

# DISSERTATION

## Aktive Dämpfung von Balkenschwingungen mit Hilfe eines longitudinalen Piezoaktors

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der technischen Wissenschaften  
unter der Leitung von

O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut Springer  
Institut für Mechanik und Mechatronik  
Abteilung für Maschinendynamik, E325/A3

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
**Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften**

von

**Dipl.-Ing. Thomas Pumhössel**  
Mat. Nr. 9525580  
Wenzel-Kaska Str. 7/6, 3100 St. Pölten

Wien, im Mai 2008

Meiner Frau Astrid und unseren Kindern  
Johanna und Benedikt gewidmet.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Universitätsassistent am Institut für Mechanik und Mechatronik, Abteilung Maschinendynamik, der Technischen Universität Wien. An dieser Stelle möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn O. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut Springer für die interessante Aufgabenstellung, die zahlreichen Diskussionen und Hilfestellungen, die Korrektur und Beurteilung der Dissertation sowie das sehr angenehme Arbeitsklima bedanken. Weiters bedanke ich mich für die gewährte finanzielle Unterstützung des Institutes zur Fertigstellung dieser Arbeit. Mein besonderer Dank gilt Herrn Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alois Steindl, für die Übernahme des Koreferates.

Für die oftmalige Unterstützung beim konstruktiven Entwurf des Versuchsstandes und die Fertigung der mechanischen Bauteile bedanke ich mich ausdrücklich bei Herrn Johann Schindele. Herrn Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johann Wassermann und Herrn Ing. Manfred Neumann danke ich für die zahlreichen Hilfestellungen bei vielen messtechnischen Problemen und Fragestellungen.

Bei allen meinen Kollegen am Institut, speziell bei Herrn Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Horst Ecker und bei Herrn Univ.-Ass. Dipl.-Ing. Bernhard Gross, bedanke ich mich für das ausgezeichnete, freundschaftliche Arbeitsklima und die stets gewährte Unterstützung in vielerlei Hinsicht.

Es ist mir ein besonderes Bedürfnis, mich an dieser Stelle bei meiner Frau Astrid und unseren Kindern Johanna und Benedikt zu bedanken. Sie mussten während des Entstehens dieser Arbeit sehr viel Geduld und Toleranz aufbringen. Dafür und für so Vieles mehr bedanke ich mich von ganzem Herzen.

# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die aktive Dämpfung von lateralen Schwingungen eines einseitig eingespannten Balkens. Dazu wird ein Aktorsystem verwendet, das aus einer Saite im Inneren des Balkens besteht, die einerseits mit dem freien Ende des Balkens und andererseits mit einem, unterhalb der Einspannung des Balkens angeordneten, longitudinalen Piezoaktor, verbunden ist. Mit Hilfe des Piezoaktors wird die mechanische Dehnung in der vorgespannten Saite und damit die Kraft, die auf den Balken wirkt, verändert. Durch Messung und geeignete Regelung der Saitenkraft wird eine Dämpfung der Balkenquerschwingung erreicht.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems werden das d'Alembertsche Prinzip und die nichtlineare Balkentheorie nach Bernoulli-Euler, unter Berücksichtigung von Termen bis zur dritten Ordnung, verwendet. Um ein Minimalmodell des Gesamtsystems zu erhalten, wird das kontinuierliche System mit Näherungsansätzen nach Rayleigh-Ritz für die Verschiebungsfelder von Balken und Saite auf ein System mit drei Freiheitsgraden reduziert, mit einem Freiheitsgrad für die laterale Balkenschwingung und je einem Freiheitsgrad für die axiale und laterale Saitenschwingung. Um eine aktive Dämpfung der Balkenquerschwingungen zu erreichen, wird zunächst die in der Literatur vielfach beschriebene Methode der axialen Geschwindigkeitsrückführung angewendet. Bei diesem Regelverfahren soll die Kraft in der Saite entgegengesetzt proportional zur axialen Geschwindigkeit des freien Balkenendes sein. Dazu wird die tatsächliche Kraft in der Saite gemessen, mit dem Sollwert verglichen und die Regeldifferenz einem unterlagerten Kraftregler zugeführt, der den Piezoaktor ansteuert. Die zeitlich veränderliche Kraft in der Saite führt zu einem zeitvarianten Anteil der resultierenden Biegesteifigkeit des Balkens, weshalb diese Art der Regelung in der Literatur auch als *Parametrische Regelung* bezeichnet wird. Mit Hilfe von numerischen Ergebnissen wird gezeigt, dass die Dämpfungswirkung aufgrund der Regelung bei großen Auslenkungen des Balkens am größten ist, jedoch rasch mit sinkender Balkenauslenkung abnimmt.

Als Verbesserungsmöglichkeit wird eine zustandsabhängige Verstärkung, basierend auf der reziproken kinetischen und potentiellen Energie des Balkens und einer Beschränkungsfunktion zur Limitierung der Verstärkung eingeführt. Das nichtlineare Regelgesetz erlaubt die Festlegung einer Maximalkraftamplitude, die für einen Bereich großer Balkenauslenkung näherungsweise konstant bleibt, sowie die Vorgabe eines definierten Kraftverlaufes bei kleinen Balkenauslenkungen durch geeignete Wahl der Reglerparameter. Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass damit die Dämpfung der Balkenschwingung wesentlich erhöht werden kann im Vergleich zur Regelung mit konstanter Verstärkung.

Zur Verifikation der numerischen Ergebnisse wurde ein Versuchsstand aufgebaut. Der verwendete Balken besteht aus einem Aluminiumprofil mit rechteckigem Querschnitt, das der Länge nach geschlitzt wurde, um Platz für eine axial angeordnete Stahlsaite zu schaffen. Zur Messung der lateralen Balkenschwingung wird ein Laser-Messkopf verwendet. Die tatsächliche Kraft in der Saite wird mit einem piezoelektrischen Kraftsensor erfasst, der direkt an den Piezoaktor angekoppelt ist. Die Messsignale werden von einer echtzeitfähigen Regelkarte eingelesen und, entsprechend dem programmierten Regelgesetz, das Ansteuersignal für den Leistungsverstärker des Piezoaktors ermittelt.

Analog zu den numerischen Ergebnissen konnte auch in den Versuchen die aktive Dämpfung durch die Regelung gezeigt werden. Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Messergebnissen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung, obwohl das analytische Modell nur die erste Eigenform der Balkenschwingung berücksichtigt.

Zur Quantifizierung der Dämpfungswirkung wird die Lehrsche Dämpfung der lateralen Balkenschwingung aus den Messdaten berechnet. Es zeigt sich, dass mit der zustandsabhängigen Verstärkung im Bereich konstanter Saitenkraftamplitude die Lehrsche Dämpfung etwa das 4.8-fache der Materialdämpfung beträgt. Als Alternative dazu wird die Dämpfungswirkung durch eine Berechnung der Lebensdauer des Balkens nach *Palmgren-Miner* und *Haibach* bei zyklischer Anregung bestimmt. Ein Vergleich der berechneten Lebensdauern mit und ohne Regelung zeigt, dass eine Erhöhung der Balkenlebensdauer um das 4-fache durch die Regelung mit zustandsabhängiger Verstärkung erreicht werden kann.

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass durch eine geregelte Kraft, die mit Hilfe einer von einem Piezoaktor angesteuerten Saite auf einen einseitig eingespannten Balken aufgebracht wird, eine aktive Dämpfung von lateralen Balkenschwingungen möglich ist. Besonders im Hinblick auf eine praktische Umsetzung der vorgeschlagenen Regelkonzepte existieren noch zahlreiche Verbesserungsmöglichkeiten, wie zum Beispiel die Verwendung alternativer Aktor- und/oder Wegmesssysteme, die direkt in die mechanische Struktur integriert werden können.

# Abstract

This thesis deals with active damping of lateral vibrations of a cantilever beam. For this purpose a string is located inside a tubular beam, connected to the tip of the beam at one end and to an piezoelectric actuator on the other end. To meet some practical restrictions, the piezoelectric actuator is located below the clamping point of the beam. An elongation of the actuator results in a variation of the strain in the prestressed string, and therefore, in a variation of the axial force applied to the tip of the beam.

Nonlinear equations of motion are derived using the Bernoulli-Euler beam theory and considering terms up to cubic order. For the sake of simplicity, Rayleigh-Ritz approximations of the displacement fields of the beam and the string are introduced to reduce the continuous system to a minimum model with three degrees of freedom (DOF). One DOF for the beam lateral motion, and two DOF for the axial and lateral motion of the string.

As a first approach to realize active damping of the beam lateral vibrations, the concept of axial velocity feedback is applied which is described in the literature. This method requests that the force in the string acts against the axial velocity of the tip of the beam. Therefore, the actual force in the string is fed to an underlying force-controller, which is a conventional PI-controller, and is compared to the reference force. According to the difference between the actual and the reference force, a control signal for the amplifier of the piezoelectric actuator is calculated. The time-dependent force in the string results in a time-dependent component of the bending stiffness of the beam, and thus, this method is referred to as *parametric control*. A numerical solution of the differential equations of the closed-loop system shows the active damping of the beam lateral motion. The control law works most efficient for large vibration amplitudes of the beam but the artificial damping decreases very fast with decreasing bending displacements.

To improve this behaviour, a state-dependent amplification of the axial velocity of the tip of the beam is introduced which is based on the reciprocal kinetic and potential energy of the beam. The resulting nonlinear feedback control law allows the limitation of the force applied to the beam, and therefore fulfills the restrictions given by any type of actuator. According to the choice of the controller parameters, the force amplitude in the string remains constant for a certain range of large beam lateral displacements until it tends to zero. The numerical solutions show that with state-dependent amplification a large enhancement of the artificial damping compared to the case of constant amplification is achieved.

A test rig was built to verify the numerical results. The cantilever beam is made of aluminum with rectangular cross-section. The beam is slotted lengthwise to get space for the axial string. The lateral displacement of the beam is measured by using a laser device. To measure the actual force in the string, a piezoelectric force-sensor is used which is directly coupled to the actuator. The measurement signals are fed into a controller card which calculates the control signal for the piezoelectric actuator according to the implemented control law. A controller card with an integrated processing unit is used which is capable to work in real-time. This is necessary because any time-shift between the input and the output signals reduce the efficiency of the feedback control

law. The experimental results show that active damping can be introduced by the controller, where the concept of state-dependent amplification yields best results. A comparison of the experimental- and numerical results show a good agreement, even though the analytical model considers only the first bending mode of the beam.

To quantify the efficiency of the control laws, the damping ratio of the lateral beam vibrations is calculated from measurement results. With state-dependent amplification within the region of constant string force amplitude the damping ratio is about 4.8-times higher compared to the case with no controller and material damping only. Alternatively, the endurance limit of the beam is calculated with and without controller. According to the theory of *Palmgren-Miner* and *Haibach*, for example, a load spectrum consisting of cyclic repeated deflection and free vibration is applied to the beam until a fatigue fracture of the beam occurs. It is shown that with the state-dependent amplification the endurance-limit of the beam is about 4-times higher than without control.

It is demonstrated that with a feedback controlled force applied to the tip of the beam by using a string along with a piezoelectric actuator artificial damping of the beam lateral motion is achieved. There exists a wide range of improvements, especially with regard to a practical realization of the proposed control concepts. One point is, for example, the use of actuator and/or measurement systems that can be directly integrated into the mechanical structure.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Verzeichnis der Symbole und Einheiten</b>	<b>viii</b>
<b>1 Einleitung und Aufgabenstellung</b>	<b>1</b>
1.1 Einleitung . . . . .	1
1.2 Aufgabenstellung . . . . .	4
<b>2 Modellbildung für die schwingende Struktur</b>	<b>6</b>
2.1 Nichtlineare Balkentheorie nach Bernoulli-Euler . . . . .	6
2.2 Bestimmung der virtuellen Arbeiten für das Gesamtsystem . . . . .	9
2.3 Reduktion des Gesamtsystems auf ein Modell mit drei Freiheitsgraden . . . . .	14
2.4 Die Bewegungsgleichungen des reduzierten mechanischen Systems . . . . .	18
2.5 Bestimmung der statischen Stabilitätsgrenze . . . . .	20
<b>3 Parametrische Regelung der Balkenschwingungen</b>	<b>25</b>
3.1 Prinzip der parametrischen Regelung . . . . .	25
3.2 Schwingungsdämpfung durch eine zeitvariante Saitenspannung . . . . .	27
3.3 Einführung einer zustandsabhängigen Verstärkung . . . . .	32
3.4 Auslegung des Kraftregelkreises . . . . .	41
3.5 Zusammenfassung der verwendeten Regelgesetze . . . . .	43
<b>4 Numerische Lösung des Systems für den geschlossenen Regelkreis</b>	<b>45</b>
4.1 Systemgleichungen des geschlossenen Regelkreises . . . . .	45
4.2 Festlegung der Struktur- und Reglerparameter . . . . .	47
4.3 Ergebnisse für das Regelgesetz I . . . . .	51
4.4 Ergebnisse für das Regelgesetz II . . . . .	56
4.5 Ergebnisse für das Regelgesetz III . . . . .	62
4.6 Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse . . . . .	65
<b>5 Versuchseinrichtung und experimentelle Ergebnisse</b>	<b>68</b>
5.1 Beschreibung der Versuchseinrichtung . . . . .	68
5.1.1 Messung der Kraft in der Saite . . . . .	70
5.1.2 Implementierung der Regelung auf der Regelkarte . . . . .	76
5.2 Messergebnisse . . . . .	79

---

5.2.1	Bestimmung der Materialdämpfung des Balkens . . . . .	79
5.2.2	Messergebnisse für das Regelgesetz I . . . . .	80
5.2.3	Messergebnisse für das Regelgesetz II . . . . .	82
5.2.4	Messergebnisse für das Regelgesetz III . . . . .	86
5.2.5	Zusammenfassung der Messergebnisse . . . . .	88
5.2.6	Vergleich der Messergebnisse mit den numerischen Ergebnissen . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Wirksamkeit der aktiven Schwingungsdämpfung</b>	<b>93</b>
6.1	Erreichbare Verbesserung in der Dämpfung . . . . .	93
6.2	Einfluss auf die Lebensdauer der Balkenstruktur . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>102</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>109</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>113</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>114</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>118</b>

# Verzeichnis der Symbole und Einheiten

Die folgende Tabelle zeigt die am häufigsten verwendeten Symbole. Zuerst werden die lateinischen, dann die griechischen Symbole, jeweils alphabetisch geordnet, angeführt. Innerhalb der einzelnen Symbolgruppen wird zuerst die Groß- und dann die Kleinschreibung aufgelistet.

## Lateinische Symbole

Symbol	Einheit	Bedeutung
$A_B$	$m^2$	Querschnittsfläche des Balkens
$A_S$	$m^2$	Querschnittsfläche der Saite
$a(V_B, \dot{V}_B)$	$(m/s)^2$	Abschaltfunktion der zustandsabhängigen Verstärkung
$a_0$	$(m/s)^2$	Konstante als Abschaltfunktion
$a_1, a_2$	$kg^{-1}$	Gewichtungsfaktoren der potentiellen bzw. kinetischen Energie des Balkens
$c_{ii}$	Ns/m	Materialdämpfungskoeffizienten
$c_{11}^j$	Ns/m	Dämpfungskoeffizient der lateralen Balkenschwingung, $j = I, II$ oder $III$ , je nach Regelgesetz
$D_{ii}$		Lehrsche Materialdämpfung
$D_{11,g}$		Lehrsche Dämpfung der Balkenquerschwingung im geregelten Fall
$E_B$	$N/m^2$	Elastizitätsmodul des Werkstoffes des Balkens
$E_{kin}$	J	kinetische Energie des Balkens
$E_{pot}$	J	potentielle Energie des Balkens
$E_S$	$N/m^2$	Elastizitätsmodul des Werkstoffes der Saite
$F(t)$	N	Gesamtkraft in der Saite im geführten Bereich
$F_V$	N	Vorspannungskraft in der Saite
$F_{V,krit.}$	N	kritische Vorspannungskraft bzw. Knickkraft des Balkens
$\tilde{F}(t)$	N	zeitvarianter Anteil der Kraft in der Saite
$\tilde{F}_r^j(t)$	N	Referenz- bzw. Sollwert für den zeitvarianten Anteil der Saitenkraft, $j = I, II$ oder $III$ , je nach Regelgesetz
$\hat{F}_r^j$	N	Amplitude des Referenzwertes für die Saitenkraft, $j = I, II$ oder $III$ , je nach Regelgesetz
$\hat{F}_{r,max}$	N	maximale Kraft in der Saite
$\hat{F}_1, \hat{F}_2$	N	Kraftamplituden zur Festlegung des Amplitudenabfalles der Sollkraft in der Saite
$f_B$	Hz	Eigenfrequenz der Balkenquerschwingung

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von vorheriger Seite

Symbol	Einheit	Bedeutung
$f_{U_s}$	Hz	Eigenfrequenz der axialen Saitenschwingung
$f_{V_s}$	Hz	Eigenfrequenz der lateralen Saitenschwingung
$g$	m	geführte Länge der Saite
$I_B$	m <sup>4</sup>	Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnittes
$J(k_p, k_i)$	Ns	Güteintegral zur Bestimmung der Reglerparameter $k_p$ und $k_i$
$J_{zul}$	Ns	zulässiger Wert des Güteintegrals
$k$	N/m	Serienschaltung der Steifigkeiten $k_g$ und $k_P$
$k_F$		Korrekturverstärkung im Kraftregler
$k_g$	N/m	Steifigkeit der Saite im geführten Bereich
$k_{ges}$	N/m	Serienschaltung der Steifigkeiten $k$ und $k_S$
$k_i$	m/Ns	Integralverstärkung des PI-Kraftreglers
$k_P$	N/m	Steifigkeit des Piezoaktors
$k_p$	m/N	Proportionalverstärkung des PI-Kraftreglers
$k_R$		Ausgangsverstärkung der Regelkarte
$k_S$	N/m	Steifigkeit der Saite im Bereich des Balkens
$l$	m	Länge des Balkens
$N$		Anzahl der ertragbaren Lastwechsel bis zum Bruch
$N_D$		Grenzlastspielzahl zur Dauerfestigkeit
$p^{II,i}$		Parametersatz $i$ für das Regelgesetz <i>II</i>
$p^{III,i}$		Parametersatz $i$ für das Regelgesetz <i>III</i>
$r$		Wöhlerexponent
$S$		Gesamtschaden eines Bauteils aufgrund verschiedener Lastkollektive
$S_T$		Bauteilschaden je Teillastkollektiv
$s$		Exponent der Wöhlerkurve
$s_1, s_2$		Verhältnis der Kraftamplituden $\hat{F}_1$ bzw. $\hat{F}_2$ zur Maximalkraftamplitude $\hat{F}_{r,max}$
$t$	s	Zeit
$U_A$	V	Ansteuerspannung des Piezoaktors
$U_{A,max}$	V	max. zulässige Ansteuerspannung des Piezoaktors
$U_R$	V	Ausgangsspannung der Regelkarte
$U_S(t)$		Freiheitsgrad der axialen Saitenschwingung
$u_A(t)$	m	gesamte axiale Verschiebung der Saite des Aktors
$u_{A,V}$	m	Verlängerung des Aktors zur Vorspannung von Balken und Saite
$\tilde{u}_A(t)$	m	zeitvarianter Anteil der Verlängerung des Aktors
$\tilde{u}_{A,max}$	m	maximale Verlängerung des Piezoaktors
$u_B(x, t)$	m	axiales Verschiebungsfeld des Balkens
$u_S(x, t)$	m	axiales Verschiebungsfeld der Saite
$u_{S,B}(x, t)$	m	axiales Verschiebungsfeld der Saite aufgrund der axialen Verschiebung des freien, ausgelenkten Balkenendes
$u_{S,S}(x, t)$	m	axiales Verschiebungsfeld der Saite aufgrund der Saitenschwingung
$u_{S,V}(x)$	m	axiales Verschiebungsfeld der Saite aufgrund der Vorspannung
$V_A$	m/V	Proportionalitätsfaktor des Piezoaktors
$V_B(t)$		Freiheitsgrad der lateralen Balkenschwingung
$\hat{V}_{B,max}$	m	Balkenauslenkung zur Bestimmung der Reglerparameter

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von vorheriger Seite

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\hat{V}_{B,1}, \hat{V}_{B,2}$	m	Auslenkungsamplituden zur Festlegung des Amplitudenabfalles der Sollkraft in der Saite
$V_S(t)$		Freiheitsgrad der lateralen Saitenschwingung
$V_V$		Verstärkungsfaktor des Piezoverstärkers
$v_B(x, t)$	m	laterales Verschiebungsfeld des Balkens
$v_S(x, t)$	m	laterales Verschiebungsfeld der Saite
$v_{S,B}(x, t)$	m	laterales Verschiebungsfeld der Saite aufgrund der Balkenauslenkung
$v_{S,S}(x, t)$	m	laterales Verschiebungsfeld der Saitenschwingung
$x$	m	Längskoordinate am unverformten Balken
$y$	m	Abstand einer Faser des Balkens von der Mittelachse
$Z_L$		Anzahl der ertragbaren Teillastkollektive bis zum Bruch
$z_{A,zul}$		zulässige Amplitudenabweichung der tatsächlichen Saitenkraft von der Sollkraft
$z_{P,zul}$		zulässige Phasenabweichung der tatsächlichen Saitenkraft von der Sollkraft
$\mathbf{C}^*$		Dämpfungsmatrix des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{f}(t)$		externer Erregervektor
$\mathbf{f}_L$		externer Erregervektor des linearisierten Modells
$\mathbf{f}^*$		Erregervektor des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$		Vektor der verallgemeinerten Kräfte
$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$		Vektor der verallgemeinerten Kräfte des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{K}(t)$		zeitvariante Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_L$		Steifigkeitsmatrix des linearisierten Modells
$\mathbf{K}^*$		Steifigkeitsmatrix des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$		zustandsabhängige Massenmatrix
$\mathbf{M}_L$		Massenmatrix des linearisierten Modells
$\mathbf{M}^*(\mathbf{q})$		Massenmatrix des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{q}(t)$		Lagevektor
$\mathbf{q}_L$		Lagevektor des linearisierten Modells

## Griechische Symbole

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\beta$	$(\text{s/m})^2$	Koeffizient des Exponenten der Abschaltfunktion $a(V_B, \dot{V}_B)$
$\gamma$	$(\text{m/s})^2$	konstante Verstärkung der Abschaltfunktion $a(V_B, \dot{V}_B)$
$\delta W_{E,B}$	Nm	virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte im Balken
$\delta W_{E,S}$	Nm	virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte in der Saite
$\delta W_F$	Nm	virtuelle Arbeit der Kraft des Piezoaktors
$\delta W_{T,B}$	Nm	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte im Balken
$\delta W_{T,S}$	Nm	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte in der Saite

Fortsetzung auf nächster Seite

---

 Fortsetzung von vorheriger Seite
 

---

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\delta W_u$	Nm	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte im Balken aufgrund des axialen Beschleunigungsfeldes $\ddot{u}_B$
$\delta W_v$	Nm	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte im Balken aufgrund des lateralen Beschleunigungsfeldes $\ddot{v}_B$
$\delta W_\varphi$	Nm	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte im Balken aufgrund der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_B$
$\delta_{11}$		Logarithmisches Dekrement der Balkenquerschwingung im unregelmäßigen Fall
$\delta_{11,g}$		Logarithmisches Dekrement der Balkenquerschwingung im geregelten Fall
$\varepsilon_B(x, y, t)$		Dehnung einer Balkenfaser infolge Biegung im Abstand $y$ von der Mittelachse
$\varepsilon_S(x, t)$		Dehnung der Saite
$\eta$	Nm	konstanter Verstärkungsfaktor
$\theta_B(x, t)$		Krümmung der Biegelinie des Balkens an der Stelle $x$
$\kappa = k_{ges}/k$		Steifigkeitsverhältnis
$\lambda_i$	$s^{-1}$	Eigenwerte des linearisierten Modells
$\mu^I$	Ns/m	konstanter Verstärkungsfaktor (Regelgesetz <i>I</i> )
$\mu^{II}(V_B, \dot{V}_B)$	Ns/m	zustandsabhängiger Verstärkungsfaktor (Regelgesetz <i>II</i> )
$\mu^{III}(V_B, \dot{V}_B)$	Ns/m	zustandsabhängiger Verstärkungsfaktor (Regelgesetz <i>III</i> )
$\nu$	Nm	Faktor zur Anpassung der Sollkraftamplitude im Regelgesetz <i>III</i>
$\rho_B$	$kg/m^3$	Dichte des Werkstoffes des Balkens
$\rho_S$	$kg/m^3$	Dichte des Werkstoffes der Saite
$\sigma_a$	$N/m^2$	Ausschlagsspannung
$\sigma_B(x, y, t)$	$N/m^2$	axiale Spannung in einer Balkenfaser infolge Biegung im Abstand $y$ von der Mittelachse
$\sigma_D$	$N/m^2$	Grenzspannungsamplitude zur Dauerfestigkeit
$\varphi_B(x, t)$		Neigung der Biegelinie des Balkens an der Stelle $x$
$\phi_S(x)$	m	Ansatzfunktion für die axiale Verschiebung der Saite
$\psi_B(x)$	m	Ansatzfunktion für die laterale Verschiebung des Balkens
$\psi_S(x)$	m	Ansatzfunktion für die laterale Verschiebung der Saite
$\omega_B$	$s^{-1}$	erste Biegeeigenkreisfrequenz des Balkens (lineares Modell)

---

# 1 Einleitung und Aufgabenstellung

## 1.1 Einleitung

In vielen technischen Anwendungen werden mechanische Strukturen durch die Umgebung zu Schwingungen angeregt. Die Anregung kann dabei durch ein diskretes Ereignis, wie z.B. den Aufprall sehr kleiner Gesteinskörper auf eine Satellitenstruktur im Weltraum, oder kontinuierlich, wie z.B. durch Strömungsanregung der Laufschaufeln von Turbomaschinen durch das umgebende Arbeitsmedium, erfolgen. Je kleiner die strukturelle Dämpfung des betreffenden Bauteiles ist, umso größer sind die entstehenden Schwingungsamplituden bzw. umso länger dauert es bis die Schwingungen abgeklungen sind. Besonders Strukturen, bei denen grosser Wert auf ein geringes spezifisches Gewicht gelegt wird, weisen üblicherweise nur eine geringe Eigendämpfung auf.

Im Normalfall liegen die mit den Schwingungsamplituden einhergehenden mechanischen Belastungen weit unterhalb der Bruchfestigkeit des Bauteilwerkstoffes, allerdings kann die Zeitfestigkeit sehr bald erreicht werden. Im Hinblick auf eine hohe Bauteillebensdauer sollten daher die Strukturschwingungen möglichst stark gedämpft werden.

Eine Möglichkeit ist die Verwendung von passiven Methoden zur Schwingungsreduktion. Darunter versteht man die Verwendung von dissipativen Elementen, die keinerlei Energiezufuhr von außen benötigen. Ein klassischer Vertreter ist beispielsweise die Anordnung von Reibelementen zwischen den Schaufelfüßen von benachbarten Turbinenschaufeln, siehe Abbildung 1.1.

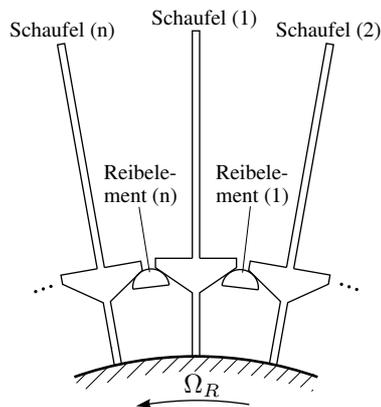


Abb. 1.1: Passive Dämpfung von Schaufelschwingungen mit Hilfe von Reibelementen, siehe [47].

Durch Schwingungen der Turbinenschaufeln kommt es zu Relativbewegungen an der Kontaktstelle zwischen dem Schaufelfuß und den Reibelementen und damit zur Dissipation von Energie. Der Einfluß der Geometrie der Reibelemente (keilförmig, zylindrisch) wird in der Literatur vielfach beschrieben, siehe zum Beispiel [62], [54], [55] und [49]. Eine generelle Behandlung und eine Gegenüberstellung der Eigenschaften der Reibelementtypen ist in [47] zu finden.

Eine passive Methode zur Dämpfung von Schwingungen sehr großer Balken, wie sie z.B. im

Bauwesen verwendet werden, ist in [59] zu finden. Das Grundkonzept wird in Abbildung 1.2 gezeigt. Parallel zum beidseits gelenkig gelagerten Balken wird ein einzelner Dämpfer angeordnet, der auf einer Seite direkt mit Hilfe einer Verbindungsplatte und auf der anderen Seite über eine Vorrichtung M mit dem Balkenende verbunden ist. Durch Biegeschwingungen des Balkens werden entsprechende Schiefstellungen der Verbindungsplatten an den Balkenenden und damit Relativbewegungen im Dämpfer hervorgerufen. Die Vorrichtung M dient nur zur Verstärkung der axialen Schwingungen. D.h. Energie der lateralen Schwingungen wird durch Dämpfung der damit verbundenen, axialen Bewegungen dissipiert.

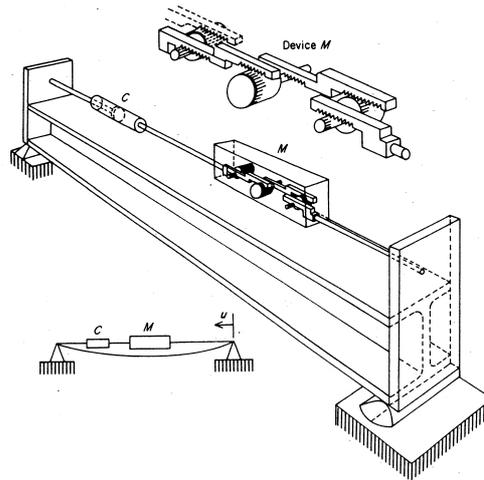


Abb. 1.2: Schwingungsreduktion durch Dämpfung von axialen Balkenschwingungen, siehe [59].

Eine aussergewöhnliche Methode zur Reduktion von Balkenschwingungen wird in [4] vorgestellt. An einem Kragträger werden einzelne, mit Granulat gefüllte Kammern angeordnet. Durch Schwingungen des Balkens kommt es zu Reibung der Granulatkörner untereinander, und damit zur Energiedissipation. Die Messergebnisse zeigen eine signifikante Erhöhung der Strukturdämpfung.

Ein wesentlicher Nachteil der passiven Methoden ist die meist beschränkte Leistungsfähigkeit und die geringe Flexibilität bei Änderung von Systemparametern. Aus diesen Gründen wurden sogenannte *smart structures* entwickelt. Diese sind gekennzeichnet durch die Integration von Aktoren und Sensoren in die mechanische Struktur und die Verwendung eines Reglers zur Verbesserung der dynamischen Eigenschaften der Struktur. Die Methoden zur Reduktion von Strukturschwingungen mit Hilfe von *smart structures* lassen sich gemäß [23] unterteilen in

- semi-passive,
- semi-aktive,
- und aktive Methoden.

Zu den semi-passiven Methoden zählt die Schwingungsreduktion durch Ausnutzung des piezoelektrischen Effektes in Verbindung mit elektrischen Widerstandsnetzwerken, siehe [15], [9] und [22]. Das Grundprinzip ist in Abbildung 1.3 dargestellt. Auf die mechanische Struktur sind beidseits Piezo-Schichten (Patches) geklebt, die durch die Schwingungen der Struktur verformt werden. Aufgrund des piezoelektrischen Effektes, siehe zum Beispiel [24], wird dadurch elektrische Ladung erzeugt und über den angeschlossenen elektrischen Widerstandskreis beginnt Strom zu fließen. Die Widerstände  $R_S$  erwärmen sich, und Energie der Strukturschwingung wird in Wärme umgewandelt.

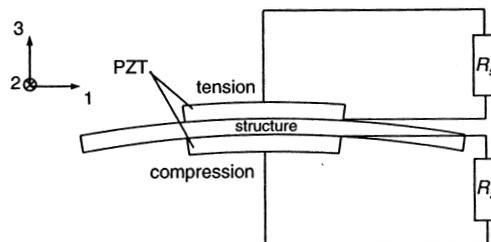


Abb. 1.3: Passive Dämpfung von Strukturschwingungen durch die Verwendung von piezoelektrischen Schichten (Layer) und elektrischen Widerständen  $R_s$ , siehe [14] und [13].

In [12] werden die konstanten elektrischen Widerstände durch ein digitales Potentiometer ersetzt. Die Struktur wird mit einem Shaker angeregt, und in Abhängigkeit der Erregerfrequenz werden verschiedene Widerstände verwendet. Dadurch wird ein größeres Maß an Flexibilität im Hinblick auf die Dämpfung verschiedener Schwingungsformen erreicht.

Semi-aktive Dämpfungskonzepte unterscheiden von den semi-passiven dadurch, dass die Eigenschaften eines per Definition passiven Elementes in Abhängigkeit von Zustandsgrößen der mechanischen Struktur in Echtzeit verändert werden. Dazu werden unter anderem Dämpfer mit elektro- bzw. magnetorheologischen Flüssigkeiten verwendet, deren Dämpfungseigenschaften durch Anlegen eines elektrischen bzw. magnetischen Feldes verändert werden können, siehe z.B. [61], [28] und [2]. Der wesentliche Vorteil dieser Methoden besteht in dem geringen Energiebedarf im Vergleich zu aktiven Verfahren und in der geringen Gefahr einer Instabilität, da dem Gesamtsystem keine Energie zugeführt wird.

Die größte Leistungsfähigkeit besitzen jedoch im allgemeinen aktive Systeme, d.h. die in die mechanische Struktur eingebrachte Dämpfung ist am größten, im Vergleich zu semi-passiven und semi-aktiven Konzepten. Dazu werden mit Hilfe von Aktoren, Sensoren und einem geeigneten Re-

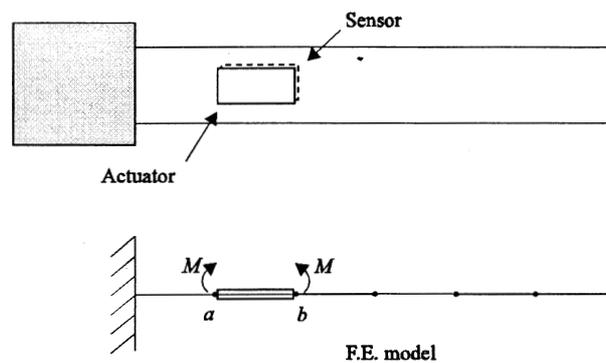


Abb. 1.4: Einseitig eingespannter Balken mit piezoelektrischem Biegeaktor (oben), zugehöriges Finite-Elemente Modell (unten), siehe [50].

gelgorithmus Kräfte und/oder Momente in die mechanische Struktur eingebracht. Bei balkenförmigen Strukturen kommen dazu oft piezoelektrische Biegeaktoren zum Einsatz, siehe zum Beispiel [17], [26], [16] und [56]. Sie werden auf die mechanische Struktur geklebt und bringen bei Anlegen einer elektrischen Spannung ein Biegemoment auf die Struktur auf, siehe Abbildung 1.4. Die untere Abbildung zeigt das Finite-Elemente-Knotenmodell des Kragbalkens. Der piezoelektrische Aktor wird durch die Biegemomente  $M$  in den Knoten  $a$  und  $b$  ersetzt. Häufig werden zur Messung der

Balkenschwingungen ebenfalls piezoelektrische Sensoren verwendet. Ist der Schicht-Piezo direkt in die Balkenstruktur integriert, d.h. besteht der Balken aus einem schichtweisen Aufbau von Trägermaterial (Balken) und Schichtpiezo (Piezolayer = Aktor), so spricht man von *piezo-composite beams*, siehe z.B. [8] und [5]. Anstatt piezoelektrischer Biegeaktoren werden auch Piezoaktoren verwendet, die eine Schubverzerrung entsprechend der angelegten elektrischen Spannung erfahren, siehe zum Beispiel [3].

Mit Hilfe von longitudinalen Piezoaktoren können Einzelkräfte auf die mechanische Struktur aufgebracht werden. Nachteilig ist, dass die erreichbaren Kräfte vergleichsweise niedrig sind. Das liegt daran, dass selbst bei Stapelaktoren die erzielbaren Verlängerungen eher klein sind und die effektive Kraft, die auf eine Struktur aufgebracht werden kann, von der, meist geringen, Steifigkeit der Anbindung Piezoaktor-Struktur abhängt. Aus diesem Grund wurden verschiedene, mechanische Wegvergrößerungssysteme entwickelt, die z.B. auf einer Wegverstärkung durch einfache Hebelübersetzungen, oder auf einer hydraulischen Übersetzung durch zwei Kolben unterschiedlichen Durchmessers basieren, siehe z.B. [1].

Die aktive Dämpfung von Biegeschwingungen schlanker Balken durch Regelung einer axial gerichteten Kraft wird z.B. in [21], [52] und [53] untersucht. In [21] wird die axiale Geschwindigkeit eines Balkenendes zur Bildung eines modifizierten Bang-Bang Regelgesetzes für die Regelung der axialen Kraft verwendet. Anhand eines Balkenmodells mit einem Freiheitsgrad wird gezeigt daß der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist. Ein allgemeineres Verfahren ist in [51] zu finden. Mit Hilfe eines Beobachters und quadratischer Zustandsvektorrückführung wird eine aktive Dämpfung von  $n$ -Eigenformen einer schwingenden Struktur erreicht. Die zugehörige Untersuchung der Auswirkungen des Spillover-Phänomens auf die Stabilität erfolgt in [52]. In [10] und [11] wird hingegen die direkte Methode von Lyapunov zum Reglerentwurf verwendet. Eine Methode zur Dämpfung von Balkenschwingungen, die ohne jegliche Messungen an der mechanischen Struktur auskommt, wird in [7] beschrieben. Dabei wird der in [60] vorgestellte Effekt der Antiresonanz bei Anregung mit einer Kraft bestimmter Frequenz verwendet.

Im allgemeinen beinhalten die an das Regelkonzept gestellten Anforderungen neben der Realisierung einer möglichst hohen Dämpfung der Strukturschwingungen auch die Berücksichtigung der Limitierungen durch das Aktorsystem, z.B. die beschränkte Verlängerung eines Piezoaktors und eine möglichst einfache Integration in die mechanische Struktur. Das ist insbesondere im Hinblick auf eine industrielle Realisierung eines aktiven Systems zur Schwingungsdämpfung von Bedeutung.

## 1.2 Aufgabenstellung

An einem einseitig eingespannten Balken soll mit Hilfe einer geregelten, axial gerichteten Kraft eine aktive Dämpfung der Balkenschwingungen erreicht werden. Abbildung 1.5 zeigt den prinzipiellen Aufbau des zu untersuchenden Systems. Im Inneren des rohrförmigen Balkens ist eine Saite angeordnet, die einerseits mit dem freien Ende des Balkens und andererseits mit einem, unterhalb der Einspannung angeordneten, Aktor verbunden ist. Mit Hilfe einer, im Bild nicht dargestellten, mechanischen Vorrichtung soll eine konstante Vorspannkraft in die Saite eingebracht werden. Eine Längenänderung  $u_A(t)$  des Aktors bewirkt dann zusätzlich zur konstanten Vorspannkraft eine zeitlich veränderliche Kraftkomponente  $F(t)$  in der Saite.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für das Gesamtsystem sind sowohl laterale als auch axiale Verschiebungsfelder  $v(x,t)$  bzw.  $u(x,t)$  für Balken und Saite einzuführen. Da zu erwarten ist, dass der durch die Regelung hervorgerufene Dämpfungsterm nichtlineare Gestalt besitzt, soll die nichtlineare Balkentheorie nach Bernoulli-Euler angewendet werden.



## 2 Modellbildung für die schwingende Struktur

### 2.1 Nichtlineare Balkentheorie nach Bernoulli-Euler

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen für das Gesamtsystem erfolgt mit Hilfe der nichtlinearen Balkentheorie von Bernoulli-Euler und dem d'Alembertschen Prinzip. In diesem Kapitel werden einige Grundlagen der nichtlinearen Balkentheorie dargestellt, wie sie zum Beispiel in [30] beschrieben sind.

In Analogie zur linearen Theorie wird vorausgesetzt, dass die Balkenquerschnitte keine Schubverzerrungen  $\varepsilon_{\xi\eta}$  und  $\varepsilon_{\xi\zeta}$  sondern nur axiale Verzerrungen  $\varepsilon_{\xi\xi}$ , im Folgenden als Dehnung  $\varepsilon(x, t)$  bezeichnet, aufweisen (siehe Bild 2.1). Die Querschnitte bleiben damit bei einer Verformung (Biegung) des Balkens eben und rechtwinkelig zur Balkenachse.

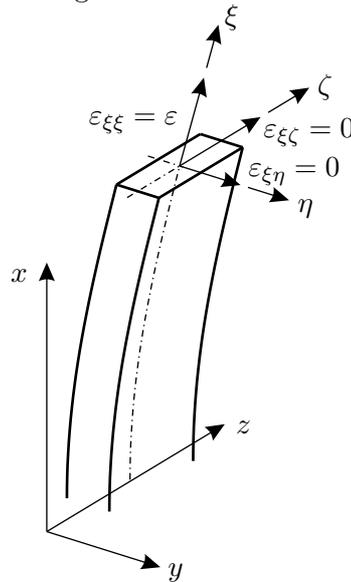


Abb. 2.1: Bernoulli-Euler Balkentheorie

Der verformte Zustand des Balkens wird durch ein laterales Verschiebungsfeld  $v(x, t)$  quer zur Balkenachse und ein axiales Verschiebungsfeld  $u(x, t)$  beschrieben, siehe Bild 2.2 links. Zur Bestimmung der Dehnung  $\varepsilon(x, t)$  eines differentiell kleinen Balkenelementes werden die Verschiebungen der Querschnitte an den Stellen  $x$  und  $x + dx$  des Balkenelementes betrachtet, siehe Bild 2.2 rechts. Nach einer Verformung beträgt die Länge eines Balkenelementes  $(1 + \varepsilon)dx$ , und ist gegeben durch die Gleichung

$$(1 + \varepsilon)dx = \sqrt{(v(x + dx, t) - v(x, t))^2 + (u(x + dx, t) + dx - u(x, t))^2}. \quad (2.1)$$

Für die Verschiebungen des Endquerschnittes an der Stelle  $x + dx$  gilt

$$v(x + dx, t) = v(x, t) + v'(x, t) dx \quad (2.2)$$

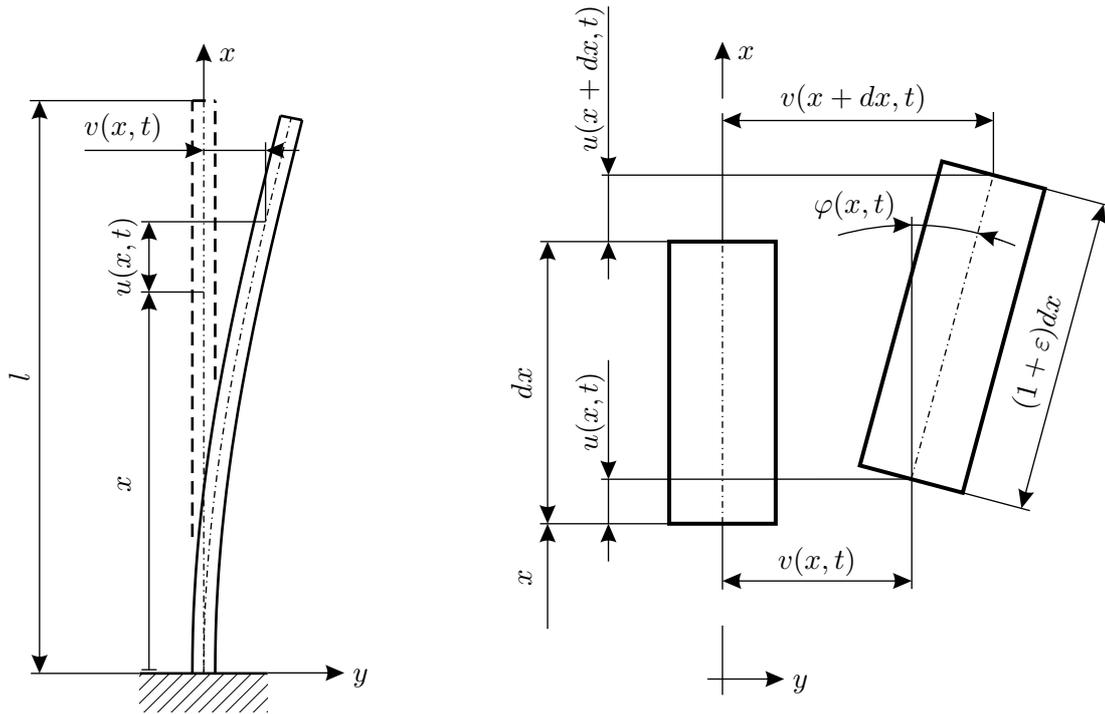


Abb. 2.2: Definition der Verschiebungsfelder  $u(x, t)$  und  $v(x, t)$  eines Balkens (links), Verschiebungen am differentiellen Balkenelement (rechts)

und

$$u(x + dx, t) = u(x, t) + u'(x, t) dx \quad (2.3)$$

wobei

$$(\cdot)' \triangleq \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \quad (2.4)$$

gilt. Damit erhält man für die Dehnung

$$\varepsilon(x, t) = \sqrt{1 + 2u'(x, t) + u'(x, t)^2 + v'(x, t)^2} - 1. \quad (2.5)$$

Ist die axiale Steifigkeit des Balkens sehr viel grösser als seine Biegesteifigkeit, d.h.  $i^2 \ll l^2$  ( $i = \text{Trägheitsradius des Querschnitts}$ ), so kann der Balken als axial undeformbar idealisiert werden mit  $\varepsilon(x, t) \cong 0$ . Damit erhält man aus der obigen Gleichung den Zusammenhang

$$u'(x, t) = \sqrt{1 - v'^2} - 1 \quad (2.6)$$

für die Änderung der axialen Verschiebung mit der Koordinate  $x$ . Eine binomische Reihenentwicklung der Form

$$\sqrt{1 + p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} p^n = 1 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{8}p^2 \dots \quad (2.7)$$

liefert

$$u'(x, t) = -\frac{1}{2}v'^2 + O(v'^4). \quad (2.8)$$

Durch Abbruch der Reihenentwicklung nach Termen dritter Ordnung erhält man die Näherung

$$u'(x, t) \doteq -\frac{1}{2}v'(x, t)^2. \quad (2.9)$$

Partielle Integration ergibt für das axiale Verschiebungsfeld

$$u(x, t) \doteq -\frac{1}{2} \int_0^x v'(\xi, t)^2 d\xi. \quad (2.10)$$

D.h. im Fall des axial undeformbaren Balkens ergibt sich die axiale Deformation  $u(x, t)$  nur aus der geometrischen Verschiebung der Balkenelemente.

Die Neigung  $\varphi(x, t)$  der Biegelinie des Balkens ist nach Abb. 2.2 gegeben durch die Beziehung

$$\varphi(x, t) = \arctan \frac{v(x+dx, t) - v(x, t)}{u(x+dx, t) + dx - u(x, t)} = \arctan \frac{v'(x, t)}{1 + u'(x, t)}. \quad (2.11)$$

Eine binomische Reihenentwicklung mit Hilfe von

$$\frac{1}{1+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} p^n = 1 - p + p^2 \dots \quad (2.12)$$

und

$$\arctan p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} p^{2n+1} = p - \frac{1}{3}p^3 \dots \quad (2.13)$$

ergibt

$$\varphi(x, t) = v' - u'v' - u'^2v' - \frac{1}{3}v'^3 \dots \quad (2.14)$$

Für den axial undeformbaren Balken gilt mit Gleichung (2.9) und Abbruch der Reihenentwicklung nach Termen dritter Ordnung näherungsweise für die Neigung der Biegelinie

$$\varphi(x, t) \doteq v' + \frac{1}{6}v'^3. \quad (2.15)$$

Für die Krümmung  $\theta(x, t)$  der Biegelinie gilt

$$\theta(x, t) = \frac{(1+u')v'' - v'u''}{\sqrt{((1+u')^2 + v'^2)^3}}. \quad (2.16)$$

Durch binomische Reihenentwicklungen

$$\frac{1}{\sqrt{1+p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} p^n = 1 - \frac{1}{2}p + \frac{3}{8}p^2 \dots \quad (2.17)$$

und

$$(1+p)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3}{n} p^n = 1 + 3p + 3p^2 \dots \quad (2.18)$$

erhält man für den axial undeformbaren Balken mit Gleichung (2.9) und Abbruch nach Termen dritter Ordnung die Näherung für die Balkenkrümmung

$$\theta(x, t) \doteq v'' + \frac{1}{2}v'^2v''. \quad (2.19)$$

## 2.2 Bestimmung der virtuellen Arbeiten für das Gesamtsystem

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips werden die virtuellen Arbeiten des Gesamtsystems benötigt. Abbildung 2.3 zeigt eine Prinzipskizze des betrachteten Systems. Der unverformte Zustand des Balkens ist durch die strichlierte Linie gekennzeichnet. Die Verformung von Balken und Saite wird durch die Verschiebungsfelder  $v_B(x, t)$  und  $u_B(x, t)$  bzw. durch  $v_S(x, t)$  und  $u_S(x, t)$ ,  $x \in [0, l]$ , beschrieben. Die Saite im Inneren des Balkens wird als elastisch und massenbehaftet modelliert. Im Bereich der Führung der Saite durch die Grundplatte bzw. den Aktor (entlang der Länge  $g$ ) wird die Saite als masselose lineare Feder idealisiert. Der Aktor selbst wird durch die Kraft  $F(t)$  ersetzt. Im Folgenden werden die virtuellen Arbeiten für Balken, Saite und Aktor hergeleitet, wobei Terme bis einschließlich der dritten Ordnung berücksichtigt werden.

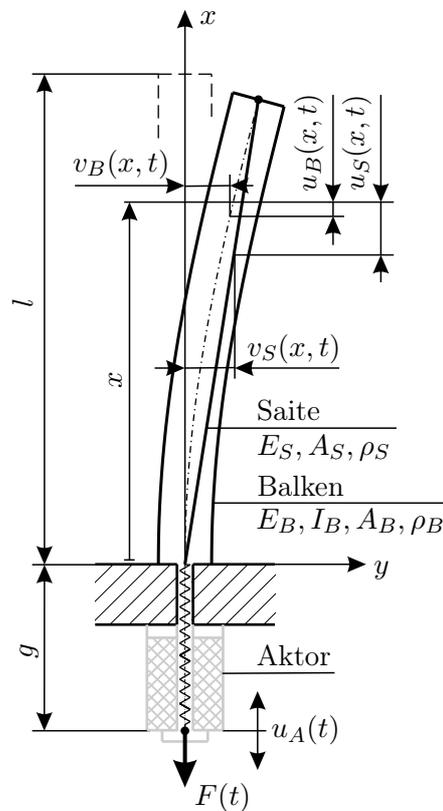


Abb. 2.3: Prinzipskizze zur Herleitung der Bewegungsgleichungen

### Die virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte im Balken

Unter der Annahme, dass die axiale Steifigkeit des Balkens sehr viel größer ist als die Längssteifigkeit der Saite, kann der Balken als axial undeformbar modelliert werden. Für eine Faser des Balkens im Abstand  $y$  von der Mittelachse verbleibt daher für die Dehnung infolge Biegung

$$\varepsilon_B(x, y, t) = -y\theta_B(x, t), \quad (2.20)$$

und für die axiale Spannung

$$\sigma_B(x, y, t) = -E_B y \theta_B(x, t). \quad (2.21)$$

Darin bedeutet, wie im vorigen Kapitel beschrieben,  $\theta_B(x, t)$  die Krümmung der verformten Balkenachse. Die virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte im Balken berechnet sich aus

$$\delta W_{E,B} = -\delta V_B = - \int_0^l \int_{A_B} \sigma_B \delta \varepsilon_B dA dx. \quad (2.22)$$

Mit den Gleichungen (2.20) und (2.21) erhält man

$$\delta W_{E,B} = - \int_0^l E_B \theta_B \delta \theta_B \underbrace{\int_{A_B} y^2 dA_B}_{I_B} dx = -E_B I_B \int_0^l \theta_B \delta \theta_B dx, \quad (2.23)$$

wobei  $I_B$  das Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnittes um seinen Schwerpunkt darstellt. Die Variation der Krümmung  $\theta_B$  der Balkenachse ergibt sich aus Gleichung (2.19) zu

$$\delta \theta_B = \delta v_B'' + v_B' v_B'' \delta v_B' + \frac{1}{2} v_B'^2 \delta v_B'' \quad (2.24)$$

Damit erhält die virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte im Balken die Form

$$\delta W_{E,B} \doteq -E_B I_B \int_0^l [v_B''(1 + v_B'^2) \delta v_B'' + v_B' v_B''^2 \delta v_B'] dx. \quad (2.25)$$

## Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte im Balken

Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte berechnet sich aus

$$\delta W_{T,B} = - \underbrace{\int_0^l \rho_B A_B \ddot{v}_B \delta v_B dx}_{\delta W_v} - \underbrace{\int_0^l \rho_B A_B \ddot{u}_B \delta u_B dx}_{\delta W_u} - \underbrace{\int_0^l \rho_B I_B \ddot{\varphi}_B \delta \varphi_B dx}_{\delta W_\varphi}, \quad (2.26)$$

wobei

$$(\dot{\phantom{x}}) \doteq \frac{\partial(\phantom{x})}{\partial t} \quad (2.27)$$

gilt. In der linearen Balkentheorie nach Bernoulli-Euler werden nur die Trägheitskräfte hervorgerufen durch das laterale Beschleunigungsfeld  $\ddot{v}_B(x, t)$  berücksichtigt. Die nichtlineare Balkentheorie hingegen beinhaltet zusätzlich die Trägheitskräfte des axialen Beschleunigungsfeldes  $\ddot{u}_B(x, t)$  und der Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}_B(x, t)$ . Die zugehörigen virtuellen Arbeiten  $\delta W_u$  bzw.  $\delta W_\varphi$  (siehe Gleichung (2.26)) werden nun getrennt hergeleitet.

