

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der
Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt
(<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the
main library of the Vienna University of Technology
(<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).

Atmosphärische Drehimpulsfunktionen berechnet aus Daten des ECMWF

Diplomarbeit Müller Martin

Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Zusammenfassung	5
1.2	Abstract	5
1.3	Aufgabenstellungen	6
2	Theoretische Grundlagen	9
2.1	Die Erdorientierungsparameter	9
2.1.1	Nutation	9
2.1.2	Length of Day (LOD)	10
2.1.3	Polbewegung	10
2.1.4	Die Erdrotationsparameter	11
2.1.5	Der Erdrotationsvektor	11
2.2	Herleitung der Drehimpulsfunktionen	19
2.2.1	Die Liouville-Gleichung	19
2.2.2	Die Anregungsfunktionen	20
2.2.3	Die Drehimpulsfunktionen	21
2.3	Der inverse Barometereffekt	28
2.4	Drehimpulsfunktion und Erdrotationsparameter	29
2.4.1	Drehimpulsfunktion und LOD	30
2.4.2	Drehimpulsfunktion und Polbewegung	30
3	Praktische Umsetzung	33
3.1	Zeitreihe der Drehimpulsfunktionen	33
3.1.1	Eingabedaten	33
3.1.2	Berechnungsvarianten	35
3.1.3	Berechnungsergebnisse	38
3.2	Polbewegung	46
3.2.1	Theoretische Reaktion der Polbewegung auf die Drehimpulsfunktion	46
3.2.2	Einfluss der Free Core Nutation FCN	53
3.2.3	Vergleich zwischen beobachteter und berechneter Polbewegung	53
3.3	Length of Day (LOD)	69
3.4	Schlussfolgerungen	71

A	Drehimpulsfunktion und Polbewegung	75
B	Schreibweise und Variablennamen	79
	B.1 Schreibweise von Variablensymbolen	79
	B.2 Verwendete Variablennamen	79
C	Verwendete Konstanten	83

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Diplomarbeit werden aus Integralen der Dichte und des Windfeldes über die Atmosphäre, genannt Drehimpulsfunktionen, Änderungen der Erdrotationsparameter Tageslänge (LOD) und Polbewegung berechnet. Die Eingabedaten stammen vom ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts). Es werden insgesamt 14 Berechnungsvarianten verwendet und die Ergebnisse mit den geodätischen Beobachtungen des CONT05-Beobachtungsprogrammes (September 2005), der Zeitreihe C04 und dem Bulletin B des IERS (International Earth Rotation and Reference System Service) sowie mit ähnlichen Berechnungen aus NCEP-Daten (National Centers for Environmental Prediction) verglichen. Im Fall der Polbewegung werden die Vergleiche sowohl zwischen berechneten und beobachteten Koordinaten angestellt (Integrationsansatz) als auch zwischen den Drehimpulsfunktionen, wie sie aus Atmosphärendaten und der beobachteten Polbewegung berechnet werden können (direkter Ansatz). Die besten RMS-Abweichungen liegen im direkten Ansatz bei 30 mas, im Integrationsansatz bei 0.7 mas. Die besten RMS-Abweichungen von LOD liegen bei 22 μ s. Die besten Ergebnisse sind mit der C04-Zeitreihe zu erzielen, die hohe Auflösung der CONT05-Zeitreihen bringen wegen des starken Rauschens keinen Genauigkeitsgewinn. Für die Polbewegung sind NCEP-Daten etwas besser, für LOD bringen ECMWF-Daten bessere Ergebnisse, da sie höher hinaufreichen. In Zukunft sind Fortschritte bei der Berechnung der Erdrotationsparameter aus geophysikalischen Größen für Perioden länger als 1 Tag durch zusätzliche Einbeziehung der Ozeaneffekte und die Bearbeitung längerer Zeitreihen zu erzielen.

1.2 Abstract

In this paper the variations of earth rotation parameters, length of day LOD and polar motion, are calculated from integrals of pressure and wind fields over

the atmosphere, called atmospheric angular momentum functions. Input data are from ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts). 14 ways of calculation are applied, results are compared with geodetic observations of CONT05 (September 2005), C04 series and Bulletin B data of IERS (International Earth Rotation and Reference System Service) as well as with similar calculations using NCEP data (National Centers for Environmental Prediction). In terms of polar motion, comparison was done between calculated and observed coordinates (integration approach) as well as between angular momentum functions derived from atmosphere and observation (direct approach). Best RMS deviations are about 30 mas with direct approach and about 0.7 mas with integration approach. Best RMS deviations of LOD are about 22 μ s. Best results were achieved using C04 series, the high resolution of CONT05 observations was of no advantage due to noise. In terms of polar motion, NCEP data are slightly better, in terms of LOD, ECMWF data are better, because they extend higher up to the atmosphere. In future, advance in calculation of earth rotation parameters from geophysical data should be done for periods longer than one day including influence of oceans too and using longer data series.

1.3 Aufgabenstellungen

Die Drehimpulsfunktionen sind Integrale der Dichte und des Windfeldes über die Atmosphäre. Luftdichte und Winde sind sehr variabel und erzeugen ebenso variable Trägheitsmomente und Drehimpulse. Diese bewirken über die Konstanz des Gesamtdrehimpulses der Erde Variationen von Richtung und Länge des Erdrotationsvektors relativ zum erdfesten Bezugssystem TRS: Polbewegung und Tageslänge. Die Polbewegung wird in ebenen Koordinaten (x, y) als Abweichung vom Pol des TRS angegeben, die Tageslänge (LOD) als Abweichung von der nominalen Tageslänge. Diese drei Unbekannten werden auch unter dem Namen "Erdrotationsparameter" zusammengefasst. Sie werden zwar nicht nur von der Atmosphäre beeinflusst, ihr Anteil ist aber für Zeitspannen von mehreren Monaten sehr groß und kann aus den Drehimpulsfunktionen berechnet werden.

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Bestimmung der Drehimpulsfunktionen aus den Daten des ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts). Diese bestehen für verschiedene Druckniveaus aus geopotentieller Kote, Temperatur, spezifischer Feuchte, breitenkreisparallelen und meridionalen Komponenten der Windgeschwindigkeit sowie aus dem Druck und der geopotentiellen Kote an der Oberfläche. Die Daten sind in Form von Kugelfunktionen gespeichert und können in beliebigen räumlichen Auflösungen abgefragt werden.

Im Einzelnen sollen folgende Aufgaben gelöst werden:

- Bestimmung der Massenterme der Drehimpulsfunktionen. Dabei handelt es sich um die vom Wind unabhängigen Terme. Sie sollen sowohl als räumliches Integral über Länge, Breite und Radius bestimmt werden, als auch als Oberflächenintegral über den Druck an der Erdoberfläche.

- Bestimmung der Bewegungsterme der Drehimpulsfunktionen. Diese hängen auch vom Wind ab. Sie können nur als räumliches Integral berechnet werden.
- Die radiale Komponente der räumlichen Integrale soll in zwei Varianten gerechnet werden, eine über den Druck, eine andere über die Radiuslänge.
- Alle Integrale werden in verschiedenen räumlichen Auflösungen gerechnet.
- Vergleich der Ergebnisse mit den aus geodätischen Beobachtungen bestimmten Erdrotationsparametern.

Zur Kontrolle werden dabei verwendet:

- Die stündlich geodätisch bestimmten Erdrotationsparameter aus den Ergebnissen des Beobachtungsprogrammes CONT05 (12.9.-27.9.2005) und anschließender weiterer Beobachtungen bis 30.9. in der selben zeitlichen Auflösung.
- Die täglichen Erdrotationsparameter seit 1962 aus der Zeitreihe C04 des IERS (International Earth Rotation and Reference System Service).
- Viermal am Tag die Drehimpulsfunktionen aus der NCEP Reanalysis 2005, berechnet aus Daten der NCEP (National Centers for Environmental Prediction) für den Zeitraum CONT05.
- Die täglichen Drehimpulsfunktionen des Special Bureau for Atmosphere des IERS aus Daten der NCEP seit 1962.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

2.1 Die Erdorientierungsparameter

Zur Transformation von erdfesten in raumfeste Koordinaten muß die Bewegung der Erde gegen den inertialen Raum bekannt sein. Dabei hat das hier verwendete raumfeste Koordinatensystem GCRS¹ den selben Ursprung im Schwerpunkt der Erde wie das erdfeste System TRS² und die Transformation besteht nur aus drei Drehungen. Die Bewegung der Erde besteht nicht nur aus einer gleichförmigen Rotation, sondern auch aus Abweichungen davon, die durch fünf Erdorientierungsparameter beschrieben werden:

2.1.1 Nutation

Bei der Bewegung der Erde um die Sonne halten sich Fliehkraft und Anziehungskraft nur im Schwerpunkt des Systems Erde-Mond die Waage. Die sonst resultierenden, die Erde deformierenden Kräfte können in eine radiale und eine tangential Komponente aufgespalten werden. Die tangentialen Komponenten bewirken wegen der Abplattung ein Drehmoment, auf das die Erde nach den Gesetzen eines Kreisels unter Zwang reagiert. Ähnliche Auswirkungen haben der Mond (größere) und die Planeten (sehr geringe). In erster Linie entsteht eine kegelförmige, rückläufige Bewegung der Rotationsachse um den Ekliptikpol: Öffnungswinkel des Kegels $\epsilon \approx 23.5^\circ$, Winkelgeschwindigkeit der Bewegung $\approx 50''/\text{Jahr}$. Diese gleichförmige Bewegung hieß früher Präzession, der zahlreiche periodische Bewegungen überlagert sind (Nutation). Präzession und Nutation werden auf die Standardepoche J2000 bezogen und heute in einem Präzessions-Nutationsmodell zusammengefasst, das im folgenden Text vereinfachend als Nutation bezeichnet wird.

Der weitaus größte Nutationsterm ist eine elliptische Bewegung mit einer Periode von 18.6 Jahren und einer großen Halbachse von 9.2". Die Nutations-

¹Geocentric Celestial Reference System

²Terrestrial Reference System

parameter geben die aus der Bewegung resultierende Verdrehung des Äquators gegen die Ekliptik ($\Delta\epsilon$) und um den Ekliptikpol an ($\Delta\psi$). Sie können mit einem Nutationsmodell zum größten Teil aus der Bewegung der beteiligten Himmelskörper berechnet werden. Die verbleibenden Nutationszuschläge ($d\epsilon, d\psi < 1 \text{ mas}$) müssen durch Beobachtung bestimmt werden. In einer Tangentialebene an den vom Nutationsmodell berechneten Pol sind dX, dY die ebenen Koordinaten des CIP (Celestial Intermediate Pole). Dieser ist die Richtung des mittleren Drehimpulsvektors der Erde und entspricht in erster Näherung der Rotationsachse. Zwischen den Nutationszuschlägen und den auf den Pol des Nutationsmodells bezogenen Koordinaten des CIP bestehen die einfachen Beziehungen $dX = d\psi \cos \epsilon$ und $dY = d\epsilon$.

In einem Äquatorkoordinatensystem mit dem CIP als z-Achse und der x-Achse im Herbstäquinoktium, ist die Nutation an Bewegungen des GCRS-Pols zu erkennen (Abbildung 2.1 a,b).

2.1.2 Length of Day (LOD)

Durch Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit verändert sich die Tageslänge. Diese Änderung wird als Überschuß gegen die nominale Tageslänge von 86400 s angegeben. LOD kann in dUT1³ umgerechnet werden, das notwendig ist, um den Drehwinkel der Erde zu bestimmen.

2.1.3 Polbewegung

Rotations- und Figurenachse der Erde fallen nicht zusammen. Die Erde reagiert darauf als freier Kreisel: bei Abwesenheit externer Kräfte bleibt die Drehimpulsachse raumfest und wird von den anderen beiden Achsen umkreist, wobei stark vereinfachend eine starre Erde angenommen wurde. Als Modell dieser Situation kann man sich einen raumfesten Rastkegel vorstellen, dessen Achse mit der Drehimpulsachse der Erde zusammenfällt und auf dem ein erdfester Gangkegel abrollt, dessen Achse die Figurenachse der Erde ist. Beide Kegel berühren sich entlang der Erdrotationsachse. Der Öffnungswinkel des Rastkegels ist ca. 1 mas (3 cm), der des Gangkegels ca. 300 mas (10 m). Von der Erde aus gesehen umkreist der Rotationspol die Figurenachse einmal in 430 Tagen (Chandlerperiode der Polbewegung). Als Polbewegung angegeben wird aber nicht die Position des Rotationspols, sondern die des CIP in ebenen Koordinaten x, y auf einer Tangentialebene im Pol des TRF⁴.

In dem bereits zur Darstellung der Nutation verwendeten Koordinatensystem wirkt sich die Polbewegung als Bewegung des TRS-Pols aus, wobei sich nur die Vorzeichen von x, y umdrehen. Läßt man die Erdrotation außer acht, kann man so Nutation und Polbewegung im selben Koordinatensystem darstellen (Abbildung 2.1 c,e). Wäre das Modell aus Gang- und Rastkegel vollständig richtig, dann wäre der CIP auch genau die Drehimpulsachse und der TRS-Pol müsste sich auf einer genauen Kreisbahn bewegen mit einem Durchmesser

³UT = Universal Time

⁴Terrestrial Reference Frame (Realisierung des TRS)

$d = \Phi - \phi \approx 300$ mas, wobei Φ, ϕ die Öffnungswinkel von Gang- und Rastkegel sind. Der Rotationspol müsste sich auf einer Kreisbahn um den CIP bewegen, mit dem Öffnungswinkel des Rastkegels als Durchmesser (1 mas). Abbildung 2.1 d,e zeigt, daß auf der realen Erde die Größenordnungen dieser Bewegungen mit dem Modell übereinstimmen. Die Kreisbahn des Rotationspols verschimmt aber zu einer Scheibe, die Kreisbahn des TRS-Pols wird stark verformt.

2.1.4 Die Erdrotationsparameter

Von den gerade beschriebenen Erdorientierungsparametern werden LOD, x, y als Erdrotationsparameter bezeichnet. Wie am Ende des Abschnittes 2.1.3 bereits beschrieben, weicht die tatsächliche Polbewegungsbahn deutlich ab von der Polbewegung einer starren Erde, die dem Modell aus Rast- und Gangkegel folgen würde. Ursache dafür ist, daß die reale Erde deformierbar ist, daß Relativdrehimpulse entstehen (Winde, Ozeanströmungen, Strömungen im flüssigen Kern, ...) und daß sich ihr Trägheitsmoment ständig ändert (Luftdruckschwankungen, Massenverlagerungen durch jahreszeitliche Eisbildung, ...). Das gleiche gilt auch für LOD, welche bei einer starren Erde konstant wäre.

Einen Überblick über die möglichen Einflüsse geben für LOD Abbildung 2.2 und für die Polbewegung Abbildung 2.3. Die Abbildungen lassen erkennen, daß für Perioden, die länger als ein Tag bis zu ein paar Monaten sind, die Atmosphäre den größten Einfluss ausübt, woraus sich das Thema der vorliegenden Arbeit ergibt. Eine Ausnahme sind die monatlichen und vierzehntägigen Gezeiten der festen Erde, die auf LOD einen sehr starken Einfluss ausüben. Schwächer als die Atmosphäre wirken auch die Ozeane auf die Erdrotationsparameter. Auf die Polbewegung kommt ihr Einfluss aber dem der Atmosphäre deutlich näher, als das bei LOD der Fall ist. Verwendet man nur Atmosphärendaten, können darum LOD-Schwankungen genauer berechnet werden als die Polbewegung.

Die Einflüsse der Atmosphäre auf die Erdrotationsparameter sind vor allem jahreszeitlicher Natur. Auf LOD üben von den Zustandsgrößen der Atmosphäre die zonalen Winde den stärksten Einfluss aus, z.B. [1, 8, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 23]. Für die Polbewegung spielt dagegen der Luftdruck die größte Rolle, vor allem die jährlich wiederkehrenden winterlichen Hochdruckgebiete über Sibirien, z.B. [8, 17, 18, 20].

Es bleibt noch zu erwähnen, daß es neben den periodischen Schwankungen auch stetig fortschreitende Trends gibt: LOD wird durch die Gezeitenreibung um 1.8 ms/Jahrhundert länger [22], der Pol bewegt sich um 3.51 mas/Jahr Richtung Kanada wegen isostatischer Reaktion der festen Erde auf das Schmelzen des Eisschildes nach der letzten Eiszeit [11, 12].

2.1.5 Der Erdrotationsvektor

Berechnung aus Polbewegung und Nutationszuschlag

Wie zu Beginn in der Aufgabenstellung beschrieben, wird in der vorliegenden Arbeit die aus der atmosphärischen Drehimpulsfunktion berechnete Polbewe-

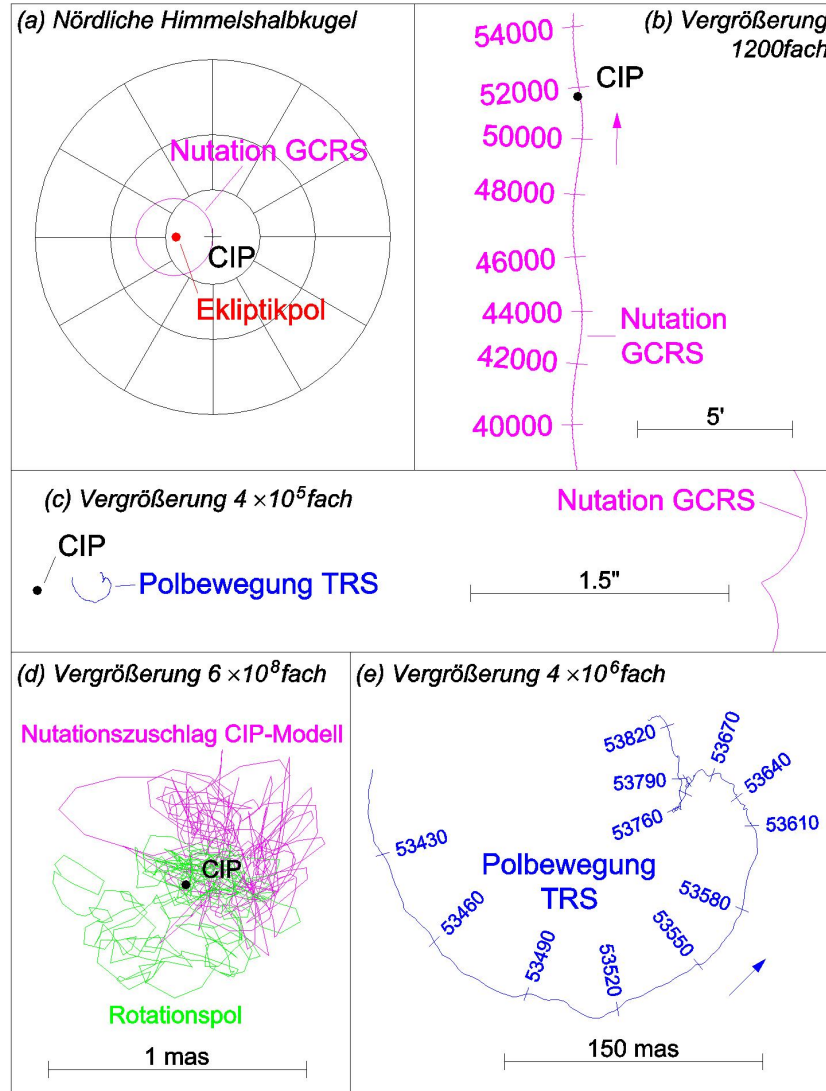


Abbildung 2.1: Auswirkung von Nutation und Polbewegung in einem konventionellen Äquatorsystem mit CIP als z-Achse, Herbstäquinoktium als x-Achse, Sternzeit in Greenwich 0 h, Zeitangaben als MJD (Zeitraum von CONT05: MJD 53625-53643). (a) großmaßstäbige Bewegung des GCRS-Pols um den Ekliptikpol als Folge der Nutation, (b) Details der Nutation, (c) und (e) genäherte Kreisbewegung des TRS-Pols als Folge der Polbewegung, (d) Rotationspol und Nutationszuschlag (vom Nutationsmodell berechneter CIP) für den auch in (e) dargestellten Zeitraum. Quellen: Nutation: IAU SOFA Software Library, Nutationszuschläge und Polbewegung: Zeitreihe C04 des IERS, Rotationspol: Formel (2.15).

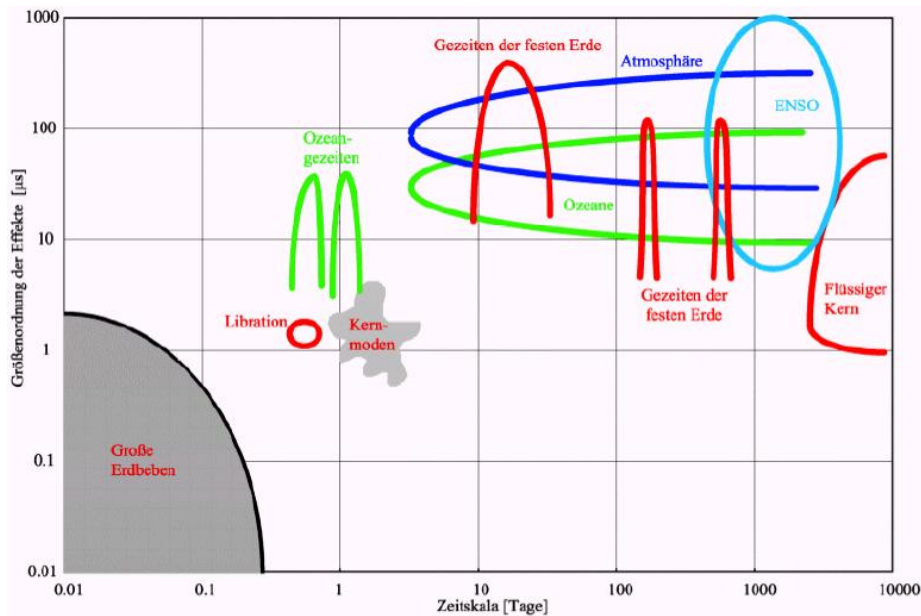


Abbildung 2.2: Einflüsse auf UT1 (über (3.18) in LOD umzurechnen). Quelle: <ftp://gemini.gsfc.nasa.gov/pub/core/fig1.ps>, modifiziert von [25].

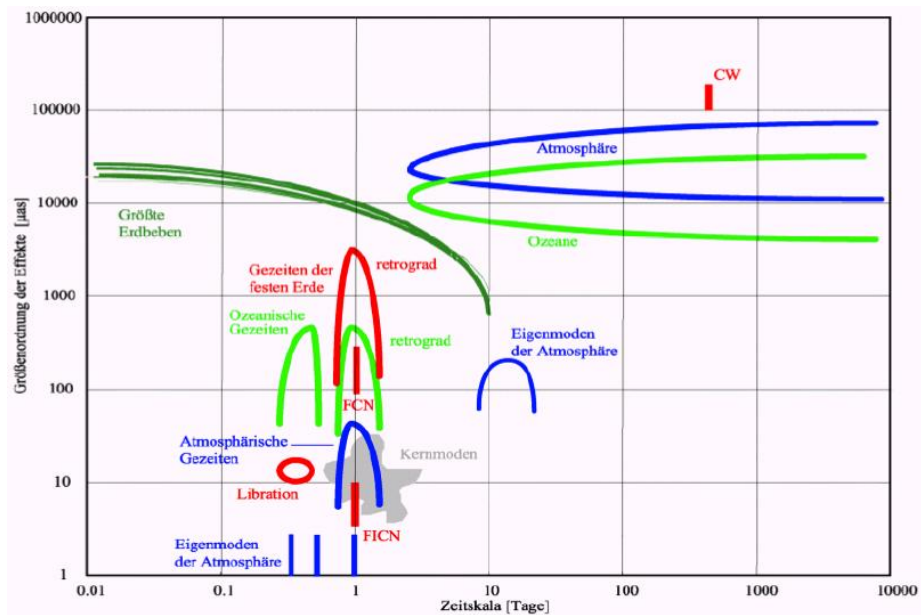


Abbildung 2.3: Einflüsse auf die Polbewegung. Quelle: <ftp://gemini.gsfc.nasa.gov/pub/core/fig2.ps>, modifiziert von [25].

gung mit der geodätisch beobachteten verglichen. Aus der Drehimpulsfunktion wird zunächst die Bewegung des Rotationspols bestimmt, geodätisch aber die Bewegung des CIP. Diese beiden Punkte unterscheiden sich um mehrere mas. Für die Themenstellung dieser Arbeit muß der Einfluss der Nutation auf die Bewegung des Rotationspols abgezogen werden – siehe unten, weshalb der Unterschied in Abbildung 2.1 d nur mehrere 0.1 mas beträgt. Das entspricht etwa der Messgenauigkeit von VLBI, liegt aber deutlich über der Genauigkeit einer GPS-bestimmten Polbewegung (0.05-0.07 mas [25]). Es ist darum zur gegenseitigen Umrechnung eine Beziehung zwischen den Koordinaten des CIP und des Rotationspols notwendig, um die es in diesem Abschnitt geht. Der Verfasser folgt dabei [4].

Man geht von zwei Koordinatensystemen aus, die den Ursprung gemeinsam haben und von denen sich System S gegen System S_0 mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_0$ dreht. Die Koordinatentransformation von S_0 nach S geht mit einer zeitabhängigen Drehmatrix:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

Die Geschwindigkeit eines im System S_0 ruhenden Punktes in S kann auf zwei Arten berechnet werden: entweder durch Ableitung von (2.1) oder als Kreuzprodukt mit $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_0$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{x}_0 &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1} &= \mathbf{C} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dabei sind die ω_i die drei Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$, die zugleich die Elemente der schiefsymmetrischen Matrix $\mathbf{C}$ bilden. Gleichung (2.3) ermöglicht es damit, bei gegebener Rotationsmatrix die Komponenten des zugehörigen Rotationsvektors zu berechnen.

Die Transformation vom GCRS in das TRS wird über mehrere Multiplikationen mit zeitabhängigen Drehmatrizen ausgeführt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W} \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad (2.4)$$

Hier sind $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$ Ortsvektoren im TRS und GCRS. Die Drehmatrizen haben folgende Bedeutung:

- $\mathbf{P}$ transformiert vom GCRS ins raumfeste IRS⁵: Pol im CIP, Orientierung durch die Bedingung des “Non-rotating Origin“ und den Winkel $d\theta''$, siehe weiter unten. Sie berücksichtigt die seit der Festlegung des GCRS abgelaufene Nutation.

⁵Intermediate Reference System

- **S** transformiert vom raumfesten ins erdfeste IRS, was im wesentlichen eine Drehung im CIP um den Winkel der Sternzeit θ ist.
- **W** transformiert vom erdfesten IRS ins TRS. Sie berücksichtigt die seit der Festlegung des TRS-Pols abgelaufene Polbewegung.

Für die folgenden Schritte wird das Koordinatensystem mit dem Pol des Nutationsmodells als Modellreferenzsystem MRS bezeichnet (violette Kurve in Abbildung 2.1 d). Es ist gegen das raumfeste IRS um die kleinen Winkel dX, dY verdreht, in denen die Nutationszuschläge stecken. Damit können die Rotationen in (2.4) umgruppiert werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{M} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{Z} \mathbf{M} &= \mathbf{P} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{W} \mathbf{S}\end{aligned}$$

- **M** transformiert vom GCRS ins MRS,
- **Z** transformiert vom MRS ins raumfeste IRS.

