

DIPLOMARBEIT

FE-Modellierung und -Analyse eines Composite-Flywheel-Rotors und Optimierungsbetrachtungen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
unter der Leitung von

Univ.Doz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Heinz Pettermann
Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, E317
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johann Wassermann
Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexander Schulz
Dipl.-Ing. Harald Sima
Institut für Mechanik und Mechatronik, E325

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Thomas Hinterdorfer
Matrikelnummer: 0426476
4362 Bad Kreuzen 2

Wien, im Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VII
Tabellenverzeichnis	X
1 Einleitung	1
1.1 Flywheel-Energy-Storage (FES)	1
1.2 Einsatz von Verbundwerkstoffen	2
1.3 Motivation	4
1.4 Problemstellung	4
1.4.1 Bauform Innenläufer	5
1.4.2 Bauform Außenläufer	6
2 Verbundwerkstoffe	8
2.1 Faserwerkstoffe	8
2.1.1 Glasfasern	9
2.1.2 Kohlenstofffasern	10
2.2 Matrixwerkstoffe	12
2.2.1 Epoxidharz	12
2.3 Unidirektional verstärkte Composites	13
2.3.1 Ermittlung von Steifigkeitsparametern mittels Mori-Tanaka-Methode	13
2.3.2 Ermittlung der Festigkeit von unidirektional-verstärkten Composites	19
2.4 Versagenskriterien	22
2.4.1 Tsai-Wu-Versagenskriterium	23
2.5 Herstellung von Faserverbundbauteilen	25
2.5.1 Wickeltechnik	25
2.5.2 Nachbearbeitung	27
3 Nichtlineare Optimierung	28
3.1 Interior-Point-Verfahren	28
3.2 Wichtige Parameter der Matlab-Funktion <code>fmincon</code>	31

4	Finite-Elemente-Methode	32
4.1	Lineare verschiebungsbasierte statische Finite-Elemente-Methode	32
4.2	Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenformen mit der Methode der Finiten Elemente	34
5	Festigkeitsrechnung	35
5.1	Residuale Spannungen durch den Wickelprozess	35
5.2	Axialsymmetrisches Modell mit modifiziertem generalisiertem ebenem Ver- zerrungszustand	38
5.3	Finite Elemente Modelle	47
5.3.1	Axialsymmetrisches FE-Modell des Innenläufers	48
5.3.2	Axialsymmetrisches FE-Modell des Außenläufers	49
6	Frequenzanalyse	50
6.1	Finite Elemente Modelle zur Bestimmung der Eigenfrequenzen	51
7	Vorgehensweise bei der Optimierung	55
7.1	Optimierung unter der Annahme eines modifizierten generalisierten ebenen Verzerrungszustandes	55
7.2	Optimierung mit einem axialsymmetrischen Finite Elemente Modell	57
8	Ergebnisse und Diskussion	58
8.1	Das Optimum des Innenläufers	58
8.1.1	Campbell-Diagramm des optimalen Innenläufers	63
8.1.2	Einfluss der Materialalterung auf die Festigkeit des optimalen Innen- läufers	66
8.2	Das Optimum des Außenläufers	67
8.2.1	Campbell-Diagramm des optimalen Außenläufers	72
8.2.2	Einfluss der Materialalterung auf die Festigkeit des optimalen Au- ßenläufers	73
9	Zusammenfassung und Ausblick	76
	Anhang	78
A	Materialparameter	79
B	Parameter und Ergebnisse der Optimierung des Innenläufers	81

C Ergebnisse der Frequenzanalyse des optimalen Innenläufers	86
D Parameter und Ergebnisse der Optimierung des Außenläufers	87
E Ergebnisse der Frequenzanalyse des optimalen Außenläufers	91
Literaturverzeichnis	92

Abbildungsverzeichnis

1.1	Spezifische Festigkeit und Steifigkeit verschiedener Composite-Materialien im Vergleich zu Aluminium (aus [22])	4
1.2	Prinzipskizze der Bauform Innenläufer	6
1.3	Prinzipskizze der Bauform Außenläufer	7
2.1	Einfluss der Behandlungstemperatur auf Zugfestigkeit und E-Modul einer C-Faser (aus [5], Bild 2.24)	11
2.2	Atomare- und Mikrostruktur einer C-Faser (aus [5], Bild 2.21 und 2.22) . .	11
2.3	Verlauf der E-Moduli, Querkontraktionszahlen und Wärmeausdehnungskoeffizienten über dem Faservolumengehalt ξ für Glasfasern/epoxy (links) und HTS40/epoxy (rechts); Ermittelt mit Mori-Tanaka-Methode (vgl. Tabelle A.3)	19
2.4	Zulässige Zugspannung in Faserrichtung über dem Faservolumengehalt ξ (vgl. [17])	20
2.5	Prinzip des Wickelverfahrens (aus [24], Bild 1 und 3)	26
5.1	Definitionen geometrischer Größen für das Vorspannungsmodell	35
5.2	Gleichgewicht des Wickelfadens	36
5.3	Verlauf von Radial- und Umfangsvorspannung bezogen auf σ_p ; mit Verhältnis Außenradius zu Innenradius $R_o/R_i = 2$	37
5.4	Vergleich des MGPS mit einer FE-Lösung; Aluminium von $r_1 = 0\text{ m}$ bis $r_2 = 0.1\text{ m}$, Glasfasern/epoxy von $r_2 = 0.1\text{ m}$ bis $r_3 = 0.2\text{ m}$, HTS40/epoxy von $r_3 = 0.2\text{ m}$ bis $r_4 = 0.3\text{ m}$ bei $\omega = 1000\text{ rad/s}$ und $\Delta T = -50\text{ K}$ (siehe Tabelle A.3)	46
6.1	Umlaufrichtung der Eigenformen bei Gleich- und Gegenlauf (aus [20]) . . .	50
6.2	Ebenen des verallgemeinerten axialsymmetrischen Elements SOLID273 mit KEYOPT(2)=3 (aus [14])	51
6.3	Modellierung der Lagerung des Innenläufers; Fourierebenen ausgeblendet; L entspricht der mittleren Entfernung des Lagers vom Ursprung; Koordinatenangaben in kartesischen Koordinaten; COMBI214-Elemente in blau	52

6.4	Modellierung der Lagerung des Außenläufers; Fourierebenen ausgeblendet; L entspricht der mittleren Entfernung des Lagers vom Ursprung; Koordinatenangaben in Zylinderkoordinaten; COMBIN14-Elemente in blau	53
8.1	Geometrie und Diskretisierung des optimalen Innenläufers	60
8.2	Deformation des optimalen Innenläufers (Verschiebung mit Faktor 30 skaliert); Contourplot der Spannungsverhältnisse von Gl. (5.34) bzw. Gl. (2.44)	61
8.3	Radialer Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_θ^{Zug} , R_z^{Zug} und R_r^{Zug} an den Positionen $z = 0$, $z = h_1/2$ und $z = h_1$ des optimalen Innenläufers . . .	62
8.4	Deformation der Aluminiumwelle des optimalen Innenläufers aufgrund Vorspannung (Verschiebung mit Faktor 30 skaliert); Contourplot des Spannungsverhältnisses von Gl. (5.34)	63
8.5	Campbell-Diagramm des optimalen Innenläufers	64
8.6	Erster Biegeeigenmode des optimalen Innenläufers bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$; Contourplot der Gesamtverschiebung	65
8.7	Zweiter Biegeeigenmode des optimalen Innenläufers bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$; Contourplot der Gesamtverschiebung	66
8.8	Radialer Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_θ^{Zug} und R_r^{Zug} sowie der radialen Verschiebung in der Mittenebene des Rotors nach den Zeitspannen 0 Jahre, 20 Jahre und ∞ (=1,000,000 Jahre) des optimalen Innenläufers . .	68
8.9	Spannungsverhältnis R des „optimalen“ Außenläufers ohne Mittelung	70
8.10	Geometrie und Diskretisierung des optimalen Außenläufers	70
8.11	Deformation des optimalen Außenläufers (Verschiebung mit Faktor 30 skaliert); Contourplot der Spannungsverhältnisse von Gl. (5.34) bzw. Gl. (2.44)	71
8.12	Radialer Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_θ^{Zug} , R_z^{Zug} und R_r^{Zug} an den Positionen $z = 0$, $z = h/2$ und $z = h$ des optimalen Außenläufers	72
8.13	Campbell-Diagramm des optimalen Außenläufers	73
8.14	Erster Biegeeigenmode des optimalen Außenläufers bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$; Contourplot der Gesamtverschiebung	74
8.15	Zweiter Biegeeigenmode des optimalen Außenläufers bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$; Contourplot der Gesamtverschiebung	74
8.16	Radialer Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_θ^{Zug} und R_r^{Zug} sowie der radialen Verschiebung in der Mittenebene des Rotors nach den Zeitspannen 0 Jahre, 20 Jahre und ∞ (=1,000,000 Jahre) des optimalen Außenläufers . .	75

9.1 Kosten, Masse und max. Winkelgeschwindigkeit des Innenläufers bei verschiedenen Energieinhalten	76
---	----

Tabellenverzeichnis

1.1	Formfaktor K für verschiedene Geometrien (aus [2])	3
1.2	Vergleich der maximalen speicherbaren spezifischen Energie verschiedener Materialien (vgl. [11])	4
8.1	Ergebnisse der Optimierung des Innenläufers unter Annahme eines MGPS ausgewählter Materialkombinationen (Auszug aus Tabelle B.3); Längenangaben R_1, R_2, R_3, h_1 in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Kosten skaliert	59
8.2	Ergebnisse der Optimierung des Innenläufers mit axialsymmetrischem FE-Modell; Längenangaben $R_1, R_2, R_3, h_1, h_3, d$ in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Vorspannkraft F in N , Kosten skaliert	60
8.3	Ergebnisse der Optimierung des Außenläufers unter Annahme eines MGPS ausgewählter Materialkombinationen (Auszug aus Tabelle D.3); Längenangaben R_1, R_2, R_3, R_4, h in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Kosten skaliert	68
8.4	Ergebnisse der Optimierung des Außenläufers mit axialsymmetrischem FE-Modell; Längenangaben R_1, R_2, R_3, R_4, h in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Vorspannkraft F in N , Kosten skaliert	69
A.1	Steifigkeitswerte und skalierte Preise der verwendeten Materialien; Preisangaben in Währung/kg; aus [30], [29] und [28]	79
A.2	Festigkeitswerte der verwendeten Materialien ($\xi = 0.6$ bei Composites); aus [30], [29] und [28]	79
A.3	Steifigkeitswerte der verwendeten Composites (mit $\xi = 0.6$ ermittelt mit Mori-Tanaka-Methode siehe Kapitel 2.3.1)	80
B.1	Parameter der Optimierung des Innenläufers unter Annahme eines MGPS	81
B.2	Parameter der Optimierung des Innenläufers mit einem axialsymmetrischen FE-Modell	82

B.3	Ergebnisse der Optimierung des Innenläufers unter Annahme eines MG-PS; Längenangaben R_1, R_2, R_3, h_1 in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Kosten skaliert	83
C.1	Ergebnisse der Frequenzanalyse des optimalen Innenläufers; Winkelgeschwindigkeit und Eigenkreisfrequenz in rad/s	86
D.1	Parameter der Optimierung des Außenläufers unter Annahme eines MGPS	87
D.2	Parameter der Optimierung des Außenläufers mit einem axialsymmetrischen FE-Modell	87
D.3	Ergebnisse der Optimierung des Außenläufers unter Annahme eines MGPS; Längenangaben R_1, R_2, R_3, R_4, h in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Kosten skaliert	88
E.1	Ergebnisse der Frequenzanalyse des optimalen Außenläufers; Winkelgeschwindigkeit und Eigenkreisfrequenz in rad/s	91

1 Einleitung

1.1 Flywheel-Energy-Storage (FES)

Flywheels dienen zum Speichern kinetischer Energie. Durch das Antriebsmoment eines Elektromotors wird ein Schwungrad in Rotation versetzt und damit elektrische Energie in Form von kinetischer Energie gespeichert. Diese gespeicherte Energie kann über das Lastmoment eines Generators bei Bedarf wieder entnommen werden.

Schwungräder werden schon lange als Maschinenelemente verwendet. Durch das Aufkommen von Faserverbundwerkstoffen um 1970 und dem Beginn der Entwicklung von Magnetlagern um 1980 ist auch eine effiziente Nutzung als Energiespeicher möglich. Die anfängliche Entwicklung wurde sehr von der NASA gefördert mit dem Ziel, die primäre Energieversorgung von Weltraummissionen durch Flywheels zu gewährleisten (vgl. [11]). In einer Zeit, in der Klimaschutz und der bewusste Umgang mit Energie immer mehr im Fokus stehen, bieten Flywheels viele Einsatzmöglichkeiten und sind daher ein interessanter Bereich in der Forschung.

Durch den Einsatz von Verbundwerkstoffen lassen sich sehr hohe Drehzahlen erreichen. Die Verwendung von Magnetlagern und der Betrieb in evakuierten Behältern ermöglichen eine massive Verringerung von Reibverlusten. Daher weisen Flywheels folgende Eigenschaften im Vergleich zu herkömmlichen Energiespeichern, wie z.B. Akkumulatoren auf chemischer Basis, auf (vgl. [2]):

- Hohe Energiedichte,
- geringe Alterungseffekte,
- leichte Kontrolle des Ladezustands durch Drehzahlmessung,
- kurze Ladezeiten,
- umweltfreundliche Materialien.

Exemplarische Einsatzmöglichkeiten von Flywheel-Energiespeichern sind die folgenden:

- Small-scale FES eignen sich aufgrund der hohen Leistung als Zusatzspeicher für z.B. Hybridautos [12]. Allerdings haben sie aufgrund ihrer vergleichsweise großen Hülle nur einen geringen spezifischen Energiegehalt.

- Peak power buffers: Durch die Verwendung von Flywheels in Elektroautos können Stromspitzen bei den Akkumulatoren vermieden werden, wodurch sich die Lebensdauer der Akkumulatoren erhöht.
- Wind-Diesel Generatoren mit FES: In [9] wird ein Kraftwerk beschrieben, das eine Windkraftanlage, einen Dieselmotor und ein Flywheel kombiniert. Der Dieselmotor und das Flywheel sollen dabei die Schwankungen von Spannung und Frequenz aufgrund der Unregelmäßigkeiten der Windgeschwindigkeiten ausgleichen.
- FES für Photovoltaikanlagen: Durch diese Kombination kann momentan nicht benötigte Energie vor Ort gespeichert werden.
- FES auf der ISS: An Bord der International Space Station wird versucht die Akkumulatoren durch Flywheels zu ersetzen. Vergleiche haben gezeigt, dass ein FES-System um 35 % leichter und um 55 % kleiner ist als eine NiH₂-Batterie (vgl. [21]).

1.2 Einsatz von Verbundwerkstoffen

Die kinetische Energie eines Körpers, der um eine Achse rotiert, ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (1.1)$$

d.h. proportional zum Massenträgheitsmoment um die Rotationsachse

$$I = \int_m s^2 dm, \quad (1.2)$$

mit dem Normalabstand s der infinitesimalen Masse dm zur Rotationsachse, und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω . Oft wird das Massenträgheitsmoment auch durch den Trägheitsradius i angegeben als

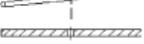
$$I = mi^2. \quad (1.3)$$

Somit ergibt sich

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mi^2\omega^2. \quad (1.4)$$

Aus obiger Gleichung erkennt man, dass die kinetische Energie linear mit der Masse steigt. Der Trägheitsradius als auch die Winkelgeschwindigkeit gehen allerdings quadratisch ein.

Tabelle 1.1: Formfaktor K für verschiedene Geometrien (aus [2])

Fly wheel geometry	Cross section	Shape factor K
Disc		1.000
Modified constant stress disc		0.931
Conical disc		0.806
Flat unpierced disc		0.606
Thin firm		0.500
Shaped bar		0.500
Rim with web		0.400
Single bar		0.333
Flat pierced bar		0.305

Bei konstanter Masse erhöht sich die kinetische Energie, indem man die Masse weit außen anordnet und diese bei möglichst hoher Winkelgeschwindigkeit rotieren lässt.

Für einen dünnen Hohlzylinder kann die Umfangsspannung näherungsweise mit

$$\sigma_{\theta\theta} = \rho r^2 \omega^2 \quad (1.5)$$

abgeschätzt werden, wobei ρ die Dichte bezeichnet. Setzt man Gl. (1.5) in Gl. (1.4) ein, so zeigt sich der Zusammenhang

$$E_{kin} = K \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho} \quad (1.6)$$

mit dem Formfaktor K , der die Rotorgeometrie und die Rotormasse berücksichtigt (siehe Tabelle 1.1). Die maximale gespeicherte kinetische Energie erhält man an der Fließgrenze σ_u

$$E_{kin}^{max} = K \frac{\sigma_u}{\rho}. \quad (1.7)$$

Gl. (1.7) zeigt, dass E_{kin}^{max} durch die Wahl eines Werkstoffs mit hoher Festigkeit bei geringer Dichte erhöht werden kann. Der Ausdruck σ_u/ρ wird als spezifische Festigkeit bezeichnet. Abbildung 1.1 zeigt die spezifische Festigkeit verschiedener Werkstoffe bezogen auf die spezifische Festigkeit von Aluminium. Ersichtlich ist, dass diese bei Verbundwerkstoffen wesentlich höher ist. Dadurch ergibt sich auch die hervorragende Eignung von Composite-Materialien für Flywheels. Tabelle 1.2 vergleicht die maximal speicherbare spezifische kinetische Energie verschiedener Materialien.

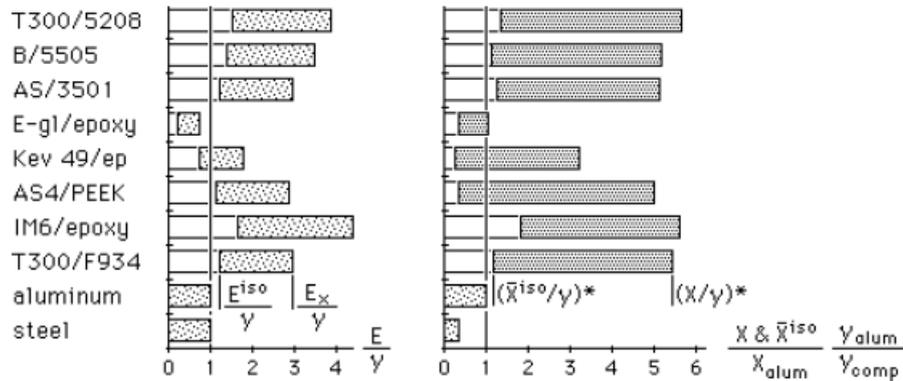


Abbildung 1.1: Spezifische Festigkeit und Steifigkeit verschiedener Composite-Materialien im Vergleich zu Aluminium (aus [22])

Tabelle 1.2: Vergleich der maximalen speicherbaren spezifischen Energie verschiedener Materialien (vgl. [11])

Material	spezifische Energie in Wh/kg
E-Glas	190
S-Glas	265
Kevlar	370
T-700 graphite	545
T-1000 graphite	780
Stahl	47

1.3 Motivation

Im Rahmen eines FFG-Forschungsprojekts „LTS-Flywheel als 12 h-Energiespeicher: Neue Ansätze zur Erhöhung der wirtschaftlich nutzbaren Speicherzeit und Sicherheit“ soll ein Long Term Storage (LTS)-Flywheel zur dezentralen Zwischenspeicherung von Energie (z.B. aus Windkraft- oder Photovoltaik-Anlagen) entwickelt werden.

Ziel dieses Projekts ist eine, im Vergleich zu den in Kapitel 1.1 angeführten Anwendungen, signifikante Erhöhung der Speicherzeit: 12 Stunden bei 80% Ladewirkungsgrad. Es soll damit einen wesentlichen Beitrag zur Schaffung der technologischen Basis für das Gebäude der Zukunft, insbesondere das Plus-Energie-Haus, leisten (siehe [26]).

1.4 Problemstellung

Im Rahmen dieser Arbeit sollen für zwei verschiedene Bauformen die Materialien und die Geometrie bei vorgegebenem Design ermittelt werden, die zu einem Minimum an Materialkosten führen. Die Kosten der Verarbeitung und Fertigung werden in dieser Untersuchung

nicht berücksichtigt. Des Weiteren sollen folgende Nebenbedingungen erfüllt sein:

- Der Energieinhalt TSE (Total-Stored-Energy) des Rotors bei maximaler Betriebswinkelgeschwindigkeit Ω soll einen vorgegebenen Wert annehmen, der wie folgt definiert ist

$$TSE = \frac{1}{2}I_z\Omega^2 - \frac{1}{2}I_z\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2, \quad (1.8)$$

mit dem Massenträgheitsmoment I_z um die Rotationsachse. Bei Winkelgeschwindigkeit Ω ist das Flywheel „voll geladen“. Der entladene Zustand ist bei einer Winkelgeschwindigkeit von $\Omega/2$ definiert. Der Energieinhalt TSE ist die Differenz der kinetischen Energie dieser beiden Zustände,

- bei Betriebsdrehzahl soll der Spannungszustand um einen Sicherheitsfaktor S unter der Versagensgrenze liegen (siehe Kapitel 2.4),
- das Trägheitsmoment um die Rotationsachse soll gleich dem Trägheitsmoment um einen Durchmesser sein ($I_x \equiv I_y = I_z$). Dies resultiert aus der Bedingung, dass das Unwuchtmoment $U_M = (I_x - I_z)\gamma$ (siehe [10] S. 66) verschwinden soll,
- die Eigenfrequenzen des Rotors sollen um den Faktor $\sqrt{2}$ über der Betriebsdrehzahl liegen. Somit kann der Rotor bei dynamischer Betrachtung in guter Näherung als starr angenommen werden (vgl. [7], S.10).

Die letzte Nebenbedingung fordert die Erstellung eines Campbell-Diagramms (siehe Kapitel 6). Im Rahmen dieser Arbeit sollen Besonderheiten, Vor- und Nachteile als auch Verbesserungsmöglichkeiten der beiden Bauformen erarbeitet und gegenübergestellt werden.

1.4.1 Bauform Innenläufer

Die in Abbildung 1.2 dargestellte Bauform soll im Weiteren als Innenläufer bezeichnet werden.

Dieser besteht aus einer Metallwelle mit zwei Composite-Ringen. Die Abmessungen der Wellenstummel l_{st} und r_{st} sind durch die Lagerung zu bestimmen und daher für die Festigkeitsrechnung vorgegeben. Am Übergang von der Welle zu den Composite-Ringen ist eine Ausrundung vorgesehen. Bei einem scharfen Übergang würde an diesem, aufgrund der wesentlich geringeren Steifigkeit des Composites quer zur Faserrichtung, ein Einspannungseffekt und durch diesen eine Spannungsspitze auftreten. Der vorgesehene Steg mit

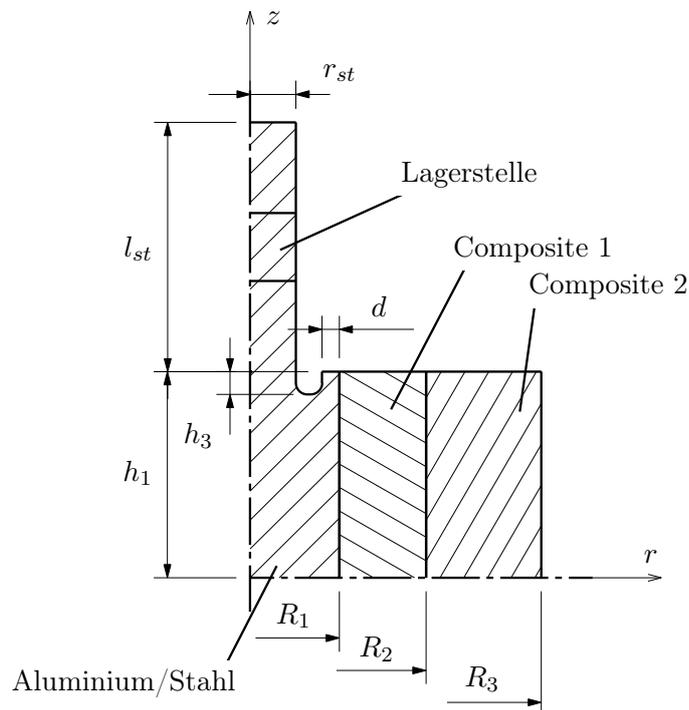


Abbildung 1.2: Prinzipskizze der Bauform Innenläufer

der Dicke d und der Höhe h_3 wirkt wie eine Feder, die durch ihre Nachgiebigkeit diese Spannungsspitze abbauen soll. Durch eine passende Kombination von Materialien aus Anhang A und den Größen R_1 , R_2 , R_3 , h_1 , h_3 und d soll bei vorgegebenem Energieinhalt und Abmessungen der Wellenstummel ein Kostenminimum gefunden werden.

1.4.2 Bauform Außenläufer

In Abbildung 1.3 ist die Bauform Außenläufer dargestellt. Sie besteht aus einem Hohlzylinder aus Metall auf dem zwei Composite-Ringe aufgewickelt sind. Die Lagerung ist hierbei am Innenradius R_1 angebracht. Der Innenradius R_1 ist durch die Lagerung vorgegeben. Es sollen die Materialkombination und die Abmessungen R_2 , R_3 , R_4 und h gefunden werden, die bei festem Innenradius R_1 sowie vorgegebenem Energieinhalt zu einem Kostenminimum führen.

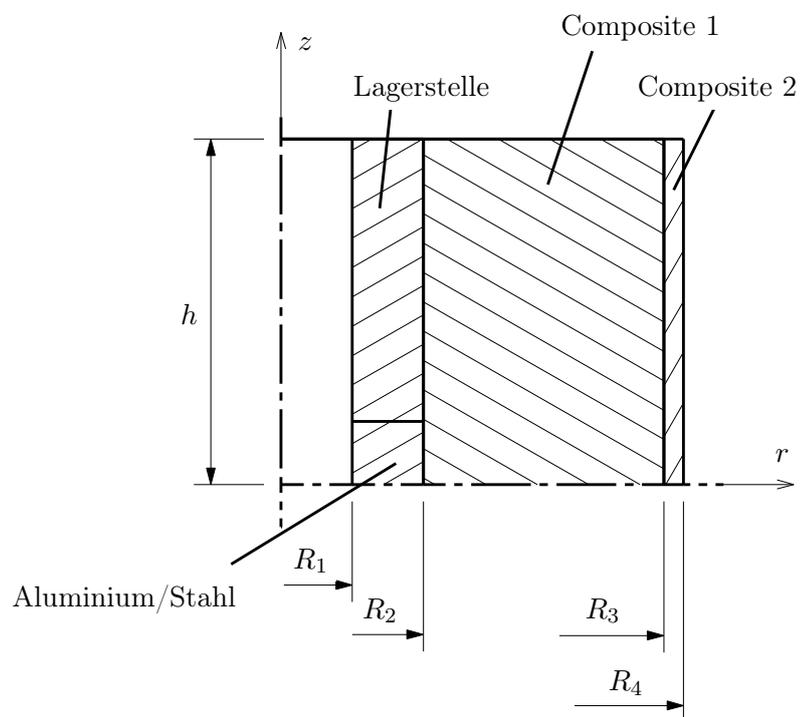


Abbildung 1.3: Prinzipskizze der Bauform Außenläufer

2 Verbundwerkstoffe

Unter Verbundwerkstoffen versteht man die Kombination von zwei oder mehreren verschiedenen Werkstoffen. Die Grenzfläche zwischen diesen ist dabei klar erkennbar. Es entsteht ein heterogener Werkstoff, der sich bei Faserverbundwerkstoffen aus einer Verstärkungsphase und einer Bettungsphase zusammensetzt. Die Verstärkungsphase kann aus Partikeln, Kurzfasern oder Endlosfasern bestehen. Letztere sind die geeignete Wahl für die vorliegende Problemstellung. In den folgenden Kapiteln werden FRP's (Fiber-Reinforced-Plastics) behandelt, also Kunststoffmatrizen und deren Verstärkungsfasern.

2.1 Faserwerkstoffe

Die Faser übernimmt im Composite die Aufgabe der Verstärkung. Da die Matrix meist nur eine geringe Steifigkeit aufweist, kommen die guten mechanische Eigenschaften besonders bei Belastung in Faserrichtung zum Tragen. Diese lassen sich durch den Größeneffekt erklären: Bei Verringerung des Faserdurchmessers nimmt auch die Anzahl an Oberflächenfehlern ab. Für technische Zwecke kommen zumeist folgende Faserarten zum Einsatz:

- Aramidfasern,
- Kohlenstofffasern,
- Glasfasern,
- Borfasern.

Borfasern besitzen gute Eigenschaften bei hohen Druckbelastungen, die im vorliegenden Fall eine untergeordnete Rolle spielen. Außerdem sind sie vergleichsweise sehr teuer. Aramidfaserverstärkte Kunststoffe werden besonders für ihr Energieaufnahmevermögen im Druckbereich geschätzt. Der E-Modul der Aramidfaser ist jedoch im Vergleich zur Kohlefaser eher gering. Weiters kommt es bei der Nachbearbeitung von aramidfaserverstärkten Kunststoffen zu starken Ausfransungen und Delamination durch ihr elasto-plastisches Materialverhalten.

Aus diesen Gründen werden in den folgenden Kapiteln nur Glas- und Kohlenstofffasern genauer vorgestellt.

2.1.1 Glasfasern

Glasfasern sind seit ca. 1950 im Einsatz und das meist verwendete Verstärkungsmaterial für Polymerwerkstoffe. Die mechanischen Eigenschaften von Glasfasern sind abhängig vom Herstellungsprozess und ihrer chemischen Zusammensetzung.

Als Glas bezeichnet man eine amorphe Molekülstruktur von kovalent gebundenen Silizium- und Sauerstoffatomen. Durch das dreidimensionale amorphe Netz sind Glasfasern isotrop. Verwendung finden folgende Glasfaserarten, die sich durch ihre chemische Zusammensetzung unterscheiden:

- E-Glas (electrical glass): Meist verwendete Glasfaserart,
- A-Glas: Fensterglas; säurebeständig,
- C-Glas (chemical glass): Sehr hohe chemische Resistenz,
- R-, S-Glas (high strength-, high modulus glass): Hochfestes Glas, hochmoduliges Glas,
- D-Glas (low dielectric constant glass): Hohe elektrische Isolierfähigkeit.

Für die Herstellung eignet sich das Düsenziehverfahren. Dabei wird die Glasschmelze durch eine elektrisch aufgeheizte gelochte Platinplatte ($\varnothing \approx 2\text{ mm}$) gezogen. Der erreichbare Faserdurchmesser liegt bei $3.5 - 24\ \mu\text{m}$. Auf die frisch gezogene Faser wird anschließend eine Beschichtung aufgebracht, die folgende Aufgaben erfüllt:

- Verkleben der Filamente zur besseren Bildung eines Faserbündels,
- Schutz der empfindlichen Oberfläche,
- Anpassen der Fasern an einen späteren Verarbeitungsprozess,
- Verbesserung der Adhäsion von Matrix und Glasfaser.

Glas ist spröde. Die Festigkeit von Glas wird durch die Anzahl an Oberflächenfehlern bestimmt, an denen Spannungskonzentrationen und somit Versagensbeginn auftritt. Mit abnehmendem Volumen, d.h. mit kleiner werdendem Faserquerschnitt, wird die Häufigkeit von Kontinuitätsstörungen pro Längeneinheit geringer, was zu einer Erhöhung der Festigkeit führt (vgl. [6]). Daraus ergibt sich eine Steigerung der Festigkeit von Glasfasern im Vergleich zum Werkstoffblock.

