

Masterarbeit (Master thesis) : Vergleich von drei
Modellen zur Berechnung der durch Schwinden
verursachten primären Spannungen in
Verbundbalken

Benjamin PICARD

5. Juni 2008

Eingerichtet an der TU Wien
Fakultät für Bauwesen
Institut von Tragkonstruktionen/Stahlbau E 212
Vorsitzende: Univ.Pr.Dipl.-Ing.Dr.techn. Fink
Betreuer: Ao.Univ.Pr.Dipl.-Ing.Dr.techn. Aigner
Verfasser : Benjamin PICARD, 0626808, 4 rue des mesanges 90850
ESSERT, FRANKREICH



Stahlbau | Institut für Tragkonstruktionen
Institute for Steel Structures

Zur Erlangung des akademischen Grades
DIPLOM-INGENIEUR

Ich möchte mich ganz herzlich bei meinem Betreuer bedanken, der sich sehr viel Zeit genommen hat, um mir in dieser Arbeit zu helfen, und bei Pr. Fink, der mir dieses Thema vorgeschlagen hat. Ich möchte auch Herrn Kuss und Herrn Mähr für ihre Hilfe bei der Verwendung der Software Sofistik danken.

Zusammenfassung

In diesem Bericht werden Möglichkeiten gezeigt, die primären Spannungen infolge Schwindens in Stahl-Stahlbetonverbundbalken mit breiten Gurten einfach und zuverlässig abzuschätzen. Insbesondere wird ein üblicherweise verwendetes Ingenieurmodell in der Art angepasst, dass die mit diesem Modell berechneten Spannungen den Ergebnissen einer FEM Berechnung entsprechen. Basierend auf einer Diplomarbeit (2007), bei der dieses Problem nach der Scheibentheorie gelöst wird, wird für das Ingenieurmodell eine effektive Breite des Betongurtes so ermittelt,

1. dass mit dem Ingenieurmodell die gleichen Spannungen im Stahlträger erhalten werden wie nach der Scheibentheorie
2. dass mit dem Ingenieurmodell die gleiche maximale Spannung in der Mittellinie des Betongurtes oberhalb des Stahlträgersteges erhalten wird wie nach der Scheibentheorie
3. dass mit dem Ingenieurmodell die gleiche Betongurtkraft erhalten wird wie nach der Scheibentheorie

Anschließend werden für einige Grenzfälle die Ergebnisse dieser Anpassung mit den Ergebnissen einer FEM Berechnung verglichen. Die Abweichung der Spannungen wird in Abhängigkeit der Dicke des Betongurtes untersucht. Es wird gezeigt, dass eine Anpassung mit einer vereinfachten Berücksichtigung der Biegesteifigkeit der Betonplatte im allgemeinen zulässig ist.

Abstract

In this report it is about the easy and trustful calculation of primary stresses due to shrinkage of concrete in steel-reinforced concrete composite beams with wide concrete plates. More precisely, an common used engineer modell has to be adapted to make his results correspond to the results of an finite-elements calculation. Based on an master thesis dealing with the problem with the sheets theory, an effective width of the concrete plate is to be constructed so that:

1. the same stresses in the steel profile
2. the same stress in the middle line of the concrete plate on the axe of symetry of the section
3. the same force in the concrete plate

as in the modell founded on the sheet theory are obtained with the engineer modell. Then the findings are compared with those of a finite-element calculation in some extreme cases. The difference in the stresses is analysed as a function of the thckness of the concrete plate. An adaptation with a simplified consideration of the bending stiffness of the concrete plate is shown to be trustful.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Einleitung | 6 |
| Aufgabestellung | 6 |
| Voraussetzung und Annahmen | 6 |
| 1 Beschreibung des Ingenieurmodells | 8 |
| 2 Beschreibung des Modells nach der Scheibentheorie (Airysche Spannungsfunktion) | 10 |
| 2.1 Annahmen | 10 |
| 2.2 Formelmäßige Zusammenhänge [1], [2] | 10 |
| 2.3 Ergebnisse | 11 |
| 2.4 Zahlenbeispiel | 12 |
| 3 Beschreibung des Modells nach der Finite Elemente Methode | 15 |
| 4 Anpassung des Ingenieurmodells anhand der Ergebnisse nach der Scheibentheorie | 18 |
| 4.1 Berechnung einer effektiven Breite für gegebene Gurtnormalkraft und Gurtnormalspannungen | 18 |
| 4.1.1 Herleitung der effektiven Breite | 18 |
| 4.1.2 Beispiel | 19 |
| 4.2 Ermittlung der effektiven Breite durch Gleichsetzen der maximalen Spannung in der Mittelebene des Betongurtes | 20 |
| 4.2.1 Herleitung der effektiven Breite | 20 |
| 4.2.2 Beispiel | 22 |
| 4.3 Ermittlung der effektiven Breite durch Gleichsetzen der Krümmung . | 23 |
| 4.3.1 Herleitung der effektiven Breite | 23 |
| 4.3.2 Beispiel | 24 |
| 4.4 Ermittlung der effektiven Breite durch Gleichsetzen der Betongurtkraft | 26 |
| 4.5 Gleichsetzen der maximalen Betonspannung und der Krümmung . . . | 26 |
| 4.5.1 Herleitung der effektiven Breite | 26 |
| 4.5.2 Beispiel | 27 |
| 4.6 Ermittlung der effektiven Breite durch Gleichsetzung der maximalen Betonspannung in der Mittelebene des Betongurtes und der Krümmung | 29 |
| 4.6.1 Herleitung der effektiven Breite | 29 |
| 4.6.2 Beispiel | 29 |
| 4.7 Vergleich der angepassten Ingenieurmodelle | 31 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Vergleich der Ergebnisse | 33 |
| 5.1 | Definitionen der Grenzfälle | 33 |
| 5.2 | Beispiel 1: “Kurzer” Balken mit “dickem” Betongurt | 34 |
| 5.3 | Beispiel 2: “Langer” Balken mit “dünnem” Betongurt | 35 |
| 5.4 | Beispiel 3: “Kurzer” Balken mit “dünnem” Betongurt | 36 |
| 5.5 | Einfluss der Betondicke auf die Genauigkeit der Ergebnisse | 36 |
| 6 | Störbereiche und Regelbereich | 39 |
| 7 | Modell nach der Plattentheorie | 43 |

Verwendete Variablen

Indices

- a: bezieht sich auf den Stahlträger
- c: bezieht sich auf den Beton
- eff: effektive Größe (im Ingenieurmodell)
- i: ideale Größe (bezieht sich auf den fiktiven äquivalenten Stahlquerschnitt im Ingenieurmodell)
- o: bezieht sich auf die obere Faser
- S: bezieht sich auf den Lastfall Schwinden
- u: bezieht sich auf die untere Faser

Andere Symbole

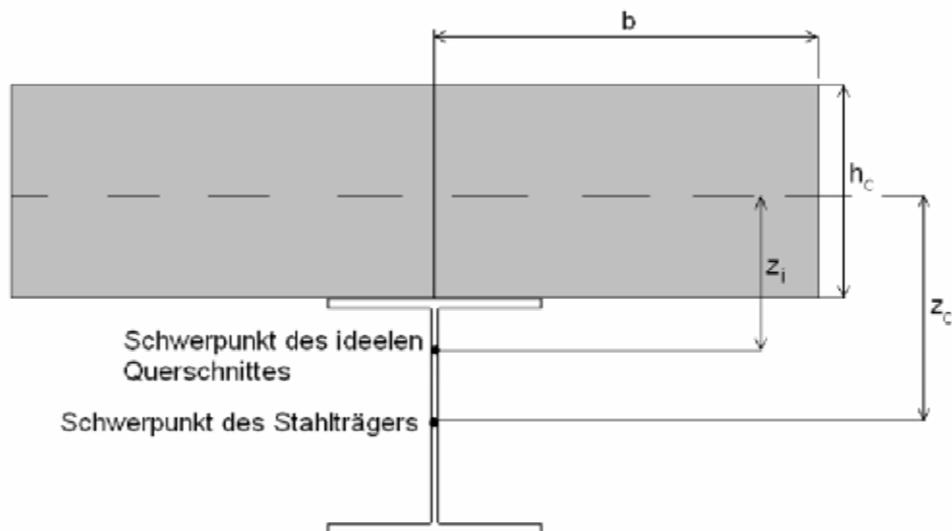


Abbildung 1: Graphische Darstellung zur Definition von Variablen

- $a = \frac{1-\nu}{1+\nu}$: (ν siehe unten)
- A: Fläche

- $A_{c,S}$: äquivalente Stahlfläche des Betongurtes
- b : Halbe Breite der Betonplatte
- $B_m, F_m, G_m, H_m, J_m, K_m$: im Kapitel 2 definierte Hilfswerte
- h_c : Dicke der Betonplatte
- I : Trägheitsmoment
- $K = \frac{Eh_c^3}{12(1-\nu^2)}$: Biegesteifigkeit der Betonplatte
- L : Länge des Verbundbalkens
- m : ganze Zahl (Fourierreihen)
- $m_{xx} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xx} z dz$: Biegemoment in der Platte
- M : Moment
- $n = \frac{E_a}{E_c}$: Verhältnis des E-Moduls von Stahl zu E-Modul von Beton
- N : Normalkraft
- $\bar{N}_c = \frac{nN_c}{2h_c\epsilon_s E_a L}$: bezogene Betongurtkraft
- w : Durchbiegung der Betonplatte
- z_c : Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Stahlträgers und der Schwerlinie der Betonplatte (Betrag, siehe Abb.1)
- z_i : Abstand zwischen dem Schwerpunkt des idocllen Querschnittes und der Schwerlinie der Betonplatte (Betrag, siehe Abb.1)
- α_T : Temperatureausdehnungskoeffizient des Betons
- ϵ_s : Stauchung des Betons infolge Schwindens
- κ : Krümmung des Querschnittes
- $\kappa_m = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} \kappa(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$: Fourierkoeffizient der Krümmung
- ν : Poissonsche Zahl des Betons
- $\eta = \frac{A_{c,S,eff}}{A_a} = \frac{\Theta}{1-\Theta}$: bezogene äquivalente Fläche des Betongurtes
- $\theta_1 = \frac{I_a}{A_a z_c^2}$: dimensionsloser Hilfswert
- $\theta_2 = \frac{h_c^2}{12z_c^2}$: dimensionsloser Hilfswert, generell vernachlässigt
- $\theta_3 = 1 - \bar{\sigma}_c$: dimensionsloser Hilfswert
- $\theta_4 = \frac{nI_a}{2h_c L \bar{N}_c z_c^2}$: dimensionsloser Hilfswert
- $\Theta = \frac{\eta}{\eta+1} = \frac{A_{c,S,eff}}{A_{c,S,eff} + A_a} = \frac{A_{c,S,eff}}{A_{i,S,eff}}$: bezogene äquivalente Fläche des Betongurtes
- σ : Spannung

- $\sigma_{c,max}$: maximale Spannung in der Mittelebene des Betongurtes
- $\bar{\sigma}_c = \frac{\sigma_c}{E_s \epsilon_s}$: bezogene Betonspannung
- $\zeta = \frac{I_{a,eff}}{A_u z_c^2}$: bezogenes Trägheitsmoment

Einleitung

Aufgabenstellung

Für beliebige geometrische Verhältnisse ($b, A_a, I_a, h_c \dots$) sollen die primären Normalspannungen infolge Schwindens und Temperaturänderung in der Feldmitte des Verbundbalkens durch ein einfaches Ingenieurmodell mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden. Dafür wird das im Kapitel 1 angegebene Ingenieurmodell so angepaßt, dass die Ergebnisse mit jenen aus anderen, komplexeren Modellen übereinstimmen.

Bedingungen an das Ingenieurmodell, damit es als 'wirklichkeitsnah' betrachtet werden kann:

Das Ingenieurmodell wird als befriedigend angesehen, wenn gegenüber der 'exakten' Lösung:

- dieselbe maximale Normalspannung in der Schwerlinie der Betonplatte erhalten wird
- dieselbe Gurtkraft erhalten wird
- dieselbe Krümmung erhalten wird
- dieselbe Verzerrung im Stahlträger erhalten wird.

Voraussetzungen und Annahmen

Voraussetzungen:

- Alle Materialien sind hier isotrop linear elastisch angenommen. Diese Annahme passt besonders gut zum Material Stahl im elastischen Bereich. Sie ist leider weniger wirklichkeitsnah für den Beton. Sie ist jedoch oft getroffen, um einfache analytische Lösungen erhalten zu können.
- Der Querschnitt bleibt insgesamt eben (Bernoulli Hypothese). Die Schubverbindung zwischen dem Betongurt und dem Stahlträger ist als starr angenommen.

Weitere Annahmen:

- Die Betonplatte kann nur selten als schmal angenommen werden. Daher sind die Schubverzerrungen in der Platte nicht mehr vernachlässigbar. Es folgt, dass die Spannungen in der Breitenrichtung nicht konstant sind, d.h. es ist eine effektive Breite der Betonplatte zu definieren, deren konstant angenommene Normalspannung der maximalen Spannung entspricht.
- Wird der Betongurt als Scheibe angenommen, werden nur Membranspannungen erhalten (das heißt keine Biegespannungen). Die Randspannungen können extrapoliert werden, indem man das Ebenbleiben des gesamten Querschnittes berücksichtigt und besonders indem man die Krümmung der Platte mit jener des Stahlträgers gleichsetzt (Bernoulli-Hypothese).
- Das Modell nach der Scheibentheorie vernachlässigt die Biegesteifigkeit der Betonplatte. Im Ingenieurmodell wird dieselbe Annahme getroffen, so dass die Gleichungen problemlos lösbar sind. Bei Verbundquerschnitten mit 'dicker' Betonplatte und 'kleinem' Stahlträger ist diese Annahme nicht zutreffend. Eine Möglichkeit, diese Ungenauigkeit ohne großen Aufwand zu mildern, ist, die Biegesteifigkeit der Betonplatte zu jener des Stahlträgers zu addieren.

Das Schwinden selbst wird in allen Modellen als 'Abkühlung' des Betongurtes um $\Delta T = \frac{\epsilon_s}{\alpha_T}$ betrachtet, wobei Kriecheffekte durch die Wahl einer geeigneten n-Ziffer (n_S) berücksichtigt werden.

