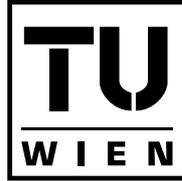


Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



DIPLOMARBEIT

Numerische Simulation regelmässiger zellulärer Strukturen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplomingenieurs
unter der Leitung von

O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. Franz G. Rammerstorfer
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. Helmut J. Böhm, M.S.
Dipl.-Ing. Dr. Heinz Pettermann

eingereicht an der Technischen Universität Wien,
Fakultät für Maschinenbau

von

Martin Seyr
Klagbaumgasse 17/21
1040 Wien
Matr.-Nr. 9725497
martin.seyr@gmx.at

Wien, im November 2003

.....

Danksagung

Diese Diplomarbeit entstand am Institut für Leichtbau und Flugzeugbau an der Technischen Universität Wien. Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei einigen Personen bedanken:

- bei Dipl.-Ing. Dr. Heinz Pettermann für die ständige Unterstützung während der Betreuung dieser Arbeit
- bei Prof. Helmut J. Böhm für die ausführlichen und genauen Korrekturbesprechungen
- bei Dipl.-Ing. Dr. Thomas Daxner für unzählige bereitwillig gegebene Tips und Vorschläge
- bei Prof. Franz G. Rammerstorfer für die freundliche Aufnahme am Institut
- bei der gesamten ILFB-Belegschaft für die kollegiale und hilfsbereite Atmosphäre am Institut
- bei allen Kollegen, die mit Tips und Ratschlägen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere bei Dipl. Ing. Mathias Luxner
- bei allen Freunden und bei meiner Familie, die sich geduldig Berichte über die Fortschritte und den Inhalt meiner Arbeit anhören mussten.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit entstand mit Bezug zu einem FWF-Projekt und stellt den Beginn der Modellierung sogenannter regelmäßiger offenzelliger Materialien dar. Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung von Simulationsansätzen und -werkzeugen, um das mechanische Verhalten verschiedener Geometrien in Abhängigkeit von der relativen Dichte, der Materialeigenschaften des Grundwerkstoffes und der Geometrie zu untersuchen.

Die relevanten Eigenschaften sind E-Modul, Querdehnungszahl und Spannungs-Verzerrungs-Kurven sowie deren Richtungsabhängigkeit und Imperfektionsempfindlichkeit. Die Finite-Elemente-Simulationen beruhen auf Einheitszellenmodellen, die aus Balkenelementen aufgebaut sind. Durch das Aufbringen periodischer Randbedingungen wird eine unendliche Struktur unter beliebigen homogenen Lastfällen simuliert.

Ausserdem werden aus einer endlichen Zahl von Einheitszellen assemblierte Blöcke, also abgeschlossene Strukturen simuliert, um Vergleichswerte zu experimentellen Druck- und Schubversuchen zu erhalten.

Die Simulationen werden mit ABAQUS, V6.3.3 durchgeführt. Zur Erstellung der Inputdaten werden Preprozessorprogramme und zur Auswertung der ABAQUS-Outputdaten Postprozessoren erstellt. Weitere kleine Programme werden zur graphischen Aufbereitung und weiteren Datenmanipulation implementiert. Die dafür verwendete Programmiersprache ist C++.

Notation

	Matrixschreibweise	Indexschreibweise
Skalar	a	a
Vektor, Tensor 1. Stufe	$\underline{\mathbf{a}}$	a_i
Matrix bzw. Tensor 2. Stufe	$\underline{\underline{\mathbf{a}}}$	a_{ij}
Tensor 3. Stufe	$\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}$	a_{ijk}
Tensor 4. Stufe	$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}}$	a_{ijkl}

Gross- und Kleinschreibung haben keine spezielle Bedeutung.

Einstein'sche Summenkonvention Kommt ein Index in einem Term zweimal vor, wird über diesen Index aufsummiert, kommt er nur einmal vor, ist es ein sogenannter freier Index.

$$a_i = b_{ij}c_j = \sum_j b_{ij}c_j$$

Transposition Die Transponierte einer Matrix erhält man durch Vertauschen aller a_{ij} mit den a_{ji} (ist also nur bis zu Tensoren 2. Stufe sinnvoll).

Einheitsmatrix Die Einheitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ ist eine quadratische Matrix (d. h. Zeilenanzahl und Spaltenanzahl sind identisch), deren Elemente der Hauptdiagonale (a_{ii}) den Wert 1 haben; alle anderen Elemente haben den Wert 0. Die Elemente der Einheitsmatrix können mit dem Kronecker-Symbol dargestellt werden.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Rechenoperationen

	Matrixschreibweise	Indexschreibweise
Skalarprodukt zweier Vektoren:	$a = \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{b}}^T \underline{\mathbf{c}}$	$a = b_i c_i$
Skalarprodukt zweier Matrizen:	$a = \underline{\underline{\mathbf{b}}} : \underline{\underline{\mathbf{c}}}$	$a = b_{ij} c_{ji}$
Matrix-Vektor-Multiplikation:	$\underline{\mathbf{a}} = \underline{\underline{\mathbf{b}}} \underline{\mathbf{c}}$	$a_i = b_{ij} c_j$
Matrix-Multiplikation:	$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\mathbf{b}}} \underline{\underline{\mathbf{c}}}$	$a_{ij} = b_{ik} c_{kj}$
Produkt Tensor 4. Stufe-Tensor 2. Stufe	$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}} = \underline{\underline{\mathbf{b}}} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}}$	$a_{ij} = b_{ijkl} c_{kl}$

Betrag eines Vektors

$$|\underline{\mathbf{a}}| = \sqrt{\sum_i a_i^2} = \sqrt{a_i a_i}$$

Ableitungen Die partielle Ableitung wird mit der Komma-Abkürzung geschrieben:

$$\frac{\partial()}{\partial x_j} \equiv ()_{,j}$$

Gauss'scher Integralsatz Es sei Ω ein Bereich im Raum mit der Berandung Γ , dann gilt mit dem nach außen gerichteten Normalvektor \underline{n} für eine skalare Größe v

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = \oint_{\Gamma} v n_i d\Gamma,$$

für eine Tensorgröße erster Stufe v_i

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega = \oint_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma$$

und für eine Tensorgröße zweiter Stufe v_{ij}

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} d\Omega = \oint_{\Gamma} v_{ij} n_j d\Gamma.$$

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iii
Notation	iv
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	3
2.1 Lineare Elastizitätstheorie	3
2.2 Nichtlineare Probleme	8
2.3 Anisotropie	14
2.4 Konzept der Einheitszelle	16
2.5 Rotationstransformationen	24
2.6 Dichteabhängigkeit des E-Moduls eines zellulären Materials	27
3 Modellbildung und Programmierung	33
3.1 Behandelte Geometrien	33
3.2 Finite Elemente-Modell	39
3.3 Programmstruktur	44
4 Lineare Berechnungen	55
4.1 Abhängigkeit des E-Moduls und Schubmoduls des homogenen Ersatzmaterials von der relativen Dichte	55
4.2 Berechnungen an abgeschlossenen Blöcken	63
4.3 Richtungsabhängigkeit des E-Moduls	72
4.4 Allgemeine Schlussfolgerungen	88
5 Nichtlineare Berechnungen	89
5.1 Simulationsparameter	89
5.2 Materialdaten des Grundwerkstoffes	92
5.3 SC-Geometrie	93
5.4 BCC-Geometrie	96
5.5 RBCC-Geometrie	100
5.6 TSC-Geometrie	103
5.7 GA-Geometrie	108
5.8 Zusammenfassung	110
6 Schlußbetrachtung und Ausblick	111

Literaturverzeichnis	112
A Input-Files	113
A.1 Geometrie-File, exemplarisch	113
A.2 Lastfall-File, exemplarisch	114
B Nachgiebigkeitsmatrizen	115
B.1 SC-Geometrie	115
B.2 BCC-Geometrie	115
B.3 RBCC-Geometrie	115
B.4 TSC-Geometrie	116
B.5 GA-Geometrie	116

Kapitel 1

Einleitung

Unter regelmäßigen zellulären Materialien versteht man Werkstoffe, die aus gleichartigen Zellen bestehen, ähnlich Schäumen, jedoch mit genau definierter, periodisch auftretender Geometrie.

Besteht die Zelle nur aus ihren Kanten, nennt man das Material offenzellig. Das Material ist dann aus Bälkchen aufgebaut.

Besteht die Zelle aus massiven Seitenflächen, nennt man das Material geschlossenzellig, es ist damit aus Plättchen aufgebaut. Auch Mischformen sind möglich.

In dieser Arbeit werden ausschließlich offenzellige Materialien behandelt.

Unter einer zellulären Struktur versteht man ein Objekt endlicher Größe, das aus einem zellulären Material besteht.

Zelluläre Materialien treten in der Natur häufig auf, Beispiele sind Holz oder Knochen. Diese Arbeit soll Einblick in die Mechanik dieser Strukturen verschaffen, um die Herstellung von leistungsfähigeren künstlichen zellulären Strukturen mit anwendungsspezifischen mechanischen Eigenschaften zu ermöglichen.

Außerdem soll eine bessere Kenntnis des Einflusses der Geometrie einer Struktur auf die mechanischen Eigenschaften dabei helfen, verschiedene Prozesse in der Natur, insbesondere pathologische Vorgänge im menschlichen Knochen, zu verstehen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung der mechanischen Eigenschaften solcher Strukturen. Analytische Ansätze dazu wurden von Gibson und Ashby [1] angegeben. Dabei handelt es sich um Abschätzungsformeln, die zwar sehr hilfreich dabei sind, die Deformationsmechanismen der Materialien zu verstehen, aber quantitativ nicht immer zuverlässig sind.

Die Entwicklung von leistungsfähigen Simulationskonzepten ermöglicht auch eine numerische Behandlung. Derartige Berechnungen wurden für Metallschäume von Daxner [2] durchgeführt.

Bei der Bestimmung der effektiven mechanischen Eigenschaften wird das zelluläre Material als homogener Werkstoff behandelt. Um diese Homogenisierung zu rechtfertigen, muss ein hinreichend großes Gebiet innerhalb des Materials betrachtet werden.

Die mechanischen Eigenschaften auf makroskopischer Ebene hängen von den Deformationsmechanismen auf mikroskopischer Ebene ab.

In dieser Arbeit werden lineare Finite-Elemente-Analysen zur Bestimmung der elastischen Eigenschaften wie E-Modul, Querdehnungszahlen, Schubmodul und deren Abhängigkeit von den Eigenschaften des Grundwerkstoffes und der Geometrie durchgeführt. Mit Grundwerkstoff ist das Material gemeint, aus dem die Bälkchen bzw. Plättchen bestehen. Bei der Bestimmung der elastischen Eigenschaften wird auch ihre Abhängigkeit von der Richtung untersucht.

Weiters werden erste nichtlineare Finite-Elemente-Analysen zur Bestimmung des Verhaltens bei größeren Deformationen bzw. bei plastischer Deformation des Grundwerkstoffes gemacht, außerdem sollen das Stabilitätsverhalten und der Einfluss geringfügiger Änderungen der Geometrie untersucht werden.

In weiterer Folge sollen die Ergebnisse dieser Arbeit mit experimentellen Ergebnissen an mittels Rapid Prototyping am Institut für Werkstoffkunde und Materialprüfung der TU Wien hergestellten zellulären Strukturen verglichen werden.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Lineare Elastizitätstheorie

In der linearen Elastizitätstheorie wird von kleinen Verschiebungen ausgegangen, außerdem wird das Materialverhalten als linear vorausgesetzt, d.h. E-Modul und Querdehnungszahl sind verzerrungsunabhängig: $E, \nu = \text{const.}$

Ziel der linearen Elastizitätstheorie ist es, eine Verbindung zwischen Verschiebungen von Körperpunkten und Kräften, die am Körper wirken, herzustellen. Dazu gibt es drei Sätze von Gleichungen:

- 6 Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen
- 6 Verzerrungs-Spannungs-Beziehungen (Materialgesetz)
- 3 Spannungs-Kräfte-Beziehungen (Gleichgewichtsbedingungen)

Diese Gleichungen gelten für jeden Punkt des Körpers.
Daraus ergeben sich 15 unbekannte Funktionen in x_1, x_2, x_3 :

- 3 Verschiebungen
- 6 Spannungen
- 6 Verzerrungen

In dieser Arbeit werden vor allem Spannungs- und Verzerrungstensoren und das Materialgesetz benötigt.

2.1.1 Cauchy'scher Spannungstensor

Der Spannungsvektor $\underline{\mathbf{t}}$, Abb. 2.1, ist als Kraftdichte definiert, d.h. als Schnittkraftvektor pro Flächeneinheit, und ist damit abhängig von der Orientierung der Bezugsfläche A [3].

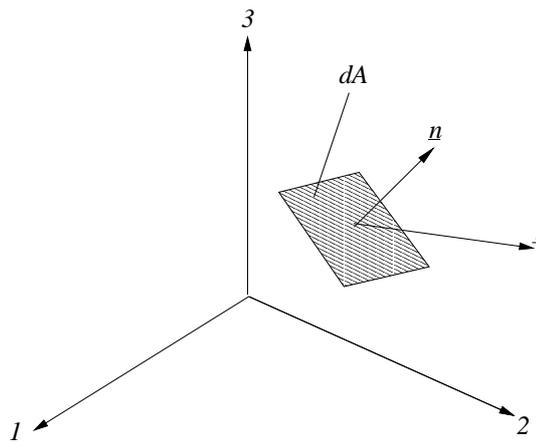


Abbildung 2.1: Spannungsvektor

$$\underline{\mathbf{t}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \quad (2.1)$$

Um den örtlichen Spannungszustand eindeutig zu beschreiben, wird der Spannungstensor eingeführt; er besteht aus drei Spaltenvektoren, die die Spannungsvektoren zu drei aufeinander normalen Ebenen angeben,

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Der erste Index bezeichnet die Schnittebene, der zweite die Richtung der Spannungsvektorkomponente. Die Elemente der Hauptdiagonale σ_{ii} sind die Normalspannungen, die anderen Elemente τ_{ij} , $i \neq j$ die Schubspannungen. Damit gilt

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \underline{\mathbf{n}} \quad (2.3)$$

mit dem Flächennormaleneinheitsvektor $\underline{\mathbf{n}}$ für eine beliebige Schnittfläche. Weiters gilt der Satz der zugeordneten Schubspannungen

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad (2.4)$$

weil sonst das Momentengleichgewicht nicht erfüllt wäre. Damit ist der Spannungstensor symmetrisch, enthält also nur sechs unabhängige Komponenten und kann daher zum (formalen, nicht physikalischen) Spannungskomponentenvektor

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

zusammengefasst werden.

2.1.2 Linearisierter Verzerrungstensor

Aus dem Green'schen Verzerrungstensor [3] erhält man durch Weglassen der quadratischen Glieder den linearisierten Verzerrungstensor. Im Gegensatz zum Green'schen Verzerrungstensor müssen beim linearisierten die Verschiebungsableitungen, Abb. 2.2, klein sein.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.6)$$

mit dem Verschiebungsvektor $\underline{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)^T$. Man sieht sofort, dass auch der Verzerrungstensor symmetrisch sein muss, weil Glg. (2.6) kommutativ ist.

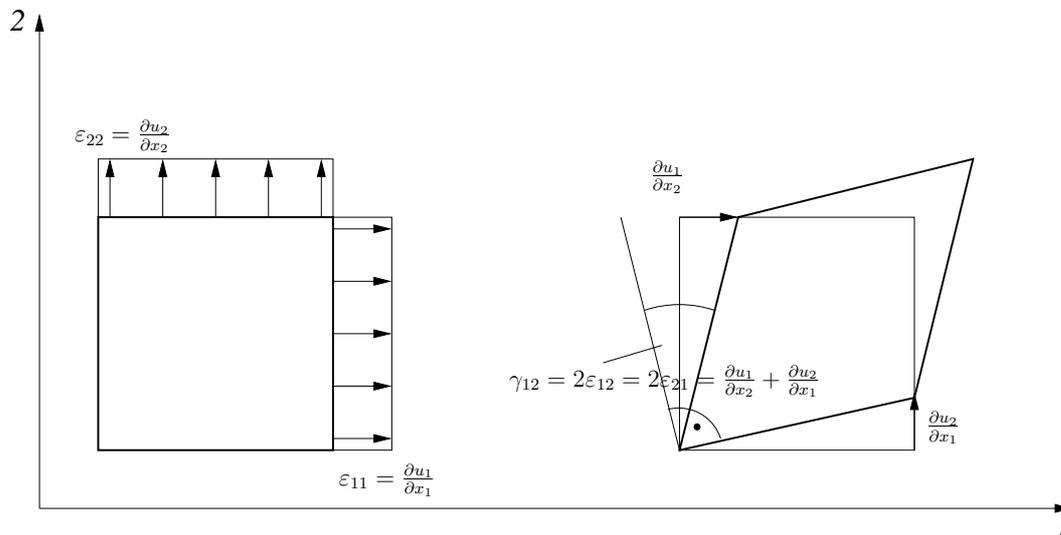


Abbildung 2.2: Verzerrungen

Der Verzerrungstensor lautet

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Analog zum Spannungskomponentenvektor kann nun auch der Verzerrungskomponentenvektor

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

angeschrieben werden.

Unter Verwendung des Verzerrungskomponentenvektors und der Differentialoperatormatrix $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$ [4] kann Glg. (2.6) auch

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{d}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \quad (2.9)$$

geschrieben werden.

Die Differentialoperatormatrix $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$ lautet dann

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Anmerkung In der Literatur werden häufig statt der Schubverzerrungen ε_{ij} die Schubwinkel γ_{ij} verwendet. Die folgenden Gleichungen gelten teilweise nur bei Verwendung der Schubverzerrungen.

2.1.3 Materialgesetz

Die Verknüpfung zwischen Spannungen und Verzerrungen ist das Materialgesetz. In Tensorschreibweise (Einstein'sche Summenkonvention) lautet es:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.11)$$

wobei E_{ijkl} (der Elastizitätstensor) und C_{ijkl} (der Nachgiebigkeitstensor) beides Tensoren vierter Stufe sind. Aufgrund der Symmetrie von Spannungs- und Verzerrungstensoren (Vertauschbarkeit der Indizes i und j und der Indizes k und l) reduzieren sich die bei einem Tensor vierter Stufe der Dimension drei 81 Koeffizienten auf 36 Koeffizienten, d.h. es kann eine Elastizitätsmatrix bzw. Nachgiebigkeitsmatrix der Dimension 6×6 aufgestellt werden, sodass:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.12)$$

Die Verzerrungen hängen nur von den aktuellen Spannungen ab. Diese haben deshalb ein Potential, die Verzerrungsenergiedichte $U_0(\varepsilon_{ij})$, aus der die Spannungen durch partielle Ableitung hervorgehen.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.13)$$

Leitet man Glg. (2.13) partiell nach ε_{kl} ab, erhält man die Komponenten des Elastizitätstensors.

$$E_{ijkl} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (2.14)$$

Die partiellen Differentiationen sind vertauschbar, deshalb müssen die Indexgruppen ij und kl vertauschbar sein. Dieser Umstand bedingt die Symmetrie der Elastizitäts- und Nachgiebigkeitsmatrizen, d.h. es existieren auch im voll anisotropen Fall nur mehr 21 unabhängige Komponenten [3].

Das Materialgesetz Glg. (2.11) heisst für linear elastische Materialien Hooke'sches Gesetz.

2.1.4 Gleichgewichtsbedingungen

An einem Volumenelement dV wirken die Schnittkraft, also die Spannung $\underline{\mathbf{t}}$, und die Volumskraftdichte $\underline{\mathbf{q}}$

$$\oint_A \underline{\mathbf{t}} \, dA + \int_V \underline{\mathbf{q}} \, dV = \underline{\mathbf{0}}. \quad (2.15)$$

Einsetzen von Glg. (2.3) ergibt

$$\oint_A \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \underline{\mathbf{n}} \, dA + \int_V \underline{\mathbf{q}} \, dV = \underline{\mathbf{0}}, \quad (2.16)$$

angeschrieben in Indexschreibweise

$$\oint_A \sigma_{ij} n_j \, dA + \int_V q_i \, dV = 0. \quad (2.17)$$

Die Verwendung des Gauss'schen Integralsatzes auf das Oberflächenintegral ergibt

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + q_i \right) \, dV = 0. \quad (2.18)$$

Diese Beziehung muss für jedes beliebige V gelten, daher kann das Kräftegleichgewicht schließlich

$$\sigma_{ij,j} + q_i = 0 \quad (2.19)$$

geschrieben werden.

Trägheitskräfte könnten als Volumskräfte angesehen werden, kommen jedoch in den angegebenen Gleichungen nicht explizit vor, d.h. diese gelten nur für den statischen Fall.

2.1.5 Homogenisierte Größen

Bei den in dieser Arbeit untersuchten Werkstoffen handelt es sich um inhomogene Materialien bzw. Strukturen. Um trotzdem aussagekräftige Werte zu erhalten, muss man das Material makroskopisch betrachten, d.h. die sogenannten homogenisierten (oder “verschmierten”) Spannungen, Verzerrungen und elastischen Eigenschaften sind als über ein hinreichend großes Gebiet innerhalb der Struktur gemittelte Werte zu verstehen. Die tatsächlich im Grundwerkstoff auftretenden Spannungen und Verzerrungen können sich jedoch von den homogenisierten stark unterscheiden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es unter anderem, einen Zusammenhang zwischen homogenisierten (globalen) Verzerrungen und globalen Spannungen herzustellen und damit geometrieabhängige effektive elastische Eigenschaften zu erhalten.

2.2 Nichtlineare Probleme

Geometrische Nichtlinearitäten entstehen aus der Berücksichtigung großer Verzerrungen. Dazu darf der Verzerrungstensor nicht mehr linearisiert werden, Kap. 2.1.2. Außerdem darf das Gleichgewicht nicht am unverformten Körper betrachtet werden, sondern am aktuellen Zustand des Körpers.

Weitere Nichtlinearitäten können aus dem Materialverhalten entstehen, beispielsweise aus Plastizität [3], [5].

Einige Aspekte von nichtlinearen Finite-Elemente-Analysen werden im folgenden behandelt.

2.2.1 Last-Verschiebungs-Pfad

Es wird angenommen, dass die Aufbringung der Lasten so langsam geschieht, dass keine Trägheitskräfte entstehen. Damit gibt es einen Zusammenhang zwischen der Last, die auf eine Struktur aufgebracht wird, und den Verschiebungen (im Falle homogenisierter Größen ist das gleichbedeutend mit einem Zusammenhang zwischen globalen Spannungen und globalen Verzerrungen).

Trägt man zu jedem Wert der globalen Verzerrung die zugehörige globale Spannung auf, ergibt sich der Last-Verschiebungs-Pfad, Abb. 2.3. Die Anfangstangente ${}^0\mathbf{K}$ entspricht dem Verhalten der Struktur bei linearisierter Betrachtungsweise.

2.2.2 Tangentensteifigkeitsmatrix

An jeder Stelle m dieser Kurve kann eine Tangentensteifigkeitsmatrix, Abb. 2.3, aufgestellt werden, diese enthält einen Anteil des Verhaltens im Anfangszustand und einen deformations- bzw. spannungsabhängigen Anteil.

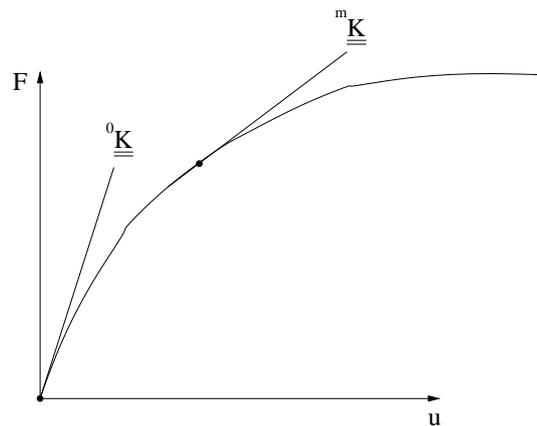


Abbildung 2.3: Last-Verschiebungs-Pfad, Tangentensteifigkeitsmatrix

2.2.3 Gleichgewichtsverzweigung und Durchschlagen

Die kritische Last einer Struktur ist jene, bei der eine instabile Gleichgewichtslage auftritt. Das bedeutet, dass es zu einer gegebenen Last bzw. Verschiebung mehr als eine Gleichgewichtslage gibt.

Zusätzlich zum Last-Verschiebungs-Pfad können nun Kurven der Schätzwerte der kritischen Lasten gefunden werden, Abb. 2.4. Diese bestimmen sich aus Eigenwertanalysen unter Verwendung der Tangentensteifigkeitsmatrizen (begleitende Eigenwertanalysen). Das in ABAQUS gelöste Eigenwertproblem an einem Punkt der Deformationsgeschichte lautet

$$\left[\begin{matrix} m\u0304\u039b \\ 0 \end{matrix} + \lambda_i \begin{matrix} m\u0304\u039b_{\Delta} \end{matrix} \right] m\u0304\u0399_i = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

λ_i sind die Eigenwerte, $m\u0304\u0399$ die Beulfiguren, $m\u0304\u039b$ die Tangentensteifigkeitsmatrix zum Zustand m und $m\u0304\u039b_{\Delta}$ die inkrementelle Steifigkeitsmatrix. Diese enthält Terme für die inkrementelle Anfangsspannungs- und Laststeifigkeit. Die kritische Last ergibt sich bei ABAQUS folgendermaßen. \underline{P} ist der bisher aufgebrauchte Lastvektor, \underline{Q} die inkrementelle Last bei der Eigenwertanalyse und λ der von ABAQUS berechnete Eigenwert,

$$\underline{P}_{\text{krit.}} = \underline{P} + \lambda \underline{Q}. \quad (2.21)$$

Schneidet die Kurve der Schätzwerte der kritischen Lasten den Last-Verschiebungs-Pfad, liegt ein Stabilitätsproblem vor: Liegt dieser Schnittpunkt nicht an der Stelle einer horizontalen Tangente des Last-Verschiebungs-Pfades, handelt es sich um eine sogenannte Gleichgewichtsverzweigung, liegt der Schnittpunkt an der Stelle einer horizontalen Tangente, liegt ein Durchschlagsproblem vor.

Bei einer Gleichgewichtsverzweigung gabelt sich also der Last-Verschiebungs-Pfad (Bifurkation), bei Durchschlagen gibt es nur einen weiterführenden Gleichgewichtspfad, dieser ist jedoch instabil. Handelt es sich bei der Stelle einer horizontalen

Tangente um ein globales Maximum, d.h. die Struktur kann bei weiterer Deformation nie wieder eine höhere Last tragen, dann spricht man von einem Traglastproblem.

Die Kurve der kritischen Lasten wird deshalb als Schätzwertkurve bezeichnet, weil die kritischen Lasten mit der Tangentensteifigkeitsmatrix an der Stelle der Last-Verschiebungs-Geschichte, an der die Eigenwertanalyse durchgeführt wird, berechnet werden, die Veränderung der Tangentensteifigkeitsmatrix auf dem Weg zum Erreichen der kritischen Last wird dabei nicht berücksichtigt.

Die Kurve der Schätzwerte stimmt nur am Schnittpunkt mit dem Last-Verschiebungs-Pfad exakt.

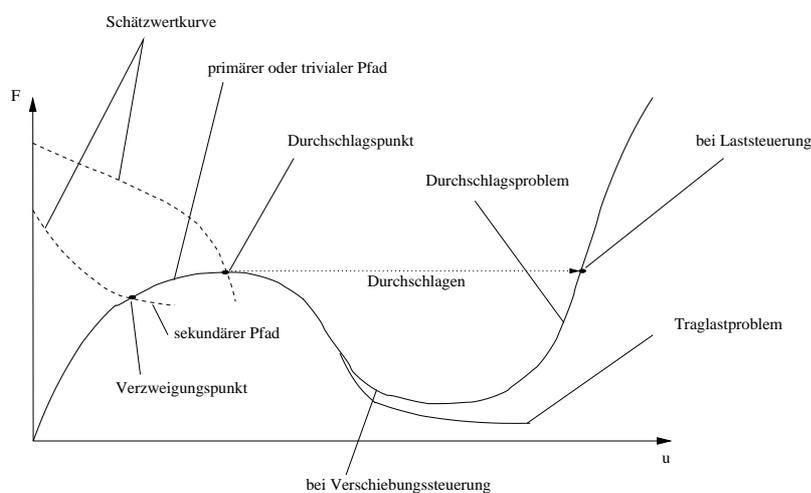


Abbildung 2.4: Last-Verschiebungs-Pfad, Verzweigung und Durchschlagen

2.2.4 Trivialer Pfad und Nachbeulverhalten

Trifft man bei einer nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse eines Verzweigungsproblems keine besonderen Vorkehrungen, dann wird meist der sogenannte triviale Pfad weiterverfolgt. Bei diesem handelt es sich um instabile Gleichgewichtslagen.

Der sekundäre Pfad nach einem Bifurkationspunkt kann nun steigend oder fallend sein. Fällt er, handelt es sich ebenfalls um instabile Gleichgewichtslagen, steigt er, sind die Gleichgewichtslagen stabil - instabiles oder stabiles Nachbeulverhalten.

Auch beim trivialen Pfad nach einem Durchschlagspunkt, der ja auch fallend sein muss, handelt es sich um instabile Gleichgewichtslagen.

2.2.5 Last- und Verschiebungssteuerung

Unter Laststeuerung versteht man eine kontinuierliche Steigerung der aufgebrauchten Last, unter Verschiebungssteuerung eine Steigerung der aufgebrauchten Verschiebung.

gen.

Bei Laststeuerung muss nach dem Erreichen eines Durchschlagpunktes die nächstmögliche stabile Lage angenommen werden, also der nächste Schnittpunkt der horizontalen Tangente des Durchschlagpunktes mit einem steigenden Ast des Last-Verschiebungs-Pfades, Abb. 2.4. Dabei kommt es zu einer sprunghaften Änderung der Form, dem Durchschlagen.

Bei Traglastproblemen gibt es keinen solchen Schnittpunkt, d.h. alle weiteren Punkte nach Erreichen des globalen Maximums sind bedeutungslos.

Bei Gleichgewichtsverzweigung ist das Nachbeulverhalten entscheidend: Ist es stabil, kann die Last weiter gesteigert werden, ist es instabil, tritt entweder das Verhalten eines Durchschlagsproblems auf oder jenes eines Traglastproblems.

Bei Verschiebungssteuerung wird nach dem Erreichen eines Durchschlagpunktes der instabile Pfad verfolgt.

2.2.6 Imperfektionen

Durch das Aufbringen von geometrischen Imperfektionen - darunter versteht man geringe Änderungen der ursprünglichen Geometrie einer Struktur - in Form desjenigen Eigenmodes, dessen zugehörige kritische Last bei Bifurkationsproblemen den Last-Verschiebungs-Pfad als erste schneidet, kann die Struktur dazu provoziert werden, einen Pfad nahe dem sekundären zu durchlaufen.

Ob es danach zu einem Durchschlags-, Traglast- oder stabilen Spannungsproblem kommt, hängt von der Form des sekundären Pfades und der Größe der Imperfektion ab, Abb. 2.5.

In dieser Arbeit wird eine Linearkombination der untersten Eigenmodes verwendet. Man muss jedoch darauf achten, wie die Eigenformen zusammenwirken; häufig wird daher in dieser Arbeit jeweils nur ein Eigenmode als Imperfektion aufgebracht.

2.2.7 Inkrementell-Iteratives Verfahren

Die Tangentensteifigkeitsmatrix zum Zustand m , ${}^m_0\mathbf{K}$, wird in Abhängigkeit der Materialeigenschaften, der momentanen Spannungen und Knotenverschiebungen berechnet.

Der Vektor der verallgemeinerten inneren Kräfte ${}^m_0\mathbf{F}$ wird ebenfalls aus den momentanen Spannungen und Knotenverschiebungen berechnet. Mit dem Vektor der äußeren Kräfte ${}^{m+1}_0\mathbf{R}$ lässt sich der Vektor der Verschiebungsinkremente $\Delta\mathbf{U}$ aus der linearisierten inkrementellen Gleichgewichtsbedingung [5] [6] berechnen, m ist der aktuelle, bekannte Zustand, $m + 1$ der neue, zu berechnende Zustand.

$${}^m_0\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = {}^{m+1}_0\mathbf{R} - {}^m_0\mathbf{F}. \quad (2.22)$$

Im aktualisierten Zustand $\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}$ wird erneut der Vektor der verallgemeinerten

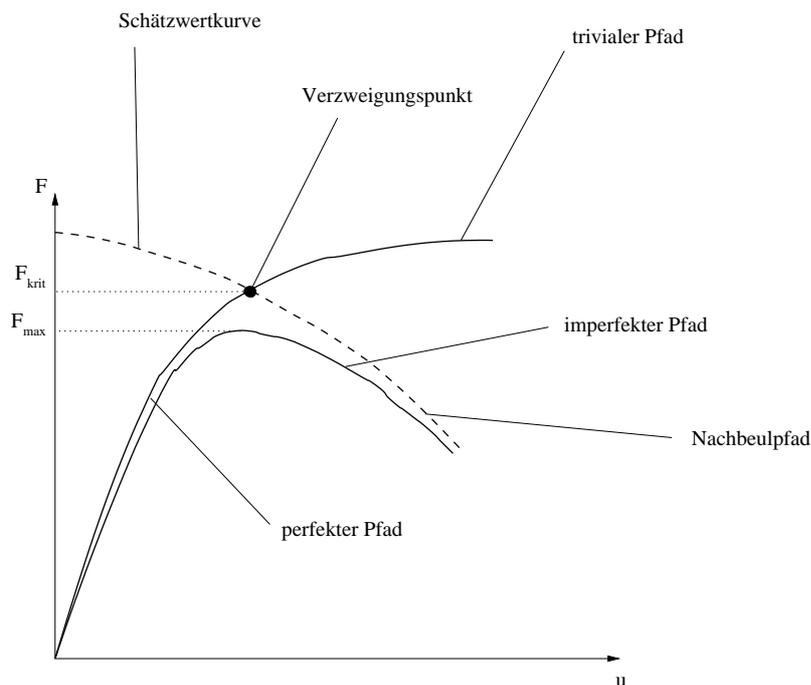


Abbildung 2.5: Last-Verschiebungs-Pfad, perfekte und imperfekte Struktur

inneren Kräfte berechnet. Diese Vorgehensweise wird so lange wiederholt, bis der Vektor der verallgemeinerten inneren Kräfte und der Vektor der äußeren Kräfte übereinstimmen.

Beim Newton-Raphson-Verfahren wird dabei mit einem konstanten Kraftvektor ${}^{m+1}_0 \underline{\mathbf{R}}$ gearbeitet, Abb. 2.6, die Tangentensteifigkeitsmatrix wird aber bei jeder Iteration neu berechnet. i ist dabei die Anzahl der bereits durchgeführten Iterationen.

Beim modifizierten Riks-Wempner-Verfahren, Abb. 2.7, wird die Last mit einem Proportionalitätsfaktor λ multipliziert. Ein verallgemeinerter Verschiebungsvektor $\underline{\mathbf{V}}$ wird erstellt, dessen Inkrement lautet

$$\Delta \underline{\mathbf{V}} = (\Delta \lambda, [\Delta \underline{\mathbf{U}}^T])^T. \quad (2.23)$$

Dieses muss immer normal auf den während der Iteration konstant gehaltenen Vektor ${}^{m+1}_0 \underline{\mathbf{r}}$ stehen

$${}^{m+1}_0 \underline{\mathbf{r}}^T \cdot [\Delta(\Delta \underline{\mathbf{V}})]^i = 0. \quad (2.24)$$

Der Vektor ${}^{m+1}_0 \underline{\mathbf{r}}$ entspricht dem verallgemeinerten Verschiebungsvektor des ersten Iterationsschrittes im Inkrement.

Die Lösung des Riks-Wempner-Verfahrens ist der verallgemeinerte Verschiebungsvektor, d.h. der Proportionalitätsfaktor λ ist Teil der Lösung.

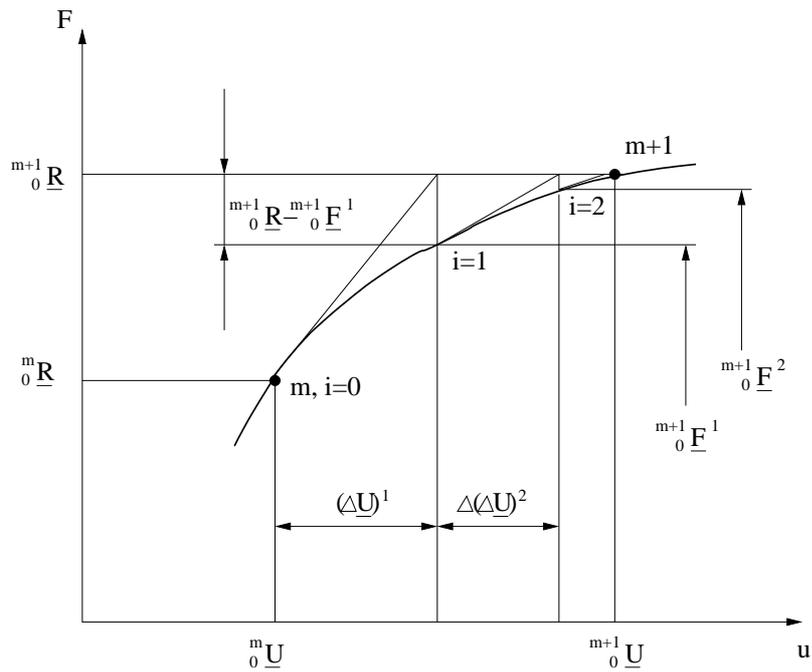


Abbildung 2.6: Newton-Raphson-Verfahren

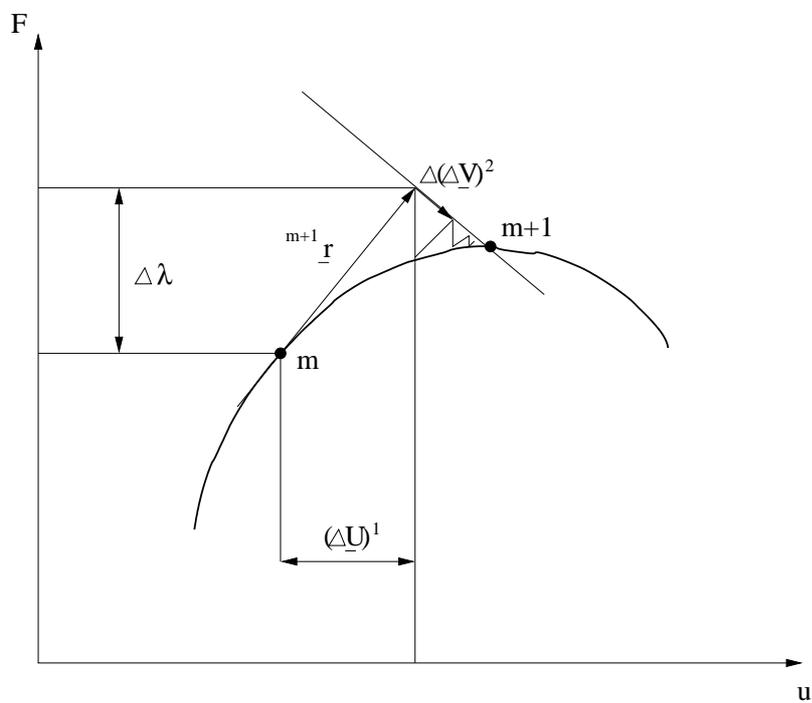


Abbildung 2.7: Modifiziertes Riks-Wempner-Verfahren

Damit kann auch bei Überschreiten von Durchschlagspunkten verlässlich eine eindeutige Lösung iterativ gefunden werden, Abb. 2.7.