Glasfasern weisen folgende Eigenschaften auf:

- Hohe spezifische Festigkeit,
- geringer E-Modul,
- gute Korrosionsbeständigkeit,
- mäßige Temperaturbeständigkeit,
- niedrige elektrische Leitfähigkeit,
- schlechte Adhäsion zum Matrixmaterial,
- schlechtes statisches Ermüdungsverhalten bei Langzeitbelastung - viskoelastisches Materialverhalten.

Die Eigenschaften der im Weiteren verwendeten Glasfasern sind in Tabelle A.1 angeführt. Die Daten stammen aus [29].

2.1.2 Kohlenstofffasern

Kohlenstofffasern (C-Fasern) weisen extrem hohe Festigkeits- und Steifigkeitswerte auf. Man unterscheidet zwischen Carbon- und Graphitfasern (80-90 % bzw. bis 99 % Kohlenstoffgehalt).

Die zwei verbreitetsten Herstellungsmethoden unterscheiden sich im Prinzip durch ihre Ausgangsstoffe (Precursor). Als Precursor werden vorwiegend Polyacrylnitrilfasern (PAN) und Erdölpeche (PITCH) verwendet. Die Fasern werden zuerst unter mechanischer Spannung bei ca. $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ oxidiert und anschließend in einer zweiten Stufe bei bis zu $1600\text{ }^{\circ}\text{C}$ karbonisiert. Um noch höhere mechanische Eigenschaften zu erreichen, kann noch eine Graphitierung erfolgen, was einer zusätzlichen Wärmebehandlung bei bis zu $2500\text{ }^{\circ}\text{C}$ entspricht. Abbildung 2.1 zeigt den Einfluss der Behandlungstemperatur auf den E-Modul und die Zugfestigkeit. Während der E-Modul monoton mit der Behandlungstemperatur steigt, weist die Zugfestigkeit ein Maximum auf.

Kohlenstofffasern haben eine lamellare Mikrostruktur (Abbildung 2.2 rechts). Je höher die Wärmebehandlungstemperatur ist, desto besser ist auch die Lamellenausrichtung und daher auch der E-Modul. Die Kohlenstoffatome sind hexagonal in Schichten angeordnet (Abbildung 2.2 links). In einer Schicht wirken starke kovalente Bindungen, während zwischen den Schichten eine schwache van der Waals Bindung besteht. Aufgrund dessen weisen Kohlenstofffasern eine starke Anisotropie auf.

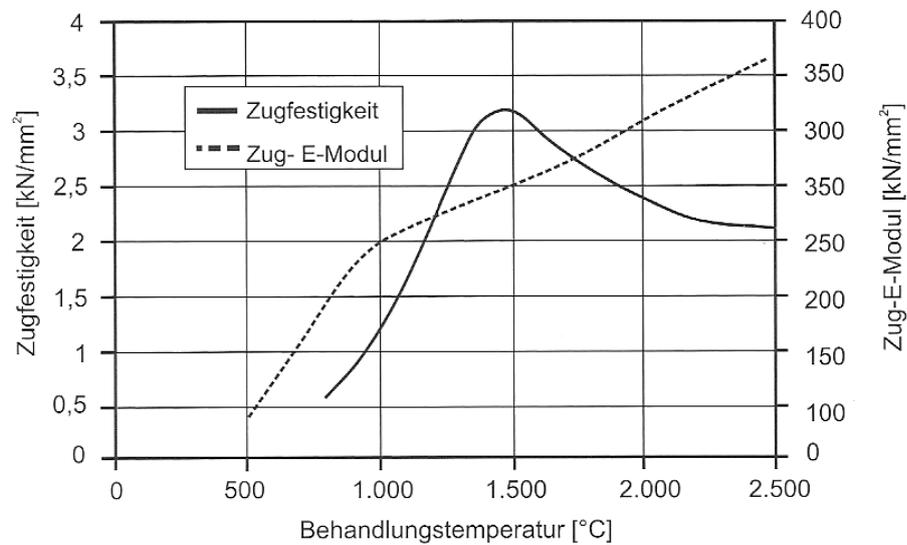


Abbildung 2.1: Einfluss der Behandlungstemperatur auf Zugfestigkeit und E-Modul einer C-Faser (aus [5], Bild 2.24)

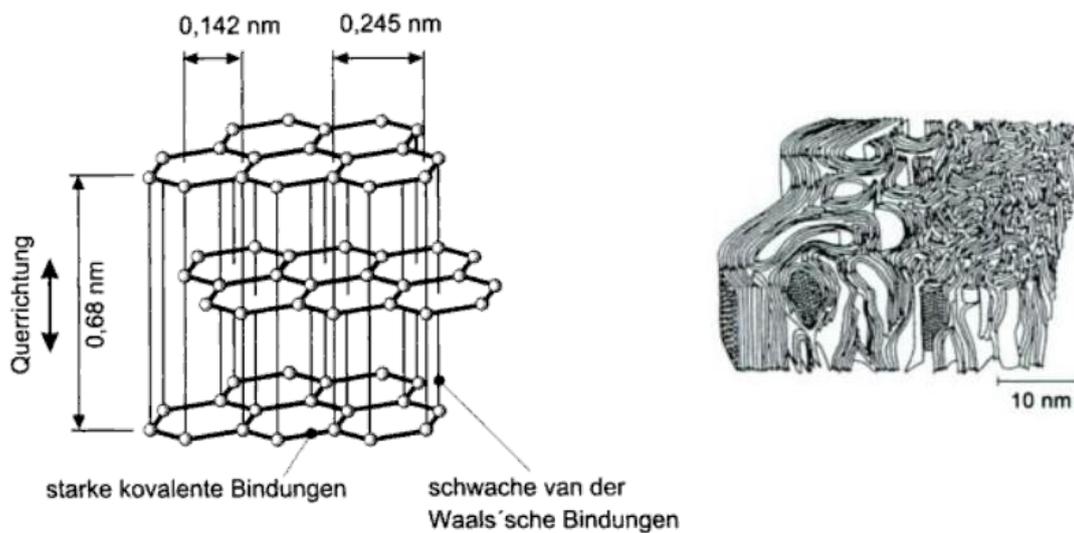


Abbildung 2.2: Atomare- und Mikrostruktur einer C-Faser (aus [5], Bild 2.21 und 2.22)

Aus dem atomaren Aufbau und den Herstellungsprozessen ergeben sich folgende Eigenschaften (vgl. [5]):

- Kohlenstofffasern haben ein progressives Spannungs-Dehnungs-Verhalten, d.h. mit zunehmender Belastung steigt der E-Modul,
- gute elektrische und thermische Leitfähigkeit,
- stark anisotrop,

- negativer thermischer Ausdehnungskoeffizient in Faserrichtung,
- fast dauerschwingfest.

Die Eigenschaften der im Weiteren verwendeten Kohlenstofffasern sind in Tabelle A.1 angeführt. Die Daten stammen aus [30]. Die Preisangaben sind auf Wunsch des Herstellers mit einer (nicht genannten) Konstante multipliziert worden. Es lässt sich jedoch erkennen, dass Fasern mit hoher Steifigkeit und/oder hoher Festigkeit im Vergleich wesentlich teurer sind.

2.2 Matrixwerkstoffe

Die Matrix ist im Verbundwerkstoff für den Zusammenhalt der Fasern und den Spannungstransfer zwischen den Fasern verantwortlich. Außerdem soll sie die Fasern vor äußeren Einflüssen schützen und die Formhaltigkeit gewährleisten.

Für die Herstellung von Bauteilen mit dem Wickelverfahren eignen sich besonders duroplastische Werkstoffe wie z.B.:

- Ungesättigte Polyesterharze,
- Vinylesterharze,
- Epoxidharze,
- Phenolharze, etc..

Phenolharze bilden aufgrund eines hohen Wassergehalts Lunker bei der Aushärtung. Vinylesterharze weisen eine hohe chemische Beständigkeit auf. Ungesättigte Polyesterharze schwinden bei der Aushärtung sehr stark und die Verarbeitungszeit ist aufgrund eines radikalischen Härtungsmechanismus eher kurz. Außerdem haben sie im Vergleich zu Epoxidharzen schlechtere mechanische und dynamische Eigenschaften.

2.2.1 Epoxidharz

Epoxidharze sind duroplastische Matrixwerkstoffe. Sie entstehen durch eine chemische Reaktion zwischen einem Epoxidharz und einem Härter. Bei dieser müssen Harz- und Härtermoleküle im stöchiometrisch richtigen Verhältnis vorliegen. Grundbaustein ist der Epoxidring, der mit dem Härter ein dreidimensionales Netzwerk bildet. Epoxidharze entstehen durch Polyaddition, bei der keine Nebenprodukte anfallen. Durch die Wahl des Härters können physikalische und chemische Eigenschaften variiert werden. So eignet sich z.B. ein

cycloaliphatischer Aminhärter für Wickelverfahren (vgl. [5]), da dessen niedrige Viskosität für eine gute Faserdurchtrennung sorgt.

Ein großer Vorteil gegenüber Vinylesterharz und ungesättigten Polyesterharzen ist ein geringer Reaktionsschwund. Außerdem läuft die Reaktion vergleichsweise langsam ab, wodurch es lange verarbeitbar ist. Dem gegenüber steht allerdings auch eine lange Aushärtezeit.

Es gibt kalt- und warmhärtende Epoxidharzsysteme. Eine erhöhte Aushärtetemperatur führt zu einem hohen Vernetzungsgrad und daher auch zu besseren mechanischen Eigenschaften. Weitere Eigenschaften von Epoxidharzen sind:

- Gute Haftung zu den meisten Verstärkungsfasern,
- sehr spröde,
- gute dynamische Eigenschaften.

Die Materialeigenschaften des verwendeten Epoxidharzes sind ebenfalls in Tabelle A.1 aufgelistet und stammen aus [29].

2.3 Unidirektional verstärkte Composites

Die vielen Materialparameter (Fasergehalt, Faserorientierung, etc.) stellen zusätzlich Designmöglichkeiten zur Verfügung. Für die Auslegung dieser transversal isotropen Materialien müssen allerdings Festigkeits- und Steifigkeitswerte ermittelt werden, was den Inhalt der folgenden Kapitel darstellt. Da der Rotor vorwiegend in radialer und Umfangsrichtung belastet wird, werden nur unidirektional verstärkte Faserverbunde behandelt.

2.3.1 Ermittlung von Steifigkeitsparametern mittels Mori-Tanaka-Methode

Die im Folgenden angeführten Herleitungen stammen aus [17]. Bei linear elastischem Materialverhalten, beschrieben durch das dreiachsige Hooke'sche Gesetz,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

mit dem Vektor der Spannungskomponenten $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T$ und dem Vektor der Verzerrungskomponenten $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})^T$, stellt sich also die

Frage, wie man die Elastizitätsmatrix \mathbf{E} berechnet. Zu diesem Zweck stellt die Mikromechanik einige Methoden zur Verfügung, von denen die Mori-Tanaka-Methode im Folgenden genauer betrachtet werden soll (vgl. [17]).

Die Mori-Tanaka-Methode gehört zur Gruppe der Mean-Field-Methoden. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die Spannungs- und Verzerrungsfelder über das Volumen der jeweiligen Phase gemittelt werden

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)} &= \frac{1}{V^{(p)}} \int_{V^{(p)}} \boldsymbol{\sigma}(x) dV \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)} &= \frac{1}{V^{(p)}} \int_{V^{(p)}} \boldsymbol{\varepsilon}(x) dV.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Darin bezeichnet $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)}$ und $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)}$ das gemittelte Spannungs- bzw. Verzerrungsfeld in der Phase p , $V^{(p)}$ das Volumen der Phase p und $\boldsymbol{\sigma}(x)$ und $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ das lokale Spannungs- bzw. Verzerrungsfeld. Für jede Phase gilt das Hooke'sche Gesetz:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)} &= \mathbf{E}^{(p)} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)} + \boldsymbol{\vartheta}^{(p)} \Delta T \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)} &= \mathbf{C}^{(p)} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)} + \boldsymbol{\alpha}^{(p)} \Delta T,\end{aligned}\quad (2.3)$$

mit der Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{C}^{(p)}$, $\boldsymbol{\vartheta}^{(p)} = -\mathbf{E}^{(p)} \boldsymbol{\alpha}^{(p)}$ und dem Vektor der Temperaturausdehnungskoeffizienten $\boldsymbol{\alpha}^{(p)}$. Aus der Definition der gemittelten Felder erhält man auch die Fernfeldspannung bzw. -verzerrung

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \xi \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(i)} + (1 - \xi) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(m)} \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \xi \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} + (1 - \xi) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(m)}\end{aligned}\quad (2.4)$$

worin ξ für den Faservolumengehalt und die Indices (m) und (i) für die Matrix bzw. für die Fasern (Inclusion) stehen. Der Zusammenhang zwischen den gemittelten und den Fernfeldern wird bei Mean-Field-Methoden über Lokalisierungsrelationen hergestellt

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)} &= \bar{\mathbf{B}}^{(p)} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \bar{\boldsymbol{\eta}}^{(p)} \Delta T \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)} &= \bar{\mathbf{A}}^{(p)} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \bar{\boldsymbol{\beta}}^{(p)} \Delta T\end{aligned}\quad (2.5)$$

mit den Spannungskonzentrationstensoren $\bar{\mathbf{B}}^{(p)}$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}^{(p)}$ und den Verzerrungskonzentrationstensoren $\bar{\mathbf{A}}^{(p)}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}^{(p)}$. Kombiniert man obenstehende Gleichungen, so erhält man z.B. für

den effektiven Elastizitätstensor

$$\mathbf{E} = \xi \mathbf{E}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}^{(i)} + (1 - \xi) \mathbf{E}^{(m)} \bar{\mathbf{A}}^{(m)} \quad (2.6)$$

und für den effektiven thermischen Ausdehnungskoeffizienten

$$\boldsymbol{\alpha} = \xi \left[\mathbf{C}^{(i)} \bar{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} + \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \right] + (1 - \xi) \left[\mathbf{C}^{(m)} \bar{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} + \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \right]. \quad (2.7)$$

Zwischen den einzelnen Konzentrationstensoren lassen sich weitere Zusammenhänge herleiten, sodass sich das gesamte elastische Materialverhalten bei Bekanntheit eines mechanischen Konzentrationstensors ($\bar{\mathbf{A}}^{(p)}$ und $\bar{\mathbf{B}}^{(p)}$) beschreiben lässt (siehe [17])

$$\begin{aligned} \xi \bar{\mathbf{A}}^{(i)} + (1 - \xi) \bar{\mathbf{A}}^{(m)} &= \mathbf{I} & \xi \bar{\boldsymbol{\eta}}^{(i)} + (1 - \xi) \bar{\boldsymbol{\eta}}^{(m)} &= \mathbf{0} \\ \xi \bar{\mathbf{B}}^{(i)} + (1 - \xi) \bar{\mathbf{B}}^{(m)} &= \mathbf{I} & \xi \bar{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} + (1 - \xi) \bar{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\eta}}^{(m)} &= \left[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}^{(m)} \right] \left[\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{E}^{(m)} \right]^{-1} \left[\boldsymbol{\vartheta}^{(m)} - \boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \right] \\ \bar{\boldsymbol{\eta}}^{(i)} &= \left[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}^{(i)} \right] \left[\mathbf{E}^{(m)} - \mathbf{E}^{(i)} \right]^{-1} \left[\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} - \boldsymbol{\vartheta}^{(m)} \right] \\ \bar{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} &= \left[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}^{(m)} \right] \left[\mathbf{C}^{(i)} - \mathbf{C}^{(m)} \right]^{-1} \left[\boldsymbol{\alpha}^{(m)} - \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \right] \\ \bar{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} &= \left[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}^{(i)} \right] \left[\mathbf{C}^{(m)} - \mathbf{C}^{(i)} \right]^{-1} \left[\boldsymbol{\alpha}^{(i)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Setzt man Gl. (2.8) in Gl. (2.6) ein, so ergibt sich für den effektiven Elastizitätstensor

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(m)} + \xi \left[\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{E}^{(m)} \right] \bar{\mathbf{A}}^{(i)}. \quad (2.10)$$

Eshelby-Tensor

Der Eshelby-Tensor \mathbf{S} beschreibt den Zusammenhang des Verzerrungsfeldes einer homogenen ellipsoidalen Einlagerung vor und nach einer Transformation. Man entnimmt aus einem homogenen Material ein ellipsoidales Stück und unterzieht dieses einer homogenen Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, z.B. durch Temperaturänderung oder durch eine Phasenumwandlung. Setzt man das transformierte Stück wieder in das ursprüngliche Material ein, so stellt sich im Einschluss ein einheitliches Spannungs- und Verzerrungsfeld (lokale und gemittelte Felder stimmen überein) ein. Der Zusammenhang zwischen der aufgebrauchten Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ und

der Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}_c$, die nach dem Wiedereinfügen im Einschluss herrscht, ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (2.11)$$

Der Eshelby-Tensor \mathbf{S} ist nur von der Poissonzahl abhängig und für verschiedene Einschlussformen in [17] angegeben. Für Endlosfasern mit Kreisquerschnitt lauten die von Null verschiedenen Einträge des Eshelby-Tensors

$$\begin{aligned} S_{22} = S_{33} &= \frac{5 - 4\nu^{(m)}}{8(1 - \nu^{(m)})}, \\ S_{23} = S_{32} &= \frac{4\nu^{(m)} - 1}{8(1 - \nu^{(m)})}, \\ S_{21} = S_{31} &= \frac{\nu^{(m)}}{2(1 - \nu^{(m)})}, \\ S_{44} = S_{55} &= \frac{1}{2}, \\ S_{66} &= \frac{3 - 4\nu^{(m)}}{4(1 - \nu^{(m)})}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dilute Inhomogeneous Inclusion

Durch den Eshelby-Tensor wird nur eine Faser aus demselben Material wie die Matrix berücksichtigt. Das weitere Vorgehen besteht nun darin, dass man in die Matrix eine homogene Einlagerung einfügt, die einer Transformation $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau$ unterzogen wurde, die dieselbe Spannung und Verzerrung in der Matrix hervorruft wie eine Inhomogenität mit $\boldsymbol{\varepsilon}_t = 0$. Es gilt also, dass die Spannungen in der inhomogenen und in der homogenen Einlagerung gleich sein müssen

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{E}^{(i)}(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_c) = \mathbf{E}^{(m)}(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_c - \boldsymbol{\varepsilon}_\tau), \quad (2.13)$$

worin $\boldsymbol{\varepsilon}$ eine Fernfeldverzerrung bezeichnet. Die Verzerrungen in der Faser lauten mit der Definition von \mathbf{S}

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}_\tau, \quad (2.14)$$

daraus folgt

$$\mathbf{E}^{(i)} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} = \mathbf{E}^{(m)}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_\tau). \quad (2.15)$$

Kombiniert man die obigen Gleichungen, so führt das auf

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{C}^{(m)}(\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{E}^{(m)}) \right]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.16)$$

woraus sich der gewünschte Verzerrungskonzentrationstensor ablesen lässt

$$\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{C}^{(m)}(\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{E}^{(m)}) \right]^{-1}. \quad (2.17)$$

Setzt man $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} = \mathbf{C}^{(i)} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(i)}$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{(m)} \boldsymbol{\sigma}$, so ergibt sich der Spannungskonzentrationstensor zu

$$\bar{\mathbf{B}}_{dil}^{(i)} = \mathbf{E}^{(i)} \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{C}^{(m)}(\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{E}^{(m)}) \right]^{-1} \mathbf{C}^{(m)}. \quad (2.18)$$

Durch diese Methode wird allerdings nur eine Faser in einer unendlichen Matrix berücksichtigt.

Mori-Tanaka-Methode

Um die Wechselwirkungen der einzelnen Fasern zu berücksichtigen, bedient man sich folgenden Ansatzes:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} &= \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(m)} \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(i)} &= \bar{\mathbf{B}}_{dil}^{(i)} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(m)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die Mori-Tanaka-Methode berücksichtigt eine einzelne Faser, die einem effektiven Spannungsbzw. Verzerrungsfeld der Matrix ausgesetzt ist. Gl. (2.19) stellt also eine Modifikation von Gl. (2.5) dar. Setzt man diese in Gl. (2.4) ein, so erhält man nach kurzem Umformen

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(i)} &= \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} [(1 - \xi)\mathbf{I} + \xi \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}]^{-1} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(i)} &= \bar{\mathbf{B}}_{dil}^{(i)} [(1 - \xi)\mathbf{I} + \xi \bar{\mathbf{B}}_{dil}^{(i)}]^{-1} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

und daraus die gewünschten Konzentrationstensoren für die Fasern

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_M^{(i)} &= \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} [(1 - \xi)\mathbf{I} + \xi \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}]^{-1} \\ \bar{\mathbf{B}}_M^{(i)} &= \bar{\mathbf{B}}_{dil}^{(i)} [(1 - \xi)\mathbf{I} + \xi \bar{\mathbf{B}}_{dil}^{(i)}]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Um die Konzentrationstensoren für die Matrix zu erhalten, verwendet man Gl. (2.19) und (2.4) und erhält

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}_M^{(m)} &= [(1 - \xi)\mathbf{I} + \xi\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}]^{-1} \\ \bar{\mathbf{B}}_M^{(m)} &= [(1 - \xi)\mathbf{I} + \xi\bar{\mathbf{B}}_{dil}^{(i)}]^{-1}.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Eingesetzt in Gl. (2.10) folgt damit für die E-Matrix

$$\mathbf{E}_M = \mathbf{E}^{(m)} + \xi \left[\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{E}^{(m)} \right] \bar{\mathbf{A}}_M^{(i)}.\quad (2.23)$$

Den thermischen Ausdehnungskoeffizienten erhält man durch Einsetzen in Gl. (2.9)

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\beta}}_M^{(m)} &= \left[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}_M^{(m)} \right] \left[\mathbf{C}^{(i)} - \mathbf{C}^{(m)} \right]^{-1} \left[\boldsymbol{\alpha}^{(m)} - \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \right] \\ \bar{\boldsymbol{\beta}}_M^{(i)} &= \left[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}_M^{(i)} \right] \left[\mathbf{C}^{(m)} - \mathbf{C}^{(i)} \right]^{-1} \left[\boldsymbol{\alpha}^{(i)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \right]\end{aligned}\quad (2.24)$$

und anschließend in Gl. (2.7) zu

$$\boldsymbol{\alpha}_M = \xi \left[\mathbf{C}^{(i)} \bar{\boldsymbol{\beta}}_M^{(i)} + \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \right] + (1 - \xi) \left[\mathbf{C}^{(m)} \bar{\boldsymbol{\beta}}_M^{(m)} + \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \right].\quad (2.25)$$

Somit kann mit den erhaltenen Tensoren \mathbf{E}_M und $\boldsymbol{\alpha}_M$ das linear thermo-elastische Verhalten vollständig beschrieben werden. Abbildung 2.3 zeigt den Verlauf verschiedener Parameter über dem Faservolumengehalt für Glasfasern/epoxy und HTS40/epoxy (vgl. Tabelle A.3) ermittelt mit der Mori-Tanaka-Methode. Bei $\xi = 0$ liegen die Materialeigenschaften der Matrix und bei $\xi = 1$ die der Fasern vor. Der E-Modul in longitudinaler Richtung steigt linear an, während er quer dazu erst bei unrealistisch hohen Werten des Faservolumengehalts stark ansteigt. Auffällig ist, dass der thermische Ausdehnungskoeffizient quer zur Faserrichtung α_q zuerst ansteigt und dann abfällt. Aufgrund der Anisotropie der C-Fasern kann der thermische Ausdehnungskoeffizient α_l des Kohlenstofffaserverbunds auch negativ werden.

Weiters wird noch die Dichte ρ des Faserverbunds benötigt. Diese lässt sich durch eine einfache Mischungsregel über die Dichten der einzelnen Bestandteile angeben

$$\rho = \xi \rho^{(i)} + (1 - \xi) \rho^{(m)}.\quad (2.26)$$

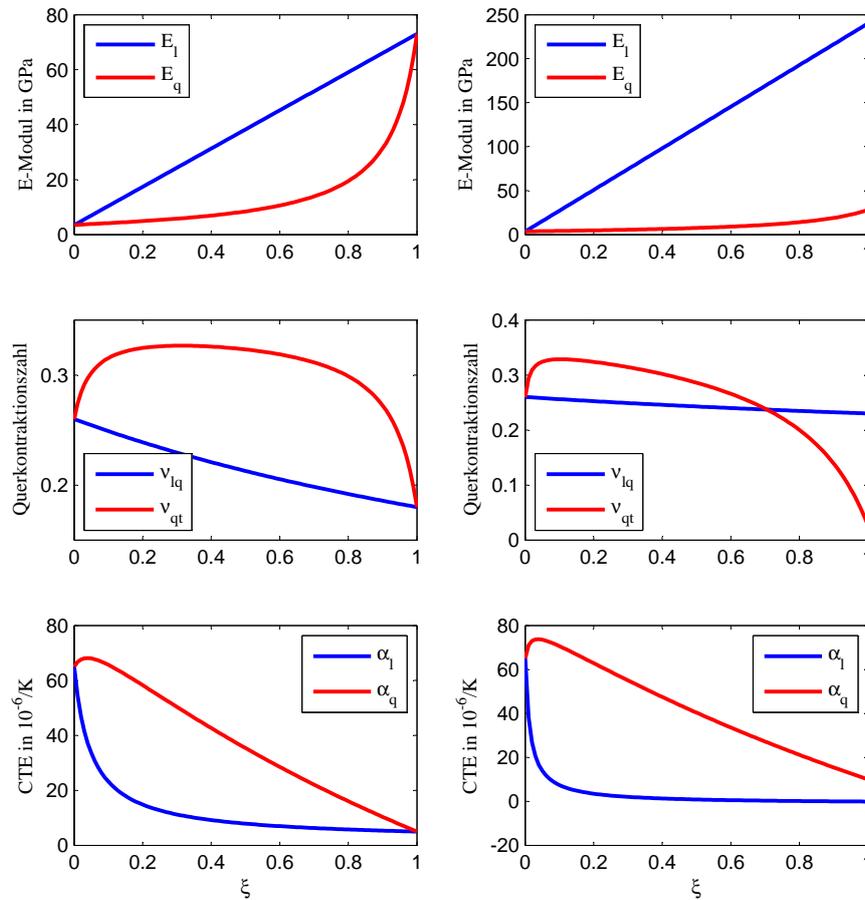


Abbildung 2.3: Verlauf der E-Moduli, Querkontraktionszahlen und Wärmeausdehnungskoeffizienten über dem Faservolumengehalt ξ für Glasfasern/epoxy (links) und HTS40/epoxy (rechts); Ermittelt mit Mori-Tanaka-Methode (vgl. Tabelle A.3)

2.3.2 Ermittlung der Festigkeit von unidirektional-verstärkten Composites

Die im Folgenden aufgeführten Festigkeitswerte stammen aus [17]. Sie können bestenfalls als grobe Näherung betrachtet werden. Falls möglich ist die Verwendung von Testdaten oder Herstellerdaten empfehlenswert. Insbesondere bei Kohlenstofffasern sind folgende Näherungen nur eingeschränkt brauchbar, da die tatsächlichen Werte aufgrund der starken Anisotropie der Kohlenstofffaser stark abweichen.

Zulässige Zugspannung in Faserrichtung

Der eintretende Versagensmodus bei Zugspannung in Faserrichtung ist abhängig vom Faservolumengehalt.

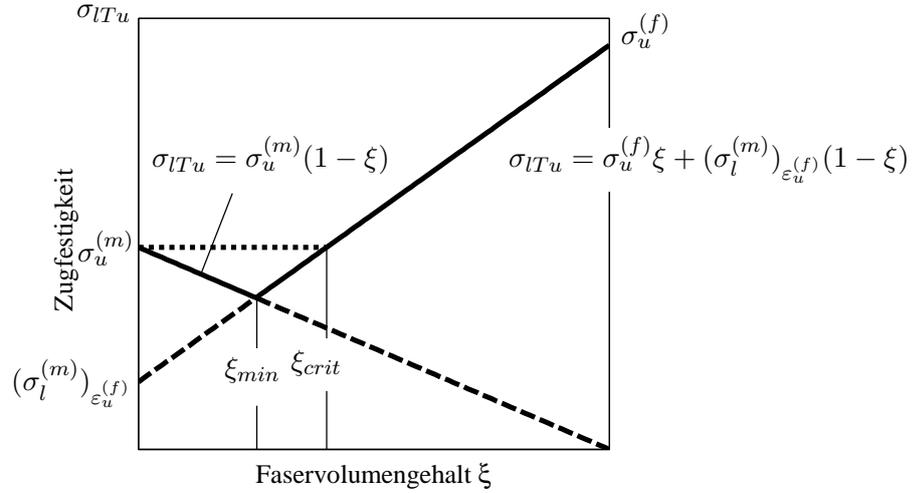


Abbildung 2.4: Zulässige Zugspannung in Faserrichtung über dem Faservolumengehalt ξ (vgl. [17])

Ist $\xi > \xi_{min}$ (Definition in Gl. (2.29)), so ist bei Erreichen der Bruchdehnung der Fasern $\varepsilon_u^{(f)}$ die Tragfähigkeit des Composites erreicht und Versagen tritt ein, da die Matrix die aufgebrachte Last nicht tragen kann. Nimmt man an, dass die Verzerrung in den Fasern und in der Matrix gleich ist, so ist die zulässige Zugspannung in Faserrichtung

$$\sigma_{I T u} = \sigma_u^{(f)} \xi + (\sigma_l^{(m)})_{\varepsilon_u^{(f)}} (1 - \xi) \quad \text{für } \xi > \xi_{min}, \quad (2.27)$$

worin $\sigma_u^{(f)}$ die zulässige Spannung der Fasern und $(\sigma_l^{(m)})_{\varepsilon_u^{(f)}}$ die Spannung in der Matrix bei Erreichen der Faserbruchdehnung bezeichnen.

Für $\xi < \xi_{min}$ ist die Matrix nach Bruch der Fasern noch in der Lage die aufgebrachte Last zu tragen und daher ist die zulässige Zugspannung

$$\sigma_{I T u} = \sigma_u^{(m)} (1 - \xi) \quad \text{für } \xi < \xi_{min}, \quad (2.28)$$

mit der zulässigen Zugspannung der Matrix $\sigma_u^{(m)}$. Die Werte für $\sigma_{I T u}$ sind in Abbildung 2.4 als Funktion des Faservolumengehalts ξ dargestellt. Aus dem Diagramm lassen sich zwei wichtige Werte ablesen. Zum Einen ξ_{min} , das die Gültigkeitsbereiche der beiden Versagensmodi abgrenzt

$$\xi_{min} = \frac{\sigma_u^{(m)} - (\sigma_l^{(m)})_{\varepsilon_u^{(f)}}}{\sigma_u^{(f)} + \sigma_u^{(m)} + (\sigma_l^{(m)})_{\varepsilon_u^{(f)}}}. \quad (2.29)$$

Zum Anderen ξ_{crit} , das den Fasergehalt darstellt, ab dem ein Verstärkungseffekt eintritt

$$\xi_{crit} = \frac{\sigma_u^{(m)} - (\sigma_l^{(m)})_{\varepsilon_u^{(f)}}}{\sigma_u^{(f)} - (\sigma_l^{(m)})_{\varepsilon_u^{(f)}}}. \quad (2.30)$$

Zulässige Druckspannung in Faserrichtung

Bei Druckbelastung in Faserrichtung können ebenfalls verschiedene Versagensmodi auftreten. Für den zulässigen Wert der Druckspannung ist dann der kleinere zu verwenden.