Folgende Modelle werden in diesem Bericht vorgestellt und verglichen:

- das bekannte Ingenieurmodell (siehe z.B. [3]) mit Anpassungen zur Berücksichtigung der Breite des Betongurtes: einfachste Berechnungsmöglichkeit. Dabei werden über die ganze Trägerslänge konstante Normalkraft und konstantes Moment erhalten, das heißt es entstehen (außer punktuell an den Trägerenden) keine Schubkräfte. Die Normalspannungen sind über die Breite konstant. Die Anpassungen zur Berücksichtigung der Breite des Betongurtes beruhen auf den Ergebnissen des Modells nach der Scheibentheorie (siehe unten).
- ein Modell nach der Scheibentheorie [1], [2] (mit einer Ergänzung nach der Plattentheorie): Dabei werden die Airysche Spannungsfunktion und die Schwindverzerrung in Fourier-Reihen zerlegt. Deshalb muss die Berechnung programmiert werden, da eine Taschenrechnerberechnung ausgeschlossen ist. Dabei entsteht ein Berechnungsaufwand, der nur mittels EDV zu bewältigen ist. Das Modell liefert keinen Verlauf der Normalspannungen über die Dicke des Betongurtes aber über die Breite und liefert auch die Schubspannungen in der Fuge.
- ein FEM-Modell: Das ist das zuverlässigste Modell. Jedoch ist eine FEM Software notwendig, um eine solche Berechnung durchzuführen. Hier werden alle Ergebnisse erhalten. Allerdings jeweils für einen Fall (Querschnittabmessungen, Balkenabmessungen, Materialeigenschaften). Insbesondere werden alle Normal- und Schubspannungen erhalten. Sie können integriert werden, um die Normalkraft, das Moment und die Schubkraft zu berechnen.

Kapitel 1

Beschreibung des Ingenieurmodells

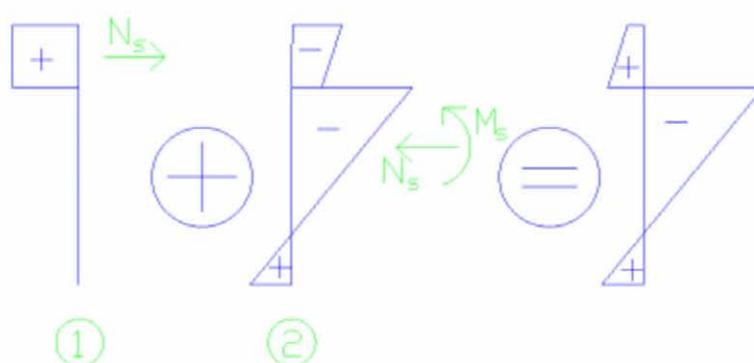


Abbildung 1.1: Berechnung der Normalspannungen mit dem Ingenieurmodell

Im üblicherweise verwendeten Ingenieurmodell wird das Schwinden in zwei Stufen betrachtet (siehe [3] Seite 4.5/27):

1. Wäre der Betongurt vom Stahlträger gelöst, würde sich die der Betongurt pro Längeneinheit um ϵ_s verkürzen. In der Berührungsfläche darf jedoch beim starrem Verbund keine gegenseitige Verschiebung auftreten. Diese Verträglichkeitsbedingung ist erfüllt, wenn die Schwindverzerrung der Platte durch eine im Schwerpunkt der Platte wirkende Zugkraft N_S vollständig behindert ist. Das heißt: $N_S = \frac{E_a}{n} \epsilon_s A_c$.
2. In Wirklichkeit sind keine äußeren Kräfte vorhanden, so dass sowohl die Auflagerkräfte des Systems als auch die Resultierende in jedem Schnitt verschwinden müssen (Eigenspannungszustand). Dem ganzen Querschnitt wird die Normaldruckkraft $-N_S$ zugeordnet und ein Moment M_S , damit keine Schnittgröße entsteht. Das heißt: $M_S = N_S z_i$.

Daher sind die Normalspannungen auf die Länge konstant, das heißt, bei diesem Modell werden keine Schubspannung infolge Schwindens mit diesem Modell erhalten. (Es wird angenommen, dass die Betongurtkraft punktuell an den Trägerenden eingeleitet wird.)

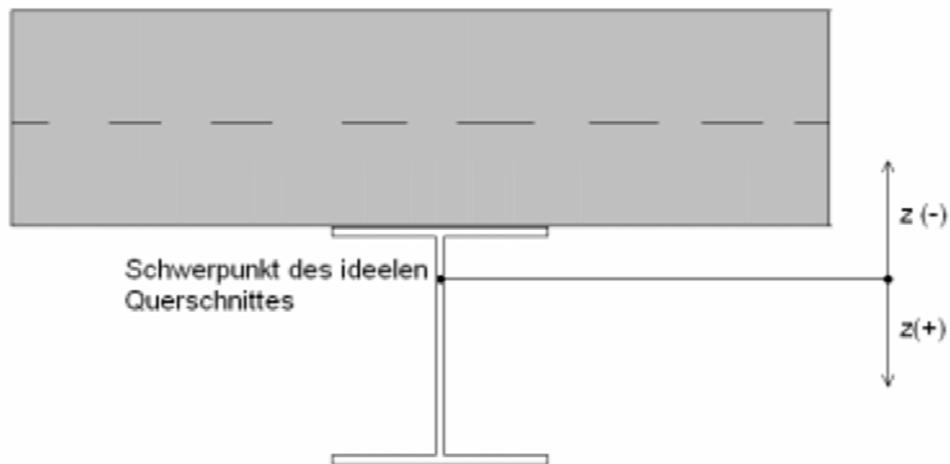


Abbildung 1.2: Vorzeichen der Koordinaten

Die Normalspannungen sind mit den folgenden Formeln zu berechnen :

$$\sigma_c = \frac{N_S}{A_c} - \frac{N_S}{n_S A_i} + \frac{M_S z}{n_S I_i} \quad (1.1)$$

$$\sigma_a = -\frac{N_S}{A_i} + \frac{M_S z}{I_i} \quad (1.2)$$

Bemerkung:

- Der Lastfall Schwinden ist ein Eigenspannungszustand. Das bedeutet, dass die resultierenden Schnittgrößen Null sind:

$$N = \int_{(c)} \sigma dA + \int_{(a)} \sigma dA = 0 \quad (1.3)$$

d.h.

$$N_c + N_a = 0 \quad (1.4)$$

und

$$M = \int_{(a+c)} \sigma \cdot z dA = 0 \quad (1.5)$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen können als Kontrolle dienen.

Kapitel 2

Beschreibung des Modells nach der Scheibentheorie (Airysche Spannungsfunktion)

2.1 Annahmen

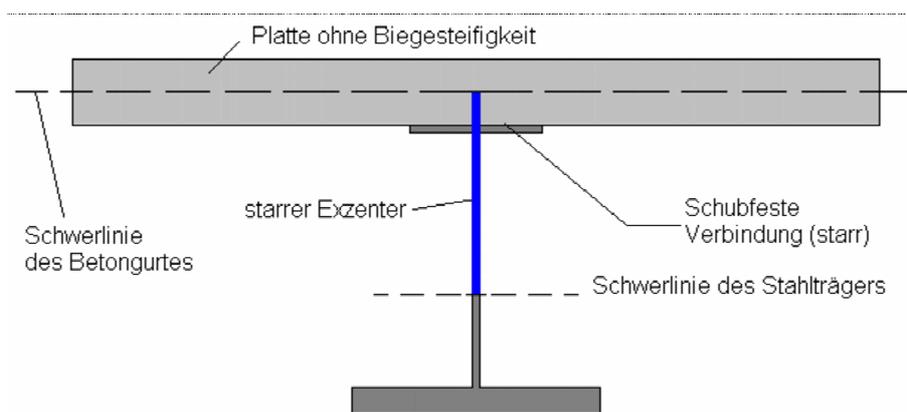


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung der Annahmen des Modells nach der Scheibentheorie

Für dieses Modell wird auf [2] verwiesen. Das Stahlprofil wird als Balken betrachtet, der durch die schubfeste Verbindung mit der Betonscheibe starr verbunden ist. Diese als starr angenommene Verbindung wird in der Schwerlinie der Betonplatte angenommen. Jede der beiden Hälften der Betonplatte wird als eine Scheibe betrachtet, das heißt ohne Biegesteifigkeit. Die Betonplatte ist durch die eingeprägte Stauchung ϵ_s beansprucht.

2.2 Formelmäßige Zusammenhänge [1], [2]

Die nächsten Formeln ermöglichen, die Werte \bar{N}_c und $\bar{\sigma}_c$ in der Feldmitte zu berechnen. m ist hier die laufende Nummer der Fourier-Glieder (ganze Zahlen) und ν die Poissonsche Zahl des Betons.

$$a = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \quad (2.1)$$

$$B_m = \frac{a(\exp(-2\frac{m\pi}{L})) + 2\frac{m\pi}{L}(\frac{m\pi}{L} - a)}{a(\exp(2\frac{m\pi}{L})) + 2\frac{m\pi}{L}(\frac{m\pi}{L} - a)} \quad (2.2)$$

$$F_m = \frac{\exp(2\frac{m\pi}{L}) + 1 + 2(\frac{m\pi}{L} + a)}{a(\exp(2\frac{m\pi}{L})) + 2\frac{m\pi}{L}(\frac{m\pi}{L} - a)} \quad (2.3)$$

$$G_m = \frac{\exp(-2\frac{m\pi}{L}) + 1 + 2(\frac{m\pi}{L} + a)}{a(\exp(2\frac{m\pi}{L})) + 2\frac{m\pi}{L}(\frac{m\pi}{L} - a)} \quad (2.4)$$

$$J_m = \frac{2h_c L(z_c^2 + \frac{I_a}{A_a})}{I_a n} m^2 \frac{\pi^2}{4} (B_m - 1 + F_m + G_m) \quad (2.5)$$

$$K_m = \frac{1}{2} m^3 \pi^3 \left[\frac{1 + \nu}{2} (B_m + 1) - F_m + G_m \right] \quad (2.6)$$

$$H_m = \frac{1}{J_m - K_m} \quad (2.7)$$

$$\bar{\sigma}_c = \sum_m H_m m^2 \pi^2 (1 + B_m - 2F_m + 2G_m) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad (2.8)$$

$$\bar{N}_c = \sum_m H_m m \pi (1 - B_m - F_m - G_m) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad (2.9)$$

$$\sigma_{c, \text{Mitte}, \text{max}} = \bar{\sigma}_c \frac{E_a \epsilon_S}{n} \quad (2.10)$$

$$N_c = \bar{N}_c \frac{2h_c \epsilon_S E_a L}{n} \quad (2.11)$$

2.3 Ergebnisse

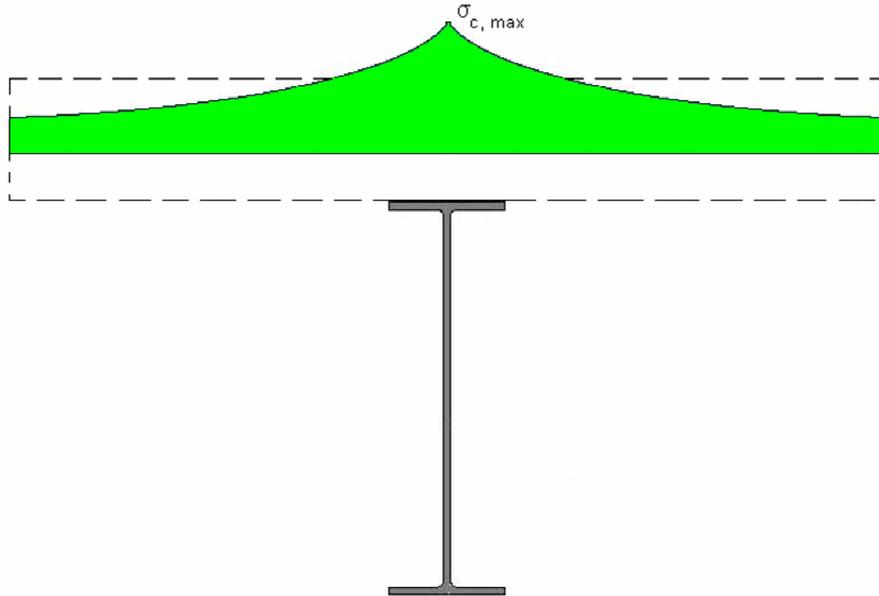


Abbildung 2.2: Verlauf der Membranspannungen in der Mittelebene des Betongurtes

Das Modell liefert:

- die Normalspannungen im Beton in der Längs- und Querrichtung. Für den als Scheibe betrachteten Betongurt erhält nur Membranspannungen (d.h. keine Momente bzw. Biegespannungen in der Betonplatte wegen der vernachlässigten Biegesteifigkeit der Betonplatte) \Rightarrow die Betongurtkraft ergibt sich als Integral der Normalspannungen in der Scheibe.
- den Verlauf des Momentes über die Balkenlänge.

Daraus ergeben sich die Normalspannungen im Stahlträger, dieser wird durch die Kraft $N_a = -N_c$ beansprucht. Diese Kraft wirkt auf dem Stahlträger mit der Exzentrizität z_c .

Um die Werte nicht jedes Mal mit den Fourier-Reihen berechnen zu müssen, ist in [2] eine Tabelle angegeben. Eingabewerte sind die Verhältniswerte $\frac{b}{L}$ und $\frac{2h_c L(z_c^2 + \frac{I_a}{A_a})}{I_a n}$. Die Tabelle enthält unter anderem die Größen $\bar{\sigma}_c$, bezogene maximale Spannung in der Mittelebene des Betongurtes (TW3 in [2]) und \bar{N}_c , bezogene Betongurtkraft (TW6 in [2]). Das genügt, die maximale Normalspannung in der Betonplatte und den Normalspannungsverlauf im Stahlträger zu berechnen.

2.4 Zahlenbeispiel

Das Beispiel dient den Vergleich der Lösung der adaptierten Ingenieurmodelle (siehe Kapitel 3) mit jener nach der Scheibentheorie. Zur einfachen Berechnung wurde ein Walzprofil gewählt. Hinweis:

- Da das Profil doppelsymmetrisch ist, beträgt die Normalkraft im Stahl $N_a = A_a \frac{\sigma_{a,o} + \sigma_{a,u}}{2}$.
- In der Praxis werden meistens geschweißte Profile benutzt (der Obergurt des Profils ist meist viel kleiner als der Untergurt)

Der E-Modul des Betons beträgt $E_c = 3500 \frac{kN}{cm^2}$, das heißt $n = 6,0$. Der Stahlträger ist ein IPE 750x147. $A_a = 188cm^2$, $I_a = 166100cm^4$, $h_c = 75,3cm$, $z_c = 50,15cm$, $|W_a| = 4411,7cm^3$.

Gesucht seien die Normalspannungen infolge der Abkühlung ($\epsilon_s = 6 \cdot 10^{-4}$) in der Feldmitte.

Die Eingangsparameter in die Tabelle von [2] betragen:

- $\frac{b}{L} = 0,333$
- $\frac{2h_c L(z_c^2 + \frac{I_a}{A_a})}{I_a n} = 51,2$.