Das axiale Beschleunigungsfeld  $\ddot{u}_B(x, t)$  erhält man aus Gleichung (2.10) formal durch zweimalige Differentiation nach der Zeit zu

$$\ddot{u}_B = -\frac{1}{2} \int_0^x (v_B'^2)'' d\xi. \quad (2.28)$$

Zur Bestimmung der Variation des axialen Verschiebungsfeldes  $\delta u_B(x, t)$  wird zunächst aus der Gleichung (2.9)  $\delta u_B'(x, t)$  berechnet. Man erhält

$$\delta u_B'(x, t) = -v_B'(x, t) \delta v_B'(x, t). \quad (2.29)$$

Durch partielle Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen  $u_B(0, t) = 0$  und  $v_B(0, t) = 0$  erhält man

$$\delta u_B = -v'_B \delta v_B + \int_0^x v''_B \delta v_B d\xi. \quad (2.30)$$

Damit lässt sich für  $\delta W_u$  aus Gleichung (2.26) schreiben

$$\delta W_u = \underbrace{\rho_B A_B \int_0^l \ddot{u}_B v'_B \delta v_B dx}_{\delta W_u^{(1)}} - \underbrace{\rho_B A_B \int_0^l \left( \ddot{u}_B \int_0^x v''_B \delta v_B d\xi \right) dx}_{\delta W_u^{(2)}}. \quad (2.31)$$

Partielle Integration von  $\delta W_u^{(2)}$  ergibt

$$\begin{aligned} \delta W_u^{(2)} &= -\rho_B A_B \left[ \left( \int_0^x v''_B \delta v_B d\xi \int_0^x \ddot{u}_B d\xi \right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^x v''_B \delta v_B d\xi \right) \left( \int_0^x \ddot{u}_B d\xi \right) dx \right] \\ &= -\rho_B A_B \left[ \int_0^l v''_B \left( \int_0^l \ddot{u}_B dx \right) \delta v_B dx - \int_0^l v''_B \left( \int_0^x \ddot{u}_B d\xi \right) \delta v_B dx \right] \\ &= -\rho_B A_B \int_0^l \left[ v''_B \left( \int_0^l \ddot{u}_B dx - \int_0^x \ddot{u}_B d\xi \right) \delta v_B \right] dx \\ &= -\rho_B A_B \int_0^l v''_B \left( \int_x^l \ddot{u}_B d\xi \right) \delta v_B dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die Gleichung (2.31) wird damit zu

$$\begin{aligned} \delta W_u &= \rho_B A_B \int_0^l \ddot{u}_B v'_B \delta v_B dx - \rho_B A_B \int_0^l v''_B \left( \int_x^l \ddot{u}_B d\xi \right) \delta v_B dx \\ &= \rho_B A_B \int_0^l \left( \ddot{u}_B v'_B + v''_B \int_l^x \ddot{u}_B d\xi \right) \delta v_B dx \\ &= \rho_B A_B \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left( v'_B \int_l^x \ddot{u}_B d\xi \right) \delta v_B dx. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Mit Hilfe des axialen Beschleunigungsfeldes aus Gleichung (2.28) ergibt sich schliesslich

$$\delta W_u \equiv -\frac{1}{2} \rho_B A_B \int_0^l \left\{ v'_B \int_l^x \left[ \int_0^\xi (v''_B)^2 d\zeta \right] d\xi \right\}' \delta v_B dx. \quad (2.34)$$

Zur Bestimmung der virtuellen Arbeit  $\delta W_\varphi$  der Trägheitskräfte aufgrund der Winkelbeschleunigung, siehe Gleichung (2.26), werden die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}_B$  und die Variation  $\delta\varphi_B$  benötigt. Aus Gleichung (2.15) ergibt sich

$$\ddot{\varphi}_B(x, t) = v_B \ddot{\cdot} + \frac{1}{6} (v'_B)^3 \ddot{\cdot}, \quad (2.35)$$

und für die Variation von  $\varphi_B$

$$\delta\varphi_B(x, t) = \left( 1 + \frac{1}{2} v_B'^2 \right) \delta v'_B. \quad (2.36)$$

Damit wird  $\delta W_\varphi$  aus Gleichung (2.26) zu

$$\delta W_\varphi \doteq -\rho_B I_B \int_0^l \left[ v_B \ddot{\phantom{v}} + \frac{1}{2} v_B \dot{\phantom{v}} v_B'^2 + \frac{1}{6} (v_B''^3) \right] \delta v_B' dx. \quad (2.37)$$

Zusammenfassend erhält die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte einschließlich Terme dritter Ordnung im Balken die Form

$$\begin{aligned} \delta W_{T,B} \doteq & -\int_0^l \rho_B A_B \ddot{v}_B \delta v_B dx - \frac{1}{2} \rho_B A_B \int_0^l \left\{ v_B' \int_l^x \left[ \int_0^\xi (v_B''^2) d\tau \right] d\xi \right\}' \delta v_B dx + \\ & -\rho_B I_B \int_0^l \left[ v_B \ddot{\phantom{v}} + \frac{1}{2} v_B \dot{\phantom{v}} v_B'^2 + \frac{1}{6} (v_B''^3) \right] \delta v_B' dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

### Die virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte in der Saite

Zur Berechnung der virtuellen Arbeit der elastischen Kräfte wird die Saite als axial elastisch und biegeweich modelliert. Die Verschiebungen der Saite werden durch ein laterales Verschiebungsfeld  $v_S(x, t)$  und ein axiales Verschiebungsfeld  $u_S(x, t)$ ,  $x \in [0, l]$ , beschrieben, siehe Abb. 2.3. Im Bereich der Grundplatte und des Aktors (entlang der Länge  $g$ ) wird eine Querbewegung der Saite durch seitliche Führung verhindert. In diesem Abschnitt wird die Saite als masselose, lineare Feder mit der Steifigkeit

$$k_g = \frac{E_S A_S}{g} \quad (2.39)$$

idealisiert. Das untere Ende der Saite ist mit dem Piezoaktor verbunden (siehe Abb. 2.4, links). Gemäß [24] wird der Piezoaktor als Serienschaltung eines sich um den Weg  $u_A(t)$  verlängernden Elementes und einer linearen Feder mit der Steifigkeit  $k_P$  modelliert, (siehe Abb. 2.4, Mitte). Durch Serienschaltung der Federsteifigkeiten  $k_P$  und  $k_g$  ergibt sich die resultierende Gesamtsteifigkeit zu

$$k = \frac{k_P k_g}{k_P + k_g}, \quad (2.40)$$

siehe Abb. 2.4, rechts.

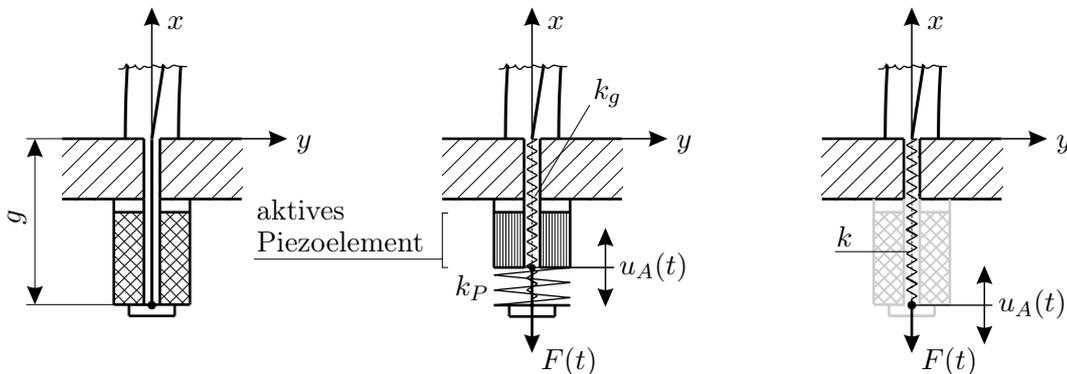


Abb. 2.4: Modellbildung des Piezoaktors

Für die Dehnung  $\varepsilon_S$  der Saite im Inneren des Balkens erhält man aus der Gleichung (2.5) durch binomische Reihenentwicklung mit Hilfe von Gleichung (2.7) die Näherung

$$\varepsilon_S(x, t) \doteq u'_S(x, t) + \frac{1}{2}v'_S(x, t)^2, \quad (2.41)$$

$x \in [0, l]$ . Die Variation von  $\varepsilon_S$  ergibt sich zu

$$\delta\varepsilon_S(x, t) \doteq \delta u'_S(x, t) + v'_S(x, t)\delta v'_S(x, t). \quad (2.42)$$

Die virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte in der Saite setzt sich zusammen aus der virtuellen Arbeit der Saite im Inneren des Balkens und der virtuellen Arbeit der linearen Feder mit der Ersatzsteifigkeit  $k$ .

$$\delta W_{E,S} = -E_S A_S \int_0^l \varepsilon_S \delta\varepsilon_S dx - k(u_A(t) - u_S(0, t))\delta(u_A(t) - u_S(0, t)) \quad (2.43)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2.41) und (2.42) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \delta W_{E,S} \doteq & -E_S A_S \int_0^l (u'_S + \frac{1}{2}v_S'^2)\delta u'_S dx - E_S A_S \int_0^l (u'_S + \frac{1}{2}v_S'^2)v'_S \delta v'_S dx + \\ & -k(u_A - u_S(0, t))\delta u_A + k(u_A - u_S(0, t))\delta u_S(0, t). \end{aligned} \quad (2.44)$$

### Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte in der Saite

Im Inneren des Balkens ( $x \in [0, l]$ ) wird die Saite als massebehaftet modelliert, wobei die Masse als in der Saitenachse linienförmig konzentriert betrachtet wird. Im Bereich,  $x \in [0, g]$ , wird die Masse der Saite vernachlässigt. Damit lässt sich für die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte in der Saite schreiben

$$\delta W_{T,S} \doteq -\rho_S A_S \left( \int_0^l \ddot{u}_S \delta u_S + \int_0^l \ddot{v}_S \delta v_S dx \right). \quad (2.45)$$

### Virtuelle Arbeit der Aktorkraft

Die virtuelle Arbeit der Kraft des Piezoaktors ist gegeben durch die Gleichung

$$\delta W_F \doteq F(t)\delta u_A(t). \quad (2.46)$$

### Zusammenfassung der virtuellen Arbeiten

Virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte im Balken

$$\delta W_{E,B} = -E_B I_B \int_0^l [v_B''(1 + v_B'^2)\delta v_B'' + v_B'v_B''^2\delta v_B'] dx. \quad (2.47)$$

Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte im Balken

$$\begin{aligned} \delta W_{T,B} = & -\int_0^l \rho_B A_B \ddot{v}_B \delta v_B dx - \frac{1}{2}\rho_B A_B \int_0^l \left\{ v_B' \int_l^x \left[ \int_0^\xi (v_B''^2) d\tau \right] d\xi \right\}' \delta v_B dx + \\ & -\rho_B I_B \int_0^l \left[ v_B \ddot{v}_B + \frac{1}{2}v_B \dot{v}_B^2 + \frac{1}{6}(v_B^3) \right] \delta v_B dx. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Virtuelle Arbeit der elastischen Kräfte in der Saite

$$\begin{aligned} \delta W_{E,S} = & -E_S A_S \int_0^l (u'_S + \frac{1}{2} v_S'^2) \delta u'_S dx - E_S A_S \int_0^l (u'_S + \frac{1}{2} v_S'^2) v'_S \delta v'_S dx + \\ & -k(u_A - u_S(0, t)) \delta u_A + k(u_A - u_S(0, t)) \delta u_S(0, t). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte in der Saite

$$\delta W_{T,S} = -\rho_S A_S \left( \int_0^l \ddot{u}_S \delta u_S + \int_0^l \ddot{v}_S \delta v_S dx \right). \quad (2.50)$$

Virtuelle Arbeit der Kraft des Piezoaktors

$$\delta W_F = F(t) \delta u_A(t). \quad (2.51)$$

## 2.3 Reduktion des Gesamtsystems auf ein Modell mit drei Freiheitsgraden

Zur Untersuchung der Möglichkeiten der aktiven Dämpfung der Balkenschwingung durch Variation der Saitenspannung wird im Folgenden ein Minimalmodell für das kontinuierliche System verwendet. Mit Hilfe von Näherungsansätzen nach Rayleigh-Ritz für die Verschiebungsfelder von Balken und Saite und dem d'Alembertschen Prinzip wird das kontinuierliche System auf ein Modell mit drei Freiheitsgraden reduziert. Ein Freiheitsgrad für die laterale Balkenschwingung, und je ein Freiheitsgrad für die axiale und laterale Schwingung der Saite.

### Wahl der Ansatzfunktionen für die Verschiebungsfelder von Balken und Saite

Das kontinuierliche Verschiebungsfeld  $v_B(x, t)$  der lateralen Balkenschwingung lässt sich durch Reihendarstellung in der Form

$$v_B(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{Bi}(x) V_{Bi}(t) \quad (2.52)$$

ansetzen. Durch Abbruch der Reihenentwicklung nach dem ersten Term erhält man als Näherung für das laterale Verschiebungsfeld des Balkens

$$v_B(x, t) \doteq \psi_B(x) V_B(t). \quad (2.53)$$

Die Funktion  $\psi_B(x)$  muss dabei so gewählt werden, dass das Verschiebungsfeld  $v_B(x, t)$  die geometrischen Randbedingungen des Balkens für beliebiges  $V_B(t)$  erfüllt. Wie später gezeigt wird, erfüllt die Funktion

$$\psi_B(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \quad (2.54)$$

diese Randbedingungen. Damit lässt sich Gleichung (2.53) schreiben als

$$v_B(x, t) = \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) V_B(t). \quad (2.55)$$

Das axiale Verschiebungsfeld  $u_S(x, t)$  der Saite setzt sich zusammen aus einem Verschiebungsfeld  $u_{S,V}(x)$  aufgrund der Vorspannung der Saite, einem Verschiebungsfeld  $u_{S,B}(x, t)$ , das die axiale

Verschiebung des freien Balkenendes bei einer Auslenkung des Balkens berücksichtigt und einem Verschiebungsfeld  $u_{S,S}(x,t)$  aufgrund der Schwingung der Saite.

$$u_S(x,t) = u_{S,V}(x) + u_{S,B}(x,t) + u_{S,S}(x,t) \quad (2.56)$$

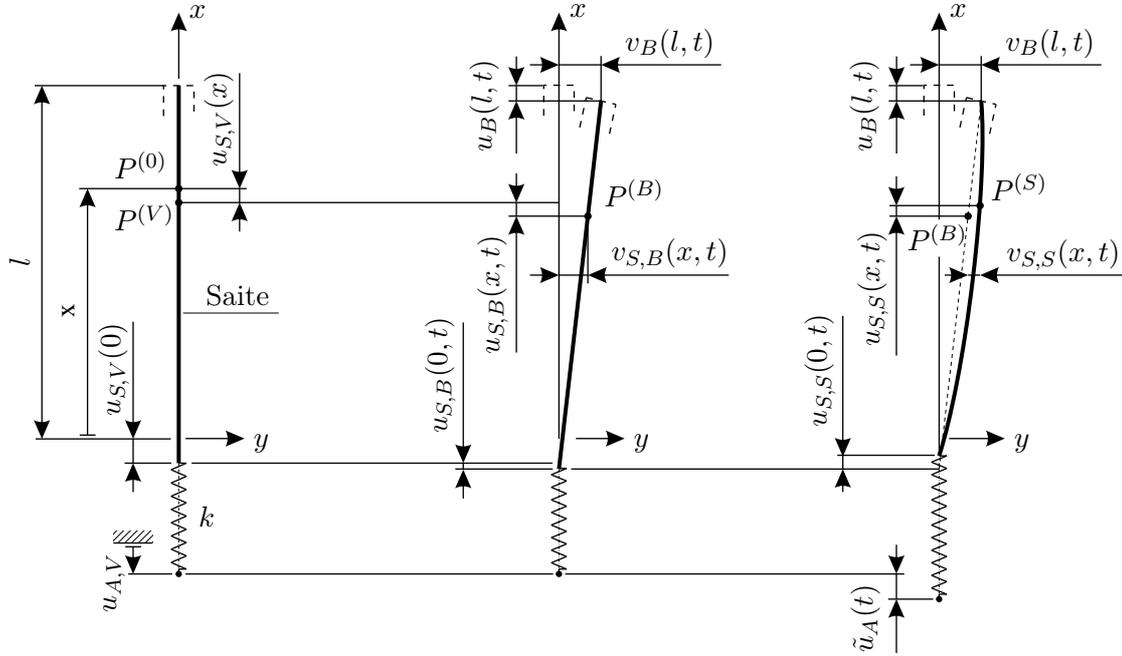


Abb. 2.5: Ansatzfunktionen für die Verschiebungsfelder der Saite

Abbildung 2.5 (links) zeigt den statisch vorgespannten Zustand der Saite. Durch eine konstante Verlängerung des Aktors um  $u_{A,V}$  wird die Saite in axialer Richtung gedehnt. Ein Punkt  $P^{(0)}$  der nicht vorgespannten Saite erfährt durch die Vorspannung eine statische Verschiebung

$$u_{S,V}(x,t) = \frac{l-x}{l} u_{S,V}(0). \quad (2.57)$$

Mit Hilfe der resultierenden Steifigkeit  $k_{ges}$  aus der Serienschaltung der Steifigkeit  $k$  und der Steifigkeit  $k_S = E_S A_S / l$  der Saite,

$$\frac{1}{k_{ges}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_S}, \quad (2.58)$$

und Einführung des Steifigkeitsverhältnisses  $\kappa = k_{ges}/k$  lässt sich schreiben

$$u_{S,V}(x,t) = \frac{l-x}{l} \frac{k}{k+k_S} u_{A,V} = \frac{l-x}{l} (1-\kappa) u_{A,V}. \quad (2.59)$$

Eine Auslenkung des Balkens bewirkt eine axiale Absenkung  $u_B(l,t)$  des freien Balkenendes (siehe Abb. 2.5 (mittig)). Die dadurch verursachte axiale Verschiebung der Saite an der Stelle  $x=0$  beträgt

$$u_{S,B}(0,t) = \frac{k_S}{k+k_S} u_B(l,t) = \kappa u_B(l,t). \quad (2.60)$$

Durch lineare Verteilung der Verschiebungen  $u_{S,B}(0,t)$  und  $u_{S,B}(l,t) = u_B(l,t)$  in axialer Richtung erhält man für das zugehörige axiale Verschiebungsfeld der Saite

$$u_{S,B}(x,t) = \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] u_B(l,t), \quad (2.61)$$

bzw. mit den Gleichungen (2.10) und (2.53)

$$u_{S,B}(x,t) = -\frac{1}{2} \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \int_0^l \psi_B'^2(x) dx V_B^2(t). \quad (2.62)$$

Das laterale Verschiebungsfeld der Saite aufgrund der Balkenauslenkung  $v_B(l,t)$  ergibt sich zu

$$v_{S,B}(x,t) = \frac{x}{l} v_B(l,t) = \frac{x}{l} \psi_B(l) V_B(t). \quad (2.63)$$

Bis jetzt wurden noch keine Freiheitsgrade für die Saitenschwingung eingeführt. Abbildung 2.5 zeigt rechts die schwingende Saite mit den zugehörigen Verschiebungsfeldern  $v_{S,S}(x,t)$  und  $u_{S,S}(x,t)$ . Diese Verschiebungsfelder können durch einen Reihenansatz dargestellt werden als

$$u_{S,S}(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{Si}(x) U_{Si}(t), \quad (2.64)$$

und

$$v_{S,S}(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{Si}(x) V_{Si}(t). \quad (2.65)$$

Um die Saite auf ein System mit zwei Freiheitsgraden zu reduzieren (ein Freiheitsgrad  $U_S(t)$  für die axiale und ein Freiheitsgrad  $V_S(t)$  für die laterale Verschiebung) wird die Reihendarstellung der Verschiebungsfelder (siehe Gleichungen (2.64) und (2.65)) nach dem ersten Term abgebrochen. Man erhält als Näherung für das axiale Verschiebungsfeld

$$u_{S,S}(x,t) \doteq \phi_S(x) U_S(t), \quad (2.66)$$

und für das laterale Verschiebungsfeld

$$v_{S,S}(x,t) \doteq \psi_S(x) V_S(t). \quad (2.67)$$

Die Formfunktionen  $\phi_S(x)$  und  $\psi_S(x)$  müssen so gewählt werden, dass die Verschiebungen  $u_{S,S}(x,t)$  bzw.  $v_{S,S}(x,t)$  für beliebige Werte von  $U_S(t)$  bzw.  $V_S(t)$  die jeweiligen geometrischen Randbedingungen der Saite erfüllen.

Ist die Eigenfrequenz der axialen Saitenschwingung  $u_{S,S}(x,t)$  viel grösser als die Frequenz der Axialkraft  $F(t)$  in der Saite, die durch die Regelung variiert wird, so kann die Kraft  $F(t)$  näherungsweise als quasistatische Belastung betrachtet werden. D.h., die zugehörige axiale Dehnung der Saite, und damit die axiale Verschiebung, ist linear über die Länge der Saite verteilt. Für die Formfunktion  $\phi_S(x)$  kann daher angesetzt werden

$$\phi_S(x) = 1 - \frac{x}{l}. \quad (2.68)$$

Die Formfunktion  $\psi_S(x)$  für das laterale Verschiebungsfeld  $v_{S,S}(x,t)$  wird durch eine Funktion der Gestalt

$$\psi_S(x) = \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.69)$$

angenähert. Damit erhält man für das Verschiebungsfeld aufgrund der axialen Schwingung der Saite

$$u_{S,S}(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) U_S(t), \quad (2.70)$$

und in lateraler Richtung

$$v_{S,S}(x,t) = \sin \frac{\pi x}{l} V_S(t). \quad (2.71)$$

Zusammenfassend lässt sich die Ansatzfunktion für das **axiale Verschiebungsfeld** der Saite unter Verwendung der Gleichungen (2.56), (2.59), (2.62) und (2.70) schreiben als

$$u_S(x, t) = \frac{l-x}{l}(1-\kappa)u_{A,V} - \frac{1}{2} \left[ (1-\kappa)\frac{x}{l} + \kappa \right] \int_0^l \psi_B'^2(x) dx V_B(t)^2 + \left(1 - \frac{x}{l}\right) U_S(t). \quad (2.72)$$

Das **laterale Verschiebungsfeld** der Saite setzt sich zusammen aus dem Verschiebungsfeld  $v_{S,B}(x, t)$  verursacht durch die Balkenauslenkung und dem Verschiebungsfeld  $v_{S,S}(x, t)$  aufgrund der Saitenschwingung. Mit den Gleichungen (2.63) und (2.71) erhält man

$$v_S(x, t) = v_{S,B}(x, t) + v_{S,S}(x, t) = \frac{x}{l} \psi_B(l) V_B(t) + \sin \frac{\pi x}{l} V_S(t). \quad (2.73)$$

### Überprüfung der Randbedingungen für Balken und Saite

Die Ansatzfunktionen für die Verschiebungsfelder von Balken und Saite müssen zumindest die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Die Einspannung des Balkens am unteren Ende liefert die beiden Bedingungen

$$v_B(0, t) = 0 \quad (2.74)$$

und

$$v_B'(0, t) = 0. \quad (2.75)$$

An der Stelle  $x = 0$  muss die laterale Verschiebung der Saite aufgrund der Führung

$$v_S(0, t) = 0 \quad (2.76)$$

sein. Die Verbindung des freien Balkenendes und der Saite wird beschrieben durch

$$v_B(l, t) = v_S(l, t), \quad (2.77)$$

und

$$u_B(l, t) = u_S(l, t). \quad (2.78)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.55) erhält man für

$$v_B(0, t) = \left[ 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right] \Big|_{x=0} V_B(t) = 0, \quad (2.79)$$

und für die zugehörige Ableitung

$$v_B'(0, t) = \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} \Big|_{x=0} V_B(t) = 0. \quad (2.80)$$

Die beiden ersten Randbedingungen (Gleichungen (2.74) und (2.75)) sind also erfüllt. Für die laterale Verschiebung der Saite an der Stelle  $x = 0$  erhält man mit Gleichung (2.73)

$$v_S(0, t) = \left[ \frac{x}{l} \psi_B(l) V_B(t) + \sin \frac{\pi x}{l} V_S(t) \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.81)$$

womit die Bedingung Gleichung (2.76) ebenfalls erfüllt ist. An der Verbindungsstelle von Balken und Saite ergibt sich für die laterale Verschiebung des Balkens

$$v_B(l, t) = \left[ 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right] \Big|_{x=l} V_B(t) = V_B(t), \quad (2.82)$$

und für die der Saite aus den Gleichungen (2.73) und (2.54)

$$v_S(l, t) = \left[ \frac{x}{l} \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) V_B(t) + \sin \frac{\pi x}{l} V_S(t) \right] \Big|_{x=l} = V_B(t). \quad (2.83)$$

Die lateralen Verschiebungen von Balken und Saite an der Stelle  $x = l$  sind also gleich groß, und damit ist die Gleichung (2.77) erfüllt. Zur Überprüfung der Gleichheit der axialen Verschiebungen (Gleichung (2.78)) wird zunächst  $u_S(l, t)$  mit Hilfe von Gleichung (2.72) berechnet. Man erhält

$$\begin{aligned} u_S(l, t) &= \left[ \frac{l-x}{l} (1-\kappa) u_{A,V} - \frac{1}{2} \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{x}{l} \right) U_S(t) \right] \Big|_{x=l} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2(t). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Die bereits im Kapitel 2.2 getroffene Annahme des axial undehnbaren Balkens ergibt für die axiale Verschiebung des freien Balkenendes

$$u_B(l, t) = -\frac{1}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2(t). \quad (2.85)$$

Die Verschiebungen von Balken und Saite an der Verbindungsstelle stimmen also auch in axialer Richtung überein. Damit erfüllen die gewählten Ritz-Ansatzfunktionen für die Verschiebungsfelder von Balken und Saite alle geometrischen Randbedingungen.

## 2.4 Die Bewegungsgleichungen des reduzierten mechanischen Systems

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen des reduzierten mechanischen Systems werden die im vorigen Abschnitt bestimmten Ansatzfunktionen für die Verschiebungsfelder von Balken und Saite in die Ausdrücke für die virtuellen Arbeiten von Balken, Saite und Aktor (Gleichungen (2.47) bis (2.51)) eingesetzt, siehe Anhang, Gleichungen (A.1) bis (A.5).

Das d'Alembertsche Prinzip lässt sich damit schreiben in der Form

$$\delta W_{E,B} + \delta W_{T,B} + \delta W_{E,S} + \delta W_{T,S} + \delta W_F = 0. \quad (2.86)$$

Mit den virtuellen Arbeiten aus den Gleichungen (A.1) bis (A.5) und Ordnung nach den Variationen der Verschiebungen erhält man

$$\begin{aligned} &F_1(V_B, \dot{V}_B, \ddot{V}_B, U_S, \dot{U}_S, V_S, \dot{V}_S, u_A) \delta V_B + \\ &+ F_2(V_B, \dot{V}_B, \ddot{V}_B, U_S, \dot{U}_S, V_S, \dot{V}_S, \tilde{u}_A) \delta U_S + \\ &\quad + F_3(V_B, \dot{V}_B, \ddot{V}_B, U_S, V_S, \dot{V}_S, u_{A,V}) \delta V_S + \\ &\quad + F_4(V_B, U_S, u_A) \delta u_A = 0. \end{aligned} \quad (2.87)$$

(Die Funktionen  $F_1$  bis  $F_4$  können im Detail dem Anhang, Gleichungen (A.6) bis (A.9) entnommen werden.) Damit diese Bedingung erfüllt ist, müssen aufgrund der Beliebigkeit der Variationen  $\delta V_B$ ,

$\delta U_S$ ,  $\delta V_S$  und  $\delta u_A$ , die Funktionen  $F_1$  bis  $F_4$  gleich null sein. Das Gesamtsystem besitzt also vier Freiheitsgrade:  $V_B(t)$ ,  $U_S(t)$ ,  $V_S(t)$  und  $u_A(t)$ . Damit sind die Bewegungsgleichungen gegeben durch

$$F_1(V_B, \dot{V}_B, \ddot{V}_B, U_S, \ddot{U}_S, V_S, \ddot{V}_S, u_A) = 0, \quad (2.88)$$

$$F_2(V_B, \dot{V}_B, \ddot{V}_B, U_S, \ddot{U}_S, V_S, \ddot{u}_A) = 0, \quad (2.89)$$

$$F_3(V_B, \ddot{V}_B, U_S, V_S, \ddot{V}_S, u_{A,V}) = 0. \quad (2.90)$$

Aus der vierten Gleichung

$$F_4(V_B, U_S, u_A) = 0 \quad (2.91)$$

ergibt sich für die Aktorkraft

$$F(t) = k [u_A(t) - u_S(0, t)]. \quad (2.92)$$

Diese Gleichung stellt keine Bewegungsgleichung sondern eine statische Gleichgewichtsbedingung dar, da mit der Verschiebung  $u_A(t)$  des Piezoaktors (siehe Abb. 2.4) keine Masse verbunden ist. Im Folgenden wird angenommen, dass sich der Piezoaktor proportional der angelegten elektrischen Spannung um den Weg  $u_A(t)$  verlängert (siehe [24]), daher kann die Verschiebung  $u_A(t)$  als eingepreßte Größe betrachtet werden und das Gesamtsystem besitzt jetzt drei Freiheitsgrade:  $V_B(t)$ ,  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$ .

Die Aktorkraft setzt sich zusammen aus einem konstanten Vorspannungsanteil  $F_V$  und einem zeitvarianten Anteil  $\tilde{F}(t)$ . Durch Aufspaltung der rechten Seite von Gleichung (2.92) in einen konstanten und einen zeitabhängigen Teil erhält man

$$F_V = k \kappa u_{A,V} \quad (2.93)$$

und

$$\tilde{F}(t) = k \left[ \tilde{u}_A(t) - U_S(t) + \frac{\pi^2 \kappa}{16l} V_B^2(t) \right]. \quad (2.94)$$

Die Bewegungsgleichungen (Gl.(2.88) bis (2.90)) lauten in Matrixform

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q} = \mathbf{f}(t). \quad (2.95)$$

Mit dem Lagevektor

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ V_B(t), U_S(t), V_S(t) \right\}^T, \quad (2.96)$$

einer symmetrischen Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} + \tilde{m}_{11} \frac{V_B^2}{l^2} & \tilde{m}_{12} \frac{V_B}{l} & \bar{m}_{13} \\ \tilde{m}_{21} \frac{V_B}{l} & \bar{m}_{22} & 0 \\ \bar{m}_{31} & 0 & \bar{m}_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

dem Vektor der verallgemeinerten Kräfte

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}_{11} \frac{V_B \dot{V}_B^2}{l^2} + \tilde{k}_{1,1} \frac{V_B^3}{l^2} + \tilde{k}_{1,2} \frac{V_S^2 V_B}{l^2} + \tilde{k}_{1,3} \frac{U_S V_B}{l} \\ \tilde{m}_{21} \frac{\dot{V}_B^2}{l} + \tilde{k}_{2,1} \frac{V_B^2}{l} + \tilde{k}_{2,2} \frac{V_S^2}{l} \\ \tilde{k}_{3,1} \frac{V_S V_B^2}{l^2} + \tilde{k}_{3,2} \frac{V_S^3}{l^2} + \tilde{k}_{3,3} \frac{U_S V_S}{l} \end{array} \right\}, \quad (2.98)$$

der zeitabhängigen diagonalen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa} \frac{F_V}{l} + \tilde{k}_{11} \frac{\tilde{u}_A(t)}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa} \frac{F_V}{l} \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

und dem externen Erregervektor

$$\mathbf{f}(t) = \{ 0, \quad k\tilde{u}_A(t), \quad 0 \}^T. \quad (2.100)$$

Die Koeffizienten  $\bar{m}_{ij}$ ,  $\tilde{m}_{ij}$ ,  $\bar{k}_{ii}$ ,  $\tilde{k}_{ii}$ ,  $\bar{k}_{i,j}$ ,  $\tilde{k}_{i,j}$  können dem Anhang, Gleichungen (A.10) bis (A.31) entnommen werden. Man erkennt, dass die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  einerseits durch die konstante Vorspannkraft  $F_V$ , und andererseits durch die zeitabhängige Längenänderung  $\tilde{u}_A(t)$  des Aktors verändert werden kann. Eine Erhöhung des Betrages der Vorspannkraft  $|F_V|$  bewirkt eine Verringerung des Steifigkeitsparameters der Balkenquerschwingung ( $F_V$  besitzt ein negatives Vorzeichen, siehe Abb. 2.3), wie aus Gleichung (2.99) entnommen werden kann.

Die Längenänderung  $\tilde{u}_A(t)$  des Aktors kann als Stellgröße im regelungstechnischen Sinn betrachtet werden. Durch diese Stellgröße wird ein zeitvarianter Kraftanteil  $\tilde{F}(t)$  in die vorgespannte Saite eingebracht, und damit die Kraft, die auf den Balken in axialer Richtung einwirkt, verändert. Eine geeignete Regelung dieser Kraft ermöglicht, wie später gezeigt wird, eine aktive Dämpfung der Balkenschwingung.

## 2.5 Bestimmung der statischen Stabilitätsgrenze

Das vorgespannte Gesamtsystem bildet den Ausgangszustand für die Regelung des zeitvarianten Kraftanteils  $\tilde{F}(t)$ . Daher ist es notwendig, die Knicklast des Balkens zu bestimmen, um im geregelten Zustand einen genügend großen Abstand zu dieser einhalten zu können. In diesem Abschnitt wird daher die statische Stabilitätsgrenze an einem linearisierten Modell des Gesamtsystems ermittelt. Dazu werden die Bewegungsgleichungen (siehe Gleichung (2.95)) um den vorgespannten (statischen) Zustand des Gesamtsystems, gekennzeichnet durch

$$V_B(0) = U_S(0) = V_S(0) = \tilde{u}_A(0) = 0 \quad (2.101)$$

und dem Verschwinden aller zugehörigen zeitlichen Ableitungen, linearisiert, siehe zum Beispiel [27]. Im Folgenden wird der vorgespannte Zustand durch den Index  $V$  gekennzeichnet.

Die Differentialgleichung für die Balkenquerschwingung aus Gleichung (2.95) lautet

$$\begin{aligned} F_1 = & \left( \bar{m}_{11} + \tilde{m}_{11} \frac{V_B^2}{l^2} \right) \ddot{V}_B + \tilde{m}_{12} \frac{V_B}{l} \ddot{U}_S + \bar{m}_{13} \ddot{V}_S + \tilde{m}_{11} \frac{V_B \dot{V}_B^2}{l^2} + \tilde{k}_{1,1} \frac{V_B^3}{l^2} + \tilde{k}_{1,2} \frac{V_S^2 V_B}{l^2} + \\ & + \tilde{k}_{1,3} \frac{U_S V_B}{l} + \left( \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa} \frac{F_V}{l} + \tilde{k}_{11} \frac{\tilde{u}_A(t)}{l} \right) V_B = 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Linearisiert man diese Differentialgleichung um den vorgespannten Zustand, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{V}_B} \Big|_V \Delta \ddot{V}_B + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{V}_B} \Big|_V \Delta \dot{V}_B + \frac{\partial F_1}{\partial V_B} \Big|_V \Delta V_B + \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{U}_S} \Big|_V \Delta \ddot{U}_S + \frac{\partial F_1}{\partial U_S} \Big|_V \Delta U_S + \\ & + \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{V}_S} \Big|_V \Delta \ddot{V}_S + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{V}_S} \Big|_V \Delta \dot{V}_S + \frac{\partial F_1}{\partial V_S} \Big|_V \Delta V_S + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{u}_A} \Big|_V \Delta \tilde{u}_A = 0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Die Abweichungen der Zustandsgrößen vom vorgespannten Zustand werden durch Voranstellen des  $\Delta$ -Symbols gekennzeichnet. Eine Berechnung der Koeffizienten dieser Differentialgleichung, siehe Anhang, Gleichungen (A.32) bis (A.39), ergibt

$$\bar{m}_{11} \Delta \ddot{V}_B + \left( \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa} \right) \Delta V_B + \bar{m}_{13} \Delta \ddot{V}_S = 0. \quad (2.104)$$

Die Differentialgleichung der Saitenschwingung in axialer Richtung

$$F_2 = \tilde{m}_{21} \frac{V_B}{l} \ddot{V}_B + \bar{m}_{22} \ddot{U}_S + \tilde{m}_{21} \frac{\dot{V}_B^2}{l} + \tilde{k}_{2,1} \frac{V_B^2}{l} + \tilde{k}_{2,2} \frac{V_S^2}{l} + \bar{k}_{22} U_S - k \tilde{u}_A = 0, \quad (2.105)$$

lautet in linearisierter Form

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_2}{\partial \ddot{V}_B} \Big|_V \Delta \ddot{V}_B + \frac{\partial F_2}{\partial \dot{V}_B} \Big|_V \Delta \dot{V}_B + \frac{\partial F_2}{\partial V_B} \Big|_V \Delta V_B + \frac{\partial F_2}{\partial \ddot{U}_S} \Big|_V \Delta \ddot{U}_S + \\ & + \frac{\partial F_2}{\partial U_S} \Big|_V \Delta U_S + \frac{\partial F_2}{\partial V_S} \Big|_V \Delta V_S + \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{u}_A} \Big|_V \Delta \tilde{u}_A = 0, \end{aligned} \quad (2.106)$$

bzw. nach Berechnung der Koeffizienten (siehe Anhang Gleichungen (A.40) bis (A.46))

$$\bar{m}_{22} \Delta \ddot{U}_S + \bar{k}_{22} \Delta U_S = k \Delta \tilde{u}_A. \quad (2.107)$$

Für die Differentialgleichung der Saitenschwingung in lateraler Richtung

$$F_3 = \bar{m}_{31} \ddot{V}_B + \bar{m}_{33} \ddot{V}_S + \tilde{k}_{3,1} \frac{V_S V_B^2}{l^2} + \tilde{k}_{3,2} \frac{V_S^3}{l^2} + \tilde{k}_{3,3} \frac{U_S V_S}{l} + \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa} \frac{V_S}{l} = 0 \quad (2.108)$$

erhält man

$$\frac{\partial F_3}{\partial \ddot{V}_B} \Big|_V \Delta \ddot{V}_B + \frac{\partial F_3}{\partial V_B} \Big|_V \Delta V_B + \frac{\partial F_3}{\partial U_S} \Big|_V \Delta U_S + \frac{\partial F_3}{\partial \ddot{V}_S} \Big|_V \Delta \ddot{V}_S + \frac{\partial F_3}{\partial V_S} \Big|_V \Delta V_S = 0, \quad (2.109)$$

und mit den Koeffizienten, siehe Anhang Gleichungen (A.47) bis (A.51),

$$\bar{m}_{31} \Delta \ddot{V}_B + \bar{m}_{33} \Delta \ddot{V}_S + \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa} \frac{V_S}{l} \Delta V_S = 0. \quad (2.110)$$

Fasst man die Verschiebungen des linearisierten Modells in einem neuen Lagevektor

$$\mathbf{q}_L(t) = \left\{ \Delta V_B(t), \Delta U_S(t), \Delta V_S(t) \right\}^T \quad (2.111)$$

zusammen, so lassen sich die linearisierten Bewegungsgleichungen (Gl.(2.104), Gl.(2.107) und Gl.(2.110)) in der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & 0 & \bar{m}_{13} \\ 0 & \bar{m}_{22} & 0 \\ \bar{m}_{31} & 0 & \bar{m}_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_L} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \ddot{V}_B \\ \Delta \ddot{U}_S \\ \Delta \ddot{V}_S \end{Bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}_L} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa l} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_L} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta V_B \\ \Delta U_S \\ \Delta V_S \end{Bmatrix}}_{\mathbf{q}_L} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ k\Delta \tilde{u}_A \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}_L}, \quad (2.112)$$

mit einer symmetrischen Massenmatrix  $\mathbf{M}_L$ , einer zeitlich konstanten, nur von der Vorspannkraft  $F_V$  abhängigen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_L$  und einem Erregervektor  $\mathbf{f}_L$  schreiben. Man erkennt, daß durch die Linearisierung die Stellgröße  $\tilde{u}_A$  in der Differentialgleichung der Balkenquerschwingung verschwunden ist. Die Steifigkeitsmatrix ist daher im linearen Fall zeitlich konstant, im Gegensatz zum nichtlinearen Fall, siehe Gleichung (2.99). Die linearisierte Stellgröße  $\Delta \tilde{u}_A$  ist jedoch nach wie vor Bestandteil der Differentialgleichung der axialen Saitenschwingung  $U_S(t)$ . Diese ist aber im linearen Fall entkoppelt von den beiden anderen Differentialgleichungen, siehe Gleichung (2.112). Das bedeutet, dass beim linearisierten Modell mit der Stellgröße  $\Delta \tilde{u}_A$  kein Einfluß auf die Balkenquerschwingung ausgeübt werden kann. Alle regelungstechnischen Methoden zur aktiven Dämpfung der Balkenschwingung, die auf einem linearisierten Modell der Regelstrecke beruhen, können daher in diesem Fall nicht angewendet werden.

Zur Berechnung der Knickkraft kann die rechte Seite von Gleichung (2.112) gleich null gesetzt werden, d.h. betrachtet wird ein allgemeines System der Form

$$\mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{q}}_L + \mathbf{K}_L \mathbf{q}_L = \mathbf{0}, \quad (2.113)$$

mit symmetrischer Massenmatrix  $\mathbf{M}_L$  und diagonalen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_L$ . Zur Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_i$  wird der Ansatz

$$\mathbf{q}_L = \hat{\mathbf{q}}_L e^{\lambda t} \quad (2.114)$$

verwendet. Durch Einsetzen von Gleichung (2.114) in Gleichung (2.113) erhält man das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \lambda^2 \mathbf{E}) \hat{\mathbf{q}}_L = \mathbf{0}, \quad (2.115)$$

mit  $\mathbf{A} = -\mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{K}_L$  und der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ . Damit Lösungen  $\hat{\mathbf{q}}_L \neq \mathbf{0}$  möglich sind muss gelten

$$\det(\mathbf{A} - \lambda^2 \mathbf{E}) = 0. \quad (2.116)$$

Eine analytische Lösung dieser Gleichung mit Hilfe des Programmpaketes MAPLE, siehe [37], ergibt

$$\lambda_{1,2} = \pm \left\{ - \frac{\bar{m}_{33} \bar{k}_{11,1} k\kappa l + (\bar{m}_{33} \bar{k}_{11,2} + \bar{m}_{11} \bar{k}_{33}) F_V}{2k\kappa l (\bar{m}_{11} \bar{m}_{33} - \bar{m}_{13}^2)} + \left[ \frac{\bar{m}_{33} \bar{k}_{11,1} k\kappa l}{2k\kappa l (\bar{m}_{11} \bar{m}_{33} - \bar{m}_{13}^2)} + \frac{\bar{m}_{33} \bar{k}_{11,2} + \bar{m}_{11} \bar{k}_{33}}{2k\kappa l (\bar{m}_{11} \bar{m}_{33} - \bar{m}_{13}^2)} F_V \right]^2 - 4(\bar{m}_{11} \bar{m}_{33} - \bar{m}_{13}^2) \left( \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa l} \right) \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa l} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.117)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \left\{ -\frac{\bar{m}_{33}\bar{k}_{11,1}k\kappa l + (\bar{m}_{33}\bar{k}_{11,2} + \bar{m}_{11}\bar{k}_{33})F_V}{2k\kappa l(\bar{m}_{11}\bar{m}_{33} - \bar{m}_{13}^2)} - \left[ \frac{\bar{m}_{33}\bar{k}_{11,1}k\kappa l}{2k\kappa l(\bar{m}_{11}\bar{m}_{33} - \bar{m}_{13}^2)} + \frac{\bar{m}_{33}\bar{k}_{11,2} + \bar{m}_{11}\bar{k}_{33}}{2k\kappa l(\bar{m}_{11}\bar{m}_{33} - \bar{m}_{13}^2)} F_V \right]^2 - 4(\bar{m}_{11}\bar{m}_{33} - \bar{m}_{13}^2) \left( \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2}}{k\kappa l} F_V \right) \frac{\bar{k}_{33}}{k\kappa l} F_V \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.118)$$

und

$$\lambda_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{\bar{k}_{22}}{\bar{m}_{22}}}. \quad (2.119)$$

Man erkennt, daß die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  und  $\lambda_{3,4}$  von der Vorspannkraft  $F_V$  abhängen. In Übereinstimmung mit der Differentialgleichung für die axiale Saitenschwingung, die die Vorspannkraft nicht enthält, siehe Gleichung (2.112), ist  $\lambda_{5,6}$  unabhängig von der Vorspannung konstant. Die Abb. 2.6 zeigt den qualitativen Verlauf der Eigenwerte in Abhängigkeit von der Vorspannkraft  $F_V$ .

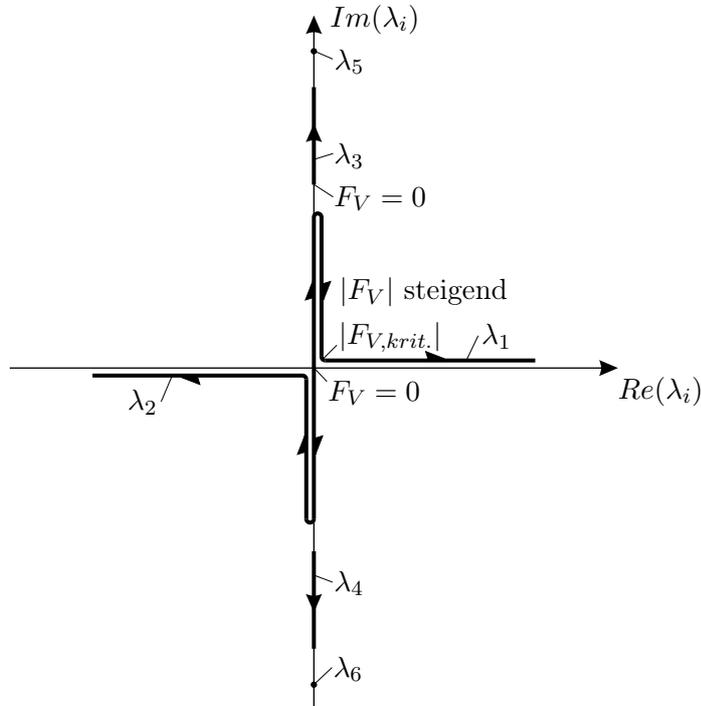


Abb. 2.6: Verlauf der Eigenwerte des linearen Modells in Abhängigkeit der Vorspannkraft  $F_V$

Ist  $|F_V| < |F_{V,krit.}|$  so treten alle Eigenwerte in konjugiert komplexer Form mit verschwindendem Realteil auf. Die Stabilitätsgrenze  $F_V = F_{V,krit.}$  ist erreicht wenn gilt  $\lambda_1(F_{V,krit.}) > 0$ . In diesem Fall wächst der Zustandsvektor  $\mathbf{q}_L$ , bei einer kleinen Anfangsstörung, mit zunehmender Zeit über alle Grenzen, d.h. die Gleichgewichtslage ist instabil. Man erhält die Knickkraft aus der Bedingung

$$\lambda_1(F_{V,krit.}) = 0 \quad (2.120)$$

zu

$$F_{V,krit.} = -k\kappa l \frac{\bar{k}_{11,1}}{\bar{k}_{11,2}} \quad (2.121)$$

Dieses Ergebnis hätte man auch direkt aus der Bewegungsgleichung (2.112) erhalten können. Der Verlust der Stabilität der Gleichgewichtslage tritt genau dann auf, wenn durch die Vorspannkraft  $F_V$  der Steifigkeitsparameter der Balkenquerschwingung verschwindet, wenn also gilt

$$\bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2}}{k_{\kappa l}} F_{V,krit.} = 0, \quad (2.122)$$

woraus sich ebenfalls die Knickkraft gemäß Gleichung (2.121) ergibt.

# 3 Parametrische Regelung der Balkenschwingungen

## 3.1 Prinzip der parametrischen Regelung

Unter dem Begriff der parametrischen Regelung versteht man eine zustandsabhängige Veränderung eines Systemparameters durch die Stellgröße. Bei einer geeigneten Wahl des Regelgesetzes kann damit eine aktive Dämpfung von Schwingungen elastischer Strukturen erreicht werden. In [20] und [21] wurde gezeigt, daß die Schwingungen eines beidseits drehbar gelagerten, elastischen Balkens mit Hilfe einer geregelten Einzelkraft  $P(t)$ , die stets in Richtung der undeformierten Balkenachse wirkt, aktiv gedämpft werden können, siehe Abbildung 3.1.

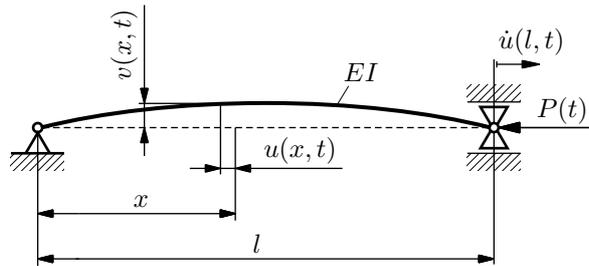


Abb. 3.1: Prinzip der aktiven Dämpfung von Balkenschwingungen mit Hilfe einer axial gerichteten Einzelkraft  $P(t)$ .

Die Kraft  $P(t)$  muss dazu die Bedingung

$$\text{sign}\{P(t)\} = -\text{sign}\{\dot{u}(l, t)\} \quad (3.1)$$

erfüllen. Für eine experimentelle Realisierung genügt also die Messung und Rückführung der axialen Geschwindigkeit des Balkenendpunktes.

In Abbildung 3.2 sind mehrere mögliche Regelgesetze dargestellt, die die Bedingung Gl. (3.1) erfüllen. Eine Möglichkeit ist die proportionale Verstärkung der axialen Geschwindigkeit des Balkenendes,  $P(t) = P_1(t)$ , wie zum Beispiel in [53] und [58] gezeigt. Eine andere Variante ist die Verwendung eines Bang-Bang Regelgesetzes  $P(t) = P_2(t)$ , bzw. dessen Modifikation  $P(t) = P_3(t)$ , siehe zum Beispiel [21], [45] und [52].

Für den in Abbildung 3.1 dargestellten Balken lässt sich die Bewegungsgleichung unter der Annahme eines axial undehnbaren Balkens, Reduktion auf einen Freiheitsgrad  $V(t)$  mit Hilfe eines eingliedrigen Ritzschen Ansatzes für das laterale Verschiebungsfeld

$$v(x, t) = \psi(x)V(t), \quad (3.2)$$

mit

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (3.3)$$

und verschwindender Materialdämpfung in der Form

$$\ddot{V}(t) + [\bar{a} + \tilde{a}P(t)]V(t) = 0 \quad (3.4)$$

schreiben.

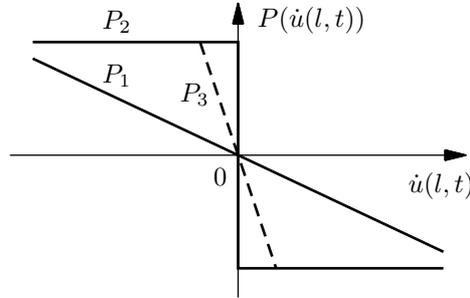


Abb. 3.2: Mögliche Verläufe der Funktion  $P(\dot{u}(l, t))$ .  $P_1$ : Proportional der axialen Geschwindigkeit  $\dot{u}(l, t)$ ,  $P_2$ : Bang-Bang Regelgesetz,  $P_3$ : Modifiziertes Bang-Bang Regelgesetz

Der Steifigkeitsparameter  $\bar{a} + \tilde{a}P(t)$  besteht aus einem konstanten Teil  $\bar{a}$ , und einem durch die axiale Kraft  $P(t)$  veränderbaren Anteil  $\tilde{a}P(t)$ . Verwendet man zum Beispiel das Regelgesetz

$$P(t) = P_1(t) = -\mu\dot{u}(l, t), \quad (3.5)$$

so lässt sich dieses mit Hilfe von Gleichung (2.10) schreiben als

$$P(t) = \mu \int_0^l \psi'^2 dx V(t) \dot{V}(t). \quad (3.6)$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (3.4) erhält man die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\ddot{V} + \bar{a}V + \mu\tilde{a}bV^2\dot{V} = 0, \quad (3.7)$$

mit

$$b = \int_0^l \psi'^2 dx. \quad (3.8)$$

Für den Koeffizienten der lateralen Geschwindigkeit  $\dot{V}$  des Balkens aus der Gleichung (3.7) gilt

$$\mu\tilde{a}bV^2(t) = \begin{cases} > 0 & \text{wenn } V(t) \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } V(t) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Für von null verschiedene Auslenkungen des Balkens stellt der Ausdruck  $\mu\tilde{a}bV^2$  einen Dämpfungsterm dar, dessen Größe durch den Verstärkungsfaktor  $\mu$  verändert werden kann, der sich aber mit dem Quadrat der Auslenkung  $V(t)$  verändert. Das Regelgesetz nach Gleichung (3.5) ist daher am wirksamsten für große Auslenkungen des Balkens.

Durch die Regelung kann also eine Dämpfung der Balkenquerschwingung erreicht werden obwohl im ursprünglich unregulierten System keine Dämpfung, auch keine Materialdämpfung, vorhanden sein muss. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie das Regelgesetz nach Gleichung (3.5) auf den in dieser Arbeit betrachteten Fall des einseitig eingespannten Balkens mit einer Saite im Inneren angewendet wird.

### 3.2 Schwingungsdämpfung durch eine zeitvariable Saitenspannung

Die Abbildung 3.3 zeigt zusammenfassend die Kraft- und Verschiebungsverhältnisse am einseitig eingespannten Balken. Zunächst wird durch eine konstante Verlängerung  $u_{A,V}$  des Aktors eine konstante Vorspannkraft  $F_V$  auf den Balken aufgebracht. Durch eine zeitlich variable Verlängerung  $\tilde{u}_A(t)$  des Aktors wird, ausgehend vom vorgespannten Zustand, eine zeitvariable Spannung in der Saite hervorgerufen und damit eine zeitlich veränderliche Kraft auf den Balken ausgeübt.

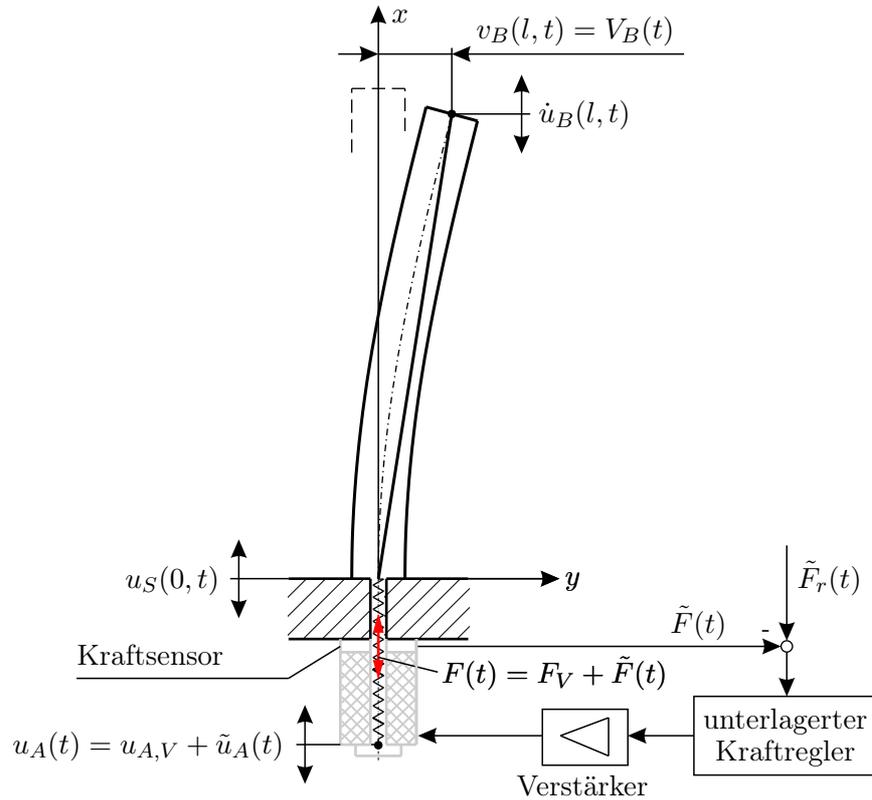


Abb. 3.3: Aufbringen einer zeitlich veränderlichen Axialkraft  $\tilde{F}(t)$  auf den Balken

Nach Gleichung (2.94) gilt für den variablen Kraftanteil  $\tilde{F}(t)$  im geführten Bereich der Saite

$$\tilde{F}(t) = k \left[ \tilde{u}_A(t) - U_S(t) + \frac{\pi^2 \kappa}{16l} V_B^2(t) \right]. \quad (3.10)$$

Damit eine aktive Dämpfung der Balkenquerschwingung möglich ist, muss die Kraft  $\tilde{F}(t)$  einen bestimmten zeitlichen Verlauf besitzen, d.h. der Aktor muss in geeigneter Weise angesteuert werden. Nach Gleichung (3.10) müssen dazu die Zustandsvariablen  $U_S(t)$  und  $V_B(t)$  bekannt sein. Im Hinblick auf eine experimentelle Realisierung bedeutet das, dass diese Größen gemessen werden müssen. Besonders die Messung von  $U_S(t)$ , also der axialen Schwingung der Saite an der Stelle  $x=0$ , ist praktisch nicht möglich. Eine andere Möglichkeit ist die direkte Messung der Kraft  $\tilde{F}(t)$  und die Verwendung eines Kraftreglers, der sicherstellt, dass die tatsächliche Kraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite möglichst gut einem Sollwert  $\tilde{F}_r(t)$  entspricht. (Der Index  $r$  steht dabei für "Referenz- bzw. Sollwert".) Die Abbildung 3.3 zeigt schematisch den unterlagerten Kraftregelkreis. Genaueres, be-

treffend Struktur und Eigenschaften dieses Reglers, ist in Abschnitt 3.4 zu finden. In Analogie zur Gleichung (3.5) lässt sich das Regelgesetz für den variablen Kraftanteil in der Saite in der Form

$$\tilde{F}_r(t) \stackrel{\perp}{=} \tilde{F}_r^I(t) = -\mu^I \dot{u}_B(l, t), \quad (3.11)$$

mit einem konstanten Verstärkungsfaktor  $\mu^I$  und der axialen Geschwindigkeit  $\dot{u}_B(l, t)$  des freien Balkenendes, schreiben. (Im Folgenden wird dieses Regelgesetz durch das Superskript  $I$  gekennzeichnet.) Mit der bereits getroffenen Vereinfachung eines axial undehnbaren Balkens lässt sich dieses Regelgesetz mit Hilfe der Gleichungen (2.10) und (2.53) schreiben als

$$\tilde{F}_r^I(t) = \mu^I \frac{\pi^2}{8l} V_B \dot{V}_B. \quad (3.12)$$

Damit erhält man einen geschlossenen Regelkreis wie in Abbildung 3.4 schematisch gezeigt. Das äquivalente Blockschaltbild ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

Zur Bildung der Sollkraft  $\tilde{F}_r(t)$  gemäß Gleichung (3.12) wird die laterale Verschiebung  $V_B(t)$  und die laterale Geschwindigkeit  $\dot{V}_B(t)$  des freien Balkenendes benötigt. In dem, im Rahmen dieser Arbeit aufgebauten Versuchsstand wird die Verschiebung  $V_B(t)$  mit Hilfe eines Wegsensors gemessen, und die Geschwindigkeit  $\dot{V}_B(t)$  durch numerische Differentiation nach der Zeit bestimmt (siehe Kapitel 5).

