}^n ein achsenparalleles Netz bestehend aus Würfeln der Seitenlänge $\varepsilon > 0$ und interpretieren jene Würfel, die mit der Menge A nichtleeren Schnitt haben, als beliebige ε -Würfel, die A überdecken bzw. gehen von $\mathcal{N}_\varepsilon^D(A)$ aus und legen über jede Menge mit Durchmesser kleiner gleich ε einen Würfel mit Seitenlänge ε , also Durchmesser $\varepsilon \cdot \sqrt{n}$, womit wir eine Überdeckung der Menge A mit beliebigen Würfeln der Seitenlänge ε konstruiert haben, so erhalten wir

$$\mathcal{N}_\varepsilon^Q(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon^B(A) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{N}_\varepsilon^Q(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon^D(A).$$

Umgekehrt stellen $\mathcal{N}_\varepsilon^Q(A)$ beliebige Würfel mit Seitenlänge ε , die A überdecken, auch eine Überdeckung von A durch Mengen mit Durchmesser kleiner gleich $\varepsilon \cdot \sqrt{n}$ dar, also gilt

$$\mathcal{N}_\varepsilon^Q(A) \geq \mathcal{N}_{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}^D(A).$$

und mit analoger Argumentation zu den vorigen Punkten, erhalten wir die gewünschte Aussage.

(i) Aus $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_\varepsilon(x_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(x_i)$ mit $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$ $i = 1, \dots, k$ folgt $\mathcal{N}_\varepsilon(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon^U(A)$.

Wird andererseits A durch $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ abgeschlossene ε -Kugeln überdeckt, dann ist $\bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon(A)} U_{2\varepsilon}(x_i)$ eine offene Überdeckung von A , also gilt

$$\mathcal{N}_{2\varepsilon}^U(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon(A).$$

(v) Sei $\mathcal{N}_\varepsilon^C(A)$ die größte Anzahl disjunkter offener Kugeln mit Radius ε und Mittelpunkt in A und seien $U_\varepsilon(x_i)$ $i = 1, \dots, \mathcal{N}_\varepsilon^C(A)$ diese Kugeln. Ist $x \in A$, so muss x von einer dieser Kugeln Abstand kleiner ε haben, da $\mathcal{N}_\varepsilon^C(A)$ sonst nicht die größte Anzahl an ε -Kugeln mit Mittelpunkt in A darstellen würde. Konstruieren wir nun abgeschlossene Kugeln mit den Mittelpunkten x_i und Radius 2ε , so erhalten wir

$$\mathcal{N}_{2\varepsilon}(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon^C(A).$$

Umgekehrt gilt für eine beliebige Menge abgeschlossener Kugeln mit Radius ε , die A überdecken, dass sie die Mittelpunkte der Kugeln $U_\varepsilon(x_i)$ $i = 1, \dots, \mathcal{N}_\varepsilon^C(A)$

überdecken, sodass jedes $U_\varepsilon(x_i)$ mindestens mit einer abgeschlossenen ε -Kugel nichtleeren Schnitt hat. Da die $U_\varepsilon(x_i)$ disjunkt sind, existieren mindestens $\mathcal{N}_\varepsilon^C(A)$ abgeschlossene ε -Kugeln, die A überdecken, also gilt

$$\mathcal{N}_\varepsilon^C(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon(A).$$

□

Bemerkung. (i) Satz 2.51 (iv) mit $\varepsilon_l := \frac{1}{2^l}$ $l \in \mathbb{N}$ wird auch *Box-Counting-Theorem* genannt. Dabei bezeichnet dann $\mathcal{N}_l(A)$ die Anzahl der n -dimensionalen Würfel der Seitenlänge $\frac{1}{2^l}$ des achsenparallelen Netzes, die die nichtleere kompakte Menge A überdecken. Dass

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = \liminf_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_l(A))}{\ln(2^l)} \right\} \text{ und } \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_l(A))}{\ln(2^l)} \right\}$$

gilt, sieht man ein, wenn man Satz 2.50 heranzieht und den Beweis von Satz 2.51 (iv) entsprechend verändert.

Anstatt $\frac{1}{2^l}$ kann man natürlich auch $\varepsilon_l := c \cdot q^l$ mit $c > 0$, $0 < q < 1$ und $l \in \mathbb{N}$ wählen.

- (ii) Es sei bemerkt, dass in Satz 2.51 (iv) nicht gefordert wird, dass das ε -Netz, das über den \mathbb{R}^n gespannt wird, die n Achsen des Koordinatensystems integrieren muss. Da die Box-Dimension bewegungsinvariant ist, muss das Netz nicht einmal achsenparallel sein.
- (iii) In Satz 2.51 könnte man noch weitere Mengen hinzufügen, die eine äquivalente Definition der Box-Dimension liefern. Klarerweise verwendet man jeweils jene Mengensysteme, die für die vorliegende Aufgabe am geeignetsten scheinen.

Satz 2.52. Sei (\mathbb{R}^n, d_2) $n \in \mathbb{N}$ gegeben und $A \in \mathfrak{K}^-$ beliebig. Dann existieren $\underline{\dim}_{\mathcal{B}}$ und $\overline{\dim}_{\mathcal{B}}$ in \mathbb{R} und es gilt

$$0 \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq n$$

bzw. im Falle, dass die Box-Dimension existiert $0 \leq \dim_{\mathcal{B}}(A) \leq n$.

Beweis. Nach Definition der unteren bzw. oberen Box-Dimension gilt für jedes nichtleere kompakte A $0 \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A)$.

Da die obere Box-Dimension bewegungsinvariant ist, können wir die Menge A bewegen, ohne ihren Dimensionswert zu beeinflussen. Verschieben wir A nun o. B. d. A. so, dass sie im positiven Bereich jeder der n Koordinatenachsen des \mathbb{R}^n liegt und keine der Achsen schneidet und legen einen n -dimensionalen Würfel $Q := \times_{i=1}^n [0, a]$ mit $a > 0$ in das n -dimensionale kartesische Koordinatensystem so über die Menge A , dass seine Kanten parallel zu den Achsen sind und ein Eckpunkt im Ursprung liegt, dann folgt aus $A \subseteq Q$ für alle $\varepsilon > 0$ $\mathcal{N}_\varepsilon(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon(Q)$ und mit $0 < \varepsilon < 1$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(Q))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}.$$

Um den Wert der rechten Seite zu berechnen, legt man ein achsenparalleles, die Koordinatenachsen integrierendes, Gitter über den \mathbb{R}^n bestehend aus n -dimensionalen Würfeln der Seitenlänge $\varepsilon_l := \frac{a}{2^l}$ mit $l \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathcal{N}_{\varepsilon_l}^B(Q) = (\frac{a}{\varepsilon_l})^n = (2^l)^n$ und mit Bemerkung (i) nach Satz 2.51 folgt

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(Q) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon_l}^B(Q))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon_l})} \right\} = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \ln(2^l)}{\ln(2^l) - \ln(a)} = n.$$

Damit sind die untere und obere Box-Dimension durch 0 und n beschränkt und existieren somit in \mathbb{R} . Falls die Box-Dimension einer Menge existiert, gilt natürlich $0 \leq \dim_{\mathcal{B}}(A) \leq n$. \square

Satz 2.53. *Sei A eine nichtleere kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n , für $\varepsilon > 0$ A_ε die ε -Umgebung von A und vol^n das n -dimensionale Volumen. Dann gilt*

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = n + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\text{vol}^n(A_\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \quad \text{und}$$

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = n + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\text{vol}^n(A_\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}.$$

Beweis. „ \geq “ Sei $0 < \varepsilon < 1$. Wir betrachten die $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ abgeschlossenen ε -Kugeln, die eine Überdeckung von A bilden. Dann kann A_ε durch abgeschlossene Kugeln, die die gleichen Mittelpunkte der $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ Kugeln, aber Radius 2ε haben, überdeckt werden und es folgt, wenn s_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel in \mathbb{R}^n ist

$$\mathcal{N}_\varepsilon(A) s_n (2\varepsilon)^n \geq \text{vol}^n(A_\varepsilon).$$

Wir erhalten

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A)) + \ln(2^n s_n) + n \ln(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \geq \frac{\ln(\text{vol}^n(A_\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$$

und mit dem Limes Inferior bzw. Limes Superior

$$-n + \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\text{vol}^n(A_\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \quad \text{bzw.}$$

$$-n + \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\text{vol}^n(A_\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}.$$

„ \leq “ Analog zur gerade gezeigten Ungleichung gilt für $\mathcal{N}_\varepsilon^C(A)$ und $0 < \varepsilon < 1$

$$\mathcal{N}_\varepsilon^C(A) s_n \varepsilon^n \leq \text{vol}^n(A_\varepsilon) \quad \text{d. h.} \quad \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon^C(A)) + \ln(s_n) + n \ln(\varepsilon^n)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \leq \frac{\ln(\text{vol}^n(A_\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})},$$

also nach Satz 2.51 (v)

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) - n \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\text{vol}^n(A_\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \quad \text{bzw.}$$

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) - n \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\text{vol}^n(A_\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}.$$

\square

Definiert man die Box-Dimension so wie in Satz 2.53, so nennt man sie oft *Minkowski-Dimension* oder *Minkowski-Bouligand-Dimension*.

Satz 2.54. *Seien $A \subseteq B$ nichtleere kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann gilt*

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(B) \text{ bzw. } \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)$$

und falls die untere und obere Box-Dimension zusammenfallen

$$\dim_{\mathcal{B}}(A) \leq \dim_{\mathcal{B}}(B).$$

Beweis. Sei $A \subseteq B$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist eine Überdeckung von B mit abgeschlossenen ε -Kugeln auch eine solche Überdeckung von A , also folgt $\mathcal{N}_{\varepsilon}(A) \leq \mathcal{N}_{\varepsilon}(B)$ und somit die Aussage. \square

Damit ist auch die Box-Dimension monoton. Haben zwei Fraktale unterschiedliche Box-Dimension, so kann man sagen, dass jenes mit der höheren Box-Dimension „größer“ ist.

Satz 2.55. *Seien A und B nichtleere kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann gilt*

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) = \max\{\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A), \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)\}.$$

Beweis. Da die Vereinigung nichtleerer kompakter Mengen wieder nichtleer und kompakt ist, ist es sinnvoll die obere Box-Dimension dieser neuen Menge zu betrachten.

„ \geq “ Da $A \cup B \supseteq A$ und $A \cup B \supseteq B$ gilt, folgt aus Satz 2.54

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) \geq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \text{ und } \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) \geq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(B),$$

also

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) \geq \max\{\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A), \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)\}.$$

„ \leq “ Sei $\varepsilon > 0$. Aus

$$\mathcal{N}_{\varepsilon}(A \cup B) \leq \mathcal{N}_{\varepsilon}(A) + \mathcal{N}_{\varepsilon}(B) \leq 2 \cdot \max\{\mathcal{N}_{\varepsilon}(A), \mathcal{N}_{\varepsilon}(B)\}$$

folgt für $\varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(A \cup B))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \leq \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(2 \cdot \max\{\mathcal{N}_{\varepsilon}(A), \mathcal{N}_{\varepsilon}(B)\})}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \leq \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \max\left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}, \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(B))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \right\} \leq \\ &\leq \max\left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}, \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(B))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \right\} = \\ &= \max\{\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A), \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

\square

Bemerkung. Durch vollständige Induktion kann Satz 2.55 für endlich viele Mengen N verallgemeinert werden.

Für die untere Box-Dimension gilt Ungleichung (2.18) nicht, da man in diesem Fall das Maximum und den Limes Inferior nicht vertauschen darf, so wie wir es im vorigen Beweis entsprechend mit dem Limes Superior gemacht haben. Im Allgemeinen ist die Aussage des Satzes 2.55 für die untere Box-Dimension falsch. Betrachtet man z. B. zwei modifizierte Cantormengen $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ und $B = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_k$, wobei A_0 das abgeschlossene Einheitsintervall und $B_0 := [2, 3]$ ist. Mit $k_n := 10^n$ $n \in \mathbb{N}_0$ erhält man A_k $k > 0$, indem man das mittlere Drittel jedes Intervalles von A_{k-1} herauschneidet, falls $k_0 \leq k \leq k_1, k_2 < k \leq k_3, \dots$ ist und das mittlere $\frac{3}{5}$ jedes Intervalles von A_{k-1} , falls $k_1 < k \leq k_2, k_3 < k \leq k_4, \dots$ Um B_k zu erhalten geht man genau umgekehrt vor. Schätzt man die untere Box-Dimension der Mengen A und B ab, so erhält man $\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A), \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(B) \leq \frac{10 \cdot \ln(2)}{9 \cdot \ln(5)}$, während $\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) > \frac{10 \cdot \ln(2)}{9 \cdot \ln(5)}$ ist. Also gilt

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) > \max\{\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A), \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)\}.$$

Folgerung 2.56. Seien A, B nichtleere kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^n und existiere für diese Mengen sowie für ihre Vereinigung die Box-Dimension. Gelte nun $\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)$, dann folgt

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(B).$$

Beweis. Aus Satz 2.55 folgt

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cup B) &= \overline{\underline{\dim}}_{\mathcal{B}}(A \cup B) = \max\{\overline{\underline{\dim}}_{\mathcal{B}}(A), \overline{\underline{\dim}}_{\mathcal{B}}(B)\} = \\ &= \max\{\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A), \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)\} = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(B). \end{aligned}$$

□

Satz 2.57. Seien (Ω, d) und $(\tilde{\Omega}, \tilde{d})$ metrische Räume, die äquivalent sind mit der Abbildung $g : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$. Dann gilt für alle nichtleeren kompakten Teilmengen A von Ω , für die die Box-Dimension existiert und $g(A) := \{g(x) : x \in A\}$

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(g(A)).$$

Beweis. Damit die Box-Dimension für $g(A)$ überhaupt definiert ist, müssen wir zeigen, dass $g(A) \in \mathfrak{K}^-$. Da g offensichtlich stetig ist, gilt natürlich, dass auch $g(A)$ nichtleer und kompakt ist. Wir wollen diese Tatsache aber direkt beweisen.

Dazu sei $A \in \mathfrak{K}^-$. Da A nichtleer ist, folgt klarerweise, dass auch $g(A)$ nichtleer ist. Sei nun $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von A , dann ist $g(\mathcal{G}) := \{g(G_i) : G_i \in \mathcal{G}\}$ eine Überdeckung von $g(A)$. Diese $g(G_i)$ sind für alle $i \in I$ offen, denn da G_i offen ist, existiert für alle $x \in G_i$ ein $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq G_i$ ist, was äquivalent dazu ist, dass für alle y mit $d(x, y) < \varepsilon$ gilt, dass $y \in G_i$. Da (Ω, d) und $(\tilde{\Omega}, \tilde{d})$ äquivalent sind, existieren $\alpha > 0, \beta > 0$, sodass für alle $x, y \in \Omega$

$$\alpha \cdot \tilde{d}(g(x), g(y)) \leq d(x, y) \leq \beta \cdot \tilde{d}(g(x), g(y)) \quad (2.19)$$

gilt. Sei nun $x \in G_i$ und ε so, dass $U_\varepsilon(x) \subseteq G_i$, dann folgt, dass $g(x) \in g(G_i)$. Wählen wir $\frac{\varepsilon}{\beta}$ und sei $g(y)$ beliebig aus Ω , sodass $\tilde{d}(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{\beta}$. Dann folgt aus der Äquivalenz der metrischen Räume

$$d(x, y) \leq \beta \cdot \tilde{d}(g(x), g(y)) < \varepsilon,$$

also ist $y \in G_i$ und somit $g(y) \in g(G_i)$. Damit ist $g(\mathcal{G})$ eine offene Überdeckung von $g(A)$ und weil es für jede offene Überdeckung von A wegen seiner Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung gibt, gilt dies auch für $g(G)$, also ist $g(A)$ kompakt.

Sei $\varepsilon > 0$. Aus der Definition von $\mathcal{N}_\varepsilon(A) = k$ wissen wir, dass $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ existieren, sodass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(x_i)$. Klarerweise ist dann $\{g(K_\varepsilon(x_i)) : i = 1, \dots, k\}$ eine Überdeckung von $g(A)$. Aus (2.19) folgt für alle $x, y \in \Omega$

$$\tilde{d}(g(x), g(y)) \leq \frac{d(x, y)}{\alpha}.$$

Sei nun $y \in K_\varepsilon(x)$, was äquivalent zu $g(y) \in g(K_\varepsilon(x))$ ist, dann folgt $\tilde{d}(g(x), g(y)) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}$ und somit $g(y) \in K_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}(g(x))$. Es gilt also

$$g(K_\varepsilon(x)) \subseteq K_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}(g(x)). \quad (2.20)$$

Daraus folgt, dass auch $\{K_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}(g(x_i)) : i = 1, \dots, k\}$ eine Überdeckung von $g(A)$ ist, bestehend aus abgeschlossenen $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ -Kugeln und somit gilt $\mathcal{N}_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}(g(A)) \leq \mathcal{N}_\varepsilon(A)$. Da der natürliche Logarithmus monoton wachsend ist, erhalten wir für $0 < \varepsilon < 1$

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}(g(A)))}{\ln(\frac{1}{\frac{\varepsilon}{\alpha}})} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(g(A)))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}(g(A)))}{\ln(\frac{1}{\frac{\varepsilon}{\alpha}})} \right\} \leq \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} = \dim_{\mathcal{B}}(A). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Gehen wir nun wieder von Ungleichung (2.19) aus, so folgt für alle $u, v \in \tilde{\Omega}$

$$d(g^{-1}(u), g^{-1}(v)) \leq \beta \cdot \tilde{d}(u, v).$$

Daraus folgt analog zu (2.20) für alle $u \in \tilde{\Omega}$

$$g^{-1}(K_\varepsilon(u)) \subseteq K_{\beta \cdot \varepsilon}(g^{-1}(u))$$

und somit $\mathcal{N}_{\beta \cdot \varepsilon}(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon(g(A))$, sowie mit $0 < \varepsilon < 1$

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_{\beta \cdot \varepsilon}(A))}{\ln(\frac{1}{\beta \cdot \varepsilon})} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(g(A)))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Wir erhalten

$$\dim_{\mathcal{B}}(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} =$$

$$= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\beta \cdot \varepsilon}(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(g(A)))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}. \quad (2.22)$$

Mit Ungleichung (2.21) und (2.22) folgt insgesamt

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(g(A)))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} \leq \dim_{\mathcal{B}}(A) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(g(A)))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}$$

und somit schließlich

$$\dim_{\mathcal{B}}(g(A)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}(g(A)))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\} = \dim_{\mathcal{B}}(A),$$

womit die Aussage des Satzes bewiesen ist. \square

Satz 2.58. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und

(i) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, die die Hölder-Bedingung mit Hölder-Exponent α und Hölder-Konstante H erfüllt. Dann gilt für alle nichtleeren kompakten $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad \text{und} \quad \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A);$$

(ii) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig. Dann gilt für alle nichtleeren kompakten $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad \text{und} \quad \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A);$$

(iii) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bi-Lipschitz-stetig mit Konstanten L_1 und L_2 . Dann gilt für alle nichtleeren kompakten $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad \text{und} \quad \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) = \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A);$$

(iv) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Ähnlichkeitsabbildung. Dann ist für alle nichtleeren kompakten $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad \text{und} \quad \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) = \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A).$$

Im Fall, dass untere und obere Box-Dimension zusammenfallen, gelten die entsprechenden Aussagen auch für $\dim_{\mathcal{B}}$.

Beweis. Da A eine nichtleere kompakte Menge und f im Fall (i)-(iv) eine stetige Abbildung ist, ist $f(A)$ auch nichtleer und kompakt und es ist sinnvoll die Box-Dimension dieser Menge zu berechnen. Wir beweisen Aussage (i)-(iv) jeweils für die untere Box-Dimension, für die obere Box-Dimension geht man analog vor.

(i) Sei $\varepsilon > 0$ und $\mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A)$ die Mindestanzahl an Mengen mit Durchmesser kleiner gleich ε , die A überdecken, es gilt also $\bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A)} C_i \supseteq A$ mit $\delta(C_i) \leq \varepsilon$. Dann ist $\{f(C_i) : i = 1, \dots, \mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A)\}$ eine Überdeckung von $f(A)$ mit

$$\delta(f(C_i)) = \sup_{x, y \in C_i} \{d_2(f(x), f(y))\} \leq \sup_{x, y \in C_i} \{H \cdot d_2(x, y)^\alpha\} \leq H \cdot \varepsilon^\alpha,$$

also gilt $\mathcal{N}_{H\varepsilon^\alpha}^D(f(A)) \leq \mathcal{N}_\varepsilon^D(A)$. Daraus folgt für $0 < H\varepsilon^\alpha < 1$

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) &= \liminf_{H\varepsilon^\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_{H\varepsilon^\alpha}^D(f(A)))}{\ln(\frac{1}{H\varepsilon^\alpha})} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon^D(A))}{\alpha \ln(\frac{1}{\varepsilon}) + \ln(\frac{1}{H})} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon^D(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = \frac{1}{\alpha} \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A). \end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i) mit $\alpha := 1$.

(iii) Die Ungleichung $\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A)) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A)$ folgt aus (ii). Da wir im Beweis von Satz 2.38 (iii) gesehen haben, dass die Inverse einer bi-Lipschitz-stetigen Abbildung wieder Lipschitz-stetig ist, gilt nach (ii) $\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(f^{-1}(f(A))) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(f(A))$.

(iv) folgt aus (iii) mit $L_1 = L_2$ und $m = n$. \square

Satz 2.59. Sei A eine nichtleere beschränkte Menge des \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(\overline{A}) = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \text{ bzw. } \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\overline{A}) = \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad (2.23)$$

und

$$\dim_{\mathcal{B}}(\overline{A}) = \dim_{\mathcal{B}}(A),$$

falls untere und obere Box-Dimension zusammenfallen.

Beweis. Sei $\bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(x_i)$ mit $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von A , die auf jeden Fall existiert, da A beschränkt ist. Da diese Vereinigung abgeschlossener Kugeln wieder abgeschlossen ist, folgt

$$\bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(x_i) = \overline{\bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(x_i)} \supseteq \overline{A}.$$

Also ist $\bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(x_i)$ auch eine Überdeckung von \overline{A} und es gilt $\mathcal{N}_\varepsilon(A) \geq \mathcal{N}_\varepsilon(\overline{A})$. Da jede Überdeckung von \overline{A} aber auch eine von A ist, gilt natürlich auch $\mathcal{N}_\varepsilon(A) \leq \mathcal{N}_\varepsilon(\overline{A})$ und somit Gleichung (2.23). \square

Bemerkung. (i) In Definition 2.52 müsste man also, gehen wir vom \mathbb{R}^n aus, A nur als nichtleere beschränkte Menge voraussetzen.