2.3 Anisotropie

Unter Anisotropie versteht man die Richtungsabhängigkeit der Eigenschaften eines Materials oder einer Struktur.

Im folgenden werden diejenigen Fälle behandelt, die im Rahmen dieser Arbeit relevant sind.

2.3.1 Isotrope Materialien

Bei isotropen, d.h. richtungsunabhängigen Werkstoffeigenschaften (treten z.B. bei Metallen auf, aber auch fallweise bei Schäumen - im Sinne homogenisierter Eigenschaften, weil sich die statistisch regellos verteilten Zellen makroskopisch vom Verhalten her ausgleichen) kann der Elastizitätstensor in Abhängigkeit zweier unabhängiger Konstanten E und ν dargestellt werden [7],

$$E_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} \right]. \quad (2.25)$$

Alle 36 Elemente der Nachgiebigkeitsmatrix, Abb. 2.8, können ebenfalls aus diesen beiden Parametern gebildet werden,

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 1+\nu & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1+\nu & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Diese Matrix ist gegenüber Rotationstransformationen invariant, d.h. unabhängig davon, in welcher Richtung man ein isotropes Material belastet, wird es das gleiche Verhalten zeigen.

In Abb. 2.8 sind die Abhängigkeiten dargestellt: Durch Linien miteinander verbundene Elemente sind identisch, die Punkte stehen für die unabhängigen Parameter, ein Kreuz bedeutet, dass der Wert dieses Elements aus den unabhängigen Parametern gebildet werden kann [8].

2.3.2 Kubische Materialsymmetrien

Bei kubischen Materialsymmetrien [7] gibt es drei ausgezeichnete orthogonale Materialachsen, das Verhalten in jede dieser drei Richtungen ist jedoch identisch; das Verhalten in von den Materialachsen abweichenden Richtungen unterscheidet sich z.T. stark davon. Deswegen ist die Nachgiebigkeitsmatrix kubischer Materialien, Abb. 2.9, nicht mehr rotationsinvariant.

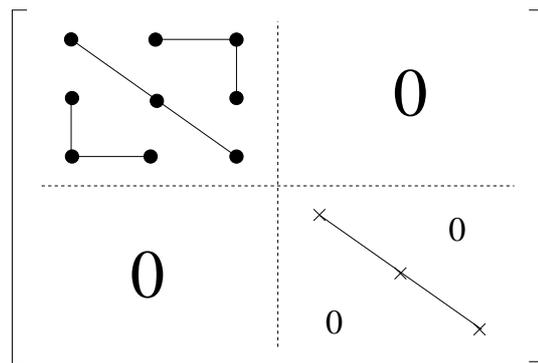


Abbildung 2.8: Nachgiebigkeitsmatrix eines isotropen Materials

Bei Belastung außerhalb der Materialhauptachsen können Normalspannungen Schubverzerrungen hervorrufen und umgekehrt, was im isotropen Fall ausgeschlossen ist. Die Nachgiebigkeitsmatrix eines kubisch anisotropen Materials enthält drei unabhängige Parameter.

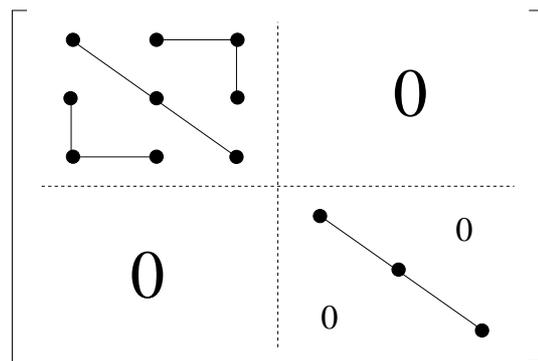


Abbildung 2.9: Nachgiebigkeitsmatrix eines kubischen Materials, dargestellt im Materialachsensystem

2.3.3 Tetragonale Materialsymmetrien

Bei tetragonalen Materialsymmetrien [7] gibt es wieder drei ausgezeichnete Materialachsen, das Verhalten ist jedoch nur in zwei dieser Richtungen identisch, die dritte zeigt abweichendes Verhalten. Das Verhalten in von den Materialachsen abweichenden Richtungen kann wieder stark unterschiedlich sein. Auch hier können Normalspannungen Schubverzerrungen hervorrufen und umgekehrt.

Die Nachgiebigkeitsmatrix eines tetragonal anisotropen Materials, Abb. 2.10, enthält sechs unabhängige Parameter.

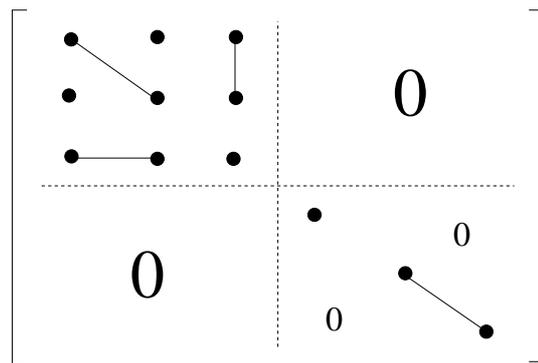


Abbildung 2.10: Nachgiebigkeitsmatrix eines tetragonalen Materials, dargestellt im Materialachsensystem; 1- und 2-Richtung identisch, 3-Richtung ausgezeichnet

2.3.4 Zusammenhang zwischen Geometrie und Anisotropie

Die Geometrie einer Struktur entscheidet über das Ausmass ihrer Anisotropie: besitzt eine Struktur drei Achsen, um die vierfache Rotationssymmetrie besteht (d.h. bei Rotation um 90° geht die Struktur wieder in sich selbst über) oder besitzt eine Struktur vier Achsen, um die dreifache Rotationssymmetrie besteht (bei Rotation um 120° geht die Struktur in sich selbst über) dann ist das Materialverhalten der Struktur kubisch. Ersterer Fall ist bei den Flächennormalen eines Würfels gegeben, zweiterer Fall bei den Raumdiagonalen eines Würfels [8].

2.4 Konzept der Einheitszelle

Da *regelmäßige* zelluläre Strukturen aus sich immer wiederholenden Mustern bestehen, lässt sich zu jeder Struktur die minimale Einheit finden, die bei periodischer Vervielfältigung dann die ganze Struktur ergibt. Diese Einheit wird Einheitszelle genannt, Abb. 2.11.

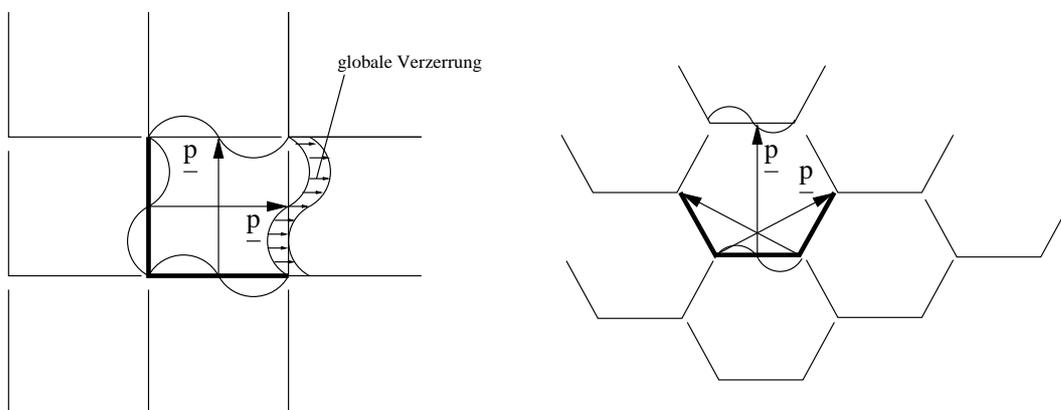


Abbildung 2.11: Einheitszellen in der Ebene

2.4.1 Periodische Randbedingungen

Damit auch die verformten Einheitszellen kompatibel sind, d.h. den Raum ohne Lücken oder Überlappen ausfüllen, müssen die Verschiebungen an den Rändern der Zelle bestimmte Bedingungen erfüllen: Punkte der Einheitszelle, die durch einen Periodizitätsvektor \underline{p} verbunden sind, müssen identische Verschiebungen und Rotationen aufweisen sowie einen Verschiebungsbeitrag, der durch die globale Verzerrung gegeben ist, Abb. 2.11. [9], [2].

Im vorliegenden Fall wurden drei zueinander orthogonale Periodizitätsvektoren verwendet, d.h. die gegenüberliegenden Seiten eines Quaders müssen zusammenpassende Verformungsmuster aufweisen, um assemblierbar zu sein.

Die Zahl der linear unabhängigen Periodizitätsvektoren entspricht der Dimension des Problems. Alle weiteren Periodizitätsvektoren können durch Linearkombination der anderen gebildet werden.

2.4.2 Masternodes und Slavenodes

Bei der Finite-Elemente-Methode werden für jene Freiheitsgrade, also Knotenverschiebungen und fallweise -rotationen, deren Verschiebung bzw. Rotationen vorgegeben werden, die Reaktionskräfte berechnet. Werden Knotenkräfte oder -momente vorgegeben, werden die Verschiebungen bzw. Rotationen berechnet.

Zur Vorgabe der globalen Verzerrungen bzw. Spannungen werden neun Parameter benötigt (diese entsprechen den neun Komponenten des globalen Verzerrungs- bzw. Spannungstensors). Diese neun Parameter stellen neun Kräfte bei Vorgabe eines Spannungstensors und neun Verschiebungen bei Vorgabe eines Verzerrungstensors dar. Aufgrund der Symmetrie der Spannungs- und Verzerrungstensoren sind nur sechs dieser neun Parameter unabhängig.

Diese Kräfte bzw. Verschiebungen werden in dieser Arbeit auf drei sogenannte Masternodes aufgebracht, die nicht physisch mit der zu simulierenden Geometrie zusammenhängen, sie sind also nicht Teil von Elementen, Abb. 2.12.

Die Masternodes dienen also zur Steuerung der Lastfälle, die auf die Struktur aufgebracht werden sollen. Dieser Zugang wird auch "Methode der makroskopischen Freiheitsgrade" genannt, [9].

Für die drei Richtungen des Raumes gibt nun je ein Masternode die zwei Schub- und eine Normalkomponente der globalen Verzerrungen bzw. globalen Spannungen vor.

Die restlichen Knoten, die Teil der zu simulierenden Geometrie sind, werden Slavenodes genannt.

Bei Vorgabe eines globalen Spannungstensors berechnen sich die neun Masternode-Kräfte nach

$$F_{jM_i} = \oint_{\Gamma_i} \sigma_{ij} n_{\Gamma} d\Gamma. \quad (2.27)$$

Diese Beziehung vereinfacht sich im Falle kleiner Verzerrungen und ebener Begrenzungsflächen zu

$$F_{M_{ij}} = \sigma_{ij} A_i, \quad (2.28)$$

wobei hier nicht über i zu summieren ist. A_i bezeichnet die Fläche der Zelle quer zum Masternode Ortsvektor i .

Auch bei Vorgabe eines globalen Verzerrungstensors wird in dieser Arbeit eine vereinfachte Beziehung benutzt,

$$u_{M_{ij}} = \varepsilon_{ij} l_i \quad (2.29)$$

ohne Summation über i . l_i bezeichnet die Länge der Zelle in Richtung des Masternode Ortsvektors i .

Die vereinfachten Beziehungen sind strenggenommen nur bei Annahme kleiner Verzerrungen zulässig, welche jedoch bei geometrisch nichtlinearer Rechnung verletzt werden muss, Kap. 5.

Auf die programmtechnische Realisierung der allgemeineren Beziehungen wird aufgrund des begrenzten Umfangs dieser Arbeit verzichtet.

Der Vektor der Freiheitsgrade eines Masternodes lautet

$$\underline{u}_{M_i} = \begin{bmatrix} u_{1M_i} \\ u_{2M_i} \\ u_{3M_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Die Rotationsfreiheitsgrade der Masternodes werden hier mit 0 angegeben, weil damit die Formulierung der Koppelgleichungen für alle Freiheitsgrade einheitlich durchgeführt werden kann. Die Masternodes besitzen jedoch eigentlich keine Rotationsfreiheitsgrade.

2.4.3 Formulierung der Koppelgleichungen

Koppelgleichungen dienen dazu, die Verschiebungen bzw. Kräfte, die auf die Masternodes aufgebracht werden, gleichmäßig auf mehrere andere Knoten zu verteilen. Anders formuliert, die Koppelgleichungen dienen dazu, Verschiebungsdifferenzen zwischen Knoten oder Knotengruppen (Nodesets) zu definieren, diese Verschiebungsdifferenzen entsprechen den globalen Anteilen der Verschiebungen.

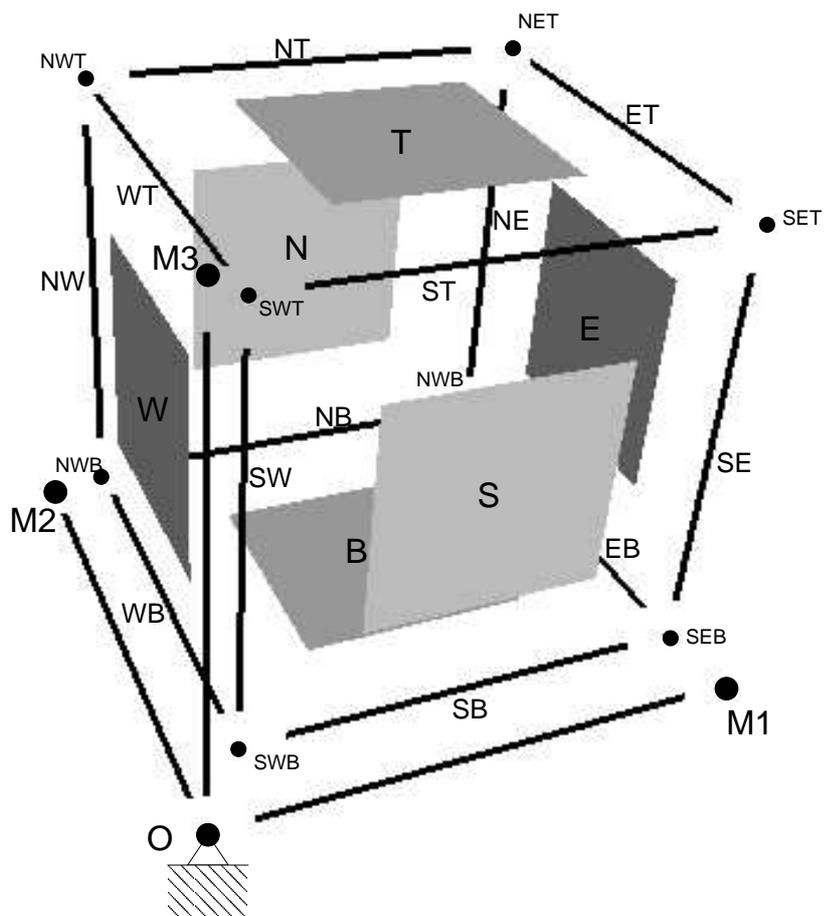


Abbildung 2.12: Kubische Einheitszelle mit orthogonalen Periodizitätsvektoren, Bezeichnungen

Um eine flexible Anwendung auf verschiedenste Strukturen und eine programmtechnische Automatisierung zu ermöglichen, wurden die Koppelgleichungen möglichst allgemein formuliert:

A und B seien zwei Punkte, die durch einen Periodizitätsvektor $\underline{\mathbf{p}}^{(k)}$ miteinander verbunden sind (periodisches Paar), der in beliebiger Lage zu den Ortsvektoren der Masternodes steht, Abb. 2.13.

Der jeweilige Periodizitätsvektor wird also in seine Komponenten im System der Masternode-Ortsvektoren aufgespalten. Die Verzerrungen sollen für diese Anteile von $\underline{\mathbf{p}}^{(k)}$ gleich sein den Verzerrungen, die auf die Masternodes aufgebracht werden

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{iM_j}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_j}|} + \frac{u_{jM_i}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_i}|} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{iA} - u_{iB}}{\underline{\mathbf{x}}_{M_j} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(k)}} |\underline{\mathbf{x}}_{M_j}| + \frac{u_{jA} - u_{jB}}{\underline{\mathbf{x}}_{M_i} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(k)}} |\underline{\mathbf{x}}_{M_i}| \right). \quad (2.31)$$

In dieser Gleichung tritt für die Schubverzerrungen eine Kopplung der Verschiebungsdifferenzen in zwei Richtungen auf. Um dieses Problem zu vermeiden, muss die gesamte Schubverzerrung in einer Ebene durch nur einen Masternode dargestellt werden, nähere Erläuterung in Kap. 3.2.5.

Obige Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{u_{iM_j}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_j}|} = \frac{1}{2} \frac{u_{iA} - u_{iB}}{\underline{\mathbf{x}}_{M_j} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(k)}} |\underline{\mathbf{x}}_{M_j}|. \quad (2.32)$$

Damit lautet die allgemeine Form der Koppelgleichung dieser zwei Punkte

$$\underline{\mathbf{u}}_A - \underline{\mathbf{u}}_B - \frac{\underline{\mathbf{x}}_{M_1} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(k)}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_1}|^2} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{M_1} - \frac{\underline{\mathbf{x}}_{M_2} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(k)}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_2}|^2} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{M_2} - \frac{\underline{\mathbf{x}}_{M_3} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{(k)}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_3}|^2} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{M_3} = \underline{\mathbf{0}} \quad (2.33)$$

für dreidimensionale Probleme.

Sollen nicht orthogonale Periodizitätsvektoren verwendet werden, müssen die gesamten Schubverzerrungen einer Ebene auf jeweils einen Masternode aufgebracht werden, bei orthogonalen Periodizitätsvektoren können die Schubverzerrungen beliebig auf die Masternodes aufgeteilt werden.

Gleichung (2.33) vereinfacht sich im Falle dreier zueinander orthogonaler Periodizitätsvektoren mit gleicher Länge und Richtung wie die drei Masternode-Ortsvektoren, Abb. 2.12, zu folgenden Gleichungen (angeschrieben für alle drei Periodizitätsvektoren), N steht für North, E für East usw.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}_E - \underline{\mathbf{u}}_W - \underline{\mathbf{u}}_{M_1} &= \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{u}}_N - \underline{\mathbf{u}}_S - \underline{\mathbf{u}}_{M_2} &= \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{u}}_T - \underline{\mathbf{u}}_B - \underline{\mathbf{u}}_{M_3} &= \underline{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Kommt ein Knoten in mehreren periodischen Paaren vor, können die Gleichungen addiert werden, um für jeden Knoten nur eine Gleichung angeben zu müssen.

Für den Fall eines Knotens, der in drei periodischen Paaren vorkommt, lautet die Koppelgleichung also z.B. folgendermaßen

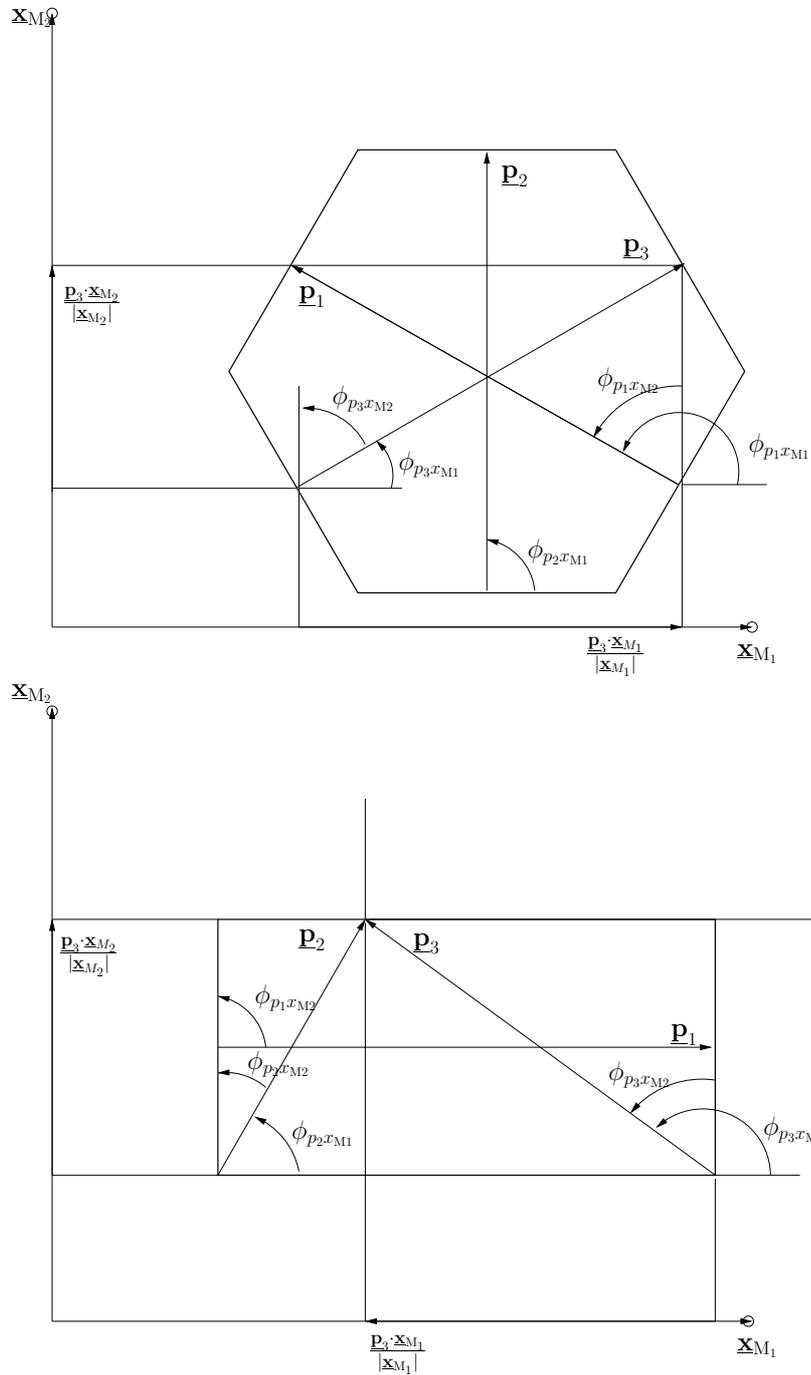


Abbildung 2.13: Projektion der Periodizitätsvektoren

$$3\mathbf{u}_{\text{NET}} - \mathbf{u}_{\text{NWT}} - \mathbf{u}_{\text{SET}} - \mathbf{u}_{\text{NEB}} - \mathbf{u}_{\text{M1}} - \mathbf{u}_{\text{M2}} - \mathbf{u}_{\text{M3}} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

In der vorliegenden Arbeit treten auf im Sinne der Periodizitätsvektoren gegenüberliegenden Seiten Finite Elemente nur auf einer Seite auf, weil sie ja sonst nach Vielfältigung doppelt vorkommen würden, Abb. 2.11. Das gilt aber nicht für Knoten, denn diese könnten ja zu einem Element gehören, das aus dem Inneren der Zelle zum Rand reicht.

Zum Auffinden der periodischen Paare müssen zuerst alle Knoten, die auf den Zellen-seiten mit den fehlenden Elementen liegen, durchlaufen werden, und zwar bezüglich aller vorkommender Periodizitätsvektoren. Dann werden diejenigen Koppelgleichungen, die die gleichen Knoten enthalten, addiert.

Damit werden auch überflüssige Gleichungen, die bei der Verwendung linear abhängiger Periodizitätsvektoren aufgestellt werden (auch die Koppelgleichungen sind damit linear abhängig) wieder entfernt.

2.4.4 Äquivalente Einheitszellen

Anstatt eine Einheitszelle mit nicht zueinander orthogonalen Periodizitätsvektoren zu verwenden, kann immer auch eine größere Einheitszelle mit orthogonalen Periodizitäten definiert werden, die dieselbe Struktur ergibt. Welche Definition der Einheitszelle gewählt wird, hängt davon ab, wieviel größer und komplexer die orthogonal periodische Zelle sein müsste.

In der Ebene können Dreiecke, Vierecke und Sechsecke zur lückenlosen Füllung verwendet werden; Dreiecke müssten allerdings nicht nur verschoben, sondern auch gedreht werden, wodurch sie sich nicht zur Verwendung als periodische Einheitszellen eignen, deren Konzept auf Translation beruht. Damit bleiben also Parallelogramme und Sechsecke mit parallelen gegenüberliegenden Seiten übrig. Die gegenüberliegenden Seiten können jedoch beliebig verformt sein, ihr Muster muss nur übereinstimmen.

Im Raum können Parallelepipede, sechseckige Prismen, Dodekaeder und Tetrakaidekaeder zur lückenlosen Füllung ohne Rotation verwendet werden. Bei den letzteren drei ergibt ein ebener Schnitt immer ein Sechseck oder ein Viereck [1], damit lässt sich ihre Raumfüllungseigenschaft auf den ebenen Fall zurückführen.

Auch hier können die gegenüberliegenden Flächen gleichartig verformt sein.

Eine sechseckige Einheitszelle kann immer durch Verdopplung in ein Rechteck oder Parallelogramm mit orthogonalen Periodizitätsvektoren übergeführt werden; ein Parallelogramm mit nicht orthogonalen Periodizitätsvektoren kann im allgemeinen in ein Rechteck mit orthogonalen transformiert werden, wobei hier die Größe des resultierenden Rechtecks vom Längenverhältnis und vom Winkel zwischen den Periodizitätsvektoren abhängt, Abb. 2.14.

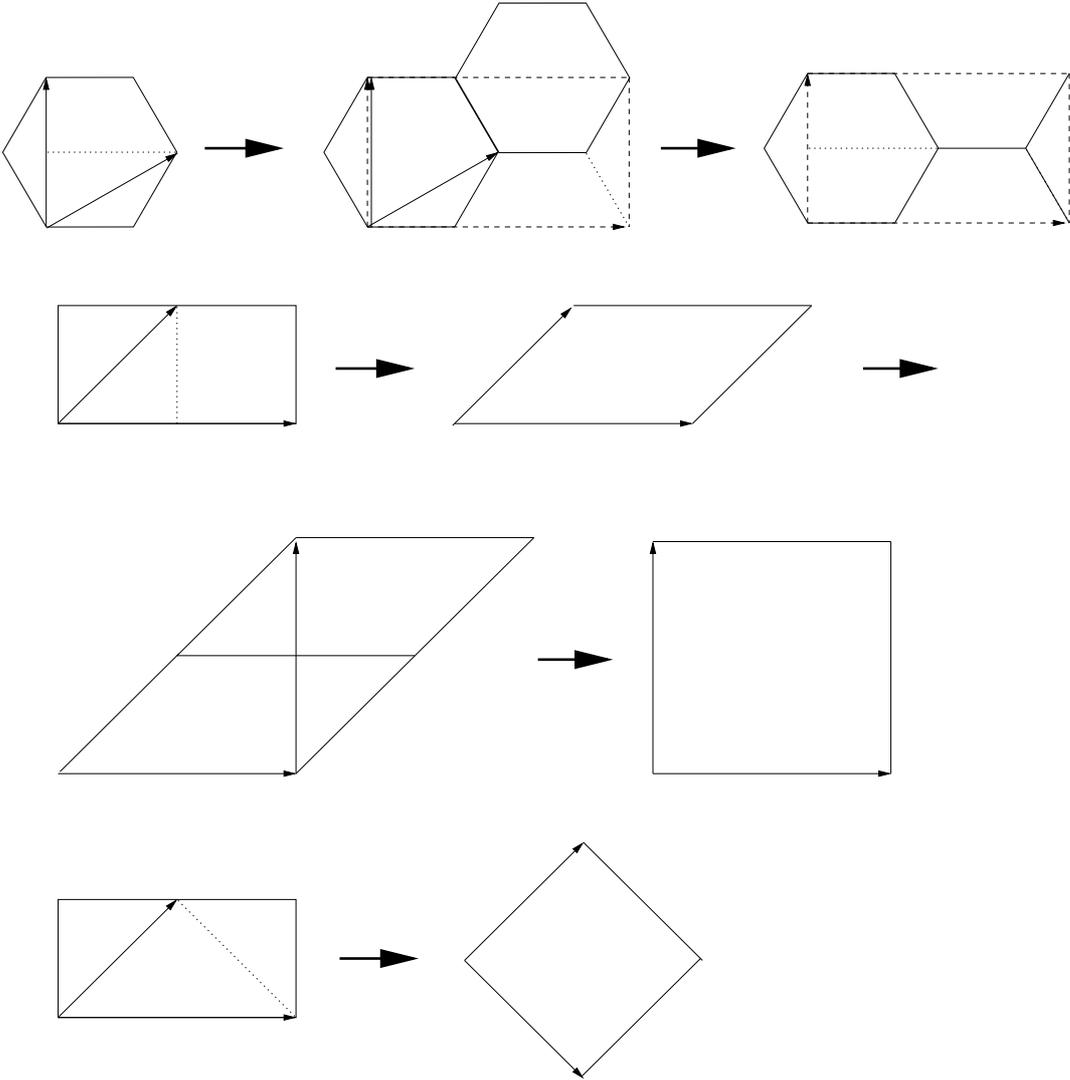


Abbildung 2.14: Transformation von Einheitszellen

Nur wenn der Quotient der Projektion einer Seite des Parallelogramms bzw. Parallelepipeds auf eine andere nicht als ganzzahliger Bruch dargestellt werden kann (d.h. keine rationale Zahl ist) tritt keine Periode auf, und die Zelle kann nicht in eine Zelle mit orthogonalen Periodizitätsvektoren transformiert werden. Die Reihenfolge der Projektion der Vektoren aufeinander ist dabei nicht kommutativ:

Projiziert man in Abb. 2.14 unten die lange Seite des Parallelogramms auf die kurze, kann eine flächengleiche orthogonale Einheitszelle gebildet werden; projiziert man aber die kurze Seite auf die lange (wie in der Abbildung gemacht), dann erhält man eine doppelt so große Einheitszelle.

2.5 Rotationstransformationen

Um beliebige Spannungs- und Verzerrungszustände auf die Strukturen aufbringen zu können (z.B. ein einachsiger Verzerrungszustand in Richtung der Raumdiagonale einer kubischen Einheitszelle), müssen Rotationstransformationen durchgeführt werden.

Die dafür gewählte Methode ist die der Euler'schen Raumwinkel, Abb. 2.15: Durch die Angabe von drei Winkeln kann jede Rotation eindeutig definiert werden. Die Euler-Winkel verwenden eine Rotation um die ursprüngliche 1-Achse, dann eine Rotation um die 3'-Achse und schließlich eine neuerliche Rotation um die 1''-Achse. Der Vorteil dabei ist, dass für die erste und dritte Rotation dieselben Matrizen verwendet werden können.

Vorsicht ist geboten bei der Rücktransformation: Die Matrix der Rücktransformation ergibt sich am einfachsten durch Inversion, das ist aber ein erheblicher Rechenaufwand (zumindest symbolisch). Weniger aufwendig ist es, die Reihenfolge der Rotationen zu vertauschen und die negativen Winkel einzusetzen.

Die hier verwendeten System- und Winkelbezeichnungen lauten wie folgt:

- globales System: O
- lokales System: L
- Winkel sind definiert vom L- zum O-System
- 1-3-1: ϕ - ψ - χ

2.5.1 Rotation eines Vektors

Dieser Fall ist relativ einfach, dazu muss nur eine Matrix, bestehend aus den Einheitsvektoren des globalen Systems, dargestellt im lokalen System, also $e_{0_i|L}$, aufgestellt werden.

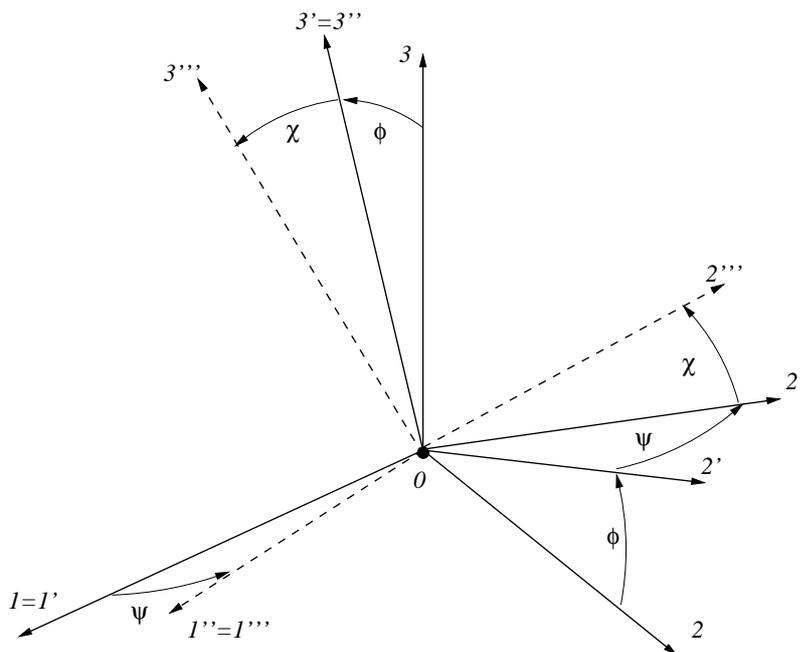


Abbildung 2.15: Eulerwinkel

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{OL_\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\phi O} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{OL_\phi}^T = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{OL_\phi}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{OL_\phi}(-\phi) \quad (2.36)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\psi L_\phi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\psi L_\phi} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\phi L_\psi}^T = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\phi L_\psi}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\phi L_\psi}(-\psi) \quad (2.37)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\psi L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & \sin \chi \\ 0 & -\sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{LL_\psi} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\psi L}^T = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\psi L}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\psi L}(-\chi) \quad (2.38)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_{|O} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{OL} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_{|L}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{OL} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{OL_\phi} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\phi L_\psi} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\psi L}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{LO} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{LL_\psi} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\psi L_\phi} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{L_\phi O} \quad (2.39)$$

In diesem Fall liefern Inversion, Transposition und Einsetzen der negativen Winkel dasselbe Ergebnis.

Allgemein in Indexschreibweise

$$v_i = A_{ij} v_j. \quad (2.40)$$

2.5.2 Rotation eines Tensors

Zur Rotation einer Tensorgröße zweiter Stufe multipliziert man den Tensor von links und von rechts mit Rotationstransformationstensoren. Leicht ersichtlich ist dies aus der Indexschreibweise

$$t_{ij} = A_{ik} t_{kl} A_{lj}. \quad (2.41)$$

In Matrixschreibweise lautet dieser Zusammenhang

$$\underline{\underline{\mathbf{t}}}_{|O} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{OL} \underline{\underline{\mathbf{t}}}_{|L} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{LO}. \quad (2.42)$$

2.5.3 Rotation von Spannungs- und Verzerrungstensor

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Koeffizienten für die einzelnen Komponenten des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors kann nun eine 6×6 Rotationsmatrix für die Komponentenvektoren aufgestellt werden.

Die Rotationsmatrizen lauten

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{OL_\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 0 & 0 & 2 \cos \phi \sin \phi \\ 0 & \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & 0 & -\sin 2\phi \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & -\cos \phi \sin \phi & \cos \phi \sin \phi & 0 & 0 & \cos 2\phi \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{L_\phi L_\psi} = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi & 0 & 2 \cos \psi \sin \psi & 0 & 0 \\ \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & 0 & -\sin 2\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \psi \sin \psi & \cos \psi \sin \psi & 0 & \cos 2\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{L_\psi L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \chi & \sin^2 \chi & 0 & 0 & 2 \cos \chi \sin \chi \\ 0 & \sin^2 \chi & \cos^2 \chi & 0 & 0 & -\sin 2\chi \\ 0 & 0 & 0 & \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & -\cos \chi \sin \chi & \cos \chi \sin \chi & 0 & 0 & \cos 2\chi \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Folgende Umstände müssen berücksichtigt werden:

- Inversion und Transposition stimmen nicht mehr überein.
- Will man den Verzerrungskomponentenvektor mit $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$ verwenden, so muss man die rechte obere 3×3 -Teilmatrix mit 0.5 und die linke untere 3×3 -Teilmatrix mit 2 multiplizieren. Hier handelt es sich um die Verknüpfung von ε und γ .

2.5.4 Rotation von Elastizitäts- und Nachgiebigkeitsmatrix

Analog zum vorigen Abschnitt wird hier wieder die Ordnung des zugrundeliegenden Tensors verdoppelt, d.h. $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ bzw. $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ müssen nun wieder von vorne und von hinten mit den Rotationstransformationsmatrizen multipliziert werden.

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{|O} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{OL} \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{|L} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{LO} \quad (2.46)$$

2.6 Dichteabhängigkeit des E-Moduls eines zellulären Materials

Bei der Behandlung zellulärer Materialien ist der Begriff der relativen Dichte oder scheinbaren Dichte von großer Bedeutung: Würde eine Struktur durch äußere Einwirkung (z.B. durch Einschmelzen o.ä.) zu einer kompakten Masse komprimiert, ergäbe das ein bestimmtes Volumen - sozusagen der Materialaufwand zur Herstellung der Struktur. Das Verhältnis zwischen diesem kompaktierten Volumen $V_{\text{Mat.}}$ und dem tatsächlichen Volumen V_{Zelle} , das die Struktur ausfüllt, nennt man relative Dichte $\rho_{\text{rel.}}$ [1].

Typische Werte für die relative Dichte, die in dieser Arbeit verwendet wurden, liegen bei 0.1 – 0.2.

$$\rho_{\text{rel.}} = \frac{V_{\text{Mat.}}}{V_{\text{Zelle}}} \quad (2.47)$$

Die Abhängigkeit der makroskopischen Materialeigenschaften von der relativen Dichte sind unterschiedlich je nach Belastungsmodus bzw. Topologie der Struktur [1].