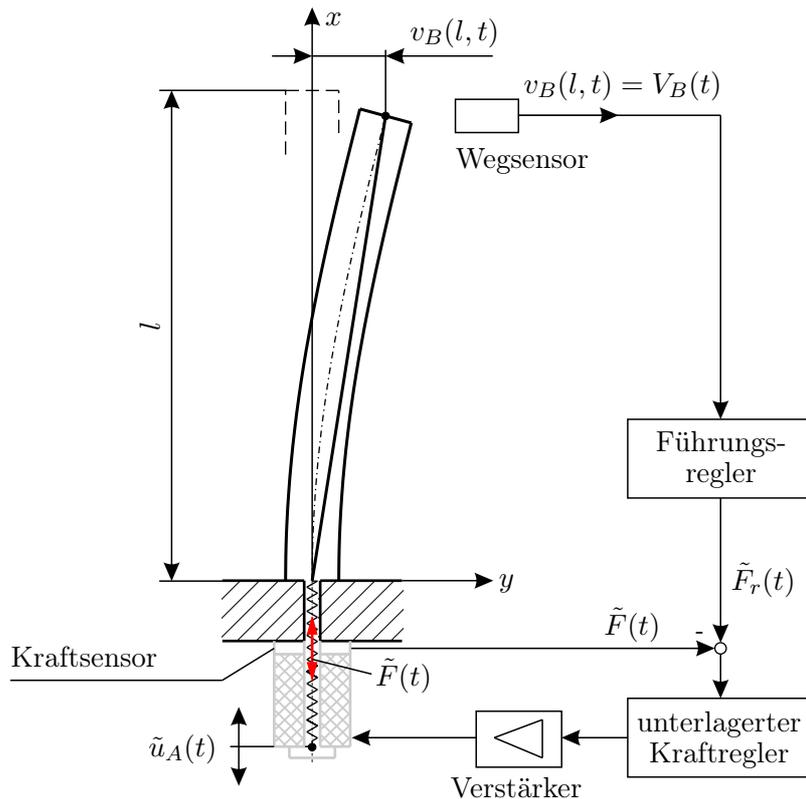


Abb. 3.4: Prinzipskizze des geregelten Gesamtsystems

Die Bewegungsgleichung des offenen Regelkreises (siehe Gl. (2.95)) lautet

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (3.13)$$

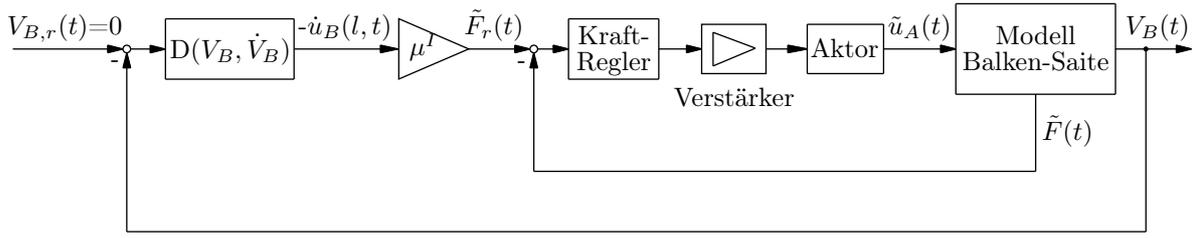


Abb. 3.5: Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises

wobei die Stellgröße  $\tilde{u}_A(t)$  Bestandteil der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa} \frac{1}{l} + \tilde{k}_{11} \frac{\tilde{u}_A(t)}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa} \frac{1}{l} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

und des Erregervektors

$$\mathbf{f}(t) = \{ 0, \quad k\tilde{u}_A(t), \quad 0 \}^T \quad (3.15)$$

ist. Setzt man voraus, dass der unterlagerte Kraftregler ideales Verhalten besitzt, d.h.

$$\tilde{F}(t) = \tilde{F}_r^I(t), \quad (3.16)$$

die tatsächliche Kraft in der Saite also dem Sollwert entspricht, so gilt für die Verlängerung  $\tilde{u}_A(t)$  des Aktors mit Hilfe der Gleichungen (3.10) und (3.12)

$$\tilde{u}_A(t) = \mu^I \frac{\pi^2}{8kl} V_B \dot{V}_B + U_S(t) - \frac{\pi^2 \kappa}{16l} V_B^2(t). \quad (3.17)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Bewegungsgleichung (Gleichung (3.13)) ein, d.h. in die Steifigkeitsmatrix Gleichung (3.14) und in den Erregervektor (3.15), so gelangt man zu den Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises in der Form

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = \mathbf{f}^*. \quad (3.18)$$

Die Massenmatrix bleibt unverändert, d.h.

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}). \quad (3.19)$$

Die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa} \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{22} - k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa} \frac{1}{l} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

ist jetzt nicht mehr zeitabhängig. Für den Erregervektor ergibt sich

$$\mathbf{f}^* = \{ 0, 0, 0 \}^T, \quad (3.21)$$

und der Vektor der verallgemeinerten Kräfte lässt sich in der Form

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\tilde{k}_{11}}{l} \left( U_S V_B - \frac{\pi^2 \kappa}{16l} V_B^3 \right) \\ \frac{\pi^2 k \kappa}{16l} V_B^2 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad (3.22)$$

schreiben. Wie im Fall der aktiven Dämpfung des beidseitig gelenkig gelagerten Balkens aus Abschnitt 3.1 entsteht durch die Regelung eine Dämpfung der Balkenquerschwingung. Die Dämpfungsmatrix besitzt die Form

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} c_{11}^I & 0 & 0 \\ -\mu^I \frac{\pi^2 V_B}{8 l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

mit dem Dämpfungskoeffizienten

$$c_{11}^I = \mu^I \frac{\pi^2 \tilde{k}_{11}}{8kl^2} V_B(t)^2 = \begin{cases} > 0 & \text{wenn } V_B(t) \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } V_B(t) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

der Balkenquerschwingung. Ist der Balken ausgelenkt, also  $V_B(t) \neq 0$ , so wird durch die Regelung ein Dämpfungsterm  $c_{11} > 0$  hervorgerufen. Wie aus Gleichung (3.24) ersichtlich ändert sich  $c_{11}$  mit dem Quadrat der Auslenkung  $V_B(t)$ . Für große Auslenkungen des Balkens ist das Regelgesetz nach Gleichung (3.11) daher am wirksamsten, während für kleine Auslenkungen kaum ein Dämpfungseffekt zu erwarten ist.

### Eigenschaften einer konstanten Verstärkung von $\dot{u}_B(l, t)$

Um die Eigenschaften einer Sollkraftvorgabe durch konstante Verstärkung der axialen Geschwindigkeit  $\dot{u}_B(l, t)$  des freien Endes des Balkens zu beschreiben wird angenommen, dass sich die freie Schwingung  $V_B(t)$  des Balkens näherungsweise beschreiben lässt durch

$$V_B(t) \cong \hat{V}_B(t) \cos \omega_B t, \quad (3.25)$$

wobei  $\omega_B$  die erste Biegeeigenfrequenz des Balkens bedeutet. Trotz der nichtlinearen Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises wird also eine Schwingung mit konstanter Frequenz  $\omega_B$  als Näherungsansatz verwendet. Differentiation von Gleichung (3.25) nach der Zeit ergibt für die laterale Geschwindigkeit

$$\dot{V}_B(t) \cong \dot{\hat{V}}_B(t) \cos \omega_B t - \omega_B \hat{V}_B(t) \sin \omega_B t. \quad (3.26)$$

Ist der durch die Regelung hervorgerufene Dämpfungsterm in der Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises von der Gestalt  $c_1 \dot{V}_B(t)$ , ( $c_1 = \text{const.}$ ), so kann man schreiben

$$\hat{V}_B(t) = \hat{V}_B(0)e^{-D\omega_B t} \quad (3.27)$$

und

$$\dot{\hat{V}}_B(t) = -\omega_B D \hat{V}_B(0) e^{-D\omega_B t}, \quad (3.28)$$

mit dem Lehrschen Dämpfungsmaß  $D$ . Einsetzen in die Gleichung (3.26) ergibt

$$\dot{V}_B(t) = -\omega_B \hat{V}_B(0) [D \cos \omega_B t + \sin \omega_B t] e^{-D\omega_B t}. \quad (3.29)$$

Für  $D \ll 1$  kann der Term  $D \cos \omega_B t$  gegenüber dem Term  $\sin \omega_B t$  vernachlässigt werden. Damit kann man  $\dot{V}_B(t)$  näherungsweise in der Form

$$\dot{V}_B(t) \cong -\omega_B \hat{V}_B(t) \sin \omega_B t \quad (3.30)$$

schreiben. Ist der Dämpfungsterm nicht von der Gestalt  $c_1 \dot{V}_B(t)$ , sondern besitzt zum Beispiel die nichtlineare Form  $c_2 V_B^2(t) \dot{V}_B(t)$ , wobei  $c_1 = c_2 V_B^2(0)$  gelten soll, so ist die Näherung Gleichung (3.30) ebenso erfüllt, da in diesem Fall

$$\hat{V}_B(t) \Big|_{\text{nichtlineare Dämpfung}} > \hat{V}_B(0) e^{-D\omega_B t}, \quad (3.31)$$

und

$$\dot{\hat{V}}_B(t) \Big|_{\text{nichtlineare Dämpfung}} > -\omega_B D \hat{V}_B(0) e^{-D\omega_B t} \quad (3.32)$$

gilt, also in Gleichung (3.26) der Term  $\dot{\hat{V}}_B(t) \cos \omega_B t$  vernachlässigt werden kann. Mit den Gleichungen (3.25) und (3.30) lässt sich das Regelgesetz, Gleichung (3.12), in der Form

$$\tilde{F}_r^I(t) = \mu^I \frac{\pi^2}{8l} V_B(t) \dot{V}_B(t) \cong -\hat{F}_r^I \sin 2\omega_B t, \quad (3.33)$$

mit

$$\hat{F}_r^I = \mu^I \frac{\pi^2}{16l} \omega_B \hat{V}_B^2(t) \quad (3.34)$$

schreiben. Die Frequenz der Sollkraft  $\tilde{F}_r^I$  ist doppelt so groß wie die erste Biegeeigenfrequenz  $\omega_B$  des Balkens und die Amplitude  $\hat{F}_r^I$  ändert sich mit dem Quadrat der Amplitude  $\hat{V}_B(t)$  der Balkenauslenkung. Je größer die Auslenkung des Balkens ist, umso größer ist auch der Sollwert der Kraft  $\tilde{F}_r^I$  für den unterlagerten Kraftregler. Da jedoch die Verlängerung des Aktors beschränkt ist, gibt es eine maximale Kraftamplitude  $\hat{F}_{r,max}$ , die in der Saite noch erzeugt werden kann. Nach Gleichung (3.34) tritt  $\hat{F}_{r,max}$  bei einer maximalen Amplitude der Balkenauslenkung  $\hat{V}_{B,max}$  auf. D.h., es gibt einen Bereich  $0 < \hat{V}_B < \hat{V}_{B,max}$  innerhalb dessen Kraftregler inklusive Aktor die Regelaufgabe erfüllen können. Gibt man eine maximale Auslenkung vor, so berechnet sich aus Gleichung (3.34) der zugehörige Verstärkungsfaktor des Reglers zu

$$\mu^I = \frac{16l}{\pi^2 \omega_B} \frac{\hat{F}_{r,max}}{\hat{V}_{B,max}^2}. \quad (3.35)$$

Die Beschränkung der Balkenauslenkung auf einen bestimmten Bereich stellt einen erheblichen Nachteil dieses Regelgesetzes dar, und eine mögliche Verbesserung kann daher eine Beschränkung

der Sollkraftvorgabe auf einen maximalen Wert sein, der vom Aktor noch erzeugt werden kann, unabhängig von der Balkenauslenkung. Ein weiterer Nachteil ist das schnelle Absinken der Kraftamplitude  $\hat{F}_r^I(t)$  mit dem Quadrat der Auslenkungsamplitude  $\hat{V}_B(t)$ . Es ist zu erwarten, dass die Dämpfungswirkung größer ist, wenn die Kraft in der Saite langsamer absinkt. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, können beide Forderungen durch die Einführung einer zustandsabhängigen Verstärkung erfüllt werden.

### 3.3 Einführung einer zustandsabhängigen Verstärkung

Die am Ende des vorigen Abschnitts angeführten Verbesserungsmöglichkeiten werden grundsätzlich durch die Verwendung eines modifizierten Bang-Bang Regelgesetzes, siehe Abbildung 3.6, erfüllt. Ist  $|\dot{u}_B(l, t)| > \dot{u}_G$ , dann bleibt die Amplitude der Sollkraft konstant und beschränkt auf  $\hat{F}_{r,max}$ . Damit die Sollkraftamplitude in einem grossen Bereich von  $\dot{u}_B(l, t)$  konstant gehalten werden kann, muss der Winkel  $\Theta$  entsprechend klein gewählt werden. Mit kleiner werdendem  $\Theta$  nähert sich die Sollkraft  $\tilde{F}_r(t)$  aber immer mehr einer Rechtecksfunktion an, die, einerseits schwer realisierbar ist und andererseits die Gefahr von Instabilität mit sich bringt. Ein weiterer Nachteil eines kleinen Winkels  $\Theta$  ist, daß im Bereich  $|\dot{u}_B(l, t)| < \dot{u}_G$  schon kleine Störungen in  $\dot{u}_B(l, t)$  genügen, um ein vollständiges Aussteuern des Reglers hervorzurufen, siehe auch [21].

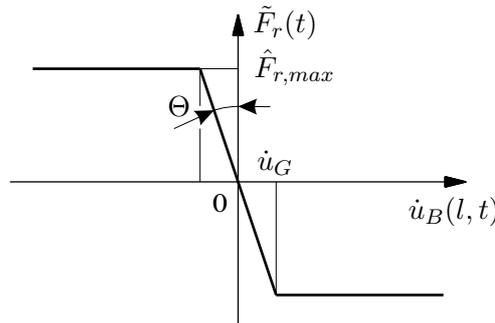


Abb. 3.6: Modifiziertes Bang-Bang Regelgesetz

Eine andere Möglichkeit, die Sollkraftamplitude für einen möglichst grossen Bereich von  $\dot{u}_B(l, t)$  konstant zu halten ist die Einführung einer zustandsabhängigen Verstärkung von  $\dot{u}_B(l, t)$ . Die Abbildung 3.7 zeigt schematisch den Verlauf der Sollkraftamplitude  $\hat{F}_r^I$  in Abhängigkeit der Amplitude  $\hat{V}_B$  der Balkenauslenkung gemäß Gleichung (3.34). Man erkennt, dass, ausgehend von einem Maximalwert  $\hat{F}_{r,max}$ , die Sollkraftamplitude sehr schnell absinkt. Der zugehörige Verstärkungsfaktor  $\mu^I$  ist unabhängig von der Auslenkung konstant. Die zweite Kurve  $\hat{F}_r^{II}$  zeigt den angestrebten Sollkraftverlauf. Für grosse Auslenkungen des Balkens soll die Kraftamplitude näherungsweise konstant bleiben und erst bei kleineren Auslenkungen beginnen, gegen Null abzusinken. Dadurch, dass stets  $\hat{F}_r^{II} > \hat{F}_r^I$  für  $\hat{V}_B < \hat{V}_{B,max}$  gilt, ist eine verbesserte Dämpfungswirkung zu erwarten. Dazu wird statt einer konstanten Verstärkung der axialen Geschwindigkeit des freien Balkenendes eine zustandsabhängige Verstärkung  $\mu^{II}(V_B, \dot{V}_B)$  eingeführt. Die Abbildung 3.7 zeigt den schematischen Verlauf des Verstärkungsfaktors  $\mu^{II}$ . Um, ausgehend von  $\hat{V}_{B,max}$ , mit kleiner werdender Auslenkung  $\hat{V}_B$  die Sollkraftamplitude  $\hat{F}_r^{II}$  konstant zu halten, muss  $\mu^{II}$  entsprechend ansteigen. Bei kleinen Auslenkungen soll der Verstärkungsfaktor beschränkt bleiben, damit  $\hat{F}_r^{II}$  gegen Null geht. Durch eine geeignete Wahl des Verstärkungsfaktors kann der Verlauf der Sollkraftamplitude  $\hat{F}_r^{II}$

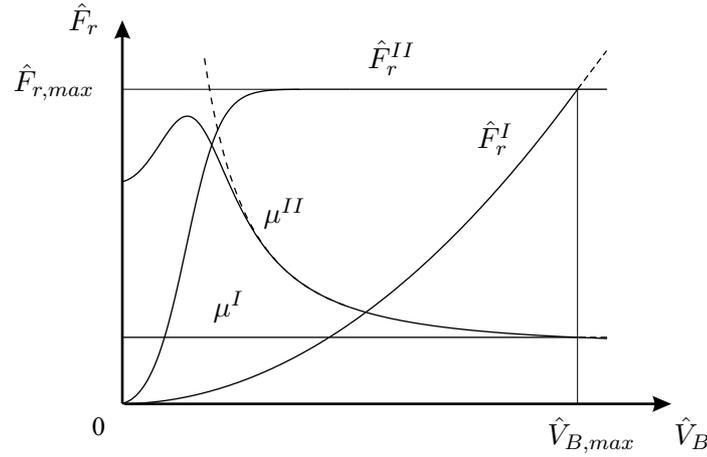


Abb. 3.7: Angestrebter Sollkraftverlauf  $\hat{F}_r^{II}$  durch zustandsabhängige Verstärkung von  $\dot{u}_B(l, t)$

entsprechend beeinflusst werden. Das Regelgesetz mit zustandsabhängiger Verstärkung kann in der allgemeinen Form

$$\tilde{F}_r(t) \stackrel{\perp}{=} \tilde{F}_r^{II}(t) = -\mu^{II}(V_B, \dot{V}_B)\dot{u}_B(l, t) \quad (3.36)$$

geschrieben werden. Für den Verstärkungsfaktor  $\mu^{II}$  wird der Ansatz

$$\mu^{II} = \frac{\eta\omega_B}{a_1 E_{pot} + a_2 E_{kin} + a(V_B, \dot{V}_B)} \quad (3.37)$$

gewählt. Darin liegt natürlich eine gewisse Willkür begründet, wenngleich der Verstärkungsfaktor nach Gleichung (3.37) mit sinkender Gesamtenergie des Balkens ansteigt, und damit den in Abbildung 3.7 dargestellten Verlauf grundsätzlich erfüllt. In der obigen Gleichung bedeuten  $E_{pot}$  und  $E_{kin}$  die potentielle und kinetische Energie des Balkens, und  $\eta$ ,  $a_1$  und  $a_2$  sind Konstante. Die bis jetzt noch nicht näher bekannte Funktion  $a(V_B, \dot{V}_B)$  soll den Übergang von  $\hat{F}_r^{II}$  von einem konstanten Wert bei grossen Auslenkungen hin zum Nullpunkt ermöglichen und wird daher im Folgenden auch als Abschaltfunktion bezeichnet. Die potentielle und kinetische Energie des Balkens sind gegeben durch

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_0^l E_B I_B v_B''^2(x, t) dx = \frac{\pi^4}{64l^3} E_B I_B V_B^2(t), \quad (3.38)$$

bzw.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho_B A_B \int_0^l \dot{v}_B^2(x, t) dx = \rho_B A_B l \frac{3\pi - 8}{4\pi} \dot{V}_B^2(t). \quad (3.39)$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke in die Definitionsgleichung (3.37) für den Verstärkungsfaktor  $\mu^{II}$  ein, wählt die Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  zu

$$a_1 = \omega_B^2 \frac{64l^3}{\pi^4 E_B I_B}, \quad (3.40)$$

und

$$a_2 = \frac{4\pi}{\rho_B A_B l (3\pi - 8)}, \quad (3.41)$$

so erhält man

$$\mu^{II} = \frac{\eta\omega_B}{(\omega_B V_B)^2 + \dot{V}_B^2 + a(V_B, \dot{V}_B)}. \quad (3.42)$$

Der Verstärkungsfaktor  $\mu^{II}$  ist also abhängig von der Auslenkung  $V_B(t)$  und der Geschwindigkeit  $\dot{V}_B(t)$  des Balkens. Das Regelgesetz Gleichung (3.36) lautet damit

$$\tilde{F}_r^{II}(t) = -\mu^{II} \dot{u}_B(l, t) = \eta \frac{\pi^2}{8l} \frac{\omega_B V_B \dot{V}_B}{(\omega_B V_B)^2 + \dot{V}_B^2 + a(V_B, \dot{V}_B)}. \quad (3.43)$$

### Herleitung der Abschaltfunktion

Mit Hilfe der Näherungsansätze für  $V_B(t)$  und  $\dot{V}_B(t)$  gemäß den Gleichungen (3.25) und (3.30) lässt sich  $\tilde{F}_r^{II}(t)$  in der Form

$$\tilde{F}_r^{II}(t) = -\hat{F}_r^{II} \sin 2\omega_B t, \quad (3.44)$$

mit

$$\hat{F}_r^{II} = \eta \frac{\pi^2}{16l} \frac{\hat{V}_B^2}{\hat{V}_B^2 + \omega_B^{-2} a(V_B, \dot{V}_B)} = \begin{cases} \eta \frac{\pi^2}{16l} & \text{für } a(V_B, \dot{V}_B) = 0 \\ < \eta \frac{\pi^2}{16l} & \text{für } a(V_B, \dot{V}_B) > 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

schreiben. Ist die, bis jetzt noch nicht definierte, Funktion  $a(V_B, \dot{V}_B) = 0$ , so gilt  $\hat{F}_r^{II} \stackrel{!}{=} \hat{F}_{r,max} = \eta \pi^2 / (16l)$ , d.h. die Sollkraftamplitude ist konstant. Für  $a(V_B, \dot{V}_B) > 0$  gilt  $\hat{F}_r^{II} < \hat{F}_{r,max}$ . Daraus lassen sich die Eigenschaften

$$\begin{aligned} a(V_B, \dot{V}_B) = 0 & \quad \text{wenn} \quad \hat{V}_B \gg 0 & \quad \text{und} \\ a(V_B, \dot{V}_B) > 0 & \quad \text{wenn} \quad \hat{V}_B = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

ableiten, die die Funktion  $a(V_B, \dot{V}_B)$  besitzen muss, um einen prinzipiellen Sollkraftverlauf  $\hat{F}_r^{II}$  wie in Abbildung 3.7 dargestellt zu ermöglichen. Wählt man für  $a$  den Ansatz

$$a(V_B, \dot{V}_B) = \frac{\gamma}{e^{\beta(a_1 E_{pot} + a_2 E_{kin})}}, \quad (3.47)$$

mit den Konstanten  $\beta > 0$  und  $\gamma > 0$ , so erhält man mit den Gleichungen (3.38) bis (3.41)

$$a(V_B, \dot{V}_B) = \frac{\gamma}{e^{\beta(\omega_B^2 V_B^2 + \dot{V}_B^2)}}. \quad (3.48)$$

Einsetzen der Näherungsansätze für  $V_B(t)$  und  $\dot{V}_B(t)$  (siehe Gleichungen (3.25) und (3.30)) ergibt

$$a = \frac{\gamma}{e^{\beta \omega_B^2 \hat{V}_B^2}} = \begin{cases} \sim 0 & \text{wenn } \hat{V}_B \gg 0 \\ \gamma & \text{wenn } \hat{V}_B = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Bei entsprechender Wahl der Konstanten  $\beta$  und  $\gamma$  ist für große Auslenkungen  $\hat{V}_B$  die Funktion  $a \sim 0$ , und für  $\hat{V}_B = 0$  gilt  $a = \gamma$ . Die erste Bedingung aus Gleichung (3.46) ist daher näherungsweise, die zweite hingegen exakt erfüllt.

Mit Gleichung (3.49) kann die Amplitude der Sollkraft, Gleichung (3.45), in der Form

$$\hat{F}_r^{II} = \eta \frac{\pi^2}{16l} \frac{\hat{V}_B^2}{\hat{V}_B^2 + \omega_B^{-2} \gamma e^{-\beta \omega_B^2 \hat{V}_B^2}} \quad (3.50)$$

geschrieben werden. Man sieht, dass in der Gleichgewichtslage  $\hat{V}_B = 0$  des Balkens die Sollkraftamplitude wie gewünscht gleich null ist. Für  $\hat{V}_B \rightarrow \infty$  gilt:  $\hat{F}_r^{II} \rightarrow \hat{F}_{r,max}$ , die Sollkraftamplitude bleibt beschränkt. Differenziert man Gleichung (3.50) nach  $\hat{V}_B$ , so erhält man

$$\frac{d}{d\hat{V}_B} \hat{F}_r^{II} = 2\eta \frac{\pi^2}{16l} \frac{\gamma \hat{V}_B (\omega_B^{-2} + \beta \hat{V}_B^2) e^{\beta \omega_B^2 \hat{V}_B^2}}{\left( \gamma \omega_B^{-2} + \hat{V}_B^2 e^{\beta \omega_B^2 \hat{V}_B^2} \right)^2}, \quad (3.51)$$

bzw. an der Stelle  $\hat{V}_B = 0$

$$\left. \frac{d}{d\hat{V}_B} \hat{F}_r^{II} \right|_{\hat{V}_B=0} = 0. \quad (3.52)$$

Die Funktion  $\hat{F}_r^{II}$  besitzt also eine horizontale Tangente bei  $\hat{V}_B = 0$ .

Für das Regelgesetz, (Gl. 3.43), erhält man schlussendlich mit Gleichung (3.48)

$$\tilde{F}_r^{II}(t) = \eta \frac{\pi^2}{8l} \frac{\omega_B V_B \dot{V}_B}{(\omega_B V_B)^2 + \dot{V}_B^2 + \gamma e^{-\beta(\omega_B^2 V_B^2 + \dot{V}_B^2)}}. \quad (3.53)$$

Mit Hilfe der Konstanten  $\beta$  und  $\gamma$  kann der Abfall der Sollkraftamplitude  $\hat{F}_r^{II}$  festgelegt werden. Die Abbildung 3.8 zeigt dazu eine Möglichkeit durch Vorgabe von Kraftamplituden  $\hat{F}_1$  und  $\hat{F}_2$  bei bestimmten Auslenkungsamplituden  $\hat{V}_{B,1}$  bzw.  $\hat{V}_{B,2}$ .

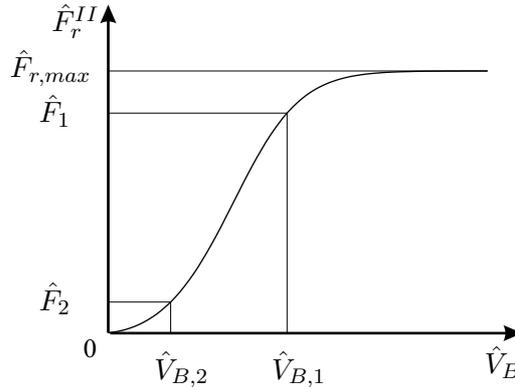


Abb. 3.8: Festlegung des Amplitudenabfalls von  $F_r^{II}(t)$ .

Die Kraftamplituden  $\hat{F}_1$  und  $\hat{F}_2$  können zum Beispiel im Verhältnis zur Maximalkraft  $\hat{F}_{r,max}$  definiert werden durch die Gleichungen

$$\hat{F}_1(\hat{V}_{B,1}) = s_1 \hat{F}_{r,max}, \quad (3.54)$$

und

$$\hat{F}_2(\hat{V}_{B,2}) = s_2 \hat{F}_{r,max}. \quad (3.55)$$

Damit sind zwei Bestimmungsgleichungen für die beiden Unbekannten  $\beta$  und  $\gamma$  gegeben, und aus Gleichung (3.50) erhält man

$$\beta = \frac{1}{\omega_B^2 (\hat{V}_{B,1}^2 - \hat{V}_{B,2}^2)} \ln \left[ \frac{s_1 (1 - s_2) \hat{V}_{B,2}^2}{s_2 (1 - s_1) \hat{V}_{B,1}^2} \right], \quad (3.56)$$

und

$$\gamma = \frac{1 - s_1}{s_1} \hat{V}_{B,1}^2 \omega_B^2 \left[ \frac{s_1(1 - s_2) \hat{V}_{B,2}^2}{s_2(1 - s_1) \hat{V}_{B,1}^2} \right] \frac{\hat{V}_{B,1}^2}{\hat{V}_{B,1}^2 - \hat{V}_{B,2}^2}. \quad (3.57)$$

Um den Einfluß der Funktion  $a$  auf den Verlauf des Amplitudenabfalls  $\hat{F}_r^{II}$  darzustellen wurden mehrere Parametersätze mit zugehörigen Wertepaaren  $(\hat{V}_{B,1}, s_1)$  bzw.  $(\hat{V}_{B,2}, s_2)$  sowie eine Maximalkraft  $\hat{F}_{r,max}$  definiert, siehe Tabelle 3.1.

Tab. 3.1: Definition der Parametersätze  $P^{II,1}$  bis  $P^{II,4}$  zum Regelgesetz  $II$

Kenngroße	$P^{II,1}$	$P^{II,2}$	$P^{II,3}$	$P^{II,4}$	Einheit
$\hat{V}_{B,1}$	0.8e-3	0.5e-3	0.2e-3	0.2e-3	m
$s_1$		0.05			-
$\hat{V}_{B,2}$	1.4e-3	1.2e-3	1.0e-3	0.5e-3	m
$s_2$		0.90			-
$\hat{F}_{r,max}$		15			N
$\hat{V}_{B,max}$		2e-3			m
$\omega_B$		174.912			s <sup>-1</sup>

So beträgt beim Parametersatz  $P^{II,1}$  bei einer Auslenkungsamplitude  $\hat{V}_{B,1} = 0.8$  mm die Kraftamplitude nur noch 5% des Maximalwertes  $\hat{F}_{r,max}$ , bei  $\hat{V}_{B,2} = 1.4$  mm aber noch 90%. In analoger Weise sind die übrigen drei Parametersätze definiert. Die Werte für  $s_1$  und  $s_2$  sind für alle Parametersätze identisch, es wurden lediglich die Werte der Auslenkungsamplituden verändert. Der einzige Parameter des mechanischen Systems der für die Reglerauslegung erforderlich ist, ist die erste Biegeeigenkreisfrequenz  $\omega_B$ . Der in der Tabelle angeführte Wert basiert bereits auf den Abmessungen des Versuchsaufbaues. Eine detaillierte Auflistung aller Systemparameter des Versuchsaufbaues ist im Abschnitt 4.2 zu finden.

Das erste Diagramm aus der Abbildung 3.9 oben zeigt den Verlauf der Amplitude  $\hat{F}_r^{II}$  der Sollkraft in Abhängigkeit von der Auslenkungsamplitude  $\hat{V}_B$  des Balkens gemäß Gleichung (3.50) für die Parametersätze  $P^{II,1}$  bis  $P^{II,4}$ . Die numerische Auswertung erfolgte mit Hilfe des Programmpaketes MATLAB, siehe [38]. Man erkennt, daß durch die Wahl von  $(\hat{V}_{B,1}, s_1)$  und  $(\hat{V}_{B,2}, s_2)$  entsprechend Tabelle 3.1 der Abfall der Sollkraftamplitude zu immer kleineren Auslenkungen des Balkens hin verschoben wird. Das mittlere Diagramm zeigt den Verlauf der Abschaltfunktion  $a$  für die Parametersätze  $P^{II,1}$  und  $P^{II,2}$ . Im Fall des Parametersatzes  $P^{II,2}$  ist der Wert der Abschaltfunktion stets kleiner als bei  $P^{II,1}$ , und daher ist die Sollkraftamplitude von  $P^{II,2}$  immer größer als bei  $P^{II,1}$ , d.h., je kleiner der Wert der Funktion  $a$  ist, umso später setzt der Abfall der Sollkraftamplitude ein. Das untere Diagramm zeigt die Abschaltfunktion für die Parametersätze  $P^{II,3}$  und  $P^{II,4}$ . Da die zugehörigen Sollkraftverläufe einen gemeinsamen Punkt bei  $\hat{V}_{B,1} = 0.2$  mm besitzen, siehe Tabelle 3.1, müssen die Abschaltfunktionen einen Schnittpunkt an dieser Stelle besitzen.

Im Bereich  $\hat{V}_B > 0.2$  mm ist der Wert von  $a$  für  $P^{II,3}$  größer als für  $P^{II,4}$  und daher ist die Kraftamplitude in diesem Bereich für  $P^{II,3}$  kleiner. Erst nach dem Schnittpunkt tritt eine Umkehrung ein, und es ist die Sollkraftamplitude für  $P^{II,4}$  kleiner als bei  $P^{II,3}$ .

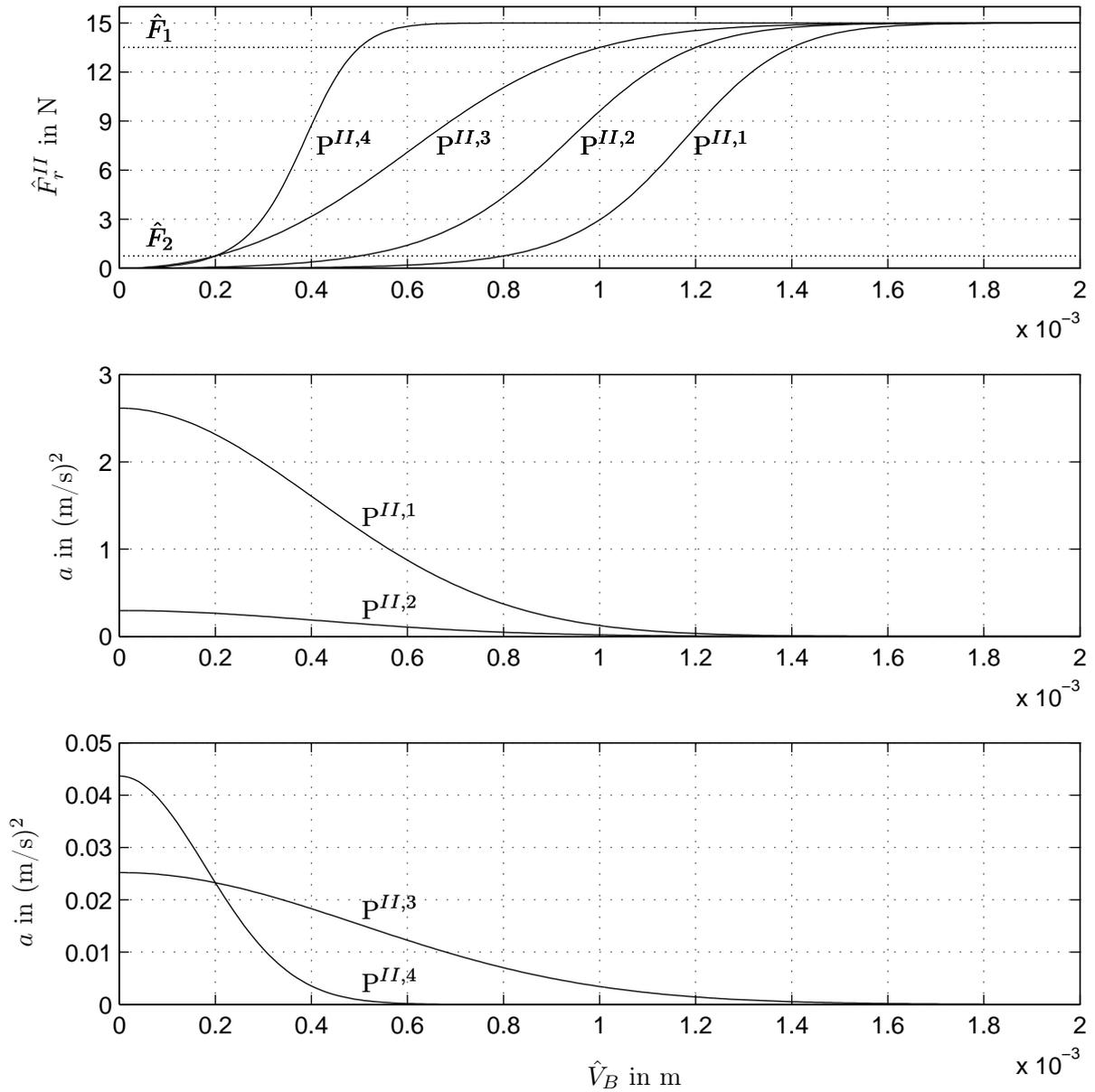


Abb. 3.9: Der Einfluß der Funktion  $a(V_B, \dot{V}_B)$  auf die Amplitude  $\hat{F}_r^{II}$  der Sollkraft  $\hat{F}_r^{II}$ .

Die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises lässt sich wieder in der Form

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

schreiben. Die Massenmatrix  $\mathbf{M}^*$ , die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^*$  und der Vektor der verallgemeinerten Kräfte  $\mathbf{g}^*$  entsprechen jenen vom Regelgesetz  $I$ , siehe Gleichungen (3.19), (3.20) und (3.22). Die Dämpfungsmatrix besitzt nun die Gestalt

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} c_{11}^{II} & 0 & 0 \\ c_{21}^{II} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

mit dem Dämpfungskoeffizienten

$$c_{11}^{II} = \eta \frac{\pi^2 \tilde{k}_{11}}{8kl^2} \frac{\omega_B V_B^2}{(\omega_B V_B)^2 + \dot{V}_B^2 + \gamma e^{-\beta(\omega_B^2 V_B^2 + \dot{V}_B^2)}} = \begin{cases} > 0 & \text{wenn } V_B(t) \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } V_B(t) = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

der Differentialgleichung der Balkenquerschwingung  $V_B(t)$ .

### Verwendung einer Konstanten als Abschaltfunktion

Anstatt einer Abschaltfunktion  $a(V_B, \dot{V}_B)$ , die von der Auslenkung  $V_B(t)$  und der Geschwindigkeit  $\dot{V}_B(t)$  des Balkens abhängt, kann auch eine geeignet gewählte Konstante  $a_0$  verwendet werden. Der Verstärkungsfaktor aus Gleichung (3.37) kann dann in der Form

$$\mu^{III} = \frac{\eta \omega_B}{a_1 E_{pot} + a_2 E_{kin} + a_0}, \quad (3.61)$$

geschrieben werden. Das Regelgesetz lautet jetzt

$$\tilde{F}_r^{III}(t) = -\mu^{III} \dot{u}_B(l, t) = \eta \frac{\pi^2}{8l} \frac{\omega_B V_B \dot{V}_B}{(\omega_B V_B)^2 + \dot{V}_B^2 + a_0}. \quad (3.62)$$

Die Verwendung der Näherungsansätze für  $V_B(t)$  und  $\dot{V}_B(t)$  (Gleichungen (3.25) und (3.30)) ergibt

$$\tilde{F}_r^{III}(t) = -\hat{F}_r^{III} \sin 2\omega_B t, \quad (3.63)$$

mit

$$\hat{F}_r^{III} = \eta \frac{\pi^2}{16l} \frac{\hat{V}_B^2}{\hat{V}_B^2 + \omega_B^{-2} a_0}. \quad (3.64)$$

Wie beim Regelgesetz *II* ist auch hier in der Gleichgewichtslage  $\hat{V}_B = 0$  des Balkens die Sollkraftamplitude gleich Null, und für  $\hat{V}_B \rightarrow \infty$  gilt:  $\hat{F}_r^{III} \stackrel{\perp}{=} \hat{F}_{r,max} = \eta \pi^2 / (16l)$ , die Sollkraftamplitude bleibt also beschränkt. Für die Ableitung der obigen Gleichung nach  $\hat{V}_B$  erhält man an der Stelle  $\hat{V}_B = 0$

$$\left. \frac{d}{d\hat{V}_B} \hat{F}_r^{III} \right|_{\hat{V}_B=0} = 2\eta \frac{\pi^2}{16l} \frac{\omega_B^{-2} a_0 \hat{V}_B}{(\hat{V}_B^2 + \omega_B^{-2} a_0)^2} \Bigg|_{\hat{V}_B=0} = 0. \quad (3.65)$$

D.h. an der Stelle  $\hat{V}_B = 0$  besitzt auch die Funktion  $\hat{F}_r^{III}$  eine horizontale Tangente. Die Abbildung 3.10 zeigt den Verlauf der Sollkraftamplitude in Abhängigkeit von der Amplitude der Balkenauslenkung (siehe Gleichung (3.64)) auf Basis der in Tabelle 3.2 definierten Parametersätze.

Tab. 3.2: Definition der Parametersätze zum Regelgesetz *III*

Parametersatz	$P^{III,1}$	$P^{III,2}$	Einheit
$a_0$	0.05	0.01	(m/s) <sup>2</sup>
$\hat{F}_{r,max}$	15		N

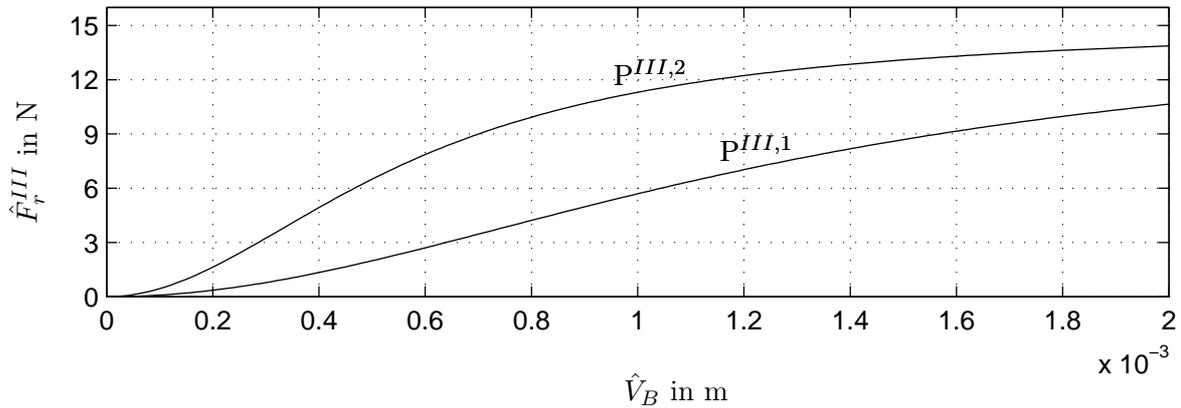


Abb. 3.10: Der Sollkraftverlauf  $\hat{F}_r^{III}$  für die Parametersätze  $P^{III,1}$  und  $P^{III,2}$ .

Man sieht, dass für die gewählten Werte von  $a_0$  die Kraftamplitude wesentlich geringer ist als im Fall des Regelgesetzes *II* (vgl. Abbildung 3.9). Bei einer maximalen Auslenkung von  $\hat{V}_B = 2$  mm weicht die Sollkraft sehr stark vom maximalen Wert  $\hat{F}_{r,max}$  ab.

Um die Kraftamplitude  $\hat{F}_r^{III}$  zu erhöhen, kann entweder der Wert von  $a_0$  weiter verringert werden, was die Gefahr einer Instabilität erhöht, oder es wird, wie beim Regelgesetz *I*, die vom Aktor maximal erzeugbare Kraft  $\hat{F}_{r,max}$  bei einer bestimmten Auslenkung  $\hat{V}_{B,max}$  des Balkens, gemäß der Gleichung

$$\hat{F}_{r,max} = \hat{F}_r^{III}(\hat{V}_{B,max}), \quad (3.66)$$

festgelegt, d.h. der Verstärkungsfaktor  $\eta$  wird entsprechend angepasst. Formal unterscheidet sich das Regelgesetz nur durch den neuen Verstärkungsfaktor  $\nu$  anstelle von  $\eta$  in Gleichung (3.64), und lautet daher

$$\hat{F}_r^{III} = \nu \frac{\pi^2}{16l} \frac{\hat{V}_B^2}{\hat{V}_B^2 + \omega_B^{-2} a_0}, \quad (3.67)$$

Der Verstärkungsfaktor  $\nu$  bestimmt sich aus Gleichung (3.66) zu

$$\nu = \frac{16l}{\pi^2} \frac{\hat{V}_{B,max}^2 + \omega_B^{-2} a_0}{\hat{V}_{B,max}^2} \hat{F}_{r,max}. \quad (3.68)$$

Die Abbildung 3.11 zeigt die Sollkraftamplitude  $\hat{F}_r^{III}$  gemäß Gleichung (3.67) mit Gleichung (3.68). Man sieht daß die Kraftamplituden entsprechend angehoben wurden, sodass bei einer maximalen Auslenkung von  $\hat{V}_{B,max} = 0.2$  mm die Maximalkraft  $\hat{F}_{r,max}$  erreicht wird.

Die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises ist bis auf die Dämpfungsmatrix identisch mit Gleichung (3.58). Die Dämpfungsmatrix besitzt die Gestalt

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} c_{11}^{III} & 0 & 0 \\ c_{21}^{III} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

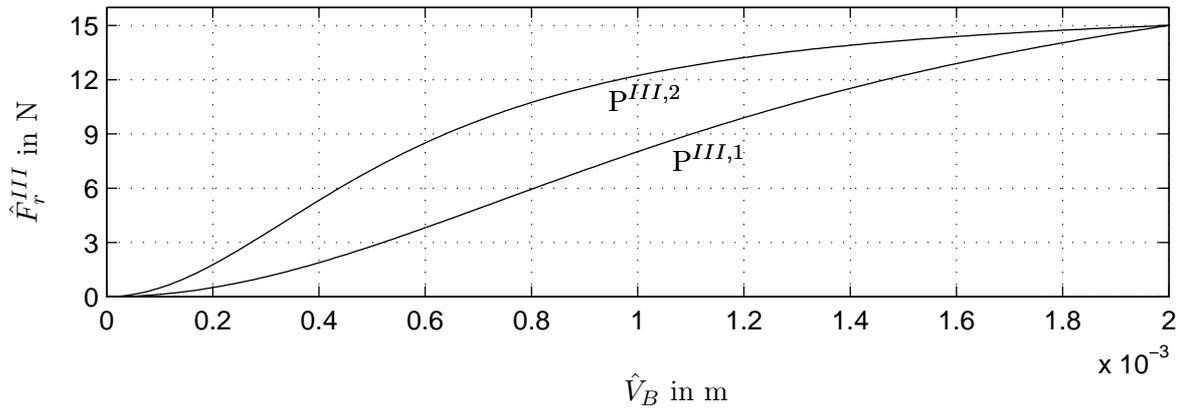


Abb. 3.11: Anpassung des Sollkraftverlaufes  $\hat{F}_r^{III}$  durch geeignete Wahl des Verstärkungsfaktors  $\nu$

mit dem Dämpfungskoeffizienten

$$c_{11}^{III} = \nu \frac{\pi^2 \tilde{k}_{11}}{8kl^2} \frac{\omega_B V_B^2}{(\omega_B V_B)^2 + \dot{V}_B^2 + a_0} = \begin{cases} > 0 & \text{wenn } V_B(t) \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } V_B(t) = 0 \end{cases} \quad (3.70)$$

der Balkenquerschwingung  $V_B(t)$ .

Die Abbildung 3.12 zeigt eine Gegenüberstellung der Regelgesetze *I* bis *III* für ausgewählte Parametersätze. Beim Regelgesetz *I* fällt die Sollkraftamplitude  $\hat{F}_r^I$  aufgrund der konstanten Verstärkung der axialen Geschwindigkeit  $\dot{u}_B(l,t)$  sehr schnell ab, d.h. bei Auslenkungen in der Nähe des Maximalwertes  $\hat{V}_{B,max}$  arbeitet dieses Regelgesetz am effektivsten. Eine wesentliche Verbesserung ist diesbezüglich vom hier vorgestellten Regelprinzip der zustandsabhängigen Verstärkung von  $\dot{u}_B(l,t)$  zu erwarten. Die Abbildung zeigt zwei Varianten: Regelgesetz *II* und *III*. In beiden Fällen ist die Sollkraft über den gesamten betrachteten Bereich der Balkenauslenkung wesentlich größer als beim Regelgesetz *I* weshalb auch eine bessere Dämpfungswirkung zu erwarten ist.

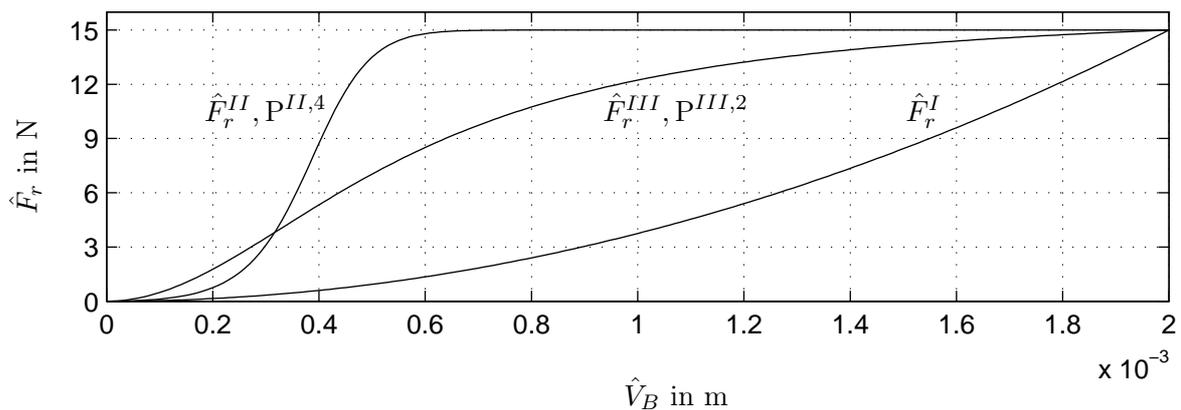


Abb. 3.12: Gegenüberstellung der Regelgesetze I bis III für ausgewählte Parametersätze.

### 3.4 Auslegung des Kraftregelkreises

Damit die tatsächliche Kraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite möglichst gut einem Sollwert  $\tilde{F}_r(t)$  gemäß den im vorigen Abschnitt beschriebenen Regelgesetzen entspricht wird ein unterlagerter Kraftregler verwendet. Die Abbildung 3.13 zeigt, wie ein gewöhnlicher PI-Regler über einen speziellen Verstärker den Piezoaktor ansteuert.

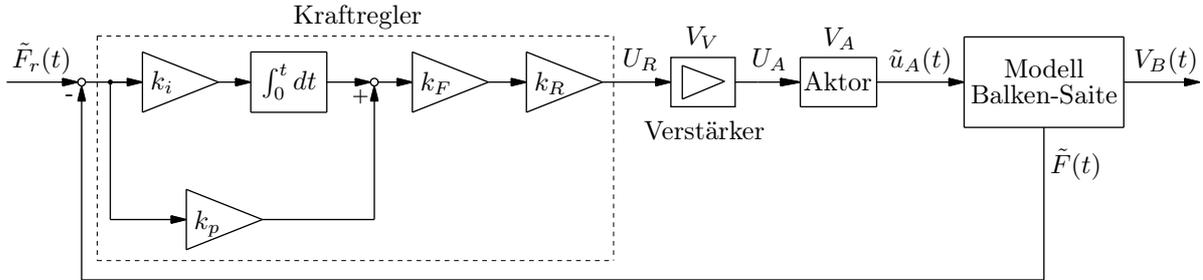


Abb. 3.13: Blockschaltbild des unterlagerten Kraftregelkreises

Da die gesamte Regelung softwaremäßig auf einer Regelkarte implementiert wird, stellt die Ansteuerspannung  $U_R(t)$  des Piezoverstärkers eine Ausgangsspannung der Regelkarte dar. Aus dem obigen Blockschaltbild sieht man, dass gilt

$$U_R(t) = k_F k_R \left( k_p (\tilde{F}_r - \tilde{F}) + k_i \int_0^t (\tilde{F}_r - \tilde{F}) d\tau \right), \quad (3.71)$$

wobei  $k_F$  eine noch zu wählende Verstärkung darstellt, während der Faktor  $k_R$  durch die Regelkarte vorgegeben ist. Vernachlässigt man die dynamischen Eigenschaften des Piezoverstärkers, so kann dessen Übertragungsverhalten durch einen konstanten Verstärkungsfaktor  $V_V$  beschrieben werden, d.h die Ansteuerspannung des Piezoaktors lässt sich in der Form

$$U_A(t) = V_V U_R(t) \quad (3.72)$$

schreiben. Wie bereits in Abschnitt 2.2 und Abschnitt 2.4 gezeigt, wird der Piezoaktor als Serienschaltung eines sich proportional zur angelegten elektrischen Spannung  $U_A(t)$  um den Weg  $\tilde{u}_A(t)$  verlängernden Elementes und einer linearen Feder, die in der Modellbildung bereits berücksichtigt wurde, modelliert. Die Längenänderung  $\tilde{u}_A(t)$  kann also in der Form

$$\tilde{u}_A(t) = V_A U_A(t) \quad (3.73)$$

geschrieben werden, wobei für den Proportionalitätsfaktor

$$V_A = \frac{\tilde{u}_{A,max}}{U_{A,max}} \quad (3.74)$$

gilt. Darin bedeutet  $\tilde{u}_{A,max}$  die Verlängerung des Piezoaktors bei der maximalen Spannung  $U_{A,max}$  die laut Hersteller an den Aktor angelegt werden darf. Mit den Gleichungen (3.72) und (3.73) kann die Verlängerung des Piezoaktors in der Form

$$\tilde{u}_A(t) = k_F k_R V_V V_A \left( k_p (\tilde{F}_r - \tilde{F}) + k_i \int_0^t (\tilde{F}_r - \tilde{F}) d\tau \right) \quad (3.75)$$

geschrieben werden. Zur Vereinfachung wird der Verstärkungsfaktor  $k_F$  gemäß der Gleichung

$$k_F = \frac{1}{k_R V_V V_A} \quad (3.76)$$

gewählt. Damit erhält man

$$\tilde{u}_A(t) = k_p(\tilde{F}_r - \tilde{F}) + k_i \int_0^t (\tilde{F}_r - \tilde{F}) d\tau. \quad (3.77)$$

Die Reglerparameter  $k_p$  und  $k_i$  müssen nun so gewählt werden dass die tatsächliche Kraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite möglichst gut der Sollkraft  $\tilde{F}_r(t)$  entspricht. Ähnlich wie bei linearen Systemen wird dazu das Güteintegral

$$J(k_p, k_i) = \int_0^{T_S} |\tilde{F}_r - \tilde{F}| dt, \quad (3.78)$$

(siehe z.B [25]), d.h. das Integral über den Betrag des Regelfehlers über eine Periode  $T_S = T_B/2$  der Sollkraft verwendet. Darin stellt  $T_B$  die Periodendauer der ersten Biegeeigenfrequenz des Balkens dar. Die Regelung ist im Sinne dieses Kriteriums umso besser, je kleiner der Wert von  $J(k_p, k_i)$  ist. Es handelt sich also um ein Optimierungsproblem in den Variablen  $k_p$  und  $k_i$ . Dieses Minimum kann sowohl im Inneren als auch am Rand eines durch Nebenbedingungen festgelegten Definitionsbereiches der freien Reglerparameter liegen. Wie im letzten Abschnitt gezeigt, lassen sich die Regelgesetze *I*, *II* und *III* näherungsweise in der Form

$$\tilde{F}_r(t) \cong -\hat{F}_r \sin 2\omega_B t \quad (3.79)$$

darstellen (siehe Gleichungen (3.33), (3.44) und (3.63)), mit Amplituden  $\hat{F}_r$  entsprechend den jeweiligen Regelgesetzen. Unter der Annahme, dass sich die tatsächliche Kraft in der Saite ähnlich verhält, lässt sich schreiben

$$\tilde{F}(t) \cong -\hat{F} \sin(2\omega_B t + \varphi_F). \quad (3.80)$$

Wie später durch numerische Lösung der Bewegungsgleichungen gezeigt wird, ist die Übereinstimmung zwischen der Sollkraft  $\tilde{F}_r(t)$  und der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  umso besser je größer die Werte für  $k_p$  und  $k_i$  gewählt werden, allerdings verringert sich dadurch auch der Abstand zur Stabilitätsgrenze zusehends. Zur Bestimmung der Reglerparameter ist es daher notwendig, zulässige Abweichungen der Istkraft von der Sollkraft zu definieren. Damit kann dann ein zulässiger Wert  $J_{zul}$  des Güteintegrals aus Gleichung (3.78) berechnet werden, und die Reglerauslegung erfolgt nach der Bedingung

$$J(k_p, k_i) \leq J_{zul}. \quad (3.81)$$

Um den Wert für  $J_{zul}$  zu bestimmen wird zunächst vorausgesetzt, dass die Amplitudenänderungen von Soll- und Istkraft innerhalb einer Periode klein sind, d.h. die Amplituden als konstant betrachtet werden können. (Diese Annahme ist zumindest beim Regelgesetz *II* zu Beginn des Regelvorganges sehr gut erfüllt.) Weiters erfolgt die Auslegung bei der maximal möglichen Kraftamplitude  $\hat{F}_{r,max}$ . Das Güteintegral lässt sich damit in der Form

$$J(k_p, k_i) \cong \int_0^{T_B/2} |-\hat{F}_{r,max} \sin 2\omega_B t + \hat{F} \sin(2\omega_B t + \varphi_F)| dt \quad (3.82)$$

schreiben. Die zulässige Amplituden- und Phasenabweichung wird durch die Gleichungen

$$\hat{F} \geq (1 - z_{A,zul}) \hat{F}_{r,max} \quad (3.83)$$

und

$$\varphi_F \leq 2\pi z_{P,zul}, \quad (3.84)$$

mit Konstanten  $z_{A,zul} < 1$  und  $z_{P,zul} < 1$  definiert. Für den zulässigen Wert des Güteintegrals erhält man damit

$$J_{zul} = \hat{F}_{r,max} \int_0^{T_B/2} |-\sin 2\omega_B t + (1 - z_{A,zul}) \sin(2\omega_B t + 2\pi z_{P,zul})| dt. \quad (3.85)$$

Die Abbildung 3.14 zeigt schematisch die Zusammenhänge zwischen der maximalen Amplituden- und Phasenabweichung und dem daraus bestimmten zulässigen Wert des Güteintegrals.