(ii) Satz 2.59 zeigt eine unerwünschte Eigenschaft der Box-Dimension auf. Betrachten wir z. B. das Einheitsintervall $[0, 1] \in \mathbb{R}$ und sei A die Menge der rationalen Zahlen in diesem Intervall, also eine in $[0, 1]$ dicht liegende und abzählbare Menge, für die $\overline{A} = [0, 1]$ gilt. Es gilt

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\overline{A}) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon^B(\overline{A}))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = 1$$

und auch $\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(\overline{A}) = 1$, also mit Satz 2.59

$$\dim_{\mathcal{B}}(A) = \dim_{\mathcal{B}}(\overline{A}) = 1.$$

Somit können abzählbare Mengen Box-Dimension größer 0 haben. Da ein-elementige Mengen $A = \{x\}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ Box-Dimension 0 haben, die abzählbare Vereinigung jedoch, wie wir gerade gesehen haben, größer 0 sein kann, gilt im Allgemeinen

$$\dim_{\mathcal{B}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \neq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_{\mathcal{B}}(A_n)\}.$$

Von einer Dimension würde man sich erwarten oder wünschen, dass sie sich hier anders verhält. Diese Eigenschaft der Box-Dimension kann auch irreführend sein. Betrachtet man z. B. die kompakte Menge $A := \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, so hat sie nach [20] (Seite 48-49) Box-Dimension $\frac{1}{2}$, weshalb man vermuten würde, dass diese Menge fraktale Struktur hat, was aber offensichtlich nicht der Fall ist. In diesem Punkt hat die Box-Dimension einen Nachteil gegenüber der Hausdorff-Dimension.

Um die angesprochenen Probleme der Box-Dimension zu umgehen, kann man eine modifizierte Box-Dimension definieren:

Definition 2.53. Sei A eine nichtleere beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann heißt

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(A) = \inf \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A_n)\} : A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{K}^- \right\} \text{ bzw.}$$

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(A) = \inf \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A_n)\} : A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{K}^- \right\}$$

die *untere* bzw. *obere modifizierte Box-Dimension der Menge A* und falls diese zusammenfallen die *modifizierte Box-Dimension der Menge A* .

Ist eine Menge abzählbar, so ist ihre untere bzw. obere modifizierte Box-Dimension gleich 0. Trivialerweise ist die untere bzw. die obere modifizierte Box-Dimension kleiner gleich der unteren bzw. oberen Box-Dimension und sie stimmen unter bestimmten Voraussetzungen überein:

Satz 2.60. Sei A eine nichtleere beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n und für alle offenen Mengen G , die mit A nichtleeren Schnitt haben, gelte

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cap G) = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \text{ bzw. } \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \cap G) = \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A).$$

Dann gilt

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(A) = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \text{ bzw. } \overline{\dim}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(A) = \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A).$$

Der Beweis dieses Satzes findet sich z. B. in [20] (Seite 50).

2.5.3 Vergleich der Dimensionen

In diesem Abschnitt wollen wir die in den vorigen Abschnitten betrachteten fraktalen Dimensionen miteinander vergleichen.

Satz 2.61. Sei (Ω, d) ein kompakter separabler metrischer Raum. Dann gilt

$$\dim_{\mathcal{F}}(\Omega) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\Omega).$$

Beweis. Wir zitieren [21] und [22]. Dabei sei erwähnt, dass die topologische Dimension in beiden Werken, wo sie *covering dimension* genannt wird, nicht wie bei uns für topologische, sondern nur für metrische Räume definiert ist und von endlichen offenen Überdeckungen von Ω ausgegangen wird. Um dieses Problem zu umgehen, haben wir in Satz 2.61 kompakte metrische Räume vorausgesetzt. Setzen wir zusätzlich Ω als separabel voraus, wodurch auch der Gebrauch der Hausdorff-Dimension Sinn macht, so folgt aus [22] (Theorem 3.4.5 und Beweis, Seite 97-98), dass $\dim_{\mathcal{H}}(\Omega) \leq \text{ind}(\Omega)$, wobei die *small inductive dimension* (ind) in [22] (Seite 81) definiert ist. Mit [21] (Korollar 3.1.4 und Beweis, Seite 115) folgt für metrische Räume Ω $\text{ind}(\Omega) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\Omega)$ und somit die Aussage des Satzes. \square

Satz 2.62. Sei (\mathbb{R}^n, d_2) für $n \in \mathbb{N}$ gegeben und A eine nichtleere kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$0 \leq \dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A),$$

also insbesondere, falls untere und obere Box-Dimension übereinstimmen,

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{B}}(A).$$

Beweis. Es bleibt nur die zweite Ungleichung zu zeigen. Falls $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$, ist die Aussage des Satzes trivial, sei also $\dim_{\mathcal{H}}(A) > 0$. Werde A durch $\mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A)$ Mengen mit Durchmesser kleiner gleich ε überdeckt, dann folgt aus der Definition von $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s*}$ für alle $0 \leq s < \infty$

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s*}(A) \leq \varepsilon^s \cdot \mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A). \quad (2.24)$$

Sei $0 \leq s < \dim_{\mathcal{H}}(A)$, dann folgt nach Definition der Hausdorff-Dimension $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\varepsilon}^{s*}(A) > 1$ und für hinreichend kleines ε

$$\mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A) \cdot \varepsilon^s > 1, \text{ also } \ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A)) + s \cdot \ln(\varepsilon) > 0.$$

Das bedeutet aber, dass $s \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \right\}$ gilt. Lässt man nun s gegen $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ gehen, so folgt die Behauptung. \square

Obwohl die Box-Dimension und die Hausdorff-Dimension für viele Mengen übereinstimmen, liegt im Allgemeinen keine Gleichheit vor. Dabei gibt es Parallelen zwischen beiden Dimensionsbegriffen, denn für die Box-Dimension folgt aus Definition 2.52 für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A) \cdot \varepsilon^s &\rightarrow \infty, \text{ falls } s < \dim_{\mathcal{B}}(A), \\ \mathcal{N}_{\varepsilon}^D(A) \cdot \varepsilon^s &\rightarrow 0, \text{ falls } s > \dim_{\mathcal{B}}(A). \end{aligned}$$

Weiters kann man $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s*}(A)$ mit

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^D(A) \cdot \varepsilon^s = \inf \left\{ \sum_{n \in I} \varepsilon^n : (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(A) \text{ und endlich, } I := \{n \in \mathbb{N} : C_n \neq \emptyset\} \right\} \quad (2.25)$$

vergleichen. Dabei betrachtet man bei (2.25) immer Mengen der Größe ε und somit zeigt die Box-Dimension an, wie effizient eine Menge von Mengen gleicher Größe überdeckt werden kann, wodurch sie leichter zu berechnen ist, als

die Hausdorff-Dimension, die eine Überdeckung mit Mengen von großer Variationsbreite zulässt. Man könnte nun denken, dass es deshalb sinnvoll wäre $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}_\varepsilon^D(A) \cdot \varepsilon^s$ zu definieren. Dadurch erhalten wir aber nach ([20], Seite 47) im Gegensatz zu \mathcal{H}^s kein Maß.

Unter gewissen Umständen stimmen Box- und Hausdorff-Dimension überein.

Satz 2.63. (*Masseverteilungsprinzip oder Mass distribution principle*)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und μ ein Maß auf \mathbb{R}^n sowie eine Masseverteilung auf A . Weiters sei $s \in [0, \infty)$ und für dieses s existiere $c > 0, \varepsilon > 0$, sodass für alle $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\delta(U) \leq \varepsilon$

$$\mu(U) \leq c \cdot \delta(U)^s \quad (2.26)$$

gelte. Dann folgt

$$\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{c} \quad \text{und} \quad s \leq \dim_{\mathcal{H}}(A).$$

Beweis. Sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$, dann folgt aus der Eigenschaft einer Masseverteilung, aus der Monotonieeigenschaft und Sub- σ -Additivität eines Maßes und aus Ungleichung (2.26)

$$0 < \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(U_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} c \cdot \delta(U_n)^s.$$

Da $c > 0$ folgt $\frac{\mu(A)}{c} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(U_n)^s$. Da die ε -Überdeckung von A beliebig war, folgt, wenn wir ε gegen 0 gehen lassen, $\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{c} > 0$. Also gilt auch $\dim_{\mathcal{H}}(A) \geq s$. \square

Bemerkung. Um die erste Aussage des Satzes zu erhalten, würde es genügen, μ nur als Maß auf \mathbb{R}^n vorauszusetzen.

Hilfssatz 2.64. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer offener und disjunkter Teilmengen des \mathbb{R}^n und gelte für jedes $i \in I \neq \emptyset$, dass G_i eine Kugel mit Radius $a_1 \cdot \tau$ enthalte und in einer Kugel vom Radius $a_2 \cdot \tau$ enthalten sei mit $a_1 > 0, a_2 > 0, \tau > 0$. Dann schneidet eine beliebige Kugel $K_\tau(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ höchstens $\frac{(1+2a_2)^n}{a_1^n}$ der $\overline{G_i}$.

Beweis. Sei $i \in I$ und gelte $K_\tau(x) \cap \overline{G_i} \neq \emptyset$, dann folgt $\overline{G_i} \subseteq K_{(1+2a_2)\tau}(x)$. Bezeichnet man mit q die Anzahl der Mengen $\overline{G_i}$, die $K_\tau(x)$ schneiden, dann gilt für die n -dimensionalen Volumina der Kugeln $\frac{q(a_1\tau)^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \leq \frac{(1+2a_2)^n \tau^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, also $q \leq \frac{(1+2a_2)^n}{a_1^n}$, wobei Γ die Gammafunktion bezeichnet. \square

Folgerung 2.65. Gelten die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.64 mit der Veränderung, dass jedes der G_i eine Kugel mit Radius $a_1\tau\gamma$, $\gamma > 0$, enthalte. Dann gilt $q \leq \frac{(1+2a_2)^n}{a_1^n \gamma^n}$.

Beweis. Analog zum Beweis von Hilfssatz 2.64 gilt $\overline{G_i} \subseteq K_{(1+2a_2)\tau}(x)$ und $q(a_1\tau\gamma)^n \leq (1+2a_2)^n \tau^n$. \square

Satz 2.66. Sei (\mathbb{R}^n, d_2) gegeben und $\mathcal{I} = (f_1, \dots, f_N)$ ein IFS, bestehend aus Ähnlichkeitsabbildungen mit Ähnlichkeitsfaktoren r_i $1 \leq i \leq N$, das die OMB erfülle. Dann gilt für den selbstähnlichen Attraktor \mathcal{A} des IFS

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) = \dim_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \dim_{\mathcal{J}}(\mathcal{A}) = s$$

und für diesen Wert s $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{A}) < \infty$. \mathcal{A} ist also eine s -Menge.

Beweis. Wir gehen vor wie [20] (Seite 130-132). Als Erstes werden wir zeigen, dass $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{A}) < \infty$, denn dann gilt $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) = \dim_{\mathcal{J}}(\mathcal{A})$.

Sei für $k \in \mathbb{N}$ $I(k) := \{(i_1, \dots, i_k) \text{ mit } 1 \leq i_j \leq N \forall 1 \leq j \leq k\}$ die Menge aller Sequenzen der Länge k und I_0 die leere Sequenz. Aus $\bigcup_{i=1}^N f_i(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \bigcup_{i_1=1}^N f_{i_1}(\mathcal{A}) = \bigcup_{i_1=1}^N f_{i_1}\left(\bigcup_{i_2=1}^N f_{i_2}(\mathcal{A})\right) = \bigcup_{i_1=1}^N \bigcup_{i_2=1}^N f_{i_1} \circ f_{i_2}(\mathcal{A}) = \dots \\ &\dots = \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I(k)} f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}(\mathcal{A}) =: \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I(k)} \mathcal{A}_{i_1 \dots i_k} \end{aligned}$$

und wir erhalten mit den Mengen $\mathcal{A}_{i_1 \dots i_k}$ eine Überdeckung des Attraktors. Sei nun $(i_1, \dots, i_k) \in I(k)$, $k \in \mathbb{N}$, dann ist $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Ähnlichkeitsfaktor $\prod_{j=1}^k r_{i_j}$, denn seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann folgt

$$\begin{aligned} &\|f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}(x) - f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}(y)\|_2 = \\ &= r_{i_1} \|f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}(x) - f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}(y)\|_2 = \dots = \prod_{j=1}^k r_{i_j} \|x - y\|_2. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber, dass $\delta(\mathcal{A}_{i_1 \dots i_k}) = \prod_{j=1}^k r_{i_j} \delta(\mathcal{A})$ und somit

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in I(k)} \delta(\mathcal{A}_{i_1 \dots i_k})^s &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in I(k)} (r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k})^s \delta(\mathcal{A})^s = \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}^s\right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{i_k=1}^N r_{i_k}^s\right) \cdot \delta(\mathcal{A})^s = \delta(\mathcal{A})^s \end{aligned} \quad (2.27)$$

gilt. Da \mathcal{A} beschränkt ist und $0 < r_i < 1$ für $1 \leq i \leq N$, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\delta(\mathcal{A}_{i_1 \dots i_k}) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq N} \{r_i\}\right)^k \cdot \delta(\mathcal{A}) \leq \varepsilon.$$

Somit ist $(\mathcal{A}_{i_1 \dots i_k})_{(i_1 \dots i_k) \in I(k)} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{A})$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^{s*}(\mathcal{A}) &= \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} (\delta(C_n))^s : (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{A}) \right\} \leq \\ &\leq \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in I(k)} \delta(\mathcal{A}_{i_1 \dots i_k})^s \stackrel{\text{Gleichung (2.27)}}{=} \delta(\mathcal{A})^s \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Daraus folgt $\mathcal{H}^s(\mathcal{A}) \leq \delta(\mathcal{A})^s < \infty$, also $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) \leq s$.

Um die Umkehrung zu zeigen, sei $I := \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq N\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und

$$I_{i_1 \dots i_k} := \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq N \forall j \geq k+1\}.$$

Nach [20] (Seite 130) existiert eine Masseverteilung auf I , sodass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(I_{i_1 \dots i_k}) = (r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k})^s$$

gilt. Es folgt

$$\mu(I_{i_1 \dots i_k}) = (r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k})^s = \sum_{i=1}^N r_i^s (r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k})^s = \sum_{i=1}^N \mu(I_{i_1 \dots i_k i})$$

und

$$\mu(I) = \sum_{i=1}^N \mu(I_i) = \sum_{i=1}^N r_i^s = 1.$$

Nun definieren wir die einpunktige Menge $x_{i_1 i_2 \dots} := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(\mathcal{A})$ sowie

$$\tilde{\mu} : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty] \\ A \mapsto \mu(\{(i_1, \dots) \in I : x_{i_1 i_2 \dots} \subseteq A\}). \end{cases}$$

$\tilde{\mu}$ ist somit ein Maß auf \mathbb{R}^n mit $\tilde{\mu}(\mathbb{R}^n) = \tilde{\mu}(\mathcal{A}) = \mu(I) = 1$ und eine Masseverteilung auf \mathcal{A} .

Wir wollen nun zeigen, dass die Voraussetzungen des Masseverteilungsprinzips erfüllt sind. Dazu betrachten wir jene nichtleere offene beschränkte Menge G , deren Existenz die OMB des IFS sichert. Es gilt $\overline{G} \in \mathfrak{K}^-$ und $F(\overline{G}) \subseteq \overline{G}$, also mit Folgerung 2.26 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F^n(\overline{G}) = \mathcal{A}$. Wir erhalten somit $\overline{G} \supseteq F(\overline{G}) \supseteq \mathcal{A}$ bzw. für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$

$$\overline{G}_{i_1 \dots i_k} \supseteq \mathcal{A}_{i_1 \dots i_k}. \quad (2.28)$$

Sei $K_\tau(x) := K_\tau$ nun eine beliebige abgeschlossene Kugel in \mathbb{R}^n mit Radius $0 < \tau < 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ und I_τ die Menge aller endlichen Folgen, die man erhält, indem man $(i_1, i_2 \dots) \in I$ beim ersten i_k abschneidet, sodass

$$\left(\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\} \right) \cdot \tau \leq r_{i_1} \cdot r_{i_2} \cdot \dots \cdot r_{i_k} \leq \tau \quad (2.29)$$

gilt. I_τ ist eine nichtleere Menge, denn für jedes Element aus I existiert genau ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $(i_1, \dots, i_{k_0}) \in I_\tau$, denn da $0 < r_i < 1$ $1 \leq i \leq N$ gilt, existieren $k \in \mathbb{N}$, sodass $r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k} \leq \tau$. Sei $k_0 := \min\{k \in \mathbb{N} : r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k} \leq \tau\}$, dann gilt $r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_{k_0-1}} > \tau$ und $r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_{k_0}} > \tau(\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\})$. Weiters folgt aus (2.29) und mit $\sum_{i=1}^N r_i^s = 1$ induktiv

$$\sum_{I_\tau} \left(\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\} \right)^s \cdot \tau^s \leq \sum_{I_\tau} (r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k})^s = 1,$$

also gilt $|I_\tau| \leq \frac{1}{(\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\})^s \cdot \tau^s}$.

Da für alle $1 \leq i \leq N$ $f_i(G) \subseteq G$ gilt und die $f_i(G)$ disjunkt sind, gilt dies auch

für die Mengen $G_{i_1 \dots i_k j}$ mit $1 \leq j \leq N$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $(i_1, \dots, i_k) \in I(k)$. Somit ist $(G_{i_1 \dots i_k})_{(i_1, \dots, i_k) \in I_\tau}$ eine endliche Familie nichtleerer offener Teilmengen des \mathbb{R}^n , deren Elemente paarweise disjunkt sind. Es gilt mit Inklusion (2.28)

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{I_\tau} \mathcal{A}_{i_1 \dots i_k} \subseteq \bigcup_{I_\tau} \overline{G}_{i_1 \dots i_k}. \quad (2.30)$$

Da G nichtleer und offen ist, existiert für alle $x_1 \in G$ ein $a_1 > 0$, sodass $K_{a_1}(x_1) \subseteq G$ und da G beschränkt ist, ist es auch in einer Kugel $K_{a_2}(x_2)$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$, von z. B. Radius $a_2 := \delta(G) < \infty$ enthalten. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ und $(i_1, \dots, i_k) \in I_\tau$, dann folgt

$$f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(G) \supseteq f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(K_{a_1}(x_1)) = K_{r_{i_1} \dots r_{i_k} \cdot a_1}(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x_1)),$$

denn für beliebiges $x \in K_{a_1}(x_1)$ gilt

$$\|f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x_1) - f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x)\|_2 = r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k} \cdot \|x_1 - x\|_2 \leq r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k} \cdot a_1.$$

Mit (2.29) erhalten wir somit

$$G_{i_1 \dots i_k} \supseteq K_{\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\} a_1 \tau}(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x_1)).$$

Analog gilt wieder mit (2.29)

$$\begin{aligned} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(G) &\subseteq f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(K_{a_2}(x_2)) = \\ &= K_{r_{i_1} \dots r_{i_k} \cdot a_2} \cdot (f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x_2)) \subseteq K_{a_2 \tau}(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(x_2)). \end{aligned}$$

Sei $I'_\tau := \{(i_1, \dots, i_k) \in I_\tau : K_\tau(x) \cap \overline{G}_{i_1 \dots i_k} \neq \emptyset\}$, dann folgt aus Hilfssatz 2.64 bzw. aus Folgerung 2.65

$$q := |I'_\tau| \leq \frac{(1 + 2a_2)^n}{a_1^n \cdot (\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\})^n}.$$

Angenommen es gelte $\mathcal{A} \cap K_\tau(x) \neq \emptyset$. Wegen (2.30) gibt es für alle $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{i_1 \dots i_k} \subseteq \mathcal{A} \cap K_\tau(x)$ ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $(i_1, \dots, i_k) \in I'_\tau$ und $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{i_1 \dots i_k} \subseteq \bigcup_{I'_\tau} \overline{G}_{i_1 \dots i_k}$ gilt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(K_\tau(x)) &= \tilde{\mu}(\mathcal{A} \cap K_\tau(x)) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1 i_2 \dots} \subseteq \mathcal{A} \cap K_\tau(x)\}) \leq \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{I'_\tau} I_{i_1 \dots i_k}\right) \leq \sum_{I'_\tau} \mu(I_{i_1 \dots i_k}) = \sum_{I'_\tau} (r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k})^s \leq \sum_{I'_\tau} \tau^s = q \cdot \tau^s. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Gilt $\mathcal{A} \cap K_\tau(x) = \emptyset$, so ist Ungleichung (2.31) trivialerweise erfüllt. Sei $\varepsilon > 0$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\delta(U) \leq \varepsilon$, dann ist U in einer Kugel mit Radius $\delta(U)$ enthalten, also $U \subseteq K_{\delta(U)}(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ geeignet gewählt. Aus Ungleichung (2.31) folgt

$$\tilde{\mu}(U) \leq \tilde{\mu}(K_{\delta(U)}(x)) \leq q \cdot \delta(U)^s$$

und mit dem Masseverteilungsprinzip

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{A}) \geq \frac{\tilde{\mu}(\mathcal{A})}{q} = \frac{1}{q} > 0 \text{ und } s \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}).$$

Somit stimmen Hausdorff- und Ähnlichkeitsdimension überein.

Da $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}^-$ gilt, ist es sinnvoll, die Box-Dimension dieser Menge zu betrachten. Sei $(i_1, \dots, i_k) \in I_\tau$ mit $0 < \tau < 1$, dann gilt mit Ungleichung (2.29)

$$\delta(\overline{G}_{i_1 \dots i_k}) = r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k} \cdot \delta(\overline{G}) \leq \tau \cdot \delta(\overline{G}).$$

Da (2.30) und $|I_\tau| \leq \frac{1}{(\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\})^s \cdot \tau^s}$ gilt, kann der Attraktor durch $\frac{1}{(\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\})^s \cdot \tau^s}$ Mengen mit Durchmesser kleiner gleich $\tau \cdot \delta(\overline{G})$ überdeckt werden. Damit erhält man

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \leq \limsup_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln((\min_{1 \leq i \leq N} \{r_i\})^{-s} \cdot \tau^{-s})}{\ln(\frac{1}{\tau \cdot \delta(\overline{G})})} \right\} \leq s.$$

Da aus Satz 2.62 die umgekehrte Ungleichung folgt, stimmen auch Box- und Hausdorff-Dimension überein und der Satz ist bewiesen. \square

Bemerkung. (i) Die Sequenzen der Länge k entsprechen den Wörtern der Länge k aus Definition 2.30.

- (ii) Ist die offene Mengenbedingung in Satz 2.66 nicht erfüllt, so kann man trotzdem zeigen, dass die Box- und die Hausdorff-Dimension übereinstimmen; ersetzt man sie durch die Forderung, dass die $f_i(\mathcal{A})$ $1 \leq i \leq N$ disjunkt sind, so stimmt auch die Ähnlichkeitsdimension mit beiden anderen Dimensionsbegriffen überein (siehe [3], Korollar 3.3, Seite 46).

Beispiel 2.6. Das iterierte Funktionensystem, dessen Attraktor die Cantormenge in (\mathbb{R}, d_2) ist, erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.66, weshalb anzunehmen ist, dass die Werte aller drei Dimensionsbegriffe gleich sind. Um die Ähnlichkeitsdimension zu berechnen, müssen wir $\frac{1}{3}^s + \frac{1}{3}^s = 1$ auf s umformen. Damit erhalten wir $\dim_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} := s$.