Die Tabelle liefert:

- $\bar{\sigma}_c = 0,070$
- $\bar{N}_c = 0,0185$.

Daraus ergibt sich:

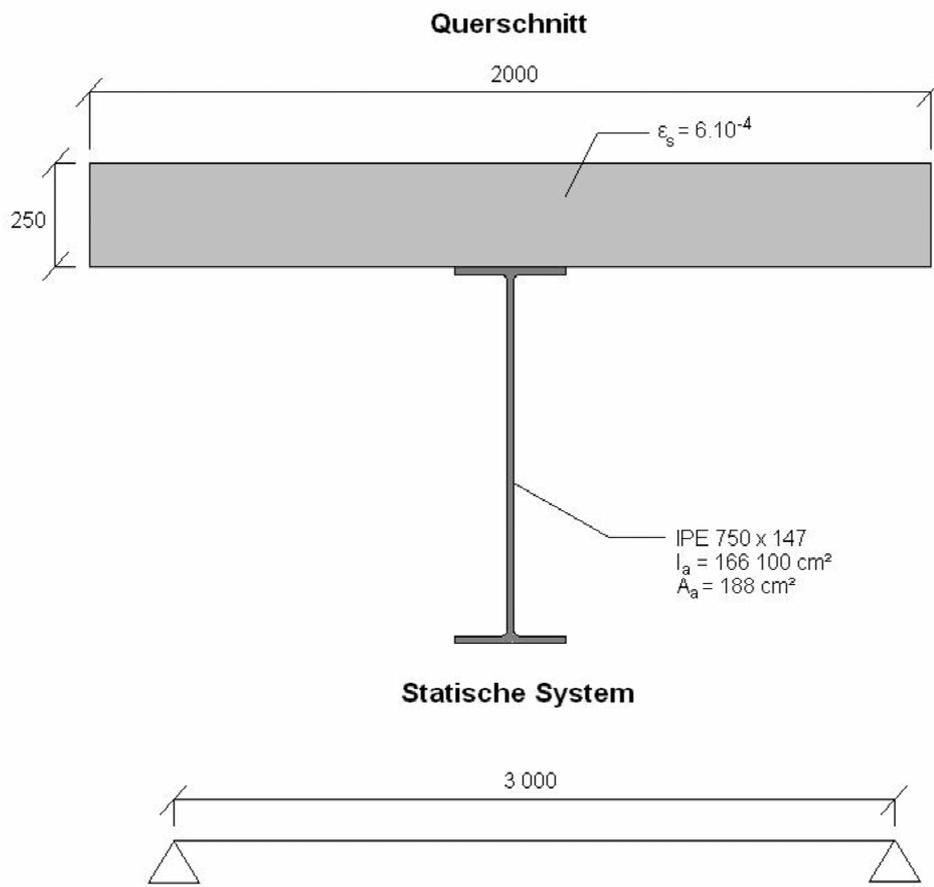


Abbildung 2.3: Verbundquerschnitt des Beispiels und statische System

- $\sigma_{c,max} = \frac{F_s \epsilon_s}{n} \bar{\sigma}_c = 0,147 \frac{kN}{cm^2}$
- $N_c = \frac{2h_c E_s \epsilon_s L}{n} \bar{N}_c = 582,8 kN$.

Der Stahlträger wird durch die Druckkraft $N_a = -N_c = -582,8 kN$ und das Moment $M_a = N_c z_c = 582,8 kN \cdot 50,15 cm = 29224,9 kN \cdot cm$ beansprucht. Die Normalspannungen im Stahlträger betragen also:

- $\sigma_{a,o} = \frac{-582,9}{188} + \frac{29224,9}{-4411,7} = -9,72 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = \frac{-582,9}{188} + \frac{29224,9}{4411,7} = 3,52 \frac{kN}{cm^2}$.

Die Randspannungen im Beton können dann näherungsweise extrapoliert werden. Die Ergebnisse sind auf der sicheren Seite, da entsprechend dem Modell nach [1] die Biegesteifigkeit der Betonplatte vernachlässigt wurde (Betongurt als Scheibe behandelt). Das Ebenbleiben des Querschnittes impliziert dieselbe Krümmung im Beton wie im Stahl. Es folgt: $\Delta\sigma_c = \frac{0,5h_c}{h_a} \frac{-\sigma_{a,o} + \sigma_{a,u}}{n} = 0,368 \frac{kN}{cm^2}$. Infolgedessen:

- $\sigma_{c,o} = \sigma_{c,max} - \Delta\sigma_c = -0,221 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = \sigma_{c,max} + \Delta\sigma_c = 0,515 \frac{kN}{cm^2}$.

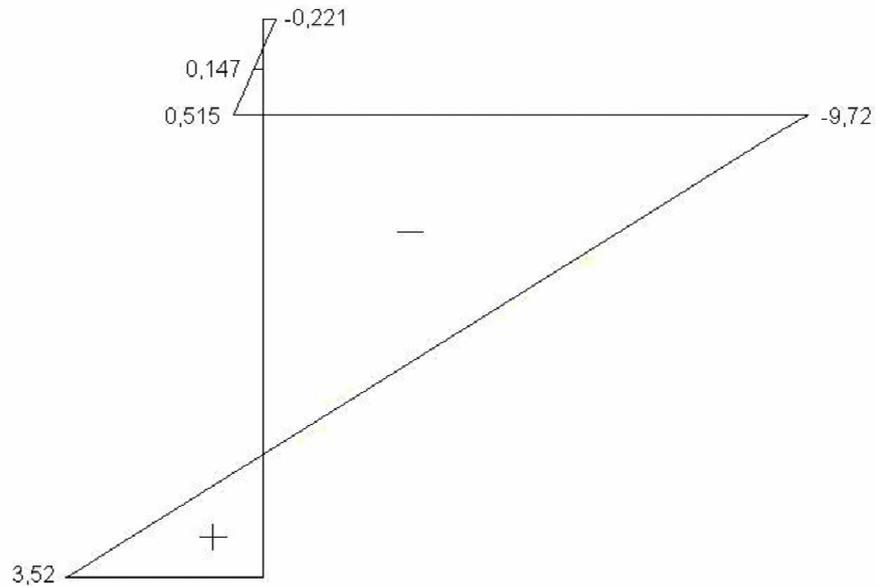


Abbildung 2.4: Graphische Darstellung der mit dem Modell nach der Scheibentheorie berechneten Spannungen in Feldmitte in der Symetrieachse des Querschnittes (maximale Bctonspannungen, siehe Abbildung 2.2) (Einheit: $\frac{kN}{cm^2}$)

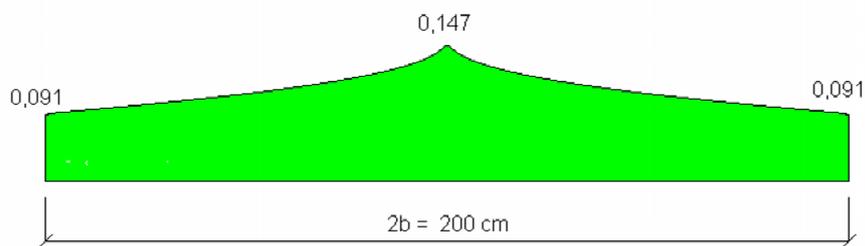


Abbildung 2.5: Graphische Darstellung der mit dem Modell nach der Scheibentheorie berechneten Spannungen in Feldmitte in der Ebene des Betongurtes (siehe Abbildung 2.2) (Einheit: $\frac{kN}{cm^2}$)

Kapitel 3

Beschreibung des Modells nach der Finite Elemente Methode

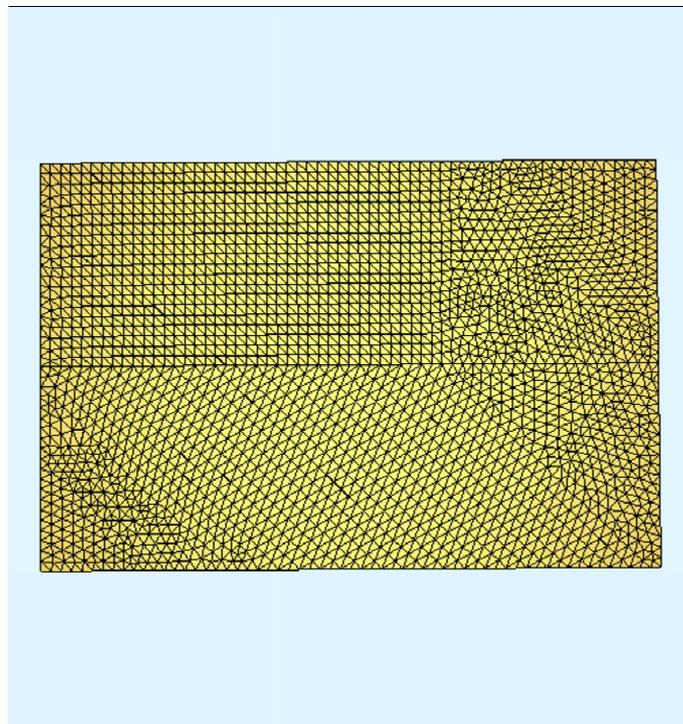


Abbildung 3.1: Die Betonplatte von oben aus und und das FE-Netz

Die Modellierung ist mit der Software Sofistik 23 implementiert worden. Der Stahlträger wurde als Stab eingegeben und der Betongurt als Platte aus Beton C 40/50 (mit $\frac{E_a}{E_c} = 6$, $\alpha_T = 10^{-4}$). Das Schwinden wurde durch eine Abkühlung um 60 K des Betongurtes modelliert.

Der Vergleich mit den anderen Modellen wird im Kapitel 4.7 durchgeführt. Im Kapitel 5 wird erklärt, wie die Biegesteifigkeit der Betonplatte im Modell nach der Scheibentheorie näherungsweise berücksichtigt werden kann.

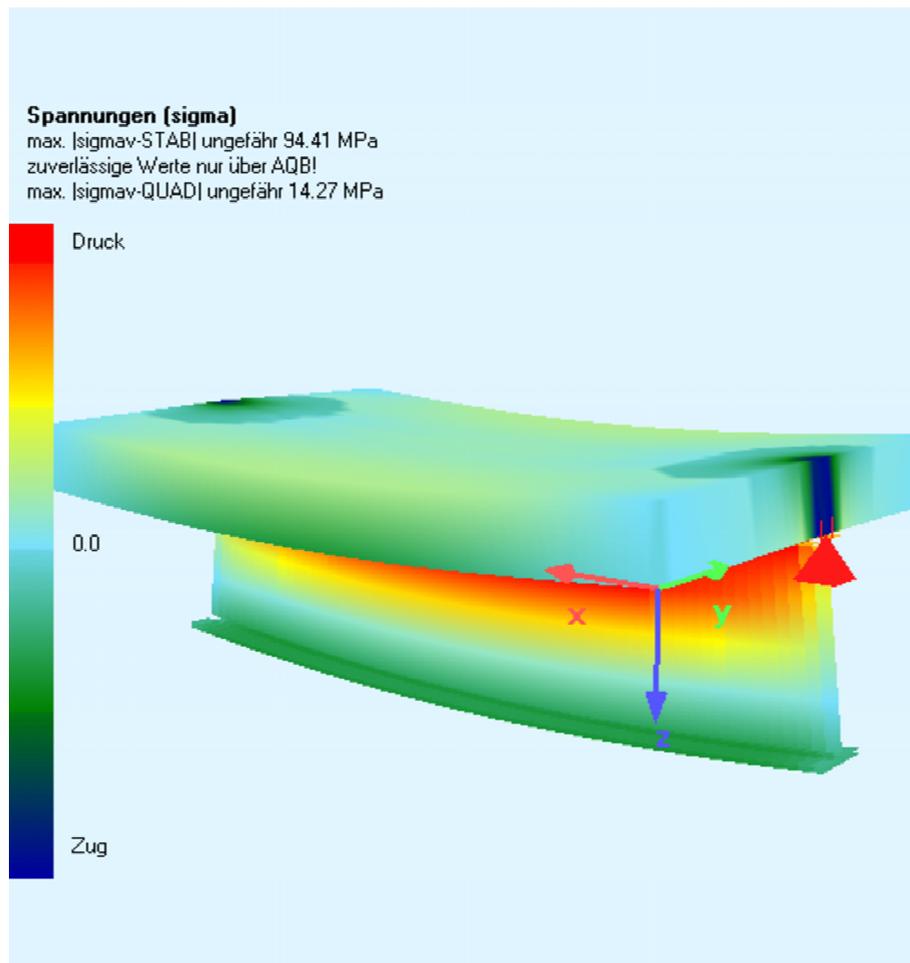


Abbildung 3.2: Ergebnisse der FEM Modellierung: Durchbiegung und Normalspannung

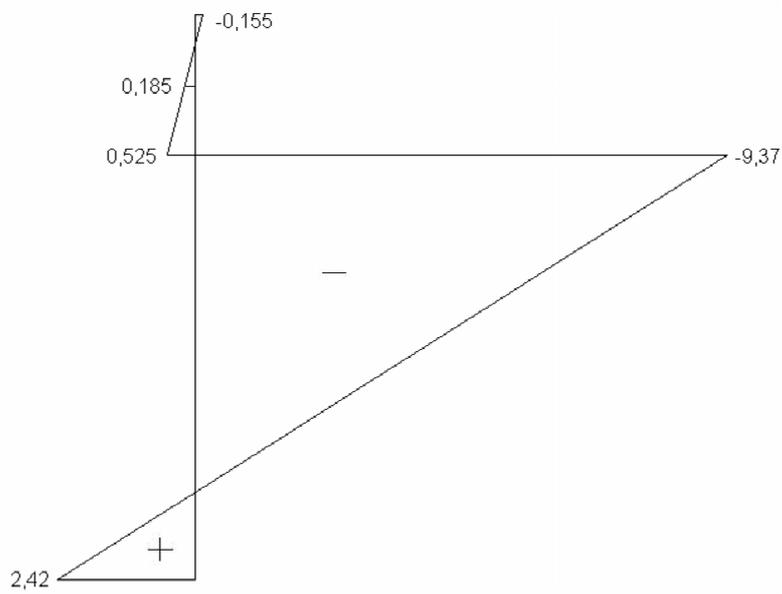


Abbildung 3.3: Graphische Darstellung der mit dem Modell nach der FEM berechneten Spannungen in der Feldmitte (Einheit: $\frac{kN}{cm^2}$)

Kapitel 4

Anpassung des Ingenieurmodells anhand der Ergebnisse nach der Scheibentheorie

Grundsätzliche Modellbildung siehe Kapitel 1. Es lässt sich durch die Einführung von einer effektiven Breite auch für breite Gurte verbreitern. In allen Anpassungen ist die Biegesteifigkeit vernachlässigt. Möglichkeit, diese Biegesteifigkeit näherungsweise zu berücksichtigen, siehe Kapitel 5. Das übliche Ingenieurmodell gilt für schmale Betongurte. Würden die Spannungen mit dem Ingenieurmodell mit der wirklichen Breite des Betongurtes berechnet, würden die maximale Betonspannungen in der Mittelebene des Betongurtes im Beispiel um 20 % unterschätzt. Die effektive Breite für die Biegung (siehe EC 3-1-5) zu übernehmen ist auch keine befriedigende Lösung, da die Spannungen im Stahl im Beispiel unterschätzt werden und die Spannungen im Beton um 30 % überschätzt sind. Eine effektive Breite für Schwinden ist notwendig, um die Spannungen richtig berechnen zu können.

