DIPLOMARBEIT

W^*-Algebren als vollständige Axiomatisierung der Von-Neumann-Algebren

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Michael Kaltenbäck

durch

Clemens Schindler, BSc.
Matrikelnummer: 1425988

Wien, am 28. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Theorie der C^*-Algebren ist entstanden als Verallgemeinerung der Theorie beschränkter Operatoren auf einem Hilbertraum, insbesondere der Spektraltheorie. Anstelle von Räumen von Operatoren werden abstrakte $*$-Algebren untersucht, die eine derartige Normstruktur tragen, dass die algebraische und die analytisch-topologische Struktur kompatibel sind. Die Definition einer C^*-Algebra besteht also nur aus einer Liste von Axiomen, ohne auf Eigenschaften einer konkreten zugrundeliegenden Struktur, beispielsweise eines Hilbertraums, Bezug zu nehmen. Diese allgemeinere Sichtweise bietet – vom unbestrittenen ästhetischen Wert einer axiomatischen Behandlung abgesehen – einige „handfeste“ Vorteile; zu nennen ist vor allem die gesamte Theorie kommutativer C^*-Algebren, die auch bei der Behandlung nichtkommutativer C^*-Algebren sowie konkreter normaler Operatoren einfließt.

Es würde jedoch den C^*-Algebren nicht gerecht werden, sie als echte Verallgemeinerung des Raums $L_b(H)$ der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum H und der abgeschlossenen $*$-Unteralgebren von $L_b(H)$ zu sehen. Der Satz von Gelfand-Naimark besagt nämlich, dass eine beliebige C^*-Algebra isometrisch isomorph als $*$-Algebra zu einer solchen abgeschlossenen $*$-Unteralgebra ist. Dies bedeutet, dass durch C^*-Algebren die Struktur abgeschlossener $*$-Unteralgebren des Raums der beschränkten Operatoren auf einem beliebigen Hilbertraum vollständig axiomatisiert wird, obwohl die Abgeschlossenheit über die Abbildungsnorm vom zugrundeliegenden Hilbertraum in ad hoc nicht zu trennender Weise abhängig ist. Dieser Standpunkt der abstrakten Strukturanalyse soll in der folgenden Arbeit eingenommen werden, um einerseits den Satz von Gelfand-Naimark zu beweisen und andererseits eine weitere Klasse von Operatoralgebren zu untersuchen, die Von-Neumann-Algebren. Diese ergeben sich auch als abgeschlossene $*$-Unteralgebren, wobei allerdings eine andere Topologie auf dem Raum der beschränkten Operatoren betrachtet wird – eine Möglichkeit ist die schwache Operatortopologie. Klarerweise hängt diese ebenfalls, intuitiv noch enger als die Abbildungsnorm, mit der Hilbertraumstruktur zusammen, sodass die Frage nach einer passenden Axiomatisierung aufgeworfen wird. *S. Sakai* konnte dieses Problem mit der Einführung der sogenannten *W^*-Algebren* lösen. Dabei handelt es sich um C^*-Algebren, die gleichzeitig, als Banachraum betrachtet, bis auf isometrische Isomorphie der Dualraum eines Banachraums sind. Dass dieses Axiomensystem, das keinerlei Hilbertraum erwähnt, die gewünschten Eigenschaften hat, wird durch den Satz von Sakai gezeigt. Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit soll es sein, aufbauend auf den Inhalten eines Funktionalanalysis-Vorlesungszyklus den Beweis dieses Satzes und die dafür notwendigen Grundlagen in moderner Weise darzustellen. Dabei stützen wir uns auf die Argumentation in Sakais Buch [7], die wir an vielen Stellen ergänzt und erweitert haben, um diverse Ungenauigkeiten zu klären und wenn notwendig zu korrigieren. Im Zuge dessen war es möglich, den Satz von Sakai noch auszubauen, wodurch wir den Beweis eines weiteren Resultats vereinfachen konnten.

In Kapitel 1 werden notwendige Grundlagen aus verschiedenen Teilgebieten der Funktionalanalysis behandelt, Kapitel 2 greift die C^*-Algebren auf und konzentriert sich auf gewisse Elemente, nämlich Einselemente und Projektionen. Kapitel 3 schließt die Behandlung abstrakter C^*-Algebren mit dem Satz von Gelfand-Naimark ab. Mit Operatoralgebren beschäftigt sich Kapitel 4; insbesondere werden verschiedene Operatortopologien einführt, deren Zusammenhänge untersucht sowie die Von-Neumann-Algebren definiert. In den verbleibenden Kapiteln 5 bis 7 stehen W^*-Algebren im Mittelpunkt. Kapitel 5 behandelt allgemeine Eigenschaften wie eine kanonische Topologie und diverse Stetigkeitsaussagen. In Kapitel 6 werden die Verbindungen zu Operatoren, vor allem zu Von-Neumann-Algebren, untersucht sowie der Satz von Sakai bewiesen. Das abschließende Kapitel 7 beschäftigt sich mit Eindeutigkeitsaussagen, die der Definition der W^*-Algebren zu hoher Ästhetik verhelfen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Michael Kaltenbäck dafür bedanken, dass er mich auf ein interessantes Stück Mathematik aufmerksam gemacht hat, und natürlich für seine Verbesserungsvorschläge dieser Arbeit. Großer Dank gebührt außerdem meinen Eltern für ihre moralische und finanzielle Unterstützung.

Kapitel 1

Einige Resultate aus der Funktionalanalysis

Wir starten mit der Auflistung diverser in dieser Arbeit benötigter Ergebnisse der Funktionalanalysis. Der vollständige Beweis sämtlicher Aussagen würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

1.1 Banachräume

Notation 1.1.1.

(i) Im Folgenden bezeichne S oder S_X die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ eines Banachraums $(X, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{C}$. Für $r > 0$ ist rS dann die Kugel $K_r(0)$ mit Radius r.

(ii) Für die Funktionsauswertung werden wir im Kontext von schwachen und schwach-*-Topologien die Dualitätsklammer $\langle x, f \rangle := f(x)$ verwenden.

Zunächst wollen wir konvexe, bezüglich verschiedener Topologien abgeschlossene Teilmengen eines Banachraums betrachten.

Satz 1.1.2. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.*

(i) Eine Teilmenge $C \subseteq X$ ist genau dann bezüglich $\|\cdot\|$ abgeschlossen, wenn für jedes $r > 0$ die Menge $C \cap rS$ bezüglich $\|\cdot\|$ abgeschlossen ist.

(ii) Ist die Teilmenge $C \subseteq X$ zusätzlich konvex, so ist sie genau dann bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(X, X')$ abgeschlossen, wenn für jedes $r > 0$ die Menge $C \cap rS$ bezüglich $\sigma(X, X')$ abgeschlossen ist.

Beweis.

(i) Die Beweisrichtung „⇒“ ist klar, da rS abgeschlossen ist. Sei also $C \cap rS$ für jedes $r > 0$ abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in C, die gegen x konvergiert. Da konvergente Folgen beschränkt sind, gilt $\|x_n\| \leq r$ für ein $r > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt folglich in $C \cap rS$ und wegen der Abgeschlossenheit dieser Menge damit auch x. Insbesondere ist x in C enthalten.

(ii) Als Folgerung des Satzes von Hahn-Banach ist eine konvexe Menge genau dann $\sigma(X, X')$-abgeschlossen, wenn sie $\|\cdot\|$-abgeschlossen ist, da X versehen mit beiden Topologien dieselben stetigen linearen Funktionale aufweist. Die Aussage folgt daher sofort aus dem letzten Punkt.

$\square$

Ersetzt man X im obigen Satz durch seinen Dualraum X', so stellt sich die Frage, ob eine analoge Aussage nicht nur für die schwache Topologie $\sigma(X', X'')$ sondern auch für die schwach-*-Topologie $\sigma(X', X)$ gilt. Der gerade gegebene Beweis ist nicht einfach adaptierbar, da die schwache Topologie und die schwach-*-Topologie im Allgemeinen nicht dieselben stetigen Funktionale induzieren[1]. Es ist nun eine wichtige Tatsache, dass man dennoch aus den Schnitten mit Vielfachen der Einheitskugel $S = S_{X'}$ die Abgeschlossenheit einer Menge extrahieren kann.

Satz 1.1.3 (Krein-Smulian)**.** *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine konvexe Teilmenge $C \subseteq X'$ ist genau dann bezüglich der schwach-*-Topologie $\sigma(X', X)$ abgeschlossen, wenn für jedes $r > 0$ die Menge $C \cap rS$ bezüglich $\sigma(X', X)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Die Richtung „$\Rightarrow$" ist wieder klar, da rS auch bezüglich $\sigma(X', X)$ abgeschlossen ist; nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist sie ja sogar kompakt. Für die Umkehrung sei auf [1, Theorem V.12.1] verwiesen. $\square$

Daraus folgt auf einfache Weise:

Satz 1.1.4 (Banach-Dieudonné)**.** *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine konvexe, bezüglich der skalaren Multiplikation mit positiven Zahlen abgeschlossene Teilmenge $C \subseteq X'$ – beispielsweise ein Unterraum $C \leq X'$ – ist genau dann bezüglich der schwach-*-Topologie $\sigma(X', X)$ abgeschlossen, wenn $C \cap S$ bezüglich $\sigma(X', X)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit bezüglich der skalaren Multiplikation gilt $C \cap rS = r(C \cap S)$ für $r > 0$. Da die Streckung $x \mapsto rx$ einen Homöomorphismus darstellt, ist somit $C \cap rS$ genau dann für jedes $r > 0$ abgeschlossen, wenn $C \cap S$ abgeschlossen ist. Aus dem Satz von Krein-Smulian, Satz 1.1.3, folgt die Aussage. $\square$

Zum Satz von Banach-Dieudonné existiert ein praktisches Korollar.

Korollar 1.1.5. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und f irgendein lineares Funktional auf X', d. h. $f \in (X')^*$. Die Abbildung f ist genau dann bezüglich der schwach-*-Topologie $\sigma(X', X)$ stetig, wenn die Einschränkung $f|_S$ auf die Einheitskugel S stetig ist, wobei S mit der Spurtopologie $\sigma(X', X)|_S$ versehen wird.*

Beweis. Ist f schwach-*-stetig, so ist klarerweise auch die Einschränkung auf S stetig.
Sei umgekehrt $f|_S$ schwach-*-stetig. Als lineares Funktional ist f genau dann schwach-*-stetig, wenn $\ker f$ schwach-*-abgeschlossen ist. Nach dem Satz von Banach-Dieudonné ist das wiederum genau dann der Fall, wenn $(\ker f) \cap S$ abgeschlossen ist. Wegen $(\ker f) \cap S = (f|_S)^{-1}(\{0\})$ ist dies eine unmittelbare Konsequenz der angenommenen Stetigkeit. $\square$

Das nächste Lemma behandelt die Stetigkeit von Projektionen, also idempotenten und linearen Abbildungen, auf einem Banachraum. Es sei daran erinnert, dass diese im Gegensatz zu Orthogonalprojektionen auf einem Hilbertraum nicht zwingend beschränkt sein müssen.

Lemma 1.1.6. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine Projektion $P : X \to X$ ist genau dann beschränkt, wenn $\ker P$ und $\operatorname{ran} P$ beide abgeschlossen sind.*

[1] Präzise formuliert passiert dies genau dann, wenn X nicht reflexiv ist.

Beweis. Für beschränktes P ist $\ker P$ als Kern eines stetigen Operators abgeschlossen. Mit P ist auch $I - P$ beschränkt, sodass $\operatorname{ran} P = \ker(I - P)$ ebenfalls abgeschlossen ist.
Sind umgekehrt $\ker P$ und $\operatorname{ran} P$ abgeschlossen, so ist mit $\ker P$ und $\operatorname{ran} P$ auch der Produktraum $\ker P \times \operatorname{ran} P$, versehen beispielsweise mit der Summennorm, ein Banachraum. Wir betrachten die offensichtlich beschränkte lineare Abbildung

$$\varphi : \ker P \times \operatorname{ran} P \to X, \quad \varphi(x_1, x_2) := x_1 + x_2.$$

Da X mit der direkten Summe $\ker P \dotplus \operatorname{ran} P$ von Unterräumen übereinstimmt, ist φ bijektiv. Nach einem Korollar des Satzes von der offenen Abbildung ist φ^{-1} und damit auch $P = \pi_2 \circ \varphi^{-1}$ beschränkt, wobei $\pi_2 : \ker P \dotplus \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ die Projektion auf die Komponente aus $\operatorname{ran} P$ bezeichnet. □

Kombiniert man die letzten beiden Resultate, so erhält man das folgende Analogon für die schwach-*-Topologie.

Lemma 1.1.7. *Sei X ein Banachraum und $P : X' \to X'$ eine Projektion. Werden sowohl Definitions- als auch Bildbereich mit der schwach-*-Topologie $\sigma(X', X)$ versehen, so ist P genau dann stetig*[2]*, wenn $\ker P$ und $\operatorname{ran} P$ beide schwach-*-abgeschlossen sind.*

Beweis. Ist P stetig, so folgt die Abgeschlossenheit von $\ker P$ und $\operatorname{ran} P$ wie im Beweis von Lemma 1.1.6.
Sind umgekehrt $\ker P$ und $\operatorname{ran} P$ schwach-*-abgeschlossen, so sind diese Unterräume klarerweise auch bezüglich der Normtopologie abgeschlossen. Lemma 1.1.6 zeigt, dass P beschränkt ist. Als Nächstes beweisen wir, dass die Einschränkung $P|_S$ auf die Einheitskugel $S = S_{X'}$ schwach-*-stetig ist. Dazu sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in S, das bezüglich $\sigma(X', X)$ gegen x konvergiert. Alle Bilder Px_i sind in der kompakten Menge $\|P\|\, S$ enthalten, sodass es für die Konvergenz $Px_i \to Px$ genügt zu zeigen, dass Px der einzige Häufungspunkt des Netzes $(Px_i)_{i\in I}$ ist. Sei also y ein Häufungspunkt und $(Px_{i(j)})_{j\in J}$ ein gegen y konvergentes Teilnetz. Da $\operatorname{ran} P$ bezüglich $\sigma(X', X)$ abgeschlossen ist, gilt $y \in \operatorname{ran} P$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\ker P$ erhalten wir auf ähnliche Weise $x - y = \lim_{j\in J} x_{i(j)} - Px_{i(j)} \in \ker P$. Die Summe $x = y + (x - y)$ ist somit die eindeutige Zerlegung in ein Element aus $\operatorname{ran} P$ und eines aus $\ker P$, woraus $y = Px$ folgt.
Der Raum X' trägt die schwach-*-Topologie, die als initiale Topologie bezüglich der Auswertungsfunktionale $\iota(x) : X' \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \langle x, f\rangle$ definiert ist. Somit ist P genau dann stetig, wenn alle Kompositionen $\iota(x) \circ P : X' \to \mathbb{C}$ schwach-*-stetig sind. Diese Abbildungen sind lineare Funktionale, sodass es nach Korollar 1.1.5 genügt, die Einschränkungen auf S zu betrachten. Nach dem gerade Gezeigten handelt es sich dabei tatsächlich um schwach*-stetige Funktionen, womit die Aussage bewiesen ist. □

Bemerkung 1.1.8. Alle bisherigen Resultate, insbesondere Lemma 1.1.7, gelten auch für einen reellen Banachraum.

Die schwache Topologie $\sigma(X, Y)$ für einen Banachraum[3] X und einen punktetrennenden Raum $Y \leq X^*$ von Funktionalen auf X, aus $\langle x, f\rangle = 0$ für alle $f \in Y$ folgt also schon $x = 0$, ist bekanntlich die *gröbste* Topologie auf X, für die X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum[4] und Y der topologische Dualraum von X ist. Auf natürliche Weise ergibt sich nun die Frage, ob es auch eine *feinste* derartige Topologie gibt. Es stellt sich heraus, dass diese Topologie tatsächlich existiert.

[2]Der Einfachheit halber nennen wir P in diesem Fall auch schwach-*-stetig.
[3]Ein lokalkonvexer Raum würde ausreichen.
[4]Zwecks kompakterer Formulierung nennen wir die Topologie in diesem Fall eine *Vektorraum-Topologie.*

Definition 1.1.9. Sei $\epsilon > 0$ und $D \subseteq X^*$ eine Menge von Funktionalen auf X. Wir definieren

$$U(D,\epsilon) := \left\{x \in X : |\langle x,\, f\rangle| < \epsilon \text{ für alle } f \in D\right\}.$$

Lemma 1.1.10. *Sei $Y \leq X^*$ ein punktetrennender Raum von Funktionalen auf X. Dann gibt es eine eindeutige lokalkonvexe Vektorraum-Topologie $\tau(X,Y)$ auf X, für die eine Nullumgebungsbasis gegeben ist durch*

$$\{U(D,\epsilon) : \epsilon > 0, D \subseteq Y \textit{ ist kreisförmig, konvex und } \sigma(Y,X)\textit{-kompakt}\}.$$

Beweis. Spezialfall von [8, III.3.2] und Umformulierung mithilfe der kanonischen Einbettung $X \to X''$. Siehe auch [8, III.3.2 Example 4.b]. □

Definition 1.1.11. Die Topologie $\tau(X,Y)$ aus dem letzten Lemma nennt man die *Mackey-Topologie* auf X zum Raum Y.

Bemerkung 1.1.12.

(i) Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X konvergiert bezüglich der Mackey-Topologie $\tau(X,Y)$ genau dann gegen $x \in X$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ und alle kreisförmigen, konvexen und $\sigma(Y,X)$-kompakten $D \subseteq Y$ ein $i_0 \in I$ gibt mit $|\langle x_i - x,\, f\rangle| < \epsilon$ für alle $f \in D$ und $i \succcurlyeq i_0$. Es liegt also eine Verschärfung der schwachen Konvergenz vor, wobei zusätzlich die Konvergenz für Funktionale aus einer zulässigen Menge D mit der gleichen Geschwindigkeit verläuft. Wir werden diesen Konvergenztypus im Folgenden als *auf den kreisförmigen, konvexen und $\sigma(Y,X)$-kompakten Mengen gleichgradig schwache Konvergenz* bezeichnen.

(ii) Analog zur schwachen Topologie können wir auch die Mackey-Topologie $\tau(X',X)$ durch $\tau(X',\iota(X))$ mit der kanonischen Einbettung $\iota : X \to X''$ definieren. In dieser Situation erhalten wir als Konvergenzbedingung für ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ gegen $f \in X'$, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ und jeder kreisförmigen, konvexen und $\sigma(X,X')$-kompakten[5] Menge $C \subseteq X$ ein $i_0 \in I$ geben muss mit $|\langle x,\, f_i - f\rangle| < \epsilon$ für alle $x \in C$ und $i \succcurlyeq i_0$. Mit anderen Worten bedeutet Konvergenz in der Mackey-Topologie $\tau(X',X)$ genau gleichmäßige Konvergenz auf allen kreisförmigen, konvexen und $\sigma(X,X')$-kompakten Mengen $C \subseteq X$.

Der folgende Satz beantwortet die oben gestellte Frage:

Satz 1.1.13 (Mackey-Arens). *Sei $Y \leq X^*$ ein punktetrennender Raum von Funktionalen auf X. Für die Mackey-Topologie $\tau(X,Y)$ gilt*

$$(X,\tau(X,Y))' = Y. \tag{1.1.1}$$

Außerdem ist sie die feinste Vektorraum-Topologie auf X, für die (1.1.1) *sinngemäß gilt.*

Beweis. Siehe [8, IV.3.2 – Corollary 1]. □

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die Bedeutung der Mackey-Topologie darin liegen, dass ein Funktional $f : X \to \mathbb{C}$ genau dann stetig bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(X,Y)$ ist, wenn es bezüglich der Mackey-Topologie $\tau(X,Y)$ stetig ist. Diese Stetigkeit kann einfacher zu beweisen sein, da $\tau(X,Y)$ feiner ist als $\sigma(X,Y)$. Um das volle Potenzial dieser Überlegung auszunützen, beweisen wir bereits an dieser Stelle ein Analogon von Korollar 1.1.5 für die Mackey-Topologie $\tau(X',X)$.

[5] Hier geht ein, dass die kanonische Einbettung $\iota : X \to X''$ bezüglich der schwachen Topologie auf X und der schwach-*-Topologie auf X'' ein Homöomorphismus auf das Bild $\iota(X)$ ist.

Korollar 1.1.14. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und f irgendein lineares Funktional auf X', d. h. $f \in (X')^*$. Die Abbildung f ist genau dann bezüglich der Mackey-Topologie $\tau(X', X)$ stetig, wenn die Einschränkung $f|_S$ auf die Einheitskugel S stetig ist, wobei S mit der Spurtopologie $\tau(X', X)|_S$ versehen wird.*

Beweis. Aus der Stetigkeit von f bezüglich der Mackey-Topologie folgt klarerweise auch die Stetigkeit der Einschränkung auf S.
Sei umgekehrt $f|_S$ stetig bezüglich $\tau(X', X)|_S$. Die Menge $(\ker f) \cap S = (f|_S)^{-1}(\{0\})$ ist $\tau(X', X)|_S$-abgeschlossen und konvex. Außerdem ist die Einheitskugel S bezüglich $\sigma(X', X)$ abgeschlossen, also insbesondere bezüglich der feineren Topologie $\tau(X', X)$. Somit ist $(\ker f) \cap S$ sogar $\tau(X', X)$-abgeschlossen. Nach einer Folgerung des Satzes von Hahn-Banach hängt der Abschluss einer konvexen Menge nur vom topologischen Dualraum und nicht von der genauen Topologie ab. Da X' versehen mit der Mackey-Topologie $\tau(X', X)$ und der schwach-*-Topologie $\sigma(X', X)$ denselben topologischen Dualraum hat, ist eine konvexe Teilmenge von X' genau dann $\tau(X', X)$-abgeschlossen, wenn sie $\sigma(X', X)$-abgeschlossen ist. Folglich ist $(\ker f) \cap S$ abgeschlossen bezüglich $\sigma(X', X)$. Wie im Beweis von Korollar 1.1.5 ergibt sich daraus die $\sigma(X', X)$-Abgeschlossenheit von $\ker f$, also die schwach-*-Stetigkeit von f. Dies ist äquivalent dazu, dass f bezüglich der Mackey-Topologie stetig ist. □

1.2 C^*-Algebren

Nun gehen wir von Banachräumen zu C^*-Algebren über. Es ist eine wichtige Tatsache, dass man zu C^*-Algebren ohne Eins ein Einselement adjungieren kann und wieder eine C^*-Algebra erhält. Für Banach(-$*$-)algebren ist die Konstruktion relativ einfach und durch die Betrachtung der Elemente $a + \lambda e$ mit einem fiktiven Einselement e motiviert.

Bemerkung 1.2.1. Sei $(A, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra. Definiert man auf $\tilde{A} := A \times \mathbb{C}$ die Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise, so wird $\tilde{A}$ mit der Norm $\|(a, \lambda)\|_{\tilde{A}} := \|a\| + |\lambda|$ zu einem Banachraum. Wir setzen zusätzlich $(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ und erhalten, wie man leicht nachrechnet, wieder die Struktur einer Banachalgebra. Ist A sogar eine Banach-$*$-Algebra, dann ist $\tilde{A}$ mit der Operation $(a, \lambda)^* := (a^*, \overline{\lambda})$ ebenfalls eine Banach-$*$-Algebra. Zusätzlich enthält $\tilde{A}$ ein Einselement, nämlich $(0, 1)$. Die Algebra $\tilde{A}$ enthält A vermöge $a \mapsto (a, 0)$ isometrisch als Ideal[6]. Aufgrund dieser isomorphen Einbettung können wir durch Umbenennen der Elemente $(a, 0)$ zu a zusätzlich erreichen, dass A eine Teilmenge von $\tilde{A}$ ist. An dieser Stelle sei noch explizit bemerkt, dass sich ein etwaiges Einselement e in A *nicht* auf $\tilde{A}$ vererbt, d. h. $(e, 0)$ ist kein Einselement in $\tilde{A}$.
Eine wesentliche Eigenschaft von $\tilde{A}$ ist, dass sich multiplikative Funktionale auf A eindeutig zu solchen auf $\tilde{A}$ fortsetzen lassen. Das liegt daran, dass jedes multiplikative Funktional $\tilde{m}$ auf $\tilde{A}$ die Gleichung $\tilde{m}((0, 1)) = 1$ erfüllt: Es gilt $\tilde{m}((0, 1)) = \tilde{m}((0, 1)^2) = \tilde{m}((0, 1))^2$, also $\tilde{m}((0, 1)) \in \{0, 1\}$. Wäre $\tilde{m}((0, 1)) = 0$, dann ergäbe sich $\tilde{m}((a, \lambda)) = \tilde{m}((a, \lambda))\tilde{m}((0, 1)) = 0$ für jedes $(a, \lambda) \in \tilde{A}$, also $\tilde{m} = 0$. Dies ist aber nach Definition eines multiplikativen Funktionals ausgeschlossen. Ist m ein multiplikatives Funktional auf A, dann ist die einzige Möglichkeit der Fortsetzung folglich $\tilde{m}((a, \lambda)) := m(a) + \lambda$. Einfaches Nachrechnen zeigt, dass dies tatsächlich ein multiplikatives Funktional definiert. Da die Abbildungsnorm eines multiplikativen Funktionals auf einer Banach(-$*$-)algebra mit Eins stets gleich 1 ist, siehe [2, Korollar 1.3.4], folgt aus dieser Konstruktion auch, dass die Abbildungsnorm eines multiplikativen Funktionals auf einer beliebigen Banach(-$*$-)algebra zumindest kleiner gleich 1 ist.

[6] Wir meinen hier und in der restlichen Arbeit ein Ideal im Sinne der Algebrentheorie (nicht der Ringtheorie), also einen *Unterraum* $I \leq \tilde{A}$, der die Idealeigenschaft erfüllt: Aus $a \in I$ und $b \in \tilde{A}$ folgt $ab, ba \in I$.

Es sei noch erwähnt, dass ein Element $a \in A$ wegen

$$(a,0) \cdot (b,\mu) = (ab + \mu a, 0) \neq (0,1)$$

niemals in $\tilde{A}$ invertierbar ist.

Definition 1.2.2. Ist A eine Banach(-$*$-)algebra, so bezeichne $\tilde{A}$ die gemäß Bemerkung 1.2.1 definierte Banach(-$*$-)algebra mit Einselement, wobei wir A als Teilmenge von $\tilde{A}$ auffassen.

Für C^*-Algebren ist die Situation komplizierter, da man zur Aufrechterhaltung der C^*-Eigenschaft eine andere Norm definieren muss, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.2.3. Sei $A := C_0(\mathbb{R})$ die C^*-Algebra der stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf $\mathbb{R}$. Bezeichnet f die Funktion $(t \mapsto \exp(-t^2)) \in A$, so müsste ein Einselement e die Gleichung $e \cdot f = f$ erfüllen. Da f nie den Wert 0 annimmt, kommt nur $e = \mathbb{1}$ in Frage; $\mathbb{R}$ ist aber nicht kompakt, sodass die konstante Einsfunktion nicht in A liegt. Folglich hat A kein Einselement. Wir betrachten die Banach-$*$-Algebra $\tilde{A}$ und darin das Element $(-f,1)$. Es gilt

$$(-f,1)^*(-f,1) = (-f,1)(-f,1) = (f^2 - 2f, 1),$$

sodass wir[7]

$$\begin{aligned}\|(-f,1)^*(-f,1)\|_{\tilde{A}} &= \left\|f^2 - 2f\right\|_\infty + 1 = \|f(f-2)\|_\infty + 1 \leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{=1}\underbrace{\|2-f\|_\infty}_{=2} + 1 \\ &= 3 < 4 = \|(-f,1)\|_{\tilde{A}}^2 .\end{aligned}$$

erhalten. $\tilde{A}$ ist also mit dieser Norm keine C^*-Algebra.

Dennoch gilt:

Satz 1.2.4. *Sei $(A, \|\cdot\|)$ eine C^*-Algebra. Dann gibt es eine Norm $\|\cdot\|_{C^*}$ auf $\tilde{A}$, sodass $(\tilde{A}, \|\cdot\|_{C^*})$ eine C^*-Algebra mit Eins ist und $\|(a,0)\|_{C^*} = \|a\|$ für alle $a \in A$ gilt.*

Beweis. Siehe [3, Theorem 2.1.6]. □

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit ist die von einer C^*-Algebra ausgehend gebildete Algebra $\tilde{A}$ stets mit der Norm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{C^*}$ versehen und daher eine C^*-Algebra mit Eins. Außerdem identifizieren wir wieder $a \in A$ mit $(a,0) \in \tilde{A}$ und nehmen an, dass A eine Teilmenge von $\tilde{A}$ ist. Die Adjunktion eines Einselements erlaubt es, die zentralen Begriffe der Spektraltheorie in beliebigen Banachalgebren zu definieren. Wir werden uns der Einfachheit halber auf C^*-Algebren beschränken.

Definition 1.2.5. Sei A eine C^*-Algebra ohne Einselement. Dann definiert man für $a \in A$

(a) das *Spektrum* von a als $\sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a)$,

(b) die *Resolventenmenge* von a als $\rho_A(a) := \rho_{\tilde{A}}(a)$ und

(c) den *Spektralradius* von a als $r_A(a) := r_{\tilde{A}}(a) \ \big(= \sup_{\lambda \in \sigma_{\tilde{A}}(a)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} |\lambda| \big)$,

wobei wir die Indizes zur leichteren Lesbarkeit meist weglassen werden.

[7] Ab dem zweiten Gleichheitszeichen rechnen wir im Raum $C_b(\mathbb{R})$ der stetigen und beschränkten Funktionen.

Eines der mächtigsten Instrumente der Theorie von C^*-Algebren ist die Gelfandtransformation. Oftmals wird nur der Fall von kommutativen C^*-Algebren mit Einselement diskutiert, es gilt allerdings die Verallgemeinerung in Satz 1.2.10. Bevor wir dazu kommen, führen wir eine Definition ein.

Definition 1.2.6. Sei A eine C^*-Algebra. Für $a \in A$ sind der *Real-* und *Imaginärteil* von a definiert durch $\operatorname{Re} a := (a + a^*)/2$ und $\operatorname{Im} a := (a - a^*)/2i$.

Man überprüft unmittelbar folgende Eigenschaften von Real- und Imaginärteil:

Lemma 1.2.7. *Sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$. Dann sind $\operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Im} a$ selbstadjungiert und es gilt $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a$, wobei $\|\operatorname{Re}(a)\|, \|\operatorname{Im}(a)\| \leq \|a\|$.*

Der entscheidende Schritt im Beweis der Gelfandtransformation für kommutative C^*-Algebren ohne Einselement ist die Verbindung von multiplikativen Funktionalen auf A mit jenen auf der, wie man leicht nachrechnet ebenfalls kommutativen, C^*-Algebra $\tilde{A}$. Dazu legen wir folgende Notation fest.

Notation 1.2.8. Sei M die Menge der multiplikativen Funktionale auf A und $\tilde{M}$ die entsprechende Menge auf $\tilde{A}$. Für ein Funktional $m \in M$ sei $\tilde{m} \in \tilde{M}$ die gemäß Bemerkung 1.2.1 existierende eindeutige Fortsetzung zu einem multiplikativen Funktional auf $\tilde{A}$, nämlich $(a, \lambda) \mapsto m(a) + \lambda$. Außerdem bezeichne $m_0' \in \tilde{M}$ das multiplikative Funktional $(a, \lambda) \mapsto \lambda$ auf $\tilde{A}$.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir:

Lemma 1.2.9. *Für eine kommutative C^*-Algebra A ohne Einselement gilt*

$$\tilde{M} = \{\tilde{m} : m \in M\} \cup \{m_0'\}.$$

Beweis. Dass die rechte Seite in $\tilde{M}$ enthalten ist, ist klar. Umgekehrt ist für $m' \in \tilde{M}$ die Einschränkung[8] $m'|_A$ auf A ein Funktional $m \in M$ oder die Nullfunktion. Im ersten Fall gilt wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung $m' = \tilde{m}$, im zweiten Fall $m' = m_0'$ aufgrund von $m'((0, 1)) = 1$. $\square$

Satz 1.2.10 (Gelfandtransformation)**.** *Sei $A \neq \{0\}$ eine kommutative C^*-Algebra ohne Einselement. Es gelten folgende Aussagen:*

(i) Der Gelfandraum M aller multiplikativen Funktionale auf A ist nicht leer und, versehen mit der Spurtopologie der schwach--Topologie, lokalkompakt.*

(ii) Für $a \in A$ gilt $\sigma(a) = \{m(a) : m \in M\} \cup \{0\}$.

(iii) Für $a \in A$ ist die Abbildung

$$\hat{a} : \begin{cases} M & \to \mathbb{C} \\ m & \mapsto m(a) \end{cases}$$

ein Element von $C_0(M)$.

(iv) Die Gelfandtransformation $\hat{\ } : A \to C_0(M)$ *ist ein isometrischer $*$-Algebrenisomorphismus.*

Beweis.

[8] Es sei daran erinnert, dass wir A als Teilmenge von $\tilde{A}$ auffassen.

(i) Das bekannte Resultat für kommutative C^*-Algebren mit Einselement, siehe [2, Satz 1.4.4], liefert bei Anwendung in $\tilde{A}$ für beliebiges $a \in A$

$$\sigma_A(a) = \sigma_{\tilde{A}}(a) = \left\{ \tilde{m}(a) : \tilde{m} \in \tilde{M} \right\}. \tag{1.2.1}$$

Da $A \neq \{0\}$ ist, gibt es ein selbstadjungiertes Element $b \in A$ mit $b \neq 0$, nämlich entweder Real- oder Imaginärteil irgendeines von 0 verschiedenen Elements. Wegen $r_{\tilde{A}}(b) = \|b\| > 0$ gibt es ein $\tilde{m} \in \tilde{M}$ mit $\tilde{m}(b) \neq 0$. Die Einschränkung $\tilde{m}|_A$ ist dann mit den Operationen verträglich und von der Nullfunktion verschieden, also ein multiplikatives Funktional auf A. Wir erhalten $M \neq \emptyset$. Außerdem ist $M \cup \{0\}$ nach Bemerkung 1.2.1 eine Teilmenge von $S_{A'}$, die sogar schwach-*-abgeschlossen ist: Definieren wir für Elemente $a, b \in A$ die Funktion $T_{a,b} : S_{A'} \to \mathbb{C}$ durch $T_{a,b}(f) := f(ab) - f(a)f(b)$, so gilt nämlich[9]

$$M \cup \{0\} = \bigcap_{a,b \in A} T_{a,b}^{-1}(\{0\}).$$

Da $T_{a,b}$ schwach-*-stetig ist, erhalten wir die behauptete Abgeschlossenheit. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist $M \cup \{0\}$ somit schwach-*-kompakt. Folglich ist $M = (M \cup \{0\}) \setminus \{0\}$ als offene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums lokalkompakt.

(ii) Diese Aussage ergibt sich sofort aus Lemma 1.2.9 und (1.2.1).

(iii) Da M mit der Spurtopologie der schwach-*-Topologie versehen ist, ist $\hat{a}$ für beliebiges $a \in A$ eine stetige Funktion. Für $\epsilon > 0$ ist die Menge $\{m \in M : |m(a)| \geq \epsilon\}$ schwach-*-abgeschlossen in $S_{A'}$ und damit schwach-*-kompakt. Daraus folgt $\hat{a} \in C_0(M)$.

(iv) Die Gelfandtransformation ist offenbar linear und multiplikativ. Die Verträglichkeit mit $.^*$ folgt daraus, dass für $m \in M$ und $a \in A$ die Beziehung $m(a^*) = \overline{m(a)}$ gilt: Wir schreiben $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a$. Da $\operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Im} a$ selbstadjungiert sind, gilt $\sigma(\operatorname{Re} a), \sigma(\operatorname{Im} a) \subseteq \mathbb{R}$, siehe [2, Lemma 1.5.5], woraus wegen (ii) sofort $m(\operatorname{Re} a), m(\operatorname{Im} a) \in \mathbb{R}$ folgt. Wir erhalten

$$m(a^*) = m(\operatorname{Re} a - i \operatorname{Im} a) = \overline{m(\operatorname{Re} a) + i \cdot m(\operatorname{Im} a)} = \overline{m(a)}.$$

Für $a \in A$ ist a^*a selbstadjungiert (sowohl in A als auch in $\tilde{A}$). Die Rechnung

$$\|\hat{a}\|_\infty^2 = \left\| |\hat{a}|^2 \right\|_\infty = \left\| \overline{\hat{a}}\hat{a} \right\|_\infty = \left\| \widehat{a^*a} \right\|_\infty = r_{\tilde{A}}(a^*a) = \|(a^*a, 0)\|_{C^*} = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

zeigt, dass $\hat{.}$ eine isometrische Abbildung ist. Also ist $\hat{.}$ injektiv und $\operatorname{ran} \hat{.}$ abgeschlossen in $C_0(M)$. Andererseits stellt $\operatorname{ran} \hat{.}$ eine punktetrennende und nirgends identisch verschwindende $*$-Unteralgebra von $C_0(M)$ dar: Erstens gibt es für $m_1 \neq m_2$ ein $a \in A$ mit $\hat{a}(m_1) = m_1(a) \neq m_2(a) = \hat{a}(m_2)$, und zweitens gibt es kein $m \in M$ mit $\hat{a}(m) = 0$ für alle $a \in A$, da das Nullfunktional nicht im Gelfandraum enthalten ist. Der Satz von Stone-Weierstraß für lokalkompakte Räume impliziert daher die Dichtheit von $\operatorname{ran} \hat{.}$ in $C_0(M)$. Insgesamt erhalten wir, dass $\hat{.}$ auch surjektiv ist.

□

[9] An dieser Stelle sei auf die Analogie zum Beweis für C^*-Algebren mit Einselement hingewiesen; dort kann man das Nullfunktional mithilfe einer weiteren schwach-*-stetigen Funktion aussondern, da ja für das Einselement e schon $m(e) = 1$ gelten muss.

Bemerkung 1.2.11. Ist A eine kommutative C^*-Algebra ohne Einselement, so ist A bzw. $\tilde{A}$ isometrisch isomorph zu $C_0(M)$ bzw. $C(\tilde{M}) = C_0(\tilde{M})$. Über die (lokal-)kompakten Hausdorffräume M und $\tilde{M}$ erhalten wir also einen topologischen Zugang zu kommutativen C^*-Algebren[10]. Dabei gilt folgende bemerkenswerte Tatsache: In der Sprache der Gelfandräume entspricht die Adjunktion eines Einselements zu einer kommutativen C^*-Algebra genau der Alexandroff-Kompaktifizierung[11] eines lokalkompakten Hausdorffraums. Mit anderen Worten ist $\tilde{M}$ homöomorph zur Alexandroff-Kompaktifizierung von M, die im Folgenden mit Y bezeichnet sei. Die Abbildung

$$\iota : \begin{cases} M & \to \tilde{M} \\ m & \mapsto \tilde{m} \end{cases}$$

ist, wie man leicht nachprüft, ein Homöomorphismus $M \to \iota(M)$ bezüglich der schwach-*-Topologien. Nach Lemma 1.2.9 gilt dabei $\iota(M) = \tilde{M} \setminus \{m_0'\}$, sodass $\iota(M)$ eine offene Teilmenge von $\tilde{M}$ ist. Die Funktion $f : \tilde{M} \to Y$ definiert durch

$$f(m') := \begin{cases} m, & m' = \iota(m) \\ \infty, & m' = m_0' \end{cases}$$

ist wegen der Injektivität von ι und Lemma 1.2.9 wohldefiniert; die Bijektivität ist offensichtlich. Außerdem ist f stetig, denn ist O eine offene Menge in Y, so ist entweder O eine offene Teilmenge von M oder es gilt $O = (M \setminus K) \cup \{\infty\}$ für eine kompakte Menge $K \subseteq M$. Im ersten Fall ist $f^{-1}(O) = \iota(O)$ offen in $\iota(M)$, somit auch in $\tilde{M}$. Im zweiten Fall gilt

$$f^{-1}((M \setminus K) \cup \{\infty\}) = \tilde{M} \setminus \iota(K),$$

woraus wiederum die Offenheit in $\tilde{M}$ folgt. Als bijektive und stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist f somit ein Homöomorphismus von $\tilde{M}$ nach Y.

Um die Aussagekraft der Gelfandtransformation auch in beliebigen C^*-Algebren ausnutzen zu können, ist es oft hilfreich, zu einer kommutativen C^*-Unteralgebra überzugehen, die die aktuell untersuchten Elemente enthält[12].

Definition 1.2.12. Ist A eine C^*-Algebra und $S \subseteq A$ eine Teilmenge, so definieren wir die *von S erzeugte C^*-Unteralgebra von A*, in Zeichen $C^*_A(S)$, als die kleinste C^*-Unteralgebra von A, die alle Elemente von S enthält. Dabei unterdrücken wir den Index A, wenn die zugrundeliegende C^*-Algebra aus dem Kontext klar ist. Im Falle $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ schreiben wir für $C^*_A(S)$ auch $C^*_A(x_1, \dots, x_n)$ bzw. $C^*(x_1, \dots, x_n)$.

Bemerkung 1.2.13. Implizit ist in Definition 1.2.12 die Behauptung enthalten, dass die Menge der S umfassenden C^*-Unteralgebren von A ein kleinstes Element hat. Bekanntermaßen existiert dieses kleinste Element tatsächlich und es gilt

$$C^*_A(S) = \overline{\bigcap \{B : S \subseteq B \leq A\}},$$

wobei $B \leq A$ bedeuten möge, dass B eine C^*-Unteralgebra von A ist.

[10] Aus diesem Grund wird die Theorie von allgemeinen C^*-Algebren auch oft als *nichtkommutative Topologie* bezeichnet.

[11] Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum und ∞ kein Element von X, so bezeichnet man $Y := X \cup \{\infty\}$ versehen mit der kompakten Topologie $\mathcal{O} := \mathcal{T} \cup \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} : K \subseteq X \text{ kompakt}\}$ als *Alexandroff-Kompaktifizierung*.

[12] Diese Möglichkeit ist es, die die normalen Operatoren in $L_b(H)$ oder allgemeiner die normalen Elemente von A auszeichnet und dafür sorgt, dass sie leichter zugänglich und besser verstanden sind.

Ist $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ endlich und kommutieren alle Elemente von $\{x_1, \ldots, x_n, x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ paarweise miteinander, so lässt sich das Erzeugnis $C_A^*(x_1, \ldots, x_n)$ auch von unten durch

$$C_A^*(S) = \overline{\{p(x_1, \ldots, x_n, x_1^*, \ldots x_n^*) : p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n],\ p(0, \ldots, 0) = 0\}} \tag{1.2.2}$$

konstruieren. Die Zusatzbedingung $p(0, \ldots, 0)$ ist notwendig, da man ansonsten ein Einselement zur Verfügung haben müsste, um $p(x_1, \ldots, x_n, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ berechnen zu können. Anhand dieser Darstellung kann man auf einfache Weise nachprüfen, dass $C_A^*(S)$ kommutativ ist.
Wir wollen noch den Spezialfall betrachten, dass A ein Einselement enthält und dass S aus einem einzigen selbstadjungierten Element und dem Einselement besteht, $S = \{x, 1\}$. Die C^*-Algebra $C_A^*(S)$ ist also die von $x = x^*$ erzeugte C^*-Algebra mit Eins. In diesem Fall können wir statt $p(x, 1, x^*, 1^*)$ für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2, w_1, w_2]$ mit $p(0, 0, 0, 0) = 0$ auch $r(x)$ für ein Polynom $r \in \mathbb{C}[z]$, das nicht notwendigerweise $r(0) = 0$ erfüllt, verwenden. Die Formel (1.2.2) vereinfacht sich somit zu

$$C_A^*(x, 1) = \overline{\{r(x) : r \in \mathbb{C}[z]\}}. \tag{1.2.3}$$

Betrachten wir nur $S = \{x\}$, so erhält man auf analoge Art

$$C_A^*(x) = \overline{\{r(x) : r \in \mathbb{C}[z],\ r(0) = 0\}}. \tag{1.2.4}$$

Eine unscheinbar wirkende aber sehr nützliche Anwendung des Übergangs zu einer kommutativen C^*-Unteralgebra ist das nächste Lemma.

Lemma 1.2.14. *Sei A eine C^*-Algebra. Sind $a, b \in A$ selbstadjungiert mit $ab = ba = 0$, dann gilt $\|a + b\| = \max(\|a\|, \|b\|)$.*

Beweis. Die von a und b erzeugte C^*-Unteralgebra $C_A^*(a, b)$ von A ist kommutativ, da die Elemente $a, a^* = a, b, b^* = b$ miteinander kommutieren. Die Aussage betrifft nur die Norm in A und ist deswegen von der konkreten Unteralgebra unabhängig, solange sie nur die Elemente a und b enthält. Folglich können wir zu $C_A^*(a, b)$ übergehen und wegen der Gelfandtransformation sogar $A = C_0(M)$ mit einem lokalkompakten Hausdorffraum M annehmen. Die Voraussetzung $ab = ba = 0$ besagt dann, dass für jedes $m \in M$ höchstens einer der Werte $a(m)$ und $b(m)$ von 0 verschieden ist. Daraus folgt

$$|a(m) + b(m)| = |a(m)| + |b(m)| = \max(|a(m)|, |b(m)|)$$

und wir erhalten unmittelbar die Aussage. $\square$

Als Abschluss des Abschnitts wollen wir für den späteren Gebrauch das Spektrum in einer bestimmten C^*-Algebra mit Einselement bestimmen, nämlich im Raum $C(K)$.

Beispiel 1.2.15. Ist K ein kompakter Hausdorffraum, so sind die invertierbaren Elemente von $C(K)$ jene stetigen Funktionen g, für die die Funktion $1/g$ wohldefiniert und stetig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn g nullstellenfrei ist. Für eine Funktion $f \in C(K)$ besteht somit $\sigma(f)$ aus den $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $f - \lambda$ eine Nullstelle hat. Anders formuliert gilt $\sigma(f) = f(K)$.

1.3 Beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum

Notation 1.3.1.