Setzt man $\mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{M} = \mathbf{R}$, können über (2.3) und (2.2) die Komponenten des Rotationsvektors berechnet werden, der sich aus den Drehungen ergibt. Dazu muß zuerst die Matrix **C** bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{M}) (\mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{M})^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A} \mathbf{Z} \dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{C}' + \mathbf{C}'' + \mathbf{C}'''\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\tag{2.6}$$

Dabei wurde **C** in eine Summe von drei Matrizen zerlegt, aus denen sich die Beiträge von Polbewegung, Nutationszuschlag und Nutationsmodell zum Rotationsvektor ergeben.

Der Beitrag der Polbewegung steckt in

$$\mathbf{C}' = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}.\tag{2.7}$$

Um ihn berechnen zu können, muß man **A** als Funktion der gegebenen Größen $x, y, \theta, d\theta'$ ausdrücken. Der Winkel $d\theta'$ ist sehr klein. Er bewirkt im erdfesten IRS eine Verdrehung um den CIP, die die Einhaltung der Bedingung des “Non-rotating Origin“ sicherstellt: die Verdrehung zwischen TRS und erdfestem IRS hat dadurch keine Drehkomponente um den CIP.

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_2(-x) \mathbf{R}_1(-y) \mathbf{R}_3(\theta + d\theta')\tag{2.8}$$

Die Drehmatrizen **R_i** bewirken Drehungen um die Koordinatenachse i und den im Argument angegebenen Winkel. Nach [4] gelten folgende Größenordnungen:

$$\begin{aligned}\left| \frac{\dot{x}}{\Omega} \right|, \left| \frac{\dot{y}}{\Omega} \right|, \left| \frac{\dot{\theta}}{\Omega} - 1 \right| &\leq 10^{-8} \text{ rad} \\ |x|, |y| &\leq 10^{-6} \text{ rad}\end{aligned}$$

Hier ist Ω die konstant gesetzte durchschnittliche Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Setzt man (2.8) in (2.7) ein, entwickelt die von den Drehmatrizen stammenden trigonometrischen Funktionen in Potenzreihen und setzt alle Produkte zwischen den angegebenen kleinen Größen Null, erhält man:

$$\boldsymbol{\omega}' = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\dot{y} + \Omega x \\ -\dot{x} - \Omega y \\ \Omega + \partial\Omega \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Es ist üblich, statt $\boldsymbol{\omega}'$ die dimensionslose Größe

$$\mathbf{m}' = \frac{\boldsymbol{\omega}'}{\Omega}$$

anzugeben. Die dritten Komponenten von $\boldsymbol{\omega}'$ und $\mathbf{m}'$ sind annähernd konstant ($m'_3 \approx 1$), $\mathbf{m}'$ kann darum wie die Polbewegung (x, y) in ebenen Koordinaten angegeben werden. So können komplexe Zahlen verwendet und (2.9) vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} &= x - iy \\ \hat{\mathbf{m}}' &= m'_1 + i m'_2 \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{m}}' &= \hat{\mathbf{p}} - i \frac{\dot{\hat{\mathbf{p}}}}{\Omega} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Gleichung (2.10) stellt den von der Polbewegung stammenden Anteil an den Koordinaten der Rotationsachse dar.

Der Beitrag $\mathbf{m}''$ des Nutationszuschlages steckt nach (2.5) und (2.6) in

$$\mathbf{C}'' = \mathbf{A} \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.11)$$

Hier muss man noch $\mathbf{Z}$ als Funktion der gegebenen Größen $dX, dY, d\theta''$ ausdrücken. Der kleine Winkel $d\theta''$ hat im raumfesten IRS die gleiche Funktion, wie $d\theta'$ im erdfesten IRS.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}_3(d\theta'') \mathbf{R}_1(-dY) \mathbf{R}_2(dX) \quad (2.12)$$

Nach [4] gelten die Größenordnungen:

$$\begin{aligned} |d\theta' + d\theta''| &\leq 5 \times 10^{-10} \text{ rad} \\ |dX|, |dY| &\leq 10^{-6} \text{ rad} \end{aligned}$$

Die weitere Vorgangsweise ist wie bei der Bestimmung von $\mathbf{m}'$ mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= dX + i dY \\ \hat{\mathbf{m}}'' &= m''_1 + i m''_2 \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{m}}'' &= i \frac{\dot{\hat{\mathbf{n}}}}{\Omega} e^{i\theta} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Gleichung (2.13) stellt den vom Nutationszuschlag stammenden Anteil an den Koordinaten der Rotationsachse dar.

Nach (2.5) und (2.6) enthält $\mathbf{C}'''$ noch einen dritten Summanden $\mathbf{C}'''$, der vom Nutationsmodell herrührt:

$$\mathbf{C}''' = \mathbf{A} \mathbf{Z} \dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.14)$$

Daraus könnte noch ein $\mathbf{m}'''$ bestimmt werden, das im täglichen Bereich mit Abstand den größten Anteil an der Bewegung des Rotationspols hat (bis zu 85 cm). Die Größe von $\mathbf{m}'''$ wird über $\mathbf{M}$ vom Nutationsmodell bewirkt und damit – abgesehen von den täglich retrograden Ozeangezeiten – ausschließlich von äußeren Kräften, die in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt werden dürfen, da keine Einflüsse der Atmosphäre enthalten sind. In (2.14) treten aber auch noch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{Z}$ auf, in denen solche Einflüsse enthalten sein können. Man kann darum $\mathbf{C}'''$ in eine Summe aufspalten:

$$\mathbf{C}''' = \mathbf{C}_{\mathbf{M}}''' + \delta \mathbf{C}''',$$

wobei $\mathbf{C}_{\mathbf{M}}'''$ den Anteil der externen Kräfte angibt, der hier nicht berücksichtigt werden darf. Er wäre aus (2.14) zu berechnen, wenn man Polbewegung und Nutationszuschläge Null setzt. Der zweite Summand $\delta \mathbf{C}'''$ kann Atmosphäreinflüsse enthalten, die einen kleinen Anteil $\delta \mathbf{m}'''$ an der Bewegung des Rotationspols hervorrufen. Nach [4] ist $|\delta \mathbf{m}'''| \approx 2 \times 10^{-10}$ mas, was weit unter jeder Messgenauigkeit liegt. Es reicht darum aus, zur Berechnung des Rotationspols nur die Anteile von Polbewegung und Nutationszuschlag zu berücksichtigen und seine Koordinaten ergeben sich aus der Summe von (2.10) und (2.13):

$$\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{\Omega} \left(\dot{\hat{\mathbf{p}}} - \dot{\hat{\mathbf{n}}} e^{-i\theta} \right) \quad (2.15)$$

Frequenzspektrum

Wendet man auf Polbewegung $\hat{\mathbf{p}}(t)$ und Nutationszuschlag $\hat{\mathbf{n}}(t)$ die Fouriertransformation an, erhält man komplexe Funktionen der Frequenz $\hat{\mathbf{P}}(\nu)$ und $\hat{\mathbf{N}}(\nu)$. Deren inverse Fouriertransformierte ergeben wieder Polbewegung und Nutationszuschlag:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{P}}(\nu) e^{i\nu t} d\nu \\ \hat{\mathbf{n}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{N}}(\nu) e^{i\nu t} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{N}}(\nu + \Omega) e^{i(\nu + \Omega)t} d\nu \end{aligned}$$

Setzt man das nach [8] in (2.15) ein und $\theta = \Omega t$, erhält man:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{m}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{P}}(\nu) e^{i\nu t} - \\
 &\quad \frac{i}{\Omega} \left(\hat{\mathbf{P}}(\nu) i\nu e^{i\nu t} - \hat{\mathbf{N}}(\nu + \Omega) i(\nu + \Omega) e^{i(\nu + \Omega)t} e^{-i\Omega t} \right) d\nu \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} \frac{\nu + \Omega}{\Omega} \left(\hat{\mathbf{P}}(\nu) - \hat{\mathbf{N}}(\nu + \Omega) \right) d\nu \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} \frac{\nu + \Omega}{\Omega} \hat{\mathbf{A}}(\nu) d\nu
 \end{aligned}$$

Man sieht, $\hat{\mathbf{P}}(\nu)$ und $\hat{\mathbf{N}}(\nu + \Omega)$ treten in diesem Ausdruck für die Bewegung der Rotationsachse nur in Form ihrer Differenz auf. Bestimmt man nur die Kinematik des Vorgangs, was ja bei allen eingesetzten Beobachtungsverfahren der Fall ist, kann jede Frequenz ν der Polbewegung – abgesehen von einer Phasenverschiebung um 180° – auch als Frequenz $\nu + \Omega$ des Nutationszuschlages angesehen werden, ohne daß ein Widerspruch zur Bewegung der Rotationsachse entsteht. Zwar muß für jede gewählte Frequenzaufteilung zwischen Polbewegung und Nutationszuschlag ein anderer CIP definiert werden, das ist aber keine Einschränkung, da er sowieso nur das Ergebnis einer Definition sein kann.

Nach den IAU-Resolutionen 2000 ist die Frequenzaufteilung so geregelt, daß Bewegungen des CIP mit Frequenzen zwischen -1.5Ω (entspricht einer retrograden Periode von 48 h) und -0.5Ω (retrograde Periode von 16 h), gemessen im erdfesten System TRS, zur Nutation gezählt werden, alles andere zur Polbewegung.

2.2 Herleitung der Drehimpulsfunktionen

Der Verfasser hält sich zunächst im wesentlichen an [2]. Dort werden beim Aufstellen der Drehimpulsfunktionen nur Mantel und Kruste berücksichtigt, nicht aber der Erdkern, weshalb unter dem Begriff “Erde“ nur Mantel und Kruste zu verstehen sind, bevor im Abschnitt 2.2.3 die deformierbare Erde behandelt wird. Das verwendete erdfeste Koordinatensystem liegt in den Hauptträgheitsachsen der Erde. Das inertielle Koordinatensystem hat z-Achse und Ursprung mit dem erdfesten System gemeinsam und ist um die Erdrotation gegen dieses verdreht. Die Bewegung der Erde um die Sonne wird nicht berücksichtigt. Variablen, die sich auf das inertielle System beziehen, werden mit dem Index 0 gekennzeichnet.

2.2.1 Die Liouville-Gleichung

Im Inertialsystem kann ein auf die Erde wirkendes Drehmoment $\mathbf{L}_0$ als Drehimpulsänderung $\dot{\mathbf{H}}_0$ so berechnet werden:

$$\mathbf{L}_0 = \dot{\mathbf{H}}_0$$

Im erdfesten System müssen alle Größen mit der zeitabhängigen Rotationsmatrix $\mathbf{R}^T$ multipliziert werden:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^T \mathbf{H}) = \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{H} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{H}} \quad (2.16)$$

Für einen Drehimpuls, der im erdfesten System konstant ist, gilt:

$$\dot{\mathbf{H}}_0 = \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{H} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{H}_0 = (\mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{R}^T \mathbf{H}) = \mathbf{R}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}) \quad (2.17)$$

Setzt man (2.17) in (2.16) ein, und multipliziert von links mit $\mathbf{R}$ erhält man die Eulergleichung für die Reaktion der Erde auf ein externes Drehmoment:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} + \dot{\mathbf{H}} \quad (2.18)$$

Der Drehimpuls kann zerlegt werden in einen Teil, der nur von Trägheitstensor $\mathbf{I}$ und Rotationsgeschwindigkeit der Erde $\boldsymbol{\omega}$ bestimmt wird ($\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$) und in einen zweiten, der von Massenbewegungen auf der Erde relativ zur Rotation bestimmt wird (Relativdrehimpuls $\mathbf{h}$):

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{I} = \int_V \rho \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_1x_2 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_1x_3 & -x_2x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} dV \quad (2.20)$$

$$\mathbf{h} = \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV \quad (2.21)$$

Sowohl $\mathbf{h}$ als auch $\mathbf{I}$ enthalten über Druckunterschiede und Winde Anteile von der Atmosphäre, wobei ρ die Dichte ist. Setzt man (2.19) in (2.18) ein, erhält man die Liouville-Gleichung:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) + \frac{d}{dt} (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) \quad (2.22)$$

2.2.2 Die Anregungsfunktionen

Der Trägheitstensor (2.20) kann in einen zeitunabhängigen Anteil (Diagonalmatrix) und in zeitabhängige kleine Abweichungen davon aufgespalten werden, der Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$ in einen Vektor in der z-Achse mit der Länge Ω und kleine Abweichungen davon:

$$\mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix} + \Delta \mathbf{I}(t) \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ 1 + m_3(t) \end{pmatrix} \Omega \quad (2.24)$$

Für den zeitunabhängigen Teil des Trägheitstensors wird Rotationssymmetrie vorausgesetzt, A_m und C_m sind äquatoriales und polares Hauptträgheitsmoment von Erdmantel und Kruste. Für Erde und Atmosphäre werden folgende Beziehungen angenommen:

$$|\Delta I_{ij}| \ll C_m, \quad |h_i| \ll \Omega C_m, \quad |m_i| \ll 1, \quad |\dot{m}_i| \ll \Omega$$

Wenn man dabei die jeweils links stehenden Größen als vernachlässigbar klein ansieht und Produkte zwischen ihnen Null setzt, werden die Komponenten der Liouville-Gleichung (2.22) zum folgenden Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{m}_1}{\sigma_r} + m_2 &= \psi_2 \\ \frac{\dot{m}_2}{\sigma_r} - m_1 &= -\psi_1 \\ \dot{m}_3 &= \psi_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$$\sigma_r = \frac{(C_m - A_m)\Omega}{A_m}$$

σ_r ist die Frequenz der Polbewegung eines drehmomentfreien, starren Kreisel (Eulerfrequenz), die ψ_i heißen Anregungsfunktionen und sind wie folgt definiert:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\Omega^2 \Delta I_{13} + \Omega \Delta \dot{I}_{23} + \Omega h_1 + \dot{h}_2 - L_2}{\Omega^2 (C_m - A_m)} \\ \psi_2 &= \frac{\Omega^2 \Delta I_{23} - \Omega \Delta \dot{I}_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1}{\Omega^2 (C_m - A_m)} \\ \psi_3 &= \frac{-\Omega^2 \Delta I_{33} - \Omega h_3 + \Omega \int_0^t L_3 d\tau}{\Omega^2 C_m} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Beschränkt man sich bei den Ursachen für die Abweichungen $\Delta \mathbf{I}$ des Trägheitstensors und für den Relativdrehimpuls $\mathbf{h}$ auf die Atmosphäre und wird kein externes Drehmoment $\mathbf{L}$ angenommen, so können die Anregungsfunktionen aus Atmosphärendaten abgeleitet werden.

Wie aus (2.24) abzulesen ist, sind die m_i dimensionslose Verhältniszahlen, sie geben die Abweichung des Erdrotationsvektors von der z-Achse des gewählten Koordinatensystems (Polbewegung) und der nominalen Kreisfrequenz der Umdrehung Ω an. Die Komponenten m_1 und m_2 geben die Polbewegung an,

m_3 die Abweichung der Umdrehungsfrequenz, die sich in LOD umrechnen läßt. Es handelt sich um die Unbekannten des Differentialgleichungssystems (2.25). Zur Lösung werden zunächst komplexe Zahlen eingeführt:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{m}} &= m_1 + i m_2 \\
\Delta \hat{\mathbf{I}} &= \Delta I_{13} + i \Delta I_{23} \\
\hat{\mathbf{h}} &= h_1 + i h_2 \\
\hat{\mathbf{L}} &= L_1 + i L_2 \\
\hat{\psi} &= \psi_1 + i \psi_2 \\
&= \frac{\Omega^2 \Delta \hat{\mathbf{I}} - i \Omega \Delta \dot{\hat{\mathbf{I}}} + \Omega \hat{\mathbf{h}} - i \dot{\hat{\mathbf{h}}} + i \hat{\mathbf{L}}}{\Omega^2 (C_m - A_m)}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Die Lösung des Gleichungssystems (2.25) ist dann nach [2]:

$$\hat{\mathbf{m}}(t) = e^{i\sigma_r t} \left(\hat{\mathbf{m}}(0) - i \sigma_r \int_0^t \hat{\psi}(\tau) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau \right) \tag{2.28}$$

$$m_3 = \psi_3 + \text{const} \tag{2.29}$$

Da im folgenden nur die Anregungen durch die Atmosphäre untersucht werden, wird für das externe Drehmoment $\mathbf{L}$ von hier an der Nullvektor eingesetzt werden.

2.2.3 Die Drehimpulsfunktionen

Starre Erde

Der Nachteil der Anregungsfunktionen (2.26) ist, daß hier die Ableitungen von Abweichung des Trägheitstensors und Relativdrehimpuls nach der Zeit vorkommen. Nach [2] kann eine Lösung des Gleichungssystems (2.25) mit Hilfe von, aus den Anregungsfunktionen durch teilweise Integration abgeleiteten, Drehimpulsfunktionen angegeben werden. Dazu wird zunächst für $\hat{\psi}$ Gleichung (2.27) in das Integral von (2.28) eingesetzt und Abwesenheit eines externen Drehmomentes angenommen:

$$\Omega^2 (C_m - A_m) \int_0^t \hat{\psi}(\tau) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau = \int_0^t \left(\Omega^2 \Delta \hat{\mathbf{I}} - i \Omega \Delta \dot{\hat{\mathbf{I}}} + \Omega \hat{\mathbf{h}} - i \dot{\hat{\mathbf{h}}} \right) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau$$

Addiert und subtrahiert man $(\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}})_{\sigma_r} e^{-i\sigma_r \tau}$ zum Integranden, kann das Integral so umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left[\Omega(\Omega + \sigma_r) \Delta \hat{\mathbf{I}} + (\Omega + \sigma_r) \hat{\mathbf{h}} - \right. \\
&\quad \left. i(\Omega \Delta \dot{\hat{\mathbf{I}}} - i \Omega \sigma_r \Delta \hat{\mathbf{I}}) - i(\dot{\hat{\mathbf{h}}} - i \sigma_r \hat{\mathbf{h}}) \right] e^{-i\sigma_r \tau} d\tau = \\
&(\Omega + \sigma_r) \int_0^t (\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau - i \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left[(\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}) e^{-i\sigma_r \tau} \right] d\tau
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Integration und Differentiation im rechten Integral heben sich auf, die Ableitungen von $\Delta \hat{\mathbf{I}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ sind damit eliminiert. Die folgenden Größen werden neu eingeführt und heißen Drehimpulsfunktionen:

$$\underline{\hat{\chi}} = \underline{\chi}_1 + \mathbf{i} \underline{\chi}_2 = \frac{\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}}{\Omega (C_m - A_m)} = \frac{\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}}{\sigma_r A_m} \quad (2.31)$$

$$\underline{\chi}_3 = -\psi_3 \quad (2.32)$$

Die Drehimpulsfunktionen können in einen vom Wind (Relativdrehimpuls) unabhängigen Massenterm (P) und einen vom Wind abhängigen Bewegungsterm (W) zerlegt werden:

$$\underline{\hat{\chi}}^P = \frac{\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}}}{\sigma_r A_m} \quad (2.33)$$

$$\underline{\hat{\chi}}^W = \frac{\hat{\mathbf{h}}}{\sigma_r A_m} \quad (2.34)$$

$$\underline{\chi}_3^P = \frac{\Omega \Delta I_{33}}{\Omega C_m} \quad (2.35)$$

$$\underline{\chi}_3^W = \frac{h_3}{\Omega C_m} \quad (2.36)$$

Mit Hilfe von (2.30)-(2.32) können (2.28) und (2.29) umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}(t) &= e^{\mathbf{i} \sigma_r t} \left[\hat{\mathbf{m}}(0) - \mathbf{i} \sigma_r \left(1 + \frac{\sigma_r}{\Omega}\right) \int_0^t \underline{\hat{\chi}}(\tau) e^{-\mathbf{i} \sigma_r \tau} d\tau \right] - \\ &\quad \frac{\sigma_r}{\Omega} [\underline{\hat{\chi}}(t) - e^{\mathbf{i} \sigma_r t} \underline{\hat{\chi}}(0)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$m_3 = -\underline{\chi}_3 + \text{const} \quad (2.38)$$

Um die Drehimpulsfunktionen aus den Atmosphärendaten bestimmen zu können, müssen $\Delta \mathbf{I}$ und $\mathbf{h}$ über die Beziehungen (2.20) und (2.21) als Funktionen von Dichte und Windgeschwindigkeit ausgedrückt werden. Die darin enthaltenen Integrale werden in sphärischen Koordinaten numerisch über das Volumen der Atmosphäre ausgewertet:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\chi}} &= \frac{-\Omega}{\sigma_r A_m} \iiint \rho r^4 \sin \phi \cos^2 \phi e^{\mathbf{i} \lambda} d\lambda d\phi dr + \\ &\quad \frac{-1}{\sigma_r A_m} \iiint \rho r^3 (u \sin \phi + \mathbf{i} v) \cos \phi e^{\mathbf{i} \lambda} d\lambda d\phi dr \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} &= \underline{\hat{\chi}}^P + \underline{\hat{\chi}}^W \\ \underline{\chi}_3 &= \frac{1}{C_m} \iiint \rho r^4 \cos^3 \phi d\lambda d\phi dr + \\ &\quad \frac{1}{\Omega C_m} \iiint \rho r^3 u \cos^2 \phi d\lambda d\phi dr \\ &= \underline{\chi}_3^P + \underline{\chi}_3^W \end{aligned} \quad (2.40)$$

Deformierbare Erde, Erdkern und Ozeane

Bisher wurde unterstellt, daß die feste Erde (bestehend aus Mantel und Kruste) eine starre Kugel ist. Diese Annahme ist aber unrealistisch, es treten Deformationen auf, es gibt die Ozeane und einen flüssigen äußeren Kern, der nicht starr mit dem Mantel verbunden ist. Das hat zur Folge:

- Die über die Drehimpulsfunktionen aus (2.37) und (2.38) berechenbaren Änderungen des Rotationsvektors bewirken
 - Relativdrehimpulse des Kerns und
 - Änderungen im Trägheitstensor wegen der Verformungen durch die sich ändernden Zentrifugalkräfte.
- Änderungen im Trägheitstensor wegen der Verformungen durch veränderliche Auflast bei Massenverlagerungen in der Atmosphäre (Luftdruckänderungen).

Diese neu entstehenden Relativdrehimpulse und Änderungen des Trägheitstensors gehen in die Gleichungen (2.31) und (2.32) ein und verursachen dort ein etwas anderes Ergebnis für die Drehimpulsfunktion, was in Form von Korrekturen berücksichtigt werden muß.

Störeffekte veränderlicher Rotation (indirekte Effekte)

Deformation der festen Erde Die Auswirkung veränderlicher Rotation auf den Trägheitstensor $\Delta \mathbf{I}$ kann so bestimmt werden: Das externe Gravitationsfeld kann in Kugelfunktionen entwickelt werden, deren Koeffizienten zweiter Ordnung Funktionen der Elemente des Trägheitstensors sind. Nach [17] kann auch eine Änderung des Gravitationsfeldes wegen veränderter Rotation in Kugelfunktionen entwickelt werden. Berücksichtigt man dabei nur die Koeffizienten zweiter Ordnung, sind sie Funktionen der Komponenten des Rotationsvektors $\boldsymbol{\omega}$ und der Rotations-Lovezahl K_2 . Durch Gleichsetzen der entsprechenden Kugelfunktionskoeffizienten erhält man die Änderung des Trägheitstensors $\Delta \mathbf{I}^R$ wegen veränderter Rotation als Funktion von $\boldsymbol{\omega}$ und K_2 . Die hier benötigten Komponenten sind, wobei die äquatorialen Komponenten wieder als komplexe Zahl angegeben sind:

$$\Delta I_{13}^R + i \Delta I_{23}^R = \Delta \hat{\mathbf{I}}^R = K_2 \frac{\Omega^2 R^5}{3G} \hat{\mathbf{m}} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \Delta I_{33}^R &= K_2 \frac{\Omega^2 R^5}{3G} (1 + 2m_3) \\ K_2 &= 0.298 \end{aligned} \quad (2.42)$$

G ist die Gravitationskonstante.

Massenverlagerungen in den Ozeanen Nach [7] wird die von Rotationsänderungen bewirkte Massenverlagerung in den Ozeanen durch Ozean-Lovezahlen berücksichtigt, die in (2.41) und (2.42) zur Rotationslovezahl K_2 addiert werden müssen. Außerdem gibt [7] für ΔI_{33} einen von (2.42) abweichenden Ausdruck an:

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\mathbf{I}}^O &= (K_2 + \Delta K_{ocn,w}) \frac{\Omega^2 R^5}{3G} \hat{\mathbf{m}} \\ \Delta I_{33}^O &= \left[n_0 + \frac{4}{3}(K_2 + \Delta K_{ocn,s}) \right] \frac{\Omega^2 R^5}{3G} m_3 \\ n_0 &= 0.15501 \\ \Delta K_{ocn,w} &= 0.047715 \\ \Delta K_{ocn,s} &= 0.043228\end{aligned}$$

Hier sind $\Delta K_{ocn,w}$, $\Delta K_{ocn,s}$ die Ozean-Lovezahlen und n_0 berücksichtigt rein radiale Verformungen aus Termen des zentripetalen Potentials.

Relativdrehimpuls des Kerns Von hier an folgt die vorliegende Arbeit [11], wo Mantel und Kruste nicht mehr als unabhängig vom Kern angesehen werden. Alle bisher aufgestellten Gleichungen behalten volle Gültigkeit, beziehen sich aber nicht mehr allein auf Mantel und Kruste, sondern auf die gesamte Erde. Deshalb müssen in ihnen statt A_m, C_m die Hauptträgheitsmomente der gesamten Erde A, C eingesetzt werden, bevor sie weiterverwendet werden können. Das Koordinatensystem ist so orientiert, daß der Mantel keinen Relativdrehimpuls aufweist (mittleres Tisserand-System des Mantels), Atmosphäre, Ozeane und der Kern dagegen schon. Im zeitlichen Mittel muß dabei der Trägheitstensor $\mathbf{I}$ nach wie vor ein Diagonaltensor bleiben, von dem er selbst nur um kleine Differenzen $\Delta \mathbf{I}$ abweicht.

Bisher wurde angenommen, daß der Kern ein vom Mantel getrenntes System darstellt, was nicht realistisch ist. Setzt man aber, wie gerade beschrieben, in den für eine starre Erde aufgestellten Formeln A, C für A_m, C_m ein, entsteht ein Modell, in dem Kern und Mantel starr verbunden sind. Auch diese Annahme ist unrealistisch. Das Modell wird verbessert, wenn berücksichtigt wird, daß durch Änderungen in der Erdrotation Relativdrehimpulse des Kerns entstehen. Sie werden berechnet, wie bei [11, 26] beschrieben.

Korrektur der Störeffekte veränderlicher Rotation Relativdrehimpuls des Kerns und Änderungen des Trägheitstensors wegen Deformation der festen Erde oder Massenverlagerungen im Ozean sind, wie gerade beschrieben, auf Rotationsänderungen zurückzuführen. Sie überlagern die Relativdrehimpulse und Änderungen des Trägheitstensors, die ursprünglich die Rotationsänderung verursacht haben, und müssen darum zu diesen addiert werden. Setzt man die Summen in (2.31) und (2.32) ein, erhält man Drehimpulsfunktionen, die für die behandelten Effekte korrigiert sind: Das Ergebnis sind wieder die Gleichungen

(2.37) - (2.40), nur daß die Eulerfrequenz σ_r durch die theoretische Chandlerfrequenz σ_0 ersetzt wird:

$$\sigma_0 = \frac{C - A - (K_2 + \Delta K_{ocn,w}) \frac{R^5 \omega^2}{3G}}{A_m + \epsilon_c A_c + (K_2 + \Delta K_{ocn,w}) \frac{R^5 \omega^2}{3G}} \quad (2.43)$$

Dabei sind ϵ_c und A_c Exzentrizität und erstes Hauptträgheitsmoment des Kerns, sie stammen von der Korrektur wegen des Kern-Relativdrehimpulses.