Transverse tensile mode: Da für übliche Faserverbundwerkstoffe die Querkontraktionszahl der Faser geringer ist als die der Matrix, kommt es bei longitudinaler Druckspannung zu radialen Zugspannungen im Faser-Matrix-Interface. Dieser Modus wird auch als „transverse tensile mode“ bezeichnet. Die zulässige Druckspannung wird in [17] mit

$$\sigma_{lCu} = \frac{[E^{(f)}\xi + E^{(m)}(1 - \xi)](1 - \xi^{1/3})\varepsilon_u^{(m)}}{\nu^{(f)}\xi + \nu^{(m)}(1 - \xi)} \quad (2.31)$$

angegeben.

Shear mode: Beim zweiten Versagensmodus können die Fasern als in der Matrix elastisch gebettete Balken angesehen werden. Bei realistischen Faservolumengehalten kommt es zu einem parallelen Knittern der Fasern, wodurch die dazwischen liegende Matrix auf Schub beansprucht wird, weshalb man diesen Modus auch als „shear mode“ bezeichnet. Für die zulässige Druckspannung wird in [17]

$$\sigma_{lCu} = \frac{G^{(m)}}{1 - \xi} \quad (2.32)$$

angegeben.

Zulässige Zugspannung quer zur Faserrichtung

Bei Zugbelastung quer zur Faserrichtung behindern die Fasern die Deformation der Matrix, was zu Spannungskonzentrationen führt. Durch die Annahme eines perfekten Faser-Matrix-Interfaces lässt sich die grobe Näherung

$$\sigma_{qTu} = \frac{\sigma_u^{(m)}}{S_q} \quad (2.33)$$

angeben (vgl. [17]), mit dem Spannungskonzentrationsfaktor

$$S_q = \frac{1 - \xi(1 - E^{(m)}/E^{(f)})}{1 - (4\xi/\pi)^{1/2}(1 - E^{(m)}/E^{(f)})}. \quad (2.34)$$

Der zulässige Wert des Faserverbunds liegt unter dem der reinen Matrix, daher ist $S_q > 1$.

Zulässige Druckspannungen quer zur Faserrichtung und zulässige Schubspannungen

Bei Druckbelastung quer zur Faserrichtung und Schubbelastung können verschiedene Versagensformen auftreten, die von der Stärke des Faser-Matrix-Interfaces als auch vom Steifigkeitsverhältnis von Faser zu Matrix abhängen können. Daher wird in [17] eine experimentelle Ermittlung der Festigkeitswerte σ_{qCu} und τ_u empfohlen.

2.4 Versagenskriterien

Bei isotropen Materialien verwendet man Vergleichsspannungen σ_v (von Mises, Tresca, etc.) um eine Aussage treffen zu können, ob Plastizieren eintritt. Wird Plastizieren als Versagen definiert, so ist die Belastungsgrenze mit $R = \sigma_v/\sigma_u = 1$ erreicht, mit dem Spannungsverhältnis R und der Fließspannung σ_u .

Bei orthotropen Materialien unterscheidet man interaktive und nicht-interaktive Versagenskriterien. Letztere sind z.B. Maximalspannungs- oder Maximaldehnungskriterien. Interaktive Kriterien zeichnen sich dadurch aus, dass, anders als bei den nicht-interaktiven, Spannungsinteraktionen berücksichtigt werden. Sie können unterteilt werden in Pauschalversagenskriterien und interaktive Versagenskriterien mit Berücksichtigung der Komponenten, die auch eine Aussage über die Versagensform geben.

Aufgrund ihrer einfacheren Handhabung werden meist Pauschalversagenskriterien verwendet. Die bekanntesten sind folgende:

- Hill-Versagenskriterium,
- Tsai/Hill-Kriterium,
- Hoffman-Versagenskriterium,
- Tsai-Wu-Versagenskriterium.

Im Weiteren wird das Tsai-Wu-Versagenskriterium ([22]) verwendet und näher vorgestellt, da es am allgemeinsten gehalten und weit verbreitet ist.

2.4.1 Tsai-Wu-Versagenskriterium

Das Versagenskriterium von Tsai und Wu stellt eine Erweiterung der Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises für orthotrope Materialien dar. Es hat keine analytische Grundlage sondern beruht auf der Anpassung an Messdaten. Wie auch bei der Vergleichsspannung nach von Mises soll eine skalare Vergleichsgröße darüber Auskunft geben, ob Versagen eintritt. Dazu wird folgender quadratischer Ansatz gemacht

$$\bar{\mathbf{F}}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T\tilde{\mathbf{F}}\boldsymbol{\sigma} = 1 \quad (2.35)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6), \\ \tilde{\mathbf{F}} &= \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ & & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ & & & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ & & & & F_{55} & F_{56} \\ \text{sym.} & & & & & F_{66} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Durch die Orthotropie besteht keine Wechselwirkung der Normalspannung mit den Schubspannungen als auch zwischen den Schubspannungen untereinander, es ist also

$$F_4 = F_5 = F_6 = 0 \quad (2.37)$$

und

$$F_{14} = F_{15} = F_{16} = F_{24} = F_{25} = F_{26} = F_{34} = F_{35} = F_{36} = F_{45} = F_{46} = F_{56} = 0. \quad (2.38)$$

Somit lautet Gl. (2.35) ausgeschrieben

$$\begin{aligned} &F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_3\sigma_{33} + \\ &+ F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{33}\sigma_{33}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2F_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} + \\ &+ F_{44}\sigma_{12}^2 + F_{55}\sigma_{13}^2 + F_{66}\sigma_{23}^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Setzt man jeweils alle Spannungskomponenten bis auf eine zu Null, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_{lTu}, \quad F_{11}\sigma_{lTu}^2 + F_1\sigma_{lTu} = 1 \\ \sigma_{11} = \sigma_{lCu}, \quad F_{11}\sigma_{lCu}^2 + F_1\sigma_{lCu} = 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow F_{11} = \frac{1}{\sigma_{lTu}\sigma_{lCu}}, \quad F_1 = \frac{1}{\sigma_{lTu}} - \frac{1}{\sigma_{lCu}}, \\
\left. \begin{array}{l} \sigma_{22} = \sigma_{qTu}, \quad F_{22}\sigma_{qTu}^2 + F_2\sigma_{qTu} = 1 \\ \sigma_{22} = \sigma_{qCu}, \quad F_{22}\sigma_{qCu}^2 + F_2\sigma_{qCu} = 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow F_{22} = \frac{1}{\sigma_{qTu}\sigma_{qCu}}, \quad F_2 = \frac{1}{\sigma_{qTu}} - \frac{1}{\sigma_{qCu}}, \\
\left. \begin{array}{l} \sigma_{33} = \sigma_{qTu}, \quad F_{33}\sigma_{qTu}^2 + F_3\sigma_{qTu} = 1 \\ \sigma_{33} = \sigma_{qCu}, \quad F_{33}\sigma_{qCu}^2 + F_3\sigma_{qCu} = 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow F_{33} = \frac{1}{\sigma_{qTu}\sigma_{qCu}}, \quad F_3 = \frac{1}{\sigma_{qTu}} - \frac{1}{\sigma_{qCu}}, \\
\sigma_{12} = \tau_u, \quad F_{44}\sigma_{12}^2 = 1 &\Rightarrow F_{44} = \frac{1}{\tau_{lqu}^2}, \\
\sigma_{13} = \tau_u, \quad F_{55}\sigma_{13}^2 = 1 &\Rightarrow F_{55} = \frac{1}{\tau_{ltu}^2}, \\
\sigma_{23} = \tau_u, \quad F_{66}\sigma_{23}^2 = 1 &\Rightarrow F_{66} = \frac{1}{\tau_{qtu}^2}. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Die Festigkeitsparameter F_i und F_{ii} können experimentell oder aus den Festigkeitswerten der einzelnen Komponenten (siehe Kapitel 2.3.2) ermittelt werden. Noch unbestimmt sind die Wechselwirkungsparameter F_{12} , F_{13} und F_{23} , die im Tsai-Wu-Kriterium die Form

$$F_{ij} = F_{ij}^* \sqrt{F_{ii} F_{jj}} \tag{2.41}$$

haben. Diese könnten experimentell durch kombinierte Belastungen ermittelt werden. Da diese sehr aufwändig sind, wird der Wechselwirkungsparameter F_{ij} als eine empirische Größe gehandelt. Der Definitionsbereich von F_{ij}^* wird durch die Bedingung, dass die Versagensfläche geschlossen sein muss, auf das Intervall $[-1, 1]$ eingeschränkt. Betrachtet man die Interaktion mehrerer Fehlermodi, so lässt sich der Bereich noch weiter auf das Intervall $[-1, 0]$ einschränken. In [22] wird $F_{ij}^* = -0.5$ empfohlen. Dieser Wert ist eine gute Näherung für viele Materialien, insbesondere für glasfaser- und kohlenstofffaserverstärkte Epoxidharze und wird im Weiteren verwendet.

Durch Gl. (2.35) ist die Versagensfläche definiert. Jeder Spannungskomponentenvektor σ , der diese Gleichung erfüllt, führt zu Versagen. Setzt man proportionale Belastung voraus und führt das Spannungsverhältnis R ein

$$\sigma = R\sigma^{max} \tag{2.42}$$

worin σ^{max} die zu σ proportionale Spannung bezeichnet, die zu Versagen führt, so lau-

tet Gl. (2.35)

$$R^2 - R\bar{\mathbf{F}}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T\tilde{\mathbf{F}}\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (2.43)$$

So erhält man mit dem Spannungsverhältnis eine skalare Vergleichsgröße für den aktuellen Spannungszustand. Steigert man $\boldsymbol{\sigma}$ auf $\boldsymbol{\sigma}/R$, so tritt Versagen ein. Löst man Gl. (2.43) auf, erhält man R zu

$$R = \frac{\bar{\mathbf{F}}\boldsymbol{\sigma}}{2} + \sqrt{\frac{(\bar{\mathbf{F}}\boldsymbol{\sigma})^2}{4} + \boldsymbol{\sigma}^T\tilde{\mathbf{F}}\boldsymbol{\sigma}} < \frac{1}{S}. \quad (2.44)$$

Abgesehen vom Spannungsverhältnis R dürfen die einzelnen Spannungskomponenten ebenfalls nicht den zulässigen Wert in der entsprechenden Richtung überschreiten. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} R_1^{Zug} &= \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{lTu}} < \frac{1}{S}, \\ R_2^{Zug} &= \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{qTu}} < \frac{1}{S}, \\ R_3^{Zug} &= \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{qTu}} < \frac{1}{S}, \\ R_1^{Druck} &= -\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{lCu}} < \frac{1}{S}, \\ R_2^{Druck} &= -\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{qCu}} < \frac{1}{S}, \\ R_3^{Druck} &= -\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{qCu}} < \frac{1}{S}, \\ R_s &= \frac{\sigma_{ij}}{\tau_u} < \frac{1}{S} \quad \text{für } i \neq j. \end{aligned} \quad (2.45)$$

worin S die Sicherheit gegen Versagen bezeichnet.

2.5 Herstellung von Faserverbundbauteilen

2.5.1 Wickeltechnik

Wickelverfahren eignen sich besonders zur Fertigung von rotationssymmetrischen Compositebauteilen. Bei diesem werden Rovings (Faserbündel) oder Prepregs (vorimprägnierte Fasern) von einer Spule abgezogen, durch eine Tränk- bzw. Heizvorrichtung geführt und über ein Fadenauge auf einen rotierenden Wickelkern aufgewickelt (Abbildung 2.5). Das Fadenaug selbst führt eine translatorische Bewegung parallel zur Drehachse des Wickelkerns aus, wodurch ein Wickelmuster entsteht. Der Winkel zwischen der Fasertangente und der

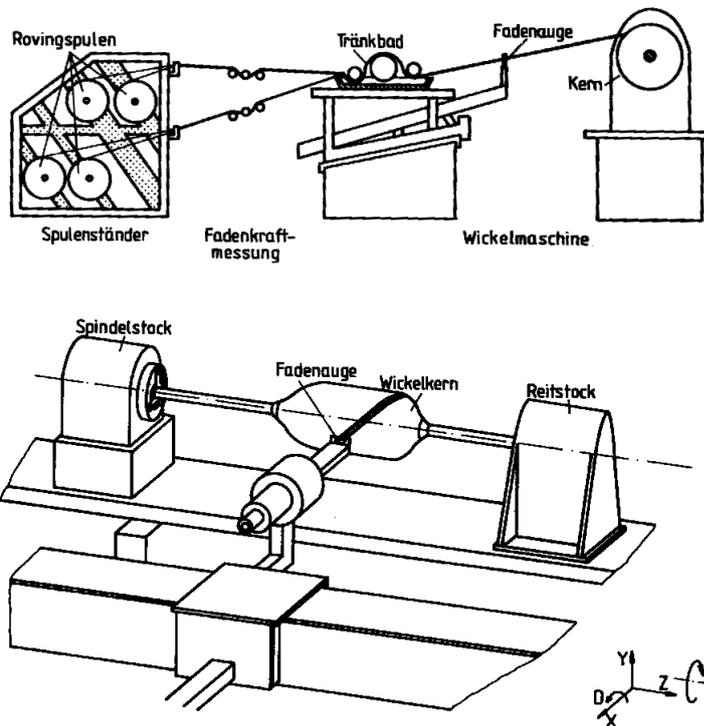


Abbildung 2.5: Prinzip des Wickelverfahrens (aus [24], Bild 1 und 3)

Rotationsachse des Kerns wird als Wickelwinkel definiert. Ist die endgültige Geometrie erreicht, sollte bei der anschließenden Härtung die Rotation des Kerns beibehalten werden, um eine gleichmäßige Harzverteilung zu erhalten. Bei Warmaushärtung kann die Beheizung von innen mittels durchströmenden Öls oder bei ferritischen Kernen durch Induktion erfolgen. Für die Beheizung von außen werden Heißluft- oder Infrarotstrahler verwendet.

Der Kern kann als verlorener Kern nach der Fertigung im Bauteil gelassen werden oder eine Funktion im Bauteil übernehmen. Andernfalls muss der Kern entfernt werden. Zu diesem Zweck verwendet man oft konische Kerne oder Sandkerne.

Voraussetzung für die Herstellbarkeit eines Bauteils mit dem Wickelverfahren ist, dass die Form zumindest in einer Richtung konkav ist. Die einfachste wickelbare Form ist in einer Richtung konkav, in der anderen plan, wie es z.B. bei einer Zylinderschale der Fall ist.

Für die Tränkung der Fasern mit dem Harzsystem gibt es drei Möglichkeiten:

1. Prepregs sind vorimprägnierte Fasern, die vor dem Wickeln aufgeheizt werden. Der Fasergehalt variiert nur wenig und es lassen sich hohe Wickelgeschwindigkeiten erreichen.

2. Beim Trockenwickeln werden die Fasern trocken auf dem Kern abgelegt und anschließend in einem Harzbad getränkt.
3. Am häufigsten wird das Nasswickeln angewandt, bei dem die Fasern vor dem Wickeln durch Tränkwalzen oder ein Tränkbild geführt werden.

Um bei Faserumlenkungen ein Abrutschen zu verhindern, werden Wickelhilfen (Stifte, Pins, etc.) verwendet. So lassen sich auch auf Zylinderschalen Wickelwinkel zwischen 0° und 90° erreichen. Die Wickelhilfen werden am Rand des Kerns häufig unter einem Winkel von 45° angebracht. Durch die Umlenkung kommt es am Rand zu einer Aufdickung des Laminats, daher sollten die Randbereiche nach der Aushärtung entfernt werden (vgl. [24]).

Der erreichbare Faservolumengehalt liegt bei $\xi \approx 0.6$. Einen großen Einfluss darauf hat die Fadenkraft, mit der der Faservolumengehalt proportional steigt (siehe [13]).

2.5.2 Nachbearbeitung

Für die spanende Bearbeitung von Verbundwerkstoffen kommen dieselben Verfahren zum Einsatz wie bei Metallen, Vorschub- und Schnittgeschwindigkeiten müssen allerdings angepasst werden. Außerdem muss berücksichtigt werden, dass übliche Fasermaterialien eine starke abrasive Wirkung haben und dass es durch das Durchtrennen der Fasern zu Faser- auszug und Delamination kommen kann (vgl. [5]).

3 Nichtlineare Optimierung

Das vorliegende Problem ist, die Kosten zu minimieren unter der Bedingung, dass kein Versagen eintritt und dass die Trägheitsmomente gleich groß sind ($I_x \equiv I_y = I_z$). Dies führt auf ein nichtlineares Optimierungsproblem mit nichtlinearen Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen. Das Gebiet der nichtlinearen Optimierung ist sehr umfangreich. Daher soll in diesem Kapitel nur die Vorgehensweise des verwendeten Algorithmus angesprochen werden, um wichtige Parameter zu klären.

3.1 Interior-Point-Verfahren

Verwendet wurde die MATLAB-Funktion `fmincon` (siehe [27]) mit dem Algorithmus 'interior-point'. Im Weiteren bezeichnet $\| \cdot \|$ die euklidische Norm.

Das Problem besteht darin die Optimierungsvariablen \mathbf{x} so zu wählen, dass eine skalare Zielfunktion f unter der Nebenbedingung, dass die Funktionen \mathbf{g} bzw. \mathbf{h} kleiner bzw. gleich Null sind, minimal ist

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{so dass } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ stetig differenzierbare Funktionen sind. Interior-Point-Verfahren zeichnen sich dadurch aus, dass nicht $f(\mathbf{x})$ minimiert wird, sondern eine Barrierefunktion

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^m \ln s^{(i)} \\ \text{s.d. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit dem Barriereparameter $\mu > 0$ und dem Vektor der Slackvariablen $\mathbf{s} = (s^{(1)}, \dots, s^{(m)})^T$. Da für kleine Werte von \mathbf{s} der Term $-\sum_{i=1}^m \ln s^{(i)}$ sehr groß ist, wird durch diesen Ansatz

versucht, dass sich der Algorithmus in einem Bereich bewegt, in dem die Restriktionen erfüllt sind. Der Barriereparameter wird bei jeder Iteration verkleinert und man erwartet, dass das Minimum des Barriereproblems gegen das Minimum des ursprünglichen Problems aus Gl. (3.1) strebt. Das Problem in Gl. (3.2) soll nun auf ein SQP-Problem (sequential-quadratic-programming) umgeformt werden. Basis ist die Lagrange-Funktion von Gl. (3.2)

$$\mathcal{L} = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \ln s^{(i)} + \boldsymbol{\lambda}_i^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}) + \boldsymbol{\lambda}_e^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

mit den Lagrange-Multiplikatoren der Gleichungsrestriktionen $\boldsymbol{\lambda}_e \in \mathbb{R}^l$ und der Ungleichungsrestriktionen $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^m$. Im Optimum muss gelten

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}_e, \boldsymbol{\lambda}_i) &= \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_e(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda}_e + \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}_i) &= -\mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} + \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) &= (\nabla g^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \nabla g^{(m)}(\mathbf{x})), \\ \mathbf{A}_e(\mathbf{x}) &= (\nabla h^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \nabla h^{(l)}(\mathbf{x})), \\ \mathbf{e} &= (1, \dots, 1)^T, \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} s^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{(m)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Verwendet man

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}, \\ \varphi(\mathbf{z}) &= f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \ln s^{(i)}, \\ \mathbf{c}(\mathbf{z}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

so lautet das Barriereproblem in Gl. (3.2)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \varphi(\mathbf{z}) \\ \text{s.d. } \mathbf{c}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bei jeder Iteration wird ein Schritt $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_s)^\top$ durchgeführt, was durch Taylorreihenentwicklung auf das quadratische Problem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \nabla\varphi^\top \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{W} \mathbf{d} \\ \text{s.d. } \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})^\top \mathbf{d} + \mathbf{c}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

führt. Darin sind $\hat{\mathbf{A}}$ die Jacobimatrix von \mathbf{c} und \mathbf{W} die Hessematrix der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})^\top &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_e(\mathbf{x})^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_i(\mathbf{x})^\top & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{W} \equiv \nabla_{\mathbf{z}\mathbf{z}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\lambda}_e) &= \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\lambda}_e) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu \mathbf{S}^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Um bei schlechten Startwerten eine gute Konvergenz zu gewährleisten, wird ein Trust-Region-Radius Δ eingeführt

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{d}_s \end{pmatrix} \right\| \leq \Delta. \quad (3.10)$$

Zuletzt muss noch durch eine weitere Restriktion sichergestellt werden, dass die Slackvariablen $\mathbf{s} > 0$ bleiben

$$\mathbf{s} + \mathbf{d}_s \geq (1 - \tau) \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{d}_s \geq -\tau \mathbf{s} \quad (3.11)$$

mit $0 < \tau < 1$. Zusammengefasst lautet das Subproblem des verwendeten Algorithmus

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \nabla\varphi^\top \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{W} \mathbf{d} \\ \text{s.d. } \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})^\top \mathbf{d} + \mathbf{c}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \\ \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{d}_s \end{pmatrix} \right\| \leq \Delta \\ \mathbf{d}_s \geq -\tau \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Der Barriereparameter μ und der Trust-Region-Radius Δ werden bei jeder Iteration neu berechnet. Für Details zum oben beschriebenen Algorithmus und wie das Subproblem gelöst wird sei auf [4], [3] und [25] verwiesen.

3.2 Wichtige Parameter der Matlab-Funktion `fmincon`

Um zu erreichen, dass der Algorithmus konvergiert, müssen häufig andere Parameter verwendet werden, als sie von MATLAB als Standard definiert sind. Im Folgenden sind die Auswirkungen verschiedener Parameter beschrieben (vgl. [27]). Es sei angemerkt, dass diese nur aus Beobachtungen bei der Optimierung eines Flywheels stammen und daher nicht allgemein gültig sind.

- `optimset('Algorithm','interior-point')` stellt den Algorithmus um auf das Interior-Point-Verfahren.
- `optimset('FinDiffType','central')` verwendet den zentralen Differenzenquotienten anstatt des Vorwärtsdifferenzquotienten. Dies erhöht die Genauigkeit zu Lasten der Rechenzeit.
- `optimset('InitBarrierParam',positiver Skalar)` verändert den Startwert für den Barriereparameter μ in Gl. (3.2). Der Default-Wert ist 0.1. Falls der Algorithmus zwar konvergiert, die geforderten Toleranzen für die Restriktion aber nicht erreicht werden, kann durch Erhöhen dieses Wertes oft Abhilfe geschaffen werden. Nachteilig ist jedoch eine langsamere Konvergenz.
- `optimset('InitTrustRegionRadius',positiver Skalar)` verändert den Startwert für den Trust-Region-Radius in Gl. (3.10). Der Defaultwert ist \sqrt{n} mit n als Anzahl der Optimierungsvariablen. In [27] wird für schlecht skalierte Probleme ein kleinerer Wert empfohlen. Durch einen höheren Trust-Region-Radius kann allerdings vermieden werden, dass der Algorithmus in einem lokalen Minimum verbleibt.
- `optimset('DiffMinChange',positiver Skalar)` verändert die Schrittweite für die Bildung des Differenzenquotienten, der Default-Wert ist 10^{-12} . Ein höherer Wert kann zu einer besseren „Weitsicht“ führen, um lokale Minima zu vermeiden. Dies führt allerdings auch zu langsamerer Konvergenz und schlechterer Dämpfung.

4 Finite-Elemente-Methode

Ähnlich Kapitel 3 soll auch dieses nur einen Überblick schaffen und später verwendete Begriffe erläutern.

4.1 Lineare verschiebungsbasierte statische Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist eine moderne numerische Ingenieursmethode zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, insbesondere zur Lösung von Problemen der Festkörpermechanik. Anwendung findet sie dort, wo große Genauigkeit gefordert wird, die zu untersuchende Geometrie oder die Randbedingungen zu komplex für eine analytische Berechnung sind. Die zu untersuchende Struktur wird diskretisiert und somit in endlich viele Substrukturen zerlegt, wodurch sie ihren Namen erhielt. Auf diese Substrukturen (Elemente) werden die Grundgesetze der Mechanik angewandt und die Gleichungen dann entsprechend zusammengesetzt.

Ihren Näherungscharakter hat die Methode einerseits von der Diskretisierung, andererseits werden die Geometrie als auch das Verschiebungsfeld innerhalb eines Elements durch Ansatzfunktionen beschrieben und liegen daher nicht exakt vor. Die auftretenden Integrale werden numerisch gelöst.

Die ersten Schritte einer Finite-Elemente-Analyse bestehen darin eine Geometrie zu erstellen und diese zu vernetzen. Danach liegt die Geometrie nur mehr in diskreter Form vor. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen Kontinuums- (2D, 3D, axialsymmetrisch) und Strukturelementen (Stab-, Balken-, Schalenelemente, etc.). Während bei Kontinuumsselementen das Verschiebungsfeld direkt über Ansatzfunktionen beschrieben wird, liegen den Strukturelementen Annahmen und Hypothesen zugrunde.

Die FEM ist eine spezielle Form des Ritz'schen Verfahrens (vgl. [16]). Bei diesem wird die Verschiebung durch einen Summenansatz interpoliert. Das Spezielle an der FEM ist, dass die Koeffizienten den Knotenverschiebungen des Netzes entsprechen. Das Verschiebungsfeld innerhalb eines Elements wird durch Ansatzfunktionen interpoliert

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{N}(r, s, t)^{(e)T} \mathbf{U}^{(e)} \quad (4.1)$$

mit der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}^{(e)}$ des Elements (e), die im Einheitsraum (r, s, t) definiert ist, und dem Verschiebungsvektor $\mathbf{U}^{(e)}$. Die Ansatzfunktionen beinhalten, welchen Beitrag ein bestimmter Knoten zur Verschiebung an der Stelle (x, y, z) leistet. Die Ansatzfunktionen werden im Einheitsraum definiert, weil sie dadurch für alle Elemente desselben Typs gleich sind. Im Einheitsraum definierte Elemente werden isoparametrische Elemente genannt. Bei diesen werden die Geometrie und das Verschiebungsfeld durch dieselben Ansatzfunktionen beschrieben. Als Interpolationsfunktionen werden meist Polynome ersten oder zweiten Grades verwendet.

Die aus der linearisierten Elastizitätstheorie bekannte Beziehung zwischen Verzerrungen und Verschiebungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2)$$

lautet in Matrixschreibweise

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}\mathbf{u} \quad (4.3)$$

mit der Differentialoperatormatrix \mathbf{d} , oder mit den Knotenverschiebungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)} \quad (4.4)$$

mit der Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix $\mathbf{D}^{(e)} = \mathbf{d}\mathbf{N}^{(e)}$. Verwendet man z.B. das Prinzip der virtuellen Arbeit mit dem Hooke'schen Gesetz, erhält man die Steifigkeitsmatrix des Elements (e) (ohne Herleitung) zu

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{D}^{(e)\text{T}} \mathbf{E} \mathbf{D}^{(e)} \det \mathbf{J}^{(e)} dr ds dt, \quad (4.5)$$

wobei die Integration im Einheitsraum ausgeführt wird. Die Schnittstelle zwischen physikalischem Raum und Einheitsraum bildet die Jacobimatrix $\mathbf{J}^{(e)}$. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} erhält man durch Summation über alle Elemente. Die Grundgleichung der Finite-Elemente-Methode lautet

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (4.6)$$

mit dem Knotenlastvektor \mathbf{F} , dem Knotenverschiebungsvektor \mathbf{U} und der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} . Nach Lösen dieses Gleichungssystems können mit Gl. (4.4) die Verzerrungen und dann mit dem Hooke'schen Gesetz die Spannungen ermittelt werden.

4.2 Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenformen mit der Methode der Finiten Elemente

Liegt ein dynamisches Problem vor, so treten auch Knotenpunktsbeschleunigungen auf. Im ungedämpften Fall lautet die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.7)$$

mit der Massenmatrix $\mathbf{M} = \sum_{(e)} \mathbf{M}^{(e)}$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho^{(e)} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)\text{T}} \det \mathbf{J}^{(e)} dr ds dt. \quad (4.8)$$

Wählt man für \mathbf{U} einen harmonischen Ansatz

$$\mathbf{U}(t) = \boldsymbol{\phi} \sin[\omega(t - t_o)] \quad (4.9)$$

so führt die Bewegungsgleichung auf ein lineares Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

mit den Eigenwerten ω_i und den Eigenvektoren $\boldsymbol{\phi}_i$.

5 Festigkeitsrechnung

In den folgenden Kapiteln werden die Methoden und Modelle vorgestellt, die in der später angeführten Optimierung (Kapitel 7) verwendet werden. Kapitel 5.1 befasst sich mit den Restspannungen, die durch den Wickelprozess entstehen. In den weiteren Kapiteln werden Methoden zur Spannungsanalyse behandelt.

5.1 Residuale Spannungen durch den Wickelprozess

Das Vorspannen des Fadens erhöht nicht nur den Faservolumengehalt, sondern erlaubt auch das gezielte Einbringen von Druckspannungen in das Bauteil. Da rotierende Bauteile vorwiegend auf Zug belastet werden, lassen sich durch residuale Druckspannungen kleinere Baugrößen bei gleichem Energieinhalt erreichen. Im Folgenden sei Reibungsfreiheit vorausgesetzt.

