

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

MASTERARBEIT

Prognose der Heizlast in Fernwärmenetzwerken

ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dr.techn. Wolfgang Scherrer
und Projektass. Dipl.-Ing. Stefan Großwindhager

durch
LUKAS KÖLBL
Hernalser Hauptstraße 160/14
1170 Wien

Wien, am 3. Mai 2012

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die aus anderen Quellen entnommenen Stellen als solche gekennzeichnet habe.

Wien, am 3. Mai 2012

Lukas Kölbl

Inhaltsverzeichnis

Erklärung	ii
Kurzfassung	v
Danksagung	vi
1 Einleitung	1
1.1 Allgemeines	1
1.2 Gliederung der Arbeit	1
1.3 Empirische Daten: Tannheim/Tirol	2
1.4 The State Space Models toolbox for MATLAB	8
2 Zustandsraummodelle	9
2.1 Einführung	9
2.2 Modellierung	10
2.2.1 Lokal lineares Trendmodell	10
2.2.2 Saisonabhängiges Modell	11
2.2.3 Modell mit intervenierender/erklärender Komponente	13
2.2.4 Zusammenhang SARIMA-Modell/ <i>state space model</i> .	14
2.2.5 Multivariates Modell	15
2.3 Kalman Filter	15
2.3.1 Filterung	15
2.3.2 Glättung	16
2.3.3 Fehlende Beobachtungen	17
2.3.4 Prognose	18
2.3.5 Initialisierung	18
3 Modellvalidierung	23
3.1 Maximum-Likelihood-Schätzung	23
3.2 AIC-BIC Kriterium	24
3.3 Tests	25
3.3.1 Unabhängigkeit	25
3.3.2 Homoskedastizität	26
3.3.3 Normalverteilung	26

3.4	Auxiliary Residuals	27
3.5	Prognosekriterien	28
4	Empirische Analyse	29
4.1	Spezifische Modellkomponenten	29
4.1.1	Grundkomponenten	30
4.1.2	Periodische / tagesabhängige Komponenten	31
4.1.3	Temperaturabhängige Komponenten	31
4.1.4	Realisierte Beobachtungskomponente	33
4.2	Univariate Modelle	36
4.2.1	Modellselektion	36
4.2.2	Analyse	41
4.2.3	Ausreißer/Strukturbrüche	47
4.2.4	Erweiterungen der Modelle	55
4.2.5	Prognose	65
4.2.6	Modellwahl	70
4.3	Multivariates Modell	72
4.3.1	Analyse	72
4.3.2	Prognose	75
4.4	Zusammenfassung	77
A	Analyse der 6 und 9 Uhr Zeitreihe	79
A.1	6 Uhr Zeitreihe	79
A.2	9 Uhr Zeitreihe	88
B	Sonstige Abbildungen	96
	Literaturverzeichnis	105

Kurzfassung

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit der Heizlastprognose für das Biomasse Kraftwerkes in Tannheim (Tirol). Mit Hilfe der Zustandsraummodellierung werden unterschiedliche univariate Modelle vorgestellt und diese auf ihre Erklärungsgüte hin diskutiert. Das Ziel ist, eine entsprechend gute Prognose für die zukünftigen Heizlastwerte in Abhängigkeit von Temperatur, vergangenen Heizlastwerten und Kalendervariationen zu erhalten. Dafür wird auf die Thematik des Kalman Filters mit der Kalman Glättung und der Prognose eingegangen. Ebenfalls werden die Ein-Schritt Prognosefehler und *auxiliary residuals* betrachtet, die zu der Analyse der zu testenden Modelle dienen. Zum Abschluss werden zwei spezielle multivariate Modelle vorgestellt, welche die Prognosegüte verbessern sollen.

Danksagung

Ich möchte mich recht herzlich bei meinem Betreuer Herrn Ao.Univ.Prof. Dr.techn. Wolfgang Scherrer bedanken, welcher in mir nicht nur das Interesse an der Zeitreihenanalyse geweckt, sondern mich auch in den vergangenen Monaten redlich unterstützt hat.

Ebenso möchte ich Herrn Projektass. Dipl.-Ing. Stefan Großwindhager danken, der mir einerseits das Angebot der Masterarbeit unterbreitet und mich andererseits mit Informationen versorgt hat.

Gleichermaßen bin ich meiner Familie zu Dank verpflichtet, die mir dieses Studium erst ermöglicht hat.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Allgemeines

Die Optimierung von Unternehmen spielt in der heutigen Zeit eine größere Rolle als jemals zuvor in der Geschichte. Vor allem auf dem Gebiet der Energieerzeugung sind exakte Prognosen von großer Bedeutung. Insbesondere bei kurzfristigen Prognosen im Bereich zwischen 15 Minuten und 24 Stunden trifft besagtes zu. Diese Prognosen dienen dem Zweck um Überproduktion von Energie zu verhindern bzw. sollen vor einer Unterversorgung der Verbraucher schützen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein optimales Modell zu erstellen, welches die nachkommenden Forderungen befriedigt: Als erstes sollte hinsichtlich der Beobachtungen ein perfekter bzw. optimaler *in sample fit* gegeben sein. Das bedeutet, dass das Modell die beobachteten Daten hinreichend gut beschreibt. Als zweites sollte eine Kausalität zwischen den Modellkomponenten und den beobachteten Wärmelasten gegeben sein, sodass eine sinnvolle Interpretation möglich ist. Ebenso sollte sich so ein Modell „optimal“ bezüglich der Prognose von zukünftigen Wärmelastdaten verhalten.

1.2 Gliederung der Arbeit

Nach der Einleitung in Kapitel 1 wird in Kapitel 2 auf die theoretischen Aspekte dieser Arbeit eingegangen. Es werden die Vorzüge der Zustandsraummodellierung besprochen und der Kalman-Filter mit seinen Eigenschaften behandelt. In Abschnitt 3 steht die Modellvalidierung im Vordergrund. Hierbei werden neben Tests auch Entscheidungshilfen eingeführt, welche die Wahl eines optimalen Modells erleichtern sollen. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der empirischen Analyse der Daten. Es werden ausgewählte Modelle diskutiert und auf ihr Prognosepotential hin untersucht. Dabei kommt es ebenfalls zu einigen Modellerweiterungen, welche den Hintergedanken verfolgen

sollen, sowohl eine erhöhte Erklärungsgüte als auch eine verbesserte Prognose zu realisieren. Zum Abschluss erfolgt noch eine kurze Zusammenfassung der erhaltenen Ergebnisse.

1.3 Empirische Daten: Tannheim/Tirol

Die Datengrundlage, welche für diese Masterarbeit zur Verfügung gestellt wurde, stammt vom Biomasse-Heizwerk aus Tannheim. Betreiber dieser Anlage ist die Firma Energiecomfort GmbH, welche eine Tochterfirma der Wien Energie GmbH ist.

Tannheim ist eine kleine Touristengemeinde im Bezirk Reutte im Westen von Tirol mit circa 1.100 Einwohner. Das Kraftwerk versorgt bis zu 84 Einrichtungen, von denen sich ein Großteil aus privaten Haushalten, Hotels und Gästezimmern zusammensetzt (vgl. [13]). Die Energie, welche das Kraftwerk für die Verbraucher bereitstellt, wird aus einem Biomassekessel - insbesondere dient für die Verbrennung Holz - gewonnen. Dieser liefert eine Leistung von bis zu 2500 kW. Zusätzlich kann ein Ölkessel dazugeschalten werden, um eine höhere Energieproduktion abzudecken.

Das Rohrsystem für die Wärmeversorgung umfasst in diesem Fall annähernd eine Gesamtlänge von 7.3 km, wobei Wasser als Übertragungsmedium verwendet wird. Dadurch fällt es in die Klasse der Fernwärmekraftwerke, welche die gewonnene Energie mit Hilfe von Fernwärmerohren in einem Kreislaufsystem an den Endverbraucher mit einem gewissen Massenfluss liefern. Bei dieser Übertragung kommt es jedoch trotz Isolierung zu einem Wärmeverlust. Die übertragene Energie kann einerseits zu Heizungszwecken und andererseits für die Warmwasserversorgung eingesetzt werden. Von Seiten des Kraftwerkes können zwei Komponenten verändert werden um einen gewünschten Energiebedarf zu befriedigen: Zum einen kann die notwendige Energie durch Verbrennung erzeugt und zum anderen kann der Massenfluss verändert werden. Die folgende Gleichung fasst die obigen Tatsachen zusammen (vgl. [4]):

$$Q_{bio} + Q_{oil} + P_{pump} = c_p \dot{m} (T_s - T_r) + Q_{loss} \quad (1.1)$$

wobei Q_{bio} und Q_{oil} für die Leistung des Kraftwerks des Biomassekessels bzw. des Ölkessels in J/s, \dot{m} für den Massenfluss in kg/s, c_p für spezifische Wärmekapazität in J/(kg·K), Q_{loss} für den Wärmetransportverlust durch die Rohre, T_s bzw. T_r für die Vorlauf- bzw. Rücklauftemperatur und P_{pump} für die Leistung, welche für die Zirkulation des Wasser benötigt wird, steht.

Die Datenmessungen der Heizlastwerte $Q_{bio} + Q_{oil}$ (in kW) von dem Biomasse-Kraftwerk wurden in 15-minütigen Abständen beginnend von

1. Jänner 2007 bis 30. Juni 2010 durchgeführt (Q_t^{ges} , $t = 1, \dots, 122592 = n_{ges}$). Ebenso wurde die Außentemperatur zu den selben Zeitpunkten erhoben (T_t^{ges} , $t = 1, \dots, n_{ges}$). Unter der 12 Uhr Zeitreihe der Heizlastwerte wird in dieser Masterarbeit jene Zeitreihe verstanden, bei der an jedem Tag der Heizlastwert um 12 Uhr aus der gesamten Zeitreihe herausextrahiert wurde. Analog verhält es sich zu den anderen Zeitpunkten ($Q_t^i = Q_{i+96(t-1)}^{ges}$; $i = 1, \dots, 96$; $t = 1, \dots, 1277$) bzw. zu der Temperaturzeitreihe ($T_t^i = T_{i+96(t-1)}^{ges}$; $i = 1, \dots, 96$; $t = 1, \dots, 1277$). Die Abbildung 1.1 zeigt die 12 und die 20 Uhr Zeitreihe von 1. Jänner 2007 bis 31. Dezember 2009 (oben) bzw. einen Teilausschnitt von 1. Jänner 2007 bis 31. Dezember 2007 (unten). Wie zu erwarten, lässt sich ein wiederkehrender saisonaler Effekt bei diesen zwei Zeitreihen erkennen. Dieser Effekt fällt während der Kälteperioden im Winter am höchsten und im Sommer am niedrigsten aus. Darüber hinaus ist auf dem Teilausschnitt ersichtlich, dass fehlende Beobachtungswerte, unter anderem im Monat Februar 2007, vorliegen. Diese nicht vorhandenen Beobachtungen sind aber für die weitere Analyse nicht relevant (vgl. 2.3.3).

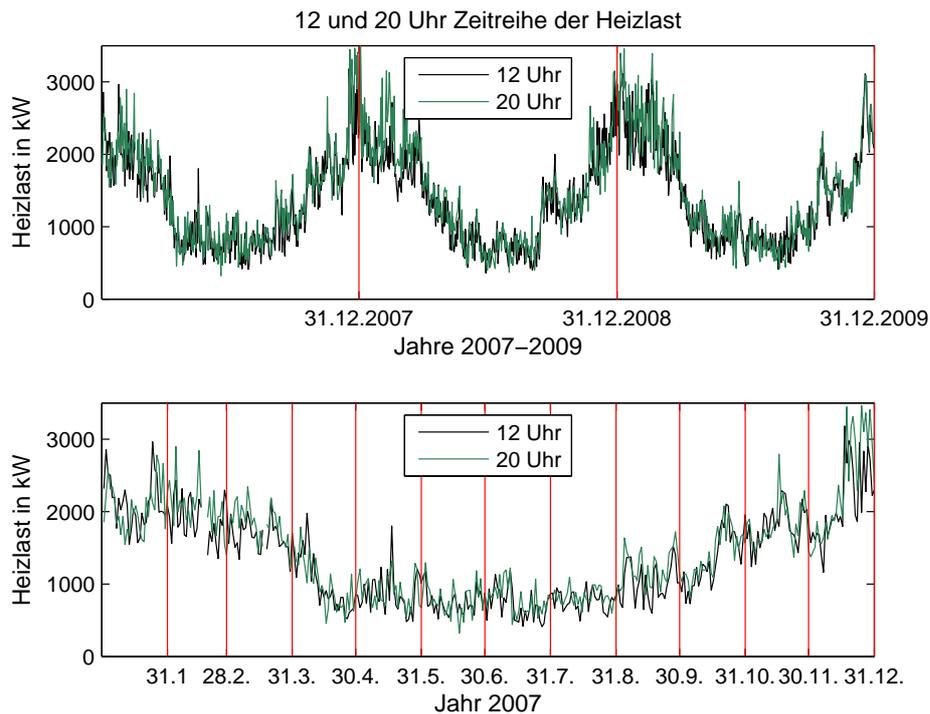


Abbildung 1.1: 12 und 20 Uhr Zeitreihe der Heizlastwerte im Zeitraum von 1.1.2007 bis 31.12.2009 (oben) bzw. von 1.1.2007 bis 31.12.2007 (unten)

In Abbildung 1.2 sind die Heizlastwerte der 12 Uhr Zeitreihe von 1.4.2007 bis 31.5.2007 und die Heizlast von 1.4.2007 bis 3.4.2007 abgebildet. Der graue

Bereich in der oberen Grafik hebt die Heizlast während den Wochenenden (Freitag bis Sonntag) graphisch hervor. Auffallend an dieser Grafik sind die enormen Heizlastwerte zu Beginn des Ausschnittes (ca. 1. - 11. April) und am 17. Mai im Vergleich zu den restlichen Tagen. Bei diesen Tagen ist es möglich, dass auf Grund von Feiertagen (1.4. - 11.4. Ostern, 17.5. Christi Himmelfahrt) es zu erhöhten Lastwerten gekommen ist. Es kann somit angenommen werden, dass neben der Außentemperatur auch die Kalendertage einen nicht unwesentlichen Einfluss auf die Heizlast haben.

In der unteren Grafik von Abbildung 1.2 ist der Tageszyklus der Heizlast von 1.4.2007 bis 3.4.2007 abgebildet, wobei der graue Bereich der Unterteilung der drei Tage dient. Man beachte hierbei, dass am Vormittag von 6 bis 12 Uhr die Heizlast wesentlich höher als zu den anderen Tageszeitpunkten ist. Dieser Sachverhalt lässt sich auch in Abbildung B.1 (siehe Anhang) erkennen bei der die durchschnittlichen vierteltägigen Heizlastwerte des Zeiraumes von 1.1.2007 bis 31.5.2007 abgebildet sind. Die rote Linie gibt den Verlauf der durchschnittlichen Heizlast von 6 bis 12 Uhr des besagten Zeiraumes an.

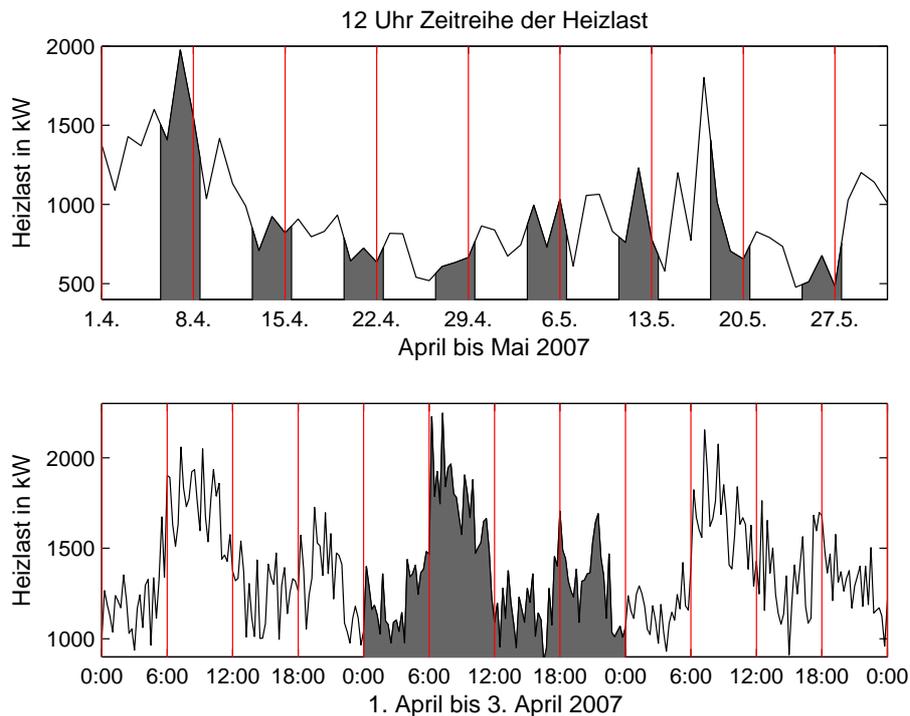


Abbildung 1.2: 12 Uhr Zeitreihe der Heizlastwerte im Zeitraum von 1.4.2007 bis 31.5.2007 (oben) und die Heizlast von 1.4.2007 bis 3.4.2007 (unten)

Das geglättete Periodogramm der Heizlast der 12 Uhr Zeitreihe ist in Abbildung 1.3 dargelegt und exemplarisch sind interessante *peaks* hervorgehoben. Es lässt sich erkennen, dass ein lokales Maxima in dem Frequenzbereich von 0.13 bis 0.14 vorhanden ist. Dies entspricht ungefähr einer Periode von sieben Tagen, was somit einem Wochenzyklus gleicht. Ebenfalls sind lokale Maxima zu den Frequenzbändern von 0.24 bis 0.245 (4 Tage), von 0.045 bis 0.05 (21 Tage) und ab 0.04 (25 Tage) wahrzunehmen. Die Frequenz 0.0027 steht repräsentativ für einen Jahreszyklus von 365 Tagen.

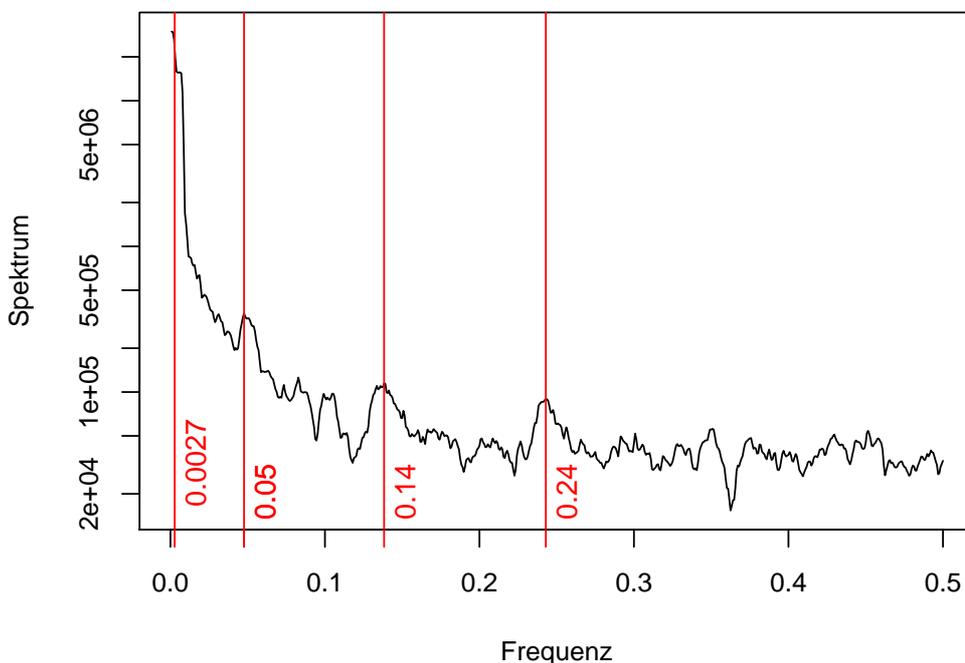


Abbildung 1.3: Periodogramm der Heizlast der 12 Uhr Zeitreihe

Im Gegensatz zu den Heizlastwerten stellen fehlende Beobachtungen bei den Außentemperaturen eine nicht unwesentliche Rolle dar, da diese in der empirischen Analyse als erklärende Komponente in das Zustandsraummodell einfließen. Eine Möglichkeit diese Diskrepanz der fehlenden Beobachtungen zu umgehen bestünde darin, den letzten vorhanden Wert fortzusetzen bis ein neuer Wert verfügbar ist. Aufgrund der enormen Anzahl an fehlenden Temperaturwerten (8385 von 122592) ist dies jedoch kein geeigneter Ansatz. Vielmehr wird ein AR-Modell mit der Ordnung 484 für die gesamte Außentemperatur identifiziert und die fehlenden Beobachtungen prognostiziert (vgl. Abbildung 1.4).

Die Tabelle 1.1 gibt eine Auflistung der wichtigsten statistischen Kennzah-

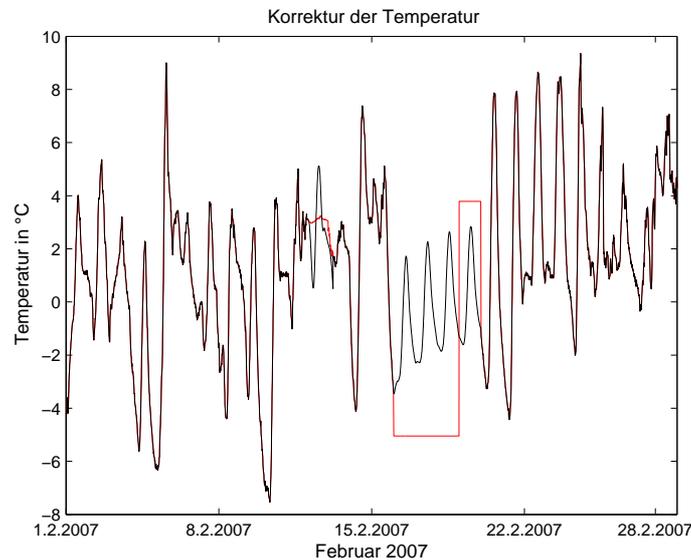


Abbildung 1.4: Außentemperatur des Monats Februar 2007 mit einer konstanten Weiterführung der fehlenden Werte (rot) bzw. mit der AR(484) Schätzung (schwarz)

len wieder. Sowohl der Mittelwert als auch der Median der Temperatur der 12 Uhr Zeitreihe liegen über den dazugehörigen Statistiken der gesamten Zeitreihe. Ebenso verhält es sich mit den Werten der Heizlast. Interessant in Hinsicht auf den Heizungsfaktor (vgl. Kapitel 4.1 und Abbildung 1.6) ist, dass mehr als ein Viertel der Außentemperaturdaten der 12 Uhr Zeitreihe größer als 15 Grad ist. Es ist zu erkennen, dass 21 fehlende Beobachtungen der Heizlast der 12 Uhr Zeitreihe enthalten sind was einen Anteil von ungefähr 2 % ausmacht. Insgesamt fehlen 2565 Beobachtungen (2 %).

Daten	Min.	1. Qu.	Median	Mittel	3. Qu.	Max.	NA's
Heizl. ges.	164	829	1266	1406	1862	4031	2565
Heizl. (12 Uhr)	359.0	865.8	1305.5	1413.4	1884.5	3540	21
Temp. ges.	-20.69	0.36	5.92	6.01	12.46	28.62	
Temp. (12 Uhr)	-14.78	2.54	8.54	8.61	15.40	27.55	

Tabelle 1.1: Statistiken der Heizlast und der Temperatur

In Abbildung 1.5 wird die 12 und die 20 Uhr Zeitreihe der Außentemperaturwerte dargestellt. Wie auch schon bei den Heizlastwerten lässt sich der saisonale Effekt gut erkennen.

Grafik 1.6 gibt ein Streudiagramm zwischen den Heizlastwerten und den Temperaturwerten zwischen 1. Jänner 2007 und 31. Dezember 2009 wieder. Die dunkelgrüne Gerade steht hierbei für die Kleinste-Quadrate-Gerade um die Abhängigkeit dieser beiden Komponenten noch besser hervorzuheben. Auffallend ist, dass sich im rechten unteren Viertel ab einer Temperatur von ungefähr 15 Grad dieser Zusammenhang offenbar verändert hat (vgl. [1]). Diesen Sachverhalt könnte man zum Beispiel damit erklären, dass ab dieser Grenze die Temperaturen zu hoch sind und keine bzw. weniger Energie für Heizungszwecke benötigt werden. In Abbildung 1.6 ist dies anhand der zwei Kleinste-Quadrate-Regressionsgeraden veranschaulicht. Die rote Gerade gibt den linearen Zusammenhang zwischen den Temperaturen kleiner gleich als 15 Grad und den sich deckenden Heizlastwerten an. Die blaue Gerade entsprechend den Temperaturen größer als 15 Grad. Abschließend ist zu erwähnen,

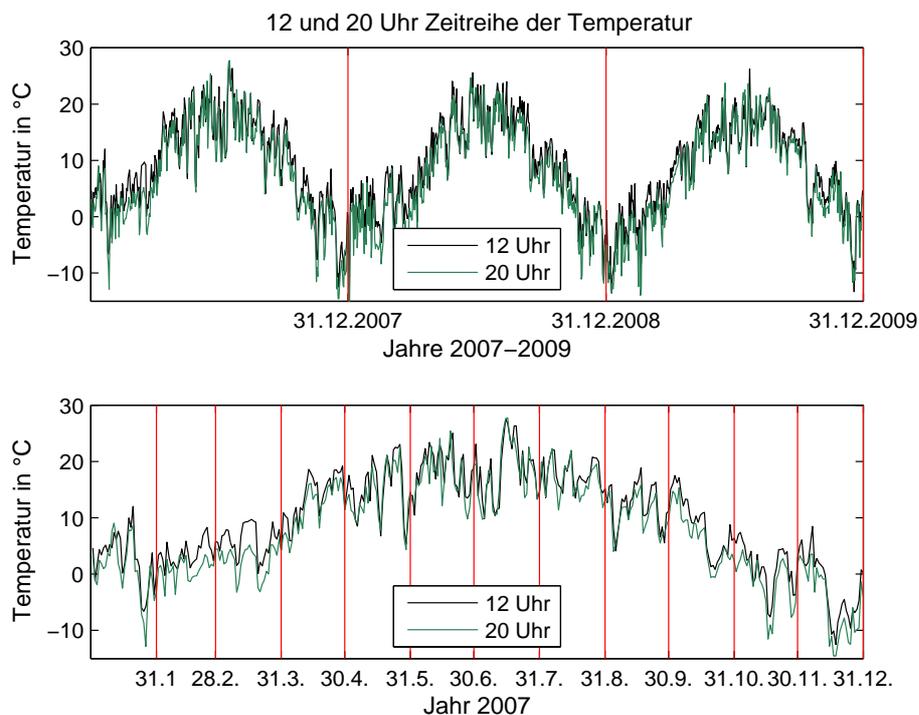


Abbildung 1.5: 12 und 20 Uhr Zeitreihe der Außentemperatur im Zeitraum von 1.1.2007 bis 31.12.2009 (oben) bzw. von 1.1.2007 bis 31.12.2007 (unten)

dass neben der Heizlast und der Temperatur weitere wetterabhängige bzw. verbraucherbezogene Daten wünschenswert wären. Diese könnten beispielsweise die Beschaffenheit der Wolkendichte, Windstärke, Sonneneinstrahlung, Schneelage bzw. Anzahl der Verbraucher über den Zeitverlauf usw. beinhalten.

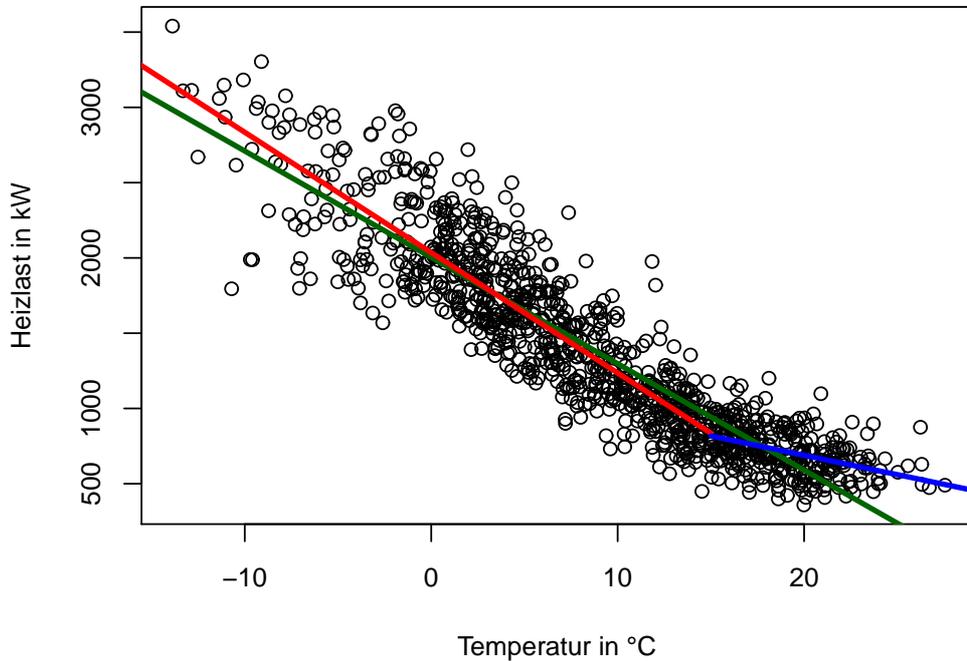


Abbildung 1.6: Streudiagramm der Heizlastwerte gegen Außentemperatur der 12 Uhr Zeitreihe

1.4 The State Space Models toolbox for MATLAB

Ein Großteil dieser Arbeit wurde in R 2.14.1 [11] bzw. in Matlab R2011b mit Hilfe der Toolbox „State Space Models“ [8] realisiert. Diese Toolbox ist in Anlehnung an [6] entwickelt worden und geht deswegen mit derselben Notation einher. Ein weiterer großer Vorteil dieser Toolbox gegenüber anderen Implementierungen von Zustandsraummodellen - beispielsweise in R (vgl. [16]) - ist, dass neben vorgefertigten Modellkomponenten, sowohl der univariate als auch der multivariate Fall unterstützt werden. Darüber hinaus können unbekannte Varianzen geschätzt bzw. Startwerte für diese Schätzung angegeben werden. Neben dem Kalman-Filter und der Kalman-Glättung beinhaltet diese Toolbox ebenfalls die Fehlerglättung sowie die Prognose von zukünftigen Beobachtungen. Außerdem wird die exakte diffuse Initialisierung unterstützt und es können auch zeitabhängige Transformationsmatrizen in das System eingebunden werden.

Kapitel 2

Zustandsraummodelle

Im folgenden Kapitel wird das Konzept des linearen gaußschen *state space model* (dt. Zustandsraummodell) vorgestellt. Das Kapitel 2.2 verweist dabei auf die unterschiedlichen Variablentypen, welche in den Zustandsvektor einfließen. Des Weiteren wird im Unterkapitel 2.3 der Kalman Filter näher erläutert und auf seine flexiblen Eigenschaften bezüglich fehlender Beobachtungen in der Zeitreihe 2.3.3, Forecasting 2.3.4 und seiner Initialisierung 2.3.5 hingewiesen. Der Großteil dieses Kapitels ist, falls nicht anderes gekennzeichnet, aus [6] übernommen.

2.1 Einführung

Als Ausgangspunkt wird das *state space model* eingeführt:

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + \epsilon_t & \epsilon_t &\sim N(0, H_t) \\ \alpha_{t+1} &= T_t \alpha_t + R_t \eta_t & \eta_t &\sim N(0, Q_t) \quad t = 1, \dots, n \\ & & \alpha_1 &\sim N(a_1, P_1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Der $p \times 1$ Vektor y_t wird als Beobachtungsvektor und der $m \times 1$ Vektor α_t als Zustandsvektor bezeichnet. Die Fehlerterme ϵ_t (Dimension $p \times 1$) und η_t ($r \times 1$) werden als normalverteilte stochastische Größen mit Erwartungswert 0 und den Kovarianzen H_t bzw. Q_t angenommen. Falls die Kovarianzen H_t ($p \times p$) und Q_t ($r \times r$) unabhängig von t sind, so spricht man von einem autonomen Zustandsraummodell. Diese Varianzmatrizen werden zunächst als gegeben vorausgesetzt. In Kapitel 3.1 wird die Annahme der Gegebenheit fallen gelassen und auf die Thematik des Schätzens dieser Matrizen näher eingegangen. Des Weiteren unterstellt man den Fehlervektoren, dass sie sowohl serienmäßig in der Zeit ($\mathbb{E}\epsilon_t \epsilon_k^T = 0$, $\mathbb{E}\eta_t \eta_k^T = 0$; $t \neq k$; $t, k = 1, \dots, n$) als auch untereinander zu allen Zeitpunkten ($\mathbb{E}\epsilon_t \eta_k^T = 0$; $t, k = 1, \dots, n$) unabhängig sind. Während die Matrizen Z_t ($p \times m$), T_t ($m \times m$) als zeitabhängige Transformationsmatrizen des Zustandsvektors angesehen werden

können, wird die Matrix R_t ($m \times r$) als Selektionsmatrix bezeichnet. Die Bezeichnung der Matrix R_t beruht darauf, da diese mit Hilfe von Einheitsvektoren diejenigen Zeilen der Zustandsgleichung auswählt, welche einen nicht degenerierten Fehler aufweisen. Die Matrizen Z_t , T_t und R_t werden als bekannt vorausgesetzt.