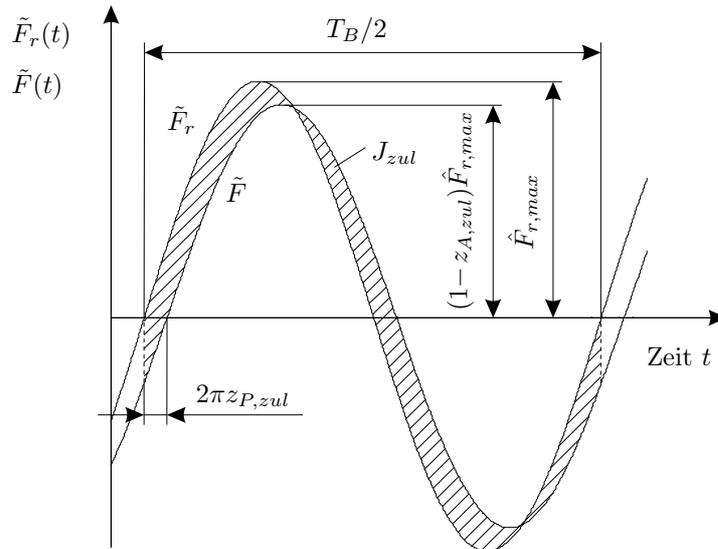


Abb. 3.14: Definition der maximalen Amplituden- und Phasenabweichung zwischen der Sollkraft  $\tilde{F}_r(t)$  und der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite.

Durch eine numerische Auswertung der Bewegungsgleichungen des geschlossenen Regelkreises (siehe Kapitel 4) kann nun jenes Wertepaar der Reglerparameter  $k_p$  und  $k_i$  bestimmt werden welches die Bedingung Gleichung (3.81) erfüllt.

### 3.5 Zusammenfassung der verwendeten Regelgesetze

Als Abschluß dieses Kapitels werden die vorgestellten Regelgesetze zusammenfassend dargestellt. Den Ausgangspunkt bildete die konstante Verstärkung der axialen Geschwindigkeit des freien Bal-kenendes. Das zugehörige Regelgesetz (Gleichung (3.12)) lautet

$$\tilde{F}_r^I(t) = \mu^I \frac{\pi^2}{8l} V_B \dot{V}_B,$$

mit dem konstanten Verstärkungsfaktor

$$\mu^I = \frac{16l}{\pi^2 \omega_B} \frac{\hat{F}_{r,max}}{\hat{V}_{B,max}^2}$$

aus Gleichung (3.35). Darin bedeutet  $\hat{F}_{r,max}$  die maximal mögliche Kraft in der Saite, die vom Akteur erzeugt werden kann. Aus Gründen der Vergleichbarkeit mit den anderen Regelgesetzen wird der Verstärkungsfaktor so gewählt, dass diese Kraft bei einer vorgegebenen Auslenkungsamplitude  $\hat{V}_{B,max}$  auf den Balken aufgebracht wird.

Es wurde gezeigt, dass der dadurch entstehende Dämpfungskoeffizient in der Differentialgleichung der Balkenquerschwingung sehr rasch, nämlich mit dem Quadrat der Auslenkung des Balkens, absinkt. Eine wesentliche Verbesserung wird durch Einführung einer zustandsabhängigen Verstärkung erreicht. Das zugehörige Regelgesetz (Gleichung (3.53)) lautet

$$\tilde{F}_r^{II}(t) = \eta \frac{\pi^2}{8l} \frac{\omega_B V_B \dot{V}_B}{(\omega_B V_B)^2 + \dot{V}_B^2 + \gamma e^{-\beta(\omega_B^2 V_B^2 + \dot{V}_B^2)}},$$

mit

$$\eta = \frac{16l}{\pi^2} \hat{F}_{r,max}.$$

Mit Hilfe der Koeffizienten

$$\beta = \frac{1}{\omega_B^2 (\hat{V}_{B,1}^2 - \hat{V}_{B,2}^2)} \ln \left[ \frac{s_1(1-s_2) \hat{V}_{B,2}^2}{s_2(1-s_1) \hat{V}_{B,1}^2} \right],$$

siehe Gleichung (3.56), und

$$\gamma = \frac{1-s_1}{s_1} \hat{V}_{B,1}^2 \omega_B^2 \left[ \frac{s_1(1-s_2) \hat{V}_{B,2}^2}{s_2(1-s_1) \hat{V}_{B,1}^2} \right] \frac{\hat{V}_{B,1}^2}{\hat{V}_{B,1}^2 - \hat{V}_{B,2}^2},$$

siehe Gleichung (3.57), kann der Abfall der Kraft mit kleiner werdender Balkenauslenkung und damit die Dämpfungswirkung gesteuert werden. Eine vereinfachte Variante der zustandsabhängigen Verstärkung stellt das Regelgesetz *III*

$$\tilde{F}_r^{III}(t) = \nu \frac{\pi^2}{8l} \frac{\omega_B V_B \dot{V}_B}{(\omega_B V_B)^2 + \dot{V}_B^2 + a_0},$$

siehe Gleichung (3.62), mit

$$\nu = \frac{16l}{\pi^2} \frac{\hat{V}_{B,max}^2 + \omega_B^{-2} a_0}{\hat{V}_{B,max}^2} \hat{F}_{r,max},$$

aus Gleichung (3.68), dar. Im folgenden Kapitel werden die Dämpfungswirkungen aller drei Regelgesetze durch numerische Lösung der Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises untersucht und miteinander verglichen.

## 4 Numerische Lösung des Systems für den geschlossenen Regelkreis

### 4.1 Systemgleichungen des geschlossenen Regelkreises

In diesem Abschnitt werden die Differentialgleichungen des geregelten Gesamtsystems, welche dann numerisch gelöst werden, kurz zusammengefasst. Wie im Abschnitt 2.4 gezeigt, lassen sich die nichtlinearen Differentialgleichungen des offenen Regelkreises in der Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (4.1)$$

schreiben (siehe Gleichung (2.95)), mit dem Lagevektor

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ V_B(t), \quad U_S(t), \quad V_S(t) \right\}^T, \quad (4.2)$$

der symmetrischen Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} + \tilde{m}_{11} \frac{V_B^2}{l^2} & \tilde{m}_{12} \frac{V_B}{l} & \bar{m}_{13} \\ \tilde{m}_{21} \frac{V_B}{l} & \bar{m}_{22} & 0 \\ \bar{m}_{31} & 0 & \bar{m}_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

dem Vektor der verallgemeinerten Kräfte

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}_{11} \frac{V_B \dot{V}_B^2}{l^2} + \tilde{k}_{1,1} \frac{V_B^3}{l^2} + \tilde{k}_{1,2} \frac{V_S^2 V_B}{l^2} + \tilde{k}_{1,3} \frac{U_S V_B}{l} \\ \tilde{m}_{21} \frac{\dot{V}_B^2}{l} + \tilde{k}_{2,1} \frac{V_B^2}{l} + \tilde{k}_{2,2} \frac{V_S^2}{l} \\ \tilde{k}_{3,1} \frac{V_S V_B^2}{l^2} + \tilde{k}_{3,2} \frac{V_S^3}{l^2} + \tilde{k}_{3,3} \frac{U_S V_S}{l} \end{array} \right\}, \quad (4.4)$$

der zeitabhängigen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa} \frac{1}{l} + \tilde{k}_{11} \frac{\tilde{u}_A(t)}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa} \frac{1}{l} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

und dem externen Erregervektor

$$\mathbf{f}(t) = \left\{ 0, \quad k\tilde{u}_A(t), \quad 0 \right\}^T. \quad (4.6)$$

Zur Berechnung der Stellgröße  $\tilde{u}_A(t)$  wird mit Hilfe der Gleichung

$$\tilde{F}(t) = k \left[ \tilde{u}_A(t) - U_S(t) + \frac{\pi^2 \kappa}{16l} V_B^2(t) \right] \quad (4.7)$$

die tatsächliche Kraft im geführten Bereich der Saite bestimmt (siehe Gleichung(3.10)), die dem Kraftregler zugeführt wird. Wie im Abschnitt 3.4 gezeigt, erhält man für die Stellgröße

$$\tilde{u}_A(t) = k_F k_R V_V V_A \left( k_p (\tilde{F}_r - \tilde{F}) + k_i \int_0^t (\tilde{F}_r - \tilde{F}) d\tau \right) \quad (4.8)$$

(siehe Gleichung(3.75)), wobei der Kraft Sollwert  $\tilde{F}_r$  entsprechend dem jeweiligen Regelgesetz gebildet wird.

Die numerische Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen erfolgt mit Hilfe eines Standard-Simulationsprogrammes, siehe [32]. In Tabelle 4.1 sind die verwendeten Parameter für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen zusammengefasst. Die Größe der Integrations-schrittweite wurde dabei nach der höchsten vorkommenden Eigenfrequenz gewählt. Nach Abschnitt 2.5 ist das die axiale Eigenschwingung der Saite. Eine Auswertung von Gleichung (2.119) ergibt eine Eigenfrequenz von 8621.5 Hz bzw. die zugehörige Periodendauer zu 116  $\mu$ s. Die Integrations-schrittweite wird mit etwa 10% dieser Periodendauer festgelegt, siehe Tabelle 4.1. Eine Halbierung bzw. Verdopplung der Integrations-schrittweite führt zu identischen Simulationsergebnissen, weshalb die gewählte Schrittweite von 10  $\mu$ s als richtig angenommen werden darf.

Tab. 4.1: Definition der Parameter für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen

Integrationsalgorithmus	Runge-Kutta 4. Ordnung
Eigenfrequenz/Periodendauer d. axialen Saitenschwingung	8621.5 Hz / 116 $\mu$ s
Integrations-schrittweite	10 $\mu$ s

Die Tabelle 4.2 zeigt die gewählten Anfangsbedingungen. Sowohl in der Simulation als auch im experimentellen Teil wird eine Anfangsauslenkung des Balkens von 2 mm verwendet, alle übrigen Anfangsbedingungen werden gleich Null gesetzt.

Tab. 4.2: Anfangsbedingungen für die Simulationen

Kenngröße	Wert	Einheit
$V_B(0)$	$2 \times 10^{-3}$	m
$U_S(0)$	0	m
$V_S(0)$	0	m

## Einführung von Materialdämpfungen für Balken und Saite

In der Bewegungsgleichung (4.1) der Strecke wurde noch keine Materialdämpfung von Balken und Saite berücksichtigt. Im Hinblick auf eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen numerischen

und experimentellen Ergebnissen wird daher eine Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  eingeführt. Unter der Annahme, dass sich die Materialdämpfung von Balken und Saite durch geschwindigkeitsproportionale Dämpfungsterme beschreiben lässt, kann die Bewegungsgleichung (4.1) in der Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(t)\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (4.9)$$

mit einer Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

geschrieben werden. Vernachlässigt man im linearisierten Modell des Gesamtsystems (siehe Gleichung 2.112) die Kopplungsterme in der Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , so lassen sich die Dämpfungskoeffizienten in der Form

$$c_{11} = 2 D_{11} \sqrt{\bar{m}_{11} \left( \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2} F_V}{k\kappa l} \right)}, \quad (4.11)$$

$$c_{22} = 2 D_{22} \sqrt{\bar{m}_{22} \bar{k}_{22}}, \quad (4.12)$$

und

$$c_{33} = 2 D_{33} \sqrt{\left( \bar{m}_{33} \frac{\bar{k}_{33} F_V}{k\kappa l} \right)} \quad (4.13)$$

darstellen. Die Bestimmung von  $c_{11}$  erfolgt durch Messung des Ausschwingverhaltens des vorgespannten, aber nicht geregelten Balkens und Näherung des Amplitudenabfalles durch eine Exponentialfunktion. Damit kann näherungsweise eine Lehr'sche Dämpfung  $D_{11}$  der Balkenquerschwingung bestimmt werden (siehe Abschnitt 5.6), und mit Gleichung (4.11) der zugehörige Dämpfungskoeffizient  $c_{11}$ . Die zur lateralen und axialen Saitenschwingung gehörenden Lehr'schen Dämpfungsparameter  $D_{22}$  und  $D_{33}$  haben nur geringen Einfluss auf das numerische Ergebnis und werden daher auf die Standardwerte für den Saitenwerkstoff gesetzt, siehe Tabelle 4.3.

## 4.2 Festlegung der Struktur- und Reglerparameter

Zur numerischen Lösung der Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises, siehe Gleichung (4.9), sowie der Gleichungen (4.7) und (4.8) des Kraftregelkreises müssen Abmessungen und Materialkennwerte von Balken und Saite festgelegt werden. Damit können dann die im Anhang definierten Koeffizienten der Bewegungsgleichungen, siehe Gleichungen (A.10) bis (A.31), berechnet werden. Die Abbildung 4.1 und die Tabelle 4.3 zeigen die wichtigsten Abmessungen und Kennwerte des Gesamtsystems. Die angeführten Zahlenwerte entsprechen bereits denen, wie sie auch im Versuchsaufbau verwendet wurden.

Bis jetzt wurde angenommen, dass der Balken rohrförmig ist mit der Saite im Inneren, siehe Abbildung 4.1 a). Der Balkenquerschnitt ist in diesem Fall geschlossen. Da bei dieser Ausführungsform jedoch die Saite von aussen nicht sichtbar ist wird, im Hinblick auf die experimentelle Realisierung, die Ausführung gemäß Abbildung 4.1 b) gewählt. Der Balken besteht aus einem Aluminiumprofil mit rechteckigem Querschnitt, das in Längsrichtung bis kurz vor den beiden Enden geschlitzt ist. In

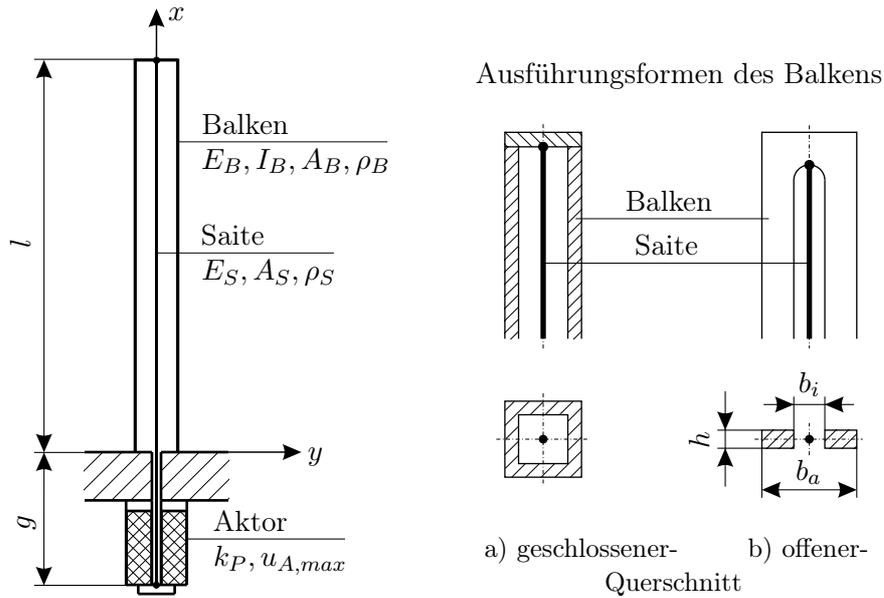


Abb. 4.1: Abmessungen des mechanischen Systems und mögliche Ausführungsformen des Balkens.

dem dadurch entstehenden Raum wird die Saite angeordnet, die am oberen Ende mit dem Balken und am unteren Ende durch eine axiale Bohrung im Balken durchgeführt und mit dem Piezoaktor verbunden wird. Als Balkenwerkstoff wird eine konventionelle Aluminiumlegierung gewählt, siehe Tabelle 4.3. Die physikalischen Eigenschaften wurden aus [6] entnommen. Die in der Tabelle angegebenen Kennwerte des Piezoaktors und des vorgeschalteten Piezoverstärkers stammen aus den entsprechenden Datenblättern des Herstellers, siehe [43] und [36]. Damit können die Eigenfrequenzen des linearisierten mechanischen Systems (siehe Abschnitt 2.5) berechnet werden. Eine Zusammenstellung der Ergebnisse ist in Tabelle 4.3 (unten) zu finden.

Die in der numerischen Simulation verwendeten Parametersätze der untersuchten Regelgesetze I bis III, sowie die allgemeinen Reglerparameter sind in Tabelle 4.4 angeführt. Sie stellt im Wesentlichen eine Zusammenfassung bzw. Detaillierung der schon in Kapitel 3 definierten Parametersätze dar. Zur Durchführung der Simulationen ist noch die Festlegung der Parameter  $k_p$  und  $k_i$  des Kraftregelkreises erforderlich. Dazu muss gemäß Abschnitt 3.4 zuerst ein zulässiger Amplituden- und ein zulässiger Phasenfehler zwischen Soll- und Istkraft in der Saite definiert werden. Im Hinblick auf eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  und der Sollkraft  $\tilde{F}_r(t)$  in der Saite wird

$$z_{A,zul} = z_{P,zul} = 0.015 \quad (4.14)$$

gewählt. Damit berechnet sich der zulässige Wert des Güteintegrals nach Gleichung (3.85), zu

$$J_{zul} = 16.242 \times 10^{-3} \text{ Ns}. \quad (4.15)$$

Um jene Werte der Parameter  $k_p$  und  $k_i$  des Kraftregelkreises bestimmen zu können, mit denen der tatsächliche Wert  $J(k_p, k_i)$  des Güteintegrals kleiner als  $J_{zul}$  ist wird zunächst eine numerische Stabilitätsuntersuchung durchgeführt. Unter Verwendung des Regelgesetzes I werden die Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises (ohne Berücksichtigung der Materialdämpfung) bei Variation der Parameter  $k_p$  und  $k_i$  gelöst und bei jedem Parametersatz die Instabilitätsbedingung  $\mathbf{q}(t) \rightarrow \infty$  überprüft. Als Ergebnis erhält man die Stabilitätskarte in Abbildung 4.2. Wählt man

Tab. 4.3: Kennwerte des Gesamtsystems für die numerische Simulation

Kennwert	Symbol	Wert	Einheit
Werkstoff des Balkens	AlMgSi0.5 T66	-	-
Länge des Balkens	$l$	0.3008	m
Querschnittsbreite	$b = b_a - b_i$	0.025	m
Querschnittshöhe	$h$	0.0033	m
Querschnittsfläche	$A_B$	$8.25 \times 10^{-5}$	m <sup>2</sup>
Flächenträgheitsmoment	$I_B$	$7.487 \times 10^{-11}$	m <sup>4</sup>
Dichte Balkenwerkstoff	$\rho_B$	2700	kg/m <sup>3</sup>
Elastizitätsmodul Balken	$E_B$	$0.7 \times 10^{11}$	N/m <sup>2</sup>
Werkstoff der Saite	St	-	-
Durchmesser der Saite	$d_S$	1.5	mm
Dichte Saitenwerkstoff	$\rho_S$	7850	kg/m <sup>3</sup>
geführte Länge der Saite	$g$	0.094	m
Elastizitätsmodul Saite	$E_S$	$2.1 \times 10^{11}$	N/m <sup>2</sup>
Vorspannkraft	$F_V$	-100	N
Knickkraft des Balkens	$F_{V,krit.}$	-754.45	N
Steifigkeit des Piezoaktors P-842.60	$k_P$	$1 \times 10^7$	N/m
Max. Verlängerung des Piezoaktors	$u_{A,max}$	90	μm
Max. Betriebsspannung des Piezoaktors	$U_{A,max}$	100	V
Lehr'sches Dämpfungsmaß	$D_{11}$	$1.416597 \times 10^{-3}$	-
Lehr'sches Dämpfungsmaß	$D_{22}$	0.01	-
Lehr'sches Dämpfungsmaß	$D_{33}$	0.01	-
Ausgangsverstärkung der Regelkarte	$k_R$	10	-
Verstärkung des Piezoverstärkers E-505	$V_V$	10	-
Eigenfrequenzen des linearen Modells			
Balkenquerschwingung	$f_B$	27.84	Hz
Axiale Saitenschwingung	$f_{U_s}$	8621.53	Hz
Laterale Saitenschwingung	$f_{V_s}$	145.02	Hz

die Reglerparameter  $k_p = 0.01 \times 10^{-6}$  m/N und  $k_i = 0.007$  m/Ns, so liefert eine numerische Lösung der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems für den tatsächlichen Wert des Güteintegrals

$$J(k_p, k_i) = 9.975 \times 10^{-3} \text{ Ns.} \quad (4.16)$$

Die Bedingung

$$J(k_p, k_i) \leq J_{zul} \quad (4.17)$$

ist also erfüllt. Abbildung 4.3 zeigt den zugehörigen zeitlichen Verlauf von Soll- und Istkraft in der Saite. Man erkennt, dass die Amplitudenabweichung tatsächlich sehr klein ist. Eine Auswertung der Maxima im betrachteten Zeitbereich ergibt

$$z_A = -0.001384. \quad (4.18)$$

Der tatsächliche Phasenfehler, bezogen auf eine Periode  $T_B/2$ , beträgt

$$z_P = 0.01002. \quad (4.19)$$

Die Amplitudenabweichung unterschreitet also deutlich den in Gleichung (4.14) angeführten zulässigen Wert von 0.015. Hervorzuheben ist, dass das Maximum der Istkraft geringfügig über dem der Sollkraft liegt, woraus das negative Vorzeichen in Gleichung (4.18) resultiert. Die Phasenabweichung ist ebenfalls kleiner als der zulässige Grenzwert. Diese Einstellungen des Kraftreglers werden auch im experimentellen Teil verwendet, und es zeigt sich, dass auch in diesem Fall eine sehr gute Übereinstimmung von Soll- und Istkraft erzielt wird, obwohl sich die reale Balkenquerschwingung aus mehreren Schwingungsmoden zusammensetzt.

Tab. 4.4: Zusammenfassung der Reglerparameter für die Regelgesetze *I* bis *III*

Regelgesetz <i>I</i>					
Kenngröße	$P^{I,1}$				Einheit
$\mu^I$	10454.7				Ns/m
Regelgesetz <i>II</i>					
Kenngröße	$P^{II,1}$	$P^{II,2}$	$P^{II,3}$	$P^{II,4}$	Einheit
$\hat{V}_{B,1}$	0.8e-3	0.5e-3	0.2e-3	0.2e-3	m
$s_1$			0.05		-
$\hat{V}_{B,2}$	1.4e-3	1.2e-3	1.0e-3	0.5e-3	m
$s_2$			0.90		-
$\eta$			7.315		Nm
$\beta$	99.604	93.134	65.467	515.054	(s/m) <sup>2</sup>
$\gamma$	2.616	0.296	0.025	0.044	(m/s) <sup>2</sup>
Regelgesetz <i>III</i>					
Kenngröße	$P^{III,1}$		$P^{III,2}$		Einheit
$a_0$	0.05		0.01		(m/s) <sup>2</sup>
$\nu$	10.303		7.912		Nm
Allgemeine Reglerparameter					
Kenngröße	$P^{I,1}$ bis $P^{III,2}$				Einheit
$\hat{F}_{r,max}$	15				N
$\hat{V}_{B,max}$	2e-3				m
$\omega_B$	174.912				s <sup>-1</sup>
$k_p$	$0.01 \times 10^{-6}$				m/N
$k_i$	0.007				m/Ns

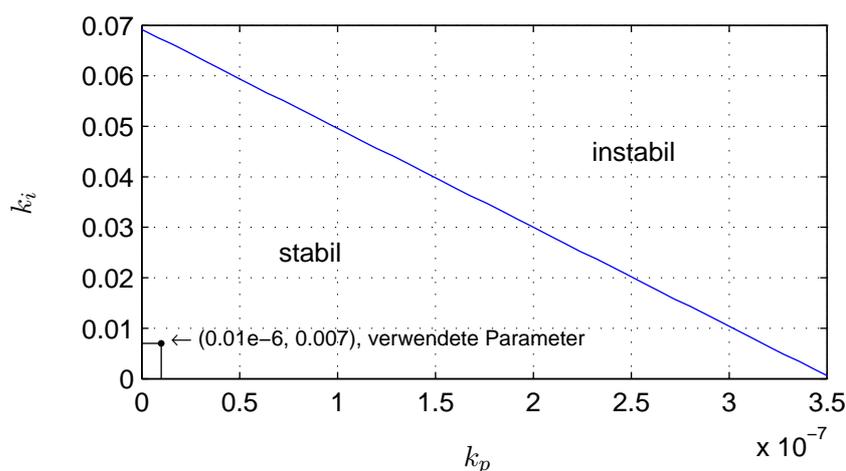


Abb. 4.2: Stabilitätskarte des unterlagerten Kraftregelkreises.

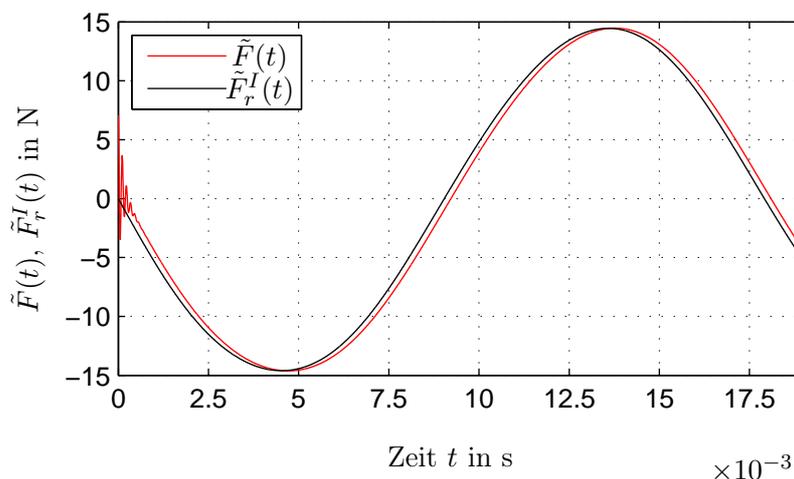


Abb. 4.3: Vergleich von Soll- und Istkraft in der Saite.

### 4.3 Ergebnisse für das Regelgesetz I

Die Abbildung 4.4 zeigt erste Simulationsergebnisse des geschlossenen Regelkreises unter Verwendung von Regelgesetz I, also der konstanten Verstärkung der axialen Geschwindigkeit des freien Balkenendes. Die zugehörigen Reglerparameter können aus der Tabelle 4.4, die Anfangsbedingungen aus Tabelle 4.2 entnommen werden. Die obere Abbildung 4.4 zeigt die laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  am freien Balkenende, die untere den Verlauf der tatsächlichen Kraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite. Man erkennt, dass der Abfall der Einhüllenden von  $V_B(t)$  zu Beginn, bei großen Auslenkungen des Balkens, wesentlich größer ist als gegen Ende der Simulation, d.h. die aktive Dämpfung der Balkenquerschwingung  $V_B(t)$  ist amplitudenabhängig. Je größer die Auslenkung des Balkens ist, umso größer ist die durch die Regelung eingebrachte Dämpfung. Die untere Abbildung läßt deutlich den Nachteil dieses Regelgesetzes erkennen, nämlich das sehr rasche Absinken der Amplitude

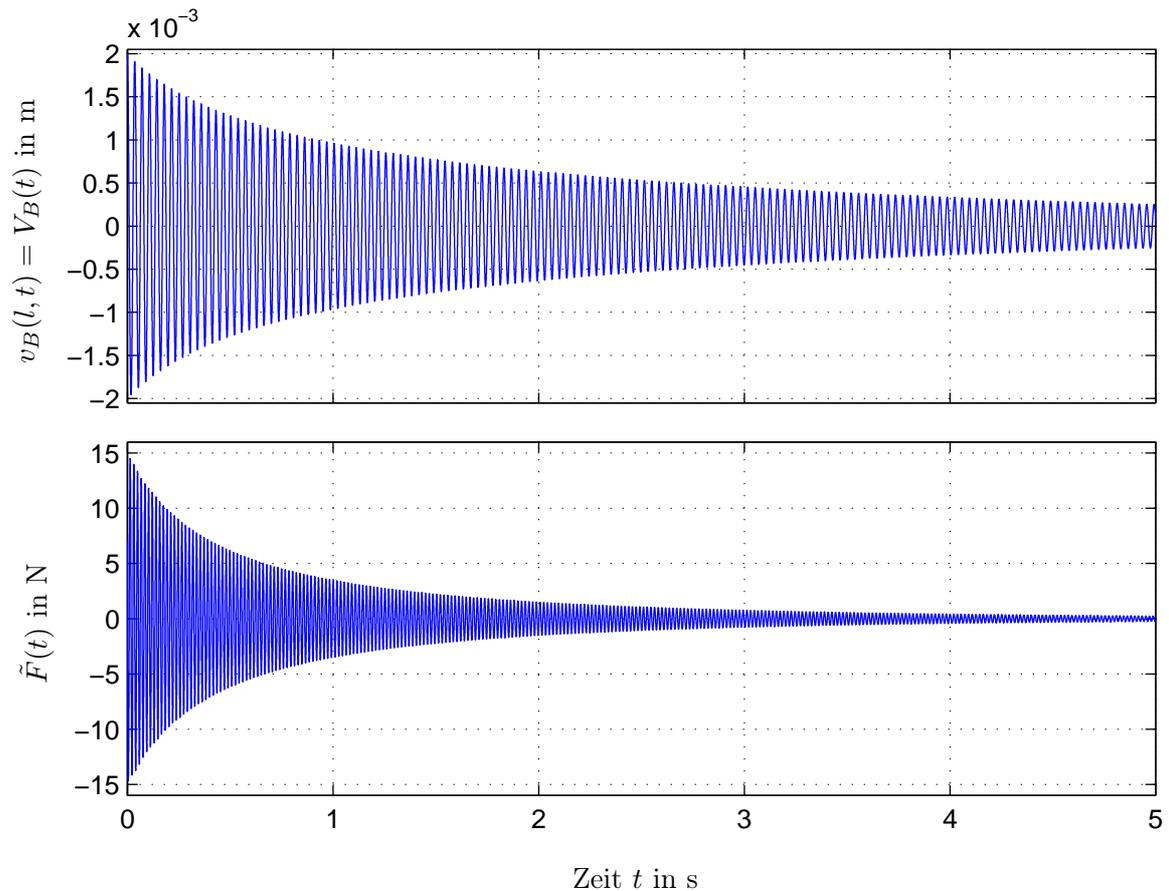


Abb. 4.4: Zeitverlauf der lateralen Balkenschwingung  $v_B(l, t) = V_B(t)$  (oben) und der tatsächlichen Kraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite (unten).

der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite. Um die durch die Regelung hervorgerufene Dämpfung quantifizieren zu können wird der Verlauf von  $V_B(t)$  ohne Regelung, d.h. die freie Schwingung des vorgespannten Balkens nur unter dem Einfluß der Materialdämpfung, berechnet. Abbildung 4.5 zeigt einen Vergleich der Einhüllenden von  $V_B(t)$  mit und ohne Regelung. Die Dämpfungswirkung durch die Regelung ist deutlich zu erkennen. So beträgt im geregelten Fall die Amplitude von  $V_B(t)$  nach 1 s nur mehr ungefähr 63% der Amplitude des unregulierten Balkens.

In der Abbildung 4.6 sind die numerischen Ergebnisse für die Schwingungen der Saite dargestellt. Die beiden linken Diagramme zeigen die axiale Schwingung  $U_S(t)$  sowie die gesamte axiale Verschiebung  $u_S(0, t)$  der Saite an der Stelle  $x = 0$ . Der von Null verschiedene Mittelwert von  $u_S(0, t)$  wird durch die Vorspannkraft in der Saite hervorgerufen. In den beiden rechten Diagrammen sind die Ergebnisse für die laterale Saitenschwingung  $V_S(t)$  und die gesamte Verschiebung  $v_S(l/2, t)$  der Saite an der Stelle  $x = l/2$  angeführt. Sowohl die Amplituden von  $U_S(t)$  als auch von  $V_S(t)$  sinken mit zunehmender Zeit ab, es ist also keine Anregung einer Saitenschwingung durch die Regelung erkennbar.

Abbildung 4.7 zeigt einen gedehnten zeitlichen Verlauf aller berechneten Größen während der ersten 0.25 s. Man erkennt, dass  $V_B(t)$ ,  $\tilde{F}(t)$  und  $U_S(t)$  offensichtlich nur eine Frequenzkomponente besitzen, während sich die laterale Saitenschwingung  $V_S(t)$  aus mehreren Frequenzanteilen zusammen-

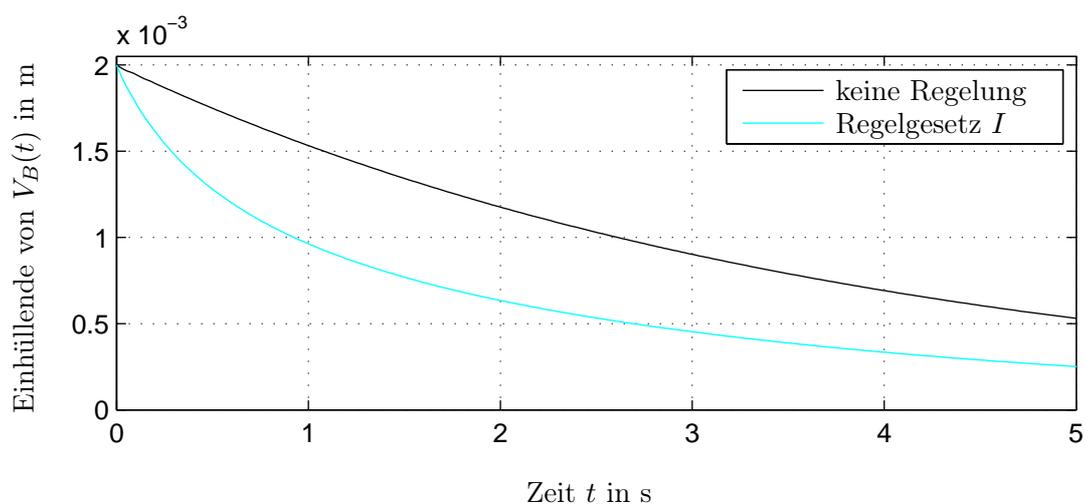


Abb. 4.5: Vergleich der Einhüllenden von  $V_B(t)$  im geregelten Fall (Regelgesetz I), mit der Einhüllenden des nicht geregelten Balkens.

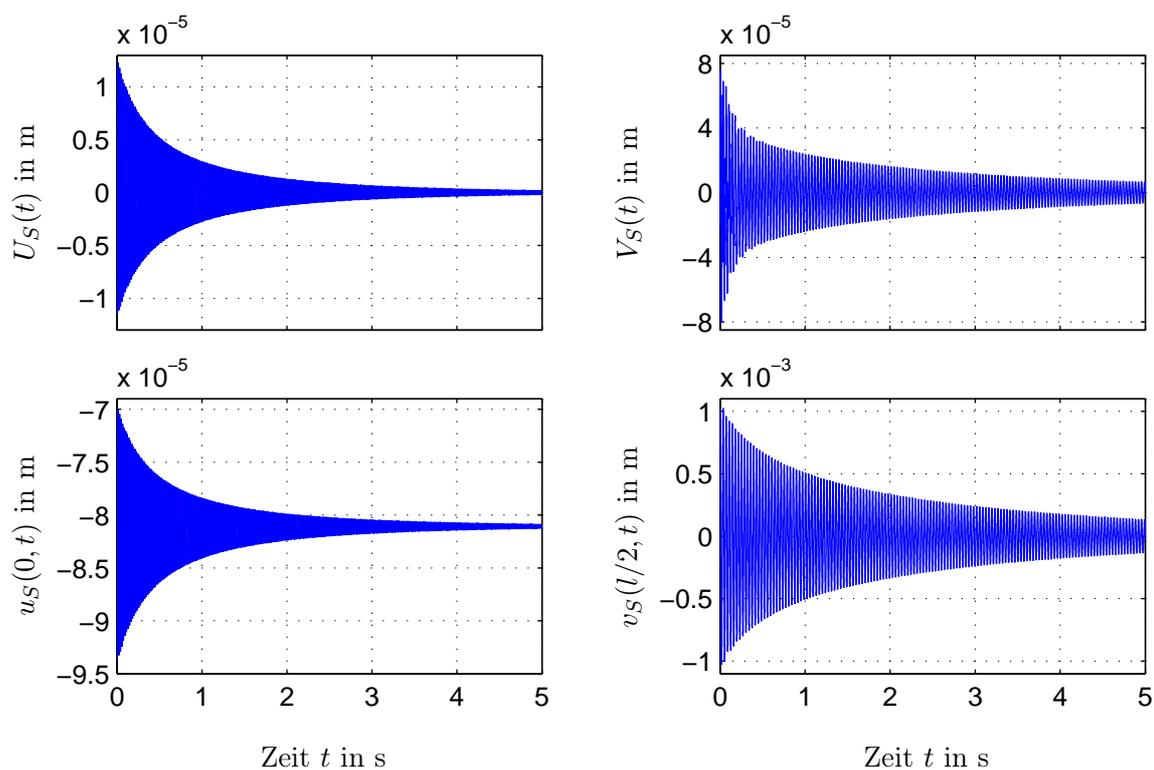


Abb. 4.6: Zeitverläufe der axialen Saitenschwingung  $U_S(t)$  und der gesamten axialen Verschiebung  $u_S(0, t)$  der Saite an der Stelle  $x = 0$  (links), der lateralen Saitenschwingung  $V_S(t)$  und der gesamten lateralen Verschiebung der Saite  $v_S(l/2, t)$  an der Stelle  $x = l/2$  (rechts).

setzt. Um die Frequenzinhalte zu bestimmen, wird eine FFT-Analyse mit einer Frequenzauflösung von 0.05 Hz und einer Nyquistfrequenz von 12.5 kHz der entsprechenden Zeitsignale durchgeführt.

(Die Integrationsschrittweite wurde auf  $40\mu\text{s}$  erhöht, vergleiche  $10\mu\text{s}$  in Tabelle 4.1, um die Rechenzeit zu verringern. Eine eventuell auftretende axiale Eigenschwingung der Saite bei 8.62 kHz, siehe Abschnitt 4.1, kann damit immer noch erfasst werden.) Tabelle 4.5 zeigt zusammenfassend die Ergebnisse dieser Analyse. In der rechten Spalte sind korrespondierende, d.h. in der Nähe liegende Vielfache der Eigenfrequenzen des linearisierten Modells des Systems Balken-Saite angeführt. Obwohl die Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises nichtlinear sind, entspricht die mit der FFT-Analyse bestimmte Frequenz der Balkenquerschwingung  $V_B(t)$  sehr genau der Biegeeigenfrequenz  $f_B$  des Balkens aus dem linearen Modell. Die Frequenz der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite ist praktisch identisch mit dem Zweifachen von  $f_B$ , und entspricht damit der in Abschnitt 3.2 analytisch durch Näherungsansätze für  $V_B(t)$  und  $\dot{V}_B(t)$  bestimmten Frequenz der Sollkraft  $\tilde{F}_r^I(t)$ . Die Frequenz von  $U_S(t)$  ist ebenfalls gleich  $2f_B$ , die Eigenfrequenz  $f_{U_s}$  des linearisierten Modells (siehe Tabelle 4.3) tritt nicht auf.

Wie bereits in Abbildung 4.7 (unten) zu erkennen ist, besteht die laterale Saitenschwingung  $V_S(t)$  aus mehreren Frequenzanteilen. Das Ergebnis der FFT-Analyse ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Darin bedeutet  $\text{Amp}(V_S(t))$  den Betrag der komplexen Amplitude von  $V_S(t)$ . Die im betrachteten Frequenzbereich auftretenden Spitzen sind durchgehend mit  $f_1$  bis  $f_6$  bezeichnet. Man sieht, dass  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_5$  den ungeraden Vielfachen von  $f_B$  entsprechen, wobei die Zahlenwerte sehr genau übereinstimmen (siehe Tabelle 4.5). Weniger gut hingegen ist die Übereinstimmung von  $f_4$  mit der Eigenfrequenz  $f_{V_s}$  der lateralen Saitenschwingung bzw. von  $f_6$  mit  $4/3f_{V_s}$ , wobei der Fehler bei  $f_4$  etwa 2.7% und bei  $f_6$  ca. 6.0% beträgt.

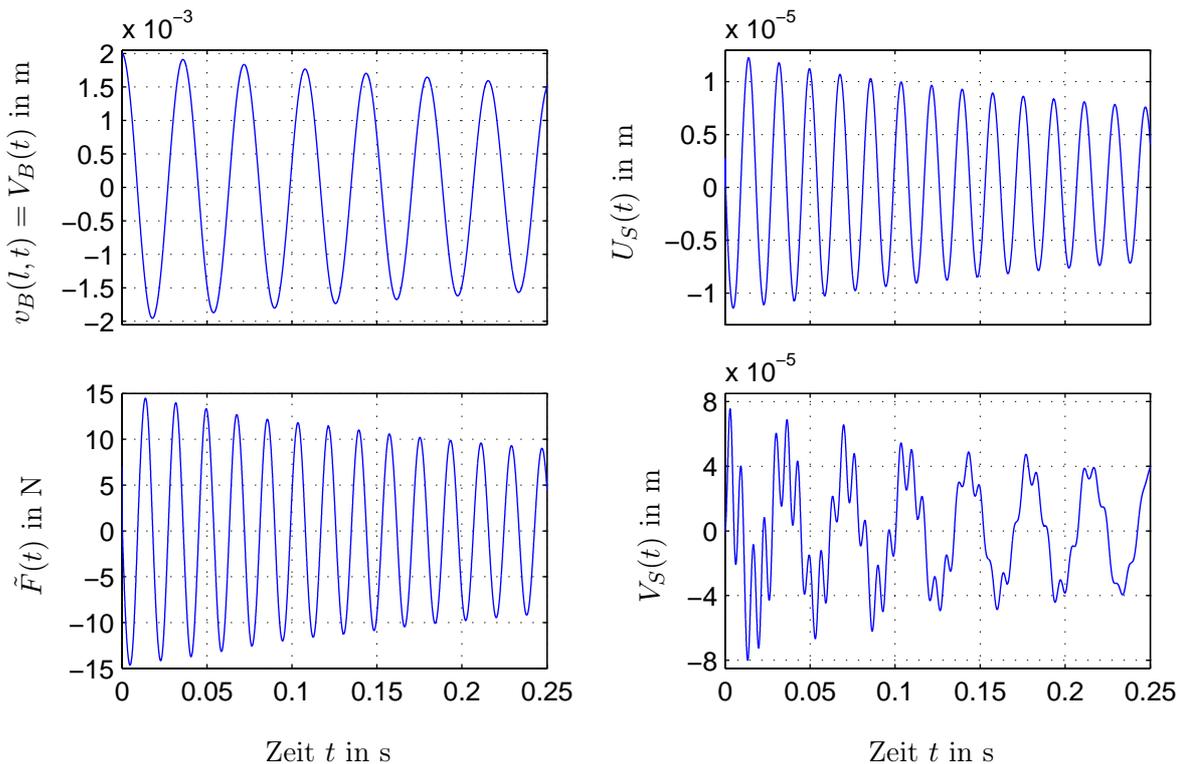


Abb. 4.7: Gedeckte Zeitverläufe der lateralen Balkenschwingung  $v_B(l, t)$ , der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite sowie der axialen und der lateralen Saitenschwingung  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  während der ersten 0.25 s der Simulation.

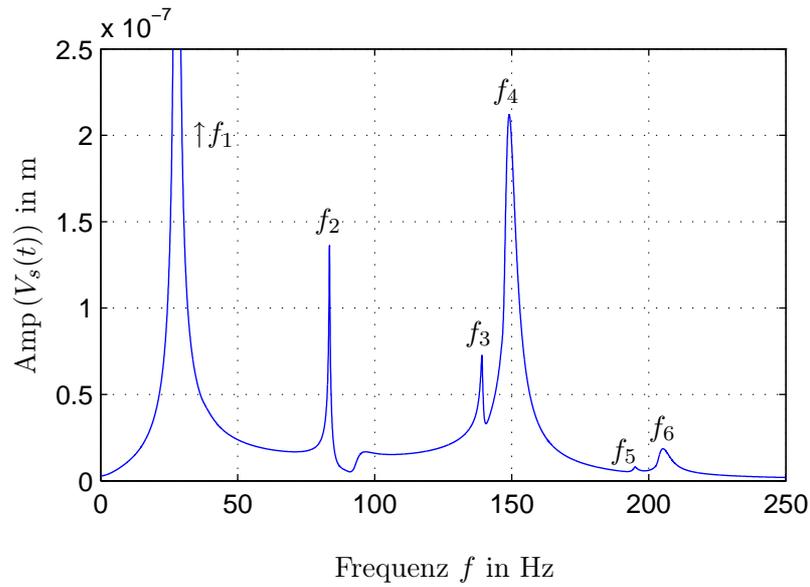


Abb. 4.8: Ergebnis einer FFT-Analyse des Zeitsignals  $V_S(t)$ . Parameter der FFT: Frequenzauflösung 0.05 Hz, Nyquistfrequenz 12.5 kHz.

Tab. 4.5: Zuordnung der Frequenzen aus der FFT-Analyse von  $V_B(t)$ ,  $\tilde{F}(t)$ ,  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  zu den Eigenfrequenzen des linearisierten Modells. Parameter der FFT: Frequenzauflösung 0.05 Hz, Nyquistfrequenz 12.5 kHz.

Zeitsignal	Frequenzanteile aus einer FFT-Analyse	Korrespondierende Vielfache der Eigenfrequenzen des mech. Systems
$V_B(t)$	27.85 Hz	$f_B = 27.84$ Hz
$\tilde{F}(t)$	55.70 Hz	$2f_B = 55.68$ Hz
$U_S(t)$	55.70 Hz	$2f_B = 55.68$ Hz
$V_S(t)$	$f_1 = 27.85$ Hz	$f_B = 27.84$ Hz
	$f_2 = 83.50$ Hz	$3f_B = 83.52$ Hz
	$f_3 = 139.10$ Hz	$5f_B = 139.20$ Hz
	$f_4 = 149.10$ Hz	$f_{V_s} = 145.02$ Hz
	$f_5 = 195.00$ Hz	$7f_B = 194.88$ Hz
	$f_6 = 205.10$ Hz	$4/3f_{V_s} = 192.88$ Hz

Wie in diesem Abschnitt gezeigt wurde, kann durch eine parametrische Regelung der Kraft in der Saite eine aktive Dämpfung der Balkenschwingung erreicht werden. Die numerischen Ergebnisse lassen aber auch erwarten, dass die hier verwendete Regelung basierend auf einer axialen Geschwindigkeitsrückführung des freien Balkenendes mit konstanter Verstärkung noch deutlich verbessert werden kann.

## 4.4 Ergebnisse für das Regelgesetz II

Die Abbildungen 4.9 bis 4.12 zeigen die numerischen Ergebnisse bei Einführung einer zustandsabhängigen Verstärkung. Die gewählten Reglerparameter sind in der Tabelle 4.4 (Parametersätze  $P^{II,1}$  bis  $P^{II,4}$ ) angeführt. Die verwendeten Anfangsbedingungen sind identisch mit jenen für das Regelgesetz  $I$  (siehe Tabelle 4.2).

Vergleicht man den zeitlichen Verlauf der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  aus der Abbildung 4.9 mit dem Ergebnis für das Regelgesetz  $I$ , siehe Abbildung 4.4, so ist deutlich der Unterschied, der durch die zustandsabhängige Verstärkung hervorgerufen wird, erkennbar. Während beim Regelgesetz  $I$  die Amplitude der Kraft  $\tilde{F}(t)$  für  $t > 0$  sofort abfällt, bleibt sie beim Regelgesetz  $II$  bis etwa  $t = 0.1$  s konstant, ehe sie gegen Null geht. Zu Beginn, d.h. bei großen Auslenkungen des Balkens, wird also durch die zustandsabhängige Verstärkung eine größere Kraft in die Saite eingebracht mit dem Ziel, die aktive Dämpfung der Balkenquerschwingung  $v_B(l, t)$  im Vergleich zum Regelgesetz  $I$  zu erhöhen.

Wie im Abschnitt 3.3 gezeigt, kann durch geeignete Wahl der Parameter der zustandsabhängigen Verstärkung der Verlauf der Amplitude von  $\tilde{F}(t)$ , und damit die Dämpfungswirkung, beeinflusst werden. Vergleicht man die Zeitverläufe von  $\tilde{F}(t)$  aus den Abbildungen 4.9 bis 4.12, so erkennt man, dass die in den Parametersätzen  $P^{II,1}$  bis  $P^{II,4}$  zusammengefassten Reglerparameter so gewählt wurden, dass die Amplitude von  $\tilde{F}(t)$  bis zu einem immer späteren Zeitpunkt konstant bleibt. So beträgt die Zeitspanne einer konstanten Kraftamplitude bei Verwendung des Parametersatzes  $P^{II,4}$  etwa das Zehnfache der Zeit von Parametersatz  $P^{II,1}$ . Um die Auswirkung auf den Verlauf der Balkenquerschwingung  $v_B(l, t)$  besser beurteilen zu können, wurden die Hüllkurven von  $v_B(l, t)$  und der Kraft  $\tilde{F}(t)$  aus den Abbildungen 4.9 bis 4.12 berechnet und in Abbildung 4.13 gegenübergestellt. Man erkennt deutlich, dass, je länger die Amplitude von  $\tilde{F}(t)$  konstant bleibt, umso schneller sinkt die Amplitude der Balkenquerschwingung ab. In der Tabelle 4.6 ist ein Vergleich der Auslenkungsamplituden zu den Zeitpunkten  $t = 1$  s und  $t = 2$  s, bezogen auf die Anfangsauslenkung, dargestellt. Während beim Parametersatz  $P^{II,1}$  die bezogene Auslenkungsamplitude nach 2 s etwa 1/3 der Anfangsauslenkung beträgt, ist sie bei Verwendung von Parametersatz  $P^{II,4}$  bereits auf 13.8 % abgesunken.

In der unteren Hälfte der Abbildungen 4.9 bis 4.12 sind die Zeitverläufe der Saitenschwingungen  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  und der gesamten axialen und lateralen Verschiebungen  $u_S(0, t)$  und  $v_S(0, t)$  der Saite dargestellt. Analog zu den Ergebnissen für das Regelgesetz  $I$  kommt es zu keiner Anregung einer Saitenschwingung durch die parametrische Regelung der Kraft in der Saite. Interessant ist, dass in den Zeitverläufen von  $U_S(t)$  und  $u_S(0, t)$  zu Beginn eine leichte Amplitudenmodulation auftritt (siehe z.B. Abbildung 4.12). Der Grund für den Abfall der Amplitude von  $U_S(t)$  (deutlich zu erkennen in Abbildung 4.12 im Bereich  $0 < t < 1$  s) ist die laterale Saitenschwingung  $V_S(t)$ . Diese verursacht einen Schwingungsanteil in  $U_S(t)$  dessen Frequenz der doppelten Frequenz von  $V_S(t)$  entspricht und der einen Mittelwert größer Null besitzt. Aufgrund der Materialdämpfung sinkt die Amplitude dieser Schwingung ab, woraus sich der beschriebene Amplitudenabfall in  $U_S(t)$  ergibt.

Die Amplitudenmodulation in der Verschiebung  $u_S(0, t)$  im Bereich  $0 < t < 1$  s wird durch den geometrischen Effekt der axialen Absenkung des freien Endes des Balkens bei einer Auslenkung desselben verursacht. Das dadurch hervorgerufene axiale Verschiebungsfeld  $u_{S,B}(x, t)$  (siehe Gleichung (2.62) besitzt die doppelte Frequenz von  $V_B(t)$ , allerdings einen negativen Mittelwert. Sinkt die Amplitude der Balkenquerschwingung ab, so geht auch die Amplitude von  $u_{S,B}$  gegen Null, woraus sich die Amplitudenmodulation von  $u_S(0, t)$  in Abbildung 4.12 ergibt.

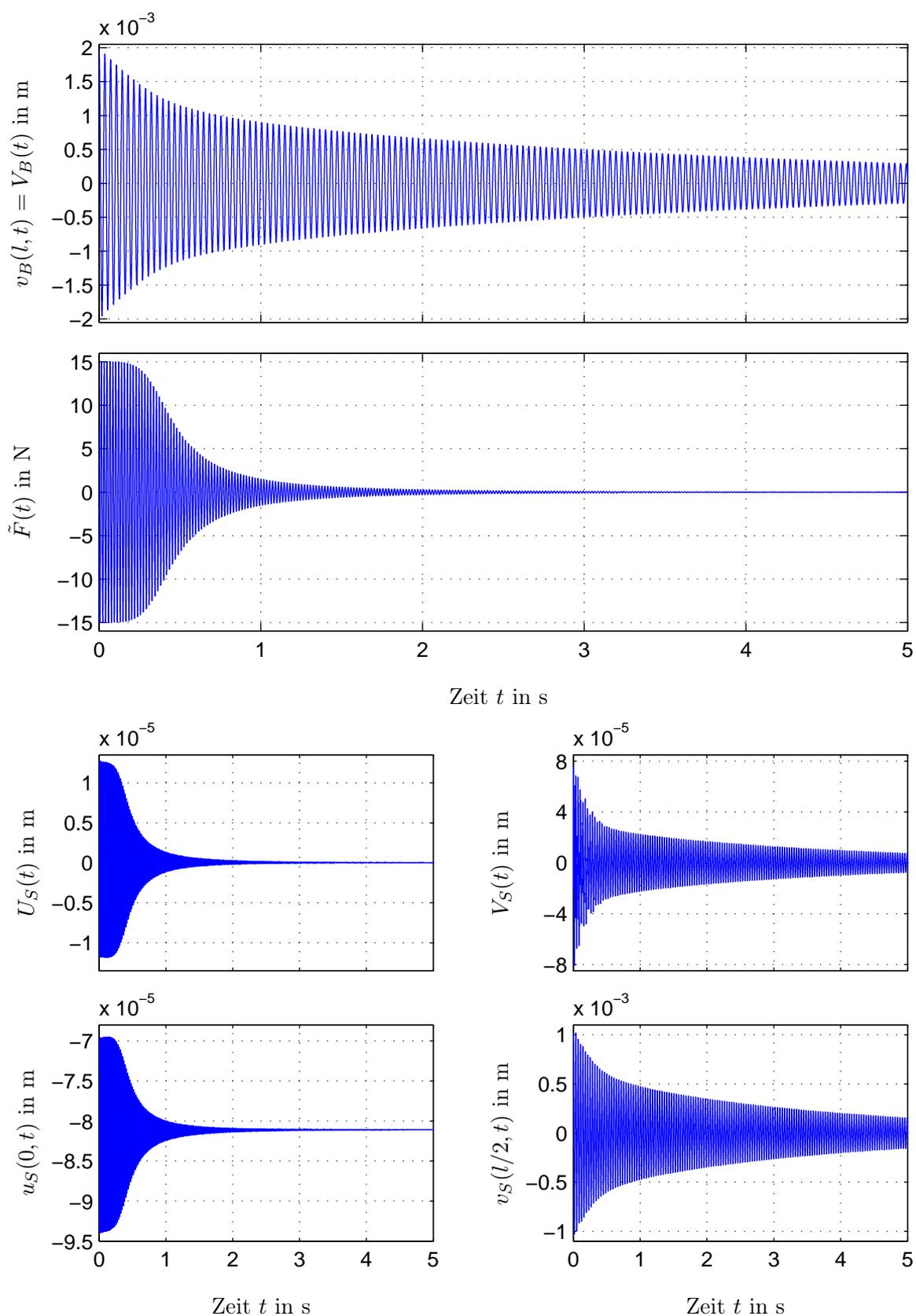


Abb. 4.9: Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz II, Parametersatz  $P^{II,1}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung  $v_B(l, t)$ , der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite  $u_S(0, t)$  und  $v_S(l/2, t)$ .