Die relative Dichte ist bei aus Balken aufgebauten Strukturen abhängig vom Quadrat des Radius ($l_{\text{ges.}} = \sum_{i=1}^N l_i$ mit N Balken in der Einheitszelle).

$$\rho_{\text{rel.}} = \frac{V_{\text{Mat.}}}{V_{\text{Zelle}}} = \frac{\pi l_{\text{ges.}} r^2}{V_{\text{Zelle}}} \Rightarrow \rho_{\text{rel.}} \propto r^2 \quad (2.48)$$

Der Balkenquerschnitt A_{Balken} ist ebenfalls abhängig vom Quadrat des Radius

$$A_{\text{Balken}} = \pi r^2. \quad (2.49)$$

Mit l_{Balken} wird die Länge eines Balkens bezeichnet, mit l_{Zelle} die Erstreckung der Zelle in Lastrichtung und mit A_{Zelle} die Fläche der Einheitszelle quer zur Lastrichtung; w ist die Absenkung der Balkenmitte, bzw die Verschiebung des Balkenendes, Abb. 2.16.

2.6.1 Balken unter Zug

Ist der Hauptbelastungsmodus eine Zug- oder Druckbelastung von Balken in axialer Richtung, Abb. 2.17, so kann die in der Seitenfläche der Zelle wirkende Kraft als

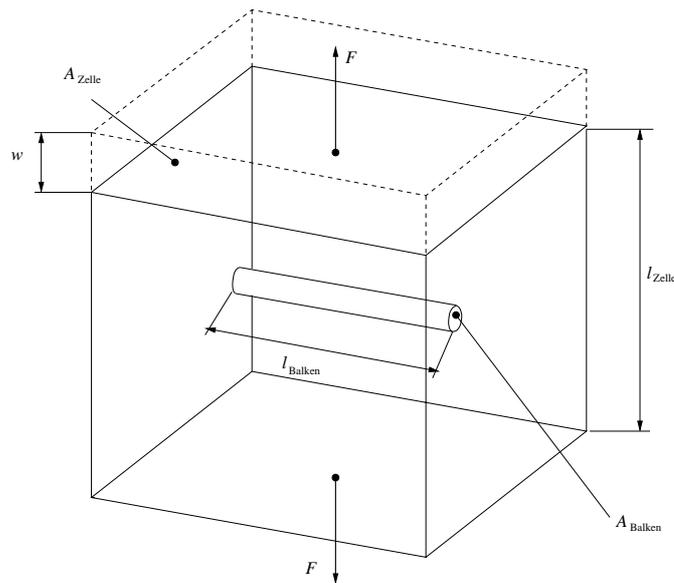


Abbildung 2.16: Bezeichnungen

axiale Belastung auf einen Balken betrachtet werden.

Die Kraft, die am Ende des Balkens wirkt, ergibt sich aus der Querschnittsfläche des Balkens und der Spannung im Material des Balkens. Die Spannung im Balken ergibt sich aus dem E-Modul des Materials und der axialen Verzerrung im Material des Balkens. Daraus ergibt sich eine Beziehung für die globale Spannung, die auf die Zelle wirkt.

$$F = \sigma_{\text{Mat.}} \cdot A_{\text{Balken}} = E_{\text{Mat.}} \cdot \varepsilon_{\text{Mat.}} \cdot A_{\text{Balken}}$$

$$\varepsilon_{\text{Mat.}} = \frac{w}{l_{\text{Balken}}}, \quad (2.50)$$

$$\sigma_{\text{glob.}} = \frac{F}{A_{\text{Zelle}}} \Rightarrow \quad (2.51)$$

$$\sigma_{\text{glob.}} = E_{\text{Mat.}} \cdot \varepsilon_{\text{Mat.}} \cdot \frac{A_{\text{Balken}}}{A_{\text{Zelle}}} = E_{\text{Mat.}} \cdot \frac{w}{l_{\text{Balken}}} \cdot \frac{A_{\text{Balken}}}{A_{\text{Zelle}}} \quad (2.52)$$

Die globale Verzerrung der Zelle, eingesetzt in obige Beziehung, ergibt einen Ausdruck für den globalen E-Modul, also den E-Modul der Struktur. Daraus ist die Abhängigkeit des E-Moduls der Struktur von der relativen Dichte ersichtlich.

$$\varepsilon_{\text{glob.}} = \frac{w}{l_{\text{Zelle}}} \Rightarrow \quad (2.53)$$

$$\sigma_{\text{glob.}} = \underbrace{E_{\text{Mat.}} \cdot \frac{A_{\text{Balken}}}{A_{\text{Zelle}}}}_{E_{\text{glob.}}} \cdot \frac{l_{\text{Zelle}}}{l_{\text{Balken}}} \varepsilon_{\text{glob.}} \Rightarrow$$

$$E_{\text{glob.}} \propto \frac{A_{\text{Balken}}}{l_{\text{Balken}}} \propto \frac{r^2}{l_{\text{Balken}}} \propto \rho_{\text{rel.}} \quad (2.54)$$

Es tritt also eine lineare Abhängigkeit auf.

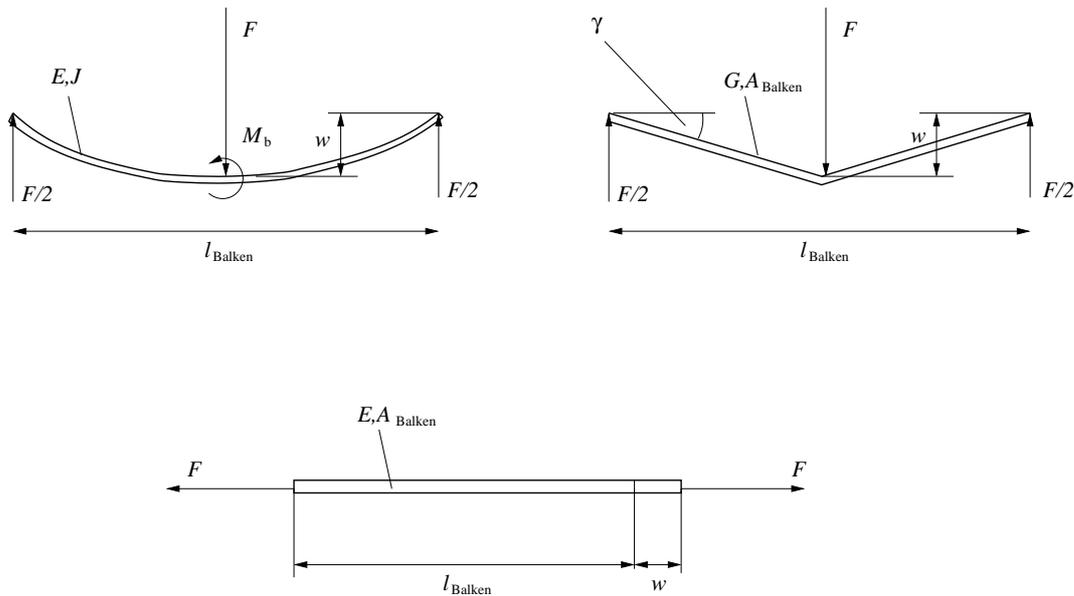


Abbildung 2.17: Biegung, Schub- und Zugdeformation

2.6.2 Balken unter Biegung und Schub

Bei Biegedeformation erhält man die Absenkung der Balkenmitte aus dem Biegemoment durch zweifache Integration (bei Annahme von eingespannten Balkenenden) zu

$$w = \frac{F l_{\text{Balken}}^3}{12 E_{\text{Mat.}} J} \quad (2.55)$$

Einsetzen der Ausdrücke für die globale Spannung (2.51) und die globale Verzerrung (2.53) ergibt

$$\sigma_{\text{glob.}} = \underbrace{\frac{12 l_{\text{Zelle}} E_{\text{Mat.}}}{A_{\text{Zelle}} l_{\text{Balken}}^3}}_{E_{\text{glob.}}} \frac{J}{l_{\text{Balken}}} \varepsilon_{\text{glob.}} \quad (2.56)$$

Mit

$$E_{\text{glob.}} \propto \frac{J}{l_{\text{Balken}}^3} \propto \frac{r^4}{l_{\text{Balken}}^3} \propto \rho_{\text{rel.}}^2 \quad (2.57)$$

tritt eine quadratische Abhängigkeit auf.

Für Schubdeformation lautet der Zusammenhang zwischen Kraft und Schubwinkel

$$F = A_{\text{Balken}} G \gamma, \quad (2.58)$$

der Zusammenhang zwischen Schubwinkel und Absenkung der Balkenmitte ergibt sich zu

$$\gamma = \frac{2w}{l_{\text{Balken}}}. \quad (2.59)$$

Einsetzen von (2.51) und (2.53) liefert

$$\sigma_{\text{glob.}} = \frac{2A_{\text{Balken}} G l_{\text{Zelle}}}{\underbrace{l_{\text{Balken}} A_{\text{Zelle}}}_{E_{\text{glob.}}}} \varepsilon_{\text{glob.}}. \quad (2.60)$$

Mit

$$E_{\text{glob.}} \propto \frac{r^2}{l_{\text{Balken}}} \propto \rho_{\text{rel.}} \quad (2.61)$$

tritt wiederum eine lineare Abhängigkeit auf.

Anmerkung Diese Lastfälle stellen Idealisierungen dar und werden in Wirklichkeit selten rein beobachtet. Es können auch Kombinationen auftreten, sodass die tatsächlichen Exponenten der Dichteabhängigkeit des E-Moduls im Bereich zwischen 1 und 2 liegen werden.

2.6.3 Serien- und Parallelschaltung

Sind zwei verschieden steife Elemente hintereinandergeschaltet, so überwiegt immer der Einfluss des weicheren Modus. Sind sie aber nebeneinander angeordnet, überwiegt der Einfluss des steiferen Modus, Abb. 2.18.

Serienschaltung

Bei Serienschaltung ist für beide Elemente die Kraft gleich gross, damit also auch die globale Spannung. Die gesamte Verschiebung ist die Summe der Verschiebungen der beiden Elemente, damit ist also auch die gesamte globale Verzerrung die Summe der Beiträge der beiden Elemente zur globalen Verzerrung.

$$\varepsilon_{\text{glob.}} = \frac{w}{l_{\text{Zelle}}} = \frac{w_1 + w_2}{l_{\text{Zelle}}} = \varepsilon_{\text{glob.}}^{(1)} + \varepsilon_{\text{glob.}}^{(2)} \quad (2.62)$$

Der resultierende E-Modul ergibt sich damit zu

$$E_{\text{glob.}} = \frac{E_{\text{glob.}}^{(1)} E_{\text{glob.}}^{(2)}}{E_{\text{glob.}}^{(1)} + E_{\text{glob.}}^{(2)}}. \quad (2.63)$$

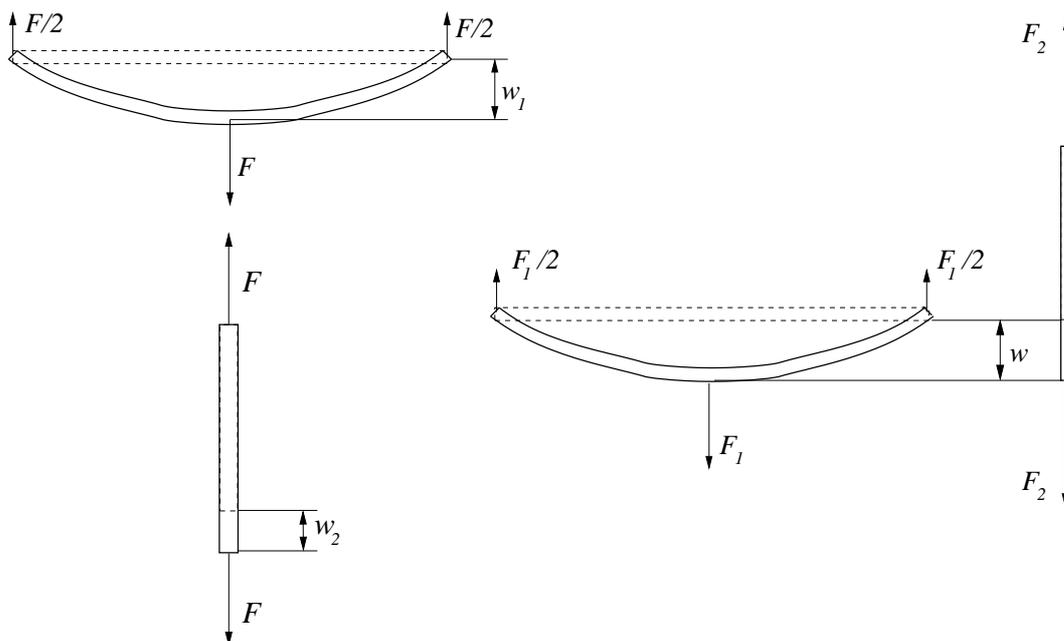


Abbildung 2.18: Serien- und Parallelschaltung

Parallelschaltung

Bei Parallelschaltung ist für beide Elemente die Verschiebung gleich gross, damit also auch die globale Verzerrung. Die Gesamtkraft ist die Summe der in beiden Elementen wirkenden Kräfte, damit ist auch die globale Spannung die Summe der Beiträge der beiden Elemente zur globalen Spannung.

$$\sigma_{\text{glob.}} = \frac{F}{A_{\text{Zelle}}} = \frac{F_1 + F_2}{A_{\text{Zelle}}} = \sigma_{\text{glob.}}^{(1)} + \sigma_{\text{glob.}}^{(2)} \quad (2.64)$$

Der resultierende E-Modul ergibt sich damit zu

$$E_{\text{glob.}} = E_{\text{glob.}}^{(1)} + E_{\text{glob.}}^{(2)} \quad (2.65)$$

2.6.4 Berücksichtigung des starren Knoteninneren

Die Auflager der in der Struktur auftretenden Balken bestehen aus weiteren, quer dazustößenden Balken, deren Radius sich ebenfalls mit der Dicke ändert. Dem Umstand, dass in diesen Überschneidungsgebieten die Deformationen wesentlich geringer sind als außerhalb, trägt man dadurch Rechnung, dass die freie Biegelänge der Balken mit dem Radius verkürzt wird, d.h. die Auflager rücken umso weiter zusammen, je dicker die Balken werden, Abb. 2.19.

Die Biegelänge des betrachteten Balkens ändert sich nach folgender Beziehung, wobei \hat{l}_{Balken} den Abstand der Mittelachsen der Balken bezeichnet, die die Auflager bilden, und l_{Balken} die übrigbleibende Biegelänge.

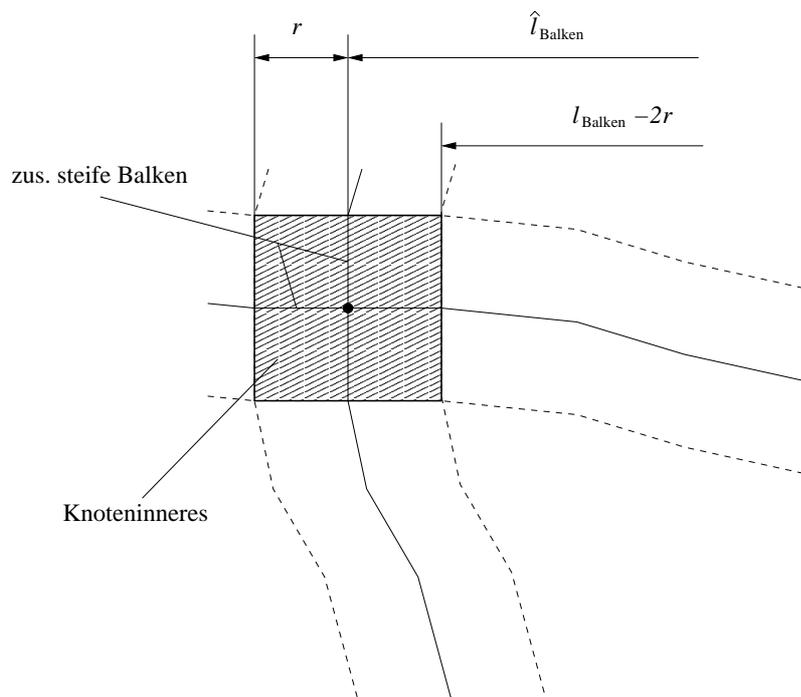


Abbildung 2.19: Reduktion der Biegelänge

$$l_{\text{Balken}} = \hat{l}_{\text{Balken}} - 2r, \quad (2.66)$$

die Abhängigkeit des E-Moduls vom Radius bei Biegung nimmt daher die Form

$$E_{\text{glob.}} \propto \frac{r^4}{(\hat{l}_{\text{Balken}} - 2r)^3} \quad (2.67)$$

an, bei Schubdeformation

$$E_{\text{glob.}} \propto \frac{r^2}{(\hat{l}_{\text{Balken}} - 2r)} \quad (2.68)$$

und bei Zug- bzw. Druck

$$E_{\text{glob.}} \propto \frac{r^2}{(\hat{l}_{\text{Balken}} - 2kr)} \quad (2.69)$$

wobei k für die Anzahl der Balken steht, die quer zum betrachteten Balken dazustoßen; um $2kr$ wird die effektive Länge des Balkens verringert, die globale Verzerrung muss sich also auf weniger Material verteilen, und damit wird die Struktur steifer.

Anmerkung Aus allen bisher angegebenen Beziehungen ist ersichtlich, dass der E-Modul des Grundwerkstoffes immer linear in die elastischen Eigenschaften der Struktur eingeht.

Kapitel 3

Modellbildung und Programmierung

3.1 Behandelte Geometrien

In dieser Arbeit werden fünf verschiedene Geometrien behandelt, für die am Institut für Werkstoffkunde und Materialprüfung der TU Wien Probenkörper hergestellt wurden.

- Simple Cubic (SC), kubisch primitiv: Diese Geometrie besteht aus in drei Richtungen durchlaufenden Stäben, Abb. 3.1, 3.2.
- Body Centered Cubic (BCC), kubisch raumzentriert: Entspricht der SC-Geometrie, nur besitzt sie zusätzlich Raumdiagonalen, Abb. 3.3, 3.4.
- Reinforced Body Centered Cubic (RBCC), verstärkt kubisch raumzentriert: Entspricht der BCC-Geometrie, nur besitzt die RBCC-Geometrie zusätzlich je drei durchlaufende Stäbe, die sich am Schnittpunkt der Raumdiagonalen treffen, Abb. 3.5, 3.6.
- Translated Simple Cubic (TSC), verschoben kubisch primitiv: Besteht aus kubisch primitiven Elementen, wobei in zwei Richtungen die Würfel jeweils um eine halbe Seitenlänge verschoben sind, Abb. 3.7, 3.8.
- Gibson-Ashby (GA), Abb. 3.9, 3.10.

Zur Illustration werden jeweils die Einheitszelle und ein größerer Block abgebildet, wobei eine Zelle dunkel hervorgehoben ist.

Die relative Dichte der abgebildeten Strukturen beträgt 0.1.

Alle behandelten Geometrien haben kubisches Materialverhalten, bis auf die TSC-Geometrie; diese ist tetragonal, wobei die 1- und 2-Achse identisches Verhalten zeigen, die 3-Achse abweichendes.

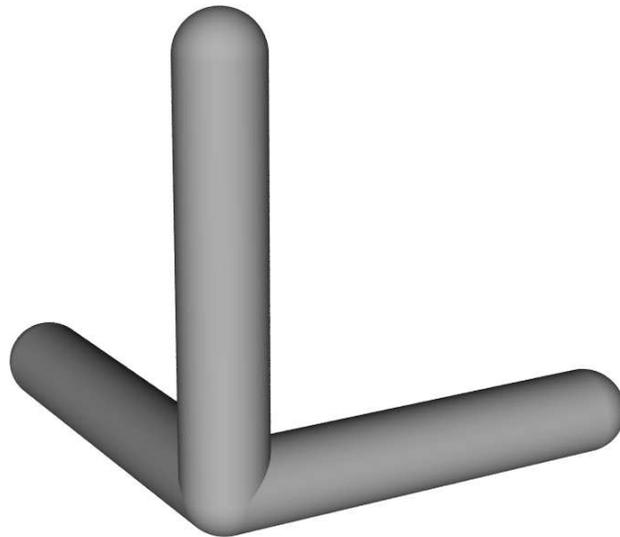


Abbildung 3.1: SC-Geometrie: Einheitszelle

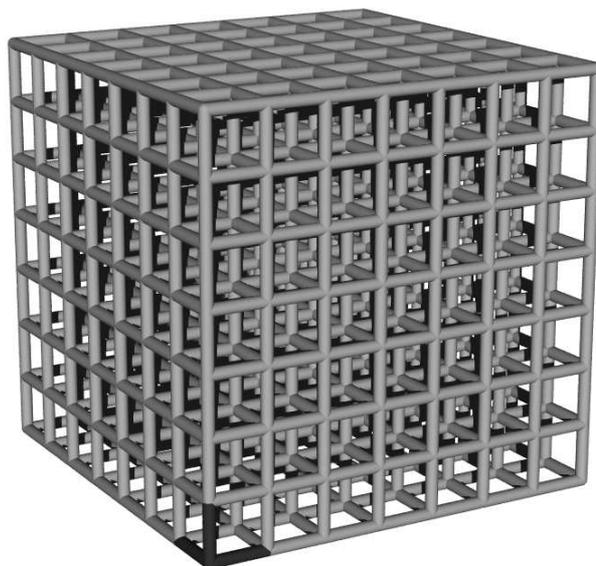


Abbildung 3.2: SC-Geometrie: Block

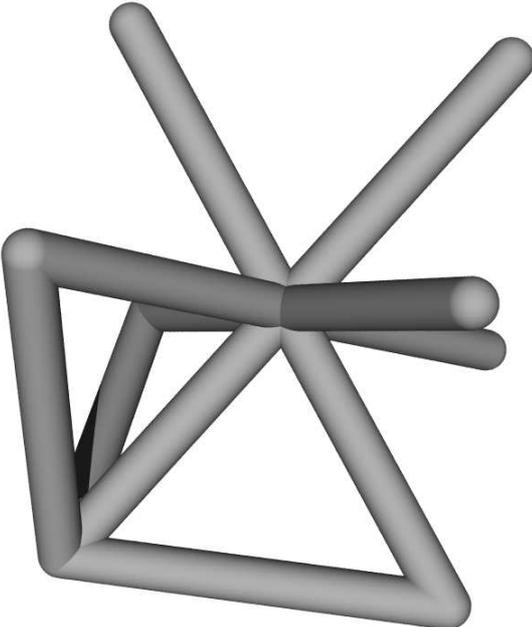


Abbildung 3.3: BCC-Geometrie: Einheitszelle

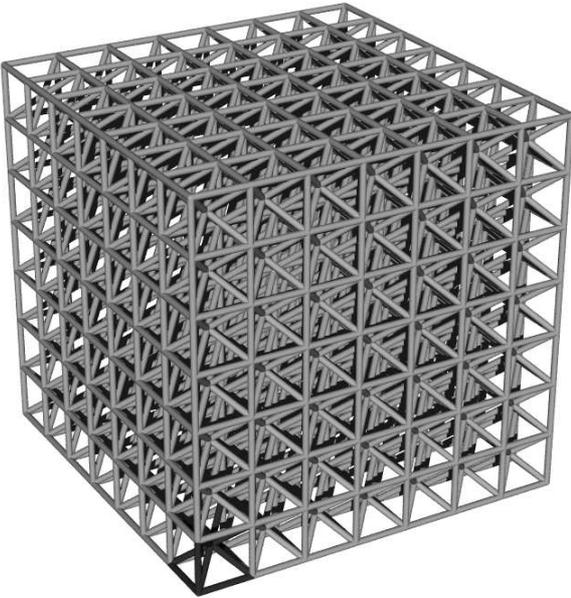


Abbildung 3.4: BCC-Geometrie: Block

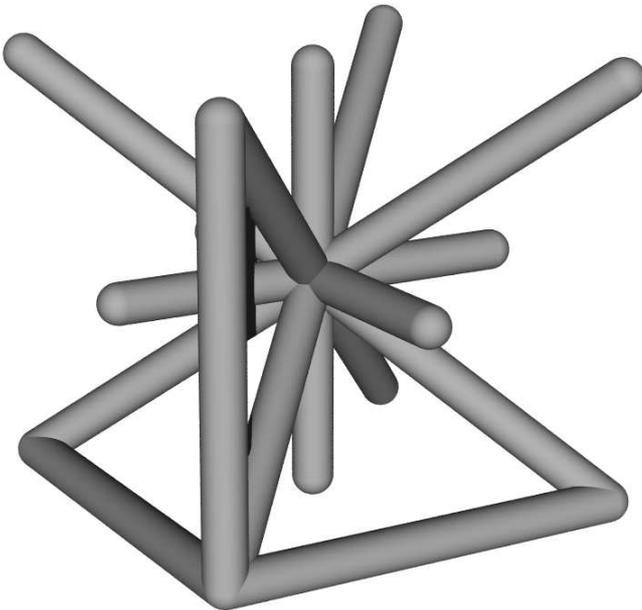


Abbildung 3.5: RBCC-Geometrie: Einheitszelle

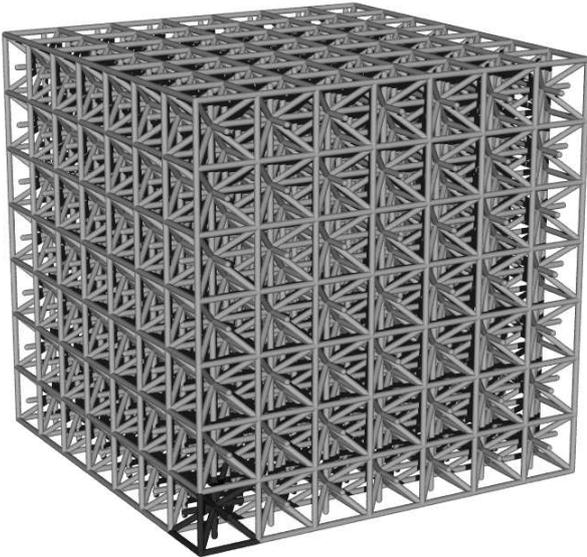


Abbildung 3.6: RBCC-Geometrie: Block

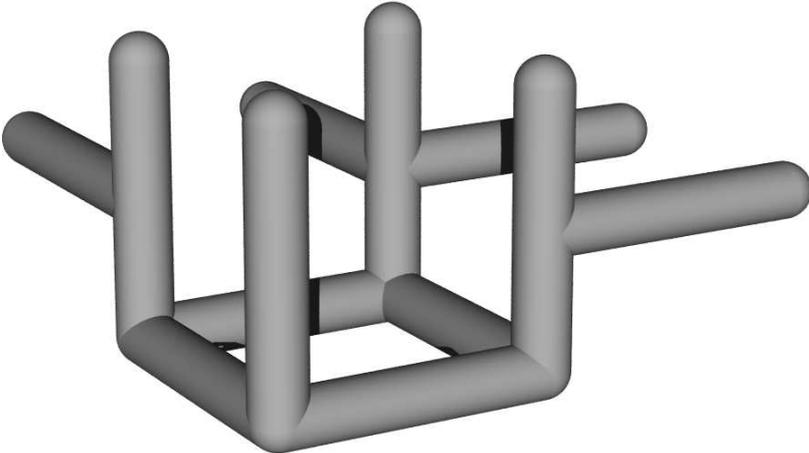


Abbildung 3.7: TSC-Geometrie: Einheitszelle

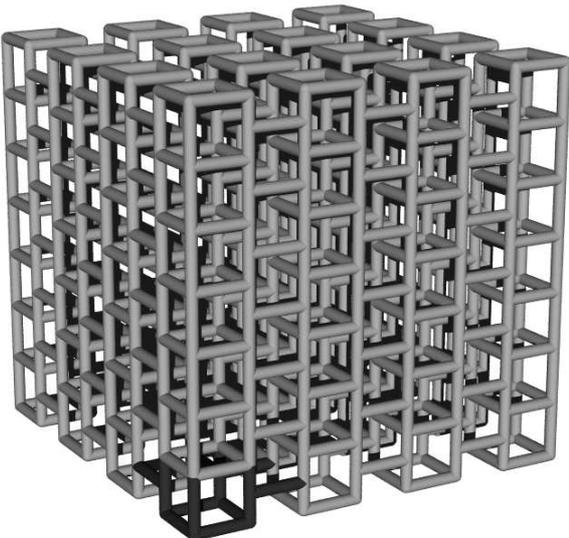


Abbildung 3.8: TSC-Geometrie: Block

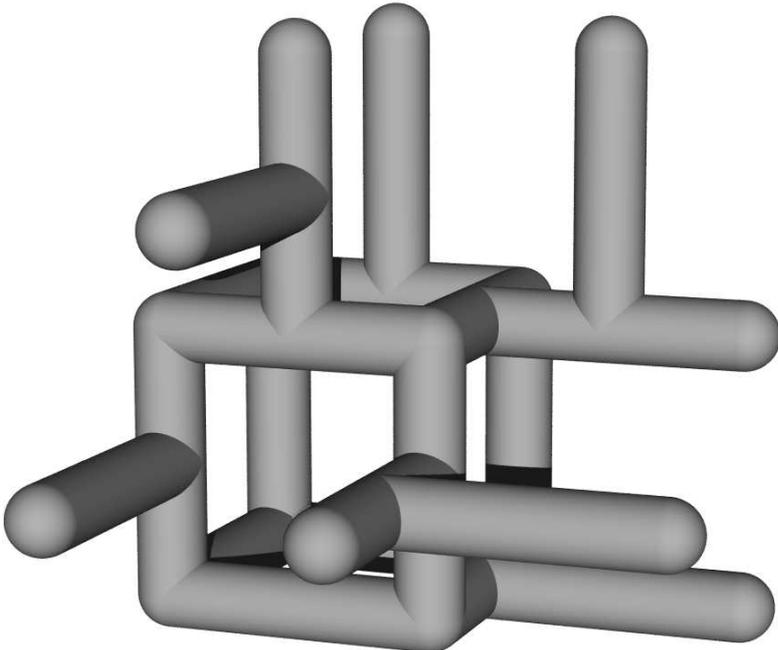


Abbildung 3.9: GA-Geometrie: Einheitszelle

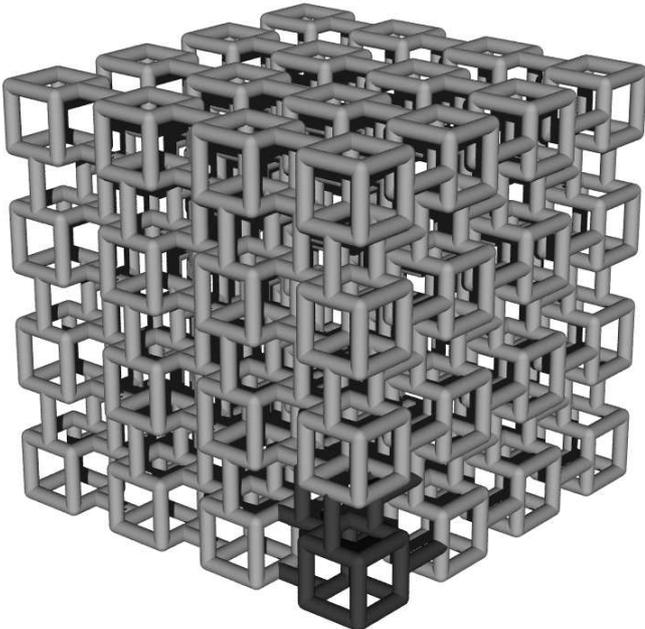


Abbildung 3.10: GA-Geometrie: Block

3.2 Finite Elemente-Modell

3.2.1 Elementtyp

In dieser Arbeit werden zur Simulation der verschiedenen Geometrien dreidimensionale Modelle aus Balkenelementen aufgebaut.

Für die linearen Berechnungen wird der ABAQUS-Elementtyp B32H [11], verwendet. Dabei handelt es sich um dreidimensionale Balkenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen mit hybrider Formulierung, welche große Rotationen der Balkenendknoten zulassen. Aufgrund der quadratischen Ansatzfunktionen besitzt dieses Balkenelement drei Knoten, d.h. einen Mittelknoten.

Diese Elemente können auch Schubdeformationen darstellen, d.h. die Bernoulli-Hypothese von den auf die Balkenachse normal bleibenden Querschnitten gilt hier nicht. Dieser Elementtyp wird auch Timoshenko-Balkenelement genannt.

Für die nichtlinearen Berechnungen werden ABAQUS-Balkenelemente vom Typ B31H verwendet, wobei sich diese von den oben beschriebenen durch ihre linearen Ansatzfunktionen unterscheiden.

Die Anzahl der Integrationspunkte auf dem Balkenquerschnitt wird von standardmäßig 17 auf 65 erhöht.

3.2.2 Diskretisierungsfeinheit

Da die Rotationen gegenüberliegender Knoten der Einheitszelle stets gleich sein müssen, kommt als Biegedeformationsform im einfachsten Fall ein sogenannter S-Schlag in Frage, Abb. 3.11. Das bedeutet, dass pro Seitenlänge der Zelle zumindest zwei Elemente verwendet werden müssen, weil ja ein Element mit quadratischer Ansatzfunktion nur in der Lage ist, eine parabelförmige Biegefigur darzustellen; bei einem S-Schlag handelt es sich aber um eine Kurve höherer Ordnung.

Die Diskretisierung wird für die linearen Berechnungen so gewählt, dass immer zwischen zwei Knotenpunkten (Verbindungsstellen innerhalb der Geometrie, nicht zu verwechseln mit Finite Elemente-Knoten) zweier Balken zwei Elemente angeordnet sind, auch wenn es sich bei den zwei Knotenpunkten nicht um ein periodisches Paar handelt, denn die Knotenpunkte können durch die benachbarten Balken in ihrer Rotation behindert sein.

Für die nichtlinearen Berechnungen werden statt zwei Elementen zehn Elemente verwendet, um ein Lokalisieren des Plastizierens, also die Ausbildung von Fließgelenken zu ermöglichen. Dadurch ist die Verwendung von Balkenelementen mit Ansatzfunktionen von niedrigerer Ordnung gerechtfertigt.

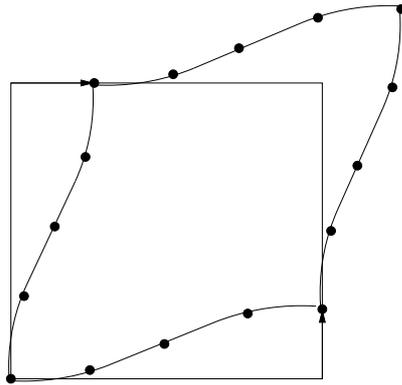


Abbildung 3.11: S-förmige Biegefigur

3.2.3 Modellierung der starren Knotenpunkte

Um den in Kap. 3.2.3 beschriebenen Sachverhalt zu modellieren, werden rund um alle Knotenpunkte mit einer Konnektivität (d.h. Anzahl der von diesem Knotenpunkt weglauenden Balken) größer als zwei zusätzliche zweiknotige B31-Balkenelemente eingefügt, deren Länge dem Radius eines Balkens entspricht. Der E-Modul dieser Balkenelemente wird um den Faktor 10^3 gegenüber dem Material der anderen im Modell vorkommenden Balkenelemente hochgesetzt. Damit ist eine Deformation innerhalb der starren Knotenpunkte praktisch ausgeschlossen, Abb. 2.19.

3.2.4 Berechnung des Balkenradius

Zuerst wird der Balkenradius aus der relativen Dichte, dem Volumen der Einheitszelle und der Gesamtlänge aller im Modell vorkommenden Balken berechnet, vgl. Gleichung (2.48).

$$r^{(1)} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{rel.}} V_{\text{Zelle}}}{\pi l_{\text{ges.}}^{(1)}}} \quad (3.1)$$

Dann muss noch der Tatsache Rechnung getragen werden, dass bei obiger Darstellung das Innere von Knotenpunkten mit Konnektivität größer als zwei mehrfach belegt wäre.

In zweiter Näherung wird daher das Knotenpunktsinnere durch Kugeln mit dem Radius der ersten Näherung ersetzt, die Gesamt-Balkenlänge um die entsprechenden Beiträge reduziert und damit erneut der Radius berechnet, Abb. 3.12. k ist die Anzahl der Knotenpunkte innerhalb des Zellenvolumens.

$$r^{(2)} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{rel.}} V_{\text{Zelle}} - k \frac{4\pi r^{(1)3}}{3}}{\pi l_{\text{ges.}}^{(2)}}} \quad (3.2)$$

Diese Radiuskorrektur ist nur iterativ möglich.

Da die Korrektur bereits bei der zweiten Näherung im Bereich von etwa 5% liegt,

wurde auf weitere Iterationsschritte verzichtet.

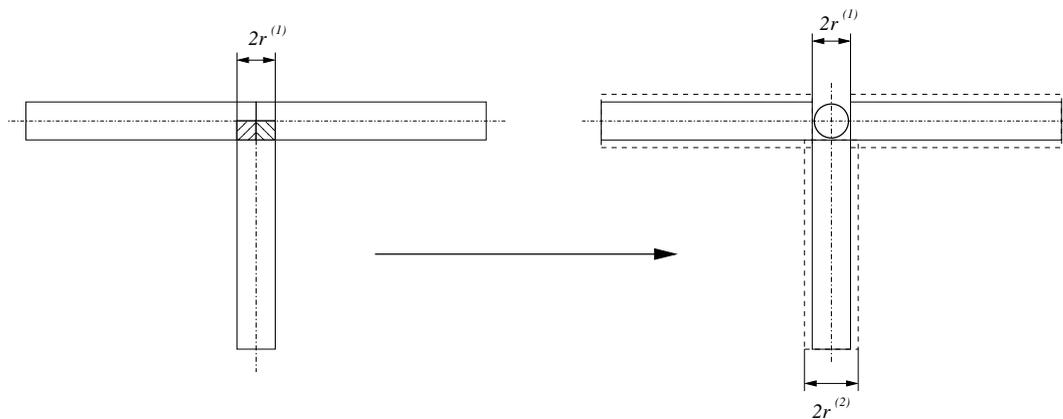


Abbildung 3.12: Korrektur des Balkenradius

3.2.5 Randbedingungen

Periodische Randbedingungen

Damit die Definition der Einheitszelle so flexibel wie möglich bleibt, werden die Masternodes prinzipiell als zusätzliche, mit dem Modell nicht verbundene 'Dummy'-Knoten definiert, Kap. 2.4.2. Die Verschiebungen bzw. Kräfte, die auf die Masternodes aufgebracht werden, gehen also nur über die Koppelgleichungen als reine Rechengrößen in das Modell ein.