Die erste Gleichung wird als *observation equation* (dt: Beobachtungsgleichung), welche den Zusammenhang zwischen dem Zustandsvektor und dem Beobachtungsvektor beschreibt und die zweite als *state equation* (dt: Zustandsgleichung) bezeichnet. Die Initialisierung des Zustandes α_1 erfolgt dabei durch die dritte Gleichung, wobei der Vektor a_1 ($m \times 1$) und die Matrix P_1 ($m \times m$) zunächst ebenfalls als gegeben vorausgesetzt werden. Zu einem späteren Zeitpunkt - Kapitel 2.3.5 - wird auf diese Voraussetzung verzichtet und die exakte Initialisierung vorgestellt. Für die Initialisierungsvariable α_1 wird angenommen, dass sie von den zukünftigen Fehlertermen η_t und ϵ_t unabhängig ist.

Die Grundidee des *state space model* liegt darin, dass man dem System eine nicht beobachtbare Dynamik (α_t) unterstellt, welche sich mit der *state equation* von t nach $t + 1$ weiter generiert und dabei von stochastischen Innovationen beeinflusst wird. Der Zusammenhang zwischen α_t und y_t ist wiederum durch die *observation equation* gegeben, wobei hier eine Fehlerbehaftung durch ϵ_t unterstellt wird.

2.2 Modellierung

Im folgenden Unterkapitel werden die verschiedensten Grundmodellierungsarten vorgestellt und schrittweise in einem fiktiven Modell aufgearbeitet. Um die Modelle zu vereinfachen wird der multivariate Fall vernachlässigt und nur der univariate Fall ($p=1$) betrachtet. Des Weiteren werden nur autonome Systeme betrachtet.

2.2.1 Lokal lineares Trendmodell

Das *local level model* (dt: lokal lineare Trendmodell) stellt das einfachste *state space model* dar. Dabei wird angenommen, dass die Zustandsvariable nur aus einer Trendvariable μ_t besteht. Im Folgenden wird dieses Modell immer als Grundmodell herangezogen:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \epsilon_t & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \eta_t & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad t = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Das Modell wird ebenfalls als *random walk plus noise* bezeichnet, da sich die Beobachtung y_t einerseits aus einem Trend, welcher durch einen Random Walk (falls $\sigma_\eta^2 > 0$) beschrieben wird und andererseits aus einem Fehler (ϵ_t) zusammensetzt. Unter der Annahme, dass die Zufallsvariable η_t degeneriert

($\sigma_\eta^2 = 0$) ist, folgt: $\mu_{t+1} = \mu_t$ und somit $y_t = \mu_1 + \epsilon_t$. Dieses Modell wird als ein deterministisches Modell bezeichnet, da sich der Zustandsvektor nicht mehr über die Zeit verändert und somit nur noch vom Startwert abhängt. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass der Startwert α_1 eine stochastische Größe darstellt.

Durch hinzufügen einer Driftvariable ν_t erhält man eine Erweiterung dieses Modells nämlich das *local level model with drift* (dt: lokal lineares Trendmodell mit Drift):

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \epsilon_t & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \nu_t + \eta_t & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad t = 1, \dots, n \\ \nu_{t+1} &= \nu_t + \xi_t & \xi_t &\sim N(0, \sigma_\xi^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

bzw. in Matrizenform:

$$\begin{aligned} y_t &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \mu_t \\ \nu_t \end{pmatrix} + \epsilon_t \\ \begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \nu_{t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \nu_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

An dieser Stelle ist anzumerken, dass das lokal lineare Trendmodell (Ordnung 0) bzw. seine Erweiterung das lokal lineare Trendmodell mit Drift (Ordnung 1) Spezialfälle der Klasse der Modelle mit polynomialen Trend sind.

2.2.2 Saisonabhängiges Modell

Als nächstes wird das Modell mit einer saisonabhängigen Variable γ_t erweitert. Die Variable dient dazu einen Zyklus in das Modell einfließen zu lassen. Zu diesem Zweck werden zwei Modellierungstypen vorgestellt, wobei die Periode in diesem Zusammenhang mit s bezeichnet wird.

Zunächst wird angenommen, dass sich das saisonale Muster nicht über die Zeit verändert, womit sich die Saisonkomponenten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ aus der Bedingung $\sum_{j=1}^s \gamma_j = 0, \gamma_{t+s} = \gamma_t$ bzw. anders aufgeschrieben $\gamma_{t+1} = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t+1-j}$ ergibt. Erweitert man diese Komponente mit einem stochastischen Fehlerterm ($\omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2)$), so folgt eine *state space* Darstellung

(inkl. *local level model*) durch:

$$y_t = (1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \begin{pmatrix} \mu_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \end{pmatrix} + \epsilon_t \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \gamma_{t+1} \\ \gamma_t \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \omega_t \end{pmatrix}$$

Die zweite Art basiert auf einer trigonometrischen Form, welche auch für die empirische Analyse in Kapitel 4 verwendet wird:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{[s/2]} \gamma_{j,t} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{j,t+1} = \gamma_{j,t} \cos(\lambda_j) + \gamma_{j,t}^* \sin(\lambda_j)$$

$$\gamma_{j,t+1}^* = -\gamma_{j,t} \sin(\lambda_j) + \gamma_{j,t}^* \cos(\lambda_j)$$

mit $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$ und $j = 1, \dots, [s/2]$, wobei $[.]$ die Gaußklammer bezeichnet. Um eine stochastische Erweiterung zu erhalten, können die Zustandsgleichungen um stochastische Fehlerterme ergänzt werden. Es ergibt sich ein *quasi-random walk model*:

$$\gamma_{j,t+1} = \gamma_{j,t} \cos(\lambda_j) + \gamma_{j,t}^* \sin(\lambda_j) + \tilde{\omega}_{j,t}$$

$$\gamma_{j,t+1}^* = -\gamma_{j,t} \sin(\lambda_j) + \gamma_{j,t}^* \cos(\lambda_j) + \tilde{\omega}_{j,t}^*$$

Die Fehlerterme $\tilde{\omega}_{j,t}^*$ bzw. $\tilde{\omega}_{j,t}$ sind dabei voneinander unabhängig und $N(0, \sigma_{\tilde{\omega}}^2)$ verteilt.

Bei großen Perioden wird anstelle einer klassischen saisonabhängigen Variable der sogenannte *cycle* (Zyklus) c_t verwendet. Dies ergibt sich, da eine große Periode in der Darstellung (2.5) oder (2.6) große Dimensionen des dazugehörigen Zustandsvektors bzw. dessen Transformationsmatrizen impliziert (z.B. falls es sich bei den zugrunde liegenden Daten um eine Tageszeitreihe handelt und eine Jahresperiode $s = 365$ in der Darstellung (2.5) gewählt werden würde, so hätte dies zur Folge, dass sich für die Matrix T_t die Dimension 364×364 ergibt), was sich wiederum schlecht auf die Performance des Modells niederschlägt. Eine Form des *cycle* mit Fehlerterm lautet:

$$c_{t+1} = c_t \cos(\lambda_c) + c_t^* \sin(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{1,t}, \quad (2.7)$$

$$c_{t+1}^* = -c_t \sin(\lambda_c) + c_t^* \cos(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{2,t},$$

Die Fehlerterme $\tilde{\omega}_{1,t}$ bzw. $\tilde{\omega}_{2,t}$ sind dabei voneinander unabhängig und $N(0, \sigma_{\tilde{\omega}}^2)$ verteilt. Die Periode $2\pi/\lambda_c$ kann sowohl als bekannt, aber auch als unbekannt angenommen werden und im unbekanntem Fall mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Schätzungsmethode geschätzt werden.

2.2.3 Modell mit intervenierender/erklärender Komponente

Eine Interventionsvariable dient dazu um eine Veränderung im Level zu einem bestimmten Zeitpunkt τ zu modellieren. Die gängigsten drei Varianten der intervenierenden Variable sind:

$$\begin{aligned} \text{level shift} \quad w_t = 0, & \quad t < \tau \\ & = 1, \quad t \geq \tau \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{pulse intervention} \quad w_t = 0, & \quad t < \tau, t > \tau \\ & = 1, \quad t = \tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{slope intervention} \quad w_t = 0, & \quad t < \tau \\ & = 1 + t - \tau, \quad t \geq \tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Hierbei steht ein 0-Eintrag für den Normalzustand des Systems, welcher zu einem bestimmten Zeitpunkt durch einen 1-Eintrag gestört wird. Während ein *level shift* bzw. eine *slope intervention* bei einer andauernden Intervention angewandt werden, wird eine *pulse intervention* für eine kurzfristige oder nur zu einem Zeitpunkt auftretenden Intervention verwendet. Eine Interventionsvariable wird wie folgt in das *state space model* (inkl. *local level model*) integriert:

$$\begin{aligned} y_t &= (1 \quad w_t) \begin{pmatrix} \mu_t \\ \lambda \end{pmatrix} + \epsilon_t \\ \begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Variable λ beschreibt in diesem Zusammenhang den Einfluss der jeweiligen Intervention und kann - falls erwünscht - ebenfalls über die Zeit variieren ($\lambda_{t+1} = \lambda_t + \kappa_t, \kappa_t \sim N(0, \sigma_{\kappa}^2)$).

Als Beispiel wird auf [7] verwiesen wo die Zeitreihe der Autounfallopfer mit tödlichem oder schwer verletztem Ausgang in England von Jänner 1969 bis Dezember 1984 untersucht wurde. Dabei wurde eine Interventionsvariable der Art (2.8) in das Zustandsraummodell integriert. Diese spiegelte den Gesetzesbeschluss der englischen Regierung wider, welche das Anlegen des Sicherheitsgurtes verpflichtete und somit einen signifikanten *level shift* in der Zeitreihe zur Folge hatte.

Ähnlich wie bei den intervenierenden Variablen lassen sich auch erklärende Variablen $x_{1,t}, x_{2,t}, \dots$ in das *state space model* integrieren, um den direkten Effekt in die Entwicklung des Systems einfließen zu lassen. Möchte man k erklärende Variablen in das Modell aufnehmen so lautet die Darstellung:

$$y_t = \sum_{j=1}^k \beta_{j,t} x_{j,t} + \epsilon_t \quad (2.12)$$

$$\beta_{j,t+1} = \beta_{j,t} + \tau_{j,t}, j = 1, \dots, k$$

Die Fehlerterme $\tau_{j,t}$ sind dabei unabhängig und $N(0, \sigma_\tau^2)$ verteilt.

2.2.4 Zusammenhang SARIMA-Modell/*state space model*

Da diese Arbeit eine Weiterführung von [14] darstellt, soll noch kurz auf den Zusammenhang zwischen dem *state space model* und dem Box und Jenkins Ansatz, insbesondere auf das *seasonal autoregressive integrated moving average* (SARIMA) Modell hingewiesen werden. Unter einem SARIMA Modell wird folgendes verstanden (vgl. [10]): x_t ist ein SARIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ Prozess mit Periode s , falls die differenzierte Serie $y_t = (1 - B)^d (1 - B^s)^D x_t$ ein ARMA Prozess ist mit

$$\phi(B)\Phi(B^s)y_t = \theta(B)\Theta(B^s)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \quad (2.13)$$

wobei $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$, $\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \dots - \Phi_P z^P$, $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ und $\Theta(z) = 1 + \Theta_1 z + \dots + \Theta_Q z^Q$. Die Parameter d und D stehen für zwei nichtnegative ganzzahlige Zahlen und B ist der *lag operator*: $By_t = y_{t-1}$. Es kann gezeigt werden, dass jedes SARIMA-Modell in *state space* Form umgewandelt werden kann.

In der Arbeit [14] wurden die halbstündigen, außentemperaturbereinigten Heizlastdaten des Kraftwerks in Tannheim untersucht. Dabei wurde ein SARIMA $(2, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{48}$ Modell identifiziert. Eine Überführung dieses Modells in ein Zustandsraummodell kann in [5] nachgelesen werden und wird auf Grund der Übersichtlichkeit hier nicht wiedergegeben.

Vielmehr soll noch kurz über die Vorteile bzw. die Nachteile zwischen diesen zwei Ansätzen diskutiert werden: Ein großer Vorteil eines Zustandsraummodells gegenüber eines Box-Jenkins-Modells besteht in der anpassungsfähigen und einfachen Modellierung. Es können unterschiedlichste Komponenten vorab modelliert und unabhängig in das Modell zusammengeführt werden. Andererseits basieren Box-Jenkins-Modelle auf der Annahme der Stationarität, was wiederum viele wünschenswerte Eigenschaften mit sich bringt.

Als Nachteil dieser Modellierungsart wäre jedoch die Inflexibilität gegenüber fehlenden Beobachtungen, die erschwerte Integration von Kalendervariationen oder etwa die Rückführung von trendbereinigten Beobachtungen zu nennen.

2.2.5 Multivariates Modell

Der univariate Fall lässt sich ohne große Umwege auf den multivariaten Fall verallgemeinern. Dies geschieht indem die einzelnen univariaten Zustands- und Beobachtungsgleichungen unabhängig voneinander in ein mehrdimensionales Modell zusammengefasst werden, jedoch die Fehler über die Varianzen in Abhängigkeit stehen. Dies ist der Grund warum multivariate Modelle auch *seemingly unrelated time series equations models* (vgl. [2]) genannt werden. Als Beispiel dient das zweidimensionale *local level model*:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_{t,1} \\ y_{t,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t,1} \\ \mu_{t,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{t,1} \\ \epsilon_{t,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mu_{t+1,1} \\ \mu_{t+1,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t,1} \\ \mu_{t,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{t,1} \\ \eta_{t,2} \end{pmatrix} \\ H &= \begin{pmatrix} \sigma_{\epsilon,1,1}^2 & \sigma_{\epsilon,1,2}^2 \\ \sigma_{\epsilon,2,1}^2 & \sigma_{\epsilon,2,2}^2 \end{pmatrix} & Q = \begin{pmatrix} \sigma_{\eta,1,1}^2 & \sigma_{\eta,1,2}^2 \\ \sigma_{\eta,2,1}^2 & \sigma_{\eta,2,2}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit $\epsilon_t \sim N(0, H)$ und $\eta_t \sim N(0, Q)$.

Zum Abschluss sei noch darauf hingewiesen, dass die verschiedenen Variablentypen sowohl im univariaten als auch im multivariaten Fall beliebig in ein System integriert werden können. Jedoch gilt es die Anzahl der Variablen, wenn möglich, gering zu halten, unnötige Variablen aus dem Modell zu entfernen und falls es zu einer Hinzunahme einer neuen Variable in das System kommt, sollte ein kausaler Zusammenhang gegeben sein.

2.3 Kalman Filter

In diesem Unterkapitel wird der Kalman Filter, welcher von dem Mathematiker Rudolf Emil Kälman im Jahr 1960 entwickelt wurde, eingeführt und mit dem Konzept der Glättung erweitert. Es wird auf die Thematik fehlender Beobachtungen, ihren Zusammenhang bezüglich *forecasting* und auf das Thema Initialisierung bei unbekanntem Startwerten näher eingegangen.

2.3.1 Filterung

Zunächst sei angenommen, dass die Verteilung des Startzustandes $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$ bekannt ist. Das Ziel ist es nun die bedingte Verteilung der Folgezustände $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ zu berechnen. Zu diesem Zweck werden die folgenden Ausdrücke definiert: $a_{t+1} := \mathbb{E}(\alpha_{t+1}|Y_t)$ und $P_{t+1} := \text{Var}(\alpha_{t+1}|Y_t)$, wobei $Y_t := \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$. Da der Startzustand α_1 und alle Fehlerterme ϵ_t und η_t normalverteilt sind, folgt dass die bedingte Verteilung der Folgezustände $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ ebenfalls normalverteilt ist, womit $(\alpha_t|Y_{t-1}) \sim N(a_t, P_t)$ gilt. Der

Ein-Schritt Prognosefehler des Systems wird mit v_t benannt und lässt sich auf folgende Art berechnen:

$$v_t = y_t - \mathbb{E}(y_t|Y_{t-1}) = y_t - \mathbb{E}(Z_t\alpha_t + \epsilon_t|Y_{t-1}) = y_t - Z_t a_t$$

Der Kalman Filter liefert nun in einem rekursiven Verfahren die gesuchten Parameter der jeweiligen bedingten Verteilung der α_t :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= T_t a_t + K_t v_t & F_t &= Z_t P_t Z_t^T + H_t \\ K_t &= T_t P_t Z_t^T F_t^{-1} & L_t &= T_t - K_t Z_t & t = 1, \dots, n \\ v_t &= y_t - Z_t a_t & P_{t+1} &= T_t P_t L_t^T + R_t Q_t R_t^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei $F_t = \text{Var}(v_t)$. Die erste Gleichung in (2.15) fungiert dabei sowohl als Übergangsgleichung von a_t nach a_{t+1} , als auch eine Art Korrekturgleichung, welche das System korrigiert, wenn eine neue Beobachtung in das System einfließt (siehe 2.3.3 und 2.3.4). Die Matrix K_t steht in diesem Zusammenhang als Korrekturmatrix, welche die Gewichtung des Fehlers v_t widerspiegelt. Auf Grund der recht einfachen Implementierung, findet der Kalman Filter ein breites Anwendungsgebiet (vgl. [12]).

2.3.2 Glättung

Im Folgenden wird auf die Kalman Glättung eingegangen. Der große Unterschied gegenüber dem Filter besteht darin, dass zu jedem Zeitpunkt alle Beobachtungen y_1, y_2, \dots, y_n als bekannt vorausgesetzt werden. Wie auch schon bei der Filterung wird die Verteilung des Startwertes $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$ als gegeben angenommen.

Zustandsglättung

Bei der Zustandsglättung (*state smoothing*) besteht das Ziel darin eine Rekursion für die Schätzer $\hat{\alpha}_t := \mathbb{E}(\alpha_t|Y_n)$ und $V_t := \text{Var}(\alpha_t|Y_n)$ herzuleiten. Es ergeben sich folgende rekursive Gleichungen:

$$\begin{aligned} r_{t-1} &= Z_t^T F_t^{-1} v_t + L_t^T r_t, & N_{t-1} &= Z_t^T F_t^{-1} Z_t + L_t^T N_t L_t \\ \hat{\alpha}_t &= a_t + P_t r_{t-1}, & V_t &= P_t - P_t N_{t-1} P_t & t = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei $r_n = 0$ und $N_n = 0$. Die Matrizen P_t, F_t und K_t , sowie die Vektoren a_t und v_t ergeben sich wiederum aus dem Kalman Filter. Somit ist es notwendig zuerst eine Vorwärtsrekursion anhand des Kalman Filters durchzuführen und anschließend mit Hilfe der erhaltenden Terme die Glättung anzuwenden, welche einer Rückwärtsrekursion gleicht.

Fehlerglättung

Während bei der Zustandsglättung der Zustand α_t in Abhängigkeit der Y_n zu schätzen versucht wird, möchte man hierbei die Fehlerterme ϵ_t und η_t in Abhängigkeit der Y_n schätzen. Die Schätzer bei der Fehlerglättung (*disturbance smoothing*) lassen sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_t &= H_t(F_t^{-1}v_t - K_t^T r_t) & \text{Var}(\epsilon_t|Y_n) &= H_t - H_t(F_t^{-1} + K_t^T N_t K_t)H_t \\ \hat{\eta}_t &= Q_t R_t^T r_t & \text{Var}(\eta_t|Y_n) &= Q_t - Q_t R_t^T N_t R_t Q_t \\ r_{t-1} &= Z_t^T F_t^{-1} v_t + L_t^T r_t & N_{t-1} &= Z_t^T F_t^{-1} Z_t + L_t^T N_t L_t \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei $t = n, \dots, 1$, $r_n = 0$ und $N_n = 0$. Die geglätteten Fehler stellen ein wichtiges Hilfsmittel zur Verfügung um Modelle auf ihre Güte zu überprüfen. Normiert man diese Fehler, so ergeben sich die sogenannten *auxiliary residuals* (dt. Hilfsfehler):

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_t^s &= B_t^\epsilon \hat{\epsilon}_t & [\text{Var}(\hat{\epsilon}_t)]^{-1} &= B_t^{\epsilon T} B_t^\epsilon \\ \hat{\eta}_t^s &= B_t^\eta \hat{\eta}_t & [\text{Var}(\hat{\eta}_t)]^{-1} &= B_t^{\eta T} B_t^\eta \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mit Hilfe der $\hat{\eta}_t^s$ bzw. $\hat{\epsilon}_t^s$ können sowohl Strukturbrüche des Modells, als auch Ausreißer, welche wiederum nicht optimal von dem Modell erfasst werden, identifiziert werden. Große absolute Werte der *auxiliary residuals* deuten auf solche Strukturbrüche bzw. Ausreißer hin (vgl. Kapitel 3.4).

2.3.3 Fehlende Beobachtungen

Fehlende Beobachtungen einer Zeitreihe kommen in der Praxis nicht selten vor. Im Gegenteil, sie stellen nicht die Ausnahme, sondern eher die Regel dar. Ein großer Vorteil der Zustandsraummodellierung gegenüber anderen Ansätzen ist, dass solche derartigen Informationslücken keine Probleme darstellen.

Angenommen die Beobachtungen $y_j, j = \tau, \dots, \tau^*$ mit $1 < \tau < \tau^* \leq n$ stellen sich als fehlend heraus. Für den Filter folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\alpha_t|Y_{t-1}) &= \mathbb{E}(\alpha_t|Y_{\tau-1}) \\ &= \mathbb{E}(T_{t-1}T_{t-2}\dots T_\tau \alpha_\tau | Y_{\tau-1}) \\ &= T_{t-1}T_{t-2}\dots T_\tau \mathbb{E}(\alpha_\tau | Y_{\tau-1}) \\ &= T_{t-1}T_{t-2}\dots T_\tau a_\tau, \quad t = \tau, \dots, \tau^* \end{aligned}$$

oder anders aufgeschrieben $a_{t+1} = T_t a_t$. Eine ähnliche Rechnung ergibt für die Varianzen $P_{t+1} = T_t P_t T_t^T + R_t Q_t R_t^T$, $t = \tau, \dots, \tau^* - 1$. Des Weiteren werden die Vektoren v_t und die Matrizen K_t der jeweiligen Zeitpunkte auf Null gesetzt. Für die Glättung ergibt sich, dass $r_{t-1} = T_t^T r_t$ und $N_{t-1} = T_t^T N_t T_t$, $t = \tau^* - 1, \dots, \tau$. Daraus folgt, dass der Kalman Filter und die Kalman Glättung mit Hilfe der angepassten Gleichungen weitergeführt werden können

und sobald wieder Beobachtungen vorhanden sind, können die Gleichungen (2.15) bzw. (2.16) wieder verwendet werden.

2.3.4 Prognose

Das Konzept der Prognose geht einher mit dem Konzept der fehlenden Beobachtungen. Angenommen die Beobachtungen y_1, y_2, \dots, y_n sind gegeben und das Ziel besteht darin den nächsten Zustand zu prognostizieren. Um dies zu erreichen, wird versucht die Kleinste-Quadrate-Fehlermatrix $\mathbb{E}((\bar{y}_{n+1} - y_{n+1})(\bar{y}_{n+1} - y_{n+1})^T | Y_n) =: \bar{F}_{n+1}$ zu minimieren, dabei steht der Ausdruck \bar{y}_{n+1} für die Schätzung der nächsten Beobachtung. Da der bedingte Erwartungswert diese Varianz minimiert, ergibt sich somit $\bar{y}_{n+1} = \mathbb{E}(y_{n+1} | Y_n)$ für den Schätzer und es folgt:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{n+1} &= \mathbb{E}(Z_{n+1}\alpha_{n+1} + \epsilon_{t+1} | Y_n) \\ &= Z_{n+1}a_{n+1}\end{aligned}\quad (2.19)$$

wobei a_{n+1} aus (2.15) stammt. Für die Fehlermatrix ergibt sich (vgl. (2.15)):

$$\begin{aligned}\bar{F}_{n+1} &= \mathbb{E}((\bar{y}_{n+1} - y_{n+1})(\bar{y}_{n+1} - y_{n+1})^T | Y_n) \\ &= Z_{n+1}P_{n+1}Z_{n+1}^T + H_{n+1}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Um weitere Prognoseschritte zu berechnen, nimmt man die Beobachtungen $y_{n+2}, y_{n+3}, \dots, y_{n+J}$ als fehlend an, womit sich wiederum ergibt:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{n+j} &= Z_{n+j}\bar{a}_{n+j} \\ \bar{F}_{n+j} &= Z_{n+j}\bar{P}_{n+j}Z_{n+j}^T + H_{n+j}, \quad j = 2, \dots, J\end{aligned}$$

Für die Schätzungen der zu prognostizierenden Zustände und deren Varianzen folgt:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{n+j+1} &= T_{n+j}\bar{a}_{n+j}, \quad j = 1, \dots, J-1 \\ \bar{P}_{n+j+1} &= T_{n+j}\bar{P}_{n+j}T_{n+j}^T + R_{n+j}Q_{n+j}R_{n+j}^T\end{aligned}\quad (2.21)$$

mit $\bar{a}_{n+1} = a_{n+1}$. Anhand eines Vergleiches der Formeln (2.21) und der des Kapitels 2.3.3 lässt sich erkennen, dass die Prognose einfach in das Konzept der „fehlenden Beobachtung“ einfließt, wobei die zukünftigen Beobachtungen als „fehlend“ zu kennzeichnen sind.

2.3.5 Initialisierung

In den vorigen Kapiteln 2.3.1 bis 2.3.4 wurde angenommen, dass die Verteilung des Startwertes α_1 des Zustandsraummodells bekannt sei ($\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$). In diesem Kapitel wird diese Annahme fallen gelassen und die

(exakte) diffuse Initialisierung vorgestellt bzw. ihre Auswirkung auf den Kalman Filter bzw. die Glättung näher gebracht.

Die Grundannahme beruht darauf, dass sich der Startzustandsvektor α_1 folgendermaßen zusammensetzt:

$$\alpha_1 = a + A\delta + R_0\eta_0, \quad \eta_0 \sim N(0, Q_0) \quad (2.22)$$

Der Vektor a (Dimension $m \times 1$) ist ein bekannter Vektor (kann auch als Nullvektor vorausgesetzt werden), die Matrizen A ($m \times q$) und R_0 ($m \times (m-q)$) sind Selektionsmatrizen für die gilt $A^T R_0 = 0$ und die Matrix Q_0 ist eine bekannte positive Varianzmatrix. Der Vektor δ ($q \times 1$) kann als fixer aber unbekannter Vektor oder als eine normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden. Im ersten Fall kann die Schätzung dieses Vektors mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode erfolgen (siehe 3.1).

Im zweiten Fall wird der Erwartungswert dieser Zufallsvariable als 0 und die Varianzmatrix als eine gegen unendlich divergierende Folge ($\delta \sim N(0, \kappa I_q)$ mit $\kappa \rightarrow \infty$) angenommen. In diesem Fall spricht man von der exakten diffusen Initialisierung. Eine nicht exakte diffuse Initialisierung besteht darin κ nicht als Folge, sondern als beliebig großen Wert vorauszusetzen und den Kalman Filter darauf anzuwenden. Im Allgemeinen führt diese Methode jedoch zu einer hohen numerischen Instabilität (vgl. [1]). Aus (2.22) ergibt sich für den Erwartungswert $\mathbb{E}(\alpha_1) = a$ und für die Varianz $P_1 = \text{Var}(\alpha_1) = \kappa P_\infty + P_*$ mit $P_\infty = AA^T$ bzw. $P_* = R_0 Q_0 R_0^T$.

Exakte Initialisierung des Filters

Ziel ist es nun einen von dem Kalman Filter (2.15) abgeleiteten Filter zu konstruieren, welcher mit dem Initialisierungsproblem einhergeht. Dabei kann gezeigt werden, dass die Varianzmatrizen P_t eine ähnliche Zerlegung wie P_1 aufweisen und zwar:

$$P_t = \kappa P_{\infty,t} + P_{*,t} + O(\kappa^{-1}), \quad t = 2, \dots, n \quad (2.23)$$

Hierbei sind die Matrizen $P_{\infty,t}$ und $P_{*,t}$ von κ unabhängig. Des Weiteren kann in einem nicht degenerierten Modell nachgewiesen werden, dass ein Zeitpunkt d existiert für den gilt: $P_{\infty,t} = 0$ und $P_{*,t} = P_t$ für $t > d$. Im Allgemeinen ist dieser Zeitpunkt d relativ klein im Gegensatz zu n und hängt explizit von dem zugrundeliegenden Modell ab. Es folgt somit, dass der Kalman Filter (2.15) ab $t = d + 1, \dots, n$ auch bei der diffusen Initialisierung angewendet werden kann.