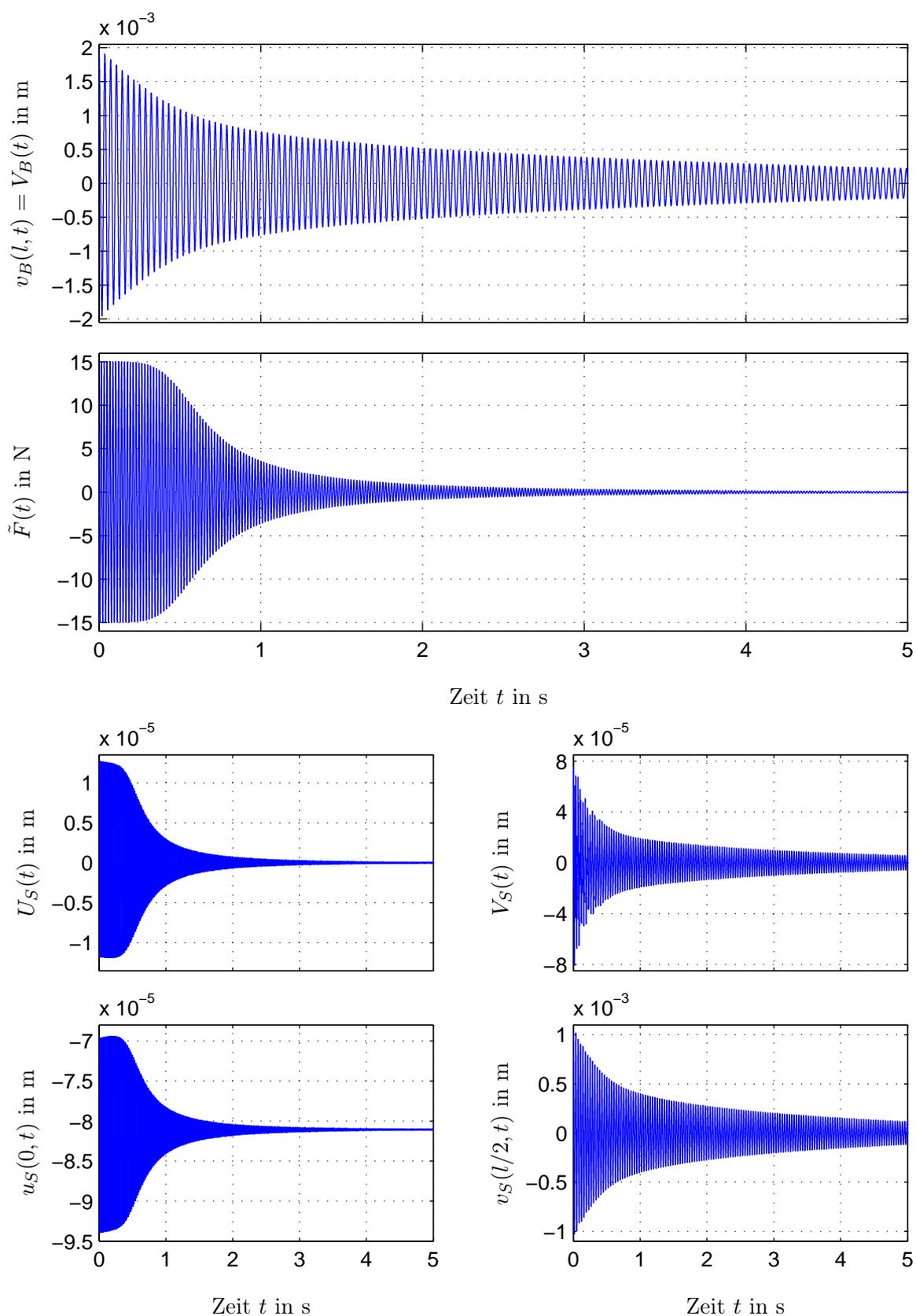


Abb. 4.10: Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz II, Parametersatz  $P^{II,2}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung  $v_B(l, t)$ , der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite  $u_S(0, t)$  und  $v_S(l/2, t)$ .

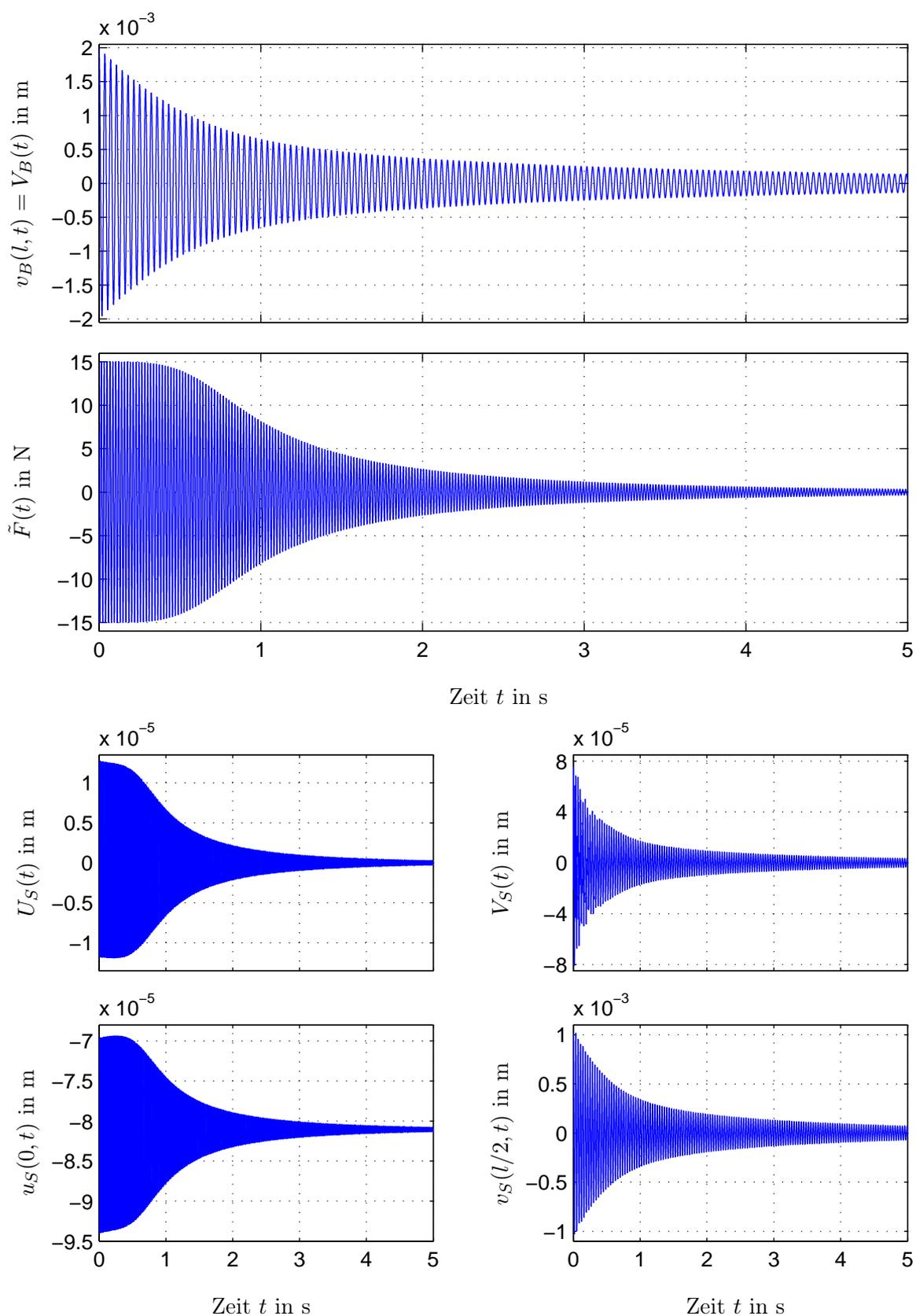


Abb. 4.11: Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz II, Parametersatz  $P^{II,3}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung  $v_B(l, t)$ , der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite  $u_S(0, t)$  und  $v_S(l/2, t)$ .

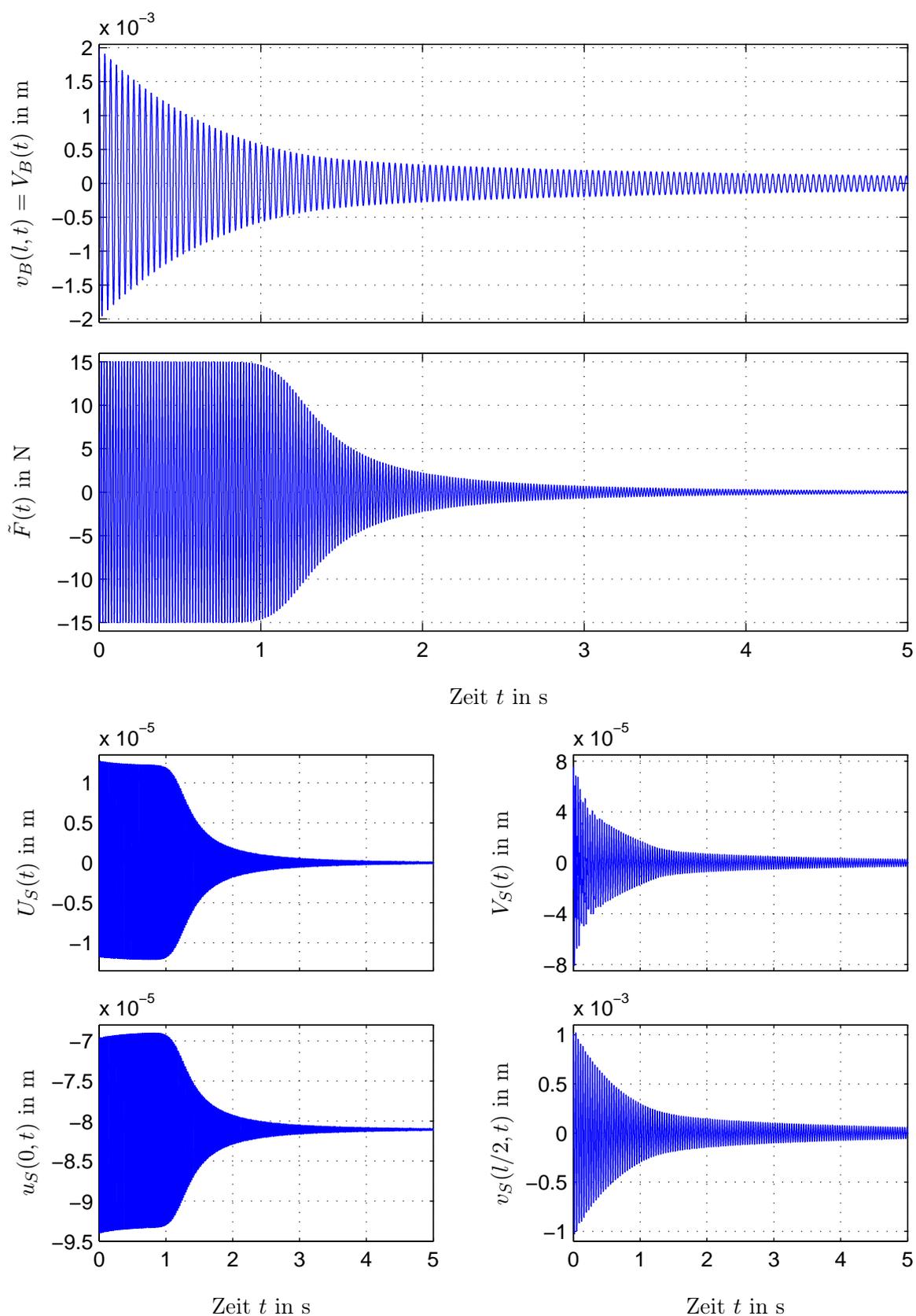


Abb. 4.12: Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz II, Parametersatz  $P^{II,4}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung  $v_B(l, t)$ , der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite  $u_S(0, t)$  und  $v_S(l/2, t)$ .

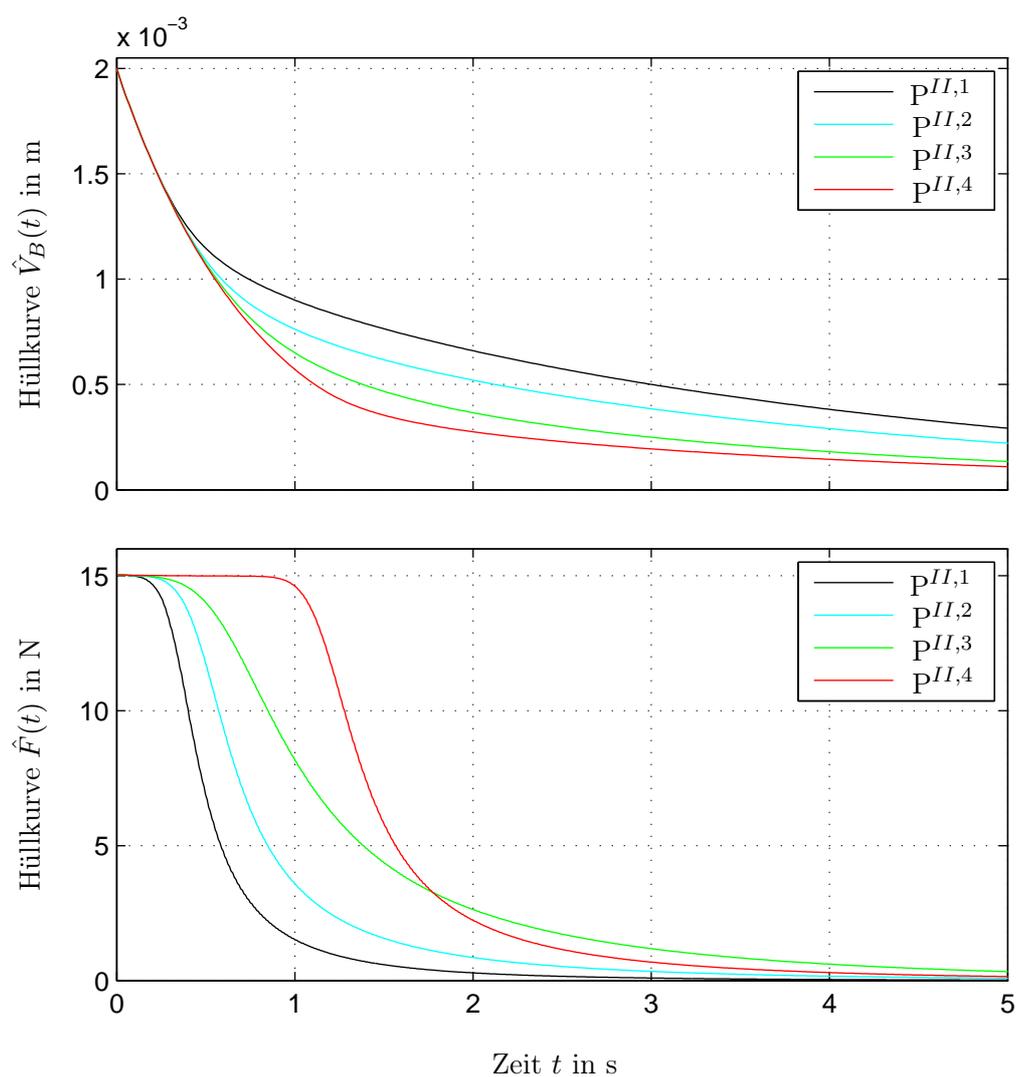


Abb. 4.13: Zusammenfassung der Ergebnisse für das Regelgesetz II.

Tab. 4.6: Auswertung von Abbildung 4.13. Auf die Anfangsauslenkung bezogene Amplitude der Balkenauslenkung  $V_B(t)$  zu den Zeitpunkten  $t = 1$  s und  $t = 2$  s.

Parametersatz	$\frac{\hat{V}_B(1)}{\hat{V}_B(0)}$ in %	$\frac{\hat{V}_B(2)}{\hat{V}_B(0)}$ in %
$p^{II,1}$	44.9	33.1
$p^{II,2}$	38.0	26.1
$p^{II,3}$	32.4	18.3
$p^{II,4}$	28.4	13.8

Die Festlegung der Reglerparameter erfolgte auf Basis der Gleichung (3.50)

$$\hat{F}_r^{II} = \eta \frac{\pi^2}{16l} \frac{\hat{V}_B^2}{\hat{V}_B^2 + \omega_B^{-2} \gamma e^{-\beta \omega_B^2} \hat{V}_B^2},$$

die eine analytische Näherungsformel für den Verlauf der Sollkraftamplitude in Abhängigkeit von der Amplitude der Balkenauslenkung beschreibt. Um diese Näherung zu überprüfen, wird aus den Simulationsergebnissen für den Parametersatz P<sup>II,4</sup> der Zusammenhang  $\hat{F}_r^{II}(\hat{V}_B)$  numerisch berechnet und der analytischen Näherungsformel gegenübergestellt, siehe Abbildung 4.14. Man sieht, dass kaum ein Unterschied erkennbar ist, vor allem bei kleineren Kraftamplituden sind die Verläufe praktisch deckungsgleich. Zur Festlegung der Reglerparameter für die zustandsabhängige Verstärkung liefert daher die Näherungsformel nach Gleichung (3.50) sehr gute Ergebnisse.

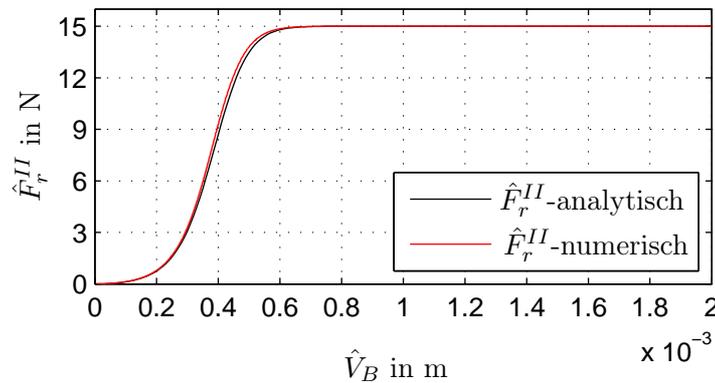


Abb. 4.14: Vergleich des Sollkraftverlaufes  $\hat{F}_r^{II}$  in Abhängigkeit der Auslenkungsamplitude  $\hat{V}_B$  des Balkens mit der analytischen Näherungsformel. Verwendeter Parametersatz: P<sup>II,4</sup>.

## 4.5 Ergebnisse für das Regelgesetz III

Die Abbildungen 4.15 und 4.16 zeigen die numerischen Ergebnisse bei Verwendung einer zustandsabhängigen Verstärkung mit einer Konstanten als Abschaltfunktion (anstatt einer Exponentialfunktion wie beim Regelgesetz II). Die gewählten Reglerparameter sind in der Tabelle 4.4, Parametersätze P<sup>III,1</sup> und P<sup>III,2</sup> angeführt. Die Anfangsbedingungen für die Simulation können wieder der Tabelle 4.2 entnommen werden.

Betrachtet man den zeitlichen Verlauf der Hüllkurve der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  aus den Abbildungen 4.15 und 4.16 und vergleicht ihn mit dem entsprechenden Zeitverlauf für das Regelgesetz I, siehe Abbildung 4.4 unten, so wird erkennbar, dass beim Regelgesetz III die Amplitude von  $\tilde{F}(t)$  stets größer ist als beim Regelgesetz I. So beträgt zum Beispiel die Kraftamplitude nach 1 s beim Regelgesetz I nur mehr 3.5 N, beim Regelgesetz III, Parametersatz P<sup>III,2</sup> aber immer noch 9.4 N. Ein weiterer Unterschied besteht im zeitlichen Verlauf der Hüllkurve von  $\tilde{F}(t)$ . Während die Krümmung der Hüllkurve von  $\tilde{F}(t)$  aus Abbildung 4.4 stets größer Null ist, ändert sie z.B. in Abbildung 4.16 das Vorzeichen, die Hüllkurve besitzt einen Wendepunkt. Allerdings gibt es wie beim Regelgesetz II keinen Bereich innerhalb dessen die Amplitude von  $\tilde{F}(t)$  konstant bleibt. Wie groß der Unterschied in der Auswirkung auf die Dämpfung der Balkenquerschwingung  $V_B(t)$  ist, wird im nächsten Abschnitt in einer Gegenüberstellung der Ergebnisse aller Regelgesetze gezeigt. Die Abbildung 4.17 zeigt abschließend eine Zusammenfassung der Hüllkurven von  $\tilde{F}(t)$  und  $V_B(t)$  der beiden untersuchten Parametersätze P<sup>III,1</sup> und P<sup>III,2</sup>.

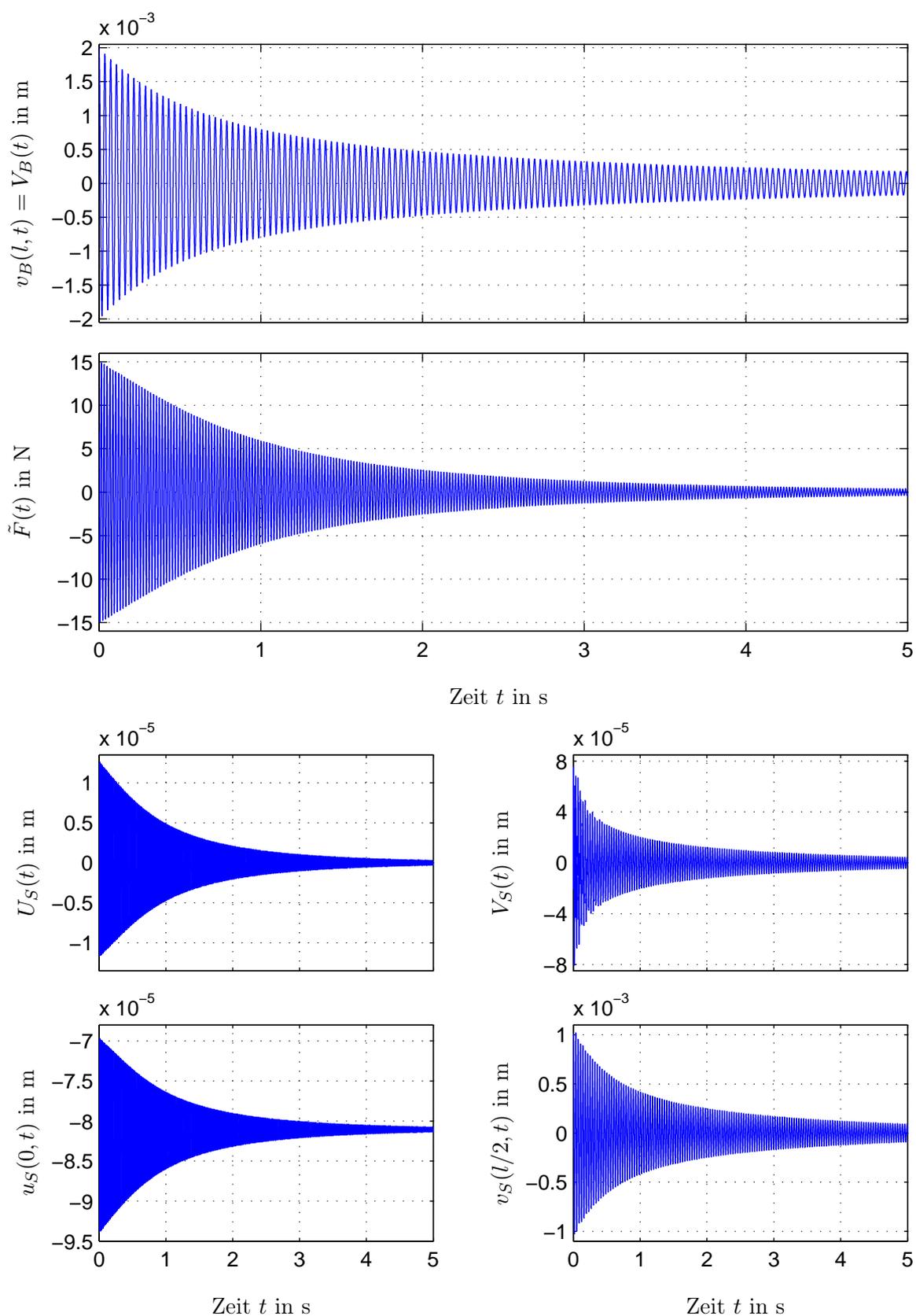


Abb. 4.15: Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz III, Parametersatz  $P^{III,1}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung  $v_B(l, t)$ , der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite  $u_S(0, t)$  und  $v_S(l/2, t)$ .

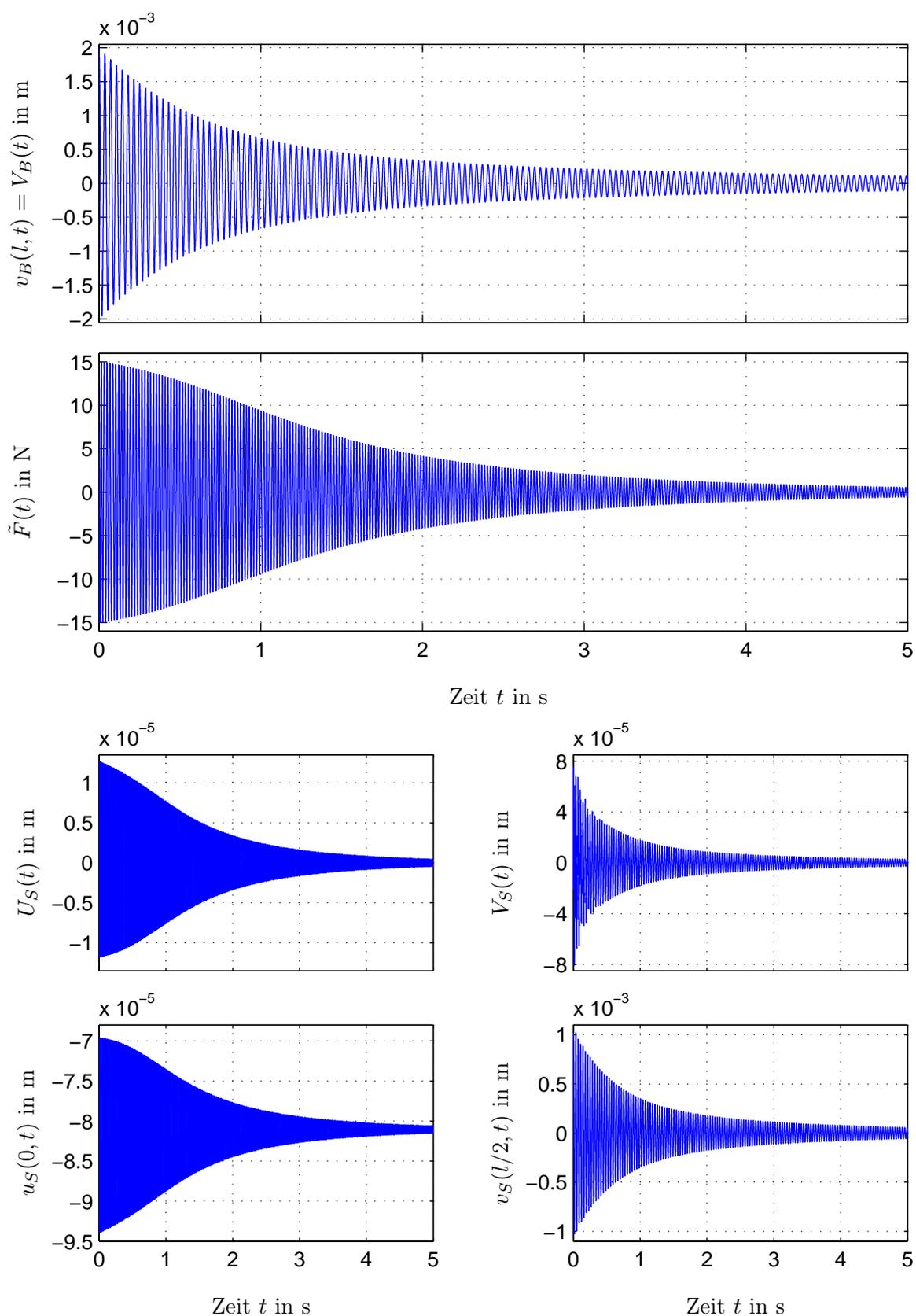
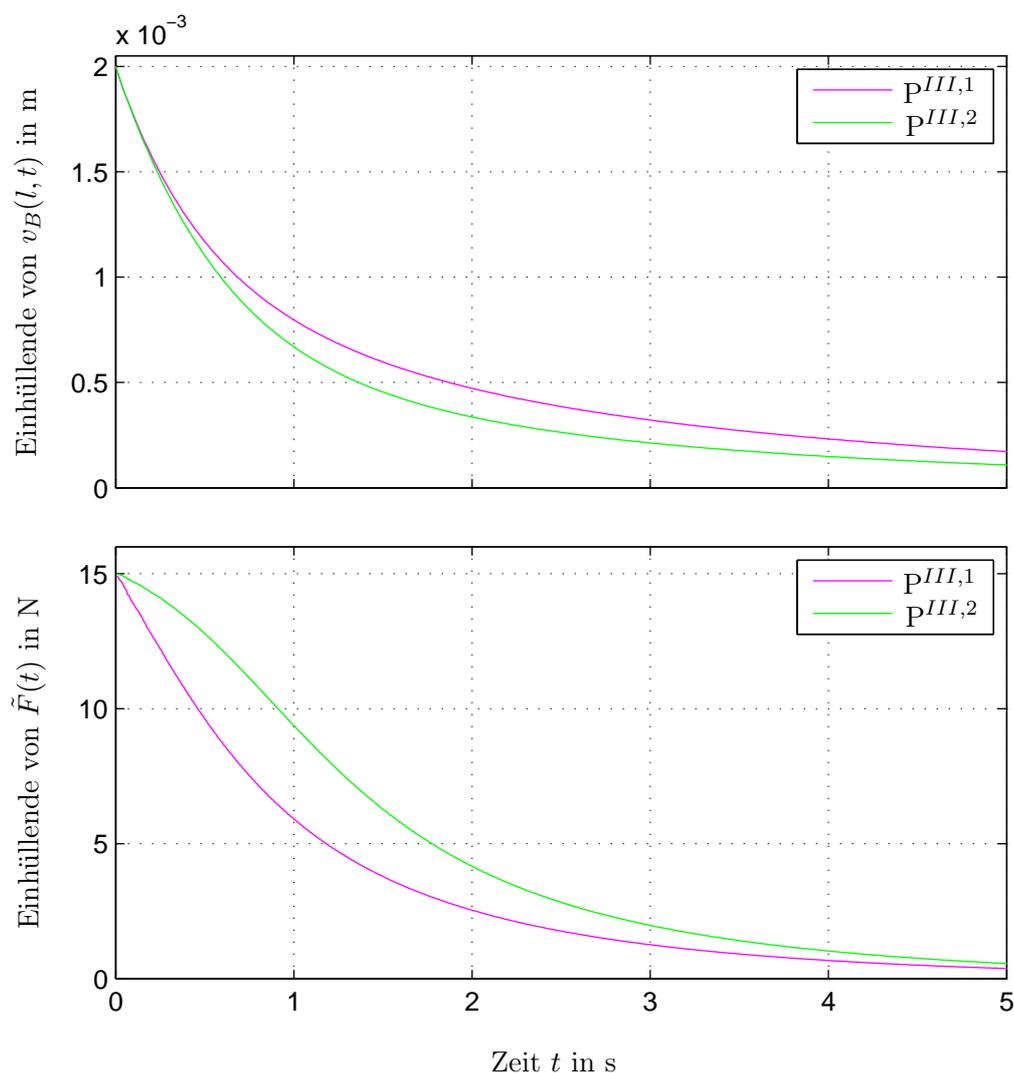


Abb. 4.16: Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz III, Parametersatz  $P^{III,2}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung  $v_B(l, t)$ , der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung  $U_S(t)$  und  $V_S(t)$  sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite  $u_S(0, t)$  und  $v_S(l/2, t)$ .

Abb. 4.17: Zusammenfassung der Ergebnisse für das Regelgesetz *III*.

## 4.6 Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse

Abbildung 4.18 zeigt eine Zusammenfassung der Simulationsergebnisse. Dabei wurden in den Regelgesetzen *II* und *III* jeweils jene Parametersätze ausgewählt, die die größte Dämpfung der Balkenquerschwingung  $V_B(t)$  ergaben. Im oberen Teil der Abbildung ist neben den Hüllkurven  $\hat{V}_B(t)$  für die Regelgesetze *I* bis *III* zum Vergleich auch der Amplitudenverlauf von  $V_B(t)$  für den Fall, dass keine Regelung aktiv ist, dargestellt. Man sieht, dass das Regelgesetz *II* mit dem verwendeten Parametersatz  $P^{II,4}$  den schnellsten Abfall von  $\hat{V}_B(t)$  bewirkt. Wie die untere Abbildung zeigt, ist die zugehörige Kraft in der Saite zu Beginn am größten. Die geringste Dämpfung der Balkenschwingung erhält man mit dem Regelgesetz *I*, die Kraft in der Saite fällt sehr rasch ab. Überraschend ist, dass der Zeitverlauf von  $\hat{V}_B(t)$  für das Regelgesetz *III* sehr ähnlich ist jenem für das Regelgesetz *II*, obwohl die Kraftamplitude  $\hat{F}(t)$  doch erheblich schneller abfällt. In der Tabelle 4.7 sind zu den Zeitpunkten  $t = 1$  s und  $t = 2$  s die Amplituden  $\hat{V}_B(t)$  der Bal-

kenschwingung bezogen auf die zugehörige Amplitude  $\hat{V}_{B,0}$  des unregulierten Balkens angeführt. Nach 1 s beträgt die Amplitude der Balkenschwingung beim Regelgesetz *II* nur mehr 37.1 % der Amplitude im unregulierten Fall und nach 2 s nur mehr 23.4 %. Man sieht, dass man mit dem Regelgesetz *I* deutlich schlechtere Ergebnisse erhält.

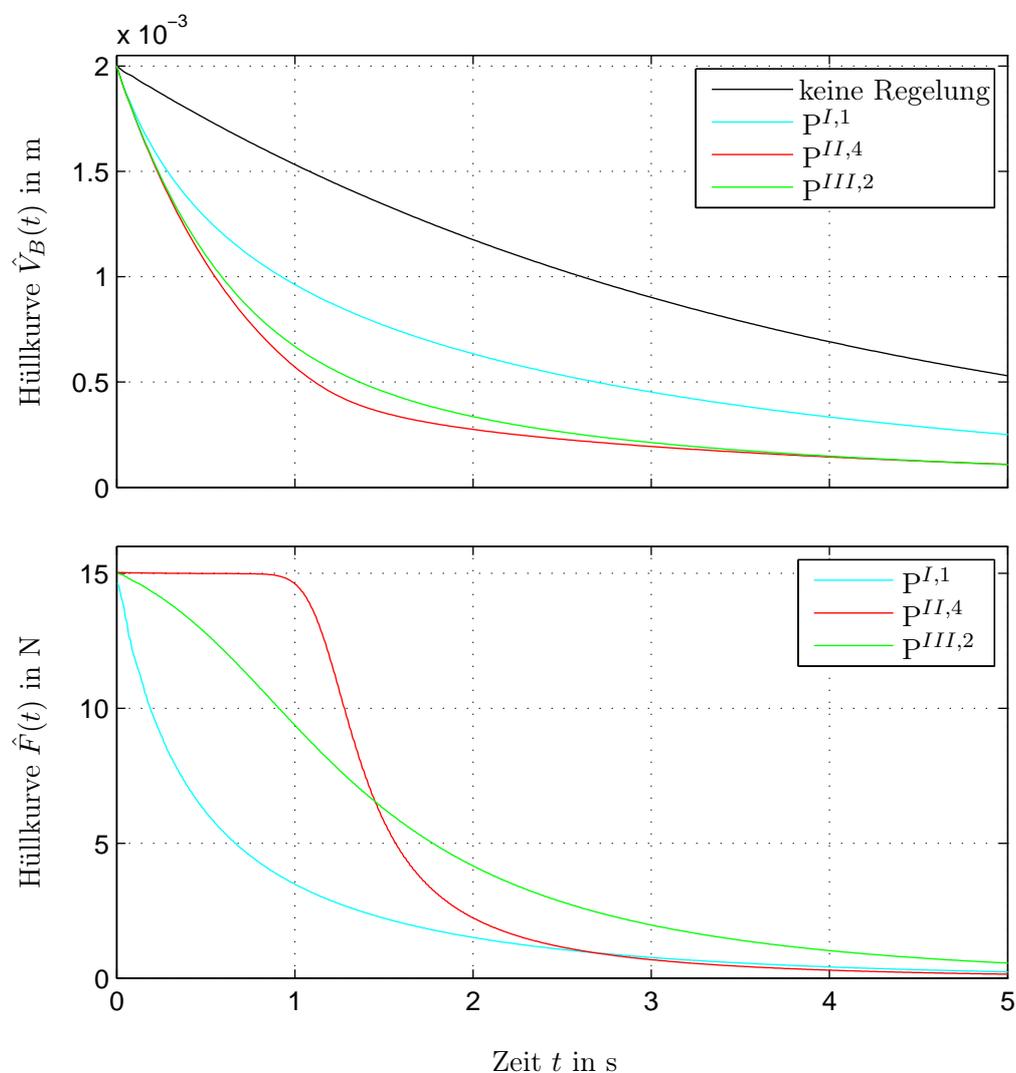


Abb. 4.18: Zusammenfassung der Ergebnisse der Regelgesetze *I* bis *III*.

Tab. 4.7: Auswertung von Abbildung 4.18. Die auf die Amplitude der freien Balkenschwingung bezogene Amplitude der Balkenauslenkung  $V_B(t)$  zu den Zeitpunkten  $t = 1$  s und  $t = 2$  s.

Regelgesetz	Parametersatz	$\frac{\hat{V}_B(1)}{\hat{V}_{B,0}}$ in %	$\frac{\hat{V}_B(2)}{\hat{V}_{B,0}}$ in %
<i>I</i>	$p^{I,1}$	62.7	54.0
<i>III</i>	$p^{III,2}$	43.5	28.6
<i>II</i>	$p^{II,4}$	37.1	23.4

---

Die größte Dämpfungswirkung erhält man also mit der zustandsabhängigen Verstärkung (in der Variante des Regelgesetzes II, mit Parametersatz  $P^{II,4}$ ). Alle drei Regelgesetze zeigen eine sehr hohe Robustheit gegenüber Streuungen in den Systemparametern. So können zum Beispiel die Werte der Dichte  $\rho_B$  des Balkenwerkstoffes und/oder des Elastizitätsmoduls  $E_B$  verdoppelt bzw. halbiert werden ohne dass ein Verlust der Stabilität eintritt. Allgemeinere Aussagen liefert jedoch nur eine vollständige Stabilitätsanalyse.

# 5 Versuchseinrichtung und experimentelle Ergebnisse

## 5.1 Beschreibung der Versuchseinrichtung

Abbildung 5.1 zeigt eine schematische Skizze des Versuchsaufbaues. Um eine möglichst große Isolierwirkung gegenüber Schwingungen der Umgebung zu erzielen, wurde der gesamte mechanische Teil auf einem schwingungsisolierten Tisch aufgebaut.

Der Balken besteht aus einem Aluminiumprofil mit rechteckigem Querschnitt, das der Länge nach, bis kurz vor den beiden Enden geschlitzt wurde, um Raum für die Saite zu schaffen. Dadurch entstehen zwei Balken die nur an den beiden Enden miteinander verbunden sind. In diesen Bereichen wird die Saite durch axiale Bohrungen im Balken durchgeführt. Am freien Ende des Balkens wird eine Buchse auf die Saite geklemmt, damit eine Druckkraft auf den Balken aufgebracht werden kann. Mit Hilfe einer Klemmvorrichtung wird der Balken auf die Trägervorrichtung, bestehend aus Grund- und Deckplatte, die über Verbindungssäulen miteinander verschraubt sind, aufgespannt. Die Saite wird durch eine in der Deckplatte eingeschraubte Zentrierbuchse durchgeführt und mit dem piezoelektrischen Kraftsensor verbunden, der direkt am Piezoaktor befestigt ist. Eine detaillierte Beschreibung des Sensors wird im nächsten Abschnitt gegeben.

Abbildung 5.2 zeigt die mechanische Spannvorrichtung, mit der eine konstante Vorspannkraft auf den Balken aufgebracht werden kann. Durch Anziehen der Spannschrauben wird das Querhaupt, welches durch zwei Bolzen geführt wird, nach unten gedrückt. Über die Druckschraube wird diese Verschiebung auf das Spannschloß und damit auf den Piezoaktor übertragen, womit eine Vorspannkraft in die Saite eingebracht werden kann. Zum Ausgleich eventueller Winkelabweichungen ist der Kontakt zwischen Druckschraube und Querhaupt durch eine Kugelfläche an der Schraube bzw. eine Kegelfläche am Querhaupt ausgeführt.

Zur Aufbringung der Anfangsbedingungen wird eine mechanische Auslenkvorrichtung, siehe Abbildung 5.1, verwendet. Damit kann eine einstellbare laterale Auslenkung des freien Balkenendes erreicht werden. Durch Drücken des Auslösehebels wird der Balken freigegeben. Die entstehende la-

Tab. 5.1: Einstellungen des Laser-Wegmesssystems

Kenngroße	Wert	Einheit
Abtastfrequenz	20	kHz
Empfindlichkeit	4	V/mm
Signalausgabe	direkt (keine Filterung)	-

terale Schwingung des Balkens wird mit Hilfe eines Laser-Messkopfes erfasst und in der zugehörigen Steuereinheit verarbeitet, die zum Beispiel die Einstellung der Laser-Abtastfrequenz, verschiedene Filteroptionen sowie die Skalierung des Analogausganges ermöglicht. Tabelle 5.1 zeigt die wichtigs-

ten Einstellungen. Eine genaue Beschreibung der Einstellmöglichkeiten ist in [44] zu finden. Implementiert wird die Regelung auf einer echtzeitfähigen Regelkarte mit eigenem Prozessor, die in einen konventionellen Rechner eingebaut ist. Die Programmierung erfolgt durch eine objektorientierte Programmiersprache, siehe [39] und [38]. Die genauen Spezifikationen der Karte können aus [42] entnommen werden.

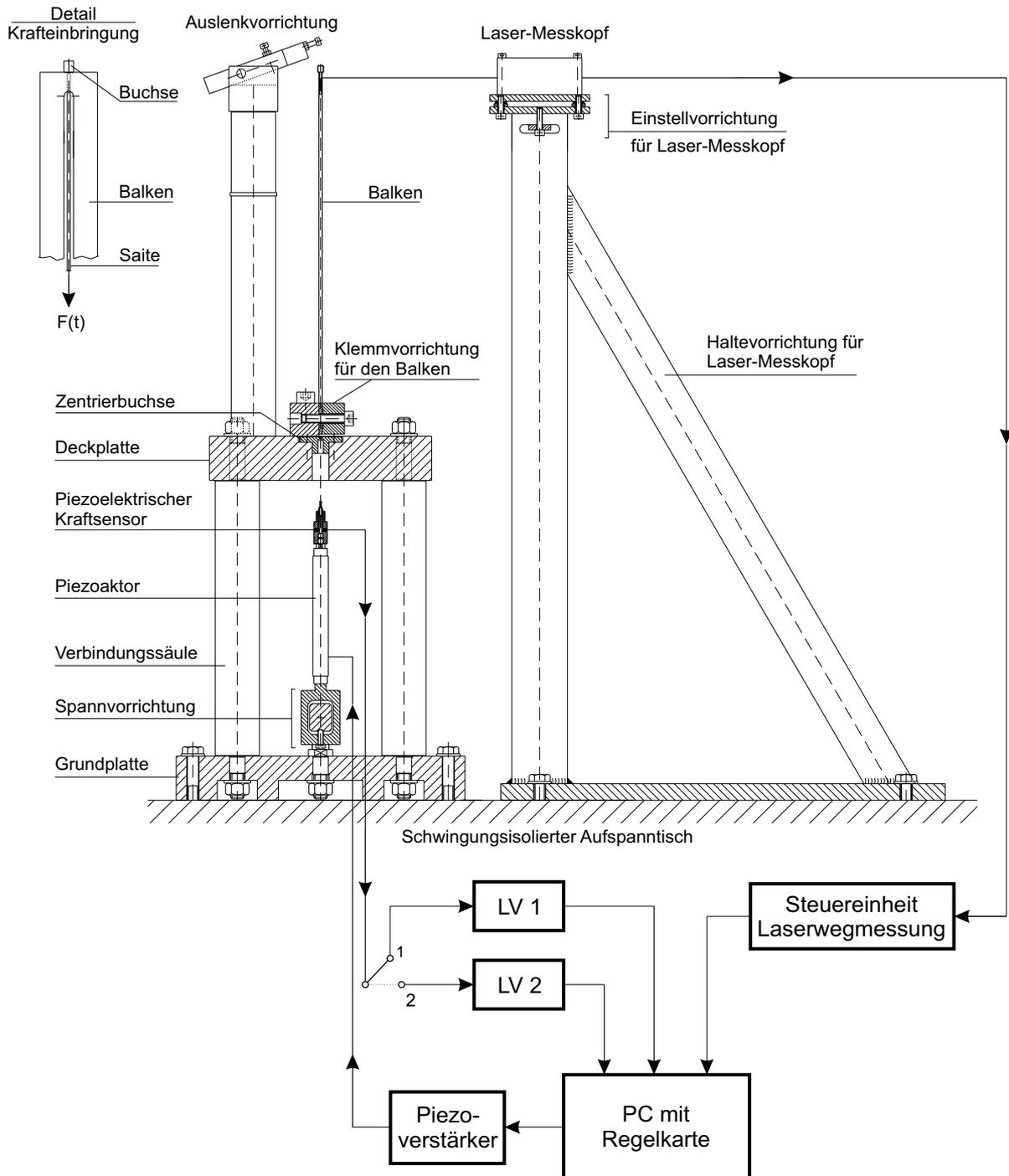


Abb. 5.1: Schematische Skizze des Versuchsaufbaus.

Der piezoelektrische Kraftsensor wurde speziell im Hinblick auf geringes Gewicht und direkte Anbindung an den Piezoaktor entwickelt. Zur Auswertung des Kraftsensordesigns werden zwei Ladungsverstärker, LV 1 und LV 2, verwendet. Der Ladungsverstärker LV 1 wird im eigentlichen Regelbetrieb verwendet, während LV 2 nur zur Messung der Vorspannkraft benutzt wird. Da sich der piezoelektrische Kraftsensor nicht für die Messung quasistatischer Kräfte eignet, wird ein Ladungsverstärker mit sehr hoher Eingangsimpedanz benötigt, um während des Aufbringens der Vorspannkraft den Fehler möglichst klein zu halten. Nach dem Vorspannen wird auf den Ladungsverstärker LV 1 umgeschaltet, d.h. die Information über die Vorspannkraft geht verloren. Es wird also angenommen, dass die einmal aufgebrachte Vorspannkraft sich während des Regelprozesses nicht verändert. Eine Beschreibung der Ladungsverstärker LV 1 und LV 2 ist in [33], bzw. in [41] zu finden. Mit Hilfe der gemessenen Balkenauslenkung und der Saitenkraft berechnet die Regelkarte entsprechend dem Regelgesetz das notwendige Ansteuersignal für den Piezovertärker. Der Verstärker besitzt einen konstanten Verstärkungsfaktor und steuert direkt den Piezoaktor an.

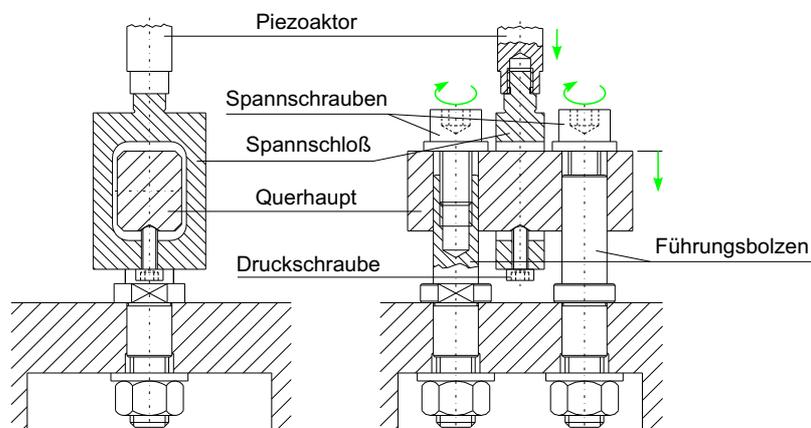


Abb. 5.2: Vorrichtung zum Aufbringen der konstanten Vorspannkraft auf den Balken.

Die folgenden Abbildungen zeigen einige Fotos des Versuchsaufbaus. Abbildung 5.3 zeigt eine Übersicht über den Gesamtaufbau. Man erkennt im Vordergrund den konventionellen Rechner mit Regelkarte, anschließend die beiden Ladungsverstärker, die Steuereinheit für den Laser-Messkopf und den Piezovertärker. Der mechanische Aufbau im Hintergrund ist in Abbildung 5.4 vergrößert dargestellt. Um die Beeinflussung der Balkenschwingung durch die Vibrationen der Umgebung möglichst gering zu halten, wird der gesamte Versuch auf einem schwingungs isolierten Tisch aufgebaut und die Trägervorrichtungen für Balken und Laser möglichst steif ausgeführt. Das Detail links zeigt den geschlitzten Balken mit der Saite im Inneren und der Buchse zur Aufbringung der axialen Kraft auf den Balken.

Abbildung 5.5 zeigt den Piezoaktor inklusive Kraftsensor und Spannvorrichtung. Man erkennt die beiden Spannschrauben mit denen die Vorspannkraft auf den Balken aufgebracht wird.

### 5.1.1 Messung der Kraft in der Saite

Abbildung 5.6 zeigt den Aufbau des Kraftsensors zur Messung der Saitenkraft. Damit die Messungen durch den Sensor selbst möglichst wenig beeinflusst werden, ist ein geringes Gewicht des Kraftsensors sehr wichtig und damit verbunden eine direkte Ankopplung an den Piezoaktor. Da kein kommerziell verfügbarer Sensor diese Bedingungen erfüllt, wurde ein eigener piezoelektrischer

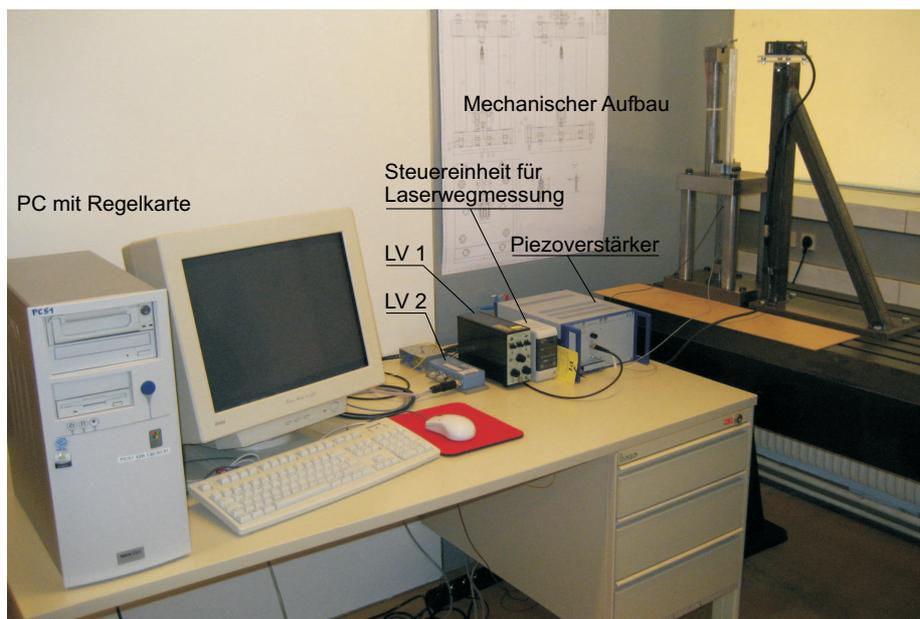


Abb. 5.3: Gesamtübersicht der Versuchsanordnung.

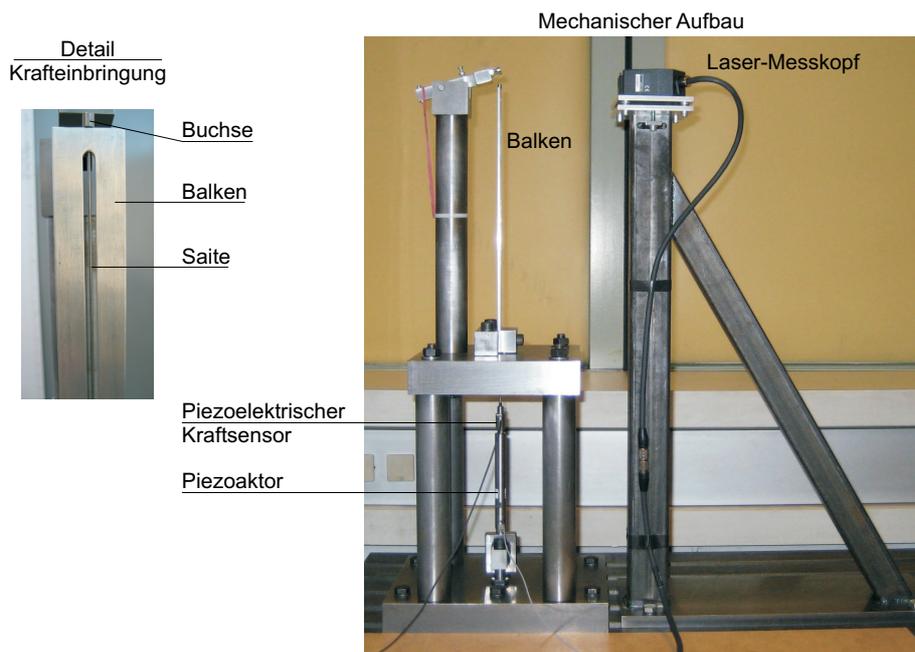


Abb. 5.4: Mechanischer Aufbau der Versuchseinrichtung (rechts) und Detail der Krafteinbringung auf den Balken (links).

Kraftsensor aufgebaut, siehe Abbildung 5.6. Der eigentliche Sensor besteht aus einem zylindrischen, kreisringförmigen Metallgehäuse mit der unkalibrierten Piezoscheibe im Inneren. Entsprechend den Angaben des Herstellers kann dieser Sensor nur Druckkräfte übertragen, siehe [40]. Um dennoch Zugkräfte messen zu können, ist eine entsprechende Einbauvorrichtung, bestehend aus Sensorunterteil, Druckscheibe und Spannmutter erforderlich, die eine Vorspannung der Piezoscheibe

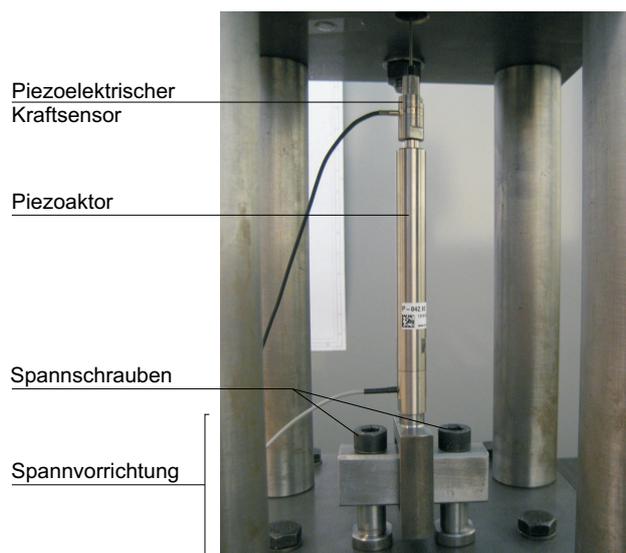


Abb. 5.5: Detailansicht von Piezoaktor inkl. Kraftsensor und Spannvorrichtung.

ermöglicht. Man erkennt, dass der Sensor direkt mit dem Piezoaktor und der Gewindebuchse, in die die Saite eingepresst wurde, verbunden ist. Die Vorspannung des Sensors erfolgt durch Montage auf einem feststehenden Hilfsträger und Anziehen der Spannmutter, wobei darauf geachtet werden muss, dass keine Torsionsmomente in die Piezoscheibe eingeleitet werden.