Korrektur wegen Deformation durch Auflast Die wegen Deformation durch Rotation und wegen des Kern-Relativdrehimpulses korrigierten Drehimpulsfunktionen müssen noch wegen Deformation durch Auflast korrigiert werden: Die Korrekturen ergeben sich aus den Massentermen und der Auflast-Lovezahl K'_2 :

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\chi}}_{kor} &= \underline{\hat{\chi}} + K'_2 \underline{\hat{\chi}}^P \\ \underline{\chi}_{3,korr} &= \underline{\chi}_3 + K'_2 \underline{\chi}_3^P \\ K'_2 &= -0.305 \end{aligned}$$

Korrektur wegen anelastischer Verformung Berechnet man mit (2.43) die Periode der Chandlerbewegung, kommt man auf 423.5 Tage. Die beobachtete Periode ist aber um etwa zehn Tage länger. Außerdem verläuft die beobachtete Chandlerbewegung gedämpft. Beide Unterschiede zwischen Rechnung und Realität sind durch anelastisches Verhalten des Mantels zu erklären [28]. Dieses hat im wesentlichen zwei Auswirkungen: Änderungen von K_2 und K'_2 . K_2 geht in die Berechnung der Drehimpulsfunktionen nur über σ_0 ein, weshalb für K_2 die Korrektur wegen anelastischen Verhaltens darin besteht, statt der theoretischen Chandlerfrequenz (2.43) die beobachtete $\hat{\sigma}$ zu verwenden. Diese ist wegen der Dämpfung komplex:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{2\pi}{T_{cw}} \left(1 + \frac{i}{2Q}\right) \\ T_{cw} &= 433.7 \text{ Sonnentage} \\ Q &= 50 \end{aligned}$$

Zur Korrektur von K'_2 gibt [11] einen komplexen Zuschlag an:

$$\Delta \hat{K}'_{an} = -0.011 + 0.003i$$

Der Imaginärteil bewirkt eine leichte Phasenverschiebung der äquatorialen Komponenten der Drehimpulsfunktion.

Sonstige Korrekturen Wegen der Entkopplung des Kerns in axialer Richtung wird in der Gleichung für die axiale Komponente der Drehimpulsfunktion an K'_2 ein Korrekturfaktor $\alpha_3 = 0.792$ angebracht.

Tabelle 2.1: Einige in der Literatur angegebene Varianten zur Korrektur der Drehimpulsfunktion

Literatur	[2]	[8]	[28]	[11]
Jahr	1983	1993	2005	2007
Verformung der Erde wegen Auflast	×	×	×	×
Verformung der Erde wegen Rotation	×	×	×	×
Kernentkopplung bei Auflastverformung		×	×	×
Massenverlagerung der Ozeane wegen Rotation		×	×	×
Axiale Verformung wegen Rotation		×	×	×
Relativedrehimpuls des Kerns wegen Rotation			×	×
Anelastische Verformung des Mantels			×	×

Wegen Effekten rotationaler Verformung in axialer Richtung wird an den Ausdruck für die axiale Komponente der Drehimpulsfunktion der Korrekturfaktor k_r angebracht:

$$\begin{aligned}
 k_r &= \left\{ 1 + \left[n_0 + \frac{4}{3} (K_2 + \Delta K_{ocn,s}) \right] \frac{\Omega^2 R^5}{3G} \frac{1}{C_m} \right\}^{-1} \\
 &= 0.997191
 \end{aligned}$$

Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über einige in der Literatur angegebenen Kombinationen der angeführten Korrekturen. In der vorliegenden Arbeit wurden mit Ausnahme der anelastischen Reaktion des Mantels alle vorgestellten Effekte berücksichtigt. Die Berücksichtigung des anelastischen Verhaltens hängt bei den äquatorialen Komponenten von der jeweiligen Berechnungsvariante ab und wurde für die axiale Komponente bei keiner Variante berücksichtigt.

Effektive Drehimpulsfunktionen Berücksichtigt man die Korrekturen wie gerade beschrieben, gelangt man von den Drehimpulsfunktionen der starren Erde zu den effektiven Drehimpulsfunktionen:

$$\hat{\chi} = \chi_1 + \mathbf{i} \chi_2 = \frac{\Omega}{\hat{\sigma} A_m} (1 + K'_2 + \Delta \hat{\mathbf{K}}'_{\text{an}}) \Delta \hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{\hat{\sigma} A_m} \hat{\mathbf{h}} \quad (2.44)$$

$$\hat{\chi}_3 = \frac{k_r}{C_m} (1 + \alpha_3 K'_2) \Delta I_{33} + \frac{k_r}{\Omega C_m} h_3 \quad (2.45)$$

Sie lassen sich ähnlich wie die in (2.31) und (2.32) definierten Drehimpulsfunktionen einer starren Erde in Massen- und Bewegungsterme zerlegen, die sich von

(2.33) bis (2.36) nur durch konstante Vorfaktoren unterscheiden:

$$\begin{aligned}\hat{\chi}^P &= \frac{\Omega}{\hat{\sigma} A_m} (1 + K'_2 + \Delta \hat{\mathbf{K}}'_{\text{an}}) \Delta \hat{\mathbf{I}} \\ \hat{\chi}^W &= \frac{1}{\hat{\sigma} A_m} \hat{\mathbf{h}} \\ \chi_3^P &= \frac{k_r}{C_m} (1 + \alpha_3 K'_2) \Delta I_{33} \\ \chi_3^W &= \frac{k_r}{\Omega C_m} h_3\end{aligned}$$

Die zu (2.37) und (2.38) analoge Lösung der Liouville-Gleichungen lautet:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{m}}(t) &= e^{i\hat{\sigma}t} \left[\hat{\mathbf{m}}(0) - i\hat{\sigma} \left(1 + \frac{\hat{\sigma}}{\Omega} \right) \int_0^t \hat{\chi}(\tau) e^{-i\hat{\sigma}\tau} d\tau \right] - \\ &\quad \frac{\hat{\sigma}}{\Omega} [\hat{\chi}(t) - e^{i\hat{\sigma}t} \hat{\chi}(0)]\end{aligned}\tag{2.46}$$

$$m_3 = -\chi_3 + \text{const}\tag{2.47}$$

Die effektiven Drehimpulsfunktionen als Funktionen von räumlichen Integralen der Dichte und des Windfeldes über die Atmosphäre sind ähnlich aufgebaut wie im Fall der starren Erde. Da die Integration radial entweder über die Radiuslänge oder über den Druck ausgeführt werden kann und außerdem manche Größen annähernd konstant bleiben und darum als konstante Faktoren vor das Integral gestellt werden können, ergeben sich zahlreiche Varianten, von denen drei hier angegeben werden:

Integration über Radiuslänge Annähernd konstante Größen werden nicht als Konstante behandelt. Diese Variante ist analog zu (2.39) und (2.40) im Fall der starren Erde.

$$\begin{aligned}\hat{\chi} &= -\frac{\Omega}{\hat{\sigma} A_m} (1 + K'_2 + \Delta \hat{\mathbf{K}}'_{\text{an}}) \iiint \rho r^4 \sin \phi \cos^2 \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dr - \\ &\quad \frac{1}{\hat{\sigma} A_m} \iiint \rho r^3 (u \sin \phi + i v) \cos \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dr \\ &= \hat{\chi}^P + \hat{\chi}^W\end{aligned}\tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}\chi_3 &= \frac{k_r}{C_m} (1 + \alpha_3 K'_2) \iiint \rho r^4 \cos^3 \phi d\lambda d\phi dr + \\ &\quad \frac{k_r}{\Omega C_m} \iiint \rho r^3 u \cos^2 \phi d\lambda d\phi dr \\ &= \chi_3^P + \chi_3^W\end{aligned}\tag{2.49}$$

Die Funktionen wurden in eine Summe aus Massenterm (P) und Bewegungsterm (W) aufgeteilt.

Integration über Druck Annähernd konstante Größen werden nicht als Konstante behandelt. Über die hydrostatische Gleichung $\partial p = -\rho g \partial r$ kann das radiale Differential in differentielle Druckunterschiede umgerechnet und radial statt über den Radius r selbst über den Druck p integriert werden:

$$\begin{aligned}\hat{\chi} &= -\frac{\Omega}{\hat{\sigma} A_m} (1 + K'_2 + \Delta \hat{\mathbf{K}}'_{\text{an}}) \iiint \frac{r^4}{g} \sin \phi \cos^2 \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dp - \\ &\quad \frac{1}{\hat{\sigma} A_m} \iiint \frac{r^3}{g} (u \sin \phi + i v) \cos \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dp \\ &= \hat{\chi}^P + \hat{\chi}^W\end{aligned}\tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}\chi_3 &= \frac{k_r}{C_m} (1 + \alpha_3 K'_2) \iiint \frac{r^4}{g} \cos^3 \phi d\lambda d\phi dp + \\ &\quad \frac{1}{\Omega C_m} \iiint \frac{r^3}{g} u \cos^2 \phi d\lambda d\phi dp \\ &= \chi_3^P + \chi_3^W\end{aligned}\tag{2.51}$$

Integration über Druck – Radius und Schwere konstant Da die Atmosphärendicke im Vergleich zum Erdradius vernachlässigbar gering ist, werden für Radiuslänge und Schwerebeschleunigung konstante Mittelwerte angenommen. Dadurch hängt das radiale Integral der Massenterme nur mehr von einer Konstanten ab und ergibt (bei einer unteren Integrationsgrenze von Null) den mit dieser Konstanten multiplizierten Oberflächendruck p_s . Die Massenterme bestehen darum nur mehr aus einem doppelten Integral:

$$\begin{aligned}\hat{\chi} &= -\frac{\Omega}{\hat{\sigma} A_m} (1 + K'_2 + \Delta \hat{\mathbf{K}}'_{\text{an}}) \frac{r^4}{g} \iint p_s \sin \phi \cos^2 \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi - \\ &\quad \frac{1}{\hat{\sigma} A_m} \frac{r^3}{g} \iiint (u \sin \phi + i v) \cos \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dp \\ &= \hat{\chi}^P + \hat{\chi}^W\end{aligned}\tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}\chi_3 &= \frac{k_r}{C_m} (1 + \alpha_3 K'_2) \frac{r^4}{g} \iint p_s \cos^3 \phi d\lambda d\phi + \\ &\quad \frac{k_r}{\Omega C_m} \frac{r^3}{g} \iiint u \cos^2 \phi d\lambda d\phi dp \\ &= \chi_3^P + \chi_3^W\end{aligned}\tag{2.53}$$

Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit werden die *effektiven* Drehimpulsfunktionen vereinfachend als Drehimpulsfunktionen bezeichnet werden. Die Drehimpulsfunktionen der starren Erde werden nicht mehr benötigt.

2.3 Der inverse Barometereffekt

Über den Ozeanen verursachen Gebiete mit unterschiedlichem Luftdruck leicht unterschiedliche Höhen des Meeresspiegels, hoher Luftdruck drückt ihn tiefer,

bei niedrigem Luftdruck steigt er wieder. Diese Höhenunterschiede machen für eine Druckanomalie von 1 mbar etwa 1 cm aus [25] und hängen mit ihr über die hydrostatische Gleichung zusammen:

$$\partial p_a = -\rho g \partial h \quad (2.54)$$

∂p_a ist die Abweichung des Luftdrucks vom Mittelwert, ρ die Dichte des Meerwassers, g die Schwerebeschleunigung und ∂h der erwähnte Höhenunterschied. Bezeichnet man die Höhe des Meeresspiegels bei durchschnittlichem Luftdruck P mit H , ist der Wasserdruck $p_o(h)$ in einer beliebigen Höhe $h < H$:

$$p_o(h) = - \int_H^h \rho g \, dz + P \quad (2.55)$$

Weicht der Luftdruck um ∂p_a vom Mittelwert ab, ändert sich die Höhe des Meeresspiegels nach (2.54) um ∂h , die Integrationsgrenze liegt bei $H + \partial h$, die Luftdruckanomalie muß dazugezählt und dafür (2.54) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} p_o(h) &= - \int_{H+\partial h}^h \rho g \, dz + \partial p_a + P \\ &= - \int_{H+\partial h}^h \rho g \, dz - \rho g \partial h + P \\ &\approx - \int_{H+\partial h}^h \rho g \, dz - \int_H^{H+\partial h} \rho g \, dz + P \end{aligned}$$

Das ist aber wieder das selbe wie (2.55). Daraus folgt, daß nach dem sehr kleinen Höhenunterschied ∂h unter dem Meeresspiegel unabhängig von der tatsächlichen Luftdruckverteilung Druckverhältnisse herrschen, die einem konstanten mittleren Luftdruck über dem Ozean entsprechen. Auf die Bewegungsterme der Drehimpulsfunktionen hat der Effekt keinen Einfluss. Bei der Berechnung der für die Massenterme benötigten Integrale kann er berücksichtigt werden, indem man über dem Ozean anstelle des gemessenen Oberflächendrucks dessen Mittelwert über die Ozeanfläche verwendet. Binnenmeere und Meere, die nur durch enge Meeresstraßen mit dem Weltmeer verbunden sind (Mittelmeer), müssen getrennt berechnet werden.

2.4 Drehimpulsfunktion und Erdrotationsparameter

Am Ende dieser Arbeit steht ein Vergleich zwischen den Drehimpulsfunktionen, die aus Atmosphärendaten berechnet werden können und den Erdrotationsparametern x, y, LOD , die aus geodätischen Beobachtungen bestimmt werden. In diesem Abschnitt geht es darum, welche Berechnungen für diesen Vergleich notwendig sind.

2.4.1 Drehimpulsfunktion und LOD

Der Autor hält sich bei der Herleitung dieses Zusammenhangs zum Großteil an [21]. Nach (2.24) ist m_3 definiert als relative Abweichung der dritten Komponente des Rotationsvektors $\boldsymbol{\omega}$ der Erde von einem nominalen Rotationsvektor der Länge Ω :

$$\omega_3 = \Omega(1 + m_3) \quad (2.56)$$

$$\Rightarrow \partial\omega_3 = \Omega \partial m_3 \quad (2.57)$$

Tageslänge Λ und nominale Tageslänge Λ_0 werden wie folgt definiert:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\omega_3} \quad (2.58)$$

$$\Lambda_0 = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (2.59)$$

$$\partial\Lambda = \Lambda - \Lambda_0 \quad (2.60)$$

Ableitung von (2.58) nach ω_3 und dann für Λ aus (2.60), für ω_3 aus (2.56) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega_3} &= -\frac{\Lambda}{\omega_3} \\ &= -\frac{\Lambda_0 + \partial\Lambda}{\Omega + \Omega m_3} \\ &= -\frac{\Lambda_0}{\Omega} \frac{1 + \frac{\partial\Lambda}{\Lambda_0}}{1 + m_3} \\ &\approx -\frac{\Lambda_0}{\Omega} \\ \Rightarrow \frac{\partial\Lambda}{\Lambda_0} &\approx -\frac{\partial\omega_3}{\Omega} = -\partial m_3 \\ \Rightarrow \chi_3 = -\psi_3 = -m_3 &\approx \frac{\Lambda}{\Lambda_0} + \text{const}' = \frac{\partial\Lambda}{\Lambda_0} + 1 + \text{const}' \\ \chi_3 &\approx \frac{\partial\Lambda}{\Lambda_0} + \text{const} = \text{LOD} + \text{const} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Gleichung (2.61) definiert LOD als Verhältnis der Abweichung von der nominalen Tageslänge zur nominalen Tageslänge. Unter der Voraussetzung, daß LOD hauptsächlich von der Atmosphäre beeinflusst wird, könnte somit χ_3 aus Atmosphärendaten, abgesehen von einer beliebigen Konstanten ohne weitere Zwischenberechnungen mit dem beobachteten LOD verglichen werden. Diese Voraussetzung ist aber nicht gegeben, wie im Abschnitt 3.3 ausgeführt wird.

2.4.2 Drehimpulsfunktion und Polbewegung

Wie am Beginn des Abschnittes 2.1.5 bereits erwähnt, unterscheiden sich die Koordinaten $\hat{\mathbf{p}}$ des CIP vom Rotationspol $\hat{\mathbf{m}}$. Da die geodätisch beobachtete

Polbewegung $\hat{\mathbf{p}}$ festlegt, die Drehimpulsfunktionen aber $\hat{\mathbf{m}}$, muss für einen Vergleich letzteres in ersteres umgerechnet werden, was über (2.15) möglich ist. Für einen Zeitraum von 512 Tagen, in dem das bearbeitete Intervall enthalten ist, beträgt die Differenz zwischen $\hat{\mathbf{m}}$, zweimal berechnet aus der C04-Zeitreihe, zuerst nach (2.15) und dann ohne dem von $\hat{\mathbf{n}}$ abhängigen Teil, nur 0.02 mas RMS. Darum kann man hier ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust $\hat{\mathbf{n}} = 0$ setzen und (2.10) statt (2.15) verwenden, womit man einen Ausdruck für $\hat{\mathbf{m}}$ hat, der nur von $\hat{\mathbf{p}}$ abhängt. Noch wesentlich einfacher wird die Rechnung, wenn man eine direkte Beziehung zwischen Drehimpulsfunktionen und $\hat{\mathbf{p}}$ verwenden kann, die das Ergebnis dieses Abschnittes ist.

Formt man die äquatorialen Komponenten der Liouville-Gleichungen (2.25) um wie folgt:

- Mit Hilfe von (2.27) und (2.31) Umrechnung von $\hat{\psi} = \psi_1 + i\psi_2$ in $\hat{\chi} = \underline{\chi}_1 + i\underline{\chi}_2$, wobei $\hat{\mathbf{L}} = 0$ ist:

$$\hat{\psi} = \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}} \quad (2.62)$$

- Anschreiben der äquatorialen Komponenten von (2.25) mit Hilfe komplexer Zahlen:

$$\hat{\mathbf{m}} + \frac{i}{\sigma_r} \dot{\hat{\mathbf{m}}} = \hat{\psi} \quad (2.63)$$

- Ersetzen von σ_r , $\hat{\chi}$ durch $\hat{\sigma}$, $\hat{\chi}$, um die im Abschnitt 2.2.3 beschriebenen Korrekturen zu berücksichtigen, und Einsetzen von (2.62) in (2.63),

ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem für $\hat{\mathbf{m}}$:

$$\hat{\mathbf{m}} + \frac{i}{\hat{\sigma}} \dot{\hat{\mathbf{m}}} = \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}}$$

Setzt man (2.10) ein und $\hat{\mathbf{m}}' = \hat{\mathbf{m}}$, wird daraus:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\mathbf{p}}} + \frac{i}{\hat{\sigma}} \frac{d}{dt} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\mathbf{p}}} \right) &= \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}} \\ \hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\hat{\sigma}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} - \hat{\chi} &= \frac{i}{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\hat{\sigma}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} - \hat{\chi} \right) \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\hat{\sigma}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} - \hat{\chi} &= \hat{\mathbf{B}} e^{-i\Omega t} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Die komplexe Exponentialfunktion auf der rechten Seite von (2.64) wird in der gängigen Literatur kommentarlos weggelassen, so z.B. [8, 10]. Eine tiefere Beschäftigung mit diesem Thema würde hier zu weit führen, ein paar Gedanken dazu finden sich aber im Anhang A. Setzt man, wie allgemein üblich, $\hat{\mathbf{B}} = 0$, wird aus (2.64) eine Gleichung, die formal mit (2.25) in komplexer Schreibweise übereinstimmt und deren Lösung folglich (2.28) entnommen werden kann:

$$\hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\hat{\sigma}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\chi} \quad (2.65)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = e^{i\hat{\sigma}t} \left(\hat{\mathbf{p}}(0) - i\hat{\sigma} \int_0^t \hat{\chi}(\tau) e^{-i\hat{\sigma}\tau} d\tau \right) \quad (2.66)$$

Damit kann aus der Drehimpulsfunktion direkt die Polbewegung des CIP berechnet und mit der geodätisch bestimmten verglichen werden.

Kapitel 3

Praktische Umsetzung

Der bearbeitete Zeitraum geht vom 12.9. bis zum 30.9.2005 (Beobachtungsprogramm CONT05 bis 27.9. und drei weitere Tage), vereinfachend wird der gesamte Zeitraum als CONT05 bezeichnet. Die zu bewältigende Arbeit zerfällt in folgende Teilschritte:

- Berechnung einer Zeitreihe der Drehimpulsfunktionen $\hat{\chi}(t)$ und $\chi_3(t)$ durch Integration der Dichte und des Windfeldes über die Atmosphäre für den genannten Zeitraum. Die meteorologischen Eingabedaten stammen vom ECMWF.
- Berechnung der Koordinaten der Polwanderung aus der Zeitreihe von $\hat{\chi}$ und Vergleich des Ergebnisses mit der geodätisch beobachteten Polwanderung: Zeitreihe C04 und Bulletin B des IERS sowie Beobachtungsprogramm CONT05.
- Berechnung der LOD-Variationen aus der Zeitreihe von χ_3 und Vergleich der Ergebnisse mit den geodätisch beobachteten Variationen: Zeitreihe C04, Bulletin B und Beobachtungsprogramm CONT05.

3.1 Zeitreihe der Drehimpulsfunktionen

3.1.1 Eingabedaten

Die zeitliche Auflösung der Eingabedaten – und damit auch die zeitliche Auflösung aller Ergebnisse – beträgt generell 6h (tägliche Daten um 0:00, 6:00, 12:00 und 18:00 Uhr).

Atmosphärendaten

Die Atmosphärendaten des ECMWF können für ein weltweites Gitter abgefragt werden, das bei der Datenabfrage definiert werden muß. Die Gitterpunkte liegen auf Breiten- und Längengraden in Abständen von $\Delta\phi$ und $\Delta\lambda$ und radial auf

Tabelle 3.1: Definition der Datengitter

Gittervariante	Grob	Fein
Meridianintervall [°]	15	1
Parallelkreisintervall [°]	10	1
Druckniveaus [hPa]	10	1
	30	2
	50	3
	70	5
	100	7
	150	10
	200	20
	250	30
	300	50
	400	70
	500	100
	700	150
	850	200
	925	250
	1000	300
		400
		500
		700
		850
		925
		1000

verschiedenen Druckniveaus. Dabei erstreckt sich natürlich jedes Druckniveau über unterschiedliche Höhen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Gitter verwendet:

- Grobes Gitter: $\Delta\phi = 10^\circ$, $\Delta\lambda = 15^\circ$, 15 Druckniveaus.
- Feines Gitter: $\Delta\phi = 1^\circ$, $\Delta\lambda = 1^\circ$, 21 Druckniveaus.

Die Definitionen dieser Gitter mit einer Tabelle der Druckniveaus befindet sich in der Tabelle 3.1. Ergebnis der Abfrage sind für jeden Gitterpunkt Zeitreihen der angegebenen zeitlichen Auflösung für die folgenden Daten:

- Geopotential Φ [m²/s²]
- Temperatur T [K]
- Spezifische Feuchte s [1]
- Breitenkreisparallele Windgeschwindigkeit u [m/s]
- Meridionale Windgeschwindigkeit v [m/s]

Oberflächendaten

Auf den Längen- und Breitengraden der Gitterpunkte werden außerdem für die Geländeoberfläche Geopotential Φ_0 [m^2/s^2] und Luftdruck p_0 [hPa] verwendet.

3.1.2 Berechnungsvarianten

Die Drehimpulsfunktionen wurden vom Verfasser (Müller) nach zwölf Varianten gerechnet. Zur Kontrolle und Gegenüberstellung dienen: zwei Varianten von Berechnungen des Betreuers dieser Diplomarbeit (Böhm) unter Verwendung der selben Daten und die Ergebnisse der NCEP-Reanalysis Daten 2005 [24].

Die Bezeichnungen sind so geregelt:

- ein zweistelliger Zahlencode gibt zugleich Grundvariante und Autor an:
 - Autor Böhm: Zahlencodes 01 und 02,
 - Autor Salstein (NCEP-Reanalysis): Zahlencode 03,
 - Autor Müller: alle anderen Zahlencodes,
- ein führender zweistelliger Buchstabencode gibt Abweichungen von der Grundvariante an:
 - Grundvariante: Buchstabencode NN,
 - Inverser Barometereffekt berücksichtigt: Buchstabencode IN,
 - Anelastische Effekte berücksichtigt: Buchstabencode NA,
 - Inverser Barometereffekt und anelastische Effekte berücksichtigt: Buchstabencode IA.

Der Rechengang der NCEP-Reanalysis wurde nach [8] durchgeführt, wo anelastische Effekte und Relativdrehimpuls des Kerns nicht berücksichtigt sind, Details dazu sind bei [24] beschrieben. Alle anderen Varianten gehen von jeweils zwei der Gleichungen (2.48) bis (2.53) aus. Die Grundvarianten werden nachfolgend beschrieben, eine zusätzliche Berücksichtigung von inversem Barometereffekt oder anelastischem Verhalten ergibt sich aus dem Buchstabencode der Bezeichnung.

Die Grundvarianten

Die nachfolgende Beschreibung bezieht sich *nicht* auf NN03 (NCEP-Reanalysis). Die grundlegende Unterscheidung aller anderen Varianten erfolgt nach der unabhängigen Variablen bei der radialen Integration:

- Entweder über den Radius ∂r in Längeneinheiten selbst und die Gleichungen (2.48) und (2.49) in den Varianten NN02, NN30, NN40.
- Oder über den Druck ∂p und jeweils zwei der Gleichungen (2.50) bis (2.53) in den Varianten NN01, NN10, NN20.

Da in den ECMWF-Daten weder der Radius r selbst noch die Seehöhe h angegeben werden, muß r aus den anderen Eingabedaten berechnet werden:

- In den Varianten NN01 und NN02 wird dazu zuerst h über einen konstanten Mittelwert der Erdbeschleunigung $\bar{g}$ aus dem Geopotential Φ berechnet:

$$h = \frac{\Phi}{\bar{g}} = \frac{\Phi}{9.80665},$$

r ergibt sich dann als Summe mit dem Geoidradius:

$$r = R + h,$$

wobei für R statt dem Geoid- der (breitenabhängige) Ellipsoidradius eingesetzt wird.

- In allen anderen Varianten wird das Geoid durch eine Kugel mit dem Radius $R = 6371$ km ersetzt, deren Potentialdifferenz zwischen R und $r = R + h$ als Näherung für das Geopotential Φ verwendet wird. Dadurch läßt sich h direkt aus Φ berechnen:

$$\Phi = G E \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h} \right) \Rightarrow h = \frac{R^2 \Phi}{G E - R \Phi}$$

Eine weitere Unterscheidung der Berechnungsvarianten hängt davon ab, ob für Größen im Integranden, die sich (relativ) nur wenig ändern, konstante Mittelwerte eingesetzt werden, oder nicht. Das betrifft zunächst wieder r , das sich nur zwischen 6370 und 6400 km ändert. Außerdem tritt bei radialer Integration über den Druck im Integranden die Schwerebeschleunigung g auf.

- In der Variante NN10 werden die Gleichungen (2.52) und (2.53) verwendet: dort werden für r und g konstante Mittelwerte eingesetzt und vor das Integral gezogen.
- In allen anderen Varianten bleiben r und g als höhenabhängige Variable beim Integranden.