Die Zerlegung (2.23) führt zu einer Zerlegung von F_t und M_t mit:

$$F_t = \kappa F_{\infty,t} + F_{*,t} + O(\kappa^{-1})$$

wobei

$$F_{\infty,t} = Z_t P_{\infty,t} Z_t^T, \quad F_{*,t} = Z_t P_{*,t} Z_t^T + H_t \quad (2.24)$$

Wie in den Gleichungen (2.15) gilt es noch die Inverse von F_t zu bestimmen, welche wiederum in der Form $F_t^{-1} = F_t^{(0)} + \kappa^{-1} F_t^{(1)} + \kappa^{-2} F_t^{(2)} + O(\kappa^{-3})$ dargestellt werden kann. Aufgrund eines Koeffizientenvergleiches von $I_p = F_t F_t^{-1}$ kommt es nun zu einer Fallunterscheidung: Im ersten Fall wird angenommen, dass die Matrix $F_{\infty,t}$ nicht singular ist. Somit ergeben sich folgende Gleichungen für $t = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned} F_t^{(0)} &= 0, & F_t^{(1)} &= F_{\infty,t}^{-1}, & F_t^{(2)} &= -F_{\infty,t}^{-1} F_{*,t} F_{\infty,t}^{-1} \\ K_t^{(0)} &= T_t P_{\infty,t} Z_t^T F_t^{(1)}, & & & L^{(0)} &= T_t - K_t^{(0)} Z_t \\ K_t^{(1)} &= T_t P_{*,t} Z_t^T F_t^{(1)} + T_t P_{\infty,t} Z_t^T F_t^{(2)}, & & & L_t^{(1)} &= -K_t^{(1)} Z_t \\ P_{\infty,t+1} &= T_t P_{\infty,t} L_t^{(0)T}, & & & a_{i+1}^{(0)} &= T_t a_i^{(0)} + K_t^{(0)} v_i^{(0)} \\ P_{*,t+1} &= T_t P_{\infty,t} L_t^{(1)T} + T_t P_{*,t} L_t^{(0)T} + R_t Q_t R_t^T \end{aligned} \quad (2.25)$$

wobei

$$\begin{aligned} a_t &= a_t^{(0)} + \kappa^{-1} a_t^{(1)} + O(\kappa^{-2}) \\ v_t &= v_t^{(0)} + \kappa^{-1} v_t^{(1)} + O(\kappa^{-2}) \\ K_t &= T_t P_t Z_t F_t^{-1} = K_t^{(0)} + \kappa^{-1} K_t^{(1)} + O(\kappa^{-2}) \\ L_T &= T_t - K_t Z_t = L_t^{(0)} + \kappa^{-1} L_t^{(1)} + O(\kappa^{-2}) \end{aligned}$$

Im zweiten Fall wird der Einfachheit halber angenommen, dass die Matrix $F_{\infty,t} = 0$ ist (vgl. [6]). Daraus folgt:

$$\begin{aligned} K_t &= T_t P_{*,t} Z_t^T F_{*,t}^{-1} & L_t &= T_t - K_t Z_t \\ P_{\infty,t+1} &= T_t P_{\infty,t} T_t^T, & a_{t+1} &= T_t a_t + K_t v_t \\ P_{*,t+1} &= T_t P_{*,t} L_t^T + R_t Q_t R_t^T \end{aligned} \quad (2.26)$$

Exakte Initialisierung der Zustandsglättung

Für die Zustandsglättung folgt, dass die Rekursion von (2.16) für $t = n, \dots, d+1$ übernommen werden kann. Für $t = d, \dots, 1$ ergeben sich die nachkommenden Gleichungen mit den Startwerten der Rekursion $r_d^{(0)} = r_d$, $r_d^{(1)} = 0$,

$N_d^{(0)} = N_d$ und $N_d^{(1)} = N_d^{(2)} = 0$:

$$\begin{aligned}
r_{t-1}^{(1)} &= Z_t^T F_t^{(1)} v_t^{(0)} + L_t^{(0)T} r_t^{(1)} + L_t^{(1)T} r_t^{(0)} \\
r_{t-1}^{(0)} &= L_t^{(0)T} r_t^{(0)} \\
N_{t-1}^{(0)} &= L_t^{(0)T} N_t^{(0)} L_t^{(0)} \\
N_{t-1}^{(1)} &= Z_t^T F_t^{(1)} Z_t + L_t^{(0)T} N_t^{(1)} L_t^{(0)} + L_t^{(1)T} N_t^{(0)} L_t^{(0)} + L_t^{(0)T} N_t^{(0)} L_t^{(1)} \\
N_{t-1}^{(2)} &= Z_t^T F_t^{(2)} Z_t + L_t^{(0)T} N_t^{(2)} L_t^{(0)} + L_t^{(0)T} N_t^{(1)} L_t^{(1)} + L_t^{(1)T} N_t^{(1)} L_t^{(0)} \\
&\quad + L_t^{(0)T} N_t^{(0)} L_t^{(2)} + L_t^{(2)T} N_t^{(0)} L_t^{(0)} + L_t^{(1)T} N_t^{(0)} L_t^{(1)} \\
\hat{a}_t &= a_t^{(0)} + P_{*,t} r_{t-1}^{(0)} + P_{\infty,t} r_{t-1}^{(1)} \\
V_t &= P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(0)} P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(1)} P_{\infty,t} \\
&\quad - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(1)} P_{*,t} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(2)} P_{\infty,t}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

wobei

$$\begin{aligned}
r_{t-1} &= r_{t-1}^{(0)} + \kappa^{-1} r_{t-1}^{(1)} + O(\kappa^{-2}) \\
N_t &= N_t^{(0)} + \kappa^{-1} N_t^{(1)} + \kappa^{-2} N_t^{(2)} + O(\kappa^{-3})
\end{aligned}$$

für den Fall bei dem $F_{\infty,t}$ nicht singulär ist. Anderenfalls ergibt sich für $F_{\infty,t} = 0$:

$$\begin{aligned}
r_{t-1}^{(1)} &= T_t^T r_t^{(1)} \\
r_{t-1}^{(0)} &= Z_t^T F_{*,t}^{-1} v_t + L_t^T r_t^{(0)} \\
N_{t-1}^{(0)} &= Z_t^T F_{*,t}^{-1} Z_t + L_t^T N_t L_t \\
N_{t-1}^{(1)} &= T_t^T N_t^{(1)} L_t \\
N_{t-1}^{(2)} &= T_t^T N_t^{(2)} T_t \\
\hat{a}_t &= a_t^{(0)} + P_{*,t} r_{t-1}^{(0)} + P_{\infty,t} r_{t-1}^{(1)} \\
V_t &= P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(0)} P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(1)} P_{\infty,t} \\
&\quad - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(1)} P_{*,t} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(2)} P_{\infty,t}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Exakte Initialisierung der Fehlerglättung

Ebenso wie für die Zustandsglättung kann auch für die Fehlerglättung die Rekursion (2.17) für $t = n, \dots, d+1$ übernommen werden. Im Falle von $F_{\infty,t} = 0$ kann diese Rekursion sogar auf $t = n, \dots, 1$ erweitert werden. Ist

jedoch $F_{\infty,t}$ nicht singulär, so ergibt sich für $t = d, \dots, 1$:

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}_t &= -H_t K_t^{(0)T} r_t^{(0)} \\ \hat{\eta}_t &= Q_t R_t^T r_t^{(0)} \\ \text{Var}(\epsilon_t | Y_n) &= H_t - H_t K_t^{(0)T} N_t^{(0)} K_t^{(0)} H_t \\ \text{Var}(\eta_t | Y_n) &= Q_t - Q_t R_t^T N_t^{(0)} R_t Q_t\end{aligned}\tag{2.29}$$

Kapitel 3

Modellvalidierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich einerseits mit der Frage wie die notwendigen Varianzen der Fehlerterme aus den Gleichungen (2.1) optimal geschätzt werden können, als auch wie die drei Grundannahmen an die Fehler ϵ_t und η_t (Unabhängigkeit, Homoskedastizität, Normalverteilung) überprüft werden können. Ferner werden zwei Kriterien (AIC-BIC Kriterium) erläutert, welche es ermöglichen aus einer Vielzahl an Modellvariationen ein bestmögliches auszuwählen. Die Grundidee dahinter ist einen optimalen Trade-off zwischen der Größe und dem Erklärungspotential des Modells zu finden. Es werden die *auxiliary residuals* vorgestellt und ihre Bedeutung im Zusammenhang mit Ausreißern bzw. Strukturbrüchen näher erklärt. Zum Abschluss werden für die Qualität der Prognose unterschiedliche Kriterien eingeführt, welche ebenfalls als Entscheidungshilfe zur Wahl des optimalen Modells dienen.

3.1 Maximum-Likelihood-Schätzung

In Kapitel 2 sind die Varianzen der Fehlerterme H_t, Q_t als bekannt angenommen worden. Allerdings kommt es gerade in der Praxis selten bis gar nicht vor, dass diese Annahme zutrifft. Um diese Varianzen bzw. andere Parameter der Zustands- und Beobachtungsgleichung schätzen zu können (im Folgenden zusammengefasst zu den als Hyperparameter bezeichneten Ψ), wird kurz auf die Thematik der Maximum-Likelihood-Schätzung eingegangen. Dabei werden zwei Klassen unterschieden: Likelihood-Schätzung bei einer exakten Initialisierung und Likelihood-Schätzung bei einer bekannten Initialisierung.

Unter der Annahme, dass die Verteilung des Startzustandes $\alpha_1 \sim N(a, P_1)$ als bekannt angenommen werden kann, ergibt sich die logarithmierte Likelihood Funktion:

$$\log L(Y_n) = -\frac{np}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\log |F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t) \quad (3.1)$$

wobei $\mathbb{E}(y_t|Y_{t-1}) = Z_t a_t$, $v_t = y_t - Z_t a_t$, $F_t = \text{Var}(y_t|Y_{t-1})$ und $Y_t = \{y_1, \dots, y_t\}$ ist.

Im zweiten Fall, bei dem der Startzustand nicht vollständig bekannt ist, kann dieser als $\alpha_1 = a + A\delta + R_0\eta_0$ geschrieben werden (vgl. 2.3.5). Auf Grund von $F_t = \kappa F_{\infty,t} + F_{*,t} + O(\kappa^{-1})$ für $t = 1, \dots, d$ würde es bei der Gleichung (3.1) zu einem Term $-\frac{q}{2} \log 2\pi\kappa$ kommen, welcher für $\kappa \rightarrow \infty$ nicht konvergieren würde. Somit muss die logarithmierte Likelihood-Funktion entsprechend adaptiert werden:

$$\log L_d(Y_n) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \log L(Y_n) + \frac{q}{2} \log \kappa \quad (3.2)$$

Nun gilt es, die erhaltene logarithmierte Likelihood-Funktion über den unbekanntem Hyperparameter Ψ zu maximieren:

$$\partial_1(\Psi) = \frac{\partial \log L(\Psi|Y_n)}{\partial \Psi} = 0 \quad (3.3)$$

Ein bekanntes numerisches Verfahren, welches auch im Kapitel 4 verwendet wird, ist das Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi-Newton-Suchverfahren.

3.2 AIC-BIC Kriterium

Wenn eine Vielzahl an Modellen zur Auswahl steht, ist ein Kriterium notwendig um ein bestmögliches Modell zu erhalten. Das im Folgenden definierte AIC bzw. BIC Kriterium liefert so eine Entscheidungshilfe und berücksichtigt dabei nicht nur die logarithmierte Likelihood-Funktion, sondern auch die Anzahl der zu schätzenden Parameter. Denn es gilt: Je mehr Parameter zu schätzen sind, desto größer wird die logarithmische Likelihood-Funktion tendenziell sein. Wieder ist zwischen den Fällen der bekannten und der exakten Initialisierung zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= \frac{1}{n}(-2 \log L(\hat{\Psi}|Y_n) + 2w) \\ \text{BIC} &= \frac{1}{n}(-2 \log L(\hat{\Psi}|Y_n) + w \log n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

bzw. im Fall der exakten Initialisierung

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= \frac{1}{n}(-2 \log L_d(\hat{\Psi}|Y_n) + 2(q + w)) \\ \text{BIC} &= \frac{1}{n}(-2 \log L_d(\hat{\Psi}|Y_n) + (q + w) \log n) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hierbei steht q für die Anzahl der zu initialisierenden Zustände, w für die Anzahl der zu schätzenden Parameter Ψ und $\hat{\Psi}$ für den Maximum-Likelihood-Schätzer. Während das Ziel bei der Likelihood-Schätzung die Maximierung

ist, gilt sowohl bei dem AIC, als auch bei dem BIC Kriterium, dass die Minimierung im Vordergrund steht. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Werte der Kriterien nicht absolut zu verstehen sind, sondern immer im Vergleich zu einander gesehen werden müssen.

3.3 Tests

Wie schon in dem Kapitel 2.1 beschrieben, werden dem *state space model* einige Annahmen unterstellt. Konkret gilt, dass sowohl die Fehler der Beobachtungsgleichung ϵ_t als auch der Zustandsgleichung η_t , sowohl serienmäßig als auch untereinander über die Zeit hinweg unabhängig sind. Darüber hinaus sollten sie im autonomen Fall jeweils homoskedastische Varianzen aufweisen und auch normalverteilt sein. Um diese Voraussetzungen zu überprüfen, werden die normalisierten Einschnitt-Prognosefehler

$$e_t = \frac{v_t}{\sqrt{F_t}} \quad (3.6)$$

herangezogen, da diese unter den oben erwähnten Annahme, unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 sein müssen ($e_t \sim NID(0, 1)$, $\mathbb{E}e_t e_k = 0, t \neq k; t, k = 1, \dots, n$). Die Annahmen zusammengefasst und nach ihrer Wichtigkeit geordnet (vgl. [7]) lauten:

1. Unabhängigkeit
2. Homoskedastizität
3. Normalverteilung

3.3.1 Unabhängigkeit

Mit Hilfe der geschätzte Autokovarianzfunktion $\hat{\gamma}_l = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-l} (e_t - \bar{e})(e_{t+l} - \bar{e})$ gilt unter der Nullhypothese $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$, dass die geschätzten Autokorrelationsfunktionen $r_l = \frac{\hat{\gamma}_l}{\hat{\gamma}_0}, l = 1, \dots, k$ asymptotisch normalverteilt sind:

$$\sqrt{n}(r_1, \dots, r_k)' \stackrel{a}{\sim} N(0, I_k) \quad (3.7)$$

Dieses approximative Verhalten kann herangezogen werden um ein Konfidenzintervall für die jeweiligen r_1, \dots, r_k zu erzeugen. Es gilt mit $z \sim N(0, 1)$:

$$\begin{aligned} 95\% &= P(z_{0.025} \leq \sqrt{T}r_i \leq z_{0.975}) \\ &= P(z_{0.025}/\sqrt{T} \leq r_i \leq z_{0.975}/\sqrt{T}) \end{aligned}$$

Eine Weiterführung der Tatsache von (3.7) liefert den Box-Pierce bzw. den Ljung-Box Test. Unter der Nullhypothese $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ folgt, dass die

Teststatistik des Box-Pierce Tests

$$Q(k) = n \sum_{l=1}^k r_l^2 \quad (3.8)$$

asymptotisch Chi-Quadrat mit k Freiheitsgraden $Q(k) \stackrel{a}{\sim} \chi_k^2$ verteilt ist. Für endliche Stichproben liefert die Ljung-Box Teststatistik eine besser Approximation:

$$Q(k) = n(n+2) \sum_{l=1}^k \frac{r_l^2}{n-l} \quad (3.9)$$

3.3.2 Homoskedastizität

Um die Homoskedastizität der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler zu überprüfen, wird folgender Test angewendet. Unter der Nullhypothese von homoskedastischen Fehlern lautet die Teststatistik

$$H(h) = \frac{\sum_{t=n-h+1}^n e_t^2}{\sum_{t=1}^h e_t^2} \quad (3.10)$$

mit $zB \ h = [n/3]$. Diese Testgröße ist unter der Nullhypothese F-verteilt mit (h, h) Freiheitsgraden $GQ \sim F(h, h)$.

3.3.3 Normalverteilung

Die letzte Annahme, welche es zu überprüfen gilt, ist die der Normalverteilung. Der Jarque-Bera Test bedient sich dabei der empirischen Schiefe und Kurtosis:

$$m_p = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (e_t - \bar{e})^p \quad (3.11)$$

Unter der Nullhypothese von normalverteilten Fehler folgt, dass die Teststatistik

$$JB = n \left(\frac{1}{6} \frac{m_3^2}{m_2^3} + \frac{1}{24} \left(\frac{m_4}{m_2^2} - 3 \right)^2 \right) \quad (3.12)$$

asymptotisch Chi-Quadrat verteilt ist mit einem Freiheitsgrad $JB \stackrel{a}{\sim} \chi^2$. Des Weiteren besteht die Möglichkeit die Fehler in einem QQ-Plot zu visualisieren um einen ersten Eindruck zu erhalten.

3.4 Auxiliary Residuals

Wie schon im Kapitel 2.3.2 erwähnt, bieten die *auxiliary residuals* ein weiteres adäquates Hilfsmittel um ein gegebenes Modell auf seine Güte zu untersuchen. Diese standardisierten Fehler, welche unter anderem durch die Fehlerglättung (2.17) berechnet werden können, sind im mehrdimensionalen Fall nach den Gleichungen (2.18) definiert bzw. im Fall $p = 1, r = 1$:

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}_t^s &= \frac{\hat{\epsilon}_t}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\epsilon}_t)}} \\ \hat{\eta}_t^s &= \frac{\hat{\eta}_t}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\eta}_t)}}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Vorrangig dienen diese Fehler um Ausreißer ($\hat{\epsilon}_t$) oder Strukturbrüche ($\hat{\eta}_t$) zu erkennen bzw. zwischen diesen zu unterscheiden. Im Allgemeinen erweist es sich als schwierig tatsächlich solche Fälle richtig zu beurteilen und gegebenenfalls zu korrigieren. Um zu testen, ob so ein Problem bei einem Modell eingetreten ist, können die Residuen grafisch visualisiert werden. Unter der Nullhypothese, dass kein Ausreißer bzw. Strukturbruch eingetreten ist, sollten diese Residuen im Wertebereich zwischen -1.96 und 1.96 liegen. Dies entspricht formal gesehen einem zweiseitigen t-Test zu einem Signifikanzniveau von 5% und der Wertebereich -1.96 und 1.96 einem 95% Konfidenzintervall.

Zwei weitere Tests, um große Residuen zu diagnostizieren, wären einerseits ein modifizierter excess Kurtosis-Test:

$$K_m = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{24\kappa(4)}} \left(\frac{m_4}{m_2^2} - 3 \right) \quad (3.14)$$

mit

$$\begin{aligned}m_p &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (e_t - \bar{e})^p \\ \kappa(\alpha) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_\tau^\alpha\end{aligned}$$

wobei r_τ für die Autokorrelationsfunktion steht und welcher unter der Nullhypothese asymptotisch standard-normalverteilt ist bzw. andererseits ein modifizierter Jarque-Bera Test:

$$JB_m = n \left(\frac{1}{6\kappa(3)} \frac{m_3^2}{m_2^3} + \frac{1}{24\kappa(4)} \left(\frac{m_4}{m_2^2} - 3 \right)^2 \right) \quad (3.15)$$

welcher asymptotisch χ_2^2 verteilt ist. Die Korrekturen $\kappa(\alpha), \alpha = 3, 4$ in (3.14) und (3.15) beruhen auf der Tatsache, dass die *auxiliary residuals* seriell autokorreliert sind (vgl. [3]).

3.5 Prognosekriterien

In diesem Kapitel werden drei unterschiedliche Gütekriterien vorgestellt, welche die Qualität der Prognose der Länge J eines spezifischen Modells messen sollen (vgl. [9]). Je geringer die Werte eines Kriteriums sind, desto besser wird sich das Modell für eine Prognoseschätzung eignen.

Das erste Kriterium misst die Summe der quadratischen Fehler *mean square error* - MSE:

$$\text{MSE} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3.16)$$

Während \hat{y}_i für die Einschrittprognose steht, gibt y_i in diesem Zusammenhang die wahre Beobachtung wieder. Ein großer Nachteil dieses Kriteriums besteht darin, dass sehr große Differenzen wesentlich stärker gewichtet werden als kleinere, unabhängig von dem Level der wahren Beobachtung. Abhilfe kann dieser Diskrepanz geboten werden, indem eine Normalisierung des quadratischen Fehlers durchgeführt wird. Somit erhält man den *normalized mean square error* - NMSE:

$$\text{NMSE} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{y_i^2} \quad (3.17)$$

Als zweites Kriterium wird nicht der quadratische, sondern der absolute aufsummierte Fehler *mean absolute error* - MAE betrachtet

$$\text{MAE} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J |y_i - \hat{y}_i| \quad (3.18)$$

bzw. skalenunabhängig in prozentueller Schreibweise *mean absolute percentage error* - MAPE:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad (3.19)$$

Als drittes und letztes Kriterium wird ein Maß für tendenzielle Entscheidungswahl des Modells, das sogenannte *prediction on chance in direction* - POCID Kriterium, eingeführt:

$$\text{POCID} = 100 \cdot \frac{\sum_{i=1}^J D_i}{J}, \quad D_i = \begin{cases} 1, & (\hat{y}_i - y_{i-1})(y_i - y_{i-1}) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.20)$$

Der Wertebereich des Kriteriums liegt zwischen 0 und 100, wobei 0 für eine schlechte und 100 für eine perfekte Entscheidungswahl steht. Das Kriterium gibt prozentuell an, ob das Modell qualitativ mit einer Erhöhung oder Verringerung der beobachteten zukünftigen Daten einhergeht oder nicht.

Kapitel 4

Empirische Analyse

In diesem Kapitel werden die theoretischen Aspekte aus Kapitel 2 und 3 auf die beobachteten Werte der Heizlast aus dem Biomasse-Kraftwerk in Tannheim (vgl. 1.3) angewendet. Das Unterkapitel 4.1 geht hierbei auf die spezifischen bzw. leicht veränderten Modellkomponenten aus Kapitel 2.2 näher ein. Mit Hilfe dieser Komponenten werden unterschiedliche Modelle konstruiert, welche wiederum in Kapitel 4.2.1 getestet werden. Neben dem univariaten Fall, bei dem sowohl die 6 Uhr, 9 Uhr als auch die 12 Uhr Zeitreihe betrachtet wird, geht der Abschnitt 4.3 auf den multivariaten Fall ein. Hierbei wird ein multivariates Modell konstruiert, welches die vorhin erwähnten Zeitreihen enthält.

In Kapitel 4.2.3 werden die univariaten Modelle auf Ausreißer bzw. auf Strukturbrüche untersucht und es wird versucht diese auf mögliche Ursachen zu erklären.

Da die zu prognostizierenden Heizlastwerte in der Praxis eine große Rolle spielen, wird somit in Kapitel 4.2.5 nicht nur auf die Erklärungsgüte der Modelle, sondern auch auf die *out of sample* Prognose ein großes Hauptaugenmerk gelegt.

4.1 Spezifische Modellkomponenten

Wie schon in der Einleitung erwähnt, stehen die viertelstündigen Heizlast- bzw. die Temperaturdaten von 1. Jänner 2007 bis 30. Juni 2010 zur Verfügung. Für die Modellselektion werden jedoch nur die Daten der ersten drei Jahre, von 1. Jänner 2007 bis 31. Dezember 2009, hergenommen und das restliche halbe Jahr, von 1. Jänner 2010 bis 30. Juni 2010, für die Prognose verwendet. Da im univariaten Fall ausschließlich die 6 Uhr, 9 Uhr, und 12 Uhr Zeitreihe analysiert werden, müssen diese Zeitreihen entsprechend vorab extrahiert werden. Es ergeben sich für die Analyse jeweils $n = 1096$ ($= 365 + 366 + 365$) Beobachtungszeitpunkte (fehlende Beobachtungen inklusive).

Die Modellkomponenten, welche in dieser Arbeit verwendet werden, können in vier grobe Gruppen eingeteilt werden:

1. Grundkomponenten
2. Periodische / tagesabhängige Komponenten
3. Temperaturabhängige Komponenten
4. Realisierte Beobachtungskomponente

Jedes Modell, welches getestet wird, muss zu mindestens genau eine Grundkomponente enthalten und kann beliebig mit periodischen / tagesabhängigen, temperaturabhängigen bzw. realisierte Beobachtungskomponenten erweitert werden.

4.1.1 Grundkomponenten

Zur Bestimmung eines optimalen Modells wird angenommen, dass genau eine von insgesamt sechs Grundkomponente in jedem Modell enthalten sein muss. Einzelnen gesehen, stellen sie somit das kleinstmögliche zu testende Modell dar. Diese dienen dazu die Grundlast zu modellieren. Neben dem *local level model* und dem *local level model with drift* gibt es noch vier weitere Komponenten mit $t = 1, \dots, n$ und $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$, $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ bzw. $\xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2)$:

$y_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (4.1)$ $\mu_{t+1} = \mu_t + \nu_t$ $\nu_{t+1} = \nu_t + \xi_t$	$y_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (4.2)$ $\mu_{t+1} = \mu_t + \nu + \eta_t$
$y_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (4.3)$ $\mu_{t+1} = \mu_t + \nu$	$y_t = \mu + \epsilon_t \quad (4.4)$

Tabelle 4.1: Diverse Grundkomponenten: *the integrated random walk* (4.1), *the random walk with fixed drift* (4.2), *the linear fixed trend* (4.3), *deterministic level* (4.4)

4.1.2 Periodische / tagesabhängige Komponenten

Um einen wiederkehrenden Effekt zu modellieren, wird die saisonabhängige Komponente aus (2.6) mit einer Periode von $s = 7$ herangezogen. Als zweite Komponente ergibt sich der *cycle* aus (2.7), wobei die Periode als unbekannt angenommen wird und bei der Maximum-Likelihood-Schätzung mit geschätzt wird. Der *cycle* und die saisonale Komponente können sowohl mit stochastischen Fehlern als auch als deterministische Größe in ein zu testendes Modell hinzugefügt werden.

Als tagesabhängige Komponente können so genannte Tages-Dummys in die Modelle integriert werden. Man unterscheidet hierbei zwischen dem normalen Zustand (Montag-Donnerstag, ohne Fenster- oder Feiertag), dem Freitagszustand (Freitag, ohne Fenster- oder Feiertag), dem Samstagzustand (Samstag, ohne Fenster- oder Feiertag), dem Fenstertagszustand (Montag oder Freitag, falls entsprechend ein Feiertag danach oder davor kommt) und dem Sonn- und Feiertagszustand. Als Datengrundlage werden die offiziellen österreichischen Feiertage verwendet. Zwischen Jänner 2007 und Juni 2010 ergeben sich somit 696 normale Zustände, 166 Freitagszustände, 176 Samstagzustände, 224 Sonn- und Feiertagszustand und 15 Fenstertagszustände. Diese fünf Zustände werden mit Hilfe von vier erklärenden Variablen (vgl. (2.12)) konstruiert:

$$x_{1,t} = \begin{cases} 1, & \text{Tag } t \text{ ist Freitagszustand} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$x_{2,t} = \begin{cases} 1, & \text{Tag } t \text{ ist Samstagzustand} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$x_{3,t} = \begin{cases} 1, & \text{Tag } t \text{ ist Sonn- oder Feiertagszustand} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$x_{4,t} = \begin{cases} 1, & \text{Tag } t \text{ ist Fenstertagszustand} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.8)$$

Hierbei kann wiederum angenommen werden, dass sich die vier Zustandsvariable in Gleichung (2.12) entweder stochastisch über die Zeit hinweg verändern oder nicht.

4.1.3 Temperaturabhängige Komponenten

Da neben den viertelstündigen Heizlastwerten auch die dazugehörigen Außentemperaturwerte (T_t^i mit $i = 1, \dots, 96$ und $t = 1, \dots, n$) zur Verfügung stehen, können diese herangezogen werden um entsprechende erklärende Modellkomponenten zu erstellen. Zumal die Prognose eine wichtige Rolle spielt und angenommen wird, dass die zukünftigen Temperaturwerte nicht unmittelbar zur Verfügung stehen, wird anstatt der tatsächlichen Temperatur die

lagged Temperatur mit Lag 1 verwendet. Dies bedeutet, dass für die zu prognostizierende Temperatur zum Zeitpunkt $t+1$ die bereits bekannte Temperatur zum Zeitpunkt t verwendet wird.

Da eine aktuelle Temperaturveränderung nicht unmittelbar eine aktuelle Heizlastveränderung mit sich zieht, kann angenommen werden, dass auf Grund von häuslicher Isolierung, verbesserter Fensterdämmung usw. ein sowohl zeit- als auch niveauesetzter Zusammenhang zwischen Temperatur und den Heizlastwerten attestiert werden kann. Dieser Aspekt wird anhand einer Glättung 1. Ordnung der Temperatur durchgeführt:

$$S_{t+1}^{ges} = \kappa T_t^{ges} + (1 - \kappa) S_t^{ges}, \quad t = 1, \dots, n_{ges} \quad (4.9)$$

Die Variable S_t^{ges} steht dabei für die geglättete Temperatur. In [15] ist als *smoothing*-Faktor für eine stündliche Temperaturzeitreihe ein $\kappa_0 = 0.06$ verwendet worden. Da jedoch in der vorliegenden Arbeit eine viertelstündige Temperaturzeitreihe vorliegt, muss dieser Faktor entsprechend adaptiert werden:

$$1 - \kappa = \sqrt[4]{1 - \kappa_0} = 0.9847 \quad (4.10)$$

woraus sich ein κ von 0.0153 ergibt.

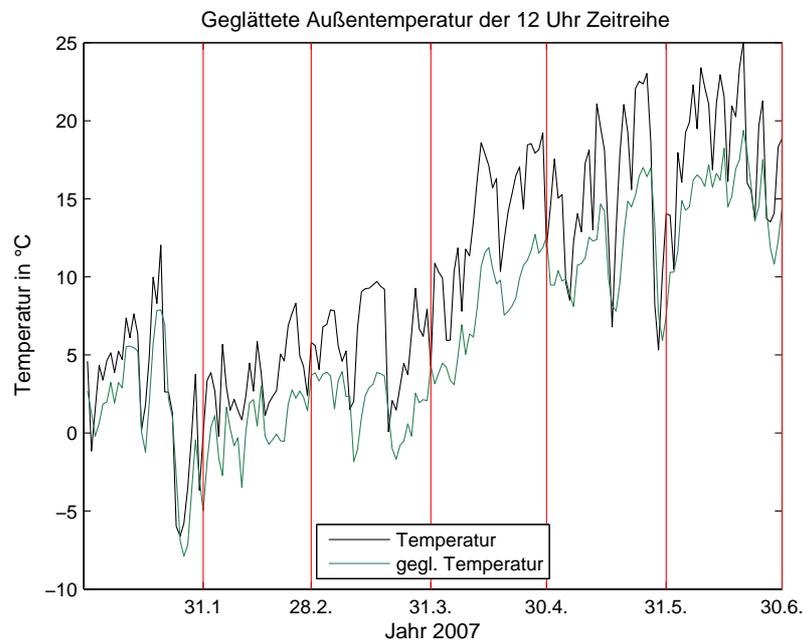


Abbildung 4.1: Geglättete Temperatur der 12 Uhr Zeitreihe

In Abbildung 4.1 ist die Temperatur und die geglättete Temperatur der 12

Uhr Zeitreihe abgebildet. Es ist zu erkennen, dass sich die geglättete Temperatur „geschmeidiger“ gegenüber der normalen Temperatur verhält und „ruckartige“ Temperaturveränderungen zu einem gewissen Grad abgefedert werden.

Ebenso muss bei der geglätteten Temperatur die entsprechende Zeitreihe (S_t^i mit $i = 1, \dots, 96$ und $t = 1, \dots, n$) entnommen werden. Wie auch schon bei der Außentemperatur werden die *lagged* Werte der geglätteten Temperatur mit Lag 1 verwendet. Sowohl bei der Temperatur als auch bei der geglätteten Temperatur ist es möglich, diese mit einer erklärenden Variable, welche abermals einen stochastischen oder deterministischen Zustand aufweisen kann, in das Modell zu integrieren.

Neben dem direkten Einfluss der Temperatur, kann auch ein Heizungsfaktor (H_t^i mit $i = 1, \dots, 96$ und $t = 1, \dots, n$) erstellt und ebenfalls als erklärende Variable in das Modell ergänzt werden. Dieser Faktor soll auf die Heizungsgewohnheiten in Abhängigkeit der Temperatur bzw. der geglätteten Temperatur der Verbraucher eingehen. Dabei wird angenommen, dass eine positive Heizungsfaktorschwelle (HFS) existiert. Fällt einerseits die (geglättete) Temperatur unter diese Temperaturschwelle, so erhöht sich dieser Faktor. Liegt jedoch die (geglättete) Temperatur über dieser Schwelle, wird der Faktor auf Null gesetzt:

$$H_{i,t} = \max(0, \text{HFS} - T_t^i) \quad t = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

$$H_{i,t}^{sm} = \max(0, \text{HFS} - S_t^i) \quad i = 1, \dots, 96 \quad t = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

Als Heizungsfaktorschwelle wird 15 Grad angenommen (vgl. Abbildung 1.6) und es werden wiederum hinsichtlich der Prognose die *lagged* Werte verwendet. In Abbildung 4.2 ist exemplarisch der Heizungsfaktor für die 12 Uhr Zeitreihe abgebildet (vgl. mit Abbildung 1.5 der Außentemperatur).

4.1.4 Realisierte Beobachtungskomponente

Ebenso wie die zeitversetzten Temperaturwerte, können auch die zeitversetzten Heizlastwerte, welche sich auf Grund der Zeitverschiebung als wahre Beobachtungen herausstellen, in eine Modellkomponente zusammengefasst werden. Dabei müssen jedoch nicht ausschließlich die zeitversetzten Werte verwendet, sondern es können auch eine Vielzahl von anderen Strukturen implementiert werden. Einige dieser Möglichkeiten wären: quadrierte zeitversetzte Heizlastwerte, absolute Veränderung der zeitversetzten Heizlastwerte oder etwa auch ein Mittel über einen bestimmten zeitversetzten Beobachtungsbereich. In dieser Arbeit wird ein stündliches Mittel über den tagesversetzten Beobachtungsbereich, welches mit stündliches vergangenes Mittel

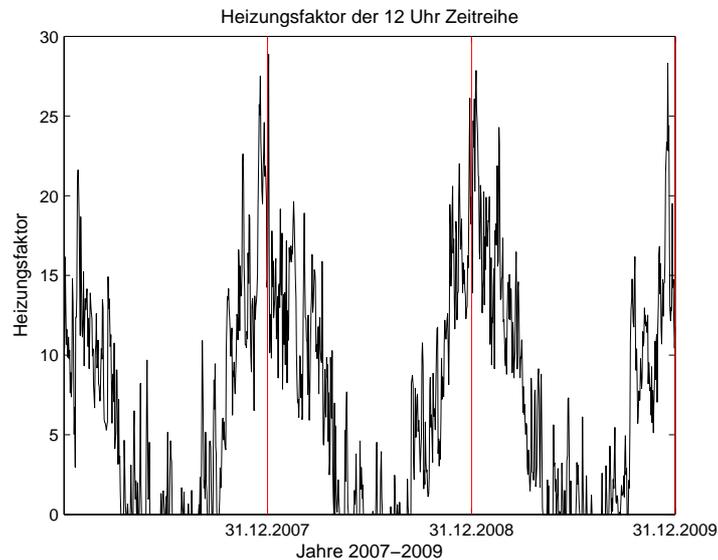


Abbildung 4.2: Heizungsfaktor der 12 Uhr Zeitreihe

$M_{i,t}^{ges}$ bezeichnet wird, verwendet:

$$M_t^{ges} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 Q_{(t-96)-j}^{ges} \quad t = 1, \dots, n_{ges} \quad (4.13)$$

Somit ergibt sich beispielsweise als Datenpunkt für die 12 Uhr Zeitreihe zum Tag t , das Mittel von 11-12 Uhr des Tages $t-1$. Falls fehlende Heizlastwerte auftreten so werden diese für die Bildung des Mittelwertes ausgelassen. Sind jedoch alle vier Werte nicht vorhanden, wird das Mittel des letzten verfügbaren Zeitpunktes verwendet. Ebenso muss bei dem stündlichen vergangenen Mittel die entsprechende Zeitreihe (M_t^i mit $i = 1, \dots, 96$ und $t = 1, \dots, n$) entnommen werden. Diese kann mit einer erklärenden Variable analog zu den vorigen Komponenten in das Modell integriert werden.

In Abbildung 4.3 ist ein Streudiagramm der Heizlastwerte der 12 Uhr Zeitreihe gegen das stündliche vergangene Mittel abgebildet. Dabei lässt sich der Zusammenhang zwischen diesen Faktoren erkennen, welcher anhand der Kleinste-Quadrate-Gerade noch einmal hervorgehoben wird.