(i) In der gesamten weiteren Arbeit bezeichne H einen Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_H$. Den Raum der beschränkten Operatoren auf H notieren wir als $L_b(H)$.

(ii) Ist $T \in L_b(H)$, dann bezeichne $|T|$ den Operator[13] $(T^*T)^{1/2}$.

Die folgenden beiden Konstruktionen werden sich als nützlich herausstellen.

Bemerkung 1.3.2.

(i) Ist I eine beliebige Indexmenge und H_i für $i \in I$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(.,.)_{H_i}$, so ist die äußere direkte Summe

$$X_I := \prod_{i\in I} H_i \ \big(= \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in H_i\} \big),$$

versehen mit den punktweisen Operationen klarerweise ein Vektorraum. Die Teilmenge

$$\ell^2(H_i : i \in I) := \Big\{ (x_i)_{i\in I} \in X_I : \big(\|x_i\|_{H_i}\big)_{i\in I} \in \ell^2(I) \Big\}$$

ist ein Unterraum von X_I, der das Skalarprodukt

$$\big((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\big) := \sum_{i\in I} (x_i, y_i)_{H_i}$$

trägt, wobei wir die Summe als Integral bezüglich des Zählmaßes oder alternativ als unbedingt konvergente Reihe auffassen. Nach der Hölder'schen Ungleichung ist $(\cdot,\cdot)$ wohldefiniert, denn $|(x_i, y_i)_{H_i}|$ können wir punktweise in i durch das Produkt $\|x_i\|_{H_i} \|y_i\|_{H_i}$ zweier quadratsummierbarer Funktionen abschätzen. Die durch $(\cdot,\cdot)$ induzierte Norm ist $\|(x_i)_{i\in I}\| = \sqrt{\sum_{i\in I} \|x_i\|^2_{H_i}}$.

Als Nächstes zeigen wir, dass der Raum $\ell^2(H_i : i \in I)$ damit zu einem Hilbertraum wird. Dazu sei $((x_i^n)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\ell^2(H_i : i \in I)$. Wegen

$$\left\|x_j^m - x_j^n\right\|_{H_i} \le \|(x_i^m - x_i^n)_{i\in I}\| = \|(x_i^m)_{i\in I} - (x_i^n)_{i\in I}\|$$

ist für jedes feste $j \in I$ auch $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und infolge gegen einen Vektor $x_j \in H_j$ konvergent. Für beliebiges F aus der Menge $\mathcal{E}(I)$ der endlichen Teilmengen von I und für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i\in F} \|x_i^n - x_i\|^2_{H_i}} &\le \sqrt{\sum_{i\in F} \|x_i^n - x_i^m\|^2_{H_i}} + \sqrt{\sum_{i\in F} \|x_i^m - x_i\|^2_{H_i}} \\ &\le \|(x_i^n)_{i\in I} - (x_i^m)_{i\in I}\| + \sqrt{\sum_{i\in F} \|x_i^m - x_i\|^2_{H_i}}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass die Abschätzung $\|(x_i^n)_{i\in I} - (x_i^m)_{i\in I}\| \le \epsilon$ für $m, n \ge N$ erfüllt ist, setzen $n \ge N$ in (1.3.1) ein und bilden den Grenzwert $m \to \infty$, so folgt

$$\sqrt{\sum_{i\in F} \|x_i^n - x_i\|^2_{H_i}} \le \epsilon,$$

weil die linke Seite von (1.3.1) nicht von m abhängt. Da $F \in \mathcal{E}(I)$ beliebig war, erhalten wir

$$\sqrt{\sum_{i\in I} \|x_i^n - x_i\|^2_{H_i}} \le \epsilon$$

[13] Nach dem Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren existiert eine eindeutige positive Wurzel des positiven Operators T^*T.

für $n \geq N$, was einerseits $(x_i)_{i\in I} \in \ell^2(H_i : i \in I)$ und andererseits $((x_i^n)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}} \to (x_i)_{i\in I}$ impliziert. Somit liegt tatsächlich ein vollständiger Raum, also ein Hilbertraum, vor, den man die *direkte Summe* der H_i nennt und als $\bigoplus_{i\in I} H_i$ anschreibt. An späterer Stelle werden wir benötigen, dass der Unterraum

$$Y := \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} H_i : x_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i \in I \right\},$$

den wir nach geeigneter Identifikation als Raum aller Linearkombinationen von Elementen aus $\bigcup_{i\in I} H_i$ auffassen können, dicht in $\bigoplus_{i\in I} H_i$ enthalten ist. Zum Beweis sei $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} H_i$ gegeben. Wir definieren das Netz $\big((x_i^F)_{i\in I}\big)_{F\in\mathcal{E}(I)}$ durch

$$x_i^F := \begin{cases} x_i, & i \in F \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und bemerken, dass die Elemente x_i^F sicher in Y liegen. Weiters konvergiert dieses Netz gegen $(x_i)_{i\in I}$, da

$$\left\|(x_i)_{i\in I} - (x_i^F)_{i\in I}\right\| = \sqrt{\sum_{i\in I} \left\|x_i - x_i^F\right\|_{H_i}^2} = \sqrt{\sum_{i\in I\setminus F} \|x_i\|_{H_i}^2}$$

wegen $(\|x_i\|_{H_i})_{i\in I} \in \ell^2(I)$ für $F \in \mathcal{E}(I)$ gegen 0 konvergiert.

Wir wollen noch den Sonderfall hervorheben, dass $I = \{1, \dots, n\}$ eine endliche Indexmenge ist und alle $H_i = H$ übereinstimmen. In diesem Fall erhalten wir für $\bigoplus_{i\in I} H_i$ das volle kartesische Produkt H^n, dessen Elemente wir aus formalen Gründen (siehe (ii)) als Spalten $(x_1, \dots, x_n)^T$ schreiben. Das Skalarprodukt ist dann

$$\big((x_1, \dots, x_n)^T, (y_1, \dots, y_n)^T\big) := \sum_{k=1}^{n} (x_k, y_k).$$

(ii) Sei A eine C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$. Sind für $i, j \in \{1, 2\}$ Operatoren $T_{ij} \in A$ gegeben, so kann man auf H^2 den Operator

$$(x, y)^T \mapsto (T_{11}x + T_{12}y, T_{21}x + T_{22}y)^T$$

definieren, den wir im Folgenden als Matrix $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ schreiben werden. Die Menge $M_2(A)$ aller derartigen Matrizen über A bildet offensichtlich einen unter der Komposition von Operatoren abgeschlossenen Unterraum von $L_b(H^2)$. Einfaches Nachrechnen zeigt außerdem, dass die Adjungierte in $L_b(H^2)$ von $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* \end{pmatrix}$ gegeben ist, womit $M_2(A)$ auch unter $.^*$ abgeschlossen ist. Für die Einschränkung der Abbildungsnorm auf $M_2(A)$ gelten die Ungleichungen

$$\max_{i,j=1,2} \|T_{ij}\| \leq \left\| \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i,j=1}^{2} \|T_{ij}\|, \tag{1.3.2}$$

wie man elementar überprüft. Es folgt, dass eine Folge aus $M_2(A)$ genau dann konvergiert bzw. eine Cauchy-Folge ist, wenn die Folgen der Einträge alle konvergieren bzw. Cauchy-Folgen sind. Da A in $L_b(H)$ abgeschlossen ist, ergibt sich daraus, dass $M_2(A)$ in $L_b(H^2)$ abgeschlossen und somit eine C^*-Unteralgebra ist.

Es sei nicht verschwiegen, dass man dieselbe Konstruktion auch für H^n statt H^2 durchführen kann, um den Raum $M_n(A)$ der $n \times n$-Matrizen über A zu erhalten. Sämtliche Überlegungen sind ident, der notationelle Aufwand steigt jedoch an. Da wir nur $M_2(A)$ verwenden werden, haben wir auf die volle Allgemeinheit verzichtet.

Schließlich benötigen wir, dass der Raum $L_b(H)$ bis auf isometrische Isomorphie dem Dualraum eines Banachraums entspricht. Dazu müssen wir etwas ausholen.

Lemma 1.3.3. *Sei E eine Orthonormalbasis von H. Ist $S \in L_b(H)$, dann ist der Ausdruck*

$$\sum_{e \in E} (Se, Se) = \sum_{e \in E} \|Se\|^2 \in [0, +\infty] \tag{1.3.3}$$

unabhängig von der Wahl von E.

Beweis. Siehe [3, S.59f.]. □

Diese Tatsache ermöglicht die Definition zweier Klassen von Operatoren.

Definition 1.3.4.

(i) Ein Operator $S \in L_b(H)$ heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*, wenn der Ausdruck (1.3.3) endlich ist. In diesem Fall definiert man

$$\|S\|_2 := \left(\sum_{e \in E} (Se, Se) \right)^{1/2}.$$

Die Menge aller Hilbert-Schmidt-Operatoren wird mit $L^2(H)$ bezeichnet.

(ii) Ein Operator $S \in L_b(H)$ heißt *Spurklasseoperator*, wenn $|S|^{1/2}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. In diesem Fall definiert man

$$\|S\|_1 := \left\| |S|^{1/2} \right\|_2^2$$

Die Menge aller Spurklasseoperatoren wird mit $L^1(H)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.3.5. Wegen $(|S|^{1/2}e, |S|^{1/2}e) = (|S|e, e)$ ist ein Operator $S \in L_b(H)$ genau dann ein Spurklasseoperator, wenn für eine Orthonormalbasis (äquivalent für alle Orthonormalbasen) E von H der Ausdruck

$$\sum_{e \in E} (|S|e, e)$$

endlich ist. Ist das der Fall, so stimmt diese Zahl mit $\|S\|_1$ überein.

Direkt aus der Definition erhalten wir einige äquivalente Bedingungen dafür, dass S ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.

Lemma 1.3.6. *Für einen Operator $S \in L_b(H)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) S ist ein Hilbert-Schmidt-Operator.

(ii) $|S|$ ist ein Hilbert-Schmidt-Operator.

(iii) $|S|^2$ ist ein Spurklasseoperator.

In diesem Fall gilt

$$\|S\|_2 = \||S|\|_2 = \left\||S|^2\right\|_1.$$

Beweis. Ist $e \in H$ ein Vektor, so gilt

$$(Se, Se) = (S^*Se, e) = (|S|^2 e, e) = (|S|e, |S|e).$$

Die Aussagen folgen nun sofort aus

$$\sum_{e\in E}(Se, Se) = \sum_{e\in E}(|S|e, |S|e) = \sum_{e\in E}(|S|^2 e, e)$$

für eine Orthonormalbasis E. □

Bemerkung 1.3.7. Die Äquivalenz von (i) und (iii) gilt bekanntlich auch für die Funktionenräume $L^2(\mu)$ und $L^1(\mu)$. Die Hilbert-Schmidt- und Spurklasseoperatoren haben noch weitere Eigenschaften mit den Elementen dieser Funktionenräume gemeinsam. Beispielsweise ist das Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren stets ein Spurklasseoperator; vgl. [3, Theorem 2.4.13]. Dies motiviert die Schreibweisen $L^2(H)$ und $L^1(H)$.

Die grundlegenden Eigenschaften von $L^1(H)$ haben stets ein Analogon für $L^2(H)$. Im Folgenden werden wir uns auf die Spurklasseoperatoren konzentrieren, da diese im Verlauf der Arbeit die wesentlich prominentere Rolle spielen werden.

Lemma 1.3.8.

(i) Die Funktion $\|\cdot\|_1$ *ist eine Norm auf* $L^1(H)$*, die sogenannte* Spurklassenorm*.*

(ii) $L^1(H)$ *ist ein unter* $.^*$ *abgeschlossenes Ideal (insbesondere ein Unterraum) in* $L_b(H)$*, wobei für* $S \in L^1(H)$ *und* $T \in L_b(H)$ *einerseits*

$$\|S^*\|_1 = \|S\|_1$$

und andererseits die Abschätzungen

$$\|ST\|_1 \le \|S\|_1 \|T\| \quad \text{sowie} \quad \|TS\|_1 \le \|T\| \|S\|_1 \tag{1.3.4}$$

gelten.

Beweis. Siehe [3, Theorem 2.4.15]. □

Definition 1.3.9. Die *Spur* eines Spurklasseoperators $S \in L^1(H)$ ist definiert durch

$$\mathrm{tr}(S) := \sum_{e\in E}(Se, e),$$

wobei E eine Orthonormalbasis von H bezeichnet.

Diese Definition ist aus mehreren Gründen ad hoc problematisch, es gilt aber folgendes Lemma:

Lemma 1.3.10. *Die Spur ist ein wohldefiniertes lineares Funktional auf* $L^1(H)$*, das nicht von der konkreten Wahl der Orthonormalbasis abhängt. Weiters gelten für* $S \in L^1(H)$ *folgende Aussagen:*

(i) $|\mathrm{tr}(S)| \le \|S\|_1$

(ii) $\mathrm{tr}(S^*) = \overline{\mathrm{tr}(S)}$

Beweis. Für die Wohldefiniertheit sowie die Aussage (i) sei auf [3, Lemma 2.4.12 - Theorem 2.4.16] verwiesen. Ist E eine beliebige Orthonormalbasis von H, so folgt die zweite Aussage durch die Rechnung

$$\operatorname{tr}(S^*) = \sum_{e \in E} (S^* e, e) = \sum_{e \in E} (e, Se) = \overline{\sum_{e \in E} (Se, e)} = \overline{\operatorname{tr}(S)}.$$

□

Die nächste Aussage werden wir anders als die letzten Resultate nicht nur für Spurklasseoperatoren, sondern auch für Hilbert-Schmidt-Operatoren benötigen.

Lemma 1.3.11. *Seien S und T beschränkte Operatoren auf H, wobei*

(i) beide Operatoren Hilbert-Schmidt-Operatoren sind oder

(ii) zumindest einer der beiden Operatoren zur Spurklasse gehört.

Dann gilt[14] $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$.

Beweis. Siehe [3, Theorem 2.4.14]. □

Zum Abschluss des Kapitels kommen wir nun zum vor Lemma 1.3.3 angekündigten Ergebnis.

Satz 1.3.12.

(i) Versehen mit der Spurklassenorm $\|\cdot\|_1$ ist $L^1(H)$ ein Banachraum.

(ii) Für $T \in L_b(H)$ ist das Funktional

$$\operatorname{tr}(.T) : \begin{cases} L^1(H) & \to \mathbb{C} \\ \quad S & \mapsto \operatorname{tr}(ST) \end{cases}$$

wohldefiniert, linear und beschränkt mit $\|\operatorname{tr}(.T)\| \leq \|T\|$.

(iii) Die sogenannte kanonische Abbildung

$$\theta : \begin{cases} L_b(H) & \to L^1(H)' \\ \quad T & \mapsto \operatorname{tr}(.T) \end{cases}$$

ist eine isometrische, lineare Bijektion. Insbesondere gilt $\|\operatorname{tr}(.T)\| = \|T\|$.

Beweis.

(i) Siehe [3, Corollary 4.2.2].

(ii) Da $L^1(H)$ ein Ideal bildet, ist $\operatorname{tr}(.T)$ wohldefiniert; die Linearität folgt aus der von tr. Nach Lemma 1.3.10 gilt $|\operatorname{tr}(ST)| \leq \|ST\|_1 \overset{(1.3.4)}{\leq} \|S\|_1 \|T\|$, also $\|\operatorname{tr}(.T)\| \leq \|T\|$.

(iii) Siehe [3, Theorem 4.2.3].

□

[14] Man beachte, dass die Operatoren ST und TS wegen Bemerkung 1.3.7 bzw. Lemma 1.3.8(ii) in jedem Fall Spurklasseoperatoren sind. Somit sind die Spurausdrücke wohldefiniert.

Kapitel 2

Einselement und Projektionen in C^*-Algebren

Das Ziel dieses Kapitels sind einige Aussagen, die im späteren Verlauf der Arbeit erforderlich sein werden. Insbesondere sind das die Charakterisierung von C^*-Algebren mit Einselement durch Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitskugel und Satz 2.3.6 über die Dichtheit von Projektionen.

2.1 Positive Elemente und approximative Einselemente

Bevor wir dazu kommen, benötigen wir eine Reihe an Tatsachen über positive Elemente in C^*-Algebren.

Notation 2.1.1.

(i) In diesem Kapitel sei A stets eine C^*-Algebra und S ihre abgeschlossene Einheitskugel.

(ii) Die Menge der selbstadjungierten Elemente von A, also jener Elemente mit $a^* = a$, wird mit A_{sa} bezeichnet. Für die Menge der positiven Elemente von A, das sind die selbstadjungierten Elemente mit[1] $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$, schreiben wir A^+.

(iii) In diesem und allen folgenden Kapiteln werden wir für Vielfache des Einselements λ statt λe schreiben, wenn der Zusammenhang dies erlaubt. Insbesondere soll 1 auch das Einselement einer C^*-Algebra bezeichnen.

(iv) Die *Projektionen* im Sinne der linearen Algebra bzw. Funktionalanalysis sind typischerweise die idempotenten linearen Abbildungen auf einem Vektorraum. In der Theorie von C^*-Algebren ist es üblich, nur jene idempotenten Elemente einer C^*-Algebra als Projektionen zu bezeichnen, die zusätzlich selbstadjungiert sind. Die *Projektionen* in der C^*-Algebra $L_b(H)$ sind also genau die *Orthogonalprojektionen* auf dem Hilbertraum H.

Hat die C^*-Algebra A ein Einselement, so existiert für jedes positive Element a ein eindeutiges positives Element $q \in A$ mit $q^2 = a$, wobei sogar $q \in C^*_A(a, 1)$ gilt; vgl. [2, Korollar 1.5.14]. Wir verallgemeinern diese wichtige Tatsache auf beliebige C^*-Algebren.

Satz 2.1.2. *Für ein Element $a \in A^+$ gibt es ein eindeutiges Element $q \in A^+$ mit $q^2 = a$. Dabei gilt $q \in C^*_A(a)$.*

[1] Sollte A kein Einselement enthalten, ist das Spektrum im Sinne von Definition 1.2.5 zu verstehen.

Beweis. Nach Definition ist a auch in $\tilde{A}$ positiv, sodass wir aus dem bekannten Resultat ein eindeutiges positives $(q,\lambda) \in \tilde{A}$ mit[2] $(q,\lambda)^2 = (a,0)$ erhalten. Multiplizieren wir aus, so folgt

$$(q^2 + 2\lambda q, \lambda^2) = (a, 0),$$

also $\lambda = 0$ und $q^2 = a$. Das Element $(q,\lambda) = (q,0)$ ist in $\tilde{A}$ positiv, folglich ist q direkt nach Definition positiv in A. Ist q' ein weiteres positives Element von A mit $q'^2 = a$, so ist q' ein positives Element von $\tilde{A}$ mit $q'^2 = a$. Aus der Eindeutigkeitsaussage für $\tilde{A}$ folgt $q = q'$.
Es bleibt noch $q \in C_A^*(a)$ zu zeigen. Das Resultat in $\tilde{A}$ liefert $q \in C_{\tilde{A}}(a,1)$. Nach (1.2.4) aus Bemerkung 1.2.13 gibt es Polynome $p_n \in \mathbb{C}[z]$ mit $(q,0) = \lim_{n\to\infty} p_n((a,0))$. Der konstante Term des Polynoms $r_n(z) := p_n(z) - p_n(0)$ verschwindet, also folgt[3]

$$p_n((a,0)) = r_n((a,0)) + p_n(0) \cdot (0,1) = (r_n(a), 0) + (0, p_n(0)) = (r_n(a), p_n(0)).$$

Daraus erhalten wir, dass die komplexe Zahl $p_n(0)$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Folglich gilt

$$(q,0) = \lim_{n\to\infty} p_n((a,0)) = \lim_{n\to\infty} (r_n(a), 0)$$

oder anders formuliert $q = \lim_{n\to\infty} r_n(a)$. Wegen $r_n(0) = 0$ ist dieses Element nach (1.2.4) aus Bemerkung 1.2.13 in $C_A^*(a)$ enthalten. □

Definition 2.1.3. Für $a \in A^+$ ist die *Quadratwurzel* von A jenes eindeutige Element $q \in A^+$ mit $q^2 = a$.

Lemma 2.1.4. *Habe A ein Einselement und sei $a \in A$ selbstadjungiert. Gibt es eine reelle Zahl $t \geq 0$ mit*

$$\|a - t\| \leq t, \tag{2.1.1}$$

so ist a positiv. Ist umgekehrt $a \geq 0$, dann gilt (2.1.1) *für alle $t \geq \|a\|$.*

Beweis. Für $t \geq 0$ gilt nach dem Spektralabbildungssatz $\sigma(a-t) = \sigma(a) - t = \{\lambda - t : \lambda \in \sigma(a)\}$; vgl. [2, Satz 1.1.7]. Weiters ist $a - t$ selbstadjungiert, insbesondere normal, sodass wir $r(a-t) = \|a - t\|$ erhalten; siehe [2, Fakta 1.5.2.5].
Sei zunächst (2.1.1) für ein $t \geq 0$ angenommen. Wegen $a \in A_{sa}$ gilt $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Gäbe es ein negatives $\lambda \in \sigma(a)$, dann erhielten wir den Widerspruch

$$\|a - t\| = r(a - t) \geq |\lambda - t| = t - \lambda > t.$$

Sei umgekehrt a positiv. Für $t \geq \|a\| = r(a)$ gilt $t \geq |\lambda| = \lambda$ für alle $\lambda \in \sigma(a)$. Es folgt

$$\|a - t\| = r(a-t) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda - t| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} (t - \lambda) \leq t,$$

also (2.1.1). □

Als Nächstes wollen wir eine überaus praktische Konstruktion einführen. Dazu sei A eine beliebige C^*-Algebra und $a \in A_{sa}$. Dann ist die von a erzeugte C^*-Algebra $C_A^*(a)$ kommutativ, wodurch die Gelfandtransformation $\hat{\ } : C_A^*(a) \to C_0(M)$ zur Verfügung steht. Dabei bezeichnet M den Gelfandraum von $C_A^*(a)$. Ist eine reellwertige, also selbstadjungierte, Funktion $f \in C_0(M)$ gegeben, dann schreiben wir f^+ bzw. f^- für den Positiv- bzw. Negativteil von f, also $f^+ = \max(f, 0)$ bzw. $f^- = -\min(f, 0)$. Aus der Ungleichung $|f^\pm(m)| = f^\pm(m) \leq |f(m)|$ folgt, dass f^+ und f^- ebenfalls im Unendlichen verschwinden. Infolge können wir einen Positiv- und Negativteil von a definieren:

[2] Man beachte, dass wir $a \in A$ mit $(a,0) \in \tilde{A}$ identifizieren.

[3] Es sei daran erinnert, dass eine komplexe Zahl in $\tilde{A}$ als entsprechende Vielfache des Einselements $(0,1)$ zu interpretieren ist.

Definition 2.1.5. Ist $a \in A$ selbstadjungiert, so heißen die Elemente

$$a^+ := (\widehat{.})^{-1}\left((\widehat{a})^+\right) \quad \text{und} \quad a^- := (\widehat{.})^{-1}\left((\widehat{a})^-\right)$$

der *Positiv-* bzw. *Negativteil* von a.

Bemerkung 2.1.6.

(i) Wegen $a^+, a^- \in C^*_A(a)$ kommutieren a^+ und a^- mit a. Aufgrund der entsprechenden Eigenschaften der Funktionen $(\widehat{a})^+$ und $(\widehat{a})^-$ gilt $a^\pm \geq 0$, $a = a^+ - a^-$, $a^+a^- = 0$ sowie $\|a^\pm\| \leq \|a\|$.

(ii) Kombiniert man die Definitionen 1.2.6 und 2.1.5, so kann man ein beliebiges Element $a \in A$ schreiben als

$$a = \big((\operatorname{Re} a)^+ - (\operatorname{Re} a)^-\big) + i\big((\operatorname{Im} a)^+ - (\operatorname{Im} a)^-\big). \tag{2.1.2}$$

Insbesondere ist $A = \operatorname{span} A^+$. Ist zusätzlich $a \in S$, so gilt $\|(\operatorname{Re} a)^\pm\| \leq \|\operatorname{Re} a\| \leq \|a\| \leq 1$ sowie die analoge Ungleichung für den Imaginärteil. Daraus folgt

$$S \subseteq (A^+ \cap S - A^+ \cap S) + i(A^+ \cap S - A^+ \cap S). \tag{2.1.3}$$

(iii) Enthält A ein Einselement, so spannen auch die unitären Elemente ganz A auf: Wegen Lemma 1.2.7 genügt es dafür, ein selbstadjungiertes Element a aus der Einheitskugel als Linearkombination unitärer Elemente zu schreiben. Es gilt

$$\sigma(a^2) \subseteq \left[-r(a^2), r(a^2)\right] = \left[-\left\|a^2\right\|, \left\|a^2\right\|\right] \subseteq [-1,1],$$

sodass aus dem Spektralabbildungssatz $\sigma(1-a^2) = 1 - \sigma(a^2) \subseteq [0,2]$ folgt. Insbesondere ist $1-a^2$ positiv und somit $u := a + i(1-a^2)^{1/2}$ wohldefiniert. Man rechnet unmittelbar nach, dass $uu^* = u^*u = 1$ ist, sodass u und u^* tatsächlich unitär sind. Die Gleichung $a = \frac{1}{2}(u+u^*)$ liefert die gewünschte Darstellung.

Diese Konstruktion lässt sich sehr einfach motivieren, wenn man das Problem für die C^*-Algebra $\mathbb{C}$ betrachtet. In dieser Situation geht es darum, eine Zahl $a \in [-1,1]$ als Linearkombination von Elementen der Einheitskreislinie zu schreiben. Dazu wählt man jene beiden Punkte mit Betrag 1, deren Realteil genau a ist und bildet deren Mittelwert; diese Punkte sind genau $a \pm i\sqrt{1-a^2}$.

Satz 2.1.7. *Seien $a, b \in A^+$ und eine reelle Zahl $t \geq 0$ gegeben.*

(i) Es gilt $a + b \in A^+$ und $ta \in A^+$.

(ii) A^+ ist konvex.

(iii) Es gilt $A^+ = \{a^*a : a \in A\}$.

(iv) A^+ ist abgeschlossen.

Beweis.

(i) Durch Übergang zu $\tilde{A}$ können wir annehmen, dass A ein Einselement hat. Offenbar sind $a+b$ und ta selbstadjungiert. Nach Lemma 2.1.4 gilt weiters $\|a-t\| \leq t$ und $\|b-t\| \leq t$ für $t = \max(\|a\|, \|b\|)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $\|(a+b)-2t\| \leq 2t$, also – wieder mit Lemma 2.1.4 – der erste Teil der Aussage. Der zweite Teil ergibt sich unmittelbar aus $\sigma(ta) = t\sigma(a) = \{t\lambda : \lambda \in \sigma(a)\}$.

(ii) Folgt sofort aus (i).

(iii) Für $b \in A^+$ erfüllt die positive Quadratwurzel q offenbar $b = q^*q \in \{a^*a : a \in A\}$.

Umgekehrt ist zu zeigen, dass jedes Element der Form a^*a positiv ist, wobei die Selbstadjungiertheit klar ist. Auch hier können wir annehmen, dass A ein Einselement hat.

In einem ersten Schritt zeigen wir die Aussage, wenn a selbstadjungiert ist. Dazu betrachten wir $C^*_A(a, 1)$, die von a erzeugte C^*-Algebra mit Eins, und zeigen die Positivität in dieser C^*-Algebra[4]. Diese ist wegen der Normalität von a kommutativ, sodass wir $A = C(K)$ mit einem kompakten Hausdorffraum K annehmen können. Nach Beispiel 1.2.15 gilt dann $\sigma(a) = a(K)$ und, da a selbstadjungiert ist, $a(K) \subseteq \mathbb{R}$. Klarerweise bildet $a^2 = a^*a$ nur in die rechte Halbachse ab, ist also durch nochmalige Anwendung von Beispiel 1.2.15 positiv als Element von $C(K)$.

Als zweiten Schritt zeigen wir, dass aus $-a^*a \geq 0$ schon $a = 0$ folgt. Die bekannte Gleichung $\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$ impliziert, dass mit $-a^*a$ auch $-aa^*$ positiv ist. Setzt man $b := \operatorname{Re} a$ und $c := \operatorname{Im} a$, dann gilt $a = b + ic$ sowie $a^* = b - ic$. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich $a^*a + aa^* = 2b^2 + 2c^2$, also $a^*a = 2b^*b + 2c^*c + (-aa^*) \geq 0$ nach dem gerade Bewiesenen und (i). Wegen $-a^*a \in A^+$ folgt aus dem Spektralabbildungssatz $-\sigma(a^*a) = \sigma(-a^*a) \subseteq [0, +\infty)$, sodass $\sigma(a^*a) \subseteq [0, +\infty) \cap (-\infty, 0] = \{0\}$ sein muss. Da das Spektrum jedes Elements nicht leer ist, siehe [2, Satz 1.1.14], erhalten wir $\sigma(a^*a) = \{0\}$. Aus $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = 0$ ergibt sich $a = 0$.

In einem letzten Schritt zeigen wir die allgemeine Aussage. Sei also $a \in A$ beliebig und $d := a^*a$. Betrachten wir den Positiv- und Negativteil d^+ und d^- sowie die Gelfandtransformation auf $C^*_A(d)$, so folgt

$$-(ad^-)^*(ad^-) = -d^-a^*ad^- = -d^-(d^+ - d^-)d^- = (d^-)^3. \tag{2.1.4}$$

Mit $\widehat{d^-}$ nimmt auch $\widehat{(d^-)^3} = \left(\widehat{d^-}\right)^3$ nur nichtnegative Werte an, sodass $(d^-)^3$ positiv ist. Aus (2.1.4) und dem zweiten Beweisschritt folgt $ad^- = 0$. Wir erhalten

$$0 = ad^- = d^+d^- - (d^-)^2 = -(d^-)^*d^-,$$

also $\|d^-\| = \|-(d^-)^*d^-\| = 0$. Dies liefert $a^*a = d = d^+ \in A^+$.

(iv) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge positiver Elemente. Zunächst ist a wegen der Stetigkeit von $.^*$ selbstadjungiert. Weiters gibt es sicher ein $C > 0$ mit $\|a_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass aus Lemma 2.1.4 die Ungleichung $\|a_n - C\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Bilden wir hier den Grenzwert $n \to \infty$, so folgt $\|a - C\| \leq C$ und wieder wegen Lemma 2.1.4 die Positivität von a.

□

Mithilfe von Satz 2.1.7(iii) können wir den Absolutbetrag eines Elements $a \in A$ definieren.

Definition 2.1.8. Für $a \in A$ ist der *Absolutbetrag* die Quadratwurzel des positiven Elements a^*a, in Zeichen $|a| := (a^*a)^{1/2} \in C^*_A(a^*a)$.

[4] Man beachte, dass sich das Spektrum eines Elements beim Übergang zu einer C^*-Unteralgebra mit Eins nicht ändert; vgl. [2, Satz 1.5.6].

Bemerkung 2.1.9. Für selbstadjungierte Elemente a lässt sich mehr über den Absolutbetrag aussagen. Dann ist nämlich $C^*_A(a)$ ebenfalls eine kommutative C^*-Algebra und es gilt $|a| \in C^*_A(a^*a) \leq C^*_A(a)$. Somit können wir die Gelfandtransformation in $C^*_A(a)$ auch auf $|a|$ anwenden und erhalten

$$\widehat{|a|} = \widehat{(a^*a)^{1/2}} = \widehat{a^*a}^{1/2} = (|\hat{a}|^2)^{1/2} = |\hat{a}| \,.$$

Der für Funktionen $f \in C_0(M)$ offensichtliche Sachverhalt $|f| = f^+ + f^-$ impliziert somit

$$\widehat{|a|} = \hat{a}^+ + \hat{a}^- = \widehat{a^+} + \widehat{a^-} = \widehat{a^+ + a^-}.$$

Wir schließen auf $|a| = a^+ + a^-$ und weiter auf

$$a^+ = \frac{1}{2}(|a| + a) \qquad \text{sowie} \qquad a^- = \frac{1}{2}(|a| - a). \tag{2.1.5}$$

Folgende Relation auf A_{sa} stellt sich als Halbordnung heraus.

Definition 2.1.10. Für $a, b \in A_{sa}$ schreiben wir $a \leq b$, wenn $b - a$ positiv ist.

Lemma 2.1.11. *Die Relation $\leq$ ist eine Halbordnung auf A_{sa}. Weiters ist $\leq$ translationsinvariant, d. h. $a \leq b$ impliziert $a + c \leq b + c$.*

Beweis. Die Reflexivität und Translationsinvarianz sind klar. Für die Transitivität seien $a, b, c \in A_{sa}$ mit $a \leq b$ und $b \leq c$ gegeben, also $b - a, c - b \in A^+$. Nach Satz 2.1.7(i) ist auch $c - a = (c-b)+(b-a)$ positiv, womit $a \leq c$ ist. Um die Antisymmetrie zu zeigen, sei $a \leq b$ und $b \leq a$. Die Elemente $b - a$ und $a - b = -(b - a)$ sind dann positiv, sodass aus dem Spektralabbildungssatz $\sigma(b - a) = \{0\}$ folgt. Wir erhalten $\|b - a\| = r(b - a) = 0$ bzw. $a = b$. □

Bemerkung 2.1.12.

(i) Man kann die Halbordnung $\leq$ als translationsinvariante Fortsetzung der Schreibweise $a \geq 0$ für positive Elemente auffassen.

(ii) Die Ungleichung $s \leq t$ für $s, t \in \mathbb{R}$ kann man auf zweierlei Art interpretieren, wenn A ein Einselement 1 enthält, denn neben der gewöhnlichen Ordnung auf $\mathbb{R}$ wäre auch die Beziehung $s1 \leq t1$ in A_{sa} eine mögliche Lesart. Wegen $\sigma(\lambda 1) = \{\lambda\}$ sind beide Varianten aber äquivalent, sodass diese Doppeldeutigkeit kein Problem darstellt.

(iii) Weiteren Interpretationsspielraum bietet eine beliebige Ungleichung $a \leq b$ mit $a, b \in A_{sa}$, wenn A kein Einselement enthält. Durch die isomorphe Einbettung $A \to \tilde{A}$, $a \mapsto (a, 0)$ können wir A als Teilmenge von $\tilde{A}$ auffassen und die Ungleichung sowohl in A als auch in $\tilde{A}$ verstehen. Nach Definition der positiven Elemente in A ist allerdings $b - a$ genau dann in A positiv, wenn es in $\tilde{A}$ positiv ist. Somit bleibt diese Uneindeutigkeit in der Notation folgenlos. In einigen Beweisen kann man sogar einen expliziten Nutzen daraus ziehen: Um $a \leq b$ in A zu zeigen, genügt es, die Ungleichung in $\tilde{A}$ nachzuweisen. Für eine Anwendung dieser Überlegung sei auf den ersten Beweisschritt von Satz 3.1.5 verwiesen.

(iv) Für $A = C(K)$ mit kompaktem K ist das Spektrum von $h \in A$ nach Beispiel 1.2.15 gegeben durch $\sigma(h) = h(K)$. Daher gilt $f \leq g$ für $f, g \in A$ genau dann, wenn $f(t) \leq g(t)$ für alle $t \in K$ ist. Hier fügt sich auch die bereits verwendete Tatsache ein, dass eine Funktion in $C(K)$ genau dann positiv ist, wenn sie ausschließlich nichtnegative Werte annimmt.

Im nächsten Lemma sind einige Eigenschaften dieser Halbordnung zusammengefasst.

Lemma 2.1.13. *Seien $a, b \in A_{sa}$.*

(i) $a \le b$ ist äquivalent zu $-b \le -a$ und auch zu $ta \le tb$ für eine beliebige reelle Zahl $t > 0$.

(ii) Gilt $a \le b$ und ist $c \in A$ beliebig, dann folgt $c^*ac \le c^*bc$.

(iii) Hat A ein Einselement, so gilt $a \le \|a\|$.

(iv) Aus $0 \le a \le b$ folgt $\|a\| \le \|b\|$.

(v) Sind $a, b \in S$ und $a, b \ge 0$, dann gilt $\|a - b\| \le 1$.

(vi) Hat A ein Einselement und sind a und b positiv sowie invertierbar, dann impliziert $a \le b$ schon $0 \le b^{-1} \le a^{-1}$.

Beweis.

(i) Der erste Teil ist klar, der zweite folgt aus Satz 2.1.7(i).

(ii) Nach Voraussetzung gilt $b - a = q^2$ mit einem positiven q. Es folgt

$$c^*bc - c^*ac = c^*q^2c = (qc)^*(qc) \in A^+$$

nach Satz 2.1.7(iii).

(iii) Für jedes $\lambda \in \sigma(a)$ gilt $\lambda = |\lambda| \le r(a) = \|a\|$, sodass $\|a\| - \lambda \ge 0$ ist. Diese Zahlen bilden das Spektrum des Elements $\|a\| - a$, das somit als positiv nachgewiesen ist.

(iv) Wir können annehmen, dass A ein Einselement hat. Nach (iii) gilt $b \le \|b\|$. Aus der Transitivität von $\le$ folgt $0 \le a \le \|b\|$, also $\|b\| - \sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Anders formuliert gilt $\lambda = |\lambda| \le \|b\|$ für jedes $\lambda \in \sigma(a)$. Daraus ergibt sich $\|a\| = r(a) \le \|b\|$.

(v) Wieder nehmen wir an, dass A ein Einselement hat. Erneut nach (iii) gilt $a \le \|a\| \le 1$ und analog $b \le 1$. Mit (i) folgt $-1 \le -b \le a - b \le a \le 1$, sodass der Spektralabbildungssatz $\sigma(a - b) \subseteq [-1, 1]$ liefert. Wir erhalten das Gewünschte aus $\|a - b\| = r(a - b) \le 1$.

(vi) Die Ungleichung $0 \le b^{-1}$ folgt, wenn man die Gelfandtransformation in $C^*(b, 1)$, der von b erzeugten C^*-Unteralgebra mit Eins, verwendet, denn mit $\hat{b}$ nimmt auch $\widehat{b^{-1}} = \hat{b}^{-1}$ nur nichtnegative Werte an. Für die Ungleichung $b^{-1} \le a^{-1}$ zeigen wir zunächst den Spezialfall, dass aus $b \ge 1$ schon $b^{-1} \le 1$ folgt. Die Ungleichung $b \ge 1$ bedeutet $\hat{b}(m) \ge 1$ für jedes $m \in M_{C^*(b,1)}$, was zu $1/\hat{b}(m) \le 1$ äquivalent ist. Es folgt $\widehat{b^{-1}} = \hat{b}^{-1} \le \mathbb{1}$, also $b^{-1} \le 1$.

Um den allgemeinen Fall zu beweisen, sei zunächst bemerkt, dass mit a bzw. b auch $a^{1/2}$ bzw. $b^{1/2}$ invertierbar sind, was aus $0 \notin \sigma(a) = \sigma(a^{1/2})^2$ bzw. der analogen Tatsache für b folgt. Mit (ii) erhalten wir

$$1 = (a^{1/2})^{-1} a (a^{1/2})^{-1} \le (a^{1/2})^{-1} b (a^{1/2})^{-1}.$$

Der erste Beweisteil liefert $((a^{1/2})^{-1} b (a^{1/2})^{-1})^{-1} \ge 1$, also $1 \le a^{1/2} b^{-1} a^{1/2}$. Nochmals mit (ii) schließen wir auf

$$a^{-1} = (a^{1/2})^{-1} 1 (a^{1/2})^{-1} \le (a^{1/2})^{-1} a^{1/2} b^{-1} a^{1/2} (a^{1/2})^{-1} = b^{-1}.$$

□

Mit der Konstruktion aus Bemerkung 1.2.1 und Satz 1.2.4 lässt sich zu jeder C^*-Algebra ein Einselement adjungieren. In einigen Fällen ist dieses Vorgehen aber nicht geeignet, da sich die algebraische Struktur der C^*-Algebra drastisch ändern kann. Man kann sich dann mit einem anderen Konzept behelfen.

Definition 2.1.14. Ein monoton wachsendes Netz $(u_i)_{i\in I}$ positiver Elemente in S, aus $i \preccurlyeq j$ folgt also $0 \leq u_i \leq u_j$, heißt *approximatives Einselement*, wenn $a = \lim_{i\in I} au_i$ für alle $a \in A$ gilt.

Da die u_i aus dieser Definition selbstadjungiert sind und die Operation $.^*$ stetig ist, ist eine äquivalente Bedingung gegeben durch die Forderung $a = \lim_{i\in I} u_i a$ für alle $a \in A$.

Satz 2.1.15. *Sei $I := \{a \in U_1(0) : a \geq 0\}$.*

(i) I ist, versehen mit der Halbordnung aus Definition 2.1.10, eine gerichtete Menge.

(ii) Das Netz $(u_a)_{a\in I}$, wobei $u_a := a$, ist ein approximatives Einselement, das sogenannte kanonische approximative Einselement.

Beweis.

(i) Nachzuprüfen ist nur die Richtungseigenschaft. Zu gegebenen $a, b \in I$ ist also ein $c \in I$ mit $a, b \leq c$ zu finden. Dazu zeigen wir die folgende Hilfsbehauptung[5]:

$$0 \leq d_1 \leq d_2 \Rightarrow d_1(1 + d_1)^{-1} \leq d_2(1 + d_2)^{-1} \tag{2.1.6}$$

Klarerweise gilt $1+d_1 \leq 1+d_2$, woraus mit Lemma 2.1.13(vi) die Ungleichung $(1+d_2)^{-1} \leq (1+d_1)^{-1}$ folgt. Die zur trivialen Gleichung $(1+d_k)(1+d_k)^{-1} = 1$ äquivalente Beziehung $d_k(1+d_k)^{-1} = 1-(1+d_k)^{-1}$ ermöglicht in Kombination mit Lemma 2.1.13(i) den Nachweis von (2.1.6):

$$d_1(1 + d_1)^{-1} = 1 - (1 + d_1)^{-1} \leq 1 - (1 + d_2)^{-1} = d_2(1 + d_2)^{-1}.$$

Seien weiterhin $a, b \in I$. Die Elemente $a' := a(1 - a)^{-1}$ und $b' := b(1 - b)^{-1}$ sind wohldefiniert, da

$$\sigma(1 - a) = 1 - \sigma(a) \subseteq [1 - r(a), 1 + r(a)] = [1 - \|a\|, 1 + \|a\|] \subseteq (0, 2)$$

die Zahl 0 nicht enthält; Analoges gilt für b. Weiters liegen a' und b' in A und nicht nur in $\tilde{A}$, da A ein Ideal in $\tilde{A}$ ist. Zudem sind sie selbstadjungiert.

Betrachten wir die Gelfandtransformation auf $C^*_{\tilde{A}}(a, 1)$, so nimmt die Funktion $\widehat{a'} = \frac{\widehat{a}}{1-\widehat{a}}$ wegen $\widehat{a}(M_{C^*_{\tilde{A}}(a,1)}) \subseteq [0, 1)$ Werte in $[0, +\infty)$ an. Daraus folgt $a' \geq 0$ und auf analoge Weise $b' \geq 0$.

Wegen $a' + b' \geq 0$ ist $c := (a' + b')(1 + a' + b')^{-1}$ wohldefiniert; da A ein Ideal in $\tilde{A}$ ist, gilt sogar $c \in A$. Betrachten wir die Gelfandtransformation auf $C^*_{\tilde{A}}(a' + b', 1)$, so ist einerseits $\hat{c} = \widehat{a' + b'}(1 + \widehat{a' + b'})^{-1}$ das Produkt zweier Funktionen mit nichtnegativen Werten und hat daher dieselbe Eigenschaft, andererseits nimmt $|\hat{c}| = \hat{c}$ ein Maximum an,

[5] Für die rechte Ungleichung arbeiten wir in $\tilde{A}$. Die Inversen sind dabei wohldefiniert, da wegen $d_k \geq 0$ das Spektrum $\sigma(1 + d_k) = 1 + \sigma(d_k) \subseteq [1, +\infty)$ insbesondere 0 nicht enthält.

also $\|\hat{c}\|_\infty = \lambda/(1+\lambda) < 1$ für ein nichtnegatives[6] λ. Folglich gilt $c \geq 0$ sowie $\|c\| < 1$ und damit $c \in I$. Die Rechnung

$$(1+a')^{-1} = \Big(\underbrace{(1-a)(1-a)^{-1}}_{=1} + a(1-a)^{-1}\Big)^{-1} = \big((1-a+a)(1-a)^{-1}\big)^{-1} = 1-a$$

zeigt $a'(1+a')^{-1} = a(1-a)^{-1}(1-a) = a$; analog gilt $b'(1+b')^{-1} = b$. Die Hilfsbehauptung (2.1.6) mit $d_1 := a' \leq a' + b' =: d_2$ liefert

$$a = d_1(1+d_1)^{-1} \leq d_2(1+d_2)^{-1} = c.$$

Entsprechend zeigt man $b \leq c$, womit I als gerichtete Menge identifiziert wurde.

(ii) Wegen $A = \operatorname{span} A^+$ genügt es, $b = \lim_{a\in I} u_a b$ für positive b zu zeigen, wobei wir durch Skalieren zusätzlich $\|b\| \leq 1$ annehmen können. Wir zeigen zunächst $\lim_{a\in I} b u_a b = b^2$ bzw. äquivalent dazu $\lim_{a\in I} b(1-u_a)b = 0$; man beachte, dass wir hier in $\tilde{A}$ rechnen.