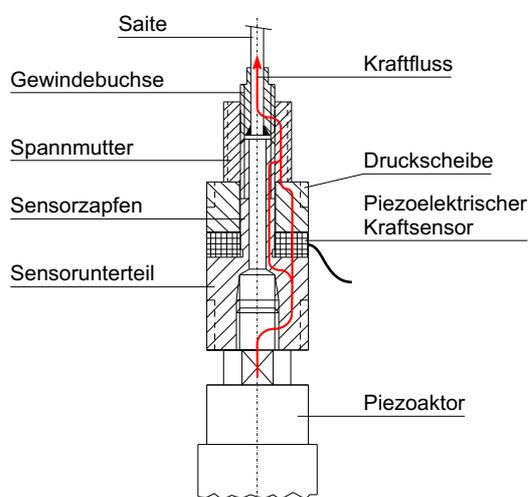


Abb. 5.6: Kraftsensor zur Messung der Kraft in der Saite.

Da es sich um einen unkalibrierten Sensor handelt, gibt der Hersteller die Empfindlichkeit der Piezoscheibe mit einem sehr großen Toleranzbereich von  $\pm 10\%$  an. Für dynamische Kraftmessungen im geregelten Betrieb muss daher der Sensor nach der Vorspannung kalibriert werden. Zur Messung der Vorspannkraft selbst wird jedoch diese ungefähre Empfindlichkeit verwendet und der Sensor auf etwa  $-1500\text{ N}$  vorgespannt (vgl. die erwartete zu messende Kraft im eingebauten Zustand beträgt ca.  $100 \pm 20\text{ N}$ ). Während des Anziehens der Spannmutter wird die dadurch entstehende Ladung des Kraftsensors in einem Ladungsverstärker mit sehr hohem Eingangswiderstand verstärkt und

angezeigt. Erst durch den hohen Eingangswiderstand sind quasistatische Messungen mit Hilfe eines Piezosensors möglich. Wie Untersuchungen am Kraftsensor mit konstanter Belastung durch ein Testgewicht gezeigt haben, ist die Drift in der Ausgangsspannung des Ladungsverstärkers LV 2 kleiner als 2%/min. Damit kann die Vorspannkraft des Balkens genügend genau eingestellt werden. Die rechte Hälfte von Abbildung 5.6 zeigt den Kraftfluss durch den Sensor. Durch die Vorspannkraft ist der Sensorzapfen auf Zug, der Sensor selbst jedoch auf Druck beansprucht. Greift am Sensor eine axiale Kraft an, so ändert sich die Druckkraft auf die Piezoscheibe wodurch sich eine proportionale Coulomb'sche Ladung im Piezoaktor ausbildet, die mit einem Ladungsverstärker in eine elektrische Spannung umgewandelt werden kann. Zur Bestimmung des Zusammenhanges zwischen der angreifenden Kraft und dem Ausgangssignal des Kraftsensors wird eine dynamische Kalibrierung der Messeinrichtung durchgeführt.

### Dynamische Kalibrierung des Kraftsensors

Die Abbildung 5.7 zeigt schematisch den Aufbau zur dynamischen Kalibrierung des Kraftsensors.

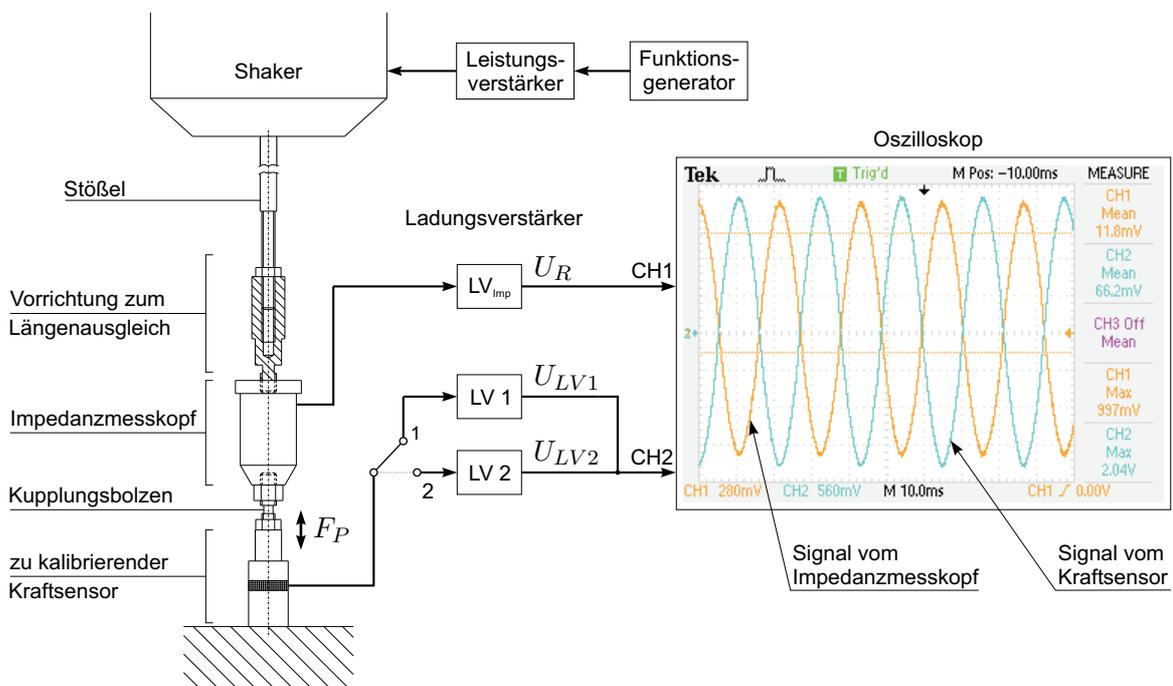


Abb. 5.7: Schematische Skizze von Aufbau und Vorrichtung zur Kalibrierung des Kraftsensors.

Mit Hilfe eines elektrodynamischen Schwingerregers, der von einem Funktionsgenerator mit einer harmonischen Spannung konstanter Amplitude angesteuert wird, kann eine periodische, zeitvariable Prüfkraft  $F_P(t)$  auf den Kraftsensor aufgebracht werden. Die Frequenz der elektrischen Spannung wird gleich der zu erwartenden Frequenz der Kraft in der Saite im geregelten Betrieb gewählt. Nach Abschnitt 3.2 ist das etwa die doppelte erste Biegeeigenfrequenz des Balkens. Die Kraftübertragung erfolgt über einen Stößel mit Vorrichtung zum Längenausgleich während der Montage der Kalibriereinrichtung. Die Information über die tatsächliche Kraft, mit der der Sensor beansprucht wird, liefert ein im Kraftfluss angeordneter, kalibrierter Impedanzmesskopf. Es wird also angenommen, dass der Impedanzmesskopf und der zu kalibrierende Kraftsensor mit derselben Kraft  $F_P(t)$

beansprucht werden. Die Ausgangsspannung des Ladungsverstärkers  $LV_{Imp}$  des Impedanzmesskopfs wird mit Hilfe eines Oszilloskops gemessen und angezeigt.

Tab. 5.2: Einstellungen des Ladungsverstärkers des Impedanzmesskopfs

Kenngroße	Wert	Einheit
Empfindlichkeit	0.337	pC/ms <sup>-2</sup>
Verstärkung	0.1	mV/ms <sup>-2</sup>
Untere Grenzfrequenz	0.2	Hz
Obere Grenzfrequenz	30	kHz

Tabelle 5.2 zeigt die Einstellungen des Ladungsverstärkers. Mit der Empfindlichkeit des Impedanzmesskopfes von 337 pC/N lt. Eichbrief ergibt sich damit eine gesamte Empfindlichkeit für den Impedanzmesskopf inklusive Ladungsverstärker von  $E_{LV,Imp} = 0.1$  V/N. Damit kann die am Oszilloskop angezeigte elektrische Spannung in die entsprechende Kraft  $F_P(t)$  gemäß

$$F_P(t) = \frac{U_R(t)}{E_{LV,Imp}}, \quad (5.1)$$

umgerechnet werden. Tabelle 5.3 zeigt die Einstellungen des Ladungsverstärkers LV 1, der im geregelten Betrieb verwendet wird. Sie wurden so gewählt, dass bei einer Kalibrierkraft von etwa 40 N eine maximale Aussteuerung des Spannungsausganges des Ladungsverstärkers erfolgt.

Tab. 5.3: Einstellungen des Ladungsverstärkers LV 1

Kenngroße	Wert	Einheit
Empfindlichkeit	0.380	pC/ms <sup>-2</sup>
Verstärkung	31.6	mV/ms <sup>-2</sup>
Untere Grenzfrequenz	0.2	Hz
Obere Grenzfrequenz	30	kHz

Die Ausgangsspannung des Ladungsverstärkers LV 1 wird am Oszilloskop angezeigt. Durch Variation der Amplitude der Kraft  $F_P(t)$  und Messung der sich einstellenden stationären Amplitude der Spannung  $U_{LV1}$  kann ein Zusammenhang zwischen der Kraftamplitude  $\hat{F}_P$  und der Spannungsamplitude  $\hat{U}_{LV1}$  bestimmt werden. Das in Abbildung 5.7 gezeigte Bildschirmsignal des Oszilloskops stellt genau einen Punkt der Kalibrierung dar. Die gesamte Kalibrierkurve ist in Abbildung 5.8 zu sehen. Man erkennt den linearen Zusammenhang zwischen der Kraft- und der Spannungsamplitude. Die Bestimmung der Ausgleichsgeraden erfolgt durch Minimierung des quadratischen Fehlers unter der Nebenbedingung, dass die Ausgleichsgerade einen Punkt im Ursprung besitzt, siehe [31]. Die gesamte Empfindlichkeit  $E_{LV1}$  der Messkette Kraftsensor-LV 1 entspricht der Steigung der Ausgleichsgeraden. Die Kraft auf den Sensor ergibt sich dann aus er Gleichung

$$F_P(t) = \frac{U_{LV1}(t)}{E_{LV1}}, \quad (5.2)$$

mit

$$E_{LV1} = 0.208002 \text{ V/N}. \quad (5.3)$$

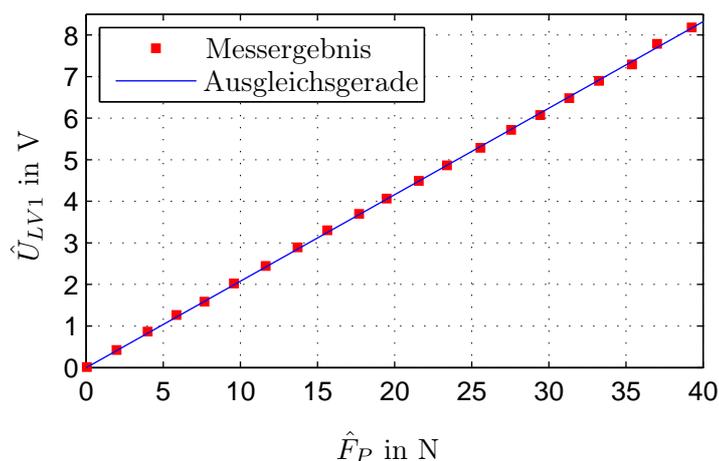


Abb. 5.8: Kalibrierkurve des Kraftsensors inklusive Ladungsverstärker LV1.

Eine analoge Vorgehensweise für den Ladungsverstärker LV 2, der nur zur Messung der Vorspannkraft des Balkens verwendet wird, ergibt eine gesamte Empfindlichkeit von

$$E_{LV2} = 0.037688 \text{ V/N}, \quad (5.4)$$

und die Vorspannkraft bestimmt sich aus

$$F_V = \frac{U_{LV2}}{E_{LV2}}. \quad (5.5)$$

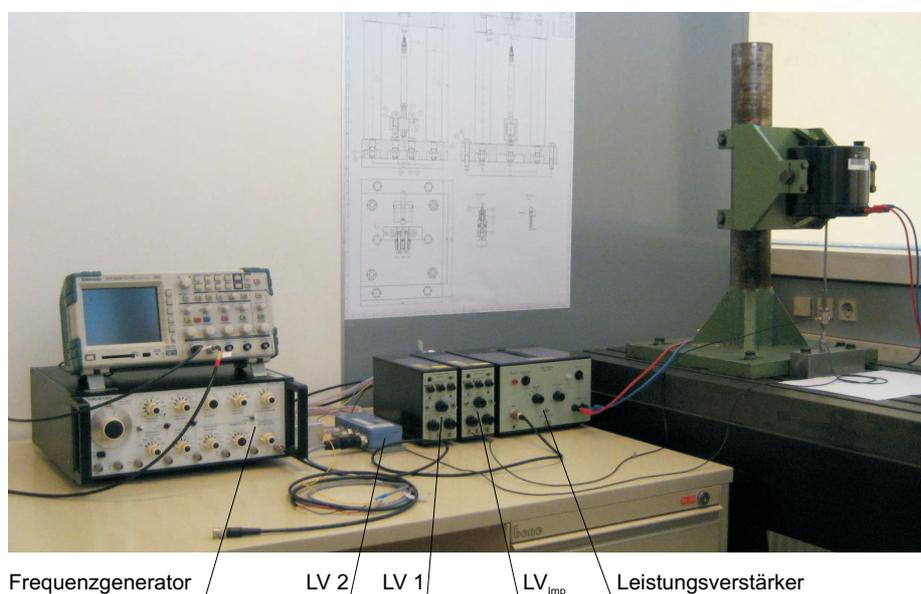


Abb. 5.9: Gesamtübersicht der Anordnung zur Kalibrierung des Kraftsensors.

Abbildung 5.9 zeigt eine Gesamtübersicht der Anordnung zur Kalibrierung, mit dem Frequenzgenerator, dem Leistungsverstärker zur Ansteuerung des Shakers, den Ladungsverstärkern LV 1, LV 2 und  $LV_{Imp}$  und dem mechanischen Aufbau im Hintergrund. Detailaufnahmen vom verwendeten Shaker inklusive Aufspannvorrichtung sowie vom Impedanzmesskopf und zu kalibrierendem Kraftsensor sind in Abbildung 5.10 dargestellt.

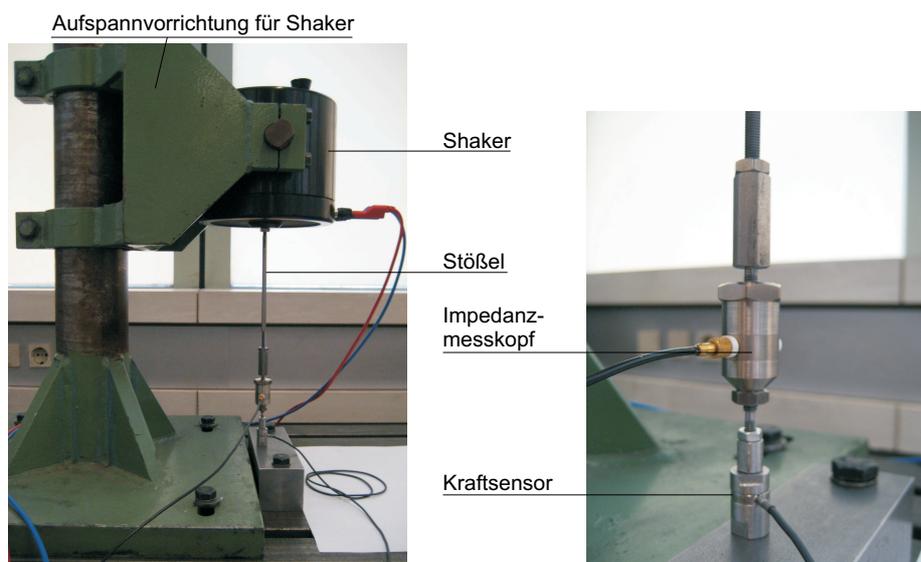


Abb. 5.10: Details der mechanischen Kalibriervorrichtung. Shaker inkl. Aufspannvorrichtung (links), Verbindung Stößel-Impedanzmesskopf-Kraftsensor (rechts).

### 5.1.2 Implementierung der Regelung auf der Regelkarte

Bei der verwendeten Regelkarte handelt es sich um eine echtzeitfähige Karte, d.h. sie besitzt einen eigenen Prozessor, der ausschließlich für die Regelung zuständig ist. Der PC, in dem die Karte eingebaut ist, dient nur der Programmierung, d.h. der Implementierung des Regelkonzeptes. In Tabelle 5.4 sind die wichtigsten Kenndaten zusammengefasst. Eine detailliertere Beschreibung ist in [42] zu finden. Aufgrund der geringeren A/D- bzw. D/A-Konvertierungszeit werden ausschließlich

Tab. 5.4: Einige Kenndaten der Regelkarte

Kenngroße	Wert
CPU Geschwindigkeit	250 MHz
A/D Wandler	4 multiplexed Kanäle, Auflösung 16 Bit 4 parallele Kanäle, Auflösung 12 Bit
A/D Wandlungszeit	Parallele Kanäle 800 ns Multiplexed Kanäle $2 \mu s$
D/A Wandler	8 parallele Kanäle, Auflösung 16 Bit
D/A Wandlungszeit	$10 \mu s$
Gesamte Zykluszeit	$50 \mu s$ (inkl. A/D und D/A Wandlung)

parallele Kanäle verwendet. Die gesamte Zykluszeit, die in der Tabelle angegeben ist, beinhaltet die Digitalisierung der an den Analogeingängen anliegenden Spannungen, die Signalverarbeitung entsprechend dem Regelkonzept und die Analogausgabe zur Ansteuerung des Piezoverstärkers. Abbildung 5.11 zeigt das Blockschaltbild der implementierten Regelung. Die Programmierung der Regelkarte erfolgt direkt unter Verwendung dieser Blockschaltbilddarstellung und einer Standard Mathematik- und Regelungstechnik Software, siehe [39].



mittels eines Butterworth-Filters zweiter Ordnung, dessen Grenzfrequenz auf das Zwölfwache der zweiten Biegeeigenfrequenz gesetzt wurde. Diese erhält man mit

$$f_{B,2} = \left( \frac{4.694}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{E_B I_B}{\rho_B A_B}}, \quad (5.6)$$

zu  $f_{B,2} = 188 \text{ Hz}$ , siehe zum Beispiel [48]. Zu beachten ist, dass in Gleichung (5.6) die Vorspannung des Balkens nicht berücksichtigt wird. Da die Eigenfrequenzen des Balkens mit zunehmender Vorspannung absinken, stellt der Wert von  $f_{B,2}$  einen Maximalwert dar.

Obwohl das analytische Modell des Balkens nur die erste Biegeeigenfrequenz berücksichtigt, wird im Experiment die Grenzfrequenz des Filters möglichst hoch angesetzt, um die höheren Schwingungsmoden, die im Wegsignal enthalten sind, nicht zu stark in Amplitude und Phase zu verändern. Mit Hilfe der so erhaltenen Näherungen für die laterale Auslenkung und Geschwindigkeit des Balkens wird im Block **Berechnung von F<sub>soll</sub>** die Sollkraft entsprechend dem jeweiligen Regelgesetz gebildet. Dem Block ist ein Skriptfile hinterlegt, in dem neben den Regelgesetzen I bis III auch sämtliche Reglerparameter definiert werden.

- Signalaufbereitung von Ist- und Sollkraft

Nach dem Einlesen der elektrischen Spannung vom Ladungsverstärker LV 1 (Block **Input CH5**) und Umrechnung in die Istkraft wird eine Offset-Korrektur durchgeführt. Da ein vollständiger Offset-Abgleich jedoch nicht möglich ist (z.B. aufgrund von Offset-Drift durch Temperaturschwankungen), wird zur Festlegung eines definitiven Nullpunktes der Block **TZ2** benutzt. Dabei handelt es sich um einen Block mit Totzonenfunktion, d.h. für das Ausgangssignal des Blocks gilt

$$\text{OUT}_{\text{TZ2}} = \begin{cases} F_{ist} - F_T & \text{wenn } F_{ist} > F_T, \\ F_{ist} + F_T & \text{wenn } F_{ist} < F_T, \\ 0 & \text{wenn } |F_{ist}| \leq F_T. \end{cases} \quad (5.7)$$

Liegt also die Istkraft innerhalb eines Toleranzfeldes der Breite  $\pm F_T$ , so ist das Ausgangssignal des Blocks gleich Null. Die Toleranzfeldbreite wurde mit  $\pm F_T = \pm 0.075 \text{ N}$ , das entspricht  $\pm 0.5 \%$  der Maximalkraft des Aktors, festgelegt. In analoger Weise wird ein Block mit Totzonenfunktion für die Sollkraft verwendet, siehe Abbildung 5.11.

- Unterlagerter Kraftregler

Abbildung 5.11 zeigt den Kraftregler bestehend aus einem konventionellen PI-Regler und dem zusätzlichen Block **Start Regelung**. Mit Hilfe dieses Blocks wird erreicht, dass die Regelung erst dann reagiert, wenn der Balken eine bestimmte Schwinggeschwindigkeit überschreitet. Das bedeutet, dass die Regelung bei kleinen Schwingungsamplituden des Balkens nicht aktiv ist, sondern sich erst einschaltet, wenn ein vorgegebener Grenzwert überschritten wird. Dadurch werden sehr hohe Anforderungen an die Stabilität des Kraftreglers gestellt, da zu dem Zeitpunkt des Überschreitens dieses Grenzwertes eine sprunghafte Sollkraft dem Kraftregler zugeführt wird.

## 5.2 Messergebnisse

### 5.2.1 Bestimmung der Materialdämpfung des Balkens

Wie bereits im Kapitel 4 beschrieben, wird die Materialdämpfung des Balkens aufgrund von Messungen an der realen Struktur bestimmt. Abbildung 5.12 zeigt die gemessene, laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  nach einer Anfangsauslenkung von  $2.0 \times 10^{-3}$  m ohne Regelung.

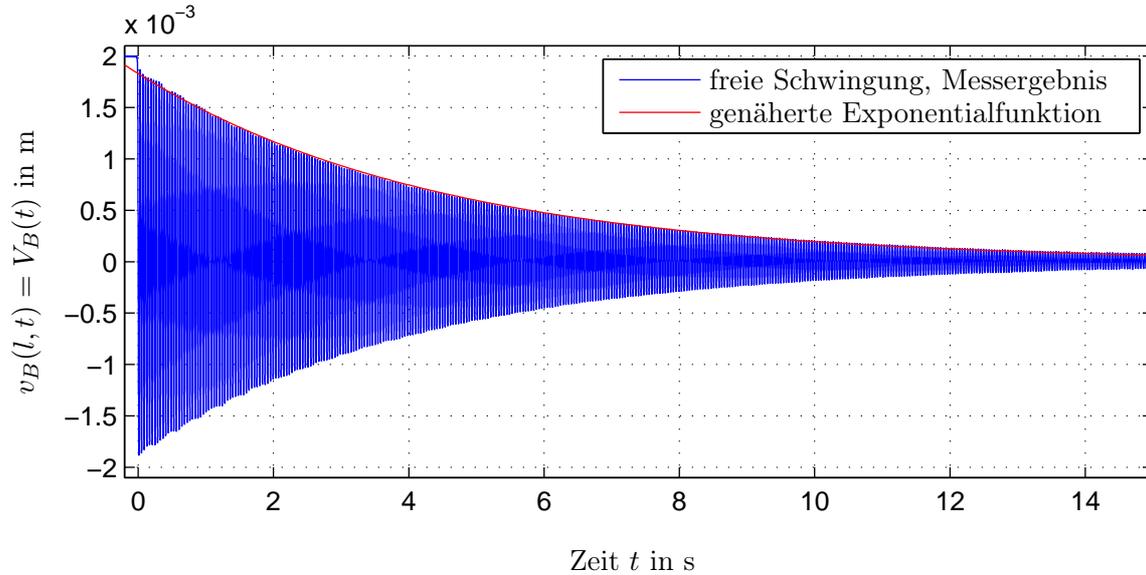


Abb. 5.12: Gemessene laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  und Näherung der Hüllkurve durch eine Exponentialfunktion der Form  $ze^{pt}$ . Anfangsauslenkung  $2.0 \times 10^{-3}$  m.

Die Hüllkurve der gemessenen Balkenquerschwingung wird durch eine Exponentialfunktion der Form  $ze^{pt}$  angenähert. Die Bestimmung der Parameter  $z$  und  $p$  erfolgt durch Minimierung der Fehlerquadrate unter Verwendung des Programmpaketes [38]. In Abbildung 5.12 ist diese Näherung im Vergleich zur gemessenen Schwingung dargestellt. Mit Ausnahme einer kurzen Zeitspanne am Anfang stimmt die Exponentialfunktion sehr gut mit den Messwerten überein. Unmittelbar nach der Freigabe des ausgelenkten Balkens ist die Dämpfung sehr groß, und die Amplituden fallen sehr rasch ab. In diesem Bereich kann der Amplitudenabfall nicht durch einen exponentiellen Ansatz beschrieben werden. Damit lässt sich das logarithmische Dekrement in der Form

$$\delta_{11} = \ln \frac{|ze^{pt}|_{t=0}}{|ze^{pt}|_{t=T_B/2}} = \ln \frac{1}{e^{pT_B/2}} \quad (5.8)$$

schreiben, wobei  $T_B$  die gemessene Periode der Balkenquerschwingung darstellt. Unter der Annahme, dass die Materialdämpfung klein ist, berechnet sich die zugeordnete Lehrsche Dämpfung aus

$$D_{11} \simeq \frac{\delta_{11}}{\pi}. \quad (5.9)$$

Tabelle 5.5 zeigt die ermittelten Werte der Parameter  $z$  und  $p$ , die gemessene Periode  $T_B$  der Balkenquerschwingung sowie die resultierende Lehrsche Dämpfung  $D_{11}$ . Der in der Tabelle angeführte Wert wurde bei der numerischen Lösung der Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises verwendet, siehe Tabelle 4.3. Genaugenommen stellt die Bestimmung der Materialdämpfung auf Basis der gemessenen Balkenquerschwingung eine "Summendämpfung" dar, da sie auch die

Tab. 5.5: Ergebnisse der Näherung der Hüllkurve durch eine Exponentialfunktion

Kenngröße	Wert	Einheit
$z$	0.001829	m
$p$	-0.2242	$s^{-1}$
$T_B$	0.039699	s
$D_{11}$	$1.416597 \times 10^{-3}$	-

Dämpfungswirkung der Saite, der nicht idealen Einspannung des Balkens, der Kontaktstellen in der Spannvorrichtung, usw., beinhaltet. Der bestimmte Wert der Dämpfung kann also nur näherungsweise als die Materialdämpfung des Balkens betrachtet werden. Wie später gezeigt wird, ist im geregelten Fall die Dämpfungswirkung durch die Regelung dominierend, wodurch die oben beschriebene Vorgehensweise gerechtfertigt ist.

### 5.2.2 Messergebnisse für das Regelgesetz I

Abbildung 5.13 zeigt die Messergebnisse bei Verwendung des Regelgesetzes I. In Analogie zu den numerischen Simulationen wurde eine Anfangsauslenkung des Balkens von  $2.0 \times 10^{-3}$  m verwendet. Die Reglerparameter können der Tabelle 4.4 entnommen werden. In der oberen Abbildung ist die gemessene laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  sowie, zu Vergleichszwecken, die Hüllkurve der gemessenen Balkenschwingung im unregulierten Fall (schwarz) dargestellt. Man erkennt deutlich, dass durch die Regelung die Balkenschwingungen schneller absinken als im unregulierten Fall, bei dem der Amplitudenabfall alleine durch die Materialdämpfungen verursacht wird.

Die mittlere Abbildung zeigt die zugehörige, gemessene Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite. Wie schon die Simulationsergebnisse gezeigt haben, fällt die Amplitude der Kraft sehr rasch ab, wodurch die Dämpfungswirkung zu Beginn, bei grossen Auslenkungen des Balkens, am größten ist. Im Gegensatz zu den numerischen Ergebnissen ist eine deutliche Amplitudenmodulation zu erkennen, weshalb eine FFT-Analyse des Kraftsignals und auch der Balkenschwingung durchgeführt wurde. Abbildung 5.14 zeigt die entsprechenden Spektren. Darin bedeuten  $\text{Amp}(V_B(t))$  und  $\text{Amp}(\tilde{F}(t))$  die Beträge der komplexen Amplituden von  $V_B(t)$  bzw.  $\tilde{F}(t)$ . Die Frequenzauflösung der Spektren beträgt 0.05 Hz, die Nyquistfrequenz liegt bei 2 kHz. Die deutliche Spitze im Spektrum der Balkenschwingung stellt die erste Biegeeigenfrequenz  $f_B$  des Balkens dar. Weiters besitzt das Signal praktisch keine Frequenzanteile oberhalb von  $f_B$ . Das liegt daran, dass durch die Auslenkung des Balkens am freien Ende primär die erste Biegeeigenform angeregt wird, was sich auch im Spektrum des Kraftsignals zeigt. Hier liegt der mit Abstand höchste Peak bei 50.5 Hz und entspricht damit dem Zweifachen der ersten Biegeeigenfrequenz des Balkens. Seitlich davon finden sich eine Reihe weiterer Maxima mit sehr viel geringerer Amplitude, die daher kaum noch einen Einfluss auf die Balkenschwingung haben. Die zugehörigen Frequenzen sind in der Tabelle 5.6 zusammengefasst. Man erkennt, dass sowohl die geraden als auch die ungeraden ganzzahligen Vielfachen der Biegeeigenfrequenz  $f_B$  bis zur 7. Ordnung vorhanden sind ( $f_1$  bis  $f_7$ ). Weiters entspricht die Frequenz  $f_8$  in etwa der analytisch bestimmten Eigenfrequenz  $f_{V_s}$  der Saitenquerschwingung bzw.  $f_9$  dem 4/3-fachen von  $f_{V_s}$ .

Abbildung 5.13, unten, zeigt den zeitlichen Verlauf des Ausgangssignales OutCH1 des Reglers. Die tatsächliche Ausgangsspannung der Regelkarte, mit der der Piezoverstärker angesteuert wird,

ergibt sich durch konstante Verstärkung mit dem Faktor  $k_R$ , siehe Abbildung 3.13. Der Maximal- bzw. Minimalwert, den das Signal OutCH1 annehmen kann (begrenzt durch die Regelkarte), liegt bei 0 bzw. 1 V und demgemäß soll die Verlängerung des Piezoaktors bei 0 bzw. dem Maximalwert liegen, da ein lineares Modell des Aktors vorausgesetzt wurde. Wie bereits beschrieben, wird vor

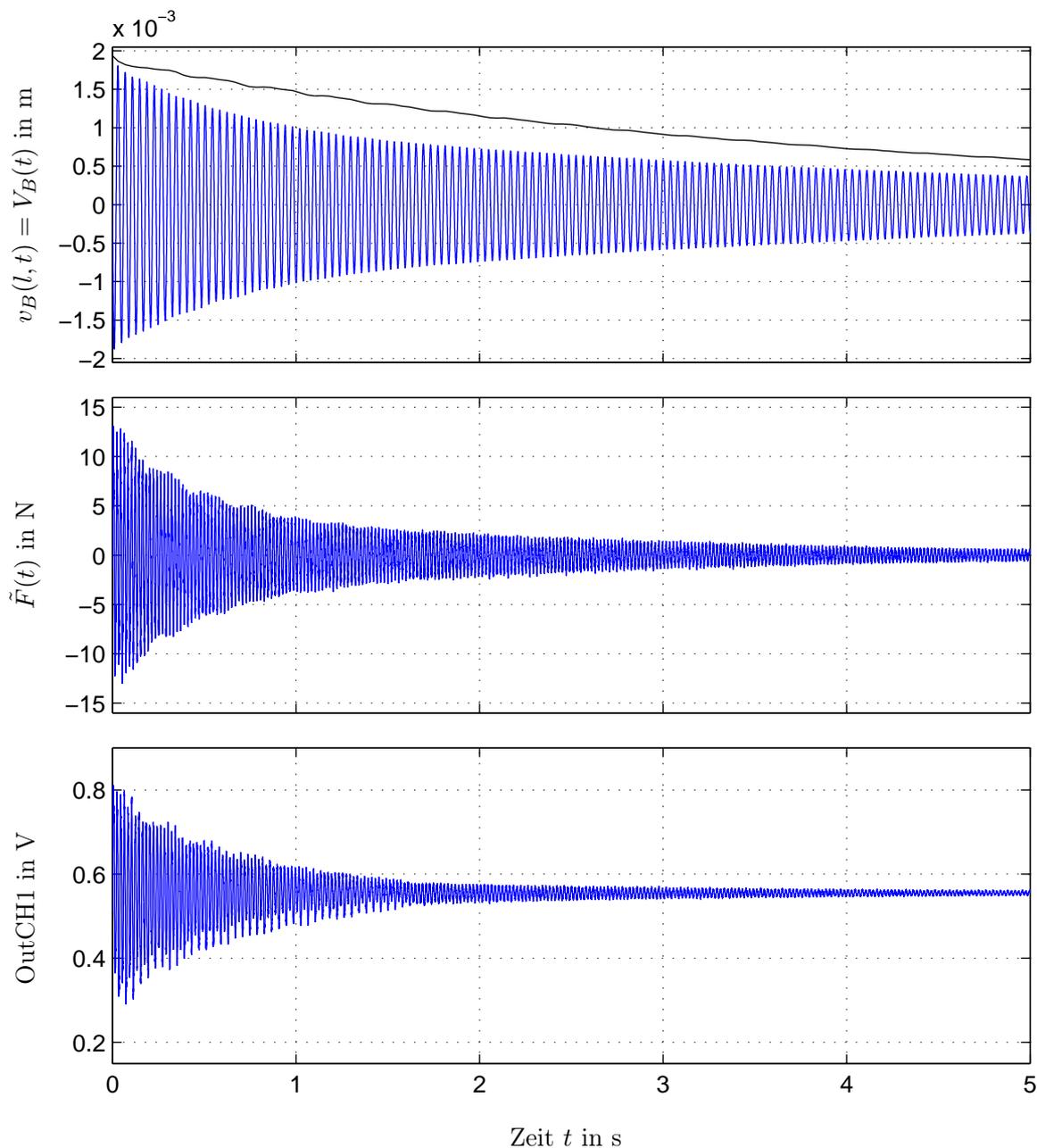


Abb. 5.13: Gemessene Zeitverläufe der lateralen Balkenschwingung  $v_B(l,t)$  und Vergleich mit der Hüllkurve der Balkenschwingung im unregulierten Fall (oben), Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite (mitte) und Ausgangsspannung OutCH1 des Reglers (unten).

Durchführung der Experimente der Piezoaktor in seine Mittelposition gebracht, d.h. OutCH1 auf 0.5 V gesetzt. Aus der Abbildung erkennt man jedoch, dass der Mittelwert etwa bei 0.55 V liegt. Das ist darauf zurückzuführen, dass das Aktorsystem bestehend aus Piezoaktor und Saite ein unsymmetrisches Verhalten zeigt. Wird im unregulierten Zustand der Piezoaktor mit einer

konstanten positiven Spannung  $\bar{U}_A$  angesteuert, so stellt sich eine andere Saitenkraft ein als bei gleich großer entgegengesetzt gerichteter Spannung  $-\bar{U}_A$ . Im geregelten Betrieb gleicht der Regler diese Asymmetrie aus, und da der Kraftregler einen I-Anteil enthält, bleibt der konstante Offset in OutCH1 erhalten. Da der qualitative Verlauf von OutCH1 dem der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  sehr ähnlich ist, wird in den folgenden Abschnitten auf eine Darstellung von OutCH1 verzichtet.

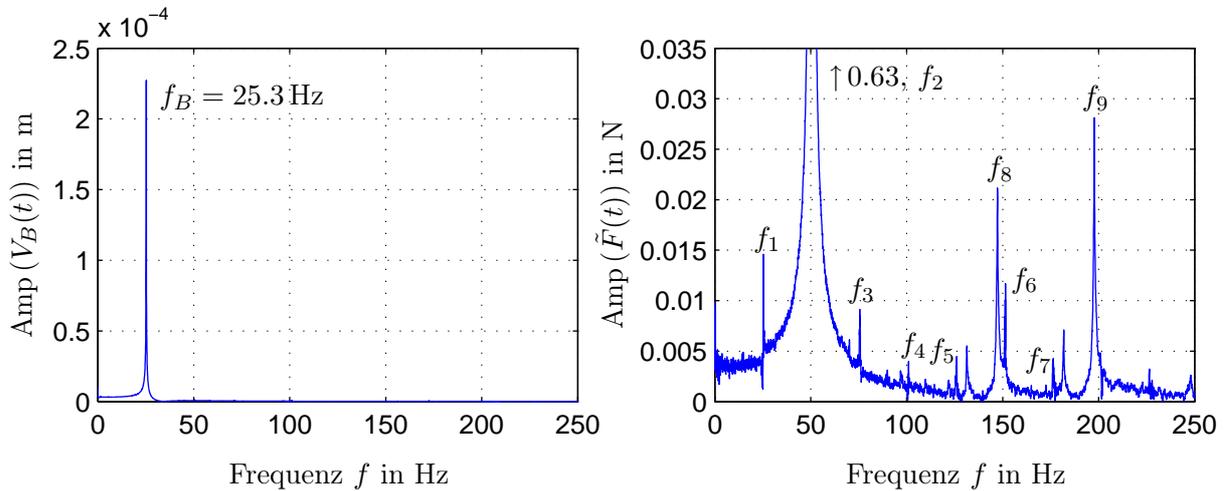


Abb. 5.14: FFT-Analyse der gemessenen Balkenschwingung  $V_B(t)$  und der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite. Parameter der FFT: Frequenzauflösung 0.05 Hz, Nyquistfrequenz 2 kHz.

Tab. 5.6: Frequenzen aus der FFT-Analyse der gemessenen Kraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite. Parameter der FFT: Frequenzauflösung 0.05 Hz, Nyquistfrequenz 2 kHz.

Frequenz aus dem Spektrum	Korrespondierende Frequenz
$f_1 = 25.3 \text{ Hz}$	$f_B = 25.3 \text{ Hz}$
$f_2 = 50.5 \text{ Hz}$	$2f_B = 50.6 \text{ Hz}$
$f_3 = 75.6 \text{ Hz}$	$3f_B = 75.9 \text{ Hz}$
$f_4 = 101.0 \text{ Hz}$	$4f_B = 101.2 \text{ Hz}$
$f_5 = 126.0 \text{ Hz}$	$5f_B = 126.5 \text{ Hz}$
$f_6 = 151.5 \text{ Hz}$	$6f_B = 151.8 \text{ Hz}$
$f_7 = 176.4 \text{ Hz}$	$7f_B = 177.1 \text{ Hz}$
$f_8 = 147.3 \text{ Hz}$	$f_{V_s} = 145.0 \text{ Hz}$
$f_9 = 197.8 \text{ Hz}$	$4/3f_{V_s} = 192.9 \text{ Hz}$

### 5.2.3 Messergebnisse für das Regelgesetz II

Abbildung 5.16 zeigt die gemessenen Zeitverläufe der lateralen Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  und der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  für die Parametersätze  $P^{II,1}$  und  $P^{II,2}$ . Die zugehörigen Reglerparameter können der Tabelle 4.4 entnommen werden. Zur Demonstration der Wirksamkeit der aktiven Dämpfung von  $v_B(l, t)$  durch die Regelung, ist wieder die Hüllkurve der unregulierten Balkenschwingung zu Vergleichszwecken dargestellt. Die Parametersätze wurden so definiert, dass mit steigendem Superskript  $i$  von  $P^{II,i}$  die Amplitude der Sollkraft bis zu immer kleineren Auslenkungsamplituden

von  $v_B(l, t)$  konstant bleibt, siehe Abbildung 3.9. Vergleicht man die Messergebnisse für  $\tilde{F}(t)$  aus Abbildung 5.16 untereinander, so ist dieser Unterschied deutlich zu erkennen. Bei Verwendung des Parametersatzes  $P^{II,2}$  bleibt die Amplitude von  $\tilde{F}(t)$  länger konstant auf dem festgelegten Maximalwert  $\hat{F}_{r,max} = 15$  N, bevor sie beginnt abzufallen, und damit ist die Dämpfung der lateralen Balkenschwingung größer als beim Parametersatz  $P^{II,1}$ . Abbildung 5.17 zeigt die Messergebnisse für die Parametersätze  $P^{II,3}$  und  $P^{II,4}$ . Die Amplitude der Kraft  $\tilde{F}(t)$  bleibt immer länger konstant und damit sinkt der Ausschlag der Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  immer schneller ab. Besonders deutlich wird der Einfluß der Reglerparameter bei einem Vergleich der Messergebnisse für die Parametersätze  $P^{II,1}$  und  $P^{II,4}$ .

Die Wirksamkeit der untersuchten Regelgesetze basiert darauf, dass die Istkraft in der Saite möglichst gut der berechneten Sollkraft  $\tilde{F}_r(t)$  entspricht. Wie bereits beschrieben, wird dazu ein unterlagerter PI-Kraftregler verwendet. Abbildung 5.15 zeigt einen Vergleich der gemessenen Istkraft mit der Sollkraft sowie die zugehörige Reglerausgangsspannung OutCH1 bei Verwendung des Parametersatzes  $P^{II,4}$ . Bei  $t = -0.01$  s wurde der ausgelenkte Balken freigegeben, die Sollkraft beginnt sich zu ändern. Die Reglerausgangsspannung OutCH1 ändert sich jedoch erst bei  $t \simeq -0.008$  s. Zu diesem Zeitpunkt überschreitet die Balkengeschwindigkeit den festgelegten Grenzwert. Die tatsächliche Kraft in der Saite nähert sich dann nahezu sprunghaft der Sollkraft und folgt dieser im weiteren Verlauf mit nur kleinen Abweichungen.

Eine Zusammenfassung der Messergebnisse ist in Abbildung 5.18 dargestellt. In der oberen Abbildung ist die aus den Messergebnissen berechnete Hüllkurve  $\hat{V}_B(t)$  der lateralen Balkenschwingung und in der unteren die Hüllkurve  $\hat{F}(t)$  der Istkraft in der Saite dargestellt. Man erkennt deutlich, dass die Amplitude  $\hat{V}_B(t)$  umso schneller abfällt, je länger die Kraft  $\hat{F}(t)$  konstant bleibt.

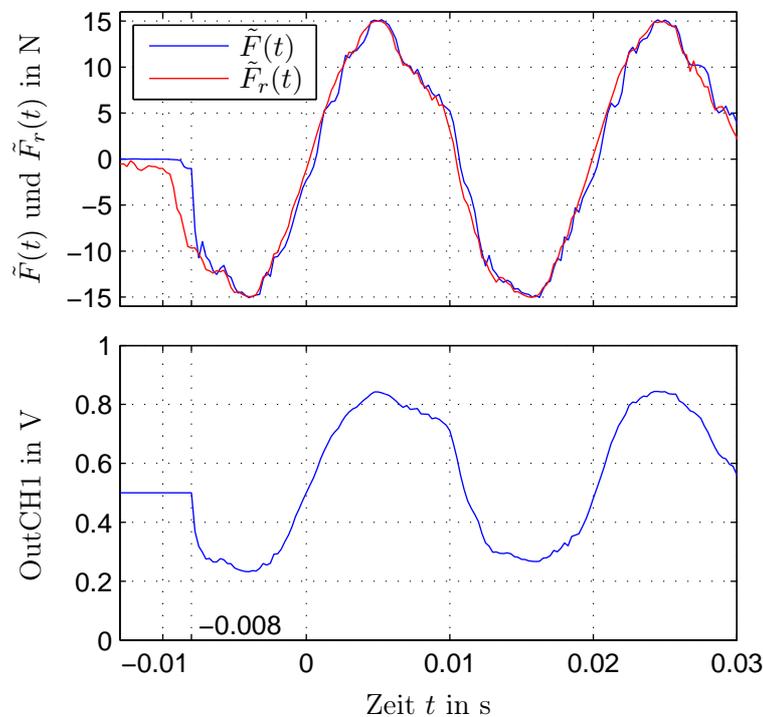


Abb. 5.15: Vergleich von Soll- und Istkraft in der Saite (oben), zugehöriges Ausgangssignal des Reglers (unten).

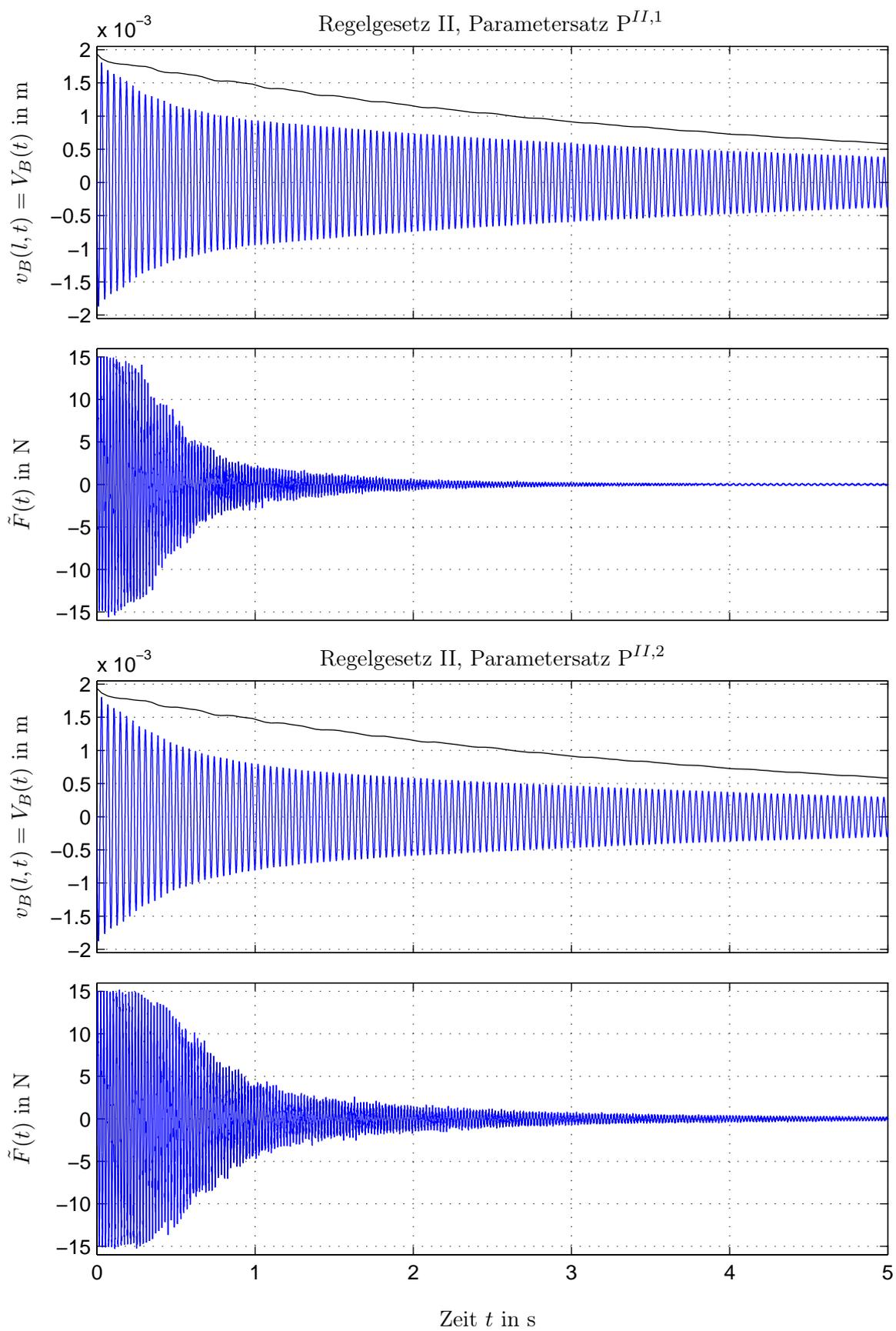


Abb. 5.16: Messergebnisse für die laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  und die Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite bei Verwendung des Regelgesetzes II und der Parametersätze P<sup>II,1</sup> und P<sup>II,2</sup>.

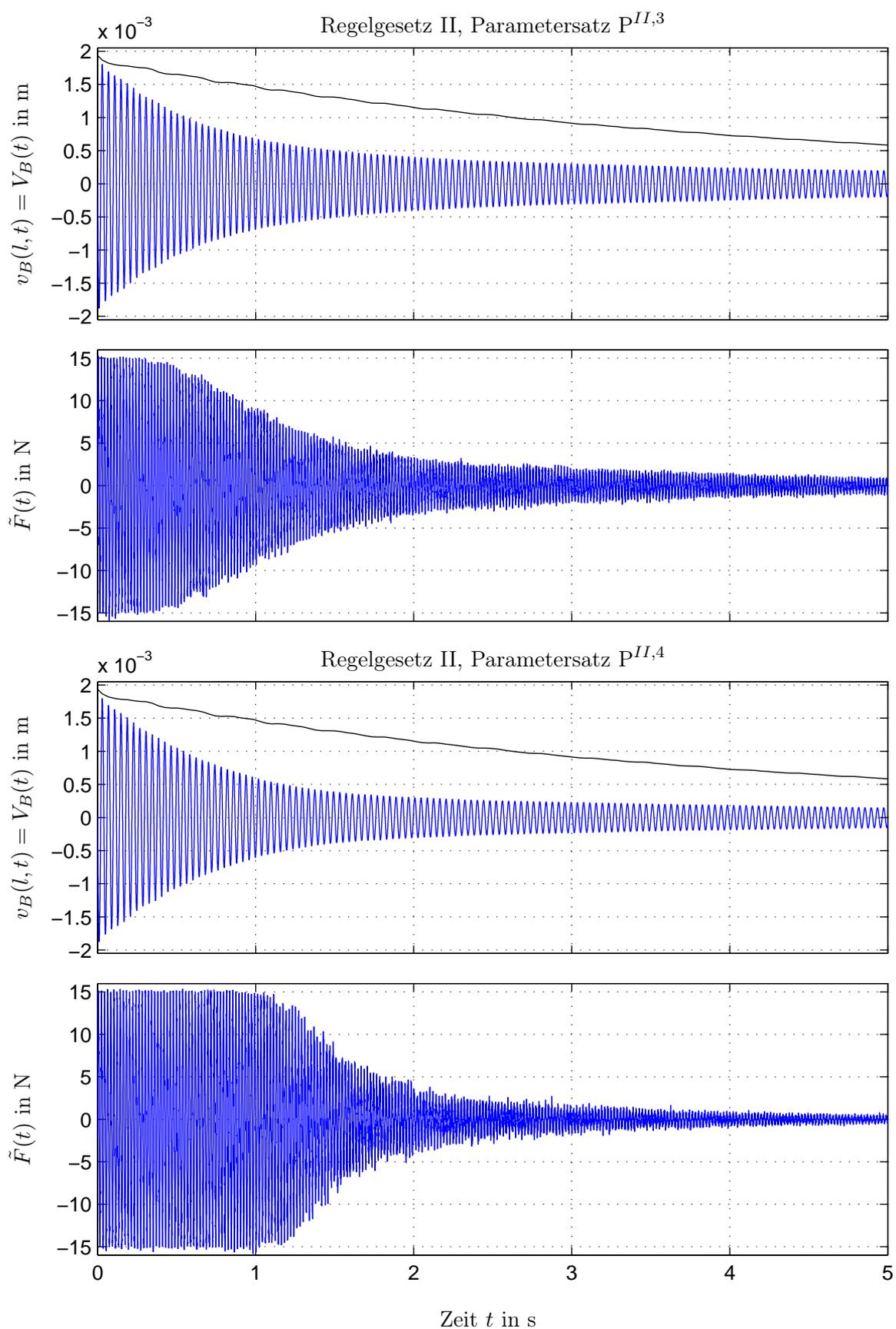


Abb. 5.17: Messergebnisse für die laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  und die Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite bei Verwendung des Regelgesetzes II und der Parametersätze P<sup>II,3</sup> und P<sup>II,4</sup>.

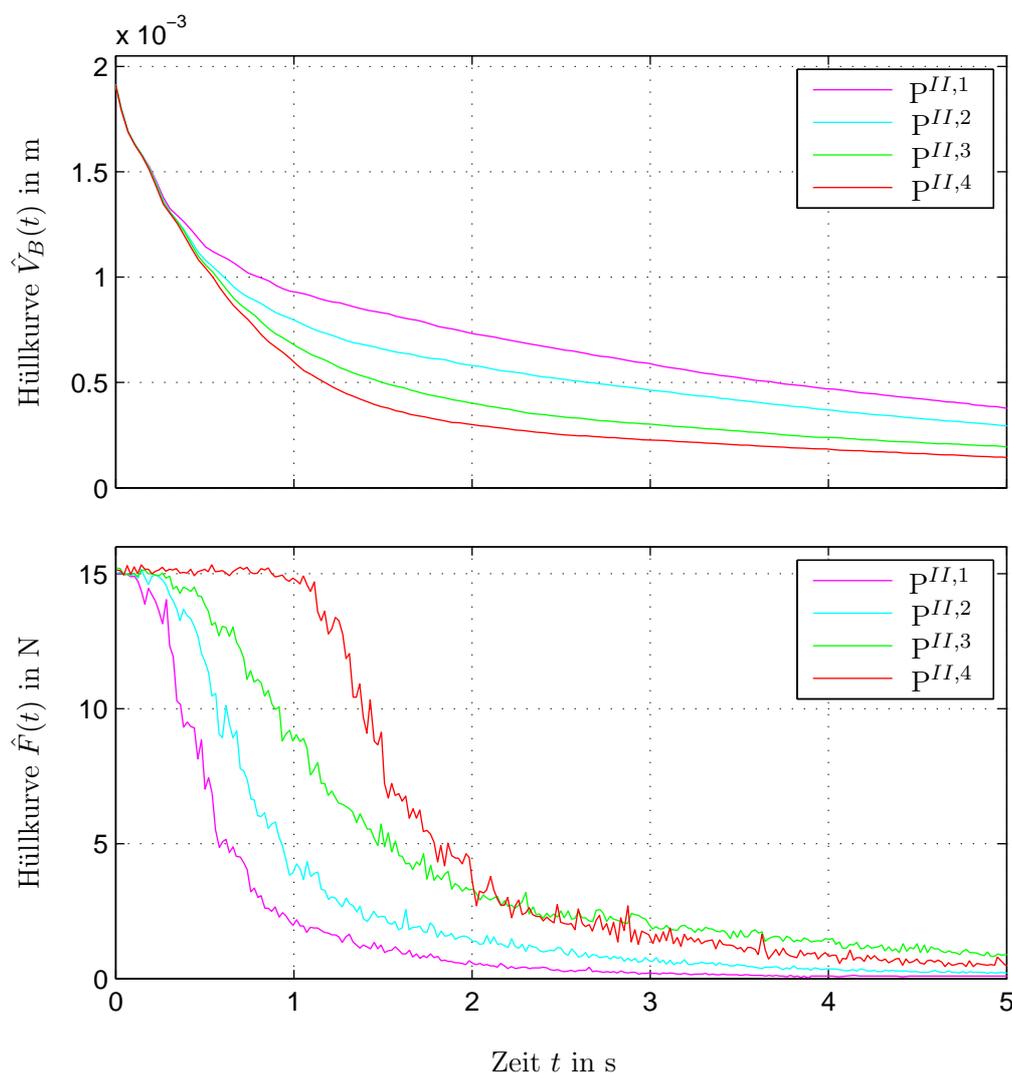


Abb. 5.18: Zusammenfassung der Messergebnisse für das Regelgesetz II. Darstellung der Hüllkurven  $\hat{V}_B(t)$  und  $\hat{F}(t)$  der lateralen Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  bzw. der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite.