Zu einer der sechs Grundkomponenten können optional maximal acht verschiedene weitere Komponenten in ein Modell integriert werden. Diese können jeweils als stochastische oder auch als deterministische Größe angesehen werden. Es ergeben sich dadurch $6 \cdot 3^8 = 39.366$ verschiedene Modellkombinationen, welche in dieser Arbeit getestet werden. Die Tabelle 4.2 fast

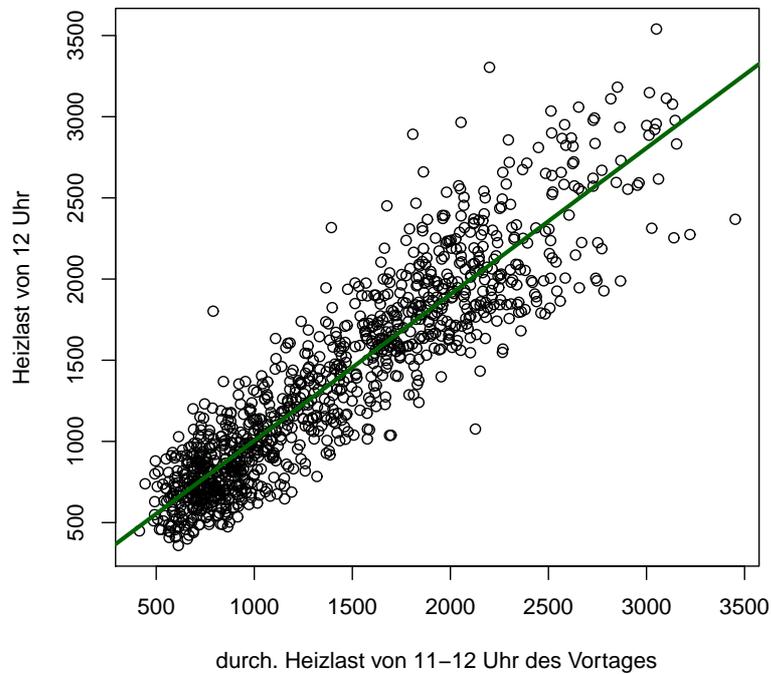


Abbildung 4.3: Streudiagramm der Heizlastwerte der 12 Uhr Zeitreihe gegen das stündliche vergangene Mittel

alle Komponenten (außer Grundkomponenten) überblicksmäßig zusammen.

Zustandsvariablen	Komponente
$\tilde{\gamma}_{1,t}, \tilde{\gamma}_{2,t}, \tilde{\gamma}_{3,t}, \tilde{\gamma}_{1,t}^*, \tilde{\gamma}_{2,t}^*, \tilde{\gamma}_{3,t}^*$	saisonabhängige Komponente
c_t, c_t^*	Zyklus
$\beta_{1,t}, \dots, \beta_{4,t}$	Tages-Dummys
$\beta_{5,t}$	Temperatur
$\beta_{6,t}$	geglättete Temperatur
$\beta_{7,t}$	Heizungsfaktor
$\beta_{8,t}$	geglättete Heizungsfaktor
$\beta_{9,t}$	st. vergangene Mittel

Tabelle 4.2: Modellkomponente (außer Grundkomponente)

4.2 Univariate Modelle

In diesem Abschnitt werden die oben erwähnten 39.366 Modelle mit ihren neun möglichen optionalen Komponenten für die 12 Uhr Zeitreihe geschätzt (für die restlichen zwei Zeitreihen siehe Appendix A). Anschließend werden drei Modelle anhand von bestimmten Kriterien ausgewählt und diese in weiterer Folge diskutiert.

4.2.1 Modellselektion

Die drei Modelle werden anhand der folgenden Kriterien ausgewählt:

1. AIC-Kriterium
2. BIC-Kriterium
3. NMSE-Kriterium

Modellauswahl auf Grund des AIC-Kriterium

Die getesteten Modelle werden einer Reihung nach dem AIC-Kriterium unterzogen. Daraus erhält man das Modell, welches den kleinsten AIC-Wert aufweist (damit die Übersichtlichkeit gewährt bleibt, werden nur Zustandsgleichungen angeführt, welche nicht degenerierte Fehler aufweisen):

$$\begin{aligned}
 y_t = & \mu_t + \gamma_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} & (4.14) \\
 & + \underbrace{\beta_5 x_{5,t}}_{\text{Temp.}} + \underbrace{\beta_6 x_{6,t}}_{\text{gegl. Temp.}} + \underbrace{\beta_7 x_{7,t}}_{\text{Heizungsf.}} + \underbrace{\beta_8 x_{8,t}}_{\text{gegl. Heizungf.}} + \epsilon_t \\
 \mu_{t+1} = & \mu_t + \nu_t + \eta_t \\
 \nu_{t+1} = & \nu_t + \xi_t \\
 \beta_{7,t+1} = & \beta_{7,t} + \kappa_{7,t}
 \end{aligned}$$

Dieses Modell wird von nun an mit „Modell A₁₂“ bezeichnet und weist einen AIC-Wert bzw. einen BIC-Wert auf von:

$$\begin{aligned}
 \text{AIC} &= (2 \cdot 7362,77 + 2 \cdot (16 + 4))/1077 = 13,710 & (4.15) \\
 \text{BIC} &= (2 \cdot 7362,77 + \log(1077) \cdot (16 + 4))/1077 = 13,802
 \end{aligned}$$

Aufgrund von 16 Zustandsvariablen, 4 zu schätzenden Varianzen, einer Log-Likelihood Schätzung von 7362,77 und 1077 Beobachtungen (= 1096 – 17 fehlenden Beobachtungen). Für die Varianzen ergeben sich folgende Schätzer: Für die Varianz der Fehler ϵ_t ergibt sich $\sigma_\epsilon^2 = 40,014,75$, für die Varianz der Fehler η_t bzw. ξ_t folgt $\sigma_\eta^2 = 661,38$ bzw. $\sigma_\xi^2 = 1,33$ und die Varianz der Fehler $\kappa_{7,t}$ beläuft sich auf $\sigma_{\kappa_7}^2 = 43,36$.

Es ist zu erwähnen, dass sich dieses Modell mit dem AIC-Wert von 13,71 und beispielsweise das 100-beste Modell mit dem AIC-Wert von 13,717 gerade einmal um 0,007 Einheiten unterscheiden. Um zu vermeiden, dass das Modell (4.14) auf Grund von numerischen Ungenauigkeiten einen besseren AIC-Wert erhalten hat, werden noch die besten 100 Modelle analysiert: In der Tabelle 4.3 ist eine Aufschlüsselung der Anzahl der Komponenten, welche in diesen 100 Modellen vorkommen. Hintergedanke dieser Analyse ist, dass nicht nur das beste Modell, sondern auch „gute“ Modelle ähnliche Komponenten beinhalten. Die „fett“ markierten Werte geben den maximalen Zustandswert einer Komponente wieder (jede Komponente kann als stochastische, deterministische Größe oder überhaupt nicht in ein Modell einfließen), die „unterstrichenen“ denjenigen Zustand, welcher in dem Modell A_{12} enthalten ist. Alle Komponenten stimmen bei dieser Analyse überein. Es erscheint somit als plausibel dieses Modell auf Grund des AIC-Kriteriums zu wählen. Abbildung 4.4 gibt den Verlauf der wahren und der mit Hilfe des „Modells

Komponente	stochastisch	deterministisch	nicht vorhanden
saison. Komponente	38	<u>62</u>	0
Zyklus	17	12	<u>71</u>
Tages-Dummys	33	<u>67</u>	0
Temperatur	29	<u>66</u>	5
gegl. Temperatur	29	<u>55</u>	16
Heizungsfaktor	<u>91</u>	7	2
gegl. Heizungsfaktor	39	<u>57</u>	4
st. vergangenes Mittel	19	25	<u>56</u>

Tabelle 4.3: Kontingenztabelle der optionalen Komponenten gegen ihre Ausprägung (stochastisch, deterministisch oder nicht vorhanden) der besten 100 AIC-Modelle

A_{12} “ geschätzten Beobachtungen der ersten sechs Monate des Jahres 2008 wieder. Es sind vor allem die beobachteten als auch geschätzten Heizlasten zu Beginn des Jahres zu beachten, die weit über den Höchstwerten des restlichen halben Jahres liegen (vgl. 4.2.2).

Modellauswahl auf Grund des BIC-Kriterium

Als nächstes werden die ursprünglichen Modelle einer Reihung nach dem BIC-Kriterium unterzogen. Es wird nun das beste Modell, welches als „Mo-

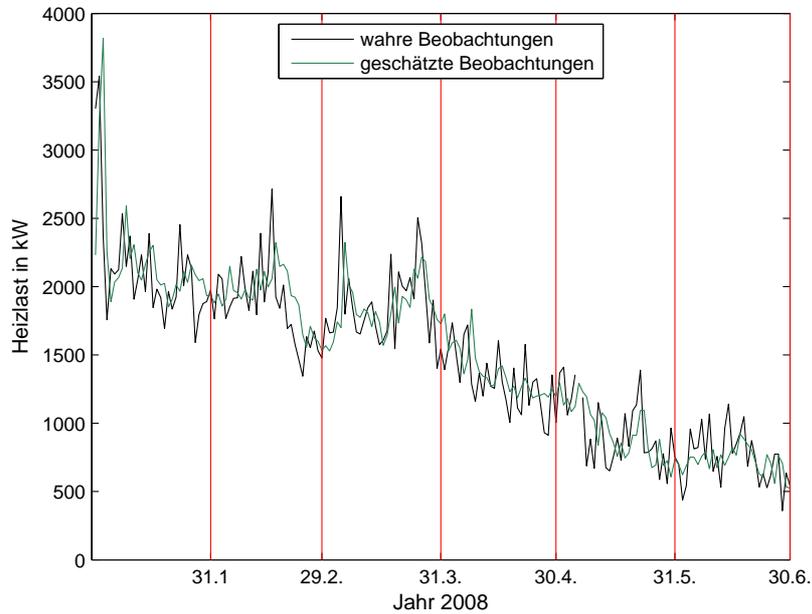


Abbildung 4.4: Wahre und geschätzte Beobachtungen der ersten Hälfte des Jahres 2008 des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

dell B_{12} “ bezeichnet wird, eingeführt:

$$y_t = \mu + c_t + \underbrace{\beta_{5,t}x_{5,t}}_{\text{Temp.}} + \underbrace{\beta_{7,t}x_{7,t}}_{\text{Heizungsf.}} + \underbrace{\beta_9x_{9,t}}_{\text{st. verga. Mittel}} + \epsilon_t \quad (4.16)$$

$$\beta_{5,t+1} = \beta_{5,t} + \kappa_{5,t}$$

$$\beta_{7,t+1} = \beta_{7,t} + \kappa_{7,t}$$

$$c_{t+1} = c_t \cos(\lambda_c) + c_t^* \sin(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{1,t}$$

$$c_{t+1}^* = -c_t \sin(\lambda_c) + c_t^* \cos(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{2,t},$$

Dieses Modell weist die folgenden AIC- bzw. BIC-Werte auf:

$$\text{AIC} = (2 \cdot 7386,64 + 2 \cdot (6 + 5))/1077 = 13,737 \quad (4.17)$$

$$\text{BIC} = (2 \cdot 7386,64 + \log(1077) \cdot (6 + 5))/1077 = 13,788$$

Die Schätzer für die entsprechenden Varianzen der Fehler lauten: $\sigma_\epsilon^2 = 47.710,08$, $\sigma_{\kappa_5}^2 = 2,16$, $\sigma_{\kappa_7}^2 = 36,60$ und $\sigma_\omega^2 = 14,27$. Als Frequenz ergibt sich $\lambda_c = 0,0176$ was einer Periode von ungefähr 357 Tagen ($= 2\pi/0,0176$) entspricht.

Ebenso, wie bei dem AIC-Kriterium, liegen die Werte der 100 besten Modelle unmittelbar nebeneinander. Tabelle 4.4 gibt abermals die Anzahl der

unterschiedlichen Komponenten wieder. Überraschenderweise stimmen keine Faktoren bis auf den Heizungsfaktor mit dem „Modell B_{12} “ überein. Würde anstelle des besten Modells das zweitbeste Modell in Betracht gezogen werden, so würde man wieder „Modell A_{12} “, jedoch mit einem *integrated random walk* statt einem *local level model with drift* als Grundkomponente erhalten. Man beachte, dass alle Komponenten von „Modell A_{12} “ mit den häufigsten Komponenten aus Tabelle 4.4 übereinstimmen. Zwecks einer besseren Vergleichbarkeit wird das „Modell B_{12} “ trotzdem beibehalten. Im Vergleich zu dem AIC-Modell ergeben sich große Unterschiede in den einzelnen Komponenten: Zum einen wird die Grundkomponente von einem *local level model with drift* zu einem *deterministic level* vereinfacht. Zum anderen werden alle optionalen Komponenten bis auf den Heizungsfaktor entweder aus dem Modell entfernt und stattdessen nicht vorhandene Komponenten in das Modell inkludiert oder die Zustände als stochastische Größen modelliert. In Abbil-

Komponente	stochastisch	deterministisch	nicht vorhanden
saison. Komponente	23	71	<u>6</u>
Zyklus	<u>6</u>	9	85
Tages-Dummys	23	68	<u>9</u>
Temperatur	<u>23</u>	67	10
gegl. Temperatur	23	69	<u>8</u>
Heizungsfaktor	64	23	13
gegl. Heizungsfaktor	33	56	<u>11</u>
st. vergangenes Mittel	15	<u>23</u>	62

Tabelle 4.4: Kontingenztabelle der optionalen Komponenten gegen ihre Ausprägung (stochastisch, deterministisch oder nicht vorhanden) der besten 100 BIC-Modelle

dung 4.5 sind wiederum die wahren und die geschätzten Beobachtungen des „Modell B_{12} “ abgebildet.

Modellauswahl auf Grund des NMSE-Kriterium

In Hinblick auf Abschnitt 4.2.5 wird neben „Modell A_{12} “ und „Modell B_{12} “ auch noch jenes präsentiert, welches den besten *out of sample fit* hinsichtlich dem *normalized mean square error* aufweist. Als Prognosezeitraum dient dafür der Zeitraum von 01.01.2010 bis 30.06.2010 (vgl. Kapitel 4.2.5). Dieses

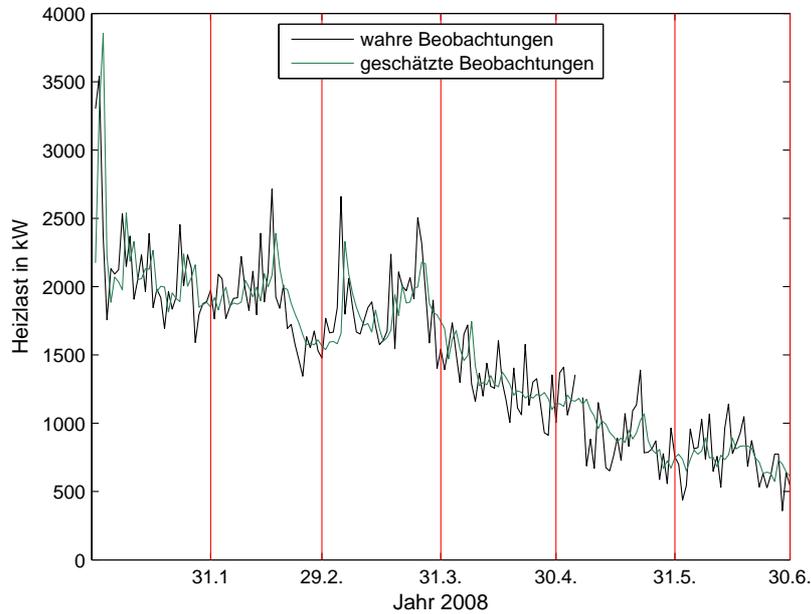


Abbildung 4.5: Wahre und geschätzte Beobachtungen der ersten Hälfte des Jahres 2008 des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

Modell wird mit „Modell F_{12} “ bezeichnet:

$$y_t = \mu + c_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} + \underbrace{\beta_5 x_{5,t}}_{\text{Temp.}} + \underbrace{\beta_9 x_{9,t}}_{\text{st. verga. Mittel}} + \epsilon_t \quad (4.18)$$

$$\beta_{5,t+1} = \beta_{5,t} + \kappa_{5,t}$$

und den AIC bzw. BIC-Werten:

$$\text{AIC} = (2 \cdot 7410,2 + 2 \cdot ((9 + 3)))/1077 = 13,783 \quad (4.19)$$

$$\text{BIC} = (2 \cdot 7410,2 + \log(1077) \cdot ((9 + 3)))/1077 = 13,839$$

Die Schätzer für die Varianzen bzw. der Frequenz ergeben $\sigma_\epsilon^2 = 62.904,07$, $\sigma_{\kappa_5}^2 = 1,21$ und $\lambda_c = 0,0168$. Die Periode weist die gleiche Größenordnung wie die Periode von „Modell B_{12} “ auf, ungefähr 374 Tage ($= 2\pi/0,0168$). Überhaupt sind große Übereinstimmungen mit diesem Modell festzustellen: Neben dem *deterministic level* ist ebenso die Temperatur, das stündlich vergangene Mittel, sowie der Zyklus (deterministisch statt stochastisch) enthalten. Einzig der stochastische Heizungsfaktor wird durch die deterministischen

Tages-Dummies ersetzt. In Abbildung 4.6 sind die geschätzten Heizlastwerte der ersten Hälfte des Jahres 2008 abgebildet. Im Gegensatz zu dem AIC- und dem BIC-Modell sind große Abweichungen vor allem bei den *peaks* zu erkennen (vgl. Abbildung 4.4 und 4.5 zu den Zeitpunkten 02.01.07, 16.02.07, 06.03.07 und 26.03.07).

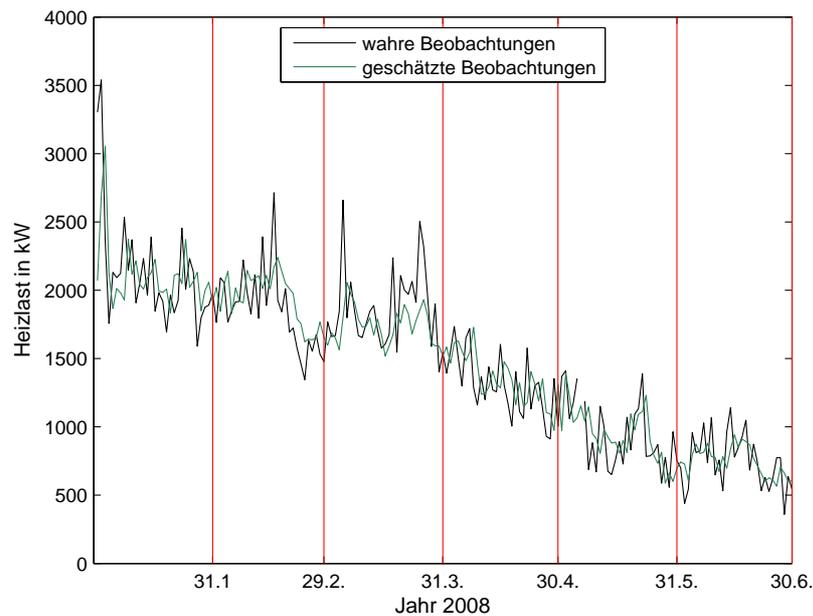


Abbildung 4.6: Wahre und geschätzte Beobachtungen der ersten Hälfte des Jahres 2008 des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

4.2.2 Analyse

Modell A_{12}

Zur ersten Analyse der Modelle dienen die standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler e_t . Dabei werden jedoch nur solche herangezogen, welche nicht in die Initialisierungsphase fallen. Der Zeitpunkt d , zu der die diffuse Initialisierung endet und ab dem der „normale“ Kalman Filter verwendet wird, liegt bei dem „Modell A_{12} “ bei 172. Somit werden die Ein-Schritt Prognosefehler von dem Zeitraum 173 bis 1096 betrachtet. In Tabelle 4.5 sind die Teststatistiken mit den dazugehörigen P-Werten abgebildet. Der Ljung-Box Test auf Unabhängigkeit, bei dem die ersten 30 Lags getestet werden, lehnt die Nullhypothese zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ nicht ab. Ebenfalls lehnt der Test auf Homoskedastizität, wobei $h = 308 = (1096 - 172)/3$ ist, die Nullhypothese nicht ab. Im Gegenteil dazu steht der Jarque Bera Test

Test		Teststa.	P-Wert
Unabhängigkeit	$Q(30)$	24,7	0,74
Homoskedastizität	$H(308)$	0,8	0,07
Normalverteilung	JB	21,6	0,00

Tabelle 4.5: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

auf Normalverteilung, welcher die Nullhypothese eindeutig verwirft.

In Abbildung 4.7 sind die standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler über ihren Zeitverlauf hinweg abgebildet, wobei die zwei rot strichlierten Linien das 95 % Konfidenzintervall der Standardnormalverteilung darstellen. Die blaue senkrechte Gerade gibt den Zeitpunkt d wieder. Somit werden solche Fehler als Ausreißer bezeichnet, welche oberhalb bzw. unterhalb der roten Linien und vom Zeitverlauf her nach der blauen Linie liegen. Insgesamt ergeben sich 36 Beobachtungen, die als Ausreißer bezeichnet werden, was einem Anteil von ungefähr 4 % entspricht. Zur besseren Veranschaulichung sind diese Ausreißer rot bzw. blau markiert. Die blaue Markierung kennzeichnet die größten 25 % der Ausreißer, während die rote Markierung die restlichen 75 % hervor hebt. Diese blau gehaltenen Ausreißer (17.12.07, 01.01.08, 03.01.08, 05.03.08, 03.12.08, 06.12.08, 15.01.09, 11.02.09, 21.02.09, 14.03.09) werden nun näher analysiert:

Jahreswende 2008 Bei der Betrachtung der drei großen Ausreißer nach oben stellt sich heraus, dass diese am 17.12.07, am 01.01.08 und am 05.03.08 stattgefunden haben. Ein Ausreißer nach oben bedeutet, dass es zu einer Unterschätzung der benötigten Heizlast gekommen ist. Während der 01.01.08 den Jahreswechsel in das Jahr 2008 darstellt, stehen der 17.12.07 (Montag) und der 05.03.08 (Mittwoch) mit keiner bestimmten Kalendervariation in Zusammenhang. Ebenso verhält es sich mit dem großen Ausreißer nach unten, welcher einer Überschätzung der benötigten Heizlast gleicht und am 03.01.08 (Donnerstag) aufgetreten ist. Wird die Temperatur bzw. die zeitversetzte Temperatur zur Analyse hinzugenommen, so ist ersichtlich, dass es zwischen dem 31.12.07 und dem 03.01.08 zu einer Temperaturveränderung von bis zu -14 Grad (Heizlastveränderung von bis zu 1200 kW) und wieder zurück gekommen ist. Auf Grund der zeitverschobenen Temperaturen fließen diese Werte jedoch erst zeitversetzt in das Modell ein und erzeugen so die zwei Ausreißer zu den Zeitpunkten 01.01.08 und 03.01.08. Die 17.12.07 und der 05.03.08 weisen keine auffälligen Temperaturschwankungen auf.

Jahreswende 2009 Die drei blauen Ausreißer nach oben treten während

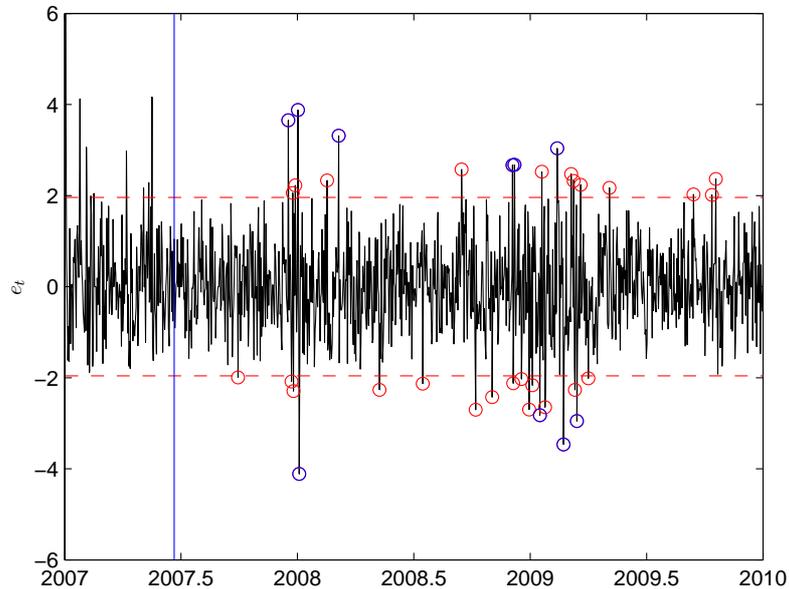


Abbildung 4.7: Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells

des 03.12.08 (Mittwoch), des 06.12.08 (Samstag) und am 11.02.09 (Mittwoch) auf. Indessen der 06.12.08 durch eine Kalendervariation (Hl. Nikolaus) begründet werden kann, weisen die restlichen beiden Tage Temperaturabfälle auf, welche durch die Zeitversetzung verspätet in das Modell einfließen. Die drei blauen Überschätzungen ergeben sich am 15.01.09 (Donnerstag), am 21.02.09 (Samstag) und am 14.03.09 (Samstag). Es lässt sich beobachten, dass diese unmittelbar nach großen Temperaturanstiegen stattgefunden haben.

In Abbildung 4.8 ist ein Histogramm der Prognosefehler mit der geschätzten und der standardnormalverteilten Dichte dargestellt, sowie ein QQ-Plot gegen die Standardnormalverteilung bzw. die geschätzte Autokorrelationsfunktion. Es ist zu erkennen, dass die geschätzte Dichte eine leichte Rechtschiefe aufweist. Durch den QQ-Plot sind ebenfalls die vorhandenen Ausreißer deutlich zu erkennen. Diese beiden Faktoren können ein Grund dafür sein, weshalb der Test auf Normalverteilung verworfen wird. Anhand der geschätzten Autokorrelationsfunktion mit dem 95 % Konfidenzintervall ist erneut ersichtlich (Skalierung!), dass die Fehler unkorreliert über die Zeit sind.

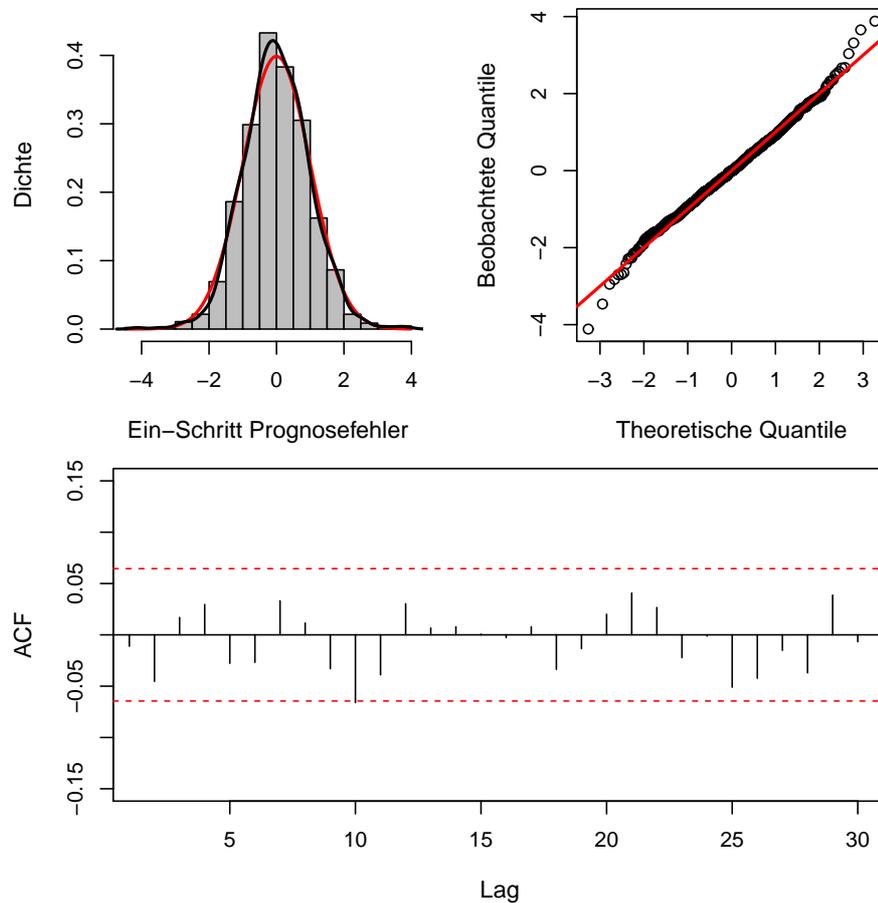


Abbildung 4.8: Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

Modell B_{12}

Abermals werden die Ein-Schritt Prognosefehler zur Analyse herangezogen. Der Übergang zwischen der diffusen Initialisierung und dem Kalman Filter - Zeitpunkt d - liegt bei 197. Somit ergeben sich 899 Fehler, welche untersucht werden können. In Tabelle 4.6 sind die Teststatistiken und P-Werte der Ein-Schritt Prognosefehler zusammengefasst. Sowohl der Test auf Homoskedastizität als auch auf Normalverteilung lehnen die Nullhypothese ab. Ein Grund, warum der Test auf Homoskedastizität verwirft, könnten die Ausreißer zur Jahreswende 2008 sein. Diese fließen im Gegensatz zu den Ausreißern 2009 in den Test mit ein. Würde man beispielsweise h variieren lassen (h steht für die Anzahl der Fehler, welche nach der Initialisierung bzw. vor dem Beobach-

Test		Teststa.	P-Wert
Unabhängigkeit	$Q(30)$	34,6	0,26
Homoskedatizität	$H(300)$	0,7	0,00
Normalverteilung	JB	68,2	0,00

Tabelle 4.6: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

tungsende verwendet wird), so ergeben sich folgende P-Werte: $H(150)=0,62$; $H(160)=0,15$; $H(170)=0,00$ oder $H(320)=0,05$. Im Gegensatz dazu steht der Test auf Unabhängigkeit, der zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ nicht verwirft.

Die Grafik 4.9 zeigt die Ein-Schritt Prognosefehler über ihren Zeitverlauf hin

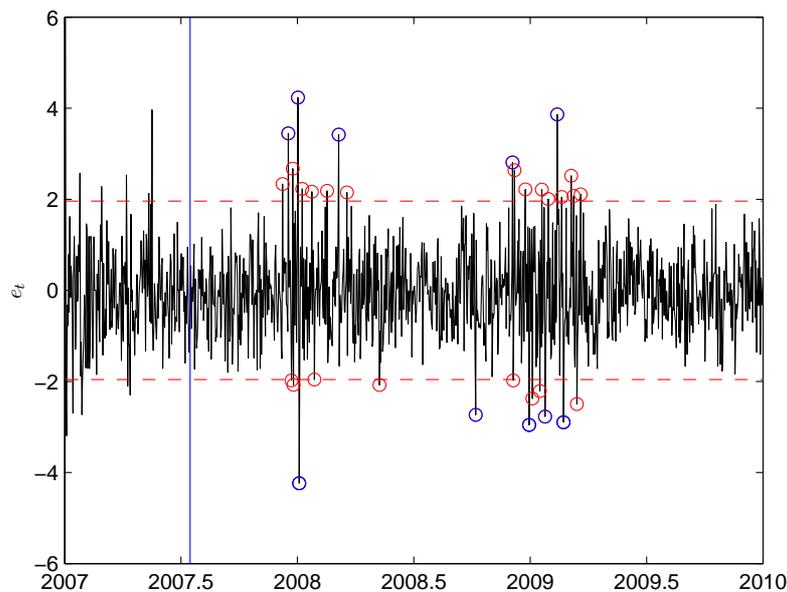


Abbildung 4.9: Ein-Schritt Prognosefehler des BIC-Modells

mit dem 95 % Konfidenzintervall. Es ergeben sich 32 Beobachtungen, welche außerhalb des Konfidenzintervalls liegen (4 %). Somit sind bei dem BIC-Modell vier Ausreißer weniger als bei dem AIC-Modell entstanden. Qualitativ haben sich keine großen Veränderungen gegenüber dem „Modell A_{12} “ ergeben: Wieder treten Ausreißer vor allem um die Jahreswenden 2008 und 2009 auf. Die beschriebenen blauen Ausreißer aus „Modell A_{12} “ sind auch zum Großteil in diesem Modell enthalten (bis auf 06.12.08, 15.01.09, 14.03.09),

fallen jedoch zum Teil nicht so drastisch aus. Stattdessen sind drei große Ausreißer nach unten zu den Zeitpunkten 29.12.08 (Montag), 06.01.08 (Sonntag) und 23.01.09 (Freitag) hinzugekommen. Diese drei Ausreißer lassen sich allesamt mit einem schnellen Temperaturanstieg gegenüber den Vortagen erklären (ca. 7 Grad), womit ein niedrigerer Heizlastbedarf gegeben ist und es dadurch zu einer Überschätzung in dem Modell gekommen sein kann.

In Abbildung 4.10 ist erneut eine grafische Darstellung der Ein-Schritt Prognosefehler gegeben. Wie auch schon bei dem AIC-Modell lässt sich eine Rechtsschiefe der Verteilung erkennen. Ebenso kann angenommen werden, dass die Verteilungsschwänze gegenüber der Standardnormalverteilung dicker ausfallen. Anhand der geschätzten Autokorrelationsfunktion ist erneut die Unkorreliertheit der Fehler ersichtlich.