Aus $a \geq a_0$ mit $a, a_0 \in I$ folgt mit Lemma 2.1.13(ii) die Ungleichung

$$b(1-u_a)b \leq b(1-u_{a_0})b$$

und nach (iv) aus demselben Lemma $\|b(1-u_a)b\| \leq \|b(1-u_{a_0})b\|$. Der Beweis des Zwischenschritts reduziert sich also auf die Konstruktion eines $a_0 \in I$ mit $\|b(1-u_{a_0})b\| \leq \epsilon$ für gegebenes $\epsilon > 0$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\epsilon < 1$ annehmen. Setzt man zur Vereinfachung der Notation $f := \hat{b} \in C_0(M)$, wobei M den Gelfandraum von $C^*_A(b)$ bezeichnet, so ist $K := |f|^{-1}[\epsilon, \infty)$ kompakt. Nach dem Lemma von Urysohn für lokalkompakte Räume, siehe [6, 2.12 Urysohn's Lemma], existiert eine stetige Funktion $g : M \to [0,1]$ mit kompaktem Träger – insbesondere gilt $g \in C_0(M)$ – und $g(m) = 1$ für alle $m \in K$. Wir wählen ein $\delta < 1$ mit $1 - \delta \leq \epsilon$. Für $m \in K$ gilt

$$|f(m) - \delta g(m) f(m)| = (1-\delta)\,|f(m)| \leq (1-\delta)\,\|f\|_\infty = (1-\delta)\,\|b\| \leq 1-\delta \leq \epsilon,$$

und für $m \in K^{\mathrm{c}}$

$$|f(m) - \delta g(m) f(m)| = (1-\delta g(m))\,|f(m)| \leq |f(m)| < \epsilon.$$

Insgesamt erhalten wir also $\|f - \delta g f\|_\infty \leq \epsilon$. Setzt man $a_0 := (\hat{\cdot})^{-1}(\delta g)$, so ist a_0 positiv. Wegen $\|a_0\| = \delta\,\|g\|_\infty \leq \delta < 1$ gilt $a_0 \in I$. Schließlich erhalten wir aus $\|b\| \leq 1$ die Abschätzung

$$\|b(1-u_{a_0})b\| \leq \|b - u_{a_0} b\| = \left\|\hat{b} - \widehat{a_0}\hat{b}\right\|_\infty = \|f - \delta g f\|_\infty \leq \epsilon.$$

Um das allgemeine Resultat zu zeigen, sei bemerkt, dass wegen der schon wiederholt aufgetretenen Überlegungen zum Spektralabbildungssatz die Elemente $1 - u_a$ positiv sind mit $\|1 - u_a\| \leq 1$. Das bedeutet, dass $(1-u_a)^{1/2}$ wohldefiniert ist, wobei $\left\|(1-u_a)^{1/2}\right\| \leq 1$. Wegen

$$\left\|(1-u_a)^{1/2} b\right\|^2 = \left\|\left((1-u_a)^{1/2} b\right)^* (1-u_a)^{1/2} b\right\| = \|b(1-u_a)b\| \xrightarrow{a\in I} 0$$

schließen wir auf

$$\|(1-u_a)b\| \leq \left\|(1-u_a)^{1/2}\right\| \cdot \left\|(1-u_a)^{1/2} b\right\| \leq \left\|(1-u_a)^{1/2} b\right\| \xrightarrow{a\in I} 0,$$

und daher auf die gewünschte Beziehung $b = \lim_{a\in I} u_a b$.

□

[6] Tatsächlich gilt wegen der Monotonie von $t \mapsto t/(1+t)$ genauer $\lambda = \left\|\widehat{a' + b'}\right\|_\infty$.

2.2 Das Einselement als Extremalpunkt

Wir kommen zur schon angekündigten Behandlung von Extremalpunkten der Einheitskugel. Primäres Ziel ist dabei die Tatsache, dass eine C^*-Algebra genau dann ein Einselement hat, wenn die Einheitskugel Extremalpunkte aufweist. Dazu erinnern wir an folgende Definition: Ist V ein Vektorraum und $M \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge, dann heißt $x \in M$ *Extremalpunkt* von M, wenn aus $tx_1 + (1-t)x_2 = x$ für $x_1, x_2 \in M$ und $t \in (0,1)$ schon $x_1 = x_2 = x$ folgt.

Bemerkung 2.2.1. Ist M konvex, so behaupten wir, dass $x \in M$ genau dann ein Extremalpunkt ist, wenn aus $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x$ für $x_1, x_2 \in M$ bereits $x_1 = x_2 = x$ folgt; man kann sich also auf $t = 1/2$ beschränken. Denn ist $tx_1 + (1-t)x_2 = x$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t \leq 1/2$ annehmen, dann ist wegen der Konvexität $\tilde{x}_1 := 2tx_1 + (1-2t)x_2$ ein Element von M mit $x = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1 + x_2)$. Aus der Voraussetzung folgt $x_2 = x$, sodass wir $tx_1 = x - (1-t)x_2 = tx_2$ bzw. $x_1 = x_2 = x$ erhalten.

Zunächst betrachten wir kommutative C^*-Algebren, da dort die Gelfandtransformation zur Verfügung steht.

Lemma 2.2.2. *Sei die C^*-Algebra $A \neq \{0\}$ kommutativ.*

(i) Die Extremalpunkte von S sind genau die unitären Elemente von A. Insbesondere hat S genau dann einen Extremalpunkt, wenn A ein Einselement enthält.

(ii) Die Extremalpunkte von $A_{sa} \cap S$ sind genau die selbstadjungierten, unitären Elemente von A.

(iii) Die Extremalpunkte von $S \cap A^+$ sind genau die Projektionen – also die selbstadjungierten idempotenten Elemente, vgl. Notation 2.1.1 – von A. Ist $x \in S \cap A^+$ nicht extrem, dann existiert sogar ein $a \in S \cap A^+$ mit

$$xa \neq 0 \qquad \text{und} \qquad x \pm xa \in S \cap A^+. \tag{2.2.1}$$

Beweis. Wir können $A = C_0(M)$ mit einem lokalkompakten Hausdorffraum M annehmen.

(i) Sei zunächst $f \in S$ unitär, also $|f(m)| = 1$ für alle $m \in M$. Wegen Bemerkung 2.2.1 haben wir aus $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ mit Elementen $f_1, f_2 \in S$ auf $f_1 = f_2 = f$ zu schließen. Für beliebiges $m \in M$ gilt $f(m) = \frac{1}{2}(f_1(m) + f_2(m))$ und $|f_1(m)|, |f_2(m)| \leq 1$. Wenn wir zeigen, dass nur Punkte der Einheitskreislinie $\mathbb{T}$ Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$ sein können, so folgt $f_1(m) = f_2(m) = f(m)$ und wegen der Beliebigkeit von $m \in M$ die Gleichung $f_1 = f_2 = f$.

Sei $\mathbb{T} \ni \zeta = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$ mit $|\zeta_1|, |\zeta_2| \leq 1$. Dann gilt $1 = |\zeta| \leq \frac{1}{2}(|\zeta_1| + |\zeta_2|) \leq 1$, also $|\zeta_1| + |\zeta_2| = 2$. Wegen $|\zeta_1|, |\zeta_2| \leq 1$ folgt daraus $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$. Schreibt man $\zeta_j = e^{i\theta_j}$ mit $\theta_j \in [0, 2\pi)$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\theta_1 \leq \theta_2$ sei, dann ergibt sich $\zeta = \frac{1}{2}e^{i\theta_1}(1 + e^{i(\theta_2 - \theta_1)})$. Wir erhalten

$$1 = |\zeta| = \frac{1}{2}\left|1 + e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\cos(\theta_2-\theta_1))^2 + \sin(\theta_2-\theta_1)^2}$$

bzw.

$$4 = (1+\cos(\theta_2-\theta_1))^2 + \sin(\theta_2-\theta_1)^2 = 2 + 2\cos(\theta_2-\theta_1)$$

und schließen auf $\cos(\theta_2 - \theta_1) = 1$. Wegen $\theta_2 - \theta_1 \in [0, 2\pi)$ folgt $\theta_1 = \theta_2$ und $\zeta_1 = \zeta_2$. Somit ist die Hilfsbehauptung gezeigt.

Sei umgekehrt $f \in S$ nicht unitär, also $|f(m_0)| < 1$ für ein $m_0 \in M$. Da M lokalkompakt und f stetig ist, gibt es eine offene Umgebung U von m_0 mit kompaktem Abschluss und $|f(m)| < \frac{1}{2}(1 + |f(m_0)|)$ für alle $m \in U$. Es folgt

$$\alpha := \max \left\{ |f(m)| : m \in \overline{U} \right\} \leq \frac{1}{2}(1 + |f(m_0)|) < 1.$$

Nach dem Lemma von Urysohn für lokalkompakte Räume, [6, 2.12 Urysohn's Lemma], gibt es eine stetige Funktion $g : M \to [0,1]$ mit $g(m_0) = 1$ und $\operatorname{supp} g \subseteq U \subseteq \overline{U}$. Somit hat g kompakten Träger, inbesondere liegt g in $C_0(M)$. Für $h := (1-\alpha)g \in C_0(M)$ wollen wir $|f(m) \pm h(m)| \leq 1$ für alle $m \in M$ nachweisen. Dazu unterscheiden wir die Fälle $m \in U$ und $m \notin U$. Im ersten Fall gilt

$$|f(m) \pm h(m)| \leq |f(m)| + (1-\alpha)g(m) \leq \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Im zweiten Fall folgt aus $h(m) = 0$ die Abschätzung

$$|f(m) \pm h(m)| = |f(m)| \leq \|f\|_\infty \leq 1.$$

Wir erhalten $f \pm h \in S$. Wegen $h(m_0) = 1 - \alpha > 0$ gilt $h \neq 0$, sodass die Funktionen $f \pm h$ von f verschieden sind. Folglich ist $f = \frac{1}{2}\big((f+h) + (f-h)\big)$ nicht extremal in S.

Zur Existenz von Einselementen: Wenn ein Extremalpunkt $f \in S \subseteq C_0(M)$ existiert, dann gilt nach dem Bewiesenen $|f(m)| = 1$ für alle $m \in M$. Da die Funktion im Unendlichen verschwindet, ist das nur möglich, wenn M kompakt ist. In diesem Fall gilt $C_0(M) = C(M)$ und $\mathbb{1} \in C_0(M)$. Diese Funktion stellt das Einselement dar. Enthält umgekehrt $C_0(M)$ ein Einselement, so ist dieses wie in jeder C^*-Algebra unitär und daher ein Extremalpunkt von S.

(ii) Ein selbstadjungiertes, unitäres f liegt klarerweise in $A_{sa} \cap S$ und ist nach (i) sogar ein Extremalpunkt von S, also insbesondere von $A_{sa} \cap S$.

Ist $f \in A_{sa} \cap S$ nicht unitär, so können wir denselben Beweis wie in (i) verwenden, um zu zeigen, dass f kein Extremalpunkt ist. Eine Funktion in $C_0(M)$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn sie reellwertig ist. Da f selbstadjungiert, also reellwertig, und die oben konstruierte Funktion $h : M \to [0,1]$ ebenfalls reellwertig ist, gilt $f \pm h \in A_{sa}$. Wir erhalten $f \pm h \in A_{sa} \cap S$.

(iii) Sei $p \in C_0(M)$ eine Projektion. Die Projektionen in $C_0(M)$ sind genau die Funktionen, die höchstens die Werte $0, 1$ annehmen, da ja $p(m)^2 = p(m)$ gelten muss. Daraus folgt wegen $\sigma(p) = p(M) \subseteq \{0,1\}$ einmal $p \in S \cap A^+$. Schreibt man $p = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ mit $h_1, h_2 \in S \cap A^+$, also $h_1(M), h_2(M) \subseteq [0,1]$, dann folgt aus $p(m) = 0$ schon $h_1(m) = h_2(m) = 0$. Aus $p(m) = 1$ folgt die analoge Bedingung $h_1(m) = h_2(m) = 1$. Mit anderen Worten gilt $h_1 = h_2 = p$ und p ist ein Extremalpunkt.

Für die Umkehrung sei $x \in S \cap A^+$ keine Projektion. Dies ist äquivalent dazu, dass $x(m_0) \in (0,1)$ für ein $m_0 \in M$ gilt. Analog zu (i) gibt es eine offene Umgebung U von m_0 mit kompaktem Abschluss $\overline{U}$ und $x(m) \in \big(x(m_0)/2, (1+x(m_0))/2\big) \subseteq (0,1)$ für alle $m \in U$. Aus dem Lemma von Urysohn erhalten wir eine Funktion $g : M \to [0,1]$ mit $g(m_0) = 1$ und $\operatorname{supp} g \subseteq U \subseteq \overline{U}$, insbesondere $g \in C_0(M)$. Wegen $x(m_0)g(m_0) = x(m_0) > 0$ gilt $xg \neq 0$. Setzt man $\epsilon := \min\big(1, \frac{2}{1+x(m_0)} - 1\big) > 0$, so folgt $1 - \epsilon g(m) \geq 0$. Außerdem gilt $x(m)(1 + \epsilon g(m)) \leq 1$ für alle $m \in M$: Dafür unterscheiden wir die Fälle $m \in U$ und $m \notin U$. Im ersten Fall folgt aus $g(m) \leq 1$ die Abschätzung

$$x(m)(1 + \epsilon g(m)) \leq \frac{1 + x(m_0)}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{1 + x(m_0)} - 1 \right) \cdot 1 \right) = 1.$$

Im zweiten Fall führt die Überlegung

$$x(m)(1 + \epsilon g(m)) = x(m) \leq 1$$

zum Ziel. Zusammen mit den offensichtlichen Tatsachen

$$1 + \epsilon g(m) \geq 1 \geq 0 \quad \text{und} \quad x(m)(1 - \epsilon g(m)) \leq x(m) \leq 1 \quad \text{für alle } m \in M$$

erhalten wir $x \pm x\epsilon g \in S \cap A^+$. Die Wahl $a := \epsilon g$ liefert somit ein Element, das (2.2.1) erfüllt. Wegen $x = \frac{1}{2}\big((x + xa) + (x - xa)\big)$ kann x kein Extremalpunkt sein.

□

Damit können wir die oben angepeilte Charakterisierung von C^*-Algebren mit Einselement auch im nichtkommutativen Fall beweisen.

Satz 2.2.3. *S hat genau dann einen Extremalpunkt, wenn in A ein Einselement existiert. In diesem Fall ist das Einselement extremal.*

Beweis. Ist 1 das Einselement von A, dann hat S den Extremalpunkt 1: In der Tat folgt aus $1 = \frac{1}{2}(a+b)$ auch $1 = \operatorname{Re} 1 = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b)$. Aus $\operatorname{Re} b = 2 - \operatorname{Re} a$ erhalten wir, dass $\operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Re} b$ kommutieren. Da 1 sicher unitär ist, folgt aus Lemma 2.2.2(i) angewandt in $C^*_A(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b, 1)$, dass $\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b = 1$ ist. Wir erhalten $1 = \operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a + a^*)$ bzw. $a^* = 2 - a$ und schließen auf die Normalität von a. Erneute Anwendung von Lemma 2.2.2(i), diesmal in $C^*(a, 1)$, liefert $a = 1$; analog zeigt man $b = 1$.
Habe nun S umgekehrt einen Extremalpunkt x. Wir zeigen zunächst, dass x^*x eine Projektion ist, indem wir das Gegenteil auf einen Widerspruch führen. Ist x^*x keine Projektion, dann klarerweise $|x| = (x^*x)^{1/2}$ auch nicht. Aus Lemma 2.2.2(iii), angewandt in $B := C^*_{\tilde{A}}(|x|, 1)$, folgt die Existenz eines $a \in S_B \cap B^+$ mit

$$|x|\, a \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \| |x| \,(1 \pm a)\| \leq 1.$$

Offenbar gilt $x = \frac{1}{2}\big(x(1+a) + x(1-a)\big)$ und, da A ein Ideal in $\tilde{A}$ ist, auch $x(1 \pm a) \in A$. Weiters berechnen wir

$$\begin{aligned} \|x(1 \pm a)\|^2 &= \|(x(1 \pm a))^*(x(1 \pm a))\| = \left\|(1 \pm a)\, |x|^2\, (1 \pm a)\right\| \\ &= \|(|x|\,(1 \pm a))^*(|x|\,(1 \pm a))\| = \||x|\,(1 \pm a)\|^2 \leq 1, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

womit $x(1 \pm a) \in S$ ist. Da x extremal ist, folgt $x = x(1 \pm a)$, also $xa = 0$. Mit zu (2.2.2) analoger Rechnung erhalten wir dazu im Widerspruch

$$\|xa\|^2 = \||x|\, a\|^2 \neq 0. \tag{2.2.3}$$

Also muss $p := x^*x$ eine Projektion sein. Daraus folgt (wir rechnen weiter in $\tilde{A}$)

$$\|x(1 - p)\|^2 = \|(1 - p)x^*x(1 - p)\| = \|(1 - p)p(1 - p)\| = 0$$

und somit $x = xp$. Mit $q := xx^*$ schließen wir auf $q = (xp)x^*$ und

$$q^2 = xpx^*xpx^* = xp^3x^* = xpx^* = q,$$

wodurch sich q ebenfalls als Projektion herausstellt. Dabei gilt

$$\|x^*(1 - q)\|^2 = \|(1 - q)xx^*(1 - q)\| = \|(1 - q)q(1 - q)\| = 0,$$

also $x^* = x^*q$ bzw. durch Adjungieren $x = qx$.
Als Nächstes zeigen wir, dass die Menge $(1-q)S(1-p)$ nur aus dem Nullelement besteht. Für $a \in (1-q)S(1-p)$ gilt $a = (1-q)a(1-p)$ und

$$\begin{aligned}\|x \pm a\|^2 &= \|(x \pm a)^*(x \pm a)\| = \|x^*x \pm a^*x \pm x^*a + a^*a\| \\ &= \|p \pm (1-p)a^* \underbrace{(1-q)x}_{=0} \pm \underbrace{x^*(1-q)}_{=0} a(1-p) + (1-p) \underbrace{a^*(1-q)^2a}_{=a^*a,\ \text{da}\ (1-q)a=a} (1-p)\| \\ &= \|p + (1-p)a^*a(1-p)\|\,,\end{aligned}$$

was nach Lemma 1.2.14 mit $\max\big(\|p\|\,, \|(1-p)a^*a(1-p)\|\big)$ übereinstimmt. Als Projektion erfüllt p die Ungleichungen $\|p\|\,, \|1-p\| \leq 1$. Daraus folgt

$$\|(1-p)a^*a(1-p)\| \leq \|1-p\|\,\|a^*a\|\,\|1-p\| \leq \|a\|^2 \leq 1,$$

sodass die Elemente $x \pm a$ in der Einheitskugel S enthalten sind. Aus der trivialen Gleichung $x = \frac{1}{2}\big((x+a) + (x-a)\big)$ folgt schließlich $a = 0$, da x ein Extremalpunkt ist.
Ist $(u_i)_{i\in I}$ ein approximatives Einselement in A – nach Satz 2.1.15 gibt es ein solches – dann folgt $(1-q)u_i(1-p) \in (1-q)S(1-p) = \{0\}$ bzw. $u_i = qu_i + u_ip - qu_ip$. Die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert nach Definition eines approximativen Einselements gegen $e := q + p - qp$. Somit konvergiert das Netz $(u_i)_{i\in I}$ gegen e. Der Grenzwert eines approximativen Einselements ist, wenn er existiert, das Einselement der C^*-Algebra, denn für beliebiges $a \in A$ gilt $ea = (\lim_{i\in I} u_i)a = \lim_{i\in I} u_ia = a$. Die Gleichung $ae = a$ zeigt man analog. □

Schränken wir uns auf die selbstadjungierten Elemente ein, so können wir die Aussage von Lemma 2.2.2(ii) auf nicht notwendigerweise kommutative C^*-Algebren verallgemeinern. Es steht über die übliche Technik der erzeugten C^*-Unteralgebren nämlich die in kommutativen C^*-Algebren entwickelte Theorie zur Verfügung.

Satz 2.2.4. *Hat A ein Einselement, so sind die Extremalpunkte von $A_{sa} \cap S$ genau die selbstadjungierten, unitären Elemente von A.*

Beweis. Sei zunächst u selbstadjungiert und unitär, d. h. $u^2 = 1$. Die lineare Abbildung $T : A \to A$ definiert durch $Tx := ux$ ist zu sich selbst invers und somit ein Isomorphismus. Die Ungleichungskette

$$\|x\| = \left\|u^2x\right\| \leq \|u\| \cdot \|ux\| = \|ux\| \leq \|x\| \tag{2.2.4}$$

zeigt, dass T zusätzlich isometrisch ist. Als isometrischer Isomorphismus[7] bildet T Extremalpunkte von S auf ebensolche ab. Nach Satz 2.2.3 ist 1 extremal in S, sodass $u = T1$ ebenfalls ein Extremalpunkt von S ist. Insbesondere ist u extremal in $A_{sa} \cap S$.
Für die Umkehrung sei u ein Extremalpunkt von $A_{sa} \cap S$. Zunächst einmal ist u jedenfalls selbstadjungiert. Setzen wir $B := C^*(u, 1)$, so ist u offenbar auch ein Extremalpunkt von $B_{sa} \cap S_B$. Lemma 2.2.2(ii), angewandt in B, liefert, dass u unitär in B und daher unitär in A ist. □

Bemerkung 2.2.5. Der erste Teil des Beweises zeigt, dass unitäre Elemente in beliebigen C^*-Algebren Extremalpunkte der Einheitskugel sind. Die Zusatzvoraussetzung wird für die Umkehrung benötigt.

[7]Hier betrachten wir A als Banachraum.

2.3 Dichtheit von Projektionen

Als Letztes soll in diesem Kapitel ein Satz bewiesen werden, der eine hinreichende Bedingung dafür angibt, dass die lineare Hülle aller Projektionen in einer kommutativen C^*-Algebra mit Einselement dicht ist. Wegen der Gelfandtransformation genügt es, Algebren der Form $C(K)$ mit einem kompakten Hausdorffraum K zu betrachten. Dass dieses Problem alles andere als trivial ist, zeigt das folgende Beispiel, das zugleich die daran anschließende Definition motiviert.

Beispiel 2.3.1. Sei $K = [0, 1]$ versehen mit der euklidischen Topologie. Die Projektionen in $C(K)$ sind diejenigen stetigen reellwertigen Funktionen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen. Da K zusammenhängend ist, muss für eine Projektion $p \in C(K)$ auch $p(K) \subseteq \{0, 1\}$ zusammenhängend sein, womit $p \equiv 0$ oder $p \equiv 1$ gilt. Ihre lineare Hülle, der Raum aller konstanten Funktionen, ist schon abgeschlossen und daher sicher nicht dicht in $C(K)$.

Bemerkung 2.3.2. Diese Argumentation zeigt auch, dass eine notwendige Bedingung für die Dichtheit von $\mathcal{F} := \operatorname{span}\left\{p \in C(K) : p^* = p \text{ und } p^2 = p\right\}$ in $C(K)$ gegeben ist durch die Forderung, dass K *total unzusammenhängend* ist. Das bedeutet, dass alle Zusammenhangskomponenten einpunktig sind. In der Tat muss eine Projektion auf zusammenhängenden Mengen konstant sein. Damit sind auch alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ und folglich aus $\overline{\mathcal{F}}$ auf zusammenhängenden Mengen konstant. Enthält eine Zusammenhangskomponente mindestens zwei Punkte, so kann man diese nach dem Lemma von Urysohn funktional trennen. Die erhaltene stetige Funktion kann somit nicht in $\overline{\mathcal{F}}$ enthalten sein.

Wir fordern jedoch eine stärkere Eigenschaft.

Definition 2.3.3. Ein topologischer Raum heißt *extremal unzusammenhängend*, wenn der Abschluss jeder offenen Menge wieder offen und damit clopen ist. Ein kompakter, extremal unzusammenhängender Hausdorffraum heißt *stonesch*.

Bemerkung 2.3.4. Ein extremal unzusammenhängender Hausdorffraum ist auch total unzusammenhängend. Denn wäre C eine zusammenhängende Menge mit $x, y \in C$ und $x \neq y$, dann würden offene Mengen O_x, O_y existieren mit $x \in O_x$, $y \in O_y$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$. Insbesondere gilt $y \notin \overline{O_x}$. Der Abschluss $\overline{O_x}$ ist nach Voraussetzung clopen, womit $\overline{O_x}$ und $\overline{O_x}^{\mathrm{c}}$ getrennt sind und den ganzen Raum überdecken. Da C zusammenhängend ist, gilt $C \subseteq \overline{O_x}$ oder $C \subseteq \overline{O_x}^{\mathrm{c}}$. Beide Varianten führen aber auf einen Widerspruch, da $x \in \overline{O_x}$ und $y \in \overline{O_x}^{\mathrm{c}}$.

Zunächst zeigen wir eine Charakterisierung stonescher Räume. Dazu müssen wir an das Konzept der Baire'schen Kategorien erinnern. Eine Teilmenge M eines topologischen Raums heißt *nirgends dicht*, wenn $\overline{M}^o = \emptyset$ ist. Abzählbare Vereinigungen nirgends dichter Mengen werden *von erster Kategorie* genannt, alle anderen Teilmengen *von zweiter Kategorie*.

Satz 2.3.5. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und $C(K, \mathbb{R})$ die Menge der stetigen, reellwertigen Funktionen auf K. Dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(i) K ist extremal unzusammenhängend, also stonesch.

(ii) Jede beschränkte und bezüglich der punktweisen natürlichen Ordnung gerichtete Teilmenge von $C(K, \mathbb{R})$ hat ein Supremum[8] in $C(K, \mathbb{R})$.

(iii) Jede beschränkte Teilmenge von $C(K, \mathbb{R})$ hat ein Supremum in $C(K, \mathbb{R})$ bezüglich der punktweisen natürlichen Ordnung.

[8]Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, dass das punktweise Supremum einer Familie stetiger Funktionen im Allgemeinen nicht mehr stetig ist.

(iv) *Jede beschränkte, reellwertige und von unten halbstetige Funktion*[9] *auf K stimmt bis auf eine Menge von erster Kategorie mit einer stetigen Funktion überein.*

Beweis. Der Beweis verläuft zyklisch:
(i) $\Rightarrow$ (iv): Sei f eine beschränkte, reellwertige und von unten halbstetige Funktion. Für die zu zeigende Behauptung können wir durch etwaiges Addieren einer positiven Konstanten und anschließendes Skalieren $0 \leq f \leq 1$ annehmen. Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$ die Mengen $F(t) := f^{-1}(-\infty, t]$ und $G(t) := F(t)^o$. Dann sind die $F(t)$ wegen der Halbstetigkeit abgeschlossen und somit $\overline{F(t)^c}$ clopen, da K als extremal unzusammenhängend vorausgesetzt ist. Die Mengen $G(t)$ sind wegen $F(t)^o = \left((F(t)^c)^c\right)^o = \overline{F(t)^c}^c$ ebenfalls clopen. Folglich sind die Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_{G(t)}$ stetig. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die stetige Funktion

$$f_n := \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k}{2^n}(\mathbb{1}_{G(k/2^n)} - \mathbb{1}_{G((k-1)/2^n)}). \tag{2.3.1}$$

Sei ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Da die $G(t)$ monoton wachsend sind mit $G(1) = K$, gilt $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ für die Zahl

$$k = \min\left\{j \in \{0, \ldots, 2^n\} : x \in G\left(\frac{j}{2^n}\right)\right\}. \tag{2.3.2}$$

Wegen $x \in G(\frac{k}{2^n}) = G(\frac{2k}{2^{n+1}})$ gilt auch $f_{n+1}(x) \leq \frac{2k}{2^{n+1}}$. Wäre $f_{n+1}(x) \leq \frac{2k-2}{2^{n+1}}$, also $x \in G(\frac{2k-2}{2^{n+1}}) = G(\frac{k-1}{2^n})$, so hätten wir einen Widerspruch zur Minimalität von k in (2.3.2). Wir erhalten $f_{n+1}(x) \in \{\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\}$ und daraus die Abschätzung $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Für $m \leq n$ ergibt sich

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \sum_{k=m}^{n-1} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^m},$$

womit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C(K, \mathbb{R})$ ist und infolge gegen eine Funktion $f_0 \in C(K, \mathbb{R})$ konvergiert. Wir behaupten, dass f und f_0 bis auf eine Menge von erster Kategorie übereinstimmen. Dazu setzen wir

$$M := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} F\left(\frac{k}{2^n}\right) \setminus G\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

Die Mengen $F\left(\frac{k}{2^n}\right) \setminus G\left(\frac{k}{2^n}\right)$ sind abgeschlossen und haben leeres Inneres, da jede offene Teilmenge von $F\left(\frac{k}{2^n}\right)$ auch in $G\left(\frac{k}{2^n}\right)$ enthalten ist. Damit ist M von erster Kategorie in K.
Sind $x \in M^c$ sowie $n \in \mathbb{N}$ fest und k wie in (2.3.2), so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Ist $k = 0$, so gilt $x \in G(0)$, also $f(x) = 0$ und $f_m(x) = 0$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$, folglich $f(x) = 0 = f_0(x)$. Für $k \geq 1$ hingegen gilt $x \notin G\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$, womit wegen $x \in M^c$ auch $x \notin F\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$ folgt. Zusammen mit $x \in G\left(\frac{k}{2^n}\right) \subseteq F\left(\frac{k}{2^n}\right)$ ergibt sich die Abschätzung $\frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n} = f_n(x)$. Wir schließen auf $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$ und erhalten tatsächlich $f(x) = f_0(x)$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\mathcal{F} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ eine beschränkte Teilmenge. Definiert man $g(x) := \sup_{\phi\in\mathcal{F}} \phi(x)$, so ist bekannt, dass g von unten halbstetig ist. Aufgrund der Beschränktheit ist g auch reellwertig, sodass wegen (iv) eine stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ existiert, die mit g zumindest außerhalb einer Menge M von erster Kategorie übereinstimmt. Da $g - f$ als Summe von unten halbstetiger Funktionen ebenfalls von unten halbstetig ist, ist die Menge $G := \{x \in K : g(x) - f(x) > 0\}$

[9] Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ heißt von unten halbstetig, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}(t, +\infty)$ offen bzw. $f^{-1}(-\infty, t]$ abgeschlossen ist.

offen. Klarerweise ist G auch in M enthalten und daher selbst von erster Kategorie in K. Als Nächstes zeigen wir, dass G auch als Teilmenge von sich von erster Kategorie ist. Dazu schreibt man

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

mit in K nirgends dichten Mengen G_n, also $\left(\overline{G_n}^K\right)^{o,K} = \emptyset$. Es folgt

$$\left(\overline{G_n}^G\right)^{o,K} = \left(\overline{G_n}^K \cap G\right)^{o,K} = \emptyset. \tag{2.3.3}$$

Ist O eine in G offene, nichtleere Menge, so ist O auch in K offen, da G selbst offen ist. Nach (2.3.3) kann daher O nicht in $\overline{G_n}^G$ enthalten sein und wir erhalten die gewünschte Tatsache

$$\left(\overline{G_n}^G\right)^{o,G} = \emptyset.$$

Nach dem Satz von Baire für lokalkompakte Hausdorffräume, siehe [5, 2.2 Baire's theorem], ist ein nichtleerer lokalkompakter Hausdorffraum niemals in sich selbst von erster Kategorie, sodass nur $G = \emptyset$ möglich ist. Wir schließen auf $g \leq f$. Folglich ist f eine obere Schranke aller Funktionen aus $\mathcal{F}$. Ist umgekehrt $h \in C(K,\mathbb{R})$ eine obere Schranke, so gilt $h(x) \geq g(x) = f(x)$ für $x \in M^c$. Schreibt man $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ mit nirgends dichten Mengen M_n, dann gilt

$$M^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n^c \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{M_n}^c.$$

Die Mengen $\overline{M_n}^c$ sind offen und wegen $\overline{\overline{M_n}^c} = \left(\overline{M_n}^o\right)^c = K$ dicht. Nach dem Satz von Baire für lokalkompakte Räume, hier angewandt im kompakten Raum K, ist auch der Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{M_n}^c$ und infolge M^c dicht in K. Also gilt die Ungleichung $h(x) \geq f(x)$ für alle $x \in K$. Wir erhalten, dass f tatsächlich das Supremum von $\mathcal{F}$ in $C(K,\mathbb{R})$ ist.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Klar.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $G \subseteq K$ offen. Um zu beweisen, dass $\overline{G}$ clopen ist, zeigen wir die Stetigkeit der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{\overline{G}}$.
Die Menge $\mathcal{F} := \{f \in C(K,\mathbb{R}) : 0 \leq f \leq \mathbb{1}_G\}$ ist klarerweise beschränkt und nach oben gerichtet, da für $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ auch $\max(f_1, f_2)$ in $\mathcal{F}$ enthalten ist. Für $x \in G$ sind $\{x\}$ und G^c zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen, sodass es nach dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $f_x : K \to [0,1]$ gibt mit $f_x(x) = 1$ und $f_x(G^c) \subseteq \{0\}$. Wegen $f_x \in \mathcal{F}$ folgt sofort[10] $\mathbb{1}_G(y) = \sup_{f\in\mathcal{F}} f(y)$ für $y \in K$. Bezeichnet g das nach Voraussetzung existierende Supremum von $\mathcal{F}$ in $C(K,\mathbb{R})$, so gilt einerseits $g \leq 1$, da die konstante Einsfunktion eine obere Schranke von $\mathcal{F}$ ist, und andererseits $\mathbb{1}_G \leq g$, da $g(y)$ eine obere Schranke aller $f(y)$ für festes $y \in K$ ist. Die Funktion g nimmt auf G folglich den Wert 1 an und wegen der Stetigkeit damit auch auf $\overline{G}$. Wir schließen auf die Ungleichung $\mathbb{1}_{\overline{G}} \leq g$. Um $\mathbb{1}_{\overline{G}} = g$ und damit die gewünschte Stetigkeit zu zeigen, müssen wir $g(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in \overline{G}^c$ auf einen Widerspruch führen. In der Tat folgt aus dem Lemma von Urysohn die Existenz einer stetigen Funktion $h : K \to [0,1]$ mit $h(x_0) = 0$ und $h\left(\overline{G}\right) \subseteq \{1\}$. Für die offenbar ebenfalls stetige und reellwertige Funktion $\tilde{g} := gh$ und beliebige $f \in \mathcal{F}$ und $y \in K$ gilt

$$\tilde{g}(y) \geq \mathbb{1}_{\overline{G}}(y) \geq \mathbb{1}_G(y) \geq f(y),$$

sodass die stetige Funktion $\tilde{g}$ eine obere Schranke von $\mathcal{F}$ ist. Da g das Supremum ist, muss $g \leq \tilde{g}$ gelten, was zu dem Widerspruch $0 < g(x_0) \leq \tilde{g}(x_0) = 0$ führt. □

[10] Man beachte, dass hier noch kein Abschluss gebildet wird.

Nun kommen wir zum Dichtheitsresultat. Dessen Beweis ist relativ kurz, da der Großteil der Arbeit schon im Beweis von Satz 2.3.5 steckt.

Satz 2.3.6. *Sei K ein stonescher Raum und $A = C(K)$. Dann ist die lineare Hülle der Projektionen dicht in der C^*-Algebra A. Nimmt $f \in C(K)$ nur nichtnegative Werte an, so ist f sogar der Grenzwert einer Folge von Funktionen der Form $f_n := \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k,n} g_{k,n}$, wobei die $g_{k,n}$ Projektionen und die Zahlen $\gamma_{k,n}$ nichtnegativ sind.*

Beweis. Sei $f \in C(K)$ beliebig. Durch Betrachten von Real- und Imaginärteil können wir annehmen, dass f reellwertig ist. Da f beschränkt ist und die konstanten Funktionen in der linearen Hülle der Projektionen enthalten sind, können wir uns zusätzlich auf $0 \leq f \leq 1$ einschränken. Wir führen die Konstruktion aus dem Beweisschritt (i) $\Rightarrow$ (iv) in Satz 2.3.5 nochmals durch und erhalten, dass f mit der Funktion $f_0 = \lim_{n\to\infty} f_n$ überall außer möglicherweise auf

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} F\left(\frac{k}{2^n}\right) \setminus G\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

übereinstimmt, wenn die f_n wie in (2.3.1) definiert sind. Die Projektionen in $C(K)$ sind genau die stetigen Indikatorfunktionen, also Indikatorfunktionen von Mengen, die clopen sind. Somit sind die Funktionen f_n Linearkombinationen von Projektionen und f_0 ist in der abgeschlossenen linearen Hülle der Projektionen enthalten. Mit der Information, dass f nicht nur von unten halbstetig sondern sogar stetig ist, können wir $f = f_0$ zeigen, was den Beweis der ersten Aussage abschließt. Wegen der Stetigkeit sind die Urbilder $f^{-1}(-\infty, t)$ für $t \in \mathbb{R}$ offen und daher in $G(t)$ enthalten. Weiters gilt $F(t) \subseteq f^{-1}(-\infty, t+\epsilon) \subseteq G(t+\epsilon)$ für beliebiges $\epsilon > 0$, sodass wir $F(t) \subseteq G(s)$ für $t < s$ erhalten. Für $x \in F\left(\frac{k}{2^n}\right) \setminus G\left(\frac{k}{2^n}\right)$ gilt daher einerseits $f(x) = \frac{k}{2^n}$ und andererseits $x \in G\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \setminus G\left(\frac{k}{2^n}\right)$, also $f_n(x) = \frac{k+1}{2^n}$. Somit gilt auch auf M die Abschätzung $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ und infolge wie behauptet $f = f_0$.
Für die Zusatzaussage sei bemerkt, dass wir im Falle $f \geq 0$ nur um eine positive Konstante skalieren müssen, um $0 \leq f \leq 1$ zu erhalten. Somit genügt es zu zeigen, dass diese spezielleren Funktionen als Grenzwert von Funktionen der im Satz angegebenen Form dargestellt werden können. Betrachtet man die im obigen Beweis für diese Situation konstruierten Funktionen f_n aus (2.3.1) und löst die Teleskopsumme auf, so ergibt sich

$$f_n = -\frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{G(0)} - \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{G(k/2^n)} + \frac{2^n}{2^n}\mathbb{1}_{G(2^n/2^n)} = -\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{G(k/2^n)} + 1,$$

wobei die zweite Gleichheit daraus folgt, dass wegen $f \leq 1$ schon $G(1) = K$ gilt. Betrachten wir die Komplemente $G(k/2^n)^{\mathrm{c}}$, die ebenfalls clopen sind, so erhalten wir aus $\mathbb{1}_{G(k/2^n)} = 1 - \mathbb{1}_{G(k/2^n)^{\mathrm{c}}}$ die Darstellung

$$f_n = -\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\left(1 - \mathbb{1}_{G(k/2^n)^{\mathrm{c}}}\right) + 1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{G(k/2^n)^{\mathrm{c}}}.$$

Folglich haben die Funktionen f_n die gewünschte Form. $\square$

Kapitel 3

Abstrakte C^*-Algebren

Es ist eine bekannte Tatsache, dass einerseits $L_b(H)$ eine C^*-Algebra ist und andererseits normabgeschlossene $*$-Unteralgebren von C^*-Algebren wieder C^*-Algebren sind. Damit sind $\|\cdot\|$-abgeschlossene $*$-Unteralgebren von $L_b(H)$ schon C^*-Algebren. Das Hauptziel dieses Kapitels ist mit dem Satz von Gelfand-Naimark die stärkstmögliche Umkehrung dieses Sachverhalts. Dieses Resultat ist ohne Zweifel eines der wichtigsten Ergebnisse der Theorie von C^*-Algebren.

3.1 Positive Funktionale

Notation 3.1.1. Sei weiterhin A eine C^*-Algebra mit Einheitskugel S, selbstadjungierten Elementen A_{sa} und positiven Elementen A^+.

Im letzten Kapitel waren die positiven Elemente von A das wesentliche Hilfsmittel. Hier betrachten wir die mit diesen Elementen verträglichen linearen Funktionale.

Definition 3.1.2. Ein lineares Funktional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ heißt *positiv*, wenn $\varphi(A^+) \subseteq [0, +\infty)$. Falls zusätzlich $\|\varphi\| = 1$ gilt, so nennen wir φ einen *Zustand*. Die Menge aller Zustände bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(A)$.

Zunächst fassen wir einige einfache Eigenschaften zusammen.

Lemma 3.1.3. *Sei φ ein positives Funktional auf A.*

(i) Das Funktional φ ist beschränkt.

(ii) Für beliebige $a, b \in A$ gilt $\varphi(b^*a) = \overline{\varphi(a^*b)}$.

(iii) (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung) Sind $a, b \in A$ gegeben, so folgt

$$|\varphi(b^*a)| \leq \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(b^*b)^{1/2}.$$

(iv) Die Funktion $a \mapsto \varphi(a^*a)^{1/2}$ ist eine Seminorm auf A.

Beweis. Wir zeigen zunächst $C := \sup_{a\in A^+, \|a\|\leq 1} \varphi(a) < +\infty$. Wäre diese Behauptung falsch, gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A^+$ mit $\|a_n\| \leq 1$ und $\varphi(a_n) \geq 2^n$. Wegen der Unterpunkte (i) und (iv) von Satz 2.1.7 gilt für die absolut konvergente Reihe $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n$ und jedes $N \in \mathbb{N}$

$$a - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} a_n = \lim_{\substack{M\to\infty,\\ M\geq N+1}} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{2^n} a_n \geq 0.$$

Daraus folgt

$$\varphi(a) = \underbrace{\varphi\left(a - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} a_n\right)}_{\geq 0, \text{ da } \varphi \text{ positiv ist}} + \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} a_n\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\varphi\left(\frac{1}{2^n} a_n\right)}_{\geq 1} \geq N,$$

was wegen der Beliebigkeit von N einen Widerspruch darstellt. Für beliebiges $a \in S$ schreiben wir gemäß der Definitionen 1.2.6 und 2.1.5

$$a = (\mathrm{Re}(a)^+ - \mathrm{Re}(a)^-) + i(\mathrm{Im}(a)^+ - \mathrm{Im}(a)^-).$$

Wegen $\|\mathrm{Re}(a)^\pm\|, \|\mathrm{Im}(a)^\pm\| \leq \|a\| \leq 1$ erhalten wir die Abschätzung

$$|\varphi(a)| \leq \varphi(\mathrm{Re}(a)^+) + \varphi(\mathrm{Re}(a)^-) + \varphi(\mathrm{Im}(a)^+) + \varphi(\mathrm{Im}(a)^-) \leq 4C.$$

Daraus folgt $\|\varphi\| \leq 4C$ und (i) ist gezeigt.
Die Abbildung $\sigma : (a, b) \mapsto \varphi(b^*a)$ ist offensichtlich eine Sesquilinearform, die wegen der vorausgesetzten Positivität von φ auch positiv semidefinit ist. Aus der Polarisationsformel

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} i^j \sigma(a + i^j b, a + i^j b)$$

folgt die Hermitizität von σ, da die Ausdrücke $\sigma(a + i^j b, a + i^j b)$ nichtnegativ und insbesondere reell sind. Anders formuliert gilt $\sigma(a, b) = \overline{\sigma(b, a)}$ und somit (ii).
Die Eigenschaften (iii) und (iv) gelten allgemein für hermitesche und positiv semidefinite Sesquilinearformen. □

Wir wollen ein im letzten Beweis implizit aufgetretenes Argument explizit hervorheben: Ist φ positiv, so folgt aus $a \leq b$ schon $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, denn φ bildet das Element $b - a \geq 0$ auf eine nichtnegative reelle Zahl ab.
Wenn A ein Einselement enthält, kann man Lemma 3.1.3(ii) prägnanter formulieren, indem man $b = 1$ setzt. Mithilfe der Konstruktion des approximativen Einselements können wir dies aber auch für beliebige C^*-Algebren erreichen.

Lemma 3.1.4. *Ist φ ein positives Funktional auf A und $a \in A$, so gilt $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$. Insbesondere ist $\varphi(a)$ für selbstadjungiertes a reell.*

Beweis. Sei $(u_i)_{i \in I}$ ein approximatives Einselement. Dann gilt

$$\varphi(a^*) = \lim_{i \in I} \varphi(a^* u_i) = \lim_{i \in I} \overline{\varphi(u_i^* a)} = \lim_{i \in I} \overline{\varphi(u_i a)} = \overline{\varphi(a)},$$

wobei die erste und letzte Gleichung aus der Beschränktheit von φ und die zweite Gleichung aus Lemma 3.1.3(ii) folgt. □

Auch die folgende Charakterisierung positiver Funktionale baut auf approximativen Einselementen auf.

Satz 3.1.5. *Für ein beschränktes lineares Funktional φ auf A sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) φ ist positiv.

(ii) Für jedes *approximative Einselement $(u_i)_{i \in I}$ gilt $\|\varphi\| = \lim_{i \in I} \varphi(u_i)$.*

(iii) Für ein approximatives Einselement $(u_i)_{i\in I}$ gilt $\|\varphi\| = \lim_{i\in I}\varphi(u_i)$.