Der Einfachheit halber entsprechen die Ortsvektoren der Masternodes den Periodizitätsvektoren der Einheitszelle, d.h. die Koordinaten der Masternodes lauten

$$\underline{\mathbf{x}}_{M_1} = (l_1, 0, 0)^T, \quad \underline{\mathbf{x}}_{M_2} = (0, l_2, 0)^T, \quad \underline{\mathbf{x}}_{M_3} = (0, 0, l_3)^T. \quad (3.3)$$

Um Starrkörperbewegungen auszuschließen (die auf singuläre Steifigkeitsmatrizen führen würden) muss ein Knoten des Modells (ein Slavenode) gesperrt werden. Alle anderen Randbedingungen gehen über die Koppelgleichungen in Form von Verschiebungsdifferenzen ein.

Bringt man auf die Masternodes nur Verschiebungen auf (d.h. einen globalen Verzerrungstensor, Kap. 2.4.2), Abb. 3.13a, so genügt es, einen Knoten des Modells translatorisch zu sperren. Sollen auf die Masternodes Kräfte (d.h. ein globaler Spannungstensor) aufgebracht werden, Abb. 3.13b, muss ein Knoten auch rotatorisch gesperrt werden.

Aufgrund des Satzes der zugeordneten Schubspannungen ist das System theoretisch im Momentengleichgewicht. Die Starrkörperrotationen müssen aber trotzdem ausgeschlossen werden, weil sonst die Steifigkeitsmatrix singulär würde.

Eine Überprüfung des Momentengleichgewichts ist durch Ausgabe der Reaktionsmomente im gesperrten Slavenode möglich. Diese müssen natürlich verschwinden.

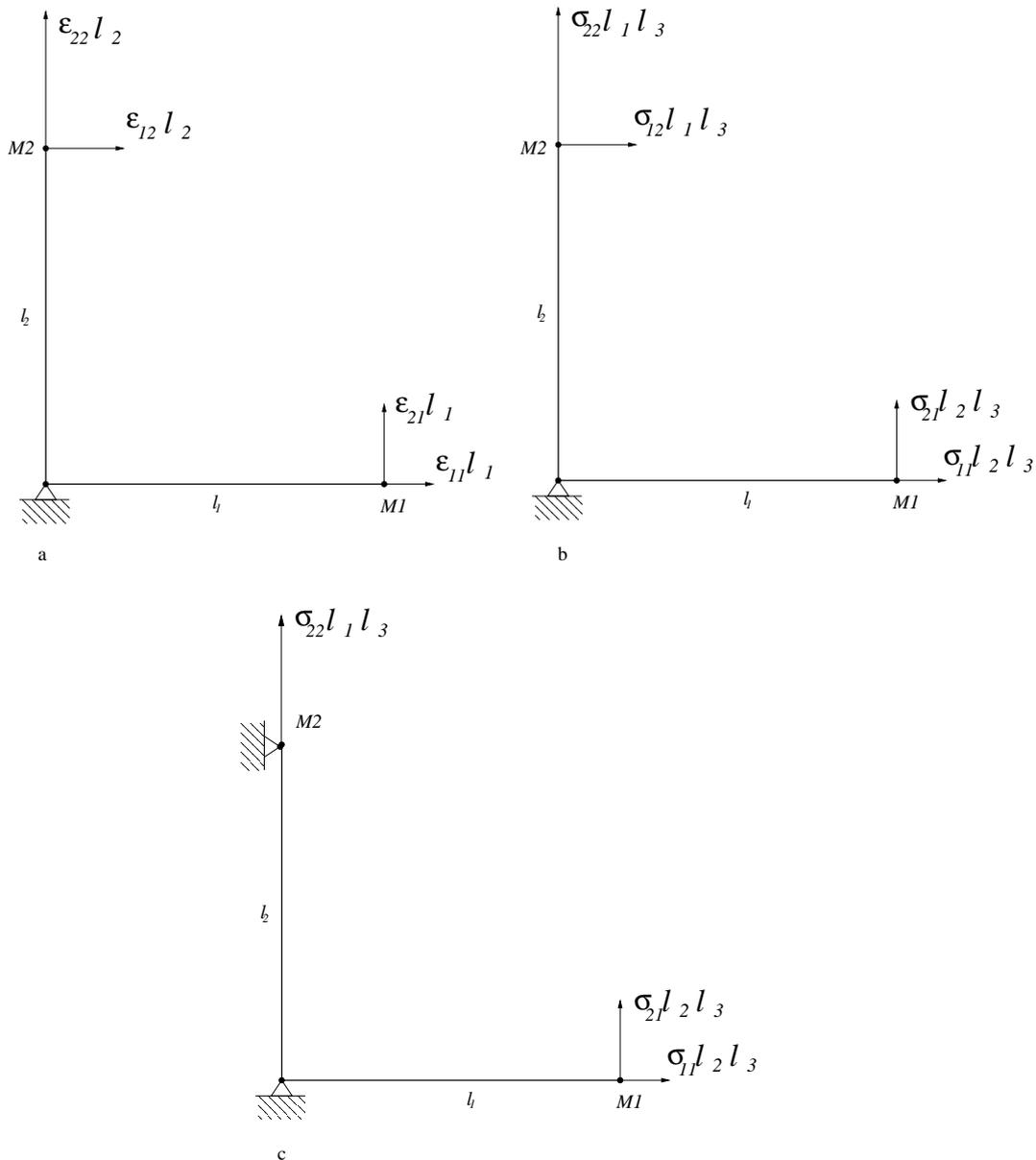


Abbildung 3.13: Aufbringen der Verzerrungen bzw. Spannungen auf die Masternodes

Für die nichtlinearen Berechnungen müssen beim Aufbringen eines globalen Spannungstensors zusätzliche Verschiebungsrandbedingungen auf den Masternodes definiert werden, Abb. 3.13c, die die Rotation des Modells verhindern, weil bei Randbedingungsmuster Abb. 3.13b auf der verformten Geometrie das Momentengleichgewicht nicht mehr erfüllt wäre. Dafür werden dann aber die rotatorischen Freiheitsgrade des einen gesperrten Knotens freigelassen.

Anmerkung Aufgrund der oben präsentierten Methode, einen Spannungs- bzw. Verzerrungstensor auf eine Geometrie aufzubringen, bzw. aus den Ergebnissen abzulesen, handelt es sich nicht um wahre Spannungen und Verzerrungen, wenn die Geometrie deformiert ist. Die Umrechnung der Masternode-Verschiebungen bzw. -kräfte auf globale Verzerrungen bzw. Spannungen erfolgt immer mit den geometrischen Daten der unverformten Ausgangskonfiguration. Die Unterschiede können erheblich sein, Kap. 5.

Randbedingungen für den abgeschlossenen Block

Für einen abgeschlossenen Block einer Geometrie ist es nicht sinnvoll, periodische Randbedingungen zu definieren: Es handelt sich ja dabei nicht um eine Zelle, die man sich in alle Richtungen unendlich oft wiederholt vorstellt, sondern eben um eine endliche Struktur. Die Randbedingungen werden hier also in konventioneller Weise vorgegeben; es werden auch keine Masternodes erzeugt.

Für einen abgeschlossenen Block können Verschiebungsrandbedingungen oder Einzelkräfte auf alle Knoten einer Seite aufgebracht werden, dazu werden die Knoten, die jeweils einer der sechs Flächen des quaderförmigen Blocks angehören, in Node-sets, also Knotengruppen zusammengefasst; die Verschiebungen oder Kräfte werden also kollektiv aufgebracht.

Ein Knoten kann bis zu drei Nodesets angehören, deshalb ist Vorsicht geboten bei angrenzenden Flächen, hier könnten mehrfache bzw. widersprüchliche Randbedingungen definiert werden.

3.2.6 Assemblierung

Mit Assemblierung ist der Zusammenbau mehrerer Einheitszellen zu einer größeren Struktur gemeint. Es können sowohl Strukturen aus mehreren Einheitszellen zusammengebaut werden und dann die Koppelgleichungen für die bereits assemblierte Struktur aufgestellt werden - die assemblierte Struktur wird also als grössere Einheitszelle behandelt -, als auch abgeschlossene Blöcke erzeugt werden.

In letzterem Fall müssen die Abschlussbalken extra erzeugt werden, bei der Einheitszelle fehlen ja immer die gegenüberliegenden Balken, Kap. 2.4.3. Welcher Anteil der Einheitszelle als Abschluss verwendet werden soll, muss dafür eigens angegeben werden, Abb. 3.14.

Die Abschlussbalken müssen für alle drei Raumrichtungen hintereinander erzeugt werden: Die im vorigen Schritt erzeugten Balken werden dann im nächsten Schritt mitvervielfältigt. Die Reihenfolge ist dabei nicht von Bedeutung.

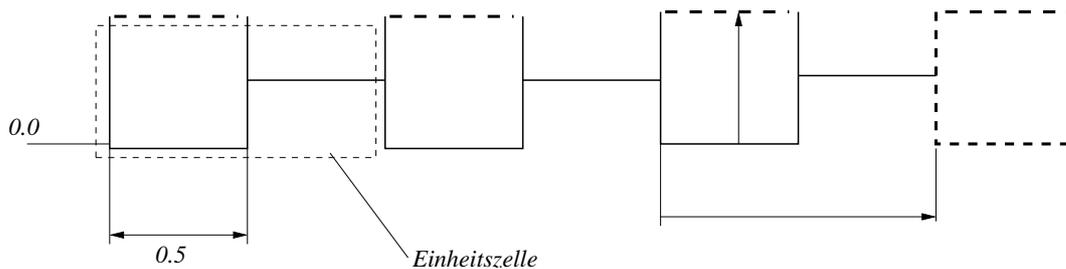


Abbildung 3.14: Erzeugen der Abschlussbalken, zusätzliche Balken strichliert fett

3.3 Programmstruktur

Die Struktur der verwendeten Programme ist in Abb. 3.15 graphisch dargestellt.

Für die Aufbereitung der geometrischen Daten für die ABAQUS-Analyse sind mehrere Programmteile erforderlich:

- Erzeugen der Knoten und Elemente
- Aufstellen der Kopplungsgleichungen für periodische Randbedingungen
- Berechnen der Masternodeverschiebungen bzw. -kräfte aus dem vorgegebenen Lastfall

Für die Verarbeitung der Ergebnisse sind weitere Programme nötig:

- Aufstellen der Elastizitäts- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen aus maximal sechs Lastfällen
- Rotationstransformationen, Inversion, Matrizenmultiplikation
- Erstellen eines POVRAY-Inputfiles [12] zur graphischen Darstellung der Modelle und Deformationen
- Erstellen eines POVRAY-Inputfiles zur graphischen Darstellung der Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften
- Erstellen von Datenfiles für Richtungsabhängigkeit und Last-Verschiebungspfade

Die Ergebnisse der einzelnen Programme werden in Textdateien abgelegt, bei den Preprozessorprogrammen handelt es sich dabei um include-files, die dann in verschiedenen ABAQUS-Inputfiles verwendet werden.

Bei POVRAY handelt es sich um ein Ray-Tracing-Programm, das gut dafür geeignet ist, dreidimensionale Strukturen zu visualisieren.

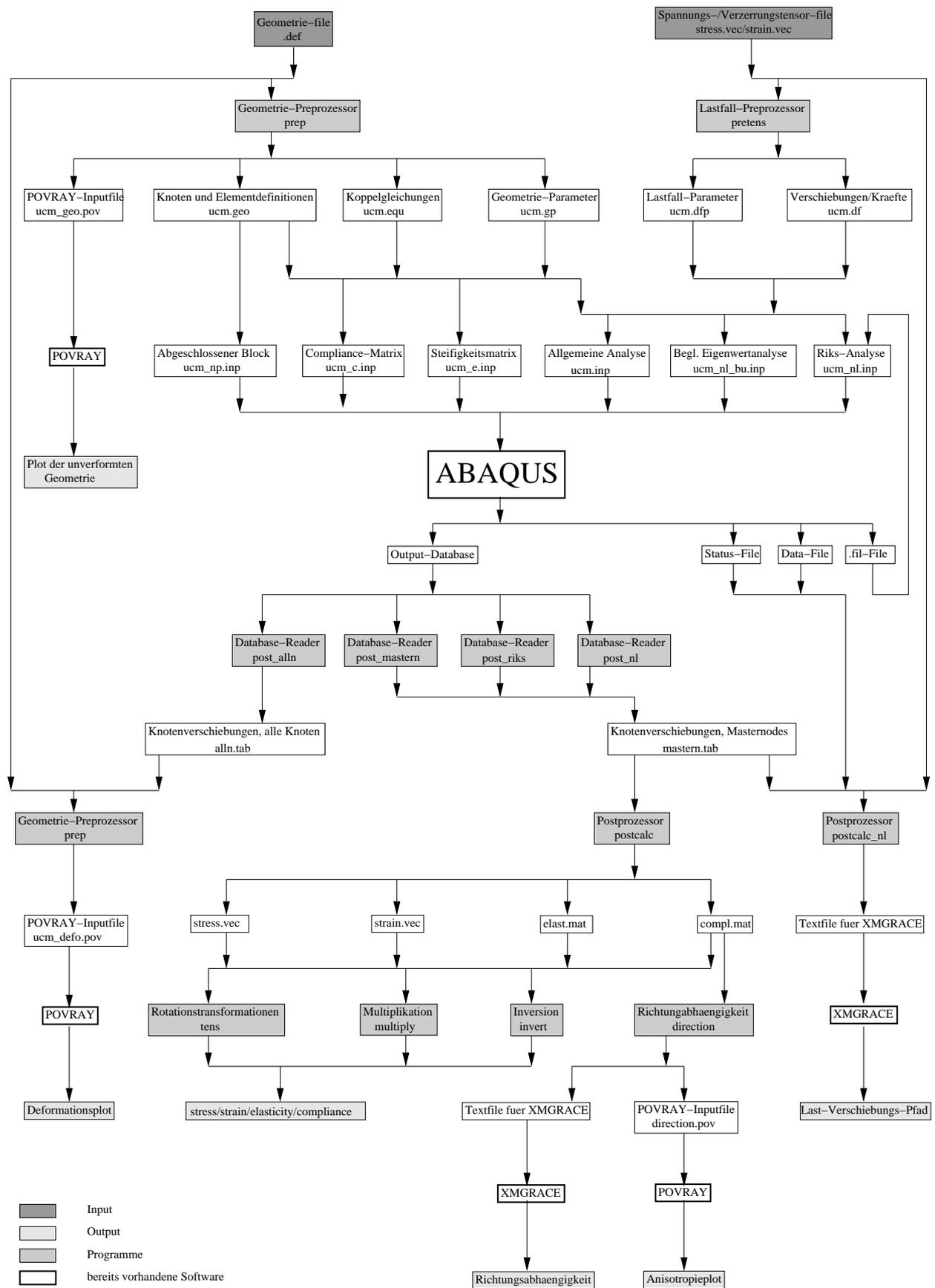


Abbildung 3.15: Programmstruktur

3.3.1 Geometriedaten

Aus einem Inputfile, Anh. A.1, werden folgende Parameter mittels eines von T. Daxner [13] geschriebenen Parsers ausgelesen:

- Größe der Einheitszelle, also Erstreckung in 1-, 2- und 3-Richtung
- Zahl der Einheitszellen in alle drei Richtungen
- Abschluss eines Blocks; wenn ja, welcher Anteil der Zelle in 1-, 2- und 3-Richtung, Kap. 3.2.6
- Materialparameter des Grundwerkstoffes
- Schalter, ob starres Knoteninneres modelliert werden soll oder nicht (daran ist aus programmtechnischen Gründen auch die Radiuskorrektur gekoppelt)
- Elementtyp: Der Preprozessor bildet zwei- oder dreiknotige Elemente je nach Typ
- Auflistung der Balken, aus denen die Einheitszelle besteht (durch die Koordinaten der Endpunkte) und Angabe der Elementanzahl jedes Balkens. Hierbei werden relative Koordinaten zwischen 0 und 1 verwendet, die dann noch mit der Kantenlänge der Zelle skaliert werden.

Durch entsprechende Vervielfältigung der Balken der Einheitszelle wird dann die gewünschte Struktur erzeugt, also die Knotenkoordinaten und fortlaufenden Knotennummern sowie die Elemente unter Angabe der Knotennummern in ABAQUS-Syntax in ein include-file namens `ucm.geo` geschrieben.

Ausserdem müssen noch die Richtungs-Cosinus-Werte der Balkenquerschnittsflächennormalen berechnet werden: liegt ein Balken in der 1-2-Ebene, können die Standardwerte verwendet werden, liegt er außerhalb der 1-2-Ebene, werden die Richtungs-Cosinus-Werte extra berechnet.

Im Falle eines unendlichen zellulären Materials werden zusätzlich noch die Masternodes definiert, im Fall eines abgeschlossenen Blocks werden sechs Knotengruppen definiert, die alle Knoten, die einer Seitenfläche angehören, enthalten, um im ABAQUS-Inputfile entsprechende Randbedingungen aufbringen zu können. Kantenknoten kommen also in jeweils zwei Gruppen vor, Eckknoten in drei.

Weiters werden die maximalen Erstreckungen der Zelle in ein weiteres include-file namens `ucm.gp` geschrieben, um die Verschiebungen bzw. Kräfte, die auf die Masternodes aufgebracht werden, entsprechend den globalen Verzerrungen bzw. Spannungen skalieren zu können.

3.3.2 Koppelgleichungen

Die Erstellung der Koppelgleichungen erfolgt schrittweise:

1. Eliminieren aller Knoten, die nicht auf einer Begrenzungsfläche der Zelle liegen
2. Feststellen aller Knoten, die auf Slave-Flächen liegen (Flächen, in deren Ebene nur ein Masternode liegt, also North, East und Top)
3. Feststellen aller Knoten, die einen gegenüberliegenden Knoten haben, also Teil eines periodischen Paares sind
4. Aufstellen der Koppelgleichung für den Knoten an der NET-Ecke, Abb. 2.12, falls er existiert. Falls alle drei gegenüberliegenden Knoten existieren, lautet diese erste Gleichung

$$3\mathbf{u}_{\text{NET}} - \mathbf{u}_{\text{NWT}} - \mathbf{u}_{\text{SET}} - \mathbf{u}_{\text{NEB}} - \mathbf{u}_{\text{M1}} - \mathbf{u}_{\text{M2}} - \mathbf{u}_{\text{M3}} = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Falls nicht alle drei gegenüberliegenden Knoten existieren, fällt dieser Knoten in eine der nächsten Kategorien.

5. Aufstellen der Koppelgleichungen für Knoten an NT-, NE- und ET-Kanten, falls solche existieren und auch ihre gegenüberliegenden Knoten existieren. Für diese lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u}_{\text{NE}} - \mathbf{u}_{\text{SE}} - \mathbf{u}_{\text{NW}} - \mathbf{u}_{\text{M1}} - \mathbf{u}_{\text{M2}} &= \mathbf{0}, \\ 2\mathbf{u}_{\text{ET}} - \mathbf{u}_{\text{WT}} - \mathbf{u}_{\text{EB}} - \mathbf{u}_{\text{M1}} - \mathbf{u}_{\text{M3}} &= \mathbf{0}, \\ 2\mathbf{u}_{\text{NT}} - \mathbf{u}_{\text{ST}} - \mathbf{u}_{\text{NB}} - \mathbf{u}_{\text{M2}} - \mathbf{u}_{\text{M3}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Falls nicht beide gegenüberliegenden Knoten existieren, fällt der betreffende Kantenknoten in die nächste Kategorie.

6. Aufstellen der Koppelgleichungen für alle anderen Knoten, die Teil eines periodischen Paares sind. Dafür lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{E}} - \mathbf{u}_{\text{W}} - \mathbf{u}_{\text{M1}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}_{\text{N}} - \mathbf{u}_{\text{S}} - \mathbf{u}_{\text{M2}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}_{\text{T}} - \mathbf{u}_{\text{B}} - \mathbf{u}_{\text{M3}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Koppelgleichungen werden in ABAQUS-Syntax in ein include-file namens `ucm.equ` geschrieben; die Definition erfolgt über die Knotennummern.

3.3.3 Lastfälle

Die Vorgabe beliebiger globaler Verzerrungs- oder Spannungszustände erfolgt wieder über ein Inputfile. Dieses enthält folgende Parameter, Anh. A.2:

- Eulerwinkel vom lokalen zum globalen System (beim lokalen System handelt es sich um das Hauptachsensystem der Einheitszelle). Diese Definition der Eulerwinkel wurde gewählt, weil es leichter fällt, sich eine Drehung aus dem Achsensystem der Einheitszelle vorzustellen, als umgekehrt.
- Darstellungssystem. Bei einer Darstellung im lokalen System sind die oben angegebenen Eulerwinkel bedeutungslos.
- Typ des Komponentenvektors: Spannung oder Verzerrung
- Komponentenvektor

Der Lastfall-Preprozessor liest diese Daten wieder mit Hilfe des Parsers, transformiert in das lokale Achsensystem und erstellt daraus die Parameter für die Verschiebungen bzw. Kräfte der Masternodes (die tatsächlichen Werte ergeben sich aber erst im ABAQUS-Inputfile durch Kombination mit den Ortsvektoren der Masternodes). Diese Werte werden in ein include-file namens `ucm.dfp` geschrieben.

Schliesslich wird vom Lastfall-Preprozessor je nachdem, ob ein Verzerrungs- oder ein Spannungstensor vorgegeben wird, eine Datei namens `ucm.df` erstellt, in der entweder Knotenverschiebungen oder Knotenkräfte anhand der zuvor definierten Parameter angegeben werden.

3.3.4 Analyseauswertung

Für verschiedene Analysetypen wurden verschiedene ABAQUS-Inputfiles erstellt, die unterschiedliche include-files verwenden:

- Erstellung der Nachgiebigkeitsmatrix
- Erstellung der Elastizitätsmatrix
- vorgegebener Lastfall auf unendliches zelluläres Material, linear oder nichtlinear
- abgeschlossene Struktur mit Randbedingungen, diese werden im ABAQUS-Inputfile definiert

ABAQUS legt die Ergebnisse in binären Dateien, den Output-Databases ab.

Auf diese kann über eine von ABAQUS zur Verfügung gestellte Schnittstelle zugegriffen und die Daten weiterverarbeitet werden.

Allerdings gibt es hier erhebliche Schwierigkeiten:

Erstens ist es unter keinen Umständen möglich, eine Abfrage nach dem Namen der

Output-Database im Code einzubauen, der in ABAQUS verwendete C++-Compiler liefert hier immer Fehlermeldungen. Deshalb wird im Code ein fixer Name definiert, und die jeweiligen Output-Databases müssen nun auf diesen Namen umbenannt werden.

Zweitens war es nicht möglich, die Daten im selben Programm weiterzuverarbeiten. Jegliche Rechenoperation führt zu Fehlermeldungen des in ABAQUS verwendeten C++-Compilers. Deshalb werden nun die Daten in Tabellenform in ein Textfile geschrieben, welches dann vom Postprozessor wieder eingelesen wird.

Auch das Ansprechen der verschiedenen Knotengruppen (Masternodes oder Slavenodes) muss mit mehreren verschiedenen Programmen bewerkstelligt werden, Abb. 3.15. Diese Umstände trugen nicht unwesentlich zur Verkomplizierung der Programmstruktur bei.

Die Erstellung von Last-Verschiebungs-Pfaden (bzw. von Diagrammen der globalen Spannung in Abhängigkeit der globalen Verzerrung) wird für einachsige Spannungszustände in mehreren Richtungen durchgeführt: Das erfordert die Verwendung von Einzelkräften statt Verschiebungsrandbedingungen an den Masternodes, weil ein einachsiger Spannungszustand nicht allgemein durch Verschiebungsrandbedingungen dargestellt werden kann. Für eine Geometrie ohne Querkontraktion in Richtung eines Masternode-Ortsvektors ist das beispielsweise möglich, nicht aber für allgemeine Fälle.

Dieser Umstand erschwert die nichtlineare Berechnung, weil das Newton-Raphson-Iterationsverfahren (NR-Verfahren, ABAQUS-Standard), Kap. 2.2, bei Laststeuerung nur bis zum Erreichen einer horizontalen Tangente der Kraft-Verschiebungskurve, also dem Erreichen eines Kraftmaximums, bzw. bis zum Erreichen eines eventuell auftretenden Verzweigungspunktes konvergiert.

Deshalb muss das Riks-Wempner-Verfahren (RW-Verfahren), Kap. 2.2, verwendet werden, bei dem ein Laststeigerungsfaktor als Teil der Lösung berechnet wird. Mit diesem Verfahren kann bei Durchschlagsproblemen über ein Kraftmaximum hinweg weitergerechnet werden.

Zur Bestimmung eventuell auftretender Verzweigungspunkte wird eine begleitende Eigenwertanalyse durchgeführt: Nach jedem nichtlinearen Schritt (hier kann wieder nur das Standard-Verfahren angewendet werden, weil ABAQUS nach einem Riks-Analyseschritt keine anderen Analysen zulässt) wird eine Eigenwertanalyse durchgeführt. Der Verlauf der Schätzwerte der kritischen Lasten kann gegen die globale Verzerrung der Geometrie geplottet werden.

Die berechneten kritischen Lasten stellen allerdings bei einem axial belasteten, voll durchplastizierten Balken ein eher fragwürdiges Ergebnis dar. Ein Ausknicken aus der genau axialen Lage wird ein teilweises Entlasten des Querschnittes bewirken und ein Teil des Querschnittes wird wieder elastisch und damit steifer, es verändert sich also die wirksame Steifigkeit nach oben und der Balken wird stabilisiert. Der

Schätzwert der kritischen Last, der ja über die Steifigkeit der Konfiguration zum Zeitpunkt der Eigenwertanalyse berechnet wird, liegt somit wesentlich niedriger als die wahre kritische Last.

Der umgekehrte Fall kann auftreten, wenn der ganze Balkenquerschnitt kurz vor dem Plastizieren liegt. Dann wird durch ein Ausknicken ein Teil des Querschnittes plastizieren, die wirksame Steifigkeit reduziert und der Balken destabilisiert, also wird der Schätzwert über der wahren kritischen Last liegen.

Die Eigenwerte können in den Fällen axial belasteter, durchplastizierter Balken also nur als qualitative Anhaltspunkte dafür verwendet werden, ob ein Bifurkationsproblem vorliegt oder nicht. Sind die Eigenwerte relativ niedrig und ihre Tendenz fallend, ist ein Bifurkationsproblem wahrscheinlich.

Überprüfen kann man das, indem man die untersten Eigenmoden als Imperfektionen aufbringt. Verändert sich der Kraft-Verschiebungsverlauf, ist man auf einen Verzweigungspunkt gestoßen, verändert er sich nicht, stellt der vorliegende Fall kein Bifurkationsproblem dar.

Die Skalierungsfaktoren und die Anzahl der Eigenmoden, die als Imperfektionen aufgebracht werden, können nur nach Erfahrungswerten gewählt werden. Mehrere Rechnungen mit unterschiedlichen Konstellationen sind daher unerlässlich.

Bei den in dieser Arbeit auftretenden Problemen erweisen sich Imperfektionen, bei denen der größte Verschiebungswert des jeweiligen Eigenvektors auf etwa 0.1%–0.5% der charakteristischen Balkenlänge skaliert wird, als am zielführendsten. Bei geringeren Werten gelingt es häufig nicht, den trivialen Pfad zu verlassen, sind die Imperfektionen größer, ist die Abweichung vom Pfad der perfekten Geometrie vor dem Verzweigungspunkt bereits zu gross, man rechnet dann eigentlich ein anderes Problem.

Die gewählte Vorgehensweise ist also folgende:

- Begleitende Eigenwertanalyse: Nichtlineare Rechnung mit NR-Verfahren, nach jedem Laststeigerungsschritt Eigenwertanalyse.
- Verlauf der Eigenwerte und Eigenvektoren der untersten Eigenmoden berücksichtigen. Beurteilen, ob ein Bifurkationsproblem wahrscheinlich ist oder nicht.
- Nichtlineare Rechnung mit MRW-Verfahren, perfekte Geometrie bei Durchschlagsproblemen. Plotten des Last-Verschiebungspfades.
- Nichtlineare Rechnung mit MRW-Verfahren, Imperfektionen aus begleitender Eigenwertanalyse bei Bifurkationsproblem. Plotten des Last-Verschiebungspfades, Beurteilen des Unterschiedes. Dieser Schritt muss meistens mehrmals durchgeführt werden.

3.3.5 Postprozessoren

Das Postprocessing teilt sich in verschiedene Aufgaben:

- Erstellen von Deformationsplots für periodische Zelle oder abgeschlossenen Block für lineare und nichtlineare Rechnung
- Aufstellen der Elastizitäts- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen bei linearer Rechnung
- Erstellen von Anisotropieplots mit POVRAY bei linearer Rechnung
- Erstellen von Richtungsabhängigkeitsdiagrammen mittels XMGRACE - dabei handelt es sich um ein 2D-Plotprogramm - bei linearer Rechnung
- Erstellen von Dichteabhängigkeitsdiagrammen mittels XMGRACE bei linearer Rechnung
- Erstellen von Spannungs-Verzerrungs-Pfaden mittels XMGRACE bei nichtlinearer Rechnung
- Plotten der Eigenmoden bei nichtlinearer Rechnung

Deformationsplots

Dafür werden die Verschiebungen aller Modellknoten eingelesen und auf die Geometriedaten des ursprünglichen Modells überlagert (dazu muss das ursprüngliche Inputfile nochmals verwendet werden).

Daraus wird dann ein Inputfile für POVRAY erstellt.

Spannungs- bzw. Verzerrungskomponentenvektoren

Der Spannungstensor kann aus den Reaktionskräften der Masternodes bestimmt werden

$$\sigma_{ij} = \frac{F_{jM_i}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_k}| |\underline{\mathbf{x}}_{M_l}|}, \quad k, l \neq j, \quad k \neq l, \quad k, l \in 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Durch die Koppelgleichungen werden die Reaktionskräfte aller an einem Masternode 'hängenden' Knoten auf diesen übertragen. Die Reaktionskräfte eines Masternodes entsprechen also der Summe der Kräfte, die auf der zugehörigen Slave-Fläche wirken.

Der Verzerrungstensor bestimmt sich analog zu

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{iM_j}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_j}|} + \frac{u_{jM_i}}{|\underline{\mathbf{x}}_{M_i}|} \right). \quad (3.8)$$

Elastizitäts- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen

Zum Aufstellen der Matrizen sind maximal sechs Einheitslastfälle notwendig. Gibt man sechs Verzerrungskomponentenvektoren

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(1)}, \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(2)}, \dots, \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(6)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T, \dots, (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \quad (3.9)$$

vor, so sind die aus den jeweiligen Lastfällen resultierenden Spannungskomponentenvektoren die Spalten der Elastizitätsmatrix

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}, \dots, \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(6)}). \quad (3.10)$$

Das Aufstellen der Nachgiebigkeitsmatrix erfolgt analog.

Bei kubischer Materialsymmetrie genügen zwei Lastfälle, bei tetragonaler Materialsymmetrie vier. Trotzdem wurde die maximale Anzahl an Lastfällen gewählt, um auch voll anisotrope Materialien mit diesem Programm bearbeiten zu können.

Dichteabhängigkeit

Dazu wurden Werte aus der Nachgiebigkeitsmatrix - dargestellt im Materialachsensystem - entnommen, und zwar für kubische Geometrien

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{C_{11}} = \frac{1}{C_{22}} = \frac{1}{C_{33}}, \\ G &= \frac{1}{2C_{44}} = \frac{1}{2C_{55}} = \frac{1}{2C_{66}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

und bei tetragonalen Geometrien

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = \frac{1}{C_{11}} = \frac{1}{C_{22}}, \\ E_3 &= \frac{1}{C_{33}}, \\ G_{12} &= \frac{1}{2C_{44}}, \\ G_{13} &= G_{23} = \frac{1}{2C_{55}} = \frac{1}{2C_{66}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Abb. 2.9, 2.10.

Der Faktor 0.5 bei den Schubmoduli ergibt sich aus der gewählten Darstellung des Verzerrungstensors mit ε anstatt γ .

Anisotropieplots, Richtungsabhängigkeitsdiagramme

Hier wird die Nachgiebigkeitsmatrix der betrachteten Geometrie in einer Achtelkugel gedreht, der Kehrwert des Elementes an der Stelle (1, 1) ist als E-Modul in der betrachteten Richtung definiert.

Diese Daten werden nun als Fläche im 3D-Raum geplottet, wobei die Position jedes Punktes der Fläche durch einen Vektor mit den Kugelkoordinaten (E, ψ, χ) gegeben ist.

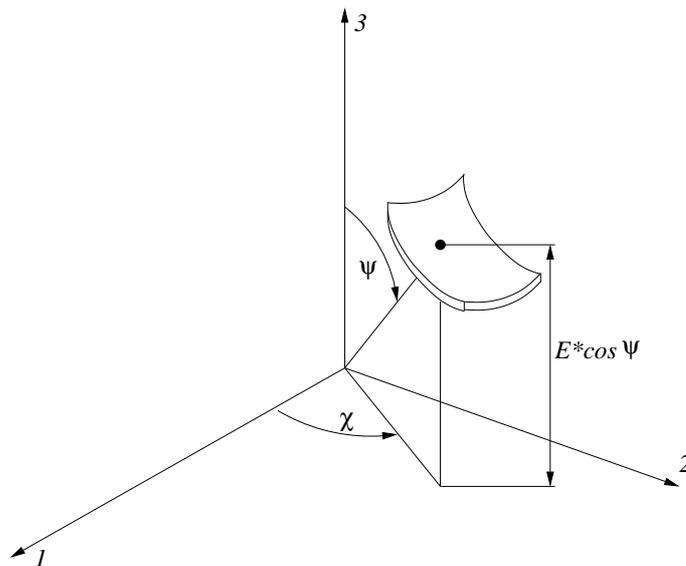


Abbildung 3.16: Kugelkoordinaten

Die Richtungsabhängigkeitsdiagramme sind 2D-Plots. Der E-Modul in der jeweiligen Richtung wird über dem Winkel der Rotation in zwei Schnittebenen aufgetragen.

1. 001-010: Schnitt entlang der 2-3-Ebene
2. 001-110: Schnitt entlang der Diagonalebene, über Raumdiagonale 111.

Diese zwei Schnittebenen reichen aus, um das Materialverhalten für kubische und tetragonale (wenn die ausgezeichnete Achse die 3-Achse ist) Geometrien zu charakterisieren.

Die Darstellung des E-Moduls auf einer Achtelkugel würde auch für allgemein anisotrope Geometrien ausreichen: aufgrund der dreifachen Symmetrie ($2^3 = 8$) müssen die anderen sieben Achtelkugeln entweder identisch oder spiegelgleich mit der ersten sein.

Spannungs-Verzerrungs-Pfad

Folgende Daten werden vom Postprozessor `postcalc.nl` eingelesen:

- Der aufgebrauchte Spannungskomponentenvektor `stress.vec`
- Die Verschiebungen der Masternodes für alle Analyseschritte und Inkremente `mastern.tab`
- Die Zeit (bei NR-Verfahren) bzw. der Laststeigerungsfaktor (bei MRW-Verfahren) bei allen Inkrementen aus dem ABAQUS-Outputfile `<jobname>.sta`

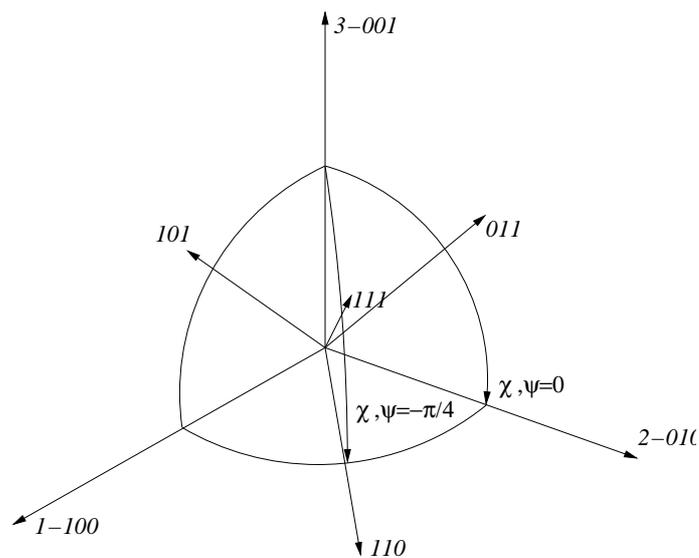


Abbildung 3.17: Schnittebenen

- Falls erwünscht, die Eigenwerte aus dem ABAQUS-Outputfile <jobname>.dat

Daraus wird der Verlauf der globalen Spannung und der Verlauf des Schätzwertes der kritischen globalen Spannung über der globalen Verzerrung berechnet, in eine Datei geschrieben und mittels XMGRACE geplottet.

Als globale Verzerrung wird die Normalkomponente der Verzerrungen in die Richtung des aufgetragenen einachsigen Spannungszustandes gewählt.

Kapitel 4

Lineare Berechnungen

4.1 Abhängigkeit des E-Moduls und Schubmoduls des homogenen Ersatzmaterials von der relativen Dichte

Die elastischen Eigenschaften eines zellulären Materials hängen vom E-Modul des Materials, von der relativen Dichte (über die Dicke der Balken) und von der Geometrie ab. Im Falle der Modellierung mit Balkenelementen spielt die Poisson-Zahl keine Rolle, da die Querdehnung der Balkenelemente in keiner Weise in die makroskopischen Eigenschaften eingehen kann: Die Balkenelemente hängen an ihrer Mittelachse zusammen, damit kann sich ihre Querdehnung nicht auf die benachbarten Balkenelemente übertragen.

Die Geometrie ist bei einem bestimmten zellulären Material vorgegeben, relevante Parameter sind also nur die relative Dichte und der E-Modul des Grundwerkstoffes, wobei letzterer linear eingeht. Deshalb kann der E-Modul und der Schubmodul des zellulären Materials bei den linearen Berechnungen immer bezogen auf den E-Modul des Grundwerkstoffes angegeben werden.

Komplizierter dagegen ist die Abhängigkeit von der relativen Dichte.

Die Bestimmung der Dichteabhängigkeit des E-Moduls dient dazu, abschätzen zu können, welche Eigenschaften bei einer Veränderung der relativen Dichte zu erwarten sind.

Nicht zuletzt wird in diesem Abschnitt auch die Brauchbarkeit des Einheitszellenmodells überprüft. Dazu werden Vergleiche mit den von Gibson und Ashby [1] angegebenen Abschätzungsformeln angestellt, Kap. 2.6.

Die Dichteabhängigkeit wird im Bereich $0.1 - 0.2$ ausgewertet. Zur Berechnung wird das Einheitszellenmodell verwendet, die Ergebnisse gelten also für ein unendliches zelluläres Material.