Da bei der Konstruktion der Cantormenge im k -ten Schritt 2^k Intervalle der Länge 3^{-k} vorliegen und diese Intervalle eine Überdeckung der Cantormenge sind, gilt mit $s := \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\mathcal{H}_{3^{-k}}^{s*}(\mathcal{C}) \leq 2^k \cdot 3^{-k \cdot s} = 1$, also auch $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \leq 1$. Nun kann man auch zeigen, dass $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) > 0$ ist - wir verweisen auf [17] (Seite 14-15) - und somit gilt $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

Die direkte Berechnung von $\dim_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ erfolgt so:

Sei $k \in \mathbb{N}$ und wählen wir $\varepsilon > 0$ so, dass $3^{-k} \leq \varepsilon \leq 3^{-k+1}$, dann gilt $\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{C}) \leq 2^k$. Somit erhalten wir

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{C}))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^k)}{\ln(3^{k-1})} \leq \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Um die untere Box-Dimension zu erhalten, überlegen wir uns, dass, im k -ten Schritt, ein beliebiges Intervall der Länge $3^{-k-1} \leq \varepsilon < 3^{-k}$ maximal eines der 2^k Intervalle der Länge 3^{-k} schneidet. Somit sind mindestens 2^k Intervalle der Länge ε notwendig, damit wir die Cantormenge überdecken können. Daraus folgt, $\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{C}) \geq 2^k$, also $\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \geq \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Wir erhalten $\dim_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

Folgerung 2.67. Sei (\mathbb{R}^n, d_2) gegeben, $\mathcal{F} := (f_1, \dots, f_N)$ ein IFS bestehend aus Kontraktionen auf \mathbb{R}^n mit den Kontraktionsfaktoren $0 < c_i < 1$ für alle $1 \leq i \leq N$ und \mathcal{A} der Attraktor des IFS. Dann gilt

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) \leq s \text{ und } \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \leq s,$$

wobei s die Lösung der Gleichung $\sum_{i=1}^N c_i^s = 1$ ist.

Beweis. Wir gehen ähnlich zum ersten und letzten Teil des Beweises von Satz 2.66 vor. Dabei ist zu beachten, dass in vielen Gleichungen das Gleichheitszeichen durch ein Ungleichheitszeichen zu ersetzen ist, da wir ja von Kontraktionen und nicht von Ähnlichkeitsabbildungen ausgehen. \square

Satz 2.68. Sei $\mathcal{F} := (f_1, \dots, f_N)$ ein IFS in (\mathbb{R}^n, d_2) bestehend aus Ähnlichkeitsabbildungen. Dann gilt für jede super-selbstähnliche Menge K

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) = \dim_{\mathcal{B}}(K) =: s \text{ und } \mathcal{H}^s(K) < \infty$$

und für jede sub-selbstähnliche Menge K , falls die Elemente der Menge $\{f_i(\mathcal{A}) : 1 \leq i \leq N\}$ paarweise disjunkt sind,

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) = \dim_{\mathcal{B}}(K) =: s \text{ und } \mathcal{H}^s(K) > 0.$$

Beweis. Der Beweis findet sich in [3] (Seite 48). \square

Wir wollen nun noch ein Resultat für zufällige Fraktale präsentieren. Auf Grund seiner Länge führen wir den zugehörigen Beweis aber nicht und verweisen auf [23].

Wir gehen von \mathbb{R}^n und einer nichtleeren kompakten Menge K , die $K = \overline{K^\circ}$ erfüllt, aus. Weiters bezeichnen wir mit $Sim(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen auf \mathbb{R}^n , die mit der Topologie der kompakten Konvergenz ausgestattet sein soll und mit μ^{Sim} das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $Sim(\mathbb{R}^n)^N$ mit $N \geq 2$. Wir setzen voraus, dass $f_i(K) \subseteq K$ $0 \leq i \leq N-1$ für μ^{Sim} -fast alle $\{f_0, \dots, f_{N-1}\} \in Sim(\mathbb{R}^n)^N$ gilt und für μ^{Sim} -fast alle $\{f_0, \dots, f_{N-1}\} \in Sim(\mathbb{R}^n)^N$ $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ existieren, sodass $r_1 \leq Lip(f_i) \leq r_2$ $0 \leq i \leq N-1$. Weiters definieren wir $X_{Sim} := X_{Sim}(\mathbb{R}^n, N) := (Sim(\mathbb{R}^n)^N)^{E^*}$, deren Elemente $\mathcal{F}_{Sim} := (\mathcal{F}_\alpha^{Sim})_{\alpha \in E^*}$ ähnlich zu Definition 2.36 mit $\mathcal{F}_\alpha^{Sim} := \{f_{\alpha*0}(\mathcal{F}^{Sim}), \dots, f_{\alpha*(N-1)}(\mathcal{F}^{Sim})\}$ definiert sei. \mathfrak{A}_{Sim} bezeichnet die Produkt- σ -Algebra auf X_{Sim} und μ_{E^*Sim} das Produktmaß auf X_{Sim} mit μ^{Sim} in jeder Komponente. Die ähnlich zu Satz 2.28 definierte Menge $\mathcal{A}_z^{Sim}(\mathcal{F}_{Sim})$, die für μ_{E^*Sim} -fast alle $\mathcal{F}_{Sim} \in X_{Sim}$ gleich $\bigcap_{q \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{\alpha \in E^q} f_{\alpha|1} \circ \dots \circ f_{\alpha||\alpha|}(K)$ mit $f_\Lambda := id$ ist, nennen wir ein *zufälliges selbstähnliches Fraktal*.

Satz 2.69. Gelten obige Voraussetzungen. Dann existiert eine Konstante $s \geq 0$, sodass für μ_{E^*Sim} -fast alle $\mathcal{F}_{Sim} \in X_{Sim}$

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_z^{Sim}(\mathcal{F}_{Sim})) = \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_z^{Sim}(\mathcal{F}_{Sim})) = \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_z^{Sim}(\mathcal{F}_{Sim})) = s$$

gilt.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch die Brownsche Bewegung angeben und die Hausdorff- bzw. Box-Dimension ihrer Pfade berechnen. Die *Brownsche Bewegung* ist nach dem Botaniker Robert Brown benannt, der unter dem Mikroskop beobachtete, wie sich Pollen in Wasser höchst irregulär bewegen. Dieses Verhalten resultiert aus dem Zusammenstoßen der nicht sichtbaren Wassermoleküle mit den größeren sichtbaren Pollen und kann mathematisch beschrieben werden.

Definition 2.54. Sei $T \neq \emptyset$ eine Indexmenge, $(\Omega, \mathfrak{A}, W)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (siehe Definition 4.1), (S, \mathfrak{S}) ein Messraum, also S eine Menge und \mathfrak{S} eine σ -Algebra auf S , und

$$X_t : (\Omega, \mathfrak{A}, W) \rightarrow (S, \mathfrak{S})$$

für alle $t \in T$ eine Zufallsvariable. Dann heißt die Familie der Zufallsvariablen $\mathcal{X} := (X_t)_{t \in T}$ *stochastischer Prozess über $(\Omega, \mathfrak{A}, W)$ mit Zustandsraum (S, \mathfrak{S})* und

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

für $\omega \in \Omega$ fest der *Pfad des Prozesses*.

Definition 2.55. Der stochastische Prozess über $(\Omega, \mathfrak{A}, W)$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} := (B_t)_{t \in [0, \infty)}$, heißt *Brownscher Bewegungsprozess* oder *Wiener Prozess*, wenn gilt:

- (i) $B_0 : (\Omega, \mathfrak{A}, W) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$ ist gleich 0 für W -fast alle $\omega \in \Omega$. Der Prozess startet also im Ursprung;
- (ii) $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig für W -fast alle $\omega \in \Omega$;
- (iii) $B_t - B_s \sim \otimes_{i=1}^n \mathcal{N}(0, t - s)$ für alle $0 \leq s < t$;
- (iv) Für alle $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ unabhängig.

$B_t(\omega)$ gibt dabei die Position des Teilchens zum Zeitpunkt t an. Einen Existenzbeweis dieses Prozesses findet man z. B. in [24].

Beispiel 2.7. Sei \mathcal{B} der Brownsche Bewegungsprozess. Dann folgt aus Definition 2.55 (i) und (iii) für beliebiges $t_0 > 0$, dass $(B_{t_0+t} - B_{t_0})_{t>0}$ dieselbe Verteilung wie $(B_t)_{t>0}$ hat. Daraus und aus (iii) folgt für beliebiges a größer 0, dass $(a^{-\frac{1}{2}} B_{at})_{t \geq 0}$ dieselbe Verteilung wie $(B_t)_{t \geq 0}$ hat. Sei nun $B_{[0,1]} := \{B_t : 0 \leq t \leq 1\}$ das Bild des Pfades mit Definitionsbereich $[0, 1]$. Dann gilt $B_{[0,1]} = B_{[0, \frac{1}{2}]} \cup B_{[\frac{1}{2}, 1]}$. Wie wir gerade bemerkt haben, hat $B_{[0, \frac{1}{2}]}$ dieselbe Verteilung wie $2^{-\frac{1}{2}} \cdot B_{[0,1]}$ und somit $B_{[0, \frac{1}{2}]}$ dieselbe Verteilung wie $f_0(B_{[0,1]})$, wobei $f_0(x) := 2^{-\frac{1}{2}} \cdot x$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Ähnlichkeitsfaktor kleiner 1 ist. $B_{[\frac{1}{2}, 1]}$ ist gleich verteilt wie $B_{[0, \frac{1}{2}]}$ um $B_{\frac{1}{2}}$ verschoben. Damit ist $B_{[\frac{1}{2}, 1]}$ so verteilt wie $f_1(B_{[0,1]})$, wobei die Ähnlichkeitsabbildung f_1 durch $f_1(x) := 2^{-\frac{1}{2}} \cdot x + B_{\frac{1}{2}}$ definiert ist. Somit gilt $B_{[0,1]} = f_0(B_{[0,1]}) \cup f_1(B_{[0,1]})$ und $B_{[0,1]}$ ist statistisch selbstähnlich im Sinne der Bemerkung nach Satz 2.25.

Um die Hausdorff- und Box-Dimension der Menge $B_{[0,1]}$ zu berechnen, bemerken wir, dass der Brownsche Bewegungsprozess für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ und W -fast alle $\omega \in \Omega$ Hölder-stetig mit Hölder-Exponent λ ist. D. h. es existiert ein $c \geq 0, \varepsilon > 0$, sodass für alle $t \geq 0, t+h \geq 0$ und $|h| < \varepsilon$

$$\|B_{t+h} - B_t\|_2 \leq c \cdot |h|^\lambda$$

gilt. Dies sieht man ein, wenn man von $t \geq 0, |h| < \varepsilon, \varepsilon > 0$ und λ ausgeht und mit B_t^i die i -te Komponente von B_t bezeichnet. Dann gilt für W -fast alle $\omega \in \Omega$

$$\|B_{t+h} - B_t\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|B_{t+h}^i - B_t^i\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^n C^2 \cdot |h|^{2\lambda} = n \cdot C^2 \cdot |h|^{2\lambda}.$$

Die Existenz der Konstanten $C, \varepsilon > 0$, sodass wir den Term $\|B_{t+h}^i - B_t^i\|_2$ für W -fast alle $\omega \in \Omega$ derart abschätzen können, folgt aus [21] (Theorem 5.5.13 mit Beweis, Seite 238). Damit folgt aus Satz 2.47 (i) und Satz 2.58 (i) für alle $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ und für W -fast alle $\omega \in \Omega$

$$\dim_{\mathcal{H}}(B_{[0,1]}) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \dim_{\mathcal{H}}([0,1]) \leq \frac{1}{\lambda} \leq 2$$

und

$$\dim_{\mathcal{B}}(B_{[0,1]}) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \dim_{\mathcal{B}}([0,1]) \leq \frac{1}{\lambda} \leq 2.$$

Mit potentialtheoretischen Methoden kann man auch die umgekehrte Ungleichung zeigen (siehe [20], Seite 264) und somit hat $B_{[0,1]}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 Hausdorff- und Box-Dimension 2.

2.5.4 Projektionen, Produkte und Schnitte fraktaler Mengen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem Verhalten der Hausdorff- und Box-Dimension von Teilmengen des \mathbb{R}^n unter orthogonalen Projektionen, unter Produktbildung und unter Schnitten beschäftigen. Um mit orthogonalen Projektionen arbeiten zu können, gehen wir vom Hilbertraum $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot)_2)$ aus.

Definition 2.56. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$. Dann bezeichnet $G(n, k)$ die *Grassmannsche Mannigfaltigkeit* aller k -dimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^n .

Mit $\gamma_{n,k}$ benennen wir das auf dem Raum $G(n, k)$ definierte, bezüglich der orthogonalen Gruppe invariante Wahrscheinlichkeitsmaß ([15], Seite 49). Um es zu konstruieren, geht man anfangs von einem festen $\mathfrak{N} \in G(n, k)$ aus und zeigt dann, dass $\gamma_{n,k}$ unabhängig von \mathfrak{N} ist.

Satz 2.70. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$, $proj_{\mathfrak{N}}$ die orthogonale Projektion von \mathbb{R}^n auf $\mathfrak{N} \in G(n, k)$ und $A \in \mathfrak{B}_n$.

Ist $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq k$, dann folgt für $\gamma_{n,k}$ -fast alle $\mathfrak{N} \in G(n, k)$

$$\dim_{\mathcal{H}}(proj_{\mathfrak{N}}(A)) = \dim_{\mathcal{H}}(A).$$

Ist $\dim_{\mathcal{H}}(A) > k$, dann folgt für $\gamma_{n,k}$ -fast alle $\mathfrak{N} \in G(n, k)$

$$\dim_{\mathcal{H}}(proj_{\mathfrak{N}}(A)) = k.$$

Beweis. Den Beweis erhält man, indem man jenen aus [20] (Seite 92), der den zweidimensionalen Fall behandelt, für den n -dimensionalen Raum verallgemeinert. Dabei wird mit potentialtheoretischen Methoden gearbeitet. \square

Satz 2.70 gilt nicht für die Box-Dimension. Da eine orthogonale Projektion, die ja eine lineare Abbildung ist, für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{N} \in G(n, k)$

$$\|\text{proj}_{\mathfrak{N}}(x) - \text{proj}_{\mathfrak{N}}(y)\|_2^2 = \|\text{proj}_{\mathfrak{N}}(x - y)\|_2^2 \leq$$

$$\leq \|\text{proj}_{\mathfrak{N}}(x - y)\|_2^2 + \|(id - \text{proj}_{\mathfrak{N}})(x - y)\|_2^2 \stackrel{\text{Satz v. Pythagoras}}{=} 1 \cdot \|x - y\|_2^2$$

erfüllt, wobei id die identische Abbildung ist, ist sie Lipschitz-stetig und somit gilt für alle nichtleeren kompakten $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nach Satz 2.58 (ii)

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(\text{proj}_{\mathfrak{N}}(A)) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) \quad \text{und} \quad \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\text{proj}_{\mathfrak{N}}(A)) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A).$$

In [25] (Korollar 3.9 mit Beweis, Seite 32-33) wird gezeigt, dass der folgende Satz gilt:

Satz 2.71. *Sei A eine nichtleere beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n und $0 < k < n$. Dann gilt für $\gamma_{n,k}$ -fast alle $\mathfrak{N} \in G(n, k)$*

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\text{proj}_{\mathfrak{N}}(A)) \geq \frac{k}{n} \cdot \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A).$$

Gilt also $\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) = n$, so erhält man $\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\text{proj}_{\mathfrak{N}}(A)) = k$.

Die bestmögliche Ungleichung, die man in diesem Zusammenhang für die untere und obere Box-Dimension zur Verfügung hat, ist jene von [26] (Theorem 3 und Beweis, Seite 291-292):

Satz 2.72. *Sei A eine nichtleere beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n und $0 < k < n$. Dann gilt für $\gamma_{n,k}$ -fast alle $\mathfrak{N} \in G(n, k)$*

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(\text{proj}_{\mathfrak{N}}(A)) \geq \frac{\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A)}{1 + (\frac{1}{k} - \frac{1}{n}) \cdot \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A)} \quad \text{und}$$

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\text{proj}_{\mathfrak{N}}(A)) \geq \frac{\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A)}{1 + (\frac{1}{k} - \frac{1}{n}) \cdot \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A)}.$$

Da viele Fraktale, die in der Praxis vorkommen, zumindest lokal, Produkte zweier fraktaler Mengen sind, wollen wir auch Aussagen über die fraktale Dimension dieser Mengen anführen.

Seien (Ω_1, d_1) und (Ω_2, d_2) zwei metrische Räume und $A \subseteq \Omega_1$, $B \subseteq \Omega_2$. Dann ist $A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ das *kartesische Produkt der Mengen A und B* .

Satz 2.73. (i) *Seien $A \in \mathfrak{B}_n$ und $B \in \mathfrak{B}_m$. Dann gilt*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A \times B) \geq \dim_{\mathcal{H}}(A) + \dim_{\mathcal{H}}(B).$$

(ii) *Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ nichtleer und kompakt. Dann gilt*

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \times B) \geq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) + \underline{\dim}_{\mathcal{B}}(B) \quad \text{und}$$

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A \times B) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A) + \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(B).$$

(iii) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ eine nichtleere beschränkte Menge. Dann folgt

$$\dim_{\mathcal{H}}(A \times B) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A) + \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)$$

und, falls zusätzlich $\dim_{\mathcal{H}}(B) = \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(B)$ gilt, erhält man

$$\dim_{\mathcal{H}}(A \times B) = \dim_{\mathcal{H}}(A) + \dim_{\mathcal{H}}(B).$$

Beweis. (i) Siehe [20] (Seite 101).

(ii) Die Aussage für die untere Box-Dimension folgt aus [21] (Proposition 1.5.6 (c), Seite 44-45 und Aufgabe 1.4.8, Seite 34), jene für die obere aus [20] (Seite 103), wobei wir zusätzlich A und B als nichtleer und kompakt vorausgesetzt haben.

(iii) Für die erste Aussage aus Punkt (iii) verweisen wir auf [20] (Seite 102). Dort wird B nicht als beschränkt vorausgesetzt. Wir haben die zusätzliche Voraussetzung eingeführt, da wir die Box-Dimension nur für nichtleere beschränkte Mengen definiert haben. Die zweite Aussage folgt aus (i) und der ersten Aussage des dritten Punktes. \square

Somit gibt es auch Mengen, die Hausdorff-Dimension null haben können und deren kartesisches Produkt Hausdorff-Dimension eins hat.

Da der Schnitt zweier Fraktale oder eines Fraktals und einer beliebigen Menge oft ein Fraktal ist, wäre es wünschenswert, die fraktale Dimension der Mengen und ihrer Schnittmengen zueinander in Beziehung zu setzen. Leider ist es schwierig hierbei allgemein gültige Aussagen zu machen. Es gilt jedoch nach [20] (Seite 111):

Satz 2.74. Seien A und B Elemente von \mathfrak{B}_n . Dann gilt für λ_n -fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\dim_{\mathcal{H}}(A \cap \tau_x(B)) \leq \max\{0, \dim_{\mathcal{H}}(A \times B) - n\}.$$

Weiters gilt

Satz 2.75. Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, $s > n - k$ und $A \in \mathfrak{B}_n$ mit $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$. Dann gilt für $\mathcal{H}^s \times \gamma_{n,k}$ -fast alle $(x, \mathfrak{N}) \in A \times G(n, k)$

$$\dim_{\mathcal{H}}(A \cap \tau_x(\mathfrak{N})) = s + k - n \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^{s+k-n}(A \cap \tau_x(\mathfrak{N})) < \infty.$$

Beweis. Siehe [27] (Beweis zu Theorem 6.6, Seite 242). \square

Kapitel 3

Tumoren und Tumorzellen

In diesem Kapitel orientieren wir uns vor allem an [28], aber auch an [29], [30], [31], [32], [33] und [34].

3.1 Die menschliche Zelle

Die *Zelle* (lat. *cellula*=*kleine Kammer*), die man als strukturelle Organisationseinheit bzw. als Grundelement der Lebewesen bezeichnen kann, tritt in zwei Organisationsstufen, nämlich als *Protozyte*, d. h. als Zelle der einzelligen *Prokaryoten* (Bakterien, Blaualgen) und als *Euzyte*, d. h. als Zelle der ein- oder mehrzelligen *Eukaryoten* (Flagellaten, Pilze, Pflanzen, Tiere, Menschen), auf. Protozyten sind wesentlich kleiner, leichter und einfacher organisiert als Euzyten und weisen im Gegensatz zu diesen keinen Zellkern (siehe unten) oder echt ausgebildete Chromosomen (siehe unten), sondern einen DNA-hältigen Bereich (siehe unten) ohne Membranabgrenzung (*Nukleoid*) auf.

Wir wollen kurz wiederholen was man unter *RNA* (*Ribonukleinsäure*) und *DNA* (*Desoxyribonukleinsäure*) versteht. Ein RNA-Molekül besteht aus einer kettenartigen Aufeinanderfolge von *Nukleotiden*, die jeweils aus Phosphorsäure, Ribose (ein Zucker) und einer der vier Basen *Adenin*, *Zytosin*, *Guanin* oder *Uracil* aufgebaut sind. DNA-Moleküle unterscheiden sich bezüglich ihrer Aufbaukomponenten dadurch, dass der Zucker ein anderer ist und dass Uracil durch das ähnlich aufgebaute *Thymin* ersetzt wird. Zusätzlich weist die DNA eine Besonderheit in der räumlichen Struktur auf, denn sie besteht aus zwei Nukleotidketten, wobei sich stets Adenin und Thymin, sowie Guanin und Zytosin gegenüberstehen, die zu einer Doppelhelix gewunden sind.

Jeweils drei Basen der RNA oder DNA codieren für eine Aminosäure. Überlegt man sich, dass auf der RNA oder DNA nur die 20 Aminosäuren Glyzin, Alanin, Valin, Leuzin, Isoleuzin, Zystein, Methionin, Phenylalanin, Tyrosin, Tryptophan, Prolin, Serin, Threonin, Asparagin, Glutamin, Aspartat, Glutamat, Histidin, Lysin und Arginin berücksichtigt sind, es aber $4^3 = 64$ mögliche Codierungen gibt, wird klar, dass dieses sogenannte *Triplettsystem* durch hochgradige *Redundanz* gekennzeichnet ist. In der DNA liegt die genetische Information klarerweise doppelt in komplementärer Form vor.

Nachdem sich im menschlichen Körper viele Zellen im Laufe der Entwicklung des Lebewesens differenzieren (siehe unten), wodurch ihre *Totipotenz*, also die Fähigkeit der Zelle, den gesamten Organismus zu bilden, bzw. ihre *Pluripotenz*, also die Fähigkeit, sich zu einem beliebigen Gewebstyp zu entwickeln, verloren geht, gibt es eine Vielzahl an Zelltypen, die sich durch Größe, Struktur und Funktion voneinander unterscheiden. Generell sind die meisten menschlichen Zelltypen Bausteine der *Gewebe*, womit man einen Verband gleichartig entwickelter Zellen bezeichnet, der spezifische Leistungen erbringt, oder der Organe. In Geweben sind benachbarte Zellen durch *Verbindungsproteine* mechanisch und brückenartig verkoppelt und bilden z. B. *Epithelgewebe*, *Fettgewebe*, *Knorpelgewebe*, *Bindegewebe*, *glattes* bzw. *quergestreiftes Muskelgewebe* bzw., strukturell betrachtet, auch Blut.