Beweis. Für $\varphi = 0$ gelten trivialerweise alle Bedingungen, sodass wir durch Normieren $\|\varphi\| = 1$ annehmen können. Der Beweis verläuft zyklisch:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei φ positiv und $(u_i)_{i\in I}$ ein approximatives Einselement. Das Netz $(\varphi(u_i))_{i\in I}$ nichtnegativer reeller Zahlen ist monoton wachsend, durch 1 beschränkt und daher gegen sein Supremum konvergent, wobei $\lim_{i\in I}\varphi(u_i) \le 1 = \|\varphi\|$. Für $a \in A$ gilt nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, Lemma 3.1.3(iii),

$$|\varphi(u_i a)| = |\varphi(u_i^* a)| \le \varphi(u_i^2)^{1/2}\varphi(a^*a)^{1/2}.$$

In $\tilde{A}$ (bzw. in A, wenn A ein Einselement enthält) gilt $u_i \le \|u_i\| \le 1$ aufgrund von Lemma 2.1.13(iii), womit wegen Lemma 2.1.13(ii)

$$u_i^2 = \left(u_i^{1/2}\right)^* u_i u_i^{1/2} \le \left(u_i^{1/2}\right)^* 1 u_i^{1/2} = u_i$$

folgt. Nach Bemerkung 2.1.12 gilt die Ungleichung $u_i^2 \le u_i$ auch in A. Daraus folgt $\varphi(u_i^2)^{1/2} \le \varphi(u_i)^{1/2}$, sodass sich

$$|\varphi(u_i a)| \le \varphi(u_i)^{1/2}\varphi(a^*a)^{1/2} \le \left(\sup_{j\in I}\varphi(u_j)\right)^{1/2} \underbrace{\|\varphi\|^{1/2}}_{=1} \|a^*a\|^{1/2} = \left(\lim_{j\in I}\varphi(u_j)\right)^{1/2} \|a\|$$

ergibt. Bilden wir in dieser Ungleichung den Grenzwert $i \in I$, so schließen wir auf $|\varphi(a)| \le (\lim_{j\in I}\varphi(u_j))^{1/2}\|a\|$ und erhalten wegen der Beliebigkeit von a die Abschätzung $1 = \|\varphi\| \le (\lim_{j\in I}\varphi(u_j))^{1/2}$. Somit ist (ii) gezeigt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt unmittelbar, wenn man beachtet, dass nach Satz 2.1.15 überhaupt approximative Einselemente existieren.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Zunächst zeigen wir, dass $\varphi(a)$ für $a \in A_{sa}$ reell ist. Angenommen, es gilt $\varphi(a) = \alpha + i\beta$ mit $\beta \ne 0$, wobei wir durch etwaiges Übergehen zu $-a$ sicher $\beta < 0$ und durch Normieren auch $\|a\| \le 1$ annehmen können. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $j \in I$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\|a - inu_j\|^2 &= \|(a - inu_j)^*(a - inu_j)\| = \left\|a^2 + n^2u_j^2 - in(au_j - u_ja)\right\| \\ &\le \left\|a^2 + n^2u_j^2\right\| + n\|au_j - u_ja\| \le 1 + n^2 + n\|au_j - u_ja\|,\end{aligned}$$

sodass wir wegen $\|\varphi\| = 1$ auf $|\varphi(a - inu_j)|^2 \le 1 + n^2 + n\|au_j - u_ja\|$ schließen. Bilden wir den Grenzwert $j \in I$, so folgt $\varphi(a - inu_j) \to \varphi(a) - in = \alpha + i(\beta - n)$ wegen der Voraussetzung (iii). Nach Definition eines approximativen Einselements gilt weiters $\|au_j - u_ja\| \to 0$, sodass wir aus obiger Ungleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2 \le 1 + n^2$$

bzw. $-2n\beta \le 1 - \alpha^2 - \beta^2$ erhalten. Wegen $\beta < 0$ ist die linke Seite in n nach oben unbeschränkt, was zu einem Widerspruch führt. Also gilt tatsächlich $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Für die Positivität von φ sei a positiv, wobei wir $\|a\| \le 1$ annehmen können. Da auch $u_j - a$ selbstadjungiert ist, folgt $\varphi(u_j - a) \in \mathbb{R}$. Lemma 2.1.13(v) liefert $\|u_j - a\| \le 1$, womit wir $\varphi(u_j - a) \le |\varphi(u_j - a)| \le \|\varphi\|$ und nach dem Grenzübergang $j \in I$ schließlich $\|\varphi\| - \varphi(a) \le \|\varphi\|$ bzw. $\varphi(a) \ge 0$ erhalten. □

Korollar 3.1.6. *Hat A ein Einselement, so ist ein beschränktes lineares Funktional φ genau dann positiv, wenn $\varphi(1) = \|\varphi\|$.*

Beweis. Das konstante Netz $u_i := 1$, $i \in I$ ist für eine beliebige gerichtete Menge I ein approximatives Einselement, sodass die Aussage aus Satz 3.1.5 folgt. □

Das nächste Lemma enthält eine der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung stark ähnelnde Bedingung, die wir später benötigen werden.

Lemma 3.1.7. *Sei $\varphi : A \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional.*

(i) Ist $c \in A$, so gilt $\varphi(c^*c) = 0$ genau dann, wenn $\varphi(dc) = 0$ für alle $d \in A$ ist.

(ii) Für beliebige $a, b \in A$ gilt $0 \leq \varphi(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| \, \varphi(b^*b)$.

Beweis.

(i) Wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $|\varphi(b^*a)| \leq \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(b^*b)^{1/2}$ mit $a = c$ und $b = d^*$ folgt aus $\varphi(c^*c) = 0$ schon $\varphi(dc) = 0$ für alle $d \in A$. Die Umkehrung ist trivial.

(ii) Die erste Ungleichung folgt aus $b^*a^*ab = (ab)^*(ab) \geq 0$. Die zweite Ungleichung ist nach (i) angewandt auf $c = b$ und $d = b^*a^*a$ trivial, wenn $\varphi(b^*b) = 0$ ist. Ansonsten ist

$$\psi : \begin{cases} A & \to \mathbb{C} \\ c & \mapsto \frac{\varphi(b^*cb)}{\varphi(b^*b)} \end{cases}$$

ein wohldefiniertes lineares Funktional, das offensichtlich positiv und nach Lemma 3.1.3(i) beschränkt ist. Wählt man ein approximatives Einselement $(u_i)_{i\in I}$, so liefert Satz 3.1.5

$$\|\psi\| = \lim_{i\in I} \psi(u_i) = \lim_{i\in I} \frac{\varphi(b^*u_ib)}{\varphi(b^*b)} = \frac{\varphi(b^*b)}{\varphi(b^*b)} = 1.$$

Daraus folgt die gewünschte Ungleichung $\varphi(b^*a^*ab) = \psi(a^*a)\varphi(b^*b) \leq \|a^*a\| \, \varphi(b^*b)$.

□

Der folgende Satz zeigt, dass es ausreichend viele positive Funktionale gibt, um sie zu Strukturanalysen heranziehen zu können.

Satz 3.1.8. *Sei $a \neq 0$ ein normales Element von A. Dann gibt es einen Zustand φ auf A mit $|\varphi(a)| = \|a\| \neq 0$. Insbesondere existieren auf A Zustände, wenn A nichttrivial ist.*

Beweis. Wir betrachten die von a in $\tilde{A}$ erzeugte C^*-Unteralgebra mit Eins, $B := C^*_{\tilde{A}}(a, 1)$. Dann ist B kommutativ und der Gelfandraum M von B kompakt. Da die Gelfandtransformierte $\hat{a}$ stetig ist, folgt

$$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{m\in M} |\hat{a}(m)| = \max_{m\in M} |\hat{a}(m)| \, .$$

Es gibt also ein multiplikatives Funktional m_0 mit $\|a\| = |\hat{a}(m_0)| = |m_0(a)|$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine lineare Fortsetzung f auf $\tilde{A}$ mit $\|f\| = \|m_0\| = 1$. Wegen $f(1) = m_0(1) = 1 = \|f\|$ folgt aus Korollar 3.1.6 die Positivität von f. Bezeichnen wir die Einschränkung von f auf A mit φ, so gilt $\|\varphi\| \leq \|f\| = 1$ und $\|a\| = |m_0(a)| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\| \, \|a\|$, sodass wir insgesamt $\|\varphi\| = 1$ erhalten. Das Funktional φ ist positiv, da ein positives Element von A nach Bemerkung 2.1.12(iii) auch in $\tilde{A}$ positiv ist. Somit ist φ ein normiertes, positives Funktional, also ein Zustand.
Für die Zusatzbehauptung sei $a \in A$, $a \neq 0$. Dann ist a^*a insbesondere normal mit $\|a^*a\| = \|a\|^2 \neq 0$. Nach dem oben Bewiesenen gibt es einen Zustand φ mit $|\varphi(a^*a)| = \|a^*a\|$. □

3.2 Der Satz von Gelfand-Naimark

Um das Wechselspiel zwischen C^*-Algebren und Räumen der Form $L_b(H)$ analysieren zu können, führen wir einen Begriff ein.

Definition 3.2.1. Ein $*$-Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \to L_b(H)$ heißt *Darstellung*. Ist Φ injektiv, so nennen wir die Darstellung *treu*.

Zunächst zeigen wir (unter anderem), dass eine treue Darstellung Φ ein isometrischer $*$-Algebrenisomorphismus auf $\operatorname{ran}\Phi$ ist. Man beachte, dass dies nicht durch Anwendung der klassischen Tatsache [2, Satz 1.5.4] folgt, dass Isomorphismen *zwischen* C^*-Algebren automatisch isometrisch sind, denn es wäre zunächst auf andere Weise zu zeigen, dass $\operatorname{ran}\Phi$ für sich eine C^*-Algebra ist.
Ein korrektes Argument macht Gebrauch vom Funktionalkalkül in C^*-Algebren mit Einselement.

Bemerkung 3.2.2. Wir erinnern an die Definition und einige Eigenschaften des Funktionalkalküls; vgl. [2, Satz 1.5.13]. Ist A eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement, $a \in A$ und f eine stetige Funktion auf $\sigma(a)$, so ist $f(a)$ das *eindeutige* Element von A mit $m(f(a)) = f(m(a))$ für alle multiplikativen Funktionale m auf A. Ist A nicht kommutativ, kann man $f(a)$ immer noch definieren, wenn a normal ist, indem man zu der von a in A erzeugten C^*-Unteralgebra mit Einselement übergeht, also zu $C^*(a, 1)$. In dieser kommutativen C^*-Algebra liegt $f(a)$ für jede Funktion $f \in C(\sigma(a))$. Insbesondere kommutieren alle $f(a)$ miteinander. Außerdem ist die Funktion $f \mapsto f(a)$ ein C^*-Algebrenisomorphismus von $C(\sigma(a))$ nach $C^*(a, 1)$ und daher nach dem bekannten Resultat isometrisch, also gilt $\|f(a)\| = \|f\|_\infty$. Für ein Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ stimmt dabei $p(a)$ mit $\sum_{i=0}^n c_i a^i$ überein.
Für den späteren Gebrauch behandeln wir an dieser Stelle noch den Fall, dass A *kein* Einselement enthält. In dieser Situation ist der Funktionalkalkül über die C^*-Algebra $\tilde{A}$ definiert: Für ein normales Element $a \in A$ und eine stetige Funktion f auf $\sigma_A(a) = \sigma_{\tilde{A}}(a)$ ist a auch in $\tilde{A}$ normal. Somit können wir den obigen Funktionalkalkül in $\tilde{A}$ bzw. genauer in $C^*_{\tilde{A}}(a, 1)$ verwenden, um das Element $f(a) \in \tilde{A}$ zu erhalten. Es stellt sich die Frage, wann $f(a)$ in A enthalten ist. Als Motivation betrachten wir ein Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$. Aus[1]

$$p(a) = \sum_{i=0}^n c_i a^i = \left(\sum_{i=1}^n c_i a^i, c_0 \right)$$

folgt, dass $p(a) \in A$ zum Verschwinden des konstanten Koeffizienten c_0 äquivalent ist, also zu $p(0) = 0$. Dieselbe Aussage stimmt für allgemeine Funktionen f: Wir verwenden das multiplikative Funktional $m_0' : \tilde{A} \to \mathbb{C}$, $m_0'((b, \lambda)) := \lambda$. Ein Element $(b, \lambda) \in \tilde{A}$ ist genau dann in A enthalten, wenn $m_0'((b, \lambda)) = 0$ gilt. Wegen

$$m_0'(f(a)) = f(m_0'(a)) = f(0)$$

ist also $f(a) \in A$ zu $f(0) = 0$ äquivalent.

Satz 3.2.3. *Ist B eine weitere C^*-Algebra, so ist ein injektiver $*$-Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \to B$ isometrisch. Insbesondere ist $\operatorname{ran}\Phi$ eine C^*-Unteralgebra von B und $\Phi : A \to \operatorname{ran}\Phi$ ein isometrischer $*$-Algebrenisomorphismus.*

[1] Siehe auch den Beweis von Satz 2.1.2.

Beweis. Als Erstes sei angenommen, dass A und B kommutative C^*-Algebren mit Einselement sind, wobei wir noch $\Phi(1_A) = 1_B$ fordern. Für $\lambda \notin \sigma_A(a)$ identifiziert man $\Phi((a-\lambda 1_A)^{-1})$ leicht als Inverse von $\Phi(a) - \lambda 1_B$. Daraus folgt $\lambda \notin \sigma_B(\Phi(a))$ und somit

$$\sigma_B(\Phi(a)) \subseteq \sigma_A(a).$$

Unter der (bisher noch nicht verwendeten) Voraussetzung der Injektivität gilt hier sogar Gleichheit. Wäre dies nämlich nicht der Fall und $\lambda \in \sigma_A(a) \setminus \sigma_B(\Phi(a))$, so gäbe es nach dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $f : \sigma_A(a) \to [0,1]$ mit $f(\lambda) = 1$ und $f\big(\sigma_B(\Phi(a))\big) \subseteq \{0\}$. Ist m ein multiplikatives Funktional auf B, so ist $m \circ \Phi$ ein solches auf A, sodass wir mit dem Funktionalkalkül in A

$$m(\Phi(f(a))) = (m \circ \Phi)(f(a)) = f\big((m \circ \Phi)(a)\big) = f\big(\underbrace{m(\Phi(a))}_{\in \sigma_B(\Phi(a))}\big) = 0$$

erhalten. Damit ist die Gelfandtransformierte von $\Phi(f(a))$ die Nullfunktion, was uns wegen der Injektivität von $\hat{\ }$ und Φ auf $f(a) = 0$ schließen lässt. Wir erhalten den Widerspruch $0 = \|f(a)\| = \|f\|_\infty = 1$ und haben somit $\sigma_B(\Phi(a)) = \sigma_A(a)$ und infolge $r_B(\Phi(a)) = r_A(a)$ gezeigt. Diese Tatsache angewandt auf a^*a für beliebiges $a \in A$ liefert die Isometrieeigenschaft:

$$\|a\| = \|a^*a\|^{1/2} = r_A(a^*a)^{1/2} = r_B(\Phi(a^*a))^{1/2} = r_B(\Phi(a)^*\Phi(a))^{1/2} = \|\Phi(a)^*\Phi(a)\|^{1/2} = \|\Phi(a)\|$$

Jetzt nehmen wir weiterhin an, dass A und B kommutativ sind, lassen aber die Forderung nach der Existenz eines Einselements weg. Wir betrachten die C^*-Algebren mit Einselement $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ und setzen Φ gemäß $(a, \lambda) \mapsto (\Phi(a), \lambda)$ zu einem $*$-Homomorphismus $\widetilde{\Phi}$ fort. Diese Fortsetzung ist ebenfalls injektiv und bildet $1_{\tilde{A}} = (0_A, 1)$ auf $1_{\tilde{B}} = (0_B, 1)$ ab. Nach dem ersten Teil ist $\widetilde{\Phi}$ isometrisch, also gilt

$$\|a\| = \|(a,0)\|_{\tilde{A}} = \left\|\widetilde{\Phi}((a,0))\right\|_{\tilde{B}} = \|(\Phi(a),0)\|_{\tilde{B}} = \|\Phi(a)\|.$$

Um den allgemeinen Fall zu beweisen, beschränken wir uns zunächst auf $a \in A_{sa}$. Klarerweise ist dann $\Phi(a) \in B_{sa}$. Wir betrachten $C^*_A(a)$ sowie $C^*_B(\Phi(a))$. Das Urbild $\Phi^{-1}\big(C^*_B(\Phi(a))\big)$ ist eine a enthaltende $*$-Unteralgebra von A. Da Φ als $*$-Homomorphismus zwischen C^*-Algebren beschränkt ist, ist $\Phi^{-1}\big(C^*_B(\Phi(a))\big)$ auch abgeschlossen, also eine C^*-Unteralgebra von A. Daraus folgt $C^*_A(a) \subseteq \Phi^{-1}\big(C^*_B(\Phi(a))\big)$ bzw.

$$\Phi(C^*_A(a)) \subseteq C^*_B(\Phi(b)).$$

Wir können also den offenbar injektiven $*$-Homomorphismus $\Phi|_{C^*_A(a)} : C^*_A(a) \to C^*_B(\Phi(b))$ zwischen kommutativen C^*-Algebren betrachten, der nach dem schon Bewiesenen isometrisch ist. Wir erhalten $\|a\| = \left\|\Phi|_{C^*_A(a)}(a)\right\| = \|\Phi(a)\|$. Ist schließlich $a \in A$ beliebig, so ergibt sich

$$\|a\| = \|a^*a\|^{1/2} = \|\Phi(a^*a)\|^{1/2} = \|\Phi(a)^*\Phi(a)\|^{1/2} = \|\Phi(a)\|.$$

Nun ist die Hauptarbeit getan, denn als isometrisches Bild des vollständigen Raums A ist auch $\operatorname{ran}\Phi$ vollständig und daher abgeschlossen. Dass $\Phi : A \to \operatorname{ran}\Phi$ ein isometrischer $*$-Algebrenisomorphismus ist, ist nur eine Umformulierung bereits bewiesener Tatsachen. □

Um die eingangs behauptete isometrische $*$-Algebrenisomorphie von A und einer Unteralgebra von $L_b(H)$ zu zeigen, reicht es nach Satz 3.2.3, eine treue Darstellung zu konstruieren.

Zunächst induziert jedes positive Funktional φ auf A eine Darstellung: Definiert man N_φ als den isotropen Anteil der Sesquilinearform $(a,b) \mapsto \varphi(b^*a)$, also $N_\varphi = \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}$, so folgt aus Lemma 3.1.7(i)

$$N_\varphi = \{a \in A : \varphi(b^*a) = 0 \text{ für alle } b \in A\}\,, \tag{3.2.1}$$

womit N_φ ein Unterraum ist. Nach Lemma 3.1.7(ii) mit vertauschten Rollen von a und b folgt aus $a \in N_\varphi$ und $b \in A$ schon $ba \in N_\varphi$, sodass der isotrope Anteil ein Linksideal ist. Damit ist

$$(.,.)_{A/N_\varphi} : \begin{cases} (A/N_\varphi)^2 & \to \mathbb{C} \\ (a + N_\varphi, b + N_\varphi) & \mapsto \varphi(b^*a) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

eine wohldefinierte und positiv semidefinite Sesquilinearform. Nach Konstruktion ist $(.,.)_{A/N_\varphi}$ sogar positiv definit. Somit ist A/N_φ ein Prähilbertraum, der bekanntlich eine Hilbertraumvervollständigung H_φ hat. Da N_φ ein Linksideal ist, ist für jedes $a \in A$ die Abbildung

$$\Phi_\varphi(a) : \begin{cases} A/N_\varphi & \to A/N_\varphi \\ b + N_\varphi & \mapsto ab + N_\varphi \end{cases}$$

wohldefiniert. Klarerweise ist $\Phi_\varphi(a)$ linear und es gilt nach Lemma 3.1.7(ii)

$$\|ab + N_\varphi\|^2_{A/N_\varphi} = \varphi(b^*a^*ab) \le \|a^*a\|\,\varphi(b^*b) = \|a\|^2\,\|b + N_\varphi\|^2_{N_\varphi}\,.$$

Damit ist $\Phi_\varphi(a)$ auch beschränkt mit $\|\Phi_\varphi(a)\| \le \|a\|$. Folglich existiert eine eindeutige beschränkte Fortsetzung auf H_φ, die wir ebenfalls mit $\Phi_\varphi(a)$ bezeichnen. Es bleibt nachzuprüfen, dass $\Phi_\varphi : A \to L_b(H_\varphi)$ tatsächlich ein $*$-Homomorphismus ist. Da man die jeweiligen Bedingungen wegen der Stetigkeit immer nur für Elemente der dichten Teilmenge $A/N_\varphi \subseteq H_\varphi$ prüfen muss, sind die Linearität und die Multiplikativität klar. Die Verträglichkeit mit $.^*$ folgt aus

$$\begin{aligned}\big(c + N_\varphi, \Phi_\varphi(a)(b + N_\varphi)\big)_{H_\varphi} &= (c + N_\varphi, ab + N_\varphi)_{H_\varphi} = (c + N_\varphi, ab + N_\varphi)_{A/N_\varphi} \\ &= \varphi((ab)^*c) = \varphi(b^*(a^*c)) \\ &= (a^*c + N_\varphi, b + N_\varphi)_{A/N_\varphi} = \big(\Phi_\varphi(a^*)(c + N_\varphi), b + N_\varphi\big)_{A/N_\varphi}.\end{aligned}$$

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen.

Lemma 3.2.4. *Ist φ ein positives Funktional auf A und $N_\varphi = \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}$ das zugeordnete Linksideal, so ist die in* (3.2.2) *definierte Sesquilinearform positiv definit. Bezeichnet man die Hilbertraumvervollständigung von A/N_φ mit H_φ, dann ist $\Phi_\varphi : A \to L_b(H_\varphi)$ eine Darstellung, wobei $\Phi_\varphi(a)$ die stetige Fortsetzung des Operators $b + N_\varphi \mapsto ab + N_\varphi$ auf H_φ ist. Diese Darstellung wird die* von φ induzierte GNS[2]-Darstellung *genannt.*

Nun können wir die gesuchte treue Darstellung von A angeben. Dazu betrachten wir die GNS-Darstellung $\Phi_\varphi : A \to L_b(H_\varphi)$ für jeden Zustand $\varphi \in \mathcal{S}(A)$ und die direkte Summe $H := \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{S}(A)} H_\varphi$. Der Operator

$$\Phi(a) : \begin{cases} H & \to H \\ (x_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{S}(A)} & \mapsto (\Phi_\varphi(a)x_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{S}(A)} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

bildet tatsächlich nach H ab, da Φ_φ als $*$-Homomorphismus beschränkt mit $\|\Phi_\varphi\| \le 1$ ist. Folglich gilt $\|\Phi_\varphi(a)x_\varphi\|^2_{H_\varphi} \le \|a\|^2\,\|x_\varphi\|^2_{H_\varphi}$ und aus der Quadratsummierbarkeit von $\left(\|x_\varphi\|_{H_\varphi}\right)_{\varphi \in \mathcal{S}(A)}$

[2]Die Abkürzung steht für Gelfand, Naimark und Segal.

erhalten wir die Quadratsummierbarkeit von $\left(\|\Phi_\varphi(a)x_\varphi\|_{H_\varphi}\right)_{\varphi\in\mathcal{S}(A)}$. Direktes Nachrechnen zeigt, dass $\Phi : A \to L_b(H)$ eine Darstellung ist. Man spricht von der *universellen Darstellung.* Damit lässt sich der Satz von Gelfand-Naimark in folgender Form formulieren:

Satz 3.2.5 (Gelfand-Naimark)**.** *Die universelle Darstellung Φ von A ist treu. Insbesondere ist A isometrisch isomorph zu einer C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$ für einen geeigneten Hilbertraum H.*

Beweis. Wäre Φ nicht treu, so gäbe es ein $a \in A$ mit $a \neq 0$ und $\Phi(a) = 0$, also $\Phi_\varphi(a) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(A)$. Da mit $\Phi(a)$ klarerweise auch $\Phi(a^*a) = \Phi(a)^*\Phi(a)$ der Nulloperator ist, können wir durch etwaigen Übergang zu a^*a annehmen, dass a positiv ist. Nach Satz 3.1.8 gibt es einen Zustand $\varphi \in \mathcal{S}(A)$ mit $\varphi(a) = \|a\|$. Gemäß Satz 2.1.2 existiert $b := a^{1/4} = (a^{1/2})^{1/2}$. Das Element $\Phi_\varphi(b)$ ist positiv, denn mit $c = b^{1/2}$ gilt $\Phi_\varphi(b) = \Phi_\varphi(c)^*\Phi_\varphi(c)$. Außerdem folgt $\left(\Phi_\varphi(b)^2\right)^2 = \Phi_\varphi(b^4) = \Phi_\varphi(a) = 0$ und wegen der Eindeutigkeit der positiven Quadratwurzel $\Phi_\varphi(b)^2 = 0$. Mit demselben Argument ergibt sich $\Phi_\varphi(b) = 0$. Daraus folgt der Widerspruch

$$\begin{aligned}\|a\| &= \varphi(a) = \varphi\left(b^4\right) = \varphi\left(\left(b^2\right)^* b^2\right) = \left(b^2 + N_\varphi, b^2 + N_\varphi\right)_{H_\varphi} = \left\|b^2 + N_\varphi\right\|_{H_\varphi}^2 \\ &= \|\Phi_\varphi(b)(b + N_\varphi)\|_{H_\varphi}^2 = 0.\end{aligned}$$

Somit ist Φ treu.
Der Rest des Satzes folgt aus Satz 3.2.3. □

Bemerkung 3.2.6*.* Abschließend sei noch bemerkt, dass A in die Konstruktion der universellen Darstellung auf zwei verschiedene Arten eingeht: Einerseits bauen Tupel von Äquivalenzklassen den Hilbertraum H auf, andererseits – diese Sichtweise stellt für den Satz von Gelfand-Naimark das Hauptinteresse dar – wirkt A vermöge Φ auf dem Hilbertraum H.

Kapitel 4

Topologien auf $L_b(H)$ und Von-Neumann-Algebren

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht der Raum $L_b(H)$ von Operatoren auf einem gegebenen Hilbertraum H. Von großem Interesse sollen insbesondere mehrere kanonische Topologien sein, mit denen man $L_b(H)$ versehen kann. Darauf aufbauend stellt sich auch die Frage, unter welchen Bedingungen die Abgeschlossenheit einer Teilmenge bezüglich all dieser Topologien äquivalent ist.

4.1 Operatortopologien

Wir beginnen mit der Definition der Topologien. Dazu sei daran erinnert, dass eine *separierende* Menge P von Seminormen[1] auf einem Vektorraum X eine lokalkonvexe Vektorraum-Topologie auf X induziert. Die Konvergenz eines Netzes $(x_i)_{i\in I}$ gegen einen Vektor $x \in X$ lässt sich dabei charakterisieren durch

$$\lim_{i\in I} x_i = x \Leftrightarrow \lim_{i\in I} p(x_i - x) = 0 \text{ für alle } p \in P. \tag{4.1.1}$$

Definition 4.1.1.

(i) Die von $P_s := \{(T \mapsto \|Tx\|) : x \in H\}$ auf $L_b(H)$ induzierte Topologie wird *starke Operatortopologie* genannt und mit $\mathcal{T}_s$ bezeichnet.

(ii) Die von $P_w := \{(T \mapsto |(Tx, y)|) : x, y \in H\}$ auf $L_b(H)$ induzierte Topologie wird *schwache Operatortopologie* genannt und mit $\mathcal{T}_w$ bezeichnet.

(iii) Die von $P_{uw} := \big\{(T \mapsto |\mathrm{tr}(ST)|) : S \in L^1(H)\big\}$ auf $L_b(H)$ induzierte Topologie wird *ultraschwache Operatortopologie* genannt und mit $\mathcal{T}_{uw}$ bezeichnet.

Nach (4.1.1) bedeutet $T_i \to T$ bezüglich $\mathcal{T}_s$ genau $(T_i - T)x \to 0$ für alle $x \in H$ und $T_i \to T$ bezüglich $\mathcal{T}_w$ genau $((T_i - T)x, y) \to 0$ für alle $x, y \in H$. Somit ist $\mathcal{T}_s$ die Topologie der punktweisen Konvergenz und $\mathcal{T}_w$ die Topologie der punktweise schwachen Konvergenz in H. Der nächste Satz fasst einige einfache Aussagen über diese Topologien zusammen.

Satz 4.1.2.

(i) Die Mengen P_s, P_w, P_{uw} sind jeweils separierend. Damit bildet $L_b(H)$ mit jeder der drei Topologien $\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_w, \mathcal{T}_{uw}$ tatsächlich einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

[1] Das bedeutet nach Definition, dass $p(x) = 0$ für alle $p \in P$ schon $x = 0$ impliziert.

(ii) Mit der Bezeichnung $\mathcal{T}(\|\cdot\|)$ für die von der Abbildungsnorm induzierte Topologie ist $\mathcal{T}_w$ die gröbste und $\mathcal{T}(\|\cdot\|)$ die feinste der hier diskutierten Topologien. Insbesondere gilt $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{uw}$.

Bemerkung 4.1.3. Es sei explizit darauf hingewiesen, dass die leider übliche Bezeichnung *ultraschwache Operatortopologie* irreführend ist, da sie tatsächlich feiner und damit stärker als die schwache Operatortopologie ist.

Beweis von Satz 4.1.2.

(i) Aus $\|Tx\| = 0$ für alle $x \in H$ folgt offenbar $T = 0$, womit P_s als separierend nachgewiesen ist. Für P_w ist die Überlegung ebenso einfach: Die Forderung $|(Tx, y)| = 0$ für alle $x, y \in H$ bedingt in einem ersten Schritt $Tx = 0$ für alle $x \in H$ und folglich $T = 0$. Für P_{uw} genügt es, $P_{uw} \supseteq P_w$ zu zeigen. Dazu definieren wir einen Operator $S_{x,y}$ durch $S_{x,y}a := (a, y)x$, wobei $x, y \in H$ beliebig sind. Man rechnet unmittelbar nach, dass $S^*_{x,y}b = (b, x)y = S_{y,x}b$ gilt, womit wir

$$S^*_{x,y}S_{x,y}a = (a, y)(x, x)y = \|x\|^2 (a, y)y = \|x\|^2 S_{y,y}a \tag{4.1.2}$$

erhalten. Da man $x \neq 0$ wählen kann, schließen wir mit Satz 2.1.7(iii) insbesondere, dass der Operator $S_{y,y}$ für $y \in H$ positiv ist. Wegen $S^*_{y,y} = S_{y,y}$ folgt aus (4.1.2) für $x = y$ die Gleichung $S^2_{y,y} = \|y\|^2 S_{y,y}$. Sind $x, y \neq 0$, so erhalten wir $\left(\frac{\|x\|}{\|y\|}S_{y,y}\right)^2 = \|x\|^2 S_{y,y} = S^*_{x,y}S_{x,y}$, also $|S_{x,y}| = \frac{\|x\|}{\|y\|}S_{y,y}$. Erweitert man $\frac{1}{\|y\|}y$ zu einer Orthonormalbasis E von H, ergibt sich

$$\sum_{e\in E}(|S_{x,y}|(e), e) \overset{(*)}{=} \frac{\|x\|}{\|y\|}\left(S_{y,y}\frac{1}{\|y\|}y, \frac{1}{\|y\|}y\right) = \frac{\|x\|}{\|y\|}\left(\|y\|\, y, \frac{1}{\|y\|}y\right) = \|x\|\,\|y\| < +\infty,$$

womit $S_{x,y} \in L^1(H)$ ist. Die Gleichheit $(*)$ folgt dabei daraus, dass $S_{y,y}$ nach $\operatorname{span} y$ abbildet und daher die Summanden für $e \in E \setminus \{\frac{1}{\|y\|}y\}$ wegfallen. Für $x, y \neq 0$ und eine Orthonormalbasis E, die $\frac{1}{\|x\|}x$ erweitert, rechnen wir

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(S_{x,y}T) &= \sum_{e\in E}(S_{x,y}Te, e) \overset{(**)}{=} \left(S_{x,y}T\left(\frac{1}{\|x\|}x\right), \frac{1}{\|x\|}x\right) \\ &= \left(T\left(\frac{1}{\|x\|}x\right), y\right)\left(x, \frac{1}{\|x\|}x\right) = (Tx, y),\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

wobei die Gleichheit $(**)$ analog zu $(*)$ aus $\operatorname{ran} S_{x,y} \leq \operatorname{span} x$ folgt. Für $x = 0$ oder $y = 0$ gilt klarerweise $\operatorname{tr}(S_{x,y}T) = 0 = (Tx, y)$. Damit ist $P_{uw} \supseteq P_w$ nachgewiesen.

(ii) Für Topologien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ auf einer Menge M gilt $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ genau dann, wenn jedes bezüglich $\mathcal{T}_2$ gegen ein $m \in M$ konvergente Netz $(m_i)_{i\in I}$ auch bezüglich $\mathcal{T}_1$ gegen m konvergiert.

Wegen $|((T_i - T)x, y)| \leq \|(T_i - T)x\|\,\|y\|$ und $\|(T_i - T)x\| \leq \|T_i - T\|\,\|x\|$ können wir nach (4.1.1) auf $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_s \subseteq \mathcal{T}(\|\cdot\|)$ schließen. Die aus Gleichung (4.1.3) folgende Inklusion der induzierenden Seminormen liefert $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{uw}$. Schließlich ergibt sich $\mathcal{T}_{uw} \subseteq \mathcal{T}(\|\cdot\|)$ ebenfalls aus (4.1.1), wenn wir $\operatorname{tr}(S(T_i - T)) \leq \|S\|_1 \|T_i - T\|$ berücksichtigen; siehe Lemma 1.3.10(i) und (1.3.4).

□

Entscheidend für den weiteren Verlauf dieser Arbeit wird der nächste Satz sein.

Satz 4.1.4. *Der Raum $L_b(H)$ versehen mit $\mathcal{T}_{uw}$ ist linear homöomorph*[2] *zu $L^1(H)'$ versehen mit der schwach-*-Topologie $\sigma(L^1(H)', L^1(H))$. Ein linearer Homöomorphismus ist dabei gegeben durch die kanonische Abbildung*

$$\theta : \begin{cases} L_b(H) & \to L^1(H)' \\ \quad T & \mapsto \operatorname{tr}(.T) \end{cases}$$

aus Satz 1.3.12(iii).

Beweis. Es ist nur mehr nachzuprüfen, dass θ und θ^{-1} stetig sind. Dazu verwenden wir die Grenzwertcharakterisierung der Stetigkeit und zeigen

$$T_j \xrightarrow{\mathcal{T}_{uw}} T \Leftrightarrow \theta(T_j) \xrightarrow{\sigma(L^1(H)', L^1(H))} \theta(T).$$

Mit der Bezeichung $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ für die euklidische Topologie auf $\mathbb{C}$ ergibt sich das aus der folgenden Äquivalenzenkette:

$$\begin{aligned} T_j \xrightarrow{\mathcal{T}_{uw}} T &\Leftrightarrow \forall S \in L^1(H) : |\operatorname{tr}(S(T_j - T))| \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathbb{C}}} 0 \\ &\Leftrightarrow \forall S \in L^1(H) : \operatorname{tr}(S(T_j - T)) \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathbb{C}}} 0 \\ &\Leftrightarrow \forall S \in L^1(H) : \langle S, \theta(T_j - T)\rangle \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathbb{C}}} 0 \\ &\Leftrightarrow \theta(T_j - T) \xrightarrow{\sigma(L^1(H)', L^1(H))} 0 \\ &\Leftrightarrow \theta(T_j) \xrightarrow{\sigma(L^1(H)', L^1(H))} \theta(T) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

□

Auf beschränkten Mengen fallen die schwache und die ultraschwache Topologie zusammen:

Korollar 4.1.5.

(i) Die Einheitskugel S von $L_b(H)$ ist $\mathcal{T}_{uw}$-kompakt.

(ii) Für jedes $r > 0$, insbesondere für $r = 1$, sind die Spurtopologien $(\mathcal{T}_{uw})|_{rS}$ und $(\mathcal{T}_w)|_{rS}$ gleich. Insbesondere ist rS auch bezüglich der schwachen Operatortopologie kompakt.

(iii) Ist $M \subseteq L_b(H)$ eine $\|\cdot\|$-beschränkte Menge, so stimmen die Spurtopologien $(\mathcal{T}_{uw})|_M$ und $(\mathcal{T}_w)|_M$ überein.

Beweis.

(i) Da θ^{-1} isometrisch ist, gilt $\theta^{-1}(S_{L^1(H)'}) = S$. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist die Einheitskugel in $L^1(H)'$ schwach-*-kompakt, sodass die Aussage aus Satz 4.1.4 folgt.

(ii) Da $\mathcal{T}_{uw}$ feiner als $\mathcal{T}_w$ ist, ist die Identität eine stetige und bijektive Abbildung vom kompakten topologischen Raum $(rS, (\mathcal{T}_{uw})|_{rS})$ in den Hausdorffraum $(rS, (\mathcal{T}_w)|_{rS})$ und damit ein Homöomorphismus.

(iii) Sei M beschränkt durch $r > 0$, d. h. $M \subseteq rS$.

Schränken wir den Homöomorphismus $\mathrm{id}_{rS} : (rS, (\mathcal{T}_{uw})|_{rS}) \to (rS, (\mathcal{T}_w)|_{rS})$ aus (ii) auf M ein, so erhalten wir, dass die Identität auf M ein Homöomorphismus zwischen den Spurtopologien von $\mathcal{T}_{uw}$ und $\mathcal{T}_w$ ist.

[2] Das bedeutet, dass es eine lineare und in beide Richtungen stetige Bijektion gibt.

□

Als Nächstes untersuchen wir, welche über die Struktur eines topologischen Vektorraums hinausgehenden Operationen auf $L_b(H)$ bezüglich welcher der hier betrachteten Topologien stetig sind. Genauer soll es um die Adjungiertenbildung $.^*$ und die Multiplikation von Operatoren gehen, wobei wir uns nur für den Fall eines unendlichdimensionalen Hilbertraums H interessieren[3]. Dabei werden wir sehen, dass die Multiplikation $(S, T) \mapsto ST$ einzig für die Normtopologie simultan stetig ist, sodass wir zusätzlich separate Stetigkeit betrachten. Mit anderen Worten analysieren wir die Stetigkeit der *Translationen* $T \mapsto ST$ bzw. $S \mapsto ST$ bei festgehaltenen Operatoren S bzw. T.

Satz 4.1.6. *Für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum H gelten folgende Stetigkeitsaussagen:*

(i) Bezüglich der Normtopologie $\mathcal{T}(\|\cdot\|)$ sind

*(a) die Adjungiertenbildung $.^* : T \mapsto T^*$ **stetig**,*

*(b) die Multiplikation $(S, T) \mapsto ST$ **stetig**,*

*(c) die Translationen $T \mapsto ST$ bzw. $S \mapsto ST$ für feste Operatoren $S \in L_b(H)$ bzw. $T \in L_b(H)$ **stetig**.*

(ii) Bezüglich der starken Operatortopologie $\mathcal{T}_s$ sind

*(a) die Adjungiertenbildung $.^* : T \mapsto T^*$ **nicht stetig**,*

*(b) die Multiplikation $(S, T) \mapsto ST$ **nicht stetig**,*

*(c) die Translationen $T \mapsto ST$ bzw. $S \mapsto ST$ für feste Operatoren $S \in L_b(H)$ bzw. $T \in L_b(H)$ **stetig**.*

(iii) Bezüglich der schwachen Operatortopologie $\mathcal{T}_w$ sind

*(a) die Adjungiertenbildung $.^* : T \mapsto T^*$ **stetig**,*

*(b) die Multiplikation $(S, T) \mapsto ST$ **nicht stetig**,*

*(c) die Translationen $T \mapsto ST$ bzw. $S \mapsto ST$ für feste Operatoren $S \in L_b(H)$ bzw. $T \in L_b(H)$ **stetig**.*

(iv) Bezüglich der ultraschwachen Operatortopologie $\mathcal{T}_{uw}$ sind

*(a) die Adjungiertenbildung $.^* : T \mapsto T^*$ **stetig**,*

*(b) die Multiplikation $(S, T) \mapsto ST$ **nicht stetig**,*

*(c) die Translationen $T \mapsto ST$ bzw. $S \mapsto ST$ für feste Operatoren $S \in L_b(H)$ bzw. $T \in L_b(H)$ **stetig**.*

Beweis. Im gesamten Beweis sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in H.

(i) Der Beweis ist hinlänglich bekannt.

[3] Bei endlicher Dimension sind alle betrachteten Abbildungen stetig.

(ii) (a) Wir verwenden die Notation aus dem Beweis von Satz 4.1.2 und betrachten die Operatoren S_{e_1,e_n}. Wegen $S_{e_1,e_n}x = (x,e_n)e_1$ gilt $\|S_{e_1,e_n}x\| = |(x,e_n)| \to 0$, da $(|(x,e_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar quadratsummierbar ist. Daher konvergiert S_{e_1,e_n} bezüglich der starken Operatortopologie gegen den Nulloperator. Für den adjungierten Operator gilt dies aber nicht, weil wegen $S^*_{e_1,e_n} = S_{e_n,e_1}$ der Ausdruck $\left\|S^*_{e_1,e_n}e_1\right\| = (e_1,e_1) = 1$ nicht gegen 0 konvergiert.

(b) Sei V der linksseitige Shiftoperator auf dem Orthonormalsystem $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, also[4]

$$Vx := \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, e_{n+1})e_n.$$

Bekanntermaßen gilt $\|V\| \leq 1$. Aus

$$V^m x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, e_{n+m})e_n$$

für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\|V^m x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, e_{n+m})|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Also konvergiert die Folge $(V^m)_{m\in\mathbb{N}}$ bezüglich der starken Operatortopologie gegen den Nulloperator. Für eine *feste* natürliche Zahl k konvergiert daher auch $(kV^m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Diese Tatsache verwenden wir, um zwei Netze von Operatoren zu konstruieren, die beide bezüglich $\mathcal{T}_s$ gegen den Nulloperator konvergieren, für die das Netz der Produkte aber konstant und ungleich 0 ist.

Dazu sei $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_s}(0)$ der Nullumgebungsfilter bezüglich der starken Operatortopologie und

$$I := \left\{(k, m, U) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathfrak{U}^{\mathcal{T}_s}(0) : kV^m \in U\right\}.$$

Auf I definieren wir die Relation $\preccurlyeq$ durch

$$(k, m, U) \preccurlyeq (k', m', U') :\Leftrightarrow k \leq k' \text{ und } U' \subseteq U.$$

Die gerade gezeigte Konvergenz impliziert, dass es für jede Umgebung $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}_s}(0)$ und jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt[5] mit $(k, m, U) \in I$.

Klarerweise ist $\preccurlyeq$ eine reflexive und transitive Relation. Für zwei vorgegebene Tripel $(k_1, m_1, U_1), (k_2, m_2, U_2) \in I$ setzen wir $U := U_1 \cap U_2$ sowie $k := \max(k_1, k_2)$ und wählen eine natürliche Zahl m mit $(k, m, U) \in I$. Dieses Tripel erfüllt

$$(k_1, m_1, U_1), (k_2, m_2, U_2) \preccurlyeq (k, m, U),$$

womit I eine gerichtete Menge ist.

Weiters definieren wir Netze $(S_{(k,m,U)})_{(k,m,U)\in I}$ und $(T_{(k,m,U)})_{(k,m,U)\in I}$ durch

$$S_{(k,m,U)} := kV^m \quad \text{und} \quad T_{(k,m,U)} := \frac{1}{k}(V^*)^m.$$

[4]Man beachte, dass diese Reihe wegen $((x, e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ konvergiert.
[5]Es würde genügen, dass der Nulloperator ein Häufungspunkt von $(V^m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist.

Beide Netze konvergieren bezüglich der starken Operatortopologie gegen den Nulloperator: Sei eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}_s}(0)$ gegeben. Wählen wir die natürliche Zahl m so, dass $(1, m, U) \in I$, so gilt für alle Tripel $(k', m', U') \succcurlyeq (1, m, U)$

$$S_{(k',m',U')} = k' V^{m'} \in U' \subseteq U.$$

Für das zweite Netz können wir sogar Konvergenz bezüglich der Abbildungsnorm zeigen. Dazu sei $\epsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < \epsilon$. Es gilt $(k, 1, L_b(H)) \in I$ und für $(k', m', U') \succcurlyeq (k, 1, L_b(H))$ folgt wegen $\|(V^*)^m\| \leq 1$

$$\left\|T_{(k',m',U')}\right\| = \frac{1}{k'} \left\|(V^*)^m\right\| \leq \frac{1}{k'} \leq \frac{1}{k} < \epsilon.$$

Da V^* der rechtsseitige Shiftoperator auf $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist, also

$$V^* x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, e_n) e_{n+1},$$

ergibt sich

$$(V^*)^m x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, e_n) e_{n+m}.$$

Man prüft leicht nach, dass dann

$$V^m (V^*)^m x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, e_n) e_n = Px$$

gilt, wobei P die Orthogonalprojektion auf $\overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ bezeichnet. Daraus folgt

$$S_{(k,m,U)} T_{(k,m,U)} = k \frac{1}{k} V^m (V^*)^m = P.$$

Wie oben angekündigt erhalten wir bezüglich der starken Operatortopologie

$$S_{(k,m,U)} \to 0, \quad T_{(k,m,U)} \to 0, \quad S_{(k,m,U)} T_{(k,m,U)} \not\to 0.$$

Somit ist die Multiplikation nicht stetig.

(c) Da die Translationen linear sind, müssen wir nur zeigen, dass sie bei 0 stetig sind. Sei zunächst $S \in L_b(H)$ fest und $(T_i)_{i \in I}$ ein bezüglich der starken Operatortopologie gegen 0 konvergentes Netz. Für jedes $x \in H$ gilt also $\|T_i x\|^2 \to 0$ bzw. $T_i x \to 0$. Da S beschränkt ist, folgt $ST_i x \to 0$ und wir erhalten $ST_i \xrightarrow{\mathcal{T}_s} 0$.
Ist andererseits $(S_i)_{i \in I}$ ein gegen 0 konvergentes Netz und $T \in L_b(H)$ fest, so gilt wie oben $S_i x \to 0$ für alle $x \in H$. Wir setzen speziell $x = Ty$ für $y \in H$ und erhalten $S_i Ty \to 0$ für alle $y \in H$. Daraus folgt $S_i T \xrightarrow{\mathcal{T}_s} 0$.

(iii) (a) Sei $(T_i)_{i \in I}$ ein Netz in $L_b(H)$, das bezüglich der schwachen Operatortopologie gegen T konvergiert. Da $.^*$ eine konjugiert lineare Abbildung ist, konvergiert T_i^* genau dann gegen T^*, wenn $((T_i - T)^*)_{i \in I} = (T_i^* - T^*)_{i \in I}$ gegen 0 konvergiert. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T = 0$ annehmen und müssen nur zeigen, dass $(T_i^*)_{i \in I}$ bezüglich $\mathcal{T}_w$ gegen den Nulloperator konvergiert, wenn $(T_i)_{i \in I}$ es tut. Dies folgt unmittelbar aus

$$|(T_i^* x, y)| = |(x, T_i y)| = |(T_i y, x)| \to 0$$

für alle $x, y \in H$.