4.1 Berechnung einer effektiven Breite für gegebene Gurtnormalkraft und Gurtnormalspannungen

4.1.1 Herleitung der effektiven Breite

Zuerst berechnen wir b_{eff} , angenommen das Ingenieurmodell liefert dieselbe maximale Spannung in der Mittelebene des Betongurtes und dieselbe Gurtkraft wie das Modell nach der Scheibentheorie. Direkt kann man schreiben:

$$2b_{eff} = \frac{N_c}{\sigma_{c,max}h_c} \quad (4.1)$$

Das für die Berechnung mit dem Ingenieurmodell betrachtete System unterscheidet sich von jenem des Kapitels 2 durch die Breite des Betongurtes, die hier $2 \cdot b_{eff}$ beträgt. Nach der Berechnung ist die Annahme zu prüfen, das heißt, die maximale Spannung in der Mittelebene des Betongurtes und die Betongurtkraft mit jenen nach der Scheibentheorie sind zu vergleichen.

4.1.2 Beispiel

Es wurden die gleichen Abmessungen wie im Beispiel des Kapitels 2 gewählt.
Querschnittswerte:

- $2b_{eff} = \frac{582,8}{0,147,25} = 158,6cm$
- $A_c = 158,6 \cdot 25 = 3965cm^2$
- $A_{c,s} = \frac{3965}{6} = 660,8cm^2$
- $A_i = 188 + 660,8 = 848,8cm^2$
- $z_i = 50,15 \cdot \frac{188}{848,8} = 11,11cm$
- $I_i = A_a z_c^2 \frac{A_{c,s}}{A_i} + I_a = 534200cm^4$
- $W_{c,o} = \frac{534200}{-23,61} = -22626cm^3$
- $W_{c,u} = W_{a,o} = \frac{534200}{1,39} = 384316cm^3$
- $W_{a,u} = \frac{534200}{76,7} = 6965cm^3$

Die Schwindkraft beträgt: $N_S = \frac{21000 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{6} \cdot 3965 = 8326,5kN$. Das resultierende auf dem ideellen Querschnitt wirkende Moment beträgt also: $M_S = 8326,5 \cdot 11,11 = 92507kN \cdot cm$.

Daraus ergeben sich die Normalspannungen im Querschnitt:

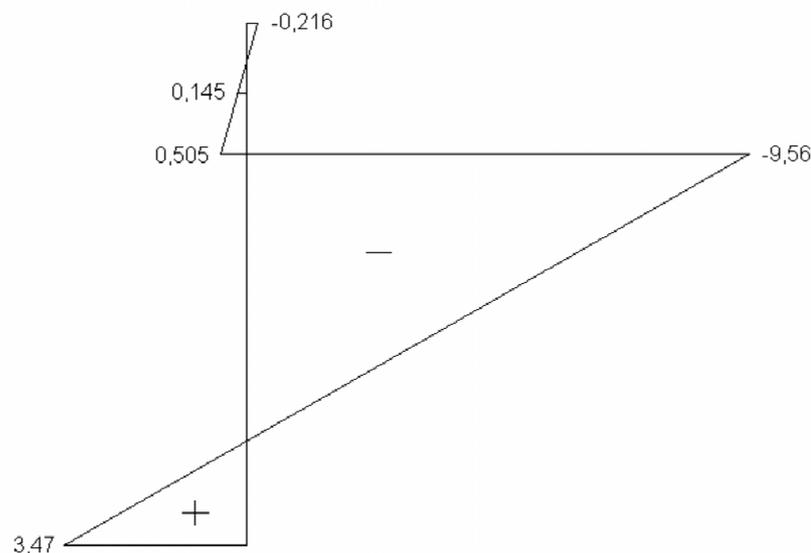


Abbildung 4.1: Graphische Darstellung der mit dem Modell 4.1 berechneten Spannungen im Feldmitte (Einheit: $\frac{kN}{cm^2}$)

- $\sigma_{c,o} = \frac{8326,5}{3965} - \frac{8326,5}{6.848,8} - \frac{92507}{6.22626} = -0,216 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = \frac{8326,5}{3965} - \frac{8326,5}{6.848,8} + \frac{92507}{6.384316} = 0,505 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -\frac{8326,5}{848,8} - \frac{92507}{384316} = -9,56 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = -\frac{8326,5}{848,8} + \frac{92507}{6965} = 3,47 \frac{kN}{cm^2}$.

Kontrolle:

- Summe der Normalkräfte: $N_c = 0,5 \cdot (-0,216 + 0,505) \cdot 3965 = 572,9 kN$ und
 $N_a = 0,5 \cdot (-9,56 + 3,47) \cdot 188 = -572,5 kN$
 $\Rightarrow N_{gesamt} = N_c + N_a \simeq 0$

Für der Vergleich der Anpassung mit dem Modell nach der Scheibentheorie siehe 4.7..

4.2 Ermittlung der effektiven Breite durch Gleichsetzen der maximalen Spannung in der Mittelebene des Betongurtes

4.2.1 Herleitung der effektiven Breite

Vor der Herleitung werden ein Paar nützliche Formeln angegeben. Die Gleichung werden viel vereinfacht, indem nicht b_{eff} sondern $\Theta = \frac{A_{c,S}}{A_i}$ als Unbekannte gewählt wird; mit $A_{c,S} = \frac{A_c}{n_S}$.

$$A_i = A_a + \frac{A_c}{n_S} \quad (4.2)$$

$$= A_a \left(1 + \frac{A_{c,S}}{A_a}\right) \quad (4.3)$$

$$= A_a \left(1 + \frac{A_{c,S}}{A_i} \frac{A_i}{A_a}\right) \quad (4.4)$$

$$= A_a \left(1 + \frac{A_{c,S}}{A_i} \frac{A_i}{A_i - A_{c,S}}\right) \quad (4.5)$$

$$= A_a \left(1 + \frac{\Theta}{1 - \Theta}\right) \quad (4.6)$$

$$= \frac{A_a}{1 - \Theta} \quad (4.7)$$

$$\frac{A_{c,S}}{A_a} = \frac{\Theta}{1 - \Theta}$$

$$z_i = \frac{A_a}{A_i} z_c \quad (4.9)$$

$$= \left(1 - \frac{A_{c,S}}{A_i}\right) z_c \quad (4.10)$$

$$= (1 - \Theta) z_c \quad (4.11)$$

$$I_i = I_a + \frac{A_{c,S}}{A_i} A_a z_c^2 + \frac{A_c h_c^2}{12 n_S} \quad (4.12)$$

$$= A_a z_c^2 \left(\frac{I_a}{A_a z_c^2} + \frac{A_{c,S}}{A_i} + \frac{A_c h_c^2}{12 n_S A_a z_c^2} \right) \quad (4.13)$$

$$= A_a z_c^2 (\theta_1 + \Theta + \theta_2 \eta) \quad (4.14)$$

$$\sigma_c = \bar{\sigma}_c \frac{E_a \epsilon_S}{n_S} \quad (4.15)$$

$$N_c = \bar{N}_c \frac{2 h_c \epsilon_S E_a L}{n_S} \quad (4.16)$$

mit $\theta_1 = \frac{I_a}{A_a z_c^2}$, $\theta_2 = \frac{h_c^2}{12 z_c^2}$ und $\eta = \frac{A_{c,S}}{A_a}$.

Der Term $\theta_2 \eta$ ist der Anteil der Biegesteifigkeit der Betonplatte selbst an der Biegesteifigkeit des Verbundquerschnittes. Um die Gleichung leicht analytisch lösen zu können, wird dieser Anteil vernachlässigt werden. Infolgedessen ergeben sich für dünne Betonplatten, das heißt für Platten, deren Biegesteifigkeit klein im Vergleich zu der des Stahlträgers bleibt, gute Ergebnisse. Sonst sind um so größere Abweichungen zu erwarten, je 'steifer' die Betonplatte im Vergleich zu Biegesteifigkeit des gesamten Querschnittes ist.

Es wird eine effektive Breite des Betongurtes berechnet, damit das Ingenieurmodell dieselbe maximale Normalspannung in der Mitte der Betonplatte liefert. Die Bestimmungsgleichung lautet also:

$$\sigma_{c,Mitte,max,Modell2} \stackrel{!}{=} \sigma_{c,Mitte,Modell4.2} \quad (4.17)$$

das heißt :

$$\sigma_{c,max} = \frac{N_S}{A_c} = \frac{N_S}{n_S A_i} = \frac{M_S z_i}{n_S I_i} \quad (4.18)$$

Also:

$$\bar{\sigma}_c \frac{E_a \epsilon_S}{n_S} = \frac{E_a \epsilon_S}{n_S} = \frac{E_a \epsilon_S A_c}{n_S A_i} = \frac{E_a \epsilon_S A_c z_i^2}{n_S I_i} \quad (4.19)$$

abgekürzt:

$$\bar{\sigma}_c = 1 - \frac{A_{c,S}}{A_i} - \frac{A_c z_i^2}{n_S I_i} \quad (4.20)$$

$$= 1 - \Theta - \frac{\Theta \cdot (1 - \Theta)}{\Theta + \theta_1} \quad (4.21)$$

$$= (1 - \Theta) \frac{\theta_1}{\Theta + \theta_1} \quad (4.22)$$

Um die vorletzte Gleichung zu bekommen braucht man nur, z_i , I_i und $\frac{A_{c,S}}{A_a}$ durch ihren Ausdruck als Funktion von Θ zu ersetzen. Daraus:

$$\Theta = \frac{\theta_1 \theta_3}{\bar{\sigma}_c + \theta_1} \quad (4.23)$$

mit $\theta_3 = 1 - \bar{\sigma}_c$ und weiter:

$$A_{c,eff} = \frac{\Theta}{1 - \Theta} A_{an} = \frac{\theta_1(1 - \bar{\sigma}_c)}{\bar{\sigma}_c(1 + \theta_1)} A_{an} \quad (4.24)$$

$$2b_{eff} = \frac{\theta_1(1 - \bar{\sigma}_c)}{\bar{\sigma}_c(1 + \theta_1)} \frac{A_{an}}{h_c} \quad (4.25)$$

4.2.2 Beispiel

Es wurden die gleichen Abmessungen wie im Beispiel des Kapitels 2 gewählt.

Querschnittswerte:

- $\theta_1 = \frac{166100}{188 \cdot 50,15^2} = 0,3513$
- $2b_{eff} = \frac{0,3513 \cdot (1 - 0,070)}{0,070 \cdot 1,3513} \cdot \frac{188,6}{25} = 155,84 \text{ cm}$
- $A_c = 155,84 \cdot 25 = 3896 \text{ cm}^2$
- $A_{c,S} = \frac{3896}{6} = 649,3 \text{ cm}^2$
- $A_i = 188 + 649,3 = 837,3 \text{ cm}^2$
- $z_i = 50,15 \cdot \frac{188}{837,3} = 11,26 \text{ cm}$
- $I_i = 532760 \text{ cm}^4$
- $W_{c,o} = \frac{532760}{-23,8} = -22423 \text{ cm}^3$
- $W_{c,u} = W_{a,o} = \frac{532760}{1,24} = 429645 \text{ cm}^3$
- $W_{a,u} = \frac{532760}{76,5} = 6964 \text{ cm}^3$

Für die Herleitung der Querschnittswerte, siehe [3] Kapitel 4. Die Schwindkraft beträgt: $N_S = \frac{21000 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{6} \cdot 3896 = 8181,6 \text{ kN}$. Das resultierende auf dem idellen Querschnitt wirkende Moment beträgt also: $M_S = 8181,6 \cdot 11,26 = 92124,8 \text{ kN} \cdot \text{cm}$.

Daraus ergeben sich die Normalspannungen im Querschnitt:

- $\sigma_{c,o} = \frac{8181,6}{3896} - \frac{8181,6}{6 \cdot 837,3} - \frac{92124,8}{6 \cdot 22423} = -0,213 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{c,u} = \frac{8181,6}{3896} - \frac{8181,6}{6 \cdot 837,3} + \frac{92124,8}{6 \cdot 429645} = 0,507 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,o} = -\frac{8181,6}{837,3} + \frac{92124,8}{429645} = -9,56 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,u} = -\frac{8181,6}{837,3} + \frac{92124,8}{6964} = 3,46 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

Kontrollen:

- Mittelwert der Betonnormalspannungen: $0,5 \cdot (-0,213 + 0,507) = 0,147 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
wie nach Kapitel 2
- Summe der Normalkräfte: $N_c = 0,147 \cdot 3896 = 572,7 \text{ kN}$, $N_a = 0,5 \cdot (-9,56 + 3,46) \cdot 188 = -573,4 \text{ kN}$
 $\Rightarrow N_{gesamt} = N_c + N_a \simeq 0$

Für der Vergleich der Anpassung mit dem Modell nach der Scheibentheorie siehe 4.7..