Trotz der großen Vielfalt an Zelltypen ist der Grundbauplan aller Zellen im menschlichen Organismus gleich. Wasser ist dabei der wichtigste Bestandteil und bildet mit den Salzen den größten Anteil *anorganischer* Stoffe (d. h. Elemente und Verbindungen, die, bis auf einige Ausnahmen, keinen Kohlenstoff enthalten) im Körper. Es dient als Transport- und Lösungsmittel und liegt innerhalb der Zelle, also im *intrazellulären Raum*, mit anderen Stoffen gemischt, als *Zytoplasma*, sowie im *extrazellulären Raum* als *Interstitialflüssigkeit*, auch *Interzellularflüssigkeit* genannt, also Flüssigkeit im *Interstitium* (Raum zwischen verschiedenen Geweben eines Organs), als *Blutplasma* (dem flüssigen zelllosen Teil des Blutes) und als *epitheliales Lumina*, also als *transzelluläre* (=zwischen den Zellen gelegene) Flüssigkeit vor.

Gelöste Salze kommen in Form von Ionen vor und weisen im Extra- und Intrazellulären unterschiedlich hohe Konzentrationen auf. Wichtige Ionen sind hierbei Na^+ , K^+ , Cl^- und Ca^{2+} , wobei, außer im Falle von Kalium, eine Überkonzentration der Ionen im Extrazellulären, verglichen mit dem Intrazellulären, vorliegt.

Umhüllt ist die menschliche Zelle von der *Zellmembran*, die, physikalisch gesehen, die wichtigste Komponente der Zelle ist. Obwohl sie nur ca. 8 nm, also $8 \cdot 10^{-9}$ m dick ist, ist sie mechanisch sehr stabil, was durch ihren dichten molekularen Aufbau bedingt ist, wobei die Struktur nicht starr, sondern durch starke *Fluidität* gekennzeichnet ist. Sie besteht aus einer *Lipiddoppelschicht*. *Lipide* sind fettähnliche, in Wasser unlösliche Substanzen, deren Moleküle einen Kopf- und einen Schwanzteil besitzen. Der Schwanzteil ist *hydrophob* (wasserfürchtend), d. h. er reagiert nicht mit Wasser, der Kopfteil zeigt hingegen *hydrophiles* (wasserliebendes) Verhalten. Werden Lipide nun in Wasser gebracht, so schließen sich die Schwanzteile räumlich zusammen, während die Kopfteile versuchen, mit dem Wasser zu reagieren. Damit erhält man eine Lipiddoppelschicht, die extrazelluläre und intrazelluläre Flüssigkeit trennt. In dieser Doppelschicht sind *Proteine* eingelagert, also aus Aminosäuren zusammengesetzte Moleküle. Einige dieser Proteine dienen als *Membranporen*, die den Stofftransport durch die Zellmembran ermöglichen und sehr unterschiedlich aufgebaut sind. So gibt es *passiv funktionierende*, aber auch *elektrisch steuerbare* bzw. *elektrochemisch steuerbare Porentypen*. Die passiv funktionierenden Porentypen können von kleinen Ionen passiert werden und sind für die *Membranspannung*, die durch die unterschiedlichen Ionenkonzentrationen im Intra- und Extrazellulären und

die unterschiedliche *Membranpermeabilität* (Durchlässigkeit der Membran) der Ionen zu Stande kommt, verantwortlich. Alle Zellen wie auch die Zellorganellen innerhalb einer Zelle werden von einer derart aufgebauten Membran umhüllt. Diese universelle Eigenschaft wird oft als *Unit Membrane* bezeichnet.

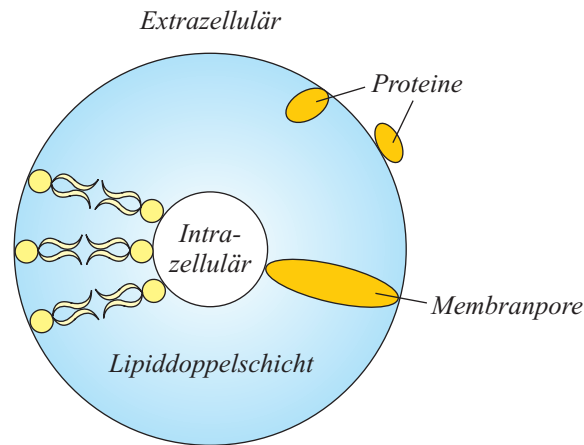


Abbildung 3.1: Schematischer Aufbau der Zellmembran.

Auch der *Zellkern (Nukleus)*, der die größte Organelle der eukaryotischen Zellen darstellt und fast die gesamte DNA der Zelle enthält, ist gegenüber dem Zytoplasma durch die *Kernmembran*, die an manchen Stellen von Poren unterbrochen wird, sodass Austauschprozesse zwischen dem Zellkern und dem Zytoplasma stattfinden können, abgegrenzt. Die Kernmembran besteht aus einer äußeren und inneren Kernmembran, wobei erstere in das raue Endoplasmatische Retikulum (siehe unten) übergeht und mit Ribosomen (siehe unten) besetzt ist und zweitere mit einer Proteinschicht überzogen ist, wodurch das sogenannte Chromatin (siehe unten) an die Kernhülle gebunden wird.

Die DNA des Kernes bildet zusammen mit *Histonen* (Proteine, die direkt mit der DNA assoziiert sind) und anderen Proteinen das *Chromatin*.

Während der Zellteilung kondensiert das Chromatin (d. h. die DNA verdichtet sich) zu den, unter dem Lichtmikroskop sichtbaren, *Chromosomen*, ansonsten liegt es als dichter gepacktes *Heterochromatin* und lockerem *Euchromatin* vor. Im Bereich des Euchromatins, das die aktiven Gebiete des *Genoms* (Gesamtheit der genetischen Information, Gesamtheit aller Gene) darstellt, wird DNA aktiv in *mRNA* transkribiert, d. h. mit Hilfe der DNA, die als Vorlage dient, wird RNA synthetisiert, welche die genetische Information vom Zellkern ins Zytoplasma überträgt und somit den Namen *Messenger-RNA* (mRNA) erhält.

Es sei erwähnt, dass die Anzahl der Chromosomen in einer Zelle artkonstant ist. So beinhaltet jede *somatische Zelle (Körperzelle)* des Menschen 23 Chromosomenpaare, wobei sich die Chromosomen eines Paares jeweils in Form, Größe und genetischer Information entsprechen (*diploider Chromosomensatz*), jedes *Gamet (Geschlechtszelle)* 23 Chromosomen (*haploider Chromosomensatz*).

Im Zellkern findet sich weiters der *Nukleolus (Kernkörperchen)*. Die DNA im

Nukleolus enthält die Gene für *rRNAs* (*ribosomale RNA*, also RNA, die u. a. mit Proteinen zu Ribosomen-Untereinheiten zusammengebaut wird). Diese werden dauernd transkribiert, was zu einer hohen lokalen RNA-Konzentration führt. Die Anzahl, Form und Größe der Nukleolen variiert in verschiedenen Zellen.

Das *endoplasmatische Retikulum* (ER) ist ein Membransystem, das man in das *raue ER*, also das ribosomenbesetzte ER, welches mit der Kernhülle in Verbindung steht und u. a. für die Proteinsynthese oder Erkennung nicht richtig synthetisierter Proteine zuständig ist, das *glatte*, also ribosomenfreie, ER, das körpereigene aber auch fremde Substanzen in besser ausscheidbare Stoffe umwandelt und in die äußere Kernmembran unterteilen kann.

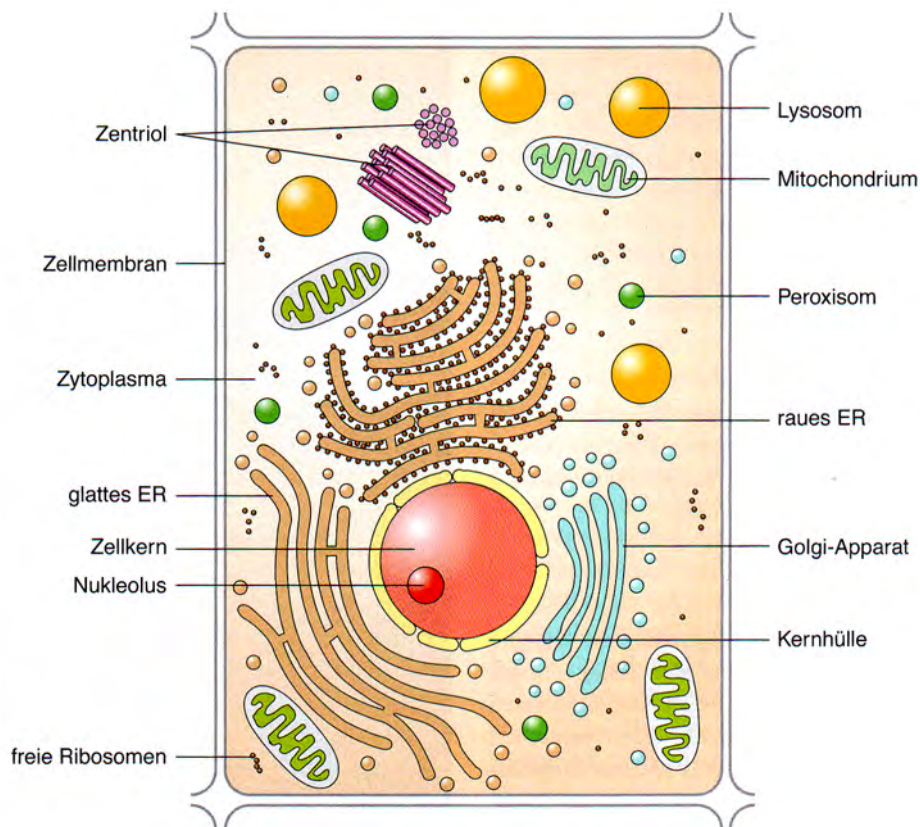


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung einer Zelle.

Der *Golgi-Apparat* oder *Golgi-Komplex* ist ein äußerst komplexes, geschlossenes System von abgeflachten Membran-Säckchen, die stapelartig übereinander geschichtet sind. Proteine können dort reifen, werden sortiert, verpackt und in *Vesikeln* (geschlossene, hohlkugelförmige Membranen) zu verschiedenen Zielen der Zelle transportiert. Auch Membranlipide befördert der Golgi-Apparat an die entsprechenden Stellen.

Lysosomen sind membranbegrenzte kugelförmige Zellorganellen, die viele hydrolytische Enzyme mit saurem pH-Wirkungsoptimum enthalten, also Stoffe, die eine Reaktion beschleunigen, ohne sich selbst zu verändern und dabei nur in der Hydrolysephase wirksam werden. Hierbei gibt es u. a. *primäre Lysosomen*, die durch Abspaltung von Vesikeln des Golgi-Apparates entstehen, *sekundäre Lysosomen*, die durch Verschmelzen der primären Lysosomen mit Endosomen (zählen zu Zellorganellen) entstehen und bestimmte Substanzen abbauen und *Autophagolysosomen*, die dem Abbau geschädigter oder gealterter zelleigener Bestandteile dienen.

Peroxisome entstehen vermutlich durch Abspaltung vom endoplasmatischen Retikulum. Auch sie enthalten Enzyme und sind am Abbau von Fetten beteiligt.

Die *Mitochondrien* sind Organellen, die den Energieträger *ATP* (*Adenosintriphosphat*) synthetisieren. Auf Grund ihrer Wichtigkeit für den Energiestoffwechsel innerhalb der Zelle werden sie gemeinhin oft auch als „Kraftwerke“ der Zelle bezeichnet. Sie bestehen aus einer inneren und einer äußeren Membran und enthalten eine eigene DNA. Teilt sich die Zelle, so vermehren sich die Mitochondrien und werden aufgeteilt.

Ribosomen kommen entweder in freier Form im Zytoplasma vor oder sitzen am rauen ER. Sie sind für die Proteinsynthese zuständig.

Die Zellstabilität wird im Allgemeinen durch zelleigene Skelettstrukturen garantiert. Unter anderem dienen diese Strukturen jedoch auch der Organisation und Kompartimentierung des Zytoplasmas. Die drei wichtigsten Komponenten dieses *Zytoskelettes* sind die *Mikrofilamente*, die vor allem für die Zellbeweglichkeit sowie Zellform verantwortlich sind, die *Mikrotubuli*, für den intrazellulären Organellen- und Vesikeltransport und die *Intermediärfilamente*, deren Funktion noch nicht ganz geklärt ist, die aber wahrscheinlich für die Aufrechterhaltung der Zellstabilität und bei der intrazellulären Organisation der Organellen wichtig sind. Für die Organisation der Mikrotubuli sind sogenannte *Zentriolen* zuständig.

Zu den Funktionen einer Zelle gehört z. B. die Energieproduktion, wobei Energie aus ATP freigesetzt wird oder aber auch die Synthese von Proteinen. Dazu wird der, das Gen (siehe unten) enthaltende, DNA-Abschnitt im Zellkern freigelegt und eine RNA-Kopie hergestellt, sodass schließlich mRNA entsteht. Diese wandert aus dem Zellkern in das Zytoplasma, wo sie an ein Ribosom bindet. An jedes Triplett der mRNA lagert sich nun eine komplementäre *tRNA* (*Transfer-RNA*) an. Dabei ist die tRNA ein Komplex aus drei RNA-Positionen und der entsprechenden Aminosäure. Das Ribosom fährt nun an der mRNA entlang, verknüpft - sehr stark vereinfacht - die Aminosäuren zu einem Protein und löst es von der tRNA, die nun mit der mRNA verbunden ist.

Auch die Vermehrung kann man zu den Funktionen einer Zelle zählen. In den meisten Geweben und Organen findet eine kontinuierliche *Proliferation* (d. h. Wachstum und Vermehrung) und Erneuerung der Zellen statt - ausgenommen sind Gewebe aus nicht mehr teilungsfähigen Zellen wie etwa Nervengewebe. Die

Zellproliferation ist ein Prozess, der einer äußerst strengen Kontrolle unterliegt und wird unter anderem durch die sogenannten *Wachstumsfaktoren* (also Proteine, die Informationen weiterleiten, indem sie als Signale von einer Zelle auf eine andere übertragen werden) aber auch durch Zell-Zell-Interaktionen gesteuert. Auch bei der *Mitose*, der Zellteilung, die eine kritische Phase darstellt und deren Störung zu Mutationen oder dem Zelltod führen können, gibt es Kontrollmechanismen, sodass die DNA-Kopien z. B. richtig in die Tochterkerne aufgeteilt werden. Die Vorgänge zwischen zwei Mitosen werden *Zellzyklus* genannt und müssen exakt gesteuert und kontrolliert werden. Treten Fehler in der Zellzyklusregulation auf, kann es zu unkontrolliertem Zellwachstum und weiters zur Entstehung von Tumoren kommen. Untersuchungen von Tumoren haben gezeigt, dass auf allen Ebenen der Wachstumssteuerung Fehler auftreten können.

Wird eine Eizelle befruchtet, so entwickelt sie sich letztendlich zum vollständigen Organismus über Zellvermehrung durch Zellteilung und Differenzierung. Unter *Differenzierung* versteht man die Entwicklung verschiedener Zelltypen mit spezialisierten Funktionen und unterschiedlicher Morphologie. Beim erwachsenen Menschen gibt es dann auf der einen Seite Zellen, die nicht mehr teilungsfähig sind, während sich andere Gewebe durch Zellteilung erneuern, was im Allgemeinen von den sogenannten pluripotenten *Stammzellen* ausgeht. Die Teilung und Differenzierung der Stammzellen wird durch Zell-Zell-Interaktionen und Wachstumsfaktoren reguliert.

Unter *Entdifferenzierung* oder *Dedifferenzierung* versteht man einen Verlust von Differenzierungsmerkmalen, was z. B. bei der Tumorentstehung beobachtet werden kann.

Werden Zellen und Organe schädlichen Einflüssen ausgesetzt, so reagieren sie zuerst mit einer *Adaption* (Anpassung, Kompensation, Reaktion auf physiologische oder pathologische Reize). Falls die Adaptionkapazität überschritten wird, führt dies zu einer Schädigung, die anfangs noch *reversibel* (umkehrbar), dann aber *irreversibel* (nicht umkehrbar) ist.

Unter *Zelltod* versteht man das irreversible Endstadium einer Zellschädigung durch hypoxische (Sauerstoffmangel in Geweben), toxische, physikalische, immunologische oder mikrobielle Ursachen, aber auch einen physiologischen Vorgang im Zuge der Embryonalentwicklung bzw. des normalen Gewebeumsatzes. Dabei gibt es zwei Formen von Zelltod, nämlich die *Apoptose* und die *Nekrose*. Die Apoptose ist die programmierte Elimination von Zellen, der programmierte Zelltod. Als natürliche Form der Zellerneuerung erhält sie das Gleichgewicht zwischen Zellvermehrung und Zellelimination. Sie tritt z. B. bei der Embryonalentwicklung auf oder spielt bei der Elimination infizierter Zellen bzw. der Krebsentstehung eine Rolle (Hemmung der Apoptose führt zu einer Zunahme der Zellen). Die Nekrose ist der durch eine *Noxe* (schädigender Einfluss) verursachte Zelltod in einem lebenden Gewebe.

3.2 Definition eines Tumors

Ein *Tumor*, auch *Geschwulst* oder *Neoplasma* (d. h. Neubildung) genannt, ist eine abnorme Gewebemasse, die durch die Vermehrung körpereigener entarteter Zellen (*transformierte Zellen, Tumorzellen*) entsteht, wobei für diesen Vorgang

Regulationsstörungen von Genen (*Gen*=Abschnitt auf der DNA), die vor allem das Wachstum (*Proliferation*), den Zellverlust (*Apoptose*) und die Differenzierung der Zellen kontrollieren, verantwortlich sind.

Zu den Eigenschaften der Tumorzellen zählen *Invasion* (aktives Einwachsen von Tumorzellen in das normale Gewebe, was zu einer Zerstörung der Gewebestruktur führt) und Streuung von Tumorzellen im Körper sowie Bildung von Absiedlungen (*Metastasierung*). Auch wenn keine externen Wachstumsstimuli vorhanden sind, die für das Wachstum normaler Zellen notwendig sind, können manche Tumorzellen wachsen. Man spricht von *autonomen Tumorwachstum*. Bei jedem Tumor kommt es während seines Wachstums zu einer, durch die Tumorzelle induzierten, Gefäßneubildung (*Tumorangiogenese*), sodass der Tumor aus eigentlichen Tumorzellen (*Tumorparenchym*) und einem gefäßhaltigen Stützgewebe (*Tumorstroma*), das als Stütze und für die Blutversorgung des Tumors zuständig ist, besteht. Die Symptome eines Tumors entstehen durch lokales Wachstum (z. B. Druck), Stoffwechselprodukte der Tumorzellen (z. B. Hormone) sowie Streuung im Organismus.

Es sei erwähnt, dass die Anzahl der Krebserkrankungen in den letzten Jahren gestiegen ist und Tumoren in westlichen Ländern häufiger vorkommen als z. B. in Afrika oder Asien. Zusätzlich dazu gibt es bei den einzelnen Tumortypen auch regionale Unterschiede, wahrscheinlich bedingt durch unterschiedliche Krebsrisikofaktoren oder die Qualität der medizinischen Einrichtungen. Statistische Untersuchungen haben gezeigt, dass primäre Leberkarzinome vorwiegend in Asien und Afrika vorkommen und Lungen-, Darm-, Mamma- und Prostatakarzinome typisch für Nordamerika und Westeuropa sowie Australien sind. Gebärmutterhalskrebs ist hingegen in Zentral- und Südamerika, Ostafrika und Indien eine häufige Todesursache.

Obwohl bösartige Tumoren tendenziell in höherem Alter auftreten, gibt es organspezifische Unterschiede. So kommen Keimzelltumoren bevorzugt im Kindes- bzw. frühen Erwachsenenalter und Karzinome in höherem Alter vor. Zusätzlich gibt es auch Tumoren, die, ohne erklärbaren Grund, bei der Frau oder dem Mann häufiger auftreten.

3.3 Tumorrisikofaktoren

Obwohl die Liste der Tumorrisikofaktoren auf keinen Fall vollständig oder restlos geklärt bzw. bekannt ist, unterscheidet man generell zwischen **endogenen** und **exogenen** Faktoren, die kausal mit der Entstehung menschlicher Tumoren assoziiert sind.

Zu den **endogenen** Faktoren zählen:

Erbliche Disposition, womit man die genetische Veranlagung eines Individuums bezeichnet, bestimmte Besonderheiten oder Erkrankungen zu vererben, sowie die genetisch bedingte Anfälligkeit, bestimmte Erkrankungen zu bekommen;

Autosomal-dominant vererbte Mutationen, also Mutationen in den Gameten der

Mutter oder des Vaters, wobei nur ein verändertes *Allel*, also ein Gen, das das gleiche Merkmal betrifft und auf den Chromosomen an aneinander sich entsprechenden Orten liegt, auf einem der beiden sich entsprechenden Chromosomen zur Merkmalsausprägung bei dem Nachkommen kommt;

Endokrine Fehlsteuerungen, also Fehlsteuerungen von Drüsen, die ihre Wirkstoffe als Hormone in das Gefäßsystem abgeben.

Exogene Faktoren sind:

Kanzerogene, d. h. Stoffe, die die DNA so verändern, dass aus gesunden Zellen Tumorzellen werden. Dabei steigt mit der Dauer des Kontaktes, den man mit der Substanz hat, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tumor entsteht. Die Veränderungen werden erst nach längerer *Latenzperiode* (Zeitraum, in dem die Substanzen die DNA verändert haben, sich aber noch keine Auswirkungen zeigen) manifest.

In diesem Zusammenhang erwähnenswert sind sogenannte *Präkanzerogene* bzw. *Prokanzerogene*, also Verbindungen, die erst durch *Biotransformation* - hierbei werden beim Stoffwechsel nicht ausscheidbare Stoffe in ausscheidbare umgewandelt - krebserzeugende Wirkung erhalten;

Mit *Promotoren* bezeichnet man Stoffe, die die Proliferation von Tumorzellen beschleunigen (z. B. Östrogene als Promotor bei bestimmtem Brustkrebs), mit *Kokarzinogenen* Verbindungen, die den karzinogenen Effekt von Kanzerogenen verstärken.