(b) Da die starke Operatortopologie feiner als die schwache Operatortopologie ist, konvergiert die Folge $(V^m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus dem Beweis von (ii)(b) auch bezüglich $\mathcal{T}_w$ gegen den Nulloperator. Daher kann man die gleiche Konstruktion mit $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_w}(0)$ anstelle von $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_s}(0)$ durchführen, um Netze $(S_{(k,m,U)})_{(k,m,U)\in I}$ und $(T_{(k,m,U)})_{(k,m,U)\in I}$ mit

$$S_{(k,m,U)} \to 0, \quad T_{(k,m,U)} \to 0, \quad S_{(k,m,U)}T_{(k,m,U)} \not\to 0$$

bezüglich der schwachen Operatortopologie zu erhalten.

(c) Sei $S \in L_b(H)$ fest und $(T_i)_{i\in I}$ ein bezüglich der schwachen Operatortopologie gegen 0 konvergentes Netz, also $|(T_i x, y)| \to 0$ für alle $x, y \in H$. Wegen

$$|(ST_i x, y)| = |(T_i x, S^* y)| \to 0$$

erhalten wir $ST_i \xrightarrow{\mathcal{T}_w} 0$.

Den Beweis der Stetigkeit von $S \mapsto ST$ kann man ähnlich führen; kürzer kann man diese Translation auch als Verkettung von $.^*$ und der bereits als stetig nachgewiesenen Translation schreiben. Aus $ST = (T^* S^*)^*$ folgt nämlich

$$(S \mapsto ST) = .^* \circ (S \mapsto T^* S) \circ .^* \tag{4.1.5}$$

(iv) (a) Wie in (iii)(a) können wir uns auf ein gegen 0 konvergentes Netz $(T_i)_{i\in I}$ beschränken. Es gelte also $|\mathrm{tr}(RT_i)| \to 0$ für jeden Spurklasseoperator $R \in L^1(H)$. Aus Lemma 1.3.10(ii) und Lemma 1.3.11 folgt

$$|\mathrm{tr}(RT_i^*)| = \left|\overline{\mathrm{tr}(RT_i^*)}\right| \overset{1.3.10}{=} |\mathrm{tr}((RT_i^*)^*)| = |\mathrm{tr}(T_i R^*)| \overset{1.3.11}{=} |\mathrm{tr}(R^* T_i)| \to 0,$$

da R^* nach Lemma 1.3.8(ii) ein Spurklasseoperator ist.

(b) Auch für die ultraschwache Operatortopologie funkioniert die Konstruktion aus dem Beweis von (ii)(b), wenn wir $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_s}(0)$ durch $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_{uw}}(0)$ ersetzen. Wir müssen nämlich nur nachweisen, dass die Folge $(V^m)_{m\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$ gegen 0 konvergiert. Dies erhalten wir aus Korollar 4.1.5(ii), denn die Operatoren V^m sind in S enthalten und konvergieren bezüglich $\mathcal{T}_w$ gegen 0. Somit konvergieren sie bezüglich der Spurtopologie $(\mathcal{T}_w)|_S = (\mathcal{T}_{uw})|_S$ und folglich bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$.

(c) Sei wieder $S \in L_b(H)$ fest und $(T_i)_{i\in I}$ ein Netz, das bezüglich der ultraschwachen Operatortopologie gegen den Nulloperator konvergiert. Nach Lemma 1.3.8(ii) liegt für jeden Spurklasseoperator $R \in L^1(H)$ auch RS in $L^1(H)$. Daraus folgt

$$|\mathrm{tr}(R(ST_i))| = |\mathrm{tr}((RS)T_i)| \to 0$$

und wir erhalten $ST_i \xrightarrow{\mathcal{T}_{uw}} 0$.

Die Stetigkeit der Translation $S \mapsto ST$ folgt analog zu (iii)(c) aus (4.1.5) und dem schon Bewiesenen.

□

Mithilfe des letzten Satzes können wir auf einen Blick ablesen, dass für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum beispielsweise die Normtopologie niemals mit einer der drei Operatortopologien zusammenfällt. Tatsächlich gilt:

Satz 4.1.7. *Wenn H unendlichdimensional ist, sind die Normtopologie sowie die starke, schwache und ultraschwache Operatortopologie paarweise verschieden.*

Beweis. Die Multiplikation ist stetig bezüglich der Normtopologie, aber nicht bezüglich der starken, schwachen oder ultraschwachen Operatortopologie, woraus wir

$$\mathcal{T}(\|\cdot\|) \neq \mathcal{T}_s, \mathcal{T}_w, \mathcal{T}_{uw}$$

schließen. Analog folgt

$$\mathcal{T}_s \neq \mathcal{T}(\|\cdot\|), \mathcal{T}_w, \mathcal{T}_{uw}$$

durch Betrachten der Adjungiertenbildung $.^*$. Somit bleibt nur noch

$$\mathcal{T}_w \neq \mathcal{T}_{uw}$$

zu zeigen. Dazu werden wir ein unbeschränktes[6] Netz angeben, das bezüglich der schwachen Operatortopologie gegen den Nulloperator konvergiert, nicht aber bezüglich der ultraschwachen Operatortopologie.

Wir betrachten die Menge $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(H)$ der endlichdimensionalen Unterräume von H. Versehen mit der Inklusion von Unterräumen, die wir mit $\leq$ notieren, wird $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(H)$ offenbar zu einer gerichteten Menge[7]. Für einen endlichdimensionalen Unterraum $U \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(H)$ sei $P_{U^\perp}$ die Orthogonalprojektion auf den Orthogonalraum $U^\perp$ und

$$T_U := \dim(U) \cdot P_{U^\perp} \in L_b(H).$$

Wir behaupten, dass das Netz $(T_U)_{U \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(H)}$ ein $\mathcal{T}_w$-, aber kein $\mathcal{T}_{uw}$-Nullnetz ist.

Die Konvergenz $T_U \xrightarrow{\mathcal{T}_w} 0$ folgt daraus, dass für $U \geq U_0 := \operatorname{span} x$ sicher $T_U x = 0$ und daher $|(T_U x, y)| = 0$ gilt.

Wenn wir einen Spurklasseoperator $S \in L^1(H)$ finden können, für den $\operatorname{tr}(ST_U)$ nicht gegen 0 konvergiert, so haben wir $T_U \not\to 0$ bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$ gezeigt. Dazu wählen wir ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ in H und definieren den Operator

$$Sx := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x, e_{2n})e_{2n},$$

der wegen $(\frac{1}{n^2}(x, e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ wohldefiniert ist. Diese Reihe konvergiert sogar bezüglich der Operatortopologie, da aus

$$\begin{aligned}
\left\| Sx - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}(x, e_{2n})e_{2n} \right\|^2 &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x, e_{2n})e_{2n} \right\|^2 \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n^2}(x, e_{2n})e_{2n} \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} |(x, e_{2n})|^2 \\
&\leq \frac{1}{(N+1)^4} \sum_{n=N+1}^{\infty} |(x, e_{2n})|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^4} \|x\|^2
\end{aligned}$$

sofort

$$\left\| S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}(., e_{2n})e_{2n} \right\| \leq \frac{1}{(N+1)^2}$$

[6] Nach Korollar 4.1.5 stimmen $\mathcal{T}_w$ und $\mathcal{T}_{uw}$ auf beschränkten Mengen ja überein. Aus diesem Grund müssen wir auch zwangsläufig ein Netz konstruieren: Eine $\mathcal{T}_w$-konvergente *Folge* ist immer beschränkt, wie man mit dem Satz von Banach-Steinhaus zeigen kann, sodass eine Folge von Operatoren genau dann bezüglich der schwachen Operatortopologie konvergent ist, wenn sie bezüglich der ultraschwachen Operatortopologie konvergiert.

[7] $(\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(H), \leq)$ ist sogar eine Verbandshalbordnung.

folgt. Mit der Notation aus dem Beweis von Satz 4.1.2 erhalten wir also

$$S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} S_{e_{2n},e_{2n}}.$$

In besagtem Beweis haben wir gezeigt, dass $S_{y,y}$ für jedes $y \in H$ positiv ist. Nach Satz 2.1.7(i) und (iv) ist somit auch S positiv. Aus $Se_{2n-1} = 0$ folgt

$$\sum_{e\in E}(|S|e, e) = \sum_{e\in E}(Se, e) = \sum_{n=1}^{\infty}(Se_{2n}, e_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty,$$

also $S \in L^1(H)$.
Angenommen, das Netz $(\mathrm{tr}(ST_U))_{U\in\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(H)}$ konvergiert gegen 0. Dann gibt es einen endlichdimensionalen Unterraum U_0 mit

$$|\mathrm{tr}(ST_U)| \leq 1 \quad \text{für alle } U \geq U_0. \tag{4.1.6}$$

Da U_0 endlichdimensional ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $e_{2n_0} \notin U_0 = \ker P_{U_0^\perp}$ bzw. $P_{U_0^\perp}e_{2n_0} \neq 0$. Aus

$$(SP_{U_0^\perp}e_{2n}, e_{2n}) = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}(P_{U_0^\perp}e_{2n}, e_{2m})e_{2m}, e_{2n}\right) = \frac{1}{n^2}(P_{U_0^\perp}e_{2n}, e_{2n}) = \frac{1}{n^2}\left\|P_{U_0^\perp}e_{2n}\right\|^2$$

folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(SP_{U_0^\perp}) &= \sum_{e\in E}(SP_{U_0^\perp}e, e) \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}(SP_{U_0^\perp}e_{2n}, e_{2n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\|P_{U_0^\perp}e_{2n}\right\|^2 \geq \frac{1}{n_0^2}\left\|P_{U_0^\perp}e_{2n_0}\right\|^2 > 0,\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

wobei sich die Gleichung $(*)$ aus

$$\mathrm{ran}\, S \leq \overline{\mathrm{span}\,\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\}} \leq \big(\mathrm{span}(E \setminus \{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\})\big)^\perp$$

ergibt. Insbesondere ist $\left|\mathrm{tr}(SP_{U_0^\perp})\right| \neq 0$. Wenn wir Unterräume $U \geq U_0$ mit beliebig großer endlicher Dimension finden können, für die $\mathrm{tr}(SP_{U^\perp}) = \mathrm{tr}(SP_{U_0^\perp})$ gilt, so erhalten wir für einen Unterraum mit $\dim(U) > \frac{1}{\left|\mathrm{tr}(SP_{U_0^\perp})\right|}$ die Ungleichung

$$|\mathrm{tr}(ST_U)| = \dim(U)\,|\mathrm{tr}(SP_{U^\perp})| = \dim(U)\left|\mathrm{tr}(SP_{U_0^\perp})\right| > 1,$$

im Widerspruch zu (4.1.6).
Analog zu (4.1.7) zeigt man mithilfe von $(*)$

$$\mathrm{tr}(SP_{U^\perp}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\|P_{U^\perp}e_{2n}\right\|^2,$$

sodass es für den Beweis von $\mathrm{tr}(SP_{U^\perp}) = \mathrm{tr}(SP_{U_0^\perp})$ reicht, $P_{U^\perp}e_{2n} = P_{U_0^\perp}e_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu garantieren. Der Orthogonalraum

$$W := (U_0 + \mathrm{span}\,\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\})^\perp$$

hat unendliche Dimension, denn wegen

$$\begin{aligned} H &= \big(U_0 + \operatorname{span}\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\}\big) + (U_0 + \operatorname{span}\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\})^\perp \\ &= \operatorname{span}\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} + \big(U_0 + (U_0 + \operatorname{span}\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\})^\perp\big) \end{aligned}$$

hätte sonst $\operatorname{span}\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ endliche Kodimension. Dies würde

$$\operatorname{span}\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cap \operatorname{span}\{e_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$

widersprechen.
Sei $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbar unendliche und linear unabhängige Teilmenge von W. Wir definieren

$$U_k := U_0 + \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_k\}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und zeigen $P_{U_k^\perp} e_{2n} = P_{U_0^\perp} e_{2n}$. Dazu müssen wir

$$P_{U_0^\perp} e_{2n} \in U_k^\perp \tag{4.1.8}$$

und

$$e_{2n} - P_{U_0^\perp} e_{2n} \in U_k \tag{4.1.9}$$

nachweisen.
Die Eigenschaft (4.1.9) folgt aus

$$e_{2n} - P_{U_0^\perp} e_{2n} \in U_0 \leq U_k.$$

Für (4.1.8) bemerken wir

$$U_k^\perp = U_0^\perp \cap \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_k\}^\perp,$$

wobei $P_{U_0^\perp} e_{2n} \in U_0^\perp$ wieder unmittelbar klar ist. Aus $e_{2n} \in W^\perp$ und $e_{2n} - P_{U_0^\perp} e_{2n} \in U_0 \leq W^\perp$ folgt

$$P_{U_0} e_{2n} = e_{2n} - (e_{2n} - P_{U_0^\perp} e_{2n}) \in W^\perp \leq \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_k\}^\perp,$$

sodass wir insgesamt (4.1.8) erhalten. Da $\dim(U_k) = \dim(U_0) + k$ in k unbeschränkt ist, haben wir unser Ziel erreicht und den Beweis abgeschlossen. □

4.2 Abgeschlossenheit von ∗-Unteralgebren

Wir können nun das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren, das wir anschließend in einigen Schritten beweisen werden. Satz 4.1.7 einerseits und Korollar 4.1.5 andererseits zeigen, dass die hier behandelten Operatortopologien für $\dim H = \infty$ zwar alle verschieden, in mancherlei Hinsicht aber auch sehr ähnlich sind. Der nächste Satz kreist ebenfalls um die Frage, wann die verschiedenen Operatortopologien für bestimmte Teilmengen in gewisser Weise gleich sind. Dabei soll „Gleichheit“ bedeuten, dass die Topologien den gleichen Begriff von Abgeschlossenheit für gewisse Mengen liefern. Es zeigt sich, dass für ∗-Unteralgebren die stärkstmögliche Aussage gilt.

Satz 4.2.1. *Für eine ∗-Unteralgebra A von $L_b(H)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) A ist $\mathcal{T}_s$-abgeschlossen.

(ii) A ist $\mathcal{T}_w$-abgeschlossen.

(iii) A ist $\mathcal{T}_{uw}$-abgeschlossen.

Zunächst wollen wir die Äquivalenz von (i) und (ii) zeigen. Dabei werden wir beweisen, dass diese Aussage sogar für beliebige konvexe Mengen gilt, indem wir die Gleichheit der Dualräume bezüglich $\mathcal{T}_s$ und $\mathcal{T}_w$ zeigen. Als Vorarbeit für Kapitel 7 identifizieren wir zusätzlich den Dualraum bezüglich der ultraschwachen Operatortopologie.

Lemma 4.2.2. *Für die Dualräume von $L_b(H)$ versehen mit der starken, schwachen bzw. ultraschwachen Operatortopologie gilt*

$$\big(L_b(H), \mathcal{T}_s\big)' = \big(L_b(H), \mathcal{T}_w\big)' = \left\{ \left(T \mapsto \sum_{k=1}^{n} (Tx_k, y_k) \right) : n \in \mathbb{N}, x_k, y_k \in H \right\} \tag{4.2.1a}$$

$$\big(L_b(H), \mathcal{T}_{uw}\big)' = \big\{ (T \mapsto \operatorname{tr}(ST)) : S \in L^1(H) \big\} \tag{4.2.1b}$$

Beweis. Wir führen den Beweis in drei Schritten.

(i) Zunächst zeigen wir

$$\big(L_b(H), \mathcal{T}_w\big)' = \left\{ \left(T \mapsto \sum_{k=1}^{n} (Tx_k, y_k) \right) : n \in \mathbb{N}, x_k, y_k \in H \right\}. \tag{4.2.2}$$

Ist Y ein punktetrennender Unterraum des Raums der linearen Funktionale auf einem Vektorraum X, so kann man die schwache Topologie $\sigma(X, Y)$ definieren. Bekanntermaßen wird $\sigma(X, Y)$ auch durch die Menge $P = \{p_f : f \in Y\}$ von Seminormen erzeugt, wenn wir $p_f(z) := |\langle z, f \rangle|$ für $z \in X$ setzen. Die rechte Seite von (4.2.2) ist ein Unterraum des algebraischen Dualraums von $L_b(H)$, der nach dem Beweis von Satz 4.1.2(i) punktetrennend ist. Somit ist die schwache Topologie bezüglich dieser rechten Seite wohldefiniert. Sei nun ein Funktional $\langle T, \varphi \rangle := \sum_{k=1}^{n} (Tx_k, y_k)$ und ein Netz $(T_i)_{i \in I}$ von beschränkten Operatoren gegeben. Definieren wir die Funktionale φ_k durch $\langle T, \varphi_k \rangle := (Tx_k, y_k)$, so folgt

$$p_\varphi(T_i) = \left| \sum_{k=1}^{n} (Tx_k, y_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |(Tx_k, y_k)| = \sum_{k=1}^{n} p_{\varphi_k}(T_i)$$

und daraus, dass $p_\varphi(T_i)$ für $i \in I$ gegen Null konvergiert, wenn alle $p_{\varphi_k}(T_i)$ gegen Null konvergieren. Betrachten wir die Mengen

$$P_w := \{ (T \mapsto |(Tx, y)|) : x, y \in H \} \quad \text{und}$$
$$P := \left\{ \left(T \mapsto \left| \sum_{k=1}^{n} (Tx_k, y_k) \right| \right) : n \in \mathbb{N}, x_k, y_k \in H \right\}$$

von Seminormen, so zeigt die Grenzwertcharakterisierung (4.1.1), dass in den von P_w bzw. P erzeugten Topologien die gleichen Netze gegen Null konvergieren. Somit sind die Topologien gleich. Die erste Topologie ist genau die schwache Operatortopologie, die zweite Topologie stimmt mit der schwachen Topologie bezüglich der rechten Seite von (4.2.2) überein. Die wohlbekannte Tatsache $\big(X, \sigma(X, Y)\big)' = Y$ schließt den Beweis von (4.2.2) ab.

(ii) Als Nächstes beweisen wir $(L_b(H), \mathcal{T}_s)' = (L_b(H), \mathcal{T}_w)'$.

Aus der Inklusion $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_s$ folgt sofort $(L_b(H), \mathcal{T}_w)' \subseteq (L_b(H), \mathcal{T}_s)'$.

Sei umgekehrt $f \in L_b(H)^*$ stetig bezüglich der starken Operatortopologie. Dann ist f auf einer $\mathcal{T}_s$-Nullumgebung U durch eine Konstante $D > 0$ beschränkt, wobei wir durch

Skalieren annehmen können, dass $D = 1$ ist. Außerdem können wir U als Element einer vorgegebenen Nullumgebungsbasis wählen. Eine Nullumgebungsbasis einer von Seminormen $p \in P$ induzierten Topologie ist gegeben durch die Mengen

$$\{x \in X : p_k(x) < \epsilon \text{ für alle } k = 1, \dots, n\},$$

wobei $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_n \in P$ beliebig gewählt werden können. In unserem Fall bedeutet das

$$U = \{T \in L_b(H) : \|Tx_k\| < \epsilon \text{ für alle } k = 1, \dots, n\}$$

für ein positives ϵ und Vektoren $x_1, \dots, x_n \in H$.
Ist $T \in L_b(H)$ beliebig und $C > \max(\|Tx_1\| \dots, \|Tx_n\|)$, so gilt $\frac{\epsilon}{C}T \in U$, sodass $\left|\left\langle \frac{\epsilon}{C}T, f\right\rangle\right| \leq 1$ bzw. $|\langle T, f\rangle| \leq \frac{C}{\epsilon}$ folgt. Da C beliebig war, schließen wir auf

$$|\langle T, f\rangle| \leq \frac{1}{\epsilon} \max(\|Tx_1\|, \dots, \|Tx_n\|) \tag{4.2.3}$$

für jedes $T \in L_b(H)$.

Wir betrachten nun das kartesische Produkt H^n und dessen Unterraum

$$Y := \left\{(Tx_1, \dots, Tx_n)^T \in H^n : T \in L_b(H)\right\}.$$

Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} Y & \to \mathbb{C} \\ (Tx_1, \dots, Tx_n)^T & \mapsto \langle T, f\rangle \end{cases}$$

ist wohldefiniert, da aus $(Tx_1, \dots, Tx_n)^T = (Sx_1, \dots, Sx_n)^T$ wegen (4.2.3) angewandt auf $T - S$ die Gleichheit $\langle T, f\rangle = \langle S, f\rangle$ folgt. Klarerweise ist φ ein lineares Funktional und erfüllt wegen (4.2.3) die Ungleichung

$$\left|\left\langle (Tx_1, \dots, Tx_n)^T, \varphi\right\rangle\right| \leq \frac{1}{\epsilon} \max(\|Tx_1\|, \dots, \|Tx_n\|) \leq \frac{1}{\epsilon} \left\|(Tx_1, \dots, Tx_n)^T\right\|_{H^n}.$$

Das Funktional φ ist also beschränkt und hat folglich eine – ebenfalls mit φ bezeichnete – beschränkte Fortsetzung auf den Hilbertraum $\overline{Y} \leq H^n$. Der Darstellungssatz von Riesz in $\overline{Y}$ liefert die Existenz eines Elements $(y_1, \dots, y_n) \in \overline{Y}$ mit

$$\langle T, f\rangle = \left\langle (Tx_1, \dots, Tx_n)^T, \varphi\right\rangle = \left((Tx_1, \dots, Tx_n)^T, (y_1, \dots, y_n)^T\right)_{H^n} = \sum_{k=1}^{n} (Tx_k, y_k).$$

Nach (4.2.2) ist f stetig bezüglich der schwachen Operatortopologie, was den Beweis von (4.2.1a) vollendet.

(iii) Zuletzt folgt (4.2.1b) analog (aber auf direktere Weise) zu (4.2.2); siehe auch (4.1.4).

□

Insbesondere sind also die Dualräume bezüglich der starken und der schwachen Operatortopologie gleich. Mit der Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach, dass der Abschluss einer konvexen Menge nur vom topologischen Dualraum und nicht von der genauen Topologie abhängt, erhalten wir aus diesem Resultat sofort:

Korollar 4.2.3. *Eine konvexe Teilmenge – insbesondere eine $*$-Unteralgebra – von $L_b(H)$ ist genau dann $\mathcal{T}_s$-abgeschlossen, wenn sie $\mathcal{T}_w$-abgeschlossen ist.*

Nach Satz 4.1.6(ii) sind weder die Adjungiertenbildung auf $L_b(H)$ noch die Multiplikation von Operatoren $\mathcal{T}_s$-stetig, wenn H unendlichdimensional ist. Um den Beweis von Satz 4.2.1 vervollständigen zu können, benötigen wir Voraussetzungen, unter denen man sehr wohl die Adjungiertenbildung bzw. die Multiplikation mit Grenzwerten bezüglich $\mathcal{T}_s$ vertauschen kann.

Lemma 4.2.4.

(i) Die Adjungiertenbildung $.^*$ ist auf den normalen Operatoren in $L_b(H)$ stetig bezüglich der starken Operatortopologie.

(ii) Ist $M \subseteq L_b(H)$ eine $\|\cdot\|$-beschränkte Menge, so ist die Muliplikation $(S,T) \mapsto ST$ auf $M \times L_b(H)$ stetig bezüglich der starken Operatortopologie.

Beweis.

(i) Seien $S, T \in L_b(H)$ normale Operatoren. Für einen Vektor $x \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
\|(T^* - S^*)x\|^2 &= (T^*x - S^*x, T^*x - S^*x) \\
&= (TT^*x, x) - (TS^*x, x) - (x, TS^*x) + (SS^*x, x) \\
&\overset{(*)}{=} (T^*Tx, x) + ((S-T)S^*x, x) - (x, TS^*x) \\
&\overset{(**)}{=} (T^*Tx, x) + ((S-T)S^*x, x) - (x, TS^*x) + \underbrace{(x, SS^*x) - (x, S^*Sx)}_{=0} \\
&= (Tx, Tx) + ((S-T)S^*x, x) + (x, (S-T)S^*x) - (Sx, Sx) \\
&= \|Tx\|^2 - \|Sx\|^2 + ((S-T)S^*x, x) + (x, (S-T)S^*x),
\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ bzw. $(**)$ die Normalität von T bzw. S eingeht. Diesen Ausdruck schätzen wir mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ab und erhalten

$$\|(T^* - S^*)x\|^2 \leq \|Tx\|^2 - \|Sx\|^2 + 2\,\|x\|\,\|(S-T)S^*x\|\,.$$

Setzen wir in diese Gleichung $T = S_i$ ein für ein Netz $(S_i)_{i \in I}$, das bezüglich $\mathcal{T}_s$ gegen S konvergiert, so folgt, dass S_i^* gegen S^* konvergiert. Hierbei ist zu beachten, dass S^*x ein fester Vektor ist, womit $(S - S_i)S^*x$ gegen 0 konvergiert.

(ii) Seien $x \in H$ und $(S_1, T_1), (S_2, T_2) \in M \times L_b(H)$ gegeben. Ist M beschränkt durch C, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|(S_1T_1 - S_2T_2)x\| &\leq \|S_1(T_1 - T_2)x\| + \|(S_1 - S_2)T_2x\| \\
&\leq C\,\|(T_1 - T_2)x\| + \|(S_1 - S_2)T_2x\|\,.
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung folgt, dass $(S_{1,i}T_{1,i})_{i \in I}$ gegen ST konvergiert, wenn $S_{1,i}$ bzw. $T_{1,i}$ gegen $S_2 := S$ bzw. $T_2 := T$ konvergiert.

□

Mithilfe des letzten Lemmas können wir eine – leider etwas technische – Stetigkeitsbedingung beweisen. Dazu sei bemerkt, dass trotz der fehlenden $\mathcal{T}_s$-Stetigkeit von $.^*$ der $\mathcal{T}_s$-Grenzwert von selbstadjungierten Operatoren wieder selbstadjungiert ist: Ein $\mathcal{T}_s$-konvergentes Netz von Operatoren ist auch bezüglich $\mathcal{T}_w$ konvergent mit demselben Grenzwert, sodass die Behauptung aus der $\mathcal{T}_w$-Stetigkeit von $.^*$ folgt.

Lemma 4.2.5. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte und stetige Funktion. Für alle Netze $(S_i)_{i\in I}$ selbstadjungierter Operatoren auf H, die bezüglich $\mathcal{T}_s$ gegen S konvergieren, konvergieren die nach dem Funktionalkalkül definierten Ausdrücke $f(S_i)$ bezüglich $\mathcal{T}_s$ gegen $f(S)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller stetigen, aber nicht notwendigerweise beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die die gewünschte Eigenschaft[8] haben. Zu zeigen ist $C_b(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}$. Im gesamten Beweis bezeichne $(S_i)_{i\in I}$ ein bezüglich der starken Operatortopologie konvergentes Netz selbstadjungierter Operatoren mit Grenzwert $S = S^*$ und T einen weiteren selbstadjungierten Operator.
Klarerweise ist $\mathcal{F}$ ein Unterraum von $C(\mathbb{R})$. Für Funktionen $f, g \in \mathcal{F}$, wobei g beschränkt ist, gilt $gf = fg \in \mathcal{F}$ nach Lemma 4.2.4(ii), da die Operatoren $g(S_i)$ gleichmäßig in i durch $\|g\|_\infty$ beschränkt sind. Nach Bemerkung 3.2.2 kommutieren $f(S)$ und $\overline{f}(S) = f(S)^*$, sodass $f(S)$ normal ist. Daraus folgt mit Lemma 4.2.4(i)

$$\overline{f}(S_i) = f(S_i)^* \xrightarrow{\mathcal{T}_s} f(S)^* = \overline{f}(S).$$

Somit ist $\mathcal{F}$ auch bezüglich der Konjugation abgeschlossen.
Wir betrachten nun die nach diesen Argumenten bezüglich der Konjugation abgeschlossene Funktionenalgebra $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \cap C_0(\mathbb{R})$. Diese Algebra ist bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $C_0(\mathbb{R})$ abgeschlossen: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{F}_0$, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen $f \in C_0(\mathbb{R})$ konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $i \in I$ und $x \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
\|(f(S_i) - f(S))(x)\| &\le \|(f(S_i) - f_n(S_i))(x)\| + \|(f_n(S_i) - f_n(S))(x)\| + \|(f_n(S) - f(S))(x)\| \\
&= \|(f - f_n)(S_i)(x)\| + \|(f_n(S_i) - f_n(S))(x)\| + \|(f_n - f)(S)(x)\| \\
&\le \|(f - f_n)(S_i)\| \, \|x\| + \|(f_n(S_i) - f_n(S))(x)\| + \|(f_n - f)(S)\| \, \|x\| \\
&= \left\|(f - f_n)|_{\sigma(S_i)}\right\|_\infty \|x\| + \|(f_n(S_i) - f_n(S))(x)\| + \left\|(f_n - f)|_{\sigma(S)}\right\|_\infty \|x\| \\
&\le 2\,\|f - f_n\|_\infty \|x\| + \|(f_n(S_i) - f_n(S))(x)\| .
\end{aligned}$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wählt man einen Index n_0 mit $\|f - f_{n_0}\|_\infty \|x\| < \epsilon$ und dazu $i_0 \in I$ mit $\|(f_{n_0}(S_i) - f_{n_0}(S))(x)\| < \epsilon$ für alle $i \succcurlyeq i_0$. Obige Abschätzung für $n := n_0$ liefert $\|(f(S_i) - f(S))(x)\| < 3\epsilon$ für alle $i \succcurlyeq i_0$, sodass die Konvergenz $f(S_i) \to f(S)$ bezüglich der starken Operatortopologie bewiesen ist.
Als Nächstes zeigen wir $\mathcal{F}_0 = C_0(\mathbb{R})$, also $C_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{F}_0$ ist dieses Ziel erreicht, wenn wir zusätzlich $\mathcal{F}_0$ als dicht in $C_0(\mathbb{R})$ nachweisen. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß für lokalkompakte Räume genügt es zu überprüfen, dass $\mathcal{F}_0$ punktetrennend und nirgends identisch verschwindend ist. Dazu zeigen wir, dass die injektive Funktion $g(t) := \frac{t}{1+t^2}$ und die nullstellenfreie Funktion $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$ in $\mathcal{F}_0$ liegen, wobei $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ klar ist. Mit den Rechenregeln für den Funktionalkalkül gilt

$$g(T)(1 + T^2) = (t \mapsto g(t)(1 + t^2))(T) = (t \mapsto t)(T) = T. \tag{4.2.4}$$

Nach Satz 2.1.7(iii) ist T^2 positiv, sodass $\sigma(1 + T^2) \subseteq [1, +\infty)$ insbesondere Null nicht enthält. Multipliziert man beide Seiten von (4.2.4) mit der daher existierenden Inversen von $1 + T^2$, so folgt $g(T) = T(1+T^2)^{-1}$. Analog zeigt man $g(T) = (1+T^2)^{-1}T$ und $f(T) = (1+T^2)^{-1}$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
g(S_i) - g(S) &= (1 + S_i^2)^{-1} S_i - S(1 + S^2)^{-1} \\
&= (1 + S_i^2)^{-1}\big(S_i(1 + S^2) - (1 + S_i^2)S\big)(1 + S^2)^{-1} \\
&= (1 + S_i^2)^{-1}\big((S_i - S) + S_i(S - S_i)S\big)(1 + S^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

[8] Für einen selbstadjungierten Operator $S \in L_b(H)$ ist $f|_{\sigma(S)}$ wegen der Kompaktheit von $\sigma(S)$ beschränkt. Somit ist $f(S) := f|_{\sigma(S)}(S)$ wohldefiniert und es gilt $\|f(S)\| = \left\|f|_{\sigma(S)}\right\|_\infty$.

Wegen $\|f(S_i)\| \leq \|f\|_\infty \leq 1$ und $\|g(S_i)\| \leq \|g\|_\infty \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned}
&\|(g(S_i) - g(S))(x)\| \\
&\qquad \leq \Big\| \underbrace{(1+S_i^2)^{-1}}_{=f(S_i)} (S_i - S)(1+S^2)^{-1}x\Big\| + \Big\| \underbrace{(1+S_i^2)^{-1}S_i}_{=g(S_i)}(S-S_i)S(1+S^2)^{-1}x\Big\| \\
&\qquad \leq \|f(S_i)\| \left\|(S_i - S)(1+S^2)^{-1}x\right\| + \|g(S_i)\| \left\|(S-S_i)S(1+S^2)^{-1}x\right\| \\
&\qquad \leq \left\|(S_i - S)(1+S^2)^{-1}x\right\| + \left\|(S-S_i)S(1+S^2)^{-1}x\right\| .
\end{aligned}$$

Da $(1+S^2)^{-1}x$ sowie $S(1+S^2)^{-1}x$ feste Vektoren sind, ergibt sich daraus $g \in \mathcal{F}$. Wir schließen, dass auch $f = (t \mapsto 1 - tg(t))$ in $\mathcal{F}$ enthalten ist, da sowohl $\mathbb{1}$ als auch $(t \mapsto t)$ in $\mathcal{F}$ liegen und g beschränkt ist.
Nun können wir den Beweis abschließen. Ist $h \in C_b(\mathbb{R})$ beliebig, so sind die Funktionen $h_1 := hf$ und $h_2 := hg$ in $C_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}$ enthalten. Da h_2 beschränkt ist, gilt auch $h_3 := (t \mapsto th_2(t)) \in \mathcal{F}$. Daraus folgt das gewünschte Resultat $h = h_1 + h_3 \in \mathcal{F}$. □

Um die ultraschwache Topologie ins Spiel bringen zu können, benötigen wir – obwohl auf den ersten Blick nicht ersichtlich – den nützlichen und auch für sich ästhetisch sehr ansprechenden *Dichtesatz von Kaplansky*. Man kann es nicht schöner ausdrücken als G. Pedersen in [4, 2.3.4. Notes and remarks.]:

> The density theorem is Kaplansky's great gift to mankind [...]. It can be used every day, and twice on Sundays.

Satz 4.2.6 (Kaplansky). *Sei A eine C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$ und B ihr $\mathcal{T}_s$-Abschluss. Dann gelten die folgenden drei Aussagen:*

(i) $\overline{A_{sa}}^{\mathcal{T}_s} = B_{sa}$

(ii) $\overline{S_{A_{sa}}}^{\mathcal{T}_s} = S_{B_{sa}}$

(iii) $\overline{S_A}^{\mathcal{T}_s} = S_B$

Beweis.

(i) Sei $S \in B_{sa}$ beliebig. Nach Definition gibt es ein Netz $(S_i)_{i\in I}$ aus A, das bezüglich $\mathcal{T}_s$ und damit auch bezüglich $\mathcal{T}_w$ gegen S konvergiert. Wegen der $\mathcal{T}_w$-Stetigkeit von $.^*$ konvergiert $A_{sa} \ni \mathrm{Re}(S_i) = \frac{1}{2}(S_i + S_i^*)$ gegen $\mathrm{Re}(S) = S$ bezüglich der schwachen Operatortopologie. Der Operator S liegt daher im $\mathcal{T}_w$-Abschluss von A_{sa}. Da A_{sa} konvex ist, stimmen $\mathcal{T}_w$- und $\mathcal{T}_s$-Abschluss nach Korollar 4.2.3 aber überein.

Umgekehrt ist ein Element von $\overline{A_{sa}}^{\mathcal{T}_s} = \overline{A_{sa}}^{\mathcal{T}_w}$ einerseits in B enthalten und andererseits selbstadjungiert, da $.^*$ bezüglich der schwachen Operatortopologie stetig ist.

(ii) Sei S beliebig in der Einheitskugel $S_{B_{sa}}$. Nach (i) existiert ein Netz $(S_i)_{i\in I}$ in A_{sa}, das bezüglich der starken Operatortopologie gegen S konvergiert. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} -1 & t < -1, \\ t & t \in [-1,1], \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

ist stetig und beschränkt mit $\|f\|_\infty = 1$. Nach Lemma 4.2.5 konvergiert das Netz $(f(S_i))_{i\in I}$ gegen $f(S)$. Wegen $\|S\| \leq 1$ gilt $\sigma(S) \subseteq [-1,1]$ und somit

$$f(S) = f|_{\sigma(S)}(S) = (t \mapsto t)|_{\sigma(S)}(S) = S.$$

Verbleibt noch zu zeigen, dass die Operatoren $f(S_i)$ alle in $S_{A_{sa}}$ liegen. Wegen $f(0) = 0$ gilt nach Bemerkung 3.2.2 einmal $f(S_i) \in A$. Da f reellwertig ist, sind die Operatoren $f(S_i)$ auch selbstadjungiert. Schließlich gilt $\|f(S_i)\| \leq \|f\|_\infty = 1$.

Ist umgekehrt S ein Element von $\overline{S_{A_{sa}}}^{\mathcal{T}_s}$, so gilt analog zum letzten Punkt $S \in B_{sa}$. Weiters liegt S in der Einheitskugel: Es existiert ein Netz $(S_i)_{i\in I}$ aus $S_{A_{sa}}$, das bezüglich $\mathcal{T}_s$ gegen S konvergiert. Für jedes $i \in I$ und $x \in H$ gilt $\|S_i x\| \leq \|x\|$. Bildet man den Grenzwert $i \in I$, so folgt $\|Sx\| \leq \|x\|$, also $\|S\| \leq 1$.

(iii) Wir betrachten die Matrizenalgebren $M_2(A)$ und $M_2(B)$ aus Bemerkung 1.3.2 und zeigen zunächst, dass $M_2(B)$ mit dem Abschluss von $M_2(A)$ bezüglich der starken Operatortopologie $\mathcal{T}_{s,H^2}$ in $L_b(H^2)$ übereinstimmt. Für $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \in M_2(B)$ gibt es ein Netz $(T_{11,i})_{i\in I}$ aus A mit $T_{11,i} \to T_{11}$ bezüglich $\mathcal{T}_{s,H}$. Klarerweise konvergiert dann $\begin{pmatrix} T_{11,i} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{T}_{s,H^2}$ gegen $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$, sodass es ausreicht zu zeigen, dass die Matrizen $\begin{pmatrix} T_{11,i} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ im $\mathcal{T}_{s,H^2}$-Abschluss von $M_2(A)$ liegen. Nun wählt man ein gegen T_{12} konvergentes Netz und argumentiert analog; nach zwei weiteren Schritten erhält man, dass es ausreicht,

$$\begin{pmatrix} T_{11,i} & T_{12,j} \\ T_{21,k} & T_{22,l} \end{pmatrix} \in \overline{M_2(A)}^{\mathcal{T}_{s,H^2}}$$

für $T_{11,i}, T_{12,j}, T_{21,k}, T_{22,l} \in A$ zu zeigen. Dies ist trivialerweise richtig. Ist umgekehrt $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ im Abschluss von $M_2(A)$ enthalten, so sei $\left(\begin{pmatrix} T_{11,k} & T_{12,k} \\ T_{21,k} & T_{22,k} \end{pmatrix}\right)_{k\in I}$ ein Netz aus $M_2(A)$, das bezüglich $\mathcal{T}_{s,H^2}$ gegen diese Matrix konvergiert. Indem man die Vektoren $(x,0)^T$ bzw. $(0,y)^T$ aus H^2 einsetzt, sieht man, dass die Einträge $T_{ij,k}$ bezüglich der starken Operatortopologie $\mathcal{T}_{s,H}$ gegen T_{ij} konvergieren, womit $T_{ij} \in B$ folgt.

Jetzt können wir die Aussage (iii) beweisen. Dazu sei $T \in S_B$ gegeben. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ liegt in $M_2(B)_{sa}$ und ist dort sogar in der Einheitskugel[9] enthalten:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} Ty \\ T^*x \end{pmatrix} \right\|^2 = \|Ty\|^2 + \|T^*x\|^2 \leq \|T\|^2 \|x\|^2 + \|T^*\|^2 \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Nach (ii), angewandt auf die Algebren $M_2(A)$ und $M_2(B)$, existiert ein Netz von Matrizen $\left(\begin{pmatrix} T_{11,k} & T_{12,k} \\ T_{21,k} & T_{22,k} \end{pmatrix}\right)_{k\in I}$ aus der Einheitskugel von $M_2(A)_{sa}$, das gegen $\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ konvergiert. Mit der ersten Ungleichung in (1.3.2) folgt $\|T_{12,k}\| \leq 1$, also $T_{12,k} \in S_A$. Durch Einsetzen von $(x,0)^T$ ergibt sich, dass $(T_{12,k})_{k\in I}$ bezüglich $\mathcal{T}_s$ gegen T konvergiert, womit $T \in \overline{S_A}^{\mathcal{T}_s}$ gezeigt ist.

Ist umgekehrt $T \in \overline{S_A}^{\mathcal{T}_s}$, so folgt $T \in S_B$ wie in (ii).

□

Nach all diesen Überlegungen können wir Satz 4.2.1 beweisen.

Beweis (von Satz 4.2.1). Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus Korollar 4.2.3. Wegen $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{uw}$ ist die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) klar.

[9] Es sei explizit darauf hingewiesen, dass wir nicht mit (1.3.2) argumentieren können.

Bleibt also (iii) $\Rightarrow$ (ii) zu zeigen. Sei dazu A abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$. Wir setzen $B := \overline{A}^{\mathcal{T}_w}$ und schließen mit Korollar 4.2.3 auf $B = \overline{A}^{\mathcal{T}_s}$. Da die ultraschwache Operatortopologie gröber ist als die Normtopologie, ist A eine C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$. Der Dichtesatz von Kaplansky liefert somit $\overline{S_A}^{\mathcal{T}_s} = S_B$. Aus Korollar 4.1.5(i) folgt, dass die Einheitskugel S von $L_b(H)$ bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$ kompakt und daher abgeschlossen ist. Damit ist auch $S_A = A \cap S$ bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$ abgeschlossen und als Teilmenge von S folglich $\mathcal{T}_w$-abgeschlossen; vgl. Korollar 4.1.5(ii). Erneute Anwendung von Korollar 4.2.3 liefert die Abgeschlossenheit von S_A bzgl. $\mathcal{T}_s$. Daraus schließen wir $S_A = S_B$ und in weiterer Folge $A = B$, was genau bedeutet, dass A bezüglich $\mathcal{T}_w$ abgeschlossen ist. $\square$

Wir schließen das Kapitel mit einer Definition ab.

Definition 4.2.7. Eine $*$-Unteralgebra von $L_b(H)$ heißt *Von-Neumann-Algebra*, wenn sie bezüglich einer und damit aller der drei Operatortopologien $\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_w, \mathcal{T}_{uw}$ abgeschlossen ist.

Es sei betont, dass Von-Neumann-Algebren immer C^*-Unteralgebren von $L_b(H)$ sind. Die Stärke und Schönheit der Theorie der Von-Neumann-Algebren liegt darin, dass man in vielen Fällen beliebig zwischen den drei Operatortopologien wechseln kann, je nachdem, welche in der aktuellen Situation die nützlichsten Eigenschaften hat. Im Beweis des Dichtesatzes von Kaplansky kann man dieses Wechselspiel gut beobachten.

Kapitel 5

W^*-Algebren

Im vorliegenden Kapitel wird mit den *W^*-Algebren* die hilbertraumfreie Axiomatisierung der Von-Neumann-Algebren eingeführt sowie einige ihrer Eigenschaften bewiesen. Beispielsweise haben W^*-Algebren stets ein Einselement. Als wesentliche neue Definition ist die schwach-*-Topologie auf einer W^*-Algebra zu nennen, die als kanonische Topologie eine entscheidende Rolle in der restlichen Arbeit spielen wird. Den Großteil dieses Kapitels machen Aussagen zur schwach-*-Stetigkeit der Algebrenoperationen aus.

5.1 Definition

Bemerkung 5.1.1. Um das Axiom, das W^*-Algebren unter C^*-Algebren auszeichnet, zu motivieren, betrachten wir eine Von-Neumann-Algebra $A \leq L_b(H)$. Der Raum $L_b(H)$ ist nach Satz 1.3.12 isometrisch isomorph zum Dualraum $L^1(H)'$. Als Von-Neumann-Algebra ist A abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$. Betrachtet man den linearen Homöomorphismus

$$\theta : (L_b(H), \mathcal{T}_{uw}) \to \left(L^1(H)', \sigma(L^1(H)', L^1(H))\right)$$

aus Satz 4.1.4, so stellt sich $\theta(A)$ als schwach-*-abgeschlossen in $L^1(H)'$ heraus. Als Linksannihilator bezüglich $(L^1(H), L^1(H)')$ ist

$$\begin{aligned} M := {}^{\perp}(\theta(A)) &= \left\{S \in L^1(H) : \langle S, \theta(T)\rangle = 0 \text{ für alle } T \in A\right\} \\ &= \left\{S \in L^1(H) : \operatorname{tr}(ST) = 0 \text{ für alle } T \in A\right\} \end{aligned}$$

abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie $\sigma\left(L^1(H), L^1(H)'\right)$ und daher bezüglich der Normtopologie auf $L^1(H)$. Bekanntermaßen ist in dieser Situation

$$\tau : \begin{cases} \left(L^1(H)/M\right)' & \to M^{\perp} \\ f & \mapsto f \circ \pi \end{cases} \tag{5.1.1}$$

ein isometrischer Isomorphismus, wobei $\pi : L^1(H) \to L^1(H)/M$ die Faktorisierungsabbildung bezeichnet und der Dualraum $\left(L^1(H)/M\right)'$ bezüglich der Faktorraum-Norm auf $L^1(H)/M$ gebildet wird. Nun gilt

$$M^{\perp} = \left({}^{\perp}\theta(A)\right)^{\perp} = \overline{\operatorname{span}\theta(A)}^{\sigma\left(L^1(H)', L^1(H)\right)} = \theta(A),$$

da $\theta(A)$ schwach-*-abgeschlossen ist. Wir erhalten, dass $\tau^{-1} \circ \theta|_A$ ein Isomorphismus von A auf $\left(L^1(H)/M\right)'$ ist, der wegen Satz 1.3.12(iii) sogar isometrisch ist. Also ist A bis auf isometrische Isomorphie der Dualraum eines Banachraums.

Genau diese Eigenschaft ist nun das gesuchte Axiom, um Von-Neumann-Algebren zu beschreiben.

Definition 5.1.2. Eine C^*-Algebra A heißt *W^*-Algebra*, wenn es einen Banachraum $PD(A)$ und einen isometrischen Isomorphismus $j : A \to PD(A)'$ gibt. In diesem Fall heißt $PD(A)$ ein *Prädualraum* von A.