Abbildung 5.1 zeigt das Aufwickeln eines Fadens mit Breite a und Höhe h mit der Fadenkraft F . Der Zylinder sei bis zum Radius \hat{r} gewickelt. Durch das Aufwickeln einer

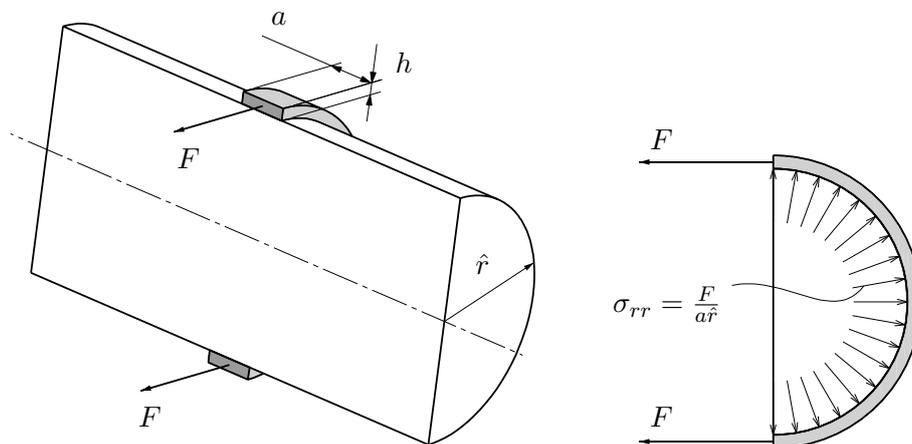


Abbildung 5.1: Definitionen geometrischer Größen für das Vorspannungsmodell

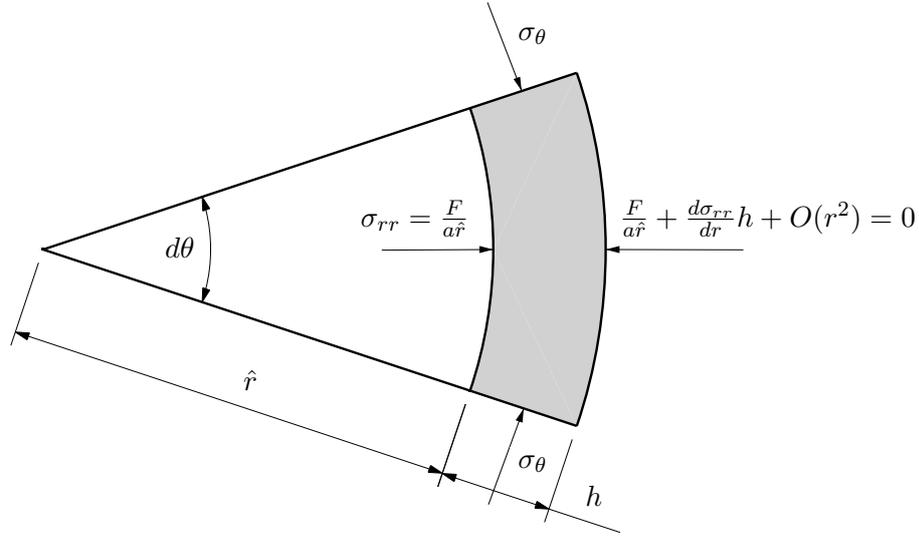


Abbildung 5.2: Gleichgewicht des Wickelfadens

weiteren Lage der Dicke h gilt für Radial- und Umfangsspannung an der Stelle \hat{r}

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(\hat{r}) &= \frac{F}{ah} = \sigma_p \\ \sigma_{rr}(\hat{r}) &= \frac{F}{a\hat{r}},\end{aligned}\quad (5.1)$$

worin $\sigma_p = F/ah$ die Vorspannung eines Faserbündels bezeichnet. Für den Spannungsverlauf soll das Gleichgewicht an einem kleinen Scheibenelement wie in Abbildung 5.2 betrachtet werden. Durch Reihenentwicklung gilt für die Radialspannung an der Stelle $\hat{r} + h$

$$\sigma_{rr}(\hat{r} + h) = \frac{F}{a\hat{r}} + \frac{d\sigma_{rr}}{dr}h = 0, \quad (5.2)$$

die aufgrund der freien Oberfläche Null sein muss. Durch Umformen obiger Gleichung ergibt sich die Änderung der Radialspannung zu

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = -\frac{1}{h} \frac{F}{a\hat{r}} = -\frac{\sigma_p}{\hat{r}}. \quad (5.3)$$

Die endgültige Spannungsverteilung ergibt sich durch den Druck, den die Lagen von r bis zum Außenradius R_o ausüben, daher erhält man $\sigma_{rr}(r)$ durch Integration

$$\sigma_{rr}(r) = -\sigma_p \int_r^{R_o} \frac{1}{\hat{r}} d\hat{r} = -\sigma_p \ln \frac{R_o}{r}. \quad (5.4)$$

Da auch die Eigenspannungen im Rotor die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen müssen,

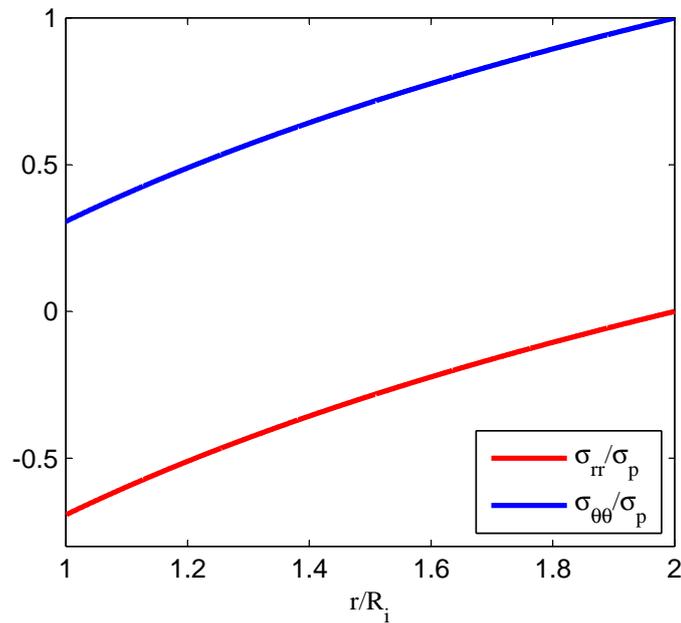


Abbildung 5.3: Verlauf von Radial- und Umfangsvorspannung bezogen auf σ_p ; mit Verhältnis Außenradius zu Innenradius $R_o/R_i = 2$

gilt

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (5.5)$$

womit man durch Einsetzen die Umfangsspannung erhält

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_p \left(1 - \ln \frac{R_o}{r} \right). \quad (5.6)$$

In Abbildung 5.3 sind die Verläufe der Radial- und Umfangsspannung dargestellt. Aus der Abbildung lässt sich Folgendes erkennen:

- Die Radialspannung ist entsprechend der freien Oberfläche am Außenradius Null und nimmt nach innen betragsmäßig zu, da die einzelnen Lagen durch die konstante Fadenspannung immer mehr aufeinander gepreßt werden,
- die Umfangsspannung ist am Außenradius gleich der Fadenspannung σ_p . Da die außenliegenden Lagen nach innen hin Druck ausüben, nimmt sie ebenfalls nach innen ab. Je nach geometrischen Verhältnissen, kann sie am Innenradius auch negativ werden.

Die Eigenspannungen im Wickelkern sind bei einem Vollzylinder aufgrund der Kontinuität der Radialspannung gleich dem äußeren Druck am Innenradius der Wicklung

$$\sigma_{rr}^{Kern} = \sigma_{\theta\theta}^{Kern} = \sigma_{rr}(r = R_i) = const. \quad (5.7)$$

Bei einem Hohlzylinder als Wickelkern nimmt sie nach innen ab und wird Null.

5.2 Axialsymmetrisches Modell mit modifiziertem generalisiertem ebenem Verzerrungszustand

Die im folgenden Kapitel vorgestellte Methode ist weitestgehend an [8] angelehnt. Durch die Bedingung, dass das Trägheitsmoment um die Rotationsachse I_z gleich den Trägheitsmomenten $I_x \equiv I_y$ um die darauf orthogonalen Achsen sein soll, ergibt sich ein Zylinder, auf den die Beschreibung „dünne Scheibe“ nicht mehr zutrifft. Eine bessere Näherung als der ebene Spannungszustand, wie z.B. in [15], liefert die Annahme eines modifizierten generalisierten ebenen Verzerrungszustandes (MGPS = modified generalized plain strain), bei dem die axiale Verzerrung als linear über den Radius r angenommen wird. Des Weiteren soll auch der Einfluss einer Temperaturänderung um ΔT vom spannungsfreien Zustand, wie sie z.B. durch das Abkühlen nach dem Warmaushärten auftritt, berücksichtigt werden.

Schreibt man die lokalen Gleichgewichtsbedingungen in Zylinderkoordinaten um, so ergibt sich in radialer Richtung

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho r \omega^2 = 0, \quad (5.8)$$

wobei der Term $\rho r \omega^2$ die Volumskräfte aufgrund der Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω darstellt. Betrachtet man die Mittenebene des Rotors, so sind alle Schubspannungen gleich Null und das Hooke'sche Gesetz nimmt die Form

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_\theta} & \frac{-\nu_{\theta r}}{E_\theta} & \frac{-\nu_{\theta z}}{E_\theta} \\ sym. & \frac{1}{E_z} & \frac{-\nu_{zr}}{E_z} \\ & & \frac{1}{E_r} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_\theta \\ \beta_z \\ \beta_r \end{pmatrix} \Delta T$$

$$\text{bzw. } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}\Delta T) \quad (5.9)$$

an, mit dem Vektor der linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha}$.

Durch die radiale Verschiebung um u_r wird das Bogenelement $r d\theta$ auf die Länge $(u_r + r)d\theta$ gedehnt (vgl. [15]) und die Verzerrungskomponenten ergeben sich unter Be-

rücksichtigung des MGPS zu

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 r, \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{du_r}{dr}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Darin wird die axiale Verzerrung ε_{zz} als linear über den Radius r angenommen. Die Konstanten ε_0 und ε_1 stellen den konstanten Anteil bzw. die Änderung der axialen Verzerrung dar. Setzt man Gl. (5.9) und (5.10) in die Gleichgewichtsbedingung Gl. (5.8) ein, so ergibt sich die Differentialgleichung für die Radialverschiebung zu

$$\begin{aligned}E_{33} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + E_{33} \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - E_{11} \frac{1}{r^2} u_r + \frac{1}{r} \varepsilon_0 (E_{32} - E_{12}) + \varepsilon_1 (2E_{32} - E_{12}) - \\ - \frac{1}{r} \Delta T (\beta_r - \beta_\theta) + \rho r \omega^2 = 0,\end{aligned}\tag{5.11}$$

wobei E_{ij} für den Eintrag in Zeile i und Spalte j der Matrix \mathbf{E} steht. Die Lösung obiger Differentialgleichung ist gegeben durch

$$u_r = -\rho \omega^2 \varphi_0 r^3 + C_1 \varphi_1 r^\kappa + C_2 \varphi_2 r^{-\kappa} + \varphi_3 \varepsilon_1 r^2 + \varphi_4 \varepsilon_0 r + \varphi_{\beta 1} \Delta T r\tag{5.12}$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned}\kappa &= \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}}, & \varphi_0 &= \frac{1}{(9 - \kappa^2) E_{33}}, & \varphi_3 &= \frac{E_{12} - 2E_{32}}{4E_{33} - E_{11}}, \\ \varphi_4 &= \frac{E_{12} - E_{23}}{E_{33} - E_{11}}, & \varphi_{\beta 1} &= \frac{\beta_r - \beta_\theta}{E_{33} - E_{11}}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Die Konstanten φ_0 , φ_3 , φ_4 und $\varphi_{\beta 1}$ ergeben sich durch Einsetzen der Lösung für u_r in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich. C_1 und C_2 sind aus den Randbedingungen zu ermittelt und werden später eliminiert. Setzt man Gl. (5.12) in die Verzerrungsbeziehungen Gl. (5.10) ein und diese wiederum in das Hooke'sche Gesetz Gl. (5.9), so erhält man für die Radialspannung

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\rho \omega^2 r^2 \varphi_5 + C_1 \varphi_1 (E_{31} + \kappa E_{33}) r^{\kappa-1} + C_2 \varphi_2 (E_{31} - \kappa E_{33}) r^{-\kappa-1} + \\ &+ \varepsilon_0 \varphi_7 + \varepsilon_1 r \varphi_6 + \Delta T \varphi_{\beta 2}\end{aligned}\tag{5.14}$$

mit den zusammengefassten Konstanten

$$\begin{aligned}\varphi_5 &= \frac{3E_{33} + E_{31}}{(9 - \kappa^2)E_{33}}, & \varphi_6 &= \varphi_3(E_{31} + 2E_{33}) + E_{32}, \\ \varphi_7 &= (E_{31} + E_{33})\varphi_4 + E_{32}, & \varphi_{\beta 2} &= (E_{31} + E_{33})\varphi_{\beta 1} - \beta_r.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Die noch ausstehenden Konstanten φ_1 und φ_2 werden gewählt zu

$$\varphi_1 = \frac{1}{E_{13} + \kappa E_{33}}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{E_{13} - \kappa E_{33}}. \quad (5.16)$$

Fasst man die Verschiebungen als auch die Spannungen am Innenradius r_i und am Außenradius r_o zu einem Vektor zusammen, so führt das auf

$$\mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{u}_\omega + \varepsilon_0 \mathbf{u}_1 + \varepsilon_1 \mathbf{u}_1 + \Delta T \mathbf{u}_{\Delta T} + \mathbf{G} \Phi \mathbf{C}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{f}_\omega + \varepsilon_0 \mathbf{f}_0 + \varepsilon_1 \mathbf{f}_1 + \Delta T \mathbf{f}_{\Delta T} + \mathbf{I}^* \mathbf{G} \mathbf{C} \quad (5.18)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u_{r_i} \\ u_{r_o} \end{pmatrix}, & \mathbf{u}_\omega &= -\rho \varphi_0 \begin{pmatrix} r_i^3 \\ r_o^3 \end{pmatrix}, & \mathbf{u}_1 &= \varphi_4 \begin{pmatrix} r_i \\ r_o \end{pmatrix}, & \mathbf{u}_1 &= \varphi_3 \begin{pmatrix} r_i^2 \\ r_o^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_{\Delta T} &= \varphi_{\beta 1} \begin{pmatrix} r_i \\ r_o \end{pmatrix}, & \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} r_i^\kappa & r_i^{-\kappa} \\ r_o^\kappa & r_o^{-\kappa} \end{pmatrix}, & \Phi &= \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}, & \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{I}^* &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{f} &= \begin{pmatrix} -r_i \sigma_{r_i} \\ r_o \sigma_{r_o} \end{pmatrix}, & \mathbf{f}_\omega &= -\rho \varphi_5 \begin{pmatrix} -r_i^3 \\ r_o^3 \end{pmatrix}, & \mathbf{f}_0 &= \varphi_7 \begin{pmatrix} -r_i \\ r_o \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_1 &= \varphi_6 \begin{pmatrix} -r_i^2 \\ r_o^2 \end{pmatrix}, & \mathbf{f}_{\Delta T} &= \varphi_{\beta 2} \begin{pmatrix} -r_i \\ r_o \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Formt man Gl. (5.17) wie folgt um

$$\mathbf{C} = \Phi^{-1} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{u}_\omega - \varepsilon_0 \mathbf{u}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{u}_1 - \Delta T \mathbf{u}_{\Delta T}) \quad (5.20)$$

und setzt in Gl. (5.18) ein, so erhält man

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f} + \omega^2 \mathbf{f}_\omega + \varepsilon_0 \mathbf{f}_{\varepsilon_0} + \varepsilon_1 \mathbf{f}_{\varepsilon_1} + \Delta T \mathbf{f}_{\varepsilon_{\Delta T}} \quad (5.21)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \mathbf{I}^* \mathbf{G} \Phi^{-1} \mathbf{G}^{-1}, & \mathbf{f}_\omega &= \mathbf{k} \mathbf{u}_\omega - \mathbf{f}_{\tilde{\omega}}, & \mathbf{f}_{\varepsilon_0} &= \mathbf{k} \mathbf{u}_1 - \mathbf{f}_0, \\ \mathbf{f}_{\varepsilon_1} &= \mathbf{k} \mathbf{u}_1 - \mathbf{f}_1, & \mathbf{f}_{\varepsilon_{\Delta T}} &= \mathbf{k} \mathbf{u}_{\Delta T} - \mathbf{f}_{\Delta T}.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Die Matrix \mathbf{k} ist die Steifigkeitsmatrix eines Rings mit Innenradius r_i und Außenradius r_o . Die Indices ω , ε und ΔT weisen darauf hin, dass die jeweilige Kraft durch Rotation, durch die axiale Verzerrung bzw. durch Temperaturänderung hervorgerufen wird.

Unterteilt man den Rotor in mehrere kleine Ringe, so erhält man eine semi-analytische Lösung zur Festigkeitsberechnung. Der Verschiebungsvektor \mathbf{u} kann als Knotenpunktverschiebungsvektor und $\mathbf{f} + \omega^2 \mathbf{f}_\omega + \varepsilon_0 \mathbf{f}_{\varepsilon_0} + \varepsilon_1 \mathbf{f}_{\varepsilon_1} + \Delta T \mathbf{f}_{\varepsilon_{\Delta T}}$ als Elementlastvektor im Sinne der Finite-Elemente-Methode gedeutet werden.

Noch unbestimmt sind die Größen ε_0 und ε_1 . Da der Rotor an der Ober- und Unterseite unbelastet ist, werden diese so gewählt, dass die resultierende Kraft und das resultierende Moment der axialen Spannungen jeweils Null ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N 2\pi \int_{r_i^{(j)}}^{r_o^{(j)}} \sigma_{zz}^{(j)} r \, dr &= 0, \\ \sum_{j=1}^N 2\pi \int_{r_i^{(j)}}^{r_o^{(j)}} \sigma_{zz}^{(j)} r^2 \, dr &= 0\end{aligned}\quad (5.23)$$

worin N die Anzahl der Ringe (Elemente) ist. Die axiale Spannung σ_{zz} erhält man durch Einsetzen von Gl. (5.10) und Gl. (5.12) in das Hooke'sche Gesetz Gl. (5.9). Durch Einsetzen in Gl. (5.23), Ausführen der Integration und Ersetzen von \mathbf{C} durch Gl. (5.20) lässt sich Gl. (5.23) wie folgt anschreiben

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}^{(j)} + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N (\lambda_1^{(j)} - \mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}_1^{(j)}) + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N (\psi_1^{(j)} - \mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}_1^{(j)}) &= \dots \\ \dots \omega^2 \sum_{j=1}^N (\mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}_\omega^{(j)} - \mu_1^{(j)}) + \Delta T \sum_{j=1}^N (\mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}_{\Delta T}^{(j)} - \chi_1^{(j)}) & \\ \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_2^{(j)} \mathbf{u}^{(j)} + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N (\lambda_2^{(j)} - \mathbf{q}_2^{(j)} \mathbf{u}_1^{(j)}) + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N (\psi_2^{(j)} - \mathbf{q}_2^{(j)} \mathbf{u}_1^{(j)}) &= \dots \\ \dots \omega^2 \sum_{j=1}^N (\mathbf{q}_2^{(j)} \mathbf{u}_\omega^{(j)} - \mu_2^{(j)}) + \Delta T \sum_{j=1}^N (\mathbf{q}_2^{(j)} \mathbf{u}_{\Delta T}^{(j)} - \chi_2^{(j)}) & \quad (5.24)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= \mathbf{g}_1^T \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{G}^{-1}, & \mathbf{g}_1 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1 (r_o^{\kappa+1} - r_i^{\kappa+1}) \\ \beta_1 \varphi_2 (r_o^{-\kappa+1} - r_i^{-\kappa+1}) \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 &= [(E_{21} + E_{23})\varphi_4 + E_{22}] \frac{r_o^2 - r_i^2}{2}, & \mu_1 &= -\rho(E_{21} + 3E_{23})\varphi_0 \frac{r_o^4 - r_i^4}{4}, \\
\alpha_1 &= \frac{E_{21} + \kappa E_{23}}{\kappa + 1}, & \beta_1 &= \frac{E_{21} - \kappa E_{23}}{-\kappa + 1}, \\
\psi_1 &= [(E_{21} + 2E_{23})\varphi_3 + E_{22}] \frac{r_o^3 - r_i^3}{3}, & \chi_1 &= [(E_{21} + E_{23})\varphi_{\beta 1} - \beta_z] \frac{r_o^2 - r_i^2}{2}, \\
\mathbf{q}_2 &= \mathbf{g}_2^T \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{G}^{-1}, & \mathbf{g}_2 &= \begin{pmatrix} \alpha_2 \varphi_1 (r_o^{\kappa+2} - r_i^{\kappa+2}) \\ \beta_2 \varphi_2 (r_o^{-\kappa+2} - r_i^{-\kappa+2}) \end{pmatrix}, \\
\lambda_2 &= [(E_{21} + E_{23})\varphi_4 + E_{22}] \frac{r_o^3 - r_i^3}{3}, & \mu_2 &= -\rho(E_{21} + 3E_{23})\varphi_0 \frac{r_o^5 - r_i^5}{5}, \\
\alpha_2 &= \frac{E_{21} + \kappa E_{23}}{\kappa + 2}, & \beta_2 &= \frac{E_{21} - \kappa E_{23}}{-\kappa + 2}, \\
\psi_2 &= [(E_{21} + 2E_{23})\varphi_3 + E_{22}] \frac{r_o^4 - r_i^4}{4}, & \chi_2 &= [(E_{21} + E_{23})\varphi_{\beta 1} - \beta_z] \frac{r_o^3 - r_i^3}{3}. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass die radiale Verschiebung und die radialen Spannungen stetig sind

$$\sigma_{r_o}^{(j)} = \sigma_{r_i}^{(j+1)}, \quad u_{r_o}^{(j)} = u_{r_i}^{(j+1)}, \quad (5.26)$$

so lautet Gl. (5.21) für alle N Ringe

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{k}^{(j)} \mathbf{u}^{(j)} - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^{(j)} - \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{\varepsilon_1}^{(j)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}^{(j)} + \omega^2 \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{\omega}^{(j)} + \Delta T \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{\Delta T}^{(j)}. \quad (5.27)$$

Mit Gl. (5.24) und Gl. (5.27) hat man ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Verschiebungen und der beiden Komponenten der axialen Verzerrung ε_0 und ε_1 . Durch Einsetzen lässt sich zeigen, dass

$$-\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^{(j)} = \mathbf{q}_1^{(j)T} \quad \text{und} \quad -\mathbf{f}_{\varepsilon_1}^{(j)} = \mathbf{q}_2^{(j)T} \quad (5.28)$$

gilt. Dadurch entsteht eine symmetrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und die Bestimmungsglei-

chung für \mathbf{U} , ε_0 und ε_1 lässt sich in kompakter Form anschreiben als

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varepsilon_0} & \mathbf{K}_{u\varepsilon_1} \\ & K_{\varepsilon_0\varepsilon_0} & K_{\varepsilon_0\varepsilon_1} \\ sym. & & K_{\varepsilon_1\varepsilon_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\omega u} \\ F_{\omega\varepsilon_0} \\ F_{\omega\varepsilon_1} \end{pmatrix} + \Delta T \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\Delta T u} \\ F_{\Delta T\varepsilon_0} \\ F_{\Delta T\varepsilon_1} \end{pmatrix} = \mathbf{F}, \quad (5.29)$$

worin $\mathbf{U} = (u_{r_1}, \dots, u_{r_{N+1}})^T$ die Verschiebungen der einzelnen Knoten enthält (es gilt $u_{r_i}^{(j)} = u_{r_j}$ und $u_{r_o}^{(j)} = u_{r_{j+1}}$). Die Einträge der Steifigkeitsmatrix sind definiert als

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \sum_{j=1}^N \mathbf{k}^{(j)}, & \mathbf{K}_{u\varepsilon_0} &= \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_1^{(j)T}, & \mathbf{K}_{u\varepsilon_1} &= \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_2^{(j)T}, \\ K_{\varepsilon_0\varepsilon_0} &= \sum_{j=1}^N (\lambda_1^{(j)} - \mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}_1^{(j)}), & K_{\varepsilon_1\varepsilon_1} &= \sum_{j=1}^N (\lambda_2^{(j)} - \mathbf{q}_2^{(j)} \mathbf{u}_1^{(j)}), \\ K_{\varepsilon_0\varepsilon_1} &= \sum_{j=1}^N (\psi_1^{(j)} - \mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}_1^{(j)}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

und die Definitionen der Kraftvektoren \mathbf{F}_ω und $\mathbf{F}_{\Delta T}$ sind

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\omega u} &= \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_\omega^{(j)}, & F_{\omega\varepsilon_0} &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}_\omega^{(j)} - \lambda_1^{(j)}), & F_{\omega\varepsilon_1} &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{q}_2^{(j)} \mathbf{u}_\omega^{(j)} - \lambda_2^{(j)}), \\ \mathbf{F}_{\Delta T u} &= \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{\Delta T}^{(j)}, & F_{\Delta T\varepsilon_0} &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{q}_1^{(j)} \mathbf{u}_{\Delta T}^{(j)} - \chi_1^{(j)}), & F_{\Delta T\varepsilon_1} &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{q}_2^{(j)} \mathbf{u}_{\Delta T}^{(j)} - \chi_2^{(j)}). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die Summe des Vektors \mathbf{f} in Gl. (5.18) ist Null unter der Annahme, dass am Außen- und Innenrand keine Belastung angreift, da sich alle anderen Komponenten im Sinne „*actio est reactio*“ gegenseitig aufheben. Durch Gl. (5.29) lassen sich also die Knotenpunktverschiebungen und die axialen Verzerrungen berechnen. Bei bekannten Verschiebungen lassen sich die Verzerrungen durch die Beziehungen in Gl. (5.10) bestimmen und daraus über das Hooke'sche Gesetz Gl. (5.9) die Spannungen. Da die Verschiebungen in diskreter Form vorliegen, muss der Differentialquotient in Gl. (5.10) durch den Differenzenquotienten ersetzt werden. Es eignet sich besonders der zentrale Differenzenquotient

$$\varepsilon_{rr}(r_j) = \frac{u_{r_{j+1}} - u_{r_{j-1}}}{r_{j+1} - r_{j-1}}. \quad (5.32)$$

Liegt auf einem Knoten j eine Materialgrenze, so stellt sich das Problem, welche Elastizitätsmatrix man in Gl. (5.9) verwendet. Am einfachsten ist es die Spannungen am Knoten j

arithmetisch über die Knoten $j - 1$ und $j + 1$ zu mitteln, da es sonst zu unrealistischen Spannungsspitzen kommt. Der entstehende Fehler ist bei entsprechend feiner Diskretisierung sehr klein. Nachdem der Vektor der Spannungskomponenten an jedem Knoten bekannt ist, kann mittels Gl. (2.44) und (2.45) überprüft werden, ob Versagen eintritt oder nicht.

Erweiterung auf isotrope Materialien

Im Falle, dass ein isotropes Material vorliegt, tritt bei den oben definierten Konstanten φ_4 , $\varphi_{\beta 1}$ und β_1 eine Division durch Null auf. Dies muss berücksichtigt werden, indem man

$$\varphi_4 = 0, \quad \varphi_{\beta 1} = 0, \quad \beta_1 = 0 \quad (5.33)$$

setzt. Ansonsten kann wie oben verfahren werden. Für das Spannungsverhältnis R soll allerdings die Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises verwendet werden

$$R = \sqrt{\frac{1}{2\sigma_u^2} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2]}. \quad (5.34)$$

Erweiterung auf einen Vollzylinder

Bei einem Vollzylinder ist der Innenradius $r_i^{(1)} = 0$ und in Gl. (5.12) tritt ebenfalls eine Division durch Null auf. Dies liegt daran, dass sich bei einem Vollzylinder die Konstanten C_1 und C_2 ändern. Da beim Lösen von Gl. (5.29) wegen $u_{r_i}^{(1)} = 0$ die erste Zeile und die erste Spalte der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} gestrichen werden, ist es am einfachsten bei der Summation in Gl. (5.27) mit $j = 2$ zu beginnen und das erste Element mit $r_i^{(1)} = 0$ additiv zu berücksichtigen.

Betrachtet man Gl. (5.14) so muss $C_2 = 0$ sein. Durch Einsetzen von $r = r_o^{(1)}$ und Umformen dieser Gleichung erhält man C_1 mit

$$C_1 = \sigma_{r_o}^{(1)} + \rho\omega^2\varphi_5 r_o^{(1)2} - \varphi_6 \varepsilon_1 r_o^{(1)} - \varphi_7 \varepsilon_0 - \varphi_{\beta 2} \Delta T. \quad (5.35)$$

Setzt man dies in Gl. (5.12) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_1} u_{r_o}^{(1)} + \varepsilon_0 r_o^{(1)} \left(\varphi_7 - \frac{\varphi_4}{\varphi_1} \right) + \varepsilon_1 r_o^{(1)2} \left(\varphi_6 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \right) = \dots \\ \dots - \rho\omega^2 r_o^{(1)3} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_1} - \varphi_5 \right) + \Delta T r_o^{(1)} \left(\frac{\varphi_{\beta 1}}{\varphi_1} - \varphi_{\beta 2} \right) + \sigma_{r_o}^{(1)} r_o^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die veränderten Einträge der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{VZ} und des Elementlastvektors lauten dann

$$\begin{aligned}
K_{22}^{VZ} &= K_{22} + \frac{1}{\varphi_1}, \\
K_{2,N+2}^{VZ} &= K_{2,N+2} + r_o^{(1)} \left(\varphi_7 - \frac{\varphi_4}{\varphi_1} \right), \\
K_{N+2,2}^{VZ} &= K_{2,N+2}^{VZ}, \\
K_{2,N+3}^{VZ} &= K_{2,N+3} + r_o^{(1)2} \left(\varphi_6 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \right), \\
K_{N+3,2}^{VZ} &= K_{2,N+3}^{VZ}, \\
K_{N+2,N+2}^{VZ} &= K_{N+2,N+2} + \lambda_1^{(1)}, \\
K_{N+2,N+3}^{VZ} &= K_{N+2,N+3} + \psi_1^{(1)}, \\
K_{N+3,N+2}^{VZ} &= K_{N+2,N+3}^{VZ}, \\
K_{N+3,N+3}^{VZ} &= K_{N+3,N+3} + \psi_2^{(1)}, \\
F_2^{VZ} &= F_2 - \rho^{(1)} \omega^2 r_o^{(1)3} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_1} - \varphi_5 \right) + \Delta T r_o^{(1)} \left(\frac{\varphi_{\beta 1}}{\varphi_1} - \varphi_{\beta 2} \right), \\
F_{N+2}^{VZ} &= F_{N+2} - \omega^2 \mu_1 - \Delta T \chi_1, \\
F_{N+3}^{VZ} &= F_{N+3} - \omega^2 \mu_2 - \Delta T \chi_2.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Nach Streichen der ersten Zeile und der ersten Spalte aus Gl. (5.29) kann der Knotenpunktsverschiebungsvektor \mathbf{U} ermittelt werden und die Verschiebung $u_{r_1} = 0$ muss noch in \mathbf{U} eingefügt werden. Zur Bestimmung der Spannungen für die Knoten $2, \dots, N+1$ kann wie oben verfahren werden. Die Spannungen am Knoten 1 sind allerdings von C_1 abhängig. Ist $\sigma_{r_2} \equiv \sigma_{r_o}^{(1)}$ bestimmt, so kann C_1 berechnet werden. Für die Verzerrungen gilt bei $r = 0$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz}(r = 0) &= \varepsilon_0, \\
\varepsilon_{\theta\theta}(r = 0) &= \varepsilon_{rr}(r = 0) = C_1 \varphi_1
\end{aligned} \tag{5.38}$$

und über das Hooke'sche Gesetz in Gl. (5.9) folgen dann auch die Spannungen am Knoten 1.