Die Varianten NN20 und NN01 verwenden die Formeln (2.50) und (2.51), wobei g in der Variante NN20 über

$$g = \frac{G E}{r}$$

bestimmt wird (kugelsymmetrisches Schwerefeld) und in der Variante NN01 über

$$g = 9.80665 \left(1 - 2.6373 \cdot 10^{-3} \cos 2\phi + 5.9 \cdot 10^{-6} \cos^2 \phi \right) \left(1 - 3.14 \cdot 10^{-7} h \right)$$

(Niveausphäroid).

Die Mehrfachintegrale werden in einfache Integrale zerlegt, die nacheinander numerisch bestimmt werden: zuerst die radialen, dann die Oberflächenintegrale. Die numerische Integration erfolgt grundsätzlich nach der Trapezregel, wo das

Integral in eine Summe aus Teilintegralen zwischen jeweils zwei benachbarten Gitterpunkten zerlegt wird. Die Teilintegrale ergeben sich dann nach der Formel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

Beim radialen Integral gibt es aber Ausnahmen:

- In den Integranden kommen Potenzen r^n vor, wobei $n = 3, 4$ ist. In den Varianten NN01 und NN02 wird hier eingesetzt:

$$r^n \approx \left(\frac{1}{2}(r_1 + r_2) \right)^n = \text{const},$$

wobei r_1, r_2 die Werte von r an den unteren und oberen Integrationsgrenzen der Teilintegrale sind.

- In den Varianten NN01 und NN02 wird für $g \approx g_1 = \text{const}$ gesetzt, wobei g_1 die Schwerebeschleunigung an der unteren Integrationsgrenze ist, berechnet nach der oben angegebenen Formel.

Integriert man über die Radiuslänge und behandelt die Potenzen r^n über die Intervalle der Teilintegrale als Konstanten, wie das bei den Varianten NN01 und NN02 geschieht und oben beschrieben wurde, bleibt für die Massenterme, abgesehen von konstanten Faktoren, auf den Teilintervallen zwischen den Gitterpunkten nur ein Integral der Dichte übrig (ϕ, λ sind ja vom Radius unabhängig und darum als Konstante zu betrachten, (2.48) und (2.49)). Diese Teilintegrale können analytisch berechnet werden. Man geht dazu vom allgemeinen Gasgesetz (3.1) und der hydrostatischen Gleichung (3.2) aus:

$$\rho = \frac{pM}{RT} \quad (3.1)$$

$$-dp = \rho g dr \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow -\frac{dp}{p} = g \frac{M}{RT} dr$$

Das ergibt bei Integration auf der linken Seite zwischen p_1 und p bzw. auf der rechten Seite zwischen r_1 und r

$$\ln \frac{p_1}{p} = g \frac{M}{RT} \Delta r.$$

Nimmt man im Integrationsintervall an, daß M, T konstant bleiben und berücksichtigt man (3.1), sind Druck- und Dichteverhältnisse gleich. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p} = \frac{\rho_1}{\rho} &= e^{g \frac{M}{RT} \Delta r} \\ \rho &= \rho_1 e^{-g \frac{M}{RT} \Delta r} \\ \int_{\Delta r=0}^{\Delta r} \rho d\Delta r &= -\rho_1 \frac{RT}{gM} \left(e^{-g \frac{M}{RT} \Delta r} - 1 \right) \end{aligned}$$

Mit (3.1) ist

$$\begin{aligned} g \frac{M}{RT} = g \frac{\rho_1}{p_1} &\equiv a \\ \int_{\Delta r=0}^{\Delta r} \rho d\Delta r &= -\frac{\rho_1}{a} (e^{-a\Delta r} - 1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Das ist das gesuchte Integral, es wird in den Varianten NN02 und NN40 angewendet.

Egal, ob man bei Integration über die Radiuslänge die Radiuspotenzen über die Teilintervalle konstant hält oder nicht, muß jedenfalls die Dichte aus den Eingabedaten berechnet werden. Außer in den Varianten NN01 und NN02 geschieht das über (3.1). Das darin enthaltene Molekulargewicht der (feuchten) Luft M wird aus den Molekulargewichten trockener Luft M_d und von Wasser M_w und der spezifischen Feuchte der Luft s berechnet, letztere kann den Eingabedaten entnommen werden:

$$\begin{aligned} M &= M_d + (M_w - M_d)s \\ M_d &= 28.965 \text{ kg/kmol} \\ M_w &= 18.015 \text{ kg/kmol} \end{aligned}$$

In den Varianten NN01 und NN02 wird statt mit der universellen Gaskonstanten R und dem Molekulargewicht M der feuchten Luft mit einer für trockene Luft materialspezifischen Gaskonstanten und dem Molekulargewicht trockener Luft gerechnet. Dafür muß statt der Temperatur T die virtuelle Temperatur verwendet werden, zu deren Berechnung wieder s benötigt wird. Der genaue Rechengang ist z.B. in [29] beschrieben. Beide Berechnungen führen zum selben Ergebnis, sodaß sich keine weiteren Berechnungsvarianten für die Drehimpulsfunktionen mehr ergeben.

Die soeben beschriebenen Grundvarianten sind in den Tabellen 3.2 und 3.3 zusammengefaßt.

3.1.3 Berechnungsergebnisse

Feines Gitter

In den Abbildungen 3.2-3.7 werden die aus den Atmosphärendaten des ECM-WF berechneten Drehimpulsfunktionen vorgestellt, zerlegt in Wind- und Massenterme, Legende: Abbildung 3.1. Bei den hier vereinfachend als Drehimpulsfunktionen bezeichneten Funktionen handelt es sich um die im Abschnitt 2.2.3 eingeführten *effektiven* Drehimpulsfunktionen. Sie werden mit χ_i^X bezeichnet, wobei $i = 1, 2, 3$ sein kann und beide äquatorialen und eine polare Komponente kennzeichnet. $X = P, W$ unterscheidet Massen- und Bewegungsterme. Der Zusammenhang der äquatorialen Komponenten mit der im Abschnitt 2.2.3 verwendeten komplexen Schreibweise ist wie folgt:

$$\hat{\chi} = \hat{\chi}^P + \hat{\chi}^W = \chi_1^P + \chi_1^W + i(\chi_2^P + \chi_2^W)$$

Tabelle 3.2: Grundvarianten zur Berechnung der Drehimpulsfunktionen (Böhm)

Grundvariante NN01	
Unabhängige Variable der radialen Integration	Druck
Geoidmodell	Ellipsoid
Modell der Schwerebeschleunigung	• Radiale Integration: Niveausphäroid, auf den Teilintervallen konstante Schwerebeschleunigung • Höhenberechnung: immer konstante Schwerebeschleunigung
Radiuspotenzen im Integranden	Konstante Mittelwerte der Radiuspotenzen der Teilintervallgrenzen
Grundvariante NN02	
Unabhängige Variable der radialen Integration	Radiuslänge
Geoidmodell	Ellipsoid
Modell der Schwerebeschleunigung	• Radiale Integration: Niveausphäroid, auf den Teilintervallen konstante Schwerebeschleunigung • Höhenberechnung: immer konstante Schwerebeschleunigung
Radiuspotenzen im Integranden	Konstante Mittelwerte der Radiuspotenzen der Teilintervallgrenzen
Radiales Integral der Dichte	analytisch

Tabelle 3.3: Grundvarianten zur Berechnung der Drehimpulsfunktionen (Müller)

Grundvariante NN10	
Unabhängige Variable der radialen Integration	Druck
Geoidmodell	Kugel
Modell der Schwerebeschleunigung	• Radiale Integration: immer konstante Schwerebeschleunigung • Höhenberechnung: sphärisch
Radiuspotenzen im Integranden	immer konstant
Grundvariante NN20	
Unabhängige Variable der radialen Integration	Druck
Geoidmodell	Kugel
Modell der Schwerebeschleunigung	sphärisch
Radiuspotenzen im Integranden	linear interpoliert
Grundvariante NN30	
Unabhängige Variable der radialen Integration	Radiuslänge
Geoidmodell	Kugel
Modell der Schwerebeschleunigung	sphärisch
Radiuspotenzen im Integranden	linear interpoliert
Radiales Integral der Dichte	numerisch
Grundvariante NN40	
Unabhängige Variable der radialen Integration	Radiuslänge
Geoidmodell	Kugel
Modell der Schwerebeschleunigung	sphärisch
Radiuspotenzen im Integranden	linear interpoliert
Radiales Integral der Dichte	analytisch

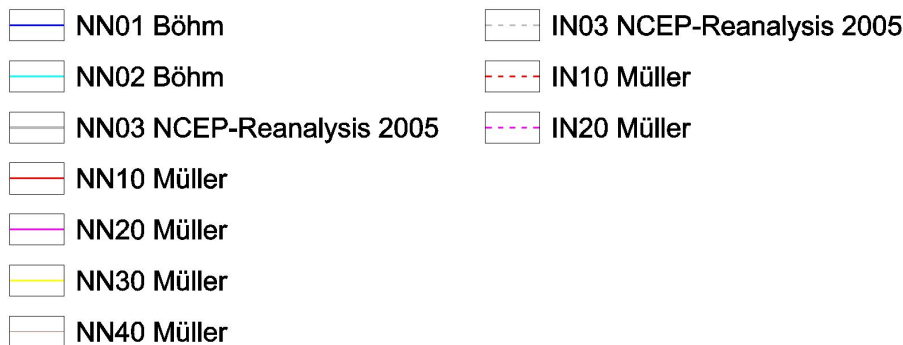


Abbildung 3.1: Legende zu den graphischen Darstellungen der Drehimpulsfunktion

Es handelt sich zunächst um die aus dem feinen Gitter von Eingabedaten gewonnenen Ergebnisse, das Gitter wurde im Abschnitt 3.1.1 definiert. Die Zeitreihen aller Berechnungsergebnisse wurden entlang der Ordinate verschoben, bis ihre Mittelwerte mit dem Mittelwert der NCEP-Reihe zusammenfallen. Weshalb das möglich ist, darauf wird in den folgenden Abschnitten noch eingegangen.

Es ist zu erkennen, daß fast alle verschiedenen Varianten – dem Augenschein nach – gut zusammenpassen. Ausnahme sind die unter Berücksichtigung des inversen Barometereffektes gerechneten Massenterme, die deutlich aus dem Rahmen fallen, wobei an dieser Stelle noch keine Aussage darüber getroffen werden kann, wie sich die beträchtlichen Abweichungen auf die Berechnung der Erdrotationsparameter x , y , LOD auswirken werden.

Grobes Gitter

Alle in den Abbildungen 3.2-3.7 dargestellten Berechnungsvarianten wurden auch auf das grobe Gitter der Eingabedaten angewendet. Der Vergleich mit den Ergebnissen aus dem feinen Gitter fällt für alle Varianten und Komponenten der Drehimpulsfunktion ähnlich aus: das grobe Gitter liefert vor allem für die Bewegungsterme Zeitreihen, die wesentlich stärker ausschlagen. Als Beispiel zeigen die Abbildungen 3.8 und 3.9 den Vergleich der Variante NN10 mit Eingabedaten aus dem groben und feinen Gitter. Alle weiterführenden Berechnungen stützen sich deshalb auf die aus Eingabedaten des feinen Gitters berechneten Drehimpulsfunktionen.

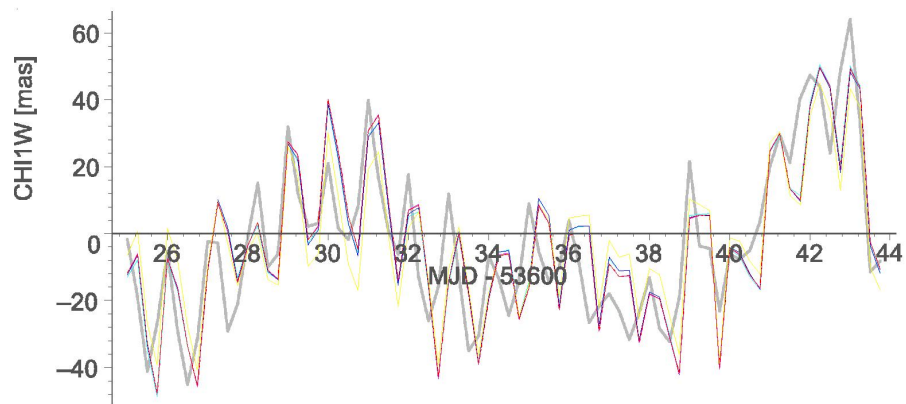


Abbildung 3.2: Bewegungsterm χ_1^W der Drehimpulsfunktion, Legende: Abbildung 3.1

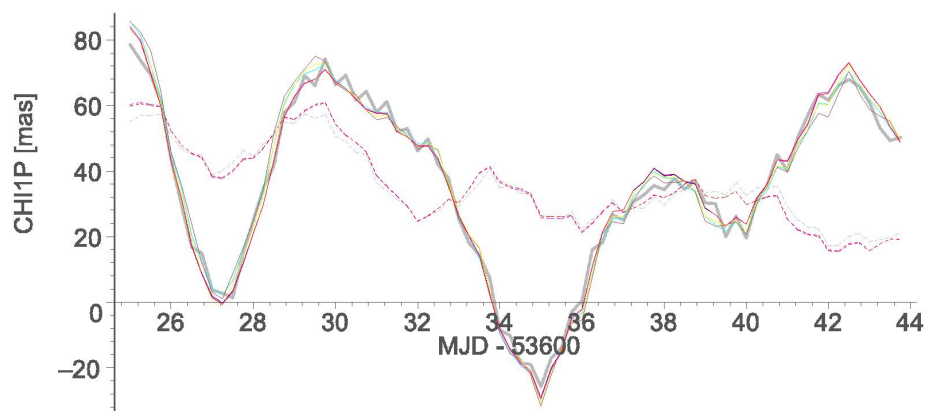


Abbildung 3.3: Massenterm χ_1^P der Drehimpulsfunktion, Legende: Abbildung 3.1

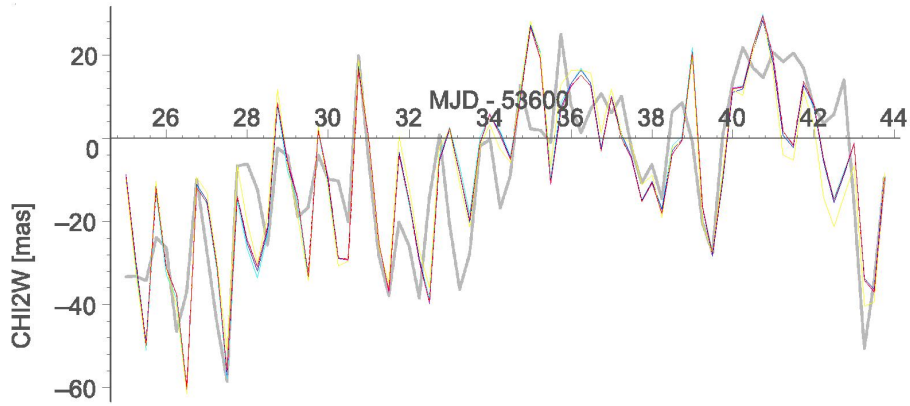


Abbildung 3.4: Bewegungsterm χ_2^W der Drehimpulsfunktion, Legende: Abbildung 3.1

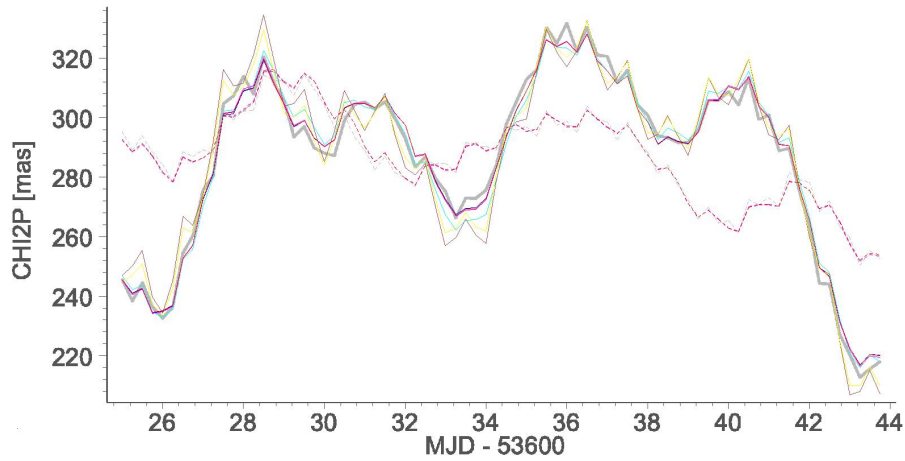


Abbildung 3.5: Massenterm χ_2^P der Drehimpulsfunktion, Legende: Abbildung 3.1

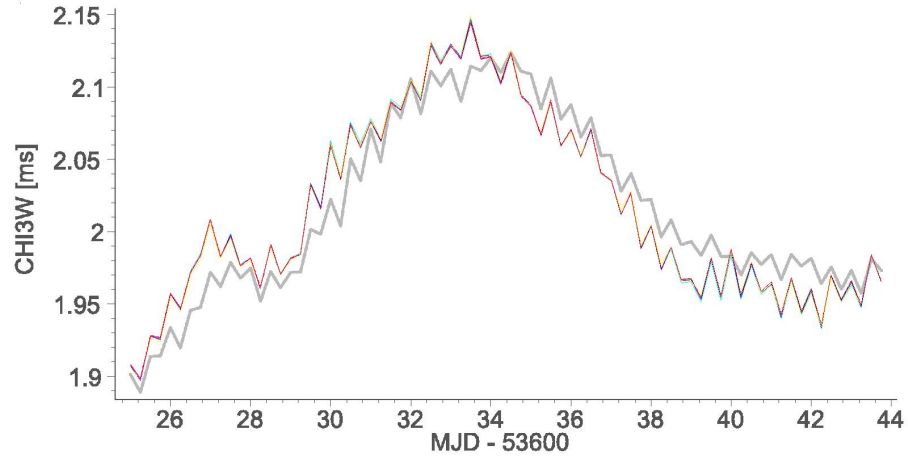


Abbildung 3.6: Bewegungsterm χ_3^W der Drehimpulsfunktion, Legende: Abbildung 3.1

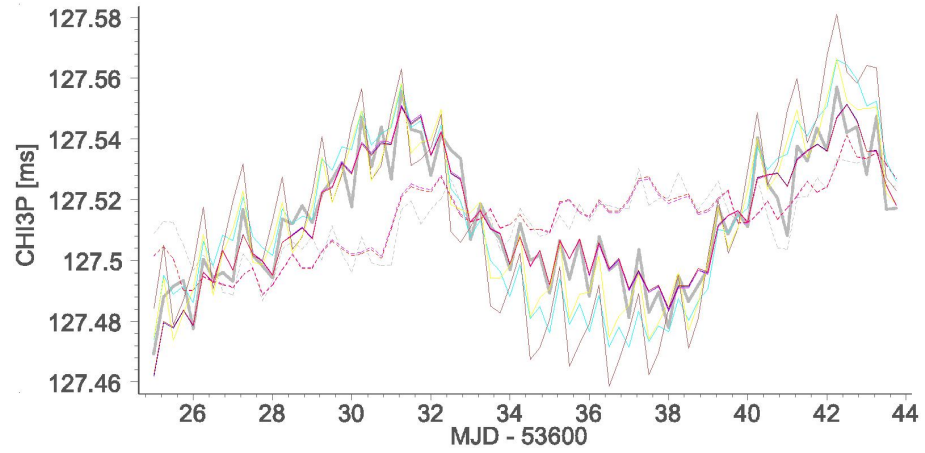


Abbildung 3.7: Massenterm χ_3^P der Drehimpulsfunktion, Legende: Abbildung 3.1

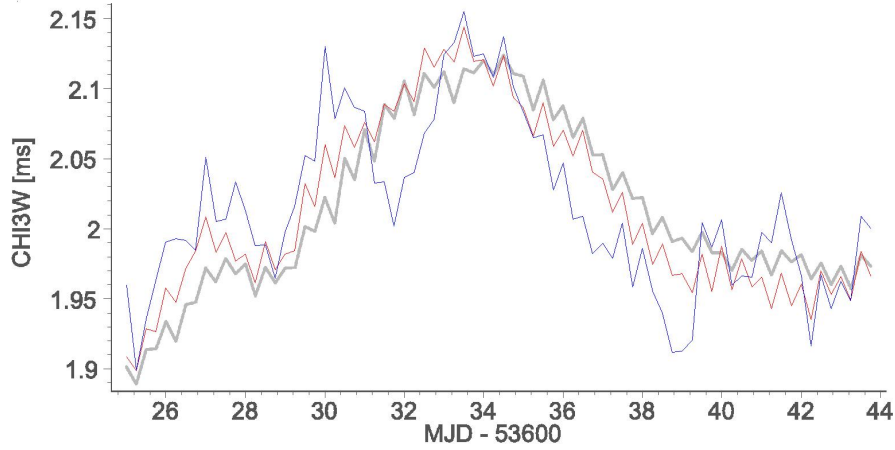


Abbildung 3.8: Drehimpulsfunktion χ_3^W , berechnet nach Variante NN01 aus grobem (blau) und feinem (rot) Datengitter. Grau: zum Vergleich NCEP-Reanalysis 2005.

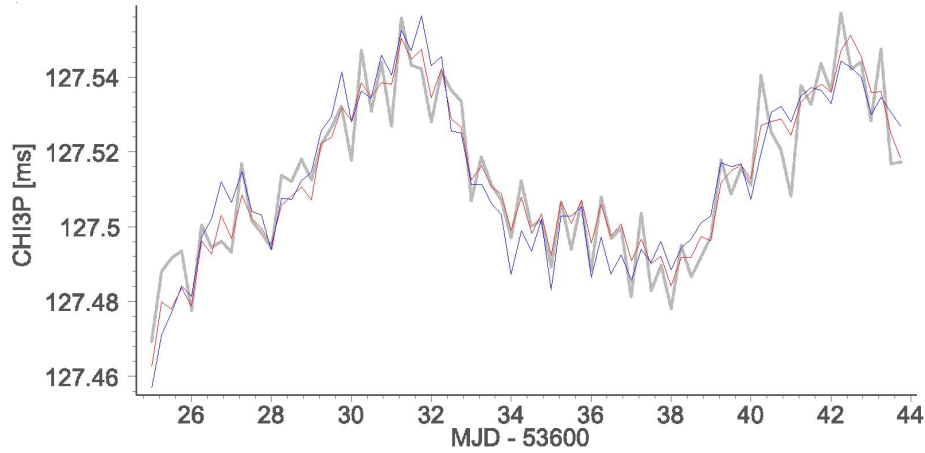


Abbildung 3.9: Drehimpulsfunktion χ_3^P , berechnet nach Variante NN01 aus grobem (blau) und feinem (rot) Datengitter. Grau: zum Vergleich NCEP-Reanalysis 2005.

3.2 Polbewegung

Die Beziehung zwischen den äquatorialen Komponenten der Drehimpulsfunktion $\hat{\chi}$ und den Koordinaten des CIP $\hat{\mathbf{p}}$ wurde im Abschnitt 2.4.2 hergeleitet. Setzt man in Gleichung (2.66) für $\hat{\chi}$ die im Abschnitt 3.1.3 aus Atmosphären-daten gewonnenen Zeitreihen ein, erhält man den Anteil der Atmosphäre an der Polbewegung. Wie im Abschnitt 2.1.4 beschrieben, ist dieser Anteil für Beobachtungsperioden wie die hier bearbeitete sehr groß (Abbildung 2.3). Die aus den Atmosphärendaten gewonnene Zeitreihe der Polbewegung sollte darum gut mit der geodätisch beobachteten übereinstimmen. Die soeben beschriebene Vorgehensweise ist nach [2] der Integrationsansatz eines Vergleiches zwischen beobachteter und aus Atmosphärendaten berechneter Polbewegung.

Die zweite Methode, genannt direkter Ansatz, geht den umgekehrten Weg: aus der beobachteten Polbewegung werden mit Hilfe von (2.65) die theoretischen Drehimpulsfunktionen berechnet, die dann den aus den Atmosphärendaten gewonnenen gegenübergestellt werden.

3.2.1 Theoretische Reaktion der Polbewegung auf die Drehimpulsfunktion

Um einen Vergleich zwischen beobachteter und aus Drehimpulsfunktionen berechneter Polbewegung beurteilen zu können, ist es gut, sich ein Bild davon zu verschaffen, nach welchen Prinzipien die Polbewegung auf den Verlauf der Drehimpulsfunktion mit der Zeit reagiert. Dazu wird hier zunächst eine gleichförmige, geradlinig verlaufende Drehimpulsfunktion angenommen, mit der Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}_\chi$ durch den Punkt $\hat{\chi}_0$. Über genügend kurze Zeitintervalle kann jede Drehimpulsfunktion durch eine solche Gerade angenähert werden:

$$\hat{\chi}(t) = \hat{\chi}_0 + \hat{\mathbf{v}}_\chi t \quad (3.4)$$

Setzt man diese Geradengleichung in (2.66) ein, kommt man auf elementarem Weg zu einer Gleichung für die Polbewegung, wie sie von geradlinig verlaufender Drehimpulsfunktion verursacht wird. Da es sich nur um eine Näherung handelt, die nur für kurze Intervalle gilt, wird nicht die beobachtete Chandlerfrequenz $\hat{\sigma}$ verwendet, sondern die theoretische σ_0 :

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = e^{i\sigma_0 t} \left[\hat{\mathbf{p}}_0 - \hat{\chi}_0 + i \hat{\mathbf{v}}_\chi \frac{1}{\sigma_0} \right] + \hat{\chi}_0 - i \hat{\mathbf{v}}_\chi \frac{1}{\sigma_0} + \hat{\mathbf{v}}_\chi t \quad (3.5)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\chi}_0 - i \hat{\mathbf{v}}_\chi \frac{1}{\sigma_0} \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{p}}(t) = e^{i\sigma_0 t} [\hat{\mathbf{p}}_0 - \hat{\mathbf{M}}] + \hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{v}}_\chi t \quad (3.7)$$

Gleichung (3.7) beschreibt eine Kreisbewegung um den Mittelpunkt $\hat{\mathbf{M}}$ mit dem Radius $|\hat{\mathbf{p}}_0 - \hat{\mathbf{M}}|$ und der Kreisfrequenz σ_0 , der eine geradlinige, gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}_\chi$ überlagert ist.

Polbewegung als Kreisbahn bei konstanter Drehimpulsfunktion

Setzt man $\hat{\mathbf{v}}_\chi = 0$ bleibt eine einfache Kreisbewegung mit Chandlerfrequenz um die konstante Drehimpulsfunktion als Mittelpunkt über. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(t) &= \hat{\chi}_0 = \text{const.} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{p}}(t) &= e^{i\sigma_0 t} (\hat{\mathbf{p}}_0 - \hat{\chi}_0) + \hat{\chi}_0\end{aligned}\quad (3.8)$$

Wie man an (2.44) erkennt, entsteht eine konstante Drehimpulsfunktion, wenn Abweichungen des Trägheitstensors und Relativdrehimpuls Null sind: $\Delta\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{h}} = 0$. Dieser Fall würde, wenn man sich auf die Atmosphäre beschränkt, bei weltweiter Windstille und konstanten Luftdruckverhältnissen eintreten. Theoretisch entsteht eine Kreisbahn der Polbewegung auch aus einer konstanten Drehimpulsfunktion $\hat{\chi}_0 \neq 0$, die auf konstante Abweichung des Trägheitstensors und konstanten Relativdrehimpuls zurückzuführen wäre. Dann könnte man aber das Bezugssystem so definieren, daß die Abweichungen wieder verschwinden.