Bemerkung 5.1.3. Unsere Notation $PD(A)$ ist etwas problematisch, da zumindest ad hoc nicht klar ist, ob $PD(A)$ in geeignetem Sinne eindeutig bestimmt ist. Andernfalls wäre der Prädualraum nicht in Abhängigkeit von A wohldefiniert. Tatsächlich ist der Prädualraum einer W^*-Algebra bis auf isometrische Isomorphie eindeutig, das werden wir aber erst in Satz 7.2.1 beweisen können.

Das Axiom aus Definition 5.1.2 ermöglicht die Konstruktion einer Topologie auf der W^*-Algebra A, nämlich die initiale Topologie bezüglich j als Abbildung von A nach $PD(A)'$ versehen mit der schwach-*-Topologie $\sigma\big(PD(A)', PD(A)\big)$.

Definition 5.1.4. Das Mengensystem $\mathcal{T}_{w^*,A} := \big\{j^{-1}(O) : O \in \sigma\big(PD(A)', PD(A)\big)\big\}$ bezeichnet man als *schwach-*-Topologie auf* A. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, werden wir zur einfacheren Notation nur $\mathcal{T}_{w^*}$ schreiben.

Notation 5.1.5. Sei A im Rest dieses Kapitels stets eine W^*-Algebra und S ihre Einheitskugel. Wenn nichts Näheres spezifiziert wird, beziehen sich sämtliche topologische Aussagen dabei auf die schwach-*-Topologie $\mathcal{T}_{w^*}$.

Bemerkung 5.1.6.

(i) Mit der Notation aus Definition 5.1.2 kann man $PD(L_b(H)) = L^1(H)$ wählen. Für diesen Prädualraum, gemeinsam mit dem isometrischen Isomorphismus $j := \theta : L_b(H) \to L^1(H)'$ aus Satz 1.3.12(iii), stimmt die schwach-*-Topologie $\mathcal{T}_{w^*,L_b(H)}$ nach Satz 4.1.4 mit der ultraschwachen Operatortopologie $\mathcal{T}_{uw}$ überein.

(ii) Da j bijektiv ist, ist

$$j : (A, \mathcal{T}_{w^*}) \to \big(PD(A)', \sigma\big(PD(A)', PD(A)\big)\big)$$

ein linearer Homöomorphismus. Somit erfüllt die schwach-*-Topologie $\mathcal{T}_{w^*}$ alle Eigenschaften, die ein Banachraum als topologischer Vektorraum versehen mit der bekannten schwach-*-Topologie hat. Beispielsweise gilt der Satz von Krein-Milman sowie Lemma 1.1.7 über die schwach-*-Stetigkeit von Projektionen, außerdem ist $\mathcal{T}_{w^*}$ die initiale Topologie bezüglich aller $\mathcal{T}_{w^*}$-stetigen linearen Funktionale auf A. Da j isometrisch ist, bleiben auch alle Eigenschaften, die zusätzlich mit Einheitskugeln operieren, erhalten. Hervorzuheben sind hier einerseits der Satz von Banach-Alaoglu und andererseits die Sätze von Krein-Smulian und Banach-Dieudonné, Satz 1.1.3 bzw. Satz 1.1.4.

(iii) Da

$$j : (A, \mathcal{T}(\|\cdot\|_A)) \to \big(PD(A)', \mathcal{T}(\|\cdot\|_{PD(A)'})\big)$$

als Isometrie stetig ist, ist wegen $\sigma\big(PD(A)', PD(A)\big) \subseteq \mathcal{T}(\|\cdot\|_{PD(A)'})$ auch

$$j : (A, \mathcal{T}(\|\cdot\|_A)) \to \big(PD(A)', \sigma\big(PD(A)', PD(A)\big)\big)$$

stetig. Folglich gilt $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}(\|\cdot\|_A)$ und ein schwach-*-stetiges Funktional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ ist automatisch beschränkt.

5.2 Einselement

Lässt man einige Sätze der bisherigen Arbeit zusammenwirken und kombiniert sie mit klassischen Resultaten der Funktionalanalysis, so erhalten wir folgende Aussage.

Satz 5.2.1. *Eine W^*-Algebra hat stets ein Einselement.*

Beweis. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist die Einheitskugel S kompakt bezüglich der schwach-*-Topologie. Wir können daher den Satz von Krein-Milman im Vektorraum $(A, \mathcal{T}_{w^*})$ auf die kompakte und konvexe Menge S anwenden und erhalten, dass S die abgeschlossene konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte ist. Insbesondere hat S Extremalpunkte, sodass Satz 2.2.3 die gewünschte Aussage liefert. □

5.3 Stetigkeit der Operationen

Aus Satz 4.1.6(iv) wissen wir, dass die Adjungiertenbildung sowie die Translationen stetig bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$ sind. Betrachten wir $L_b(H)$ als W^*-Algebra, so ist die ultraschwache Operatortopologie genau die schwach-*-Topologie. Daher ist es nicht abwegig zu erwarten, dass diese algebraischen Operationen auch in einer allgemeinen W^*-Algebra A stetig bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ sind. Das restliche Kapitel ist dem Beweis dieser Aussagen gewidmet. Dabei sind der Satz 1.1.4 von Banach-Dieudonné und Lemma 1.1.7 über die Stetigkeit von Projektionen die wesentlichen Hilfsmittel.
Wir beginnen mit der Adjungiertenbildung.

Lemma 5.3.1. *A_{sa} und A^+ sind $\mathcal{T}_{w^*}$-abgeschlossen.*

Beweis. Nach dem Satz von Banach-Dieudonné, Satz 1.1.4, genügt es, die $\mathcal{T}_{w^*}$-Abgeschlossenheit von $A_{sa} \cap S$ und $A^+ \cap S$ zu zeigen.
Angenommen, $A_{sa} \cap S$ ist nicht abgeschlossen. Dann existiert ein Netz $(x_j)_{j\in I}$ selbstadjungierter Elemente in S, das bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ gegen $x \notin A_{sa} \cap S$ konvergiert. Da S schwach-*-abgeschlossen ist, gilt $x \notin A_{sa}$. Schreibt man $x = a + ib$, $a, b \in A_{sa}$, so gilt $b \neq 0$ bzw. $r(b) > 0$. Indem wir notfalls zu $(-x_j)_{j\in I}$ und $-x$ übergehen, können wir annehmen, dass es ein positives $0 < \lambda \in \sigma(b)$ gibt. Durch Quadrieren sieht man, dass für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $(1 + n^2)^{1/2} < \lambda + n$ gilt, womit sich wegen $\|x_j^2\| \leq 1$ die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|x_j + in\| &= \|(x_j + in)^*(x_j + in)\|^{1/2} = \left\|x_j^2 + n^2\right\|^{1/2} \leq (1 + n^2)^{1/2} \\ &< \underbrace{\lambda + n}_{\in\sigma(b+n)} \leq r(b + n) = \|b + n\| \overset{(*)}{\leq} \|a + ib + in\| \end{aligned}$$

ergibt. Die mit $(*)$ gekennzeichnete Ungleichung folgt dabei aus Lemma 1.2.7. Wir erhalten also

$$\|x_j + in\| \leq (1 + n^2)^{1/2} < \|a + ib + in\| . \tag{5.3.1}$$

Das Netz $(x_j + in)_{j\in I}$ liegt wegen (5.3.1) in der kompakten und somit abgeschlossenen Menge $(1 + n^2)^{1/2}S$. Folglich ist auch $a + ib + in$ als Grenzwert des Netzes in $(1 + n^2)^{1/2}S$ enthalten. Dies widerspricht aber dem zweiten Teil von (5.3.1), womit $A_{sa} \cap S$ abgeschlossen sein muss.
Für den zweiten Teil sei bemerkt, dass für $a \in S$ das Spektrum $\sigma(a) \subseteq K_1^{\mathbb{C}}(0)$ erfüllt. Somit ist a genau dann positiv, wenn $\sigma(a)$ in $[0, 1]$ enthalten ist. Nach dem Spektralabbildungssatz ist das äquivalent zu $\sigma(a - 1) \subseteq [-1, 0]$. Wegen $\|a\| = r(a)$ sowie $\|a - 1\| = r(a - 1)$ sind sowohl a als auch $a - 1$ im Falle der Positivität von a daher in $A_{sa} \cap S$ enthalten. Gilt umgekehrt

$a, a-1 \in A_{sa} \cap S$, so folgt $\sigma(a) \subseteq [-1,1] \cap ([-1,1]+1) = [0,1]$, womit a positiv ist. Insgesamt gilt

$$A^+ \cap S = (A_{sa} \cap S) \cap ((A_{sa} \cap S) + 1),$$

sodass die Abgeschlossenheit von $A^+ \cap S$ aus dem ersten Beweisteil folgt. □

Korollar 5.3.2. *Die Operation $.^*$ auf A ist $\mathcal{T}_{w^*}$-stetig.*

Beweis. Wegen der Zerlegung in Real- und Imaginärteil gilt $A = A_{sa} + iA_{sa}$. Betrachten wir A als reellen Vektorraum, so liegt eine Summe von Unterräumen vor. Diese Summe ist sogar direkt, denn sind a, b selbstadjungiert mit $a = ib$, dann folgt $a = a^* = (ib)^* = -ib = -a$, also $a = 0$. Die Funktion $x \mapsto \operatorname{Re}(x)$ ist dabei genau die Projektion auf die erste Komponente dieser direkten Zerlegung. Die Räume $\operatorname{ran}\operatorname{Re}(.) = A_{sa}$ und $\ker\operatorname{Re}(.) = iA_{sa}$ sind abgeschlossen, sodass $\operatorname{Re}(.)$ nach Lemma 1.1.7 und Bemerkung 1.1.8 stetig ist. Wegen $x^* = 2\operatorname{Re}(x) - x$ ist damit auch $.^*$ stetig. □

Aus Lemma 5.3.1 erhalten wir ein weiteres Korollar, das zeigt, dass die schwach-*-Topologie auf A mit der C^*-Algebren-Struktur gut harmoniert. Es sei auf die enge Analogie zu Satz 3.1.8 hingewiesen.

Korollar 5.3.3.

(i) Ist a ein selbstadjungiertes aber nicht positives Element von A, so gibt es ein $\mathcal{T}_{w^*}$-stetiges, positives Funktional φ mit $\varphi(a) < 0$.

(ii) Ist $b \in A$ mit $\varphi(b) = 0$ für alle $\mathcal{T}_{w^*}$-stetigen, positiven Funktionale auf A, dann gilt $b = 0$.

Beweis.

(i) Die positiven Elemente A^+ bilden eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge des lokalkonvexen, reellen Vektorraums $(A_{sa}, \mathcal{T}_{w^*} \cap A_{sa})$. Also folgt für $a \in A_{sa} \setminus A^+$ aus dem Satz von Hahn-Banach die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}$ und eines bezüglich der Spurtopologie schwach-*-stetigen $\mathbb{R}$-linearen Funktionals f auf A_{sa} mit

$$f(a) < \lambda < f(c) \quad \text{für alle } c \in A^+. \tag{5.3.2}$$

Wäre $f(c_0) < 0$ für ein $c_0 \in A^+$, so würde f auf A^+ wegen $tc_0 \in A^+$ für jedes $t > 0$ beliebig kleine Werte annehmen, was (5.3.2) widerspricht. Es gilt also $f(c) \geq 0$ für alle $c \in A^+$. Zudem ist $0 \in A^+$, womit wir $f(a) < \lambda < f(0) = 0$ erhalten. Definiert man nun $\varphi(x) := f(\operatorname{Re}(x)) + if(\operatorname{Im}(x))$, so rechnet man nach, dass φ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf A ist. Wegen Korollar 5.3.2 ist φ auch $\mathcal{T}_{w^*}$-stetig und wegen $\varphi(c) = f(c) \geq 0$ für $c \in A^+ \subseteq A_{sa}$ positiv. Schließlich gilt $\varphi(a) = f(a) < 0$.

(ii) Ist φ ein $\mathcal{T}_{w^*}$-stetiges, positives Funktional, so gilt $\varphi(b^*) = \overline{\varphi(b)} = 0$ nach Lemma 3.1.4. Daraus folgt $\varphi(\pm\operatorname{Re}(b)) = \pm\frac{1}{2}(\varphi(b) + \varphi(b^*)) = 0$. Nach (i) müssen $\operatorname{Re}(b)$ und $-\operatorname{Re}(b)$ positiv sein, sodass sich $\operatorname{Re}(b) = 0$ ergibt. Für $\operatorname{Im}(b)$ schließt man analog und erhält tatsächlich $b = 0$.

□

Bevor wir uns der Multiplikation zuwenden, zeigen wir, dass in einer W^*-Algebra die lineare Hülle der Projektionen dicht bezüglich der Normtopologie und damit auch bezüglich der schwach-*-Topologie ist. Dazu verwenden wir ein Resultat, das gleichzeitig in Richtung Stetigkeit der Multiplikation weist.

Satz 5.3.4. *Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein monoton wachsendes und gleichmäßig beschränktes Netz in A_{sa}, so ist es bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ konvergent und es gilt $\lim_{i\in I} x_i = \sup_{i\in I} x_i$. Insbesondere existiert dieses Supremum. Für beliebiges $c \in A$ gilt zudem*

$$c^*(\sup_{i\in I} x_i)c = c^*(\lim_{i\in I} x_i)c = \lim_{i\in I} c^* x_i c = \sup_{i\in I} c^* x_i c.$$

Beweis. Sei E die lineare Hülle der $\mathcal{T}_{w^*}$-stetigen, positiven Funktionale. Nach Korollar 5.3.3(ii) ist E punktetrennend, womit die schwache Topologie $\sigma(A, E)$ wohldefiniert ist. Klarerweise ist $\sigma(A, E)$ gröber als $\mathcal{T}_{w^*}$, sodass die beiden Topologien analog zum Beweis von Korollar 4.1.5(ii) auf $\mathcal{T}_{w^*}$-Kompakta übereinstimmen[1]. Insbesondere gilt dies für jenes hinreichend große Vielfache der Einheitskugel, in dem alle x_i nach Voraussetzung enthalten sind. Um zu zeigen, dass $(x_i)_{i\in I}$ bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$-konvergent ist, genügt es wegen der Kompaktheit zu zeigen, dass es sich um ein $\mathcal{T}_{w^*}$-Cauchy-Netz bzw. äquivalent um ein $\sigma(A, E)$-Cauchy-Netz handelt. Bekanntlich bilden die Mengen

$$\left\{x \in A : |\langle x,\, \psi_k\rangle| < \epsilon \text{ für alle } k = 1, \dots, n\right\},$$

wobei $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $\psi_1, \dots, \psi_n \in E$ beliebig zu wählen sind, eine Nullumgebungsbasis von $\sigma(A, E)$. Ist eine derartige Menge gegeben, so haben wir einen Index $i_0 \in I$ zu finden mit

$$\big|\langle x_i - x_j,\, \psi_k\rangle\big| < \epsilon \quad \text{für alle } i, j \succcurlyeq i_0 \text{ und alle } k = 1, \dots, n. \tag{5.3.3}$$

Es gilt $\psi_k = \sum_{\ell=1}^{m_k} \lambda_{\ell,k}\varphi_{\ell,k}$ für Konstanten $\lambda_{\ell,k} \in \mathbb{C}$ und $\mathcal{T}_{w^*}$-stetige positive Funktionale $\varphi_{\ell,k}$. Dabei können wir $\lambda_{\ell,k} \neq 0$ und $m_k \geq 1$ annehmen, da das Nullfunktional stets $|\langle x,\, 0\rangle| = 0 < \epsilon$ erfüllt. Wegen

$$\bigcap_{k=1}^{n}\bigcap_{\ell=1}^{m_k}\left\{x \in A : \big|\langle x,\, \varphi_{\ell,k}\rangle\big| < \frac{\epsilon}{m_k\,|\lambda_{\ell,k}|}\right\} \subseteq \left\{x \in A : |\langle x,\, \psi_k\rangle| < \epsilon \text{ für alle } k = 1, \dots, n\right\}$$

genügt es, die Aussage für die $\varphi_{\ell,k}$ anstelle der ψ_k zu zeigen. Anders formuliert können wir annehmen, dass die Funktionale ψ_k bereits positiv sind. Für festes k ist daher das reelle Netz $(\langle x_i,\, \psi_k\rangle)_{i\in I}$ monoton wachsend, beschränkt und folglich konvergent. Insbesondere ist es ein Cauchy-Netz, sodass für jedes k ein $i_{0,k} \in I$ existiert, für das (5.3.3) sinngemäß gilt. Wählen wir nun gemäß der Richtungseigenschaft noch einen Index $i_0 \succcurlyeq i_{0,1}, \dots, i_{0,n}$, so folgt (5.3.3). Damit ist einmal die Existenz von $x := \lim_{i\in I} x_i$ gezeigt. Wegen der $\mathcal{T}_{w^*}$-Abgeschlossenheit von A_{sa} ist x selbstadjungiert. Für beliebiges $i_0 \in I$ gilt $x_i \geq x_{i_0}$ für $i \succcurlyeq i_0$, also $x_i - x_{i_0} \in A^+$. Daraus folgt $x - x_{i_0} = \lim_{i\in I, i\succcurlyeq i_0} x_i - x_{i_0} \in A^+$ aufgrund der Abgeschlossenheit von A^+, sodass wir auf $x \geq x_{i_0}$ schließen können. Der Grenzwert x ist somit eine obere Schranke von $(x_i)_{i\in I}$. Ist y eine weitere obere Schranke, so gilt $y - x_i \in A^+$ für alle $i \in I$. Wie eben erhalten wir daraus $x \leq y$. Somit ist $x = \lim_{i\in I} x_i$ sogar die kleinste obere Schranke von $(x_i)_{i\in I}$ und es folgt $\lim_{i\in I} x_i = \sup_{i\in I} x_i$. Sei jetzt $c \in A$ gegeben. Das Netz $(c^* x_i c)_{i\in I}$ ist wegen Lemma 2.1.13(ii) monoton wachsend und offenbar gleichmäßig beschränkt. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt die Konvergenz

$$\lim_{i\in I} c^* x_i c = \sup_{i\in I} c^* x_i c. \tag{5.3.4}$$

Der Beweis ist abgeschlossen, wenn wir

$$c^*(\sup_{i\in I} x_i)c = \sup_{i\in I} c^* x_i c \qquad \textit{oder} \qquad c^*(\lim_{i\in I} x_i)c = \lim_{i\in I} c^* x_i c$$

[1] In Satz 7.1.18 werden wir zeigen, dass E mit der Menge *aller* schwach-*-stetigen Funktionale übereinstimmt. Es wird sich außerdem herausstellen, dass $\sigma(A, E)$ genau die schwach-*-Topologie ist; siehe den Beweis von Satz 7.2.1.

zeigen können.
Im Falle eines invertierbaren c zeigen wir die Gleichheit der Supremumsausdrücke. Aus Lemma 2.1.13(ii) folgt die Ungleichung $c^*x_ic \le c^*(\sup_{j\in I} x_j)c$ und damit

$$\sup_{i\in I} c^*x_ic \le c^*(\sup_{j\in I} x_j)c. \tag{5.3.5}$$

Analog erhalten wir

$$\sup_{i\in I} x_i = \sup_{i\in I}(c^{-1})^*(c^*x_ic)c^{-1} \le (c^{-1})^*(\sup_{i\in I} c^*x_ic)c^{-1}.$$

Eine weitere Anwendung von Lemma 2.1.13(ii) liefert

$$c^*(\sup_{i\in I} x_i)c \le c^*\left((c^{-1})^*(\sup_{i\in I} c^*x_ic)c^{-1}\right)c = \sup_{i\in I} c^*x_ic. \tag{5.3.6}$$

Die Ungleichungen (5.3.5) und (5.3.6) ergeben das Resultat für diesen Spezialfall.
Im Falle eines nicht invertierbaren c beweisen wir die Gleichheit der Limesausdrücke. Für hinreichend großes $\lambda > 0$ ist $c+\lambda$ invertierbar, beispielsweise für $\lambda = \|c\|+1$. Aus dem Bisherigen folgt die Gleichung

$$\lim_{i\in I}(c+\lambda)^*x_i(c+\lambda) = \sup_{i\in I}(c+\lambda)^*x_i(c+\lambda) = (c+\lambda)^*(\sup_{i\in I} x_i)(c+\lambda) = (c+\lambda)^*x(c+\lambda)$$

bzw., wenn man den ersten und letzten Ausdruck ausmultipliziert,

$$\lim_{i\in I} c^*x_ic + \lambda(x_ic + c^*x_i) + \lambda^2x_i = c^*xc + \lambda(xc + c^*x) + \lambda^2x.$$

Der Term λ^2x_i konvergiert gegen λ^2x, sodass die Aussage folgt, wenn wir $x_ic + c^*x_i \to xc + c^*x$ gezeigt haben. Wie am Anfang des Beweises genügt es, statt der schwach-*-Topologie $\mathcal{T}_{w^*}$ die schwache Topologie $\sigma(A,E)$ zu betrachten, wobei wir auch diesmal $\varphi(x_ic + c^*x_i) \to \varphi(xc + c^*x)$ nur für alle $\mathcal{T}_{w^*}$-stetigen und positiven Funktionale φ zeigen müssen. Wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, Lemma 3.1.3(iii), gilt

$$\begin{aligned}|\varphi(c^*(x-x_i))| &= \left|\varphi\left(c^*(x-x_i)^{1/2}(x-x_i)^{1/2}\right)\right| = \left|\varphi\left(((x-x_i)^{1/2}c)^*(x-x_i)^{1/2}\right)\right| \\ &\le \varphi\left(c^*(x-x_i)^{1/2}(x-x_i)^{1/2}c\right)^{1/2}\varphi\left(((x-x_i)^{1/2})^*(x-x_i)^{1/2}\right)^{1/2} \\ &= \varphi\left(c^*(x-x_i)c\right)^{1/2}\varphi(x-x_i)^{1/2} \le (\|\varphi\|\,M)^{1/2}\varphi(x-x_i)^{1/2} \to 0,\end{aligned}$$

weil $(c^*(x-x_i)c)_{i\in I}$ gleichmäßig durch eine Konstante M beschränkt und φ schwach-*-stetig ist. Daraus folgt $\varphi(c^*x_i) \to \varphi(c^*x)$. Konjugiert man beide Seiten, so ergibt sich wegen der Stetigkeit von $.^*$ kombiniert mit Lemma 3.1.4 die Konvergenz $\varphi(x_ic) \to \varphi(xc)$ und damit die gewünschte Aussage. □

Korollar 5.3.5. *Die lineare Hülle der Projektionen in A ist dicht bezüglich $\mathcal{T}(\|\cdot\|)$. Ist $a \in A$ positiv, so kann man a sogar als $\|\cdot\|$-Grenzwert von Elementen der Form $a_n := \sum_{k=1}^n \gamma_{k,n}p_{k,n}$ darstellen, wobei die $p_{k,n}$ Projektionen und die Zahlen $\gamma_{k,n}$ nichtnegativ sind.*

Beweis. Klarerweise genügt es zu zeigen, dass jedes selbstadjungierte Element $a \in A_{sa}$ in der $\mathcal{T}(\|\cdot\|)$-abgeschlossenen linearen Hülle der Projektionen in A enthalten ist. Sei dazu C eine bezüglich Mengeninklusion maximale kommutative C^*-Unteralgebra mit Einselement von A, die a enthält. Diese existiert nach dem Lemma von Zorn: In der Tat ist die von a erzeugte

C^*-Unteralgebra mit Einselement von A kommutativ. Folglich ist das Mengensystem $\mathcal{S}$ aller a enthaltenden kommutativen C^*-Unteralgebren mit Einselement nicht leer. Ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ eine Kette, so ist $\overline{\bigcup \mathcal{M}}^{\mathcal{T}(\|\cdot\|)}$ wieder in $\mathcal{S}$ enthalten und klarerweise eine obere Schranke von $\mathcal{M}$.
Ist $\mathcal{B}$ eine beschränkte und durch die kanonische Halbordnung $\leq$ gerichtete Teilmenge von C_{sa}, so sei $b_0 := \sup_{b\in\mathcal{B}} b$ ihr Supremum; dieses existiert wegen Satz 5.3.4. Für ein unitäres Element $u \in C$ betrachten wir das Netz $(b)_{b\in\mathcal{B}}$ und schließen aus Satz 5.3.4

$$u^*b_0u = \sup_{b\in\mathcal{B}} \underbrace{u^*bu}_{=u^*ub=b} = b_0,$$

da u mit b kommutiert. Anders formuliert erhalten wir $b_0u = ub_0$. Unitäre Elemente von C kommutieren also mit b_0. Da die unitären Elemente nach Bemerkung 2.1.6(iii) ganz C linear aufspannen, folgt, dass b_0 mit jedem Element von C kommutiert. Somit ist auch $C^*_A(C \cup \{b_0\})$ kommutativ. Wegen der Maximalität muss schon $b_0 \in C$ gelten. Übersetzt man diese Überlegung mit der Gelfandtransformation in den Gelfandraum M von C, so folgt, dass jede beschränkte und bezüglich der punktweisen Ordnung gerichtete Teilmenge von $C(M,\mathbb{R})$ ein Supremum in $C(M,\mathbb{R})$ hat. Man beachte hierzu, dass die Ordnung $\leq$ in C_{sa} der punktweisen Ordnung im Raum $C(M,\mathbb{R})$ entspricht. Nach Satz 2.3.5 ist M stonesch. Aus Satz 2.3.6 folgt, dass die lineare Hülle der Projektionen von $C(M,\mathbb{R})$ dicht in $C(M,\mathbb{R})$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist. Zurück übersetzt ergibt sich die entsprechende Aussage in C_{sa} mit der Normtopologie. Wir können also a durch Linearkombinationen von Projektionen in C beliebig genau annähern, und damit auch durch Linearkombinationen von Projektionen in A.
Die Zusatzaussage folgt sofort aus dem obigen Beweis und der Zusatzaussage von Satz 2.3.6, da ein $a \geq 0$ auch in C positiv ist. □

Nach diesen Vorarbeiten kommen wir zur Multiplikation. Wir werden zeigen, dass die Translationen $x \mapsto ax$ und $x \mapsto xa$ schwach-*-stetig sind.
Bevor wir zum technisch aufwendigen Beweis kommen, skizzieren wir das Vorgehen in groben Zügen. Zunächst zeigen wir die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto pxp$ für eine Projektion $p \in A \setminus \{0,1\}$, indem wir die Abbildung als zur direkten Summe $A = pAp \dotplus \big((1-p)Ap + A(1-p)\big)$ gehörige Projektion[2] deuten. Dazu müssen wir die Abgeschlossenheit der direkten Summanden zeigen, wozu der Satz von Banach-Dieudonné unverzichtbar sein wird. Anschließend führen wir dieselben Überlegungen für die Abbildung $x \mapsto px(1-p)$ und die Zerlegung $A = pA(1-p) \dotplus \big((1-p)A + pAp\big)$ durch. Summenbildung der beiden Funktionen liefert die Stetigkeit von $x \mapsto px$, was wir mithilfe der Dichtheit der linearen Hülle der Projektionen zur Stetigkeit von $x \mapsto ax$ ausdehnen können. Die Ausnutzung der Stetigkeit von $.^*$ liefert schließlich auch die Stetigkeit von $x \mapsto xa$.
Wir starten mit einer Hilfsaussage.

Lemma 5.3.6. *Ist $p \in A$ eine Projektion, so gilt $\overline{p(A_{sa} \cap S)(1-p)}^{\mathcal{T}_{w^*}} \subseteq pS(1-p)$.*

Beweis. Sei $(px_i(1-p))_{i\in I}$ ein bezüglich der schwach-*-Topologie gegen $x \in A$ konvergentes Netz, wobei x_i in $A_{sa} \cap S$ liege. Der Kern des Beweises ist es, $x = px(1-p)$ zu zeigen, indem wir zuerst $x = px(1-p) + (1-p)xp$ und danach $(1-p)xp = 0$ beweisen. Ist p eine triviale Projektion, also $p \in \{0,1\}$, so sind beide Aussagen klar. Daher nehmen wir im Folgenden $p \neq 0,1$ an.

(i) *Es gilt $x = px(1-p) + (1-p)xp$:*

Zunächst zeigen wir $pxp = (1-p)x(1-p) = 0$. Dazu sei $\frac{1}{2}(pxp + px^*p) = \mathrm{Re}(pxp) \neq 0$ angenommen. Indem wir gegebenenfalls zu $-px_i(1-p)$ und $-x$ übergehen, können wir

[2] Man beachte, dass in diesen Überlegungen zwei verschiedene Arten von Projektionen eine Rolle spielen, nämlich selbstadjungierte und idempotente *Elemente von A* und idempotente *Abbildungen auf A*.

annehmen, dass es ein positives $0 < \lambda \in \sigma(\mathrm{Re}(pxp))$ gibt. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i \in I$

$$\begin{aligned}\|px_i(1-p)+np\| &= \|(px_i(1-p)+np)^*\| = \|(px_i(1-p)+np)(px_i(1-p)+np)^*\|^{1/2} \\ &= \left\|px_i(1-p)x_ip+n^2p\right\|^{1/2} \leq (1+n^2)^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Somit ist $px_i(1-p)+np$ und folglich der Grenzwert $x+np$ in $(1+n^2)^{1/2}S$ enthalten, da letztere Menge abgeschlossen ist. Andererseits erhalten wir aus $p\,\mathrm{Re}(pxp)p = \mathrm{Re}(pxp)$ die Abschätzung[3]

$$\begin{aligned}\|x+np\| &= \|p\|\,\|x+np\|\,\|p\| \geq \|p(x+np)p\| \geq \|\mathrm{Re}(p(x+np)p)\| \\ &= \|\mathrm{Re}(pxp)+np\| = \|p\,\mathrm{Re}(pxp)p+np\|\,.\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Die C^*-Algebra $C^*(\mathrm{Re}(pxp),p,1)$ ist nach Bemerkung 1.2.13 kommutativ, da die Erzeuger selbstadjungiert sind und miteinander kommutieren. Geht man mit der Gelfandtransformation zum Raum der stetigen Funktionen auf dem Gelfandraum M dieser C^*-Algebra über, so gilt

$$\|p\,\mathrm{Re}(pxp)p+np\| = \left\|\widehat{p}\widehat{\mathrm{Re}(pxp)}\widehat{p}+n\widehat{p}\right\|_\infty$$

und

$$\lambda \in \sigma(\mathrm{Re}(pxp)) = \sigma(p\,\mathrm{Re}(pxp)p) = \sigma\left(\widehat{p}\widehat{\mathrm{Re}(pxp)}\widehat{p}\right) = \left(\widehat{p}\widehat{\mathrm{Re}(pxp)}\widehat{p}\right)(M),$$

weshalb es ein $m \in M$ mit $\lambda = \widehat{p}(m)\widehat{\mathrm{Re}(pxp)}(m)\widehat{p}(m)$ gibt. Die Funktion $\widehat{p}$ nimmt als Projektion nur die Werte $0,1$ an; wir setzen $E := \widehat{p}^{-1}(\{1\}) \subseteq M$. Mit dieser Notation gilt $m \in E$ wegen $\lambda > 0$. Daraus folgt

$$\left\|\widehat{p}\widehat{\mathrm{Re}(pxp)}\widehat{p}+n\widehat{p}\right\|_\infty = \left\|\widehat{p}\widehat{\mathrm{Re}(pxp)}\widehat{p}+n\widehat{p}\right\|_{\infty,E} \geq \left|\widehat{p}(m)\widehat{\mathrm{Re}(pxp)}(m)\widehat{p}(m)+n\widehat{p}(m)\right| = \lambda+n.$$

Mit (5.3.8) ergibt sich also

$$\|x+np\| \geq \lambda+n. \tag{5.3.9}$$

Wählt man n so groß, dass $\lambda+n > (1+n^2)^{1/2}$ ist, so erhalten wir aus (5.3.9) den Widerspruch $x+np \notin (1+n^2)^{1/2}S$.

Die Annahme $\mathrm{Im}(pxp) \neq 0$ führt man analog auf einen Widerspruch, indem man die Elemente $px_i(1-p)+nip$ und $x+nip$ betrachtet und in (5.3.8) durch die Norm des Imaginärteils abschätzt. Also folgt tatsächlich $pxp = 0$. Für $(1-p)x(1-p) = 0$ wendet man das soeben Bewiesene auf $\tilde{p} := 1-p$ an: Es gilt $\tilde{p}x_i(1-\tilde{p}) = (px_i(1-p))^* \to x^*$, sodass wir auf $\tilde{p}x^*\tilde{p} = 0$ schließen, also auf $(1-p)x^*(1-p) = 0$. Adjungieren dieser Gleichung liefert $(1-p)x(1-p) = 0$.

Insgesamt folgt

$$0 = (1-p)x(1-p) = x - px - xp + pxp \underbrace{+pxp}_{=0} = x - px(1-p) - (1-p)xp,$$

also $x = px(1-p) + (1-p)xp$.

[3] Hier geht $p \neq 0$, folglich $\|p\| = 1$, ein.

(ii) *Das Element* $(1-p)xp$ *verschwindet*:

Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in I$ gilt

$$\begin{aligned}\|px_i(1-p)+n(1-p)xp\|^2 &= \|(px_i(1-p)+n(1-p)xp)^*(px_i(1-p)+n(1-p)xp)\| \\ &= \|\underbrace{(px_i(1-p))^*(px_i(1-p))}_{=:a}+\underbrace{n^2((1-p)xp)^*((1-p)xp)}_{=:b}\|,\end{aligned}$$

was nach Lemma 1.2.14 mit

$$\begin{aligned}\max(\|a\|,\|b\|) &= \max\left(\|(px_i(1-p))^*(px_i(1-p))\|\,, n^2\,\|((1-p)xp)^*((1-p)xp)\|\right) \\ &= \max\left(\|px_i(1-p)\|^2\,, n^2\,\|(1-p)xp\|^2\right)\end{aligned}$$

übereinstimmt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|px_i(1-p)+n(1-p)xp\| &= \max\big(\underbrace{\|px_i(1-p)\|}_{\le 1}, n\|(1-p)xp\|\big) \\ &\le \max\big(1, n\|(1-p)xp\|\big) =: \alpha.\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Wegen $x = px(1-p)+(1-p)xp$ gilt ebenfalls für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$\|x+n(1-p)xp\| = \|px(1-p)+(n+1)(1-p)xp\|\,,$$

was analog zur ersten Hälfte von (5.3.10) die Gleichung

$$\|x+n(1-p)xp\| = \max\big(\|px(1-p)\|, (n+1)\|(1-p)xp\|\big) \tag{5.3.11}$$

nach sich zieht. Aus (5.3.10) und der Abgeschlossenheit von αS folgt

$$\|x+n(1-p)xp\| \le \alpha = \max\big(1, n\|(1-p)xp\|\big),$$

und wegen (5.3.11)

$$\max\big(\|px(1-p)\|, (n+1)\|(1-p)xp\|\big) \le \max\big(1, n\|(1-p)xp\|\big). \tag{5.3.12}$$

Im Falle $\|(1-p)xp\| \neq 0$ gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(n+1)\|(1-p)xp\| \ge \|px(1-p)\|$ und $n\|(1-p)xp\| \ge 1$, sodass aus (5.3.12) der Widerspruch

$$(n+1)\,\|(1-p)xp\| \le n\,\|(1-p)xp\|$$

folgte.

Mit (i) und (ii) haben wir $x = px(1-p) \in pA(1-p)$ gezeigt. Weiters gilt

$$\|px_i(1-p)\| \le \|p\|\,\|x_i\|\,\|1-p\| \le 1,$$

also $px_i(1-p) \in S$. Da die Einheitskugel abgeschlossen ist, erhalten wir $x \in S$ und schließlich $x = px(1-p) \in pS(1-p)$. □

Satz 5.3.7. *Für ein* $a \in A$ *sind die Translationen* $x \mapsto ax$ *und* $x \mapsto xa$ *schwach-*-stetig.*

Beweis. Im gesamten Beweis bezeichne $p \in A \setminus \{0,1\}$ eine Projektion.

(i) *Die Mengen pSp und $(1-p)S(1-p)$ sind schwach-*-kompakt und die Räume pAp und $(1-p)A(1-p)$ sind schwach-*-abgeschlossen:*

Zunächst gilt $p(A^+ \cap S)p = \{x \in A_{sa} \cap S : 0 \leq x \leq p\}$: Für $y \in A^+ \cap S$ ist $x = pyp \in p(A^+ \cap S)p$ selbstadjungiert und liegt wegen

$$\|x\| = \|pyp\| \leq \|y\| \leq 1 \tag{5.3.13}$$

in S. Außerdem gelten wegen Lemma 2.1.13 die beiden Ungleichungsketten $0 \leq y \leq \|y\| \leq 1$ und $0 = p0p \leq pyp \leq p1p = p$. Aus $0 \leq x \leq p$ für ein $x \in A_{sa} \cap S$ folgt umgekehrt $0 \leq (1-p)x(1-p) \leq (1-p)p(1-p) = 0$, also $(1-p)x(1-p) = 0$ bzw. $\left\|x^{1/2}(1-p)\right\|^2 = \|(1-p)x(1-p)\| = 0$. Wir erhalten $x(1-p) = x^{1/2}\left(x^{1/2}(1-p)\right) = 0$ bzw. $x = xp$. Durch Adjungieren folgt $px = x$ und insgesamt $x = pxp \in p(A^+ \cap S)p$.

Die gerade nachgewiesene Gleichheit lässt sich auch durch

$$p(A^+ \cap S)p = A^+ \cap (p - A^+) \cap A_{sa} \cap S$$

ausdrücken, womit diese Menge abgeschlossen und, da in S enthalten, sogar kompakt ist. Daraus folgt, dass

$$M := \left(p(A^+ \cap S)p - p(A^+ \cap S)p\right) + i\left(p(A^+ \cap S)p - p(A^+ \cap S)p\right)$$

als Bild des Kompaktums $(p(A^+ \cap S)p) \times (p(A^+ \cap S)p) \times (p(A^+ \cap S)p) \times (p(A^+ \cap S)p)$ unter der stetigen Funktion

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mapsto (x_1 - x_2) + i(x_3 - x_4)$$

ebenfalls kompakt ist. Aus der Inklusion (2.1.3) in Bemerkung 2.1.6(ii) folgt $pSp \subseteq M$. Umgekehrt gilt für $y \in M$ sicher $pyp = y$ und folglich $M \subseteq pAp$. Außerdem gilt mit demselben Argument wie in (5.3.13) die Inklusion $pSp \subseteq S$. Zusammen erhalten wir

$$pSp = pSp \cap S \subseteq M \cap S \subseteq pAp \cap S \overset{(*)}{=} pSp; \tag{5.3.14}$$

die Gleichheit $(*)$ folgt dabei aus (5.3.13) und aus der Tatsache, dass man ein $pxp \in pAp \cap S$ auch als $p(pxp)p \in pSp$ schreiben kann. Damit ist $pSp = M \cap S$ kompakt. Folglich ist $pAp \cap S = pSp$ insbesondere abgeschlossen, sodass sich pAp nach dem Satz von Banach-Dieudonné ebenfalls als abgeschlossen herausstellt. Durch Betrachten der Projektion $\tilde{p} := 1 - p$ ergibt sich der Rest aus dem schon Bewiesenen.

(ii) *Die Mengen $pS(1-p)$ und $(1-p)Sp$ sind schwach-*-kompakt und die Räume $pA(1-p)$ und $(1-p)Ap$ sind schwach-*-abgeschlossen:*

Wir betrachten nur $pS(1-p)$ bzw. $pA(1-p)$, da die übrige Aussage daraus wieder durch Betrachten von $\tilde{p} := 1 - p$ folgt.

Genauso wie die Gleichheit $(*)$ in (5.3.14) zeigt man

$$pA(1-p) \cap S = pS(1-p). \tag{5.3.15}$$

Aufgrund des Satzes von Banach-Dieudonné genügt es für den zweiten Teil der Aussage daher, die Abgeschlossenheit von $pS(1-p)$ nachzuweisen. Diese Abgeschlossenheit ist auch für die Kompaktheitsaussage ausreichend, da $pS(1-p)$ dann eine abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums S und somit selbst kompakt ist.

Definiert man die Menge

$$N := p(A_{sa} \cap S)(1-p) + ip(A_{sa} \cap S)(1-p),$$

so zeigt man auf ähnliche Weise wie in (5.3.14) die Gleichung

$$pS(1-p) = N \cap S. \tag{5.3.16}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \overline{pS(1-p)} \subseteq \overline{N} &= \overline{p(A_{sa} \cap S)(1-p) + ip(A_{sa} \cap S)(1-p)} \\ &\subseteq \overline{(\overline{p(A_{sa} \cap S)(1-p)}) + i(\overline{p(A_{sa} \cap S)(1-p)})}. \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Nach Lemma 5.3.6 und (5.3.13) gilt

$$\overline{p(A_{sa} \cap S)(1-p)} \subseteq pS(1-p) \subseteq S,$$

sodass die beiden Summanden in der zweiten Zeile von (5.3.17) abgeschlossene Teilmengen von S und daher kompakt sind. Somit ist auch ihre Summe kompakt und folglich abgeschlossen. Wir schließen auf

$$\overline{pS(1-p)} \subseteq (\overline{p(A_{sa} \cap S)(1-p)}) + i(\overline{p(A_{sa} \cap S)(1-p)}) \subseteq (pS(1-p)) + i(pS(1-p)).$$

Die Tatsache (5.3.16) liefert weiters $\overline{pS(1-p)} \subseteq \overline{S} = S$, sodass wir

$$\overline{pS(1-p)} \subseteq \big(pS(1-p) + ipS(1-p)\big) \cap S = \big(p(S+iS)(1-p)\big) \cap S.$$

erhalten. Eine analoge Überlegung zu $(*)$ in (5.3.14) liefert, dass diese Menge in $pS(1-p)$ enthalten ist. Also ist $pS(1-p)$ tatsächlich abgeschlossen.

(iii) *Die Mengen pS, $(1-p)S$, Sp und $S(1-p)$ sind schwach-*-kompakt und die Räume pA, $(1-p)A$, Ap und $A(1-p)$ sind schwach-*-abgeschlossen*:

Wie in Beweisschritt (ii) haben wir nur die Abgeschlossenheit der Mengen pS, $(1-p)S$, Sp und $S(1-p)$ zu zeigen. Zunächst betrachten wir pS.

Wegen $px = pxp + px(1-p)$ für jedes $x \in S$ sowie der trivialen Inklusion[4] $pS \subseteq S$ gilt $pS \subseteq \big(pSp + pS(1-p)\big) \cap S$. Ist umgekehrt $x := pyp + pz(1-p) \in S$ mit $y, z \in S$ gegeben, so gilt $x = px \in pS$ und daher $\big(pSp + pS(1-p)\big) \cap S \subseteq pS$. Wir erhalten insgesamt

$$pS = \big(pSp + pS(1-p)\big) \cap S. \tag{5.3.18}$$

Die beiden Summanden sind nach (i) und (ii) kompakt, sodass es auch ihre Summe ist. Aus (5.3.18) folgt die Abgeschlossenheit von pS.

Die Operation $.^*$ ist als stetige Involution ein Homöomorphismus, sodass mit pS auch $Sp = (pS)^*$ abgeschlossen ist. Die Abgeschlossenheit von $(1-p)S$ bzw. $S(1-p)$ folgt schließlich aus jener von pS bzw. Sp durch Betrachten von $\tilde{p} := 1-p$.

(iv) *Die Räume $(1-p)Ap + A(1-p)$ und $(1-p)A + pAp$ sind schwach-*-abgeschlossen*:

Wie bisher reicht es, die Schnitte mit S zu betrachten, wobei wir mit dem ersten Raum beginnen. Dazu behaupten wir zunächst

$$\big((1-p)Ap + A(1-p)\big) \cap S = \big((1-p)Sp + S(1-p)\big) \cap S. \tag{5.3.19}$$

[4] Siehe auch (5.3.13).

Für die nichttriviale Inklusion sei $x := (1-p)yp + z(1-p) \in S$ mit $y, z \in A$ gegeben. Es gilt $(1-p)xp = (1-p)yp$ sowie $x(1-p) = z(1-p)$ und daher

$$x = (1-p)xp + x(1-p) \in (1-p)Sp + S(1-p).$$

Nach den Beweisschritten (ii) und (iii) ist die rechte Seite von (5.3.19) als Kompaktum abgeschlossen, sodass eine erneute Anwendung des Satzes von Banach-Dieudonné die erste Aussage zeigt.

Für die zweite Aussage beweist man ganz analog

$$\big((1-p)A + pAp\big) \cap S = \big((1-p)S + pSp\big) \cap S$$

und argumentiert auf dieselbe Weise.

(v) *Die Funktionen $x \mapsto pxp$, $x \mapsto px(1-p)$ und $x \mapsto px$ sind schwach-*-stetig*:

Wir beweisen zunächst die Zerlegung $A = pAp \dot{+} \big((1-p)Ap + A(1-p)\big)$. Die Summe dieser beiden Unterräume ist sicher ganz A, denn es gilt $x = pxp + \big((1-p)xp + x(1-p)\big)$ für beliebiges $x \in A$. Für $x \in pAp \cap \big((1-p)Ap + A(1-p)\big)$ gilt

$$pyp = x = (1-p)z_1p + z_2(1-p)$$

mit gewissen $y, z_1, z_2 \in A$. Daraus folgt

$$x = pyp = p(pyp)p = pxp = p\big((1-p)z_1p + z_2(1-p)\big)p = 0.$$

Nach den Beweisschritten (i) und (iv) können wir Lemma 1.1.7 anwenden, um die Stetigkeit der Projektion auf pAp zu erhalten. Aus der expliziten Darstellung

$$x = pxp + \big((1-p)xp + x(1-p)\big)$$

sehen wir, dass diese Projektion genau $x \mapsto pxp$ ist, womit die erste Aussage gezeigt ist.