4.1.1 Berechnung anhand des korrigierten Modells

Unter dem korrigierten Modell wird in dieser Arbeit folgendes verstanden:

Erstens, dass der Balkenradius anhand von Glg. 3.2 und nicht nach Glg. 3.1 berechnet wird, Kap. 3.2.4, d.h. der Balkenradius geht nicht mehr quadratisch in die relative Dichte ein, wie in den Abschätzungsformeln von Gibson und Ashby angenommen wird, Kap. 2.6, sondern steigt schneller an: Dadurch, dass der Grundwerkstoff, der in den Knotenpunkten mehrfach vorkommen würde, beim korrigierten Modell auf die Balken verteilt wird, nimmt die Dicke der Balken schneller zu als beim unkorrigierten.

Zweitens, dass das Knotenpunktsinnere mit sehr steifen Elementen modelliert wird, und damit die Biegelänge bzw. Zuglänge der Balken proportional zum Balkenradius reduziert wird, Kap. 2.6.4.

Diese beiden Umstände führen dazu, dass E-Modul und Schubmodul der Geometrien nach dem korrigierten Modell schneller zunehmen. Beide Effekte bewirken eine raschere Versteifung als es die Abschätzungsformeln vorhersagen.

Abb. 4.1 und Abb. 4.2 zeigen die Verläufe von E-Modul und Schubmodul für alle behandelten Geometrien im Vergleich.

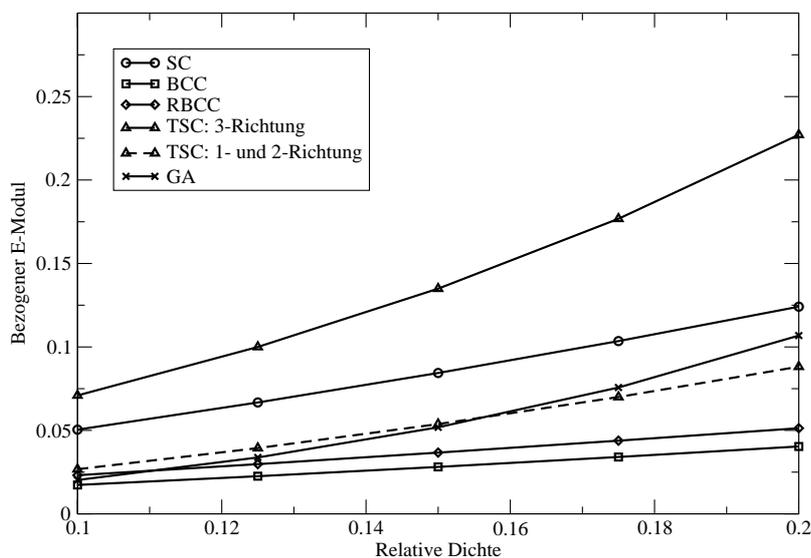


Abbildung 4.1: E-Modul in Hauptachsenrichtung vs. relative Dichte, alle Geometrien, mit Korrektur

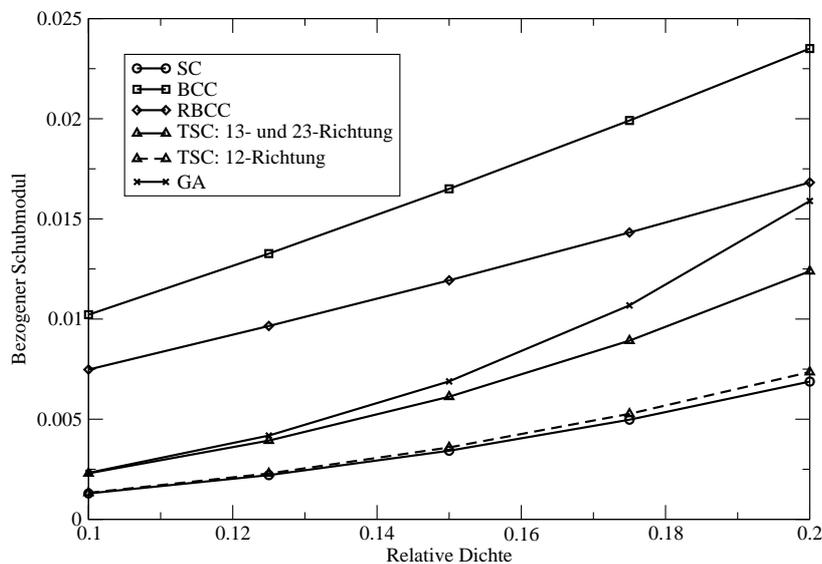


Abbildung 4.2: Schubmodul in Hauptachsenrichtung vs. relative Dichte, alle Geometrien, mit Korrektur

4.1.2 Berechnung anhand des unkorrigierten Modells

Um anhand der Exponenten der Dichteabhängigkeitskurven die Deformationsmechanismen identifizieren zu können, muss das unkorrigierte Modell herangezogen werden, weil dabei die oben genannten versteifenden Effekte wegfallen.

Natürlich ist das korrigierte Modell der Wirklichkeit näher, aber zum Vergleich mit den Gibson-Ashby-Abschätzungsformeln ist das unkorrigierte Modell notwendig.

Abb. 4.3 und 4.4 zeigen exemplarisch für die GA-Geometrie, wie stark die Unterschiede durch die beschriebenen Korrekturen sein können. Wie stark der Einfluss der Korrekturen jeweils ist, zeigen die mittleren Kurven, die nur mit Radiuskorrektur gerechnet werden, nicht aber mit versteiften Knotenpunkten.

Abb. 4.5 und 4.6 zeigen die Verläufe von E-Modul und Schubmodul aller Geometrien ohne Korrekturen.

4.1.3 Diskussion der Deformationsmechanismen

Aus den Kurvenverläufen für E-Modul und Schubmodul des unkorrigierten Modells, Abb. 4.5, 4.6, werden die Exponenten der Dichteabhängigkeit berechnet, Tab. 4.1.

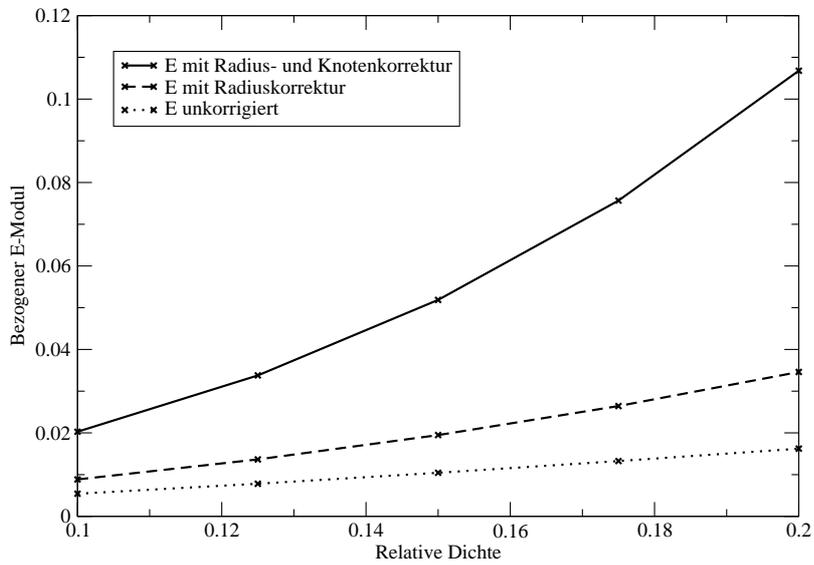


Abbildung 4.3: E-Modul in Hauptachsenrichtung vs. relative Dichte, GA-Geometrie

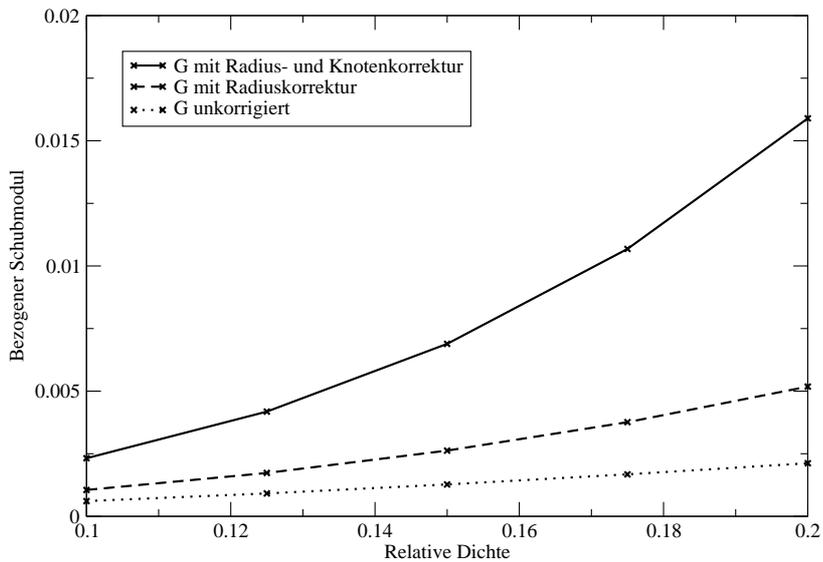


Abbildung 4.4: Schubmodul in Hauptachsenrichtung vs. relative Dichte, GA-Geometrie

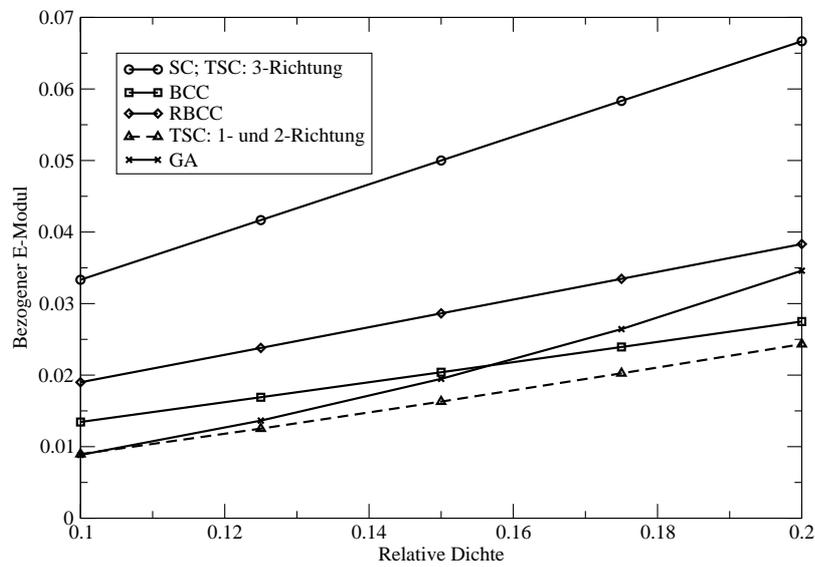


Abbildung 4.5: E-Modul in Hauptachsenrichtung vs. relative Dichte, alle Geometrien, ohne Korrektur

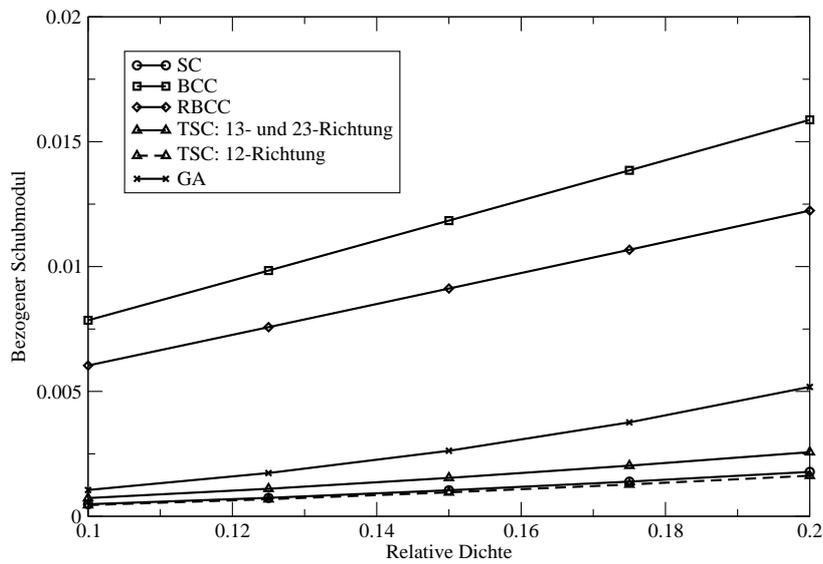


Abbildung 4.6: Schubmodul in Hauptachsenrichtung vs. relative Dichte, alle Geometrien, ohne Korrektur

Der dafür verwendete Algorithmus (nonlinear curve fit) wird von dem Programm XMGRACE zur Verfügung gestellt. Die verwendete Funktion lautet

$$f(\rho_{\text{rel.}}) = A_0 + A_1 \rho_{\text{rel.}}^{A_2}, \quad (4.1)$$

in Anlehnung an die Struktur der von Gibson und Ashby angegebenen Abschätzungsformeln. Die Parameter A_0 , A_1 und A_2 werden iterativ berechnet. Der Parameter A_2 ist der Dichteabhängigkeitsexponent.

Tabelle 4.1: Exponenten der Dichteabhängigkeit der elastischen Eigenschaften, extrahiert aus den Kurvenverläufen des unkorrigierten Modells

	E, Achsrichtung	G	E, Diagonale	E, Raumdiagonale
SC	1.00	1.82	1.79	1.77
BCC	1.06	1.03	1.04	1.02
RBCC	1.02	1.04	1.03	1.03
TSC:1,2	1.26			
TSC:3	1.00			
TSC:12		1.79		
TSC:13,23		1.72		
TSC:011			1.65	
TSC:110			1.73	
TSC:111				1.72
GA	1.42	1.71	1.65	1.67

Der Dichteabhängigkeitsexponent des E-Moduls in Richtung der Diagonalen unterscheidet sich deutlich von dem des E-Moduls in Richtung der Hauptachsen, er liegt jedoch ziemlich in der Nähe des Exponenten des Schubmoduls in Hauptachsenrichtung. Das erklärt sich damit, dass eine einachsige Spannung in Diagonalrichtung nach Transformation auf die Hauptachsen in eine Schubspannung und (geringere) Normalspannungen zerfällt. Deshalb ist das Verhalten bei einachsiger Spannung in Diagonalrichtung sehr ähnlich, aber nicht gleich, dem Verhalten der Geometrie bei Schubspannung im Hauptachsensystem.

SC-Geometrie

Beim E-Modul tritt eine lineare Abhängigkeit auf, das bedeutet, dass eine reine axiale Beanspruchung der Balken vorliegt.

Beim Schubmodul liegt der Exponent nahe bei zwei, damit muss es sich hier hauptsächlich um Biegebeanspruchung handeln, sowie Schubbeanspruchung des auf Querkraft belasteten Balkens, Abb. 3.1. Diese beiden Mechanismen können wie eine Serienschaltung verschieden steifer Elemente behandelt werden, deshalb ist Glg. (2.63)

anzuwenden. Der Exponent der Dichteabhängigkeit muss daher zwischen den beiden Extremen eins und zwei liegen, an der Nähe zur jeweiligen Grenze sieht man, ob Schub oder Biegung überwiegt. Das Ausmass der beiden Deformationsmechanismen hängt von der Schlankheit des Balkens ab.

Daraus ergibt sich, dass bei zunehmender Balkendicke die Biegedeformation in den Hintergrund treten, die Schubdeformation dagegen zunehmen wird. Das bedeutet aber, dass der Exponent eigentlich mit zunehmender relativer Dichte geringer werden wird, die Kurve also etwas abflacht.

Innerhalb des betrachteten Fensters von $0.1 \leq \rho_{\text{rel.}} \leq 0.2$ scheint der Exponent aber die Kurve ausreichend genau zu beschreiben.

BCC-Geometrie

Hier zeigt sich sowohl für den E-Modul als auch für den Schubmodul eine annähernd lineare Kurve. Das erklärt sich damit, dass globaler Schub in Achsrichtung der Zelle einer globalen Normalbeanspruchung in Diagonalrichtung der Zelle entspricht, dort befinden sich dann die Balken der Raumdiagonalen näherungsweise unter Zugbeanspruchung, Abb. 3.3.

RBC-Geometrie

Hier tritt sehr ähnliches Verhalten wie bei der BCC-Geometrie auf, die gleichen Argumente sind gültig, Abb. 3.5.

TSC-Geometrie

Der E-Modul in 1- und 2-Richtung zeigt Abhängigkeit etwas höherer Ordnung als linear, das liegt daran, dass die Stäbe in diesen Richtungen nicht durchlaufen, sondern versetzt sind, damit kommt es zu einer Biegebeanspruchung, wobei die Biegelängen aber sehr kurz sind, Abb. 3.7. Deshalb liegt der Exponent nicht höher, es tritt eine relativ starke Schubdeformation auf.

In 3-Richtung verhält sich die TSC-Geometrie genauso wie die SC.

Der Schubmodul ist in beiden Fällen (12 und 13/23) stark von Biegebeanspruchung geprägt, hier sind auch die Biegelängen größer als beim E-Modul in 1- und 2-Richtung.

GA-Geometrie

Der E-Modul verhält sich sehr ähnlich wie bei der TSC-Geometrie in 1- und 2-Richtung, der etwas höhere Exponent erklärt sich daraus, dass die Enden der Biegebalken bei der GA-Geometrie (von denen einer innerhalb der Zelle liegt, Abb. 3.9) gegeneinander rotieren können. Lägen beide Enden der Biegebalken am Rand der Zelle, wäre ihre Rotation durch die Koppelgleichungen gleichgeschaltet. So kann aber

wieder die Biegedeformation etwas mehr in den Vordergrund treten. Der Schubmodul ist ebenso wie bei der TSC-Geometrie stark durch Biegebeanspruchung geprägt, zeigt also einen relativ großen Exponenten.

4.1.4 Querkontraktionszahlen

Bei der BCC-, der RBCC- und der GA-Geometrie treten Querkontraktionen auf, Anh. B.2, B.3, B.5, nicht aber bei der SC- und der TSC-Geometrie, Anh. B.1, B.4. Bei der BCC- und der RBCC-Geometrie liegt das an den Raumdiagonalen, durch die die Zugkräfte teilweise in Querrichtung abgeleitet werden.

Bei der GA-Geometrie hingegen entstehen die Querkontraktionen durch die Rotation der Endknoten der Biegebalken, die damit einen Einfluss auf die quer dazustößenden Balken ausüben: diese werden durch die Rotation der gemeinsamen Knoten mitgebogen und bewirken damit eine Verschiebung in Querrichtung.

Die Querkontraktion entsteht bei linearer Rechnung nicht aus der axialen Verschiebung der Endknoten der Biegebalken, diese geht erst bei nichtlinearer Rechnung ein. Dieser Umstand ist deutlich an der TSC-Geometrie zu sehen: Hier sind die Rotationen der Endknoten der Biegebalken gleichgeschaltet, weil sie an gegenüberliegenden Seiten der Zelle liegen und aufgrund der Symmetrie ergeben sie sich zu null. Deshalb können sie keinen Einfluss in Querrichtung ausüben.

4.1.5 Zusammenfassung

Die verschiedenen Deformationsmechanismen lassen sich sehr genau identifizieren, das Einheitszellenmodell reagiert in plausibler Art und Weise.

Das unkorrigierte Modell ist also gut dazu geeignet, die Mechanismen bei der Deformation einer Geometrie zu verstehen.

Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen aus dem korrigierten und dem unkorrigierten Modell sind durchaus nachvollziehbar.

4.2 Berechnungen an abgeschlossenen Blöcken

In diesem Abschnitt wird das elastische Verhalten der Einheitszelle mit periodischen Randbedingungen, das einem unendlichen zellulären Material entspricht, dem Verhalten eines endlichen würfelförmigen Blocks gegenübergestellt.

Es ist zu erwarten, dass der endliche Block steifer reagiert als die periodische Zelle, und zwar aufgrund des Einflusses der Abschlussbalken, die den endlichen Block vervollständigen. Dieser Effekt sollte jedoch mit zunehmender Blockgröße abnehmen.

Ab hier wird nur noch mit dem korrigierten Modell gerechnet, die relative Dichte der Zellen, aus denen die Blöcke assembliert wurden, beträgt 0.1. Wegen der zusätzlichen Abschlussbalken ist jedoch die relative Dichte der Blöcke höher als die der Zellen.

4.2.1 Randbedingungen

Um vergleichbare Werte zu erhalten, müssen aus simulierten Druck-, bzw. Schubversuchen die Druck- und die Schubsteifigkeit berechnet werden.

Die Randbedingungen für diese Simulationen werden folgendermaßen gesetzt:

Für die Simulation eines Druckversuches werden die Knoten einer beliebigen Seite des Würfels normal zur Oberfläche gesperrt, das entspricht also dem Kontakt zu einer reibungsfreien, steifen Platte; die Knoten der gegenüberliegenden Fläche werden normal zur Oberfläche verschoben, in Querrichtung sind sie jedoch frei. Das entspricht dem Kontakt zu einer reibungsfreien, schwimmenden steifen Platte.

Weiters muss ein Knoten der "Bodenfläche" in beide Querrichtungen und um die "Hochachse" gesperrt werden, um Starrkörperbewegungen auszuschließen. Alle anderen Freiheitsgrade sind ungesperrt. Querkontraktionen sind also zugelassen.

Für die Simulation eines Schubversuchs werden die Knoten einer Fläche in alle drei Richtungen gesperrt, die Knoten der gegenüberliegenden Fläche werden in einer Querrichtung verschoben, in der anderen Querrichtung und in Normalrichtung gesperrt.

Die Annahmen über die Versuchseinrichtung sind hier also andere als bei der Simulation des Druckversuches.

Aufgrund der schwierig zu modellierenden Kontaktbedingungen am Rand werden die Knoten in beide Richtungen normal zur Platte zur gesperrt. Realistischerweise müssten jedoch die Knoten die Möglichkeit haben, von der Platte abzuheben.

4.2.2 Berechnung der Druck- und Schubsteifigkeit

Die Steifigkeiten werden mit folgender Beziehung berechnet ($\sum F_{n,q}$ Summe aller Knotenkräfte in Normalrichtung bzw. Querrichtung; $u_{n,q}$ aufgebrachte Verschiebung; a Seitenlänge des Würfels)

$$E = \frac{\sum F_n}{u_n a}, \quad G = \frac{\sum F_q}{u_q a}. \quad (4.2)$$

Die damit berechnete ‘‘Schubsteifigkeit’’ bezieht sich streng genommen nicht nur auf die Schubdeformation, weil es sich bei dem simulierten Versuch auch um keine reine Schubbelastung handelt. Der Vergleich mit dem Schubmodul des zellulären Materials ist also nur bedingt möglich.

4.2.3 Vergleich mit Werten des zellulären Materials

Die Abhängigkeiten von Drucksteifigkeit und Schubsteifigkeit von der Zellenzahl zeigen Abb. 4.7 bis 4.11.

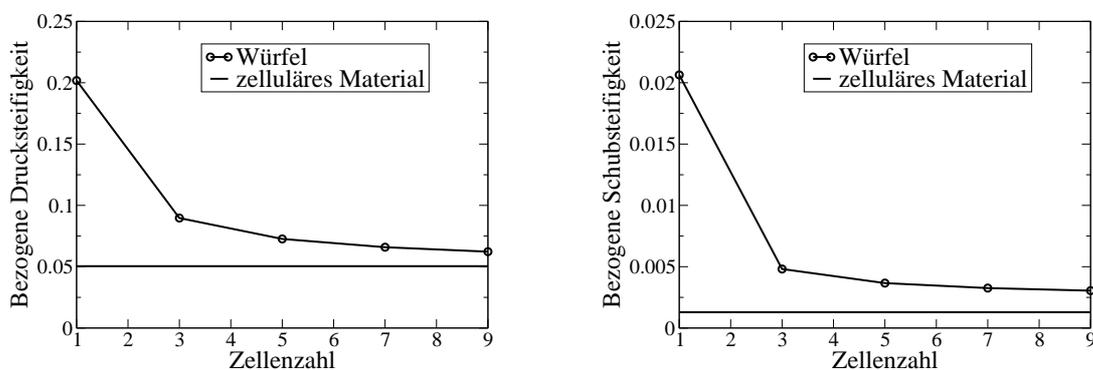


Abbildung 4.7: Druck- und Schubsteifigkeit vs. Zellenzahl, SC-Struktur

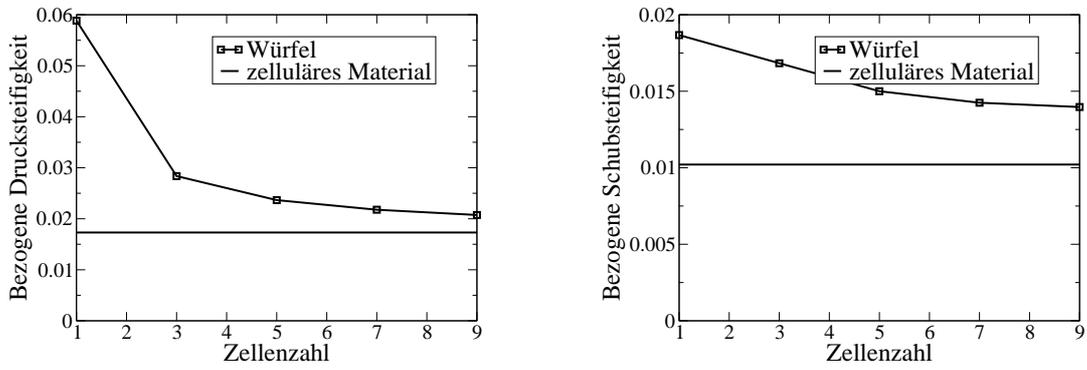


Abbildung 4.8: Druck- und Schubsteifigkeit vs. Zellenzahl, BCC-Struktur

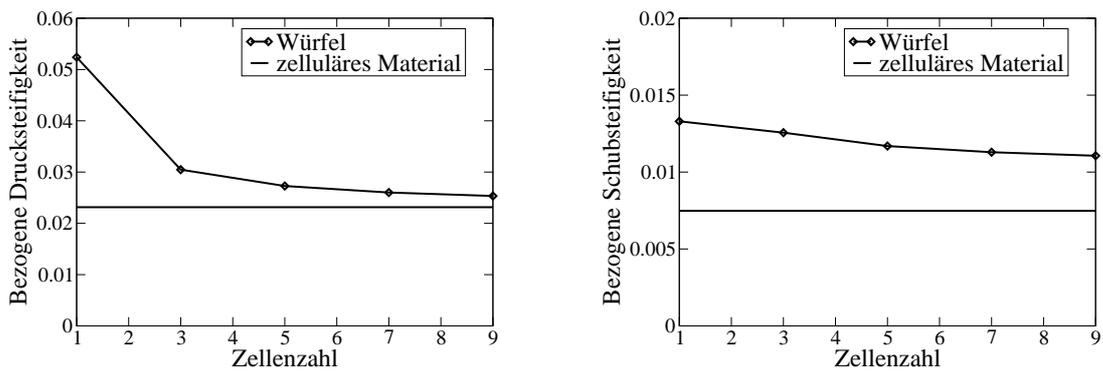


Abbildung 4.9: Druck- und Schubsteifigkeit vs. Zellenzahl, RBCC-Struktur

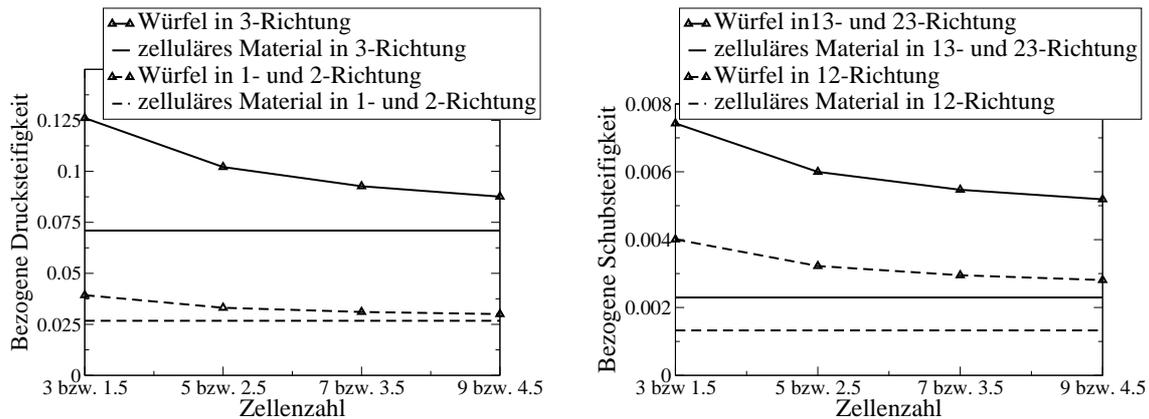


Abbildung 4.10: Druck- und Schubsteifigkeit vs. Zellenzahl, TSC-Struktur

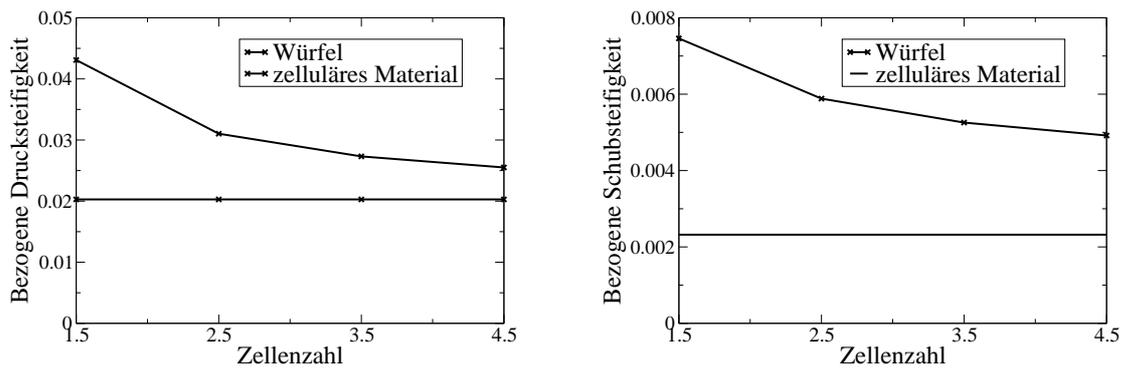


Abbildung 4.11: Druck- und Schubsteifigkeit vs. Zellenzahl, GA-Struktur

Die unterschiedlichen Werte der Zellenzahlen ergeben sich daraus, dass die vom Institut für Werkstoffkunde und Materialprüfung der TU Wien hergestellten Probenkörper Würfel mit gleicher Seitenlänge darstellen, die Einheitszellen dieser Probenkörper ergeben sich damit zu unterschiedlichen Größen. Die Einheitszelle des TSC-Probenkörpers ist damit auch kein Kubus mehr, sondern ein Quader mit quadratischer Grundfläche, Abb. 3.7.

Bei der SC-Struktur sieht man den Einfluss der zusätzlichen Abschlussbalken sehr deutlich: in Abb. 4.7 links zeigt sich bei einer Blockgröße von 1 der vierfache Wert als beim der unendlichen Material. Statt einem Balken in Belastungsrichtung ergeben sich durch den Abschluss vier Balken.

4.2.4 Randeffekte und Deformationsmechanismen bei abgeschlossenen Blöcken

Abb. 4.12 zeigt einen abgeschlossenen Block der BCC-Struktur unter Schub, Abb. 4.13 einen Block der SC-Struktur unter Schub, Abb. 4.14 einen Block der GA-Struktur unter Druckbelastung, Abb. 4.15 einen Block der RBCC-Struktur unter Druckbelastung und Abb. 4.16 einen Block der TSC-Struktur unter Druckbelastung in 1-Richtung. Die Ergebnisse der Balkenmodelle, die strenggenommen nur aus den Balkenachsen bestehen, werden zum besseren Verständnis mit ihren Balkenradien mittels POV-Ray visualisiert.

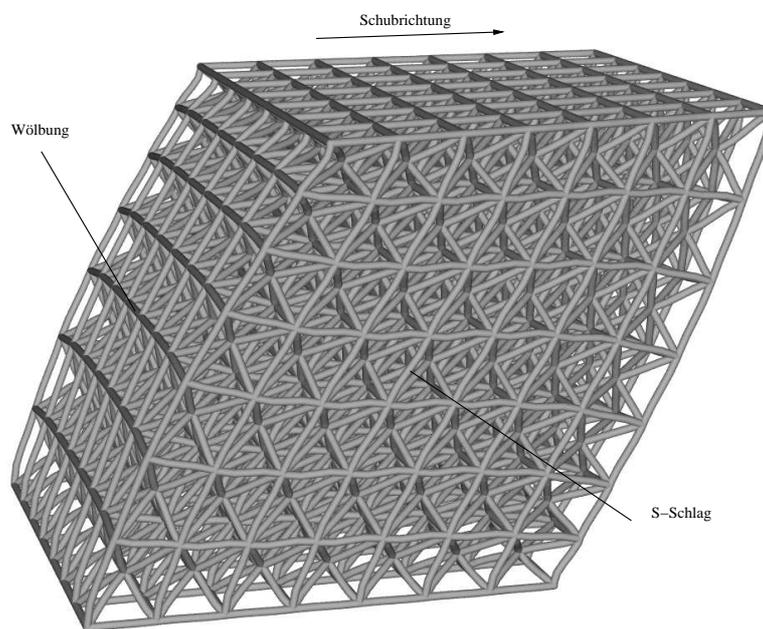


Abbildung 4.12: BCC-Struktur, $7 \times 7 \times 7$ -Würfel auf Schub, Deformationsplot, Ergebnisse der linearen Rechnung stark skaliert

Globale Biegedeformation

Dadurch, dass der E-Modul und der Schubmodul der BCC-Geometrie etwa von gleicher Größe sind, weicht ein abgeschlossener Block dieser Geometrie bei der hier modellierten Schubbeanspruchung auf eine globale Biegedeformation aus und es bildet sich eine Art S-Schlag in der Mitte des Blockes, Abb. 4.12 und 4.13 zum Vergleich, Prinzipskizze Abb. 4.17a,b. Dieser Effekt tritt nur bei der BCC-Struktur und in geringerem Ausmass bei der RBCC-Struktur auf, nicht bei Blöcken anderer Geometrien, weil hier der Schubmodul wesentlich geringer ist als der E-Modul.

Diese globale Biegedeformation erfordert eine lokale Normaldeformation der Zellen am Rand: Eine Zelle im Inneren der Struktur wird von der in Schubrichtung vor und

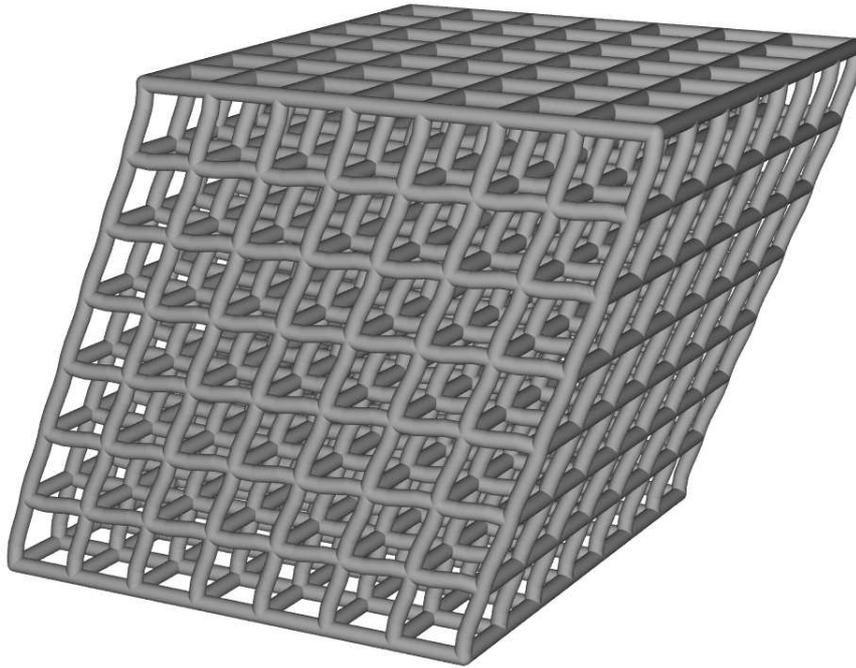


Abbildung 4.13: SC-Struktur, $7 \times 7 \times 7$ -Würfel auf Schub, Deformationsplot, Ergebnisse der linearen Rechnung stark skaliert

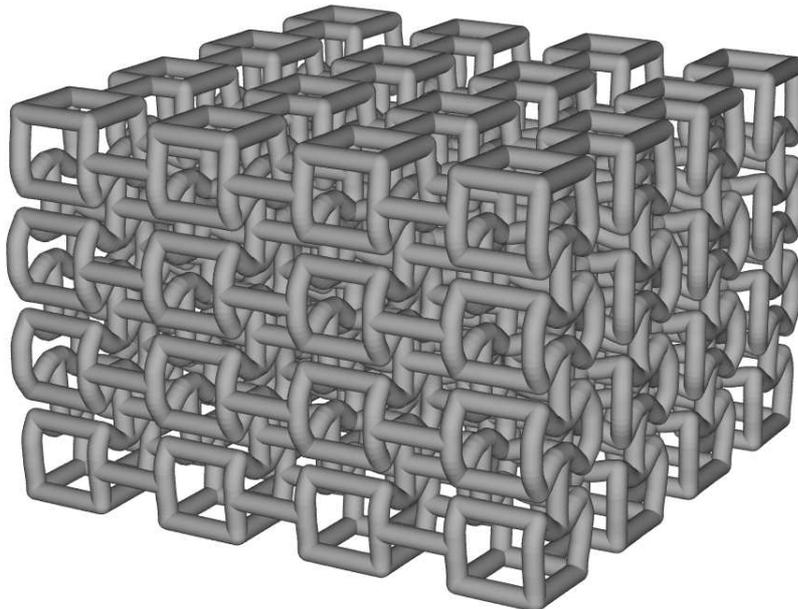


Abbildung 4.14: GA-Struktur, $7 \times 7 \times 7$ -Würfel unter Druck, Deformationsplot, Ergebnisse der linearen Rechnung stark skaliert

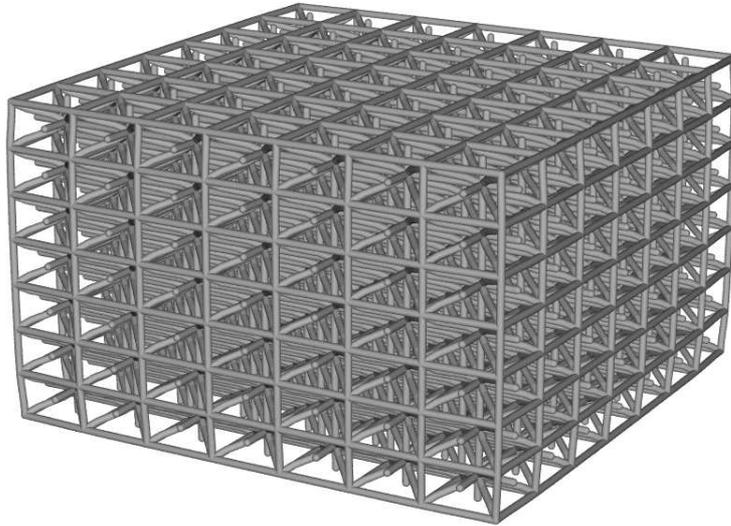


Abbildung 4.15: BCC-Struktur, $7 \times 7 \times 7$ -Würfel unter Druck, Deformationsplot, Ergebnisse der linearen Rechnung stark skaliert

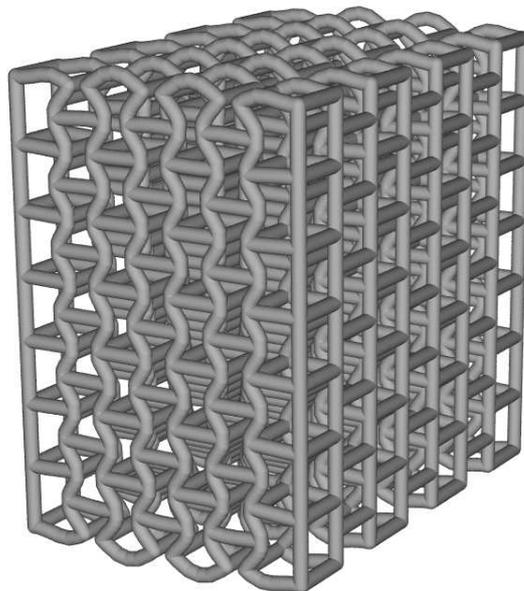


Abbildung 4.16: TSC-Struktur, $7 \times 7 \times 7$ -Würfel unter Druck in 1-Richtung, Deformationsplot, Ergebnisse der linearen Rechnung stark skaliert

hinter ihr liegenden Zelle stabilisiert, eine Zelle am Rand kann sich dagegen einseitig frei verformen. Damit kann die globale Biegedeformation vom Rand her die ganze Struktur erfassen, Abb. 4.17c

Die Wölbung der Randstäbe quer zur Schubrichtung kommt folgendermaßen zustande: Die vertikalen Stäbe innerhalb der Randfläche quer zur Schubrichtung werden von beiden Seiten gedehnt bzw. komprimiert, jene an den vertikalen Kanten jedoch nur einseitig, Abb. 4.17d.