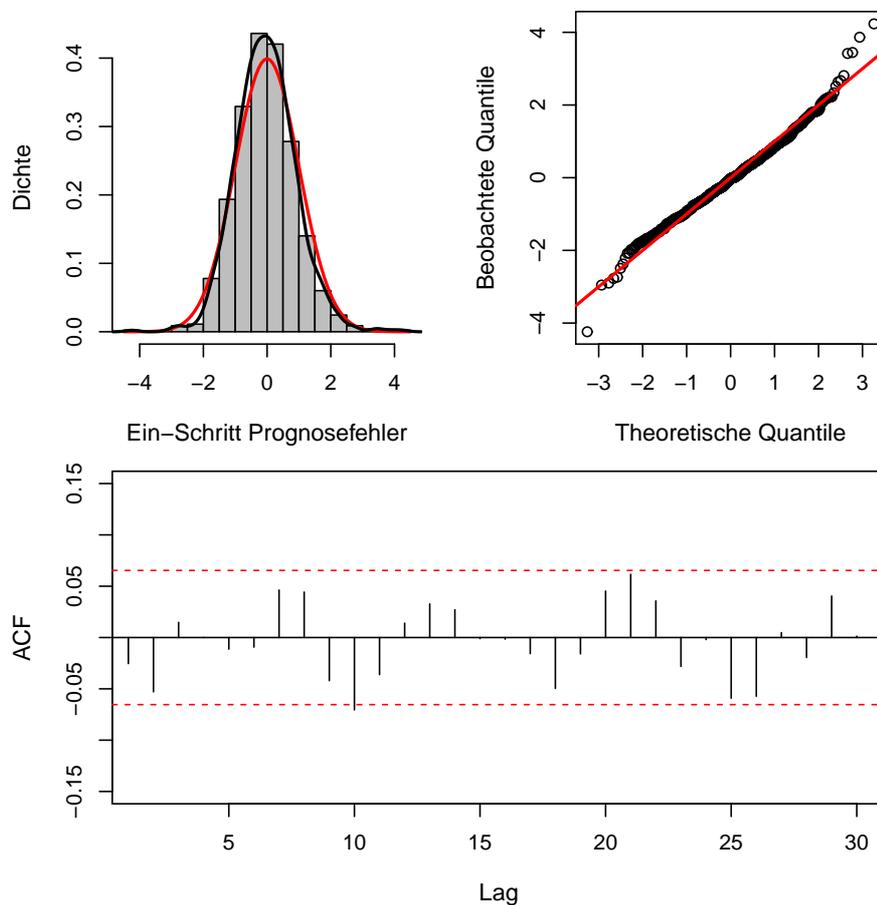


Abbildung 4.10: Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

Modell F_{12}

Wie auch schon bei den vorigen beiden Modellen werden die Ein-Schritt Prognosefehler für die erste Analyse herangezogen. Der Übergang auf den normalen Kalman Filter findet zu dem Zeitpunkt $d = 120$ statt und tritt somit wesentlich früher als bei den vorigen Modellen ein. In Tabelle 4.7 sind die drei Teststatistiken mit den dazugehörigen P-Werten abgebildet.

Test		Teststa.	P-Wert
Unabhängigkeit	$Q(30)$	75,9	0,00
Homoskedastizität	$H(325)$	0,82	0,08
Normalverteilung	JB	133,4	0,00

Tabelle 4.7: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

Sowohl der Ljung-Box Test als auch der Jarque Bera Test verwerfen ihre jeweiligen Nullhypothese klar. Einzig der Test auf Homoskedastizität lehnt diese nicht ab. In Abbildung 4.11 sind die Ein-Schritt Prognosefehler über ihren Zeitverlauf hinweg abgebildet. Es ergeben sich 42 Beobachtungen (4 %), welche außerhalb des Konfidenzintervalls liegen. Die blau gefärbten Ausreißer stimmen zum größten Teil mit jenen der vorigen beiden Modelle überein. Die Zeitpunkte 17.05.07 (Donnerstag), 18.02.09 (Mittwoch) und 17.11.09 (Dienstag) sollen jedoch noch hervorgehoben werden: Während zu den ersten zwei Tagen ein großer Temperaturabfall zu einer Unterschätzung seitens des Modells geführt hat und der 17.05.07 auch noch eine Kalendervariation darstellt (Christi Himmelfahrt), kann der 17.11.09 nicht anhand von Temperaturveränderungen erklärt werden.

In Abbildung 4.12 ist die Abweichung der geschätzten Dichte der Ein-Schritt Prognosefehler gegenüber der Standardnormalverteilung ersichtlich. Neben einer leichten Rechtsschiefe weist die Dichte einen spitzeren *peak* bzw. dickere Verteilungsschwänze auf. Ebenso zeigt der QQ-Plot dieses nicht standardnormalverteilte Verhalten bezüglich der Ausreißer. Die Autokorrelationsfunktion zeigt die Korrelation der Fehler, welche vor allem während der ersten acht Lags gegeben ist. Auf Grund dessen erscheinen die Ergebnisse der Teststatistiken auf Unabhängigkeit und Normalverteilung plausibel.

4.2.3 Ausreißer/Strukturbrüche**Modell A_{12}**

Das Ziel besteht darin, einzelne Ausreißer bzw. Strukturbrüche der Modelle zu identifizieren und falls möglich diese zu bereinigen. Die *auxiliary residuals* der Beobachtungsgleichung bzw. der Zustandsgleichungen von „Modell A_{12} “

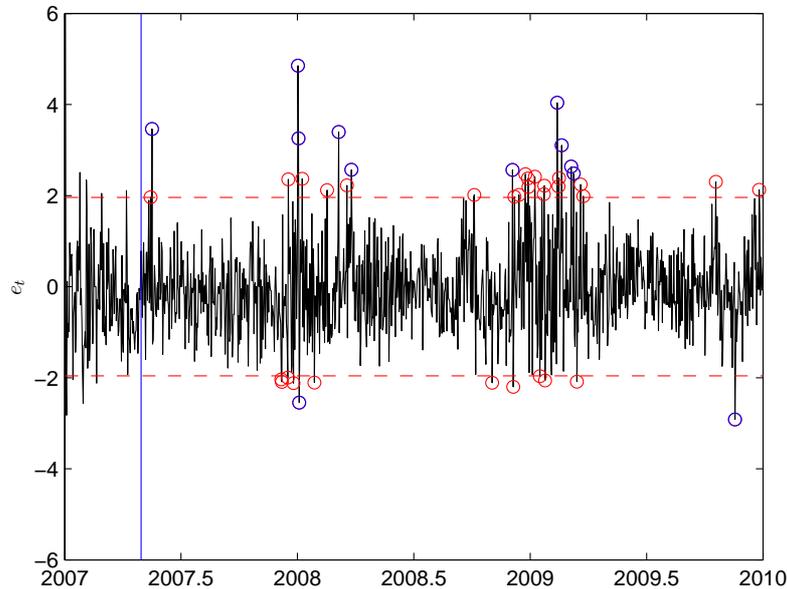


Abbildung 4.11: Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells

sind in Abbildung 4.13 und 4.14 dargestellt. Es ergeben sich 61 Beobachtungen der $\hat{\epsilon}_t^z$, welche außerhalb des 95 % Konfidenzintervalls liegen. Davon liegen 40 Ausreißer oberhalb und 21 unterhalb der Signifikanzlinie, womit das Modell eher zu Unterschätzungen neigt. Diese 61 Ausreißer entsprechen einem Anteil von ungefähr 5 % gegenüber der gesamten Beobachtungszahl von 1096, wobei wiederum die größten 25 % „blau“ hervorgehoben sind. Zu beachten sind hierbei die Fehler vor dem Zeitpunkt d , welche für die Analyse mit verwendet werden dürfen. In Tabelle 4.8 sind die Zeitpunkte und die möglichen Ursachen der blau markierten Ausreißer abgebildet. Zum größten Teil lassen sich diese anhand von Temperaturveränderungen bzw. von Kalendervariationen erklären. Die Anzahl der Ausreißer in Abbildung 4.14 sind (von oben nach unten) 75 (7 %), 101 (9 %) und 29 (3 %). Interessant in diesem Zusammenhang ist das qualitativ ähnliche Verhalten der geglätteten Fehler des Levels und des Heizungsfaktors während der Jahreswenden. Ebenso auffällig ist die Entwicklung der geglätteten Fehler des Heizungsfaktors während der warmen Sommermonate über die drei Jahre. Man kann beobachten, dass sich diese, zu den Zeitpunkten wo der Heizungsfaktor null beträgt, kaum verändern. Auch die Fehler des Driftes weisen einen recht untypischen Verlauf auf.

Im Folgenden wird versucht bestimmte Ausreißergruppen - es handelt

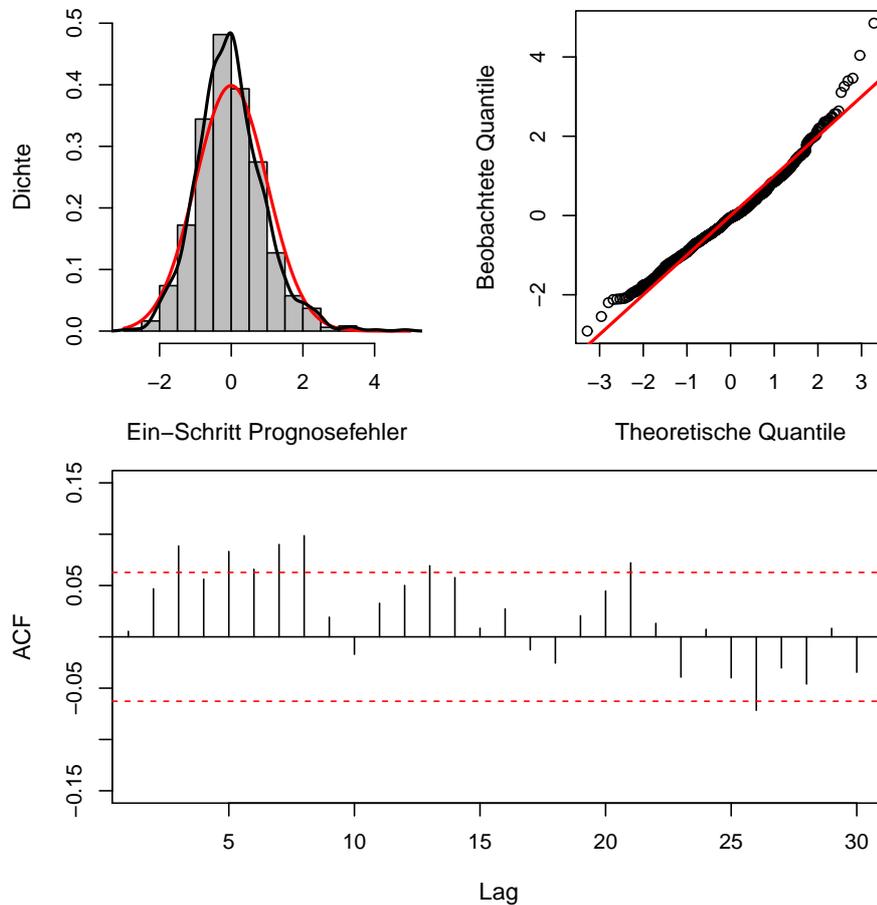


Abbildung 4.12: Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

sich dabei um zwei Ausreißergruppen nach oben um den Zeitpunkt 01.05.07 und den Zeitpunkt 10.09.08 - des Levels anhand der Temperatur zu erklären: In der Abbildung 4.15 sind zwei Temperaturexausschnitte der Jahre 2007 und 2008 abgebildet. Die obere Grafik dient zur Erklärung der Ausreißergruppe von 01.05.07 bis zum 11.05.07. Während die Temperatur vor dem 01.05.07 einen gleichmäßigen Schwingungsverlauf aufweist und bei diesen Daten vermutlich keine Messfehler unterlaufen sind (außer am 30.04.07), hat sich das Temperaturbild zwischen dem 01.05.07 und dem 11.05.07 von der Struktur her stark verändert. Einerseits ist es zu einer Dämpfung der Schwingung in dem besagten Zeitraum gekommen und andererseits sind Messfehler über längere Zeiträume aufgetreten (gekennzeichnet durch die alternative Schätzung der Temperatur mit Hilfe des letzten verfügbaren Wertes). In der un-

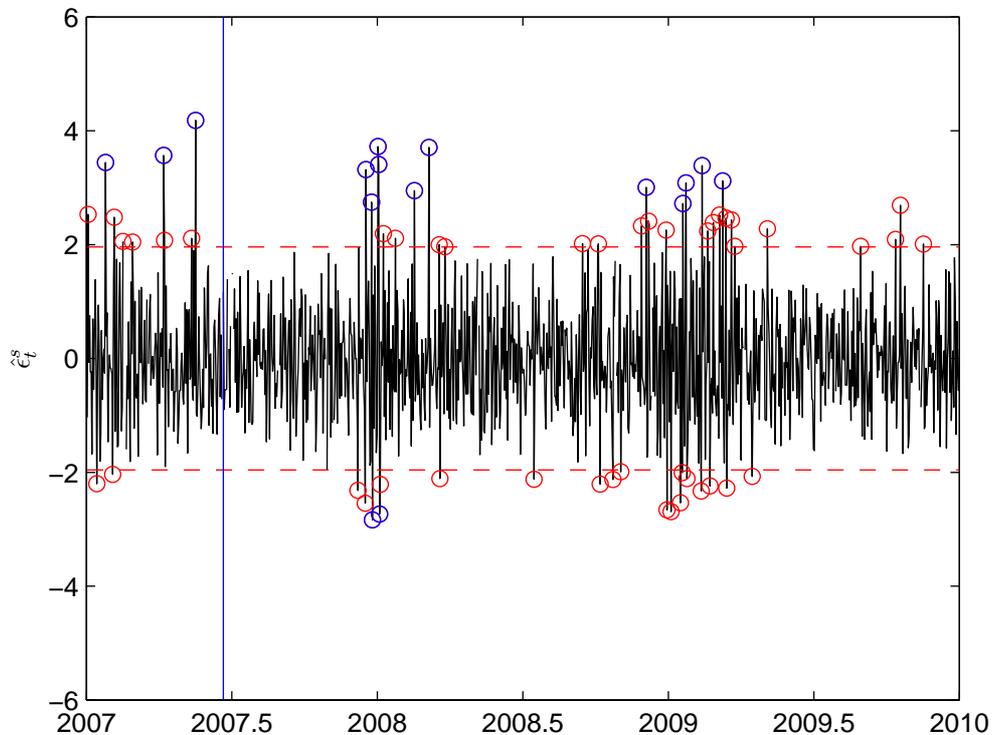


Abbildung 4.13: *auxiliary residuals* des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

Zeitpunkt	mögl. Ursache	Zeitpunkt	mögl. Ursache
24.01.07	Temp.abfall (-7 C°)	05.03.08	unbekannt
07.04.07	Karsamstag	03.12.08	Temp.abfall (-5 C°)
17.05.07	Temp.abfall (-6 C°)	18.01.09	unbekannt
17.12.07	Temp.abfall	22.01.09	Temp.abfall (-5 C°)
24.12.07	Heiliger Abend	11.02.09	Temp.abfall (-8 C°)
01.01.08	Temp.abfall (-9 C°)	09.03.09	unbekannt
02.01.08	Temp.abfall (-5 C°)	25.12.07	Christtag
16.02.08	unbekannt	03.01.08	Temp.anstieg (15 C°)

Tabelle 4.8: Tage der Über- und Unterschätzung (blaue Ausreißer)

teren Grafik ergibt sich eine ähnliche Situation bei der Messfehler (13.09.08) und eine gedämpfte Schwingung in Kombination unmittelbar hintereinander auftreten. Bei der gedämpften Schwingung kann jedoch nicht ausgeschlossen werden, dass es sich ebenfalls um fehlerbehaftete Messungen handelt. Dies

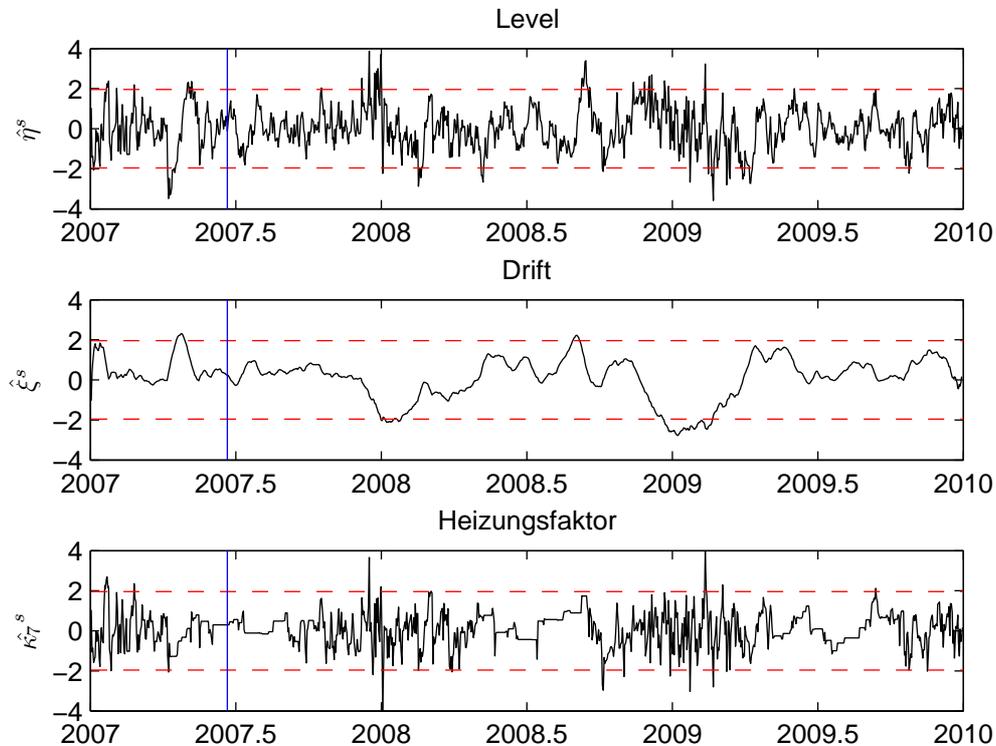


Abbildung 4.14: *auxiliary residuals* des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

könnte der Grund dafür sein, warum die in diesen zwei Zeiträumen besagte Gruppen zustande gekommen sind.

In Tabelle 4.9 sind die Teststatistiken und die P-Werte des modifizierten Excess Kurtosis Tests und des modifizierten Jarque Bera Tests der *auxiliary residuals* abgebildet. Die zwei Teststatistiken der geglätteten Beobachtungsfehler verwerfen die Nullhypothese zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$. Während es sich mit den Teststatistiken der Fehler des Heizungsfaktors ebenso verhält, werden drei von vier Tests der Fehler der Grundkomponente (Level und Drift) nicht verworfen. In Abbildung B.2 ist die geschätzte Autokorrelation der $\hat{\epsilon}^s$ abgebildet. Sowohl der Ljung-Box Test, welcher zu einem Lag von 30 einen P-Wert von 0 aufweist, als auch die Autokorrelationsfunktion bestätigen die von der Theorie behauptete Korreliertheit der Fehler.

Modell B_{12}

Bei dem BIC-Modell ergeben sich 50 Ausreißer (5 %), welche außerhalb der Signifikanzlinien liegen (siehe Abbildung 4.16). Dies entspricht einer Reduk-

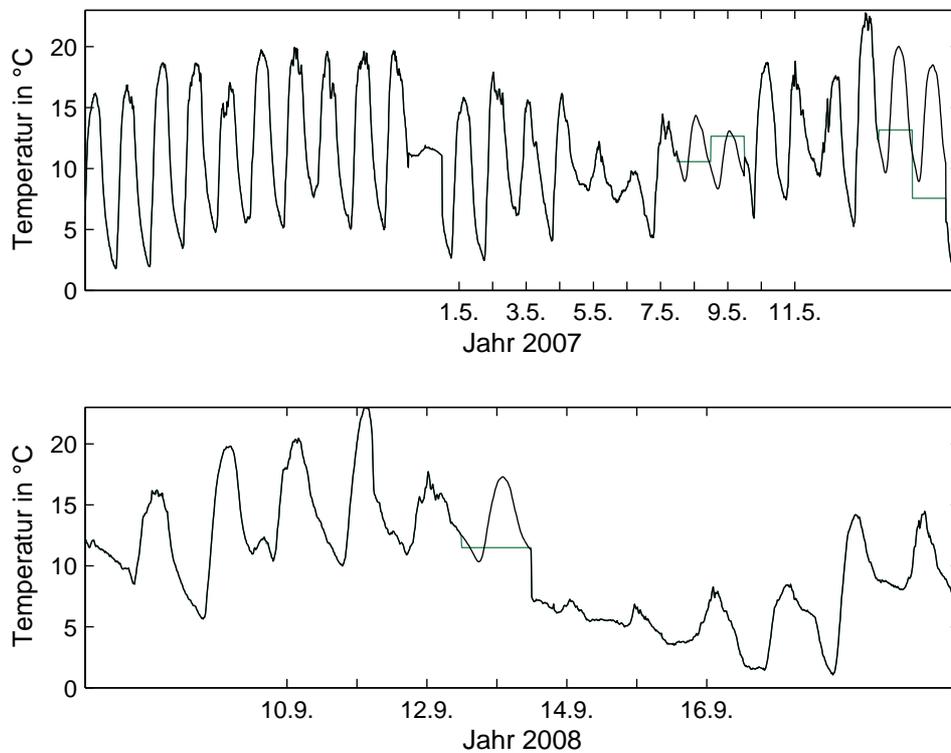


Abbildung 4.15: Temperaturausschnitte der Jahre 2007 und 2008

Komp.	Hilfsfehler	m. excess Kurtosis		m. Jarque Bera	
		Teststa.	P-Wert	Teststa.	P-Wert
	$\hat{\epsilon}^s$	5,00	0	61,68	0
Level	$\hat{\eta}^s$	2,39	0,01	5,77	0,06
Drift	$\hat{\xi}^s$	0,53	0,30	4,32	0,12
Heizungsf.	$\hat{\kappa}_7^s$	7,82	0	63,30	0

Tabelle 4.9: Teststatistiken der *auxiliary residuals* des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

tion von 11 Beobachtungen gegenüber dem AIC-Modell. Von den insgesamt 50 Ausreißern stimmen 46 mit denen des „Modell A_{12} “ überein. Bei den größten 25 % sogar 15 von 16. Vor allem die Anzahl der Ausreißer während der Sommermonate sind in dem „Modell B_{12} “ augenscheinlich zurück gegangen.

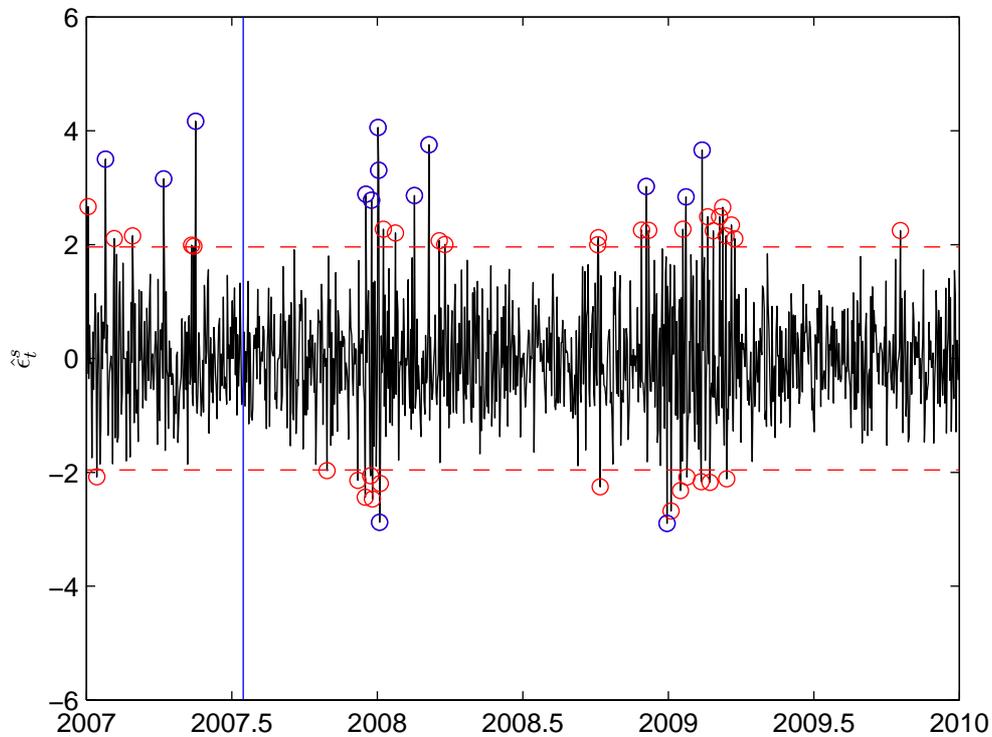


Abbildung 4.16: *auxiliary residuals* des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

In Abbildung 4.17 sind die vier *auxiliary residuals* der stochastischen Zustände abgebildet. Die Anzahl der Beobachtungen, welche sich nicht in dem Konfidenzintervall befinden, lauten (von oben nach unten): 98 (9 %), 20 (2 %), 76 (7 %) und 117 (11 %). Es lässt sich dabei ein ähnlicher Verlauf der Hilfsfehler der Temperatur und des Zyklus während der jeweiligen Jahresmitten erkennen. Dieser Effekt scheint dort am größten zu sein, wo die Fehler des Heizungsfaktors einen konstanten Verlauf haben. Des Weiteren ist zu erkennen, dass sich der Verlauf der *auxiliary residuals* der Temperatur dem des Levels des AIC-Modells hinsichtlich der Ausreißergruppen gleicht. Eine mögliche Ursache besteht in den unterschiedlichen Modellstrukturen dieser beiden Modelle. Während sich Fehlspezifikationen des AIC-Modells in den Hilfsfehlern des Levels bzw. des Heizungsfaktors widerspiegeln, können diese in den Hilfsfehlern der Temperatur, des Heizungsfaktors und des ersten Zustandes des Zyklus identifiziert werden. Interessant ist, dass die Fehler des Zyklus ebenfalls wie der Driftzustand im AIC-Modell einen recht untypischen Verlauf nehmen. Die Gemeinsamkeit dieser beiden

Zustände besteht darin, dass diese nicht unmittelbar in die Beobachtungsgleichung, sondern über ihren dazugehörigen Zustand, einfließen.

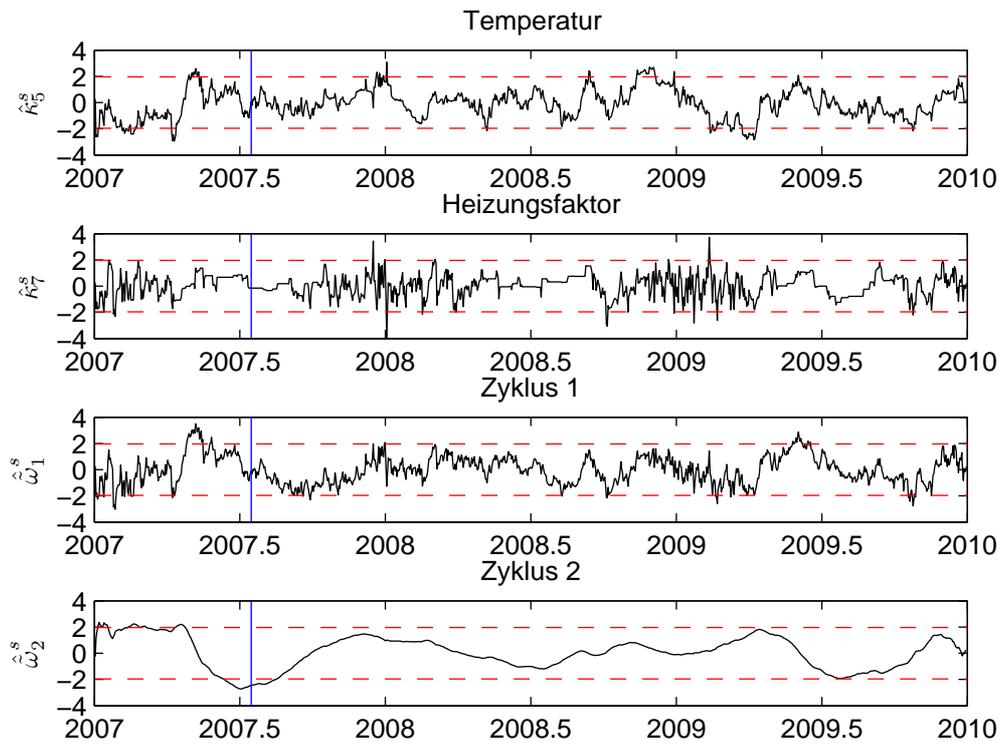


Abbildung 4.17: *auxiliary residuals* des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

Komp.	Hilfsfehler	m. excess Kurtosis		m. Jarque Bera	
		Teststa.	P-Wert	Teststa.	P-Wert
Temperatur	$\hat{\epsilon}^s$	7,37	0	97,65	0
	$\hat{\kappa}_5^s$	-0,31	0,62	0,13	0,94
Heizungsf.	$\hat{\kappa}_7^s$	4,70	0	28,91	0
Zyklus 1	$\hat{\omega}_1^s$	-0,29	0,61	1,37	0,51
Zyklus 2	$\hat{\omega}_2^s$	-0,66	0,74	0,96	0,62

Tabelle 4.10: Teststatistiken der *auxiliary residuals* des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

In Tabelle 4.10 sind die Teststatistiken der *auxiliary residuals* abgebildet. Die Statistiken der Beobachtungsgleichung bzw. des Heizungsfaktors

verwerfen die Nullhypothese, indessen die restlichen sechs Testgrößen die Nullhypothese annehmen. Angesichts der hohen Anzahl an Ausreißern sind die Ergebnisse dieser Statistiken überraschend. Vor allem bei der Teststatistik des zweiten Zustandes des Zyklus wäre eine Ablehnung zu vermuten gewesen. Infolge der Korrekturterme der beiden Tests, welche die Autokorreliertheit der Fehler berücksichtigen, dürfte es jedoch zu keiner Ablehnung gekommen sein.

Modell F_{12}

Die Hilfsfehler des dritten und letzten Modells sind in Abbildung 4.18 dargestellt, wobei in der oberen Grafik die Hilfsfehler der Beobachtungsgleichung abgebildet sind. Es liegen insgesamt 51 Beobachtungen (5 %) außerhalb der zwei Signifikanzschwellen. Die 14 blau markierten Ausreißer decken sich abermals zum größten Teil mit jenen aus den zwei vorigen besprochenen Modellen. Einzig der 02.01.07 ist neu zu dieser Gruppe hinzugekommen an welchem ein Temperaturabfall von fünf Grad beobachtet werden kann. In der unteren Grafik liegen 47 Beobachtungen (4 %) außerhalb des Konfidenzintervalls, wobei vor allem unmittelbar zu Beginn und knapp vor dem Ende des Verlaufes Ausreißer zu erkennen sind. Wie auch schon in den vorigen Modellen werden die zwei Nullhypothesen der geglätteten Beobachtungsfehler verworfen (vgl. Tabelle 4.11). Dem gegenüber stehen die Statistiken der Fehler der Temperatur, welche beide Nullhypothesen annehmen.

Komp.	Hilfsfehler	m. excess Kurtosis		m. Jarque Bera	
		Teststa.	P-Wert	Teststa.	P-Wert
Temperatur	$\hat{\epsilon}^s$	8,51	0	120,44	0
	$\hat{\kappa}_5^s$	1,20	0,12	4,13	0,13

Tabelle 4.11: Teststatistiken der *auxiliary residuals* des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

4.2.4 Erweiterungen der Modelle

In diesem Kapitel werden einige Erweiterungen der drei Modelle besprochen. Neben einer Ausreißerkomponente, werden auch eine Tourismuskomponente, sowie Erweiterungen, welche Temperaturprognosen berücksichtigen, vorgestellt. In den folgenden Unterkapiteln wird verstärkt auf „Modell A_{12} “ eingegangen, da die Ergebnisse des BIC- und NMSE-Modells sich entsprechend analog verhalten. Des Weiteren werden die Modellkomponenten der Erweiterungen, falls nicht ausdrücklich erwähnt, als deterministische Größen modelliert.