Zu gefährlichen chemischen Kanzerogenen, d. h. Substanzen, die direkt oder als Prokanzerogene krebserregende Wirkung haben, zählen z. B. Komponenten des Rauchtabaks oder Asbest, der früher in der Bauindustrie verwendet wurde;

Strahlen, vor allem kurzweilige ionisierende Strahlung, die hochreaktive *Radikale*, also Atome oder Moleküle mit mindestens einem ungepaarten Elektron, die sehr reaktionsfreudig sind, erzeugen, können durch DNA-Veränderung Tumoren hervorrufen. Besonders empfindlich reagieren Embryonen auf ionisierende Strahlung. Betrachtet man die Zahl der induzierten Tumoren, so ist die UV-Strahlung jedoch von größter Bedeutung. Derzeit nicht bewiesen, ist eine kanzerogene Wirkung elektromagnetischer Strahlen (z. B. vom Mobiltelefon);

Onkogene Viren, also tumorerzeugende Viren. *Viren* sind intrazelluläre Parasiten, also Parasiten in Zellen von Eukaryoten und Prokaryoten. Sie sind nicht zellulär und besitzen keinen eigenen Stoffwechsel, weshalb sie die genetische Information zu ihrer Vermehrung in die Wirtszelle einbauen müssen. Bei den onkogenen Viren unterscheiden wir *DNA-Tumorviren* und *RNA-Tumorviren*. Dabei verlaufen Transformationen durch DNA-Tumorviren latent, d. h. über Jahre. Die wichtigste Gruppe dieser Viren sind die *humanen Papillomviren* (HPV), die die häufigsten Hautwarzen verursachen. Im Gegensatz dazu, beträgt die Transformationszeit der RNA-Tumorviren, die zu den *Retroviren* zählen, wenige Wochen.

3.4 Tumorentstehung und Tumorwachstum

Heute geht man davon aus, dass die Tumorentstehung in mehreren Schritten bzw. Phasen abläuft. In der ersten Phase, der *Initiierungsphase*, werden gesunde Körperzellen durch Änderung bzw. durch einen Defekt der genetischen Information in Tumorzellen umgewandelt. Nach längerer Latenz tritt dann eine *Promotions-* oder *Realisationsphase* ein, in der dann der Tumor gebildet wird, unterstützt durch Promotoren oder chronische Reize.

Man nimmt heute also an, dass das Tumorwachstum von transformierten somatischen Zellen (*Tumorstammzellen*) ausgeht, d. h. dass sich Tumoren aus teilungsfähigen Zellen (z. B. Stammzellen bzw. Zellen aus labilem Gewebe oder potentiell teilungsfähigen Zellen der stabilen Gewebe) normaler Gewebe entwickeln. Durch Proliferation dieser Tumorstammzelle entsteht zunächst eine homogene Zellformation, die durch Differenzierung der Tumorstammzellen analog zum Muttergewebe bzw. durch die genetische Instabilität der Tumorzellen, die zu Mutationen führt, im Zuge der Tumorprogression immer heterogener wird. Ab einer Größe von 2 mm benötigt ein Tumor eine eigene Gefäßversorgung (Tumorangiogenese), die er selbst aufbauen kann (siehe Abschnitt 3.2). Ist er kleiner, so kann er durch Diffusion aus der Umgebung ernährt werden. Die Tumorstammzellen haben wahrscheinlich, analog zu den Stammzellen, eine geringe Proliferationsaktivität, sind aber für das Überleben des Tumors entscheidend.

Das Verhältnis zwischen Zellwachstum und Zellverlust bestimmt das Tumorwachstum. Im Allgemeinen ist das Zellwachstum der dominierende Faktor. Unter *Tumorregression* versteht man die Rückbildung eines Tumors als Folge eines Missverhältnisses zwischen Tumorwachstum und Gefäßversorgung mit Ausbildung einer Tumornekrose oder Zunahme der Apoptoserate. Nimmt ein Tumor an Größe bzw. nimmt seine Neigung zu metastasieren zu, so spricht man von *Tumorprogression*.

Auf molekularbiologischer Ebene sind für die Tumorentstehung vor allem die *Onkogene* und die *Tumorsuppressorgene*, aber auch die *Apoptosegene*, *Telomerasegene* sowie die *DNA-Reparatur-Gene* von Bedeutung.

Onkogene oder *Protoonkogene* sind bestimmte Gene auf der DNA. Ihre *Expressionsproteine* (Proteine, die durch Realisation der genetischen Information auf der DNA entstehen) sind für die Regulation der Proliferation, Mobilität und Differenzierung von Zellen zuständig. Mutieren sie, so entstehen sogenannte *Onkoproteine*, deren Regulationsmechanismen gestört sind. So sind sie *konstitutiv aktiviert*, d. h. das veränderte Genprodukt wird eigenständig biologisch aktiv (benötigt z. B. keinen Wachstumsfaktor zur Aktivierung). Es sei erwähnt, dass aktivierte Onkogene auch zu viel ihres nicht veränderter Proteins synthetisieren können. Man spricht von *Überexpression* eines normalen Onkoproteins.

Tumorsuppressorgene sind Gene auf der menschlichen DNA, deren Genprodukte z. B. das Wachstum hemmen. Wird die Information, die in diesen Genen enthalten ist, nicht mehr oder falsch umgesetzt, so ist ein nicht reguliertes Wachstum von Tumorzellen die Folge.

Apoptosegene bzw. Störungen in der Regulation der Apoptose sind ein entscheidender Faktor des Tumorwachstums.

Nicht kodierte Abschnitte an den Enden der eukaryotischen Chromosomen nennt man *Telomeren*. Da sie sich bei jeder Zellteilung verkürzen und dies ab einer gewissen Länge nicht mehr möglich ist, ist die Teilungsfähigkeit einer normalen Zelle beschränkt. Das Enzym *Telomerase* kann die Telomeren verlängern. Tumorzellen weisen, im Gegensatz zu normalen Zellen, Telomeraseaktivität auf, wodurch sie unendlich teilungsfähig werden können.

Während der DNA-Replikation oder durch Mutationen kann es zu falschen Basenpaarungen in der DNA kommen. Diese Fehler werden mittels DNA-Reparatursystemen erkannt, die veränderten Sequenzen auf der DNA entfernt und durch gesunde ersetzt. Durch Störungen dieses Reparaturmechanismus, durch einen angeborenen Defekt in einem der Reparaturgene, kann es zu einem erhöhten Vorkommen von Mutationen in den Genen kommen. Dies begünstigt die Entstehung eines Tumors.

3.5 Klassifikation der Tumoren

Um Tumoren zu klassifizieren, betrachtet man ihr biologisches bzw. klinisches Verhalten (*Dignität*), die Ausbreitung der Tumorerkrankung (*Stadium*) und teilt sie nach ihrer zellulären und geweblichen Differenzierung ein.

Die Dignität eines Tumors kann man häufig aus seiner Morphologie ableiten. Generell unterscheidet man zwischen *benignen* (gutartigen) Tumoren und *malignen* (bösartigen) Tumoren.

Benigne Tumoren sind nur in Ausnahmefällen für den Betroffenen gefährlich. Sie wachsen langsam und *expansiv*, d. h. die entstehende Tumormasse verdrängt und komprimiert das angrenzende normale Gewebe, *infiltriert* es aber nicht, d. h. sie wächst nicht in das Gewebe hinein. Im Allgemeinen sind sie gut begrenzt und weisen histologisch einen hohen Differenzierungsgrad auf, d. h. sie ähneln dem Muttergewebe. Ihre Zellen sind in den meisten Fällen gleichförmig und es erfolgt keine Invasion oder Metastasierung.

Maligne Tumoren, *Krebs* genannt, sind im Normalfall - sofern sie nicht behandelt werden - für den Betroffenen lebensgefährlich. Sie wachsen meistens sehr schnell, *invasiv* und *destruierend*. Der Tumor hält sich also an keine Gewebegrenzen und bricht somit in Organe und Gefäße ein, wodurch das Muttergewebe zerstört wird. Im Allgemeinen sind maligne Tumoren unscharf begrenzt, wodurch ihre chirurgische Entfernung schwieriger als die benigner Tumoren ist. Verbleiben also bei einem solchen Eingriff Tumorzellen im Körper, so kann es zu einem Weiterwachsen und Wiederauftreten des Tumors kommen (*Tumorrezidiv*). Die Zellen und Gewebe bösartiger Tumoren weisen einen Differenzierungsverlust auf, der so ausgeprägt sein kann, dass keine Ähnlichkeit mehr mit dem Muttergewebe besteht. Zusätzlich weisen solche Tumoren starke Kern- und Zellveränderungen auf (*Atypien*). So können die Zellgrößen und Zellformen, aber auch die Größe und Gestalt der Zellkerne sehr uneinheitlich sein. Auch vermehr-

tes Auftreten von Kernteilungsfiguren bzw. das Auftreten atypischer Kernteilungsfiguren, Nukleolenvergrößerung oder erhöhter DNA-Gehalt kann man zu den Atypien zählen.

Da der Tumor invasiv wächst, bricht er u. a. auch in Lymph- und Blutgefäße ein. Dadurch können Tumorzellen verschleppt werden und an anderen Stellen des Körpers weiterwachsen (*Metastase*).

Eine Sonder- oder Zwischenform sind die sogenannten *semimalignen* Tumoren. Sie sind lokal invasiv und destruierend, bilden aber keine Metastasen.

Die Ausbreitung des Tumors wird mit einer Stadieneinteilung (*Staging*) erfasst. Das häufigste Verfahren ist dabei zur Zeit das *TNM-System*, welches die lokale Ausbreitung des Primärtumors, die Lymphknotenmetastasierung und hämatogene Fernmetastasen berücksichtigt.

Nicht zu verwechseln mit dem Staging ist das *Grading*, also die Tumorgraduierung, mit der man den Malignitätsgrad eines Tumors auf Grund histologischer und zytologischer Kriterien (Kernatypien, Mitosezahl, Differenzierung) einstuft. Bei der gängigsten Einteilung von Organ- und Weichgewebetumoren bedeutet Grad 1 (G1) gut differenziert, Grad 2 (G2) mäßig differenziert und Grad 3 (G3) schlecht differenziert. Man kann auch einen Grad 4 (G4) für undifferenzierte *anaplastische* (kompletter Verlust der Differenzierung) Tumoren angeben.

3.6 Nomenklatur der Tumoren

Die heute gültige Nomenklatur von Tumoren beruht zum einen auf der Dignität mit Unterscheidung in benigne und maligne Tumoren und zum anderen auf der *phänotypischen Differenzierung*. *Phänotypisch* (das äußere Erscheinungsbild betreffend, das die Summe vieler morphologischer und physiologischer Einzelmerkmale ist), kann man Tumoren in die folgenden Hauptgruppen unterteilen:

1) *Epitheliale Tumoren*; diese Tumoren zeigen phänotypisch Ähnlichkeiten mit epithelialeem Gewebe. Dieses Gewebe, das weder in der Herkunft noch in der Funktion einheitlich ist, bedeckt innere und äußere Oberflächen des Körpers, bildet z. B. den Abschluss der äußeren Oberfläche, also die Körperdecke und kleidet Körperhöhlen und Hohlorgane innen aus. Durch weitere Differenzierung der Epithelien entstehen Drüsengewebe, die für die Synthese und Abgabe von Stoffen (*Sekrete*) zuständig sind. Weiters gibt es Epithelgewebe, die Stoffe aufnehmen und Sinneseindrücke vermitteln können.

2) *Neuroendokrine Tumoren*; sie synthetisieren bestimmte Substanzen, die man *neuroendokrine Marker* nennt. Phänotypisch entsprechen sie im Allgemeinen dem epithelialen Gewebe am besten.

3) *Neuroektodermale Tumoren*; diese Tumoren zeigen glialen oder mesenchymalen Phänotyp. Mit *Gliazellen* bezeichnet man übrigens Zellen des Nervengewebes, die von ihrer Struktur und Funktion nicht zu den Neuronen gehören. Neuroektodermale Tumoren zeichnen sich auch durch die Expression des *glialen*

fibrillären sauren Proteins (GFAP) oder *Vimentin* (ein Element des Zytoskellettes) aus.

4) *Mesenchymale Tumoren*; ihr Phänotyp gleicht den mesenchymalen Geweben. Als Mesenchym bezeichnet man das embryonale Bindegewebe, aus dem sich u. a. Muskelgewebe, Knochen, Knorpelgewebe, Sehnen, Blut oder Fettgewebe entwickeln. Mesenchymale Tumoren kommen hauptsächlich im Binde- und Stützgewebe oder in der Muskulatur vor. Zu den Sonderformen mesenchymaler Tumoren gehören die vom Knochenmark und lymphatischen System ausgehenden Tumoren.

5) *Keimzelltumoren*; dies sind Tumoren, die sich ausschließlich aus Keimzellen entwickeln.

6) *Embryonale Tumoren*; diese Tumoren entwickeln sich ausschließlich aus dem embryonalen Gewebe.

Die letzten zwei Tumoren bilden kleine Gruppen, genauso wie die sogenannten *Mischtumoren*, die durch epitheliale und mesenchymale Phänotypen charakterisiert sind.

3.6.1 Epitheliale Tumoren

Adenome sind benigne epitheliale Tumoren. Ihr Phänotyp entspricht dem epithelialer und drüsiger Gewebe. Normalerweise kommen sie in *endokrinen* Drüsen (Drüsen, die die Hormone ins Gefäßsystem abgeben), *exokrinen* Drüsen (Drüsen, die Sekrete an die innere oder äußere Oberfläche abgeben), in der Leber, der Niere oder in der Schleimhaut des Magen-Darm-Traktes vor.

Ein weiterer benigner epithelialer Tumor ist das *Papillom*. Es geht vom Epithel aus und weist makroskopisch warzenförmige Verdickungen bzw. eine blumenkohlartige Gestalt auf. Hauptsächlich treten sie in ableitenden Harnwegen, Ausführungsgängen der Mamma und anderer Drüsen auf, seltener in der Mundschleimhaut oder dem Magen-Darm-Trakt.

Unter den Vorstufen maligner epithelialer Tumoren (*intraepitheliale Neoplasien*) versteht man unterschiedliche epitheliale *Läsionen* (Störungen). Dabei kommt es zu einem Wachstum atypischer neugebildeter Zellen. In vielen Organen werden diese Veränderungen als *Dysplasie* bezeichnet. Im Fall des Gebärmutterhalses unterteilt man die atypische Proliferation in Abhängigkeit vom Ausmaß in drei Grade (Grad 1-Grad 3). Aus intraepithelialen Neoplasien können sich invasive Tumoren entwickeln. Die Wahrscheinlichkeit dafür steigt mit dem Grad und der Ausdehnung der Dysplasie.

Maligne epitheliale Tumoren, auch *Karzinome* genannt, entstehen in endo- oder exokrinen Drüsen, in Leber, Niere, der Schleimhaut des Magen-Darm-Trakts, im Urogenitaltrakt, dem Respirationstrakt und in der Haut. Je nach Phänotyp kann man sie weiters klassifizieren. Wir wollen darauf aber nicht eingehen.

3.6.2 Neuroendokrine Tumoren

Neuroendokrine Tumoren können sowohl benigne, niedrig maligne als auch hoch maligne sein, als vergleichbares Normalgewebe sind *endokrine Zellen* (Zellen im Epithelverband; gehören zum Hormonsystem) in verschiedenen Organen zu nennen.

3.6.3 Mesenchymale Tumoren

Benigne mesenchymale Tumoren erhalten immer das Suffix -om, während das Präfix die jeweilige Gewebedifferenzierung kennzeichnet.

Maligne mesenchymale Tumoren heißen im Allgemeinen *Sarkome*. Als Präfix wird die zelluläre Differenzierung der Tumorzelle angegeben. Sarkome finden sich vorwiegend im Bereich der Weichgewebe (Weichteile, Gewebe, die nicht aus Knochen bestehen), im Skelett und verschiedenen Organen.

Bei Neoplasien des Knochenmarks werden die Tumorzellen oft ins Blut ausgeschwemmt. Diese Ausschwemmung nennt man *Leukämie*. Auch bei Tumoren des lymphatischen Systems kommt es zu Ausschwemmungen der Tumorzellen, aber auch zu vergrößerten Lymphknoten oder zu einem Befall des Knochenmarks.

3.6.4 Keimzelltumoren

Mit Keimzelltumoren bezeichnet man Tumoren, die ihren Ursprung in den Keimzellen des Hodens haben. In seltenen Fällen gehen sie auch von den Keimzellen des Ovars aus. Oft sind sie maligne. Hierzu zählen die sogenannten *Teratome*.

3.6.5 Embryonale Tumoren

Tumoren der embryonalen Gewebe (*Blastome*) bilden sich vermutlich während der embryonalen Organ- und Gewebereifung und bestehen aus mesenchymalen und epithelialen Komponenten.

3.7 Folgen eines Tumors

Durch die Expansion bzw. die Invasion eines Tumors kommt es zu Funktionsstörungen von Organen und Geweben. Weiters kann ein Tumor zu Kreislaufstörungen oder *Ödemen* (Schwellung des Gewebes durch Einlagerung von Flüssigkeit) im Randbereich des Tumors führen, die die Funktionsstörungen verschlimmern. Im Fall der Leber oder Nieren z. B. führen maligne Tumoren im Endstadium zum Funktionsausfall. Durch Tumornekrosen, die durch unzureichende Gefäßversorgung des Tumors zu Stande kommen, oder Nekrosen des angrenzenden normalen Gewebes kann es zu Blutungen und zur Entstehung von Fisteln kommen. Tumoren der Nieren und des Harntrakts verursachen häufig Blut im Urin, Tumoren des Magen-Darm-Trakts oft Blut im Stuhl und jene des Bronchialsystems führen zu Bluthusten. Dies wiederum führt zu Blutarmut (*Anämie*).

Auch die Abgabe von organspezifischen Hormonen eines benignen oder malignen Tumors kann zu Auswirkungen im Organismus führen. In diesem Zusammenhang seien *Tumormarker* erwähnt, also Substanzen, die von Tumorzellen produziert oder abgegeben werden. Oft kann man sie z. B. im Blut nachweisen.

Die zunehmende Auszehrung eines Patienten bei fortschreitendem Tumorleiden, die sich durch Abmagerung, Kräfteverfall, Appetitlosigkeit, Anämie oder Apathie äußert, nennt man *Kachexie*.

Kapitel 4

Anwendung der Box-Dimension

4.1 Die empirische Box-Dimension

In Kapitel 2.5.2 haben wir bereits erwähnt, dass die Box-Dimension häufig in der Praxis verwendet wird und mit Experimenten geschätzt werden kann. Dabei möchte man z. B. einer physikalischen Menge, die wir so gut es geht durch eine Teilmenge des zwei- oder dreidimensionalen Raumes modellieren bzw. einem Objekt der Natur, welches annähernd fraktale Struktur hat, wie etwa einer Wolke, oder einer physikalischen Approximation eines theoretisch exakten Fraktals, dessen Box-Dimension schwer zu bestimmen ist, einen Wert zuweisen.

Wie kann nun aber die Box-Dimension einer Menge ausgehend von der theoretischen, mathematischen Definition in der Praxis berechnet werden? Um die Idee dahinter zu verstehen, gehen wir von einer nichtleeren beschränkten Menge A des zweidimensionalen Raumes, z. B. einem Teil einer Zeichnung oder einem Foto, aus, deren Box-Dimension wir schätzen wollen und nehmen zusätzlich an, dass diese Menge das power law erfüllt. Es gilt also für $\varepsilon \downarrow 0$

$$\mathcal{N}_\varepsilon(A) \simeq c \cdot \varepsilon^{-s}$$

mit einer positiven Konstante c und einer nichtnegativen Konstante s . Diese Beziehung ist äquivalent dazu, dass

$$\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A)) \simeq \ln(c) + s \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

gilt, $\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))$ und $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ also asymptotisch affin abhängig sind.

Wir geben uns nun ein festes $\varepsilon > 0$ vor, überdecken A händisch mit Mengen der Art wie in Satz 2.51 (je nachdem welche Art von Mengen sich für die Struktur des Bildes anbietet), beispielsweise mit abgeschlossenen Kugeln vom Durchmesser ε und zählen ihre Anzahl $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$, die wir in einer Tabelle notieren. Im nächsten Schritt wiederholen wir diesen Vorgang, wobei wir den Wert von ε verkleinern, z. B. halbieren, und verfahren so weiter bis ε „sehr klein“ ist.

Sehr klein bedeutet, dass wir so lange mit diesem Verfahren fortschreiten, bis es uns nicht mehr möglich ist, A händisch mit ε -Kugeln zu überdecken. Die endliche Menge der Werte, die ε dabei annimmt, bezeichnen wir mit \mathcal{E} . Da die Box-Dimension der logarithmische Anteil dafür ist, wie stark $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ wächst, tragen wir nun die Werte von $\frac{1}{\varepsilon}$ auf der x -Achse und die zugehörigen „Funktionswerte“ $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ auf der y -Achse in einem doppeltlogarithmischen Diagramm auf, d. h. nicht die Werte selbst, sondern der Logarithmus dieser Werte wird in dieses Diagramm eingetragen. Durch diese Punkte versuchen wir eine Ausgleichsgerade zu legen, also eine Gerade

$$y(\ln(\frac{1}{\varepsilon})) = k \cdot \ln(\frac{1}{\varepsilon}) + d$$

mit $k, d \in \mathbb{R}$ die die Punktepaare $(\ln(\frac{1}{\varepsilon}); \ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A)))_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ so gut wie möglich approximiert, indem sie die Fehlerquadrate

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} (\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A)) - y(\ln(\frac{1}{\varepsilon})))^2$$

minimiert, was man als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet. Der Anstieg dieser Gerade approximiert dann nach Definition 2.52 die Box-Dimension der Menge A mehr oder weniger gut. Nun sprechen wir von der *empirischen Box-Dimension* von A und schreiben $\dim_{\mathcal{B}_{emp}}(A)$.

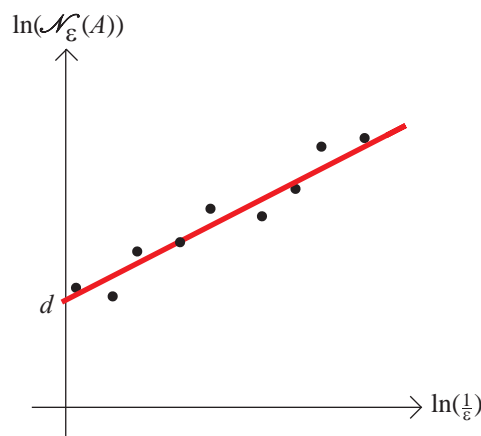


Abbildung 4.1: Berechnung der empirischen Box-Dimension einer Menge A .