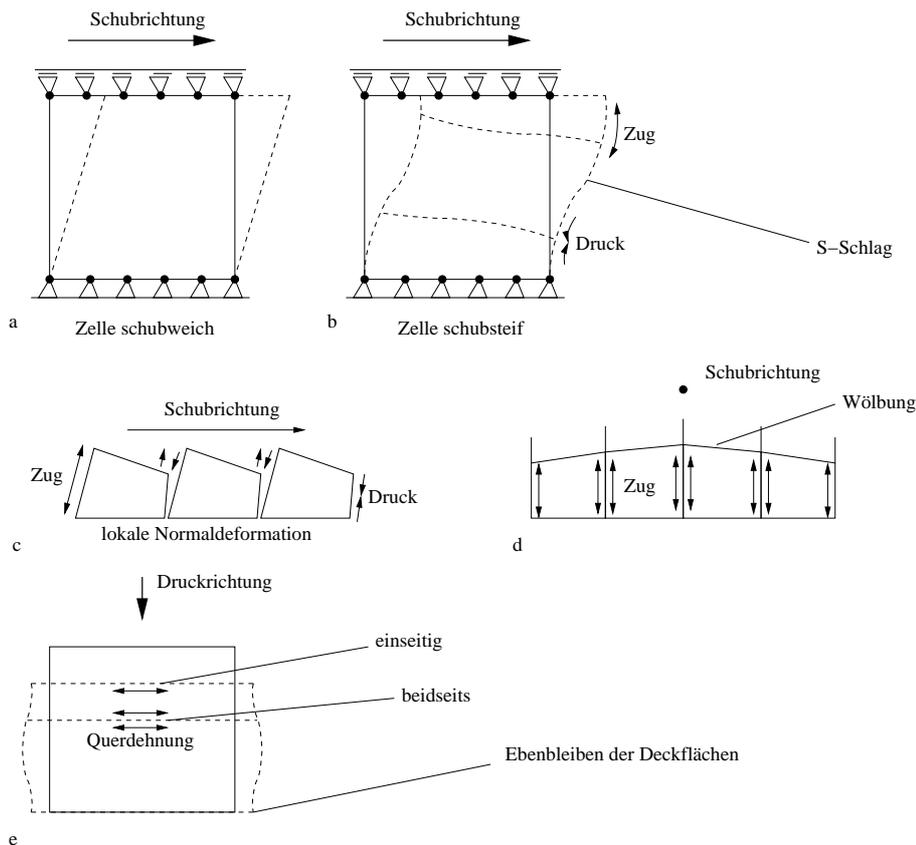


Abbildung 4.17: Randeffekte

Ausbauchen der Seitenflächen

Auch bei der GA-Struktur unter Druckbelastung treten Randeffekte auf, diese sind jedoch weitaus geringer als jene der BCC-Struktur unter Schubbelastung.

Die Randeffekte bestehen in einem Ausbauchen der Seitenflächen, Abb. 4.14.

Dieser Effekt entsteht durch die Querdehnung dieser Geometrie, wobei sich die Boden- und Deckfläche weniger stark erweitern. Der Grund dafür ist wieder, dass die an diesen Randflächen liegenden horizontalen Balken nur von einer Seite her durch die Querdehnung erweitert werden, die innerhalb der Struktur liegenden Querbalken jedoch von oben und von unten, Abb. 4.17e.

Diese Art von Randeinfluss lässt sich auch bei der BCC-Struktur und der RBCC-Struktur, Abb. 4.15 beobachten, die auch über Querdehnung verfügen.

Ein Randeffect, der auf Querdehnung zurückzuführen ist, ergibt sich auch bei der TSC-Struktur: Das zelluläre Material zeigt bei der TSC-Geometrie keine Querdehnung aufgrund der Gleichschaltung der Rotationen der Endpunkte der Biegebalken, Kap. 4.1.4. Im abgeschlossenen Block fällt diese Gleichschaltung für die Randzellen weg, deshalb können sich die Randbalken nach außen biegen, Abb. 4.16.

Diese Effekte klingen innerhalb einer Schicht von Zellen weitgehend ab.

Ebenbleiben der Deck- und Bodenflächen

Einen weiteren Randeffect bewirkt das erzwungene Ebenbleiben der Deck- und Bodenflächen. Bei freier Deformation würden sich sonst fallweise auch die Balken der Grenzflächen biegen. Dieser Effekt klingt aber auch innerhalb einer Schicht von Zellen ab, z.B. Abb. 4.16, Prinzipskizze Abb. 4.17e.

4.2.5 Zusammenfassung

Im Großen und Ganzen ist das Verhalten wie erwartet, die Drucksteifigkeiten der Würfel relaxieren gegen den Wert des unendlichen Materials, die Abweichung bei einer Zellenzahl von neun ist jedoch immer noch etwa im Bereich von 10 – 20%. Man müsste also noch wesentlich größere Probenkörper bauen, um einigermaßen vergleichbare Ergebnisse mit einem unendlichen zellulären Material zu erzielen. Die Schubsteifigkeiten relaxieren entweder wesentlich langsamer, oder sie konvergieren gegen einen Wert, der über dem des unendlichen zellulären Materials liegt. Dieser Umstand könnte an den Randbedingungen liegen, die für diese Simulationen gesetzt werden müssen. Durch die starre Sperrung der Randflächen sind Rotationen der Balkenenden praktisch ausgeschlossen, weil ihre Nachbarn in derselben Ebene liegen. Bei einem unendlichen zellulären Material würden diese Effekte aber nicht auftreten.

Aufgrund der Tatsache, dass es sich bei dem modellierten Schubversuch nicht um eine reine Schubbeanspruchung handelt, kann auch nicht erwartet werden, dass die Schubsteifigkeit einer abgeschlossenen Struktur gegen den Schubmodul des unendlichen zellulären Materials konvergiert.

Um den Schubmodul anhand von Versuchen messen zu können, bedarf es daher eines anderen Versuchsaufbaus. Eine Möglichkeit wäre eine zweiachsige Prüfeinrichtung.

4.3 Richtungsabhängigkeit des E-Moduls

Dieser Abschnitt geht der Frage nach, wie stark der E-Modul einer Geometrie von der Belastungsrichtung abhängt, die Berechnungen in diesem Abschnitt werden wieder mit dem Einheitszellenmodell durchgeführt, gelten also für ein unendliches zelluläres Material.

Die prinzipielle Materialsymmetrie kann schon aufgrund der geometrischen Verhältnisse beurteilt werden, Kap. 2.3.4. Dabei handelt es sich um qualitative Feststellungen: zum Beispiel, in welche Richtungen das elastische Verhalten identisch ist, oder ob Normalspannungen in Hauptachsenrichtung Schubdeformationen hervorrufen oder nicht.

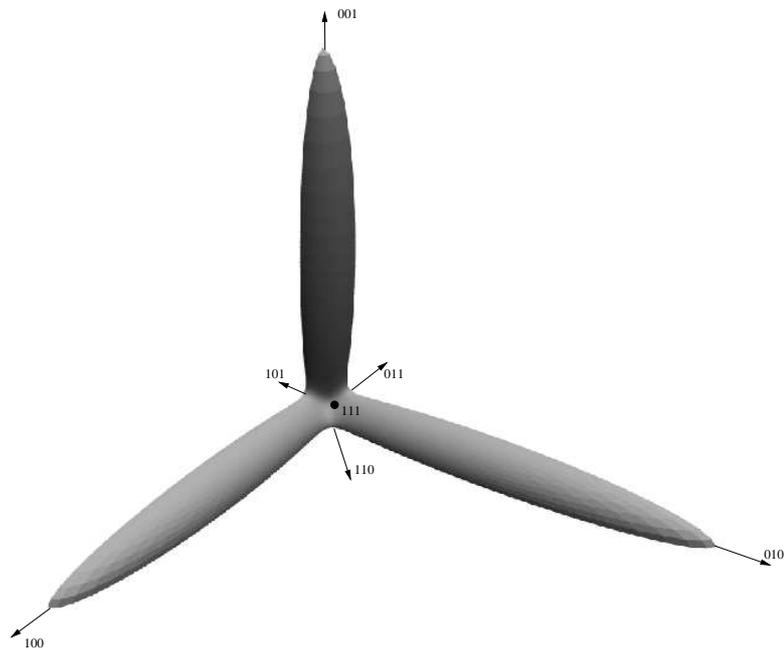
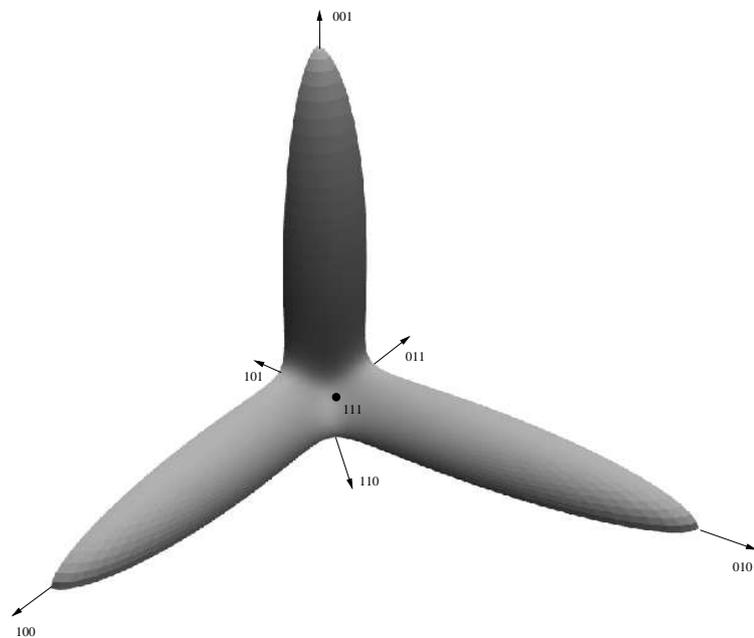
Das Ausmass der Anisotropie soll nun aber quantitativ bestimmt werden.

Dazu werden die Nachgiebigkeitsmatrizen, Anh. B der verschiedenen Geometrien - diese liegen für verschiedene relative Dichten schon aus Kap. 4.1 vor - mittels Rotationstransformation gedreht. Als E-Modul einer bestimmten Richtung bezeichnet man den Kehrwert des Elementes an der Stelle (1, 1) der gedrehten Nachgiebigkeitsmatrix.

Zur Darstellung dieser skalaren Größe, die von zwei Winkeln abhängt sh. Kap. 3.3.5.

4.3.1 Anisotropieplots in Kugelkoordinaten

Die Anisotropieplots werden für eine relative Dichte von 0.1 und 0.2 erstellt, Abb. 4.18 bis 4.27.

Abbildung 4.18: SC-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.1$ Abbildung 4.19: SC-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.2$

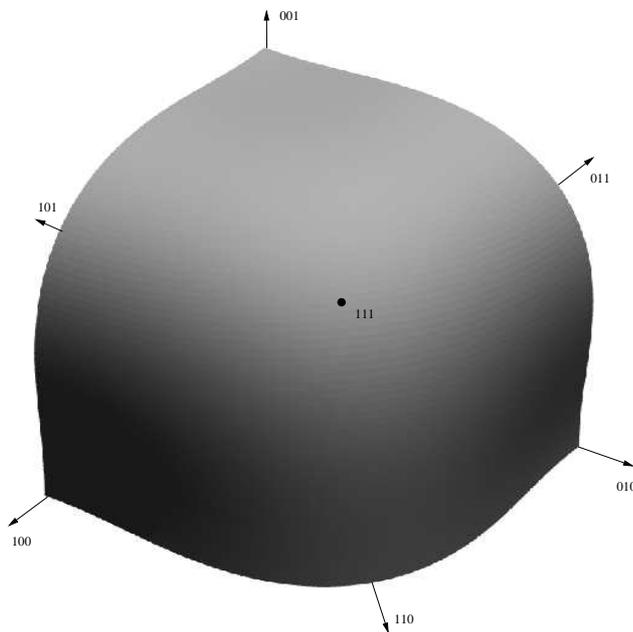


Abbildung 4.20: BCC-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.1$

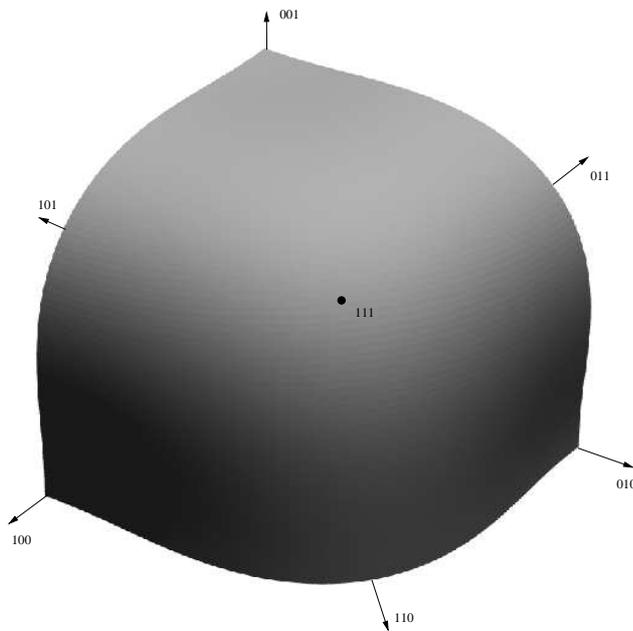


Abbildung 4.21: BCC-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.2$

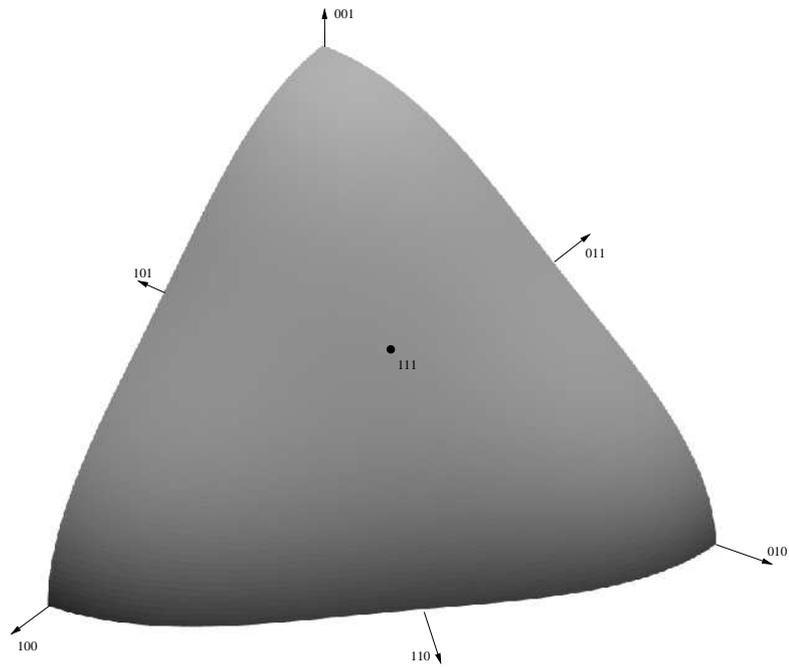


Abbildung 4.22: RBCC-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.1$

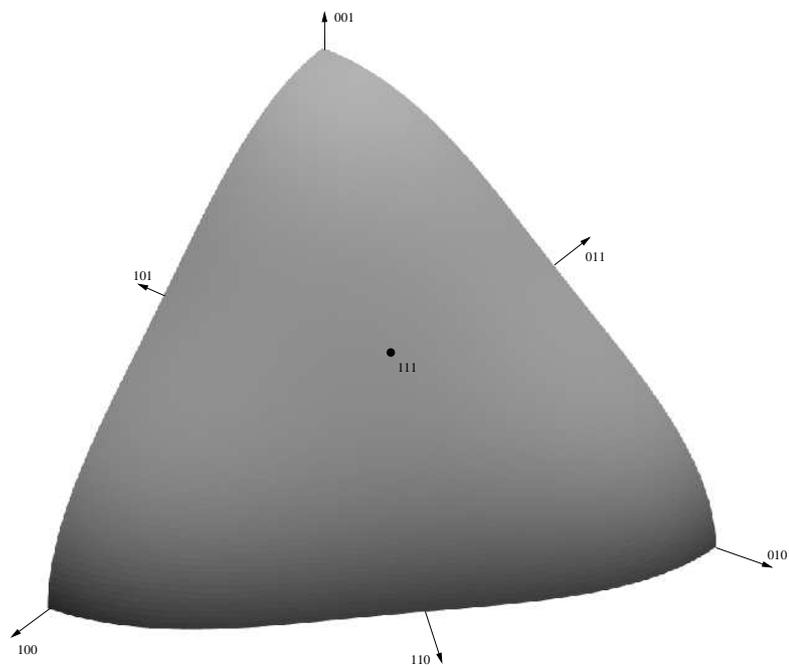


Abbildung 4.23: RBCC-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.2$

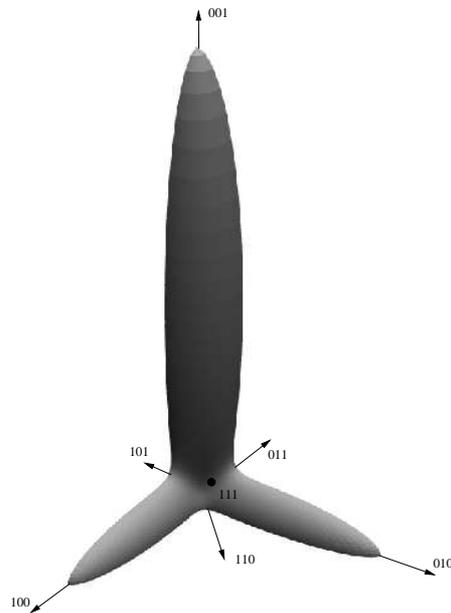


Abbildung 4.24: TSC-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.1$

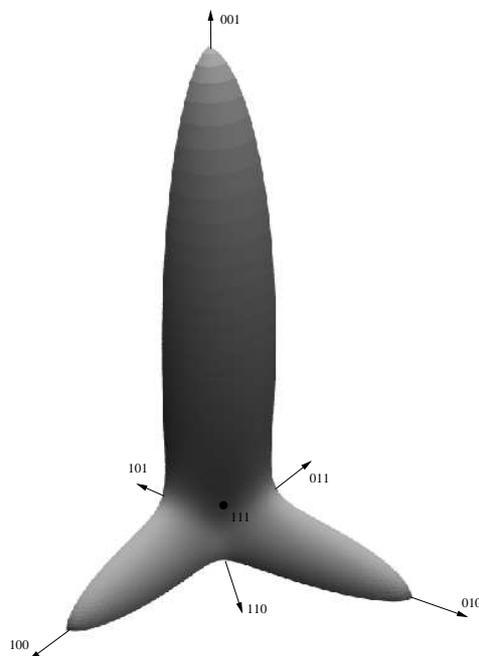
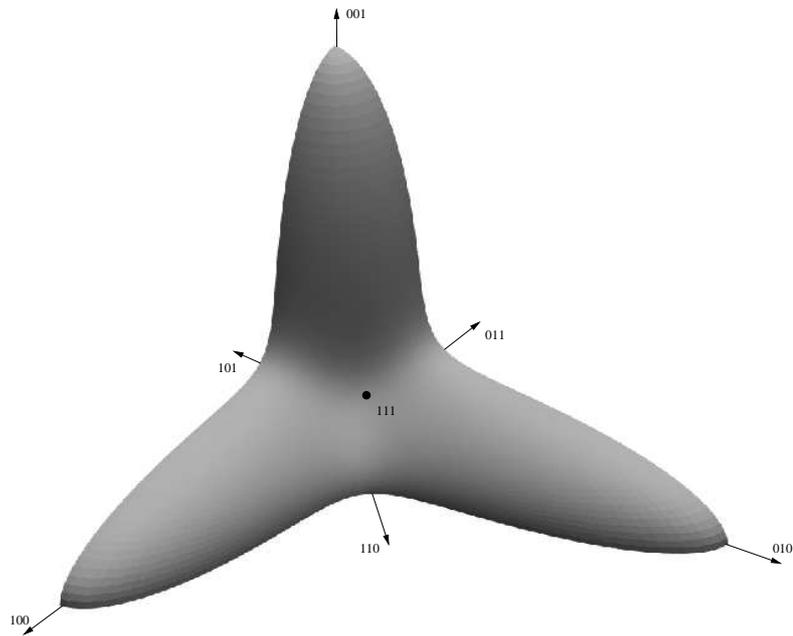
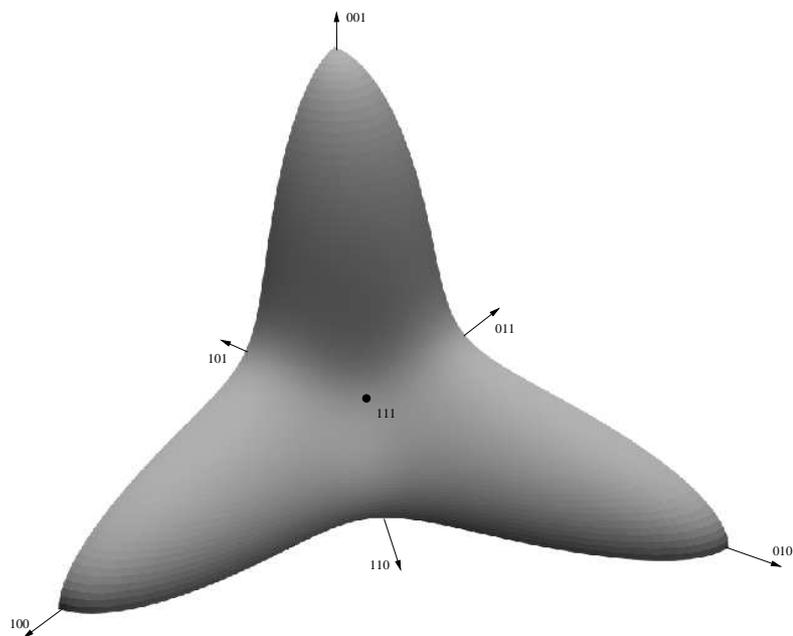


Abbildung 4.25: TSC-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.2$

Abbildung 4.26: GA-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.1$ Abbildung 4.27: GA-Geometrie, Anisotropieplot für den E-Modul bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.2$

4.3.2 Zweidimensionale Richtungsabhängigkeitsdiagramme

Die Richtungsabhängigkeitsdiagramme werden für $0.1 \leq \rho_{rel.} \leq 0.2$ dargestellt, Abb. 4.28 bis 4.37.

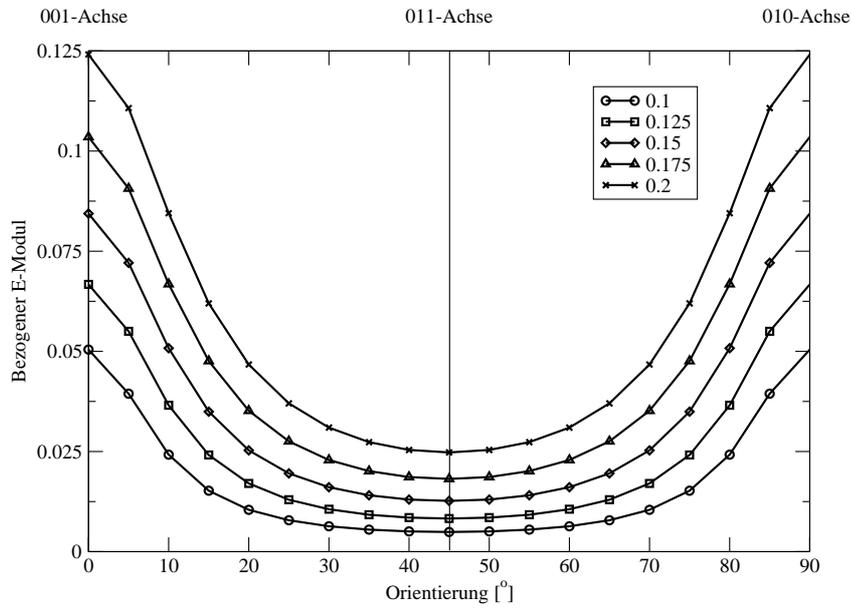


Abbildung 4.28: SC, E-Modul in 001-010-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

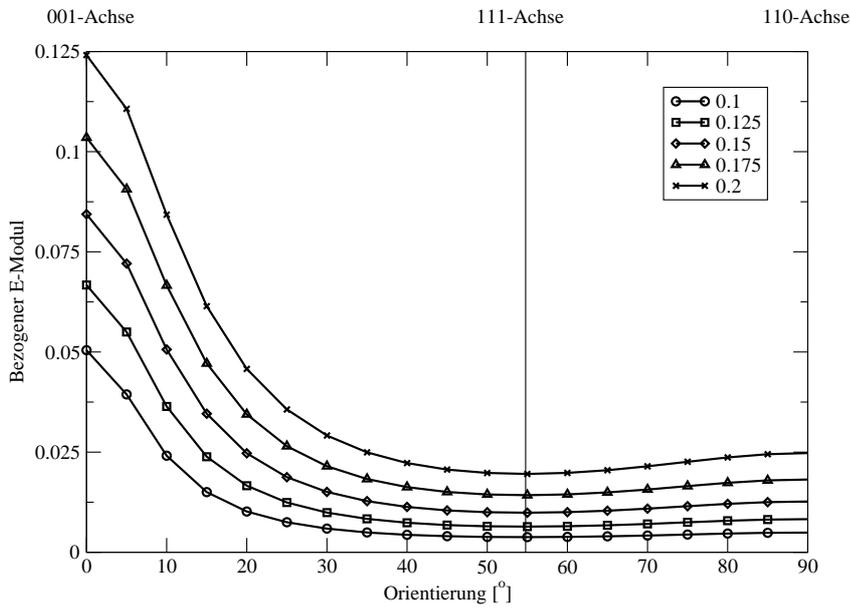


Abbildung 4.29: SC, E-Modul in 001-110-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

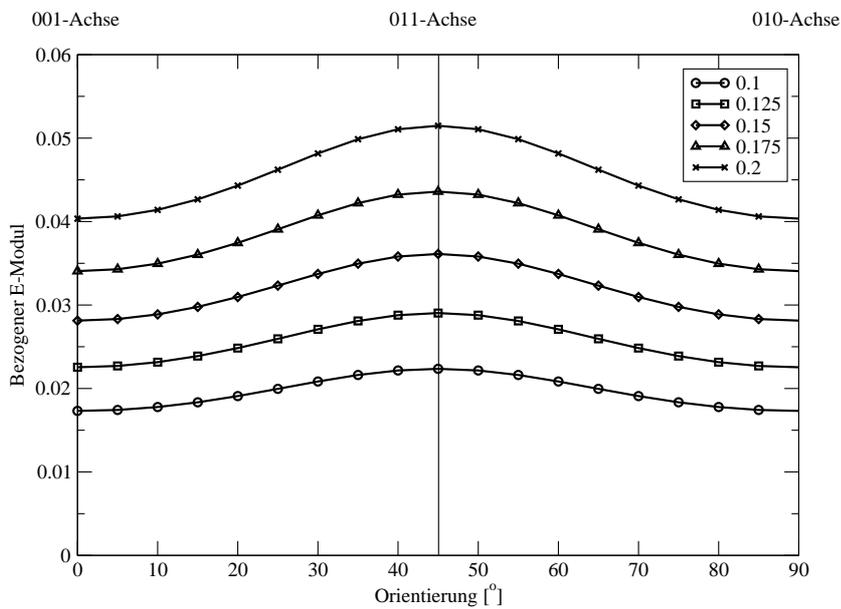


Abbildung 4.30: BCC, E-Modul in 001-010-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

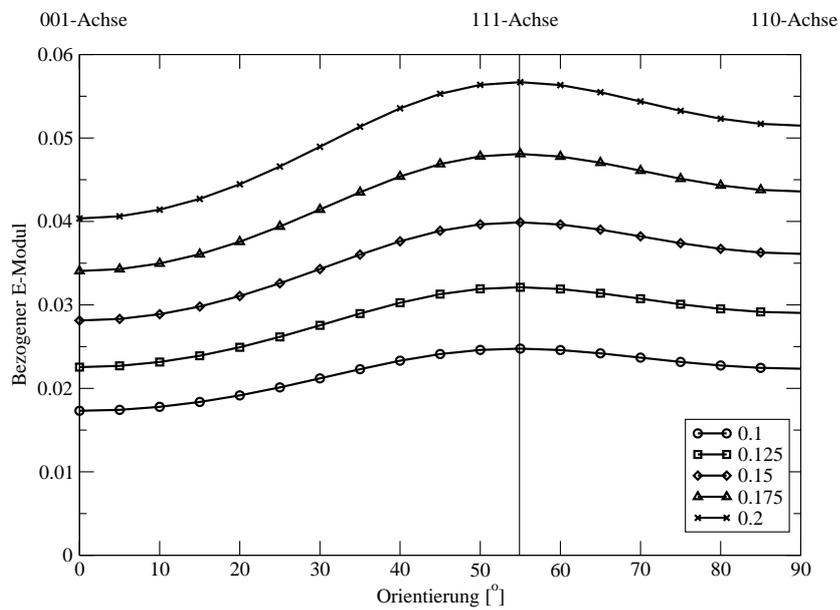


Abbildung 4.31: BCC, E-Modul in 001-110-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

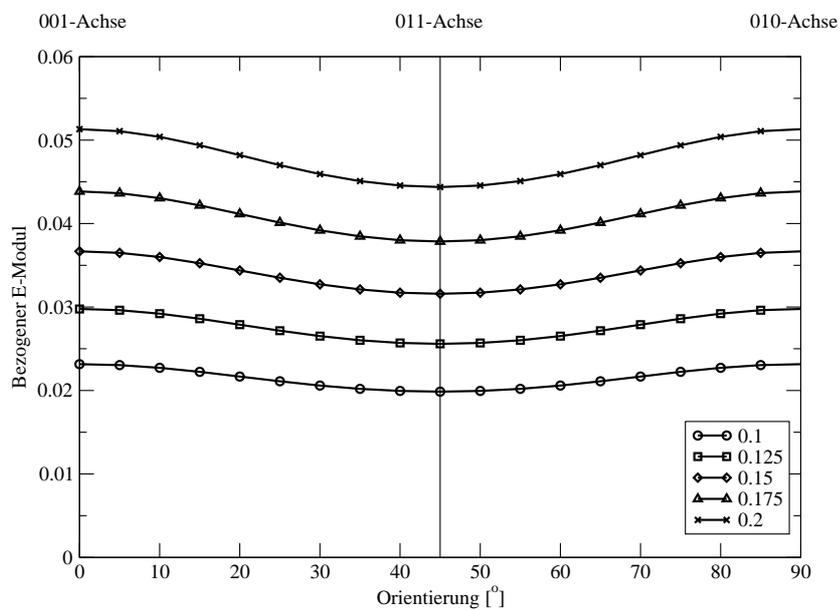


Abbildung 4.32: RBCC, E-Modul in 001-010-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

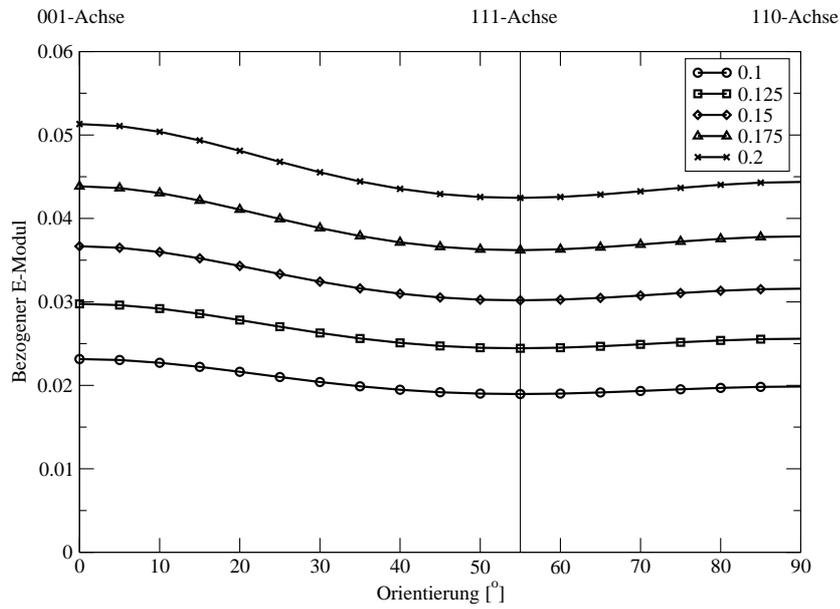


Abbildung 4.33: RBCC, E-Modul in 001-110-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

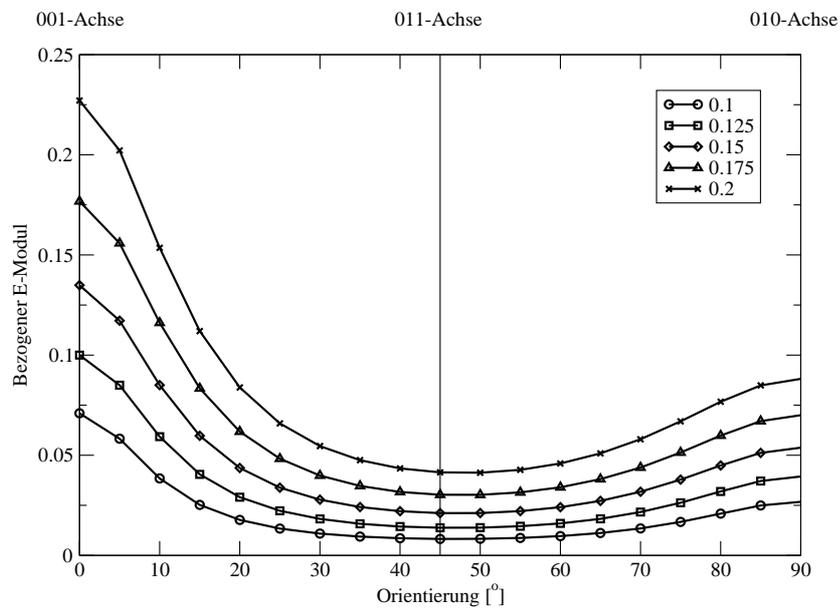


Abbildung 4.34: TSC, E-Modul in 001-010-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

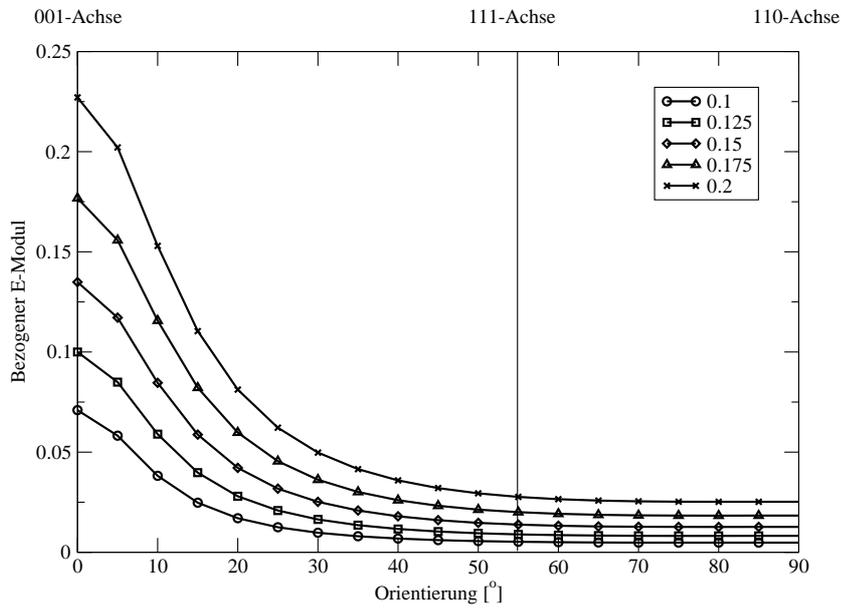


Abbildung 4.35: TSC, E-Modul in 001-110-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

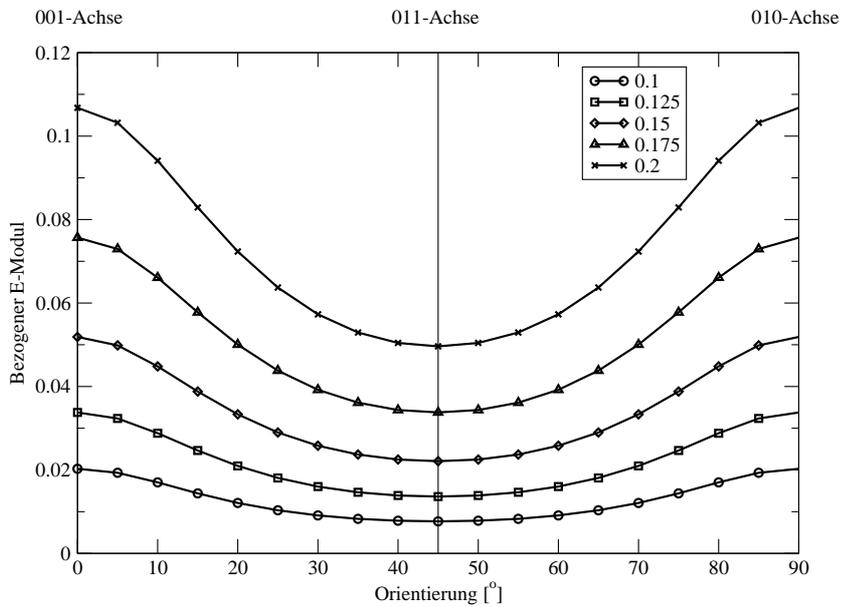


Abbildung 4.36: GA, E-Modul in 001-010-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

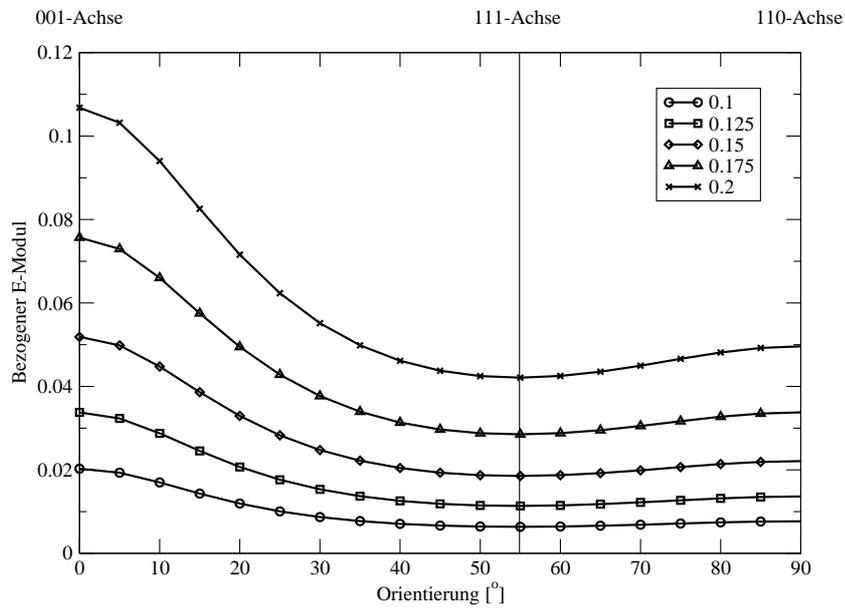


Abbildung 4.37: GA, E-Modul in 001-110-Ebene vs. Orientierung, für $\rho_{rel.} = 0.1$ bis 0.2

4.3.3 Vergleich aller Geometrien

In den Abb. 4.38 und 4.39 sind die Richtungsabhängigkeiten der verschiedenen Geometrien zum Vergleich bei einer relativen Dichte von 0.1 gegenübergestellt.