Weiters gilt $A = pA(1-p) \dot{+} \big((1-p)A + pAp\big)$: Einerseits kann man jedes $x \in A$ in der Form

$$x = px(1-p) + \big((1-p)x + pxp\big)$$

schreiben, andererseits folgt aus

$$py(1-p) = x = (1-p)z_1 + pz_2p$$

mit $y, z_1, z_2 \in A$ die Gleichung

$$x = py(1-p) = p\big(py(1-p)\big)(1-p) = px(1-p) = p\big((1-p)z_1 + pz_2p\big)(1-p) = 0.$$

Wieder wegen Lemma 1.1.7 ist die Funktion $x \mapsto px(1-p)$ stetig, da sie die Projektion auf $pA(1-p)$ bezüglich dieser Zerlegung ist.

Schließlich folgt die Stetigkeit der Summe $x \mapsto pxp + px(1-p) = px$ dieser beiden Funktionen.

(vi) *Die Translationen $x \mapsto ax$ und $x \mapsto xa$ sind schwach-*-stetig*:

Wir zeigen als Erstes, dass für jedes schwach-*-stetige Funktional φ das ebenfalls lineare Funktional $\psi(x) := \varphi(ax)$ schwach-*-stetig auf S ist.

Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Korollar 5.3.5 gibt es eine natürliche Zahl n, Projektionen p_j und Skalare $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, mit $\left\| a - \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j \right\| \leq \epsilon$. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz aus S, das gegen x konvergiert. Wegen der Abgeschlossenheit von S gilt $x \in S$. Nach Bemerkung 5.1.6(iii) ist φ ein beschränktes Funktional und es gilt

$$\begin{aligned}
|\varphi(a(x_i - x))| &\leq \left| \varphi\left(\left(a - \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j \right) (x_i - x) \right) \right| + \left| \varphi\left(\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j p_j \right) (x_i - x) \right) \right| \\
&\leq \|\varphi\| \left\| a - \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j \right\| \underbrace{\|x_i - x\|}_{\leq 2} + \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \, |\varphi(p_j(x_i - x))| \\
&\leq 2 \|\varphi\| \, \epsilon + \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \, |\varphi(p_j(x_i - x))| \longrightarrow 2 \|\varphi\| \, \epsilon,
\end{aligned}$$

da die Abbildungen $y \mapsto \varphi(p_j y)$ wegen (v) stetig sind. Hier ist zu beachten, dass die Fälle $p_j = 0, 1$ durch den bisherigen Beweis nicht abgedeckt werden; diese sind aber trivial. Daraus folgt $\limsup_{i\in I} |\varphi(a(x_i - x))| \leq 2 \|\varphi\| \, \epsilon$. Da ϵ beliebig war, gilt $\lim_{i\in I} |\varphi(a(x_i - x))| = 0$ bzw.

$$\lim_{i\in I} \psi(x_i) = \lim_{i\in I} \varphi(a x_i) = \varphi(ax) = \psi(x).$$

Somit ist ψ tatsächlich auf S stetig. Nach Korollar 1.1.5 bzw. Bemerkung 5.1.6(ii) ist ψ auf ganz A stetig. Da der Zielraum A der Abbildung $x \mapsto ax$ die initiale Topologie bezüglich aller schwach-*-stetigen linearen Funktionale φ trägt, erhalten wir die Stetigkeit von $x \mapsto ax$. Wegen $xa = (a^* x^*)^*$ und der Stetigkeit von $.^*$ folgt daraus auch die zweite Aussage.

□

Kapitel 6

Der Satz von Sakai

Dieses Kapitel enthält trotz seiner Kürze die Hauptaussage der gesamten Arbeit, nämlich den Satz von Sakai. Dieser besagt, dass die in Kapitel 5 eingeführten W^*-Algebren tatsächlich die in Definition 4.2.7 eingeführten Von-Neumann-Algebren hilbertraumfrei axiomatisieren. Mit anderen Worten ist jede W^*-Algebra isometrisch isomorph zu einer Von-Neumann-Algebra. In [7] wird gezeigt, dass dieser isometrische Isomorphismus stetig bezüglich der schwach-*-Topologien ist. Wir werden zusätzlich beweisen, dass auch die Umkehrabbildung schwach-*-stetig ist, sodass der isometrische Isomorphismus ein Homöomorphismus bezüglich der schwach-*-Topologien ist. Somit können wir wie beim Satz von Gelfand-Naimark für C^*-Algebren von einer *vollständigen* Axiomatisierung sprechen, da der Isomorphismus die komplette Struktur der W^*-Algebra, nämlich die algebraische, die vom Prädualraum induzierte topologische und die Normstruktur, auf die Von-Neumann-Algebra überträgt. Wir werden ganz ähnlich wie in Kapitel 3 beim Satz von Gelfand-Naimark vorgehen, indem wir eine sogenannte treue W^*-Darstellung konstruieren. Es ist jedoch zu beachten, dass Stetigkeitsüberlegungen bezüglich der schwach-*-Topologien eine wesentlich größere Rolle einnehmen werden als in Kapitel 3, da wir die Isometrie und damit die $\|\cdot\|$-Stetigkeit aus der algebraischen Strukturverträglichkeit ableiten konnten; siehe Satz 3.2.3.

6.1 Darstellungen von W^*-Algebren

Notation 6.1.1. Bezeichne A wie im letzten Kapitel eine W^*-Algebra und $\mathcal{T}_{w^*} = \mathcal{T}_{w^*,A}$ die schwach-*-Topologie auf A.

Definition 6.1.2. Eine schwach-*-abgeschlossene $*$-Unteralgebra $B \leq A$ nennen wir W^*-Unteralgebra.

In Bemerkung 5.1.1 kann man $L^1(H)$ durch $PD(A)$, den Raum $L_b(H)$ durch A und A durch B sowie den isometrischen Isomorphismus $\theta : L_b(H) \to L^1(H)'$ durch $j_A : A \to PD(A)'$ ersetzen, um zu zeigen, dass eine W^*-Unteralgebra $B \leq A$ für sich genommen ebenfalls eine W^*-Algebra ist[1]. Dabei ist $PD(B)$ gegeben durch $PD(A)/M$ mit dem Linksannihilator $M := {}^{\perp}(j_A(B))$. Als isometrischen Isomorphismus $j_B : B \to PD(B)'$ kann man $\tau^{-1} \circ j_A|_B$ wählen, mit der analog zu (5.1.1) definierten Abbildung τ. Daher existieren auf B zwei kanonische W^*-Topologien, nämlich die schwach-*-Topologie $\mathcal{T}_{w^*,B}$ und die Spurtopologie $(\mathcal{T}_{w^*,A})|_B$. Es ist eine wesentliche Tatsache, dass diese beiden Topologien gleich sind.

[1] In dieser Situation folgt die $\sigma(PD(A)', PD(A))$-Abgeschlossenheit von $j_A(B)$ nicht mithilfe eines Analogons von Satz 4.1.4 aus der $\mathcal{T}_{w^*,A}$-Abgeschlossenheit von B, sondern schlicht aus der Definition der schwach-*-Topologie $\mathcal{T}_{w^*,A}$. Diese Topologie ist nämlich so konstruiert, dass j_A ein schwach-*-Homöomorphismus wird.

Lemma 6.1.3. *Ist B eine W^*-Unteralgebra von A, so gilt $\mathcal{T}_{w^*,B} = (\mathcal{T}_{w^*,A})|_B$.*

Beweis. Die Topologie $\mathcal{T}_{w^*,A}$ ist die initiale Topologie bezüglich $j_A : A \to PD(A)'$, wenn der Zielraum $PD(A)'$ die schwach-*-Topologie trägt. Somit ist die Spurtopologie $(\mathcal{T}_{w^*,A})|_B$ die initiale Topologie bezüglich $j_A \circ \iota_{B\to A} : B \to PD(A)'$, wobei $\iota_{B\to A}$ die Inklusionsabbildung $B \to A$, $b \mapsto b$ bezeichnet. Mit den Bezeichnungen nach Definition 6.1.2 ist weiters $\mathcal{T}_{w^*,B}$ die initiale Topologie bezüglich

$$j_B = \tau^{-1} \circ j_A|_B = \tau^{-1} \circ j_A \circ \iota_{B\to A}$$

als Abbildung $B \to PD(B)' = (PD(A)/M)'$. Dabei ist $(PD(A)/M)'$ ebenfalls mit der schwach-*-Topologie versehen. Die schwach-*-Topologie auf dem Dualraum eines Banachraums X ist wieder als initiale Topologie definiert, nämlich bezüglich der Menge $\iota_X(X)$ von Funktionalen, wobei $\iota_X : X \to X''$ die kanonische Einbettung $x \mapsto (x' \mapsto \langle x, x'\rangle)$ bezeichnet. Wenden wir diese Tatsache auf $X = PD(A)$ bzw. $X = PD(B)$ an, so erhalten wir aufgrund der Assoziativität des Bildens initialer Topologien

$$(\mathcal{T}_{w^*,A})|_B = \mathcal{T}_{\text{init}}\left(\left\{\iota_{PD(A)}(\rho) \circ j_A \circ \iota_{B\to A} : \rho \in PD(A)\right\}\right) \tag{6.1.1}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{w^*,B} &= \mathcal{T}_{\text{init}}\left(\left\{\iota_{PD(B)}(\rho_B) \circ \tau^{-1} \circ j_A \circ \iota_{B\to A} : \rho_B \in PD(B)\right\}\right)\\ &= \mathcal{T}_{\text{init}}\left(\left\{\iota_{PD(B)}(\pi(\rho)) \circ \tau^{-1} \circ j_A \circ \iota_{B\to A} : \rho \in PD(A)\right\}\right).\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Dabei liegen jeweils Mengen von Abbildungen von B in die mit der euklidischen Topologie versehenen komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ vor. Außerdem bezeichnet π die kanonische Faktorisierungsabbildung $PD(A) \to PD(A)/M = PD(B)$. Um die Aussage des Lemmas zu zeigen, genügt es folglich, die Gleichheit der beiden Mengen skalarwertiger Abbildungen in (6.1.1) und (6.1.2) nachzuweisen.
Dazu sei zunächst an die explizite Definition von τ erinnert:

$$\tau : \begin{cases} (PD(A)/M)' & \to j_A(B) \\ \qquad f & \mapsto f \circ \pi \end{cases}$$

Mit diesen Informationen und Definitionen berechnen wir für beliebige Elemente $\rho \in PD(A)$ und $b \in B$

$$\begin{aligned}\left\langle b,\, \iota_{PD(B)}(\pi(\rho)) \circ \tau^{-1} \circ j_A\right\rangle &= \left\langle \tau^{-1} \circ j_A(b),\, \iota_{PD(B)}(\pi(\rho))\right\rangle = \left\langle \pi(\rho),\, \tau^{-1}(j_A(b))\right\rangle\\ &= \left\langle \rho,\, \tau^{-1}(j_A(b)) \circ \pi\right\rangle = \left\langle \rho,\, \tau(\tau^{-1}(j_A(b)))\right\rangle\\ &= \langle \rho,\, j_A(b)\rangle\\ &= \left\langle j_A(b),\, \iota_{PD(A)}(\rho)\right\rangle = \left\langle b,\, \iota_{PD(A)}(\rho) \circ j_A\right\rangle\\ &= \left\langle b,\, \iota_{PD(A)}(\rho) \circ j_A \circ \iota_{B\to A}\right\rangle.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\iota_{PD(B)}(\pi(\rho)) \circ \tau^{-1} \circ j_A = \iota_{PD(A)}(\rho) \circ j_A \circ \iota_{B\to A}$$

und infolge die Gleichheit der Mengen in (6.1.1) und (6.1.2). □

Die Begriffe eines $*$-Algebrenhomomorphismus und einer Darstellung werden als Nächstes um eine Stetigkeitsbedingung erweitert. Wegen der Unterscheidung zwischen der schwachen Operatortopologie $\mathcal{T}_w$ und der ultraschwachen Operatortopologie $\mathcal{T}_{uw} = \mathcal{T}_{w^*,L_b(H)}$ geschieht dies auf zwei verschiedene Weisen.

Definition 6.1.4.

(i) Sei B eine weitere W^*-Algebra. Ein $*$-Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \to B$ heißt *W^*-Homomorphismus*, wenn er $\mathcal{T}_{w^*,A}|\mathcal{T}_{w^*,B}$-stetig ist. Ein bijektiver W^*-Homomorphismus, der zusätzlich ein Homöomorphismus bezüglich der schwach-$*$-Topologien ist, heißt *W^*-Isomorphismus*.

(ii) Einen W^*-Homomorphismus $\Phi : A \to L_b(H)$, also einen $\mathcal{T}_{w^*,A}|\mathcal{T}_{uw}$-stetigen $*$-Algebrenhomomorphismus, nennt man *W^*-Darstellung*. Dabei heißt Φ *treu*, wenn Φ injektiv ist.

(iii) Ist $\Phi : A \to L_b(H)$ ein $*$-Homomorphismus, der $\mathcal{T}_{w^*,A}|\mathcal{T}_w$-stetig ist, so heißt Φ *Von-Neumann-Darstellung*. Im Falle der Injektivität heißt Φ dabei *treu*.

Man beachte, dass der Begriff der Von-Neumann-Darstellung schwächer als der einer W^*-Darstellung $A \to L_b(H)$ ist, da $\mathcal{T}_w$ gröber als $\mathcal{T}_{uw}$ ist.
Zunächst beweisen wir ein Analogon von Satz 3.2.3.

Satz 6.1.5. *Sei B*

(i) eine W^*-Algebra oder

(ii) $B = L_b(H)$

und sei $\Phi : A \to B$ ein injektiver $*$-Homomorphismus, der

(i) $\mathcal{T}_{w^*,A}|\mathcal{T}_{w^*,B}$-stetig oder

(ii) $\mathcal{T}_{w^*,A}|\mathcal{T}_w$-stetig (d. h. eine treue Von-Neumann-Darstellung)

ist. Dann ist $\operatorname{ran}\Phi$ *eine W^*-Unteralgebra von B, also im Fall (ii) eine Von-Neumann-Algebra. Außerdem ist Φ^{-1} :* $\operatorname{ran}\Phi \to A$ *jedenfalls ein W^*-Homomorphismus.*

Beweis. Wir setzen $C := \operatorname{ran}\Phi$. Nach dem Satz von Banach-Dieudonné genügt es für die erste Aussage zu zeigen, dass $C \cap S_B$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_{w^*,B}$ ist. Gemäß Satz 3.2.3 ist Φ isometrisch, woraus $C \cap S_B = \Phi(S_A)$ folgt. In Fall (i) erhalten wir, dass $C \cap S_B$ als stetiges Bild eines Kompaktums $\mathcal{T}_{w^*,B}$-kompakt und daher $\mathcal{T}_{w^*,B}$-abgeschlossen ist. In Fall (ii) erhalten wir analog die $\mathcal{T}_w$-Abgeschlossenheit von $\Phi(S_A)$. Daraus folgt die Abgeschlossenheit bezüglich der Spurtopologie $(\mathcal{T}_w)|_{S_B} = (\mathcal{T}_{uw})|_{S_B}$; vgl. Korollar 4.1.5(ii). Aus der $\mathcal{T}_{uw}$-Abgeschlossenheit von S_B erhalten wir $\overline{\Phi(S_A)}^{\mathcal{T}_{uw}} \subseteq S_B$. Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\Phi(S_A) = \overline{\Phi(S_A)}^{(\mathcal{T}_{uw})|_{S_B}} = \overline{\Phi(S_A)}^{\mathcal{T}_{uw}} \cap S_B = \overline{\Phi(S_A)}^{\mathcal{T}_{uw}}, \tag{6.1.3}$$

und somit die gewünschte Abgeschlossenheit bezüglich $\mathcal{T}_{uw} = \mathcal{T}_{w^*,B}$.
Für die zweite Aussage gilt zunächst einmal, dass $\Phi^{-1} : C \to A$ genau dann $\mathcal{T}_{w^*,C}|\mathcal{T}_{w^*,A}$-stetig ist, wenn $j_A \circ \Phi^{-1} : C \to PD(A)'$ stetig bezüglich $\mathcal{T}_{w^*,C}|\sigma(PD(A)', PD(A))$ ist. Dies wiederum ist – unter Verwendung der Notation aus Lemma 6.1.3 – genau dann der Fall, wenn die Verkettungen $\iota_A(\rho) \circ j_A \circ \Phi^{-1} : C \to \mathbb{C}$ für alle $\rho \in PD(A)$ stetig bezüglich $\mathcal{T}_{w^*,C}|\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ sind. Da es sich dabei um lineare Funktionale handelt, haben wir nach einem bekannten Satz der Funktionalanalysis die $\mathcal{T}_{w^*,C}$-Abgeschlossenheit der Kerne

$$\ker\left(\iota_A(\rho) \circ j_A \circ \Phi^{-1}\right) = (j_A \circ \Phi^{-1})^{-1}(\ker \iota_A(\rho)) = \Phi\left(j_A^{-1}(\ker \iota_A(\rho))\right)$$

zu untersuchen. Dazu betrachten wir den Schnitt

$$\Phi\left(j_A^{-1}(\ker \iota_A(\rho))\right) \cap S_B = \Phi\left(j_A^{-1}(\ker \iota_A(\rho)) \cap S_A\right).$$

Der Kern $\ker \iota_A(\rho)$ ist trivialerweise $\sigma(PD(A)', PD(A))$-abgeschlossen, womit das j_A^{-1}-Bild davon wegen der Homöomorphie $\mathcal{T}_{w^*,A}$-abgeschlossen ist. Die Einheitskugel S_A ist $\mathcal{T}_{w^*,A}$-kompakt, sodass $j_A^{-1}(\ker \iota_A(\rho)) \cap S_A$ ebenfalls $\mathcal{T}_{w^*,A}$-kompakt ist. In Fall (i) folgt daraus die $\mathcal{T}_{w^*,B}$-Kompaktheit, insbesondere Abgeschlossenheit, von $\Phi\left(j_A^{-1}(\ker \iota_A(\rho)) \cap S_A\right)$. Eine Anwendung des Satzes von Banach-Dieudonné liefert die Abgeschlossenheit von $\Phi\left(j_A^{-1}(\ker \iota_A(\rho))\right)$ bezüglich $\mathcal{T}_{w^*,B}$. Da C bezüglich $\mathcal{T}_{w^*,B}$ abgeschlossen ist, ist dies analog zu (6.1.3) gleichbedeutend zur Abgeschlossenheit bezüglich $(\mathcal{T}_{w^*,B})|_C$. Nach Lemma 6.1.3 stimmt jene Topologie mit $\mathcal{T}_{w^*,C}$ überein, sodass die behauptete Aussage unmittelbar folgt. In Fall (ii) erhalten wir auf analoge Weise die $\mathcal{T}_w$-Abgeschlossenheit von $\Phi\left(j_A^{-1}(\ker \iota_A(\rho)) \cap S_A\right)$. Aus der Inklusion $\mathcal{T}_{uw} \supseteq \mathcal{T}_w$ ergibt sich $\mathcal{T}_{uw}$-Abgeschlossenheit. Da die ultraschwache Operatortopologie mit $\mathcal{T}_{w^*,B}$ übereinstimmt, erhalten wir wie in Fall (i) die Abgeschlossenheit von $\Phi\left(j_A^{-1}(\ker \iota_A(\rho))\right)$ bezüglich $(\mathcal{T}_{w^*,B})|_C = \mathcal{T}_{w^*,C}$. □

Formuliert man diesen Satz etwas um, so ergeben sich sehr prägnante Aussagen über injektive W^*-Homomorphismen. Ein weiteres Argument liefert einen interessanten Zusammenhang zwischen treuen W^*-Darstellungen und Von-Neumann-Darstellungen.

Korollar 6.1.6.

(i) Ist B eine W^*-Algebra und $\Phi : A \to B$ ein bijektiver W^*-Homomorphismus, so ist Φ auch ein Homöomorphismus, wenn man A und B mit den jeweiligen schwach--Topologien versieht. Mit anderen Worten ist Φ ein W^*-Isomorphismus.*

(ii) Ist B eine W^*-Algebra und $\Phi : A \to B$ ein injektiver W^*-Homomorphismus, so ist $\operatorname{ran}\Phi$ *eine W^*-Unteralgebra von B. Außerdem sind A und* $\operatorname{ran}\Phi$ *isomorph als W^*-Algebren (d. h. es existiert ein W^*-Isomorphismus*[2] *von A auf* $\operatorname{ran}\Phi$*).*

(iii) Eine treue Von-Neumann-Darstellung $\Phi : A \to L_b(H)$ ist auch eine treue W^*-Darstellung. In diesem Fall ist $\operatorname{ran}\Phi$ *eine zu A als W^*-Algebra isomorphe Von-Neumann-Algebra.*

Beweis. Die Aussage (i) folgt unmittelbar aus Satz 6.1.5(i), zum Beweis von (ii) kombinieren wir (i) mit Satz 6.1.5(i).
Für Aussage (iii) gilt nach Satz 6.1.5(ii), dass $\operatorname{ran}\Phi$ eine Von-Neumann-Algebra ist, also für sich eine W^*-Algebra, wobei noch $\Phi^{-1} : \operatorname{ran}\Phi \to A$ ein W^*-Homomorphismus ist. Klarerweise ist Φ^{-1} injektiv, sodass Satz 6.1.5(i), angewandt auf Φ^{-1}, die $\mathcal{T}_{w^*,A}|\mathcal{T}_{w^*,\operatorname{ran}\Phi}$-Stetigkeit von $\left(\Phi^{-1}\right)^{-1} = \Phi$ liefert. Aus Lemma 6.1.3 folgt $\mathcal{T}_{w^*,\operatorname{ran}\Phi} = (\mathcal{T}_{w^*,L_b(H)})|_{\operatorname{ran}\Phi}$, womit wegen elementarer topologischer Sachverhalte die Abbildung $\Phi : A \to L_b(H)$ auch $\mathcal{T}_{w^*,A}|\mathcal{T}_{w^*,L_b(H)}$-stetig ist. Mit anderen Worten ist $\Phi : A \to L_b(H)$ eine treue W^*-Darstellung. Die Isomorphieaussage folgt aus (ii). □

Damit können wir – erneut in Analogie zu Kapitel 3 – nach einer treuen Von-Neumann-Darstellung fragen, um die in unserer Verschärfung des Satzes von Sakai behauptete W^*-Isomorphie von A und einer Von-Neumann-Algebra zu beweisen. Es wäre sicherlich natürlicher, eine treue W^*-Darstellung zu suchen; die Stetigkeit bezüglich der schwachen Operatortopologie wird sich aber als wesentlich leichter handhabbar herausstellen. Daher kann unser Vorgehen als weiteres Beispiel für den freien Wechsel zwischen den drei Operatortopologien auf $L_b(H)$ gesehen werden.

[2] Wegen Satz 3.2.3 ist dieser $*$-Algebrenisomorphismus automatisch isometrisch, sodass A und $\operatorname{ran}\Phi$ auch isometrisch isomorph sind.

6.2 Beweis des Satzes

Wir wollen erneut die GNS-Konstruktion für positive Funktionale benützen. Wegen der zusätzlichen topologischen Struktur auf einer W^*-Algebra ist relativ klar, dass wir uns dabei auf die schwach-*-stetigen Funktionale beschränken müssen. Im Folgenden verwenden wir die Notation aus Kapitel 3.

Lemma 6.2.1. *Die von einem schwach-*-stetigen, positiven Funktional φ induzierte GNS-Darstellung $\Phi_\varphi : A \to L_b(H_\varphi)$ ist eine Von-Neumann-Darstellung.*

Beweis. Die zu zeigende $\mathcal{T}_{w^*,A}|\mathcal{T}_w$-Stetigkeitsbedingung ist zur Stetigkeit aller Funktionale

$$f_{x,y} : \begin{cases} A & \to \mathbb{C} \\ a & \mapsto (\Phi_\varphi(a)x, y)_{H_\varphi} \end{cases}$$

äquivalent. Wegen Korollar 1.1.5 und Bemerkung 5.1.6(ii) genügt der Beweis der Stetigkeit der Einschränkung auf die Einheitskugel S. Da nach Konstruktion der Prähilbertraum A/N_φ dicht in H_φ ist, gibt es Folgen[3] $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\tilde{x}_n + N_\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\tilde{y}_n + N_\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A/N_φ, die gegen x bzw. y konvergieren. Insbesondere ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge auch beschränkt, d. h. $\|x_n\|_{H_\varphi} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionale f_{x_n,y_n} erfüllen für beliebiges $a \in S$ wegen $\|\Phi_\varphi\| \leq 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f_{x,y}(a) - f_{x_n,y_n}(a)| &= \left|(\Phi_\varphi(a)(x - x_n), y)_{H_\varphi} + (\Phi_\varphi(a)x_n, y - y_n)_{H_\varphi}\right| \\ &\leq \left|(\Phi_\varphi(a)(x - x_n), y)_{H_\varphi}\right| + \left|(\Phi_\varphi(a)x_n, y - y_n)_{H_\varphi}\right| \\ &\leq \|\Phi_\varphi\| \, \|a\| \, \|x - x_n\|_{H_\varphi} \|y\|_{H_\varphi} + \|\Phi_\varphi\| \, \|a\| \, \|x_n\|_{H_\varphi} \|y - y_n\|_{H_\varphi} \\ &\leq \|x - x_n\|_{H_\varphi} \|y\|_{H_\varphi} + C \, \|y - y_n\|_{H_\varphi} . \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Dieser Ausdruck konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0 und ist von a unabhängig, sodass f_{x_n,y_n} auf S gleichmäßig gegen $f_{x,y}$ konvergiert. Wegen

$$f_{x_n,y_n}(a) = (\Phi_\varphi(a)(\tilde{x}_n + N_\varphi), \tilde{y}_n + N_\varphi)_{H_\varphi} = (a\tilde{x}_n + N_\varphi, \tilde{y}_n + N_\varphi)_{H_\varphi} = \varphi((a\tilde{x}_n)^*\tilde{y}_n) = \varphi(\tilde{x}_n^* a^* \tilde{y}_n)$$

ist die Funktion f_{x_n,y_n} als Verkettung der Operation $.^*$, der multiplikativen Translationen $b \mapsto \tilde{x}_n^* b$ und $b \mapsto b\tilde{y}_n$ sowie des Funktionals φ schwach-*-stetig; siehe Korollar 5.3.2 und Satz 5.3.7. Damit ist $f_{x,y}$ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Abbildungen selbst stetig auf S. □

Nun sind wir in der Lage, die angestrebte treue Von-Neumann-Darstellung zu definieren. Dazu betrachten wir die Menge $\mathcal{S}_{w^*}(A)$ aller schwach-*-stetigen Zustände auf A und die von ihnen induzierten GNS-Darstellungen $\Phi_\varphi : A \to L_b(H_\varphi)$. Analog zum Beweis des Satzes von Gelfand-Naimark definieren wir die direkte Summe $H := \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{S}_{w^*}(A)} H_\varphi$ und die Abbildung $\Phi : A \to L_b(H)$ unter Verwendung von (3.2.3). Klarerweise handelt es sich dabei um eine Darstellung (im Sinne von Definition 3.2.1), die wir die *universelle W^*-Darstellung* nennen[4]. Der Satz von Sakai bekommt die folgende Form:

Satz 6.2.2 (Sakai)**.** *Die universelle W^*-Darstellung Φ von A ist eine treue Von-Neumann- und W^*-Darstellung. Insbesondere ist A isomorph als W^*-Algebra zu einer Von-Neumann-Algebra.*

[3] Man beachte, dass sich diese Aussage auf die Normtopologie von H_φ bezieht, weshalb Folgen ausreichend sind.

[4] Dass es sich dabei um eine W^*-Darstellung handelt, wird aber erst der Satz von Sakai zeigen.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. Wir müssen zeigen, dass Φ eine Von-Neumann-Darstellung ist und dass Φ treu ist. Diese Tatsachen gemeinsam mit Korollar 6.1.6 liefern dann die Aussage.
Mit vollkommen analoger Begründung zum Beweis von Lemma 6.2.1 genügt es für den ersten Teil zu zeigen, dass die Funktionale $f_{x,y}(a) := (\Phi(a)x, y)_H = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}_{w^*}(A)} (\Phi_\varphi(a)x_\varphi, y_\varphi)_{H_\varphi}$ auf S stetig sind, wobei $x, y \in H$ beliebig zu wählen sind. Die Menge

$$Y := \left\{ (x_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{S}_{w^*}(A)} \in H : x_\varphi \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \varphi \in \mathcal{S}_{w^*}(A) \right\}$$

ist in H dicht, sodass Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Y existieren mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Die Abschätzung (6.2.1) zeigt, dass die Funktionenfolge $f_{x_n,y_n}|_S$ gleichmäßig gegen $f_{x,y}|_S$ konvergiert. Somit genügt es, die Stetigkeit der Funktionale f_{x_n,y_n} zu zeigen. Anders formuliert können wir uns auf den Fall $x = (x_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{S}_{w^*}(A)}, y = (y_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{S}_{w^*}(A)} \in Y$ beschränken. Nach Definition von Y gibt es endliche Mengen $F_x, F_y \in \mathcal{E}(S_{w^*}(A))$ mit $x_\varphi = 0$ für alle $\varphi \notin F_x$ und $y_\varphi = 0$ für alle $\varphi \notin F_y$. Die Menge $F := F_x \cup F_y$ ist klarerweise ebenfalls endlich und es gilt $x_\varphi = 0 = y_\varphi$ für jedes $\varphi \notin F$. Wir erhalten

$$f_{x,y}(a) = \sum_{\varphi \in F} (\Phi_\varphi(a)x_\varphi, y_\varphi)_{H_\varphi}.$$

Die einzelnen Summanden sind $\mathcal{T}_{w^*,A}$-stetig, da die Φ_φ Von-Neumann-Darstellungen sind, womit auch deren endliche Summe stetig ist.
Für den zweiten Teil sei $\Phi(a) = 0$, also $\Phi_\varphi(a) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}_{w^*}(A)$. Setzen wir Elemente der Form $b + N_\varphi$ in $\Phi_\varphi(a) = 0$ ein, so erhalten wir $ab + N_\varphi = 0$, also $ab \in N_\varphi$, für alle $b \in A$. Das bedeutet $\varphi((ab)^*ab) = 0$ für beliebiges $\varphi \in \mathcal{S}_{w^*}(A)$. Durch nötigenfalls erforderliches Skalieren gilt dies sogar für alle schwach-*-stetigen, positiven Funktionale. Aus Korollar 5.3.3 folgt $(ab)^*(ab) = 0$ und daher $ab = 0$. Setzen wir $b = a^*$, so ergibt sich

$$\|a\| = \|a^*\| = \|aa^*\|^{1/2} = 0.$$

□

Bemerkung 6.2.3. Nach Lemma 6.1.3 ist die schwach-*-Topologie auf einer Von-Neumann-Algebra genau die Spurtopologie der ultraschwachen Operatortopologie. Bei unserem abstrakten und axiomatischen Zugang zu Von-Neumann-Algebren kann daher die ultraschwache Topologie am ehesten als kanonische Wahl unter den Operatortopologien angesehen werden. Es sei daran erinnert, dass in Definition 4.2.7 alle drei Operatortopologien $\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_w, \mathcal{T}_{uw}$ gleichberechtigt sind.

Kapitel 7

Eindeutigkeit

So erfolgreich der Begriff der W^*-Algebren dabei ist, Von-Neumann-Algebren zu axiomatisieren, so unbefriedigend erscheint die Definition. Eine W^*-Algebra ist ja eine C^*-Algebra, die (als Banachraum) isometrisch isomorph zum Dualraum eines Banachraums ist. Davon ausgehend haben wir die schwach-*-Topologie auf A definiert, sodass die gesamte Theorie an die Wahl des Prädualraums und des isometrischen Isomorphismus anknüpft. Legt die Struktur von A diese beiden Objekte nicht in ausreichender Weise fest, so wäre es denkbar, dass ein weiterer Banachraum samt isometrischem Isomorphismus existiert, der eine andere schwach-*-Topologie auf A induziert. Dies wäre nicht nur ästhetisch unvorteilhaft, sondern könnte die Analyse von W^*-Algebren erschweren – für die „gleiche“ W^*-Algebra könnte die Gültigkeit einer Aussage davon abhängen, welche Topologie man betrachtet.

7.1 Schwach-*-stetige und positive Funktionale

Für Banachräume $PD(A)$ und $PD_2(A)$ sowie isometrische Isomorphismen $j : A \to PD(A)'$ und $j_2 : A \to PD_2(A)'$ ist klarerweise $j_2 \circ j^{-1}$ ein isometrischer Isomorphismus zwischen $PD(A)'$ und $PD_2(A)'$. Es ist zu zeigen, dass auch $PD(A)$ und $PD_2(A)$ isometrisch isomorph sind, wobei der Isomorphismus $PD(A) \to PD_2(A)$ mit den Abbildungen j und j_2 in gewisser Weise verträglich sein muss. Es wäre ja auch möglich, dass es zu einem *festen* Prädualraum zwei *verschiedene* isometrische Isomorphismen gibt, die verschiedene schwach-*-Topologien induzieren. Dass bereits der erste Schritt alles andere als trivial ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 7.1.1. Der Raum $c(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der konvergenten, komplexwertigen Folgen und der Raum $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der komplexwertigen Nullfolgen, beide versehen mit der Supremumsnorm

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \,,$$

haben bis auf isometrische Isomorphie den gleichen Dualraum. Es gilt nämlich

$$(c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)' \cong (\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1) \cong (c(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)' \tag{7.1.1}$$

mit dem Raum $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der absolut summierbaren Folgen. Dabei sind die Isomorphismen

$\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to c(\mathbb{N},\mathbb{C})'$ bzw. $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})'$ durch

$$j_0 : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C}) & \to c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})' \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto \Big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\Big) \end{cases}$$

sowie

$$j : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C}) & \to c(\mathbb{N},\mathbb{C})' \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto \Big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\lim_{n\to\infty} x_n)\cdot y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_{n+1}\Big) \end{cases}$$

gegeben. Wir zeigen zunächst, dass j_0 isometrisch ist. Ist $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$, so zeigt direktes Nachrechnen $\|j_0(y)\| \le \|y\|_1$. Für die umgekehrte Ungleichung sei $\alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha_n| = 1$ und $\alpha_n y_n = |y_n|$. Die Folge $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_n := \begin{cases} \alpha_n, & n \le N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist für $N \in \mathbb{N}$ klarerweise in $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$ enthalten mit $\|x\|_\infty = 1$. Daraus folgt

$$\|j_0(y)\| \ge \langle x, j_0(y)\rangle = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n = \sum_{n=1}^{N} |y_n|\,.$$

Lassen wir in dieser Ungleichung N gegen ∞ streben, so erhalten wir

$$\|j_0(y)\| \ge \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|_1\,, \tag{7.1.2}$$

womit die Isometrie von j_0 gezeigt ist. Für den Nachweis der Surjektivität sei $\varphi \in c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})'$ gegeben. Wir definieren $y_n := \langle e_n, \varphi\rangle$, wobei $e_n := (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ die n-te kanonische Folge ist. Setzen wir $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und davon ausgehend α_n sowie x wie oben, so folgt ähnlich wie in (7.1.2) die Abschätzung $\|\varphi\| \ge \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$. Insbesondere erhalten wir $y \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Aus der Linearität von φ und $j_0(y)$ ergibt sich, dass die beiden Funktionale auf $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, also auf jenen Folgen mit nur endlich vielen Einträgen ungleich 0, übereinstimmen. Dieser Raum ist dicht in $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$, sodass wir wegen der Stetigkeit $\varphi = j_0(y)$ erhalten.
Für j argumentieren wir analog. Um die Isometrie nachzuweisen, ist wieder nur $\|j(y)\| \ge \|y\|_1$ für alle $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$ zu zeigen. Dazu sei α_n definiert wie oben. Wir betrachten

$$x_n := \begin{cases} \alpha_{n+1}, & n \le N \\ \alpha_1, & \text{sonst} \end{cases}$$

und bemerken $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(\mathbb{N},\mathbb{C})$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha_1$ und $\|x\|_\infty = 1$. Es gilt also

$$\|j(y)\| \ge \langle x, j(y)\rangle = \alpha_1 y_1 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_{n+1} y_{n+1} + \alpha_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} y_{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1} |y_n| + \alpha_1 \sum_{n=N+2}^{\infty} y_n.$$

Der Grenzübergang $N \to \infty$ liefert auch hier die gewünschte Ungleichung $\|j(y)\| \ge \|y\|_1$. Zum Beweis der Surjektivität sei $\varphi \in c(\mathbb{N},\mathbb{C})'$ beliebig. Klarerweise ist die Einschränkung von φ auf $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$ in $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})'$ enthalten, sodass wir nach dem Obigen $\varphi|_{c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})} = j_0(z)$ für eine Folge $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$ schreiben können. Wir definieren $e := (1, 1, \dots) \in c(\mathbb{N},\mathbb{C})$ und damit

$\gamma := \langle e, \varphi\rangle$. Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ liegt die Folge $x - (\lim_{k\to\infty} x_k) \cdot e$ in $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\langle x, \varphi\rangle &= \left\langle x - \left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \cdot e, \varphi \right\rangle + \left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \cdot \langle e, \varphi\rangle \\
&= \left\langle x - \left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \cdot e, j_0(z) \right\rangle + \left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \cdot \langle e, \varphi\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n - \lim_{k\to\infty} x_k\right) z_n + \left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \cdot \gamma = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \cdot \left(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} z_n\right).
\end{aligned}$$

Somit können wir $y_1 := \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ und $y_{n+1} := z_n$ setzen, um $\varphi = j(y)$ zu erhalten. Wir haben also (7.1.1) gezeigt.
Allerdings sind $c(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ nicht isometrisch isomorph: Die konstante Folge $e = (1, 1, \dots)$ ist ein Extremalpunkt der Einheitskugel in $c(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, im Raum $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ hat die Einheitskugel hingegen keine Extremalpunkte.

In unserer Argumentation werden wir ausgehend von A anstelle des schwer fassbaren Prädualraums den Dualraum untersuchen. Als Motivation dafür kann die Tatsache dienen, dass sich für eine herkömmliche schwach-*-Topologie $\sigma(X', X)$ in Banachräumen der Prädualraum X aus dem Dualraum zurückgewinnen lässt. Es gilt nämlich $(X', \sigma(X', X))' = \iota(X)$ mit der kanonischen Einbettung $\iota : X \to X''$. Dabei werden wir zeigen, dass man die schwach-*-Stetigkeit eines Funktionals $\varphi : A \to \mathbb{C}$ auch ohne direkte Bezugnahme auf die Topologie und damit den Prädualraum charakterisieren kann, nämlich über die Ordnungsstruktur auf A. Direkt gelingt dies allerdings nur für *positive* Funktionale, sodass wir anschließend noch ein Zerlegungsresultat für Funktionale verwenden.
Bis auf Weiteres halten wir einen Prädualraum $PD(A)$ und einen isometrischen Isomorphismus $j : A \to PD(A)'$ fest und betrachten die davon ausgehend definierte schwach-*-Topologie $\mathcal{T}_{w^*}$ auf A.
Für das erste Ziel sind noch einige Vorarbeiten notwendig. Zunächst definieren wir eine weitere Topologie auf A. Dazu verwenden wir nochmals den allerersten Schritt der Konstruktion der universellen (W^*-)Darstellung, nämlich die Verbindung zwischen positiven Funktionalen und Seminormen, vgl. Lemma 3.1.3(iv).

Definition 7.1.2.

(i) Sei φ ein schwach-*-stetiges, positives Funktional auf A. Die Seminorm α_φ auf A sei definiert durch $\alpha_\varphi(x) := \varphi(x^*x)^{1/2}$.

(ii) Die von der Familie $\{\alpha_\varphi : \varphi \text{ ist schwach-*-stetig und positiv}\}$ von Seminormen erzeugte lokalkonvexe Topologie auf A heißt die *q-Topologie*, in Zeichen $\mathcal{T}_{q,A}$ oder kürzer $\mathcal{T}_q$.

Bevor wir fortfahren, ist zu klären, dass die Familie von Seminormen aus dieser Definition separierend ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus Korollar 5.3.3: Ist nämlich $\varphi(x^*x)^{1/2} = 0$ für alle schwach-*-stetigen und positiven Funktionale φ, so folgt aus dem Korollar $x^*x = 0$ und daraus $\|x\| = \|x^*x\|^{1/2} = 0$.
Es sei noch betont, dass auch bei der q-Topologie $PD(A)$ und j in die Definition eingehen; wir unterdrücken diese Abhängigkeit allerdings zwecks übersichtlicherer Notation.

Bemerkung 7.1.3. Die Konstruktion der q-Topologie verwendet eine andere Sichtweise auf die GNS-Konstruktion als bei der universellen (W^*-)Darstellung; vgl. Bemerkung 3.2.6. Es wirkt nämlich nicht A auf einem Hilbertraum H, sondern wir betrachten die Konstruktion des zugrundeliegenden Hilbertraums H. Auch dabei waren die Seminormen α_φ der Ausgangspunkt – um einen Hilbertraum zu erhalten, haben wir zusätzlich nach dem isotropen Anteil faktorisiert, was für die q-Topologie nicht notwendig war.

Ein wesentlicher Zwischenschritt ist es zu zeigen, dass der Dualraum $(A, \mathcal{T}_q)'$ mit $(A, \mathcal{T}_{w^*})'$ übereinstimmt; mit anderen Worten sind genau die schwach-*-stetigen Funktionale auch bezüglich der q-Topologie stetig. Das entscheidende Hilfsmittel dazu ist die Mackey-Topologie; siehe Definition 1.1.11. Da wir die Mackey-Topologie zur schwach-*-Topologie auf A benötigen, gehen wir analog zur Definition von $\mathcal{T}_{w^*}$ vor und definieren die Mackey-Topologie auf A mithilfe von j und der Mackey-Topologie $\tau(PD(A)', PD(A))$.

Definition 7.1.4. Das Mengensystem $\mathcal{T}_{\tau,A} := \left\{ j^{-1}(O) : O \in \tau(PD(A)', PD(A)) \right\}$ – oder kürzer $\mathcal{T}_\tau$ – bezeichnet man als *Mackey-Topologie auf A*.

Bemerkung 7.1.5.

(i) Da j sowohl als Abbildung

$$j : (A, \mathcal{T}_{w^*}) \to \big(PD(A)', \sigma(PD(A)', PD(A))\big)$$

als auch als Abbildung

$$j : (A, \mathcal{T}_\tau) \to \big(PD(A)', \tau(PD(A)', PD(A))\big)$$

ein Homöomorphismus ist, vererbt sich der Satz von Mackey-Arens, Satz 1.1.13, von der gewöhnlichen Mackey-Topologie auf die Mackey-Topologie $\mathcal{T}_{\tau,A}$; vgl. Bemerkung 5.1.6(ii) für analoge Aussagen über die schwach-*-Topologie auf A.

(ii) Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ aus A konvergiert genau dann gegen $x \in A$ bezüglich der Mackey-Topologie $\mathcal{T}_\tau$, wenn $(j(x_i))_{i\in I}$ bezüglich $\tau(PD(A)', PD(A))$ gegen $j(x)$ konvergiert. Explizit bedeutet das, dass für alle $\epsilon > 0$ und alle kreisförmigen, konvexen und bezüglich $\sigma(PD(A), PD(A)')$ kompakten Mengen $C \subseteq PD(A)$ ein $i_0 \in I$ existiert, sodass für jedes $\rho \in C$ und $i \succcurlyeq i_0$ die Ungleichung $|\langle \rho,\, j(x_i) - j(x)\rangle| < \epsilon$ gilt.

Wir wollen Konvergenz bezüglich $\mathcal{T}_\tau$ ohne Verweis auf den Prädualraum charakterisieren. Die konjugierte Abbildung $j' : PD(A)'' \to (A, \mathcal{T}(\|\cdot\|))'$ ist ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus. Mit dieser Notation gilt

$$\langle \rho,\, j(x_i) - j(x)\rangle = \langle j(x_i - x),\, \iota(\rho)\rangle = \left\langle x_i - x,\, j'(\iota(\rho))\right\rangle . \tag{7.1.3}$$

Wir erhalten, dass Konvergenz bezüglich der Mackey-Topologie auf A äquivalent ist zur gleichgradig schwachen Konvergenz (vgl. Bemerkung 1.1.12) auf den $j' \circ \iota$-Bildern der bezüglich $\sigma(PD(A), PD(A)')$ kompakten Teilmengen von $PD(A)$. Es ist wohlbekannt bzw. leicht zu prüfen, dass die kanonische Einbettung $\iota : PD(A) \to PD(A)''$ betrachtet als Abbildung

$$\iota : \big(PD(A), \sigma(PD(A), PD(A)')\big) \to \big(\iota(PD(A)), \sigma(PD(A)'', PD(A)')|_{\iota(PD(A))}\big) \tag{7.1.4}$$

ein Homöomorphismus ist. Somit durchlaufen die Bilder $\iota(C)$ für $\sigma(PD(A), PD(A)')$-kompakte Mengen C genau die $\sigma(PD(A)'', PD(A)')$-kompakten Teilmengen von $\iota(PD(A))$. Es geht also um die Frage, welche Mengen als j'-Bilder davon auftreten.

Notation 7.1.6. Im Folgenden bezeichnet $A^\#$ stets den Dualraum von A bezüglich der schwach-*-Topologie, d. h. $A^\# := (A, \mathcal{T}_{w^*})'$.

Da sich herausstellen wird, dass die schwach-*-Topologie eindeutig bestimmt ist, wird auch $A^\#$ nicht vom gewählten Prädualraum abhängen; siehe Korollar 7.1.20. Daher muss der Prädualraum nicht durch die Notation reflektiert werden.

Lemma 7.1.7.

(i) Die Einschränkung von j' auf $\iota(PD(A))$ ist ein Homöomorphismus

$$j'|_{\iota(PD(A))} : \big(\iota(PD(A)), \sigma(PD(A)'', PD(A)')|_{\iota(PD(A))}\big) \to \Big(A^\#, \sigma(A^\#, A)\Big).$$

(ii) Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ aus A konvergiert genau denn gegen $x \in A$ bezüglich der Mackey-Topologie auf A, wenn das Netz auf den kreisförmigen, konvexen und $\sigma(A^\#, A)$-kompakten Teilmengen von $A^\#$ gleichgradig schwach konvergiert.

Beweis.