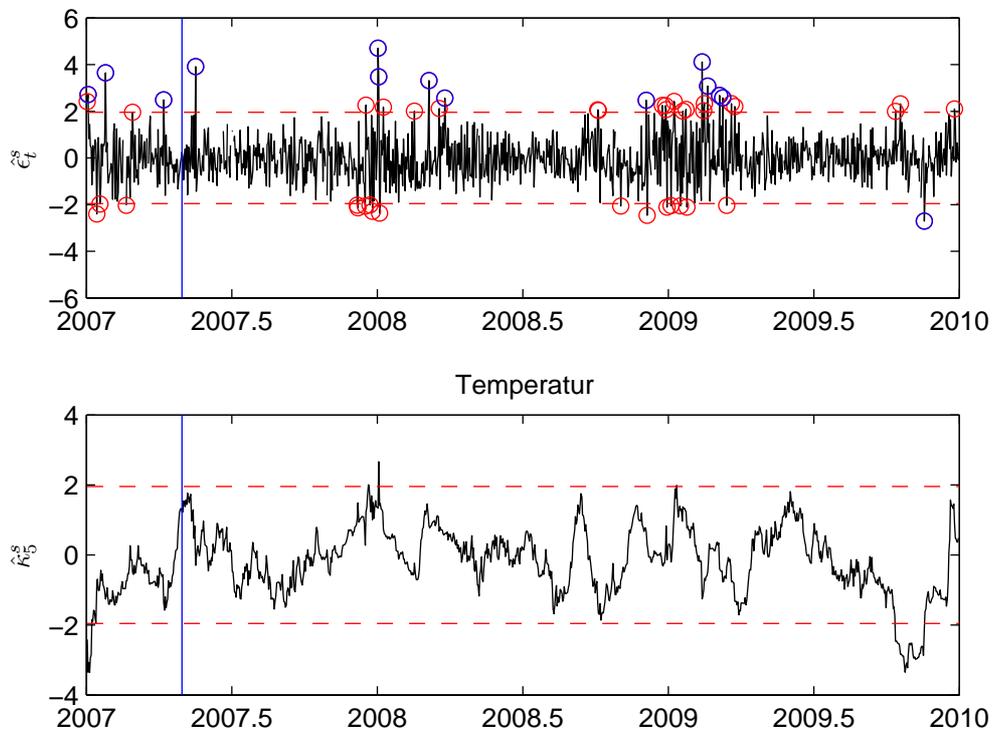


Abbildung 4.18: *auxiliary residuals* des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

Ausreißerbereinigung

Die standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler und die standardisierten geglätteten Fehler der Beobachtungsgleichung bilden die Grundlage dieser Untersuchung. Zunächst wird angenommen, dass alle geglätteten Fehler, welche außerhalb des Signifikanzniveaus liegen - wie weit diese Fehler von dem Signifikanzniveau entfernt liegen soll hierbei vernachlässigt werden - als Ausreißer der Heizlast wahrgenommen werden. Es wird diesen Beobachtungen somit unterstellt, dass es an den jeweiligen Tagen zu einer nicht systematischen Erhöhung oder Absenkung der Last gekommen ist. Es sei darauf hingewiesen, dass die obige Behauptung im Zusammenhang mit Fehlmodellierungen des Systems steht. Diese ergeben sich auf Grund von mangelnden Informationen, zum Beispiel seitens der äußeren Einflüsse der Witterung (Schneelage, Bewölkung, usw.). Die Anzahl der Ausreißer von „Modell A_{12} “ beläuft sich auf 61 Beobachtungen, wovon 40 oberhalb (Unterschätzung) und 21 unterhalb (Überschätzung) des Niveaus liegen. Diese 40 bzw. 21 Zeitpunkte werden in

zwei erklärenden Komponenten integriert:

$$x_{10(11),t} = \begin{cases} 1, & \text{Tag } t \text{ wird überschätzt (unterschätzt)} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.20)$$

Werden diese zwei neuen Komponenten in das AIC-Modell eingefügt und die Maximum-Likelihood-Schätzer neu berechnet, so ergibt sich ein neuer AIC- bzw. BIC-Wert:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7366,94 + 2 \cdot (18 + 4))/1077 = 13,721 \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7366,94 + \log(1077) \cdot (18 + 4))/1077 = 13,823 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wie zu erkennen ist, hat sich sowohl der AIC- (davor 13,710) als auch der BIC-Wert (davor 13,788) mit der Hinzunahme der Komponenten verschlechtert (vgl. der NMSE-Werte in 4.2.5). Ein Grund hierfür ist die Übernahme aller Ausreißer in die Komponenten, auch wenn diese nicht wesentlich vom 95 % Konfidenzbereich abweichen. Werden stattdessen jene Ausreißer in die Komponenten integriert, welche in allen drei Modellen (AIC-, BIC- und NMSE-Modell) als solche gekennzeichnet sind (24 statt 40 und 10 statt 21 Ausreißer; werden mit gepoolte Ausreißer bezeichnet), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7207,42 + 2 \cdot (18 + 4))/1077 = 13,425 \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7207,42 + \log(1077) \cdot (18 + 4))/1077 = 13,527 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dies stellt eine wesentliche Verbesserung gegenüber den vorigen Werten dar. Vor allem der BIC-Wert ist unter das Niveau von dem „Modell B_{12} “ gesunken. Betrachtet man die geglätteten Zustände der beiden Komponenten, so ergibt sich als Schätzer für den Einfluss, dass eine Überschätzung mit ca. -531 kW und eine Unterschätzung mit ca. 670 kW kompensiert wird. In Tabelle 4.12 sind die verbesserten Teststatistiken ersichtlich, bei denen alle drei Nullhypothesen - die der Unabhängigkeit, der Homoskedastizität und der Normalverteilung - angenommen werden und der Übergang von der diffusen Initialisierung zu dem normalen Kalman Filter zu dem Zeitpunkt 145 stattfindet.

Test	Teststa.	P-Wert
Unabhängigkeit	$Q(30)$	19,97
Homoskedastizität	$H(317)$	0,93
Normalverteilung	JB	1,21

Tabelle 4.12: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des erweiterten AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe

In den Abbildungen B.3 und B.4 (siehe Anhang) sind die Ein-Schritt Prognosefehler grafisch dargestellt. Wie in B.3 zu erkennen ist, sind die großen

Ausreißer während der Jahreswende 2008 verschwunden. Die Jahreswende 2009 ist nicht wesentlich von der Erweiterung beeinflusst worden. Die geschätzte Dichte in B.4 gleicht der Standardnormalverteilung bis auf eine kleine Erhebung bei der Null und eine leichte Rechtsschiefe ist nach wie vor zu erkennen. Auch die geschätzte Autokorrelationsfunktion unterstreicht das erhaltene Ergebnis des Ljung-Box Tests. Die Abbildung B.5 der Hilfsfehler der Beobachtungsgleichung zeigt einen weitaus „schöneren“ Verlauf als noch vor der Erweiterung.

In analoger Weise können die Ein-Schritt Prognosefehler statt der geglätteten Fehler verwendet werden. Werden nur diejenigen des AIC-Modells herangezogen, so folgt:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7220,62 + 2 \cdot (18 + 4))/1077 = 13,450 & (4.23) \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7220,62 + \log(1077) \cdot (18 + 4))/1077 = 13,551 \end{aligned}$$

Dies stellt im Vergleich zu dem ursprünglichen Modell eine Verbesserung, jedoch im Gegensatz zu dem Modell mit den gepoolten Ausreißern der geglätteten Fehler, eine Verschlechterung dar. Ebenso verhält es sich mit der Erweiterung der Ausreißer der gepoolten Ein-Schritt Prognosefehler, welche einen AIC- bzw. BIC-Wert aufweist von:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7285,08 + 2 \cdot (18 + 4))/1077 = 13,569 & (4.24) \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7285,08 + \log(1077) \cdot (18 + 4))/1077 = 13,671 \end{aligned}$$

In der Tabelle 4.13 sind die AIC- und BIC-Werte der restlichen beiden Modelle mit den dazugehörigen Erweiterungen abgebildet.

Modell	AIC	BIC
B_{12}	13,737	13,788
B_{12} inkl. Ausreißer $\hat{\epsilon}_t^s$	14,107	14,167
B_{12} inkl. gepoolte Ausreißer $\hat{\epsilon}_t^s$	13,530	13,590
B_{12} inkl. Ausreißer e_t	13,550	13,610
B_{12} inkl. gepoolte Ausreißer e_t	13,662	13,722
F_{12}	13,783	13,839
F_{12} inkl. Ausreißer $\hat{\epsilon}_t^s$	13,899	13,963
F_{12} inkl. gepoolte Ausreißer $\hat{\epsilon}_t^s$	13,558	13,623
F_{12} inkl. Ausreißer e_t	13,543	13,607
F_{12} inkl. gepoolte Ausreißer e_t	13,721	13,786

Tabelle 4.13: AIC- und BIC-Werte der Ausreißererweiterungen des BIC- und NMSE-Modells

Tourismuskomponente

Eine weitere Modellerweiterung ist die „Tourismuskomponente“: Wie in der Einleitung erwähnt, zählt die Ortschaft Tannheim zu einem Tourismuseinzugsgebiet, bei dem unter anderem auch Hotels und Gästezimmer von dem Biomasse-Kraftwerk versorgt werden. Es kann somit vermutet werden, dass während der Winterhauptsaison auf Grund des Tourismusandrangs ein erhöhter Bedarf gegeben ist. Als Hauptsaison wird die Periode zwischen Weihnachtsferienbeginn und Semesterferienende, also zirka Ende Dezember bis Mitte Februar, verstanden. Dadurch ergibt sich abermals eine neue Modellkomponente:

$$x_{14,t} = \begin{cases} 1, & \text{Tag } t \text{ liegt in Hauptsaison} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.25)$$

Wird diese Komponente in das AIC-Modell integriert und die Maximum-Likelihood-Schätzer neu geschätzt, so ergibt sich ein AIC- bzw BIC-Wert von:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7371,97 + 2 \cdot (17 + 4))/1077 = 13,728 \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7371,97 + \log(1077) \cdot (17 + 4))/1077 = 13,826 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dieses neue Modell stellt eine Verschlechterung gegenüber dem ursprünglichen Modell dar. Der geglättete Zustand liefert für diese Komponente einen relativ geringen Einfluss von zirka 58 kW.

Temperaturprognosen

Auf Grund der untersuchten Ausreißer in Kapitel 4.2.3 kann behauptet werden, dass einer der Hauptgründe, weshalb Ausreißer zu Stande kommen, neben einer etwaigen Kalendervariation, vor allem wetterabhängige Veränderungen sind. Da ausschließlich die Außentemperatur für die Untersuchung zur Verfügung steht und diese auch noch zeitversetzt in die Modelle einfließt, besteht hierbei ein erhöhtes Verbesserungspotential hinsichtlich der temperaturabhängigen Komponenten. Ein Ansatz, um eine mögliche Verbesserung zu erwirken, besteht darin, Temperaturprognosen für die gesamte Temperaturzeitreihe zu erstellen und diese direkt mit Hilfe von den in Kapitel 4.1.3 eingeführten Komponenten in das Modell einfließen zu lassen. Im Folgenden wird versucht mit drei einfachen Temperaturprognosen die Erklärungsgüte der Zustandsraummodelle signifikant zu steigern. Zunächst wird allerdings der AIC- und BIC-Wert von „Modell A₁₂“ unter der Annahme präsentiert, dass die Temperaturprognose perfekt ist (somit fließen die aktuellen und nicht die zeitversetzten Temperaturwerte in das Modell ein):

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7205,95 + 2 \cdot (16 + 4))/1077 = 13,418 \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7205,95 + \log(1077) \cdot (16 + 4))/1077 = 13,512 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Erkennbar ist, dass dieses Modell kleinere Gütekriterien als „Modell A_{12} “ aufweist. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da das neue Modell unmittelbar auf Temperaturveränderungen eingeht und gegebenenfalls Änderungen der Wärmelast vollziehen kann.

Als erstes Temperaturprognosemodell wird das AR(484)-Modell vorgestellt, welches auch schon zur Datenaufbereitung herangezogen wurde. Ein großer Nachteil dieses Modells besteht darin, dass für die Schätzung der AR-Parameter bereits alle verfügbaren Temperaturdaten verwendet werden. Auf Grund dessen sollte sich diese Prognose optimaler gegenüber den restlichen beiden verhalten, welche nicht zukünftige Daten für die Schätzung verwenden dürfen. Um eine bessere Vergleichsmöglichkeit zu erzielen und auch hinsichtlich der Parameterschätzer der noch folgenden beiden Temperaturprognosemodelle, werden die ersten $96 \cdot 7 = 672$ Datenpunkte der Temperatur als gegeben vorausgesetzt. Bei der Prognose wird wie folgt vorgegangen: Die vergangenen und gegenwärtigen Temperaturdaten werden herangezogen um die nächsten 96 Schritte zu prognostizieren, was einer Tagesprognose entspricht. Nun werden die nächsten 96 Temperaturdaten, welche zuvor noch prognostiziert wurden und nun als wahre Beobachtungen zur Verfügung stehen, zu der Datengrundlage hinzugefügt und die nächsten 96 Schritte berechnet.

Ersetzt man die zeitverschobenen Temperaturen mit den prognostizierten Temperaturen des AR(484)-Modells, so ergibt sich ein AIC- bzw. BIC-Wert von:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7356,50 + 2 \cdot (16 + 4))/1077 = 13,698 & (4.28) \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7356,50 + \log(1077) \cdot (16 + 4))/1077 = 13,791 \end{aligned}$$

Im Vergleich zu (4.15) ist das neue Modell besser, im Gegensatz zu (4.27) jedoch schlechter gestellt.

Als zweites Prognosemodell wird ein adaptiertes AR-Modell eingeführt. Bei diesem Modell soll die Problematik der AR-Parameter-Schätzung des vorigen Modells beseitigt werden und stellt somit ein ehrlicheres Schätzverfahren dar. Statt an einem Modell festzuhalten wird beim Eintreffen von neuen Temperaturdaten ein neues AR-Modell geschätzt und damit 96 neue Werte prognostiziert. Bei der Identifizierung der AR-Modelle kann die Ordnung über die Zeit variieren. Ein großer Nachteil dieser Methodik besteht darin, dass zu Beginn des Verfahrens die Anzahl der Daten, welche für die Parameterschätzung verwendet werden, relativ klein ist. Ebenso werden am Anfang des Verfahrens kleinere Modelle bei der Modellwahl bevorzugt.

Werden die neu erhaltenen Temperaturprognosen in „Modell A_{12} “ integriert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7373,83 + 2 \cdot (16 + 4))/1077 = 13,730 & (4.29) \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7373,83 + \log(1077) \cdot (16 + 4))/1077 = 13,822 \end{aligned}$$

Diese Werte stellen eine Verschlechterung gegenüber dem vorigen Modell sowie dem ursprünglichen AIC-Modell dar.

Als drittes und letztes Modell wird ein einfach strukturiertes *state space model* für die Prognose herangezogen. Dieses Zustandsraummodell setzt sich aus einem *local level model*, einem Zyklus und einer erklärenden Variable, welche die tageszeitversetzten Temperaturen enthält, zusammen. Sowohl der Zyklus als auch die erklärende Komponente werden als stochastische Größen angenommen. Bei der Prognose wird analog zu dem adaptierten AR-Schätzverfahren vorgegangen: Sobald neue Daten eintreffen, werden die Maximum-Likelihood-Schätzer des Zustandsraummodells neu berechnet und 96 Schritte prognostiziert.

Durch die neu erhaltenen Temperaturwerte ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7372,06 + 2 \cdot (16 + 4))/1077 = 13,727 \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7372,06 + \log(1077) \cdot (16 + 4))/1077 = 13,820 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Diese Werte zeigen eine Verschlechterung gegenüber dem ursprünglichen „Modell A_{12} “ und gegenüber jenem mit der AR(484) Temperaturprognose. In Abbildung 4.19 sind die Prognosen der drei vorgestellten Modelle für den Monat Februar 2008 abgebildet. In der oberen Abbildung ist die wahre Temperatur (schwarz) gegen das AR(484)-Modell, in der mittleren gegen das adaptierte AR-Modell und unten gegen das *state space model* (alle rot) wiedergegeben. Unter der Annahme, dass sich der Verlauf der Temperatur hinreichend gleichmäßig verhält (beispielsweise in der zweiten Februarwoche 2008), kann die Temperatur relativ gut prognostiziert werden. Kommt es jedoch zu wetterbedingten Schwankungen (beispielsweise in der ersten Februarwoche), so nimmt die Qualität der Prognosen ab.

Zum Abschluss soll noch auf die Thematik einer kombinierten Integration von zeitversetzten Temperaturwerten und prognostizierten Werten eingegangen werden. Wird „Modell A_{12} “ mit einer erklärenden Komponenten, welche die prognostizierte Temperatur beinhaltet, erweitert, so ergibt sich jeweils eine Verbesserung der Gütekriterien bezüglich des AIC-Modells. Diese Verbesserungen fallen jedoch gegenüber den Modellen, welche die prognostizierte Temperatur direkt enthalten, geringer aus und werden auch nicht weiter behandelt.

Wird allerdings anstelle der zeitversetzten Temperatur die prognostizierte AR(484)-Temperatur in „Modell A_{12} “ verwendet und zusätzlich eine erklärende Komponente mit der zeitversetzten Temperatur hinzugefügt, ergibt sich ein AIC- bzw. BIC-Wert von:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7354,81 + 2 \cdot (17 + 4))/1077 = 13,697 \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7354,81 + \log(1077) \cdot (17 + 4))/1077 = 13,794 \end{aligned} \quad (4.31)$$

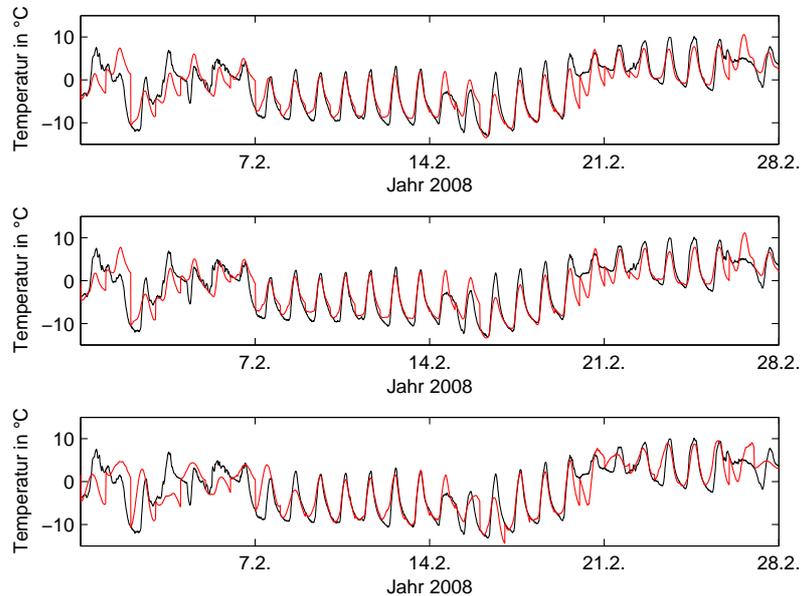


Abbildung 4.19: wahre Temperatur (schwarz) und Temperaturprognosen der Modelle (rot): AR(484)-Modell (oben), adaptiertes AR-Modell (mittig) und *state space model* (unten)

Dies stellt im Vergleich zu (4.28) eine geringfügige Verbesserung dar. Als nächstes wird die adaptierte AR-Schätzung und die zeitversetzte Temperaturkomponente genutzt:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7338,28 + 2 \cdot (17 + 4))/1077 = 13,666 & (4.32) \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7338,28 + \log(1077) \cdot (17 + 4))/1077 = 13,763 \end{aligned}$$

Abermals hat sich eine Verbesserung gegenüber (4.29) ergeben. Zum Abschluss wird anstelle der adaptierten noch die *state space* Temperaturschätzung verwendet:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7356,43 + 2 \cdot (17 + 4))/1077 = 13,700 & (4.33) \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7356,43 + \log(1077) \cdot (17 + 4))/1077 = 13,797 \end{aligned}$$

Analog zu den vorigen beiden Veränderungen hat sich auch dieses Mal eine Verkleinerung der Werte ergeben. Nichtsdestotrotz werden diese bestimmten Kombinationen nicht weiter analysiert, da diese zu Verschlechterungen hinsichtlich der Prognosen führen.

Große Temperaturschwankungen

Wie in Kapitel 4.2.3 mehrfach erwähnt, können Ausreißer unmittelbar bei großen Temperaturschwankungen, sowohl im positiven als auch im negativen Sinn, auftreten. Dieser Sachverhalt bildet die Grundlage für eine neue Komponente, welche auch im Hinblick auf die Prognose konstruiert wird. Zunächst werden die differenzierten Temperaturen der 12 Uhr Zeitreihe betrachtet, die die Schwankungen von Tag t zu Tag $t+1$ darstellen. Ebenso werden Temperaturschwankungsgrenzen (TSG) festgelegt, welche „normale“ Temperaturveränderungen gegenüber großen unterscheiden sollen. Um die Anzahl dieser Grenzen annehmbar klein zu halten werden nur ganzzahlige Zahlen von fünf bis neun zugelassen.

Grad	(-15,-9]	(-9,-8]	(-8,-7]	(-7,-6]	(-6,-5]	(-5,0]
Anzahl	9	8	16	13	35	453
Grad	(0,5]	(5,6]	(6,7]	(7,8]	(8,9]	(9,15]
Anzahl	509	21	20	6	3	3

Tabelle 4.14: Klassen der differenzierten Temperatur

In Tabelle 4.14 sind die differenzierten Temperaturen in Klassen hinsichtlich der Temperaturschwankungsgrenzen eingeteilt. Insgesamt ergeben sich 134 Beobachtungen der differenzierten Temperatur, welche größer als 5 oder kleiner als -5 Grad sind, was einen Anteil von 12 % gegenüber allen Schwankungen entspricht. Wird diese TSG nach oben angehoben, so verringert sich die Anzahl der Differenzen, welche als extrem angesehen werden. Es kann somit folgende Komponente erstellt werden:

$$x_{12(13),t} = \begin{cases} 1, & \text{diff. Temp. zu Tag } t \text{ größer (kleiner) als } (-)\text{TSG} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.34)$$

Im Gegensatz zu den temperaturabhängigen Komponenten in Kapitel 4.1 werden in Gleichung (4.34) die aktuellen und nicht die zeitversetzten differenzierten Temperaturen verwendet. Hinsichtlich der Prognose erfordert dies natürlich das Vorwissen, ob eine große Temperaturveränderung am nächsten Tag stattfinden wird oder nicht (es muss jedoch nur bekannt sein ob die Temperaturschwankung größer oder kleiner als die TSG ist). Zunächst wird angenommen, dass qualitativ perfekte Temperaturprognosen bezüglich großen Temperaturveränderungen gegeben sind. Damit ergibt sich zum Beispiel für eine TSG von fünf, ein AIC- bzw. BIC-Wert von:

$$\text{AIC} = (2 \cdot 7353,19 + 2 \cdot (18 + 4))/1077 = 13,532 \quad (4.35)$$

$$\text{BIC} = (2 \cdot 7353,19 + \log(1077) \cdot (18 + 4))/1077 = 13,634$$

Diese Werte stellen eine Verbesserung gegenüber dem „Modell A_{12} “, hingegen gegenüber (4.27) eine Verschlechterung dar. Es ist nicht weiter überraschend,

dass das neue Modell von der Erklärungsgüte her zwischen diesen beiden Modellen liegt. Dieses Modell stellt sozusagen einen Kompromiss zwischen den zeitversetzten und den aktuellen Temperaturwerten dar. In Abbildung 4.20 sind die *auxiliary residuals* der Beobachtungsgleichung gegen die differenzierte Temperatur dargestellt. Die linke Grafik beschreibt das „Modell A_{12} “, während die rechte Grafik das erweiterte Modell wiedergibt. Die rot markierten Fehler stehen für die Ausreißer, welche außerhalb des Signifikanzniveaus liegen und zu dem Zeitpunkt die differenzierte Temperatur über oder unter der (-)TSG liegt. Es lässt sich beobachten, dass sich die roten Fehler von 22 auf 7 verringert haben.

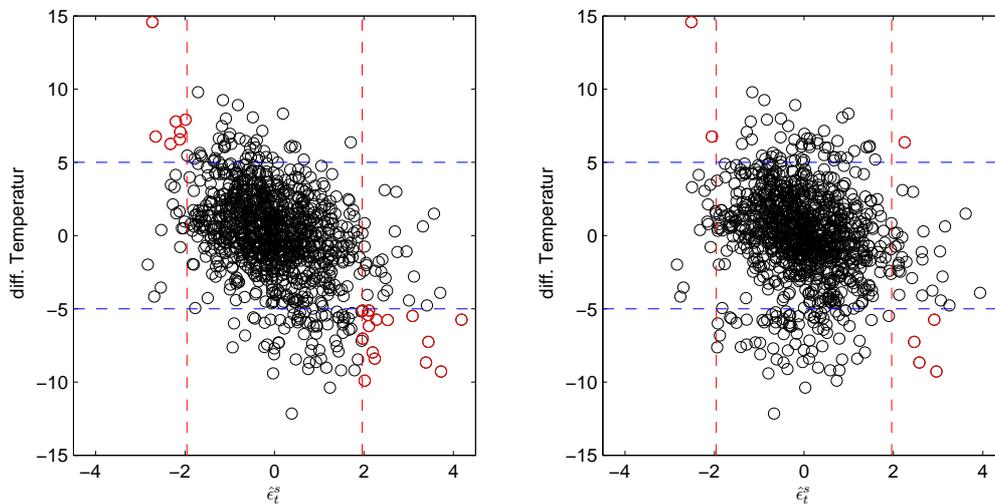


Abbildung 4.20: *auxiliary residuals* des AIC-Modells gegen die ersten Differenzen der Temperatur ohne Erweiterung (links), mit Erweiterung und TSG von 5 (rechts)

In Tabelle 4.15 sind die AIC- und BIC-Werte für die restlichen TSG unter der Voraussetzung einer perfekten Temperaturveränderungsprognose angegeben. Abermals hat sich das AIC-Modell durch Hinzunahme der jeweiligen Komponenten verbessert. Durch Herabsetzen der TSG sinken diese beiden Werte, da mehr aktuelle Informationen in das Modell einfließen und das Modell somit früher auf Temperaturveränderungen reagieren kann. Dies hebt ein weiteres Mal hervor wie wichtig hinreichend gute Temperaturprognosen für die Lastschätzung sind. Des Weiteren ist auffallend, dass sich der Zeitpunkt d des Übergangs vom diffusen zum „normalen“ Kalman Filter erst bei einer TSG von neun wesentlich erhöht.

Nun wird die Voraussetzung, dass die Veränderungen perfekt prognosti-

TSG	AIC	BIC	d
5	13,532	13,634	145
6	13,604	13,705	172
7	13,631	13,733	172
8	13,659	13,761	172
9	13,670	13,771	368

Tabelle 4.15: AIC- und BIC-Werte des erweiterten AIC-Modells

ziert werden können, verworfen und mit Hilfe der drei Temperaturprognosen aus dem vorigen Unterkapitel die zukünftigen Temperaturschwankungen geschätzt. In Tabelle 4.16 sind für die AR(484), für die adaptierte AR Schätzung und für die *state space* Prognose die AIC- bzw. BIC-Werte abgebildet. Im Vergleich zu dem ursprünglichen Modell sind durchwegs Verbesserungen erkennbar, jedoch fallen diese gegenüber der Komponente mit den perfekten Veränderungen schlechter aus. Zu beachten sind die Gütekriterien zu einem TSG von neun, welche die geringsten AIC- bzw BIC-Werte aufweisen.

TSG	AR(484)			adaptiertes AR			<i>state space model</i>		
	AIC	BIC	d	AIC	BIC	d	AIC	BIC	d
5	13,697	13,800	145	13,697	13,799	145	13,698	13,800	145
6	13,696	13,798	172	13,694	13,795	195	13,700	13,802	172
7	13,692	13,793	172	13,697	13,798	369	13,699	13,801	172
8	13,682	13,783	369	13,684	13,786	369	13,699	13,800	172
9	13,676	13,778	369	13,676	13,778	369	13,694	13,796	172

Tabelle 4.16: AIC- und BIC-Werte des erweiterten AIC-Modells

4.2.5 Prognose

Für die Umsetzung der Modelle in die Praxis spielt die Prognose der zukünftigen Heizlasten eine entscheidende Rolle. Der Prognosehorizont reicht dabei vom 01.01.2010 bis zum 30.06.2010 und beinhaltet somit 181 Datenpunkte. Die Tabelle 4.17 fasst die drei Modelle mit deren wichtigsten Erweiterungen zusammen. Die Auswahl der TSG erfolgte dabei nach dem kleinsten NMSE-Wert. Die fett markierten Zeilen heben die besten Erweiterungen in Hinblick auf das NMSE-Prognosekriterium heraus. Dabei werden jene Erweiterungen vernachlässigt, welche perfekte Temperaturprognosen (kursiv) beinhalten. Es werden folgende Kürzel eingeführt: „inkl. Ausreißer“ steht für die Erweiterung, welche die gepoolten Ausreißer $\hat{\epsilon}_t^s$ beinhaltet, „inkl. Temp.“ steht für die Erweiterung bei der die prognostizierte statt der zeitversetzten Temperatur verwendet wird und „inkl. TSG“ für die Erweiterung der großen

Temperaturschwankungen.

Modell	NMSE	MAPE	POCID	AIC
A_{12}	0,0391	0,1416	64 %	13,710
A_{12} inkl. Ausreißer	0,0385	0,1405	64 %	13,425
A_{12} inkl. Temp. - <i>perfekt</i>	0,0236	0,1088	76 %	13,419
A_{12} inkl. Temp. - AR(484)	0,0351	0,1338	66 %	13,698
A_{12} inkl. Temp. - adapt. AR	0,0344	0,1324	67 %	13,730
A_{12} inkl. Temp. - state space model	0,0374	0,1383	66 %	13,727
A_{12} inkl. TSG 5 - <i>perfekt</i>	0,0273	0,1224	70 %	13,532
A_{12} inkl. TSG 6 - AR(484)	0,0390	0,1412	64 %	13,696
A_{12} inkl. TSG 6 - adapt. AR	0,0389	0,1412	64 %	13,694
A_{12} inkl. TSG 6 - state space model	0,0390	0,1411	64 %	13,700
A_{12} inkl. Tourismus	0,0392	0,1414	64 %	13,729
B_{12}	0,0336	0,1327	63 %	13,737
B_{12} inkl. Ausreißer	0,0341	0,1333	63 %	13,530
B_{12} inkl. Temp. - <i>perfekt</i>	0,0229	0,1084	74 %	13,487
B_{12} inkl. Temp. - AR(484)	0,0338	0,1311	62 %	13,791
B_{12} inkl. Temp. - adapt. AR	0,0391	0,1416	64 %	13,438
B_{12} inkl. Temp. - state space model	0,0394	0,1405	64 %	13,826
B_{12} inkl. TSG 5 - <i>perfekt</i>	0,0245	0,1161	73 %	13,608
B_{12} inkl. TSG 7 - AR(484)	0,0335	0,1324	64 %	13,721
B_{12} inkl. TSG 6 - adapt. AR	0,0335	0,1326	63 %	13,722
B_{12} inkl. TSG 6 - state space model	0,0335	0,1326	63 %	13,728
B_{12} inkl. Tourismus	0,0336	0,1327	62 %	14,128
F_{12}	0,0308	0,1289	67 %	13,783
F_{12} inkl. Ausreißer	0,0312	0,1304	66 %	13,557
F_{12} inkl. Temp. - <i>perfekt</i>	0,0196	0,1040	76 %	13,569
F_{12} inkl. Temp. - AR(484)	0,0303	0,1274	67 %	13,780
F_{12} inkl. Temp. - adapt. AR	0,0320	0,1349	63 %	13,875
F_{12} inkl. Temp. - state space model	0,0307	0,1293	64 %	13,786
F_{12} inkl. TSG 5 - <i>perfekt</i>	0,0226	0,1139	73 %	13,636
F_{12} inkl. TSG 8 - AR(484)	0,0308	0,1284	67 %	13,758
F_{12} inkl. TSG 6 - adapt. AR	0,0309	0,1291	67 %	13,768
F_{12} inkl. TSG 9 - state space model	0,0309	0,1295	67 %	13,767
F_{12} inkl. Tourismus	0,0309	0,1290	67 %	13,780

Tabelle 4.17: Prognosekriterien der analysierten Modelle

Das „Modell F_{12} “ stellt per Definition das beste Modell, gemessen anhand des NMSE-Wertes, dar. Ebenso ist jede Erweiterung dieses Modells bezüglich der Prognosekriterien besser gestellt als die entsprechende Erweiterung der anderen beiden Modelle. Hinsichtlich der Prognose kann es sich als vorteilhaft

erweisen die geschätzte Temperatur anstatt der zeitversetzten Temperatur in das Modell aufzunehmen. Dies bringt vor allem bei dem AIC-Modell in allen vier Fällen eine wesentliche Verbesserung mit sich. Bei dem BIC- bzw. dem NMSE-Modell führte dies nur unter der Annahme von perfekten Temperaturprognosen zu einer Erhöhung der Prognosequalität. Trotzdem kann bei allen drei Modellen somit behauptet werden, dass falls die Temperaturen hinreichend gut prognostiziert werden können, es zu einer Verbesserung bezüglich der Prognosegüte kommt. Eine Möglichkeit besagtes zu erreichen besteht darin, die einfach gehaltene Strukturen der Temperaturmodelle zu erweitern. Darauf wird jedoch in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen.

Die Modellerweiterung, welche große Temperaturveränderungen beinhaltet, weist im Fall des AIC- und BIC-Modells eine Verbesserung der Prognose auf. Bei dem NMSE-Modell trifft dies nur für den Fall einer perfekten Prognose und der AR(484) Prognose zu. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Temperaturkomponente nur angibt, dass eine große Veränderung stattfindet, allerdings nicht wie stark diese ausfällt.

Nicht weiter ungewöhnlich ist, dass die Modelle mit der gepoolten Ausreißererweiterung, bis auf „Modell A_{12} “, schlechter als die Modelle ohne Erweiterungen abschneiden. Ein Grund hierfür ist, dass die zwei Ausreißerkomponenten, welche bei der *in-sample*-Analyse für eine erhebliche Verbesserung gesorgt haben, die zukünftigen Ausreißer bei der Prognose nicht erfassen können.