Abbildung 5.4 zeigt einen Vergleich des oben beschriebenen Verfahrens mit einer Finite-Elemente Lösung. Die Höhe des Rotors im FE-Modell wurde groß genug gewählt, sodass Randeﬀekte in der Mittenebene bereits abgeklungen sind. Dargestellt ist das Ergebnis einer Spannungsanalyse eines Rotors mit Aluminium von $r_1 = 0 \text{ m}$ bis $r_2 = 0.1 \text{ m}$, Glasfasern/epoxy mit einem Faserwinkel von 90° von $r_2 = 0.1 \text{ m}$ bis $r_3 = 0.2 \text{ m}$ und

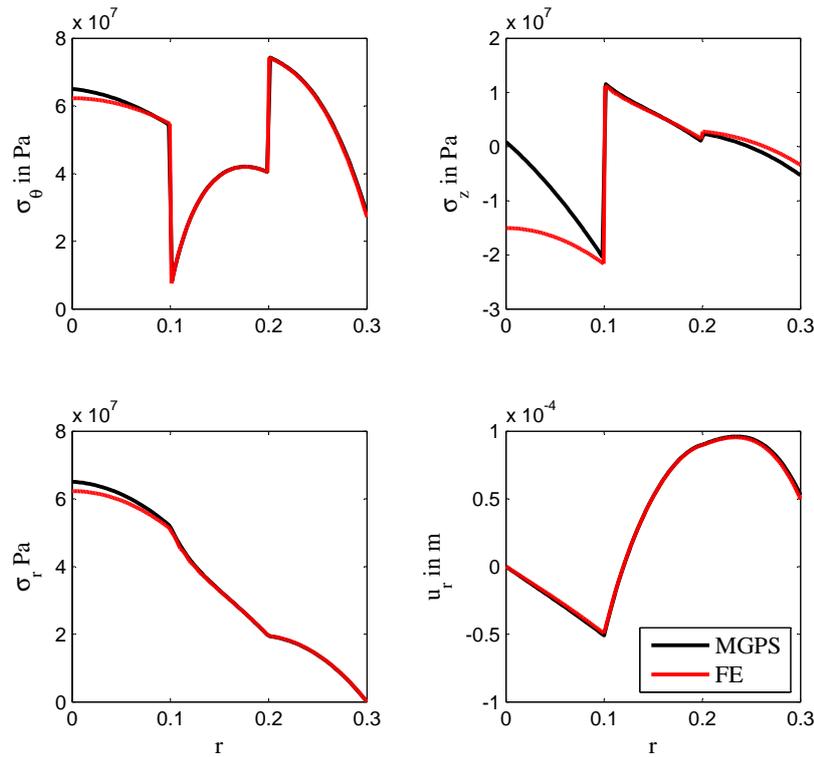


Abbildung 5.4: Vergleich des MGPS mit einer FE-Lösung; Aluminium von $r_1 = 0\text{ m}$ bis $r_2 = 0,1\text{ m}$, Glasfasern/epoxy von $r_2 = 0,1\text{ m}$ bis $r_3 = 0,2\text{ m}$, HTS40/epoxy von $r_3 = 0,2\text{ m}$ bis $r_4 = 0,3\text{ m}$ bei $\omega = 1000\text{ rad/s}$ und $\Delta T = -50\text{ K}$ (siehe Tabelle A.3)

HTS40/epoxy mit einem Faserwinkel von 90° von $r_3 = 0,2\text{ m}$ bis $r_4 = 0,3\text{ m}$, der mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1000\text{ rad/s}$ rotiert und einer Temperaturdifferenz von $\Delta T = -50\text{ K}$ unterzogen wurde. Auffällig ist eine große Abweichung der Axialspannung im Bereich $0 < r < 0,1$. Diese wird verursacht durch die Annahme des linearen Verlaufs der axialen Verzerrung. Auch die Radial- und Umfangsspannung weichen aus diesem Grund von der FE-Lösung leicht ab. Aufgrund der Temperaturbelastung treten auch negative Verschiebungen auf.

Da die Axialspannung im Vergleich zu Radial- und Umfangsspannung gering ist, erweist sich die Wahl eines Faserwinkel von 90° als zweckmäßig und wird im Weiteren auch beibehalten. Ein anderer Wert des Faserwinkels würde die Steifigkeit und Festigkeit in axialer Richtung erhöhen, jedoch in Umfangsrichtung, wo die Belastung wesentlich höher ist, absenken.

Berücksichtigung der Vorspannung

Um den Einfluss der Vorspannung der Fasern beim Wickelprozess auf die Metallwelle zu berücksichtigen, kann ebenfalls die oben angeführte Methode verwendet werden. Man setzt die Winkelgeschwindigkeit und die Temperaturdifferenz zu Null und bringt am Außenradius eine Spannung auf, indem man den entsprechenden Eintrag des Lastvektors \mathbf{F} modifiziert

$$\mathbf{F}_{N+1} = -\sigma_p \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) R_i \quad (5.39)$$

wobei R_o den Außenradius und R_i den Innenradius des Composite-Pakets bezeichnet. Da es sich um eine lineare Analyse handelt, kann der Spannungszustand, entstehend durch Gl. (5.39), mit dem der Rotation und Temperaturänderung addiert werden. Für die Residualspannung im Composite sind entsprechend die Gl. (5.4) und (5.6) zu verwenden.

5.3 Finite Elemente Modelle

Die FE-Modelle beider Bauformen wurden mit der kommerziellen Software COMSOL Multiphysics 3.5a von COMSOL AB erstellt. Ein großer Vorteil von COMSOL ist die starke Anbindung an MATLAB. Das gesamte Modell lässt sich über eine MATLAB-Funktion aufrufen und lösen. Die Post-Processing-Daten können direkt zur Definition von Restriktionen für den Optimierungsalgorithmus `fmincon` (siehe Kapitel 3) verwendet werden.

Da die Winkelbeschleunigung des Flywheels sehr klein ist, kann diese vernachlässigt werden. Die Analyse kann somit quasi-statisch durchgeführt werden. Aufgrund der Rotationssymmetrie wird ein axialsymmetrisches Modell verwendet. Die Lagerung wurde bei beiden Bauformen nicht mitmodelliert aufgrund der Annahme, dass der Einfluss der Lagerkräfte auf die Festigkeit des Rotors gering ist. Die Geometrierstellung, Vernetzung und Vorgabe der Randbedingungen werden in Kapitel 5.3.1 und 5.3.2 beschrieben.

Für die Definition der Materialeigenschaften wurde ein Zylinderkoordinatensystem eingeführt, wodurch die mittels Mori-Tanaka-Methode bestimmten Werte für die Elastizitätsmatrix \mathbf{E} aus Gl. (2.23), den thermischen Ausdehnungskoeffizienten $\boldsymbol{\alpha}$ aus Gl. (2.25) als auch der Dichte ρ aus Gl. (2.26) direkt übernommen werden konnten.

Um die Effekte der Fadenvorspannung berücksichtigen zu können, wurden zwei verschiedene Lastfälle kombiniert.

Rotation und Temperatur: In diesem Lastfall wurde auf die gesamte Geometrie eine Temperaturänderung von ΔT und eine verteilte Volumskraft $\rho r \Omega^2$ aufgebracht. Die Winkelgeschwindigkeit wurde aus der Bedingung in Gl. 1.8 bestimmt, wobei das Träg-

heitsmoment I_z als **integration coupling variable** definiert wurde und somit simultan mit dem FE-Gleichungssystem gelöst wird.

Vorspannung: Der Spannungszustand im Composite ist in Kapitel 5.1 beschrieben. Um die Auswirkungen der Vorspannung auf die Metallwelle zu berücksichtigen, wurden in einem zweiten Lastfall die Composite-Ringe auf **inactive** gesetzt und somit nur die Metallwelle analysiert, wobei das Netz gleich gehalten wurde. An der Grenze von Metall zum Composite wurde beim Modell des Innenläufers eine Flächenlast von $-\sigma_p \ln(R_3/R_1)$ aufgebracht. Beim Modell des Außenläufers beträgt diese $-\sigma_p \ln(R_4/R_2)$.

Da die Analyse linear ist, lässt sich das Superpositionsprinzip anwenden und somit können die oben beschriebenen Lastfälle einfach addiert werden. COMSOL erlaubt dies durch **subdomain expressions**, wodurch eigene Post-Processing-Felder definiert werden können. Dadurch ist der Spannungszustand der Metalle vollständig definiert. Um die Vorspannung in den Composite-Ringen zu berücksichtigen, wurde der Spannungszustand aufgrund von Rotation und Temperaturänderung mit Gl. (5.4) und (5.6) wie folgt kombiniert:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, z) &= \sigma_{rr}^{\Omega+\Delta T}(r, z) - \sigma_p \ln \frac{R_3}{r} \\ \sigma_{\theta\theta}(r, z) &= \sigma_{\theta\theta}^{\Omega+\Delta T}(r, z) + \sigma_p \left(1 - \ln \frac{R_3}{r} \right).\end{aligned}\quad (5.40)$$

Basierend auf dem resultierenden Spannungsfeld erfolgte eine Überprüfung des Rotors auf Versagen. Dazu wurden die Bedingungen in Gl. (2.44) und (2.45) verwendet und um die Bedingung erweitert, dass das Metall der Welle durch die residuale Druckspannung der Wicklungen nicht plastiziert. Der Einfluss der Verschiebungen der Welle aufgrund der Vorspannung wurde vernachlässigt.

5.3.1 Axialsymmetrisches FE-Modell des Innenläufers

Die Geometrie des Innenläufers ist in Abbildung 1.2 dargestellt. Eingangsdaten des Modells sind die Geometrieparameter R_1 , R_2 , R_3 , h_1 , h_3 und d als auch die Vorspannkraft F . Die Radien der Ausrundungen des Steges wurden automatisiert möglichst groß gewählt und sind somit abhängig von den Abmessungen R_1 , r_{st} , d und h_3 (siehe Abbildung 1.2). Anschließend wurde die Geometrie automatisch mit dem Befehl `meshinit(...)` vernetzt, der einer Triangulierung entspricht. Da die geometrischen Parameter die Eingangsdaten des Optimierungsalgorithmus sind, kann es bei Verwendung von viereckigen Elementen häufig zum Programmabbruch kommen, wenn diese Parameter, insbesondere im Bereich der Rundungen, ungünstig gewählt werden. Die Netzfeinheit und die Interpolationsordnung können für die Analyse frei gewählt werden. Als Randbedingungen wurden die Knoten auf

$r = 0$ in radialer Richtung gesperrt. Durch das Sperren aller Knoten auf $z = 0$ in axialer Richtung wurde die Symmetrie des Rotors genutzt.

5.3.2 Axialsymmetrisches FE-Modell des Außenläufers

Die Geometrie des Außenläufers ist in Abbildung 1.3 dargestellt. Eingangsparameter sind die Geometrieparameter R_2 , R_3 , R_4 und h als auch die Vorspannkraft F . Für die Vernetzung wurde der Befehl `meshmap(...)` gewählt. Aufgrund der einfachen Geometrie treten bei der automatischen Vernetzung keine Probleme auf und es können auch viereckige Elemente verwendet werden. Die Netzfeinheit und die Interpolationsordnung sind als Eingangsparameter frei wählbar.

Als Randbedingungen wurden nur die Knoten entlang $z = 0$ in z -Richtung gesperrt, um die Symmetrie des Rotors zu nutzen.

6 Frequenzanalyse

In Kapitel 1.4 wurde die Bedingung angeführt, dass die Eigenfrequenzen um den Faktor $\sqrt{2}$ über der Betriebsdrehzahl liegen sollen. Da sich bei rotierenden Bauteilen aufgrund von gyroskopischen Effekten die Eigenfrequenzen ändern, muss diese Bedingung über den gesamten Drehzahlbereich überprüft werden.

Gyroskopische Effekte führen dazu, dass in der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (6.1)$$

des Rotors geschwindigkeitsabhängige Terme in Form der Gyroskopiematrix \mathbf{G} auftreten. Diese schiefsymmetrische Matrix ist abhängig von der kinetischen Energie des Rotors und führt dazu, dass sich die Eigenfrequenzen beginnend vom Stillstand in einen gleichlaufenden und einen gegenlaufenden Ast verzweigen. Beim Gleichlauf ist die Bewegung der Eigenform in Rotationsrichtung, beim Gegenlauf in entgegengesetzter Richtung (siehe Abbildung 6.1). Da beim Gleichlauf die Rotation und die Kreiselrichtung der Eigenform gleich sind, versteift sich der Rotor und die Eigenfrequenzen steigen an (wobei rein elastische Lagerung vorausgesetzt wird - vgl. [7]). Die Gegenlaufbewegung führt hingegen zu einer Absenkung der Steifigkeit und damit zu einer Verringerung der Eigenfrequenzen.

Eine übersichtliche Darstellung über den Verlauf der Eigenfrequenzen liefert das

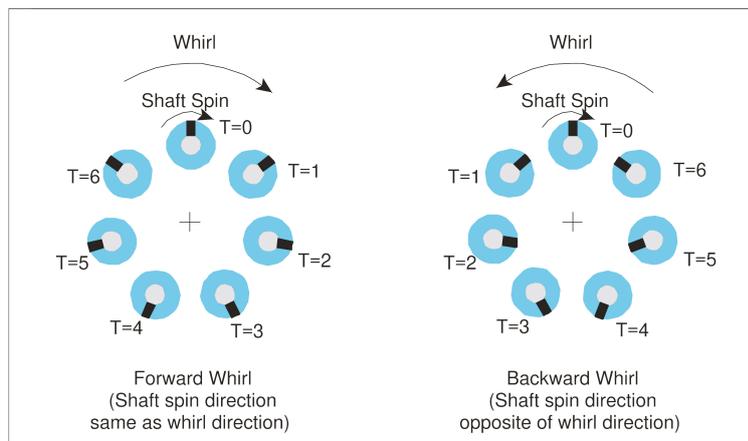


Abbildung 6.1: Umlaufrichtung der Eigenformen bei Gleich- und Gegenlauf (aus [20])

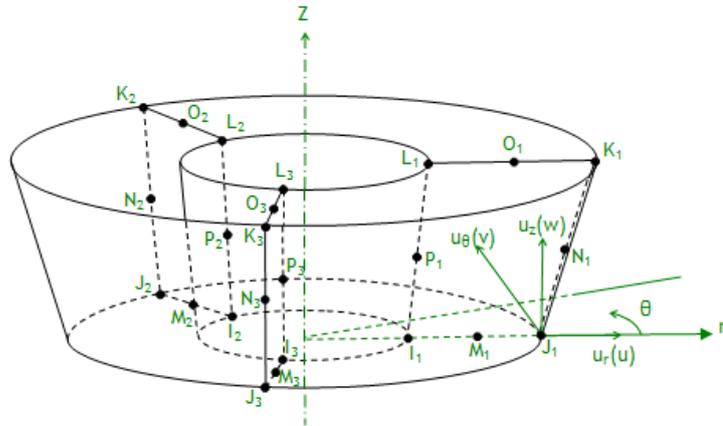


Abbildung 6.2: Ebenen des verallgemeinerten axialsymmetrischen Elements SOLID273 mit KEYOPT(2)=3 (aus [14])

Campbell-Diagramm, auf dessen Abszisse die Rotationsgeschwindigkeit und dessen Ordinate die Eigenfrequenzen aufgetragen sind (siehe z.B. Abbildung 8.5).

6.1 Finite Elemente Modelle zur Bestimmung der Eigenfrequenzen

Die FE-Modelle zur Ermittlung der Eigenfrequenzen wurden mit ANSYS 12 erstellt. Da in ANSYS 12 bereits viele Werkzeuge für rotordynamische Untersuchungen implementiert sind, wird die Modellierung wesentlich erleichtert.

Als Elementtyp wurde SOLID273 verwendet. Dieses ist ein verallgemeinertes axialsymmetrisches Element, welches für jeden Analysetyp verwendet werden kann. Das Element wird in einer Ebene (*masterplane*) durch *masternodes* definiert und ANSYS ordnet in Umfangsrichtung eine vom Benutzer gewählte Anzahl von Kopien dieser Ebene (*fourierplane*) an. Die Knoten in diesen Ebenen werden entsprechend *fouriernodes* genannt (siehe Abbildung 6.2). Die Verschiebungen in Umfangsrichtung werden durch Fourierreihen in den Ansatzfunktionen berücksichtigt (siehe [14]).

Die Geometrie wurde für beide Bauformen, entsprechend den Abbildungen 1.2 und 1.3, durch mit KEYPOINTS definierten Flächen erstellt. Die Ausrundungen des Innenläufers sind nicht mitmodelliert, um eine möglichst einfache Geometrie zu erreichen. Es wurde angenommen, dass die Rundungen nur einen geringen Einfluss auf die Eigenfrequenzen haben. Die Vernetzung erfolgte mit dem Befehl AMESH. Die Netzfeinheit wurde als Eingangsparameter definiert und über den Befehl ESIZE übergeben.

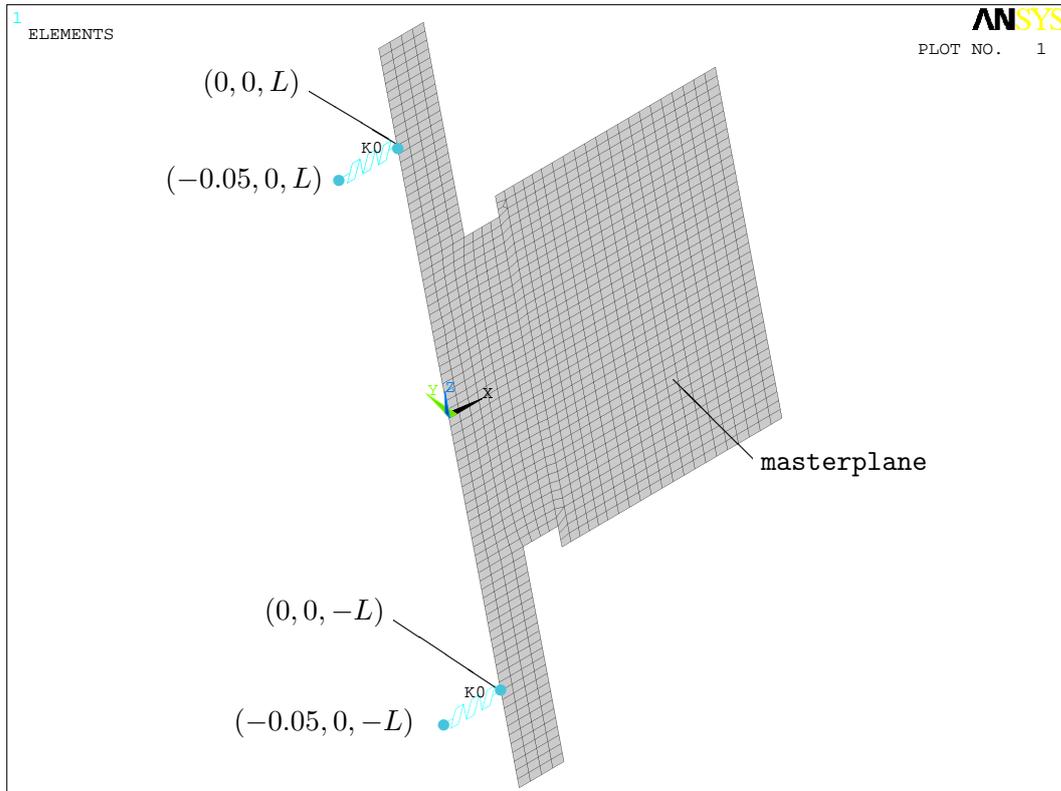


Abbildung 6.3: Modellierung der Lagerung des Innenläufers; Fourierebenen ausgeblendet; L entspricht der mittleren Entfernung des Lagers vom Ursprung; Koordinatenangaben in kartesischen Koordinaten; COMBI214-Elemente in blau

Die Materialeigenschaften wurden mit dem Befehl `TB,ANEL,i,1,21,0` angegeben. Dies erfordert die Eingabe der gesamten Elastizitätsmatrix, die direkt aus den Ergebnissen von Kapitel 2.3.1 übernommen werden kann. Die Materialrichtungen wurden durch die Verwendung eines zylindrischen Koordinatensystems berücksichtigt.

Die Modellierung der Lagerung erfolgte beim Innenläufer mittels des Elementtyps COMBI214. Dieser stellt eine Feder mit zwei Freiheitsgraden dar und wurde an der Mitte der Lagerstelle auf der axialsymmetrischen Achse (siehe Abbildung 1.2) angebracht. Die Lagersteifigkeit ist ebenfalls ein Eingangsparameter und wurde mit dem Befehl `REAL` an ANSYS übergeben. Das Modell des Innenläufers ist in Abbildung 6.3 zu sehen, wobei zwei Fourierebenen Anwendung finden. Die Lagerung des Außenläufers wurde mit dem Elementtyp COMBIN14 realisiert, welcher eine Feder mit einem Freiheitsgrad repräsentiert. Da der Außenläufer keine Knoten auf der axialsymmetrischen Achse hat, ist die Modellierung einer symmetrischen Lagerung mit diesem Element einfacher. Die Elemente wurden auf

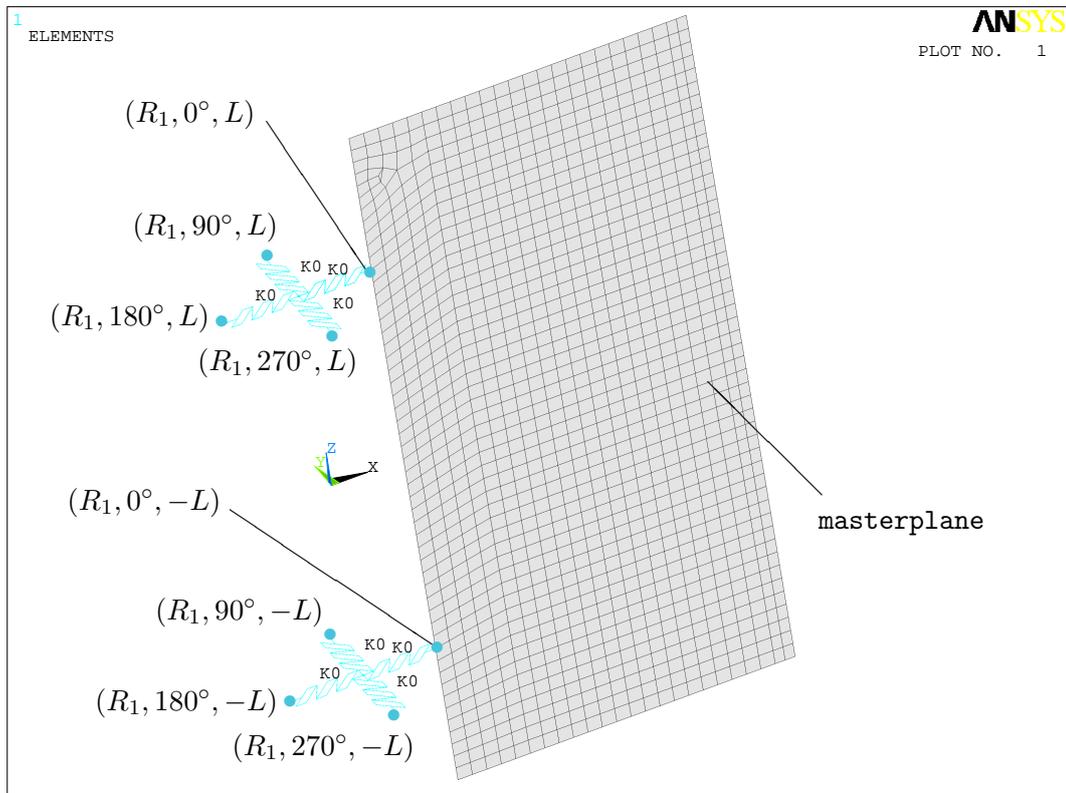


Abbildung 6.4: Modellierung der Lagerung des Außenläufers; Fourierebenen ausgeblendet; L entspricht der mittleren Entfernung des Lagers vom Ursprung; Koordinatenangaben in Zylinderkoordinaten; COMBIN14-Elemente in blau

einem Knoten auf der axialsymmetrischen Achse in der mittleren Höhe der Lagerstelle und auf einem Knoten in der *masterplane* bzw. *fourierplane* am Innenradius R_1 auf gleicher Höhe angebracht. Die Anordnung der Lagerelemente für das Modell des Außenläufers ist in Abbildung 6.4 dargestellt, wobei drei Fourierebenen verwendet wurden.

Um ein Campbell-Diagramm zu erstellen, müssen Coriolisterme berücksichtigt werden, die die Kreiseffekte bewirken und über eine schiefssymmetrische Gyroskopiatrix in den Bewegungsgleichungen einfließen. Dies wird in ANSYS mit folgenden Befehlszeilen erreicht, wobei j für die zu ermittelnde Anzahl an Eigenfrequenzen steht:

```
\SOLU
ANTYPE,MODAL
MODOPT,QRDAMP,j,,ON
MXPAND,j,,YES
CORIOLIS,1,,1,0
OMEGA,0,0,0,0      ! Beginn bei omega=0rad/s
SOLVE
!...              ! beliebig viele Steps
OMEGA,0,0,4000,0  ! Enddrehzahl 4000rad/s
SOLVE
\POST1
PLCAMP
PRCAMP
FINI
```

7 Vorgehensweise bei der Optimierung

Wie in Kapitel 1.4 angeführt soll im Rahmen dieser Arbeit das Kostenoptimum der beiden Bauformen gefunden werden. Da die in Tabelle A.3 angeführten Materialien viele verschiedene Kombinationen zulassen, wurde zuerst unter der Annahme eines modifizierten generalisierten ebenen Verzerrungszustandes (MGPS) gesucht, um einen ersten Eindruck zu erhalten, wo das Optimum liegt und welche Materialien sich besonders eignen. Der Vorteil liegt darin, dass die Rechenzeit im Vergleich zu einer Optimierung unter ausschließlicher Verwendung eines axialsymmetrischen Finite Elemente Modells wesentlich verkürzt werden kann. Außerdem können durch diesen ersten Optimierungsschritt wertvolle Startwerte für die Optimierung mit Finiten Elementen gewonnen werden.

7.1 Optimierung unter der Annahme eines modifizierten generalisierten ebenen Verzerrungszustandes

Bei diesem ersten Optimierungsschritt ist das Ziel einen Eindruck über die Lage des Optimums zu erhalten um eine engere Auswahl an Materialkombinationen treffen zu können.

Auch hier wurde in mehreren Schritten vorgegangen. Da es sich bei dem in Kapitel 3 beschriebenen Optimierungsalgorithmus um ein Gradientenverfahren handelt, ist nicht sichergestellt, dass es sich beim gefundenen Optimum um das globale Minimum handelt. In einer `for`-Schleife wurden alle möglichen Materialkombinationen Metall/Composite/Composite, die sich aus Tabelle A.3 bilden lassen, durchlaufen und für jede Materialkombination die folgenden Schritte durchgeführt.

In einem ersten Schritt wurden in einem Suchraster mit einer wählbaren Feinheit alle Kombinationen der Radien durchlaufen. Beim Innenläufer waren dies R_1 , R_2 und R_3 (siehe Abbildung 1.2), wobei $R_1 > R_1^{min}$ gelten soll, um den später eingefügten Einstich zu berücksichtigen. Beim Außenläufer sind die wählbaren Radien R_2 , R_3 und R_4 , da der Innenradius R_1 durch die Lagerung festgelegt ist. Um die Geometrie festzulegen, wurde zuerst über die Bedingung $I_x = I_z$ die Höhe h_1 bzw. h berechnet. Anschließend wurde

über den festgelegten Energieinhalt (siehe Gl. (1.8)) die Winkelgeschwindigkeit bestimmt. Dann wurden die möglichen Kombinationen mit der in Kapitel 5.2 vorgestellten Methode auf Versagen überprüft, wobei der Spannungszustand durch Rotation und Temperaturänderung mit dem einer festgelegten Vorspannung (siehe Kapitel 5.1) überlagert wurde. Danach erfolgte die Berechnung der Kosten

$$K = \sum_{i=1}^3 c_i m_i + c_L \sum_{i=1}^3 m_i, \quad (7.1)$$

wobei c_i den Preis pro Masse des Materials von Ring i , m_i die Masse und c_L die Kosten pro kg des zu lagernden Gewichts bezeichnen.

Das für das jeweilige Material gefundene (vorläufige) Minimum wurde im nächsten Schritt als Startwert für den in Kapitel 3 beschriebenen Algorithmus `fmincon` verwendet. Die Zielfunktion der Optimierung stellt Gl. (7.1) dar. Die Optimierungsvariablen waren beim Innenläufer die Dicken der einzelnen Ringe und die Höhe h_1 , beim Außenläufer nur die Dicken. Um physikalisch korrekte Ergebnisse zu erhalten, muss der Außenradius eines Rings größer sein als dessen Innenradius. Dies würde sich im Prinzip durch eine Ungleichungsrestriktion erreichen lassen, allerdings muss `fmincon` diese nicht bei jeder Iteration strikt einhalten (vgl. [27]). Im Gegensatz dazu, werden obere- und untere Schranken (Bounds) in jeder Iteration eingehalten. Aufgrund dessen führt die Verwendung der Dicken als Optimierungsvariablen zu physikalisch korrekten Resultaten während das bei den Radien nicht garantiert werden kann, weil die Angabe von Bounds für die Dicken einfacher ist. Die Bedingung, dass der Rotor mit einer bestimmten Sicherheit nicht versagt, wurde wie oben beschrieben überprüft und als nichtlineare Ungleichungsrestriktion formuliert. Beim Innenläufer war die Höhe h_1 ebenfalls Optimierungsvariable, weil die Gleichung $I_x = I_z$ aufgrund der Wellenstummel eine kubische Gleichung mit bis zu drei reellen Lösungen ergibt, weswegen auch die Bedingung der Gleichheit der Trägheitsmomente als nichtlineare Gleichungsrestriktion angegeben wurde. Beim Außenläufer hat die Gleichung $I_x = I_z$ drei gleiche reelle Wurzeln und die Höhe konnte mit

$$h = \sqrt[3]{\frac{\sum_{j=1}^3 \rho_j (R_{j+1} - R_j)^4}{\sum_{j=1}^3 \rho_j (R_{j+1} - R_j)^2}} \quad (7.2)$$

festgelegt werden.

Im dritten und letzten Schritt wurde gleich verfahren, allerdings mit beliebigen Startwerten für die Geometrie, um das Ergebnis zu kontrollieren.

7.2 Optimierung mit einem axialsymmetrischen Finite Elemente Modell

Für den letzten Optimierungsschritt wurden die in Kapitel 5.3 beschriebenen Finite Elemente Modelle verwendet. Für die Optimierung diente wieder der in Kapitel 3 vorgestellte MATLAB-Algorithmus `fmincon`. Die Zielfunktion sind auch hier die in Gl. (7.1) beschriebenen Kosten. Die Optimierungsvariablen waren beim Innenläufer die geometrischen Größen $R_1 - d$, d , $R_2 - R_1$, $R_3 - R_2$, $h_1 - h_3$ und h_3 sowie die Fadenkraft F . Beim Außenläufer wurden die Dicken der Ringe, die Höhe h des Rotors sowie die Fadenkraft als Optimierungsvariablen verwendet. Die Wahl der Optimierungsvariablen lässt sich dadurch begründen, dass sich dadurch sehr leicht Bounds (z.B. $R_1 - d > 0$) angegeben lassen, um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Die Bedingung, dass mit einer Sicherheit S kein Versagen eintritt, wurde mittels Gl. (2.45) und (2.35) überprüft, welche, wie in Kapitel 5.3 beschrieben, als `subdomain expressions` definiert und als nichtlineare Ungleichungsrestriktionen übergeben wurden. Um eine bessere Konvergenz des Algorithmus zu erreichen, wurden die Post-Processing-Daten mit der Option `'Cont','on','Refine',1` gemittelt. Dieser Befehl bewirkt, dass die Post-Processing-Felder auch über Materialgrenzen gemittelt werden, was physikalisch zwar nicht gerechtfertigt ist, jedoch eine bessere Konvergenz ermöglicht. Die Trägheitsmomente wurden mittels `integration coupling variables` ausgewertet und die Bedingung $I_x = I_z$ als nichtlineare Gleichungsrestriktion angegeben.

8 Ergebnisse und Diskussion

8.1 Das Optimum des Innenläufers

Die Parameter für die Optimierung des Innenläufers unter Annahme eines MPGS sind in Tabelle B.1 zusammengefasst. Die Abmessungen der Wellenstummel ($r_{st} = 0.04\text{ m}$ und $l_{st} = 0.22\text{ m}$) sind durch die Lagerung bestimmt. Der Energieinhalt wurde mit 5 kWh festgelegt, was in etwa dem Tagesenergiebedarf eines Einfamilienhauses entspricht. Die Aushärtetemperaturdifferenz wurde mit $\Delta T = -50\text{ K}$ angegeben und ist abhängig vom gewählten Epoxidharz. Die Anzahl an Elementen mit MGPS pro Ring wurde mit $N = 60$ gewählt, was einer sehr feinen Diskretisierung entspricht. Für die Fadenvorspannkraft wurde angenommen, dass Kräfte zwischen 0 N und 50 N möglich sind und der Maximalwert verwendet. Für die Querschnittsfläche des Faserrovings wurde ein Wert von $ah = 1.8472\text{ mm}^2$ verwendet, was einem Kohlefaserroving mit 12000 Filamenten entspricht. Die Lagerungskosten wurden zu 1.27 pro kg angenommen und eine Sicherheit $S = 1.3$ gegen Versagen gefordert. Die Parameter des Optimierungsalgorithmus `fmincon` wurden iterativ angepasst, bis Konvergenz erreicht wurde.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass auf Wunsch des Faserherstellers die Preisinformationen in Tabelle A.1 und die im Weiteren angeführten Kosten mit einer Konstante skaliert wurden.