(i) Bisher wissen wir nur, dass j' bijektiv ist als Abbildung vom gesamten Bidualraum $PD(A)''$ in den Dualraum von A bezüglich der Normtopologie; für das Lemma betrachten wir die Einschränkung von j' auf $\iota(PD(A))$ und den Dualraum bezüglich der schwach-*-Topologie auf A.

Daher zeigen wir zunächst, dass die Einschränkung $j'|_{\iota(PD(A))}$ tatsächlich nach $A^\#$ abbildet. Nach Definition der schwach-*-Topologie auf A ist ein Funktional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathcal{T}_{w^*}$-stetig, wenn $\varphi \circ j^{-1}$ stetig bezüglich $\sigma(PD(A)', PD(A))$ ist. Für $\rho \in PD(A)$ gilt

$$j'(\iota(\rho)) \circ j^{-1} = \iota(\rho) \circ j \circ j^{-1} = \iota(\rho), \tag{7.1.5}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Aus (7.1.5) folgt auch die Surjektivität von $j'|_{\iota(PD(A))}$: Ist φ ein schwach-*-stetiges Funktional auf A, so ist $\varphi \circ j^{-1}$ ein $\sigma(PD(A)', PD(A))$-stetiges Funktional. Somit gilt $\varphi \circ j^{-1} = \iota(\rho)$ für ein $\rho \in PD(A)$ oder anders formuliert $\varphi = j'(\iota(\rho))$.

Da j' als Abbildung von $PD(A)''$ in den Dualraum von A bezüglich der Normtopologie ein isometrischer Isomorphismus ist, ist j' und insbesondere die Einschränkung $j'|_{\iota(PD(A))}$ injektiv.

Für die Homöomorphie-Eigenschaft sei $(\iota(\rho_i))_{i\in I}$ ein Netz in $\iota(PD(A))$ und $x \in A$ beliebig. Es gilt

$$\big\langle x,\, j'(\iota(\rho_i))\big\rangle = \langle x,\, \iota(\rho_i) \circ j\rangle = \langle j(x),\, \iota(\rho_i)\rangle\,.$$

Da j surjektiv ist, folgt daraus, dass $(j'(\iota(\rho_i)))_{i\in I}$ genau dann bezüglich $\sigma(A^\#, A)$ gegen 0 konvergiert, wenn $(\iota(\rho_i))_{i\in I}$ bezüglich $\sigma(PD(A)'', PD(A)')|_{\iota(PD(A))}$ gegen 0 konvergiert. Dies ist äquivalent dazu, dass $j'|_{\iota(PD(A))}$ ein Homöomorphismus bezüglich der oben angegebenen Topologien ist.

(ii) Folgt sofort aus (i) und den Bemerkungen vor diesem Lemma.

□

Mit der Topologie $\sigma(A^\#, A)$ auf $A^\#$ wird es möglich, Abbildungen, die Funktionale auf A liefern, auf Stetigkeit zu überprüfen. Ein Beispiel für eine derartige Operation ist die folgende Definition, die wir zunächst für beliebige, nicht notwendigerweise schwach-*-stetige Funktionale einführen.

Definition 7.1.8. Sei φ ein Funktional auf A und $a \in A$. Das Funktional $L_a\varphi$ ist definiert durch $(L_a\varphi)(x) := \varphi(ax)$.

Vor dem Hintergrund von 7.1.7(ii) wird das folgende Stetigkeitsresultat sehr nützlich sein.

Lemma 7.1.9. *Sei φ ein schwach-*-stetiges Funktional auf A. Die Funktion $a \mapsto L_a\varphi$ ist stetig als Abbildung $(A, \mathcal{T}_{w^*}) \to (A^\#, \sigma(A^\#, A))$. Insbesondere ist $L_{rS}\varphi := \{L_a\varphi : a \in rS\}$ für jedes $r > 0$ kompakt bezüglich $\sigma(A^\#, A)$.*

Beweis. Da sowohl die Translation $x \mapsto ax$ als auch φ schwach-*-stetig sind, gilt $L_a\varphi \in A^\#$. Gelte nun $a_i \to a$ bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ für ein Netz $(a_i)_{i\in I}$. Wieder wegen der Stetigkeit einer Translation, diesmal von $b \mapsto bx$ für festes $x \in A$, gilt $a_ix \to ax$, sodass aus der schwach-*-Stetigkeit von φ die Konvergenz

$$\langle x, L_{a_i}\varphi\rangle = \varphi(a_ix) \to \varphi(ax) = \langle x, L_a\varphi\rangle$$

folgt. Somit ist die behauptete Stetigkeit gezeigt.
Die zweite Aussage ergibt sich sofort aus der $\mathcal{T}_{w^*}$-Kompaktheit der Menge rS. □

Zur Bestimmung des Dualraums $(A, \mathcal{T}_q)'$ werden wir das folgende Konzept verwenden.

Definition 7.1.10. Sei φ ein lineares Funktional auf A.

(i) Das *adjungierte* Funktional ist definiert durch $\varphi^*(x) := \overline{\varphi(x^*)}$.

(ii) Im Falle $\varphi^* = \varphi$ heißt φ *selbstadjungiert.*

(iii) Die linearen Funktionale

$$\operatorname{Re}\varphi := (\varphi + \varphi^*)/2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\varphi := (\varphi - \varphi^*)/2i$$

heißen *Real-* und *Imaginärteil* von φ.

Analog zu Lemma 1.2.7 gilt:

Lemma 7.1.11. *φ^*, $\operatorname{Re}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ sind lineare Funktionale auf A, wobei $\varphi = \operatorname{Re}\varphi + i\operatorname{Im}\varphi$. Ist φ schwach-*-stetig, so auch φ^*, $\operatorname{Re}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar, die zweite folgt aus der schwach-*-Stetigkeit von $.^*$; siehe Korollar 5.3.2. □

Lemma 7.1.12. *Es gilt $(A, \mathcal{T}_q)' = (A, \mathcal{T}_{w^*})'$.*

Beweis. Sei zunächst φ ein $\mathcal{T}_q$-stetiges Funktional auf A. Um die schwach-*-Stetigkeit von φ zu zeigen, genügt es nach dem Satz von Mackey-Arens, Satz 1.1.13 bzw. Bemerkung 7.1.5(i), die Stetigkeit bezüglich $\mathcal{T}_\tau$ nachzuweisen. Nach Korollar 1.1.14 wiederum genügt es, die $\mathcal{T}_\tau$-Stetigkeit auf der Einheitskugel S zu zeigen. Sei dazu $(x_i)_{i\in I}$ ein bezüglich der Mackey-Topologie $\mathcal{T}_\tau$ gegen x konvergentes Netz in S. Wenn wir zeigen, dass $(x_i)_{i\in I}$ auch bezüglich der q-Topologie gegen x konvergiert, dann folgt $\varphi(x_i) \to \varphi(x)$ und somit die behauptete Stetigkeit. Für jedes schwach-*-stetige und positive Funktional ψ auf A gilt

$$\alpha_\psi(x_i - x) = \psi\big((x_i - x)^*(x_i - x)\big)^{1/2} = \big((L_{(x_i-x)^*}\psi)(x_i - x)\big)^{1/2}.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt $(x_i - x)^* = x_i^* - x^* \in 2S$, sodass wir $L_{(x_i-x)^*}\psi \in L_{2S}\psi$ und daher

$$0 \le \alpha_\psi(x_i - x) \le \sup_{\kappa\in L_{2S}\psi} \big(\kappa(x_i - x)\big)^{1/2} = \left(\sup_{\kappa\in L_{2S}\psi} \kappa(x_i - x)\right)^{1/2}$$

erhalten. Wegen Lemma 7.1.9 ist $L_{2S}\psi$ kompakt bezüglich $\sigma(A^{\#}, A)$, sodass die rechte Seite nach Lemma 7.1.7(ii) gegen 0 konvergiert. Somit ist $x_i \xrightarrow{\mathcal{T}_q} x$ gezeigt.
Für die Umkehrung sei φ schwach-*-stetig. Wir zeigen die Stetigkeit von φ bei 0 bezüglich der q-Topologie. Im gesamten restlichen Beweis sei dazu $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in A, das bezüglich $\mathcal{T}_q$ gegen 0 konvergiert. Im Spezialfall eines positiven φ impliziert die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, Lemma 3.1.3(iii),

$$|\varphi(x_i)| = |\varphi(1 \cdot x_i)| \leq \varphi(1)^{1/2}\varphi(x_i^* x_i)^{1/2} = \varphi(1)^{1/2}\alpha_\varphi(x_i),$$

sodass wir die Konvergenz $\varphi(x_i) \to 0$ erhalten. Für den allgemeinen Fall sei bemerkt, dass es genügt, die $\mathcal{T}_q$-Stetigkeit von $\operatorname{Re}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ zu zeigen. Nach Lemma 7.1.11 sind Real- und Imaginärteil von φ ebenfalls schwach-*-stetig, sodass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass φ selbstadjungiert ist. Außerdem können wir $\varphi \neq 0$ annehmen. Wir betrachten die Menge

$$M := \{a \in A_{sa} \cap S : \varphi(a) = \|\varphi\|\}$$

und zeigen als Erstes $M \neq \emptyset$. Da S bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ kompakt ist, existiert ein $b \in S$ mit $|\varphi(b)| = \max_{x\in S} |\varphi(x)| = \|\varphi\|$. Durch Betrachten eines geeigneten Vielfachen λb für λ in der komplexen Einheitskreislinie können wir $\varphi(b) > 0$ annehmen. Wegen $\varphi^* = \varphi$ gilt[1] $\varphi(b^*) = \overline{\varphi^*(b)} = \overline{\varphi(b)}$. Daraus folgt

$$\varphi(\operatorname{Re} b) = \frac{1}{2}(\varphi(b) + \varphi(b^*)) = \frac{1}{2}(\varphi(b) + \overline{\varphi(b)}) = \operatorname{Re}\varphi(b) = \varphi(b) = \|\varphi\| \,. \tag{7.1.6}$$

Das Element $\operatorname{Re} b \in A_{sa} \cap S$ liegt somit in M. Weiters ist M als $\mathcal{T}_{w^*}$-abgeschlossene Teilmenge von S kompakt bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ und hat daher nach dem Satz von Krein-Milman einen Extremalpunkt, den wir mit a_0 bezeichnen. Wir behaupten, dass a_0 sogar ein Extremalpunkt von ganz $A_{sa} \cap S$ ist. Ist nämlich $a_0 = (c + d)/2$ mit $c, d \in A_{sa} \cap S$, so erhalten wir $\operatorname{Re}\varphi(c) = \varphi(\operatorname{Re} c) = \varphi(c)$ wie in (7.1.6), also $\varphi(c) \in \mathbb{R}$. Analog gilt auch $\varphi(d) \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\varphi(c) \leq |\varphi(c)| \leq \|\varphi\| \cdot \|c\| \leq \|\varphi\|$$

und genauso $\varphi(d) \leq \|\varphi\|$. Wir erhalten

$$\|\varphi\| = \varphi(a_0) = \frac{\varphi(c) + \varphi(d)}{2} \leq \|\varphi\| \,,$$

was nur für $\varphi(c) = \|\varphi\| = \varphi(d)$ möglich ist. Es folgt $c, d \in M$ und weiter $c = a_0 = d$, da a_0 ein Extremalpunkt von M ist. Nach Satz 2.2.4 ist a_0 unitär, sodass $a_0^2 = a_0^* a_0 = 1$ gilt. Außerdem ist die Abbildung $x \mapsto a_0 x$ ein isometrischer Isomorphismus; siehe (2.2.4) im Beweis von Satz 2.2.4. Setzen wir $\psi := L_{a_0}\varphi$, so erhalten wir ein schwach-*-stetiges Funktional mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$. Wegen $a_0 \in M$ gilt

$$\psi(1) = \varphi(a_0) = \|\varphi\| = \|\psi\| \,,$$

sodass ψ nach Korollar 3.1.6 ein positives Funktional ist. Wir schätzen $\varphi(x_i)$ ähnlich wie oben mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und unter nochmaliger Verwendung von $a_0^2 = 1$ ab:

$$\varphi(x_i) = \varphi(a_0^2 x_i) = \psi(a_0 x_i) \leq \psi(a_0^2)^{1/2}\psi(x_i^* x_i)^{1/2} = \psi(1)^{1/2}\alpha_\psi(x_i)$$

Daraus folgt $\varphi(x_i) \to 0$, also die $\mathcal{T}_q$-Stetigkeit von φ. □

[1] Man beachte, dass wir $\varphi(b^*) = \overline{\varphi(b)}$ in Lemma 3.1.4 nur für *positive* Funktionale gezeigt haben.

Als weitere Vorarbeit müssen wir zeigen, dass das Supremum bzw. äquivalent der Grenzwert – vgl. Satz 5.3.4 – eines monoton wachsenden Netzes von Projektionen wieder eine Projektion ist. Man beachte, dass dies nicht einfach durch Grenzwertbildung in der Gleichung $p_i^2 = p_i$ möglich ist, da die Multiplikation nicht simultan stetig ist.

Lemma 7.1.13.

(i) Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein gleichmäßig beschränktes und bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ gegen 0 konvergentes Netz positiver Elemente, so gilt auch $x_i^2 \to 0$.

(ii) Ist $(p_i)_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz von Projektionen, so ist $p := \sup_{i\in I} p_i$ ebenfalls eine Projektion.

Beweis.

(i) Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz mit den vorausgesetzten Eigenschaften, wobei $C > 0$ so gewählt ist, dass $\|x_i\| \leq C$ für alle $i \in I$ gilt. Wir verwenden die Notation aus dem Beweis von Satz 5.3.4, also bezeichnet E die Menge der schwach-*-stetigen, positiven Funktionale auf A. Da alle x_i^2 in der kompakten Menge $C^2 S$ enthalten sind, genügt es wie im Beweis von Satz 5.3.4 zu zeigen, dass das Netz $(x_i^2)_{i\in I}$ bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(A, E)$ gegen 0 konvergiert. Mit anderen Worten ist die Konvergenz $\varphi(x_i^2) \to 0$ für alle schwach-*-stetigen, *positiven* Funktionale φ zu zeigen.

Aus Lemma 2.1.13(iii) folgt $x_i \leq \|x_i\| \leq C$, sodass wir mit Lemma 2.1.13(ii)

$$0 \leq x_i^2 = (x_i^{1/2})^* x_i x_i^{1/2} \leq (x_i^{1/2})^* C x_i^{1/2} = C x_i$$

erhalten. Da φ ein positives Funktional ist, folgt

$$0 \leq \varphi(x_i^2) \leq \varphi(C x_i) = C\varphi(x_i) \to 0.$$

(ii) Da A_{sa} bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ abgeschlossen ist, haben wir nur $p^2 = p$ zu zeigen. Die Elemente $x_i := p - p_i$ sind positiv und konvergieren gegen 0, da aus Satz 5.3.4 die Konvergenz $p_i \to p$ folgt. Außerdem sind sie wegen $\|x_i\| \leq 2$ gleichmäßig beschränkt. Mit (i) folgt $x_i^2 \to 0$. Wegen $p_i^2 = p_i$ erhalten wir $x_i^2 = p^2 - pp_i - p_i p + p_i$, sodass die Stetigkeit der Translationen $x \mapsto px$ und $x \mapsto xp$ die Gleichung

$$p^2 = \lim_{i\in I} pp_i + p_i p - p_i = p^2 + p^2 - p$$

bzw. $p^2 = p$ liefert.

□

Nun können wir die bereits angekündigte Charakterisierung der schwach-*-stetigen, positiven Funktionale durch die Verträglichkeit mit der Ordnungsstruktur beweisen.

Satz 7.1.14. *Ein positives Funktional φ auf A ist genau dann schwach-*-stetig, wenn für alle monoton wachsenden, gleichmäßig beschränkten Netze $(x_i)_{i\in I}$ aus positiven Elementen*

$$\varphi(\sup_{i\in I} x_i) = \sup_{i\in I} \varphi(x_i) \tag{7.1.7}$$

gilt.

Beweis. Sei zunächst φ schwach-*-stetig. Nach Satz 5.3.4 ist ein monoton wachsendes und gleichmäßig beschränktes Netz $(x_i)_{i\in I}$ bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$-konvergent mit $\lim_{i\in I} x_i = \sup_{i\in I} x_i$. Wegen der Positivität von φ gilt für $i \preccurlyeq j$ die Ungleichung $\varphi(x_j - x_i) \geq 0$, also $\varphi(x_i) \leq \varphi(x_j)$. Folglich ist $(\varphi(x_i))_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz in $[0, +\infty)$. Dieses Netz ist außerdem aufgrund von $|\varphi(x_i)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x_i\|$ ebenfalls gleichmäßig beschränkt. Somit ist es konvergent, wobei $\lim \varphi(x_i) = \sup_{i\in I} \varphi(x_i)$ ist. Aus der schwach-*-Stetigkeit folgt

$$\varphi(\sup_{i\in I} x_i) = \varphi(\lim_{i\in I} x_i) = \lim_{i\in I} \varphi(x_i) = \sup_{i\in I} \varphi(x_i),$$

also (7.1.7).

Gelte umgekehrt die Bedingung (7.1.7) für alle monoton wachsenden und gleichmäßig beschränkten Netze $(x_i)_{i\in I}$. Zunächst zeigen wir, dass es eine bezüglich $\leq$ maximale Projektion p_0 gibt, für die die Abbildung[2] $x \mapsto \varphi(xp_0)$ schwach-*-stetig ist. Dazu betrachten wir die durch $\leq$ halbgeordnete Menge

$$M := \{p \in A : p \text{ Projektion}, x \mapsto \varphi(xp) \text{ schwach-*-stetig}\}$$

und verwenden das Lemma von Zorn. Wegen $0 \in M$ ist M nicht leer. Ist $\mathcal{K}$ eine $\leq$-Kette in M, so betrachten wir die Kette als Netz $(q)_{q\in\mathcal{K}}$, wobei die Richtung auf $\mathcal{K}$ durch die Ordnung $\leq$ gegeben ist. Dieses Netz besteht aus positiven Elementen und ist monoton wachsend sowie gleichmäßig beschränkt, da Projektionen stets $\|q\| \leq 1$ erfüllen. Nach Satz 5.3.4 existiert das Element $p := \sup_{q\in\mathcal{K}} q = \lim_{q\in\mathcal{K}} q$, das wegen Lemma 7.1.13 eine Projektion ist. Sobald die schwach-*-Stetigkeit von $x \mapsto \varphi(xp)$ gezeigt ist, folgt $p \in M$, womit die Kette $\mathcal{K}$ eine obere Schranke in M hat und das Lemma von Zorn anwendbar ist. Dafür genügt es nach Korollar 1.1.5 bzw. Bemerkung 5.1.6, die Stetigkeit auf S zu zeigen. Für $x \in S$ und $q \in \mathcal{K}$ gilt nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, Lemma 3.1.3(iii)

$$\begin{aligned}
|\varphi(xp) - \varphi(xq)| = |\varphi(x(p-q))| &= \left|\varphi\left(x(p-q)^{1/2}(p-q)^{1/2}\right)\right| \\
&= \left|\varphi\left(\left((p-q)^{1/2}x^*\right)^*(p-q)^{1/2}\right)\right| \\
&\leq \varphi\left(\left((p-q)^{1/2}x^*\right)^*\left((p-q)^{1/2}x^*\right)\right)^{1/2} \varphi(p-q)^{1/2} \\
&= \varphi(x(p-q)x^*)^{1/2}\varphi(p-q)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.1.13(v) gilt $\|p-q\| \leq 1$, sodass wir $\|x(p-q)x^*\| \leq 1$ und weiter

$$|\varphi(xp) - \varphi(xq)| \leq \|\varphi\|^{1/2} \varphi(p-q)^{1/2} \tag{7.1.8}$$

erhalten. Aus der Voraussetzung (7.1.7) folgt $\varphi(p) = \sup_{q\in\mathcal{K}} \varphi(q)$. Da die nichtnegativen Zahlen $\varphi(q)$ für $q \in \mathcal{K}$ monoton wachsend sind, stimmt dieses Supremum mit dem Grenzwert $\lim_{q\in\mathcal{K}} \varphi(q)$ überein. Es gilt also

$$\lim_{q\in\mathcal{K}} \varphi(p-q) = \varphi(p) - \lim_{q\in\mathcal{K}} \varphi(q) = 0,$$

sodass die rechte Seite von (7.1.8) gegen 0 konvergiert. Folglich konvergieren die Funktionen $x \mapsto \varphi(xq)$ für $q \in \mathcal{K}$ gleichmäßig in S gegen $x \mapsto \varphi(xp)$. Dies zeigt die gesuchte Stetigkeit auf S und damit auf A, sodass die maximale Projektion p_0 tatsächlich existiert.

Wir zeigen $p_0 = 1$, indem wir das Gegenteil auf einen Widerspruch führen. Wegen $p_0 \leq 1$ bedeutet dies $1 - p_0 > 0$. Nach Korollar 5.3.3(ii) gibt es ein schwach-*-stetiges, positives Funktional

[2] Diese Abbildung stimmt nicht mit $L_{p_0}\varphi$ überein!

ψ mit $\psi(1-p_0) \neq 0$. Da ψ positiv ist, muss $\psi(1-p_0) > 0$ gelten. Wegen der Positivität von φ gilt auch $\varphi(1-p_0) \geq 0$. Indem wir ψ mit einer geeigneten positiven Zahl multiplizieren, können wir

$$\varphi(1-p_0) < \psi(1-p_0) \tag{7.1.9}$$

annehmen. Als Nächstes zeigen wir, dass es eine Projektion p_1 gibt mit $0 \neq p_1 \leq 1-p_0$ und

$$\varphi(p) < \psi(p) \quad \text{für alle Projektionen } 0 \neq p \leq p_1. \tag{7.1.10}$$

Erneut nehmen wir das Gegenteil an, womit es für alle Kandidaten $0 \neq p' \leq 1-p_0$ eine Projektion p mit

$$0 \neq p \leq p' \quad \text{und} \quad \varphi(p) \geq \psi(p) \tag{7.1.11}$$

gibt. Wir wollen nochmals das Lemma von Zorn anwenden, diesmal auf die Menge

$$N := \{p \in A : p \text{ Projektion}, \, p \leq 1-p_0, \, \varphi(p) \geq \psi(p)\}\,.$$

Aus (7.1.11) für $p' = 1-p_0$ folgt $N \neq \emptyset$. Ist $\mathcal{K}$ eine Kette in N, so betrachten wir das Supremum $p := \sup_{q\in\mathcal{K}} q$ und schließen wie oben, dass p eine Projektion ist. Direkt nach Definition gilt außerdem $p \leq 1-p_0$, sodass wir nur noch $\varphi(p) \geq \psi(p)$ zu zeigen haben, um $p \in N$ nachzuweisen. Die Funktionale φ und ψ erfüllen beide die Bedingung (7.1.7): Für φ gilt dies nach Voraussetzung, für das schwach-*-stetige ψ nach dem allerersten Teil des Beweises. Daraus folgt

$$\varphi(p) = \varphi\big(\sup_{q\in\mathcal{K}} q\big) = \sup_{q\in\mathcal{K}} \varphi(q) \geq \sup_{q\in\mathcal{K}} \psi(q) = \psi\big(\sup_{q\in\mathcal{K}} q\big) = \psi(p),$$

sodass wir $p \in N$ erhalten und daher das Lemma von Zorn anwendbar ist. Sei q_0 ein maximales Element von N. Da $1-p_0$ wegen (7.1.9) nicht in N enthalten ist, gilt $q_0 < 1-p_0$ bzw. $1-p_0-q_0 > 0$. Wir behaupten, dass dieses Element eine Projektion ist, wobei es genügt, p_0+q_0 als solche zu identifizieren. Die Selbstadjungiertheit ist klar, für die Idempotenz berechnen wir

$$(p_0+q_0)^2 = p_0 + q_0 + p_0q_0 + q_0p_0. \tag{7.1.12}$$

Aus $0 \leq q_0 \leq 1-p_0$ folgt mit Lemma 2.1.13(ii)

$$0 = p_0 0 p_0 \leq p_0q_0p_0 \leq p_0(1-p_0)p_0 = 0, \tag{7.1.13}$$

also $p_0q_0p_0 = 0$. Wir erhalten

$$\|q_0p_0\| = \|(q_0p_0)^*(q_0p_0)\|^{1/2} = \|p_0q_0p_0\|^{1/2} = 0.$$

Damit folgt auch $p_0q_0 = (q_0p_0)^* = 0$, sodass p_0+q_0 tatsächlich eine Projektion ist. Die Annahme (7.1.11) für $p' = 1-p_0-q_0$ liefert eine Projektion $0 \neq q \leq 1-p_0-q_0$ mit $\varphi(q) \geq \psi(q)$. Eine analoge Rechnung zu (7.1.12) und (7.1.13) ausgehend von $0 \leq q \leq 1-q_0$ zeigt, dass q_0+q eine Projektion ist. Außerdem gilt $q_0+q \leq 1-p_0$ und $\varphi(q_0+q) \geq \psi(q_0+q)$, sodass wir $q_0+q \in N$ erhalten. Dies widerspricht der Maximalität von q_0, sodass die Annahme (7.1.11) falsch gewesen sein muss. Somit gibt es tatsächlich eine Projektion $0 \neq p_1 \leq 1-p_0$ mit (7.1.10). Lassen wir auch $p=0$ zu, so folgt also $\varphi(p) \leq \psi(p)$ für sämtliche Projektionen $p \leq p_1$.
Als Zwischenschritt beweisen wir nun, dass sogar $\varphi(a) \leq \psi(a)$ für alle positiven Elemente a von $B := p_1Ap_1$ gilt. Da die Translationen $x \mapsto p_1x$ und $x \mapsto xp_1$ schwach-*-stetig sind (oder auch direkt nach dem ersten Beweisschritt von Satz 5.3.7), ist B schwach-*-abgeschlossen in A und somit selbst eine W^*-Algebra. Eine Projektion in $p \in B$ ist natürlich auch eine Projektion in

A. Außerdem gilt $p \leq \|p\| \leq 1$ nach Lemma 2.1.13(iii). Wegen $p \in B$ gilt $p = p_1 p p_1$, sodass wir mit Lemma 2.1.13(ii) die schärfere Abschätzung

$$p = p_1 p p_1 \leq p_1 1 p_1 = p_1$$

erhalten. Alle Projektionen in B erfüllen also $p \leq p_1$ und daher $\varphi(p) \leq \psi(p)$. Für Linearkombinationen $b = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k p_k$ von Projektionen in B mit nichtnegativen Koeffizienten γ_k gilt dieselbe Ungleichung $\varphi(b) \leq \psi(b)$. Wegen der Zusatzaussage von Korollar 5.3.5, angewandt in B, lassen sich alle positiven Elemente von B als Grenzwerte bezüglich $\|\cdot\|$ von derartigen Linearkombinationen schreiben. Da φ und ψ als positive Funktionale stetig bezüglich der Normtopologie sind (siehe Lemma 3.1.3(i)), folgt tatsächlich $\varphi(a) \leq \varphi(a)$ für alle $0 \leq a \in B = p_1 A p_1$.
Um unsere ursprüngliche Annahme $1 - p_0 > 0$ zu widerlegen, zeigen wir $p_0 + p_1 \in M$, was der Maximalität von p_0 widerspricht. Eine weitere Variante der Rechnungen (7.1.12) und (7.1.13), diesmal ausgehend von $0 \leq p_1 \leq 1 - p_0$, zeigt, dass $p_0 + p_1$ eine Projektion ist. Folglich ist der Beweis abgeschlossen, wenn wir die schwach-*-Stetigkeit der Abbildung

$$x \mapsto \varphi(x(p_0 + p_1)) = \varphi(xp_0) + \varphi(xp_1)$$

gezeigt haben. Wegen $p_0 \in M$ ist $x \mapsto \varphi(xp_0)$ stetig. Für $x \mapsto \varphi(xp_1)$ zeigen wir die Stetigkeit bezüglich der q-Topologie; dies reicht nach Lemma 7.1.12 aus. Nach einem schon wiederholt verwendeten, einfachen Resultat der Funktionalanalysis müssen wir nur die $\mathcal{T}_q$-Stetigkeit bei 0 zeigen. Sei also $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in A, das bezüglich der q-Topologie gegen 0 konvergiert. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, Lemma 3.1.3(iii), erhalten wir

$$|\varphi(x_i p_1)| = |\varphi(1 \cdot x_i p_1)| \leq \varphi(1)^{1/2} \varphi(p_1 x_i^* x_i p_1)^{1/2}.$$

Das Element $p_1 x_i^* x_i p_1$ liegt in B und ist positiv, sodass der obige Zwischenschritt

$$\varphi(p_1 x_i^* x_i p_1) \leq \psi(p_1 x_i^* x_i p_1)$$

liefert. Kombinieren wir diese beiden Abschätzungen, so folgt

$$|\varphi(x_i p_1)| \leq \varphi(1)^{1/2} \psi(p_1 x_i^* x_i p_1)^{1/2}.$$

Das Funktional $\kappa(x) := \psi(p_1 x p_1)$ ist schwach-*-stetig und positiv, da wegen Lemma 2.1.13(ii) für $a \geq 0$ auch $p_1 a p_1 \geq 0$ gilt und ψ ein positives Funktional ist. Daraus ergibt sich

$$|\varphi(x_i p_1)| \leq \varphi(1)^{1/2} \alpha_\kappa(x_i) \to 0,$$

also $\varphi(x_i p_1) \to 0$ und infolge die behauptete $\mathcal{T}_q$-Stetigkeit.
Somit haben wir $p_0 \neq 1$ auf einen Widerspruch geführt. Also gilt $1 \in M$, woraus die schwach-*-Stetigkeit von φ folgt. $\square$

Da die Bedingung (7.1.7) keinerlei Verweis auf die schwach-*-Topologie oder den Prädualraum enthält, erhalten wir als unmittelbares Korollar die folgende Aussage, die einen wichtigen Schritt in Richtung Eindeutigkeit des Prädualraums darstellt.

Korollar 7.1.15. *Sei $PD_1(A)$ ein weiterer Prädualraum von A und $j_1 : A \to PD_1(A)'$ ein isometrischer Isomorphismus. Bezeichnet $\mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$ die ausgehend von $PD_1(A)$ und j_1 gebildete schwach-*-Topologie, so ist ein* positives *Funktional φ auf A genau dann $\mathcal{T}_{w^*}$-stetig, wenn es $\mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$-stetig ist.*

Als Nächstes zeigen wir das bereits angekündigte Zerlegungsresultat, präzise formuliert dass man ein schwach-*-stetiges Funktional φ in der Form

$$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) + i(\varphi_3 - \varphi_4)$$

mit schwach-*-stetigen und *positiven* Funktionalen φ_k für $k = 1, \dots, 4$ darstellen kann. Die Ähnlichkeit zur analogen Zerlegung in C^*-Algebren aus (2.1.2) in Bemerkung 2.1.6 ist kein Zufall. Wir werden nämlich in unserem Beweis, abweichend von [7, 1.14.3 Theorem], diese Darstellung verwenden.
Da jede W^*-Algebra A nach dem Satz von Sakai, Satz 6.2.2, isomorph zu einer Von-Neumann-Algebra ist, wird es genügen, den Fall einer Von-Neumann-Algebra zu betrachten. Wir bestimmen zunächst die schwach-*-stetigen Funktionale.

Lemma 7.1.16. *Sei $A \leq L_b(H)$ eine Von-Neumann-Algebra und*

$$\theta : (L_b(H), \mathcal{T}_{uw}) \to \big(L^1(H)', \sigma(L^1(H)', L^1(H))\big)$$

der kanonische lineare Homöomorphismus aus Satz 4.1.4, also $\theta(T) = \operatorname{tr}(.T)$. Dann sind die schwach--stetigen Funktionale auf A gegeben durch alle Funktionale der Form $\varphi = \operatorname{tr}(S.)|_A$ für Spurklasseoperatoren $S \in L^1(H)$. Zu gegebenem φ ist der Operator S dabei bis auf Elemente des Linksannihilators*

$$^{\perp}(\theta(A)) = \big\{S \in L^1(H) : \operatorname{tr}(ST) = 0 \textit{ für alle } T \in A\big\}$$

eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach Lemma 6.1.3 ist die schwach-*-Topologie auf A die Spurtopologie der schwach-*-Topologie auf $L_b(H)$. Diese ist genau die ultraschwache Operatortopologie $\mathcal{T}_{uw}$; siehe Bemerkung 5.1.6(i).
Jedes Funktional der Form $\operatorname{tr}(S.)|_A$ ist als Einschränkung eines gemäß Lemma 4.2.2 bezüglich $\mathcal{T}_{uw}$ stetigen Funktionals stetig bezüglich $(\mathcal{T}_{uw})|_A$.
Sei umgekehrt φ schwach-*-stetig auf A, also stetig bezüglich $(\mathcal{T}_{uw})|_A$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung zu einem $\mathcal{T}_{uw}$-stetigen Funktional f auf $L_b(H)$. Lemma 4.2.2 liefert einen Spurklasseoperator $S \in L^1(H)$ mit $f = \operatorname{tr}(S.)$. Wir erhalten $\varphi = \operatorname{tr}(S.)|_A$. Die Eindeutigkeitsaussage folgt direkt aus der Definition von $^{\perp}(\theta(A))$. □

Das nächste Lemma verknüpft die Positivität von Spurklasseoperatoren mit der Positivität des induzierten Funktionals.

Lemma 7.1.17. *Für einen positiven Spurklasseoperator S ist auch das Funktional $\varphi = \operatorname{tr}(S.)$ positiv.*

Beweis. Wir müssen $\operatorname{tr}(ST) \geq 0$ für alle Operatoren $T \in L_b(H)$ mit $T \geq 0$ nachweisen.
Dazu beweisen wir zunächst $\operatorname{tr}(R) \geq 0$ für positive Spurklasseoperatoren R. Ist E eine Orthonormalbasis von H, so gilt

$$\operatorname{tr}(R) = \sum_{e \in E} (Re, e) = \sum_{e \in E} (R^{1/2} R^{1/2} e, e) = \sum_{e \in E} (R^{1/2} e, R^{1/2} e) \geq 0. \tag{7.1.14}$$

Für einen positiven Operator $T \in A$ folgt $0 = S^{1/2} 0 S^{1/2} \leq S^{1/2} T S^{1/2}$ aus Lemma 2.1.13(ii). Wir behaupten, dass $S^{1/2}T$ und $S^{1/2}$ Hilbert-Schmidt-Operatoren sind; siehe Definition 1.3.4. Dazu verwenden wir Lemma 1.3.6 und zeigen, dass das Quadrat des Betrags der beiden Operatoren ein Spurklasseoperator ist. Für $S^{1/2}$ gilt

$$\left|S^{1/2}\right|^2 = S \in L^1(H)$$

und für $S^{1/2}T$ berechnen wir

$$\left|S^{1/2}T\right|^2 = (S^{1/2}T)^*(S^{1/2}T) = T^*ST,$$

was nach Lemma 1.3.8(ii) ebenfalls ein Spurklasseoperator ist. Somit können wir Lemma 1.3.11 mit $S^{1/2}$ anstelle von S und $S^{1/2}T$ anstelle von T anwenden und erhalten nach (7.1.14)

$$\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}\left(S^{1/2}\left(S^{1/2}T\right)\right) = \operatorname{tr}\left(\left(S^{1/2}T\right)S^{1/2}\right) \geq 0.$$

□

Nach diesen Vorbereitungen können wir das Zerlegungsresultat beweisen.

Satz 7.1.18. *Ist φ ein schwach-*-stetiges Funktional auf der W^*-Algebra A, so existieren schwach-*-stetige und positive Funktionale $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ mit*

$$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) + i(\varphi_3 - \varphi_4).$$

Insbesondere ist der Raum $A^\#$ der schwach--stetigen Funktionale genau die lineare Hülle der schwach-*-stetigen und positiven Funktionale.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $A \leq L_b(H)$ eine Von-Neumann-Algebra ist. Nach Lemma 7.1.16 gibt es einen Spurklasseoperator $S \in L^1(H)$ mit $\varphi = \operatorname{tr}(S.)|_A$. Nun betrachten wir S als Element der C^*-Algebra $L_b(H)$ und schreiben S in der Form

$$S = \left((\operatorname{Re} S)^+ - (\operatorname{Re} S)^-\right) + i\left((\operatorname{Im} S)^+ - (\operatorname{Im} S)^-\right) \tag{7.1.15}$$

für Operatoren $(\operatorname{Re} S)^\pm, (\operatorname{Im} S)^\pm \in L_b(H)$, vgl. (2.1.2) in Bemerkung 2.1.6(ii). Diese Operatoren sind sogar Spurklasseoperatoren, wobei wir nur $(\operatorname{Re} S)^\pm$ behandeln: Es folgt $\operatorname{Re} S \in L^1(H)$ direkt aus der Definition $\operatorname{Re} S = (S + S^*)/2$ und Lemma 1.3.8(ii). Für Positiv- und Negativteil sei bemerkt, dass nach Definition von $L^1(H)$ auch $|\operatorname{Re} S|$ ein Spurklasseoperator ist. Daraus erhalten wir nach Gleichung (2.1.5) in Bemerkung 2.1.9

$$(\operatorname{Re} S)^\pm = \frac{1}{2}(|\operatorname{Re} S| \pm \operatorname{Re} S) \in L^1(H).$$

Mit den Funktionalen

$$\varphi_1 := \operatorname{tr}((\operatorname{Re} S)^+.)|_A, \quad \varphi_2 := \operatorname{tr}((\operatorname{Re} S)^-.)|_A, \quad \varphi_3 := \operatorname{tr}((\operatorname{Im} S)^+.)|_A, \quad \varphi_4 := \operatorname{tr}((\operatorname{Im} S)^-.)|_A$$

folgt die Behauptung aus (7.1.15) sowie Lemma 7.1.17 mit der Beobachtung, dass Einschränkungen positiver Funktionale wieder positiv sind.
Sei nun A eine allgemeine W^*-Algebra. Nach dem Satz von Sakai, Satz 6.2.2, gibt es eine Von-Neumann-Algebra $B \leq L_b(H)$ und einen W^*-Isomorphismus $\Phi : A \to B$, also einen isometrischen Isomorphismus, der gleichzeitig ein Homöomorphismus bezüglich der schwach-*-Topologien ist. Ist φ schwach-*-stetig auf A, so ist folglich $\psi := \varphi \circ \Phi^{-1}$ schwach-*-stetig auf B. Nach dem oben Bewiesenen kann man ψ darstellen in der Form

$$\psi = (\psi_1 - \psi_2) + i(\psi_3 - \psi_4)$$

mit schwach-*-stetigen und positiven Funktionalen ψ_k auf B. Als isometrischer Isomorphismus bildet Φ positive Elemente in A auf positive Elemente in B ab, sodass auch die Funktionale $\varphi_k := \psi_k \circ \Phi$ positiv sind. Da Φ ein schwach-*-Homöomorphismus ist, sind die φ_k auch schwach-*-stetig und es gilt

$$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) + i(\varphi_3 - \varphi_4).$$

Die Zusatzaussage folgt unmittelbar daraus, dass eine Linearkombination schwach-*-stetiger Funktionale selbst schwach-*-stetig ist. □

Bemerkung 7.1.19. Es sei nicht verschwiegen, dass man mit einer anderen Konstruktion eine Zerlegungsaussage erhalten kann, für die sogar ein Eindeutigkeitsresultat gilt. Für ein selbstadjungiertes Funktional φ kann man die positiven Funktionale φ_1 und φ_2 nämlich auf eindeutige Art so wählen, dass $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ gilt; siehe [7, Theorem 1.14.3].
Der Schritt von der Von-Neumann-Algebra hin zu einer allgemeinen W^*-Algebra fußt entscheidend auf der Erweiterung des Satzes von Sakai, dass nicht nur Φ, sondern auch Φ^{-1} schwach-*-stetig ist. Da wir keine Eindeutigkeitsaussage benötigen, haben wir den Beweis in der obigen, transparenteren Form geführt.

Damit erhalten wir die folgende Verallgemeinerung von Korollar 7.1.15:

Korollar 7.1.20. *Sei $PD_1(A)$ ein weiterer Prädualraum von A und $j_1 : A \to PD_1(A)'$ ein isometrischer Isomorphismus. Bezeichnet $\mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$ die ausgehend von $PD_1(A)$ und j_1 gebildete schwach-*-Topologie, so ist ein* beliebiges *Funktional φ auf A genau dann $\mathcal{T}_{w^*}$-stetig, wenn es $\mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$-stetig ist.*

Beweis. Wenden wir Satz 7.1.18 sowohl in $(A, \mathcal{T}_{w^*})$ als auch in $\left(A, \mathcal{T}_{w^*}^{(1)}\right)$ an, so folgt mit Korollar 7.1.15

$$\begin{aligned}(A, \mathcal{T}_{w^*})' &= \operatorname{span}\{\varphi : \varphi \text{ ist } \mathcal{T}_{w^*}\text{-stetig und positiv}\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\varphi : \varphi \text{ ist } \mathcal{T}_{w^*}^{(1)}\text{-stetig und positiv}\right\} = \left(A, \mathcal{T}_{w^*}^{(1)}\right)'.\end{aligned}$$

□

Dieses Korollar zeigt, dass die schwach-*-stetigen Funktionale vom gewählten Prädualraum unabhängig sind, was die etwas ungenaue Schreibweise aus Notation 7.1.6 rechtfertigt.

7.2 Das Eindeutigkeitsresultat

Zum Abschluss kommen wir zum zentralen Ergebnis dieses Kapitels, nämlich der Eindeutigkeit des Prädualraums und der schwach-*-Topologie.

Satz 7.2.1. *Sei $PD_1(A)$ ein weiterer Prädualraum von A und $j_1 : A \to PD_1(A)'$ ein isometrischer Isomorphismus. Bezeichne außerdem $\mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$ die ausgehend von $PD_1(A)$ und j_1 gebildete schwach-*-Topologie. Dann sind die beiden Prädualräume isometrisch isomorph, also existiert eine lineare und isometrische Bijektion $\chi : PD(A) \to PD_1(A)$. Außerdem gilt $\mathcal{T}_{w^*} = \mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$.*

Beweis. Wir betrachten nochmals den Homöomorphismus

$$j'|_{\iota(PD(A))} : \big(\iota(PD(A)), \sigma(PD(A)'', PD(A)')|_{\iota(PD(A))}\big) \to \left(A^{\#}, \sigma(A^{\#}, A)\right)$$

aus Lemma 7.1.7. Insbesondere ist $j'|_{\iota(PD(A))} : \iota(PD(A)) \to A^{\#}$ eine lineare Bijektion. Da die kanonische Abbildung $\iota : PD(A) \to PD(A)''$ injektiv ist, ist die Komposition

$$j' \circ \iota : PD(A) \to A^{\#} \tag{7.2.1}$$

ebenfalls eine lineare Bijektion, genauso wie die analog gebildete Funktion

$$j_1' \circ \iota_1 : PD_1(A) \to A^{\#}. \tag{7.2.2}$$

Es sei nochmals explizit darauf hingewiesen, dass der Dualraum $A^{\#}$ in (7.2.1) bezüglich $\mathcal{T}_{w^*}$ gebildet wird, wohingegen in (7.2.2) mit $\mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$ gearbeitet wird. Nach Korollar 7.1.20 stimmen die beiden Dualräume aber überein. Somit können wir die lineare Bijektion

$$\chi := (j_1' \circ \iota_1)^{-1} \circ (j' \circ \iota) : PD(A) \to PD_1(A)$$

betrachten. Da die konjugierten Abbildungen j' und j_1' wegen der Isometrie von j und j_1 genauso wie die kanonischen Abbildungen ι und ι_1 isometrisch sind, ist χ der gesuchte isometrische Isomorphismus.

Für die Gleichheit der schwach-*-Topologien $\mathcal{T}_{w^*}$ und $\mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$ sei daran erinnert, dass diese Topologien als initiale Topologie bezüglich

$$j : A \to \big(PD(A)', \sigma(PD(A)', PD(A))\big)$$

bzw. analog für j_1 und $PD_1(A)$ definiert sind. Die schwach-*-Topologie auf $PD(A)'$ bzw. $PD_1(A)'$ ist ebenfalls eine initiale Topologie, nämlich bezüglich aller Funktionale der Form $\iota(\rho) : PD(A)' \to \mathbb{C}$ bzw. $\iota_1(\rho_1) : PD_1(A)' \to \mathbb{C}$ mit $\rho \in PD(A)$ bzw. $\rho_1 \in PD_1(A)$. Da das Bilden einer initialen Topologie bekanntermaßen assoziativ ist, ist die schwach-*-Topologie $\mathcal{T}_{w^*}$ bzw. $\mathcal{T}_{w^*}^{(1)}$ die initiale Topologie bezüglich sämtlicher Verkettungen $\iota(\rho) \circ j = j'(\iota(\rho))$ bzw. $\iota_1(\rho_1) \circ j_1 = j_1'(\iota_1(\rho_1))$. Diese Kompositionen durchlaufen nach den obigen Überlegungen beide die gleiche Menge, nämlich den Dualraum $A^{\#}$. Somit stimmen beide schwach-*-Topologien mit der initialen Topologie bezüglich aller schwach-*-stetigen[3] Funktionale überein und sind folglich gleich. $\square$

[3] Man beachte, dass man diese Funktionale nach den Sätzen 7.1.18 und 7.1.14 ohne Bezugnahme auf die Topologie beschreiben kann.

Literaturverzeichnis

[1] Conway, J. B.: *A course in functional analysis*. Springer-Verlag, New York, Zweite Aufl., 1990.

[2] Kaltenbäck, M.: *Funktionalanalysis 2, Vorlesungsskriptum*, Oktober 2019.

[3] Murphy, G. J.: *C^*-algebras and operator theory*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[4] Pedersen, G. K.: *C^*-algebras and their automorphism groups*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1979.

[5] Rudin, W.: *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973.

[6] Rudin, W.: *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, Dritte Aufl., 1987.

[7] Sakai, S.: *C^*-algebras and W^*-algebras*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

[8] Schaefer, H. H. und M. P. Wolff: *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, New York, Zweite Aufl., 1999.