Polbewegung bei geradliniger Drehimpulsfunktion

Ausgangspunkt ist wieder Gleichung (3.5). Jetzt sind aber $\Delta\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{h}} \neq 0$ und $\hat{\chi}(t)$ ist nicht konstant, sondern eine Funktion der Zeit. Es wird ein Hilfskoordinatensystem angenommen, in dem die Achse der Imaginärteile in der Geraden der Drehimpulsfunktion liegt, zunehmende Beträge in deren Bewegungsrichtung, und die Achse der Realteile normal dazu als Rechtssystem. Der Ursprung ist beliebig. Abbildung 3.10 a ist in diesem Koordinatensystem ein maßstäblicher Plan der Polbewegungsbahn, die sich aus realistischen Parametern ergibt, für ein Zeitintervall, das etwa um die Hälfte länger als die Chandler-Periode der Kreisbewegung ist. Zeitpunkte, zu denen sich Kreis- und geradlinige Bewegung gegenseitig annähernd aufheben (in der Abbildung 3.10 a oberhalb der Bahn des Mittelpunktes der Kreisbewegung), sind in der Bahn der Polbewegung an den Zacken zu erkennen. Dort kommt die Bewegung annähernd zum Stillstand oder kehrt sich sogar um. Unterhalb der Bahn des Kreismittelpunktes dagegen wird die lineare Bewegungskomponente durch die Kreisbewegung noch verstärkt.

Der Nullpunkt der Zeitskala wird so angenommen, daß $\hat{\mathbf{p}}_0 - \hat{\chi}_0$ reell positiv ist. Außerdem ist im verwendeten Koordinatensystem $\hat{\mathbf{v}}_\chi$ imaginär positiv. Darum kann man definieren:

$$\hat{\mathbf{p}}_0 - \hat{\chi}_0 \equiv -i\delta \hat{\mathbf{v}}_\chi \frac{1}{\sigma_0} \quad (3.9)$$

Setzt man das zusammen mit (3.4) in (3.5) ein, ergibt es:

$$\hat{\mathbf{p}}(t) - \hat{\chi}(t) + i \hat{\mathbf{v}}_\chi \frac{1}{\sigma_0} = e^{i\sigma_0 t} i \hat{\mathbf{v}}_\chi \frac{1}{\sigma_0} (1 - \delta) \quad (3.10)$$

Nimmt man folgende Werte an, die für den bearbeiteten Zeitraum typisch sind:

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{p}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| &\approx 0.05 \text{ "} \\ v_\chi &\approx 0.1 \text{ "}/\text{d} \\ \frac{1}{\sigma_0} &= 69.1 \text{ d} \\ \Rightarrow |\hat{\mathbf{p}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| &\ll v_\chi \frac{1}{\sigma_0}, \end{aligned}$$

kann (3.10) vereinfacht werden:

$$1 \approx e^{i\sigma_0 t} (1 - \delta) \quad (3.11)$$

Um (3.11) zu befolgen, muß

- entweder $i\sigma_0 t \approx \pi$ und $\delta \approx 2$ sein oder
- $t \approx 0$ und $|\delta| \ll 1$.

Im ersten Fall müßte sich der Pol im untersten Teil des Bogens seiner Bahn in Abbildung 3.10 a befinden, wo sich in der Polbewegung die Geschwindigkeiten von Kreis- und Geradenbewegung addieren und die Geschwindigkeit v_p der Polbewegung wäre wesentlich größer als die Geschwindigkeit v_χ der Drehimpulsfunktion. Im zweiten Fall wäre der Pol im Zacken der Bahn, wo sich Kreis- und Geradenbewegung subtrahieren und deshalb $v_p \ll v_\chi$. Für den bearbeiteten Zeitraum ist $|v_p| < 0.001 \text{ "}/\text{d} \ll v_\chi$, es muß also die zweite Möglichkeit zutreffen:

$$\begin{aligned} t &\approx 0 \\ |\delta| &\ll 1 \end{aligned}$$

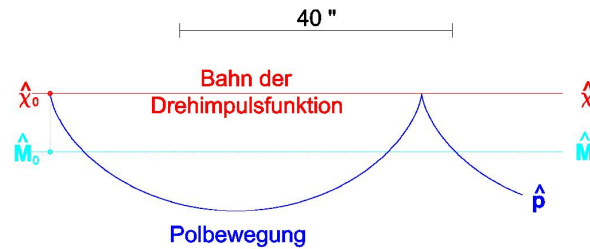
Der Radius $\hat{\mathbf{d}}$ der Kreisbahn sind die Koeffizienten der Exponentialfunktion auf der rechten Seite von (3.10):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}} &= i \hat{\mathbf{v}}_\chi \frac{1}{\sigma_0} (1 - \delta) \\ d &\approx 7 \text{ "} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Der Zahlenwert ergibt sich bei Vernachlässigung von δ .

Die gegenseitige Lage von Polbewegung und Drehimpulsfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ ist in Abbildung 3.10 b dargestellt. Polposition und Drehimpulsfunktion liegen bei $\hat{\mathbf{p}}_0$ und $\hat{\mathbf{x}}_0$, der Mittelpunkt der Kreiskomponente der Polbewegung bei $\hat{\mathbf{M}}_0$, der Abstand d ist stark verkürzt. $\hat{\mathbf{x}}_0$ und $\hat{\mathbf{M}}_0$ mitsamt der Kreisbahn bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}_\chi$ nach rechts. Die Bewegung der Kreisbahn ist aber zugleich die lineare Komponente der Polbewegung und damit auch der Bewegung von $\hat{\mathbf{p}}_0$. Die Kreiskomponente der Polbewegung ist die Bewegung *auf* der Kreisbahn mit der Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}}$. Die resultierende Geschwindigkeit der Polbewegung ist die Summe $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{v}}_\chi$:

(a) 600 Tage



(b) Wenige Stunden (370 fach vergrößert)

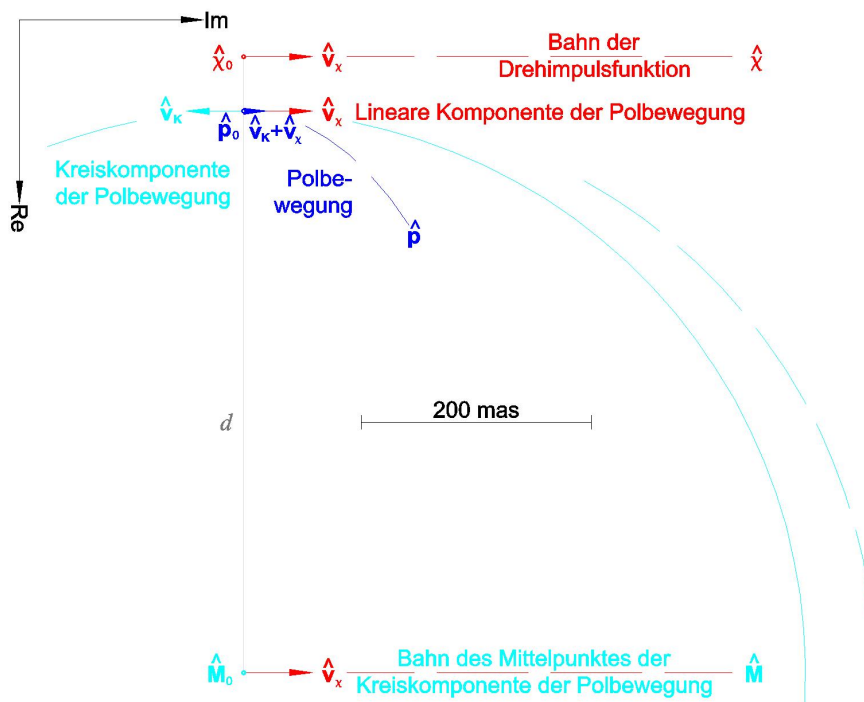


Abbildung 3.10: Polbewegung bei geradliniger, gleichförmiger Drehimpulsfunktion: Drehimpulsfunktion und lineare Komponente der Polbewegung rot, Kreiskomponente hellblau, resultierende Polbewegung dunkelblau. (a) Übersicht, (b) Vergrößerung des Zackens, wo die Polbewegung der Drehimpulsfunktion am nächsten kommt. Der Abstand d ist stark verkürzt dargestellt, er ist in Wirklichkeit mehr als 100fach länger als $|\hat{p}_0 - \hat{\chi}_0|$. Die Drehimpulsfunktion bewegt sich von links nach rechts, die Kreisbewegung verläuft gegen den Uhrzeigersinn.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}} &= \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{v}}_{\chi} \\
&= i\sigma_0 \hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{v}}_{\chi},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.12) in (3.13) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}} &= \delta \hat{\mathbf{v}}_{\chi} \\
\Rightarrow |v_p| &\ll v_{\chi}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Das heißt, die Geschwindigkeit der Polbewegung v_p ist wesentlich geringer als die Geschwindigkeit der Drehimpulsfunktion v_{χ} und kann ihr je nach Vorzeichen von δ gleich oder entgegen gerichtet sein. Änderungen der Drehimpulsfunktion bewirken also nur viel kleinere Änderungen in der Polbewegung, was sich günstig auf die Fortpflanzung der Fehler bei der Bestimmung der Drehimpulsfunktion in die Berechnung der Polbewegung auswirkt.

Wenn δ negativ ist, bedeutet das zum Zeitpunkt $t = 0$, daß – anders als in Abbildung 3.10 – $\hat{\mathbf{x}}_0$ zwischen $\hat{\mathbf{p}}_0$ und $\hat{\mathbf{M}}_0$ liegt und daß $\Im \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}}$ wegen (3.14) $\Im \hat{\mathbf{v}}_{\chi}$ entgegen gerichtet ist. Für $t > 0$ schreitet die Kreisbewegung weiter fort und in (3.10) muß die Exponentialfunktion berücksichtigt werden. $\Im \mathbf{v}_{\mathbf{K}}$ wird dadurch immer kleiner, bis in der Summe (3.13) $\Im \hat{\mathbf{v}}_{\chi}$ überwiegt und $\Im \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}}$ umdreht. Dadurch kommt es zur Schleifenbildung. Zugleich wird aber $\Re \mathbf{v}_{\mathbf{K}}$ größer und bewirkt die Ablenkung der Polbewegung von der Bahn der Drehimpulsfunktion weg, wie sie in Abbildung 3.10 b angedeutet ist.

Polbewegung bei geschlossener Bahn der Drehimpulsfunktion

Quadrat Die Drehimpulsfunktion durchläuft hier mit gleichbleibender Geschwindigkeit v_{χ} ein Quadrat gegen den Uhrzeigersinn, jede Quadratseite in 6 h. Dabei sind $v_{\chi} = 0.1$ “/d, $|\hat{\mathbf{p}}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0| = 0.05$ “ (Abbildung 3.11). Diese Drehimpulsfunktion kann je nach Startposition des Pols verschiedene Polbewegungen hervorrufen. In Abbildung (3.11) sind zwei Varianten eingezeichnet, wobei die Startposition einmal außerhalb und einmal innerhalb des Quadrates liegt. Die grünen Kreise sind dabei jeweils die Polbewegungen, die von einer konstanten Drehimpulsfunktion im Mittelpunkt des Quadrates ausgelöst werden. Gut zu erkennen ist der kleine Proportionalitätsfaktor zwischen v_{χ} und v_p : der Umlauf der Drehimpulsfunktion um das gesamte Quadrat verursacht eine Polbewegung, die im selben Maßstab kaum mehr zu erkennen ist. In diesem Maßstab betrachtet, fällt sie mit dem Kreis der Polbewegung zusammen, wie sie von der konstanten Drehimpulsfunktion verursacht wird. Dabei ist auch die Winkelgeschwindigkeit in beiden Fällen fast gleich. Vergrößert man aber die Bahn der Polbewegung wie in der Abbildungen geschehen, ergeben sich deutliche Abweichungen zur Kreisbahn, die sich mit der Umlaufperiode durch das Quadrat wiederholen.

Beliebige geschlossene Bahn Behandelt wird eine geschlossene Bahn mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Ein Extremfall wäre die oben bereits bespro-

(b) Polbewegung beim Durchlauf des Quadrates
50 fach vergrößert

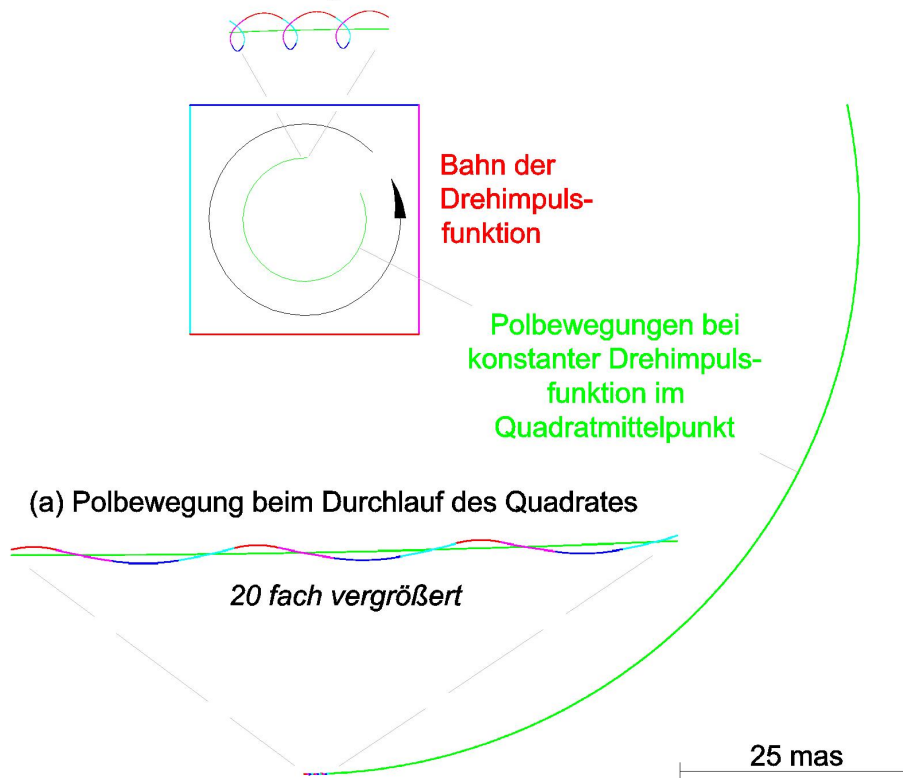


Abbildung 3.11: Die Drehimpulsfunktion durchläuft das Quadrat gegen den Uhrzeigersinn. Es sind zwei Varianten einer dadurch hervorgerufenen Polbewegung eingezeichnet: (a) Ausgangspunkt der Polbewegung unterhalb des Quadrates, (b) Ausgangspunkt im Quadrat. Der grüne Kreis ist in beiden Fällen die Polbewegung, wie sie von konstanter Drehimpulsfunktion im Quadratmittelpunkt verursacht wird.

chene konstante Drehimpulsfunktion mit $\hat{\chi}_0 = 0$, womit sich (3.8) weiter vereinfacht:

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \hat{\mathbf{p}}_0 e^{i\hat{\sigma}t} \quad (3.15)$$

Um den Extremfall auf Bahnraden zu verallgemeinern, die nicht Null sind, drückt man die Drehimpulsfunktion $\hat{\chi}$ mit Hilfe ihrer Fouriertransformierten $\hat{\mathbf{X}}$ aus:

$$\hat{\chi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{X}}(\nu) e^{i\nu t} d\nu$$

Setzt man diesen Ausdruck in (2.66) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}(t) &= \left(\hat{\mathbf{p}}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\mathbf{X}}(\nu)}{\nu - \hat{\sigma}} d\nu \right) e^{i\hat{\sigma}t} - \frac{\hat{\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\mathbf{X}}(\nu)}{\nu - \hat{\sigma}} e^{i\nu t} d\nu \\ &= (\hat{\mathbf{p}}_0 + \Delta\hat{\mathbf{p}}_0) e^{i\hat{\sigma}t} - \Delta\hat{\mathbf{p}}(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\Delta\hat{\mathbf{p}}_0$ ist eine Konstante, $\Delta\hat{\mathbf{p}}(t)$ eine zeitabhängige Funktion. Beide ergeben sich als Integrale der fouriertransformierten Drehimpulsfunktion $\hat{\mathbf{X}}$, wobei Frequenzen, die weit weg sind von der Chandlerfrequenz $\hat{\sigma}$, wegen der Division durch $\nu - \hat{\sigma}$ stark gedämpft werden. Untersucht man darum Zeitintervalle, die kurz gegen die Chandlerperiode sind, bleiben $\Delta\hat{\mathbf{p}}_0$, $\Delta\hat{\mathbf{p}}(t)$ klein.

Andererseits werden Frequenzen aus der Umgebung der Chandlerfrequenz stark verstärkt: sie ist eine wichtige Resonanzfrequenz der Erde. Dazu kommt noch, daß die Chandlerbewegung eine freie Bewegung ist, die zwar von Relativdrehimpulsen und Veränderungen des Trägheitstensors deutlich gestört wird, aber auch bei deren Abwesenheit abläuft, wie am obigen Beispiel einer konstanten Drehimpulsfunktion $\hat{\chi}_0 = 0$ zu erkennen ist. Wegen dieser Tatsachen ist nach [6] der Integrationsansatz ungeeignet, um über die Ähnlichkeit zwischen beobachteter und aus Drehimpulsfunktion berechneter Polbewegung den Einfluss der Drehimpulsfunktion auf die Polbewegung abzuschätzen: es überwiegen jedenfalls weitaus die freie Chandlerbewegung und resonanzbedingt der Chandlerfrequenz benachbarte Frequenzen, die hauptsächlich auf jahreszeitliche Veränderungen zurückzuführen sind. Alle anderen Frequenzen der Drehimpulsfunktion sind von der Chandlerfrequenz weiter entfernt, treten dadurch im Spektrum der Polbewegung stark zurück und können dann einen Vergleich nach dem Integrationsansatz viel weniger beeinflussen. In der vorliegenden Arbeit wird aber nicht mit generellen Ähnlichkeiten argumentiert, sondern mit Unterschieden in den RMS-Abweichungen zur beobachteten Polbewegung, die sich bei Verwendung der verschiedenen Varianten zur Berechnung der Drehimpulsfunktion und von unterschiedlichen Beobachtungsdaten ergeben. Diese Unterschiede sind zwar aus den gerade beschriebenen Gründen wesentlich kleiner als die Amplitude der Chandlerbewegung, aber deutlich vorhanden. Für die hier benötigten Zwecke ist der Integrationsansatz darum sinnvoll.

Vergleicht man (3.16) mit (3.15), erkennt man die Unterschiede von Polbewegungen die aus Drehimpulsfunktionen mit geschlossener Bahn entstehen zu solchen aus konstanter Drehimpulsfunktion:

- Der Radius der Kreisbewegung ändert sich um $\Delta\hat{\mathbf{p}}_0$. Das heißt, daß die Polbewegung aus geschlossener Drehimpulsbahn im allgemeinen nicht genau der Kreisbahn einer Polbewegung aus konstanter Drehimpulsfunktion folgt, wie das am Beispiel mit der quadratischen Drehimpulsbahn den Anschein hat.
- Der Kreisbewegung ist zusätzlich eine zeitabhängige Funktion $\Delta\hat{\mathbf{p}}(t)$ überlagert.

3.2.2 Einfluss der Free Core Nutation FCN

Nach [4] ist neben der Chandlerfrequenz die FCN die zweite wichtige Resonanzfrequenz der Erde. Sie entsteht nach [8] aus Relativdrehmomenten zwischen Kern und Mantel wegen unterschiedlicher Rotation und daraus folgender Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes an der Grenze zwischen Kern und Mantel und beträgt

$$\nu_{FCN} \approx -1 - \frac{1}{433} \text{ d}^{-1},$$

ist also näherungsweise retrograd täglich. Berechnet man aus der Drehimpulsfunktion über den Integrationsansatz die Polbewegung mit den Formeln aus dem Kapitel 2, werden die Resonanzeffekte der FCN nicht berücksichtigt. Das gleiche gilt für die Berechnung der Drehimpulsfunktion aus der beobachteten Polbewegung beim direkten Ansatz. Der sich daraus ergebende Fehler betrifft nach [8] retrograde Perioden zwischen -0.6 und -1.4 Tagen und kann dort 25% und mehr betragen. Darauf ist bei den in diesem Kapitel angestellten Vergleichen zu achten.

3.2.3 Vergleich zwischen beobachteter und berechneter Polbewegung

Die Beobachtungsdaten stammen aus folgenden Quellen:

- **BB** Bulletin B des IERS (tägliche Daten),
- **C04** Zeitreihe C04 des IERS (tägliche Daten),
- **VLBI** VLBI-Beobachtungen des CONT05-Programmes (stündliche Daten), Auswertung mit Software OCCAM (persönliche Mitteilung Böhm).
- **GPS** GPS-Beobachtungen des CONT05-Programmes (stündliche Daten), Auswertung mit Software BERNESE (persönliche Mitteilung Englich).

Ergebnis der im Abschnitt 3.1.3 vorgestellten Berechnungsvarianten sind die atmosphärischen Drehimpulsfunktionen. Will man aus ihnen über den Integrationsansatz nach (2.66) die Polbewegung berechnen, muß man ihre Anfangsposition $\hat{\mathbf{p}}_0 = \hat{\mathbf{p}}(0)$ kennen. Gleichung (2.66) liefert aber noch keine richtigen Ergebnisse, wenn man nur $\hat{\mathbf{p}}_0$ einsetzt. Das liegt daran: Grundlage für alle Herleitungen im theoretischen Abschnitt 2 war, daß der Trägheitstensor $\mathbf{I}$ nur Diagonalelemente hat (2.23). Das ist in der Realität nicht ganz richtig, weil das

geographische Koordinatensystem, in dem die Punkte des Beobachtungsgitters definiert sind, nicht parallel zu den (mittleren) Hauptträgheitsachsen der Erde ist. Das hat nach [2] zur Folge, daß die berechnete Drehimpulsfunktion gegen die tatsächliche um $\Delta\hat{\chi}$ verschoben ist.

Die Differenz $\Delta\hat{\mathbf{p}}(t)$ der tatsächlichen Polbewegung zu einer berechneten mit der selben Anfangsposition $\hat{\mathbf{p}}_0$, deren verursachende Drehimpulsfunktion sich aber um eine Konstante $\Delta\hat{\chi}$ unterscheidet, ist gleich der im Abschnitt 3.2.1 behandelten Polbewegung bei konstanter Drehimpulsfunktion. Sie läßt sich aus (3.8) gewinnen, wenn man $\hat{\mathbf{p}}_0 = 0$ und $\hat{\chi}_0 = -\Delta\hat{\chi}$ setzt:

$$\Delta\hat{\mathbf{p}}(t) = e^{i\sigma_0 t} \Delta\hat{\chi} - \Delta\hat{\chi}$$

Das ist eine Kreisbahn und damit zeitabhängig. Die berechnete Polbahn geht dann zwar durch $\hat{\mathbf{p}}_0$, ist aber gegenüber der beobachteten Bahn verformt. Die Verformung läßt sich nur dadurch beheben, daß man von der berechneten Drehimpulsfunktion $\Delta\hat{\chi}$ abzieht.

Um $\Delta\hat{\chi}$ für die berechnete Drehimpulsfunktion bestimmen zu können, benötigt man – zumindest für einen Zeitpunkt – die tatsächliche Drehimpulsfunktion, worunter eine solche zu verstehen ist, die über den Integrationsansatz die beobachtete Polbewegung ergibt. Es gibt zwei Möglichkeiten, sie zu bestimmen:

- Der direkte Ansatz (2.65) liefert die gesuchte Drehimpulsfunktion aus der beobachteten Polbewegung. Der Integrationsansatz ist nichts anderes als die Lösung des Differentialgleichungssystems des direkten Ansatzes und muß darum aus einer, über den direkten Ansatz berechneten, Drehimpulsfunktion wieder die beobachtete Polbewegung ergeben.
- Ein Ergebnis des Abschnittes 3.2.1 war, daß die Polbewegung näherungsweise einer Kreisbahn folgt, die verursacht wird von einer konstanten Drehimpulsfunktion im Zentrum des Verlaufes der realen Drehimpulsfunktion (Abbildung 3.11). Die konstante Drehimpulsfunktion kann als Mittelpunkt der momentanen Polbewegung bestimmt und als Näherungswert für die tatsächliche Drehimpulsfunktion verwendet werden.

Der Vergleich zwischen berechneter und beobachteter Polbewegung wird in der vorliegenden Arbeit sowohl nach dem Integrations- als auch nach dem direkten Ansatz durchgeführt, wobei letzterer zugleich der Berechnung von $\Delta\hat{\chi}$ dient. Danach folgt eine kurze Beschreibung der Probleme, die sich bei der Schätzung von $\Delta\hat{\chi}$ aus dem Mittelpunkt der beobachteten Polbewegung ergeben können, mit den hier bearbeiteten Daten ist die Methode fehlgeschlagen.

Berechnung von $\Delta\hat{\chi}$ aus dem direkten Ansatz

Zunächst wurde über (2.65) aus der beobachteten Polbewegung die Drehimpulsfunktion $\hat{\chi}_b$ für den Zeitraum 12.9.-30.9.2005 bestimmt und dabei die erforderliche Ableitung der Polbewegung nach der Zeit auf folgendem Weg:

- Anpassung von Splines an Real- und Imaginärteil der Polbewegung,

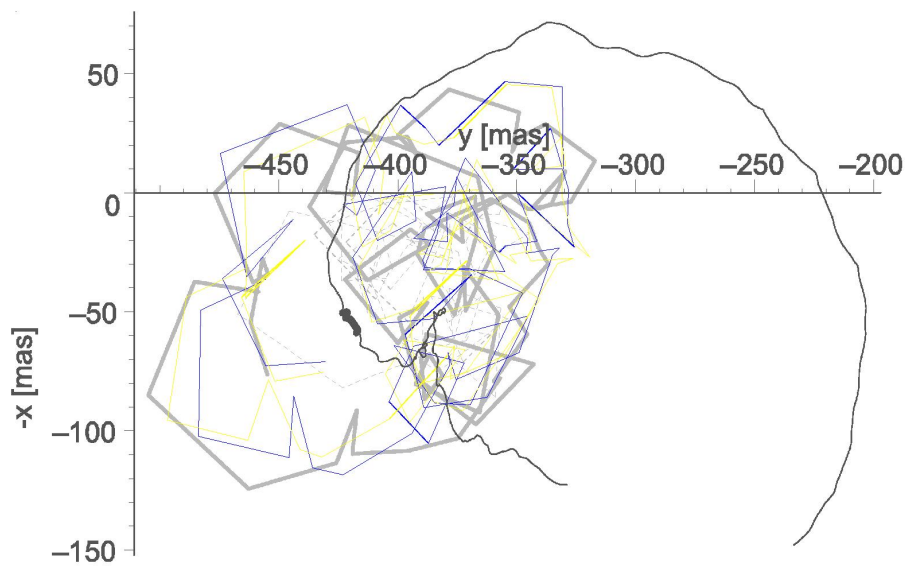


Abbildung 3.12: Schwarz: beobachtete Polbewegung 5.1.2005-7.6.2006 (IERS C04), fett schwarz: 12.9.-30.9.2005. Start der Polbewegung rechts unten, gegen den Uhrzeigersinn. Strichlierte Kurven: Drehimpulsfunktionen 12.9.-30.9.2005. Blau: NN01, grau: NN03, grau punktiert: IN03, gelb: NA30. Start der Drehimpulsfunktion: von links gegen den Uhrzeigersinn.