Die Ergebnisse für alle Materialkombinationen finden sich in Tabelle B.3. Erkennbar ist die Tendenz zu Aluminium, da dieses billiger ist als legierte Stähle, jedoch eine ähnliche spezifische Steifigkeit und eine höhere spezifische Festigkeit aufweist. Der optimale Rotor unter Annahme eines MGPS enthält zwar auch Glasfaser/epoxy, jedoch nur zu einem geringen Anteil. Trotz des wesentlich geringeren Preises im Vergleich zu Kohlenstofffasern ist die Festigkeit von Glasfasern zu gering, um einen Vorteil zu schaffen. Tabelle 8.1 zeigt die Ergebnisse der Optimierung für die Materialkombinationen, die für eine weitere Optimierung mit einem FE-Modell verwendet wurden.

Schon hier lässt sich erkennen, dass die Verwendung von Verbundwerkstoffen gerechtfertigt ist, da der Anteil an Metall, repräsentiert durch den Wert R_1 , gering gehalten wird.

Für die Optimierung mit einem axialsymmetrischen FE-Modell ist die Verwendung von Bounds für den Algorithmus von großer Bedeutung. Wird z.B. die Abmessung d sehr

Tabelle 8.1: Ergebnisse der Optimierung des Innenläufers unter Annahme eines MGPS ausgewählter Materialkombinationen (Auszug aus Tabelle B.3); Längenangaben R_1, R_2, R_3, h_1 in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Kosten skaliert

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	h_1	Ω	m	Kosten
1/3/4	0.06	0.067	0.267	0.198	3129.5	148.32	938.39
1/4/4	0.081	0.082	0.268	0.197	3105.4	152.57	938.47
1/4/5	0.081	0.227	0.268	0.197	3109.1	152.47	937.46
1/5/5	0.079	0.269	0.276	0.206	2864.0	168.12	1046.04
2/3/4	0.06	0.062	0.290	0.168	2873.8	177.66	1150.04
2/4/4	0.06	0.082	0.290	0.168	2874.3	177.51	1150.46

klein, so werden zur Diskretisierung sehr viele Elemente verwendet und die Anzahl der Knoten des Modells steigt stark an. Außerdem ist eine untere Schranke für bestimmte Abmessungen aus Sicht der Fertigungstechnik sinnvoll. Für die Dicke des Stegs wurde gefordert, dass sie mindestens $d^{min} = 0.008 m$ beträgt und als Startwert wurde $d^0 = 0.01 m$ verwendet. Der Startwert für die Höhe des Stegs wurde mit $h_3^0 = 0.01 m$ gewählt und ein Minimalwert von $h_3^{min} = 0.005 m$ gefordert. Die untere Grenze des Steginnenradius wurde auf $(R_1 - d)^{min} = 0.05 m$ gesetzt, um zu verhindern, dass die Rundung sehr klein wird. Die Fadenvorspannkraft F war ebenfalls eine Optimierungsvariable und konnte zwischen $F^{min} = 0 N$ und $F^{max} = 50 N$ variieren, wobei der Startwert bei $F^0 = 30 N$ lag. Für das FE-Modell wurden quadratisch interpolierte Elemente verwendet. Die Netzfeinheit des Vernetzungsbefehls `meshinit(...)` wurde zu 2 gewählt. Die `fmincon`-Parameter wurden iterativ angepasst, bis eine ausreichende Konvergenz erreicht wurde. In Tabelle B.2 sind die Parameter zusammengefasst.

In Tabelle 8.2 sind die Resultate der Optimierung des Innenläufers mit einem axialsymmetrischen FE-Modell angeführt.

Es bestätigt sich, dass für diese Bauform die Verwendung einer Aluminiumwelle günstiger ist. Die Dicke des Stegs d konvergiert gegen die gesetzte untere Grenze. Bei Rotoren ohne Glasfaseranteil ist ein höherer Wert für den Radius der Metallwelle R_1 möglich, weil Kohlenstofffasern aufgrund des höheren E-Moduls die Deformation des Metalls verhindern und wie ein Korsett wirken. Auffällig ist bei allen Materialkombinationen, dass die Restriktion einer maximalen Vorspannkraft F^{max} aktiv ist. Dies deutet darauf hin, dass das Ergebnis durch die Verwendung von Rovings mit geringerer Anzahl an Filamenten verbessert werden könnte, weil dadurch die Fadenspannung beim Wickelprozess bei gleicher Fadenkraft steigt.

Der kostenoptimale Innenläufer besteht aus einer Aluminiumwelle mit Außenra-

Tabelle 8.2: Ergebnisse der Optimierung des Innenläufers mit axialsymmetrischem FE-Modell; Längenangaben R_1 , R_2 , R_3 , h_1 , h_3 , d in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Vorspannkraft F in N , Kosten skaliert

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	h_1	h_3	d
1/3/4	0.058	0.063	0.267	0.199	0.008	0.008
1/4/4	0.079	0.112	0.268	0.199	0.024	0.008
1/4/5	0.070	0.226	0.267	0.198	0.014	0.008
1/5/5	0.088	0.093	0.276	0.208	0.027	0.008
2/3/4	0.058	0.065	0.290	0.168	0.018	0.008
2/4/4	0.087	0.093	0.288	0.170	0.165	0.008
	F	Ω	m	Kosten		
1/3/4	50.0	2794.1	148.23	922.32		
1/4/4	50.0	2780.9	151.48	917.62		
1/4/5	50.0	2792.3	149.69	919.30		
1/5/5	50.0	2550.1	169.92	1023.84		
2/3/4	50.0	2574.8	175.87	1040.14		
2/4/4	50.0	2596.4	167.31	982.41		

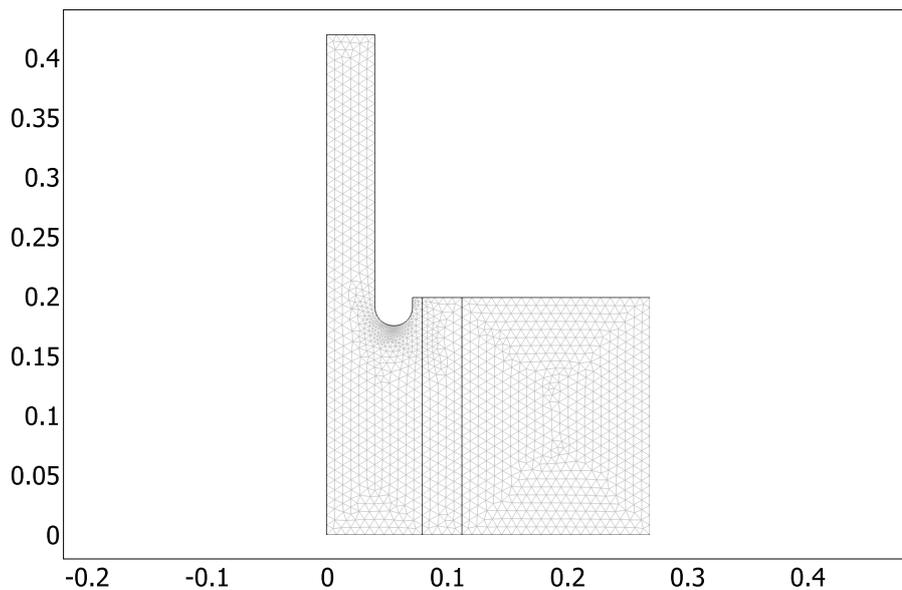


Abbildung 8.1: Geometrie und Diskretisierung des optimalen Innenläufers

dius $R_1 = 0.079m$ und einem Composite-Ring aus HTS40/epoxy mit Außenradius $R_3 = 0.268m$. Die Geometrie und die Diskretisierung des Rotors sind in Abbildung 8.1 zu sehen. Das Modell besteht aus 2814 Dreieckselementen mit 17574 Freiheitsgraden. Erkennbar ist die sehr feine Diskretisierung im Bereich der Rundung.

Abbildung 8.2 zeigt den deformierten Rotor bei der maximalen Betriebswinkelgeschwin-

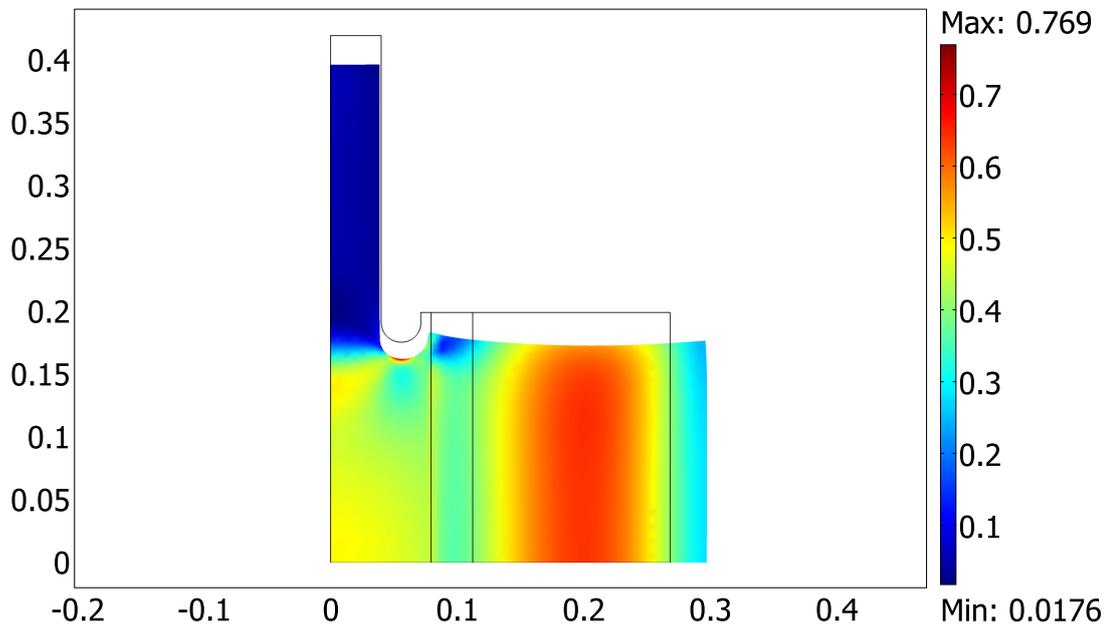


Abbildung 8.2: Deformation des optimalen Innenläufers (Verschiebung mit Faktor 30 skaliert); Contourplot der Spannungsverhältnisse von Gl. (5.34) bzw. Gl. (2.44)

digkeit $\Omega = 2780.9 \text{ rad/s}$ und das Spannungsverhältnis R des von Mises Kriteriums Gl. (5.34) bzw. des Tsai-Wu-Kriteriums Gl. (2.44). Wie in Kapitel 1.4.1 bereits erläutert wurde, soll die Ausrundung am Übergang zum Composite das Auftreten eines Einspanneffekts aufgrund unterschiedlicher Steifigkeitswerte verhindern. Der Steg zeigt eine vergleichsweise starke Durchbiegung auf und verringert somit die Spannungen am Übergang. Dadurch entsteht eine erhöhte Spannung im unterem Bereich der Rundung. Die Belastung als auch die radiale Verschiebung im Bereich der Wellenstummel sind nur sehr gering, wodurch das Anbringen von notwendigen Teilen für die Lagerung in dieser Region problemlos ist.

In Abbildung 8.3 ist der radiale Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_{θ}^{Zug} , R_z^{Zug} und R_r^{Zug} an den Positionen $z = 0$, $z = h_1/2$ und $z = h_1$ aufgetragen. Man erkennt, dass die Maxima immer in der Mittenebene $z = 0$ auftreten, was die gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Optimierung unter Annahme eines MGPS erklärt. Das Spannungsverhältnis R_{θ}^{Zug} ist über den gesamten Bereich weit unter der geforderten Sicherheit. Das Potential des Composites in Umfangsrichtung wird also bei weitem nicht ausgeschöpft. Die bestimmende Restriktion der Optimierung ist, dass die Radialspannung σ_{rr} kleiner

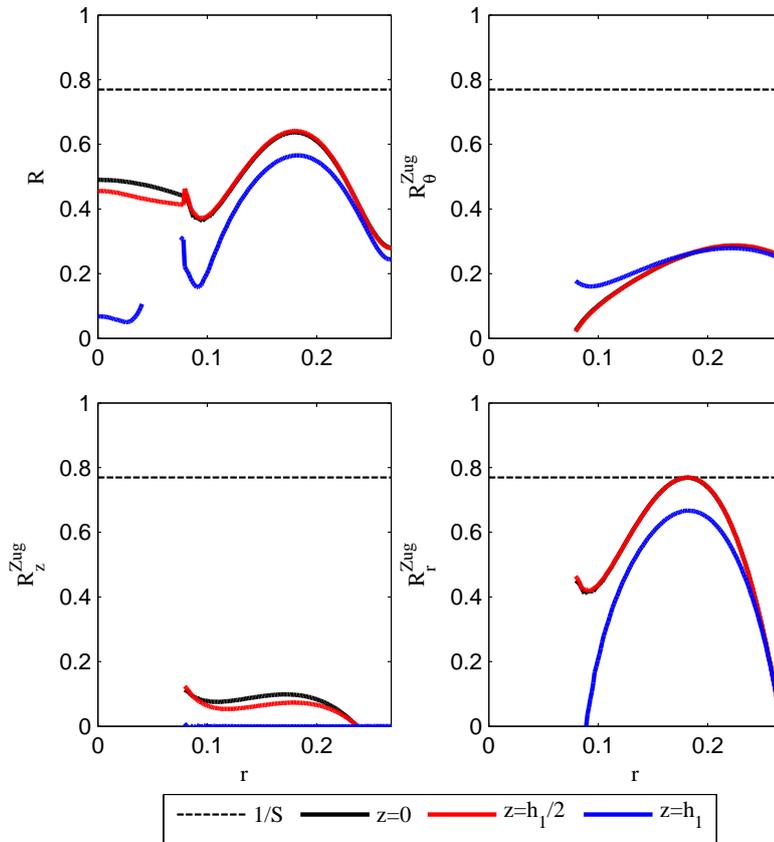


Abbildung 8.3: Radialer Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_θ^{Zug} , R_z^{Zug} und R_r^{Zug} an den Positionen $z = 0$, $z = h_1/2$ und $z = h_1$ des optimalen Innenläufers

sein muss als die zulässige Zugspannung quer zur Faserrichtung σ_{qTu} , repräsentiert durch R_r^{Zug} . Dieser Umstand könnte durch das Verwenden einer Matrix mit geringerem E-Modul verbessert werden. Dadurch würde die Steifigkeit des Composites vor allem in axialer und radialer Richtung abnehmen, wodurch sich die Spannungen in Umfangsrichtung verlagern.

Abbildung 8.4 zeigt die Deformation und das Spannungsverhältnis des von Mises Kriteriums der Aluminiumwelle aufgrund der aufgetragenen Vorspannung. Die Belastung ist, wie zu erwarten war, im Bereich des Stegs am größten. Die größte Verschiebung tritt am Außenradius des Stegs auf und beträgt 0.243 mm . Betrachtet man die Abbildungen 8.4 und 8.2, so lässt sich erkennen, wie die Abmessungen der Rundung und des Stegs zustande kommen. Die Höhe h_3 wird vom Algorithmus so gewählt, dass sowohl durch die Vorspannung beim Wickelprozess als auch durch die Fliehkräfte bei Rotation mit einer Sicherheit S im unterem Bereich der Rundung kein Plastizieren eintritt. Die Dicke d des Stegs konvergiert gegen den minimal möglichen Wert. Dieser Umstand lässt sich anhand einer rotierenden

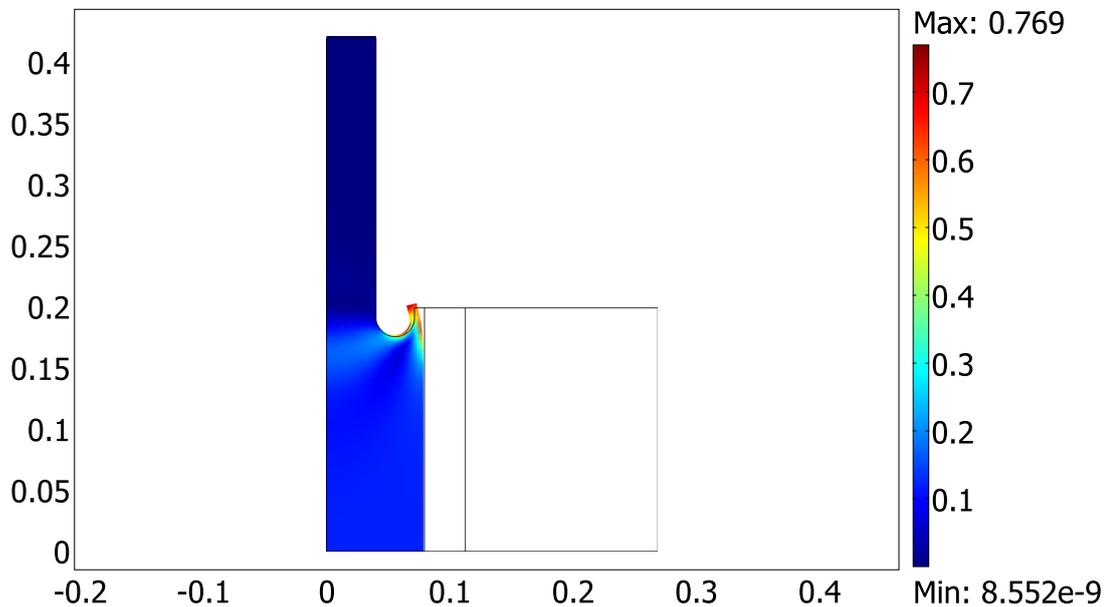


Abbildung 8.4: Deformation der Aluminiumwelle des optimalen Innenläufers aufgrund von Spannung (Verschiebung mit Faktor 30 skaliert); Contourplot des Spannungsverhältnisses von Gl. (5.34)

Hohlscheibe verdeutlichen. Hält man die Winkelgeschwindigkeit und den mittleren Radius dieser Hohlscheibe konstant, so zeigt sich, dass die Form der Spannungsläufe stark von der Dicke der Scheibe abhängig ist. Bei steigender Dicke sinkt die Umfangsspannung und die Radialspannung steigt (vgl. [1]). Im vorliegenden Fall bedeutet dies, dass ein größerer Wert für d die Radialspannung in diesem Bereich erhöht und damit auch die Kräfte, die am Steg wirken. Aus diesem Grund sollte die untere Grenze der Stegdicke d^{min} so klein wie möglich gewählt werden.

8.1.1 Campbell-Diagramm des optimalen Innenläufers

Für die Frequenzanalyse des optimalen Innenläufers wurde das in Kapitel 6 beschriebene Modell verwendet. Die Geometrie und die Diskretisierung des Rotors sind in Abbildung 6.3 zu sehen. Das Modell bestand aus 1330 SOLID273-Elementen mit zwei Fourierebenen und zwei Elementen des Typs COMBI214. Die punktförmige Lagerung wurde in der Mitte der Lagerstelle auf der axialsymmetrischen Achse (siehe Abbildung 1.2) bei $z = L = 0.308 \text{ m}$ bzw. $z = -L = -0.308 \text{ m}$ (vgl. Abbildung 6.3) angebracht. Die Netzfeinheit wurde über

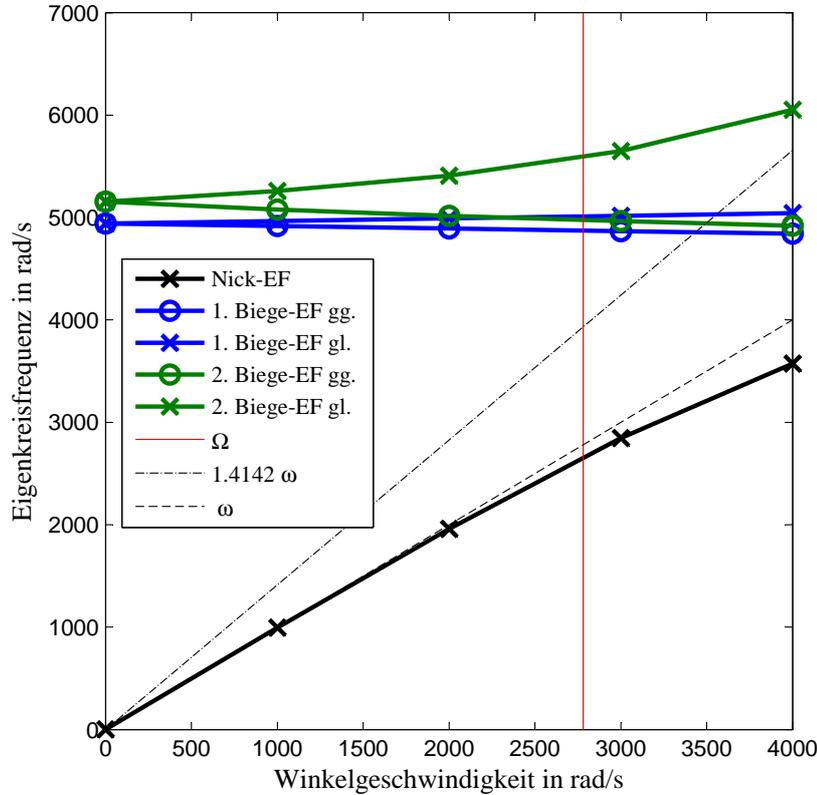


Abbildung 8.5: Campbell-Diagramm des optimalen Innenläufers

die Elementkantenlänge gesteuert, die zu 10^{-2} gewählt wurde. Die Lagersteifigkeit wurde auf $k = 1 \text{ N/m}$ gesetzt, was etwa einer freien Lagerung entspricht. Die Eigenkreisfrequenzen wurden bei fünf verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ausgewertet. Das Campbell-Diagramm des optimalen Innenläufers zeigt Abbildung 8.5. Die Werte der Eigenkreisfrequenzen sind in Tabelle C.1 zusammengefasst. Aus der Abbildung lässt sich ein wichtiges Ergebnis ablesen. Durch die Bedingung gleicher Trägheitsmomente, $I_x = I_z$, tritt eine mit dem Fahrstrahl $\omega^f = \omega$ mitlaufende Nickeigenfrequenz auf (vgl. [18]). Diese Nickeigenfrequenz ist bei Nulldrehzahl

$$\omega_N^f = \sqrt{\frac{3(2k)}{m}} \quad (8.1)$$

lenkt dann in den Fahrstrahl ein und fällt bei höherer Winkelgeschwindigkeit wieder ab. In Abbildung 8.5 ist sie bei Nulldrehzahl aufgrund der geringen Federsteifigkeit annähernd Null. Eine andere Wahl für das Verhältnis der Trägheitsmomente würde Abhilfe schaffen,

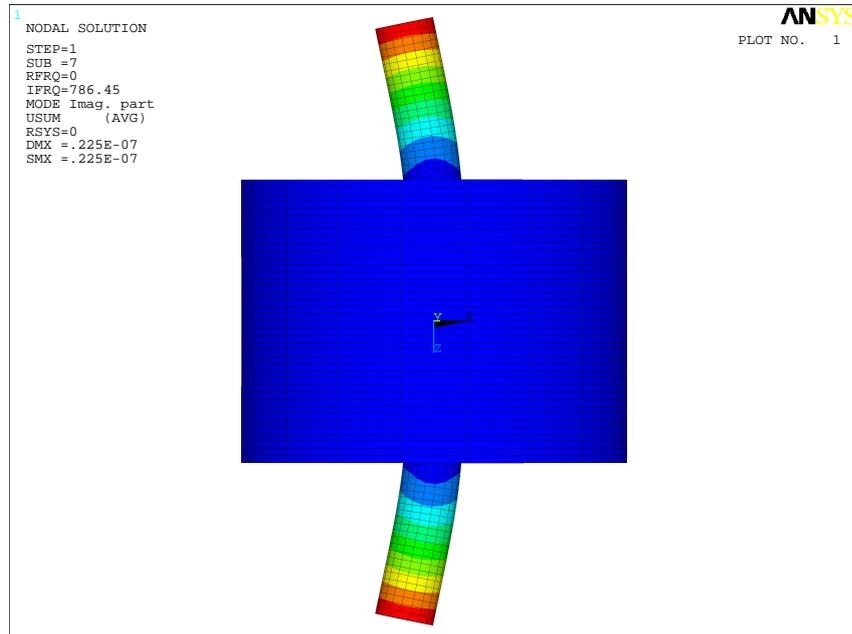


Abbildung 8.6: Erster Biegeeigenmode des optimalen Innenläufers bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$; Contourplot der Gesamtverschiebung

da zwischen der Nickeigenfrequenz und der Winkelgeschwindigkeit der Zusammenhang

$$\omega_N^f = \frac{I_z}{I_x} \omega \quad \text{für } k = 0 \quad (8.2)$$

(aus [18]) besteht. Sie würde also für einen scheibenförmigen Körper ($I_z > I_x$) immer über dem Fahrstrahl und bei Vorliegen eines walzenförmigen Körpers ($I_z < I_x$) immer unter dem Fahrstrahl liegen.

Die erste Biegeeigenfrequenz liegt im gesamten interessierenden Bereich über der Gerade mit Steigung $\sqrt{2}$ und ist nur wenig von der Drehzahl abhängig. Der erste Biegemode ist in Abbildung 8.6 dargestellt. Aufgrund der rein translatorischen Bewegung des Composite-Pakets ist der Einfluss der Kreiselwirkung nur gering und damit auch die Änderung der Eigenfrequenz. Bei diesem Eigenmode schwingen hauptsächlich die Wellenstummel. Denkt man sich diese als einseitig fest eingespannte Balken, so lässt sich eine (sehr) grobe Abschätzung der ersten Biegeeigenfrequenz durch Annahme der Bernoullihypothese mit

$$\omega_{B_1}^f = \frac{1.875^2}{l_{st}^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \propto \frac{r_{st}}{l_{st}}, \quad (8.3)$$

worin J das Flächenträgheitsmoment der Wellenstummel um die x - oder y -Achse und

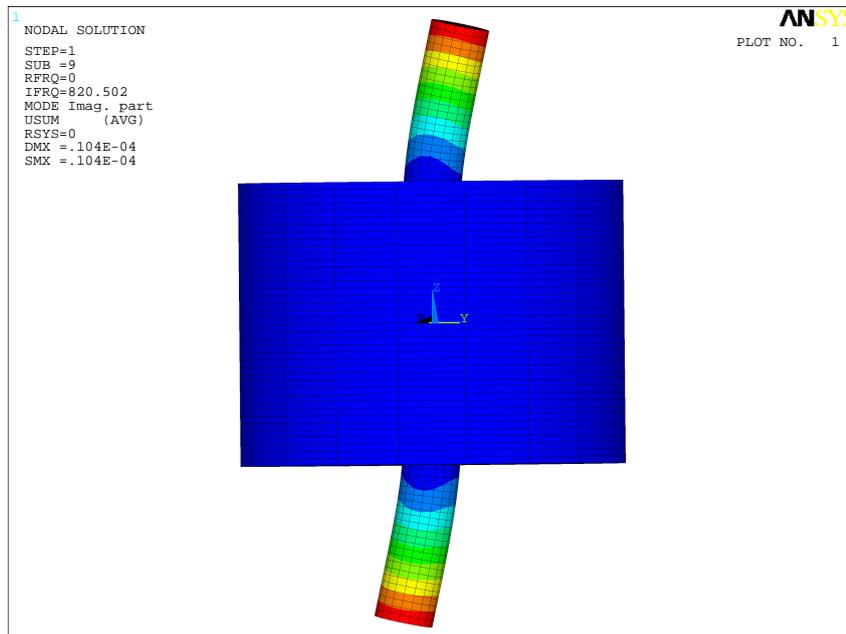


Abbildung 8.7: Zweiter Biegeeigenmode des optimalen Innenläufers bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$; Contourplot der Gesamtverschiebung

A die Querschnittsfläche der Wellenstummel bezeichnen (aus [15]), angeben. Aus Gl. (8.3) lässt sich jedoch qualitativ erkennen, dass hauptsächlich die Abmessungen der Wellenstummel die Lage der Eigenfrequenz bestimmen und weniger die Materialwahl, da Aluminium und Stahl eine ähnliche spezifische Steifigkeit (E/ρ) aufweisen.

Beim zweiten Biegeeigenmode tritt im Gegensatz zum ersten eine rein rotatorische Bewegung des Composite-Pakets auf. Diese führt zu größeren gyroskopischen Effekten, wodurch die zweite Biegeeigenfrequenz eine größere Drehzahlabhängigkeit aufweist. Der zweite Biegeeigenmode ist in Abbildung 8.7 dargestellt, wobei die rotatorische Bewegung des Composite-Pakets sehr gering und daher schwer zu erkennen ist.

8.1.2 Einfluss der Materialalterung auf die Festigkeit des optimalen Innenläufers

Die Einsatzdauer der Flywheels soll 20 Jahre betragen. Daher stellt sich die Frage, ob in diesem Zeitraum eine bestimmte Sicherheit gegen Versagen gewährleistet ist. Dazu wurde die in [23] vorgestellte Methode verwendet. Darin wird die Annahme getroffen, dass nur die Steifigkeitsänderung des Epoxidharzes einen Einfluss auf das Langzeitverhalten hat. Wenn der Rotor bei konstanter Winkelgeschwindigkeit und Temperatur betrieben wird und die

Randbedingungen von der Zeit unabhängig sind, so sind durch Anwendung des Korrespondenzprinzips die beschreibenden Gleichungen des viskoelastischen Problems identisch zum zugehörigen elastischen Problem. Durch Laplace-Transformation erhalten die viskoelastischen Gleichungen eine große Ähnlichkeit mit den elastischen Gleichungen, wodurch eine elastische Analyse zur Lösung des viskoelastischen Problems im Zeitbereich verwendet werden kann (vgl. [23]).

Für die Untersuchung des Alterungseinflusses auf die Festigkeit des optimalen Innenläufers wurde angenommen, dass sich nur die Steifigkeitswerte des in Tabelle A.1 angeführten Epoxidharzes ändern, die Steifigkeitswerte der Faserwerkstoffe als auch die Festigkeitswerte des entsprechenden Composites in Tabelle A.2 jedoch nicht. Für den zeitlichen Verlauf des E-Moduls des Epoxidharzes wurde die in [23] angeführten Ergebnisse einer Dynamisch-Mechanischen Analyse verwendet, was zu folgendem Ansatz für den E-Modul

$$E(t) = E|_{t=0} (t + 1)^{-0.03} \quad (8.4)$$

führte, wobei die Zeit t in Stunden einzusetzen ist. Abbildung 8.8 zeigt den radialen Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_{θ}^{Zug} und R_r^{Zug} sowie der radialen Verschiebung in der Mittenebene des Rotors nach den Zeitspannen 0 Jahre, 20 Jahre und ∞ (1,000,000 Jahre). Wie bereits in Kapitel 8.1 erläutert, führt ein geringerer E-Modul des Epoxidharzes zu einer Umlagerung der Radialspannung zur Umfangsspannung. Somit hat die Abnahme der Steifigkeit des Epoxidharzes aufgrund der Alterung unter der getroffenen Annahme einen positiven Einfluss auf die Sicherheit gegen Versagen. Während das Verhältnis der radialen Zugspannung zur zulässigen Spannung σ_{qTu} vergleichsweise stark abnimmt, ist der Einfluss auf das Verhältnis von Umfangszugspannung zur zulässigen Spannung σ_{lTu} nur gering, da die Festigkeit des Composites in Faserrichtung wesentlich höher ist.