Die Tourismuskomponente erweist sich als eine nicht optimale Komponente hinsichtlich der *in-sample*- als auch der *out-of-sample*-Analyse. Diese bringt nicht nur keine wesentlichen Verbesserungen (BIC-Modell), sondern auch Verschlechterungen (AIC-, NMSE-Modell) mit sich.

Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit besteht darin Erweiterungen zu kombinieren. Einzig bei „Modell A_{12} “ mit der Ausreißererweiterung (gepoolte Ausreißer $\hat{\epsilon}_t^g$) und der Erweiterung mit den großen Temperaturschwankungen (TSG 6 - adaptierte AR) führt dieser Vorgang zu einer nennenswerten Verbesserung des AIC-Kriteriums:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7196,83 + 2 \cdot (20 + 4))/1077 = 13,409 \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7196,83 + \log(1077) \cdot (20 + 4))/1077 = 13,520 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Diese zwei Werte stellen die kleinsten Repräsentanten ihrer Gütekriterien aller getesteten Modelle in dieser Arbeit dar. Trotz des relativ schlechten NMSE-Wertes (0,0383), im Gegensatz zu den restlichen erweiterten AIC-Modellen, wird dieses Modell (Bezeichnung „erw. Modell A_{12} “) für die weitere Analyse verwendet. Das BIC-Modell wird mit der Erweiterung der großen

Temperaturschwankungen (TSG 7 - AR(484); Bezeichnung „erw. Modell B_{12} “) und das NMSE-Modell ebenfalls mit der Erweiterung der großen Temperaturschwankungen (TSG 7 - adaptierte AR; Bezeichnung „erw. Modell F_{12} “) hinsichtlich der Prognose weiter analysiert. Dabei soll angeführt werden, dass Modelle, welche Temperaturprognosen anstatt der zeitversetzten Temperaturen enthalten (außer bei den Komponenten mit den großen Temperaturschwankungen), nicht für die Auswahl in Betracht gezogen wurden. In Abbildung 4.21 sind die Prognosen der Modelle „erw. Modell A_{12} “, „erw. Modell B_{12} “ und „erw. Modell F_{12} “ abgebildet.

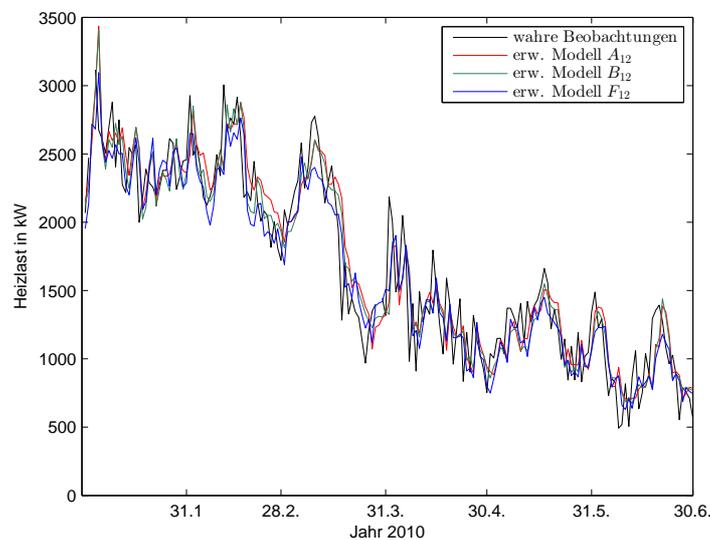


Abbildung 4.21: *one step ahead forecast* ausgewählter Modelle

Die Abbildung 4.22 gibt den Verlauf des NMSE-Kriteriums (ohne den Normierungsfaktor $1/J$) der oben genannten Modelle wieder. Während sich zu Beginn der Prognose der Verlauf ähnelt, kommt es zu den Zeitpunkten 18.03.10 (Donnerstag), 07.04.10 (Mittwoch) und 08.06.10 (Dienstag) zu drei größeren Sprungstellen. Zu allen drei Zeitpunkten ist es zu einer Verringerung der Heizlast (von 350 bis 750 kW) bzw. zu einem Temperaturanstieg (von 4 bis 6 Grad) gekommen, welche von den Modellen nicht hinreichend gut berücksichtigt wurden. Bereinigt man den Verlauf zu den genannten Zeitpunkten, so ergibt sich trotzdem das erweiterte NMSE-Modell als bestes Modell.

In Tabelle 4.18 sind die 1-, 3- und 7-Schritt Prognosekriterien der drei erweiterten Modelle enthalten. Indessen bei allen drei Modellen das MAPE-

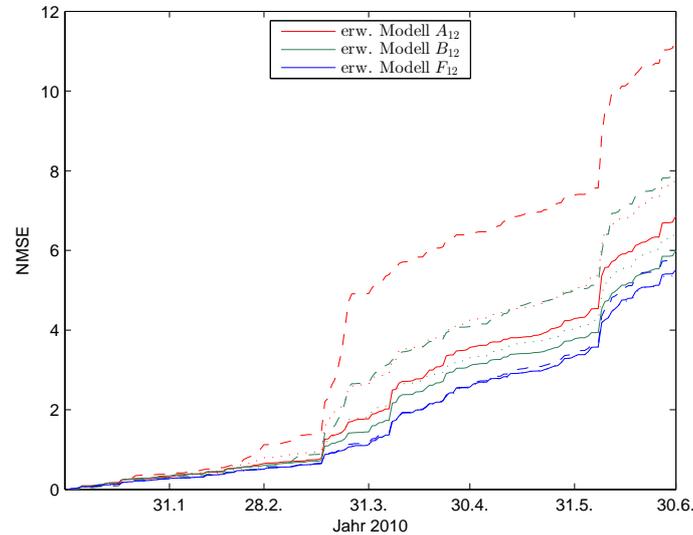


Abbildung 4.22: NMSE-Verlauf der 1-Schritt (durchgezogene Linie), 3-Schritt (gepunktete Linie), 7-Schritt (strichlierte Linie) Prognose der drei Modelle

Kriterium mit zunehmender Schrittweite ansteigt, ist bei dem POCID Kriterium keine Verschlechterung oder Verbesserung erkennbar. Interessanterweise hat sich der NMSE-Wert von „erw. Modell F_{12} “ bei der 3-Schritt Prognose gegenüber der 1-Schritt Prognose verbessert. Dieser Sachverhalt ist jedoch bei den anderen Modellen nicht zu beobachten (vgl. Abbildung 4.22). Beachtlicherweise ist die 7-Schritt Prognose von „erw. Modell F_{12} “, gemessen anhand des NMSE-Kriteriums, besser gestellt, als sämtliche Prognosen des erw. AIC- und des erw. BIC-Modells.

	Modell	NMSE	MAPE	POCID
<i>1-step</i>	mod. A_{12}	0,0383	0,1397	63 %
	mod. B_{12}	0,0335	0,1324	64 %
	mod. F_{12}	0,0308	0,1284	67 %
<i>3-steps</i>	mod. A_{12}	0,0436	0,1491	60 %
	mod. B_{12}	0,0361	0,1368	63 %
	mod. F_{12}	0,0306	0,1282	67 %
<i>7-steps</i>	mod. A_{12}	0,0631	0,1756	64 %
	mod. B_{12}	0,0449	0,1521	64 %
	mod. F_{12}	0,0328	0,1319	65 %

Tabelle 4.18: Prognosekriterien der 1-, 3- und 7-Schritt Prognosen

Das Biomasse-Kraftwerk gewinnt den Großteil seiner Energie aus dem Biomassekessel, welcher eine Leistung von bis zu 2500 kW erreichen kann. Zusätzlich kann noch ein gewöhnlicher Ölkessel dazugeschaltet werden um etwaige Lastspitzen abzufedern. Dieser Ölkessel hat eine maximale Leistung von 3500 kW, womit sich insgesamt eine Leistung von 6000 kW ergibt. Typischerweise liegen die Kosten pro Kilowatt bei dem Ölkessel über der des Biomassekessels. Es ergeben sich dadurch zwei *worst case* Szenarien betreffend der Prognose (In diesen Szenarien wird der *buffering* Effekt, bei dem nicht verwendete Energie gespeichert und für spätere Zeitpunkte verwendet werden kann, ausgeklammert; ebenfalls wird die Option, den Massenfluss den prognostizierten Werten anzupassen, vernachlässigt):

Überschätzung: Das Modell prognostiziert Lastwerte, welche über der maximalen Leistung des Biomassekessels liegen. Um den notwendigen prognostizierten Energieverbrauch zu befriedigen, wird der teurere Ölkessel zusätzlich dazugeschaltet. Es stellt sich jedoch heraus, dass die tatsächliche Last unter der 2500 kW Grenze liegt. Es kommt somit zu einer nicht erwünschten Überschätzung der Lastwerte.

Unterschätzung: Das Modell prognostiziert Lastwerte, welche unter der maximalen Leistung des Biomassekessels liegen. Die echte Last liegt jedoch über dieser Grenze und der Ölkessel muss nachträglich dazugeschaltet werden.

Primär sind die Wintermonate zu betrachten, da hier die 2500 kW Marke des Öfteren überschritten wird (vgl. Abbildung 1.1). Bei näherer Untersuchung der Ein-Schritt Prognose folgt, dass beim „erw. Modell A_{12} “ 8-mal eine Unterschätzung und 11-mal eine Überschätzung stattgefunden hat. Unwesentlich besser schneidet das „erw. Modelle B_{12} “ ab, bei dem es 8-mal zu einer Unterschätzung und 8-mal zu einer Überschätzung gekommen ist. Bei dem „Modell F_{12} “ ergibt sich, dass sich 12-mal eine Unterschätzung und 5-mal eine Überschätzung realisiert hat.

4.2.6 Modellwahl

Die schlussendliche Modellwahl gestaltet sich schon bei einer kleinen Anzahl an Modellen als recht schwierig. Einerseits kann dies damit begründet werden, dass durch den geringen AIC- bzw. BIC-Wert das „erw. Modell A_{12} “ den anderen beiden Modellen vorgezogen werden sollte. Zudem unterstreichen die relativ guten Teststatistiken bei der *in-sample* Analyse, sowohl der Ein-Schritt Prognosefehler als auch der *auxiliary residuals*, dieses Ergebnis. Andererseits liefert die *out-of-sample* Prognose dieses Modells nicht unbedingt optimale Resultate. Es stellt sich jedoch die Frage, wie stark der NMSE-Wert gewichtet werden darf, da der Prognosehorizont gerade einmal sechs Monate oder 181 Datenpunkte beträgt. Zu erwähnen ist auch noch,

dass es das größte Modell gemessen anhand des Zustandsvektors ist (20 Zustände).

Hinsichtlich der Prognose fällt die Wahl auf das „erw. Modell F_{12} “ (11 Zustände) bzw. das etwas schlechtere dafür auch kleinere „Modell F_{12} “ (9 Zustände). Der große Vorteil besteht bei diesen Modellen darin, dass die Prognosegüte weit über die der restlichen Modelle zu stellen ist. Wie jedoch an den Teststatistiken ersichtlich ist, verhalten sich insbesondere die Ein-Schritt Prognosefehler nicht wie von der Theorie verlangt. Des Weiteren ist zu bezweifeln, ob sich die Prognose über einen ausgedehnteren Prognosehorizont ebenso gut entwickeln werden würde.

Das Modell „erw. Modell B_{12} “ stellt sozusagen ein Kompromissmodell zwischen dem „erw. Modell A_{12} “ und dem „erw. Modell F_{12} “, gemessen anhand des BIC- und NMSE-Wertes, dar. Die Diagnostik der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler und der *auxiliary residuals* widerlegt jedoch ein weiteres Mal die zugrunde gelegte Theorie. Dieses Modell enthält acht Zustände und ist somit das kleinste der erweiterten Modelle.

Als bestmögliches Modell wird das „erw. Modell A_{12} “ vorgeschlagen, welches in Tabelle 4.19 zusammengefasst ist.

$y_t = \mu_t + \gamma_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} + \underbrace{\beta_5 x_{5,t}}_{\text{Temp.}} + \underbrace{\beta_6 x_{6,t}}_{\text{gegl. Temp.}}$ $+ \underbrace{\beta_7 x_{7,t}}_{\text{Heizungsf.}} + \underbrace{\beta_8 x_{8,t}}_{\text{gegl. Heizungf.}} + \underbrace{\beta_9 x_{9,t} + \beta_{10} x_{10,t}}_{\text{gro. Temperaturver.}} + \underbrace{\beta_{11} x_{11,t} + \beta_{12} x_{12,t}}_{\text{gepool. Ausreißer}} + \epsilon_t$ <p style="text-align: center;">adaptierte AR</p>	
$\mu_{t+1} = \mu_t + \nu_t + \eta_t$ $\nu_{t+1} = \nu_t + \xi_t$ $\beta_{7,t+1} = \beta_{7,t} + \kappa_{7,t}$	$\sigma_\epsilon^2 = 32.939,84$ $\sigma_\eta^2 = 689,07$ $\sigma_\xi^2 = 0,75$ $\sigma_{\kappa_8}^2 = 13,06$ <p>TSG = 6</p>

Tabelle 4.19: Vorgeschlagenes Modell der 12 Uhr Zeitreihe

4.3 Multivariates Modell

In diesem Kapitel werden die erhaltenen Modelle der Kapitel 4.2, A.1 und A.2 (ohne Erweiterungen) in zwei multivariate Modelle, „Modell M_{AIC} “ bzw. „Modell M_F “, zusammengefasst. Der Hauptgrund, weshalb die 6 Uhr, 9 Uhr und 12 Uhr Zeitreihe zur Analyse herangezogen werden, ist in Abbildung 1.2 (unten) bzw. in Abbildung B.1 ersichtlich. Hierbei ist zu erkennen, dass der Verbrauch zwischen sechs und zwölf Uhr, vor allem während der kälteren Wintermonate, über den Verbrauch des restlichen Tages zu stellen ist.

Der Hintergedanke dieser Modellierung besteht darin, dass in den univariaten Modellen Gemeinsamkeiten enthalten sind, welche sich auf die Prognosen im multivariaten Fall positiv auswirken können. Wünschenswert wäre natürlich ein multivariates Modell bei dem alle 96 Zeitreihen in ein Modell zusammengefasst werden könnten. Jedoch steigt schon im Falle eines von der Struktur her einfachen *local level models* die Anzahl der zu schätzenden Parameter auf 9.312 an. Auf Grund dessen wird bei dem multivariaten Fall ausschließlich der dreidimensionale Fall untersucht.

4.3.1 Analyse

Im speziellen Fall werden zwei Modelle konstruiert, welche einen Kompromiss zwischen den Modellen einer Klasse darstellen (zum Beispiel werden unter der Klasse AIC die drei univariaten AIC-Modelle der 6, 9 und 12 Uhr Zeitreihe verstanden). Es kann angenommen werden, dass sich die im Folgenden vorgestellten multivariaten Modelle nicht bestmöglich hinsichtlich der *in-sample*- als auch der *out-of-sample*-Analyse Verhalten werden. Trotzdem sollen diese herangezogen werden, um Einblicke in die Abhängigkeiten der univariaten Modelle zu erhalten. Die Auswahlkriterien setzen sich anhand folgender Punkte zusammen:

- Als Grundkomponente wird die einfachste Form der drei univariaten Modelle in das multivariate Modell integriert.
- Falls eine optionale Komponente zweimal bzw. dreimal in den univariaten Modellen enthalten ist (unabhängig davon ob diese einen stochastischen oder deterministischen Zustand aufweist), so soll diese ebenfalls in dem multivariaten Modell hinzugefügt werden.
- Weist eine bereits in dem multivariaten Modell integrierte optionale Komponente eine stochastische Ausprägung in einem der drei univariaten Modelle auf, so wird diese ebenfalls in dem multivariaten Modell als stochastisch modelliert.

Konkret folgert das im Fall der univariaten AIC-Modelle ein multivariates Modell der Form:

$$\begin{aligned}
 y_t = & \mu + c_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} & (4.37) \\
 & + \underbrace{\beta_5 x_{5,t}}_{\text{Temp.}} + \underbrace{\beta_6 x_{6,t}}_{\text{gegl. Temp.}} + \underbrace{\beta_8 x_{8,t}}_{\text{gegl. Heizungsf.}} + \underbrace{\beta_9 x_{9,t}}_{\text{st. verga. Mittel}} + \epsilon_t \\
 \beta_{8,t+1} = & \beta_{8,t} + \kappa_{8,t} \\
 c_{t+1} = & c_t \cos(\lambda_c) + c_t^* \sin(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{1,t} \\
 c_{t+1}^* = & -c_t \sin(\lambda_c) + c_t^* \cos(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{2,t}
 \end{aligned}$$

Damit die Übersichtlichkeit gewährt bleibt, wird auf die multivariate Darstellung verzichtet und nur die univariate präsentiert. Diese Form kann allerdings analog zu (2.14) in eine multivariate Darstellungsweise überführt werden. Dieses Modell wird fortan mit „Modell M_{AIC} “ bezeichnet und stellt somit eine Verallgemeinerung von „Modell A_9 “ und mit Abstrichen von „Modell A_6 “ (die Komponente „gegl. Temperatur“ fehlt) auf den multivariaten Fall dar. In (4.38) sind die Schätzer der Kovarianzmatrizen bzw. der Schätzer für die Frequenz wiedergegeben. Um die Abhängigkeit der Fehler hervorzuheben sind ebenfalls die dazugehörigen Korrelationsmatrizen abgebildet.

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{pmatrix} 23.514, 15 & 6.577, 12 & 4.907, 74 \\ & 37.075, 29 & 14.422, 87 \\ & & 37.277, 75 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0,22 & 0,17 \\ & 1 & 0,38 \\ & & 1 \end{pmatrix} & (4.38) \\
 Q_{\kappa_8} &= \begin{pmatrix} 190,33 & 35,66 & 18,43 \\ & 379,13 & -25,30 \\ & & 194,00 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0,13 & 0,10 \\ & 1 & -0,09 \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
 Q_{\tilde{\omega}} &= \begin{pmatrix} 45,58 & 3,62 & 13,04 \\ & 95,87 & 57,39 \\ & & 129,46 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0,06 & 0,17 \\ & 1 & 0,52 \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
 \lambda_c &= 0,017
 \end{aligned}$$

Analog lässt sich ein multivariates NMSE-Modell mit der Bezeichnung „Modell M_F “, einführen:

$$\begin{aligned}
 y_t = & \mu + c_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} & (4.39) \\
 & + \underbrace{\beta_6 x_{6,t}}_{\text{gegl. Temp.}} + \underbrace{\beta_9 x_{9,t}}_{\text{st. verga. Mittel}} + \epsilon_t \\
 c_{t+1} = & c_t \cos(\lambda_c) + c_t^* \sin(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{1,t} \\
 c_{t+1}^* = & -c_t \sin(\lambda_c) + c_t^* \cos(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{2,t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{pmatrix} 38.256,27 & 16.662,04 & 16.767,86 \\ & 23.683,45 & 6.109,42 \\ & & 18.622,96 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0,55 & 0,62 \\ & 1 & 0,29 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (4.40) \\
 Q_{\tilde{\omega}} &= \begin{pmatrix} 432,15 & 114,33 & 85,71 \\ & 533,69 & 70,28 \\ & & 102,97 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0,24 & 0,41 \\ & 1 & 0,30 \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
 \lambda_c &= 0,025
 \end{aligned}$$

Sowohl bei den Schätzern in (4.38) als auch in (4.40) sind große Abhängigkeiten zu den gewählten Startwerten des Suchverfahrens, welches die Maximum-Likelihood-Schätzer berechnet, gegeben. Es kann somit angenommen werden, dass die erhaltenen Schätzer vermutlich nicht die besten darstellen. Um diesem Problem ein wenig entgegenzuwirken sind verschiedene Startwerte untersucht, jeweils die Maximum-Likelihood-Schätzer berechnet und das beste Resultat verwendet worden. Die *in-sample*-Gütekriterien belaufen sich bei dem „Modell M_{AIC} “ auf:

$$\begin{aligned}
 AIC &= (2 \cdot 21.910,78 + 2 \cdot (51 + 19))/1070 = 41,085 \quad (4.41) \\
 BIC &= (2 \cdot 21.910,78 + \log(1070) \cdot (51 + 19))/1070 = 41,411
 \end{aligned}$$

Es werden somit insgesamt 19 Parameter geschätzt und der Zustandsvektor weist eine Dimension von 51 auf. Bei „Modell M_F “ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 AIC &= (2 \cdot 23.820,65 + 2 \cdot (27 + 13))/1070 = 44,599 \quad (4.42) \\
 BIC &= (2 \cdot 23.820,65 + \log(1070) \cdot (27 + 13))/1070 = 44,785
 \end{aligned}$$

Dieses Modell enthält einen Zustandsvektor der Dimension 27 und es sind 13 Parameter geschätzt worden. Obwohl die Modelle aus drei nicht optimalen Kriterien ausgewählt worden sind, gilt trotzdem, dass das multivariate AIC-Modell besser gestellt als das multivariate NMSE-Modell ist.

		6 Uhr		9 Uhr		12 Uhr		
Test		Teststa.	P-Wert	Teststa.	P-Wert	Teststa.	P-Wert	
M_{AIC}	Unabhängigkeit	$Q(30)$	39,19	0,12	0,87	0,00	3,16	0,03
	Homoskedastizität	$H(317)$	79,85	0,20	0,91	0,35	15,45	0,47
	Normalverteilung	JB	46,64	0,21	1,08	0,00	1,77	0,41
M_F	Unabhängigkeit	$Q(30)$	31,07	0,41	45,80	0,03	40,26	0,10
	Homoskedastizität	$H(325)$	0,78	0,02	0,77	0,01	0,93	0,49
	Normalverteilung	JB	37,76	0,00	88,62	0,00	74,64	0,00

Tabelle 4.20: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler der beiden multivariaten Modelle

In Tabelle 4.20 sind sowohl die Teststatistiken von „Modell M_{AIC} “ als auch

von „Modell M_F “ abgebildet. Der AIC-Wert und auch die Teststatistiken deuten darauf hin, dass sich das Modell „Modell M_{AIC} “ besser für die Erklärung der Daten eignet.

4.3.2 Prognose

Die in Kapitel 4.3.1 beobachtbaren Abhängigkeiten der einzelnen Zeitreihen sollten eine etwaige Verbesserung der Prognose mit sich führen. In Tabelle 4.21 sind die Prognosekriterien der multivariaten Modelle zusammengefasst. Ein Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit jenen aus den Kapiteln A.1, A.2

	Uhr	NMSE	MAPE	POCID
M_{AIC}	6	0,0207	0,1137	75 %
	9	0,0206	0,1022	69 %
	12	0,0322	0,1307	71 %
M_F	6	0,0229	0,1183	71 %
	9	0,0221	0,1028	73 %
	12	0,0294	0,1208	71 %

Tabelle 4.21: Prognosekriterien der multivariaten Modelle

und 4.2.5 ergibt, dass sich bei den Prognosekriterien im Fall des AIC-Modells eine Verbesserung aller drei NMSE-Werte ergeben hat. Konkret gilt, dass der NMSE-Wert der 6 Uhr Zeitreihe im Vergleich zu dem univariaten Fall von 0,0289 auf 0,0207 (MAPE von 0,1332 auf 0,1137), der NMSE-Wert der 9 Uhr Zeitreihe von 0,0242 auf 0,0206 (MAPE von 0,1166 auf 0,1022) und der 12 Uhr Zeitreihe von 0,0391 auf 0,0322 (MAPE von 0,1416 auf 0,1307) gesunken ist. Insbesondere wirken bei der 12 Uhr Zeitreihe die erhaltenen Ergebnisse ein bisschen überraschend, da bei der multivariaten Modellstruktur, im Gegensatz zu den AIC-Modellen der 6 Uhr und 9 Uhr Zeitreihe, große Unterschiede vorhanden sind. Einmal mehr werden die Vorteile einer multivariaten Modellierung unterstrichen.

Gleicherweise liefert „Modell M_F “ eine Verbesserung der NMSE-Werte gegenüber den univariaten NMSE-Modellen außer bei der 9 Uhr Zeitreihe, bei der eine Verschlechterung eingetreten ist. Während sich bei der 6 Uhr Zeitreihe der NMSE-Wert von 0,0236 auf 0,0229 (MAPE von 0,1247 auf 0,1183) und bei der 12 Uhr Zeitreihe der NMSE-Wert von 0,0308 auf 0,0294 (MAPE von 0,1289 auf 0,1208) gesenkt hat, ist es zu einer Anhebung dieses Wertes bei der 9 Uhr Zeitreihe von 0,0208 auf 0,0221 (MAPE von 0,1088 auf 0,1028) gekommen.

In Abbildung 4.23 sind die Ein-Schritt Prognosen der 12 Uhr Zeitreihe von dem Zeitraum 01. Jänner 2010 bis 30. Juni 2010 dargestellt. In der oberen Grafik sind die Prognosen von „Modell A_{12} “ (blau) gegen die Prognosen von „Modell M_{AIC} “ (rot) abgebildet und durch die wahren Beobachtungen

(schwarz) ergänzt. In der unteren Grafik sind die Prognosen der 12 Uhr Zeitreihe von „Modell F_{12} “ (blau) gegen die Prognosen von „Modell M_F “ (rot), ebenfalls um die wahren Beobachtungen (schwarz) erweitert, abgebildet.

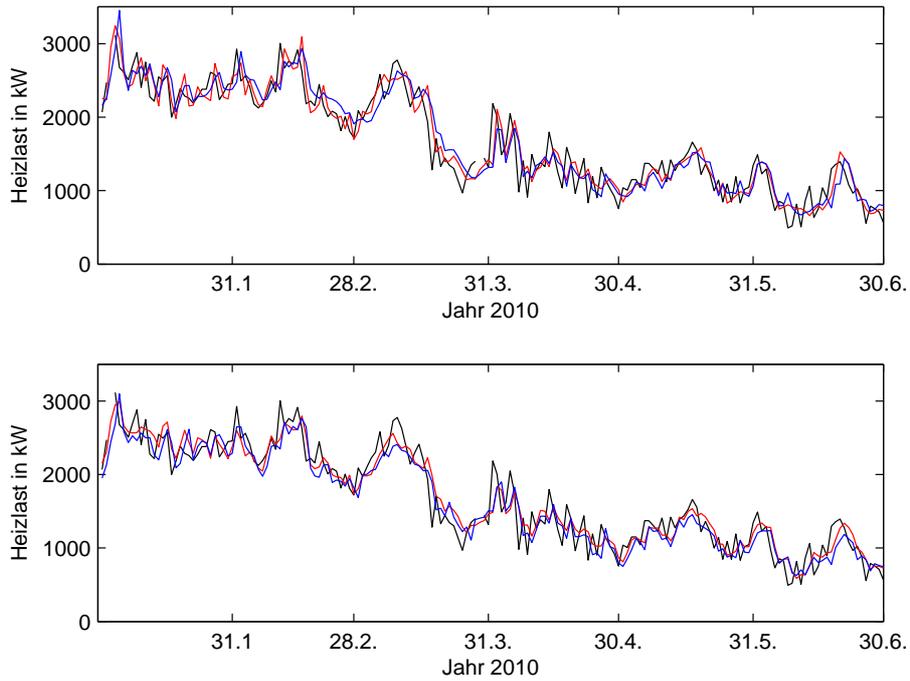


Abbildung 4.23: *one step ahead forecast* der 12 Uhr Zeitreihe: (oben) „Modell A_{12} “ (blau) gegen „Modell M_{AIC} “ (rot); (unten) „Modell F_{12} “ (blau) gegen „Modell M_F “ (rot); wahre Beobachtungen (schwarz)

4.4 Zusammenfassung

Wie die empirische Untersuchung gezeigt hat, ist die Zustandsraummodellierung ein probates Mittel um die Heizlast zu analysieren und zu prognostizieren. Jedoch ergeben sich schon bei einer relativ kleinen Anzahl an Komponenten, welche in das System integriert werden können, eine Vielzahl an Modellmöglichkeiten. Des Weiteren lässt sich bezweifeln, ob die verwendeten Komponenten optimal gewählt worden sind. Eine alternative Modellkomponente besteht beispielsweise darin, die Temperatur in einer nichtlinearen Form in das Modell einfließen zu lassen. Zu einem gewissen Grad ist dies anhand der Komponente „Heizungsfaktor“ durchgeführt worden, jedoch wären unter Umständen weitere nichtlineare Faktoren wünschenswert.

Als großes Problem hat sich, neben der enormen Anzahl an fehlenden Beobachtungswerten, vor allem die Schätzung der Maximum-Likelihood-Schätzer herausgestellt. Das Hauptproblem besteht darin, dass eine sehr hohe Abhängigkeit der Startwerte für das Suchverfahren, welches die Maximum-Likelihood-Funktion maximiert, gegeben ist. Hierbei sind eine Vielzahl an alternativen Startwerten durchprobiert und schlussendlich jene verwendet worden, welche einerseits hinsichtlich der Maximierung der Likelihood-Funktion optimale Ergebnisse geliefert und andererseits eine vernünftige Interpretation zugelassen hat. Als negatives Beispiel wäre hierfür ein schlechter Startwert für die Frequenz des Zyklus zu nennen, welcher zu einer Konvergenz der Periode mit sieben Tagen geführt hat. Auf Grund der saisonalen Komponente, die für eben diesen Fall konstruiert wurde, stellt dies kein gewünschtes Ergebnis dar. Im multivariaten Fall ist die Problematik der Abhängigkeit der Startwerte vermehrt vorgekommen, nicht zuletzt infolge der enorm anwachsenden Anzahl an Varianzen/Kovarianzen.

Die vorliegende Arbeit hat gezeigt, dass Temperaturprognosen einen positiven Einfluss sowohl auf die *in-sample*- als auch die *out-of-sample*-Analyse haben. Überhaupt zeigen die meisten Modellerweiterungen (bis auf die Tourismuskomponente) eine Verbesserung. Die Außentemperatur kann im Falle eines „normalen“ Tagesrhythmus mit Hilfe der einfachen Temperaturprognosemodelle einigermaßen gut prognostiziert werden, jedoch nehmen die Prognosefehler bei einem „nicht systematischen“ Temperaturverlauf zu. Das ist auch der Hauptgrund, weshalb Modelle, welche die prognostizierende statt der zeitversetzten Temperatur aufweisen, gegenüber jenen, welche die Erweiterung der großen Temperaturveränderungen enthalten, nicht vorgezogen wurden.

Auf Grund des geringen Prognosehorizonts und der kleinen Anzahl an Verbrauchern ist eine vernünftige Interpretation der Prognose schwer möglich. Unter anderem kann eine Veränderung des Heizverhaltens einer kleinen

Verbrauchergruppe der 84 Haushalte eine signifikante Verschlechterung der Prognosekriterien bewirken. Des Weiteren lässt sich schwer vorhersagen, wie sich die Modelle in Hinblick auf einen längeren Prognosehorizont verhalten würden. Interessant wäre vor allem die Heizlastdaten für ein weiteres Jahr zur Verfügung zu haben. Somit könnte eine vollständige Jahreswende prognostiziert und Ausreißer, welche vermehrt um die Jahreswechsel auftreten, in einer *out-of-sample*-Analyse untersucht werden.

Wie zu erwarten, hat sich eine Verbesserung der Prognose im multivariaten Fall ergeben und das obwohl diese Modelle unter nicht optimalen Bedingungen konstruiert worden sind. Eine Fortsetzung der Untersuchung des multivariaten Falles würde mit großer Wahrscheinlichkeit eine weitere Verbesserung der Prognose zur Folge haben.

Anhang A

Analyse der 6 und 9 Uhr Zeitreihe

In diesem Kapitel werden die übrigen Zeitreihen analog zu Kapitel 4 analysiert. Auf Grund des Umfangs werden jedoch nur die jeweiligen AIC- bzw. NMSE-Modelle, nicht aber die BIC-Modelle untersucht. Ebenso wird nicht explizit auf alle Feinheiten der Analyse - u.a. werden einige Erweiterungen weggelassen, wenn diese keine Verbesserung des Modells mit sich bringen - eingegangen.

A.1 6 Uhr Zeitreihe

Modellauswahl auf Grund des AIC-Kriterium

Für die 6 Uhr Zeitreihe ergibt sich nach dem AIC-, als auch nach dem BIC-Kriterium folgendes Modell („Modell A_6 “):

$$\begin{aligned} y_t = & \mu + \gamma_t + c_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} & (A.1) \\ & + \underbrace{\beta_5 x_{5,t}}_{\text{Temp.}} + \underbrace{\beta_6 x_{6,t}}_{\text{gegl. Temp.}} + \underbrace{\beta_8 x_{8,t}}_{\text{gegl. Heizungsf.}} + \underbrace{\beta_9 x_{9,t}}_{\text{st. verga. Mittel}} + \epsilon_t \\ \beta_{8,t+1} = & \beta_{8,t} + \kappa_{8,t} \\ c_{t+1} = & c_t \cos(\lambda_c) + c_t^* \sin(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{1,t} \\ c_{t+1}^* = & -c_t \sin(\lambda_c) + c_t^* \cos(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{2,t}, \end{aligned}$$

Die Maximum-Likelihood-Schätzer für die Varianzen und die Frequenz belaufen sich auf $\sigma_\epsilon^2 = 25.727,15$, $\sigma_{\kappa_8}^2 = 147,40$, $\sigma_\omega^2 = 258,86$ bzw. für die Frequenz $\lambda_c = 0,0165$. Als Periode ergibt sich somit eine Dauer von 379 Tage ($= 2\pi/0,0165$). Eine Analyse der 100 besten AIC-Modelle ist in Abbildung A.1 wiedergegeben. Aus dieser Tabelle ist zu entnehmen, dass fünf Komponenten von „Modell A_6 “ mit den maximalen Ausprägungen der 100

besten AIC-Modelle übereinstimmen. Während bei dem Zyklus und bei der geglätteten Temperatur die Abweichung von dem Maximum als vernachlässigbar klein interpretiert werden kann, so ist die Abweichung bei den Tages-Dummys damit zu erklären, dass bei der Ausprägung „stochastisch“ auch jene miteinbezogen werden, welche nicht nur vier stochastische Zustände aufweisen. Konkret weisen von den 59 Modellen, welche eine Kennzeichnung mit stochastischen Tages-Dummys aufweisen, 33 nur einen einzigen stochastischen Zustand auf. Dadurch erscheint das erhaltene Modelle wieder annähernd plausibel.