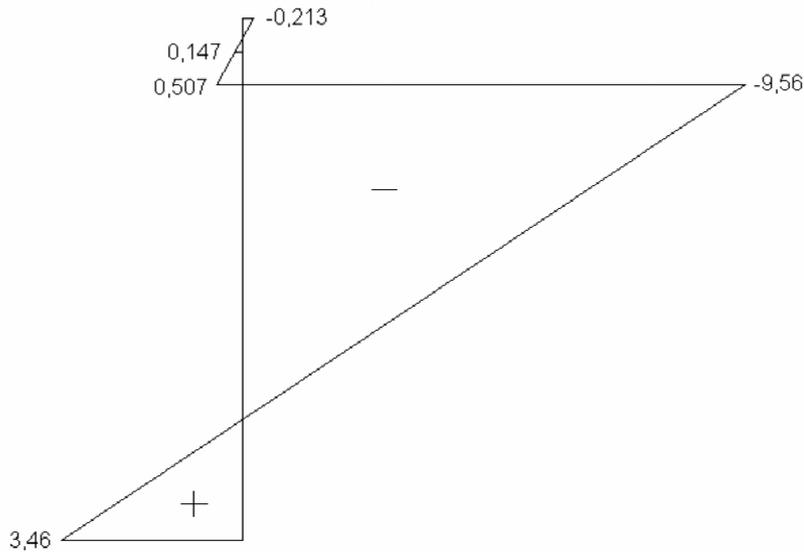


Abbildung 4.2: Graphische Darstellung der mit dem Modell 4.2 berechneten Spannungen im Feldmitte (Einheit: $\frac{kN}{cm^2}$)

4.3 Ermittlung der effektiven Breite durch Gleichsetzen der Krümmung

4.3.1 Herleitung der effektiven Breite

In dieser Anpassung wird eine effektive Breite gesucht, die dieselbe Krümmung im Stahlträger liefert. Die Bestimmungsgleichung lautet also:

$$\kappa_{a,Modell2} \stackrel{!}{=} \kappa_{i,Modell4.3} \quad (4.26)$$

das heißt:

$$\frac{N_c z_c}{E_a I_a} = \frac{M_S}{E_a I_i} \quad (4.27)$$

das heißt:

$$\frac{N_c z_c}{E_a I_a} = \frac{N_S z_i}{E_a I_i} \quad (4.28)$$

Jetzt werden die Ausdrücke von N_c und von den idealen Querschnittswerten vom Kapitel 4.2 in der letzten Gleichung eingesetzt.

$$\frac{2h_c \frac{E_a \epsilon_s}{n_s} L \bar{N}_c z_c}{E_a I_a} = \frac{\frac{E_a \epsilon_s}{n_s} A_c z_c (1 - \Theta)}{E_a A_a z_c^2 (\Theta + \theta_1)} \quad (4.29)$$

das heißt:

$$1 = \frac{\theta_1 \Theta}{\Theta + \theta_1} \quad (4.30)$$

Mit $\theta_1 = \frac{n_s I_a}{2h_c L \bar{N}_c z_c^2}$.

Also:

$$\Theta = \frac{\theta_1}{\theta_1 - 1} \quad (4.31)$$

Und:

$$2b_{eff} = \frac{\theta_1}{\theta_4 - \theta_1 - 1} \frac{nA_a}{h_c} \quad (4.32)$$

Er lässt sich zeigen, dass die nächste Gleichung in diesem Fall erfüllt ist:

$$z_c + \frac{I_a}{A_a z_c} = z_{i,eff} + \frac{I_{i,eff}}{A_{i,eff} z_{i,eff}} \quad (4.33)$$

Tatsächlich :

$$z_i + \frac{I_i}{A_i z_i} = z_c(1 - \Theta) + \frac{A_a z_c^2 (\theta_1 + \Theta)}{\frac{A_a}{1 - \Theta} z_c (1 - \Theta)} \quad (4.34)$$

$$= z_c(1 - \Theta) + z_c(\theta_1 + \Theta) \quad (4.35)$$

$$= z_c(1 + \theta_1) \quad (4.36)$$

$$= z_c \left(1 + \frac{I_a}{A_a z_c^2}\right) \quad (4.37)$$

Die Gleichung bedeutet, dass der Punkt im Stahlträger, wo die Normalspannungen null sind, sich am selben Ort für dieses Modell und für das Modell nach der Scheibentheorie befindet. Die Spannungen im Stahlträger sind also gleich. Die Gurtkraft muss also auch gleich sein. Entspricht der mittlere Wert der Betonspannungen mit ausreichender Genauigkeit dem Modell nach der Scheibentheorie ermittelten Wert, ist die Anpassung befriedigend.

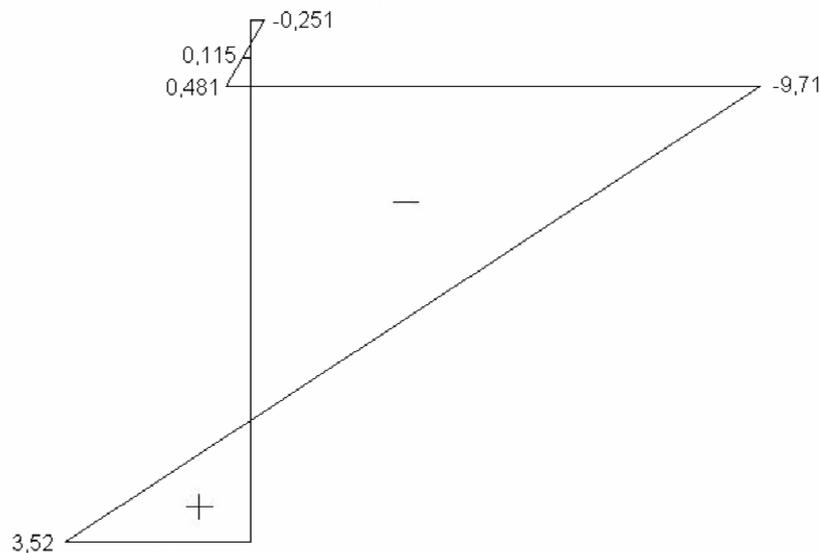
4.3.2 Beispiel

Es wurden die gleichen Abmessungen wie im Beispiel des Kapitels 2 gewählt. Querschnittswerte:

- $\theta_4 = \frac{6.166100}{2.25 \cdot 300.0,0185 \cdot 50,15^2} = 1,43$
- $2b_{eff} = \frac{0,3513}{1,43 - 1,3513} \cdot \frac{6.188}{25} = 201,4cm > 2 \cdot b = 200cm$, die effektive Breite ist also größer als die geometrische Breite in diesem Fall.
- $A_e = 201,4 \cdot 25 = 5035,2cm^2$
- $A_{e,S} = 839,2cm^2$
- $A_i = 188 + 839,2 = 1027,2cm^2$
- $z_i = 50,15 \cdot \frac{188}{1027,2} = 9,18cm$
- $I_i = 552387,1cm^4$
- $W_{c,o} = \frac{552387,1}{-21,7} = -25456cm^3$
- $W_{c,u} = W_{a,o} = \frac{552387,1}{3,3} = 167390cm^3$
- $W_{a,u} = \frac{552387,1}{78,6} = 7027,8cm^3$

Die Schwindkraft beträgt: $N_S = \frac{21000 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{6} \cdot 5035,2 = 10574kN$. Das resultierende auf dem ideellen Querschnitt wirkende Moment beträgt also: $M_S = 10574 \cdot 9,18 = 97070kN \cdot cm$.

Daraus ergeben sich die Normalspannungen im Querschnitt:



- $\sigma_{c,o} = \frac{10574}{5035,2} - \frac{10574}{6 \cdot 1027,2} - \frac{97070}{6 \cdot 25456} = -0,251 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = \frac{10574}{5035,2} - \frac{10574}{6 \cdot 1027,2} + \frac{97070}{6 \cdot 167390} = 0,481 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -\frac{10574}{1027,2} + \frac{97070}{167390} = -9,71 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = -\frac{10574}{1027,2} + \frac{97070}{7027,8} = 3,52 \frac{kN}{cm^2}$

Kontrolle:

- die Normalspannungen im Stahl entsprechen jenen des Kapitels 2.
- Summe der Normalkräfte: $N_c = 0,5 \cdot (-0,251 + 0,481) \cdot 5035,2 = 579,0 \text{ kN}$,
 $N_a = 0,5 \cdot (-9,71 + 3,52) \cdot 188 = -581,9 \text{ kN}$
 $\Rightarrow N_{\text{gesamt}} = N_c + N_a \simeq 0$

Für der Vergleich der Anpassung mit dem Modell nach der Scheibentheorie siehe 4.7..

4.4 Ermittlung der effektiven Breite durch Gleichsetzen der Betongurtkraft

Es wird gezeigt, dass dieselbe effektive Breite erhalten wird, wie das Modell 4.3.. Die Gleichsetzung der Betongurtkraft kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$N_{c, \text{Modell2}} \doteq N_{c, \text{Modell4.4}} \quad (4.38)$$

$$N_c = \left[\frac{N_S}{A_{c, \text{eff}}} - \frac{N_S}{n A_{i, \text{eff}}} - \frac{N_S z_i^2}{n I_i} \right] A_{c, \text{eff}} \quad (4.39)$$

Daraus:

$$\frac{2 h_c \epsilon_S E_a L \bar{N}_c}{n_S} = \frac{E_a \epsilon_S A_{c, \text{eff}}}{n_S} \left[1 - \Theta - \frac{A_a \frac{\Theta}{1-\Theta} z_c^2 (1-\Theta)^2}{A_a z_c^2 (\Theta + \theta_1)} \right] \quad (4.40)$$

und:

$$\frac{2 h_c L \bar{N}_c}{n_S A_a} = \frac{\theta_1 \Theta}{\Theta + \theta_1} \quad (4.41)$$

Man sieht, dass der linke Teil gleich $\frac{\theta_1}{\theta_4}$ ist und also:

$$1 = \frac{\theta_1 \Theta}{1 + \Theta_1} \quad (4.42)$$

Man findet also dieselbe Bestimmungsgleichung für Θ und dann selbstverständlich für b_{eff} . Man erhält deshalb die gleichen Ergebnisse.

4.5 Gleichsetzen der maximalen Betonspannung und der Krümmung

4.5.1 Herleitung der effektiven Breite

Hier berechnet man eine effektive Gurtbreite und ein effektives Trägheitsmoment des Stahlträgers, um die beiden folgenden Bedingungen zu erfüllen:

- die Normalspannung in der Mittelebene des Betongurtes und die maximale Spannungen im Beton im Modell nach der Scheibentheorie sollen gleich sein.
- die Krümmung des Querschnittes und jene im Modell nach der Scheibentheorie sollen gleich sein. Unbekannte: b_{eff} und $I_{a, \text{eff}}$.

$$\sigma_{c,Mitte,max,Modell2} \doteq \sigma_{c,Mitte,Modell4.5} \quad (4.43)$$

$$\kappa_{a,Modell2} \doteq \kappa_{i,Modell4.5} \quad (4.44)$$

Da diese beiden Bedingungen in 4.2 und 4.3 ausgeführt wurden, schreiben wir direkt die Bestimmungsgleichungen in einer bearbeiteten Form (siehe Gleichungen 4.22 und 4.30):

$$\bar{\sigma}_c = (1 - \Theta) \frac{\zeta}{\Theta + \zeta} \quad (4.45)$$

$$1 = \frac{\theta_4 \Theta}{\zeta + \Theta} \quad (4.46)$$

Die Gleichung (4.46) wird:

$$\zeta = \Theta(\theta_4 - 1) \quad (4.47)$$

Die Gleichung (4.45) liefert dann:

$$\Theta = \frac{\theta_4 - 1 - \theta_4 \bar{\sigma}_c}{\theta_4 - 1} \quad (4.48)$$

und schließlich:

$$2b_{eff} = \frac{\theta_4 - 1 - \theta_4 \bar{\sigma}_c}{\bar{\sigma}_c \theta_4} \frac{n_S A_a}{h_c} \quad (4.49)$$

$$I_{a,eff} = (\theta_4 - 1 - \theta_4 \bar{\sigma}_c) A_a z_c^2 \quad (4.50)$$

Natürlich ergeben sich hier dieselben Normalspannungen im Beton wie im Kapitel 2. Das Modell nach der Scheibentheorie liefert nämlich nur den mittleren Wert der Normalspannungen im Beton und die Randspannungen werden dann mit derselben Krümmung wie jener des Stahlträgers extrapoliert.

4.5.2 Beispiel

Es wurden die gleichen Abmessungen wie im Beispiel des Kapitels 2 gewählt. Querschnittswerte:

- $2b_{eff} = \frac{1,43-1-1,43 \cdot 0,07}{1,43 \cdot 0,07} \cdot \frac{6,188}{25} = 148,7 \text{ cm}$
- $A_{c,eff} = 148,7 \cdot 25 = 3717,6 \text{ cm}^2$
- $A_{c,S} = 619,6 \text{ cm}^2$
- $A_i = 188 + 619,6 = 807,2 \text{ cm}^2$
- $z_i = 50,15 \cdot \frac{188}{807,2} = 11,7 \text{ cm}$
- $I_{a,eff} = (1,43 - 1 - 1,43 \cdot 0,07) \cdot 188 \cdot 50,15^2 = 155985 \text{ cm}^4$
- $I_i = 518921 \text{ cm}^4$
- $W_{c,o} = \frac{518921}{-24,2} = -21443 \text{ cm}^3$
- $W_{c,u} = W_{a,o} = \frac{518921}{0,8} = 648651 \text{ cm}^3$

- $W_{a,u} = \frac{518921}{76,1} = 6819 \text{cm}^3$

Die Schwindkraft beträgt: $N_S = \frac{21000 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{6} \cdot 3717,6 = 7807,0 \text{kN}$. Das resultierende auf dem ideellen Querschnitt wirkende Moment beträgt also: $M_S = 7807,0 \cdot 11,7 = 91342 \text{kN}\cdot\text{cm}$.

Daraus ergeben sich die Normalspannungen im Querschnitt:

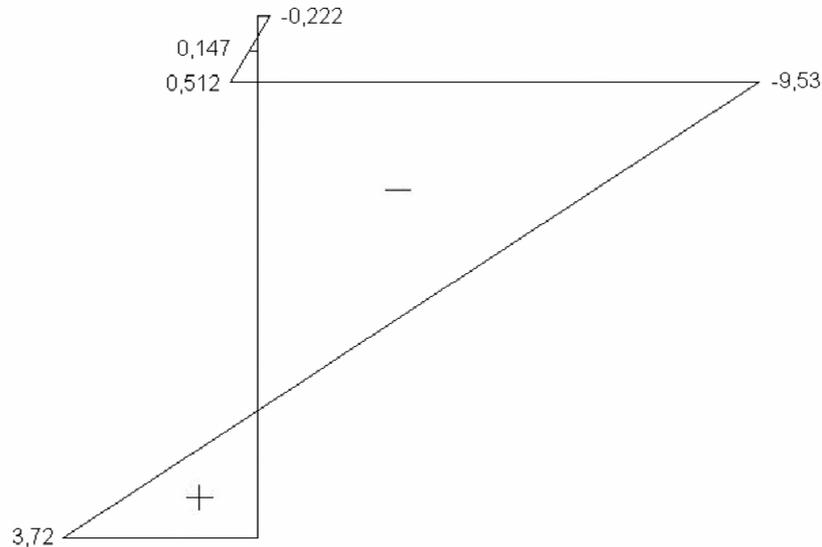


Abbildung 4.4: Graphische Darstellung der mit dem Modell 4.5 berechneten Spannungen im Feldmitte (Einheit: $\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$)

- $\sigma_{c,o} = \frac{7807 \text{kN}}{3717,6 \text{cm}^2} - \frac{7807 \text{kN}}{6 \cdot 807,2 \text{cm}^2} - \frac{91342 \text{kN}\cdot\text{cm}}{6 \cdot 21443 \text{cm}^3} = -0,222 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{c,u} = \frac{7807 \text{kN}}{8273 \text{cm}^2} - \frac{7807 \text{kN}}{6 \cdot 807,2 \text{cm}^2} + \frac{91342 \text{kN}\cdot\text{cm}}{6 \cdot 648651 \text{cm}^3} = 0,512 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,o} = -\frac{7807 \text{kN}}{807,2 \text{cm}^2} + \frac{91342 \text{kN}\cdot\text{cm}}{648651 \text{cm}^3} = -9,53 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,u} = -\frac{7807 \text{kN}}{807,2 \text{cm}^2} + \frac{91342 \text{kN}\cdot\text{cm}}{6819 \text{cm}^3} = 3,72 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

Kontrollen:

- Normalspannungen im Beton entsprechen den Werten des Kapitels 2
- Summe der Normalkräfte: $N_c = 0,5 \cdot (-0,222 + 0,512) \cdot 3717,6 = 539,0 \text{kN}$,
 $N_a = 0,5 \cdot (-9,53 + 3,72) \cdot 188 = -546,1 \text{kN} \Rightarrow N_{\text{gesamt}} = N_c + N_a \simeq 0$

Für der Vergleich der Anpassung mit dem Modell nach der Scheibentheorie siehe 4.7..