#### 5.2.4 Messergebnisse für das Regelgesetz III

Die Auswirkungen des Regelgesetzes III sind in Abbildung 5.19, bzw. zusammenfassend in Abbildung 5.20 dargestellt. Die zugehörigen Reglerparameter der verwendeten Parametersätze  $P^{III,1}$  und  $P^{III,2}$  können der Tabelle 4.4 entnommen werden. Der zeitliche Verlauf der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  unterscheidet sich grundsätzlich von dem für das Regelgesetz II. Die Amplitude von  $\tilde{F}(t)$  beginnt sofort abzusinken, es existiert kein Bereich, in dem die Kraftamplitude konstant bleibt. Vergleicht man die laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  bei Verwendung des Regelgesetzes II, Parametersatz  $P^{II,4}$  (siehe Abbildung 5.17), mit dem Messergebnis für das Regelgesetz III, Parametersatz  $P^{III,2}$ , so sind nur geringe Unterschiede erkennbar, obwohl die zugehörigen Kraftverläufe gänzlich voneinander verschieden sind.

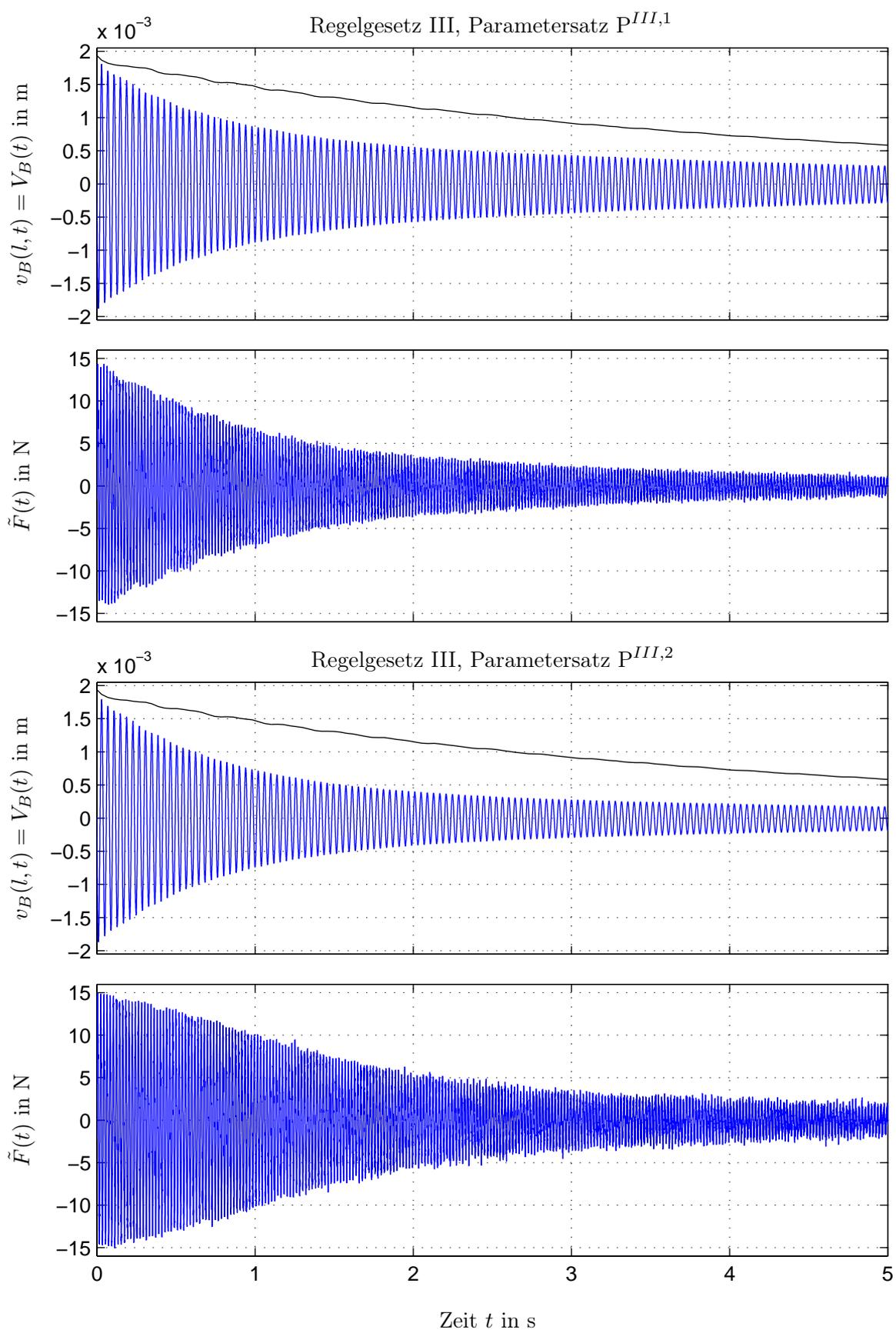


Abb. 5.19: Messergebnisse für die laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  und die Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite bei Verwendung des Regelgesetzes III und der Parametersätze P<sup>II,1</sup> und P<sup>II,2</sup>.

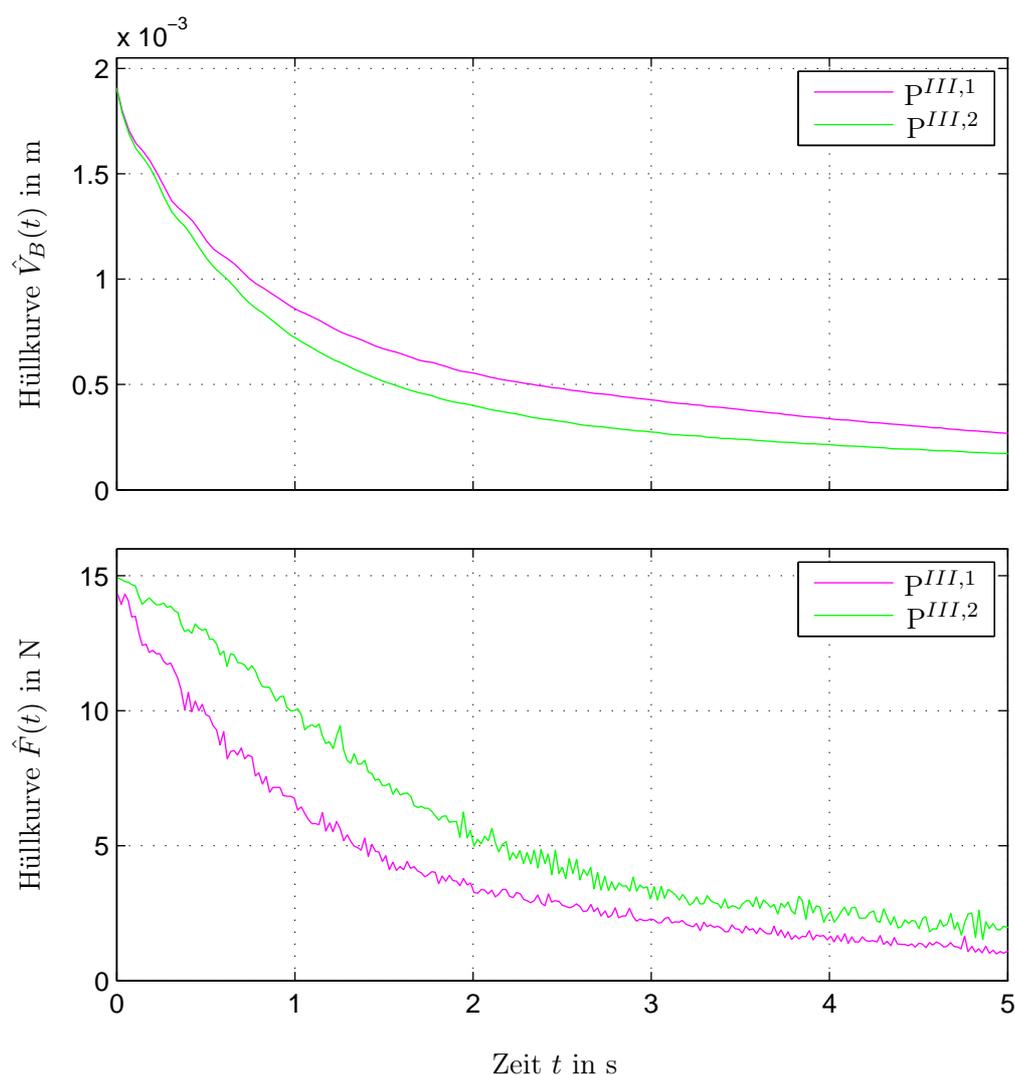


Abb. 5.20: Zusammenfassung der Messergebnisse für das Regelgesetz *III*. Darstellung der Hüllkurven  $\hat{V}_B(t)$  und  $\hat{F}(t)$  der lateralen Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  bzw. der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite.

### 5.2.5 Zusammenfassung der Messergebnisse

Abbildung 5.21 zeigt zusammenfassend die Ergebnisse bei Verwendung der Regelgesetze I bis III, und der Parametersätze, mit denen die größte Dämpfung der Balkenschwingung erzielt wurde. Zum Vergleich wurde in der oberen Abbildung wieder die Hüllkurve der freien Schwingung des unregulierten Balkens dargestellt. Um den Amplitudenabfall von  $v_B(l, t)$  durch die Regelung quantifizieren zu können, wurde zu den Zeitpunkten  $t = 1$  s und  $t = 2$  s die Amplitude  $\hat{V}_B(t)$  auf die Amplitude der unregulierten Balkenschwingung bezogen. Tabelle 5.7 zeigt die Ergebnisse. Das beste Resultat erhält man bei Verwendung der zustandsabhängigen Verstärkung mit konstanter Kraftamplitude bei grossen Balkenauslenkungen. Nach 1 s beträgt die Amplitude der Balkenschwingung nur mehr 41.2% der Amplitude im unregulierten Fall. Die Tabelle zeigt auch deutlich die Verbesserung gegenüber dem Regelgesetz I (konstante Verstärkung der axialen Geschwindigkeit), bei dem die Amplitude

nach 1 s immer noch 68.2% des Wertes im unregulierten Balken beträgt. Ein ganz ähnliches Bild zeigen die Ergebnisse bei  $t = 2$  s. Im folgenden Abschnitt werden nun die Messergebnisse mit den numerischen Ergebnissen aus Kapitel 4 verglichen.

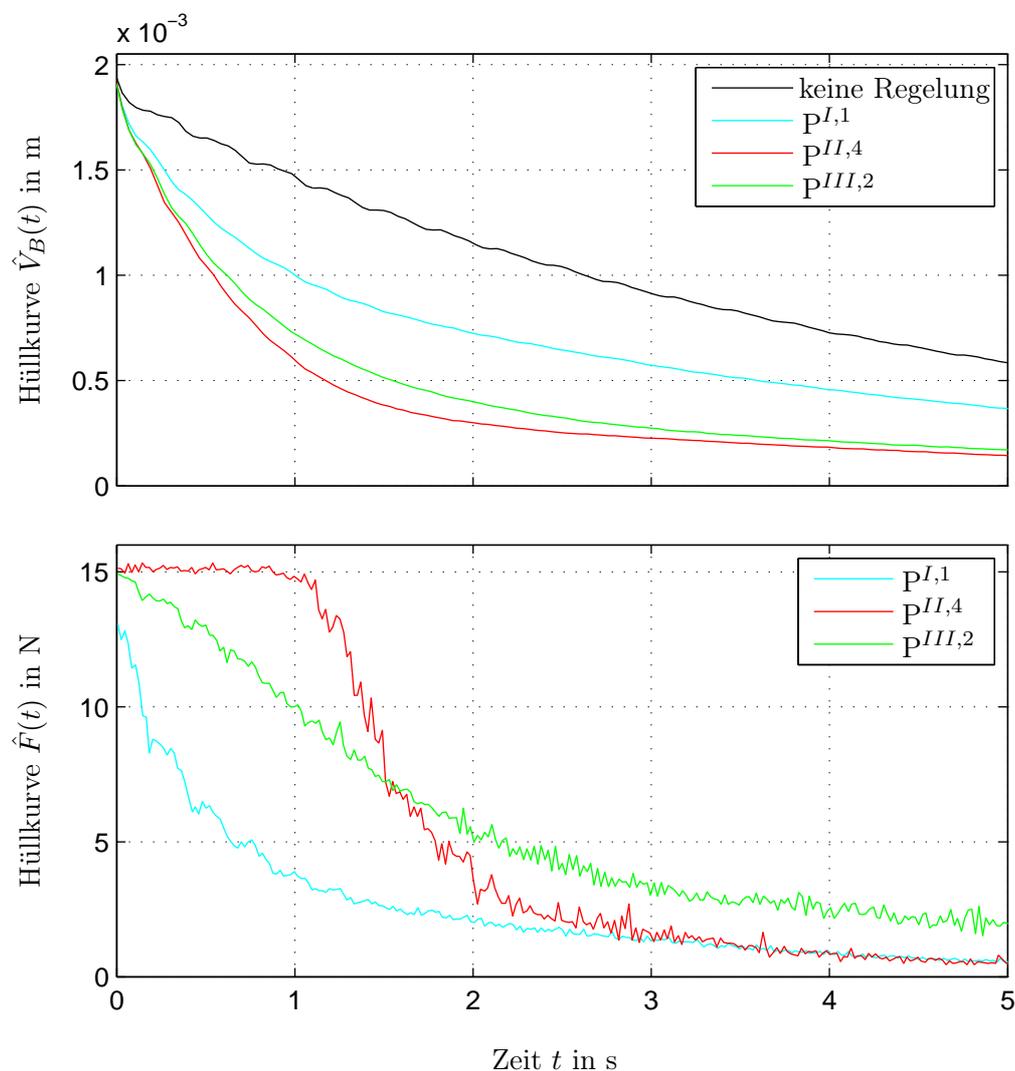


Abb. 5.21: Zusammenfassung der Messergebnisse für die Regelgesetze  $I$  bis  $III$ . Darstellung der Hüllkurven  $\hat{V}_B(t)$  und  $\hat{F}(t)$  der lateralen Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  bzw. der Istkraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite.

Tab. 5.7: Auswertung von Abbildung 5.21. Auf die Amplitude der freien Schwingung des unregulierten Balkens bezogene Amplitude von  $\hat{V}_B(t)$  zu den Zeitpunkten  $t = 1$  s und  $t = 2$  s.

Regelgesetz	Parametersatz	$\frac{\hat{V}_B(1)}{\hat{V}_{B,0}}$ in %	$\frac{\hat{V}_B(2)}{\hat{V}_{B,0}}$ in %
$I$	$p^{I,1}$	68.2	62.9
$III$	$p^{III,2}$	49.3	35.3
$II$	$p^{II,4}$	41.2	25.9

### 5.2.6 Vergleich der Messergebnisse mit den numerischen Ergebnissen

Abbildung 5.22 zeigt einen Vergleich zwischen der Hüllkurve  $\hat{V}_B(t)$  der gemessenen Balkenquer-schwingung und der Hüllkurve  $\hat{F}(t)$  der gemessenen Istkraft in der Saite und den numerischen Ergebnissen aus Kapitel 4. Dargestellt sind die Ergebnisse für das Regelgesetz II mit dem Parametersatz  $P^{II,4}$ .

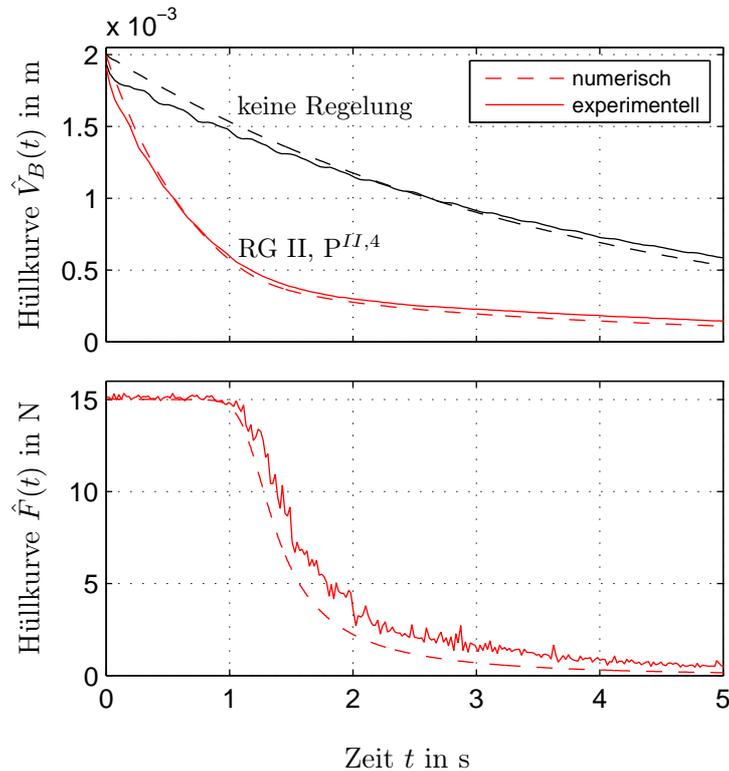


Abb. 5.22: Vergleich von gemessener Balkenschwingung und Istkraft in der Saite (Hüllkurven) mit den numerischen Ergebnissen für das Regelgesetz II, Parametersatz  $P^{II,4}$ .

Man erkennt, dass der gemessene Amplitudenverlauf  $\hat{V}_B(t)$  recht gut mit dem numerisch berechneten übereinstimmt. Bis zu  $t \simeq 0.7\text{s}$  ist die gemessene Amplitude kleiner als die numerisch bestimmte, bzw. größer für  $t > 0.7\text{s}$ . Die Ursache liegt im Verlauf der Balkenschwingung im unregelmäßigen Fall, d.h. wenn nur die Materialdämpfung wirksam ist. In der Modellbildung wurde die Materialdämpfung von Balken und Saite durch geschwindigkeitsproportionale Terme idealisiert. Wie die obere Abbildung zeigt, trifft diese Annahme die realen Verhältnisse nur ungenügend. Bis zu  $t \simeq 2.5\text{s}$  ist die numerisch bestimmte Amplitude  $\hat{V}_B(t)$  größer als die gemessene bzw. kleiner für  $t > 2.5\text{s}$ . D.h. bis zu  $t \simeq 2.5\text{s}$  ist die tatsächliche Materialdämpfung größer als die des analytischen Modells bzw. kleiner für  $t > 2.5\text{s}$ .

Der untere Teil von Abbildung 5.22 zeigt einen Vergleich der Amplitude  $\hat{F}(t)$  der gemessenen Istkraft in der Saite mit der numerisch berechneten. Im Bereich  $0 < t < 1\text{s}$  stimmen die Verläufe sehr gut überein, erst darüberhinaus ergeben sich Abweichungen. Im numerischen Modell fällt  $\hat{F}(t)$  schneller ab, weil die Materialdämpfung in diesem Bereich größer ist und mit kleinerer Auslenkung  $\hat{V}_B(t)$  sinkt entsprechend dem Regelgesetz der vorgegebene Sollwert für die Saitenkraft  $\hat{F}(t)$ .

Abbildung 5.23 zeigt die Ergebnisse für das Regelgesetz III. Die mit den gewählten Parametern erzielte Dämpfungswirkung ist etwas geringer als beim Regelgesetz II. Bis zu  $t \simeq 0.6\text{s}$  stimmen

die gemessenen Verläufe von  $\hat{V}_B(t)$  bzw.  $\hat{F}(t)$  sehr gut mit den numerisch berechneten überein. Ab dann kommt es zu Abweichungen aufgrund der bereits oben beschriebenen nichtlinearen Materialdämpfung. Die Unterschiede zwischen den numerischen und den experimentellen Ergebnissen sind etwas größer als beim Regelgesetz II, da das Verhältnis der aktiven Dämpfung zur Materialdämpfung aufgrund der Regelung kleiner ist. Noch deutlicher zeigt sich dieses Verhalten beim Regelgesetz I, siehe Abbildung 5.24, bei dem die erzielte Dämpfungswirkung am kleinsten und damit die Abweichungen zwischen den numerischen und den experimentellen Ergebnissen am größten sind.

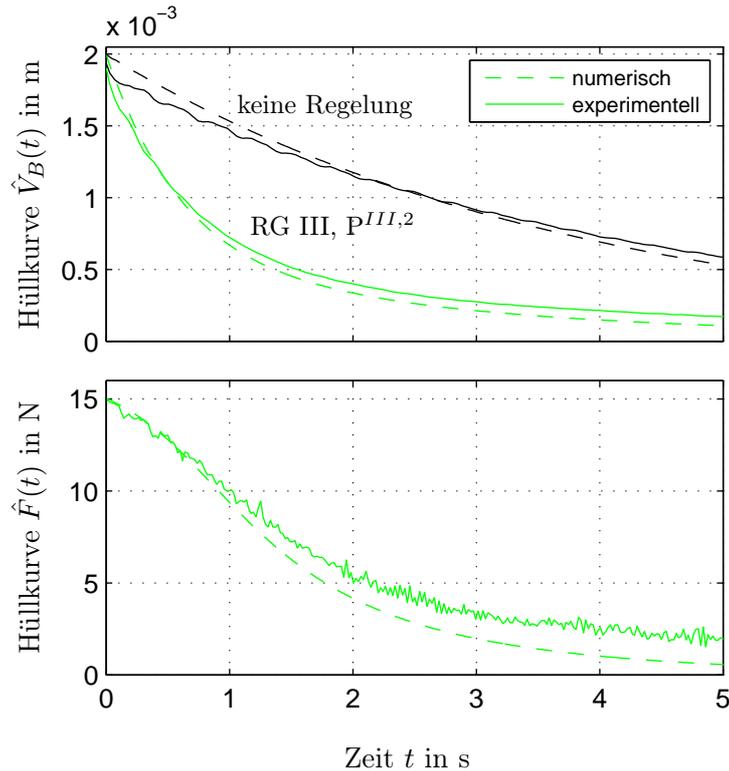


Abb. 5.23: Vergleich von gemessener Balkenschwingung und Istkraft in der Saite (Hüllkurven) mit den numerischen Ergebnissen für das Regelgesetz III, Parametersatz  $P^{III,2}$ .

Die Festlegung der Reglerparameter für die zustandsabhängige Verstärkung basiert auf der Vorgabe eines gewünschten Sollkraftverlaufes in der Saite, siehe Abbildung 3.9. D.h. konstante Amplitude der Saitenkraft bei großen Auslenkungen des Balkens und definiertes Absenken der Sollkraft bei kleinen Balkenschwingungen. In Abschnitt 3.3 wurden mit Gleichung (3.50),

$$\hat{F}_r^{II} = \eta \frac{\pi^2}{16l} \frac{\hat{V}_B^2}{\hat{V}_B^2 + \omega_B^{-2} \gamma e^{-\beta \omega_B^2 \hat{V}_B^2}},$$

sowie den Gleichungen (3.56) und (3.57) Näherungsformeln für den Abfall der Sollkraftamplitude in der Saite in Abhängigkeit von der Auslenkungsamplitude des Balkens vorgestellt, mit dessen Hilfe die Reglerparameter festgelegt wurden. Abbildung 5.25 zeigt die Auswertung dieser Gleichung im Vergleich zum experimentellen Ergebnis. Man erkennt eine sehr gute Übereinstimmung, d.h. die Näherungsformel nach Gleichung (3.50), die keine Lösung der Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises erfordert, kann vorteilhaft zur Festlegung der Reglerparameter und damit zur

Vorgabe eines definierten Sollkraftverlaufes für die Saitenkraft verwendet werden.

Analog zu den numerischen Ergebnissen wird auch aus experimenteller Sicht die größte Dämpfungswirkung der lateralen Balkenschwingung mit der zustandsabhängigen Verstärkung in der Variante des Regelgesetzes II, mit Parametersatz  $P^{II,4}$ , erzielt. Die aus den Messergebnissen berechnete Hüllkurve der Balkenschwingung stimmt dabei recht gut mit dem numerisch berechneten Verlauf überein.

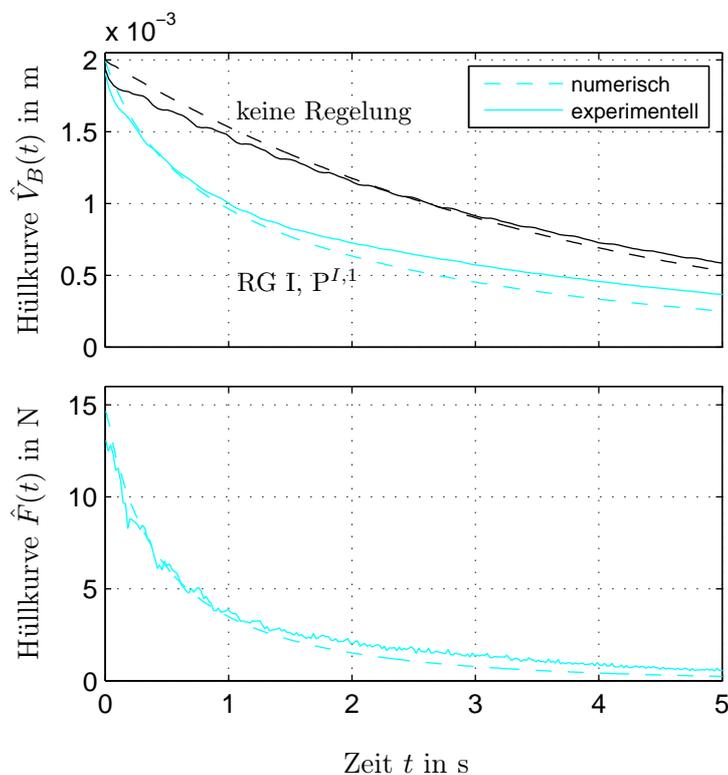


Abb. 5.24: Vergleich von gemessener Balkenschwingung und Istkraft in der Saite (Hüllkurven) mit den numerischen Ergebnissen für das Regelgesetz I. Parametersatz  $P^{I,1}$ .

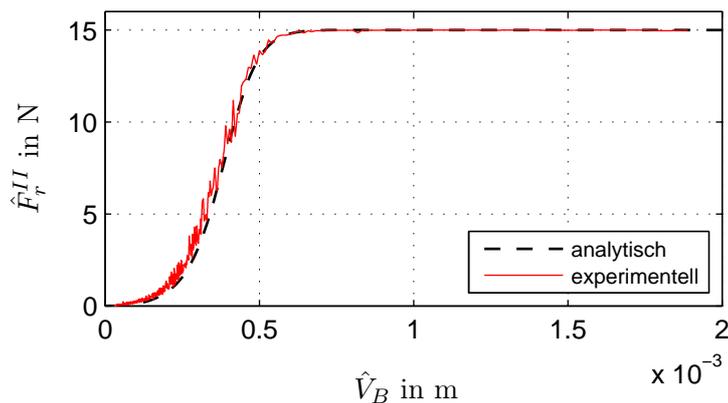


Abb. 5.25: Vergleich der analytisch berechneten Sollkraft  $\hat{F}_r^{II}(\hat{V}_B)$  in der Saite mit den Messergebnissen für das Regelgesetz II, Parametersatz  $P^{II,4}$ .

## 6 Wirksamkeit der aktiven Schwingungsdämpfung

Im vorhergehenden Kapitel wurden die Auswirkungen der verschiedenen Regelgesetze durch einen Vergleich der Hüllkurven der lateralen Balkenschwingung untereinander beurteilt. Um eine allgemeinere Aussage machen zu können, wird in diesem Kapitel zunächst die erreichte Dämpfung der Balkenschwingung in Form des Lehrschen Dämpfungsmaßes berechnet, und im Anschluss daran wird eine Lebensdauerrechnung des Balkens bei periodischer Anregung durchgeführt.

### 6.1 Erreichbare Verbesserung in der Dämpfung

Dazu wird mit Hilfe der gemessenen lateralen Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  das logarithmische Dekrement  $\delta_{11,g}$  berechnet, wobei nur die positiven Maxima von  $v_B(l, t)$  benutzt werden, d.h. jeder Periode der Balkenschwingung wird ein Wert des logarithmischen Dekrements zugeordnet. Unter der Annahme, dass die Dämpfung klein ist, gilt die Näherung  $D_{11,g} \approx \delta_{11,g}/\pi$  für die Lehrsche Dämpfung. Das Lehrsche Dämpfungsmaß  $D_{11,g}$  beinhaltet sowohl die Materialdämpfung als auch die aktive Dämpfung aufgrund der Regelung. Abbildung 6.1 zeigt die Ergebnisse auf Basis der gemessenen Balkenquerschwingung unter Verwendung von Regelgesetz I (siehe Abbildung 5.13).

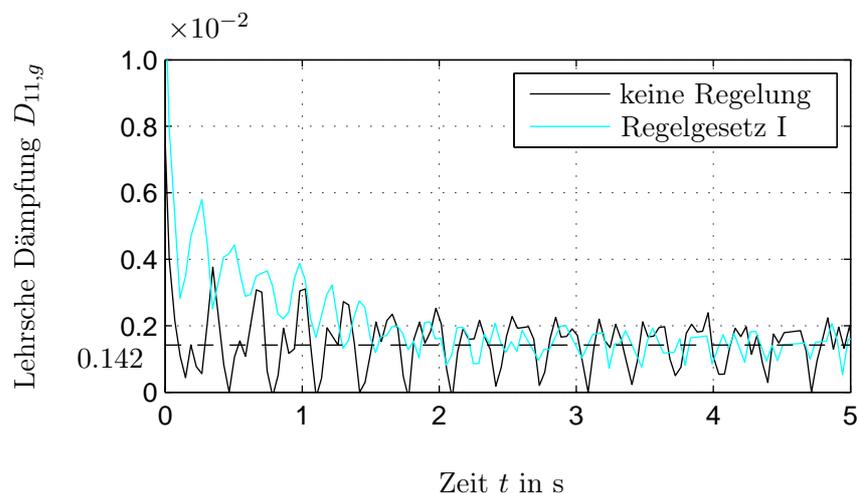


Abb. 6.1: Lehrsche Dämpfung  $D_{11,g}$  auf Basis der gemessenen Balkenquerschwingung  $v_B(l, t)$  für das Regelgesetz I und Vergleich mit dem unregulierten Fall.

Zum Vergleich wurde das Lehrsche Dämpfungsmaß für den Fall, dass keine Regelung aktiv ist, (siehe Abbildung 5.12) berechnet. Die im Diagramm bei  $D_{11,g} = 0.142$  eingetragene Linie entspricht jenem Dämpfungswert, der in der Simulation verwendet wurde, siehe Tabelle 5.5. Man

erkennt, dass zu Beginn der Mittelwert von  $D_{11,g}$  im unregelmäßigen Fall wesentlich größer ist als 0.142, ab ca.  $t = 1$  s jedoch knapp darunter liegt. Wie bereits beschrieben, bildet die Annahme eines geschwindigkeitsproportionalen Materialdämpfungsgesetzes daher die realen Verhältnisse nur ungenügend ab. Zur Quantifizierung der Wirksamkeit der aktiven Schwingungsdämpfung genügt allerdings ein Vergleich von  $D_{11,g}$  mit und ohne Regelung. Abbildung 6.1 zeigt, dass  $D_{11,g}$  unter Verwendung von Regelgesetz I sehr rasch abfällt. Die stark schwankenden Werte von  $D_{11,g}$  sind in der, wenn auch nur geringen, Amplitudenmodulation der gemessenen Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  begründet. Wesentlich bessere Ergebnisse werden mit dem Regelgesetz II, siehe Abbildung 6.2, erzielt.

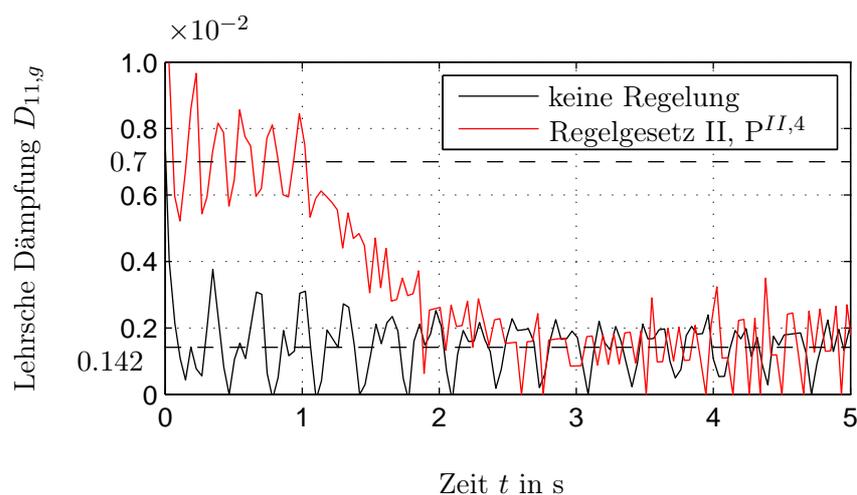


Abb. 6.2: Lehrsche Dämpfung  $D_{11,g}$  auf Basis der gemessenen Balkenquerschwingung  $v_B(l, t)$  für das Regelgesetz II, Parametersatz  $P^{II,4}$ , und Vergleich mit dem unregelmäßigen Fall.

Die Verwendung der zustandsabhängigen Verstärkung bewirkt zu Beginn, bei großen Balkenauslenkungen, eine Lehrsche Dämpfung mit konstantem Mittelwert, von  $D_{11,g} \approx 0.7$ . Durch die Regelung konnte die Dämpfung in diesem Bereich etwa um den Faktor 4.8 im Vergleich zum Mittelwert der unregelmäßigen Schwingung erhöht werden. Bei  $t = 1$  s beginnt die Dämpfung abzusinken, verursacht

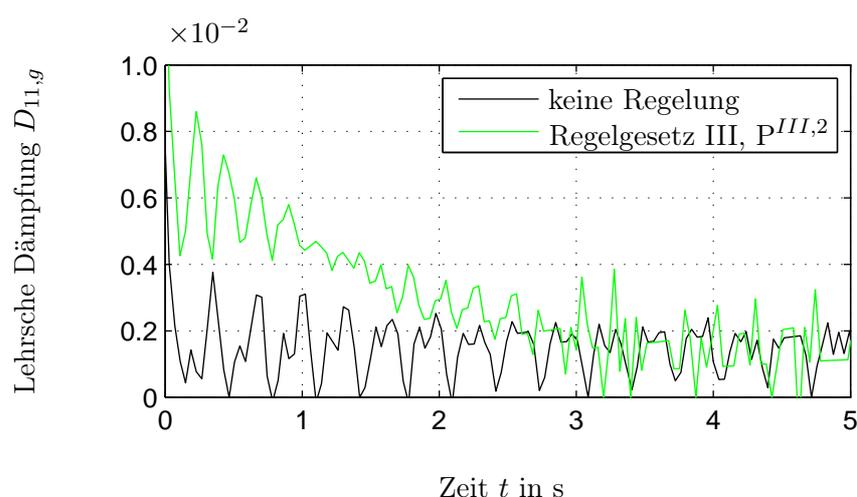


Abb. 6.3: Lehrsche Dämpfung  $D_{11,g}$  auf Basis der gemessenen Balkenquerschwingung  $v_B(l, t)$  für das Regelgesetz III, Parametersatz  $P^{III,2}$ , und Vergleich mit dem unregelmäßigen Fall.

durch den Abfall in der Saitenkraft  $\tilde{F}(t)$  (vergleiche Abbildung 5.17).

Abbildung 6.3 zeigt die Ergebnisse für das Regelgesetz III. Der Verlauf von  $D_{11,g}$  liegt zwischen den beiden Ergebnissen für die Regelgesetze I und II. Es existiert zwar kein Bereich, in dem der Mittelwert von  $D_{11,g}$  konstant ist, allerdings fällt die Dämpfung sehr viel langsamer ab als beim Regelgesetz I, vergleiche Abbildung 6.1.

## 6.2 Einfluss auf die Lebensdauer der Balkenstruktur

Eine Möglichkeit zur Quantifizierung der Wirksamkeit der aktiven Schwingungsdämpfung besteht in der Bestimmung des Einflusses auf die Lebensdauer des schwingenden Balkens. Wird eine mechanische Struktur oberhalb der Dauerfestigkeit periodisch belastet, so tritt nach einer bestimmten Anzahl an Lastwechseln ein Versagen des Bauteiles durch Ermüdungsbruch ein. Der Zusammenhang zwischen der mechanischen Spannung und der ertragbaren Anzahl an Lastwechseln wird im sog. Wöhlerdiagramm, siehe Abbildung 6.4, rechts, dargestellt. In dem doppelt-logarithmischen

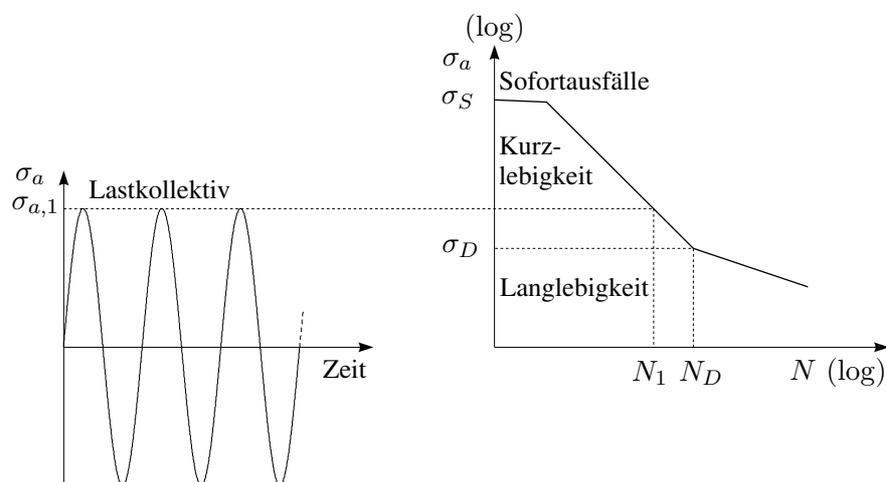


Abb. 6.4: Schematische Darstellung der Wöhlerkurve. Zusammenhang zwischen der mechanischen Spannung  $\sigma_a$  und der Anzahl  $N$  der ertragbaren Lastwechsel, siehe [18].

Diagramm wird auf der Abszisse die Anzahl der ertragbaren Lastwechsel  $N$  bei gleichmäßiger Spannungszyklenfolge aufgetragen. Im Hinblick auf die Belastung der Balkenstruktur wird für die Ordinate die Ausschlagsspannung  $\sigma_a$  einer Wechselbeanspruchung gewählt. Nach der Größe der Spannung  $\sigma_a$  unterscheidet man im Wöhlerdiagramm drei Bereiche. Überschreitet  $\sigma_a$  die statische Festigkeit  $\sigma_S$  des Bauteilwerkstoffes so kommt es zum sofortigen Bruch. Der Bereich  $\sigma_S > \sigma_a > \sigma_D$  wird als Kurzlebigkeits-, und der Bereich  $\sigma_a < \sigma_D$  als Langlebigkeitsbereich bezeichnet, siehe [18]. Die Kennwerte  $\sigma_D$  und  $N_D$  stellen im allgemeinen nur Bezugswerte zur Beschreibung der Wöhlerkurve dar. Besitzt die Wöhlerkurve für  $N > N_D$  einen horizontalen Verlauf, so beschreibt das Wertepaar  $(\sigma_D, N_D)$  den Beginn eines Dauerfestigkeitsbereiches, d.h. ist  $\sigma_a < \sigma_D$  so kann die Belastung beliebig lange ertragen werden, ohne dass es zum Bruch des Bauteiles kommt.

Abbildung 6.4, links, zeigt beispielhaft ein mögliches Lastkollektiv. Damit kann man aus dem Wöhlerdiagramm ablesen dass die Bauteilfestigkeit nach  $N_1$  Lastwechseln erreicht ist. Es ist anzumerken, dass die Wöhlerkurve nur für Lastkollektive konstanter Amplitude gültig ist. Nur in diesem Fall kann die Lebensdauer in der Form der ertragbaren Lastwechsel direkt aus dem Diagramm abgelesen werden. Besteht das Lastkollektiv hingegen aus einer unregelmäßigen Folge

von Spannungszyklen, so kann zur Beurteilung der Bauteillebensdauer beispielsweise die Theorie der linearen Schadensakkumulation von *Palmgren-Miner* angewendet werden, siehe [46] und [29]. Abbildung 6.5 zeigt den Verlauf der zugrundeliegenden Wöhlerkurve. Sie besitzt ab dem Punkt  $(\sigma_D, N_D)$  einen horizontalen Verlauf und damit einen Dauerfestigkeitsbereich. Zur Berücksichtigung des schädigenden Einflusses von kleinen Spannungsamplituden können zum Beispiel die modifizierten Wöhlerkurven nach *Haibach*, siehe [34], oder *Corten und Dolan*, siehe [19], verwendet werden. Beide Varianten besitzen keinen Dauerfestigkeitsbereich, sie unterscheiden sich nur durch die Steigung  $s$  der Wöhlerkurve nach dem Knickpunkt, siehe Abbildung 6.5.

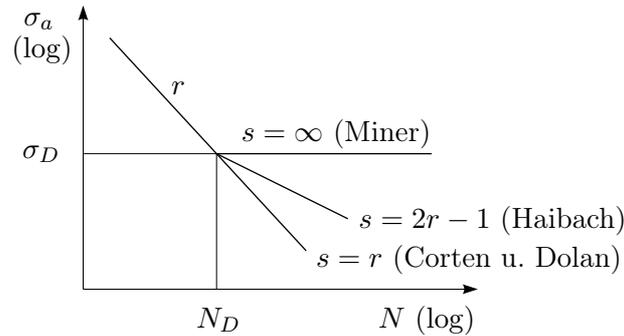


Abb. 6.5: Varianten der Wöhlerkurven zur linearen Schadensakkumulationshypothese, siehe [18].

Die beiden Teile der Wöhlerkurve lassen sich durch die Gleichungen

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_D}\right)^r = \left(\frac{N_D}{N}\right) \quad \text{für } \sigma_a > \sigma_D, \quad (6.1)$$

und

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_D}\right)^s = \left(\frac{N_D}{N}\right) \quad \text{für } \sigma_a < \sigma_D \quad (6.2)$$

beschrieben. Die Hypothese der linearen Schadensakkumulation basiert auf der Annahme, dass eine gleichmäßige Spannungszyklenfolge eine gleichmäßig fortschreitende Schädigung des Bauteiles hervorruft. Es wird ein Schaden  $S$  definiert, der beim unbeschädigten Bauteil den Wert 0 besitzt, und zum Zeitpunkt des Bruches auf den Wert 1 angewachsen ist. Der Schaden je Lastspiel beträgt daher  $1/N$ . Setzt sich die Belastung aus mehreren Teillastkollektiven zusammen, siehe zum Beispiel Abbildung 6.6, so können die einzelnen Teilschädigungen zum Gesamtschaden

$$S = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \quad (6.3)$$

addiert werden. Um die Hypothese der linearen Schadensakkumulation auf den in dieser Arbeit untersuchten Balken anzuwenden, muss zuerst ein Lastkollektiv festgelegt werden. Durch die Schwingungen des Balkens nach einer Anfangsauslenkung erfährt der Balken an seiner Einspannstelle eine Biegewechselbeanspruchung, die mit zunehmender Zeit aufgrund der vorhandenen Dämpfung abnimmt. Ein solcher einzelner Ausschwingvorgang kann daher als Teillastkollektiv betrachtet werden. Durch periodische Fortsetzung erhält man das gesamte Lastkollektiv, siehe Abbildung 6.7. Die Lebensdauer  $L$  des Balkens kann daher in der Form  $L = Z_L p$ , d.h. als Vielfaches der Schwingspiele  $p$  eines Teillastkollektives, ausgedrückt werden. Der Schaden je Teillastkollektiv errechnet sich mit Hilfe der Wöhlerkurve zu

$$S_T = \sum_{i=1}^p \frac{1}{N(\sigma_{a,i})}. \quad (6.4)$$

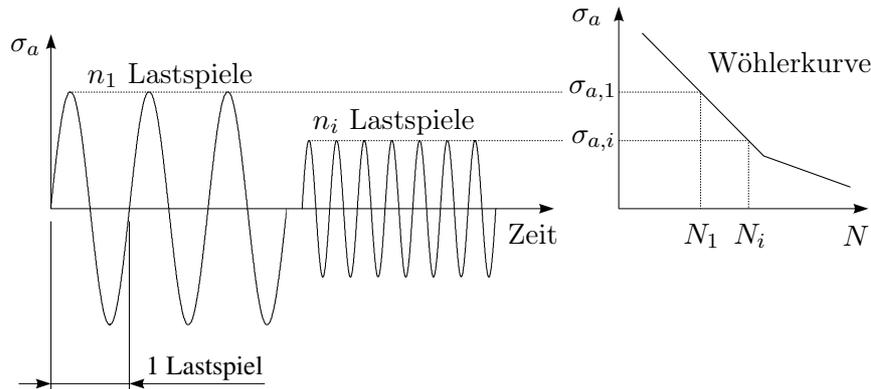


Abb. 6.6: Zusammenhang zwischen den Spannungsamplituden  $\sigma_{a,i}$  mehrerer Teillastkollektive und der Wöhlerkurve zur Bestimmung der Bauteilschädigung.

Da alle Teillastkollektive per Definition identisch sind, und ein Versagen des Bauteiles Eintritt wenn der Schaden  $S$  den Wert 1 erreicht erhält man

$$Z_L = \frac{1}{S_T} = \frac{1}{\sum_{i=1}^p \frac{1}{N(\sigma_{a,i})}}. \quad (6.5)$$

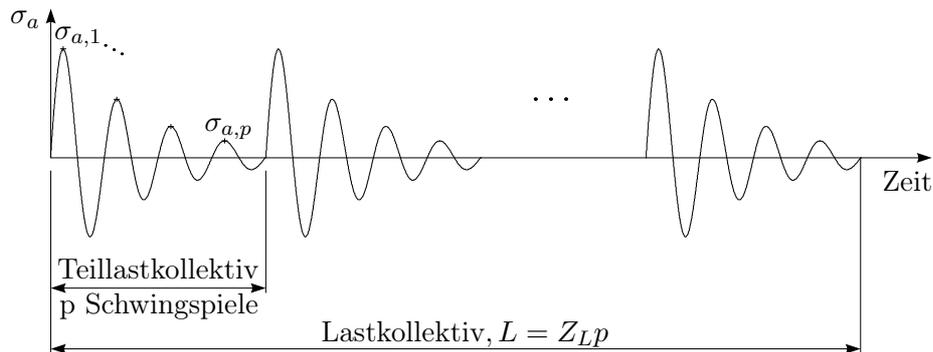


Abb. 6.7: Definition des Lastkollektivs durch periodische Anregung des Balkens.

Zur Bestimmung der Wirksamkeit der aktiven Schwingungsdämpfung wird im Folgenden die Anzahl  $Z_L$  der ertragbaren Teillastkollektive sowohl für den nicht geregelten Balken als auch für den Balken unter dem Einfluss der verwendeten Regelgesetze berechnet. Als Teillastkollektive werden exemplarisch die ersten 5 s der im Abschnitt 5 dargestellten Messergebnisse für die laterale Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  verwendet. Daraus berechnet sich mit Hilfe der Gleichungen (2.19), (2.21) und (2.55) die Biegewechselspannung an der Einspannstelle zu

$$\sigma_{B,W} \stackrel{\perp}{=} \sigma_a = -\frac{\pi^2}{8} \frac{E_B h}{l^2} v_B(l, t). \quad (6.6)$$

Tabelle 6.1 zeigt zusammenfassend die Eigenschaften des verwendeten Balkenwerkstoffes. Die Werte für  $N_D$  und  $\sigma_D$  stammen dabei aus [35]. Der Exponent  $r$  wurde aufgrund des Fehlens einer Wöhlerkurve für den Balkenwerkstoff in Anlehnung an der in [57] vorgeschlagenen Wöhlerkurve für Aluminiumschweißverbindungen gewählt. Da die Biegewechselspannungen  $\sigma_{B,W}$  im Balken weit unterhalb von  $\sigma_D$  liegen wird die Theorie nach *Haibach* mit  $s = 2r - 1$  angewendet. Aufgrund der

Unsicherheiten in der Wöhlerkurve ist anzuführen, dass die im Folgenden berechneten Lebensdauern nur in Relation zur Lebensdauer des nicht geregelten Balkens, bei dem der Amplitudenabfall ausschließlich durch die Materialdämpfung verursacht wird, gesehen werden können. Sie bilden damit ein Maß für die Wirksamkeit der aktiven Schwingungsdämpfung.

Tab. 6.1: Parameter der Wöhlerkurve für den verwendeten Balkenwerkstoff AlMgSi0.5

Kenngröße	Wert	Einheit
Grenzlastspielzahl $N_D$	$10^7$	-
Grenzlastspannung $\sigma_D$	70	N/mm <sup>2</sup>
Wöhlerexponent $r$	3	-
Exponent $s = 2r - 1$	5	-

Tabelle 6.2 zeigt die Ergebnisse für den unregelmäßigen Fall sowie für die verschiedenen Regelgesetze. Wie man aus der Tabelle entnehmen kann erträgt der Balken für den Fall, dass keine Regelung verwendet wird  $4.11383 \times 10^{10}$  Teillastkollektive bis zum Bruch. In Abhängigkeit der verwendeten Regelung steigt die Lebensdauer signifikant an.

Tab. 6.2: Ergebnisse einer Lebensdauerberechnung des Balkens mit/ohne Regelung

verwendetes Regelgesetz	Teillastkollektiv basierend auf	Ertragbare Anzahl $Z_L$ der Teillastkollektive bis zum Bruch
keines (ungeregelter Balken)	Abbildung 5.12	$4.11383 \times 10^{10}$
RG I	Abbildung 5.13	$11.07254 \times 10^{10}$
RG II, P <sup>II,4</sup>	Abbildung 5.17	$16.65931 \times 10^{10}$
RG III, P <sup>III,2</sup>	Abbildung 5.19	$15.67175 \times 10^{10}$

Zur besseren Beurteilung der Wirksamkeit der aktiven Schwingungsdämpfung wurde die jeweilige ertragbare Anzahl der Teillastkollektive mit Regelung auf diejenige des unregelmäßigen Balkens bezogen. Tabelle 6.3 zeigt die zugehörigen Ergebnisse.

Tab. 6.3: Auf die Lebensdauer  $Z_L^0$  des unregelmäßigen Balkens bezogene Anzahl der ertragbaren Teillastkollektive bis zum Bruch

bezogene Lebensdauer	$\frac{Z_L^I}{Z_L^0}$	$\frac{Z_L^{II,4}}{Z_L^0}$	$\frac{Z_L^{III,2}}{Z_L^0}$
Wert	2.69	4.05	3.81

Unter Verwendung des Regelgesetzes I (Geschwindigkeitsrückführung und konstante Verstärkung) ist die Lebensdauer etwa 2.7-mal so groß wie im unregelmäßigen Fall. Das beste Ergebnis wird mit der zustandsabhängigen Verstärkung in Regelgesetz II (Parametersatz 4) erreicht. In diesem Fall beträgt die Lebensdauer das 4-fache des unregelmäßigen Balkens. Eine Verbesserung um den Faktor 3.8 erhält man mit dem Regelgesetz III. Durch die Verwendung der aktiven Schwingungsdämpfung kann also die Lebensdauer des Balkens signifikant erhöht werden.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden die Möglichkeiten der aktiven Dämpfung von lateralen Schwingungen eines einseitig eingespannten Balkens untersucht. Dazu wird eine Saite innerhalb des Balkens angeordnet, die einerseits mit dem freien Balkenende und andererseits und mit einem longitudinalen Piezoaktor unterhalb des Balkens verbunden ist. Mit Hilfe einer mechanischen Spannvorrichtung wird eine Vorspannung von Saite und Balken erreicht. Durch eine Längenänderung des Piezoaktors aufgrund einer angelegten elektrischen Spannung wird eine zeitlich veränderliche, axial gerichtete Kraft auf das freie Ende des Balkens aufgebracht. Diese Kraft verursacht einen zeitvarianten Anteil in der resultierenden Biegesteifigkeit des Balkens.

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen für das Gesamtsystem erfolgt mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips und der nichtlinearen Balkentheorie nach Bernoulli-Euler, wobei Terme bis zur dritten Ordnung berücksichtigt werden. Mit Hilfe von Näherungsansätzen nach Rayleigh-Ritz wird das kontinuierliche System auf ein Modell mit drei Freiheitsgraden reduziert. Ein Freiheitsgrad für die laterale Balkenschwingung und je ein Freiheitsgrad für die axiale und laterale Schwingung der Saite.

Um eine Dämpfung der lateralen Balkenschwingung zu erreichen, muss die axiale Kraft auf den Balken in geeigneter Weise geregelt werden. Dadurch wird der resultierende Steifigkeitsparameter des Balkens verändert, weshalb diese Methode auch als *Parametrische Regelung* bezeichnet wird. Zunächst wird das in der Literatur vielfach beschriebene Regelkonzept der axialen Geschwindigkeit-rückführung untersucht. Dabei ist die Kraft auf den Balken entgegen der axialen Geschwindigkeit des freien Balkenendes gerichtet. Zur Realisierung dieses nichtlinearen Regelgesetzes (im Folgenden als Regelgesetz I bezeichnet) wird ein unterlagerter Kraftregler verwendet, der aus einem konventionellen PI-Regler besteht und sicherstellt, dass die tatsächliche Kraft in der Saite möglichst gut dem Sollwert entspricht. Durch numerische Lösung der Differentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises wird gezeigt, dass die Kraft in der Saite und damit die Dämpfungswirkung bei großen lateralen Balkenschwingungen am besten ist. Jedoch nimmt die Saitenkraft und damit die Dämpfung mit sinkender Auslenkungsamplitude des Balkens sehr rasch ab.

Eine wesentliche Verbesserung kann durch Einführung einer zustandsabhängigen Verstärkung der axialen Geschwindigkeit erreicht werden. Der Verstärkungsfaktor ist in diesem Fall eine Funktion der lateralen Balkenauslenkung und -geschwindigkeit und basiert auf einem Ansatz bestehend aus der reziproken Gesamtenergie des Balkens mit einer Beschränkungsfunktion zur Limitierung der Größe der Verstärkung. Die Beschränkungsfunktion kann ebenfalls zustandsabhängig (Regelgesetz II) oder konstant (Regelgesetz III) gewählt werden. Im Fall des Regelgesetzes II wird erreicht, dass die Amplitude der Saitenkraft für große Balkenauslenkungen näherungsweise konstant ist und erst bei kleinen Auslenkungen abzusinken beginnt. Die Größe der Kraftamplitude sowie die Art und Weise des Kraftabfalles können durch entsprechende Wahl der Reglerparameter verändert werden. Hingegen existiert beim Regelgesetz III kein Bereich konstanter Kraftamplitude. Allerdings ist die Saitenkraft wesentlich größer als beim Regelgesetz I. Die Simulationsergebnisse zeigen, dass bei einer gewählten Anfangsauslenkung des Balkens von 2 mm die Schwingungsamplitude nach  $t = 2$  s unter Verwendung der zustandsabhängigen Verstärkung (in der Variante des Regelgesetzes

II) nur mehr etwa 23.4% der Amplitude der freien Schwingung des unregulierten Balkens beträgt. Im Vergleich dazu beträgt die Schwingungsamplitude bei konstanter Verstärkung (Regelgesetz I) immer noch ungefähr 54% der des unregulierten Systems.

Zur experimentellen Verifikation der numerischen Ergebnisse wurde ein Versuchsstand aufgebaut. Der experimentell untersuchte Balken besteht aus einem Aluminiumprofil mit rechteckigem Querschnitt, das der Länge nach bis kurz vor den Enden geschlitzt wurde, um Platz für eine Stahlsaite zur Kräfteinbringung auf den Balken zu schaffen. Die mechanische Spannung in der vorgespannten Saite wird von einem konventionellen, longitudinalen Piezoaktor entsprechend dessen Ansteuersignal verändert. Die aktuelle Kraft  $\tilde{F}(t)$  in der Saite wird mit einem speziell entwickelten piezoelektrischen Kraftsensor, der direkt an den Piezoaktor angekoppelt ist, gemessen. Die Messung der lateralen Balkenauslenkung  $v_B(l, t)$  erfolgt mit Hilfe einer Laser-Abstandsmessung.

Die aufbereiteten Messsignale werden von einer Regelkarte, die in einem konventionellen PC eingebaut ist, eingelesen. Entsprechend dem auf der Karte programmierten Regelgesetz wird ein Ansteuersignal für den Verstärker des Piezoaktors errechnet. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf die Echtzeitfähigkeit der verwendeten Regelkarte gelegt. Je geringer die Rechenleistung der Karte ist, umso größer ist die Phasenverschiebung zwischen Soll- und Istkraft in der Saite, d.h. es kommt zu einer Verschlechterung der Dämpfungswirkung. Aus diesem Grund wurde eine Karte mit eigenem Prozessor verwendet, der ausschließlich für die Regelung zuständig ist. Damit kann eine gesamte Zykluszeit (Zeit vom Einlesen der Messwerte bis zur Aktualisierung der Ansteuerspannung des Piezoverstärkers) von ca.  $50 \mu\text{s}$  erreicht werden.