Tabelle 3.4: Verschiebungsbeträge [mas] einiger atmosphärischer Drehimpulsfunktionen im direkten Ansatz

	NN01		NN03		IN03		NA30	
	$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$
Bulletin B	-9.9	-652.4	-0.4	-669.3	53.7	-658.5	-10.8	-387.8
C04	-9.6	-652.8	-0.1	-669.7	54.0	-659.0	-10.5	-388.3
CONT05 VLBI	-9.5	-652.3	-0.0	-669.0	54.6	-657.7	-10.0	-387.2
CONT05 GPS	-10.3	-650.5	-0.5	-667.0	54.9	-657.8	-11.0	-385.5

- Ableitung der Splines nach der Zeit.

Aus der Differenz des Mittelwertes von $\hat{\chi}_b$ und des Mittelwertes der aus Atmosphären Daten bestimmten Drehimpulsfunktion $\hat{\chi}_a$ ergab sich:

$$\Delta\hat{\chi} = M(\hat{\chi}_b) - M(\hat{\chi}_a)$$

Verschiebt man $\hat{\chi}_a(t)$ um $\Delta\hat{\chi}$, sollte sich eine möglichst gute Übereinstimmung mit $\hat{\chi}_b(t)$ ergeben, darin besteht ja der direkte Vergleichsansatz. Der gesamte Vorgang wurde wiederholt für alle Kombinationen zwischen gerechneten atmosphärischen Drehimpulsfunktionen und verwendeten Beobachtungsdaten. Die Verschiebungsbeträge für einige ausgewählte Kombinationen sind in Tabelle 3.4 zusammengestellt.

Die im Stundenabstand vorliegenden Zeitreihen (VLBI und GPS) weisen ein deutliches Rauschen auf, das von der in (2.65) notwendigen Differentiation stark verstärkt wird und den Vergleich mit den atmosphärischen Drehimpulsfunktionen unmöglich macht. Außerdem liegen die Daten in einer viel größeren Dichte vor, als die atmosphärischen Drehimpulsfunktionen (diese nur viermal am Tag). Es war darum naheliegend die stündlichen Daten aus VLBI und GPS vor der Weiterverarbeitung zu glätten. Dazu wurden unter Verwendung der Gewichte $g(\Delta t)$ gleitende Mittelwerte berechnet:

$$g(\Delta t) = \exp \left[\ln \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\Delta t}{T} \right)^2 \right]$$

$$T = 6 \text{ h}$$

Das ergibt für den Datenwert, der geglättet werden soll, das Gewicht 1, für Daten in zeitlichen Abständen von 6 oder 11 h Gewichte von 0.5 oder 0.1, Daten mit geringeren Gewichten wurden nicht zur Mittelbildung verwendet. Abbildung 3.13 zeigt als Beispiel die originale und geglättete Zeitreihe von x aus GPS-Beobachtungen, Abbildung 3.14 die daraus und aus y berechnete Drehimpulsfunktion χ_1 . Man sieht, daß die relativ geringe Streuung der originalen x -Zeitreihe eine sehr starke Streuung der Drehimpulsfunktion bewirkt. Dieser Effekt konnte durch die Datenglättung entfernt werden.

Die Abbildungen 3.15 und 3.16 zeigen das Ergebnis des direkten Vergleichsansatzes am Beispiel der GPS-Beobachtungsdaten in graphischer Form: Die

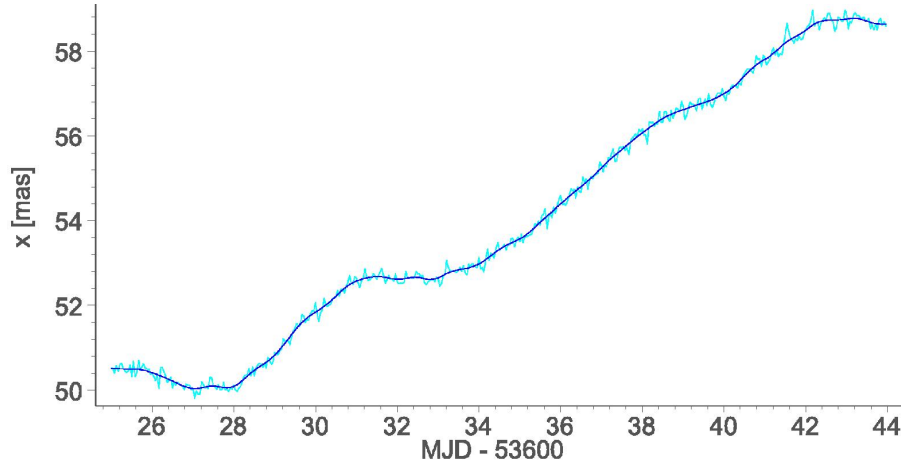


Abbildung 3.13: Wirkung der verwendeten Datenglättung an der Zeitreihe für x aus GPS-Beobachtungen. Hellblau: Originaldaten, dunkelblau: geglättete Daten.

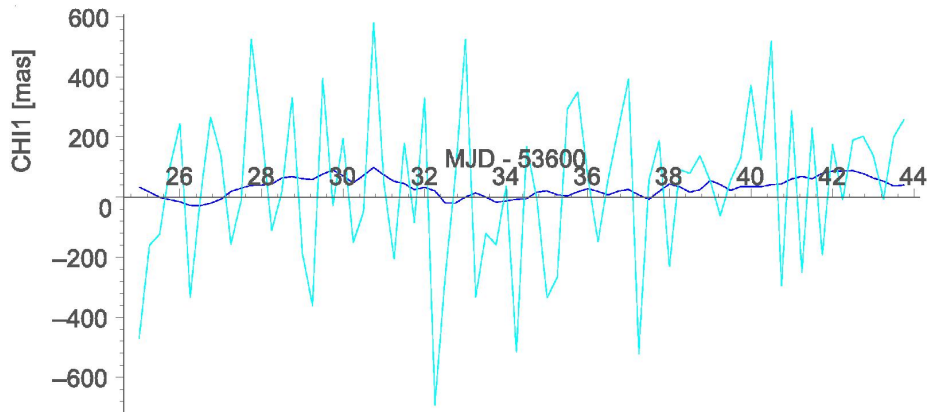


Abbildung 3.14: Wirkung der verwendeten Datenglättung an der Zeitreihe für χ_1 , berechnet über den direkten Ansatz aus GPS-Beobachtungen. Hellblau: Originaldaten, dunkelblau: geglättete Daten.

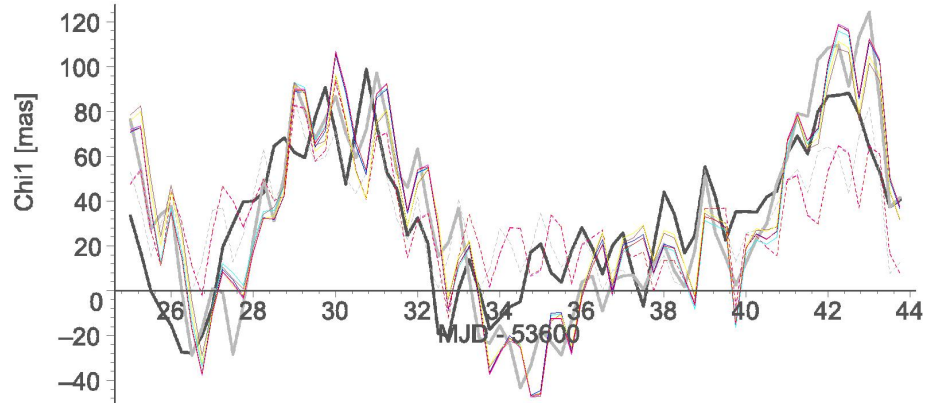


Abbildung 3.15: Direkter Vergleichsansatz der berechneten und beobachteten Polbewegung für χ_1 . Legende: Abbildung 3.1. Außerdem schwarz: aus der beobachteten Polbewegung berechnete Drehimpulsfunktion (berechnet aus GPS Daten des CONT05-Programmes 12.9.-30.9.2005). Die aus Atmosphärendaten berechneten Drehimpulsfunktionen sind um $\Delta\hat{\chi}$ in die aus der Polbewegung berechnete verschoben.

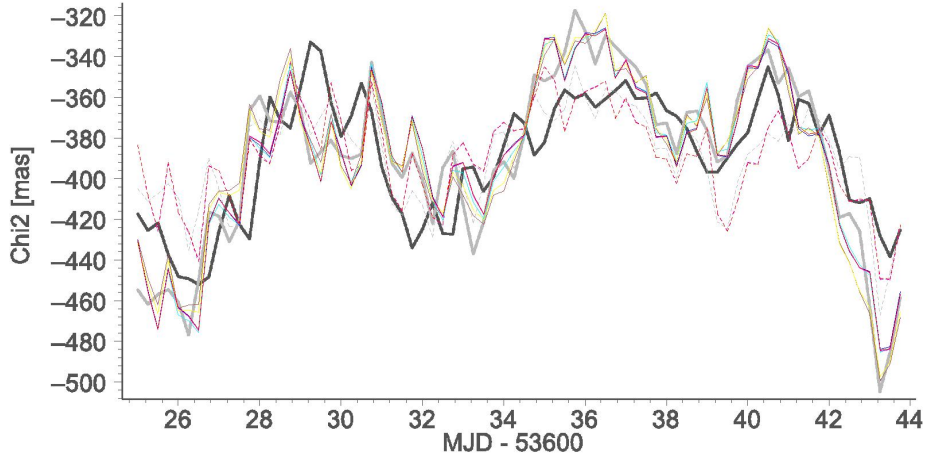


Abbildung 3.16: Direkter Vergleichsansatz der berechneten und beobachteten Polbewegung für χ_2 . Alles andere wie in Abbildung 3.15.

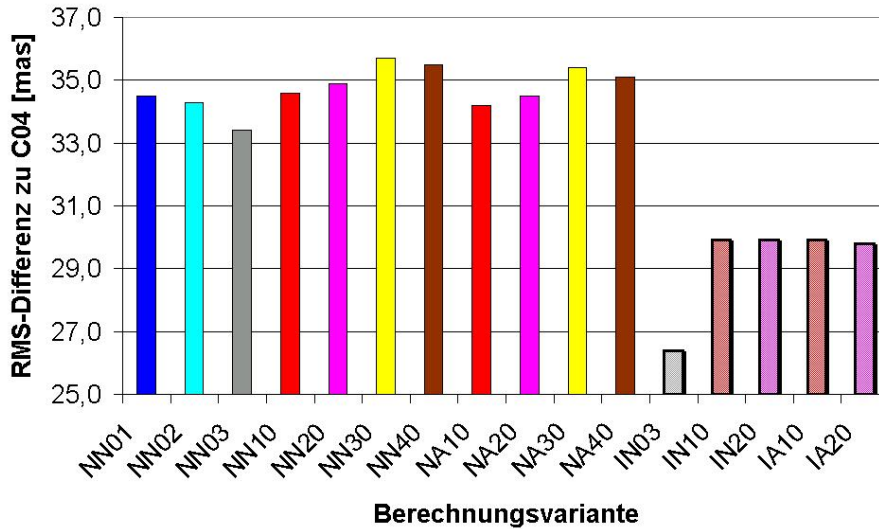


Abbildung 3.17: Direkter Vergleichsansatz: RMS-Differenzen berechnete/beobachtete Polbewegung aller Berechnungsvarianten zur Reihe C04 der beobachteten Polbewegung. Farben wie in Abbildung 3.1, stark umrandet: inverser Barometereffekt berücksichtigt.

Übereinstimmung der Drehimpulsfunktionen aus Atmosphärendaten mit der aus den GPS-Daten ist nicht schlechter als zwischen denen aus Atmosphärendaten untereinander. In der Tabelle 3.5 sind – auch für die anderen Beobachtungsdaten – die entsprechenden RMS-Abweichungen zusammengestellt, wobei unter Abweichung hier der zweidimensionale Abstand zwischen den verschiedenen Drehimpulsfunktionen verstanden wird. Abbildung 3.17 ist eine Darstellung der RMS-Abweichungen der Drehimpulsfunktionen aus Atmosphärendaten zur Reihe C04. Geht man in der Tabelle die Spalte einer Drehimpulsfunktion aus Beobachtungsdaten durch, sieht man am Vergleich der RMS-Abweichungen zu den atmosphärischen Drehimpulsfunktionen der verschiedenen Berechnungsvarianten, welche Varianten am besten mit den Beobachtungen übereinstimmen:

- schlechtere Übereinstimmung bei Integration über den Radius statt über den Druck,
- um $0.1x$ mas bessere Übereinstimmung bei Berücksichtigung anelastischer Effekte,
- um $1x$ mas bessere Übereinstimmung bei Berücksichtigung des inversen Barometereffektes. Die am Ende vom Abschnitt 3.1.3 angesprochenen, durch den inversen Barometereffekt verursachten Abweichungen sind offensichtlich real. Man erkennt das auch durch Vergleich der Abbildungen

3.3 und 3.15: gerade wo der inverse Barometereffekt Abweichungen von allen anderen Berechnungsvarianten verursacht, bewirkt er im direkten Ansatz eine bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

- Die besten Übereinstimmungen erreichen IN03 (NCEP-Reanalysis 2005) und IA20 (ECMWF-Daten).
- Im Vergleich der verschiedenen Beobachtungsdaten erzielt VLBI die schlechtesten Ergebnisse.

Zur oben beschriebenen Bestimmung der zeitlichen Ableitung der Polbewegung aus angepassten Splines ist noch nachzutragen: In den GPS-Beobachtungsdaten wäre die Geschwindigkeit der Polbewegung zwar bereits enthalten, wahrscheinlich wegen der beschriebenen notwendigen Datenglättung ergibt die Ableitung der Splines aber bessere Ergebnisse, sowohl beim direkten als auch beim Integrationsansatz: die zweidimensionalen RMS-Abweichungen verbessern sich um $1x$ mas bzw. $0.01x$ mas.

Integrationsansatz

Im letzten Schritt wurde $\hat{\chi}_a(t) + \Delta\hat{\chi}$ über den Integrationsansatz (2.66) in eine Polbewegung umgerechnet und der beobachteten Polbewegung gegenübergestellt (Abbildung 3.18 am Beispiel der GPS-Beobachtungsdaten). Wie man sieht, ist ohne Berücksichtigung des inversen Barometereffektes die Übereinstimmung sehr gut, die maximalen Abweichungen zwischen der beobachteten Polbewegung und den berechneten beträgt 3 cm an der Erdoberfläche. Verwendet man dagegen den inversen Barometereffekt, wird das Ergebnis deutlich schlechter, die Abweichungen zur Beobachtung verdoppeln sich ungefähr. Damit kommt es, daß der inverse Barometereffekt zwar im direkten Ansatz die besseren Ergebnisse geliefert hat, im Integrationsansatz aber mit Abstand die schlechtesten. Die Tabellen 3.6 bis 3.9 sind, auch für die restlichen Beobachtungsdaten, eine Zusammenstellung der RMS-Abweichungen zwischen den entsprechenden Zeitreihen. Abbildung 3.19 ist eine Darstellungen der RMS-Abweichungen zur Reihe C04. Es können daraus folgende Zusammenhänge zwischen Berechnungsvariante, Art der Beobachtungsdaten und der Übereinstimmung zwischen beobachteter und berechneter Polbewegung abgelesen werden:

- schlechtere Übereinstimmung bei Verwendung des inversen Barometereffektes, wie gerade anhand der Abbildung 3.18 beschrieben,
- im allgemeinen um $0.5x$ mas schlechtere Übereinstimmung bei Integration über den Radius statt über den Druck – Ausnahme: NN30 und NA30 mit Daten aus C04 und BB,
- um $0.01x$ mas bessere Übereinstimmung durch Berücksichtigung anelastischer Effekte.
- Die besten Ergebnisse bringt NN03 (NCEP-Reanalysis 2005) und NA10 (ECMWF-Daten).

Tabelle 3.5: RMS-Abweichungen zwischen Zeitreihen von $\hat{\chi}$ [mas] über alle Berechnungsvarianten aus Atmosphärendaten des ECMWF und über den direkten Ansatz aus geodätischer Beobachtung. Konstante Verschiebungen zwischen den Zeitreihen entfernt.

	NN01	NN02	NN03	NN10	NN20	NN30	NN40	NA10	NA20
NN01	0.0	3.0	19.8	1.2	1.5	8.5	10.4	1.0	1.1
NN02	3.0	0.0	19.4	2.9	3.0	8.3	9.7	3.1	3.1
NN03	19.8	19.4	0.0	19.5	19.6	20.0	20.6	19.5	19.5
NN10	1.2	2.9	19.5	0.0	0.4	8.8	10.6	0.8	0.5
NN20	1.5	3.0	19.6	0.4	0.0	8.8	10.6	1.1	0.8
NN30	8.5	8.3	20.0	8.8	8.8	0.0	3.0	8.8	8.8
NN40	10.4	9.7	20.6	10.6	10.6	3.0	0.0	10.7	10.6
NA10	1.0	3.1	19.5	0.8	1.1	8.8	10.7	0.0	0.4
NA20	1.1	3.1	19.5	0.5	0.8	8.8	10.6	0.4	0.0
NA30	8.4	8.3	20.0	8.8	8.9	0.8	3.3	8.7	8.7
NA40	10.3	9.7	20.5	10.6	10.6	3.0	0.8	10.5	10.5
IN03	39.9	39.9	36.2	40.3	40.5	39.9	39.3	39.7	40.0
IN10	36.1	36.4	42.0	36.7	36.9	36.9	36.4	36.1	36.4
IN20	35.9	36.1	41.8	36.4	36.7	36.7	36.1	35.8	36.1
IA10	36.1	36.4	41.9	36.6	36.9	36.9	36.4	36.1	36.4
IA20	35.8	36.1	41.7	36.4	36.7	36.7	36.1	35.8	36.1
BB	35.4	35.3	34.4	35.6	35.9	36.7	36.4	35.2	35.5
C04	34.5	34.3	33.4	34.6	34.9	35.7	35.5	34.2	34.5
VLBI	83.7	83.9	89.8	83.9	84.0	85.9	85.8	83.7	83.8
GPS	38.7	38.6	37.8	38.9	39.1	40.3	40.2	38.5	38.7
	NA30	NA40	IN03	IN10	IN20	IA10	IA20	BB	C04
NN01	8.4	10.3	39.9	36.1	35.9	36.1	35.8	35.4	34.5
NN02	8.3	9.7	39.9	36.4	36.1	36.4	36.1	35.3	34.3
NN03	20.0	20.5	36.2	42.0	41.8	41.9	41.7	34.4	33.4
NN10	8.8	10.6	40.3	36.7	36.4	36.6	36.4	35.6	34.6
NN20	8.9	10.6	40.5	36.9	36.7	36.9	36.7	35.9	34.9
NN30	0.8	3.0	39.9	36.9	36.7	36.9	36.7	36.7	35.7
NN40	3.3	0.8	39.3	36.4	36.1	36.4	36.1	36.4	35.5
NA10	8.7	10.5	39.7	36.1	35.8	36.1	35.8	35.2	34.2
NA20	8.7	10.5	40.0	36.4	36.1	36.4	36.1	35.5	34.5
NA30	0.0	3.0	39.3	36.3	36.1	36.3	36.1	36.3	35.4
NA40	3.0	0.0	38.7	35.8	35.5	35.8	35.5	36.0	35.1
IN03	39.3	38.7	0.0	19.2	19.3	19.1	19.2	25.9	26.4
IN10	36.3	35.8	19.2	0.0	0.4	0.4	0.5	29.4	29.9
IN20	36.1	35.5	19.3	0.4	0.0	0.7	0.4	29.4	29.9
IA10	36.3	35.8	19.1	0.4	0.7	0.0	0.4	29.3	29.9
IA20	36.1	35.5	19.2	0.5	0.4	0.4	0.0	29.3	29.8
BB	36.3	36.0	25.9	29.4	29.4	29.3	29.3	0.0	3.6
C04	35.4	35.1	26.4	29.9	29.9	29.9	29.8	3.6	0.0
VLBI	85.7	85.5	84.2	79.2	79.2	79.3	79.2	74.3	74.3
GPS	39.9	39.8	30.8	34.0	34.0	33.9	33.9	15.4	15.1

(Fortsetzung Seite 62)

Tabelle 3.5: (Fortsetzung von Seite 61)

	VLBI	GPS
NN01	83.7	38.7
NN02	83.9	38.6
NN03	89.8	37.8
NN10	83.9	38.9
NN20	84.0	39.1
NN30	85.9	40.3
NN40	85.8	40.2
NA10	83.7	38.5
NA20	83.8	38.7
NA30	85.7	39.9
NA40	85.5	39.8
IN03	84.2	30.8
IN10	79.2	34.0
IN20	79.2	34.0
IA10	79.3	33.9
IA20	79.2	33.9
BB	74.3	15.4
C04	74.3	15.1
VLBI	0.0	74.3
GPS	74.3	0.0

- Von den Beobachtungsdaten ist mit der Zeitreihe C04 die beste Übereinstimmung zu erzielen,
- mit den VLBI-Beobachtungen die schlechteste.

Interessant ist noch der Vergleich einer Drehimpulsfunktion, die über den direkten Ansatz aus der soeben *berechneten* Polbewegung bestimmt wird, mit der aus den Atmosphärendaten bestimmten. Bei grenzenlos genauer Rechnung ohne Vereinfachungen und fehlerlosen Daten auf einem unbegrenzt feinen Gitter müßte dabei wieder die aus den Atmosphärendaten bestimmte Drehimpulsfunktion herauskommen, von der ja bei der Berechnung der Polbewegung ausgegangen wurde. Etwaige Abweichungen lassen den Beitrag des Rechengangs zu den Fehlern in den Ergebnissen abschätzen. Abbildung 3.20 ist die Gegenüberstellung der Drehimpulsfunktion χ_1 aus Atmosphärendaten mit der aus der berechneten Polbewegung zurückgerechneten. Man sieht, daß die Unterschiede wesentlich kleiner sind, wie zwischen den unterschiedlichen Berechnungsvarianten zur Bestimmung von χ_1 aus Atmosphärendaten (Abbildung 3.15).

Bei der Durchsicht sowohl der RMS-Tabellen, als auch der Graphiken fällt auf, daß die Genauigkeit des Integrationsansatzes um mehr als eine Größenordnung besser ist als die des direkten Ansatzes, gemessen an der Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Das liegt an der im Abschnitt 3.2.1 erwähnten viel niedrigeren Geschwindigkeit der Polbewegung (3.14). Das heißt, die höhere

Tabelle 3.6: RMS-Abweichungen zwischen Zeitreihen der Polbewegung [mas] über Integrationsansatz und alle Berechnungsvarianten aus Atmosphärendaten des ECMWF und aus geodätischer Beobachtung (Bulletin B des IERS).

	NN01	NN02	NN03	NN10	NN20	NN30	NN40	NA10	NA20
NN01	0.000	0.156	0.213	0.032	0.038	0.238	0.378	0.033	0.036
NN02	0.156	0.000	0.292	0.142	0.140	0.306	0.397	0.148	0.145
NN03	0.213	0.292	0.000	0.212	0.209	0.341	0.482	0.210	0.207
NN10	0.032	0.142	0.212	0.000	0.008	0.246	0.376	0.017	0.014
NN20	0.038	0.140	0.209	0.008	0.000	0.248	0.377	0.023	0.017
NN30	0.238	0.306	0.341	0.246	0.248	0.000	0.176	0.239	0.241
NN40	0.378	0.397	0.482	0.376	0.377	0.176	0.000	0.369	0.371
NA10	0.033	0.148	0.210	0.017	0.023	0.239	0.369	0.000	0.008
NA20	0.036	0.145	0.207	0.014	0.017	0.241	0.371	0.008	0.000
NA30	0.244	0.314	0.343	0.252	0.255	0.017	0.175	0.244	0.247
NA40	0.380	0.403	0.482	0.379	0.381	0.176	0.018	0.371	0.373
IN03	1.192	1.205	1.272	1.192	1.197	1.048	0.934	1.178	1.183
IN10	1.373	1.364	1.495	1.372	1.376	1.239	1.109	1.361	1.365
IN20	1.369	1.360	1.490	1.367	1.372	1.235	1.104	1.356	1.361
IA10	1.361	1.354	1.482	1.360	1.365	1.227	1.098	1.349	1.354
IA20	1.357	1.349	1.477	1.356	1.360	1.223	1.093	1.345	1.349
BB	0.737	0.810	0.708	0.748	0.752	0.717	0.779	0.734	0.738
	NA30	NA40	IN03	IN10	IN20	IA10	IA20	BB	
NN01	0.244	0.380	1.192	1.373	1.369	1.361	1.357	0.737	
NN02	0.314	0.403	1.205	1.364	1.360	1.354	1.349	0.810	
NN03	0.343	0.482	1.272	1.495	1.490	1.482	1.477	0.708	
NN10	0.252	0.379	1.192	1.372	1.367	1.360	1.356	0.748	
NN20	0.255	0.381	1.197	1.376	1.372	1.365	1.360	0.752	
NN30	0.017	0.176	1.048	1.239	1.235	1.227	1.223	0.717	
NN40	0.175	0.018	0.934	1.109	1.104	1.098	1.093	0.779	
NA10	0.244	0.371	1.178	1.361	1.356	1.349	1.345	0.734	
NA20	0.247	0.373	1.183	1.365	1.361	1.354	1.349	0.738	
NA30	0.000	0.173	1.036	1.230	1.226	1.218	1.213	0.703	
NA40	0.173	0.000	0.922	1.101	1.096	1.090	1.085	0.765	
IN03	1.036	0.922	0.000	0.386	0.384	0.368	0.365	1.010	
IN10	1.230	1.101	0.386	0.000	0.008	0.020	0.022	1.314	
IN20	1.226	1.096	0.384	0.008	0.000	0.021	0.020	1.311	
IA10	1.218	1.090	0.368	0.020	0.021	0.000	0.008	1.296	
IA20	1.213	1.085	0.365	0.022	0.020	0.008	0.000	1.293	
BB	0.703	0.765	1.010	1.314	1.311	1.296	1.293	0.000	

Tabelle 3.7: Wie Tabelle 3.6, geodätische Beobachtungen aber aus der Zeitreihe C04 des IERS.