In der Literatur wird die Ausgleichsgerade im Zusammenhang mit der empirischen Box-Dimension oft als Regressionsgerade bezeichnet. Aus mathematischer Sicht ist das aber nicht ganz präzise. Die Regressionsanalyse dient, wie wir wissen, als statistisches Hilfsmittel, um die Beziehung zwischen einer oder mehreren stochastisch unabhängigen reellen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N $N \in \mathbb{N}$ und einer reellen abhängigen Zufallsvariable Y zu quantifizieren, wir wollen also, gehen wir o. B. d. A. von $N = 1$ aus, die Regressionsfunktion $r(x) := \mathbb{E}(Y|X = x)$ schätzen. Dazu nehmen wir an, dass r zu einer bestimmten Klasse von Funktionen (Gerade, Parabel, logarithmische Funktion, Exponentialfunktion etc.)

gehört und versuchen die entsprechenden Parameter mit Hilfe von n Beobachtungen (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$ zu schätzen. Geht man von einem linearen Zusammenhang der beiden Zufallsvariablen aus, spricht man von linearer Regression, die zu bestimmende Gerade ist die Regressionsgerade. Um r zu schätzen, gibt es bekanntlich mehrere Methoden, eine sehr bekannte ist die der kleinsten Quadrate. Wir wollen kurz daran erinnern, dass einige Voraussetzungen erfüllt sein müssen, wenn man mit der Regressionsanalyse arbeitet. Im Gegensatz dazu wissen wir bei der Schätzung der empirischen Box-Dimension im obigen Fall, in welcher Beziehung $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ und $\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))$ zueinander stehen, d. h. wir wissen, dass sie für $\varepsilon \downarrow 0$ annähernd linear zusammenhängen und wollen nur mehr die Steigung jener Gerade schätzen, die diese Werte approximiert. Im Gegensatz zum linearen Regressionsmodell, müssen zur Bestimmung der Ausgleichsgerade keine Voraussetzungen erfüllt sein.

Die gerade beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung der empirischen Box-Dimension kann offensichtlich leicht automatisiert und die Box-Dimension einer Menge somit mit Hilfe des Computers geschätzt werden. Dabei gehen die in diesem Zusammenhang verwendeten Programme im Allgemeinen wie oben beschrieben vor und überdecken die Menge - falls wir von einer zweidimensionalen ausgehen - mit einem Gitter der Maschenweite ε , die in jedem weiteren Schritt normalerweise halbiert wird. Für dreidimensionale Objekte werden entsprechend Würfel der Seitenlänge ε verwendet. Es sei erwähnt, dass diese Programme meistens auf der x -Achse nicht die $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ -Werte für $\varepsilon \in \mathcal{E}$, sondern die $\ln(\varepsilon)$ -Werte auftragen, sodass die empirische Box-Dimension dem negativen Wert der Steigung der Ausgleichsgerade entspricht.

Im Allgemeinen ist die Modellbildung, die Box-Dimension betreffend, leider nicht so einfach wie im oben demonstrierten Fall. Da die Box-Dimension für *alle* nichtleeren beschränkten Mengen A eines metrischen Raumes - (\mathbb{R}^2, d_2) oder (\mathbb{R}^3, d_2) in der Praxis - definiert ist, kann man nicht annehmen, dass A das power law bzw. das power law für alle ε erfüllt, auch wenn ε und $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ trivialerweise in *irgendeiner* Form zusammenhängen. Betrachtet man z. B. Objekte der Biologie, die eine fraktale Struktur aufweisen, so sind dies nur approximative Fraktale und haben daher im Gegensatz zu idealen Fraktalen wie etwa der Kochkurve nur einen beschränkten Bereich, in dem sie selbstähnlich sind bzw. in dem sie das power law erfüllen. Auch bei der britischen Küstenlinie, deren Länge mit Verkleinerung des ε -Wertes wächst, sodass keine exakte Längenangabe dieses stochastisch selbstähnlichen Fraktals existiert (siehe [35], Seite 218), ist für ε gegen 0 das power law verletzt (siehe [20], Seite 298). Gehen wir also von beliebigen Mengen A aus, so könnte es sein, dass die Punktepaare $(\ln(\frac{1}{\varepsilon}); \ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A)))_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$, im log-log-Diagramm am besten durch eine Parabel, eine konvexe Funktion oder den natürlichen Logarithmus approximiert werden. In diesem Fall könnte man noch hoffen, dass sich die entsprechenden Kurven, die die Wertepaare bestmöglich approximieren, an Asymptoten annähern und man die Box-Dimension schätzen kann, indem man versucht, Tangenten an die Kurven zu legen. Weiters könnte es sein, dass die untere und obere Box-Dimension einer Menge nicht übereinstimmen. In diesem Fall würden die Werte für $\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))$ für die $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ -Werte schwanken. Es könnte auch passieren, dass die Wertepaare $(\ln(\frac{1}{\varepsilon}); \ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A)))_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ keine offensichtliche Beziehung im zwei-

dimensionalen Diagramm erkennen lassen, also ganz verstreut liegen oder dass Ausreißer auftreten. Wie geht man nun aber vor, wenn kein linearer Zusammenhang zwischen $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ und $\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))$ besteht?

Ein weiteres Problem, das sich beim Arbeiten mit der empirischen Box-Dimension ergibt, ist jenes, dass man nur endlich viele ε -Werte zur Verfügung hat. So kann die Maschenbreite der Gitter, die das entsprechende Programm über die Menge A legt, nicht kleiner als 1 Pixel sein und sollte sinnvollerweise nicht größer sein, als A selbst, da die Anzahl der Kästchen, die die Menge überdecken in diesem Fall und auch für größere Maschenweiten 1 ist. Somit kann der Grenzwert von $\frac{\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gar nicht gebildet werden, die exakte Box-Dimension für die Menge A kann empirisch nicht bestimmt werden. Wir müssen uns also darüber im Klaren sein, dass die empirische Box-Dimension nur eine mehr oder weniger gute Schätzung der tatsächlichen, theoretischen Box-Dimension einer Menge ist, durch das obige Verfahren viel Information verloren geht und der empirische Box-Dimensionswert dadurch fehlerbehaftet ist. Die Frage ist nun, wie man die obere und untere Schranke für die ε -Werte „sinnvoll“ wählen kann, also so, dass die Schätzung der Box-Dimension der Menge möglichst gut ist. In manchen Fällen sind diese Schranken klar. Geht man z. B. von einem Tumor aus, so sind die für seine Struktur wichtigen Elemente, nämlich die Zellen, bekannt und es ist anzunehmen, dass unterhalb der Zellgröße die fraktale Struktur des Gewebes verschwinden wird, sodass man die Zellgröße als unteren ε -Wert in Betracht ziehen wird. Oft sind diese Schranken aber nicht so einfach zu bestimmen. Generell kann man sagen, dass sich die Laufzeit des Programmes mit der Größe von \mathcal{E} erhöht.

Um die beiden angesprochenen Probleme bei der Berechnung der empirischen Box-Dimension gleichzeitig in den Griff zu bekommen, geht man in der Praxis oft so vor, dass man nur jene ε -Bereiche betrachtet bzw. in \mathcal{E} aufnimmt, für die annähernd ein linearer Zusammenhang von $\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))$ und $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ beobachtet werden kann. Somit hat man eine untere und obere Schranke für die Werte aus \mathcal{E} gefunden und kann die Box-Dimension als Anstieg der die Punktepaare gut annähernden Ausgleichsgeraden schätzen. Natürlich geht auch diese Vorgehensweise mit einem Informationsverlust einher. Lässt sich kein Bereich finden, in dem ein linearer Zusammenhang beobachtet werden kann, ist es nicht sinnvoll die empirische Box-Dimension zu berechnen.

Um die gerade geschilderte Methode in der Praxis umzusetzen, gehen die Programme unterschiedlich vor. Manche verwenden einen Algorithmus, der die obere und untere Schranke der ε -Werte berechnet, also ein bestimmtes \mathcal{E} vorgibt, sodass die Wertepaare $(\ln(\frac{1}{\varepsilon}); \ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A)))$ mit $\varepsilon \in \mathcal{E}$ annähernd linear zusammenhängen. Bei anderen Programmen stellt man zunächst selbst eine untere und obere Schranke für ε ein - oft arbeitet man dabei mit Pixeln, die untere Schranke ist dann 1 Pixel - und das Programm zeichnet dann einen Plot mit den $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ - bzw. $\ln(\mathcal{N}_\varepsilon(A))$ -Werten auf der x - bzw. der y -Achse für alle ε in diesem Bereich auf, sowie eine Ausgleichsgerade. Der Benutzer kann nun einschreiten, falls keine lineare Beziehung zwischen den Punktepaaren vorliegt und jenen Bereich für die ε -Werte selbst auswählen, wo das erwünschte Verhalten vorliegt. Erstere Methode hat den Vorteil, dass \mathcal{E} benutzerunabhängig bestimmt wird -

unterschiedliche Benutzer können keine unterschiedlich großen ε -Bereiche angeben - wodurch die Ergebnisse der empirischen Box-Dimensionswerte objektiver und besser vergleichbar sind, andererseits hat der Benutzer im Gegensatz zur zweiten Methode keine Möglichkeit in den Vorgang des Programmes einzugreifen und es ist aufwändig, solche Algorithmen zu programmieren.

Ein anderer Ansatz ist, *alle* möglichen Daten im log-log-Plot zu betrachten und nicht nur jenen Bereich, in dem eine Gerade beobachtet werden kann, da ja alle Daten reale Daten des Objektes sind und in ihrer Gesamtheit die Geometrie des Objektes beschreiben, weshalb man keine vernachlässigen sollte. Modelle, die in diesem Zusammenhang zu erwähnen sind, sind das asymptotisch fraktale Modell von Rigaut oder die log-logistische Annäherung (siehe [36], Seite 241-242).

Es sei noch darauf hingewiesen, dass zum jetzigen Zeitpunkt keine allgemein akzeptierte eindeutige Art und Weise existiert, wie man einer Menge experimenteller Daten ihre empirische Box-Dimension zuordnet. Die Methoden, Programme und Algorithmen, die zu ihrer Schätzung verwendet werden, sind vielfältig und verschieden, sodass Ergebnisse oder Werte aus unterschiedlichen Publikationen, Büchern oder Studien *nicht* oder nur *schwer* miteinander vergleichbar oder bei fragwürdigen Methoden bedingt aussagekräftig sind.

Nicht nur die Programme, die verwendet werden, können für unterschiedliche Box-Dimensionen verantwortlich sein, sondern auch die digitalisierten Bilder selbst, die man dem Programm übergibt. Diese Bilder können klarerweise nicht unendlich kleine Details darstellen, da dies durch ihre Pixel-Auflösung limitiert ist. So können sich z. B. die Auflösung oder, im Falle, dass wir die Konturen eines Objektes messen, die Dicke der Konturen des Objektes bzw. die Häufigkeit mit der eine Kontur unterbrochen ist, auf die Höhe des Wertes der empirischen Box-Dimension auswirken.

Wendet man jedoch ein und dieselbe Methode auf eine Reihe von Bildern an, die alle die gleiche Auflösung haben bzw. gleich aufgebaut sind, so kann die empirische Box-Dimension ein wertvolles Hilfsmittel sein, um etwas über die Strukturen der Objekte auszusagen bzw. um diese miteinander zu vergleichen.

4.2 Anwendung der Box-Dimension auf Tumorzellen

Wie bereits angeschnitten, haben viele natürliche Objekte wie Organe oder Zellen, die wir als nichtleere beschränkte Teilmengen des zwei- oder dreidimensionalen Raumes auffassen können, annähernd fraktale Struktur und können somit besser mit fraktaler als mit klassischer Geometrie beschrieben werden, so auch Tumoren. Betrachtet man etwa einen Tumor, so kann man seine Länge abmessen und seine Gestalt - z. B. seine unregelmäßige Form - verbal beschreiben. Die Diagnose, ob ein Patient an einem Tumor leidet oder nicht, reduziert sich im Allgemeinen, abgesehen davon, ob die Gewebeprobe repräsentativ ist, auf die Frage, ob die morphologischen Eigenschaften des Gewebes charakteristisch für einen Tumor sind, wodurch das medizinische Urteil nicht objektiv ist. Mit

der empirischen Box-Dimension kann man dem Objekt einen, vom subjektiven Eindruck des Betrachters unabhängigen, Zahlenwert zuweisen, der dessen Komplexität misst. Verformungen von Zellen oder Geweben verursachen im Allgemeinen einen höheren Grad an Unregelmäßigkeiten, was sich in der Erhöhung der fraktalen Dimension widerspiegeln sollte. Es gibt Beispiele wo dies auch tatsächlich der Fall ist, den Grad der Bösartigkeit eines Tumors anhand seiner Box-Dimension abzulesen, ist aber umstritten, nicht zuletzt deshalb, weil es Objekte mit selber empirischer Box-Dimension gibt, deren Strukturen gänzlich verschieden sind. So unterschieden sich ein Neuron, das einen glatten Rand und viele Verästelungen und ein anderes, das einen rauhen Rand und wenig Verzweigungen aufwies, bei einer Untersuchung bezüglich ihrer fraktalen Dimension nicht (siehe [36], Seite 177). Die Box-Dimension als zusätzlichen Parameter bei der Analyse von Tumoren aufzunehmen, ist aber in vielen Fällen sinnvoll und die fraktale Geometrie generell ein nützliches Hilfsmittel in der Pathologie, aber auch Kardiologie oder Radiologie. So macht sie es möglich, das Wachstum eines Tumors zu modellieren und zu simulieren oder die Analyse und Beurteilung von Mammografien zu verbessern bzw. objektiver zu machen.

Es stellt sich die Frage, wie sich die fraktale Dimension von Tumoren, die ja dreidimensionale approximative Fraktale sind, unter zweidimensionalen Schnitten, wie sie Dünnschnitte (siehe unten) darstellen, verhält. Im Allgemeinen sind Schnitte von Fraktalen keine Fraktale, Satz 2.75 hat aber gezeigt, dass man unter bestimmten Voraussetzungen bezüglich der Hausdorff-Dimension für fast alle zweidimensionalen Schnitte eines Tumors eine Aussage treffen kann.

Wir werden uns in den folgenden Abschnitten ausschließlich mit der empirischen Box-Dimension von Zellkernen normaler aber auch atypischer Gewebe beschäftigen, d. h. mit den zweidimensionalen Konturen der Zellkerne, und diese Werte vergleichen. Dabei sei erwähnt, dass trotz der unregelmäßigen Form von Zellkernen die Kernmembran bei hoher Auflösung relativ glatt wirkt. Die Idee ist nicht neu und erscheint sinnvoll, da die Zellkerne von malignen Tumoren unterschiedliche Größe und Gestalt aufweisen und anders als normale Zellkerne aussehen, weshalb zu vermuten ist, dass sich dies auch in der Box-Dimension widerspiegelt. Man könnte nun vermuten, dass die Unregelmäßigkeit der Tumorzellen eine höhere Box-Dimension bewirkt, was auch in einigen Arbeiten nachgewiesen wurde. Andere Untersuchungen haben aber z. B. gezeigt, dass die fraktale Dimension der Membran von normalen Lymphozyten größer war als jene von akuten lymphatischen Leukämiezellen, die eine Proliferation durchmachten (siehe [36], Seite 212).

Um die Box-Dimension der Zellkerne zu untersuchen, geht man von *Dünnschnitten* aus, da man auf ihnen die zellulären Strukturen des zu untersuchenden Gewebes sehen kann. Um Dünnschnitte zu erhalten, geht man in mehreren Schritten vor. Nachdem man das Gewebe vom Patienten entfernt hat, versucht man es durch Erhitzen, Einfrieren oder durch das Einbringen in Lösungen (z. B. Formalin) vor dem Eintreten des Zelltodes oder vor Fäulnis zu bewahren, damit die Zellstrukturen möglichst gut erhalten bleiben. Danach wird es entwässert und in einen Block, z. B. aus Paraffin, ausgegossen, der gekühlt wird. Mit einem *Mikrotom* werden mikrometerdünne Schnitte gemacht ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$), die auf

einen Objektträger aufgebracht werden. Schließlich färbt man die Schnitte noch ein. Im Allgemeinen verwendet man dabei die Hämatoxylin-Eosin-Färbung, mit der man auch die Zellkerne gut erkennen kann.

Wir wollen nun das Ergebnis einer Publikation präsentieren, die Aussagen über die empirische Box-Dimension normaler und atypischer Zellkerne macht (siehe auch [37]):

4.2.1 Beispiel: Dysplasien des Gebärmutterhalsgewebes

Untersucht wurde der Zusammenhang zwischen dem Grad der Dysplasie von Gebärmutterhalsgewebe (zervikale intraepitheliale Neoplasie) und der Box-Dimension der entsprechenden Zellkerne.

Vorgehensweise und Ergebnisse:

Es wurden vier Gruppen von Patientinnen mit jeweils zehn Testpersonen pro Gruppe untersucht. In CIN1, CIN2 bzw. CIN3 wurden jene Patientinnen zusammengefasst, deren Gebärmutterhalsgewebe leichte, mittelmäßige bzw. schwere Dysplasien aufwiesen, mit der Kontrolle wurden jene Probandinnen bezeichnet, bei denen keine Dysplasie vorlag.

Von jeder der 40 Patientinnen wurden insgesamt 0.12 mm^2 Gewebe aus drei Bereichen des Epithels entnommen und Dünnschnitte erzeugt. Das dadurch gewonnene mikroskopische Bild wurde mittels digitaler Kamera, die auf einem Mikroskop fixiert wurde, digitalisiert. Damit erhielt man 600-fach vergrößerte, 2312×1740 Pixel große Bilder. Um die Zellkernkonturen sichtbar zu machen, bediente man sich eines Algorithmus (implementiert in KS 300 (ein Bildverarbeitungsprogramm)) und extrahierte 300×300 Pixel große Bilder, die jeweils nur die Kontur eines Zellkerns enthielten, wobei nur vollständige und sich nicht überlappende Zellkerne aufgenommen wurden. Danach entfernte man noch nichtnukleare Strukturen. Insgesamt wurden pro Patientin 30 Zellkerne auf diese Weise digitalisiert, sodass insgesamt 1200 Nuclei zur Untersuchung zur Verfügung standen.

Für jedes der Bilder wurde nun mit einem Box-Counting-Algorithmus die Box-Dimension berechnet, wobei jedes Bild mit insgesamt 150 Gittern mit Maschenweite $0.2 \mu\text{m}$ - $30 \mu\text{m}$ überdeckt wurde. Für jede Gitterbreite ε wurde die Anzahl der die Zellkernkontur schneidenden Kästchen gezählt, in einem doppeltlogarithmischen Diagramm aufgezeichnet und die Steigung der Gerade durch diese Punkte mittels „linearer Regression“ berechnet. Um die Zuverlässigkeit des Programmes zu testen, wurden Objekte mit bekannter Box-Dimension untersucht, wie eine Gerade oder eine Kochkurve. Der mittlere Fehler der empirisch bestimmten Box-Dimensionswerte betrug hierbei 0.001.

Nun wurde für jede der vier Gruppen aus den empirisch ermittelten Daten der Box-Dimension der Mittelwert (arithmetisches Mittel) sowie der Standardfehler für den Mittelwert berechnet. Mit unserer Notation:

$$\text{Kontrolle : } \dim_{\mathcal{B}_{emp}} = 1.02 \pm 0.004$$

$$\text{CIN1 : } \dim_{\mathcal{B}_{emp}} = 1.32 \pm 0.01$$

$$\text{CIN2 : } \dim_{\mathcal{B}_{emp}} = 1.37 \pm 0.009$$

$$\text{CIN3 : } \dim_{\mathcal{B}_{emp}} = 1.40 \pm 0.008$$

Um die Unterschiede zwischen den Gruppen bzw. zwischen Gruppe eins bis drei und der Kontrollgruppe zu untersuchen, bediente man sich einer Varianzanalyse aus dem Package SAS und stellte fest, dass sie statistisch signifikant waren mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner als 0.05. Die Schlussfolgerung daraus war, dass der Wert der Box-Dimension mit dem Grad der Dysplasie zunimmt und die Unterschiede zwischen den Gruppen zwar klein aber signifikant sind.

Kritik:

Es sei bemerkt, dass die Auflösung der Bilder, die untersucht wurden, nicht besonders gut war. Weiters geht aus der Arbeit nicht hervor, *welcher* Box-Counting-Algorithmus verwendet wurde. Diese Angabe wäre wichtig, um künftige Auswertungen bzw. Box-Dimensionswerte mit jenen der Publikation vergleichen zu können. Auch die Probleme, die in Zusammenhang mit der empirischen Box-Dimension auftreten können, da die Ausgleichsgerade mitunter die entsprechenden Punktepaare nicht gut approximieren muss, wurden nicht behandelt. Nachdem jeder der Zellkerne mit 150 Gittern mit bestimmten vorgegebenen Maschenweiten überdeckt wurde, ist anzunehmen, dass der Maschenweitenbereich händisch einzustellen war. Es drängt sich die Frage auf, ob es sinnvoll ist, bei *allen* Bildern denselben Wertebereich für die Gitterbreite zu wählen. Natürlich wird dadurch sehr viel Zeit eingespart, aber der Benutzer hat keine Möglichkeit einzuschreiten, falls die Gerade die Punktepaare schlecht approximiert und somit muss man mitunter mit großen Fehlern der Box-Dimensionswerte rechnen.

Fraglich ist auch, ob es sinnvoll ist, den Mittelwert der Box-Dimensionswerte für die vier Gruppen zu berechnen, da sich die Mittelwerte kaum unterscheiden und anzunehmen ist, dass sich in jeder der Gruppen eins bis drei einige Zellen befinden, deren Struktur vom Gesamtbild abweicht (so könnte es z. B. passieren, dass ein Dünnschnitt gesunde und atypische Zellen, die im Körper natürlich nebeneinander liegen, beinhaltet), was auch die Box-Dimension beeinflusst und somit den Durchschnittswert stark verfälschen könnte. Weiters geht nicht klar hervor, wie die Varianzanalyse genau zum Einsatz gekommen ist, d. h. was genau getestet wurde, welche Nullhypothese z. B. aufgestellt wurde, oder ob die Voraussetzungen, die ihre Anwendung rechtfertigen würden, erfüllt waren. So wird bei der Varianzanalyse oft vorausgesetzt, dass die Stichprobenvariablen normalverteilt sind. Dass dies bei dieser Untersuchung der Fall ist, ist ziemlich sicher auszuschließen.

4.2.2 Toleranzintervalle

Mit Toleranzintervallen kann man Grenzen angeben, innerhalb derer ein bestimmter Anteil der Grundgesamtheit mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ erwartet werden kann. Bevor wir uns mit diesen Intervallen beschäftigen, wollen wir einige Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der angewandten Statistik wiederholen.

Definition 4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, W)$ ein *Wahrscheinlichkeitsraum*, d. h. Ω sei die Menge aller möglichen Versuchsausgänge ω eines Experiments, die *Grundgesamtheit*, \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf Ω und W ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathfrak{A}) und (Ω', \mathfrak{A}') ein *Ereignisraum*, d. h. Ω' sei eine Grundgesamtheit und \mathfrak{A}' eine σ -Algebra auf Ω' .

Eine Zufallsvariable

$$X : (\Omega, \mathfrak{A}, W) \longrightarrow (\Omega', \mathfrak{A}')$$

heißt *diskret*, falls $X(\Omega)$ höchstens abzählbar unendlich und für alle $x \in X(\Omega)$ $\{x\} \in \mathfrak{A}'$ ist.

Sei

$$X : (\Omega, \mathfrak{A}, W) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1) := (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$$

eine Zufallsvariable und \mathbb{P} die Verteilung von X . Dann heißt X bzw. \mathbb{P} *absolut stetig*, falls eine nichtnegative Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, für die für alle a, b mit $-\infty < a < b < \infty$

$$\mathbb{P}([a, b]) = W(\omega : a < X(\omega) \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

gilt. f nennt man die *Dichte von X* bzw. \mathbb{P} .