8.2 Das Optimum des Außenläufers

Die Parameter der Optimierung des Außenläufers unter Annahme eines MGPS sind in Tabelle D.1 zusammengefasst und bis auf bauformspezifische Parameter gleich wie beim Innenläufer. Der Innenradius des Rotors wurde mit $R_1 = 0.05 \text{ m}$ gewählt und für den Außenradius der Metallwelle wurde gefordert, dass er mindestens $R_2^{min} = 0.1 \text{ m}$ beträgt. Die Parameter des Optimierungsalgorithmus `fmincon` wurden auch hier iterativ angepasst, bis Konvergenz erreicht war. Die Ergebnisse sind in Tabelle D.3 aufgelistet. Einen Ausschnitt davon zeigt Tabelle 8.3. Die Resultate zeigen auch hier eine eindeutige Tendenz zum Aluminium. Auffällig ist, dass der Radius R_2 meist gegen seine untere Grenze konvergiert.

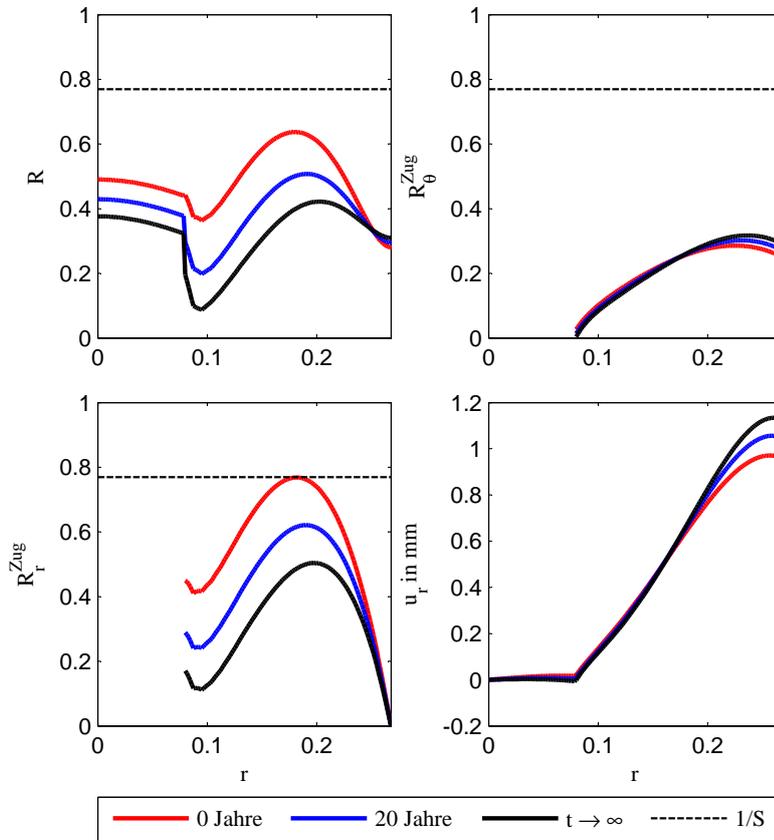


Abbildung 8.8: Radialer Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_θ^{Zug} und R_r^{Zug} sowie der radialen Verschiebung in der Mittenebene des Rotors nach den Zeitspannen 0 Jahre, 20 Jahre und ∞ (=1,000,000 Jahre) des optimalen Innenläufers

Tabelle 8.3: Ergebnisse der Optimierung des Außenläufers unter Annahme eines MGPS ausgewählter Materialkombinationen (Auszug aus Tabelle D.3); Längenangaben R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , h in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Kosten skaliert

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	R_4	h	Ω	m	Kosten
1/3/4	0.050	0.100	0.101	0.287	0.245	2432.1	202.62	1265.46
1/4/4	0.050	0.100	0.105	0.287	0.245	2444.2	201.33	1258.49
1/4/3	0.050	0.100	0.273	0.284	0.246	2419.9	203.91	1225.46
2/3/4	0.050	0.100	0.101	0.315	0.245	1995.2	300.83	1935.95
2/4/4	0.050	0.100	0.104	0.296	0.229	2320.6	255.52	1637.05
2/4/3	0.050	0.100	0.281	0.294	0.229	2303.9	257.71	1599.85

Die in Tabelle 8.3 angeführten Ergebnisse wurden für eine weitere Optimierung mit einem axialsymmetrischem FE-Modell als Startwerte genutzt. Dafür wurden die in Tabelle D.2

Tabelle 8.4: Ergebnisse der Optimierung des Außenläufers mit axialsymmetrischem FE-Modell; Längenangaben R_1, R_2, R_3, R_4, h in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s , Masse m in kg , Vorspannkraft F in N , Kosten skaliert

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	R_4	h
1/3/4	0.050	0.100	0.105	0.352	0.301
1/4/4	0.050	0.100	0.105	0.284	0.243
1/4/3	0.050	0.100	0.269	0.283	0.245
2/3/4	0.050	0.100	0.756	0.761	0.647
2/4/4	0.050	0.100	0.334	0.339	0.267
2/4/3	0.050	0.100	0.325	0.339	0.271
	F	Ω	m	Kosten	
1/3/4	50.0	1309.6	370.14	2368.81	
1/4/4	50.0	2231.1	196.57	1226.80	
1/4/3	50.0	2185.1	201.75	1201.43	
2/3/4	50.0	167.0	4925.32	21440.50	
2/4/4	50.0	1483.0	367.96	2383.65	
2/4/3	50.0	1432.6	382.46	2398.17	

aufgelisteten Parameter verwendet, welche im Prinzip denen in Tabelle D.1 entsprechen, jedoch kann jetzt auch die Fadenkraft F von $F^{min} = 0 N$ bis $F^{max} = 50 N$ variieren.

Tabelle 8.4 fasst die Resultate der Optimierung zusammen. Es betätigt sich, dass Aluminium die geeignetere Wahl für den inneren Ring ist. Dies liegt allerdings nicht an dessen geringeren Kosten, sondern daran, dass Stahl aufgrund seines höheren E-Moduls die Deformation des Composites verhindert und dadurch am Übergang eine Spannungsspitze entsteht. Aus demselben Grund ist auch die Wahl eines Glasfaserverbands für den zweiten Ring schlecht, weil Kohlenstofffasern eine wesentlich höhere Steifigkeit aufweisen.

Betrachtet man das gefundene Optimum, so zeigen sich die Auswirkungen der verwendeten Post-Processing-Option 'Cont', 'on', 'Refine', 1 (siehe Kapitel 7.2). Bei dieser wird auch über eine Materialgrenze gemittelt, um einen kontinuierlichen Output zu erhalten. Abbildung 8.9 zeigt das Spannungsverhältnis R des „optimalen“ Rotors ohne Mittelung. Es zeigt sich, dass in diesem Fall die geforderte Sicherheit nicht erreicht wird, da $R > 1/S = 0.769$ ist. Aus diesem Grund wurde die zweitbeste Lösung zum Optimum erklärt. Diese besteht von $R_1 = 0.05 m$ bis $R_2 = 0.1 m$ aus Aluminium, von $R_2 = 0.1 m$ bis $R_4 = 0.284 m$ aus HTS40/epoxy und hat eine Höhe von $h = 0.245 m$. Die Geometrie und die Diskretisierung des optimalen Außenläufers sind in Abbildung 8.10 zu sehen. Das Modell besteht aus 2500 quadratisch interpolierten Elementen und hat 25048 Freiheitsgrade.

Die Deformation und das Spannungsverhältnis R des optimalen Außenläufers sind in Abbildung 8.11 dargestellt. Am Übergang vom Metall zum Composite bei $z = h$ tritt eine

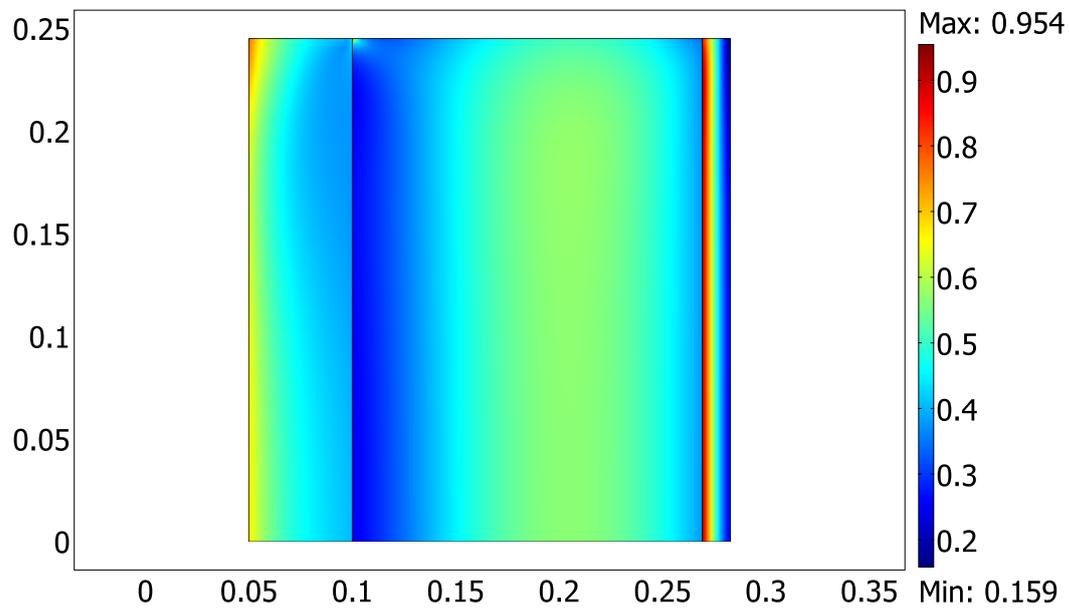


Abbildung 8.9: Spannungsverhältnis R des „optimalen“ Außenläufers ohne Mittelung

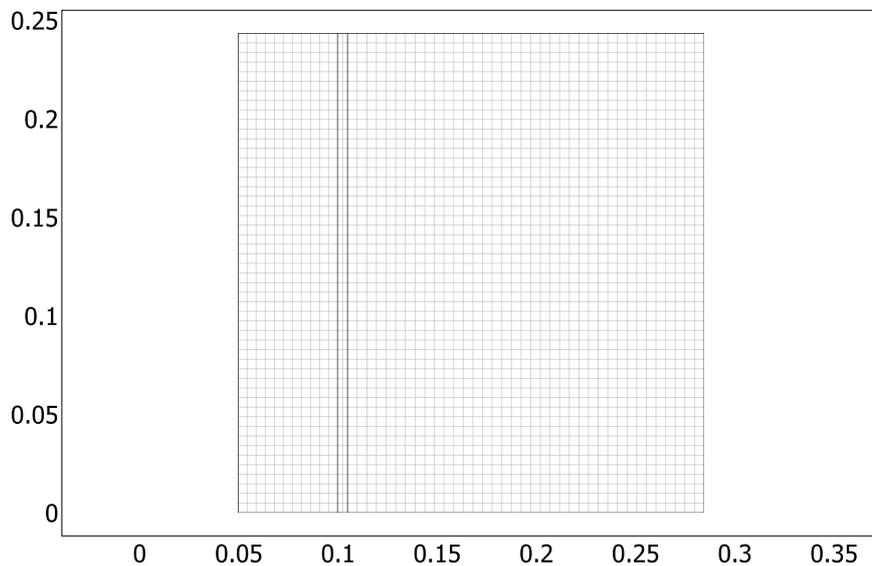


Abbildung 8.10: Geometrie und Diskretisierung des optimalen Außenläufers

Spannungsspitze auf, da der Aluminiumring eine zu große Steifigkeit aufweist. Die Höhe dieser Spannungsspitze ist außerdem noch von der Feinheit des Netzes abhängig. Daher würde sich auch bei dieser Bauform ein Einstich wie beim Innenläufer positiv auswirken.

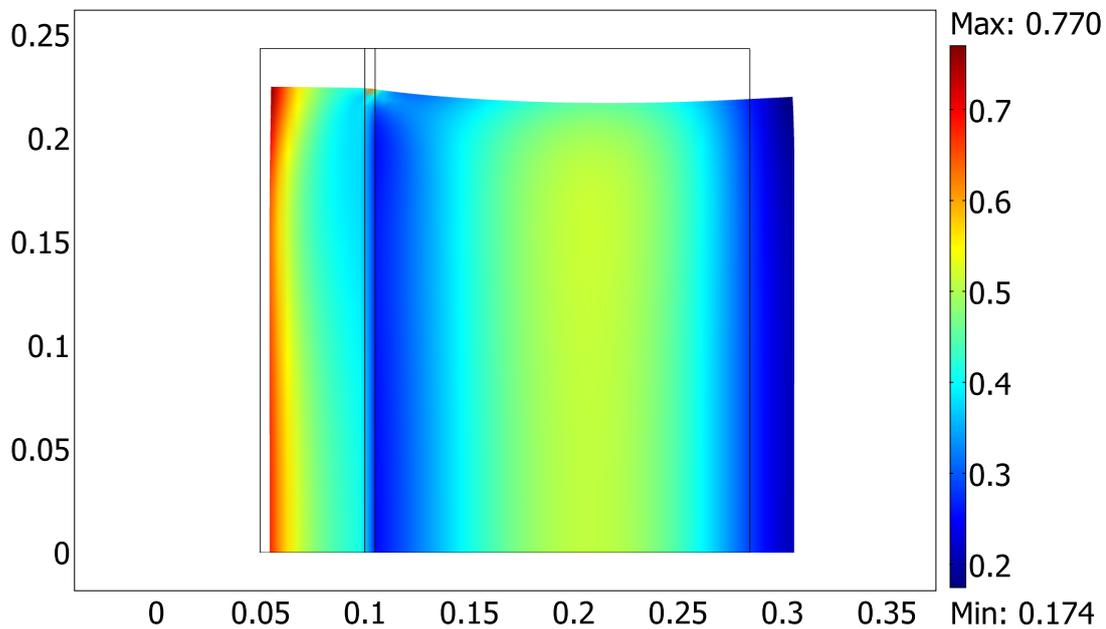


Abbildung 8.11: Deformation des optimalen Außenläufers (Verschiebung mit Faktor 30 skaliert); Contourplot der Spannungsverhältnisse von Gl. (5.34) bzw. Gl. (2.44)

Allerdings werden in diesem Bereich die für die Lagerung notwendigen Teile angebracht, was eventuell eine Beeinflussung der Steifigkeit des Aluminiumrings verursachen könnte. Im Falle einer Steifigkeitsreduktion ist mit geringeren Spannungen zu rechnen oder die Spannungsspitze tritt gar nicht auf. Abbildung 8.11 zeigt auch die großen Nachteile des verwendeten Designs. Die Umfangsspannung am Innenradius R_1 ist wesentlich höher als bei einer Vollscheibe (vgl. [15]). Außerdem sollte die untere Grenze des Radius R_2^{min} möglichst klein gehalten werden, wodurch die Stützwirkung des Composites besser genutzt werden würde.

In Abbildung 8.12 ist der radiale Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_θ^{Zug} , R_z^{Zug} und R_r^{Zug} an den Positionen $z = 0$, $z = h/2$ und $z = h$ aufgetragen. Die Spannungsverläufe ändern sich über die Höhe nur wenig, wenn man von der Spannungsspitze am Übergang vom Metall zum Composite absieht. Es ist deutlich zu erkennen, dass die hohe Festigkeit der Composite-Materialien in Umfangsrichtung kaum zum Tragen kommt, weil das Aluminium am Innenradius sehr hoch belastet wird.

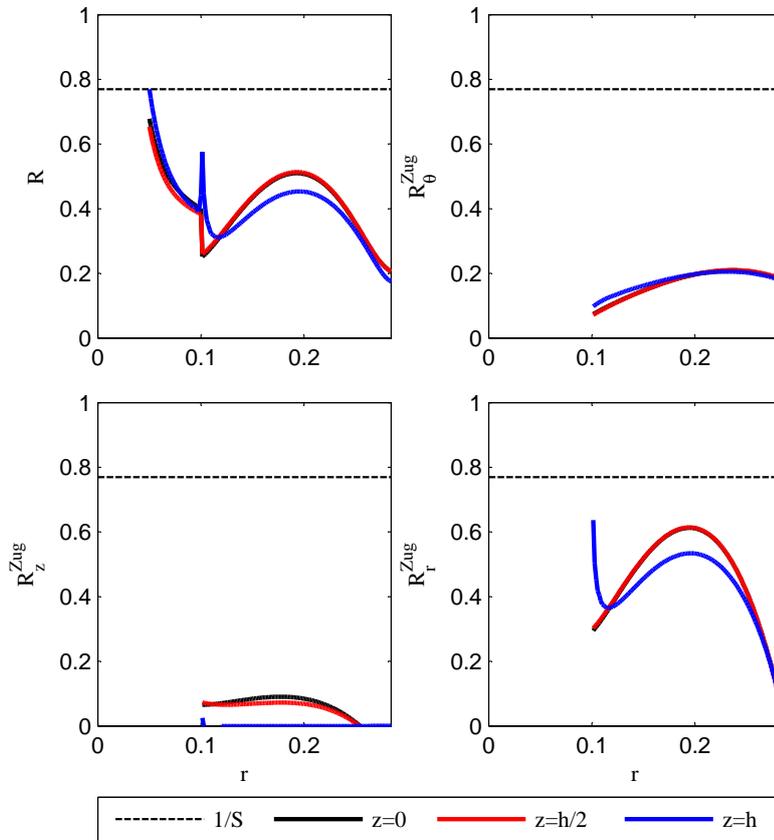


Abbildung 8.12: Radialer Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_θ^{Zug} , R_z^{Zug} und R_r^{Zug} an den Positionen $z = 0$, $z = h/2$ und $z = h$ des optimalen Außenläufers

8.2.1 Campbell-Diagramm des optimalen Außenläufers

Zur Berechnung der Eigenfrequenzen des optimalen Außenläufers wurde ebenfalls das Modell aus Kapitel 6 verwendet. Die Geometrie und Diskretisierung des Modells ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Es bestand aus 1178 SOLID273-Elementen mit drei Fourierebenen und aus 8 Elementen des Typs COMBIN14. Die Lagerung wurde auf der axialsymmetrischen Achse in einer Höhe von $z = L = 0.1426 \text{ m}$ bzw. $z = -L = -0.1426 \text{ m}$ (vgl. Abbildung 6.4) angebracht. Wie auch beim Innenläufer wurde die Netzfeinheit über die Elementkantenlänge gesteuert und ebenfalls ein Wert von 10^{-2} verwendet. Auch die Lagersteifigkeit wurde mit $k = 1 \text{ N/m}$ gewählt.

Die Eigenkreisfrequenzen wurden an fünf Winkelgeschwindigkeiten von 0 rad/s bis 4000 rad/s ausgewertet. Das Campbell-Diagramm des Außenläufers zeigt Abbildung 8.13 und die Werte sind nochmals in Tabelle E.1 zusammengefasst. Auch beim Außenläufer tritt

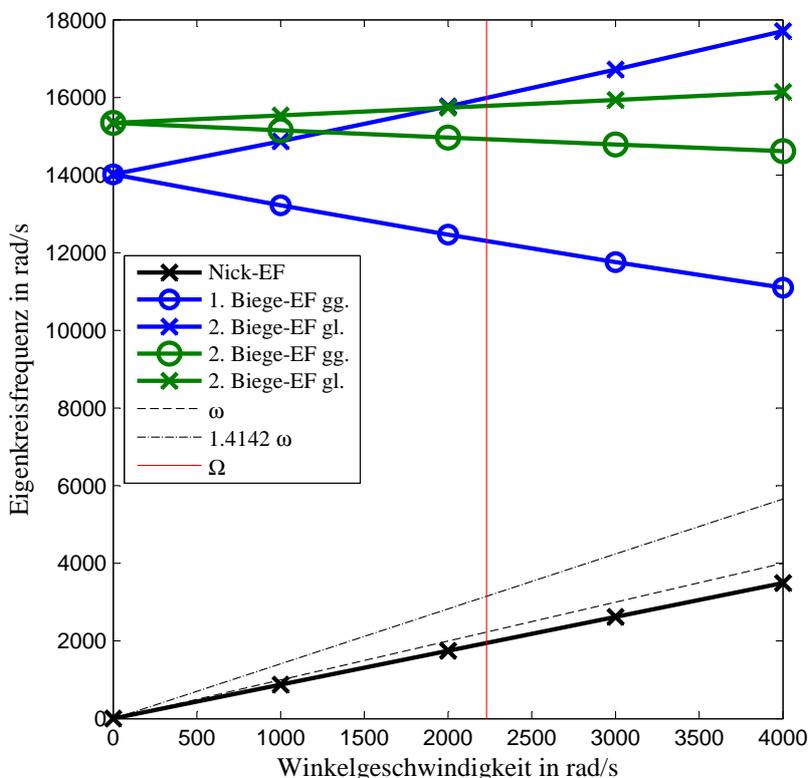


Abbildung 8.13: Campbell-Diagramm des optimalen Außenläufers

aufgrund der Gleichheit der Trägheitsmomente eine mitlaufende Nickeigenfrequenz auf. Die erste (und die zweite) Biegeigenfrequenz liegt jeweils sehr hoch, was nicht verwunderlich ist, da es sich um einen sehr dicken und daher sehr steifen Hohlzylinder handelt. Der Einfluss der Kreiselwirkung ist auf den ersten Biegeigenmode (Abbildung 8.14) besonders groß im Vergleich zum zweiten Biegeigenmode (Abbildung 8.15).

8.2.2 Einfluss der Materialalterung auf die Festigkeit des optimalen Außenläufers

Der Einfluss der Materialalterung des Epoxidharzes wurde in gleicher Weise wie beim Innenläufer (Kapitel 8.1.2) untersucht. In Abbildung 8.16 ist der radiale Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_{θ}^{Zug} und R_r^{Zug} sowie der radialen Verschiebung in der Mittenebene des Rotors nach den Zeitspannen 0 Jahre, 20 Jahre und ∞ (1,000,000 Jahre) dargestellt. Auch hier zeigt sich der Effekt, dass die Sicherheit über der Zeit steigt, was auch hier auf eine Umverteilung der Spannungen zurückzuführen ist.

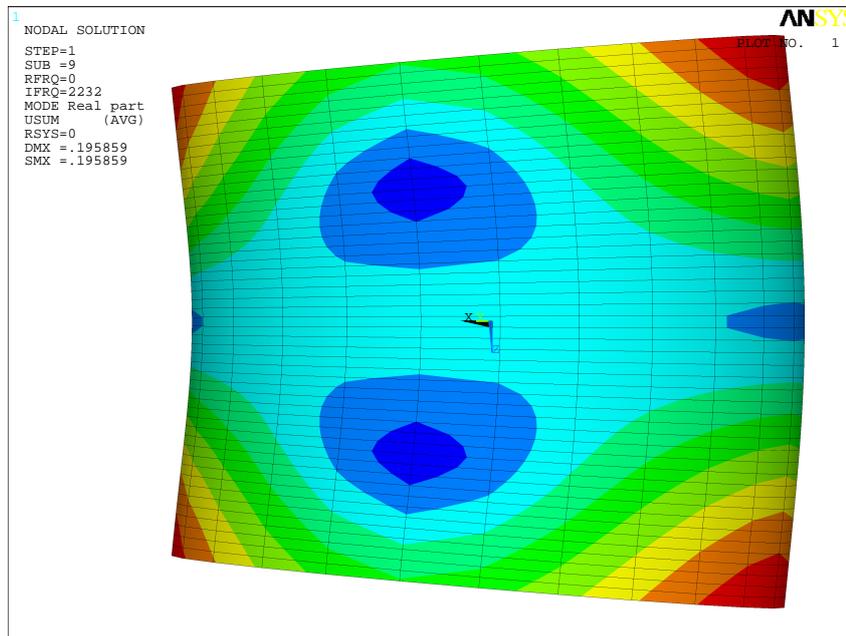


Abbildung 8.14: Erster Biegeeigenmode des optimalen Außenläufers bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$; Contourplot der Gesamtverschiebung

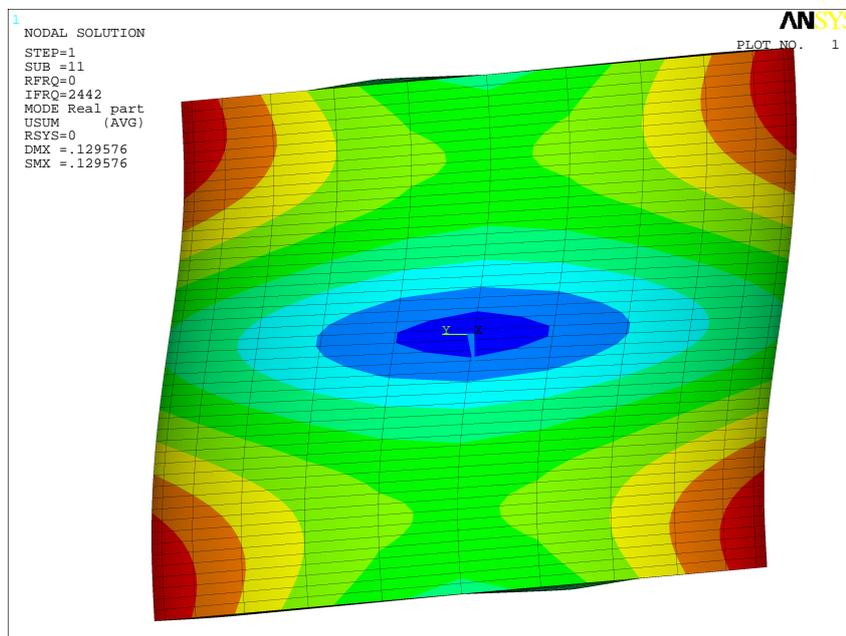


Abbildung 8.15: Zweiter Biegeeigenmode des optimalen Außenläufers bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$; Contourplot der Gesamtverschiebung

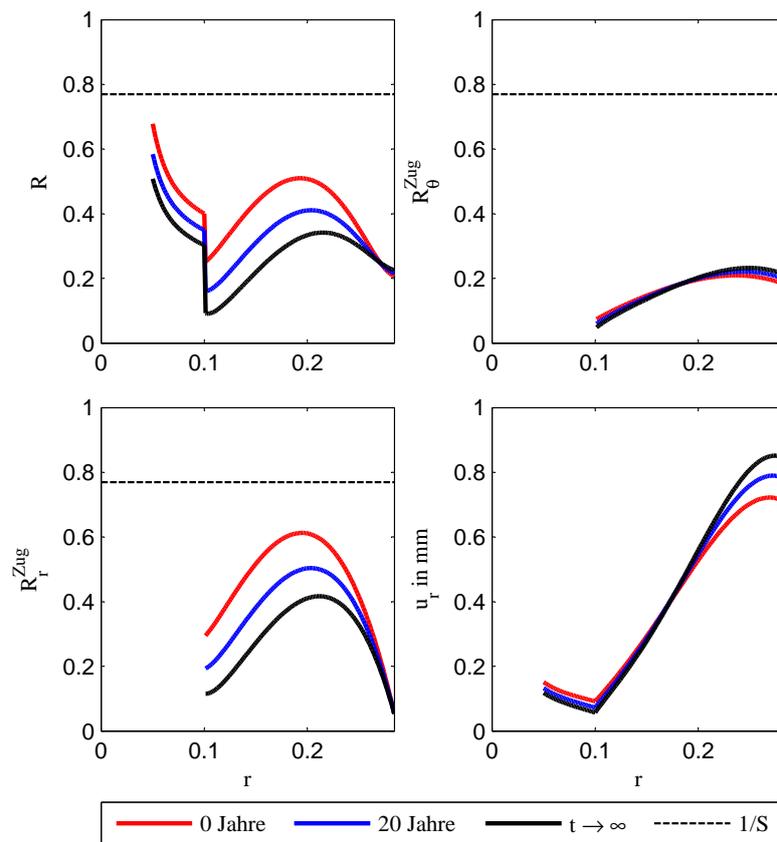


Abbildung 8.16: Radialer Verlauf der Spannungsverhältnisse R , R_{θ}^{Zug} und R_r^{Zug} sowie der radialen Verschiebung in der Mittenebene des Rotors nach den Zeitspannen 0 Jahre, 20 Jahre und ∞ (=1,000,000 Jahre) des optimalen Außenläufers

9 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde für das Forschungsprojekt „LTS-Flywheel“ ein Berechnungsprogramm entwickelt, um das Kostenoptimum der Designvarianten Innen- und Außenläufer zu finden. Aus den Ergebnissen in Kapitel 8 ist zu erkennen, dass die Bauform Innenläufer viele Vorteile im Vergleich zum Außenläufer hat, dessen größter Nachteil darin besteht, dass das Metall mit vergleichsweise geringer Festigkeit in einem hoch beanspruchten Bereich zum Einsatz kommt. Die aufgesetzten Wellenstummel des Innenläufers bieten zudem die Möglichkeit Lagerelemente in einem relativ unbelasteten Bereich anzubringen.

Eine wesentliche Verbesserung der Resultate wird erwartet, wenn man die Bedingung gleicher Trägheitsmomente fallen lässt. Dadurch kann zum Einen die mitlaufende Nickelfrequenz verlagert und zum Anderen das Potential von Composite-Materialien besser genutzt werden.

In beiden Fällen sind die Axialspannungen sehr gering, daher würde ein anderer Faserwinkel auch keine Verbesserung bringen, weil die Steifigkeit in radialer Richtung davon unbeeinflusst bleibt. Außerdem würde ein Abweichung des Faserwinkels von 90° zu einer Abnahme der Umfangssteifigkeit führen, was wiederum höhere Radialspannungen verursacht.

Einen Ausblick, wie sich die Kosten, die Masse und die Winkelgeschwindigkeit bei höheren Energieinhalten verhalten, zeigt Abbildung 9.1. Dafür wurden die Parameter in Tabelle B.1 verwendet und der Energieinhalt TSE von 5 kWh bis 25 kWh variiert. Während die Kosten und die Masse des Rotors linear mit dem Energieinhalt steigen, verhält sich die

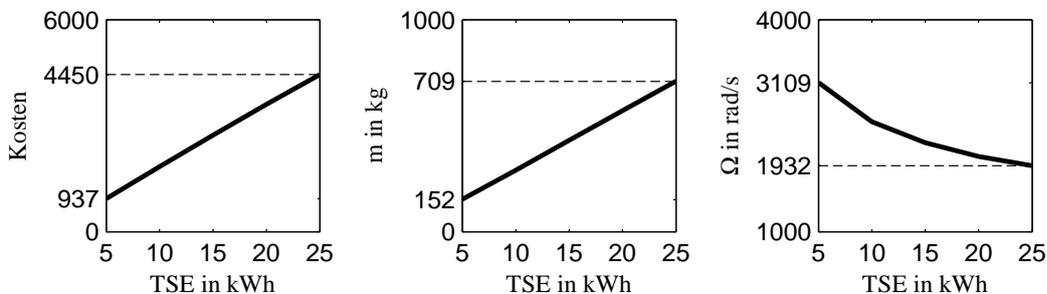


Abbildung 9.1: Kosten, Masse und max. Winkelgeschwindigkeit des Innenläufers bei verschiedenen Energieinhalten

Winkelgeschwindigkeit indirekt proportional zum Quadrat des Energieinhalts.