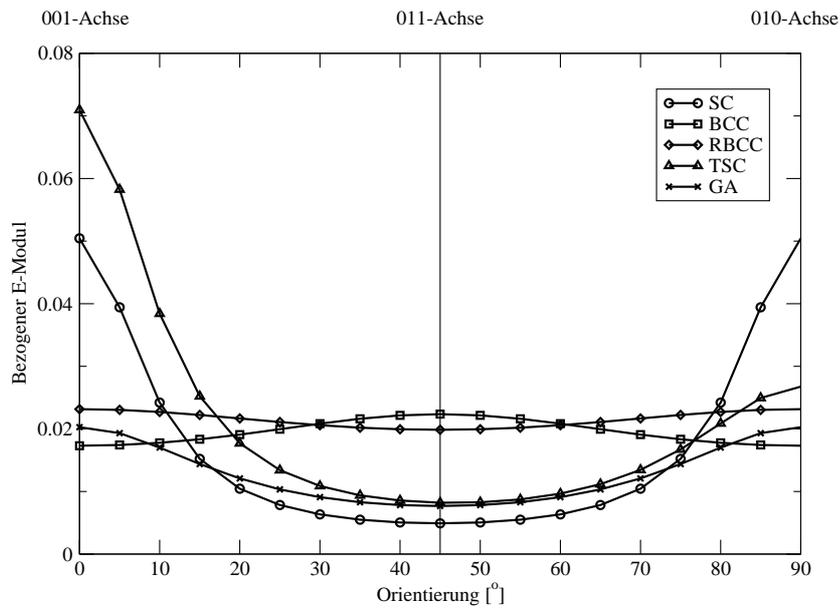


Abbildung 4.38: E-Modul in 001-010-Ebene vs. Orientierung, alle Geometrien bei $\rho_{rel.} = 0.1$

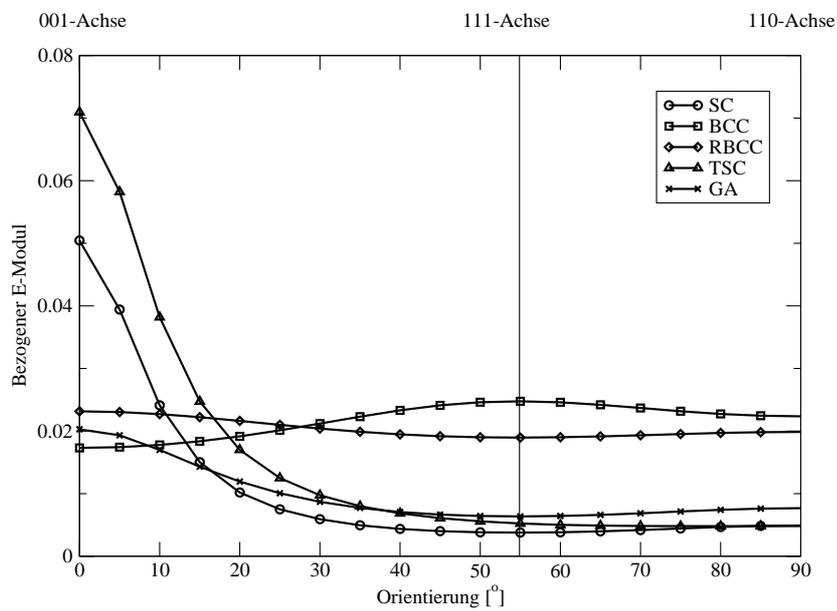


Abbildung 4.39: E-Modul in 001-110-Ebene vs. Orientierung, alle Geometrien bei $\rho_{\text{rel.}} = 0.1$

4.3.4 Elastische Anisotropie: Zusammenfassung

Anhand der Anisotropieplots sieht man anschaulich die Unterschiede zwischen den Geometrien: Die SC-Geometrie ist in den Hauptachsenrichtungen sehr steif, abseits davon hat sie einen starken Einbruch. Am weichsten verhält sich diese Geometrie in Richtung der Raumdiagonalen.

Genau umgekehrt sind die Verhältnisse bei der BCC-Geometrie: diese ist in Richtung der Raumdiagonalen am steifsten, in Richtung der Hauptachsen etwas weicher, die Differenz ist aber nicht sehr gross. Ein hoher E-Modul in Richtung der Diagonalen deutet auf einen hohen Schubmodul in Hauptachsenrichtung hin: Das ist der Grund, warum beim abgeschlossenen Block der BCC-Geometrie unter Schub sehr starke Randeefekte auftreten, Kap. 4.2.4.

Die RBCC-Geometrie zeigt aufgrund ihrer zusätzlichen Balken wieder ein steifeeres Verhalten in Hauptachsenrichtung. Die Anisotropie ist jedoch bei der BCC-Geometrie und der RBCC-Geometrie am schwächsten ausgeprägt. Einem vollkommen isotropen Material entspräche im Anisotropieplot eine Kugel, in den Richtungsabhängigkeitsdiagrammen eine waagrechte Gerade. An der Nähe der Oberfläche bzw. des Kurvenverlaufes zu diesen Idealen kann man das Ausmass der Anisotropie beurteilen.

Im Anisotropieplot der TSC-Geometrie sieht man deutlich das tetragonale Materialverhalten: die beiden kürzeren Äste sind identisch, der längere in 3-Richtung weicht deutlich davon ab.

Im Richtungsabhängigkeitsdiagramm ist das tetragonale Verhalten daran zu erkennen, dass der Kurvenverlauf in der Ebene 001-010 nicht bezüglich der Diagonale 011 symmetrisch ist wie bei allen anderen Geometrien (ein Richtungsabhängigkeitsdiagramm in der 100-010-Ebene müsste diese Symmetrie hingegen wieder aufweisen). Der starke Einbruch abseits der Hauptachsenrichtungen ist ähnlich wie bei der SC-Geometrie.

Die GA-Geometrie zeigt ebenfalls einen Einbruch der Steifigkeit abseits der Hauptachsen, allerdings bei weitem nicht so stark wie bei der SC-Geometrie und bei der TSC-Geometrie in 001-Richtung.

Der Unterschied zwischen den Anisotropieplots für $\rho_{\text{rel.}} = 0.1$ und jenen für $\rho_{\text{rel.}} = 0.2$ bestätigt die Unterschiede in der Dichteabhängigkeit zwischen E-Modul und Schubmodul: wie bereits erwähnt, führt ein hoher Schubmodul in Hauptachsenrichtung zu einem hohen E-Modul in Diagonalrichtung. Steigt der Schubmodul schneller als der E-Modul (betrachtet in Hauptachsenrichtung), glättet sich die Oberfläche im Anisotropieplot. Bei der RBCC-Geometrie und der BCC-Geometrie sind die Exponenten der Dichteabhängigkeit, Tab. 4.1, für E-Modul und Schubmodul annähernd identisch, darum ändert sich an der Form der Anisotropieflächen mit veränderter relativer Dichte nichts.

Die SC-Geometrie, deren Dichteabhängigkeitsexponenten stark voneinander abwei-

chen, zeigt dagegen deutlich unterschiedliche Anisotropieflächen.

In den Richtungsabhängigkeitsdiagrammen ist dieser Zusammenhang schwerer zu erkennen, dazu müssten die verschiedenen Kurven auf dieselben Anfangswerte skaliert werden.

In der Gegenüberstellung zeigt sich deutlich der Wechsel des Deformationsmechanismus bei der TSC-Geometrie: In 001-Richtung, wo reine Axialbelastung der Balken vorliegt, liegt die TSC-Geometrie nahe bei der SC-Geometrie; in 010-Richtung, wo als Hauptdeformationsmechanismus Biegung der Balken stattfindet, liegt sie nahe bei der GA-Geometrie.

Dass der Kurvenverlauf der TSC-Geometrie in 001 nicht völlig mit dem der SC-Geometrie zusammenfällt, sondern etwas höher liegt, liegt daran, dass bei der TSC-Geometrie aufgrund der versetzten Balken in 1- und 2-Richtung in den Balken in 3-Richtung doppelt so viele Knotenpunkte vorkommen als in der SC-Geometrie, diese sind aber sehr steif. Aufgrund der Regel für die Serienschaltung von verschiedenen steifen Elementen, Kap. 2.6.3, ist die Gesamtsteifigkeit in dieser Richtung also höher.

Andererseits liegt der E-Modul der TSC-Geometrie auch in der 010-Richtung etwas über dem der GA-Geometrie. Das hat einen bereits schon mehrfach genannten (Kap. 4.1.4, 4.2.4) Grund: Bei der TSC-Geometrie können die Endpunkte der Biegebalken nicht rotieren, bei der GA-Geometrie schon. Deshalb ist die GA-Geometrie etwas weicher (und besitzt Querdehnung).

4.4 Allgemeine Schlussfolgerungen

Einige allgemeine “Faustregeln” zum Entwurf von regelmäßigen offenzelligen zellulären Materialien lassen sich aus dem bisherigen ableiten:

- Größere Steifigkeit in Hauptrichtung wird durch stärkere Anisotropie bezahlt
- Durchgehende Balken machen das Material in Hauptrichtung steifer, Biegebalken machen es weicher.
- Höhere Konnektivität oder Vernetzung verringert die Anisotropie
- Die Einführung von Raumdiagonalen erhöht den Schubmodul erheblich, verringert aber im Gegenzug den E-Modul.
- Beruht die Deformation einer Geometrie auf Biegung, ist bei Erhöhung der relativen Dichte eine nahezu quadratische Steigerung des E-Moduls bzw. des Schubmoduls zu erwarten, beruht sie auf axialer Verformung, wird die Steigerung nur linear sein.

Kapitel 5

Nichtlineare Berechnungen

5.1 Simulationsparameter

In diesem Abschnitt werden Kraft-Verschiebungsverläufe (bzw. im Sinne homogenisierter Spannungen und Verzerrungen σ - ε -Diagramme) anhand des Einheitszellenmodells berechnet.

Dabei wird auch das Stabilitätsverhalten untersucht und mit Hilfe von geometrischen Imperfektionen versucht, den Nachbeulpfad zu ermitteln, wobei eine Linearkombination aus den untersten relevanten Eigenmodes verwendet wird. Die Eigenvektoren werden so skaliert, dass die grösste auftretende Verschiebung etwa 0.2% der Kantenlänge der Zelle beträgt. Dieser Wert erweist sich durch Ausprobieren im vorliegenden Fall als am geeignetsten.

Diese Informationen dienen dazu, die verschiedenen Geometrien hinsichtlich ihrer Energieaufnahmekapazität im Druckversuch zu beurteilen: Wünschenswert wäre ein steifes Material, dessen Spannungs-Verzerrungs-Kurve im Plateaubereich möglichst glatt und konstant hoch verläuft. Es ist jedoch im allgemeinen ein mehr oder weniger starker Einbruch nach einer gewissen globalen Verzerrung zu erwarten.

Die Berechnungen werden durchwegs mit einer relativen Dichte von 0.1 gemacht, weil zu erwarten ist, dass bei schlanken Stäben eher Stabilitätsprobleme auftreten werden, deren Behandlung auch Teil dieses Abschnittes ist.

Einige ausgewählte Belastungsrichtungen werden mit einer einachsigen Druckspannung beaufschlagt. Drehwinkel, deren Tangens einem ganzzahligen Bruch mit Zähler gleich eins entspricht, Kap. 2.4.4, erleichtern die Modellierung von abgeschlossenen Blöcken, mit denen Kraft-Verschiebungs-Kurven bei einachsiger Belastung in von den Hauptachsen abweichenden Richtungen simuliert werden sollen.

Von den in Tab. 5.1 angegebenen möglichen Verhältnissen wurden 1/1, 1/2 und 1/5 gewählt, weil die zugehörigen Winkel einigermaßen gleichmäßig verteilt sind.

All diese Lastrichtungen liegen in einer Hauptebene (eine Ebene, die von zwei Hauptachsen aufgespannt wird). Zusätzlich wird noch eine einachsige Belastung in Rich-

Tabelle 5.1: Zellenzahlverhältnis und Drehwinkel bei quadratischem Zellquerschnitt

Verhältnis	Winkel[Grad]
1/1	45.0
1/2	26.57
1/3	18.43
1/4	14.04
1/5	11.31

tung der Raumdiagonale gerechnet.

Ein weiteres Problem taucht bei der nichtlinearen Rechnung auf: Aufgrund des nicht mehr notwendigerweise erfüllten Momentengleichgewichts des gesamten Modells, Kap. 3.2.5, müssen die Randbedingungen asymmetrisch bezüglich der Flächendiagonale bei 45.0° definiert werden.

Das kann bei nichtlinearer Rechnung dazu führen, dass die Ergebnisse für einen Drehwinkel und seinen Komplementärwinkel völlig unterschiedlich aussehen - bei linearer Rechnung, bei der nur die unverformte Anfangskonfiguration berücksichtigt wird, würde das keine Rolle spielen.

Auch die Eigenmoden können durch die asymmetrischen Randbedingungen beeinflusst werden. Abb. 5.1 illustriert diesen Sachverhalt:

In Abb. 5.1a ist ein einachsiger Spannungszustand in beliebiger Richtung transformiert auf das lokale System (das Masternode-Koordinatensystem) schematisch dargestellt, in Abb. 5.1b ein einachsiger Spannungszustand in der Richtung des Komplementärwinkels des ersten. Es ist unschwer zu erkennen, dass die Geometrie in (b) wesentlich leichter nach unten wegkippen wird, als die Geometrie in (a): Die Schubkomponente ist in beiden Fällen gleich gross, die Axialkomponente auf den in Querrichtung ungesperrten Stab (hier waagrecht) jedoch in (b) viel größer. Der bereits aus der axialen Richtung ausgeknickte Stab wird sich also in (b) schneller weiterverformen als in (a). Das bedeutet, nach identischem Beginn der Last-Verschiebungs-Kurve wird die Geometrie in Fall (a) einen deutlich höheren (steiferen) Spannungs-Verzerrungs-Verlauf nehmen.

Abb. 5.1c skizziert die unterschiedlichen Knickmoden. Diese können ebenfalls der Auslöser für deutlich voneinander abweichende Last-Verschiebungspfade sein.

Deshalb muss zu jedem Winkel auch sein Komplementärwinkel gerechnet werden. Die behandelten Belastungsrichtungen sind deshalb also 0.0° , 11.31° , 26.57° , 45.0° , 63.43° , 78.69° und 90.0° , sowie die Raumdiagonale, deren Euler'sche Raumwinkel (45.0° , 54.74° , 0.0°) lauten.

Dieses Verfahren stellt eine Näherung dar, weil es immer mit den geometrischen Verhältnissen der unverformten Ausgangskonfiguration rechnet. Das Momentengleichgewicht wäre erfüllt, wenn man die Masternodekräfte aus den aufgebrachtten Spannungen anhand der Geometrie der Momentankonfiguration berechnete, und es müss-

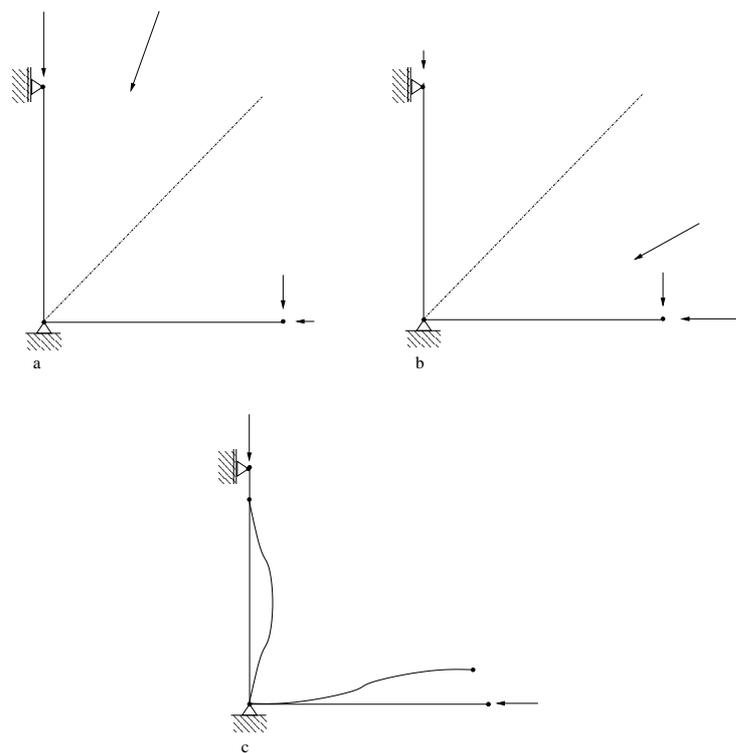


Abbildung 5.1: Auswirkungen der asymmetrischen Randbedingungen

ten keine asymmetrischen Randbedingungen verwendet werden. Darauf wurde jedoch aufgrund des begrenzten Umfangs dieser Arbeit verzichtet, Kap. 2.4.2.

5.2 Materialdaten des Grundwerkstoffes

Für Berechnungen mit nichtlinearem Materialverhalten werden die Ergebnisse nicht mehr einfach auf den Material-E-Modul bezogen. Den folgenden Ergebnissen liegen realistische Materialdaten zugrunde, die nach Messungen am Institut für Werkstoffkunde und Materialprüfung zur Verfügung gestellt wurden.

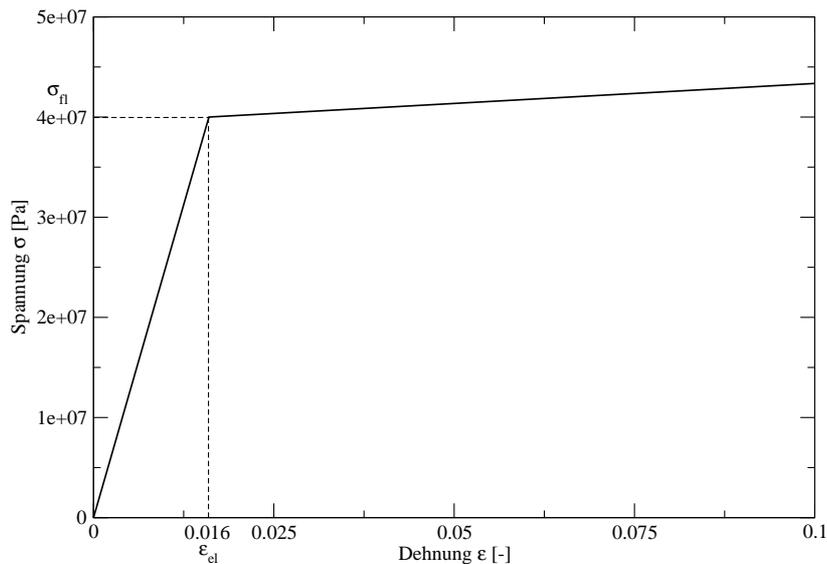


Abbildung 5.2: σ - ϵ -Diagramm des verwendeten Werkstoffes

Die Fließspannung σ_{fl} beträgt 40MPa, der E-Modul 2.5GPa und der Verfestigungsmodul beträgt 40MPa, daraus ergibt sich eine maximale elastische Verzerrung ϵ_{fl} von 0.016 im einachsigen Zugversuch.

Bruch des Werkstoffes wird nicht berücksichtigt.

5.3 SC-Geometrie

Abb. 5.3 zeigt mehrere σ - ε -Kurven in verschiedenen Richtungen zur Verdeutlichung der Richtungsabhängigkeit: Die Steigungen der Anfangstangenten der einzelnen Kurven stimmen mit den E-Moduli aus der linearen Rechnung überein.

Je breiter der Fächer der Anfangstangenten, desto stärker ist die Anisotropie des Materials.

Die Kurven in diesem Diagramm werden ohne Imperfektionen berechnet.

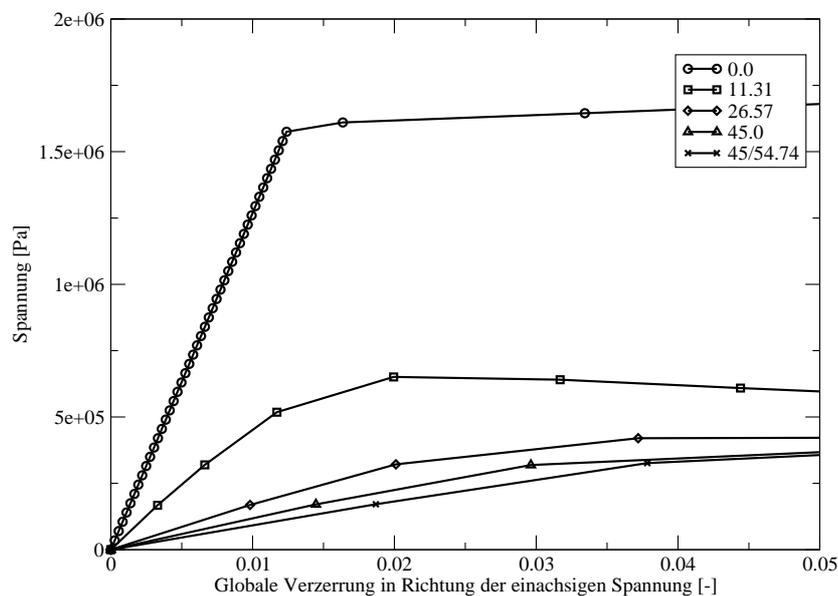


Abbildung 5.3: SC-Geometrie: σ - ε -Pfade in verschiedenen Richtungen

Abb. 5.4 zeigt deutlich, dass bei Belastung der SC-Geometrie in Hauptachsenrichtung ein Stabilitätsproblem auftritt: an der Stelle des Durchplastizierens des Balkens (tritt in diesem Fall etwa bei einer globalen Verzerrung gleich der Fließverzerrung des Grundwerkstoffes auf), wird im Falle der imperfekten Geometrie ein Maximum erreicht, die Nachbeulpfade für 0.0° und 90.0° unterscheiden sich deutlich voneinander. Dies ist ein Effekt der asymmetrischen Randbedingungen, Abb. 5.1. Die Pfade der perfekten Geometrie dagegen sind identisch.

Abb. 5.5 zeigt die Auswirkungen der asymmetrischen Randbedingungen auf beliebige Belastungsrichtungen innerhalb einer Hauptebene: Die Belastungsrichtung näher an der in Querrichtung gesperrten Achse führt zu einem steiferen Last-Verschiebungspfad.

Je näher die Lastrichtung an die Diagonale bei 45.0° herankommt, desto geringer ist der Unterschied.

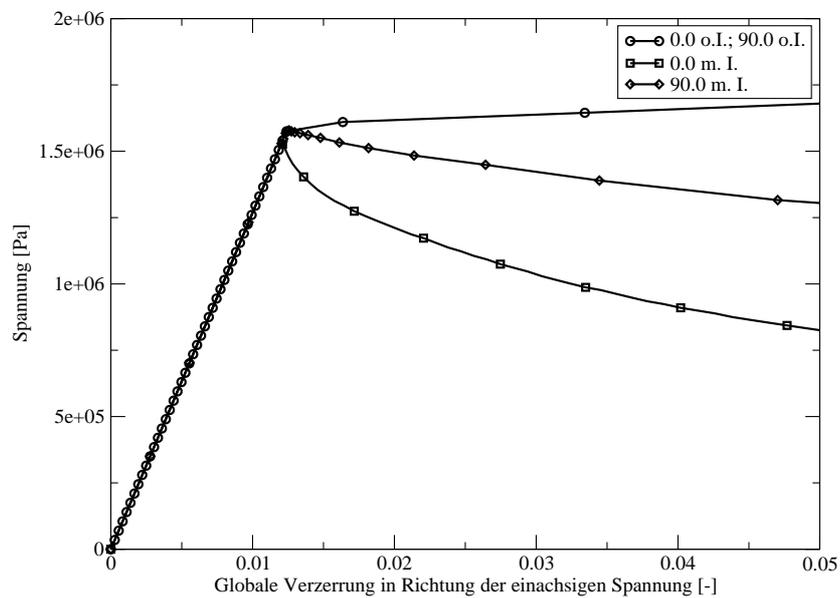


Abbildung 5.4: SC-Geometrie: σ - ε -Pfade in Achsrichtung, mit und ohne Imperfektionen

Bei diesen Richtungen treten keine Stabilitätsprobleme auf.

In Abb. 5.6 sind die Kurven für die Flächendiagonale und die Raumdiagonale dargestellt. Beide stellen kein Stabilitätsproblem dar. Außerdem sind diese Richtung bezüglich einer Änderung der Randbedingungen invariant ('es existieren keine Komplementärwinkel').

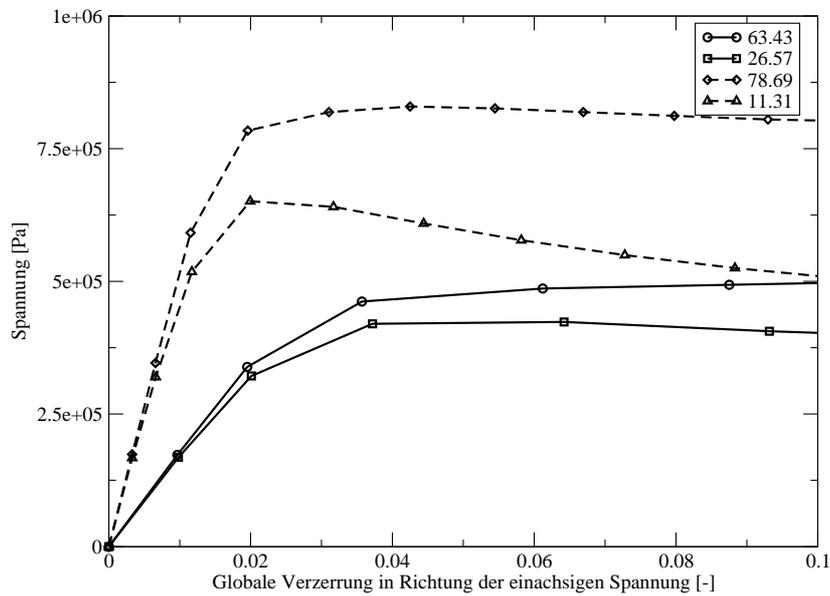


Abbildung 5.5: SC-Geometrie: σ - ε -Pfade in verschiedene Richtungen, Vergleich mit Komplementärwinkel

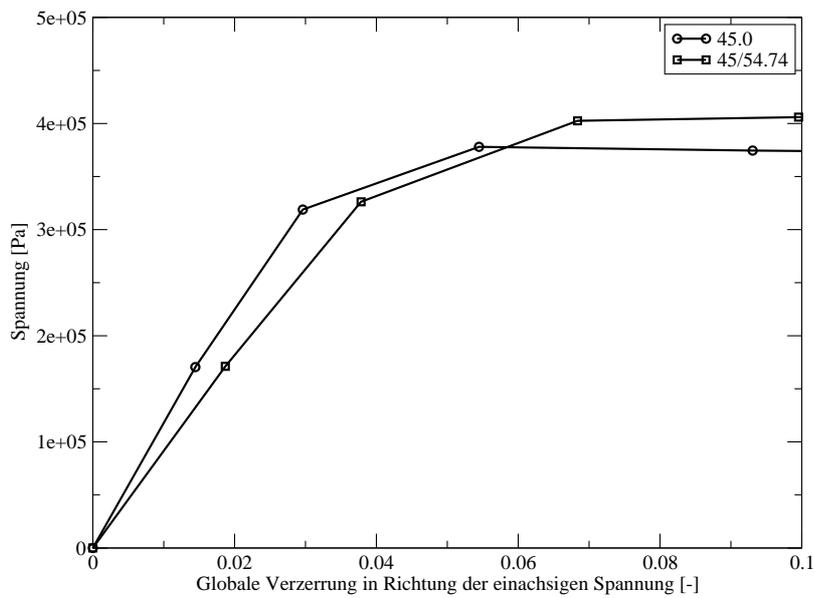


Abbildung 5.6: SC-Geometrie: σ - ε -Pfade, Diagonale und Raumdiagonale

5.4 BCC-Geometrie

Abb. 5.7 zeigt die Richtungsabhängigkeit der BCC-Geometrie. Die Kurve für die Axialrichtung steigt am flachsten, jene für die Raumdiagonale am steilsten.

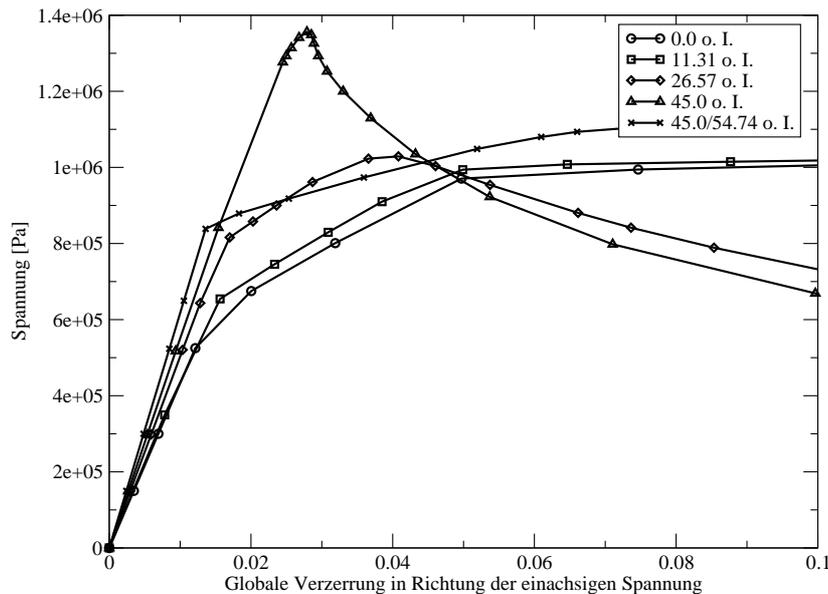


Abbildung 5.7: BCC-Geometrie: σ - ε -Pfade in verschiedenen Richtungen

In Abb. 5.8 sind die Pfade für die Hauptachsrichtungen dargestellt, es tritt ein Stabilitätsproblem auf, jedoch ist die Differenz zur perfekten Geometrie vergleichsweise gering.

Der Unterschied zwischen der Belastung in Richtung der gefesselten Achse und der ungefesselten Achse ist ebenfalls sehr gering, die Eigenmoden unterscheiden sich also hinsichtlich ihrer Wirkung auf den weiteren Deformationsweg wenig.

Abb. 5.9 und Abb. 5.10 zeigen die Pfade für verschiedene Winkel und ihre Komplementärwinkel, außerdem jeweils die Pfade für die imperfekten Geometrien.

Hier zeigt sich, dass die Auswirkungen der asymmetrischen Randbedingungen für die BCC-Geometrie sehr gering sind: die Pfade der Komplementärwinkel stimmen fast überein. Die Begründung dafür liegt im hohen Schubmodul dieser Geometrie: Die Deformation findet vermehrt in Achsrichtung statt, deshalb “klappt” die BCC-Geometrie nicht so leicht weg wie die SC-Geometrie.

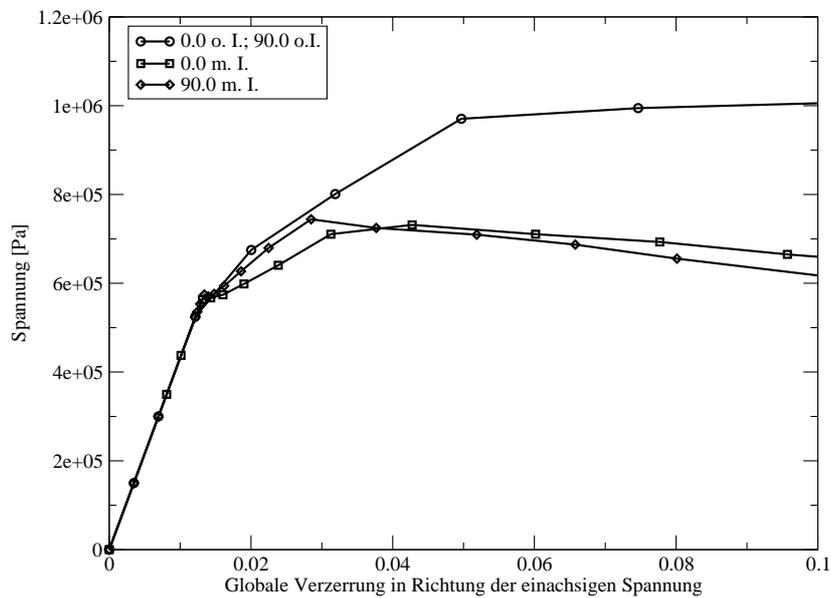


Abbildung 5.8: BCC-Geometrie: σ - ε -Pfade in Achsrichtung, mit und ohne Imperfektionen

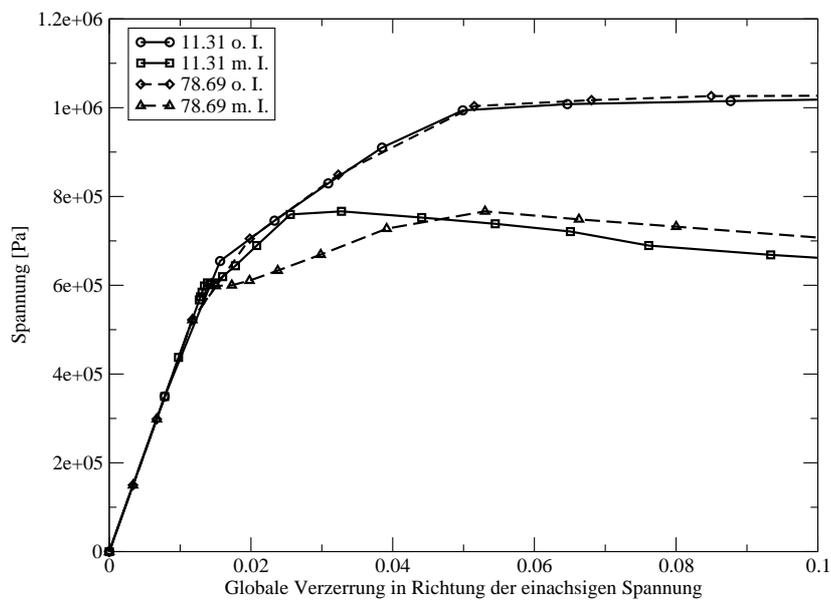


Abbildung 5.9: BCC-Geometrie: σ - ε -Pfade, Vergleich mit Komplementärwinkel, mit und ohne Imperfektionen, 11.31°

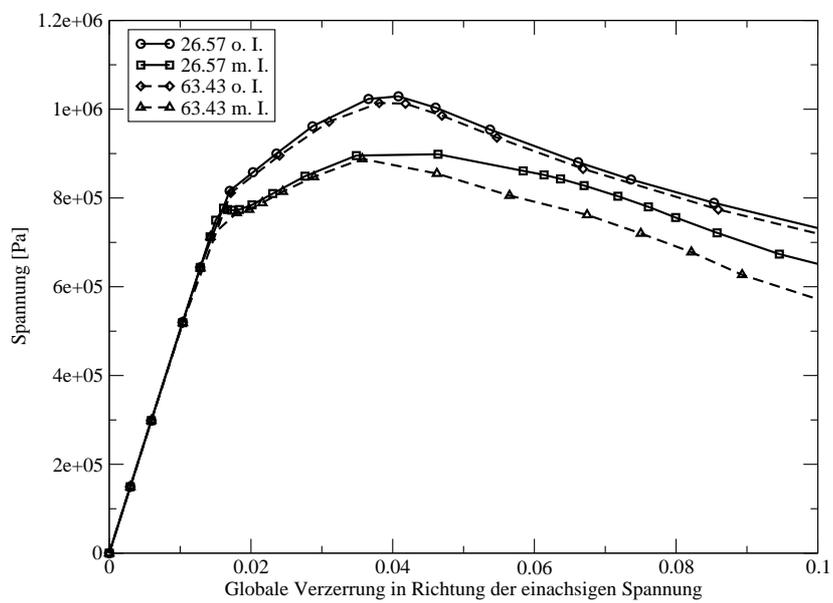


Abbildung 5.10: BCC-Geometrie: σ - ε -Pfade, Vergleich mit Komplementärwinkel, mit und ohne Imperfektionen, 26.57°

In Abb. 5.11 sind die Kurven für die Diagonalrichtung und die Raumdiagonale dargestellt. Auch hier treten Stabilitätsprobleme auf; die Auswirkungen der asymmetrischen Randbedingungen spielen hier wieder keine Rolle.