4.6 Ermittlung der effektiven Breite durch Gleichsetzung der maximalen Betonspannung in der Mittelebene des Betongurtes und der Krümmung

4.6.1 Herleitung der effektiven Breite

Hier wird der Beton gedanklich weicher gemacht, um den Spannungsverlauf zu adaptieren. Die effektive Parameter sind die Betongurtbreite und das E-Modul des Betons. Die Bedingungen, zu erfüllen, sind folgende:

- Der Mittelwert der Spannungen im Beton und die maximale Spannung im Modell nach der Scheibentheorie sollen gleich sein
- Die Krümmung des gesamten Querschnittes und die Krümmung des Stahlträgers im Modell nach der Scheibentheorie sollen gleich sein.

Unbekannte : b_{eff} und n_{eff} Die Bestimmungsgleichungen lauten also:

$$\sigma_{c,Mitte,max,Modell2} \stackrel{!}{=} \sigma_{c,Mitte,Modell4.6} \quad (4.51)$$

$$\kappa_{a,Modell2} \stackrel{!}{=} \kappa_{i,Modell4.6} \quad (4.52)$$

Das heißt siehe Gleichungen 4.22 und 4.30):

$$\bar{\sigma}_c \frac{n_{eff}}{n_S} = (1 - \Theta) \frac{\theta_1}{\Theta + \theta_1} \quad (4.53)$$

und:

$$1 = \frac{\theta_4 \Theta}{\Theta + \theta_1} \quad (4.54)$$

Die Gleichung 4.54 führt zu:

$$\Theta = \frac{\theta_1}{\theta_4 - 1} \quad (4.55)$$

und n_{eff} kann jetzt mit der Gleichung (4.53) und (4.55) berechnet werden:

$$n_{eff} = \frac{n_S (1 - \Theta) \theta_1}{\bar{\sigma}_c (\Theta + \theta_1)} = n_S \frac{\theta_4 - 1 - \theta_1}{\bar{\sigma}_c \theta_4} \quad (4.56)$$

Jetzt kann die effektive Breite ausgedrückt werden:

$$2b_{eff} = \frac{\Theta}{1 - \Theta} \frac{n_{eff} A_a}{h_c} = \frac{\theta_1}{\bar{\sigma}_c \theta_4} \frac{n_S A_a}{h_c} \quad (4.57)$$

Es ist jetzt sehr einfach zu zeigen, dass die Gleichungen (4.1) und (4.32) erfüllt sind. In diesem Fall sind die vier in der Einleitung definierten Bedingungen erfüllt. Diese Anpassung ist in diesem Sinn befriedigend. Dazu sind nur zwei effektive Parameter zu berechnen. Der Aufwand ist begrenzt.

4.6.2 Beispiel

Es wurden die gleichen Abmessungen wie im Beispiel des Kapitels 2 gewählt. Querschnittswerte:

- $n_{eff} = 6 \cdot \frac{1,43 - 1,3513}{0,07 \cdot 1,43} = 4,60$

- $2b_{eff} = \frac{0,3513}{0,07143} \cdot \frac{6,188}{25} = 158,6cm$
- $A_c = 158,3cm \cdot 25cm = 3964,3cm^2$
- $A_{c,s} = \frac{3954,3}{4,60} = 861,4cm^2$
- $A_i = 188 + 861,4 = 1049,4cm^2$
- $z_i = 50,15 \cdot \frac{188}{1049,4} = 8,98cm$
- $I_i = 554220,5cm^4$
- $W_{c,o} = \frac{554220,5}{-21,5} = -25797cm^3$
- $W_{c,u} = W_{a,o} = \frac{554220,5}{3,52} = 157632cm^3$
- $W_{a,u} = \frac{554220,5}{78,8} = 7032cm^3$

Die Schwindkraft beträgt: $N_S = \frac{21000 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{4,72} \cdot 3964,3 = 10854,1kN$. Das resultierende auf dem ideellen Querschnitt wirkende Moment beträgt also: $M_S = 10854,1 \cdot 8,98 = 97513,8kN \cdot cm$.

Daraus ergeben sich die Normalspannungen im Querschnitt:

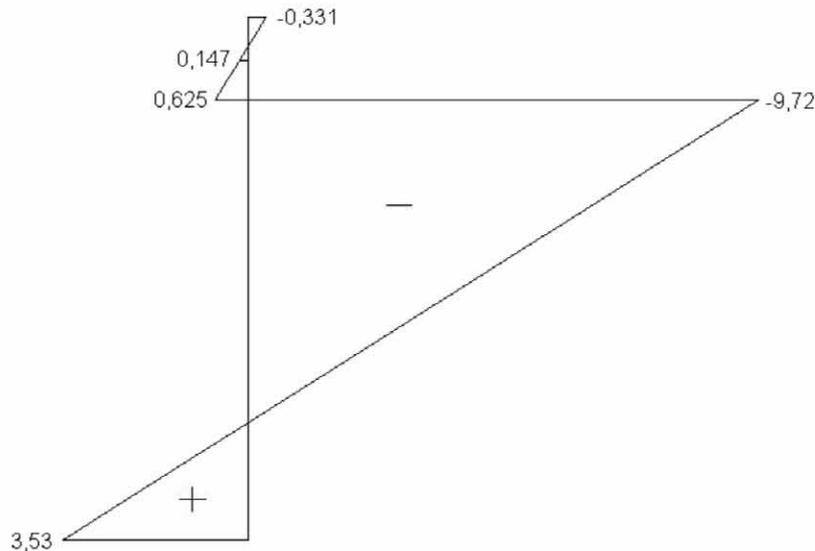


Abbildung 4.5: Graphische Darstellung der mit dem Modell 4.6 berechneten Spannungen im Feldmitte (Einheit: $\frac{kN}{cm^2}$)

- $\sigma_{c,o} = \frac{10854,1}{3964,3} - \frac{10854,1}{4,60 \cdot 1049,4} - \frac{97513,8}{4,60 \cdot 25797} = -0,331 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = \frac{10854,1}{3964,3} - \frac{10854,1}{4,60 \cdot 1049,4} + \frac{97513,8}{4,60 \cdot 157632} = 0,625 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -\frac{10854,1}{1049,4} + \frac{97513,8}{157632} = -9,72 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = -\frac{10854,1}{1049,4} + \frac{97513,8}{7032} = 3,53 \frac{kN}{cm^2}$

Kontrollen:

- Normalspannungen im Stahlträger entsprechen jenen nach Kapitel 2
- Mittelwert der Normalspannungen: $0,5 \cdot (-0,319 + 0,612) = 0,147 \frac{kN}{cm^2}$ entspricht jenem nach Kapitel 2
- Summe der Normalkräfte: $N_c = 0,147 \cdot 3958,7 = 581,9 kN$, $N_a = 0,5 \cdot (-9,71 + 3,51) \cdot 188 = -582,8 kN$
 $\Rightarrow N_{gesamt} = N_c + N_a \simeq 0$

Es war zu erwarten, dass die Randspannungen im Beton nicht gleich wie die mit dem Modell nach der Scheibentheorie berechnete Randspannungen sind. Es kommt daher, weil der effektive E Modul des Betons im Ingenieurmodell nicht dem wirklichen Wert entspricht. Für der Vergleich der Anpassung mit dem Modell nach der Scheibentheorie siehe 4.7..

4.7 Vergleich der angepassten Ingenieurmodelle

Die Ergebnisse sind hier in tabellarischer Form zu finden. In der Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse für eine Abkühlung ($n = 6$), und in der Tabelle 4.2 für das Schwinden ($n_s = 24$). Die Tabellen zeigen, dass das Modell 4.5 die ungenauesten Ergebnisse liefert. Die anderen angepassten Ingenieurmodelle liefern gute Abschätzungen. Jedoch ist das Modell 4.6 das einzige "exakte" Modell, im Sinn dass die gleiche Spannungen sowohl im ganzen Stahlträger als auch in der Schwerlinie des Betongurtes erhalten werden, wie im Modell nach der Scheibentheorie. Die Werte nach der Scheibentheorie und mit dem angepassten Ingenieurmodellen entsprechen nicht jenen der FEM Berechnung. Es liegt daran, dass die Biegesteifigkeit der Betonplatte im Modell nach der Scheibentheorie und in den Anpassungen des Ingenieurmodells vernachlässigt wurde. Das ist in diesem Fall nicht zulässig. Möglichkeit, die Biegesteifigkeit der Betonplatte zu berücksichtigen, siehe Kapitel 5.

| | Modell 2 | Modell 3 | Modell 4.1 | Modell 4.2 |
|-------------------------------------|----------|----------|------------|------------|
| $\sigma_{c,o}(\frac{kN}{cm^2})$ | -0,221 | -0,155 | -0,216 | -0,213 |
| $\sigma_{c,Mitte}(\frac{kN}{cm^2})$ | 0,147 | 0,185 | 0,145 | 0,147 |
| $\sigma_{c,u}(\frac{kN}{cm^2})$ | 0,515 | 0,525 | 0,505 | 0,507 |
| $\sigma_{a,o}(\frac{kN}{cm^2})$ | -9,72 | -9,37 | -9,56 | -9,56 |
| $\sigma_{a,u}(\frac{kN}{cm^2})$ | 3,52 | 2,42 | 3,47 | 3,46 |
| $N_c(kN)$ | 582,8 | 653,1 | 572,9 | 572,7 |

| | Modell 4.3 | Modell 4.5 | Modell 4.6 |
|-------------------------------------|------------|------------|------------|
| $\sigma_{c,o}(\frac{kN}{cm^2})$ | -0,251 | -0,222 | -0,331 |
| $\sigma_{c,Mitte}(\frac{kN}{cm^2})$ | 0,115 | 0,147 | 0,147 |
| $\sigma_{c,u}(\frac{kN}{cm^2})$ | 0,481 | 0,512 | 0,625 |
| $\sigma_{a,o}(\frac{kN}{cm^2})$ | -9,71 | - 9,53 | -9,72 |
| $\sigma_{a,u}(\frac{kN}{cm^2})$ | 3,52 | 3,72 | 3,53 |
| $N_c(kN)$ | 579,0 | 539,0 | 581,9 |

Tabelle 4.1: Ergebnisse mit dem Modell nach der Scheibentheorie, mit dem FEM-Modell und mit allen angepassten Ingenieurmodellen

| | Modell 2 | Modell 4.1 | Modell 4.2 | Modell 4.3 | Modell 4.5 | Modell 4.6 |
|-------------------------------------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\sigma_{c,o}(\frac{kN}{cm^2})$ | 0,0563 | 0,0571 | 0,0549 | 0,0638 | 0,0563 | 0,0603 |
| $\sigma_{c,Mitte}(\frac{kN}{cm^2})$ | 0,128 | 0,130 | 0,128 | 0,136 | 0,128 | 0,128 |
| $\sigma_{c,u}(\frac{kN}{cm^2})$ | 0,200 | 0,203 | 0,201 | 0,207 | 0,200 | 0,196 |
| $\sigma_{a,o}(\frac{kN}{cm^2})$ | -7,62 | -7,73 | -7,77 | -7,62 | -7,80 | -7,62 |
| $\sigma_{a,u}(\frac{kN}{cm^2})$ | 2,76 | 2,80 | 2,82 | 2,76 | 2,58 | 2,76 |
| $N_c(kN)$ | 456,8 | 463,4 | 465,6 | 456,8 | 490,6 | 456,8 |

Tabelle 4.2: Ergebnisse mit dem Modell nach der Scheibentheorie und mit allen angepassten Ingenieurmodellen der Spannungen infolge Schwindens, $n_S = 24$ in diesem Fall, um die Kriecheffekte zu berücksichtigen.

Kapitel 5

Vergleich der Ergebnisse

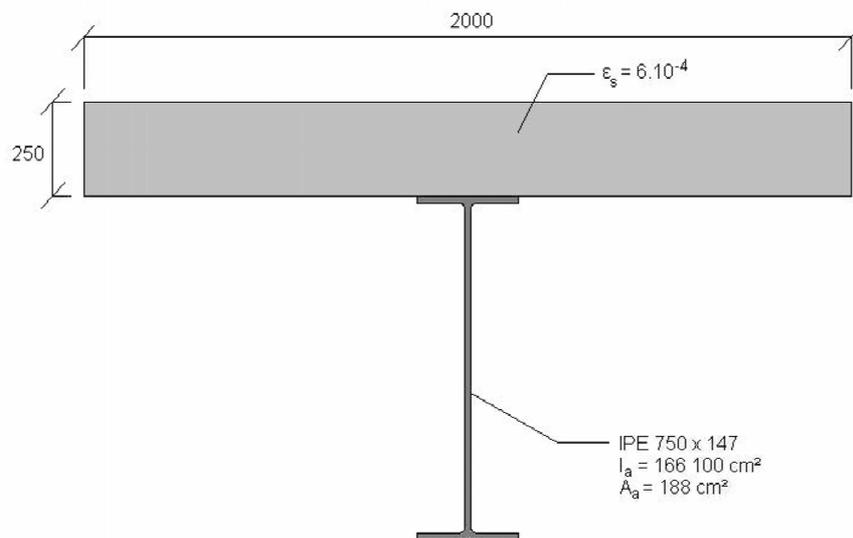


Abbildung 5.1: Graphische Definition des Querschnitts A

5.1 Definitionen der Grenzfälle

Ein Verbundbalken wird als “lang” bzw. “kurz” bezeichnet und der Betongurt wird als “schmal” bzw. “breit” bezeichnet, wenn seine Breite vernachlässigbar bzw. nicht vernachlässigbar im Vergleich zur Länge des Balkens ist. Für den “langen” Balken gilt: $b \ll L$. Für $b \sim L$ liegt ein “kurzer” Balken vor. Der Betongurt wird als “dünn” bzw. “dick” betrachtet, wenn die Dicke des Betongurtes im Vergleich zu seiner Breite vernachlässigbar bzw. nicht vernachlässigbar ist und wenn die Dicke des Betongurtes so klein im Vergleich zur Höhe des Stahlträgers ist, dass das eigene Trägheitsmoment der Betonplatte im Vergleich zu jenem des Stahlträgers vernachlässigt bzw. nicht vernachlässigt werden kann. Für den “dünnen” Betongurt gilt: $h_c \ll b$ und $I_c \ll I_a$. Für $h_c \sim b$ und $I_c \sim I_a$ liegt ein “dicker” Betongurt vor. In [2] werden lange Balken mit “dickem” Betongurt nicht behandelt.