Sei X eine *reelle Zufallsvariable*, d. h. $\Omega' \subseteq \mathbb{R}$ und \mathbb{P} die Verteilung von X . Dann bezeichnet

$$F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]) = W(\omega : X(\omega) \leq x)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ die *Verteilungsfunktion von X* bzw. \mathbb{P} .

Definition 4.2. Sei X eine reelle Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F und seien x_1, \dots, x_n $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Realisationen von X (eine *Stichprobe*). Diese Stichprobe fassen wir als Werte von n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n auf, wobei gilt:

1. X_1, \dots, X_n sind unabhängig;
2. Alle X_i $1 \leq i \leq n$ sind identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion F .

X_1, \dots, X_n heißen dann *unabhängige Stichprobenvariablen*.

Die aus diesen Stichprobenvariablen neu gebildete messbare Funktion $(x_1, \dots, x_n) \mapsto T(x_1, \dots, x_n)$ wird *Stichprobenfunktionen* und $T := T(X_1, \dots, X_n)$ *Statistik* genannt.

Definition 4.3. Seien X_1, \dots, X_n mit $n \in \mathbb{N}$ unabhängige und identisch verteilte absolut stetige Zufallsvariablen, F die Verteilungsfunktion der X_i $i = 1, \dots, n$, und x_1, \dots, x_n eine Realisation von X_1, \dots, X_n . Ordnet man die Beobachtungen x_1, \dots, x_n der Größe nach und fasst sie in einem Vektor zusammen, so erhalten wir den Wert $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ der sogenannten *geordneten Statistik*. $x_{(j)}$ für $1 \leq j \leq n$ ist der Wert der sogenannten *j -ten geordneten Statistik* $X_{(j)}$.

Definition 4.4. Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}, W) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine absolut stetige Zufallsvariable mit Dichte f , einer streng monotonen Verteilungsfunktion F und der Verteilung \mathbb{P} . Weiters seien die Statistiken $T_1 := T_1(X_1, \dots, X_n)$ und

$T_2 := T_2(X_1, \dots, X_n)$ der unabhängigen Stichprobenvariablen X_1, \dots, X_n mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gibt

$$W([T_1 < X < T_2]) := W(\omega : T_1 < X(\omega) < T_2) = \int_{T_1}^{T_2} f(t) dt$$

die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable X einen Wert im Intervall $[T_1, T_2]$ annimmt und T_1 bzw. T_2 heißen *Toleranzgrenzen für X* , das Intervall $[T_1, T_2]$ das *Toleranzintervall* oder der *Toleranzbereich für X* .

Bezeichnen wir das zu den Zufallsvariablen $W([T_1 < X < T_2])$ gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß mit W_T , so wollen wir nun Statistiken T_1 und T_2 finden, sodass für vorgegebenes $0 < \beta < 1$ und $1 - \alpha$ mit $0 < \alpha < 1$

$$W_T([W([T_1 < X < T_2]) \geq \beta]) = 1 - \alpha \quad (4.1)$$

gilt, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwischen T_1 und T_2 der Anteil der Grundgesamtheit größer oder gleich β ist, $1 - \alpha$ beträgt. α bezeichnet man dabei als die *Irrtumswahrscheinlichkeit*, $1 - \alpha$ als *Sicherheits- oder Vertrauenswahrscheinlichkeit* und β als *minimale Trefferwahrscheinlichkeit*.

Geht man von einer normalverteilten Zufallsvariable X aus, so kann man, sowohl im Fall, dass die Varianz der Normalverteilung bekannt, als auch im Fall, dass sie unbekannt ist, die Toleranzgrenzen für festes n, β und α angeben (siehe dazu [38], Seite 163-164).

Da wir aber von beliebigen absolut stetigen Zufallsvariablen ausgegangen sind - man spricht in diesem Zusammenhang auch von *nichtparametrischen Toleranzintervallen* - wollen wir T_1 und T_2 für diesen allgemeinen Fall bestimmen. Dazu wählen wir für $1 \leq k < l \leq n$ $T_1 := X_{(k)}$ und $T_2 := X_{(l)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} W([X_{(k)} < X < X_{(l)}]) &= W([X < X_{(l)}]) - W([X < X_{(k)}]) = \\ &= F(X_{(l)}) - F(X_{(k)}) = Y_{(l)} - Y_{(k)}, \end{aligned}$$

wobei $Y_{(l)}$ und $Y_{(k)}$ die l -te bzw. k -te geordnete Statistik einer über $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariable sind.

Somit ist Gleichung (4.1) äquivalent zu

$$W_T([Y_{(l)} - Y_{(k)} \geq \beta]) = 1 - \alpha.$$

Mit der Transformation $U := Y_{(l)} - Y_{(k)}$ und $V := Y_{(k)}$ erhalten wir wiederum zwei neue Zufallsvariablen. Ihre gemeinsame Dichte kann nach der Jacobi-Methode berechnet werden - wir gehen darauf nicht ein und verweisen auf [39], Seite 337-338 - und mit Integration erhalten wir die Dichte von U :

$$f(u) = (l - k) \cdot \binom{n}{l - k} \cdot u^{l-k-1} \cdot (1 - u)^{n-l+k}.$$

Somit ist U betaverteilt mit den Parametern $(l - k)$ und $(n - l + k + 1)$. Es folgt

$$W_T([U \geq \beta]) = \int_{\beta}^1 (l - k) \cdot \binom{n}{l - k} \cdot u^{l-k-1} \cdot (1 - u)^{n-l+k} du =$$

$$= 1 - \sum_{i=l-k}^n \binom{n}{i} \cdot \beta^i \cdot (1-\beta)^{n-i} = \sum_{i=0}^{l-k-1} \binom{n}{i} \cdot \beta^i \cdot (1-\beta)^{n-i},$$

also gilt $W_T([U \geq \beta]) = F(l-k-1)$, wobei F die Verteilungsfunktion einer binomialverteilten Zufallsvariable mit den Parametern n und β ist. Also ist (4.1) äquivalent zu

$$F(l-k-1) = 1 - \alpha$$

und wir können k und l leicht berechnen, da wir unser Problem, unabhängig von der Verteilung der Zufallsvariable von der wir ausgegangen sind, auf die Binomialverteilung zurückgeführt haben. Dabei sind weder Existenz noch Eindeutigkeit einer Lösung garantiert.

4.2.3 Fallstudie: Mammakarzinom

Die weibliche *Mamma* ist eine exokrine Drüse, die der Milchsynthese zur Versorgung der Neugeborenen dient und deren Epithel sich ständig erneuert. Das *Mammakarzinom* (Brustkrebs) ist die bedeutendste Erkrankung dieser Drüse. In den letzten Jahren ist die Anzahl der Neuerkrankungen in den westlichen Industrieländern gestiegen und etwa jede achte Frau in diesen Ländern erkrankt einmal im Leben daran.

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob bzw. wie sich die empirische Box-Dimension der Zellkernkonturen verändert, wenn wir verschiedene Malignitätsgrade von Mammakarzinomen betrachten und inwieweit dies praktisch durchführbar ist.

Das Programm, das wir zur Berechnung der empirischen Box-Dimension verwenden werden, ist das kostenlos zur Verfügung stehende IQM (Interactive Quantitative Morphology) für Windows in seiner neuesten Version (IQM 1.16). Es ist ein Bildverarbeitungsprogramm und wird mit IDL (IDL 6.4, Windows 32 Bit) kompiliert.

Um die Zellkerne untersuchen zu können, betrachten wir mehrere Dünnschnitte von normalem Gewebe der Mamma, aber auch Dünnschnitte von Patientinnen mit Mammakarzinomen, deren Malignitätsgrad als G1, G2 oder G3 eingestuft wurde, unter einem Lichtmikroskop in 200-facher Vergrößerung und fotografieren jene Bereiche, in denen wir für die jeweilige Tumorggraduierung typische Zellkerne vorfinden. Wir erhalten farbige 24 Bit tif-Dateien mit einer Auflösung von

2580×1944 Pixel, was einer guten Qualität der Dünnschnittbilder entspricht. Zuerst wandeln wir die digitalisierten Dünnschnitte mittels IQM in 8 Bit Graustufen-Bilder um. Um die Zellkernkonturen auf diesen Bildern nun sichtbar zu machen, wählen wir im Menü „Process“ und hierbei wiederum die Option „Filter“ mit der Einstellung „Roberts“. Wir bearbeiten diese Bilder weiters in IQM mit Threshold, bis die Zellkernkonturen als weiße Konturen auf schwarzem Hintergrund erscheinen und entfernen Strukturen, die nicht der Zellkernkontur angehören. Danach schneiden wir einzelne gut erhaltene Zellkerne aus, wobei wir darauf achten, dass die Konturen ca. 80 % des Bildes ausfüllen, damit wir

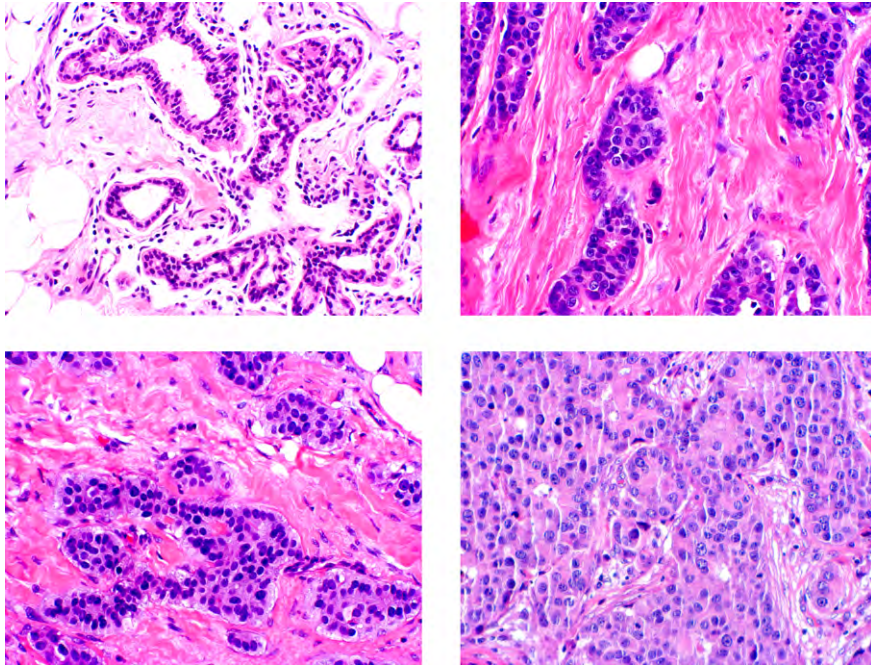


Abbildung 4.2: *Dünnschnitt von Normalgewebe der Mamma (links oben), eines Mammakarzinoms des Malignitätsgrades G1 (rechts oben), G2 (links unten) und G3 (rechts unten).*

ihre Box-Dimension sinnvoll auswerten können.

Auf diese Art und Weise erzeugen wir sowohl für das normale Gewebe, als auch für die Gewebe mit Malignitätsgrad G1-G3 jeweils 100 digitalisierte Bilder von Zellkernen d. h. von ihren Konturen. Insgesamt stehen also 400 Zellkerne zur Untersuchung zur Verfügung.

Um die empirische Box-Dimension dieser Zellkernkonturen zu berechnen, muss man in IQM unter „Fractal“ die Option „Box Counting Dimension“ wählen. Der Bereich der Maschenweite der Gitter ist händisch einzustellen. Das Minimum ist dabei ein Pixel, das Maximum hängt von der Größe des Bildes ab. Wichtig ist, dass wir mit binären Bildern arbeiten und dass jene Struktur, deren Box-Dimension wir messen wollen, weiß auf schwarzem Hintergrund dargestellt ist, da das Programm die Box-Dimension der weißen Teile des Bildes misst.

Nun berechnen wir von jeweils ca. 20 Zellkernen pro Gruppe die Box-Dimension, um zu sehen wie das Programm arbeitet. Dabei kontrollieren wir für jedes Bild einzeln, ob die Ausgleichsgerade, die das Programm zeichnet, die entsprechenden Punktpaare gut approximiert. Die Box-Dimensionen, die wir erhalten, unterscheiden sich kaum voneinander und lassen in keiner der Gruppen eine Tendenz zu höheren oder niedrigeren Werten erkennen. Dieses Ergebnis ist wenig überraschend und selbst wenn wir Unterschiede beobachten könnten, so wären

sie nicht aussagekräftig, denn betrachtet man die Auflösung der Zellkerne, die 50×42 Pixel beträgt, so sieht man schnell, dass die Zellkernkonturen sehr gepixelt, also sehr grob aufgelöst, sind und man keine feinen Strukturen mehr erkennen kann, was wichtig wäre, um die Box-Dimensionswerte der vier Gruppen vergleichen zu können.

Man könnte nun vermuten, dass man dieses Problem umgehen könnte, wenn man die Dünnschnitte unter dem Mikroskop stärker vergrößern würde. Wir haben aber bewusst nur eine 200-fache und keine stärkere Vergrößerung gewählt, da ansonsten Details mit dem Lichtmikroskop nicht mehr gut sichtbar sind und somit Information verloren geht. Natürlich könnte man auch die Vergrößerung der Dünnschnitte bei 200 belassen und die Auflösung so groß wählen, dass auch jene der Zellkerne passabel ist, dadurch erhielten wir aber eine sehr große Datenmenge. Um an Datenmaterial in brauchbarer Auflösung zu gelangen, müssten wir die Zellkerne mittels eines Elektronenmikroskop aufnehmen.

Mit den Methoden und Möglichkeiten die uns zur Verfügung stehen, bzw. mit der Auflösung der Dünnschnitte, kann man also keine seriöse Aussage über das Verhalten der Box-Dimensionswerte der Zellkerne machen. Ob tatsächlich Unterschiede in der Zellkernkontur der vier Gruppen vorliegen bzw. ob man diese wirklich aus praktischer Sicht seriös erfassen kann, sei dahingestellt.

Obwohl wir mit unseren Daten nicht weiterarbeiten können, wollen wir uns trotzdem ansehen, wie die vier Gruppen untereinander mathematisch sinnvoll verglichen werden können. Toleranzintervalle, die wir im vorigen Abschnitt behandelt haben, eignen sich dafür sehr gut. Die Theorie ist einfach und man muss relativ wenig Voraussetzungen an die entsprechenden Zufallsvariablen stellen. Dabei ist es sinnvoll, jede der vier Gruppen einzeln zu betrachten und ihr jeweiliges Toleranzintervall zu berechnen.

Die Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathfrak{A}, W) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit der man arbeitet, gibt in jeder Gruppe den Wert der empirischen Box-Dimension der Zellkernkonturen an und muss nur die Voraussetzung erfüllen, dass sie absolut stetig und ihre Verteilungsfunktion monoton ist. Nun geben wir für die Berechnung der Toleranzintervalle aller vier Gruppen die Werte für α und β aus Gleichung (4.1) sowie n an, wie etwa $n = 100$, $\alpha = 0.1$ und $\beta = 0.9$. Um die Toleranzgrenzen nun zu berechnen, müssen wir nach dem vorigen Abschnitt die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{l-k-1} \binom{100}{i} \cdot 0.9^i \cdot (0.1)^{100-i} = 0.9$$

nach $(l - k - 1)$ auflösen, d. h. $(l - k - 1)$ aus einer Tabelle für die Binomialverteilung ablesen. Die möglichen Werte, die l und k dabei annehmen können, notieren wir. Nun ordnen wir in jeder Gruppe die 100 Daten, also die 100 Box-Dimensionswerte, mit einem Programm nach ihrer Größe und wählen k und l aus den verschiedenen Möglichkeiten, wenn geht, so, dass wir offensichtliche Ausreißer wegschneiden können, wenn wir die k kleinsten und die $n - l$ größten Daten aus der geordneten Stichprobe eliminieren. Dadurch erhalten wir für jede Gruppe ein eigenes Toleranzintervall, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 90% der Grundgesamtheit in diesem Intervall liegen 90% beträgt. Sind

nun zwei oder mehr der vier Toleranzintervalle disjunkt oder überschneiden sie sich nur wenig, so ist anzunehmen, dass sich der Box-Dimensionswert in diesen Gruppen wirklich groÙteils unterscheidet, sind Intervalle annähernd gleich, so bedeutet dies, dass man von dem Box-Dimensionswert nicht auf den Malignitätsgrad schließen kann. Dabei sei aber bei jedem Ergebnis immer darauf zu achten, dass auch die Stichprobe unglücklich gewählt sein könnte und die Toleranzintervalle sehr lang werden können.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir trotz der schlechten Qualität des Datenmaterials versuchen, für jede der vier Gruppen eine Zellkernkontur bezüglich ihrer Box-Dimension auszuwerten. Dazu suchen wir einen für die jeweilige Gruppe typischen Zellkern aus und bearbeiten ihn mit dem Bildbearbeitungsprogramm Photoshop (Version 8.0.1) in einer Auflösung von 660×690 Pixel mit verschiedenen Filtern. Mit Schwellenwert wandeln wir das Halbtonbild in eine Stichgrafik um, welche wir dann in ein Negativbild umkehren, um weiÙe Konturen auf schwarzem Hintergrund zu erhalten. (siehe nachfolgende Abbildung).

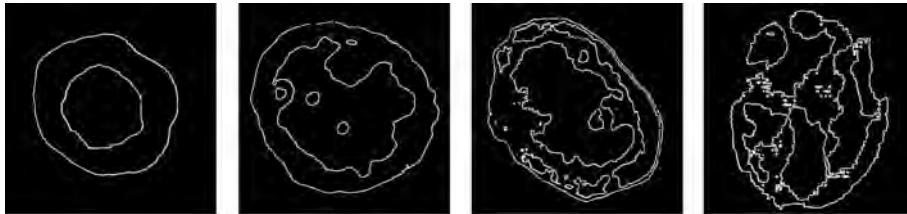


Abbildung 4.3: Von links nach rechts: Mit Photoshop bearbeitete Zellkernkonturen von gesundem Gewebe der Mamma und von Mammakarzinomen der Malignitätsgrade G1-G3.

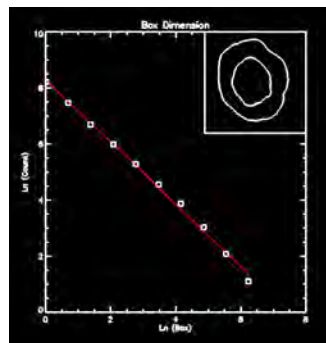


Abbildung 4.4: Berechnung der empirischen Box-Dimension der Kontur des Zellkerns aus normalem Gewebe mittels IQM.

Obwohl diese Bearbeitung die Strukturen der Zelle verfälschen kann und daher für eine seriöse Auswertung nicht sinnvoll ist, lassen die vier Bilder eine Tendenz der Zellkerne erkennen, mit höherem Malignitätsgrad auch eine unregelmäßiger Zellkontur aufzuweisen. So ist die Kontur bei Normalgewebe relativ glatt und

wird immer rauer, was sich in der Erhöhung der Box-Dimension zeigen sollte. Analog zu oben berechnen wir mit dem Programm IQM die Box-Dimension der vier Zellkernkonturen. Wir erhalten:

Normales Gewebe:	1.11204
G1-Gewebe:	1.15204
G2-Gewebe:	1.28593
G3-Gewebe:	1.40613

Somit steigt für diese vier Zellkerne die Box-Dimension mit dem Malignitätsgrad des Tumors.

Referenzen

- [1] STELZER I., WERTZ W.: *Ergänzungen zur Maßtheorie*, Wien 2007.
- [2] DUFNER J., ROSER A., UNSELD F.: *Fraktale und Julia-Mengen*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main 1998.
- [3] FALCONER K.: *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley and Sons, Chichester 1997.
- [4] HERFORT P., KLOTZ A.: *Ornamente und Fraktale*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1997.
- [5] WERTZ W.: *Fraktale und Zufall*, Vorlesung Technische Universität Wien, Wintersemester 2007/08.
- [6] BARNESLEY M.: *Fraktale. Theorie und Praxis der deterministischen Geometrie*. Spektrum Verlag, Heidelberg 1995.
- [7] MUNKRES J.: *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River 2000, 2. Auflage.
- [8] KIGAMI J.: *Analysis on Fractals*. Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- [9] BARNESLEY M., HUTCHINSON J.: *New Methods in Fractal Imaging*. Proceedings of the International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visulation. IEEE Computer Society, Washington D. C. 2006, 296-301.
- [10] GRAF S.: *Statistically Self-Similar Fractals*. Probability Theory and Related Fields, 74 (1987), 357-392.
- [11] BARNESLEY M., HURD L.: *Bildkompression mit Fraktalen*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1996.
- [12] SAGAN H.: *Space-Filling Curves*. Springer, New York 1994.
- [13] TRICOT C.: *Courbes et Dimension Fractale*. Springer, Paris 1993.
- [14] FEDERER H.: *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin 1969.
- [15] MATTILA P.: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability*. Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [16] ELSTRODT J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, Berlin 1996.
- [17] FALCONER K.: *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, Cambridge 1985.

- [18] HUTCHINSON J.: *Fractals and Self Similarity*. Indiana University Mathematics Journal, 30 (1981), 713-747.
- [19] LAPIDUS M., FRANKENHUIJSEN M. v.: *Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions. Geometry and Spectra of Fractal Strings*. Springer, New York 2006.
- [20] FALCONER K.: *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, Chichester 2003, 2. Auflage.
- [21] EDGAR G.: *Integral, Probability, and Fractal Measures*. Springer, New York 1998.
- [22] EDGAR G.: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer, New York 1990.
- [23] LIU Y., WU J.: *A Dimensional Result for Random Self-Similar Sets*. Proceedings of the American Mathematical Society, 130 (2002), 2125-2131.
- [24] WERTZ W.: *Theorie stochastischer Prozesse*, Vorlesung Technische Universität Wien, Sommersemester 2008.
- [25] JÄRVENPÄÄ M.: *On the Upper Minkowski Dimension, the Packing Dimension, and Orthogonal Projections*. Annales Academia Scientiarum Fennica, Serie A, I. Mathematica Dissertationes, 99 (1994), 4-34.
- [26] FALCONER K., HOWROYD J.: *Projection Theorems for Box and Packing Dimensions*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 119 (1996), 287-295.
- [27] MATTILA P.: *Hausdorff Dimension, Orthogonal Projections and Intersections with Planes*. Annales Academia Scientiarum Fennica, Serie A, I. Mathematica, 1 (1975), 227-244.
- [28] BÖCKER W., DENK H., HEITZ P., MOCH H.: *Pathologie*. Urban und Fischer, München 2008, 4. Auflage.
- [29] KOOLMAN J., RÖHM K.: *Taschenatlas der Biochemie*. Thieme Verlag, Stuttgart 2003, 3. Auflage.
- [30] PFÜTZNER H.: *Angewandte Biophysik*. Springer, Wien 2003.
- [31] THEWS G., MUTSCHLER E., VAUPEL P.: *Anatomie, Physiologie, Pathophysiologie des Menschen*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1989, 3. Auflage.
- [32] VOGEL G., ANGERMANN H.: *dtv-Atlas Biologie. Band 1*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 2001, 11. Auflage.
- [33] VOGEL G., ANGERMANN H.: *dtv-Atlas Biologie. Band 2*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 2002, 10. Auflage.
- [34] VOGEL G., ANGERMANN H.: *dtv-Atlas Biologie. Band 3*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1998, 9. Auflage.