Die Auswirkung des viskoelastischen Materialverhaltens wurde nicht untersucht. Da das Flywheel durchgehend in Rotation gehalten wird, könnten viskoelastische Effekte durchaus eine große Rolle spielen und einen höheren Sicherheitswert erfordern. Der Einfluss einer inneren Dämpfung auf die Eigenfrequenzen wurde ebenfalls nicht in Betracht gezogen.

Anhang

A Materialparameter

Tabelle A.1: Steifigkeitswerte und skalierte Preise der verwendeten Materialien; Preisangaben in Wahrung/kg; aus [30], [29] und [28]

	Aluminium	Stahl	Glasfasern	HTS40	UTS50	UMS40	IMS60	IMS65	HMA35	L1100 EPH 296
E_l in GPa	70	210	73	240	244	395	289	289	354	3.455
E_q in GPa	70	210	73	28	30	15	30	30	15	3.455
ν_{lq}	0.3	0.3	0.18	0.23	0.23	0.20	0.23	0.23	0.20	0.26
G_{lq} in GPa	26.9	80.7	30.9	50.0	50.0	29.0	50.0	50.0	29.0	1.37
ρ in kg/m^3	2700	7800	2600	1770	1790	1790	1790	1780	1780	1183.7
α_l in $10^{-6}/K$	23	13	5	-0.1	-0.2	-0.65	-0.2	-0.2	-0.65	65
α_q in $10^{-6}/K$	23	13	5	10	10	37.1	10	10	37.1	65
c	2.0	4.3	3.2	7.0	7.0	31.1	15.9	14.9	46.4	2.1

Tabelle A.2: Festigkeitswerte der verwendeten Materialien ($\xi = 0.6$ bei Composites); aus [30], [29] und [28]

	Aluminium (1)	Stahl (2)	Glasfasern/epoxy (3)	HTS40/epoxy (4)	UTS50/epoxy (5)	UMS40/epoxy (6)	IMS60/epoxy (7)	IMS65/epoxy (8)	HMA35/epoxy (9)
σ_{lTu} in MPa	275	620	1280	2179	2474	2320	2774	2774	2320
σ_{lCu} in MPa	275	620	800	1702	1674	981	1507	1507	981
σ_{qTu} in MPa	275	620	40	98	89	70	77	77	70
σ_{qCu} in MPa	275	620	145	210	210	210	210	210	210
τ_u in MPa			73	115	103	103	92	92	103

Tabelle A.3: Steifigkeitswerte der verwendeten Composites (mit $\xi = 0.6$ ermittelt mit Mori-Tanaka-Methode siehe Kapitel 2.3.1)

	Glasfasern/epoxy (3)	HTS40/epoxy (4)	UTS50/epoxy (5)	UMS40/epoxy (6)	IMS60/epoxy (7)	IMS65/epoxy (8)	HMA35/epoxy (9)
E_l in GPa	45.18	145.38	147.78	238.38	174.78	174.78	213.78
E_q in GPa	10.58	9.00	9.15	7.45	9.15	9.15	7.45
ν_{lq}	0.21	0.24	0.24	0.22	0.24	0.24	0.22
ν_{qt}	0.32	0.27	0.27	0.22	0.27	0.27	0.22
α_l in $10^{-6}/K$	6.97	0.53	0.42	-0.25	0.32	0.32	-0.21
α_q in $10^{-6}/K$	28.52	33.59	33.50	52.62	33.54	33.54	52.61
ρ in kg/m^3	2033	1535	1547	1547	1547	1541	1541

B Parameter und Ergebnisse der Optimierung des Innenläufers

Tabelle B.1: Parameter der Optimierung des Innenläufers unter Annahme eines MGPS

Parameter	Wert
Länge der Wellenstummel l_{st}	0.22 m
Radius der Wellenstummel r_{st}	0.04 m
untere Grenze R_1^{min}	0.6 m
Energieinhalt TSE	5 kWh
Sicherheit gegen Versagen S	1.3
Aushärtetemperaturdifferenz ΔT	-50 K
Anzahl der Knoten pro Ring	60
Vorspannkraft F	50 N
Fadenquerschnittfläche ah	1.8472 mm ²
Kosten der Lagerung	1.27
<code>optimset('InitBarrierParam',...)</code>	200000
<code>optimset('InitTrustRegionRadius',...)</code>	0.1
<code>optimset('DiffMinChange',...)</code>	1e - 5

Tabelle B.2: Parameter der Optimierung des Innenläufers mit einem axialsymmetrischen FE-Modell

Parameter	Wert
Länge der Wellenstummel l_{st}	0.22 m
Radius der Wellenstummel r_{st}	0.04 m
untere Grenze $(R_1 - d)^{min}$	0.05 m
untere Grenze d^{min}	0.008 m
Startwert d^0	0.01 m
untere Grenze $(h_1 - h_3)^{min}$	0.01 m
untere Grenze h_3^{min}	0.005 m
Startwert h_3^0	0.01 m
Energieinhalt TSE	5 kWh
Sicherheit gegen Versagen S	1.3
Aushärtetemperaturdifferenz ΔT	-50 K
max. Vorspannkraft F^{max}	50 N
Startwert Vorspannkraft F^0	30 N
Fadenquerschnittfläche ah	1.8472 mm ²
Kosten der Lagerung	1.27
Netzfeinheit	2
Ordnung der Ansatzfunktionen	2
<code>optimset('InitBarrierParam',...)</code>	100
<code>optimset('InitTrustRegionRadius',...)</code>	10
<code>optimset('DiffMinChange',...)</code>	1e - 3

Tabelle B.3: Ergebnisse der Optimierung des Innenläufers unter Annahme eines MGPS;
 Längenangaben R_1, R_2, R_3, h_1 in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in rad/s ,
 Masse m in kg , Kosten skaliert

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	h_1	Ω	m	Kosten
1/3/3	0.341	0.342	0.343	0.288	1196.6	578.07	1918.44
1/3/4	0.060	0.067	0.267	0.198	3129.5	148.32	938.39
1/3/5	0.060	0.074	0.275	0.207	2882.5	164.74	1042.45
1/3/6	0.341	0.342	0.343	0.288	1196.9	577.85	1954.16
1/3/7	0.060	0.085	0.279	0.211	2778.2	173.01	1980.94
1/3/8	0.060	0.085	0.279	0.211	2783.1	172.44	1876.02
1/3/9	0.341	0.342	0.343	0.288	1197.0	577.84	1974.12
1/4/4	0.081	0.082	0.268	0.197	3105.4	152.57	938.47
1/4/5	0.081	0.227	0.268	0.197	3109.1	152.47	937.46
1/4/6	0.082	0.267	0.268	0.197	3115.9	152.13	951.00
1/4/7	0.083	0.267	0.268	0.197	3106.2	152.81	943.47
1/4/8	0.083	0.267	0.268	0.197	3106.3	152.80	942.72
1/4/9	0.082	0.267	0.268	0.197	3112.4	152.37	962.90
1/5/5	0.079	0.269	0.276	0.206	2864.0	168.12	1046.04
1/5/6	0.078	0.275	0.276	0.206	2875.7	167.21	1059.53
1/5/7	0.085	0.275	0.276	0.206	2857.2	169.76	1051.46
1/5/8	0.079	0.275	0.276	0.206	2867.1	167.92	1050.58
1/5/9	0.085	0.275	0.276	0.206	2862.7	169.29	1072.39
1/6/6	0.341	0.342	0.343	0.288	1197.3	577.63	1989.81
1/6/7	0.104	0.105	0.281	0.210	2720.4	183.84	1962.28
1/6/8	0.104	0.105	0.281	0.210	2724.9	183.33	1860.81
1/6/9	0.341	0.342	0.343	0.288	1197.3	577.62	2009.77
1/7/7	0.117	0.282	0.283	0.210	2677.3	190.29	1943.31
1/7/8	0.113	0.114	0.283	0.210	2695.9	187.77	1846.69
1/7/9	0.117	0.282	0.283	0.210	2681.8	189.89	1964.01
1/8/8	0.116	0.214	0.283	0.210	2686.9	189.04	1845.10
1/8/9	0.117	0.282	0.283	0.210	2686.2	189.37	1865.89
1/9/9	0.341	0.342	0.343	0.288	1197.4	577.61	2029.67

Tabelle B.3: Fortsetzung

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	h_1	Ω	m	Kosten
1/9/8	0.103	0.104	0.281	0.210	2726.5	183.04	1866.39
1/9/7	0.103	0.104	0.281	0.210	2722.0	183.56	1967.99
1/9/6	0.341	0.342	0.343	0.288	1197.3	577.62	2009.72
1/9/5	0.077	0.078	0.276	0.207	2866.4	167.67	1054.54
1/9/4	0.075	0.076	0.268	0.197	3115.0	150.96	946.60
1/9/3	0.341	0.342	0.343	0.288	1197.0	577.83	1973.95
1/8/7	0.117	0.282	0.283	0.210	2681.8	189.78	1845.02
1/8/6	0.117	0.282	0.283	0.210	2688.5	189.16	1852.03
1/8/5	0.084	0.085	0.276	0.206	2856.8	169.49	1047.82
1/8/4	0.081	0.082	0.268	0.197	3105.3	152.57	940.21
1/8/3	0.117	0.282	0.283	0.211	2662.7	191.52	1847.11
1/7/6	0.116	0.282	0.283	0.210	2684.1	189.68	1950.06
1/7/5	0.084	0.085	0.276	0.206	2856.8	169.49	1048.07
1/7/4	0.081	0.082	0.268	0.197	3105.3	152.58	940.44
1/7/3	0.117	0.282	0.283	0.211	2658.3	192.04	1945.87
1/6/5	0.070	0.071	0.275	0.207	2874.7	165.91	1051.46
1/6/4	0.075	0.076	0.268	0.197	3115.0	150.96	943.59
1/6/3	0.341	0.342	0.343	0.288	1196.9	577.84	1954.05
1/5/4	0.081	0.082	0.268	0.197	3105.4	152.57	938.50
1/5/3	0.087	0.276	0.277	0.207	2832.9	171.87	1050.78
1/4/3	0.085	0.268	0.269	0.198	3078.8	154.80	942.89
2/3/3	0.060	0.123	0.430	0.345	799.3	874.92	3836.22
2/3/4	0.060	0.062	0.290	0.168	2873.8	177.66	1150.04
2/3/5	0.060	0.069	0.297	0.178	2663.7	195.40	1264.68
2/3/6	0.060	0.082	0.290	0.167	2884.7	178.42	3240.87
2/3/7	0.060	0.081	0.300	0.183	2573.9	204.28	2229.77
2/3/8	0.060	0.081	0.300	0.182	2578.0	203.68	2122.16
2/3/9	0.254	0.283	0.284	0.211	1393.9	727.74	4072.46
2/4/4	0.060	0.082	0.290	0.168	2874.3	177.51	1150.46
2/4/5	0.060	0.287	0.290	0.168	2874.8	177.48	1150.26
2/4/6	0.060	0.289	0.290	0.167	2883.7	176.82	1161.69
2/4/7	0.060	0.289	0.290	0.168	2876.8	177.33	1155.09
2/4/8	0.060	0.289	0.290	0.168	2876.9	177.32	1154.40
2/4/9	0.060	0.289	0.290	0.167	2881.3	177.00	1172.74
2/5/5	0.060	0.266	0.297	0.178	2664.5	194.82	1267.50

Tabelle B.3: Fortsetzung

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	h_1	Ω	m	Kosten
2/5/6	0.060	0.295	0.296	0.178	2673.1	194.07	1279.65
2/5/7	0.060	0.296	0.297	0.178	2667.0	194.60	1272.39
2/5/8	0.060	0.296	0.297	0.178	2667.0	194.60	1271.64
2/5/9	0.060	0.295	0.296	0.178	2671.0	194.26	1291.59
2/6/6	0.121	0.122	0.290	0.155	2821.9	233.79	3199.71
2/6/7	0.060	0.061	0.300	0.183	2574.6	202.94	2272.98
2/6/8	0.060	0.061	0.300	0.183	2578.7	202.32	2161.65
2/6/9	0.121	0.289	0.290	0.155	2819.6	234.10	3211.94
2/7/7	0.060	0.299	0.300	0.183	2574.7	202.93	2270.64
2/7/8	0.060	0.061	0.300	0.183	2578.7	202.32	2159.39
2/7/9	0.060	0.299	0.300	0.183	2578.5	202.57	2288.63
2/8/8	0.060	0.299	0.300	0.183	2578.8	202.31	2159.17
2/8/9	0.060	0.299	0.300	0.183	2582.6	201.96	2178.18
2/9/9	0.265	0.266	0.267	0.212	1365.8	748.95	4277.25
2/9/8	0.060	0.061	0.300	0.183	2578.7	202.32	2163.90
2/9/7	0.060	0.061	0.300	0.183	2574.6	202.94	2275.23
2/9/6	0.121	0.122	0.290	0.155	2821.9	233.78	3203.57
2/9/5	0.060	0.061	0.297	0.178	2664.2	194.84	1273.36
2/9/4	0.060	0.061	0.290	0.168	2873.9	177.54	1156.04
2/9/3	0.254	0.255	0.284	0.211	1394.9	726.92	4063.25
2/8/7	0.060	0.299	0.300	0.183	2578.7	202.32	2159.96
2/8/6	0.060	0.299	0.300	0.182	2584.6	201.78	2164.89
2/8/5	0.060	0.061	0.297	0.178	2664.2	194.84	1268.81
2/8/4	0.060	0.061	0.290	0.168	2873.9	177.54	1151.76
2/8/3	0.060	0.299	0.300	0.184	2562.3	203.86	2165.80
2/7/6	0.060	0.299	0.300	0.183	2580.5	202.39	2275.21
2/7/5	0.060	0.061	0.297	0.178	2664.2	194.84	1268.96
2/7/4	0.060	0.061	0.290	0.168	2873.9	177.54	1151.90
2/7/3	0.060	0.299	0.300	0.184	2558.4	204.48	2277.23
2/6/5	0.060	0.061	0.297	0.178	2664.2	194.84	1271.17
2/6/4	0.060	0.061	0.290	0.168	2873.9	177.54	1153.98
2/6/3	0.122	0.290	0.291	0.156	2797.5	237.11	3209.81
2/5/4	0.060	0.065	0.290	0.168	2874.5	177.50	1150.42
2/5/3	0.060	0.296	0.297	0.179	2650.1	196.08	1272.49
2/4/3	0.060	0.290	0.291	0.169	2858.4	178.70	1155.22

C Ergebnisse der Frequenzanalyse des optimalen Innenläufers

Tabelle C.1: Ergebnisse der Frequenzanalyse des optimalen Innenläufers; Winkelgeschwindigkeit und Eigenkreisfrequenz in rad/s

Eigenmode	$\omega = 0$	$\omega = 1000$	$\omega = 2000$	$\omega = 3000$	$\omega = 4000$
Nickeigenmode	0.2	996.4	1961.0	2845.5	3573.3
1. Biegeeigenmode gg.	4941.4	4916.7	4892.0	4867.5	4843.1
1. Biegeeigenmode gl.	4941.4	4966.3	4991.3	5016.4	5041.7
2. Biegeeigenmode gg.	5155.4	5078.0	5016.2	4964.3	4919.0
2. Biegeeigenmode gl.	5155.4	5258.9	5409.6	5650.2	6053.9

D Parameter und Ergebnisse der Optimierung des Außenläufers

Tabelle D.1: Parameter der Optimierung des Außenläufers unter Annahme eines MGPS

Parameter	Wert
Innenradius R_1	0.05 m
untere Grenze R_2^{min}	0.1 m
Energieinhalt TSE	5 kWh
Sicherheit gegen Versagen S	1.3
Aushärtetemperaturdifferenz ΔT	-50 K
Anzahl der Knoten pro Ring	60
Vorspannkraft F	50 N
Fadenquerschnittfläche ah	1.8472 mm ²
Kosten der Lagerung	1.27
optimset('InitBarrierParam',...)	200000
optimset('InitTrustRegionRadius',...)	0.1
optimset('DiffMinChange',...)	1e - 5

Tabelle D.2: Parameter der Optimierung des Außenläufers mit einem axialsymmetrischen FE-Modell

Parameter	Wert
Innenradius R_1	0.05 m
untere Grenze R_2^{min}	0.1 m
Energieinhalt TSE	5 kWh
Sicherheit gegen Versagen S	1.3
Aushärtetemperaturdifferenz ΔT	-50 K
max. Vorspannkraft F^{max}	50 N
Startwert Vorspannkraft F^0	50 N
Fadenquerschnittfläche ah	1.8472 mm ²
Kosten der Lagerung	1.27
Netzfeinheit	2
Ordnung der Ansatzfunktionen	2
optimset('InitBarrierParam',...)	100
optimset('InitTrustRegionRadius',...)	10
optimset('DiffMinChange',...)	1e - 3

Tabelle D.3: Ergebnisse der Optimierung des Außenläufers unter Annahme eines MGPS;
 Längenangaben R_1, R_2, R_3, R_4, h in m , max. Winkelgeschwindigkeit Ω in
 rad/s , Masse m in kg , Kosten skaliert

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	R_4	h	Ω	m	Kosten
1/3/3	0.050	0.100	0.101	0.417	0.361	830.8	800.36	3368.22
1/3/4	0.050	0.100	0.101	0.287	0.245	2432.1	202.62	1265.46
1/3/5	0.050	0.100	0.101	0.287	0.245	2427.4	203.54	1273.77
1/3/6	0.050	0.100	0.415	0.416	0.360	836.9	793.37	3394.72
1/3/7	0.050	0.100	0.101	0.282	0.240	2543.3	192.63	2200.64
1/3/8	0.050	0.100	0.101	0.282	0.240	2545.8	192.19	2085.71
1/3/9	0.050	0.100	0.415	0.416	0.360	836.2	794.16	3428.46
1/4/4	0.050	0.100	0.105	0.287	0.245	2444.2	201.33	1258.49
1/4/5	0.050	0.100	0.286	0.287	0.245	2444.2	201.33	1258.50
1/4/6	0.050	0.100	0.286	0.287	0.245	2444.5	201.30	1281.14
1/4/7	0.050	0.100	0.286	0.287	0.245	2444.5	201.30	1266.72
1/4/8	0.050	0.100	0.286	0.287	0.245	2444.5	201.30	1265.76
1/4/9	0.050	0.100	0.286	0.287	0.245	2444.2	201.32	1295.52
1/5/5	0.050	0.100	0.223	0.286	0.245	2439.3	202.27	1266.89
1/5/6	0.050	0.100	0.285	0.286	0.245	2439.6	202.24	1289.52
1/5/7	0.050	0.100	0.285	0.286	0.245	2439.6	202.24	1275.11
1/5/8	0.050	0.100	0.285	0.286	0.245	2439.6	202.24	1274.15
1/5/9	0.050	0.100	0.285	0.286	0.245	2439.3	202.26	1303.88
1/6/6	0.050	0.409	0.410	0.411	0.358	747.2	1006.65	3448.18
1/6/7	0.050	0.100	0.103	0.280	0.239	2571.2	190.06	2188.68
1/6/8	0.050	0.100	0.101	0.281	0.240	2564.4	190.44	2075.14
1/6/9	0.050	0.409	0.410	0.411	0.358	747.4	1006.34	3476.96
1/7/7	0.050	0.100	0.147	0.281	0.240	2557.1	191.29	2189.31
1/7/8	0.050	0.100	0.101	0.281	0.240	2559.6	190.86	2075.19
1/7/9	0.050	0.100	0.280	0.281	0.240	2556.7	191.33	2217.29
1/8/8	0.050	0.100	0.183	0.281	0.240	2559.6	190.86	2074.81
1/8/9	0.050	0.100	0.280	0.281	0.240	2559.2	190.89	2103.70
1/9/9	0.050	0.409	0.410	0.411	0.358	747.6	1006.04	3505.66

Tabelle D.3: Fortsetzung

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	R_4	h	Ω	m	Kosten
1/9/8	0.050	0.100	0.101	0.281	0.240	2562.6	190.59	2081.88
1/9/7	0.050	0.100	0.101	0.281	0.240	2560.2	191.02	2195.81
1/9/6	0.050	0.409	0.410	0.411	0.358	747.4	1006.35	3476.89
1/9/5	0.050	0.100	0.101	0.286	0.244	2445.0	201.71	1276.18
1/9/4	0.050	0.100	0.101	0.286	0.244	2449.6	200.80	1268.00
1/9/3	0.050	0.100	0.101	0.417	0.361	830.9	800.13	3388.21
1/8/7	0.050	0.100	0.280	0.281	0.240	2559.6	190.86	2075.72
1/8/6	0.050	0.100	0.280	0.281	0.240	2559.4	190.87	2089.77
1/8/5	0.050	0.100	0.101	0.286	0.245	2441.5	202.06	1268.09
1/8/4	0.050	0.100	0.101	0.286	0.245	2446.1	201.14	1259.87
1/8/3	0.050	0.100	0.280	0.281	0.240	2557.3	191.06	2063.40
1/7/6	0.050	0.100	0.280	0.281	0.240	2556.9	191.31	2203.36
1/7/5	0.050	0.100	0.101	0.286	0.245	2441.4	202.06	1268.46
1/7/4	0.050	0.100	0.101	0.286	0.245	2446.1	201.14	1260.23
1/7/3	0.050	0.100	0.280	0.281	0.240	2554.8	191.50	2176.84
1/6/5	0.050	0.100	0.101	0.286	0.244	2446.9	201.53	1270.00
1/6/4	0.050	0.100	0.101	0.286	0.244	2451.5	200.62	1261.83
1/6/3	0.050	0.100	0.101	0.417	0.361	830.9	800.15	3380.95
1/5/4	0.050	0.100	0.101	0.287	0.245	2443.9	201.35	1258.66
1/5/3	0.050	0.100	0.273	0.284	0.245	2415.1	204.86	1233.63
1/4/3	0.050	0.100	0.273	0.284	0.246	2419.9	203.91	1225.46
2/3/3	0.050	0.100	0.405	0.434	0.360	763.0	953.99	4246.93
2/3/4	0.050	0.100	0.101	0.315	0.245	1995.2	300.83	1935.95
2/3/5	0.050	0.100	0.101	0.316	0.247	1965.4	306.36	1975.36
2/3/6	0.050	0.100	0.101	0.290	0.223	2443.1	242.32	4235.89
2/3/7	0.050	0.100	0.101	0.293	0.226	2373.4	249.96	2630.68
2/3/8	0.050	0.100	0.101	0.293	0.226	2374.7	249.59	2513.15
2/3/9	0.050	0.100	0.433	0.434	0.359	766.5	948.97	4315.30
2/4/4	0.050	0.100	0.104	0.296	0.229	2320.6	255.52	1637.05
2/4/5	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2320.6	255.52	1637.05
2/4/6	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2320.8	255.50	1658.97
2/4/7	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2320.8	255.50	1645.03
2/4/8	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2320.8	255.50	1644.10
2/4/9	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2320.6	255.52	1672.85
2/5/5	0.050	0.100	0.161	0.296	0.229	2316.6	256.45	1645.32

Tabelle D.3: Fortsetzung

Materialkomb.	R_1	R_2	R_3	R_4	h	Ω	m	Kosten
2/5/6	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2316.9	256.42	1667.21
2/5/7	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2316.8	256.42	1653.28
2/5/8	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2316.9	256.42	1652.36
2/5/9	0.050	0.100	0.295	0.296	0.229	2316.7	256.44	1681.07
2/6/6	0.050	0.100	0.102	0.289	0.223	2450.2	241.48	4228.72
2/6/7	0.050	0.100	0.101	0.293	0.226	2381.5	248.95	2628.17
2/6/8	0.050	0.100	0.101	0.293	0.226	2382.9	248.59	2511.19
2/6/9	0.050	0.100	0.288	0.289	0.223	2450.1	241.49	4242.05
2/7/7	0.050	0.100	0.292	0.293	0.226	2379.5	249.18	2626.23
2/7/8	0.050	0.100	0.101	0.293	0.226	2380.8	248.81	2509.10
2/7/9	0.050	0.100	0.292	0.293	0.226	2379.2	249.21	2653.61
2/8/8	0.050	0.100	0.101	0.293	0.226	2380.8	248.81	2508.77
2/8/9	0.050	0.100	0.292	0.293	0.226	2380.6	248.84	2537.03
2/9/9	0.050	0.100	0.125	0.291	0.224	2422.0	244.28	5996.67
2/9/8	0.050	0.100	0.101	0.293	0.226	2382.2	248.66	2516.65
2/9/7	0.050	0.100	0.101	0.293	0.226	2380.8	249.03	2633.68
2/9/6	0.050	0.100	0.101	0.289	0.223	2449.5	241.55	4234.71
2/9/5	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2319.2	256.15	1655.48
2/9/4	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2322.9	255.25	1647.42
2/9/3	0.050	0.100	0.101	0.434	0.360	763.3	953.33	4265.01
2/8/7	0.050	0.100	0.292	0.293	0.226	2380.8	248.81	2509.65
2/8/6	0.050	0.100	0.292	0.293	0.226	2380.7	248.82	2523.40
2/8/5	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2317.5	256.35	1647.10
2/8/4	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2321.2	255.45	1639.01
2/8/3	0.050	0.100	0.279	0.290	0.227	2365.1	250.76	2380.09
2/7/6	0.050	0.100	0.292	0.293	0.226	2379.4	249.19	2639.98
2/7/5	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2317.5	256.35	1647.43
2/7/4	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2321.2	255.45	1639.34
2/7/3	0.050	0.100	0.279	0.290	0.227	2363.8	251.13	2485.68
2/6/5	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2319.9	256.07	1650.27
2/6/4	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2323.6	255.17	1642.22
2/6/3	0.050	0.100	0.101	0.434	0.360	763.3	953.32	4257.64
2/5/4	0.050	0.100	0.101	0.296	0.229	2320.4	255.55	1637.22
2/5/3	0.050	0.100	0.293	0.295	0.229	2313.5	256.83	1637.39
2/4/3	0.050	0.100	0.281	0.294	0.229	2303.9	257.71	1599.85

E Ergebnisse der Frequenzanalyse des optimalen Außenläufers

Tabelle E.1: Ergebnisse der Frequenzanalyse des optimalen Außenläufers; Winkelgeschwindigkeit und Eigenkreisfrequenz in rad/s

Eigenmode	$\omega = 0$	$\omega = 1000$	$\omega = 2000$	$\omega = 3000$	$\omega = 4000$
Nickeigenmode	0.2	874.8	1749.1	2622.0	3492.5
1. Biegeeigenmode gg.	14022	13220	12467	11761	11102
1. Biegeeigenmode gl.	14022	14872	15771	16718	17710
2. Biegeeigenmode gg.	15344	15155	14970	14791	14617
2. Biegeeigenmode gl.	15344	15537	15735	15936	16141

Literaturverzeichnis

- [1] Arnold S.M., Saleeb A.F., Al-Zoubi N.R.: *Deformation and life analysis of composite flywheel disk systems*, Composites: Part B 33 (2002) 433-459.
- [2] Bolund B., Bernhoff H., Leijon M.: *Flywheel energy and power storage systems*, Renewable and Sustainable Energy Reviews 11 (2007) 235-258.
- [3] Byrd R.H., Gilbert J.C., Nocedal J.: *A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming*, Math. Program., Ser. A 89: 149-185 (2000).
- [4] Byrd R.H., Hribar M.E, Nocedal J.: *An Interior Point Algorithm for Large Scale Nonlinear Programming*, SIAM Journal on Optimization 1997 Vol. 9 877-900, 1997.
- [5] Ehrenstein G.W.: *Faserverbund - Kunststoffe, Werkstoffe - Verarbeitung - Eigenschaften*, 2. Auflage. Carl Hanser Verlag München Wien 2006.
- [6] Flemming M., Ziegmann G., Roth S.: *Faserverbundbauweisen, Fasern und Matrices*. Springer Verlag Berlin Heidelberg 1995.
- [7] Gasch R., Nordmann R., Pfützner H.: *Rotordynamik*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2006.
- [8] Ha S.K., Kim D., Sung T.: *Optimum design of a multi-ring composite flywheel rotor using a modified generalized plane strain assumption*, International Journal of Mechanical Sciences 43 (2001) 993-1007.
- [9] Iglesias I.J., Garcia-Tabares J., Agudo A., Cruz I., Arribas L.: *Design and Simulation of a Stand-alone Wind-Diesel Generator with a Flywheel Energy Storage System to Supply the Required Active and Reactive Power.*, Power Electronics Specialists Conference, 2000. PESC 00. 2000 IEEE 31st Annual.
- [10] Krämer E.: *Dynamics of Rotors and Foundations*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [11] Liu H., Jiang J.: *Flywheel energy storage - An upswing technology for energy sustainability*, Energy and Buildings 39 (2007) 599-604.

-
- [12] Mellor P.H., Schofield N., Howe D.: *Flywheel and supercapacitor peak power buffer technologies*, Electric, Hybrid and Fuel Cell Vehicles (Ref. No. 2000/050), IEE Seminar.
- [13] Mertiny P., Ellyin F.: *Influence of the filament winding tension on physical and mechanical properties of reinforced composites*, Composites: Part A 33 (2002) 1615-1622.
- [14] N.N.: *ANSYS Element Reference*, Release 12.0, April 2009.
- [15] Parkus H.: *Mechanik der festen Körper*, 2. Auflage, Springer Verlag, Wien, 2005.
- [16] Rammerstorfer F.G.: *Skriptum zur Vorlesung Grundlagen der Finite Elemente Methoden*, TU-Wien, 2007.
- [17] Rammerstorfer F.G., Hult J.: *Engineering mechanics of fibre reinforced polymers and composite structures*, Springer Verlag, Udine 1994.
- [18] Schweitzer G., Maslen E.H.: *Magnetic Bearings Theory, Design, and Application to Rotating Machinery*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [19] Shen F.C.: *Review A filament-wound structure technology overview*, Material Chemistry and Physics 42 (1995) 96-100.
- [20] Swanson E., Powell C.D., Weissmann S.: *A Practical Review of Rotating Machinery Critical Speeds and Modes*, Sound and Vibration, May 2005.
- [21] Truong L.V., Wolff F.J., Dravid N.V.: *Simulation of flywheel electrical system for aerospace applications*, Energy Conversion Engineering Conference and Exhibit, 2000. (IECEC) 35th Intersociety.
- [22] Tsai S.W.: *Theory of Composites Design*, Think Composites, 1992.
- [23] Tzeng J.T.: *Viscoelastic Analysis of Composite Rotor for Pulsed Power Applications*, IEE Transaction on Magnetics, Vol. 39, No. 1, January 2003.
- [24] von Gellhorn E.: *Die Fertigung von technischen Teilen im Wickelverfahren*, Dissertation RWTH Aachen, 1985.
- [25] Waltz R.A., Morales J.L., Nocedal J., Orban D.: *An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps*, Math. Program., Ser. A 107, 391-408 (2006).
- [26] www.hausderzukunft.at/results.html/id6007 (last seen 21.10.2010).

- [27] www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/optim/ug/fmincon.html
(last seen 21.10.2010).
- [28] www.metalsupermarkets.at (last seen 21.10.2010).
- [29] www.r-g.de (last seen 21.10.2010).
- [30] www.tohotenax-eu.com (last seen 21.10.2010).