	NN01	NN02	NN03	NN10	NN20	NN30	NN40	NA10	NA20
NN01	0.000	0.156	0.213	0.032	0.038	0.238	0.378	0.033	0.036
NN02	0.156	0.000	0.292	0.142	0.140	0.306	0.397	0.148	0.145
NN03	0.213	0.292	0.000	0.212	0.209	0.341	0.482	0.210	0.207
NN10	0.032	0.142	0.212	0.000	0.008	0.246	0.376	0.017	0.014
NN20	0.038	0.140	0.209	0.008	0.000	0.248	0.378	0.023	0.017
NN30	0.238	0.306	0.341	0.246	0.248	0.000	0.176	0.239	0.241
NN40	0.378	0.397	0.482	0.376	0.378	0.176	0.000	0.369	0.371
NA10	0.033	0.148	0.210	0.017	0.023	0.239	0.369	0.000	0.008
NA20	0.036	0.145	0.207	0.014	0.017	0.241	0.371	0.008	0.000
NA30	0.244	0.314	0.343	0.252	0.255	0.017	0.175	0.244	0.247
NA40	0.380	0.403	0.482	0.379	0.381	0.176	0.018	0.371	0.373
IN03	1.192	1.205	1.272	1.192	1.197	1.048	0.934	1.178	1.183
IN10	1.373	1.364	1.495	1.372	1.376	1.239	1.109	1.361	1.365
IN20	1.369	1.360	1.490	1.367	1.372	1.235	1.104	1.356	1.361
IA10	1.361	1.354	1.482	1.360	1.365	1.227	1.098	1.349	1.354
IA20	1.357	1.349	1.477	1.356	1.360	1.223	1.093	1.345	1.349
C04	0.728	0.804	0.692	0.739	0.743	0.715	0.783	0.725	0.729
	NA30	NA40	IN03	IN10	IN20	IA10	IA20	C04	
NN01	0.244	0.380	1.192	1.373	1.369	1.361	1.357	0.728	
NN02	0.314	0.403	1.205	1.364	1.360	1.354	1.349	0.804	
NN03	0.343	0.482	1.272	1.495	1.490	1.482	1.477	0.692	
NN10	0.252	0.379	1.192	1.372	1.367	1.360	1.356	0.739	
NN20	0.255	0.381	1.197	1.376	1.372	1.365	1.360	0.743	
NN30	0.017	0.176	1.048	1.239	1.235	1.227	1.223	0.715	
NN40	0.175	0.018	0.934	1.109	1.104	1.098	1.093	0.783	
NA10	0.244	0.371	1.178	1.361	1.356	1.349	1.345	0.725	
NA20	0.247	0.373	1.183	1.365	1.361	1.354	1.349	0.729	
NA30	0.000	0.173	1.036	1.230	1.226	1.218	1.213	0.702	
NA40	0.173	0.000	0.922	1.101	1.096	1.090	1.085	0.770	
IN03	1.036	0.922	0.000	0.386	0.384	0.368	0.365	1.040	
IN10	1.230	1.101	0.386	0.000	0.008	0.020	0.022	1.344	
IN20	1.226	1.096	0.384	0.008	0.000	0.021	0.020	1.341	
IA10	1.218	1.090	0.368	0.020	0.021	0.000	0.008	1.326	
IA20	1.213	1.085	0.365	0.022	0.020	0.008	0.000	1.324	
C04	0.702	0.770	1.040	1.344	1.341	1.326	1.324	0.000	

Tabelle 3.8: Wie Tabelle 3.6, geodätische Beobachtungen aber aus den VLBI-Beobachtungen des CONT05-Programmes.

	NN01	NN02	NN03	NN10	NN20	NN30	NN40	NA10	NA20
NN01	0.000	0.158	0.199	0.032	0.038	0.309	0.487	0.033	0.036
NN02	0.158	0.000	0.290	0.148	0.144	0.349	0.485	0.156	0.152
NN03	0.199	0.290	0.000	0.196	0.196	0.413	0.589	0.192	0.192
NN10	0.032	0.148	0.196	0.000	0.008	0.315	0.486	0.018	0.014
NN20	0.038	0.144	0.196	0.008	0.000	0.315	0.485	0.024	0.018
NN30	0.309	0.349	0.413	0.315	0.315	0.000	0.206	0.312	0.312
NN40	0.487	0.485	0.589	0.486	0.485	0.206	0.000	0.483	0.482
NA10	0.033	0.156	0.192	0.018	0.024	0.312	0.483	0.000	0.008
NA20	0.036	0.152	0.192	0.014	0.018	0.312	0.482	0.008	0.000
NA30	0.310	0.354	0.411	0.316	0.317	0.018	0.208	0.312	0.313
NA40	0.484	0.486	0.584	0.483	0.482	0.201	0.020	0.479	0.479
IN03	1.262	1.267	1.339	1.263	1.266	1.059	0.928	1.252	1.255
IN10	1.463	1.444	1.575	1.463	1.465	1.257	1.102	1.455	1.457
IN20	1.461	1.442	1.574	1.461	1.463	1.255	1.100	1.454	1.456
IA10	1.447	1.429	1.558	1.447	1.449	1.241	1.088	1.439	1.441
IA20	1.445	1.427	1.556	1.445	1.447	1.239	1.085	1.437	1.439
VLBI	0.970	1.090	0.919	0.984	0.989	0.991	1.108	0.970	0.975
	NA30	NA40	IN03	IN10	IN20	IA10	IA20	VLBI	
NN01	0.310	0.484	1.262	1.463	1.461	1.447	1.445	0.970	
NN02	0.354	0.486	1.267	1.444	1.442	1.429	1.427	1.090	
NN03	0.411	0.584	1.339	1.575	1.574	1.558	1.556	0.919	
NN10	0.316	0.483	1.263	1.463	1.461	1.447	1.445	0.984	
NN20	0.317	0.482	1.266	1.465	1.463	1.449	1.447	0.989	
NN30	0.018	0.201	1.059	1.257	1.255	1.241	1.239	0.991	
NN40	0.208	0.020	0.928	1.102	1.100	1.088	1.085	1.108	
NA10	0.312	0.479	1.252	1.455	1.454	1.439	1.437	0.970	
NA20	0.313	0.479	1.255	1.457	1.456	1.441	1.439	0.975	
NA30	0.000	0.202	1.049	1.251	1.249	1.234	1.232	0.978	
NA40	0.202	0.000	0.918	1.098	1.095	1.083	1.080	1.093	
IN03	1.049	0.918	0.000	0.391	0.392	0.368	0.368	1.364	
IN10	1.251	1.098	0.391	0.000	0.008	0.025	0.024	1.655	
IN20	1.249	1.095	0.392	0.008	0.000	0.029	0.025	1.657	
IA10	1.234	1.083	0.368	0.025	0.029	0.000	0.008	1.633	
IA20	1.232	1.080	0.368	0.024	0.025	0.008	0.000	1.634	
VLBI	0.978	1.093	1.364	1.655	1.657	1.633	1.634	0.000	

Tabelle 3.9: Wie Tabelle 3.6, geodätische Beobachtungen aber aus den GPS-Beobachtungen des CONT05-Programmes.

	NN01	NN02	NN03	NN10	NN20	NN30	NN40	NA10	NA20
NN01	0.000	0.154	0.168	0.032	0.038	0.285	0.437	0.033	0.037
NN02	0.154	0.000	0.252	0.146	0.145	0.337	0.446	0.150	0.149
NN03	0.168	0.252	0.000	0.164	0.162	0.339	0.490	0.161	0.159
NN10	0.032	0.146	0.164	0.000	0.008	0.289	0.434	0.019	0.016
NN20	0.038	0.145	0.162	0.008	0.000	0.290	0.434	0.025	0.019
NN30	0.285	0.337	0.339	0.289	0.290	0.000	0.185	0.289	0.289
NN40	0.437	0.446	0.490	0.434	0.434	0.185	0.000	0.434	0.433
NA10	0.033	0.150	0.161	0.019	0.025	0.289	0.434	0.000	0.008
NA20	0.037	0.149	0.159	0.016	0.019	0.289	0.433	0.008	0.000
NA30	0.284	0.339	0.336	0.289	0.289	0.020	0.189	0.287	0.287
NA40	0.433	0.445	0.485	0.430	0.430	0.181	0.021	0.429	0.429
IN03	1.245	1.230	1.296	1.246	1.250	1.110	1.004	1.234	1.238
IN10	1.421	1.388	1.500	1.422	1.425	1.286	1.163	1.413	1.417
IN20	1.418	1.384	1.496	1.418	1.422	1.282	1.159	1.410	1.413
IA10	1.407	1.375	1.484	1.407	1.411	1.272	1.151	1.398	1.402
IA20	1.403	1.371	1.481	1.404	1.408	1.268	1.146	1.395	1.399
GPS	0.920	0.965	0.886	0.930	0.935	1.021	1.116	0.914	0.918
	NA30	NA40	IN03	IN10	IN20	IA10	IA20	GPS	
NN01	0.284	0.433	1.245	1.421	1.418	1.407	1.403	0.920	
NN02	0.339	0.445	1.230	1.388	1.384	1.375	1.371	0.965	
NN03	0.336	0.485	1.296	1.500	1.496	1.484	1.481	0.886	
NN10	0.289	0.430	1.246	1.422	1.418	1.407	1.404	0.930	
NN20	0.289	0.430	1.250	1.425	1.422	1.411	1.408	0.935	
NN30	0.020	0.181	1.110	1.286	1.282	1.272	1.268	1.021	
NN40	0.189	0.021	1.004	1.163	1.159	1.151	1.146	1.116	
NA10	0.287	0.429	1.234	1.413	1.410	1.398	1.395	0.914	
NA20	0.287	0.429	1.238	1.417	1.413	1.402	1.399	0.918	
NA30	0.000	0.182	1.098	1.278	1.274	1.264	1.260	1.005	
NA40	0.182	0.000	0.992	1.156	1.152	1.144	1.139	1.099	
IN03	1.098	0.992	0.000	0.352	0.351	0.331	0.330	1.272	
IN10	1.278	1.156	0.352	0.000	0.008	0.023	0.024	1.550	
IN20	1.274	1.152	0.351	0.008	0.000	0.026	0.023	1.550	
IA10	1.264	1.144	0.331	0.023	0.026	0.000	0.008	1.529	
IA20	1.260	1.139	0.330	0.024	0.023	0.008	0.000	1.529	
GPS	1.005	1.099	1.272	1.550	1.550	1.529	1.529	0.000	

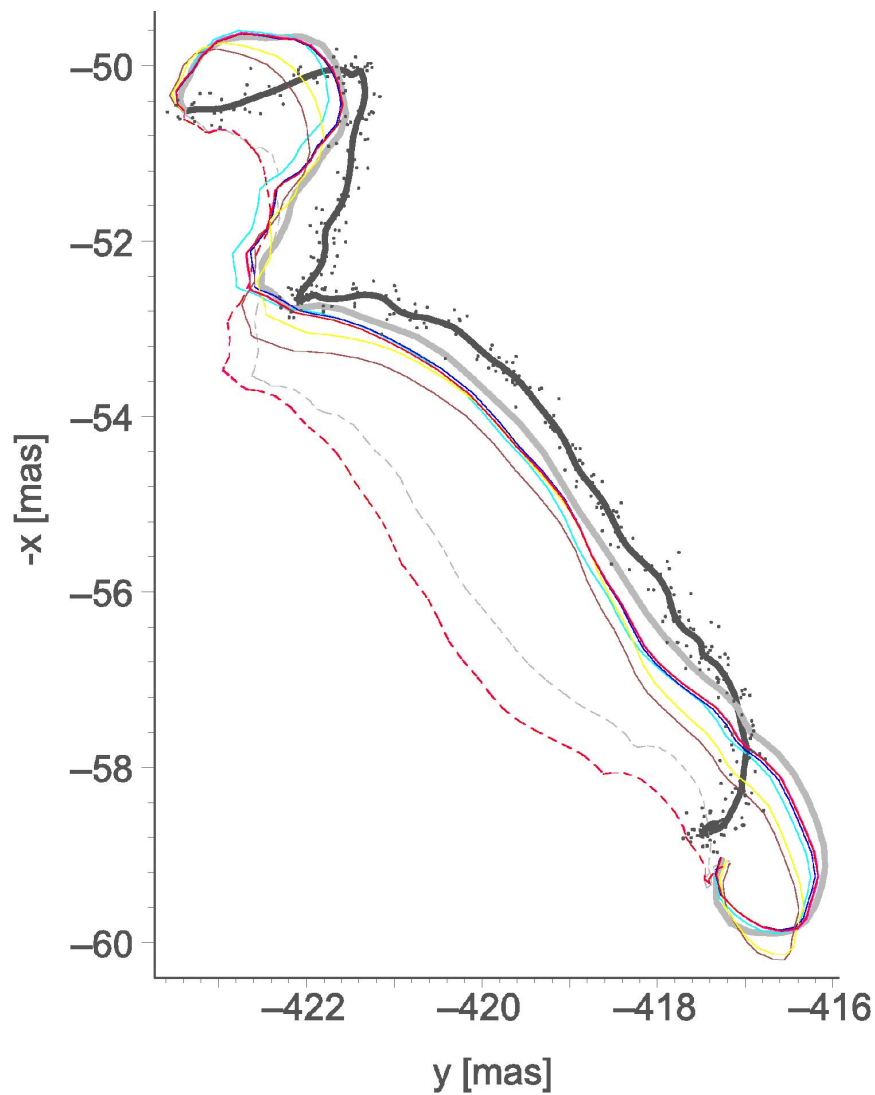


Abbildung 3.18: Integrationsansatz des Vergleichs der berechneten und beobachteten Polbewegung. Schwarze Kurve: geglättete Polbewegung aus den GPS-Beobachtungen des CONT05-Programmes 12.9.-30.9.2005, schwarze Punkte: Polbewegung aus den selben Beobachtungen ohne Datenglättung. Die restlichen Kurven sind die aus Atmosphärendaten berechneten Polbewegungen, Legende: Abbildung 3.1.

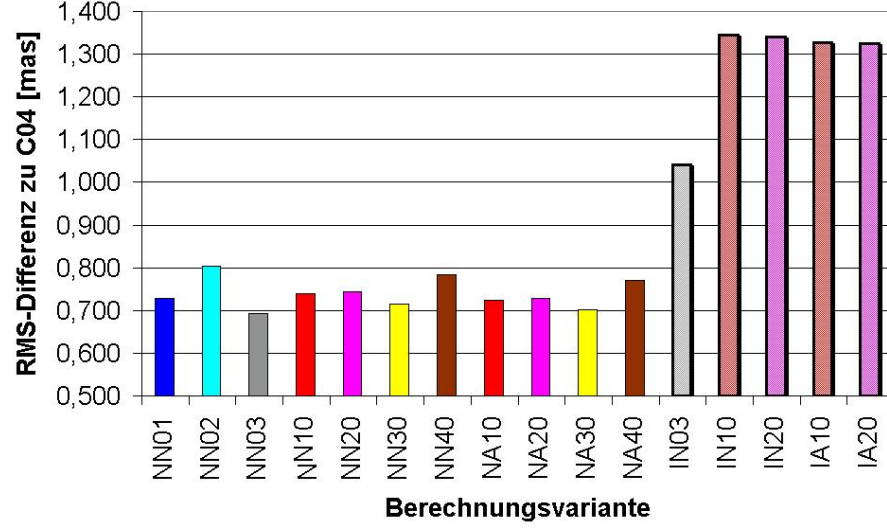


Abbildung 3.19: Integrationsansatz: RMS-Differenzen berechnete/beobachtete Polbewegung aller Berechnungsvarianten zur Reihe C04 der beobachteten Polbewegung. Farben wie in Abbildung 3.1, stark umrandet: inverser Barometereffekt berücksichtigt.

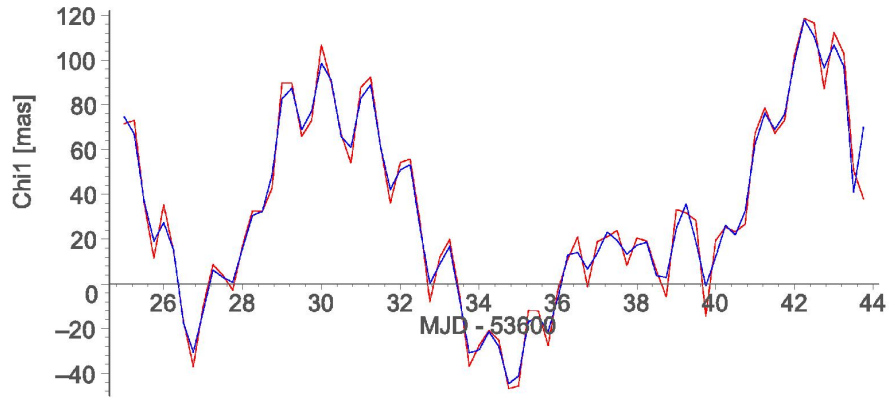


Abbildung 3.20: Rot: Drehimpulsfunktion χ_1 aus Atmosphärendaten (Variante NN10). Aus dieser wurde über den Integrationsansatz die Polbewegung berechnet (Abbildung 3.18) und daraus über den direkten Ansatz wieder die Drehimpulsfunktion (blaue Kurve in dieser Abbildung).

Genauigkeit des Integrationsansatzes ist nur absoluter Natur, gemessen an den zurückgelegten Strecken von Polbewegung und Drehimpulsfunktion sind beide Ansätze gleichwertig.

Berechnung von $\Delta\hat{\chi}$ aus dem Mittelpunkt der beobachteten Polbewegung

Dazu wurde an die beobachtete Polbewegung im bearbeiteten Zeitraum ein Kreis angepaßt: Kleinste Quadrate, allgemeiner Fall der Ausgleichsrechnung mit den Koordinaten der beobachteten Polpositionen als Beobachtungen und Kreisradius und Mittelpunktswinkel als Unbekannten. Die Koordinaten des Mittelpunktes wurden in (3.17) für $M(\hat{\chi}_b)$ eingesetzt. Der restliche Rechengang war wie oben beschrieben. Der Vergleich des Ergebnisses mit der beobachteten Polbewegung ist aber nicht zufriedenstellend. Zwar passt die Richtung der Bewegung, allerdings ist die berechnete Bewegung etwa doppelt so schnell wie die beobachtete. Es werden auch keine Details der beobachteten Bewegung wiedergegeben. Man muß dazu sagen, daß die Methode auch theoretisch Mängel aufweist: Der Mittelpunkt der beobachteten Polbewegung kann immer nur eine Näherung für die verursachende Drehimpulsfunktion bleiben, eine genaue Übereinstimmung wäre nur bei konstanter Drehimpulsfunktion gegeben (Abschnitt 3.2.1). Daran kann man auch nichts ändern, indem man mehr Punkte der Polbewegung zur Bestimmung des Mittelpunktes heranzieht. Dadurch wird im Gegenteil die Abweichung der Drehimpulsfunktion von einem konstanten Wert und damit die Abweichung der Polbewegung von einem Kreis noch größer und das Ergebnis schlechter. Man muß sich darum auf ein relativ kurzes Teilstück der Polbewegung beschränken. Schreitet in diesem Zeitintervall die Drehimpulsfunktion zu schnell voran, muß die Methode versagen.

3.3 Length of Day (LOD)

Ergebnis des Abschnittes 2.4.1 war, daß sich LOD und die dritte Komponente der Drehimpulsfunktion χ_3 nur durch eine Konstante unterscheiden (2.61). Anders als die Polbewegung wird LOD aber auf der hier bearbeiteten Zeitskala neben der Atmosphäre auch von Gezeitenkräften beeinflusst, vor allem bei Perioden von ca. zwei und vier Wochen, vgl. Abschnitt 2.1.4 und Abbildung 2.2. Im Detail sind diese Effekte in Abbildung 3.21 gut sichtbar, der geodätisch beobachtete Verlauf von $\chi_3 = \text{LOD}$ ist hier mit und ohne den Anteil der zonalen Gezeiten aufgetragen. Vergleichbar mit χ_3 aus Atmosphärendaten ist nur die Kurve ohne den Gezeitenanteil, die mit LODR bezeichnet wird, um sie von der rohen Zeitreihe von LOD zu unterscheiden. Dementsprechend muß (2.61) neu formuliert werden:

$$\chi_3 = \frac{\partial \Lambda}{\Lambda_0} + \text{const} = \text{LODR} + \text{const} \quad (3.17)$$

Die Zeitreihe von LODR kann zwar vollständig vom IERS aus dem Internet geladen werden [3], die zeitliche Auflösung beträgt aber nur 24 h, was für die hier

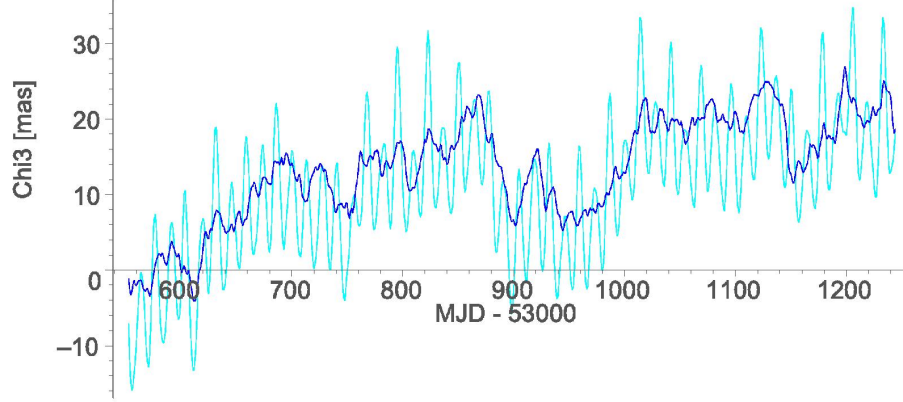


Abbildung 3.21: Hellblau: LOD aus IERS C04 vom 2.7.2005-24.5.2007. Dunkelblau: LODR aus IERS [3] im selben Zeitraum, Effekte der zonalen Gezeiten entfernt

verwendeten stündlichen Beobachtungsdaten aus CONT05 und die in Intervallen von 6 h vorliegenden meteorologischen Daten zu schlecht ist. Dem Verfasser wurde darum ein Fortranprogramm zu Verfügung gestellt, das für ein gegebenes Julianisches Datum die Differenz LOD-LODR ausgibt (nach dem Modell der IERS-Konventionen 2000, Autor: Sebastien Lambert).

In den vom Verfasser verwendeten VLBI-Beobachtungsdaten ist außerdem nur DUT1 enthalten, woraus LOD erst berechnet werden muß. Dazu wird $UTC = T$ gesetzt, $DUT1 = d(T)$, $UT1 = t(T) = T + d(T)$:

$$\begin{aligned}
 \partial T \frac{\Lambda_0}{\Lambda} &= \partial t \\
 \frac{\Lambda_0}{\Lambda} &= \frac{\partial t}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} (T + d(T)) \\
 &= 1 + \dot{d}(T) \\
 \Rightarrow -\frac{\Lambda - \Lambda_0}{\Lambda_0} &\approx -\frac{\Lambda - \Lambda_0}{\Lambda} = \dot{d}(T) \\
 -\text{LOD} &\approx \frac{\partial}{\partial T} \text{DUT1}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Die Ableitung von DUT1 erfolgte über Anpassung von Splines an die Zeitreihe aus den VLBI-Beobachtungen und Ableitung der Splines.

Zuletzt wurden diese, auf geodätische Beobachtung zurückzuführenden, Zeitreihen von χ_3 denen gegenübergestellt, die sich aus den Atmosphärendaten ergeben. Aus Abbildung 3.22 läßt sich ablesen, daß die Zeitreihe von LOD aus Atmosphärendaten nie mehr als 0.05 ms von den LOD aus GPS-Beobachtungen abweicht. Tabelle 3.10 enthält die RMS-Abweichungen von LOD aus Atmosphärendaten zu LOD aller verwendeten Beobachtungsdaten, Abbildung 3.23

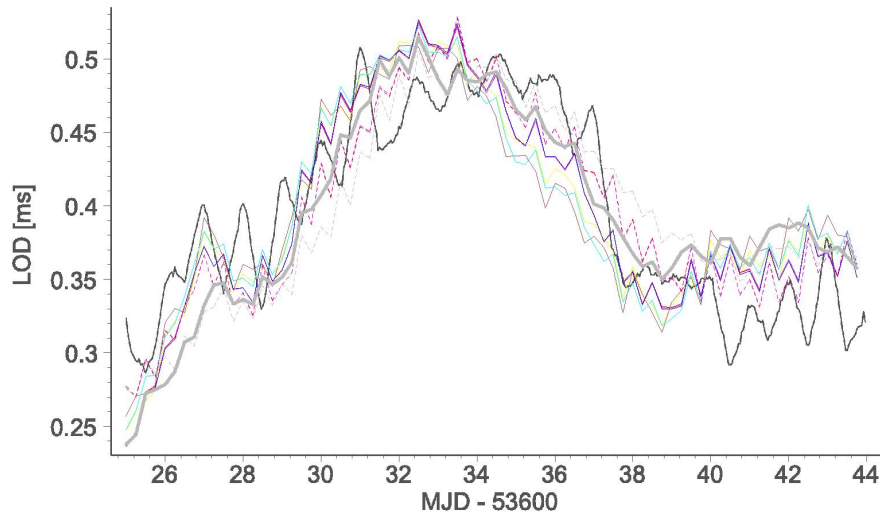


Abbildung 3.22: Vergleich von χ_3 aus geodätischer Beobachtung und Berechnung aus Atmosphärendaten. Legende: Abbildung 3.1. Außerdem schwarz: χ_3 aus den GPS Beobachtungen von CONT05.

die Abweichungen zur Reihe C04. Daraus ergeben sich für die Übereinstimmung der verschiedenen Zeitreihen folgende Abhängigkeiten:

- bessere Übereinstimmung mit Berücksichtigung des inversen Barometer-effektes,
- bei Integration über den Radius statt über den Druck um $1x \mu s$ schlechtere Ergebnisse.
- Die besten Ergebnisse bringen IN10, IN20, IA10, IA20.
- Im Vergleich der Beobachtungsdaten schneiden C04-Daten am besten ab und
- VLBI-Daten am schlechtesten.

3.4 Schlussfolgerungen

Grundsätzlich ist bei der Beurteilung der Vergleiche zwischen geodätisch bestimmten und aus atmosphärischen Drehimpulsfunktionen berechneten Erdrotationsparametern der Abschnitt 3.2.2 über die Resonanzeffekte der Free Core Nutation (FCN) zu beachten: der verwendete Formelapparat berücksichtigt sie nicht, weshalb im Bereich retrograd täglicher Frequenzen die wesentlich komplizierteren Gleichungen von [5] verwendet werden müssten. Abgesehen davon

Tabelle 3.10: RMS-Abweichungen $[\mu s]$ zwischen Zeitreihen von LOD aus Atmosphären- und Beobachtungsdaten, nach allen Berechnungsvarianten, und aus den verwendeten Beobachtungsdaten.