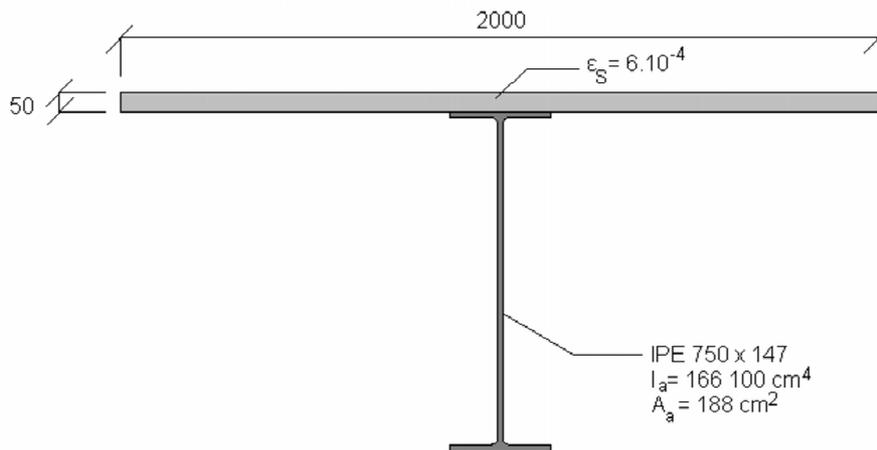


Abbildung 5.2: Graphische Definition des Querschnitts B

5.2 Beispiel 1: “Kurzer” Balken mit “dickem” Betongurt

Das im Kapitel 2 beschriebene Beispiel (Querschnitt A, $L = 3\text{m}$, siehe Abbildung 5.1) ermöglicht, alle Modelle zu vergleichen. Folgende Normalspannungen werden mit dem Modell nach der Scheibentheorie (siehe Kapitel 2) erhalten:

- $\sigma_{c,o} = -0,221 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,515 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,o} = -9,72 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,u} = 3,52 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

Mit dem angepassten Ingenieurmodell werden folgende Normalspannungen (siehe Kapitel 4.6) erhalten:

- $\sigma_{c,o} = -0,331 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,625 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,o} = -9,72 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,u} = 3,53 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

In Feldmitte werden folgende Werte mit dem FEM Modell (siehe Kapitel 3) erhalten:

- $\sigma_{c,o} = -0,155 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,525 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,o} = -9,37 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
- $\sigma_{a,u} = 2,42 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

Das extrapolierte Modell nach der Scheibentheorie ist eindeutig näher für die Spannungen im Beton. Sonst liefern die beiden ersten Modelle zu große Spannungen im Stahl. Die Abweichung beträgt bis zu 40%. Hier wurde die Biegesteifigkeit der Betonplatte einfach vernachlässigt, was in diesem Fall nicht zulässig ist. Eine Möglichkeit, um diese Biegesteifigkeit zu berücksichtigen ohne großen Aufwand, besteht darin, sie jenem des Stahlträgers zu addieren. Einige Iterationen sind notwendig, da die Biegesteifigkeit des Betongurtes ($\frac{2 \cdot b_{eff} \cdot h_c^3}{12 \cdot n_{eff}}$) von den effektiven Werten abhängt. Mit dem angepassten Ingenieurmodell nach Kapitel 4.6 erhalten wir:

- $\sigma_{c,o} = -0,141 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,481 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -9,479 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = -2,677 \frac{kN}{cm^2}$
- $N_c = 639,45 kN$.

Die Abweichungen betragen 9%, 8,3%, 1,4%, 10,6% und 2,2 %. Die Ergebnisse sind jetzt ziemlich gut.

5.3 Beispiel 2: “Langer” Balken mit “dünnem” Betongurt

Andere Beispiele wurden untersucht. Alle Abmessungen und numerischen Werte können vom Beispiel des Kapitels 2 übernommen werden, außer der Betondicke und der Balkenlänge, die hier 5 cm und 20 m betragen. Das heißt: Querschnitt B, siehe Abbildung 5.2 und $L = 20$ m. Folgende Ergebnisse werden erhalten:

1. Modell nach der Scheibentheorie (siehe Kapitel 2)

- $\sigma_{c,o} = 0,545 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,665 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -8,65 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = 2,27 \frac{kN}{cm^2}$.

2. Angepasstes Ingenieurmodell nach Kapitel 4.6

- $\sigma_{c,o} = 0,544 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,666 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -8,65 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = 2,27 \frac{kN}{cm^2}$.

3. FEM Modell (Feldmitte) (siehe Kapitel 3)

- $\sigma_{c,o} = 0,538 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,656 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -8,60 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = 2,25 \frac{kN}{cm^2}$.

In diesem Beispiel sind die Ergebnisse viel besser ohne Berücksichtigung der Biegesteifigkeit der Betonplatte, da die Betonplatte in diesem Fall viel “dünner” ist.

5.4 Beispiel 3: “Kurzer” Balken mit “dünnem” Betongurt

Alle Abmessungen und numerischen Werte können vom Beispiel des Kapitels 2 übernommen werden, außer der Dicke des Betongurtes, die hier 5 cm beträgt (Querschnitt B, L = 3 m). Also beträgt z_c 40,15 cm. Folgende Ergebnisse werden erhalten:

1. Modell nach der Scheibentheorie (siehe Kapitel 2)

- $\sigma_{c,o} = 0,735 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,786 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -7,58 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = 1,99 \frac{kN}{cm^2}$.

2. Angepasstes Ingenieurmodell nach Kapitel 4.6

- $\sigma_{c,o} = 0,709 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,812 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -7,58 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = 1,99 \frac{kN}{cm^2}$.

3. FEM Modell (Feldmitte) (siehe Kapitel 3)

- $\sigma_{c,o} = 0,683 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{c,u} = 0,788 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,o} = -8,65 \frac{kN}{cm^2}$
- $\sigma_{a,u} = 0,788 \frac{kN}{cm^2}$.

In diesem Fall sind die Spannungen im Beton sehr nah mit dem angepassten Ingenieurmodell (zwischen 3 und 4% Abweichung). Die Abweichung ist jedoch im Stahlträger größer.

5.5 Einfluss der Betondicke auf die Genauigkeit der Ergebnisse

Da die Biegesteifigkeit des Betongurtes im Modell nach Kapitel 4.6 nicht berücksichtigt wird, nimmt die Abweichung der Spannungen zwischen diesem Modell und der als zuverlässig angesehenen FEM Berechnung mit der Dicke des Betongurtes zu. Die Ergebnisse werden mit zunehmendem Verhältnis Plattendicke zur Balkenhöhe immer ungenauer. Dies Effekt wurde anhand eines Beispiels untersucht. Es wurde der gleiche Stahlträger wie in den letzten Beispielen gewählt. Die Betonplatte ist 2m breit ($b = 1m$). Die Länge des Verbundbalkens beträgt 5 m. Die Dicke des Betongurtes wurde zwischen 4 und 32 cm variiert.

Eine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse kann ohne großen Aufwand erhalten werden, indem man die Biegesteifigkeit der Betonplatte zu jener des Stahlträgers addiert. Da die effektive Kennwerte des Betons (b_{eff} und n_{eff}) vor der Berechnung nicht bekannt sind, erfolgt die Berechnung iterativ. Es sind maximal etwa 10 Iterationsschritte notwendig, um Konvergenz zu erreichen. Die Abweichungen bleiben dann

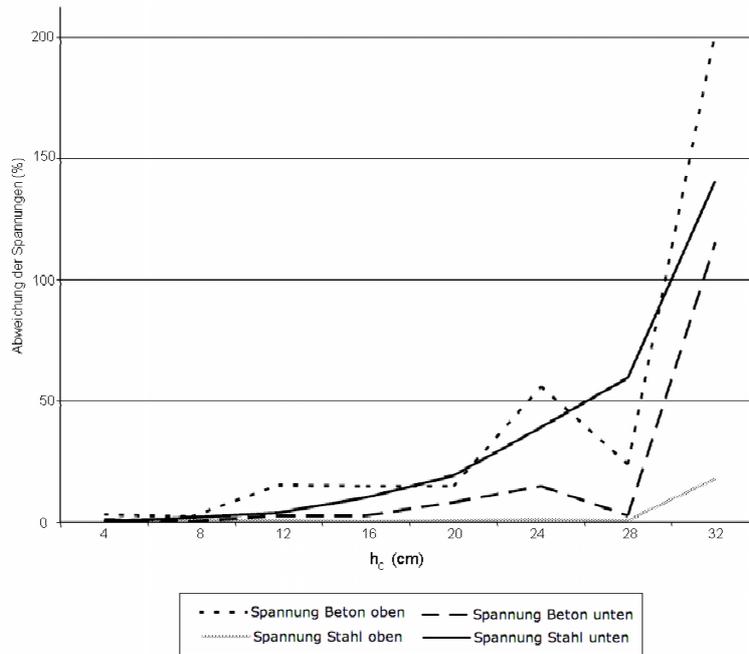


Abbildung 5.3: Abweichung der Spannungen zwischen dem Modell nach 4.6 und der FEM Berechnung in Abhängigkeit von der Dicke des Betongurtes

begrenzt und die Ergebnisse sind auch im Fall eines ziemlich dicken Betongurtes im Vergleich zur Breite des Betongurtes und zur Höhe des Stahlträgers (32 cm ist nämlich die Hälfte der Höhe des Stahlträgers) brauchbar. Die Betonspannungen am oberen Rand sind in einigen Fällen ($h_c = 12$ und 16 cm) sehr klein im Vergleich zu jenen am unteren Rand. Deshalb kann die relative Abweichung bis zu 23 % betragen. Die “Fehler” in den Spannungen sind jedoch sehr klein (Grösseordnung $0,01 \frac{kN}{cm^2}$).

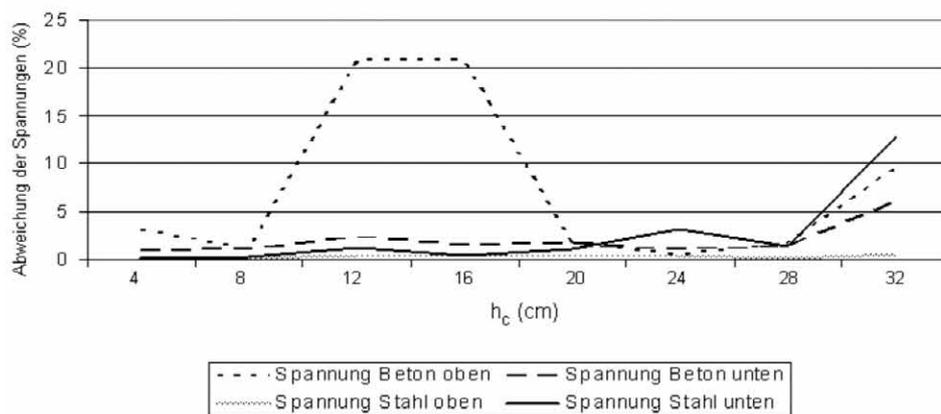


Abbildung 5.4: Abweichung der Spannungen zwischen dem Modell nach 4.6 (mit Berücksichtigung der Biegesteifigkeit des Betongurtes) und der FEM Berechnung in Abhängigkeit von der Dicke des Betongurtes

Kapitel 6

Störbereiche und Regelbereich

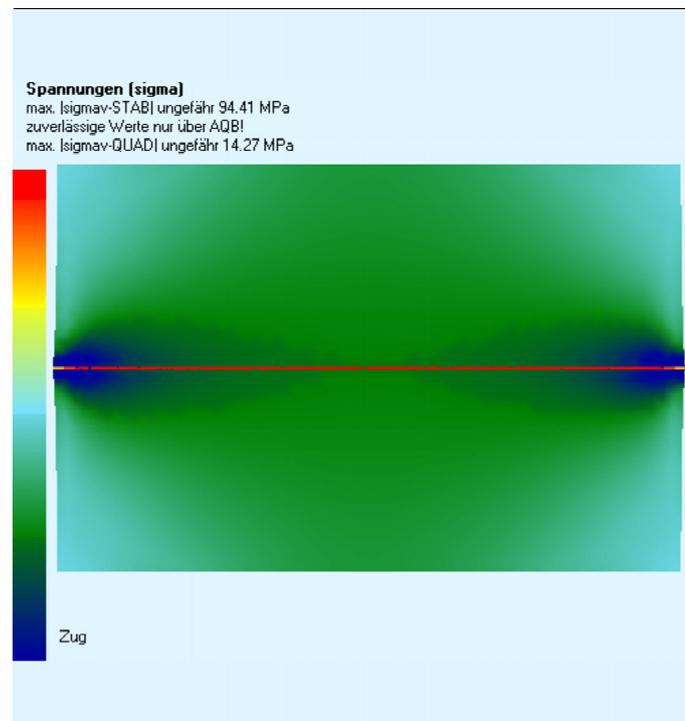


Abbildung 6.1: Normalspannungen in der Betonplatte im ersten Beispiel (siehe Kapitel 5.2), Mittelebene, die rote Linie ist die Mittellinie des Stahlträgers

Im Bereich der Balkenenden liegen Spannungskonzentrationen vor (Lasteinleitungsbereiche), die zu Feldmitte abklingen. Der “Regelbereich” ist der zwischen diesen “Störbereichen” Bereich, wo die Normalspannungen in Längsrichtung konstant sind. Abbildung 6.1 zeigt, dass bei einem “kurzen” Verbundbalken ein “Regelbereich” in der Mitte kaum entsteht.

Im zweiten Beispiel dagegen entstehen zwei kleinen Störbereiche und ein grosser Regelbereich.