- [35] PEITGEN H., JÜRGENS H., SAUPE D.: *Fractals for the Classroom. Part One. Introduction to Fractals and Chaos*. Springer, New York 1992, 2. Auflage.
- [36] IANNACCONE P., KHOKHA M.: *Fractal Geometry in Biological Systems. An Analytical Approach*. CRC Press, Boca Raton 1996.
- [37] SEDIVY R., WINDISCHBERGER C., SVOZIL K., MOSER E., BREITENECKER G.: *Fractal Analysis: An Objective Method for Identifying Atypical Nuclei in Dysplastic Lesions of the Cervix Uteri*. *Gynecologic Oncology*, 75 (1999), 78-83.
- [38] HARTUNG J., ELPELT B., KLÖSENER K.-H.: *Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. R. Oldenburg Verlag, München 1989, 7. Auflage.
- [39] BÜNING H., TRENKLER G.: *Nichtparametrische statistische Methoden*. Walter de Gruyter, Berlin 1994, 2. Auflage.

Literaturverzeichnis

AHAMMER H., VANEY T. D., TRITTHART H.: *How Much Resolution is Enough? Influence of Downscaling the Pixel Resolution of Digital Images on the Generalised Dimensions*. Physica D, 181 (2003), 147-156

BAISH J., JAIN R.: *Fractals and Cancer*. Cancer Research, 60 (2000), 3683-3688

BARNESLEY M.: *Fraktale. Theorie und Praxis der deterministischen Geometrie*. Spektrum Verlag, Heidelberg 1995

BARNESLEY M., HURD L.: *Bildkompression mit Fraktalen*. Vieweg/Braunschweig, Wiesbaden 1996

BARNESLEY M., HUTCHINSON J.: *New Methods in Fractal Imaging*. Proceedings of the International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization. IEEE Computer Society, Washington D. C. 2006, 296-301

BAUER H.: *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin 1992, 2. Auflage

BÖCKER W., DENK H., HEITZ P., MOCH H.: *Pathologie*. Urban und Fischer, München 2008, 4. Auflage

BÜNING H., TRENKLER G.: *Nichtparametrische statistische Methoden*. Walter de Gruyter, Berlin 1994, 2. Auflage

CASTAING C., VALADIER M.: *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Springer, Berlin 1977

DUFNER J., ROSER A., UNSELD F.: *Fraktale und Julia-Mengen*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main 1998

EDGAR G.: *Integral, Probability, and Fractal Measures*. Springer, New York 1998

EDGAR G.: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer, New York 1990

ELSTRODT J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, Berlin 1996

ENDL K., LUH W.: *Analysis III. Eine integrierte Darstellung. Funktionentheo-*

rie, Differentialgleichungen. Aula Verlag, Wiesbaden 1994, 7. Auflage

FALCONER K.: *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* John Wiley and Sons, Chichester 2003, 2. Auflage

FALCONER K.: *Techniques in Fractal Geometry.* John Wiley and Sons, Chichester 1997

FALCONER K.: *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press, Cambridge 1985

FALCONER K., HOWROYD J.: *Projection Theorems for Box and Packing Dimensions.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 119 (1996), 287-295

FEDERER H.: *Geometric Measure Theory.* Springer, Berlin 1969

GRAF S.: *Statistically Self-Similar Fractals.* Probability Theory and Related Fields, 74 (1987), 357-392

HARTUNG J., ELPELT B., KLÖSENER K.-H.: *Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik.* R. Oldenburg Verlag, München 1989, 7. Auflage

HAVLICEK H.: *Lineare Algebra für Technische Mathematiker.* Heldermann Verlag, Lemgo 2006

HERFORT P., KLOTZ A.: *Ornamente und Fraktale.* Vieweg/Braunschweig, Wiesbaden 1997

HEUSER H.: *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Teubner, Stuttgart 2003, 15. Auflage

HEUSER H.: *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* Teubner, Stuttgart 2004, 13. Auflage

HUTCHINSON J.: *Fractals and Self Similarity.* Indiana University Mathematics Journal, 30 (1981), 713-747

IANNACCONE P., KHOKHA M.: *Fractal Geometry in Biological Systems. An Analytical Approach.* CRC Press, Boca Raton 1996

JÄRVENPÄÄ M.: *On the Upper Minkowski Dimension, the Packing Dimension, and Orthogonal Projections.* Annales Academia Scieniarum Fennica, Serie A, I. Mathematica Dissertationes, 99 (1994), 4-34

KIGAMI J.: *Analysis on Fractals.* Cambridge University Press, Cambridge 2001

KLEINBAUM D., KUPPER L.: *Applied Regression Analysis and Other Multivariable Methods.* Duxbury Press, Massachusetts 1978

- KOOLMAN J., RÖHM K.: *Taschenatlas der Biochemie*. Thieme Verlag, Stuttgart 2003, 3. Auflage
- LANG G.: *Histotechnik. Praxislehrbuch für die biomedizinische Analytik*. Springer, Wien 2006
- LAPIDUS M., FRANKENHUIJSEN M. v.: *Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions. Geometry and Spectra of Fractal Strings*. Springer, New York 2006
- LIU Y., WU J.: *A Dimensional Result for Random Self-Similar Sets*. Proceedings of the American Mathematical Society, 130 (2002), 2125-2131
- LOSA G., DANILLO M., NONNENMACHER T., WEIBEL E.: *Fractals in Biology and Medicine. Volume II*. Birkhäuser, Basel 1998
- LOSA G., DANILLO M., NONNENMACHER T., WEIBEL E.: *Fractals in Biology and Medicine. Volume III*. Birkhäuser, Basel 2002
- LOSA G., DANILLO M., NONNENMACHER T., WEIBEL E.: *Fractals in Biology and Medicine. Volume IV*. Birkhäuser, Basel 2005
- MATTILA P.: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability*. Cambridge University Press, Cambridge 1995
- MATTILA P.: *Hausdorff Dimension, Orthogonal Projections and Intersections with Planes*. Annales Academia Scientiarum Fennica, Serie A, I. Mathematica, 1 (1975), 227-244
- MUNKRES.: *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River 2000, 2. Auflage
- NONNENMACHER T., LOSA G., WEIBEL E.: *Fractals in Biology and Medicine*. Birkhäuser, Basel 1994
- PEITGEN H., JÜRGENS H., SAUPE D.: *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*. Springer, New York 2004, 2. Auflage
- PEITGEN H., JÜRGENS H., SAUPE D.: *Fractals for the Classroom. Part One. Introduction to Fractals and Chaos*. Springer, New York 1992, 2. Auflage
- PFÜTZNER H.: *Angewandte Biophysik*. Springer, Wien 2003
- SAGAN H.: *Space-Filling Curves*. Springer, New York 1994
- SEDIVY R., WINDISCHBERGER C., SVOZIL K., MOSER E., BREITENECKER G.: *Fractal Analysis: An Objective Method for Identifying Atypical Nuclei in Dysplastic Lesions of the Cervix Uteri*. Gynecologic Oncology, 75 (1999), 78-83

STELZER I., WERTZ W.: *Ergänzungen zur Maßtheorie*. Wien 2007

THEWS G., MUTSCHLER E., VAUPEL P.: *Anatomie, Physiologie, Pathophysiologie des Menschen*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1989, 3. Auflage

TRICOT C.: *Courbes et Dimension Fractale*. Springer, Paris 1993

VOGEL G., ANGERMANN H.: *dtv-Atlas Biologie. Band 1*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 2001, 11. Auflage

VOGEL G., ANGERMANN H.: *dtv-Atlas Biologie. Band 2*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 2002, 10. Auflage

VOGEL G., ANGERMANN H.: *dtv-Atlas Biologie. Band 3*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1998, 9. Auflage

WERTZ W.: *Fraktale und Zufall*. Vorlesung Technische Universität Wien, Wintersemester 2007/08

WERTZ W.: *Theorie stochastischer Prozesse*. Vorlesung Technische Universität Wien, Sommersemester 2008

<http://www.meduni-graz.at/qmnm/iqm/iqmlinks/iqmlinks.php> (Stand: 8. 9. 2009)

Abbildungsverzeichnis und Bildnachweis

1.1	Klassische Konstruktion der Cantormenge.	1
1.2	Konstruktionsschritte der Kochkurve und eine zufällige Kochkurve.	2
1.3	Konstruktion des Sierpińskidreieckes ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck in \mathbb{R}^2	3
1.4	Julia-Menge von $f_c(z) = z^2 + c$ mit $c = 0.28 + 0.528 \cdot i$ (links) und Mandelbrotmenge (rechts) in der Gaußschen Zahlenebene in schwarz.	4
2.1	Hausdorff-Metrik der Mengen A und B aus (\mathbb{R}^2, d_2)	15
2.2	Aufbau eines „Baumes“ im \mathbb{R}^2 durch ein IFS mit Kondensationsmenge (rechts: $f_1(f_1(K) \cup f_2(K))$ und $f_2(f_1(K) \cup f_2(K))$ nicht mehr dargestellt).	35
2.3	Quadrat das durch die Eckpunkte A, B und C festgelegt ist (links) und seine Überdeckung durch vier kleinere Quadrate (rechts).	41
2.4	Prinzip der Dreiecksmethode.	43
2.5	Hausdorff-Dimension einer Menge A.	53
2.6	$\mathcal{N}_\varepsilon(A)$, $\mathcal{N}_\varepsilon^U(A)$ (i), $\mathcal{N}_{2\varepsilon}^Q(A)$ (ii), $\mathcal{N}_{2\varepsilon}^D(A)$ (iii), $\mathcal{N}_{2\varepsilon}^B(A)$ (iv) farbig dargestellt und $\mathcal{N}_\varepsilon^C(A)$ (v) für eine nichtleere kompakte Menge A des \mathbb{R}^2 und $\varepsilon > 0$	60
3.1	Schematischer Aufbau der Zellmembran.	85
3.2	Schematische Darstellung einer Zelle. [28], Seite 37, Abbildung 2.1 b)	86
4.1	Berechnung der empirischen Box-Dimension einer Menge A.	98
4.2	Dünnschnitt von Normalgewebe der Mamma (links oben), eines Mammakarzinoms des Malignitätsgrades G1 (rechts oben), G2 (links unten) und G3 (rechts unten).	108
4.3	Von links nach rechts: Mit Photoshop bearbeitete Zellkernkonturen von gesundem Gewebe der Mamma und von Mammakarzinomen der Malignitätsgrade G1-G3.	110
4.4	Berechnung der empirischen Box-Dimension der Kontur des Zellkerns aus normalem Gewebe mittels IQM.	110

Index

- T_2 -Raum, 11
- δ -Umgebung, 16
- $\mu_{E^*}^\psi$ -zufälliges Fraktal, 39
- ε -Kugel
 - abgeschlossene, 18
 - offene, 18
- ε -Überdeckungssystem, 48
- h -Menge, 52
- s -Menge, 52
- Ähnlichkeitsabbildung, 25
- Ähnlichkeitsdimension, 56
- Ähnlichkeitsfaktor, 26
- Ödem, 95

- Abstand von Mengen, 10
- Adaption, 88
- Adenom, 94
- Adenosintriphosphat, 87
- Adresse, 36
 - Menge der, 36
- affine Abbildung, 26
 - ebene, 27
- affine Transformation, 26
- Affinität, 26
- Algorithmus
 - deterministischer, 36
 - Zufalls-Iterations-, 36
- Allel, 90
- Anämie, 95
- anorganisch, 84
- Apfelmännchen, 4
- Apoptose, 88, 89
- Apoptosegen, 91, 92
- ATP, 87
- Attraktor, 31, 34
- autonomes Tumorwachstum, 89

- Banachscher Fixpunktsatz, 29
- Belegungsfunktion, 48
- Bewegung, 25
 - eigentliche, 28
- bi-Lipschitz-stetig, 26
- Blastom, 95
- Blutplasma, 84
- Borelsche Menge, 25
 - n -dimensionale, 25
- Box-Counting-Dimension, 58
 - obere, 58
 - untere, 58
- Box-Counting-Theorem, 63
- Box-Dimension, 58
 - empirische, 98
 - modifizierte, 70
 - obere, 70
 - untere, 70
- Monotonie der, 65
 - obere, 58
 - Monotonie der, 65
 - untere, 58
 - Monotonie der, 65
- Brownsche Bewegung, 78
- Brownscher Bewegungsprozess, 78

- Cantormenge, 1
- Cantorsches Diskontinuum, 1
- capacity dimension, 58
- Carathéodory-Kriterium, 47
- Cauchy-Folge, 17
 - Ausdehnungssatz für, 19
- Chaos-Spiel, 3, 36
- Chromatin, 85
- Chromosomen, 85
- Chromosomensatz
 - diploider, 85
 - haploider, 85
- Collage-Theorem, 40
 - für IFS, 44
 - für Maße, 44
- compass dimension, 57
- covering dimension, 71

- Dünnschnitt, 102

- Dedifferenzierung, 88
- Desoxyribonukleinsäure, 83
- Dichte, 105
- Differenzierung, 88
 - phänotypische, 93
- Dignität, 92
- Dimension, 45
 - fraktale, 46, 58
 - metrische, 58
 - topologische, 46
- divider dimension, 57
- DNA, 83
- DNA-Reparatur-Gen, 91
- DNA-Tumoviren, 90
- Dreiecksmethode, 41, 44
- Dreiecksungleichung, 9
- Durchmesser, 14
- Dysplasie, 94

- endliches Alphabet, 34
- endoplasmatisches Retikulum, 86
 - glattes, 86
 - raues, 86
- Entdifferenzierung, 88
- entropy dimension, 58
- epitheliales Lumina, 84
- Ereignisraum, 105
- Erweiterungslemma, 19
- Euchromatin, 85
- Eukaryoten, 83
- Euzyte, 83
- extrazellulär, 84
- Exzess, 12

- Fatou-Menge, 4
- Fixpunkt, 29
- Fraktal, 5
 - zufälliges, 39
 - zufälliges selbstähnliches, 77
- fraktale Geometrie, 6
- fraktale Menge, 5

- Gamet, 85
- Gebiet, 27
- Gen, 89
- Genom, 85
- Geschwulst, 88
- Gewebe, 84
- Golgi-Apparat, 86
- Golgi-Komplex, 86

- Grading, 93
- Grassmannsche Mannigfaltigkeit, 79
- Grundgesamtheit, 105

- Hölder-Bedingung, 26
- Hölder-Exponent, 26
- Hölder-Konstante, 26
- Hölder-stetig, 26
- Hamel-Dimension, 45
- Hausdorff-Besicovitch-Dimension, 53
- Hausdorff-Dimension, 53
 - Monotonie der, 53
- Hausdorff-Maß
 - h -dimensionales, 49
 - h -dimensionales äußeres, 49
 - s -dimensionales, 49
- Hausdorff-Metrik, 15, 16
- Hausdorff-Raum, 11
- Heterochromatin, 85
- humane Papillomviren, 90
- Hutchinson-Abbildung, 30
- Hutchinson-Metrik, 25
- hydrophil, 84
- hydrophob, 84

- IFS, 30
 - überlappendes, 36
 - mit Kondensationsmenge, 33
 - Adressraum des, 35
 - affines, 32
 - gerade berührendes, 36
 - hyperbolisches, 30
 - mit Wahrscheinlichkeiten, 36
 - rekurrentes, 37
 - total unzusammenhängendes, 36
- IFS-Kompressionsalgorithmus, 44
- information dimension, 58
- Initiierungsphase, 91
- Intermediärfilamente, 87
- Interstitialflüssigkeit, 84
- Interstitium, 84
- Interzellularflüssigkeit, 84
- intraepitheliale Neoplasie, 94
- intrazellulär, 84
- Invasion, 89
- Irrtumswahrscheinlichkeit, 106
- Isometrie, 25
- iteriertes Funktionensystem, 30
 - überlappendes, 36
 - Adressraum des, 35

- affines, 32
 - gerade berührendes, 36
 - hyperbolisches, 30
 - mit Kondensationsmenge, 33
 - mit Wahrscheinlichkeiten, 36
 - rekurrentes, 37
 - total unzusammenhängendes, 36
- Julia-Menge, 4
 - ausgefüllte, 4
- Kachexie, 96
- Kanzerogen, 90
- kartesisches Produkt, 80
- Karzinom, 94
- Keimzelltumor, 94, 95
- Kernkörperchen, 85
- Kernmembran, 85
- Kette, 35
- Kochkurve, 1
 - zufällige, 6
- Kokarzinogen, 90
- Kolmogorov entropy, 58
- kompakt, 11
 - folgen-, 18
 - schwach abzählbar, 18
- Kondensations-Transformation, 33
- Kondensationsmenge, 33
- konform, 27
- Kongruenz, 25
- kontrahierend, 25
- Kontraktion, 25
- Kontraktionsfaktor, 26
- Kurve, 26
 - raumfüllende, 45
- Läsion, 94
- Leukämie, 95
- Lipid, 84
- Lipschitz-Konstante, 26
- Lipschitz-stetig, 25
- logarithmische Dichte, 58
- Lyosom
 - primäres, 87
 - sekundäres, 87
- Lysosom, 87
 - Autophago-, 87
- Maß, 47
 - σ -Additivität eines, 47
 - äußeres, 46
 - Isotonie eines, 47
 - metrisches, 47
 - nach Methode II konstruiertes, 48
 - Sub- σ -Additivität eines, 47
 - invariantes, 37
 - normiertes, 25
 - Träger eines, 47
 - Volladditivität eines, 47
- Maßraum, 47
- Mamma, 107
- Mammakarzinom, 107
- Mandelbrot-Menge, 4
- Markov-Operator, 37
- Mass distribution principle, 72
- Masseverteilung, 47
- Masseverteilungsprinzip, 72
- Membranpermeabilität, 85
- Membranpore, 84
- Membranspannung, 84
- Menge
 - invariante, 31
 - offene, 10
- Messenger-RNA, 85
- Messraum, 78
- Metastase, 93
- Metastasierung, 89
- Metrik, 9
 - äquivalente, 9
 - erweiterte, 9
- Mikrofilamente, 87
- Mikrotom, 102
- Mikrotubuli, 87
- minimale Trefferwahrscheinlichkeit, 106
- Minkowski-Bouligand-Dimension, 65
- Minkowski-Dimension, 58, 65
- Mischtumor, 94
- Mitochondrium, 87
- Mitose, 88
- Morans offene Mengenbedingung, 30
- mRNA, 85
- Nekrose, 88
- Neoplasma, 88
- nirgends dicht, 1
- Nukleoid, 83
- Nukleolus, 85
- Nukleotid, 83
- Nukleotide, 83

- Nukleus, 85
- offene Überdeckung, 11
- offene Mengenbedingung, 30
- Onkogen, 91
- Onkoprotein, 91
- Ordnung, 46
- Papillom, 94
- Parallelogrammmethode, 44
- perfekt, 1
- Peroxisom, 87
- phänotypisch, 93
- Pluripotenz, 84
- Potenzgesetz, 57
- power law, 57
- Präfraktal, 32
- Präkanzerogen, 90
- Prokanzerogen, 90
- Prokaryoten, 83
- Proliferation, 87, 89
- Promotionsphase, 91
- Promotor, 90
- Protein, 84
- Protoonkogen, 91
- Protozyte, 83
- Prozess
 - Pfad eines, 78
 - stochastischer, 78
- Radikale, 90
- Raum
 - metrischer, 9
 - äquivalenter, 9
 - erweiterter, 9
 - vollständiger, 17
 - topologischer, 10
- Realisationsphase, 91
- Ribonukleinsäure, 83
- Ribosom, 87
- RNA, 83
 - ribosomale, 86
- RNA-Tumorviren, 90
- rRNA, 86
- rule dimension, 57
- Sarkom, 95
- Schneeflockenkurve, 1
- selbstähnlich, 5, 32, 56
 - approximativ, 6
 - exakt, 5
 - partiell, 5, 32
 - quasi-, 6
 - statistisch, 6, 32
 - stochastisch, 6
 - strikt, 5, 32
 - sub-, 32
 - super-, 32
- selbstaffin, 5, 32
- selbstkonform, 32
- Sicherheitswahrscheinlichkeit, 106
- Sierpińskidreieck, 2
- Sierpińskisieb, 2
- small inductive dimension, 71
- Stadium, 92
- Staging, 93
- Stammzelle, 88
- Statistik, 105
 - geordnete, 105
 - j -te, 105
- Stichprobe, 105
- Stichprobenfunktion, 105
- Stichprobenvariable
 - unabhängige, 105
- strenge Trennungsbedingung, 33
- Teilüberdeckung, 11
- Telomerase, 92
- Telomerasegen, 91
- Telomeren, 92
- Teratom, 95
- TNM-System, 93
- Toleranzbereich, 106
- Toleranzgrenze, 106
- Toleranzintervall, 104, 106
 - nichtparametrisches, 106
- Topologie, 10
- total beschränkt, 18
- Totipotenz, 84
- Transfer-RNA, 87
- Translation, 26
- transzellulär, 84
- Triplettsystem, 83
- tRNA, 87
- Tumor, 88
 - benigner, 92
 - embryonaler, 94, 95
 - epithelialer, 93, 94
 - maligner, 92
 - mesenchymaler, 94, 95

- neuroektodermaler, 93
 - neuroendokriner, 93, 95
 - semimaligner, 93
- Tumorangiogenese, 89
- Tumormarker, 96
- Tumorparenchym, 89
- Tumorprogression, 91
- Tumorregression, 91
- Tumorrezidiv, 92
- Tumorstammzelle, 91
- Tumorstroma, 89
- Tumorsuppressoren, 91
- Tumorzelle, 88

- Ultrametrik, 35
- Unit Membrane, 85

- Verfeinerung, 46
- Verkleinerungsfaktor, 26
- Verschiebung, 26
- Verteilungsfunktion, 105
- Vertrauenswahrscheinlichkeit, 106
- Vesikel, 86
- Viren, 90
 - onkogene, 90
- von Kochsche Kurve, 1

- Wachstumsfaktoren, 88
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 25
- Wahrscheinlichkeitsraum, 105
- Weg, 26
- Wiener Prozess, 78
- winkeltreu, 27
- Wischmenge, 1
- Wort, 35
 - Länge eines, 35
 - leeres, 35
- Wortlänge, 35

- Zelle, 83
 - somatische, 85
 - transformierte, 88
- Zellkern, 85
- Zellmembran, 84
- Zelltod, 88
- Zellzyklus, 88
- Zentriol, 87
- Zirkeldimension, 57
- Zufallsvariable
 - absolut stetige, 105
 - diskrete, 105
 - reelle, 105
- Zustandsraum, 78
- Zytoplasma, 84
- Zytoskelett, 87