	NN01	NN02	NN03	NN10	NN20	NN30	NN40	NA10	NA20
NN01	0.0	11.3	19.7	1.1	0.8	10.3	17.7	1.1	0.8
NN02	11.3	0.0	25.2	11.0	11.0	7.8	9.8	11.0	11.0
NN03	19.7	25.2	0.0	19.1	19.3	22.1	26.9	19.1	19.3
NN10	1.1	11.0	19.1	0.0	0.5	9.9	17.2	0.0	0.5
NN20	0.8	11.0	19.3	0.5	0.0	9.9	17.3	0.5	0.0
NN30	10.3	7.8	22.1	9.9	9.9	0.0	8.2	9.9	9.9
NN40	17.7	9.8	26.9	17.2	17.3	8.2	0.0	17.2	17.3
NA10	1.1	11.0	19.1	0.0	0.5	9.9	17.2	0.0	0.5
NA20	0.8	11.0	19.3	0.5	0.0	9.9	17.3	0.5	0.0
NA30	10.3	7.8	22.1	9.9	9.9	0.0	8.2	9.9	9.9
NA40	17.7	9.8	26.9	17.2	17.3	8.2	0.0	17.2	17.3
IN03	32.9	39.6	19.9	32.3	32.6	35.9	40.4	32.3	32.6
IN10	18.5	26.3	19.9	18.1	18.5	23.2	29.2	18.1	18.5
IN20	18.2	26.1	19.9	17.8	18.1	23.0	29.1	17.8	18.1
IA10	18.5	26.3	19.9	18.1	18.5	23.2	29.2	18.1	18.5
IA20	18.2	26.1	19.9	17.8	18.1	23.0	29.1	17.8	18.1
BB	26.9	33.6	31.4	27.1	27.2	30.5	36.6	27.1	27.2
C04	29.0	35.9	31.4	28.9	29.1	32.7	38.5	28.9	29.1
VLBI	91.9	95.5	92.5	92.1	92.0	95.9	99.4	92.1	92.0
GPS	37.2	41.1	39.8	37.0	37.2	37.8	41.2	37.0	37.2

	NA30	NA40	IN03	IN10	IN20	IA10	IA20	BB	C04
NN01	10.3	17.7	32.9	18.5	18.2	18.5	18.2	26.9	29.0
NN02	7.8	9.8	39.6	26.3	26.1	26.3	26.1	33.6	35.9
NN03	22.1	26.9	19.9	19.9	19.9	19.9	19.9	31.4	31.4
NN10	9.9	17.2	32.3	18.1	17.8	18.1	17.8	27.1	28.9
NN20	9.9	17.3	32.6	18.5	18.1	18.5	18.1	27.2	29.1
NN30	0.0	8.2	35.9	23.2	23.0	23.2	23.0	30.5	32.7
NN40	8.2	0.0	40.4	29.2	29.1	29.2	29.1	36.6	38.5
NA10	9.9	17.2	32.3	18.1	17.8	18.1	17.8	27.1	28.9
NA20	9.9	17.3	32.6	18.5	18.1	18.5	18.1	27.2	29.1
NA30	0.0	8.2	35.9	23.2	23.0	23.2	23.0	30.5	32.7
NA40	8.2	0.0	40.4	29.2	29.1	29.2	29.1	36.6	38.5
IN03	35.9	40.4	0.0	19.1	19.4	19.1	19.4	33.4	30.6
IN10	23.2	29.2	19.1	0.0	0.5	0.0	0.5	22.7	22.1
IN20	23.0	29.1	19.4	0.5	0.0	0.5	0.0	22.6	22.1
IA10	23.2	29.2	19.1	0.0	0.5	0.0	0.5	22.7	22.1
IA20	23.0	29.1	19.4	0.5	0.0	0.5	0.0	22.6	22.1
BB	30.5	36.6	33.4	22.7	22.6	22.7	22.6	0.0	15.6
C04	32.7	38.5	30.6	22.1	22.1	22.1	22.1	15.6	0.0
VLBI	95.9	99.4	93.6	91.5	91.4	91.5	91.4	89.9	90.7
GPS	37.8	41.2	39.8	33.3	33.4	33.3	33.4	25.9	24.3

(Fortsetzung Seite 73)

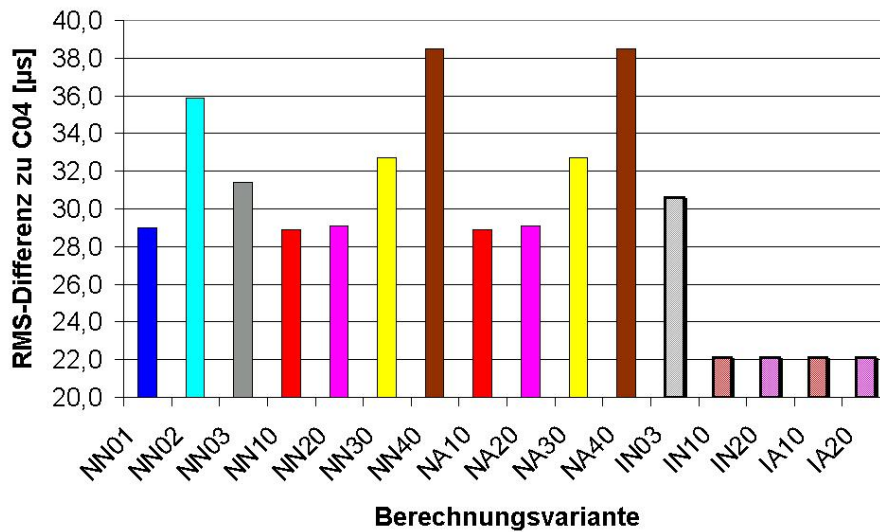


Abbildung 3.23: RMS-Differenzen zwischen berechneter und beobachteter LOD aller Berechnungsvarianten zur Reihe C04 der beobachteten LOD. Farben wie in Abbildung 3.1, stark umrandet: inverser Barometereffekt berücksichtigt.

Tabelle 3.10: (Fortsetzung von Seite 72)

	VLBI	GPS
NN01	91.9	37.2
NN02	95.5	41.1
NN03	92.5	39.8
NN10	92.1	37.0
NN20	92.0	37.2
NN30	95.9	37.8
NN40	99.4	41.2
NA10	92.1	37.0
NA20	92.0	37.2
NA30	95.9	37.8
NA40	99.4	41.2
IN03	93.6	39.8
IN10	91.5	33.3
IN20	91.4	33.4
IA10	91.5	33.3
IA20	91.4	33.4
BB	89.9	25.9
C04	90.7	24.3
VLBI	0.0	91.9
GPS	91.9	0.0

können die aus Atmosphärendaten allein berechneten Erdrotationsparameter nie genau mit den geodätischen übereinstimmen, im untersuchten Frequenzbereich spielen auch die Ozeane eine merkliche Rolle (Abschnitt 2.1.4). Der Einfluß der Atmosphäre überwiegt aber so weit, daß die Berechnungsvarianten trotzdem nach ihrer Übereinstimmung mit den geodätischen Erdrotationsparametern beurteilt werden:

Die Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte lassen erkennen, daß LOD aus ECMWF-Daten deutlich besser bestimmt werden kann als aus NCEP-Daten. Das kann dadurch erklärt werden, daß es NCEP-Daten nur unterhalb des Druckniveaus von 10 hPa gibt. Die Masse der darüberliegenden Atmosphäre beträgt nach [11] nur 1% der Gesamtmasse, es treten aber starke zonale Winde auf. Da LOD säsonal hauptsächlich von zonalen Winden beeinflusst wird, die Polbewegung aber mehr von Luftdruckvariationen, wirken sich die fehlenden Daten im NCEP-Modell vor allem auf LOD aus. Die zonalen Winde oberhalb 10 hPa verursachen nach [11] jährliche LOD-Schwankungen von ca. $20.5 \mu\text{s}$.

Integration über den Druck hat in der vorliegenden Arbeit fast ausnahmslos bessere Ergebnisse gebracht, als über den Radius. Das liegt an den Dichteänderungen, die bei Integration über den Radius schlechter zu erfassen sind.

Vergleiche mit VLBI-Beobachtungen fallen deutlich schlechter aus, als solche mit GPS-Beobachtungen. Ursache ist die im Vergleich zu GPS viel geringere Anzahl an VLBI-Stationen. Außerdem wirkt sich das notwendige Zusammenpassen der einzelnen, 24 h dauernden VLBI-Sessions ungünstig aus.

Die hochauflösenden Zeitreihen aus CONT05-Beobachtungen bringen schlechtere Ergebnisse als die C04-Zeitreihe des IERS (tägliche Daten), das betrifft VLBI und in geringerem Ausmaß auch GPS. Ursache ist das starke Rauschen der Daten, das vor der Verarbeitung eine Glättung notwendig macht.

Fortschritte beim Vergleich zwischen geophysikalisch und geodätisch bestimmten Erdrotationsparametern im Frequenzbereich unter der FCN-Resonanz werden hauptsächlich durch Einbeziehung der Ozeaneffekte und die Verwendung längerer Zeitreihen zu erzielen sein.

Anhang A

Drehimpulsfunktion und Polbewegung

Wie im Abschnitt 2.4.2 hergeleitet, berechnet man die Drehimpulsfunktion $\hat{\chi}$ aus der Polbewegung $\hat{\mathbf{p}}$ so:

$$\hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sigma} \dot{\hat{\mathbf{p}}} - \hat{\mathbf{B}} e^{-i\Omega t} = \hat{\chi} \quad (\text{A.1})$$

Üblicherweise wird aber verwendet:

$$\hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sigma} \dot{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\chi} \quad (\text{A.2})$$

Die Differenz ist eine komplexe Exponentialfunktion mit unbekannter Phase und Amplitude und der retrograden Erdrotationsfrequenz. Berechnet man die Drehimpulsfunktion zuerst nach (A.2), bezeichnet das Ergebnis mit $\hat{\chi}_b$ und dann aus Atmosphärendaten, bezeichnet mit $\hat{\chi}_a$, müßte

$$\hat{\chi}_a - \hat{\chi}_b = -\hat{\mathbf{B}} e^{-i\Omega t} \quad (\text{A.3})$$

sein. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die Atmosphäre mit Abstand den größten Einfluß auf die Polbewegung hat. Die Differenz (A.3) kann aus den bei dieser Arbeit vorliegenden Daten auf zweierlei Arten bestimmt werden:

- Aus der Differenz zwischen atmosphärischer und geodätischer Drehimpulsfunktion, wie sie beim direkten Ansatz berechnet wird (Abschnitt 3.2.3), unter Verwendung der Zeitreihen mit stündlicher Auflösung für die geodätische Polbewegung. Das ergibt Daten für 19 Perioden des gesuchten Signals.
- Auch die Zeitreihe [3] atmosphärischer und geodätischer Drehimpulsfunktionen kann verwendet werden, obwohl sie nur in täglicher Auflösung vorliegt und das gesuchte Signal eine tägliche Periode hat: es handelt sich

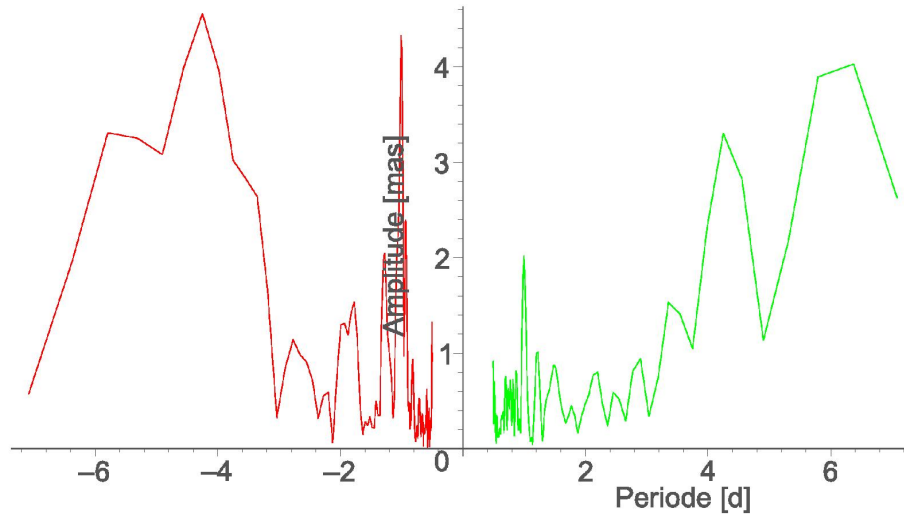


Abbildung A.1: Fourierspektrum der Differenz zwischen atmosphärischer und geodätischer Drehimpulsfunktion für den Zeitraum CONT05. Atmosphärische Drehimpulsfunktion berechnet nach Variante NN01 aus ECMWF-Daten, geodätische Drehimpulsfunktion aus GPS-Beobachtungsdaten.

im Fall der Auflösung der Zeitreihe um mittlere *Sonnentage*, bekanntlich etwas länger als Sternentage, die das gesuchte Signal definieren. Damit wird der Drehwinkel der Erde, wenn er täglich zur selben Zeit (UT) bestimmt wird, jeden Tag etwas größer, was nach Ablauf eines Jahres genau 360° ausmacht. So bildet sich ein Signal mit der Frequenz der Erdrotation im Laufe eines Jahres mit einer Periode von 365.2422 Tagen ab. Das gilt sinngemäß auch für retrograde Signale, wie das hier gesuchte. Die Zeitreihe [3] reicht bis 1960 zurück, womit Daten für 47 Perioden des Signals zur Verfügung stehen.

Von beiden Möglichkeiten wurde Gebrauch gemacht und von den Zeitreihen der nach (A.3) gebildeten Differenzen Fourierspektren hergestellt (Abbildungen A.1 und A.2). Man sieht, daß die gesuchten retrograden Frequenzen mit Perioden von einem Tag bzw. von einem Jahr in beiden Spektren stark verteten sind.

Das Problem dabei ist, daß retrograd täglich auch die Frequenz der “Free Core Nutation“ (FCN) ist, einer wichtigen Resonanzfrequenz der Erde. Das hier gesuchte Signal wird darum von anderen Signalen mit ähnlicher Frequenz und beliebiger Ursache überlagert. Außerdem sind die verwendeten Formeln im Frequenzbereich der FCN nicht richtig, da sie die Resonanz nicht berücksichtigen (Kapitel 3.2.2). Diese Überlegungen werden bestätigt, wenn man die Peaks aus den Abbildungen A.1 und A.2 im Zeitbereich aufträgt: Es zeigen sich starke Schwebungen (Abbildung A.3). Außerdem ist die Übereinstimmung zwischen den zwei Signalen, die sich aus den beiden verwendeten Zeitreihen ableiten las-

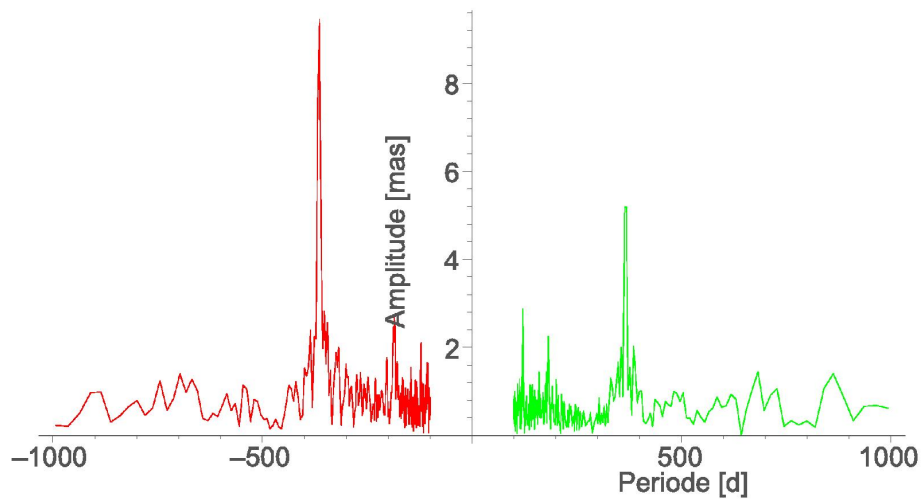


Abbildung A.2: Fourierspektrum der Differenz zwischen atmosphärischer und geodätischer Drehimpulsfunktion nach [3]

sen, nur sehr gering.

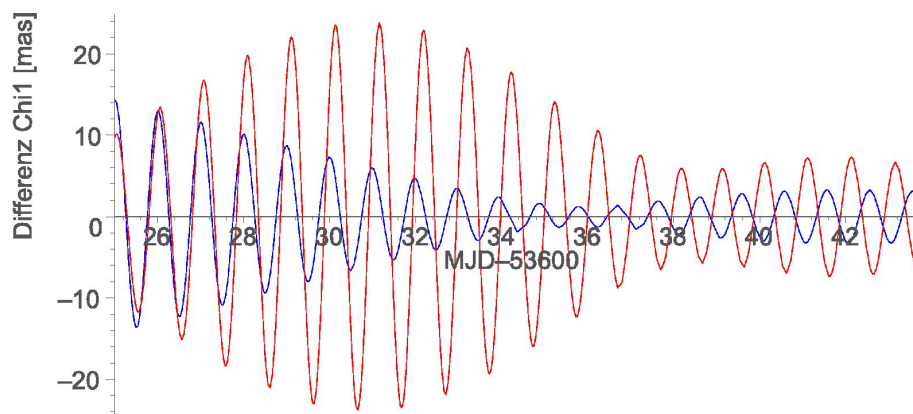


Abbildung A.3: Rot: Peak der retrograden täglichen Frequenzen aus Abbildung A.1 im Zeitbereich, blau: Peak der retrograden jährlichen Frequenzen aus Abbildung A.2 im Zeitbereich bei Multiplikation der Frequenzen mit 366.2422 (Umrechnung zwischen Jahr und Sternentag).

Anhang B

Schreibweise und Variablennamen

B.1 Schreibweise von Variablensymbolen

x	Reelle Zahl
$\hat{\mathbf{x}}$	Komplexe Zahl
$\mathbf{X}$	Matrix oder Vektor (Groß- und Kleinbuchstaben)

B.2 Verwendete Variablennamen

A	Äquatoriales Hauptträgheitsmoment einer rotationssymmetrischen Erde
A_c	Äquatoriales Hauptträgheitsmoment eines rotationssymmetrischen Erdkerns
A_m	Äquatoriales Hauptträgheitsmoment von Kruste und Mantel einer rotationssymmetrischen Erde
C	Polares Hauptträgheitsmoment einer rotationssymmetrischen Erde
C_m	Polares Hauptträgheitsmoment von Kruste und Mantel einer rotationssymmetrischen Erde
E	Erdmasse
G	Gravitationskonstante
g	Schwerebeschleunigung
$\mathbf{H}$	Drehimpuls
$\mathbf{h}$	Relativdrehimpuls
h_i	Drei Komponenten von $\mathbf{h}$
$\hat{\mathbf{h}}$	$h_1 + i h_2$
h	Seehöhe
$\mathbf{I}$	Trägheitstensor
I_{ij}	3×3 Komponenten von $\mathbf{I}$
$\Delta \mathbf{I}$	Abweichung von $\mathbf{I}$ von einem nur diagonal besetzten Tensor
ΔI_{ij}	3×3 Komponenten von $\Delta \mathbf{I}$

$\Delta \hat{\mathbf{I}}$	$I_{13} + i I_{23}$
K_2	Rotationslovezahl
$\Delta K_{ocn,s}$	Ozean-Lovezahl: Zuschlag zur Rotationslovezahl wegen Massenverlagerungen im Ozean bei der Berechnung von χ_3
$\Delta K_{ocn,w}$	Ozean-Lovezahl: Zuschlag zur Rotationslovezahl wegen Massenverlagerungen im Ozean bei der Berechnung von $\hat{\chi}$
K'_2	Auflast-Lovezahl
$\Delta \hat{\mathbf{K}}'_{\text{an}}$	Zuschlag zur Auflast-Lovezahl wegen anelastischer Effekte
k_r	Korrektur rotationaler Verformung in axialer Richtung bei der Berechnung von χ_3
$\mathbf{L}$	Drehmoment
L_i	3 Komponenten von L
$\hat{\mathbf{L}}$	$L_1 + i L_2$
M	Molekulargewicht
m_i	Drei Komponenten der Abweichung vom nominalen Erdrotationsvektor als dimensionslose Verhältniszahlen zu Ω
$\hat{\mathbf{m}}$	$m_1 + i m_2$
$\hat{\mathbf{n}}$	$X + i Y$
$\hat{\mathbf{p}}$	$x - i y$
p	Luftdruck
Q	“Quality factor“ (Dämpfung) der beobachteten Polbewegung
R	Mittlerer Erdradius, ortsabhängiger Ellipsoidradius oder allgemeine Gaskonstante
r	Radius vom Schwerpunkt der Erde
s	Spezifische Luftfeuchtigkeit
T	Absolute Temperatur
T_{cw}	Beobachtete Chandlerperiode der Polbewegung
$\mathbf{u}, \mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektoren
u	Breitenkreisparallele Windgeschwindigkeit
v	Meridionale Windgeschwindigkeit
dX, dY	Koordinaten des CIP im Äquatorsystem zu dem vom Nutationsmodell berechneten Pol
x, y	Koordinaten des CIP im TRS
α_3	Korrektur wegen Entkopplung des Kerns in axialer Richtung bei der Berechnung von χ_3
ϵ_c	Exzentrizität des Erdkerns
θ	Sternzeit
Λ	Tatsächliche Tageslänge
Λ_0	Nominale Tageslänge
λ	Geographische Länge
ρ	Dichte
σ_r	Eulerfrequenz
σ_0	Theoretische Chandlerfrequenz
$\hat{\sigma}$	Beobachtete Chandlerfrequenz
Φ	Gravitationspotential

ϕ	Geographische Breite
χ_i	Drei Komponenten der effektiven Drehimpulsfunktion (Abschnitt 2.2.3) vereinfachend meistens nur Drehimpulsfunktion genannt
$\hat{\chi}$	$\chi_1 + i \chi_2$
$\underline{\chi}_i$	Drei Komponenten der Drehimpulsfunktion (Abschnitt 2.2.3)
$\hat{\underline{\chi}}$	$\underline{\chi}_1 + i \underline{\chi}_2$
ψ_i	Drei Komponenten der Anregungsfunktion (Abschnitt 2.2.2)
$\hat{\psi}$	$\psi_1 + i \psi_2$
Ω	Nominale Rotationsgeschwindigkeit der Erde (konstant)
$\mathbf{\Omega}$	Nominaler Erdrotationsvektor in der z-Achse, Betrag Ω
$\boldsymbol{\omega}$	Zeitabhängiger Rotationsvektor der Erde
ω_i	Drei Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$

Anhang C

Verwendete Konstanten

Symbol	Wert		Einheit	Quelle
A	8.0101	10^{37}	kg m^2	[13]
A_m	7.0999	10^{37}	kg m^2	[19]
C	8.0365	10^{37}	kg m^2	[13]
C_m	7.1236	10^{37}	kg m^2	[19]
E	5.9737	10^{24}	kg	[13]
G	6.67259	10^{-11}	$\text{m}^3/\text{kg s}^2$	[13]
K_2	0.298			[28]
$\Delta K_{ocn,s}$	0.043228			[11]
$\Delta K_{ocn,w}$	0.047715			[11]
K'_2	-0.305			[28]
$\Delta \hat{\mathbf{K}}'_{\text{an}}$	0.011			
	+0.003 i			[28]
k_r	0.997191			[11]
Q	50.			[28]
R^1	6371000.		m	[19]
R^2	8314.3		J/K/kmol	[9]
T_{cw}	433.7		d	[28]
α_3	0.792			[27]
ϵ_c	2.546	10^{-3}		[19]
Ω	7.292115	10^{-5}	rad/s	[13]

Berechnung der beobachteten Chandlerfrequenz aus den hier angegebenen Konstanten T_{cw}, Q :

$$\hat{\sigma} = \frac{2\pi}{T_{cw}} \left(1 + \frac{i}{2Q} \right)$$

¹Mittlerer Erdradius

²Allgemeine Gaskonstante

Literaturverzeichnis

- [1] Aoyama Y. and Naito I.: Wind contributions to the Earth's angular momentum budgets in seasonal variation. *J.Geophys.Res.* **105**(D10), pp 12417-12431, 2000.
- [2] Barnes R., Hide R., White A., Wilson C.: Atmospheric angular momentum functions, length-of-day changes and polar motion. *Proc.R.Soc.Lond.* **A387**, S.31-73, 1983.
- [3] Bizouard C.: Atmospheric excitation of the earth polar motion and rotation rate (1962 to nowadays). <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/analysis/excitative.html>
- [4] Brzezinski A. and Capitaine N.: The Use of the Precise Observations of the Celestial Ephemeris Pole in the Analysis of Geophysical Excitation of Earth Rotation. *J.Geophys.Res.* **98**(B4), pp 6667-6675, 1993.
- [5] High frequency oscillations of the celestial ephemeris pole by vaiations of the effective angular momentum function. *Proceedings Journees Systemes de Reference Spatio-Temporels 1992 "Geodynamique Globale et Systemes de reference"*, Observatoire de Paris, 102-107, 1992.
- [6] Chao B.F.: On the excitation of the Earth's polar motion. *Geophys.Res.Lett.* **12**, 8, pp 526-529, 1985.
- [7] Dahlen F.A.: The passive influence of the oceans upon the rotation of the Earth. *Geophys.J.Roy.astr.Soc.* **46**, pp 363-406, 1976.
- [8] Eubanks T. M.: Variations in the orientation of the Earth. In: Smith DE (ed) *Contributions of space geodesy to geodynamics: Earth dynamics. Geodynamics* **24**, pp 1-54, American Geophysical Union, Washington, DC, 1993
- [9] Gerthsen C., Kneser H.O., Vogel H.: *Physik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [10] Gross R.S.: Correspondence between theory and observations of polar motion. *Geophys.J.Int.* **109**, pp 162-170, 1992

- [11] Gross R.S.: Earth Rotations - Long Period. In: Editor in Chief Schubert G.: Treatise on Geophysics, Volume Editor Herring T.: Volume 3 Geodesy. Elsevier B.V., Amsterdam, 2007.
- [12] Gross R.S. and. Vondrak J.: Astrometric and spacegeometric observations of polar wander. *Geophys.Res.Lett.* **26**(14), pp 2085-2088, 1999.
- [13] Groten E.: Fundamental parameters and current (2004) best estimates of parameters of common relevance to astronomy, geodesy and geodynamics. *J.Geodesy* **77**, pp 724-731, 2004.
- [14] Hide R. and Dickey J.O.: Earth's variable rotation. *Science* **253**, pp 629-637, 1991.
- [15] Höpfner J.: Seasonal variations in length of day and atmospheric angular momentum. *Geophys.J.Int.* **135**, pp 407-437, 1998.
- [16] Höpfner J.: Seasonal length-of-day changes and atmospheric angular momentum oscillations in their temporal variability. *J.Geodesy* **74**, pp 335-358, 2000.
- [17] Lambeck K.: The Earth's Variable Rotation: Geophysical Causes and Consequences. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [18] Lambeck K.: Geophysical Geodesy: The slow Deformations of the Earth. Oxford University Press, New York, 1988.
- [19] Mathews P.M. et al.: Forced Nutations of the Earth: Influence of inner core dynamics 2. Numerical results and comparisons. *J.Geophys.Res.* **96**, pp 8243-8257, 1991.
- [20] Munk W.H. and MacDonald G.J.F.: The Rotation of the Earth: A Geophysical Discussion. Cambridge University Press, New York, 1960
- [21] Moritz H., Mueller I.I.: Earth rotation. Ungar, New York, 1987
- [22] Morrison L.V. and Stephenson F.R.: Historical eclipses and the variability of the Earth's rotation. *J.Geodyn.* **32**, pp 247-265, 2001.
- [23] Rosen R.D.: The axial momentum balance of Earth and its fluid envelope. *Surv.Geophysics* **14**, pp 1-29, 1993.
- [24] Salstein D.A. et al.: The Sub-bureau for Atmospheric Angular Momentum of the International Earth Rotation Service: A Meteorological Data Center with Geodetic Applications. *Bulletin American Meteorological Society* **74**, pp 67-80, 1993.
- [25] Schuh H. u.a.: Erdrotation und globale dynamische Prozesse. *Mitt.BA.f.Kartographie und Geodäsie* 32, Verlag des BA.f.Kartographie und Geodäsie, Frankfurt/Main, 2003.

- [26] Smith M.L. and Dahlen F.A.: The period and Q of the Chanler whobble. *Geophys.J.Roy.astr.Soc.* **64**, pp 223-281, 1981.
- [27] Wahr J.M.: The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble and on the seasonal variations in the length of day – II. Results. *Geophys.J.Roy.astr.Soc.* **74**, pp 451-487, 1983.
- [28] Wahr J.: Polar motion models: Angular momentum approach. In: Editors: Plag H.P., Chao B.F., Gross R.S., van Dam T.: *Forcing of Polar Motion in the Chandler Frequency Band: A Contribution to Understanding Interannual Climate Change*. Cahiers du Centre Europeen de Godynamique et du Sismologie vo. 24, Luxembourg, pp 89-102, 2005.
- [29] Wallace J. M., Hobbs P. V.: *Atmospheric Science*. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1977.