Der Verlauf der Gurtkraft z.B. ermöglicht auch, die Abhängigkeit dieser Bereiche von den Systemkennwerten zu analysieren.

Man kann daraus schliessen, dass der Regelbereich um so größer ist, je schmaler der Betongurt ist und je weicher der Stahlträger ist. Auf den Diagrammen von [2] ist C so definiert, dass $\frac{L}{C} = \frac{2h_c L(z_c^2 + \frac{I_a}{A_a})}{I_a n}$ ist.

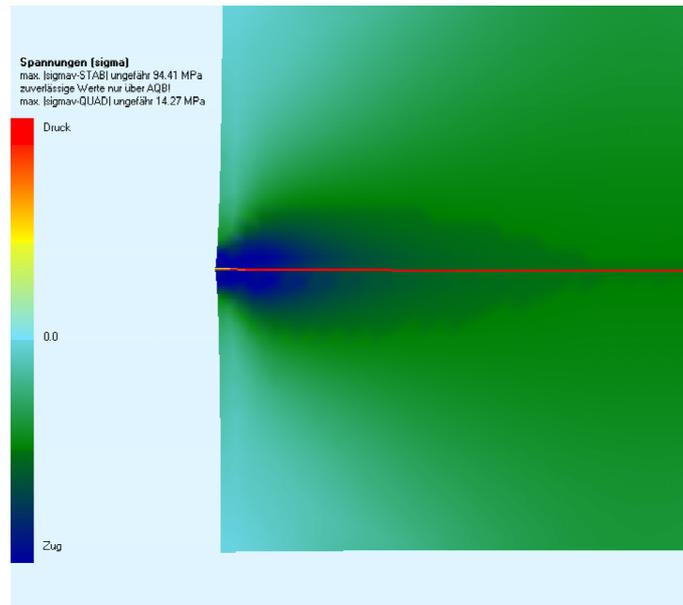


Abbildung 6.2: Zoom auf den Störbereich des ersten Beispiels (siehe Kapitel 5.2)

Man braucht nur, $\sin(\frac{m\pi}{2})$ durch $\sin(\frac{m}{L})$ in den Formeln des Kapitels 2 zu ersetzen, um den Verlauf der maximale Spannungen im Beton und der Betongurtkraft zu berechnen. Jedoch basiert die Berechnung auf der Zerlegung einer Rechteckfunktion¹ (Verlauf der eingepprägten Stauchung des Betons) in eine Fourier Reihe. Infolgedessen sind Ungenauigkeiten (sogenannter Gibbs Effekt²) im Störbereich zu erwarten, die **mit der Anzahl an Fourierelementen nicht abnehmen**. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu überwinden, besteht darin, die Funktionen $\bar{\sigma}_c(x)$ und $\bar{N}_c(x)$ durch Polynome oder polynomähnliche Funktionen zu ersetzen. Je komplexer die Näherungsfunktionen gewählt werden, desto mehr Bedingungen sind nötig, um die Näherungsfunktionen zu definieren. Es ist empfohlen, die Bedingungen in $x = 0$ oder $x = L$ durch ähnliche Bedingungen in $x = \frac{L}{1000}$ und $x = \frac{999L}{1000}$ zu ersetzen. Dieses Verfahren wird in [2] für den Verlauf des Schubflusses beschrieben.

¹Es handelt sich um eine Funktion, die in einem Intervall gleich 1 ist und ausserhalb des Intervalls null ist.

²Definition von Wikipedia, am 2. Juni 2008: “Als Gibbssches Phänomen oder Ringing bezeichnet man in der Mathematik das typische Verhalten von Fourierreihen in der Umgebung von Sprungstellen. Entwickelt man eine Fourierreihe aus einer unstetigen Funktion, so ergeben sich an den Unstetigkeitsstellen typische Über- und Unterschwinger[...].”

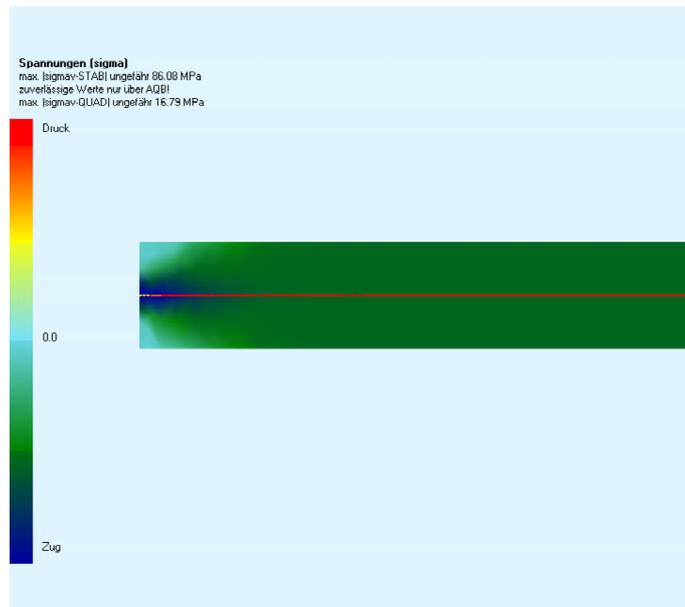


Abbildung 6.3: Normalspannungen in der Betonplatte im zweiten Beispiel (siehe Kapitel 5.3), linke Hälfte der Mittelebene, die rote Linie ist die Mittellinie des Stahlträgers

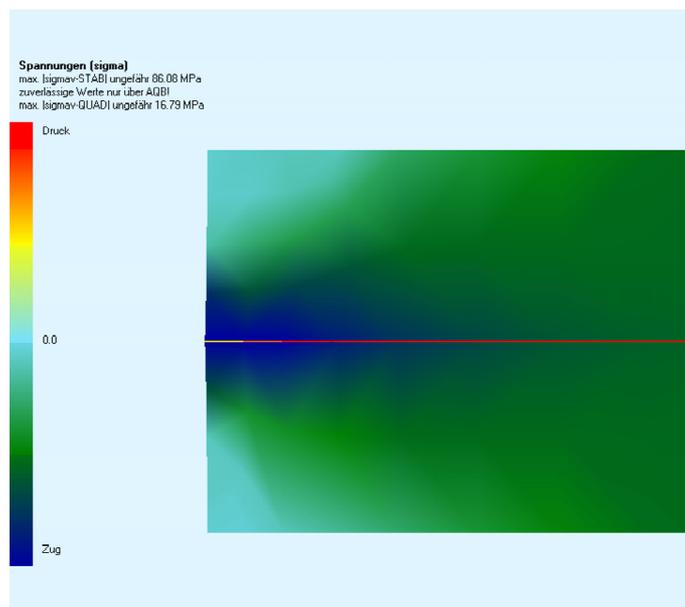


Abbildung 6.4: Zoom auf den Störbereich des zweiten Beispiels (siehe Kapitel 5.3)

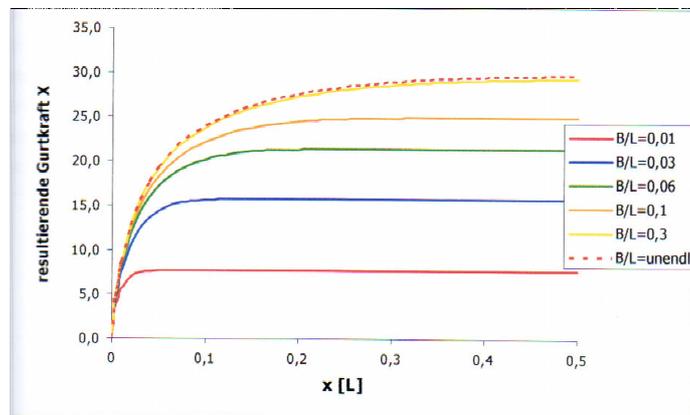


Abbildung 6.5: Einfluss der Breite der Betongurts auf den Verlauf des Gurtkraft, Auszug aus [2]

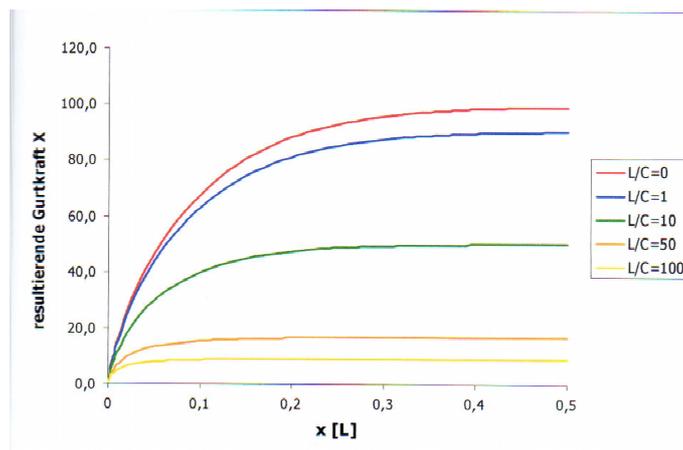


Abbildung 6.6: Einfluss der relativen Steifigkeit des Stahlträgers auf den Verlauf der Gurtkraft, Auszug aus [2]

Kapitel 7

Modell nach der Plattentheorie

Um die Plattenmomente in der Platte in Längsrichtung zu berechnen, genügt das Modell nach der Scheibentheorie nicht mehr. Bessere Ergebnisse könnten dadurch erzielt werden, dass man den Betongurt als zwei im Stahlträger eingespannte Plattenhälften berücksichtigt. Die Belastung ist die eingeprägte Krümmung des Stahlträgers. Die Belastung der Platte ist die eingeprägte (mit dem Modell nach der

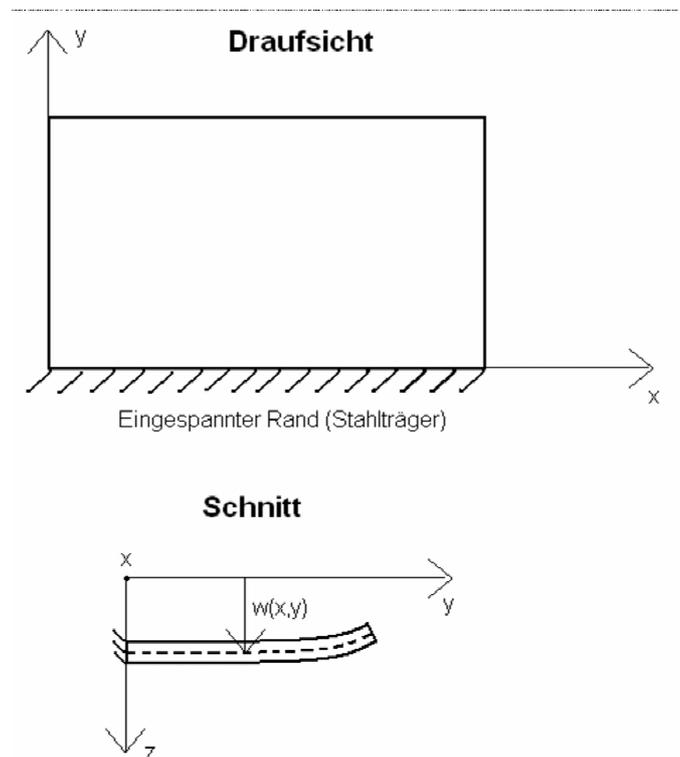


Abbildung 7.1: Modellierung des Betongurtes

Scheibentheorie berechnete) Krümmung des Stahlträgers an der Einspannstelle. Die Randbedingungen am eingespannten Rand lauten also :

$$w(x=0, y=0) = w(x=L, y=0) = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \sum_m \kappa_m \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (7.3)$$

Die Differentialgleichung der dünnen Platte (ohne Schubverzerrung) lautet :

$$\Delta \Delta w = 0 \quad (7.4)$$

Sie ist homogen, da die Platte durch keine Lasten quer zur Plattenmittelebene belastet wird. Die Lösung der Gleichung ist :

$$w(x, y) = \sum_m -\frac{\kappa_m}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} e^{-\frac{m\pi y}{L}} \left(y \frac{m\pi}{L} + 1\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (7.5)$$

Hinweis : Diese Lösung widerspricht den Randbedingungen an den freien Rändern. Besonders für den Rand $y = b$ sind die Momente m_{yy} null nur, wenn $b = \infty$ ist. Sie ist nur eine Näherung. Die zu erwartende Abweichung im globalen Moment der Betonplatte von der exakten Lösung sollte jedoch klein bleiben, da nicht die lokalen Momente sondern ihr Integral betrachtet werden. Dann ergibt sich das Moment in der Betonplatte :

$$m_{xx} = K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (7.6)$$

$$m_{xx} = K \sum_m \kappa_m e^{-\frac{m\pi}{L} y} \left(y \frac{m\pi}{L} + 1 + \nu \left[1 - y \frac{m\pi}{L} \right] \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (7.7)$$

$$M_c = 2 \int_{y=0}^{y=b} m_{xx} dy \quad (7.8)$$

$$M_c = 2K \sum_m \left[2 \frac{L}{m\pi} (1 - e^{-\frac{m\pi}{L} b}) - b e^{-\frac{m\pi}{L} b} (1 - \nu) \right] \kappa_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (7.9)$$

Es muss jetzt die κ_m Werte berechnet werden. Die Krümmung des Stahlträgers beträgt :

$$\kappa = \frac{M_a}{E_a I_a} = \frac{N_c z_c}{E_a I_a} \quad (7.10)$$

wo N_c mit den Formeln des Kapitels 2 berechnet werden kann. Man braucht nur, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$ durch $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ zu ersetzen. Es ist also möglich die Berechnung zum Ende zu bringen, der Weg zum Ergebnis ist jedoch lang und schwierig. Übrigens müssen die Ergebnisse geprüft werden, da in der Ableitung einige Vereinfachungen enthalten sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Chwalla, E. : Die Formeln zur Berechnung der voll mittragenden Breite dünner Gurt- und Rippenplatten, Der Stahlbau 9, Beilage zur Zeitschrift die Bautechnik, 1936
- [2] Hauser, A. : Diplomarbeit : Parameterstudien mit einem analytischem Modell zur Berechnung der primären Schwindspannungen von Verbundträgern
- [3] Fink, J. : Studienblätter zur Vorlesung Stahlbau 2 (Stahl- und Verbundhochbau), 2007
- [4] Aubry, D., Gautier, P.E. : Mécanique I, Mécanique des milieux continus, cours de l'Ecole Centrale Paris, Kapitel 7.5, 2003-2004
- [5] Aubry, D. : Mécanique 2, Approches énergétiques dans les solides déformables et rigides, Kapitel 2, 2005-2006
- [6] Tutorial der Firma Sofistik : SSD, Sofistik Structural Desktop, Version 10.26-23