Die Messergebnisse zeigen deutlich die aktive Dämpfung der lateralen Balkenschwingung durch die Regelung. Analog zu den numerischen Ergebnissen liefert die zustandsabhängige Verstärkung die besten Resultate, d.h. die Balkenschwingung  $v_B(l, t)$  sinkt am schnellsten ab. Ein Vergleich der gemessenen Hüllkurven von  $v_B(l, t)$  mit den numerischen Ergebnissen zeigt, dass die Übereinstimmung umso besser ist, je größer der Dämpfungsanteil durch die Regelung im Vergleich zur Materialdämpfung ist. Der Grund liegt darin, dass die komplizierte Materialdämpfung im analytischen Modell nur ungenau abgebildet wurde.

Um die Dämpfungswirkung der untersuchten Regelgesetze quantifizieren zu können, wurde die Lehrsche Dämpfung aus dem gemessenen Amplitudenabfall von  $v_B(l, t)$  bestimmt. Es konnte gezeigt werden, dass beim Regelgesetz I die Lehrsche Dämpfung zu Beginn bei grossen Auslenkungen am größten ist, dann jedoch, analog zur Kraft in der Saite, rasch absinkt. Hingegen wird bei der zustandsabhängigen Verstärkung im Bereich konstanter Saitenkraftamplitude auch ein konstanter Mittelwert der Lehrschen Dämpfung erreicht. Beim Parametersatz  $P^{II,4}$  der Reglerparameter konnte die Lehrsche Dämpfung in diesem Bereich etwa um den Faktor 4.8 im Vergleich zur Materialdämpfung erhöht werden.

Eine Möglichkeit zur Beurteilung der Effektivität eines Systems zur aktiven Schwingungsdämpfung ist die Bestimmung der Auswirkung auf die Lebensdauer der schwingenden mechanischen Struktur. Durch einen Ausschwingvorgang des Balkens nach vorangegangener Anregung wird dieser an seiner Einspannstelle einer Biegewechselbeanspruchung ausgesetzt. Ein solcher Ausschwingvorgang kann als Teillastkollektiv interpretiert werden. Wiederholen sich diese Anregungen entsprechend oft, so kommt es nach einer bestimmten Anzahl zum Dauerbruch des Balkens. Je geringer die Amplituden der Biegewechselspannungen sind, umso später tritt der Bruch ein. Mit Hilfe einer konventionellen Lebensdauerrechnung auf Basis der Hypothese der linearen Schadensakkumulation konnte gezeigt werden, dass die zustandsabhängige Verstärkung (Regelgesetz II, Parametersatz 4) die Lebensdauer des Balkens um den Faktor 4.05 im Vergleich zum unregulierten Balken erhöht. Mit der konstanten Verstärkung (Regelgesetz I) wird hingegen nur eine Erhöhung der Lebensdauer um das 2.7-fache erreicht.

In der vorliegenden Arbeit konnte sowohl durch numerische als auch durch experimentelle Er-

gebnisse gezeigt werden, dass mit Hilfe einer geregelten axialen Kraft eine aktive Dämpfung von lateralen Balkenschwingungen erreicht werden kann. Besonders im Hinblick auf eine praktische Realisierung dieser Methode gibt es eine Reihe von Verbesserungsmöglichkeiten. Im Folgenden sollen einige dieser Möglichkeiten aufgezeigt werden.

### Ausblick und Verbesserungsmöglichkeiten

- Piezoelektrische Aktoren besitzen eine nur relativ kleine Längenänderung, oder die Baugröße ist bei Verwendung von Stapelaktoren, die größere Wege ermöglichen, für den praktischen Einsatz oft zu groß. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Aktorsystem wird eine axiale Kraft auf den Balken über eine Saite mit relativ geringer Steifigkeit aufgebracht. Je kleiner also die Verlängerung des Aktors ist, umso kleiner ist die Kraft, die auf den Balken aufgebracht werden kann, und umso kleiner ist die Dämpfungswirkung. Die obere Grenze für die axiale Kraft bildet im statischen Fall die Knickkraft des Balkens. Im geregelten dynamischen Fall muss mit Hilfe einer Stabilitätsuntersuchung der Grenzwert der Kraft bestimmt werden. Eine Möglichkeit zur Vergrößerung des Stellweges besteht in der Verwendung von Wegverstärkungsmechanismen, die zum Beispiel auf hydraulischer Basis arbeiten. In der Modellbildung muss dann auch das dynamische Verhalten dieser Verstärkungseinheit berücksichtigt werden. Alternativ können auch gänzlich andere Aktorprinzipien wie zum Beispiel Aktoren, die nach dem hydraulischen, elektromagnetischen oder magnetostriktiven Prinzip arbeiten, verwendet werden.
- In vielen Anwendungen ist eine Integration des Wegmesssystems zur Messung der lateralen Balkenschwingung in die Balkenstruktur vorteilhaft. Dies kann zum Beispiel bei hohlen Balken durch einen Laser-Messkopf, der an der Einspannstelle des Balkens angeordnet ist und im Inneren des Balkens in axialer Richtung misst, erfolgen. Eine andere Möglichkeit besteht in der Verwendung von DMS oder Piezo-Schichten (Patches) zur Aufnahme der Balkendehnung an der Oberfläche oder im Balkeninneren und anschließender Kalibrierung der lateralen Balkenschwingung.
- Durchführung einer numerischen Stabilitätsuntersuchung des geschlossenen Regelkreises, besonders im Hinblick auf Unsicherheiten in den Systemparametern wie zum Beispiel in der Steifigkeit von Balken und Piezoaktor. Weiters können mit einer Stabilitätsuntersuchung Grenzwerte der Reglerparameter bestimmt werden und so die Dämpfungswirkung verbessert werden.

## A Anhang

Für die virtuellen Arbeiten der Trägheitskräfte und der elastischen Kräfte im Balken ergibt sich mit den Gleichungen (2.47), (2.48) und (2.53)

$$\begin{aligned} \delta W_{T,B} = & \left[ -\rho_B A_B \int_0^l \psi_B^2 dx \ddot{V}_B(t) + \right. \\ & -\rho_B A_B \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi_B' \int_l^x \left[ \int_0^x \psi_B'^2 dx \right] dx \right\} \psi_B dx \left( \dot{V}_B^2 + V_B \ddot{V}_B \right) V_B + \\ & \left. -\rho_B I_B \int_0^l \left( \psi_B'^2 \ddot{V}_B + \psi_B'^4 V_B^2 \dot{V}_B + \psi_B'^4 V_B \dot{V}_B^2 \right) dx \right] \delta V_B(t), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

und

$$\delta W_{E,B} = -E_B I_B \left[ \int_0^l \psi_B''^2 dx V_B(t) + 2 \int_0^l (\psi_B' \psi_B'')^2 dx V_B^3(t) \right] \delta V_B(t). \quad (\text{A.2})$$

Die virtuellen Arbeiten der Trägheitskräfte und der elastischen Kräfte in der Saite erhält man aus den Gleichungen (2.49) und (2.50) mit (2.72) und (2.73) zu

$$\begin{aligned} \delta W_{T,S} = & \left\{ -\rho_S A_S \int_0^l \left[ \phi_S \ddot{U}_S - \left( (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right) \int_0^l \psi_B'^2 dx (\dot{V}_B^2 + V_B \ddot{V}_B) \right] \phi_S dx \right\} \delta U_S + \\ & + \left\{ \rho_S A_S \int_0^l \left[ \phi_S \ddot{U}_S - \left( (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right) \int_0^l \psi_B'^2 dx (\dot{V}_B^2 + V_B \ddot{V}_B) \right] [(1-\kappa)x/l + \right. \\ & \left. + \kappa] \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B dx \right\} \delta V_B + \\ & + \left\{ -\rho_S A_S \int_0^l \left( \psi_S^2 \ddot{V}_S + \frac{x}{l} \psi_B(l) \psi_S \ddot{V}_B \right) dx \right\} \delta V_S + \\ & + \left\{ -\rho_S A_S \psi_B(l) \int_0^l \left( \psi_S \ddot{V}_S + \frac{x}{l} \psi_B(l) \ddot{V}_B \right) \frac{x}{l} dx \right\} \delta V_B + \\ & + \left\{ -k \left[ u_A - \phi_S(0) U_S - (1-\kappa) u_{A,V} + \frac{\kappa}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 \right] \right\} \delta u_A + \\ & + \left\{ k \left[ u_A - \phi_S(0) U_S - (1-\kappa) u_{A,V} + \frac{\kappa}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 \right] \phi_S(0) \right\} \delta U_S + \\ & + \left\{ -k \left[ u_A - \phi_S(0) U_S - (1-\kappa) u_{A,V} + \frac{\kappa}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 \right] \kappa \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B \right\} \delta V_B, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

und

$$\begin{aligned}
\delta W_{E,S} = & \left\{ -E_S A_S \int_0^l \left[ \phi'_S U_S - (1 - \kappa) \frac{u_{A,V}}{l} - \frac{1 - \kappa}{2l} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (\psi'_S V_S + \psi_B(l)/l V_B)^2 \right] \phi'_S dx \right\} \delta U_S + \\
& + \left\{ E_S A_S \int_0^l \left[ \phi'_S U_S - (1 - \kappa) \frac{u_{A,V}}{l} - \frac{1 - \kappa}{2l} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (\psi'_S V_S + \psi_B(l)/l V_B)^2 \right] \frac{1 - \kappa}{l} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B dx \right\} \delta V_B + \\
& + \left\{ -E_S A_S \int_0^l \left[ \phi'_S U_S - (1 - \kappa) \frac{u_{A,V}}{l} - \frac{1 - \kappa}{2l} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 + \frac{1}{2} \psi_S'^2 V_S^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{l} \psi_B(l) \psi'_S V_S V_B \frac{1}{2l^2} \psi_B^2(l) V_B^2 \right] \left[ \psi'_S V_S + \frac{1}{l} \psi_B(l) V_B \right] \psi'_S dx \right\} \delta V_S + \\
& + \left\{ -E_S A_S \int_0^l \left[ \phi'_S U_S - (1 - \kappa) \frac{u_{A,V}}{l} - \frac{1 - \kappa}{2l} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 + \frac{1}{2} \psi_S'^2 V_S^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{l} \psi_B(l) \psi'_S V_S V_B \frac{1}{2l^2} \psi_B^2(l) V_B^2 \right] \left[ \psi'_S V_S + \frac{1}{l} \psi_B(l) V_B \right] \frac{1}{l} \psi_B(l) dx \right\} \delta V_B + \\
& - k \left[ u_A - \phi_S(0, t) U_S - (1 - \kappa) u_{A,V} + \frac{\kappa}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 \right] \delta u_A + \\
& + k \left[ u_A - \phi_S(0, t) U_S - (1 - \kappa) u_{A,V} + \frac{\kappa}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 \right] \phi_S(0, t) \delta U_S + \\
& - k \left[ u_A - \phi_S(0, t) U_S - (1 - \kappa) u_{A,V} + \frac{\kappa}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 \right] \kappa \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B \delta V_B.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Die virtuelle Arbeit der Kraft des Aktors lässt sich schreiben in der Form

$$\delta W_F = F(t) \delta u_A(t). \tag{A.5}$$

Mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzip folgt für die Funktionen  $F_1$  bis  $F_4$  aus Gleichung (2.87)

$$\begin{aligned}
F_1 = & \left\{ \left[ \rho_B A_B \int_0^l \psi_B'^2 dx + \rho_B I_B \int_0^l \psi_B''^2 dx + \rho_S A_S \frac{l \psi_B^3(l)}{3} \right] + \left[ \rho_B I_B l^2 \int_0^l \psi_B'^4 dx + \right. \right. \\
& + \rho_S A_S l^2 \left( \int_0^l \psi_B''^2 dx \right)^2 \left[ (1-\kappa) \int_0^l \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \frac{x}{l} dx + \int_0^l \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \kappa dx \right] + \\
& + \rho_B A_B l^2 \int_0^l \left\{ \psi_B' \int_l^x \left[ \int_0^\xi \psi_B''^2 d\tau \right] d\xi \right\}' \psi_B dx \left. \right\} \frac{V_B^2}{l^2} \ddot{V}_B + \\
& + \left\{ \left[ -\rho_S A_S l \int_0^l \psi_B''^2 dx \left[ \int_0^l \phi_S \kappa dx + (1-\kappa) \int_0^l \phi_S \frac{x}{l} dx \right] \right] \frac{V_B}{l} \right\} \ddot{U}_S + \\
& + \left\{ \rho_S A_S \frac{\psi_B(l)}{l} \int_0^l \psi_S x dx \right\} \ddot{V}_S + \left\{ \rho_B I_B l^2 \int_0^l \psi_B'^4 dx + \right. \\
& + \rho_S A_S l^2 \left( \int_0^l \psi_B''^2 dx \right)^2 \left[ (1-\kappa) \int_0^l \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \frac{x}{l} dx + \int_0^l \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \kappa dx \right] + \\
& + \rho_B A_B l^2 \int_0^l \left\{ \psi_B' \int_l^x \left[ \int_0^\xi \psi_B''^2 d\tau \right] d\xi \right\}' \psi_B dx \left. \right\} \frac{V_B \dot{V}_B^2}{l^2} + \\
& + \left\{ 2E_B I_B l^2 \int_0^l (\psi_B' \psi_B'')^2 dx + E_S A_S l (1-\kappa)^2 \frac{1}{2} \left( \int_0^l \psi_B''^2 dx \right)^2 - E_S A_S (1-\kappa) \psi_B^2(l) \int_0^l \psi_B''^2 dx + \right. \\
& + E_S A_S \frac{\psi_B^4(l)}{2l} + k \frac{(\kappa l)^2}{2} \left( \int_0^l \psi_B''^2 dx \right)^2 \left. \right\} \frac{V_B^3}{l^2} + \left\{ -E_S A_S l (1-\kappa) \frac{1}{2} \int_0^l \psi_B''^2 dx \int_0^l \psi_S'^2 dx + \right. \\
& + E_S A_S \psi_B^2(l) \frac{3}{2} \int_0^l \psi_S'^2 dx \left. \right\} \frac{V_S^2 V_B}{l^2} + \left\{ -E_S A_S (1-\kappa) \int_0^l \psi_B''^2 dx \int_0^l \phi_S' dx + \right. \\
& + E_S A_S \frac{\psi_B^2(l)}{l} \int_0^l \phi_S' dx - k \kappa l \phi_S(0) \int_0^l \psi_B''^2 dx \left. \right\} \frac{U_S V_B}{l} + \left\{ E_S A_S \psi_B(l) \int_0^l \phi_S' \psi_S' dx \right\} \frac{U_S V_S}{l} + \\
& + \left\{ E_B I_B \int_0^l \psi_B''^2 dx + \left[ E_S A_S (1-\kappa)^2 \int_0^l \psi_B''^2 dx - E_S A_S (1-\kappa) \frac{\psi_B^2(l)}{l} + k \kappa^2 \int_0^l \psi_B''^2 dx \right] \frac{u_{A,V}}{l} \right. \\
& + k \kappa l \int_0^l \psi_B''^2 dx \left. \frac{\tilde{u}_A}{l} \right\} V_B, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \left\{ \rho_S A_S \int_0^l \phi_S^2 dx \right\} \ddot{U}_S + \left\{ -\rho_S A_S l \int_0^l \psi_B''^2 dx \int_0^l \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \phi_S dx \right\} \frac{V_B \ddot{V}_B}{l} + \\
& + \left\{ -E_S A_S (1-\kappa) \frac{1}{2} \int_0^l \psi_B''^2 dx \int_0^l \phi_S' dx + E_S A_S \frac{\psi_B^2(l)}{2l} \int_0^l \phi_S' dx - k \kappa l \phi_S(0) \frac{1}{2} \int_0^l \psi_B''^2 dx \right\} \frac{V_B^2}{l} + \\
& + \left\{ E_S A_S l \frac{1}{2} \int_0^l \psi_S'^2 \phi_S' dx \right\} \frac{V_S^2}{l} + \left\{ E_S A_S \psi_B(l) \int_0^l \phi_S' \psi_S' dx \right\} \frac{V_S V_B}{l} + \\
& + \left\{ -\rho_S A_S l \int_0^l \psi_B''^2 dx \int_0^l \left[ (1-\kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \phi_S dx \right\} \frac{\dot{V}_B^2}{l} + \left\{ E_S A_S \int_0^l \phi_S'^2 dx + k \phi_S^2(0) \right\} U_S - k \tilde{u}_A, \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = & \left\{ \rho_S A_S \int_0^l \psi_S^2 dx \right\} \ddot{V}_S + \left\{ \rho_S A_S \frac{\psi_B(l)}{l} \int_0^l x \psi_S dx \right\} \ddot{V}_B + \left\{ -E_S A_S l (1 - \kappa) \frac{1}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx \int_0^l \psi_S'^2 dx + \right. \\
& + E_S A_S \psi_B^2(l) \frac{3}{2} \int_0^l \psi_S'^2 dx \left. \right\} \frac{V_S V_B^2}{l^2} + \left\{ E_S A_S l^2 \frac{1}{2} \int_0^l \psi_S'^4 dx \right\} \frac{V_S^3}{l^2} + \\
& + \left\{ E_S A_S \psi_B(l) \int_0^l \phi_S' \psi_S' dx \right\} \frac{U_S V_B}{l} + \left\{ E_S A_S l \int_0^l \phi_S' \psi_S'^2 dx \right\} \frac{U_S V_S}{l} + \\
& + \left\{ -E_S A_S (1 - \kappa) \int_0^l \psi_S'^2 dx \right\} \frac{u_{A,V}}{l} V_S, \tag{A.8}
\end{aligned}$$

und

$$F_4 = -k \left[ u_A - \phi_S(0) U_S - (1 - \kappa) u_{A,V} + \frac{\kappa}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx V_B^2 \right] + F_A. \tag{A.9}$$

Die Gleichungen (A.10) bis (A.31) stellen die Koeffizienten der Bewegungsgleichung (siehe Gleichung (2.95)) des auf drei Freiheitsgrade reduzierten Gesamtsystems dar. Die analytische Berechnung der auftretenden Integrale erfolgte mit Hilfe des Programmpaketes MAPLE, siehe [37].

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{11} &= \rho_B A_B \int_0^l \psi_B^2 dx + \rho_B I_B \int_0^l \psi_B'^2 dx + \rho_S A_S \frac{l \psi_B^3(l)}{3} = \\
&= \frac{\rho_B A_B l (3\pi - 8)}{2\pi} + \frac{\rho_B I_B \pi^2}{8l} + \frac{\rho_S A_S l}{3} \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\tilde{m}_{22} = \rho_S A_S \int_0^l \phi_S^2 dx = \frac{\rho_S A_S l}{3} \tag{A.11}$$

$$\tilde{m}_{33} = \rho_S A_S \int_0^l \psi_S^2 dx = \frac{\rho_S A_S l}{2} \tag{A.12}$$

$$\tilde{m}_{13} = \rho_S A_S \frac{\psi_B(l)}{l} \int_0^l x \psi_S dx = \frac{\rho_S A_S l}{\pi} \tag{A.13}$$

$$\tilde{m}_{31} = \tilde{m}_{13} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{11} &= \rho_B I_B l^2 \int_0^l \psi_B'^4 dx + \rho_S A_S l^2 \left( \int_0^l \psi_B'^2 dx \right)^2 \left[ (1 - \kappa) \int_0^l \left[ (1 - \kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \frac{x}{l} dx + \right. \\
&+ \left. \int_0^l \left[ (1 - \kappa) \frac{x}{l} + \kappa \right] \kappa dx \right] + \rho_B A_B l^2 \int_0^l \left\{ \psi_B' \int_l^x \left[ \int_0^\xi \psi_B'^2 d\tau \right] d\xi \right\}' \psi_B dx = \\
&= \frac{3\rho_B I_B \pi^4}{128l} + \frac{\rho_S A_S l \pi^4 (1 + \kappa + \kappa^2)}{192} + \rho_B A_B l \pi^2 \left( \frac{\pi^2}{192} - \frac{3}{128} \right) \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{12} &= -\rho_S A_S l \int_0^l \psi_B'^2 dx \left[ \int_0^l \phi_S \kappa dx + (1 - \kappa) \int_0^l \phi_S \frac{x}{l} dx \right] = \\
&= -\frac{\rho_S A_S l \pi^2 (1 + 2\kappa)}{48} \tag{A.16}
\end{aligned}$$

$$\tilde{m}_{21} = \tilde{m}_{12} \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{k}_{11,1} = E_B I_B \int_0^l \psi_B''^2 dx = \frac{E_B I_B \pi^4}{32l^3} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11,2} &= E_S A_S (1 - \kappa)^2 \int_0^l \psi_B'^2 dx - E_S A_S (1 - \kappa) \frac{\psi_B^2(l)}{l} + k \kappa^2 l \int_0^l \psi_B'^2 dx = \\ &= \frac{E_S A_S}{l} \left[ \frac{\pi^2(1 - 2\kappa + \kappa^2)}{8} + \kappa - \frac{1}{2} \right] + \frac{k \kappa^2 \pi^2}{8} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{k}_{22} = E_S A_S \int_0^l \phi_S'^2 dx + k \phi_S^2(0) = \frac{E_S A_S}{l} + k \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{k}_{33} = -E_S A_S (1 - \kappa) \int_0^l \psi_S'^2 dx = -\frac{E_S A_S \pi^2 (1 - \kappa)}{2l} \quad (\text{A.21})$$

$$\tilde{k}_{11} = k \kappa l \int_0^l \psi_B'^2 dx = \frac{k \kappa \pi^2}{8} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{1,1} &= 2E_B I_B l^2 \int_0^l (\psi_B' \psi_B'')^2 dx + E_S A_S l (1 - \kappa)^2 \frac{1}{2} \left( \int_0^l \psi_B'^2 dx \right) + \\ &\quad - E_S A_S (1 - \kappa) \psi_B^2(l) \int_0^l \psi_B'^2 dx + E_S A_S \frac{\psi_B^4(l)}{2l} + k \frac{(\kappa l)^2}{2} \left( \int_0^l \psi_B'^2 dx \right)^2 = \\ &= \frac{E_B I_B \pi^6}{256l^3} + \frac{E_S A_S}{l} \left[ \frac{\pi^4(1 - 2\kappa + \kappa^2) - 16\pi^2(1 - \kappa)}{128} + \frac{1}{2} \right] + \frac{k \kappa^2 \pi^4}{128} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{1,2} &= -E_S A_S l (1 - \kappa) \frac{1}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx \int_0^l \psi_S'^2 dx + E_S A_S \psi_B^2(l) \frac{3}{2} \int_0^l \psi_S'^2 dx = \\ &= \frac{E_S A_S \pi^2}{l} \left[ \frac{3}{4} - \frac{\pi^2(1 - \kappa)}{32} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{1,3} &= -E_S A_S (1 - \kappa) \int_0^l \psi_B'^2 dx \int_0^l \phi_S' dx + E_S A_S \frac{\psi_B^2(l)}{l} \int_0^l \phi_S' dx - k \kappa l \phi_S(0) \int_0^l \psi_B'^2 dx = \\ &= \frac{E_S A_S}{l} \left[ \frac{\pi^2(1 - \kappa)}{8} - \frac{1}{2} \right] - \frac{k \kappa \pi^2}{8} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\tilde{k}_{1,4} = \tilde{k}_3^{(4)} = E_S A_S \psi_B(l) \int_0^l \phi_S' \psi_S' dx = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{2,1} &= -E_S A_S (1 - \kappa) \frac{1}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx \int_0^l \phi_S' dx + E_S A_S \frac{\psi_B^2(l)}{2l} \int_0^l \phi_S' dx - k \kappa l \phi_S(0) \frac{1}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx \\ &= \frac{E_S A_S}{l} \left[ \frac{\pi^2(1 - \kappa)}{16} - \frac{1}{2} \right] - \frac{k \kappa \pi^2}{16} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\tilde{k}_{2,2} = E_S A_S l \frac{1}{2} \int_0^l \psi_S'^2 \phi_S' dx = -\frac{E_S A_S \pi^2}{4l} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{3,1} = \tilde{k}_1^{(2)} &= -E_S A_S l (1 - \kappa) \frac{1}{2} \int_0^l \psi_B'^2 dx \int_0^l \psi_S'^2 dx + E_S A_S \psi_B^2(l) \frac{3}{2} \int_0^l \psi_S'^2 dx = \\ &= \frac{E_S A_S \pi^2}{4l} \left[ \frac{\pi^2 (\kappa - 1)}{8} + 3 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\tilde{k}_{3,2} = E_S A_S l^2 \frac{1}{2} \int_0^l \psi_S'^4 dx = \frac{3E_S A_S \pi^4}{16l} \quad (\text{A.30})$$

$$\tilde{k}_{3,3} = E_S A_S l \int_0^l \phi_S' \psi_S'^2 dx = -\frac{E_S A_S \pi^2}{2l} \quad (\text{A.31})$$

Die Koeffizienten der linearisierten Bewegungsgleichung sind in den Gleichungen (A.32) bis (A.51) wiedergegeben.

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{V}_B} \right|_V = \left( \bar{m}_{11} + \frac{\tilde{m}_{11}}{l^2} V_B^2 \right) \Big|_V = \bar{m}_{11} \quad (\text{A.32})$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \dot{V}_B} \right|_V = 2 \frac{\tilde{m}_{11}}{l^2} V_B \dot{V}_B \Big|_V = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_1}{\partial V_B} \right|_V &= \left( 2 \frac{\tilde{m}_{11}}{l^2} V_B \ddot{V}_B + \frac{\tilde{m}_{12}}{l} \ddot{U}_S + \frac{\tilde{m}_{11}}{l^2} \dot{V}_B^2 + 3 \frac{\tilde{k}_{1,1}}{l^2} V_B^2 + \frac{\tilde{k}_{1,2}}{l^2} V_S^2 + \frac{\tilde{k}_{1,3}}{l} U_S + \right. \\ &\quad \left. + \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2}}{k\kappa} \frac{F_V}{l} + \tilde{k}_{11} \frac{\tilde{u}_A(t)}{l} \right) \Big|_V = \\ &= \bar{k}_{11,1} + \frac{\bar{k}_{11,2}}{k\kappa} \frac{F_V}{l} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{U}_S} \right|_V = \frac{\tilde{m}_{12}}{l} V_B \Big|_V = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial U_S} \right|_V = \frac{\tilde{k}_{1,3}}{l} V_B \Big|_V = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{V}_S} \right|_V = \bar{m}_{13} \quad (\text{A.37})$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial V_S} \right|_V = 2 \frac{\tilde{k}_{1,2}}{l^2} V_B V_S \Big|_V = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{u}_A} \right|_V = \frac{\tilde{k}_{11}}{l} V_B \Big|_V = 0 \quad (\text{A.39})$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial \ddot{V}_B} \right|_V = \frac{\tilde{m}_{21}}{l} V_B \Big|_V = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial \dot{V}_B} \right|_V = 2 \frac{\tilde{m}_{21}}{l} \dot{V}_B \Big|_V = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial V_B} \right|_V = \left( \frac{\tilde{m}_{21}}{l} \ddot{V}_B + 2 \frac{\tilde{k}_{2,1}}{l} V_B \right) \Big|_V = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial \ddot{U}_S} \right|_V = \bar{m}_{22} \quad (\text{A.43})$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial U_S} \right|_V = \bar{k}_{22} \quad (\text{A.44})$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial V_S} \right|_V = 2 \frac{\tilde{k}_{2,2}}{l} V_S \Big|_V = 0 \quad (\text{A.45})$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial \dot{u}_A} \right|_V = -k \quad (\text{A.46})$$

$$\left. \frac{\partial F_3}{\partial \ddot{V}_B} \right|_V = \bar{m}_{31} \quad (\text{A.47})$$

$$\left. \frac{\partial F_3}{\partial V_B} \right|_V = 2 \frac{\tilde{k}_{3,1}}{l^2} V_S V_B \Big|_V = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$\left. \frac{\partial F_3}{\partial U_S} \right|_V = \frac{\tilde{k}_{3,3}}{l} V_S \Big|_V = 0 \quad (\text{A.49})$$

$$\left. \frac{\partial F_3}{\partial \ddot{V}_S} \right|_V = \bar{m}_{33} \quad (\text{A.50})$$

$$\left. \frac{\partial F_3}{\partial V_S} \right|_V = \left( \frac{\tilde{k}_{3,1}}{l^2} V_B^2 + 3 \frac{\tilde{k}_{3,2}}{l^2} V_S^2 + \frac{\tilde{k}_{3,3}}{l} U_S + \frac{\bar{k}_{33}}{k\kappa} \frac{F_V}{l} \right) \Big|_V = \frac{\bar{k}_{33}}{k\kappa} \frac{F_V}{l} \quad (\text{A.51})$$

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Passive Dämpfung von Schaufelschwingungen mit Hilfe von Reibelementen, siehe [47].	1
1.2	Schwingungsreduktion durch Dämpfung von axialen Balkenschwingungen, siehe [59].	2
1.3	Passive Dämpfung von Strukturschwingungen durch die Verwendung von piezoelektrischen Schichten (Layer) und elektrischen Widerständen $R_s$ , siehe [14] und [13].	3
1.4	Einseitig eingespannter Balken mit piezoelektrischem Biegeaktor (oben), zugehöriges Finite-Elemente Modell (unten), siehe [50].	3
1.5	Prinzipieller Aufbau des zu untersuchenden Systems	5
2.1	Bernoulli-Euler Balkentheorie	6
2.2	Definition der Verschiebungsfelder $u(x, t)$ und $v(x, t)$ eines Balkens (links), Verschiebungen am differentiellen Balkenelement (rechts)	7
2.3	Prinzipiskizze zur Herleitung der Bewegungsgleichungen	9
2.4	Modellbildung des Piezoaktors	12
2.5	Ansatzfunktionen für die Verschiebungsfelder der Saite	15
2.6	Verlauf der Eigenwerte des linearen Modells in Abhängigkeit der Vorspannkraft $F_V$	23
3.1	Prinzip der aktiven Dämpfung von Balkenschwingungen mit Hilfe einer axial gerichteten Einzelkraft $P(t)$ .	25
3.2	Mögliche Verläufe der Funktion $P(\dot{u}(l, t))$ . $P_1$ : Proportional der axialen Geschwindigkeit $\dot{u}(l, t)$ , $P_2$ : Bang-Bang Regelgesetz, $P_3$ : Modifiziertes Bang-Bang Regelgesetz	26
3.3	Aufbringen einer zeitlich veränderlichen Axialkraft $\tilde{F}(t)$ auf den Balken	27
3.4	Prinzipiskizze des geregelten Gesamtsystems	28
3.5	Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises	29
3.6	Modifiziertes Bang-Bang Regelgesetz	32
3.7	Angestrebter Sollkraftverlauf $\hat{F}_r^{II}$ durch zustandsabhängige Verstärkung von $\dot{u}_B(l, t)$	33
3.8	Festlegung des Amplitudenabfalls von $F_r^{II}(t)$ .	35
3.9	Der Einfluß der Funktion $a(V_B, \dot{V}_B)$ auf die Amplitude $\hat{F}_r^{II}$ der Sollkraft $\tilde{F}_r^{II}$ .	37
3.10	Der Sollkraftverlauf $\hat{F}_r^{III}$ für die Parametersätze $P^{III,1}$ und $P^{III,2}$ .	39
3.11	Anpassung des Sollkraftverlaufes $\hat{F}_r^{III}$ durch geeignete Wahl des Verstärkungsfaktors $\nu$	40
3.12	Gegenüberstellung der Regelgesetze I bis III für ausgewählte Parametersätze.	40
3.13	Blockschaltbild des unterlagerten Kraftregelkreises	41
3.14	Definition der maximalen Amplituden- und Phasenabweichung zwischen der Sollkraft $\tilde{F}_r(t)$ und der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite.	43
4.1	Abmessungen des mechanischen Systems und mögliche Ausführungsformen des Balkens.	48
4.2	Stabilitätskarte des unterlagerten Kraftregelkreises.	51
4.3	Vergleich von Soll- und Istkraft in der Saite.	51

4.4	Zeitverlauf der lateralen Balkenschwingung $v_B(l, t) = V_B(t)$ (oben) und der tatsächlichen Kraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite (unten). . . . .	52
4.5	Vergleich der Einhüllenden von $V_B(t)$ im geregelten Fall (Regelgesetz <i>I</i> ), mit der Einhüllenden des nicht geregelten Balkens. . . . .	53
4.6	Zeitverläufe der axialen Saitenschwingung $U_S(t)$ und der gesamten axialen Verschiebung $u_S(0, t)$ der Saite an der Stelle $x = 0$ (links), der lateralen Saitenschwingung $V_S(t)$ und der gesamten lateralen Verschiebung der Saite $v_S(l/2, t)$ an der Stelle $x = l/2$ (rechts). . . . .	53
4.7	Gedehnte Zeitverläufe der lateralen Balkenschwingung $v_B(l, t)$ , der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite sowie der axialen und der lateralen Saitenschwingung $U_S(t)$ und $V_S(t)$ während der ersten 0.25 s der Simulation. . . . .	54
4.8	Ergebnis einer FFT-Analyse des Zeitsignals $V_S(t)$ . Parameter der FFT: Frequenzauflösung 0.05 Hz, Nyquistfrequenz 12.5 kHz. . . . .	55
4.9	Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz <i>II</i> , Parametersatz $P^{II,1}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung $v_B(l, t)$ , der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung $U_S(t)$ und $V_S(t)$ sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite $u_S(0, t)$ und $v_S(l/2, t)$ . . . . .	57
4.10	Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz <i>II</i> , Parametersatz $P^{II,2}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung $v_B(l, t)$ , der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung $U_S(t)$ und $V_S(t)$ sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite $u_S(0, t)$ und $v_S(l/2, t)$ . . . . .	58
4.11	Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz <i>II</i> , Parametersatz $P^{II,3}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung $v_B(l, t)$ , der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung $U_S(t)$ und $V_S(t)$ sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite $u_S(0, t)$ und $v_S(l/2, t)$ . . . . .	59
4.12	Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz <i>II</i> , Parametersatz $P^{II,4}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung $v_B(l, t)$ , der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung $U_S(t)$ und $V_S(t)$ sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite $u_S(0, t)$ und $v_S(l/2, t)$ . . . . .	60
4.13	Zusammenfassung der Ergebnisse für das Regelgesetz <i>II</i> . . . . .	61
4.14	Vergleich des Sollkraftverlaufes $\hat{F}_r^{II}$ in Abhängigkeit der Auslenkungsamplitude $\hat{V}_B$ des Balkens mit der analytischen Näherungsformel. Verwendeter Parametersatz: $P^{II,4}$ . . . . .	62
4.15	Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz <i>III</i> , Parametersatz $P^{III,1}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung $v_B(l, t)$ , der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung $U_S(t)$ und $V_S(t)$ sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite $u_S(0, t)$ und $v_S(l/2, t)$ . . . . .	63
4.16	Numerische Ergebnisse für das Regelgesetz <i>III</i> , Parametersatz $P^{III,2}$ . Zeitverläufe der Balkenschwingung $v_B(l, t)$ , der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite, der axialen und lateralen Saitenschwingung $U_S(t)$ und $V_S(t)$ sowie der gesamten axialen und lateralen Verschiebung der Saite $u_S(0, t)$ und $v_S(l/2, t)$ . . . . .	64
4.17	Zusammenfassung der Ergebnisse für das Regelgesetz <i>III</i> . . . . .	65
4.18	Zusammenfassung der Ergebnisse der Regelgesetze <i>I</i> bis <i>III</i> . . . . .	66
5.1	Schematische Skizze des Versuchsaufbaues. . . . .	69
5.2	Vorrichtung zum Aufbringen der konstanten Vorspannkraft auf den Balken. . . . .	70
5.3	Gesamtübersicht der Versuchsanordnung. . . . .	71
5.4	Mechanischer Aufbau der Versuchseinrichtung (rechts) und Detail der Krafteinbringung auf den Balken (links). . . . .	71

5.5	Detailansicht von Piezoaktor inkl. Kraftsensor und Spannvorrichtung. . . . .	72
5.6	Kraftsensor zur Messung der Kraft in der Saite. . . . .	72
5.7	Schematische Skizze von Aufbau und Vorrichtung zur Kalibrierung des Kraftsensors. . . . .	73
5.8	Kalibrierkurve des Kraftsensors inklusive Ladungsverstärker LV1. . . . .	75
5.9	Gesamtübersicht der Anordnung zur Kalibrierung des Kraftsensors. . . . .	75
5.10	Details der mechanischen Kalibriervorrichtung. Shaker inkl. Aufspannvorrichtung (links), Verbindung Stökel-Impedanzmesskopf-Kraftsensor (rechts). . . . .	76
5.11	Blockschaltbild der implementierten Regelung. . . . .	77
5.12	Gemessene laterale Balkenschwingung $v_B(l, t)$ und Näherung der Hüllkurve durch eine Exponentialfunktion der Form $ze^{pt}$ . Anfangsauslenkung $2.0 \times 10^{-3}$ m. . . . .	79
5.13	Gemessene Zeitverläufe der lateralen Balkenschwingung $v_B(l, t)$ und Vergleich mit der Hüllkurve der Balkenschwingung im unregelmäßigen Fall (oben), Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite (mitte) und Ausgangsspannung OutCH1 des Reglers (unten). . . . .	81
5.14	FFT-Analyse der gemessenen Balkenschwingung $V_B(t)$ und der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite. Parameter der FFT: Frequenzauflösung 0.05 Hz, Nyquistfrequenz 2 kHz. . . . .	82
5.15	Vergleich von Soll- und Istkraft in der Saite (oben), zugehöriges Ausgangssignal des Reglers (unten). . . . .	83
5.16	Messergebnisse für die laterale Balkenschwingung $v_B(l, t)$ und die Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite bei Verwendung des Regelgesetzes II und der Parametersätze $P^{II,1}$ und $P^{II,2}$ . . . . .	84
5.17	Messergebnisse für die laterale Balkenschwingung $v_B(l, t)$ und die Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite bei Verwendung des Regelgesetzes II und der Parametersätze $P^{II,3}$ und $P^{II,4}$ . . . . .	85
5.18	Zusammenfassung der Messergebnisse für das Regelgesetz II. Darstellung der Hüllkurven $\hat{V}_B(t)$ und $\hat{F}(t)$ der lateralen Balkenschwingung $v_B(l, t)$ bzw. der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite. . . . .	86
5.19	Messergebnisse für die laterale Balkenschwingung $v_B(l, t)$ und die Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite bei Verwendung des Regelgesetzes III und der Parametersätze $P^{III,1}$ und $P^{III,2}$ . . . . .	87
5.20	Zusammenfassung der Messergebnisse für das Regelgesetz III. Darstellung der Hüllkurven $\hat{V}_B(t)$ und $\hat{F}(t)$ der lateralen Balkenschwingung $v_B(l, t)$ bzw. der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite. . . . .	88
5.21	Zusammenfassung der Messergebnisse für die Regelgesetze I bis III. Darstellung der Hüllkurven $\hat{V}_B(t)$ und $\hat{F}(t)$ der lateralen Balkenschwingung $v_B(l, t)$ bzw. der Istkraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite. . . . .	89
5.22	Vergleich von gemessener Balkenschwingung und Istkraft in der Saite (Hüllkurven) mit den numerischen Ergebnissen für das Regelgesetz II, Parametersatz $P^{II,4}$ . . . . .	90
5.23	Vergleich von gemessener Balkenschwingung und Istkraft in der Saite (Hüllkurven) mit den numerischen Ergebnissen für das Regelgesetz III, Parametersatz $P^{III,2}$ . . . . .	91
5.24	Vergleich von gemessener Balkenschwingung und Istkraft in der Saite (Hüllkurven) mit den numerischen Ergebnissen für das Regelgesetz I, Parametersatz $P^{I,1}$ . . . . .	92
5.25	Vergleich der analytisch berechneten Sollkraft $\hat{F}_r^{II}(\hat{V}_B)$ in der Saite mit den Messergebnissen für das Regelgesetz II, Parametersatz $P^{II,4}$ . . . . .	92
6.1	Lehrsche Dämpfung $D_{11,g}$ auf Basis der gemessenen Balkenquerschwingung $v_B(l, t)$ für das Regelgesetz I und Vergleich mit dem unregelmäßigen Fall. . . . .	93
6.2	Lehrsche Dämpfung $D_{11,g}$ auf Basis der gemessenen Balkenquerschwingung $v_B(l, t)$ für das Regelgesetz II, Parametersatz $P^{II,4}$ , und Vergleich mit dem unregelmäßigen Fall. . . . .	94

---

6.3	Lehrsche Dämpfung $D_{11,g}$ auf Basis der gemessenen Balkenquerschwingung $v_B(l, t)$ für das Regelgesetz III, Parametersatz $P^{III,2}$ , und Vergleich mit dem unregelten Fall. . . . .	94
6.4	Schematische Darstellung der Wöhlerkurve. Zusammenhang zwischen der mechanischen Spannung $\sigma_a$ und der Anzahl $N$ der ertragbaren Lastwechsel, siehe [18]. . . .	95
6.5	Varianten der Wöhlerkurven zur linearen Schadensakkumulationshypothese, siehe [18].	96
6.6	Zusammenhang zwischen den Spannungsamplituden $\sigma_{a,i}$ mehrerer Teillastkollektive und der Wöhlerkurve zur Bestimmung der Bauteilschädigung. . . . .	97
6.7	Definition des Lastkollektivs durch periodische Anregung des Balkens. . . . .	97

# Tabellenverzeichnis

3.1	Definition der Parametersätze $P^{II,1}$ bis $P^{II,4}$ zum Regelgesetz <i>II</i> . . . . .	36
3.2	Definition der Parametersätze zum Regelgesetz <i>III</i> . . . . .	38
4.1	Definition der Parameter für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen	46
4.2	Anfangsbedingungen für die Simulationen . . . . .	46
4.3	Kennwerte des Gesamtsystems für die numerische Simulation . . . . .	49
4.4	Zusammenfassung der Reglerparameter für die Regelgesetze <i>I</i> bis <i>III</i> . . . . .	50
4.5	Zuordnung der Frequenzen aus der FFT-Analyse von $V_B(t)$ , $\tilde{F}(t)$ , $U_S(t)$ und $V_S(t)$ zu den Eigenfrequenzen des linearisierten Modells. Parameter der FFT: Frequenzauflösung 0.05 Hz, Nyquistfrequenz 12.5 kHz. . . . .	55
4.6	Auswertung von Abbildung 4.13. Auf die Anfangsauslenkung bezogene Amplitude der Balkenauslenkung $V_B(t)$ zu den Zeitpunkten $t = 1$ s und $t = 2$ s. . . . .	61
4.7	Auswertung von Abbildung 4.18. Die auf die Amplitude der freien Balkenschwingung bezogene Amplitude der Balkenauslenkung $V_B(t)$ zu den Zeitpunkten $t = 1$ s und $t = 2$ s. . . . .	66
5.1	Einstellungen des Laser-Wegmesssystems . . . . .	68
5.2	Einstellungen des Ladungsverstärkers des Impedanzmesskopfs . . . . .	74
5.3	Einstellungen des Ladungsverstärkers LV 1 . . . . .	74
5.4	Einige Kenndaten der Regelkarte . . . . .	76
5.5	Ergebnisse der Näherung der Hüllkurve durch eine Exponentialfunktion . . . . .	80
5.6	Frequenzen aus der FFT-Analyse der gemessenen Kraft $\tilde{F}(t)$ in der Saite. Parameter der FFT: Frequenzauflösung 0.05 Hz, Nyquistfrequenz 2 kHz. . . . .	82
5.7	Auswertung von Abbildung 5.21. Auf die Amplitude der freien Schwingung des ungeredelten Balkens bezogene Amplitude von $\hat{V}_B(t)$ zu den Zeitpunkten $t = 1$ s und $t = 2$ s. . . . .	89
6.1	Parameter der Wöhlerkurve für den verwendeten Balkenwerkstoff AlMgSi0.5 . . . . .	98
6.2	Ergebnisse einer Lebensdauerberechnung des Balkens mit/ohne Regelung . . . . .	98
6.3	Auf die Lebensdauer $Z_L^0$ des ungeredelten Balkens bezogene Anzahl der ertragbaren Teillastkollektive bis zum Bruch . . . . .	98

# Literaturverzeichnis

- [1] ABED AL-WAHAB, M.: *Neue Aktorsysteme auf Basis strukturierter Piezokeramik*. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, Deutschland, 2004.
- [2] ANUSONTI-INTHRA, P., GANDHI, F.: *Cyclic Modulation of Semi-Active Controllable Dampers for Tonal Vibration Isolation*. *Journal of Sound and Vibration*, 275:107–126, 2004.
- [3] BAILLARGEON, B.P., SENTHIL, S.V.: *Active Vibration Suppression of Sandwich Beams Using Piezoelectric Shear Actuators: Experiments and Numerical Simulations*. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16:517–530, 2005.
- [4] CHAN, K.W., LIAO, W.H., WANG, M.Y. CHOY, P.K.: *Experimental Studies for Particle Damping on a Bond Arm*. *Journal of Vibration and Control*, 12(3):297–312, 2006.
- [5] COLLET, M., WALTER, V., DELOBELLE, P.: *Active Damping of a Micro-Cantilever Piezo-Composite Beam*. *Journal of Sound and Vibration*, 260:453–476, 2003.
- [6] DATTA, J.: *Aluminium-Werkstoff-Datenblätter*. Aluminium-Verlag, Düsseldorf, Deutschland, 2001.
- [7] ECKER, H., DOHNAL, F., SPRINGER, H.: *Enhanced Damping of a Beam Structure by Parametric Excitation*. In: *Proc. of 5th ENOC - EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, August 2005.
- [8] EDERY-AZULAY, L., ABRAMOVICH, H.: *Active Damping of Piezo-Composite Beams*. *Composite Structures*, 74:458–466, 2006.
- [9] EDWARDS, R., MIYAKAWA, R.: *Large Structure Damping Task Report, Technical Report 132.22/1408*. Huges Aircraft Co., 1980.
- [10] FARD, M.P.: *Modelling and Control of Mechanical Flexible Systems*. Dissertation, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norwegen, 2001.
- [11] FARD, M.P., SAGATUN, S.I.: *Exponential Stabilization of a Transversly Vibrating Beam by Boundary Control Via Lyapunovs Direct Method*. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123:195–200, 2001.
- [12] FEIN, O., GAUL, L.: *An Adaptive Shunted Piezo Approach to Reduce Structural Vibrations*. *Proceedings Smart Structures SPIE*, 5386:393–404, 2004.
- [13] FEIN, O., GAUL, L.: *On the Application of Shunted Piezoelectric Material to Enhance Structural Damping of a Plate*. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 15:737–743, 2004.

- 
- [14] FEIN, O., GAUL, L.: *Reduction of Structural Vibrations Using Piezoelectric Materials and a Passive Electrical Network*. In: *Proc. of 13th Int. Conf. on Adaptive Structures and Technologies*, Seiten 598–606, 2004.
- [15] FORWARD, R.: *Electronic Damping of Vibrations in Optical Structures*. *Journal of Applied Optics*, 18:690–697, 1979.
- [16] GARDONIO, P., ELLIOTT, S.J.: *Modal Response of a Beam with a Sensor-Actuator Pair for the Implementation of Velocity Feedback Control*. *Journal of Sound and Vibration*, 284:1–22, 2005.
- [17] GATTI, G., BRENNAN, M.J., GARDONIO, P.: *Active Damping of a Beam Using a Physically Collocated Accelerometer and Piezoelectric Patch Actuator*. *Journal of Sound and Vibration*, 303:798–813, 2007.
- [18] GNILKE, W.: *Lebensdauerberechnung der Maschinenelemente*. VEB Verlag Technik Berlin., Berlin, Deutschland, 1982.
- [19] GÜNTHER, W.: *Schwingfestigkeit*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie., Leipzig, Deutschland, 1973.
- [20] HABIB, M.S.: *Active parametric control of beam transverse vibration*. Ph.D. Dissertation, Michigan State University, Michigan, USA, 1987.
- [21] HABIB, M.S., RADCLIFFE, C.J.: *Active parametric damping of distributed parameter beam transverse vibration*. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 113:295–299, 1991.
- [22] HAGOOD, N., VON FLOTOW, A.: *Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks*. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2):243–268, 1991.
- [23] HURLEBAUS, S., GAUL, L.: *Smart Structure Dynamics*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20:255–281, 2006.
- [24] IEEE: *IEEE Standard on Piezoelectricity*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., New York, USA, 1988.
- [25] JÖRGL, H.P.: *Repetitorium Regelungstechnik*. R. Oldenbourg Verlag Ges.m.b.H., Wien, 1995.
- [26] LACARBONARA, W., YABUNO, H., HAYASHI, K.: *Non-linear Cancellation of the Parametric Resonance in Elastic Beams: Theory and Experiment*. *Int. Journal of Solids and Structures*, 44:2209–2224, 2007.
- [27] LEIPHOLZ, H.: *Stability Theory - An Introduction to the Stability of Dynamic Systems and Rigid Bodies*. John Wiley & Sons Ltd. and B.G. Teubner, Stuttgart, Deutschland, 1987.
- [28] MCCLAMROCH, N.H., GAVIN, H.P.: *Electrorheological Dampers and Semi-Active Structural Control*. In: *Proc. of 34th Conference on Decision and Control*, Seiten 3528–3533, 1995.
- [29] MINER, M.A.: *Cumulative Damage in Fatigue*. *Journal of Applied Mechanics*, 12:159/A–164, 1945.
- [30] NAYFEH, A.H., PAI, P.F.: *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*. John Wiley and Sons Inc., New Jersey, USA, 2004.

- 
- [31] NIELSEN, A.A.: *Least Squares Adjustment: Linear and Nonlinear Weighted Regression Analysis*. IMM-DTU, Denmark, 2007.
- [32] N.N.: *ACSL-Advanced Continous Simulation Language - Reference Manual, Ed. 11.8*. Copyright © 1999 by AEGIS Technologies Group, Huntsville, AL, USA.
- [33] N.N.: *Manual Charge Amplifier Type 2635*. Copyright © Brüel & Kjaer, Naerum, Dänemark.
- [34] N.N.: *Modifizierte lineare Schadensakkumulationshypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalles mit fortschreitender Schädigung*. Technische Mitteilungen des Laboratoriums für Betriebsfestigkeit Darmstadt TM 50/70, Darmstadt, Deutschland.
- [35] N.N.: *Eigenschaften von Aluminium-Halbfabrikaten*. Copyright © Alusuisse, Zürich, Schweiz, 1989.
- [36] N.N.: *Datasheet P-842 Preloaded Piezo Actuators with Sensor Option*. Copyright © Physik-Instrumente, Karlsruhe, Deutschland, 2005.
- [37] N.N.: *MAPLE 10.0*. Copyright © Waterloo Maple Inc., 2005.
- [38] N.N.: *MATLAB 7.1*. Copyright © The MathWorks, USA, 2005.
- [39] N.N.: *MATLAB-SIMULINK 7.1*. Copyright © The MathWorks, USA, 2005.
- [40] N.N.: *Datasheet SlimLine Piezoelectric Force Sensor Type 9132B*. . Copyright © Kistler AG, Winterthur, Schweiz, 2006.
- [41] N.N.: *Manual Charge Amplifier Type 5038A*. Copyright © Kistler AG, Winterthur, Schweiz, 2006.
- [42] N.N.: *Manual Controller Board DS1104, Release 5.2*. Copyright © dSPACE GmbH, Paderborn, Deutschland, 2006.
- [43] N.N.: *Manual E-500 Series PZT Control Electronics, Release 2.14*. Copyright © Physik-Instrumente, Karlsruhe, Deutschland, 2006.
- [44] N.N.: *Manual Laser-Wegmesssensor LK-G152*. Copyright © KEYENCE GmbH, Neu-Isenburg, Deutschland, 2006.
- [45] NUDEHI, S., MUKHERJEE, R., SHAW, S.W.: *Active Vibration Control of a Flexible Beam Using a Buckling-Type End Force*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 128:278–286, 2006.
- [46] PALMGREN, A.: *Grundlagen der Wälzlagertechnik*. Frank'sche Verlagsbuchhandlung., Stuttgart, Deutschland, 1964.
- [47] PANNING, L., SEXTRO, W., POPP, K.: *Schwingungsanalyse verstimmter Schaufelkränze mit Reibelementen*. In: *Tagungsband zur fünften Konferenz Schwingungen in rotierenden Maschinen-SIRM*, Seiten 297–306, Februar 2001.
- [48] PARKUS, H.: *Mechanik der festen Körper*. Springer Verlag, Wien, Österreich, 1995.
- [49] PFEIFFER, F., HAJEK, M.: *Stick-Slip Motion Turbine Blade Dampers*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 338(1651), 1992.

- [50] PREUMONT A.: *Vibration Control of Active Structures - An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Niederlande, 1997.
- [51] RAHN, C.D., MOTE, C.D., JR.: *Parametric Control of Conservative Mechanical Systems*. In: *Proc. of ASME Winter Annual Meeting Symposium on Active Control of Noise and Vibration*, 1992.
- [52] RAHN, C.D., MOTE, C.D., JR.: *Parametric Control of Flexible Systems*. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116:379–385, 1994.
- [53] RAHN, C.D., MOTE, C.D., JR.: *Axial force stabilization of transverse vibration in pinned and clamped beams*. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 118:379–380, 1996.
- [54] SANLITURK, K.Y., EWINS, D.J., STANBRIDGE, A.B.: *Underplatform Dampers for Turbine Blades: Theoretical Modelling, Analysis and Comparison with Experimental Data*. In: *Proc. of Int. Gas Turbine and Aeroeng. Congress and Exh.*, 1999. ASME paper 99-GT-335.
- [55] SEXTRO, W., POPP, K., WOLTER, I.: *Improved Reliability of Bladed Disks Due to Friction Dampers*. In: *Proc. of Int. Gas Turbine and Aeroeng. Congress and Exh.*, 1997. ASME paper 97-GT-189.
- [56] SHAHIDI, R.: *Active Vibration Damping by Parametric Control*. Ph.D. Dissertation, University of Maryland, USA, 1994.
- [57] SONSINO, C.M.: *Course of SN-Curves Especially in the High-Cycle Fatigue Regime with Regard to Component Design and Safety*. *Int. Journal of Fatigue*, 29:2246–2258, 2007.
- [58] SPRINGER, H., KOVYRSHIN, S.: *Active parametric vibration control of a smart beam*. In: *Proc. of Eight Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery*, Seiten 703–712, September 2004. IMECHE, C623/017.
- [59] TADJBAKHSI, I.G., ANDERSON, G.L.: *Reduction of Flexural Vibrations by Damping of Axial Motions*. *Journal of Sound and Vibration*, 134(2):247–257, 1989.
- [60] TONDL, A.: *To the problem of quenching self-excited vibrations*. *Acta Technica CSAV*, 43:109–116, 1998.
- [61] WANG, K.W., KIM, Y.S., SHEA, D.B.: *Structural Vibration Control via Electrorheological-Fluid-Based Actuators with Adaptive Viscous and Frictional Damping*. *Journal of Sound and Vibration*, 177(2):227–237, 1994.
- [62] YANG, B.D., MENQ, C.H.: *Characterization of Contact Kinematics and Application to the Design of Wedge Dampers in Turbomachinery Blading, Parts I and II*. In: *Proc. of Int. Gas Turbine and Aeroeng. Congress and Exh.*, 1997. ASME paper 97-GT-19/20.

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Vorname: Thomas  
Nachname: Pumhössel  
Akademischer Grad: Dipl.-Ing.  
Geburtsdatum, Ort: 9. Dezember 1974, St. Pölten  
Staatsbürgerschaft: Österreich  
Familienstand: verheiratet mit Astrid Pumhössel, geb. Bayler  
Kinder: Johanna und Benedikt

## Ausbildung

09/1989 - 06/1994 Besuch der HTL-St. Pölten, Abteilung Maschinenbau-Automatisierungstechnik  
10/1995 - 04/2002 Studium des Maschinenbaus an der Technischen Universität Wien, Wahlfachkatalog Mechatronik  
Titel der Diplomarbeit: Untersuchung der Wirkung von Selbst- und Parametererregungen an einem Laval-Rotor  
09/2004 - 09/2008 Doktoratsstudium der technischen Wissenschaften an der Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften der Technischen Universität Wien

## Berufliche Laufbahn

07/2002 - 08/2004 Beschäftigt bei Voith-Siemens Hydro Power Generation GmbH & Co KG, St. Pölten, Abteilung Turbinenkonstruktion  
09/2004 - 08/2008 Universitätsassistent am Institut für Mechanik und Mechatronik der Technischen Universität Wien, Abteilung Maschinendynamik