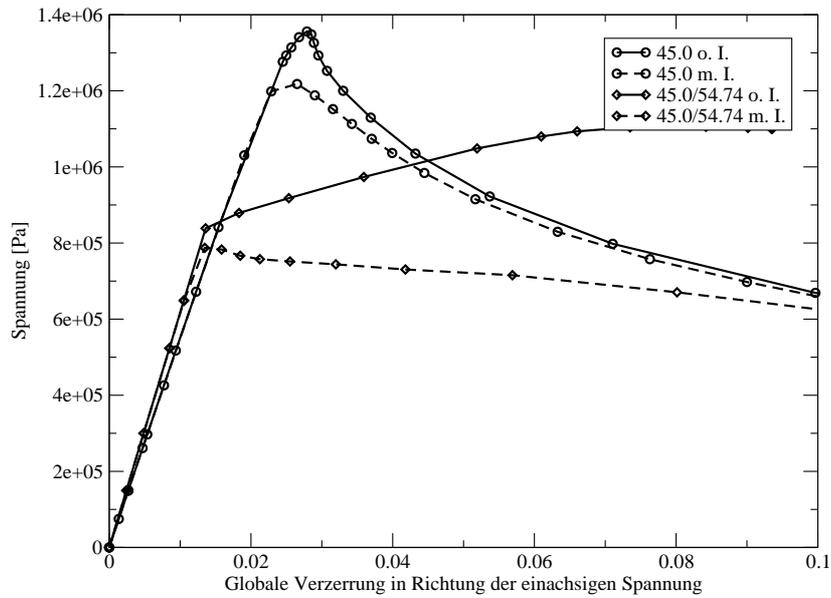


Abbildung 5.11: BCC-Geometrie: σ - ε -Pfade, mit und ohne Imperfektionen, Diagonale und Raumdiagonale

5.5 RBCC-Geometrie

In Abb. 5.12 sind mehrere Kurvenverläufe dargestellt, es handelt sich um die Pfade der perfekten Geometrie. Die Steigungen der Anfangstangenten stimmen mit den Ergebnissen der linearen Rechnung überein.

Auf die Rechnung mit 11.31° wurde verzichtet.

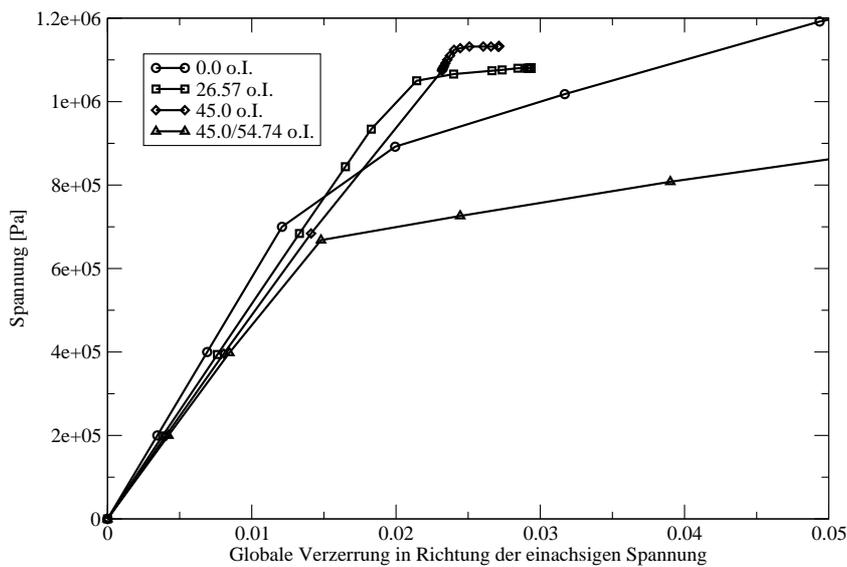


Abbildung 5.12: RBCC-Geometrie: σ - ε -Pfade in verschiedenen Richtungen

Abb. 5.13 zeigt die Kurvenverläufe für Belastung in Achsrichtung, die Pfade der perfekten Geometrie stimmen überein. Es gelingt leider nicht, die Kurve für die imperfekte Geometrie bei 90.0° weiter als bis zum Verzweigungspunkt zu berechnen; die Vermutung liegt jedoch nahe (aufgrund der Ergebnisse der BCC-Geometrie), dass der Verlauf sich nicht stark vom Verlauf bei Belastung in 0.0° unterscheidet. Es tritt also wieder ein Stabilitätsproblem auf.

Auch in 26.57° -Richtung, Abb. 5.14 konnten die Nachbeulpfade nicht bestimmt werden, aufgrund der Kurvenverläufe bzw. aufgrund der Tatsache, dass der Algorithmus nicht weiterrechnen konnte, liegt jedoch höchstwahrscheinlich auch hier ein Stabilitätsproblem vor.

Die Pfade der perfekten Geometrien unterscheiden sich wieder kaum.

Abb. 5.15 zeigt die Kurvenverläufe - soweit vorhanden - für Diagonale und Raumdiagonale; bei beiden treten eindeutig Stabilitätsprobleme auf.

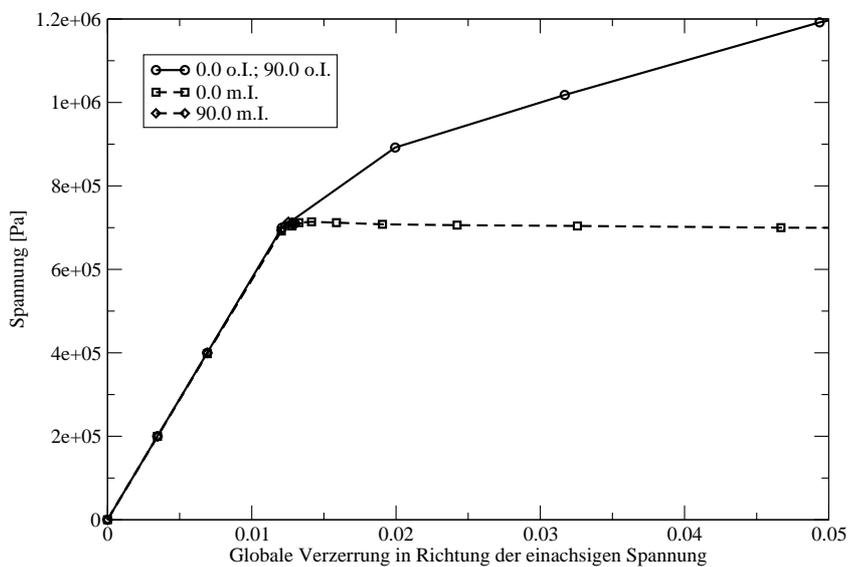


Abbildung 5.13: RBCC-Geometrie: σ - ε -Pfade in Achsrichtung, mit und ohne Imperfektionen

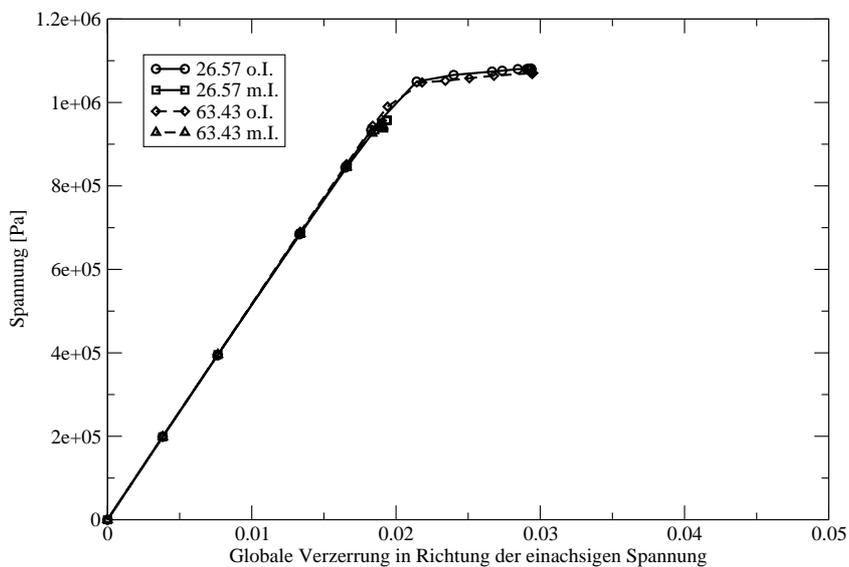


Abbildung 5.14: RBCC-Geometrie: σ - ε -Pfade in 26.57° , mit und ohne Imperfektionen, Vergleich mit Komplementärwinkel

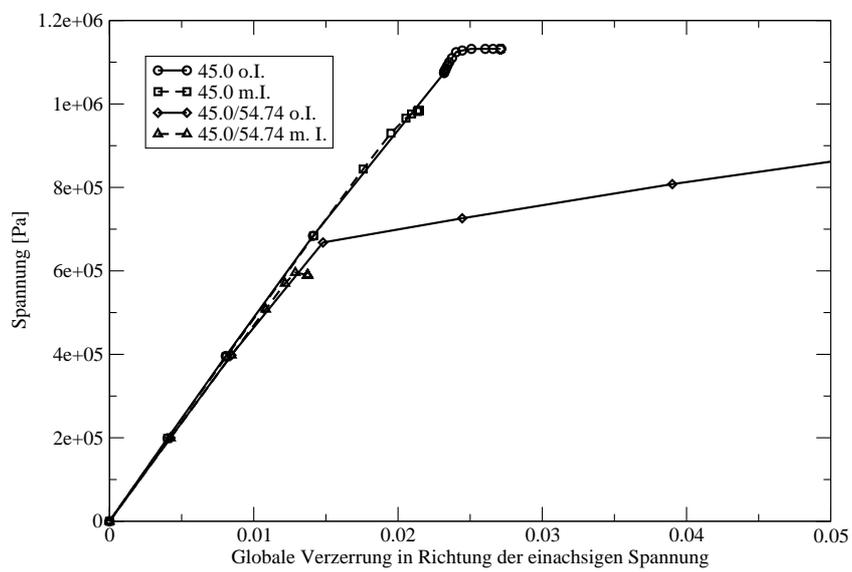


Abbildung 5.15: RBCC-Geometrie: σ - ϵ -Pfade in Diagonale und Raumdiagonale, mit und ohne Imperfektionen

5.6 TSC-Geometrie

Bei der TSC-Geometrie, die über tetragonales Materialverhalten verfügt (zwei Achsen mit identischem Verhalten, eine mit abweichendem), genügt es nicht mehr, die Winkel einer Hauptebene zu untersuchen.

Bei einem allgemein orthotropen Material müssten sechs verschiedene Kombinationen von Randbedingungen berücksichtigt werden, bei einem tetragonalen Material reduzieren sich die Möglichkeiten aufgrund der Identität zweier Achsen auf die Hälfte, bei einem kubischen Material sind alle möglichen Randbedingungsmuster gleichwertig.

Abb. 5.16 zeigt die gewählten Randbedingungsmuster.

Alle möglichen Kombinationen aus Hauptebene, in der gedreht wird, und Randbedingungsmuster lassen sich auf drei verschiedene reduzieren, Abb. 5.16. Die lange Seite des Rechtecks symbolisiert die ausgezeichnete Achse, die 3-Achse. Die kurze Seite steht für eine der beiden identischen Achsen.

In Tab. 5.2 sind die Kombinationen aufgelistet.

Tabelle 5.2: Kombinationen aus durchlaufener Hauptebenen und Randbedingungsmuster bei einem tetragonalen Material

RB-Muster	Hauptebene	Kombination
RB1	1-2	A
RB1	1-3	B
RB1	2-3	B
RB2	1-2	A
RB2	1-3	C
RB2	2-3	C
RB3	1-2	A
RB3	1-3	C
RB3	2-3	B

Abb. 5.17 zeigt mehrere Richtungen innerhalb der 1-2-Ebene bei RB1, das entspricht dem Muster A. 0.0° und 90.0° zeigen für die perfekte Geometrie identisches Verhalten.

Die Pfade der imperfekten Geometrie bei 0.0° und 90.0° unterscheiden sich deutlich: Der Pfad für 90.0° verläuft höher, hier tritt ein anderer Knickmode auf als für 0.0° . Ein ähnliches Verhalten zeigt die SC-Geometrie.

Abb. 5.18 zeigt mehrere Richtungen innerhalb der 2-3-Ebene bei RB1, das entspricht dem Muster B. 0.0° und 90.0° zeigen für die perfekte Geometrie abweichendes Verhalten, da es sich bei 90.0° um die ausgezeichnete Achse handelt.

Außerdem zeigt Abb. 5.18 die Pfade der imperfekten Geometrie für 0.0° und 90.0° , bei den anderen Richtungen treten keine Stabilitätsprobleme auf.

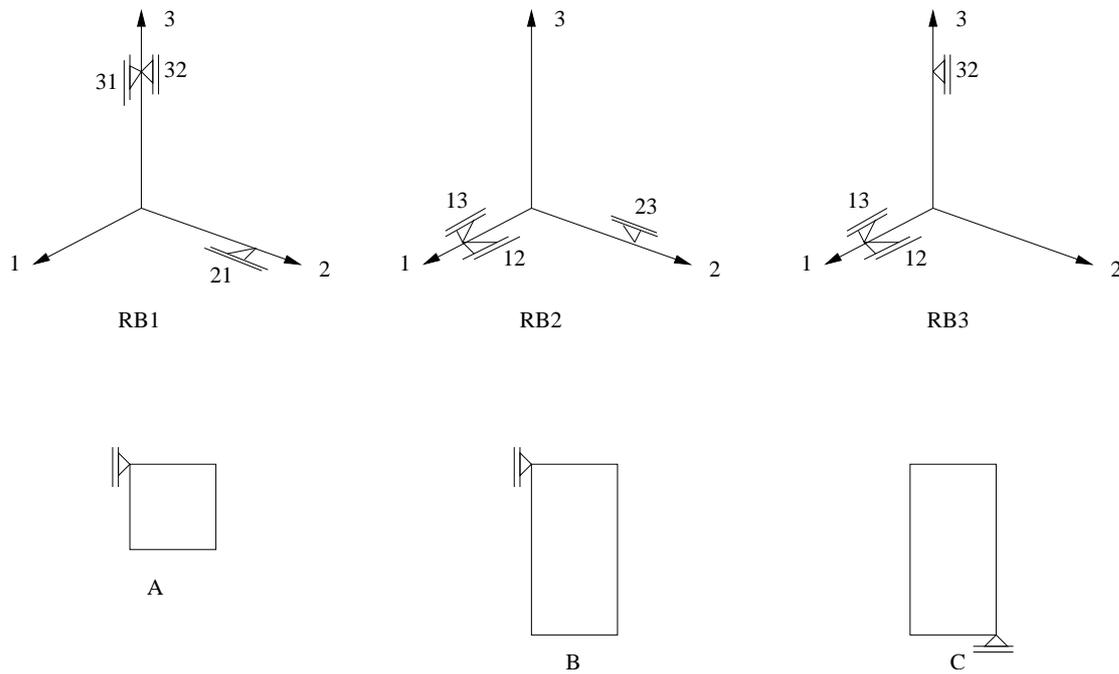


Abbildung 5.16: Kombinationen aus Randbedingungen und durchlaufener Hauptebene bei einem tetragonalen Material

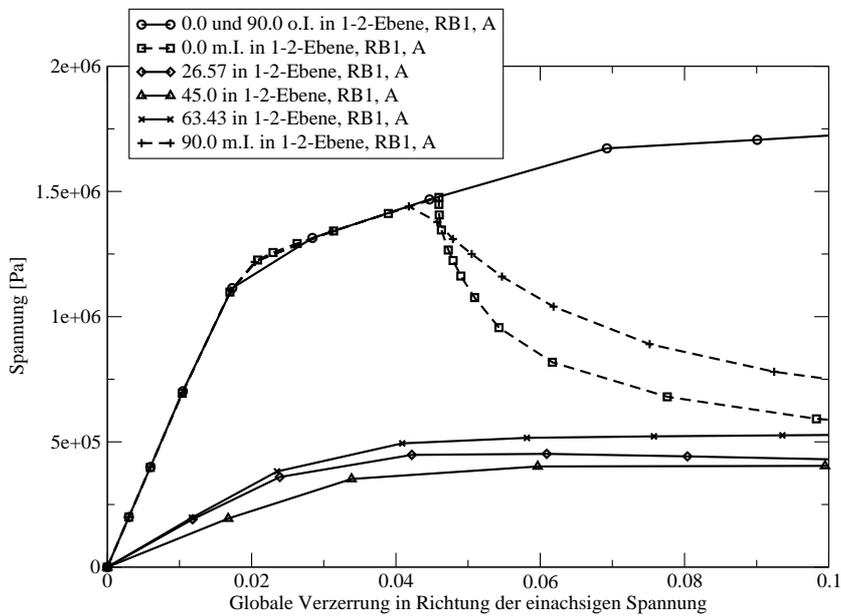


Abbildung 5.17: TSC-Geometrie: σ - ε -Pfade in verschiedenen Richtungen, 1-2-Ebene, A

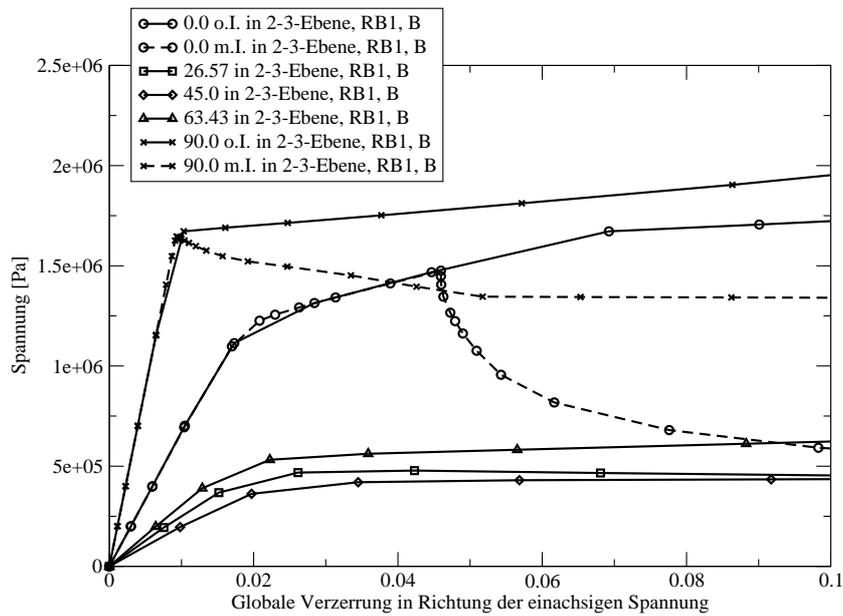


Abbildung 5.18: TSC-Geometrie: σ - ε -Pfade in verschiedenen Richtungen, 2-3-Ebene, B

Abb. 5.19 zeigt mehrere Richtungen innerhalb der 2-3-Ebene bei RB2, das entspricht dem Muster C.

Außerdem zeigt Abb. 5.19 den Pfad der imperfekten Geometrie für 0.0° , bei 90.0° konnte der Nachbeulpfad nicht errechnet werden und bei den anderen Richtungen treten keine Stabilitätsprobleme auf.

Abb. 5.20 zeigt die Pfade für die Raumdiagonale bei den drei verschiedenen Randbedingungsmustern. Der Unterschied zwischen RB2 und RB3 ist dabei sehr gering.

Abb. 5.21 rechtfertigt den Aufwand, alle Kombinationen zu rechnen. Der Unterschied zwischen den Pfaden für Muster B und Muster C ist deutlich zu sehen.

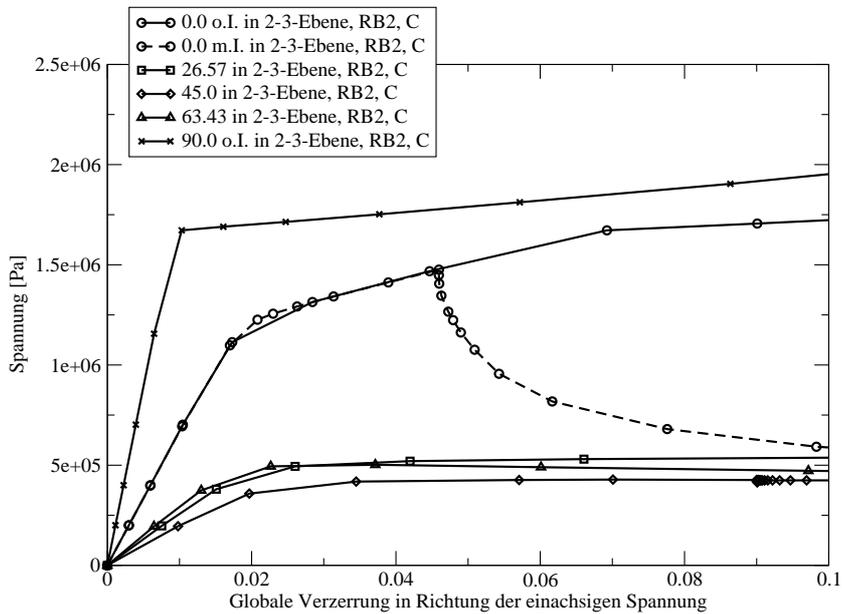


Abbildung 5.19: TSC-Geometrie: σ - ε -Pfade in verschiedenen Richtungen, 2-3-Ebene, C

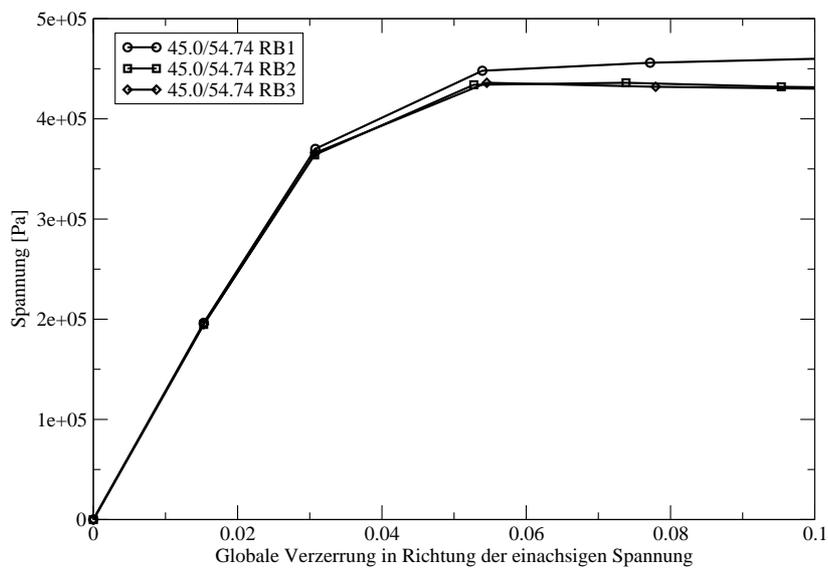


Abbildung 5.20: TSC-Geometrie: σ - ε -Pfade, Raumdiagonale, alle RB-Muster

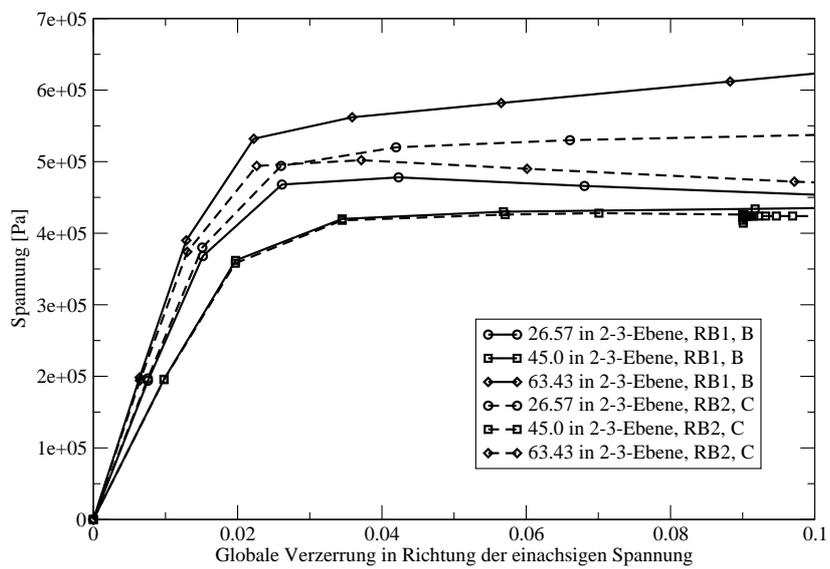


Abbildung 5.21: TSC-Geometrie: σ - ϵ -Pfade, 2-3-Ebene, Vergleich Muster B und C

5.7 GA-Geometrie

In Abb. 5.22 sind Pfade für mehrere Belastungsrichtungen für die perfekte Geometrie dargestellt. Auch hier entsprechen die Steigungen der Anfangstangenten den Ergebnissen der linearen Rechnung.

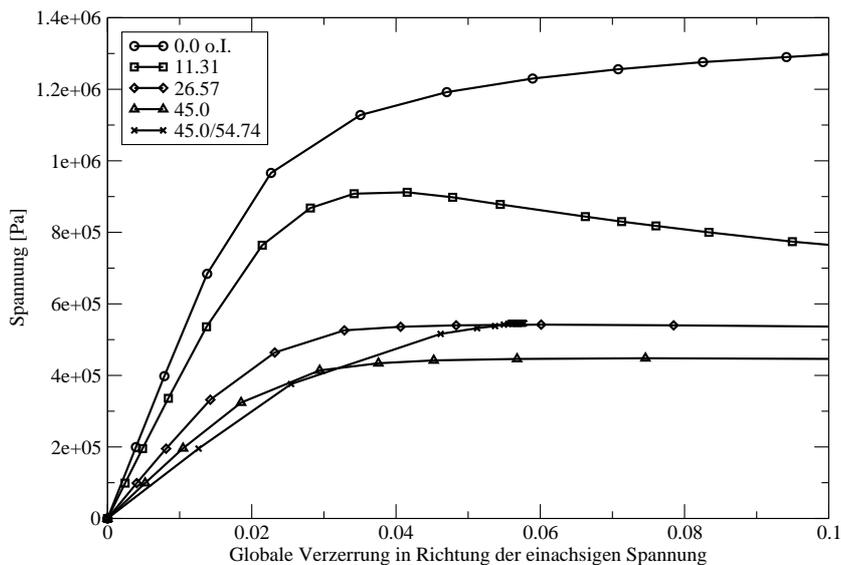


Abbildung 5.22: GA-Geometrie: σ - ϵ -Pfade für mehrere Richtungen

In Abb. 5.23 sind Pfade für Beanspruchung in Achsrichtung mit und ohne Imperfektionen dargestellt. Die Pfade für die imperfekte Geometrie können nicht weiter bestimmt werden, deutlich zu sehen sind aber die Verzweigungspunkte. Der Verlauf der imperfekten Pfade kurz vor dem Abbruch deutet darauf hin, dass sich die imperfekten Pfade für 0° und 90° deutlich voneinander unterscheiden.

Abb. 5.24 zeigt einen Vergleich zwischen mehreren Richtungen und deren Komplementärwinkeln.

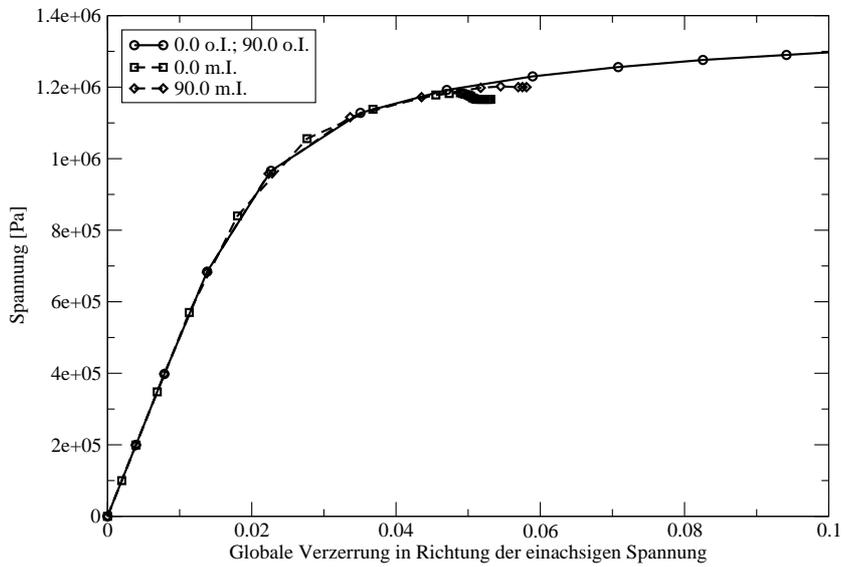


Abbildung 5.23: GA-Geometrie: σ - ε -Pfade in Achsrichtung mit und ohne Imperfektionen

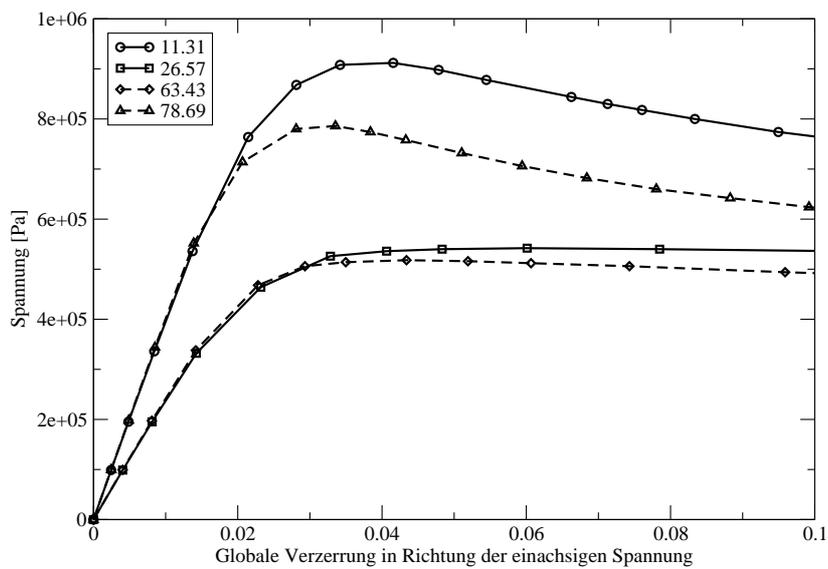


Abbildung 5.24: GA-Geometrie: σ - ε -Pfade, Vergleich mit Komplementärwinkeln

5.8 Zusammenfassung

Die Geometrien mit Raumdiagonalen (BCC-Geometrie, RBCC-Geometrie) sind weniger empfindlich auf die asymmetrischen Randbedingungen.

Die SC-Geometrie und die TSC-Geometrie zeigen in Achsrichtung deutliche Unterschiede zwischen perfekter und imperfekter Geometrie, sind also in diesen Richtungen sehr imperfektionsempfindlich. Das Ergebnis ist ein starker Einbruch nach Erreichen des Kraftmaximums. Die anderen Richtungen liefern zwar einen glatten Verlauf, das Verhalten ist aber dann sehr weich.

Die BCC-Geometrie und die RBCC-Geometrie führen in allen Richtungen auf Stabilitätsprobleme, die Nachbeulpfade scheinen jedoch nicht sehr stark von den perfekten Pfaden abzuweichen.

Am "gutmütigsten" reagiert die GA-Geometrie, deren Pfade einen stark gerundeten Verlauf ohne deutlichen Einbruch zeigen.

Kapitel 6

Schlußbetrachtung und Ausblick

Die im Rahmen dieser Arbeit programmierten Pre- und Postprozessoren stellen flexible Instrumente dar, die für alle dreidimensional periodischen Balkengeometrien, also offenzellige Geometrien (geschlossenellige Geometrien sind mit den vorhandenen Programmen nicht behandelbar) mit orthogonalen Periodizitätsvektoren gut verwendbar sind.

Eine Erweiterung auf nicht orthogonale Periodizitätsvektoren (wodurch beispielsweise die Einheitszelle der TSC-Geometrie wesentlich verkleinert werden könnte) ist ohne allzu großen Aufwand machbar.

Auch bei der Modellierung mit Kontinuumselementen können die vorhandenen Programme weitgehend verwendet werden, nur der Teil, der Knoten und Elemente definiert, muss dabei ausgetauscht werden.

In weiterer Folge wäre es zielführend, auch abgeschlossene Blöcke nichtlinear zu rechnen, bzw. größere Einheitszellen auf Stabilität zu untersuchen. Es ist nicht ausgeschlossen, dass größere Zellen auf niedrigere Knicklasten führen.

Weiters wäre es notwendig, die aufgebrachten Lasten bzw. Verschiebungen nach jedem Inkrement wieder auf die aktuelle Geometrie der Zelle zu beziehen, d.h. auf wahre globale Spannungen und Verzerrungen umzustellen.

Schließlich sollte das Materialmodell des Grundwerkstoffes verfeinert werden (Einführung einer Bruchdehnung) um das Versagen der Materialien untersuchen zu können. Dabei stellt sich allerdings die Frage, ob Balkenmodelle ausreichend dafür sind: Die lokalen Spannungsverhältnisse, die für die Untersuchung des Versagens relevant wären, werden wohl nur mit Kontinuumselementen einigermaßen realistisch dargestellt.

Unter Verwendung der damit gewonnenen Erkenntnisse könnte auch versucht werden, neue Geometrien mit maßgeschneiderten Eigenschaften für verschiedene Anwendungen zu entwerfen.

Literaturverzeichnis

- [1] L. J. Gibson, M. F. Ashby: *Cellular Solids, Structure And Properties*, Cambridge University Press, Cambridge, UK 1997
- [2] T. Daxner: *Multi-Scale Modeling And Simulation Of Metallic Foams*, VDI-Verlag, Düsseldorf, BRD 2003
- [3] H. Mang, G. Hofstetter: *Festigkeitslehre*, Springer, Wien, AUT 2000
- [4] F. G. Rammerstorfer: *Finite Elemente und andere numerische Ingenieursmethoden - Vorlesungsskriptum*, ILFB, TU-Wien, AUT 2001
- [5] F. G. Rammerstorfer: *Nichtlineare Finite Elemente-Methoden - Vorlesungsskriptum*, ILFB, TU-Wien, AUT 2002
- [6] K.-J. Bathe: *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA 1996
- [7] T. Mura: *Micromechanics of Defects in Solids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL 1987
- [8] J. F. Nye: *Physical Properties Of Crystals*, Oxford University Press, New York, NY, USA 1985
- [9] H. J. Böhm: *Composite Engineering II - Lecture Notes*, ILFB, TU-Wien, AUT 2002
- [10] J. C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet: *Effective Properties of Composite Materials with Periodic Microstructure: A Computational Approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Band 172, Seiten 109-143, 1999
- [11] HKS: *ABAQUS-Manual V6.3.3*, HKS, Pawtucket, RI, USA 2002
- [12] POV-Team: www.povray.org/documentation, POV-Team, 2002
- [13] T. Daxner: *da-parser.h - Programmcode*, ILFB, TU-Wien, AUT 2002

Anhang A

Input-Files

A.1 Geometrie-File, exemplarisch

bcc.def:

lattice

0.004, 0.004, 0.004

reldens

0.1

assembly

1, 1, 1

material

2.5e9, 0.35, 1.0

elementtyp

b32h

abschluss

none

rigidnodes

yes

beam

0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 10

0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 10

0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 10

0.0, 0.0, 0.0, 0.5, 0.5, 0.5, 10

0.5, 0.5, 0.5, 1.0, 1.0, 1.0, 10

```
1.0, 0.0, 0.0, 0.5, 0.5, 0.5, 10
0.5, 0.5, 0.5, 0.0, 1.0, 1.0, 10

1.0, 1.0, 0.0, 0.5, 0.5, 0.5, 10
0.5, 0.5, 0.5, 0.0, 0.0, 1.0, 10

0.0, 1.0, 0.0, 0.5, 0.5, 0.5, 10
0.5, 0.5, 0.5, 1.0, 0.0, 1.0, 10
```

A.2 Lastfall-File, exemplarisch

strain.vec:

```
angle
45, 54.74, 0.
strain
0
0.1
0
0
0
0
0
0
```

Anhang B

Nachgiebigkeitsmatrizen

Die angegebenen Nachgiebigkeitsmatrizen wurden für eine relative Dichte von $\rho_{\text{rel.}} = 0.1$ und bezogen auf den E-Modul des Grundwerkstoffes berechnet,

$$C_{ij,\text{tats.}} = \frac{C_{ij}}{E_{\text{mat.}}}$$

B.1 SC-Geometrie

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 19.83 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 19.83 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 19.83 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 387.09 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 387.09 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 387.09 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

B.2 BCC-Geometrie

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 57.78 & -17.23 & -17.23 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -17.23 & 57.78 & -17.23 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -17.23 & -17.23 & 57.78 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 48.93 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 48.93 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 48.93 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

B.3 RBCC-Geometrie

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 43.19 & -9.33 & -9.33 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -9.33 & 43.19 & -9.33 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -9.33 & -9.33 & 43.19 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 66.85 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 66.85 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 66.85 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

B.4 TSC-Geometrie

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 37.37 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 37.37 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 14.09 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 377.09 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 217.84 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 217.84 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

B.5 GA-Geometrie

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 49.31 & -4.44 & -4.44 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -4.44 & 49.31 & -4.44 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -4.44 & -4.44 & 49.31 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 215.39 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 215.39 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 215.39 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$