Komponente	stochastisch	deterministisch	nicht vorhanden
saison. Komponente	44	<u>53</u>	3
Zyklus	<u>37</u>	38	25
Tages-Dummys	59	<u>37</u>	4
Temperatur	32	<u>46</u>	22
gegl. Temperatur	32	<u>33</u>	35
Heizungsfaktor	22	33	<u>45</u>
gegl. Heizungsfaktor	<u>94</u>	4	2
st. vergangenes Mittel	42	<u>51</u>	7

Tabelle A.1: Kontingenztabelle der optionalen Komponenten gegen ihre Ausprägung (stochastisch, deterministisch oder nicht vorhanden) der besten 100 AIC-Modelle

Ein Vergleich zwischen „Modell A_{12} “ und „Modell A_6 “ ergibt, dass die Komponenten „Zyklus“ und „stündliches vergangenes Mittel“ neu in das Modell aufgenommen, jedoch die Komponente „Heizungsfaktor“ entfernt wurde. Des Weiteren hat sich die Grundkomponente von einem *local level with trend* zu einem *deterministic level* geändert. Der AIC bzw. BIC beläuft sich auf:

$$\text{AIC} = (2 \cdot 7393,06 + 2 \cdot (17 + 4))/1086 = 13,654 \quad (\text{A.2})$$

$$\text{BIC} = (2 \cdot 7393,06 + \log(1086) \cdot (17 + 4))/1086 = 13,750$$

Der Übergang zwischen der diffusen Initialisierung und dem Kalman Filter findet zu dem Zeitpunkt 198 statt. In Tabelle A.2 sind die P-Werte der Teststatistiken für die standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler abgebildet. Wiederum werden nur jene Prognosefehler herangezogen, welche nicht in die Initialisierungsphase fallen. Sowohl der Test auf Homoskedastizität als auch auf Normalverteilung lehnen die Nullhypothesen zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ ab. Im Gegensatz dazu steht der Test auf Unabhängigkeit der die Nullhypothese nicht verwirft.

In Abbildung A.1 sind die standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler ihrem Zeitverlauf über dargestellt. Abermals geben die rot markierten Punkte jene außerhalb des 95% Konfidenzintervalls an und die blaue Linie steht

Test		Teststa.	P-Wert
Unabhängigkeit	$Q(30)$	35,07	0,24
Homoskedastizität	$H(299)$	0,70	0,00
Normalverteilung	JB	7,17	0,03

Tabelle A.2: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 6 Uhr Zeitreihe

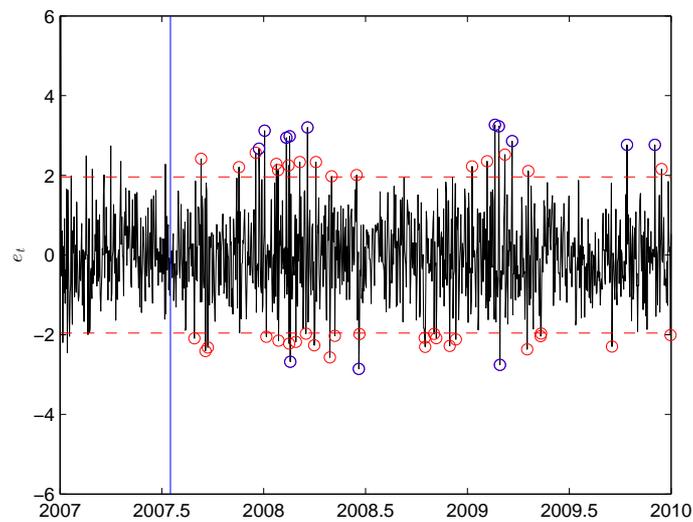


Abbildung A.1: Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells

für den Zeitpunkt d des Übergangs von der diffusen Initialisierung zu dem „normalen“ Kalman Filter. Die blau markierten Punkte geben die 25 % der größten Ausreißer wieder. Es ergeben sich 51 Beobachtungen, welche außerhalb dieser Grenzen liegen, was ungefähr 5 % der Gesamtmenge ausmacht. Insgesamt stimmen nur vier Ausreißer von „Modell A_{12} “ und „Modell A_6 “ miteinander überein (17.12.07, 16.02.08, 05.03.08, 01.11.08). Wie auch schon bei dem „Modell A_{12} “ lassen sich vermehrt Ausreißer während der Jahreswenden erkennen. Diese großen Ausreißer können zum Teil durch enorme Temperaturschwankungen erklärt werden. Zu erwähnen wäre hierbei etwa der Übergang vom 01.01.08 zum 02.01.08, bei dem die Temperatur um zirka 11 Grad auf -21 Grad abgekühlt ist oder aber auch der Übergang vom 17.02.09 zum 18.02.09, wo sich die Temperatur um 16 Grad verringert hat. Ebenso befindet sich ein Ausreißer am 27.02.08, bei welchem es zu einem enormen Temperaturanstieg gekommen ist (8 Grad). Die Modellerweiterung, welche große Temperaturveränderungen in das Modell aufnimmt, sollte auch

bei dieser Zeitreihe eine Verbesserung der Erklärungsgüte darstellen.

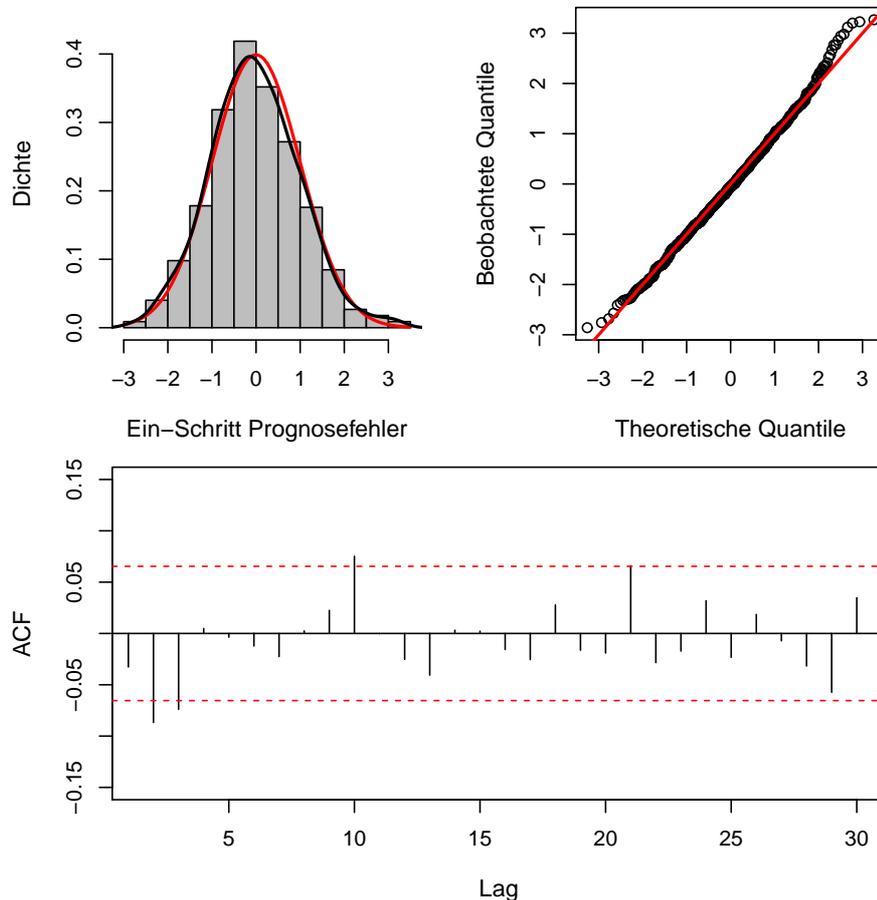


Abbildung A.2: Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 6 Uhr Zeitreihe

In Abbildung A.2 ist ein Histogramm der Prognosefehler mit der geschätzten und der standardnormalverteilten Dichte dargestellt, sowie ein QQ-Plot gegen die Standardnormalverteilung bzw. die geschätzte Autokorrelationsfunktion. Es ist zu erkennen, dass Abweichungen zu der Normalverteilung gegeben sind. Diese zeigen sich vor allem anhand der Rechtsschiefe und an den dickeren *tails*. Der QQ-Plot zeigt die positiven Ausreißer auf, während die geschätzte Autokorrelationsfunktion die Unabhängigkeit der Fehler widerspiegelt (trotz der Abhängigkeit zu den Lags: 3, 4 und 10).

In der Grafik A.3 sind die *auxiliary residuals* der Beobachtungsgleichung abgebildet, wobei die blaue Linie abermals den Übergang zwischen der diffusen Initialisierung und dem „normalen“ Kalman Filter - Zeitpunkt d - angibt.

Die Anzahl der Ausreißer in Grafik A.3 beträgt 83, was ungefähr 8 % der gesamten Zeitreihe ausmacht. Von diesen 83 Ausreißern stimmen 11 mit jenen von „Modell A_{12} “ überein (16.12.07, 17.12.07, 02.01.08, 23.01.08, 16.02.08, 05.03.08, 19.03.08, 01.11.08, 18.01.09, 18.02.09 und 25.02.09). Der Großteil der blauen Fehler kann auf Temperatur- oder Tagesvariationen zurückgeführt werden. Die Anzahl der Ausreißer der geglätteten Zustandshilfsfehler beträgt für den geglätteten Heizungsfaktor 51 (ca. 5 %), für den ersten Zustand des Zyklus 91 (ca. 8 %) und für den zweiten Zustand des Zyklus 71 (7 %).

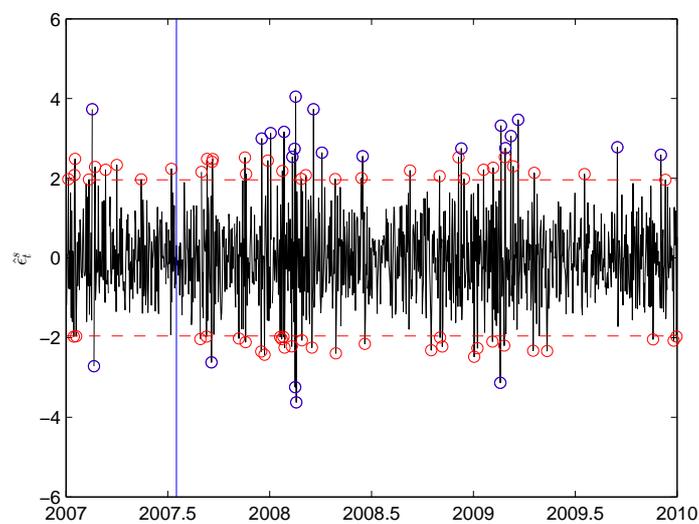


Abbildung A.3: *auxiliary residuals* des AIC-Modells der 6 Uhr Zeitreihe

In Tabelle A.3 sind die P-Werte der Teststatistiken der Hilfsfehler angegeben. Die vier Nullhypothesen der Teststatistiken der Fehler der Beobachtungsgleichung und der Fehler des geglätteten Heizungsfaktors werden klar abgewiesen. Dem gegenüber stehen die vier Teststatistiken der Fehler des Zyklus, welche die Nullhypothesen nicht verwerfen.

Komp.	Hilfsfehler	m. excess Kurtosis		m. Jarque Bera	
		Teststa.	P-Wert	Teststa.	P-Wert
gegl. Heizungsfaktor	$\hat{\epsilon}^s$	3,97	0,00	33,90	0,00
	$\hat{\kappa}_8^s$	3,46	0,00	13,31	0,00
Zyklus 1	$\hat{\omega}_1^s$	-0,43	0,67	0,60	0,74
Zyklus 2	$\hat{\omega}_2^s$	-0,08	0,53	1,38	0,50

Tabelle A.3: Teststatistiken der *auxiliary residuals* des AIC-Modells der 6 Uhr Zeitreihe

Modellauswahl auf Grund des NMSE-Kriterium

Wird die Reihung der erhaltenen Modelle nach dem NMSE-Kriterium vorgenommen, so ergibt sich „Modell F_6 “ als bestes:

$$y_t = \mu_t + c_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} \quad (\text{A.3})$$

$$+ \underbrace{\beta_6 x_{6,t}}_{\text{gegl. Temp.}} + \underbrace{\beta_8 x_{8,t}}_{\text{gegl. Heizungsf.}} + \epsilon_t$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t$$

$$\beta_{8,t+1} = \beta_{8,t} + \kappa_{8,t}$$

$$c_{t+1} = c_t \cos(\lambda_c) + c_t^* \sin(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{1,t}$$

$$c_{t+1}^* = -c_t \sin(\lambda_c) + c_t^* \cos(\lambda_c) + \tilde{\omega}_{2,t}$$

Die Schätzer für die Varianzen und die Frequenz dieses Modells ergeben: $\sigma_\epsilon^2 = 64.180,69$, $\sigma_\eta^2 = 4,00$, $\sigma_{\beta_8}^2 = 5,69$ bzw. $\sigma_\omega^2 = 108,74$ und der Frequenz $\lambda_c = 0,022$ (286 Tage). Im Gegensatz zu „Modell A_6 “ sind die Komponenten „Temperatur“, „stündliches vergangenes Mittel“ und „Saison“ aus dem Modell entfernt und ein *local level* statt einem *deterministic level* hinzugefügt worden. Der Übergang findet zum Zeitpunkt 145 statt. Der AIC bzw. BIC beläuft sich bei diesem Modell auf:

$$\text{AIC} = (2 \cdot 7497,23 + 2 \cdot (9 + 5))/1086 = 13,833 \quad (\text{A.4})$$

$$\text{BIC} = (2 \cdot 7497,23 + \log(1086) \cdot (9 + 5))/1086 = 13,897$$

In Abbildung A.4 sind die drei Teststatistiken auf Unabhängigkeit, Homoskedastizität und Normalverteilung abgebildet. Alle drei verwerfen die Nullhypothese zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$.

Test	Teststa.	P-Wert
Unabhängigkeit	$Q(30)$	99,92
Homoskedastizität	$H(317)$	0,77
Normalverteilung	JB	100,49

Tabelle A.4: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 6 Uhr Zeitreihe

In Abbildung A.4 sind die standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler visualisiert. Insgesamt sind 38 Beobachtungen außerhalb der Signifikanzschwellen, was einen Anteil von zirka 4 % der Grundgesamtheit ausmacht. Davon stimmen zehn Ausreißer mit jenen des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe überein.

Wie in der Abbildung A.5 dargestellt ist, weist die geschätzte Dichte der Fehler große Abweichungen gegenüber der Standardnormalverteilung auf.

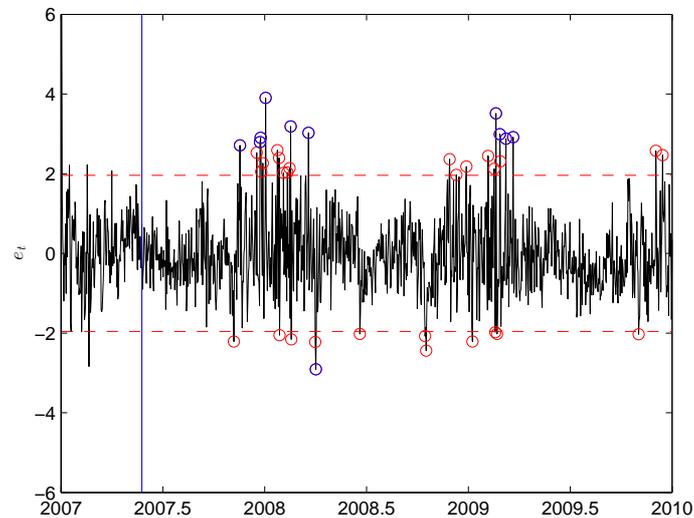


Abbildung A.4: Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells

Ebenso sind eine deutliche Rechtsschiefe, sowie dickere Verteilungsschwänze ersichtlich. Der QQ-Plot bestätigt diese Ergebnisse. Auf Grund dieser beiden Abbildungen kann angenommen werden, dass die standardisierte Ein-Schritt Prognosefehler nicht aus einer Normalverteilung stammen. Die geschätzte Autokorrelationsfunktion gibt eine Korreliertheit der Fehler wieder. Es liegen sieben Beobachtungen (Lag 1, 2, 4, 8, 9, 10, 21) außerhalb des Signifikanzbereichs.

Die Tabelle A.5 fasst die Teststatistiken der *auxiliary residuals* zusammen. Die Teststatistiken der Fehler der Beobachtungsgleichung und die der Fehler des geglätteten Heizungsfaktors weisen jeweils die zwei Nullhypothesen ab. Im Gegensatz dazu stehen die Statistiken der Fehler des Levels sowie des Zyklus, welche insgesamt alle sechs Nullhypothesen annehmen. Die Anzahl der Ausreißer der geglätteten Zustandshilfsfehler beträgt für den Level 513 (ca. 47 %), für den geglätteten Heizungsfaktor 84 (ca. 8 %), für den ersten Zustand des Zyklus 191 (ca. 18 %) und für den zweiten Zustand des Zyklus 529 (48 %).

In Tabelle A.6 sind die Prognosekriterien von „Modell A_6 “ und „Modell F_6 “ inklusive Erweiterungen, welche zu einer Verbesserung des AIC- oder NMSE-Wertes geführt haben, wiedergegeben. Die fett markierten Zeilen heben abermals die besten Modelle hinsichtlich der Prognose hervor (ohne Erweiterungen, welche perfekte Prognosen enthalten).

Während alle Erweiterungen des AIC-Modells zu einer Verbesserung des AIC- bzw. NMSE-Kriteriums führen, trifft dies bei dem „Modell F_6 “ nicht

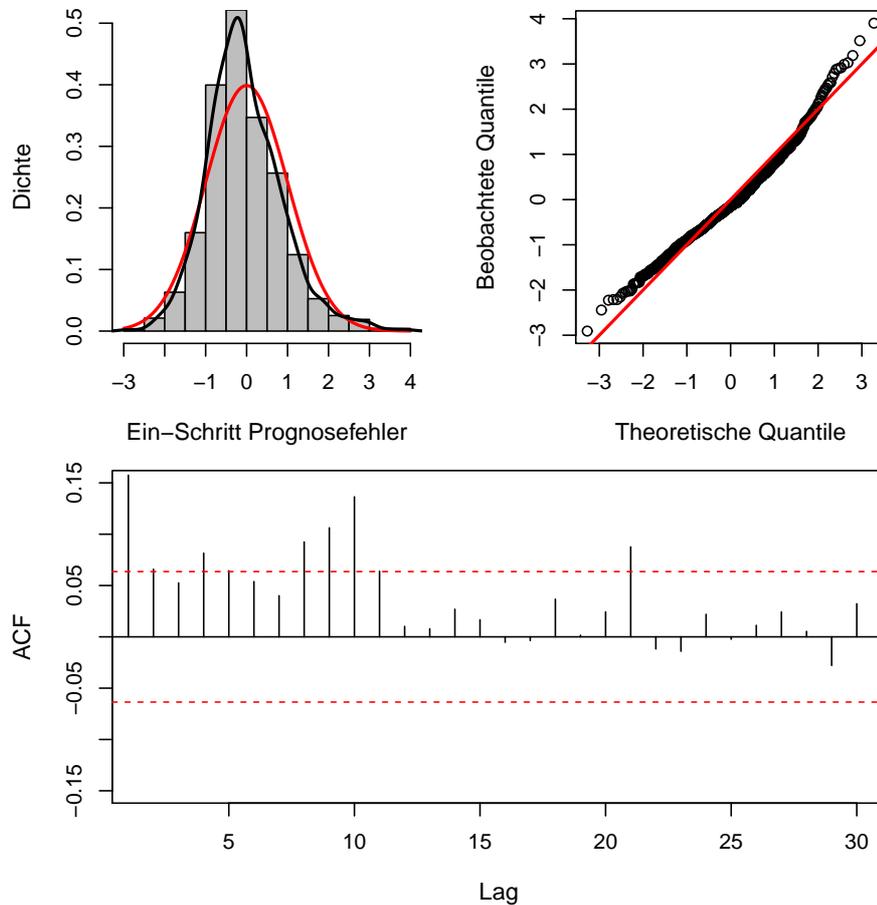


Abbildung A.5: Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 6 Uhr Zeitreihe

auf alle zu. Zu erwähnen ist hierbei das NMSE-Modell mit der Erweiterung der *state space model* Temperaturprognose, bei der es zu einer Verschlechterung des NMSE-Wertes von ungefähr 33 % gekommen ist. Des Weiteren ist auffällig, dass das AIC-Modell mit der perfekten Temperaturprognose am besten von allen abgebildeten Modellen abgeschnitten hat. Dadurch ergibt sich eine Besserstellung des AIC-Modells gegenüber des NMSE-Modells, falls hinreichend gute Prognosen der Temperatur vorhanden sind.

Betrachtet man Kombinationen von Erweiterungen, „Modell A_6 “ mit der Erweiterung der gepoolten Ausreißer $\hat{\epsilon}_t^s$ und der großen Temperaturveränderungen (TSG 6 - *state space model*), so ergibt sich ein AIC-Wert von 13,385 und ein NMSE von 0,0242. Diese Werte stellen einen Kompromiss zwischen Erklärungsgüte und Prognosequalität dar.

Komp.	Hilfsfehler	m. excess Kurtosis		m. Jarque Bera	
		Teststa.	P-Wert	Teststa.	P-Wert
	$\hat{\epsilon}^s$	7,49	0,00	92,00	0,00
Level	$\hat{\eta}^s$	-0,47	0,68	0,22	0,89
gegl. Heizungsfaktor	$\hat{\kappa}_8^s$	3,14	0,00	14,80	0,00
Zyklus 1	$\hat{\omega}_1^s$	0,26	0,40	2,30	0,32
Zyklus 2	$\hat{\omega}_2^s$	-0,72	0,76	0,56	0,75

Tabelle A.5: Teststatistiken der *auxiliary residuals* des NMSE-Modells der 6 Uhr Zeitreihe

Modell	NMSE	MAPE	AIC
A_6	0,0289	0,1332	13,654
A_6 inkl. Ausreißer	0,0259	0,1279	13,417
A_6 inkl. Temp. - perfekt	0,0157	0,0972	13,263
A_6 inkl. Temp. - AR(484)	0,0207	0,1119	13,473
A_6 inkl. Temp. - adapt. AR	0,0210	0,1129	13,480
A_6 inkl. Temp. - state space model	0,0245	0,1195	13,606
A_6 inkl. TSG 5 - perfekt	0,0205	0,1088	13,507
A_6 inkl. TSG 5 - AR(484)	0,0263	0,1261	13,616
A_6 inkl. TSG 6 - adapt. AR	0,0275	0,1303	13,634
A_6 inkl. TSG 6 - state space model	0,0262	0,1268	13,634
F_6	0,0236	0,1247	13,833
F_6 inkl. Ausreißer	0,0244	0,1270	13,666
F_6 inkl. Temp. - perfekt	0,0205	0,1097	13,425
F_6 inkl. Temp. - AR(484)	0,0217	0,1180	13,573
F_6 inkl. Temp. - adapt. AR	0,0251	0,1243	13,619
F_6 inkl. Temp. - state space model	0,0314	0,1372	13,757
F_6 inkl. TSG 6 - perfekt	0,0197	0,1117	13,583
F_6 inkl. TSG 9 - AR(484)	0,0240	0,1253	13,848
F_6 inkl. TSG 6 - adapt. AR	0,0234	0,1218	13,690
F_6 inkl. TSG 6 - state space model	0,0223	0,1197	13,791

Tabelle A.6: Prognosekriterien der analysierten Modelle

A.2 9 Uhr Zeitreihe

Modellauswahl auf Grund des AIC-Kriterium

Für die 9 Uhr Zeitreihe ergibt sich nach dem AIC-Kriterium folgendes Modell („Modell A₉“):

$$\begin{aligned}
 y_t = & \mu + \gamma_t + c_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} \quad (\text{A.5}) \\
 & + \underbrace{\beta_5 x_{5,t}}_{\text{Temp.}} + \underbrace{\beta_{8,t} x_{8,t}}_{\text{gegl. Heizungsf.}} + \underbrace{\beta_9 x_{9,t}}_{\text{st. verga. Mittel}} + \epsilon_t \\
 & \beta_{8,t+1} = \beta_{8,t} + \kappa_{8,t}
 \end{aligned}$$

Die Maximum-Likelihood-Schätzer lauten für die Varianzen $\sigma_\epsilon^2 = 66.492,82$ bzw. $\sigma_{\beta_8}^2 = 12,84$ bzw. für die Frequenz $\lambda_c = 0,016$, was einer Periode von 374 Tagen entspricht. In Tabelle A.7 ist eine Auflistung der Komponenten der 100 besten Modelle nach dem AIC-Kriterium gegen ihre Ausprägung. Es ergeben sich vier Komponenten, welche eine maximale Ausprägung haben und in „Modell A₉“ enthalten sind. Während die Komponenten „Zyklus“ und „st. vergangenes Mittel“ als deterministisch anstatt stochastisch modelliert werden, wird die Komponente „Heizungsfaktor“ nicht, die Komponente „Temperatur“ jedoch schon in das Modell aufgenommen. Trotzdem erscheint das vorgeschlagene Modell, nicht zuletzt auf Grund der großen Übereinstimmungen der Komponenten mit „Modell A₆“, als annehmbar.

Komponente	stochastisch	deterministisch	nicht vorhanden
saison. Komponente	41	<u>58</u>	1
Zyklus	70	<u>30</u>	0
Tages-Dummys	31	69	0
Temperatur	28	<u>35</u>	37
gegl. Temperatur	16	37	<u>47</u>
Heizungsfaktor	47	27	<u>26</u>
gegl. Heizungsfaktor	<u>48</u>	16	36
st. vergangenes Mittel	60	<u>40</u>	0

Tabelle A.7: Kontingenztabelle der optionalen Komponenten gegen ihre Ausprägung (stochastisch, deterministisch oder nicht vorhanden) der besten 100 AIC-Modelle

Im Gegensatz zu „Modell A₁₂“ enthält das AIC-Modell der 9 Uhr Zeitreihe die Komponenten „Zyklus“ und „stündliches vergangenes Mittel“, allerdings sind die Komponenten „geglättete Temperatur“ und „Heizungsfaktor“ entfernt worden. Die Grundkomponenten ist auf einen *deterministic level* ver-

einfacht worden. Der AIC- bzw. BIC-Wert dieses Modells lautet:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= (2 \cdot 7559,06 + 2 \cdot (16 + 3))/1081 = 14,021 \\ \text{BIC} &= (2 \cdot 7559,06 + \log(1081) \cdot (16 + 3))/1081 = 14,108 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

In Tabelle A.8 sind die Teststatistiken der Ein-Schritt Prognosefehler abgebildet. Der Übergang der diffusen Initialisierung zu dem „normalen“ Kalman Filter findet zu dem Zeitpunkt 138 statt. Wie aus der Tabelle zu entneh-

Test	Teststa.	P-Wert
Unabhängigkeit	$Q(30)$	42,44
Homoskedastizität	$H(319)$	0,63
Normalverteilung	JB	84,80

Tabelle A.8: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 9 Uhr Zeitreihe

men ist, werden die Tests auf Homoskedastizität und Normalverteilung verworfen, der Test auf Unabhängigkeit wird jedoch knapp angenommen. In Abbildung A.6 sind die Ein-Schritt Prognosefehler über ihren Zeitverlauf abgebildet. Insgesamt liegen 58 Beobachtungen außerhalb des Signifikanzniveaus, was einen Anteil von zirka 6 % ausmacht. Des Weiteren stimmen acht Ausreißer mit jenen aus dem AIC-Modell der 12 Uhr Zeitreihe überein. In Abbildung A.7 sind Abweichungen der geschätzten Dichte der standardi-

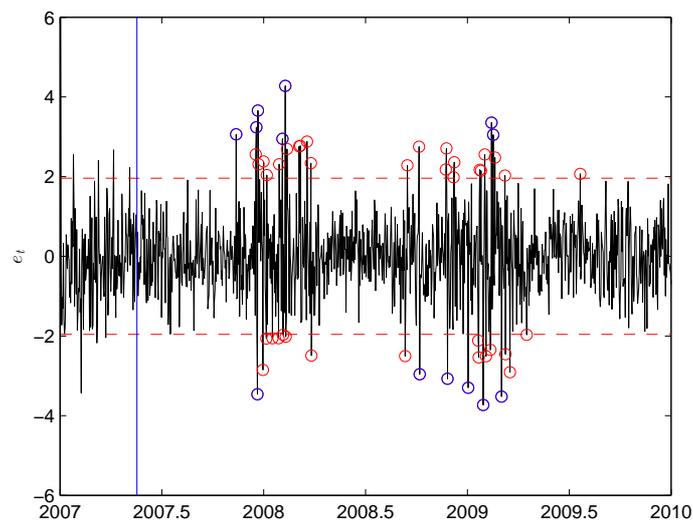


Abbildung A.6: Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells

sierten Ein-Schritt Prognosefehler gegenüber der Standardnormalverteilung ersichtlich. Vor allem ein spitzerer *peak* um die Null und dickere *tails* unterstreichen das Ergebnis des Jarque Bera Tests. Die geschätzte Autokorrelation zeigt Ausreißer zu den Lags 2, 12, 26, 28 und 29, welche jedoch relativ klein ausfallen. In Tabelle A.9 sind die Teststatistiken der *auxiliary residuals* abge-

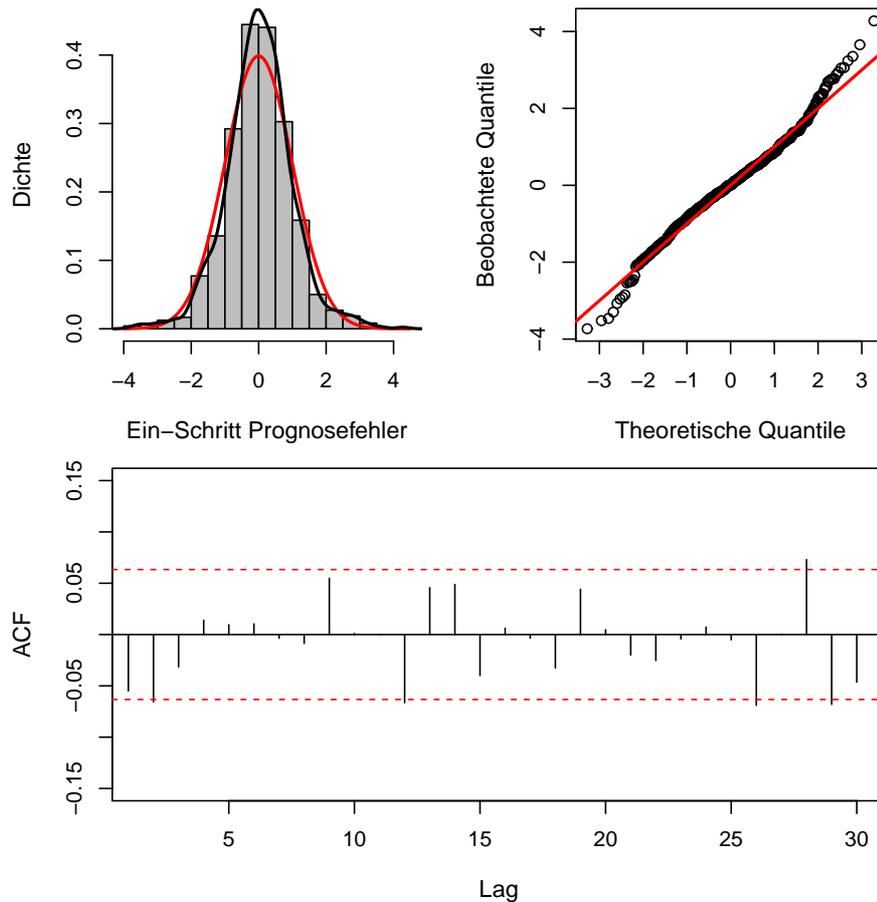


Abbildung A.7: Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 9 Uhr Zeitreihe

bildet. Im Gegensatz zu den geglätteten Fehlern der Beobachtungsgleichung werden die zwei Nullhypothesen der Fehler des geglätteten Heizungsfaktors nicht verworfen. Zudem beträgt die Anzahl der Ausreißer für den geglätteten Heizungsfaktor 31 (ca. 3 %).

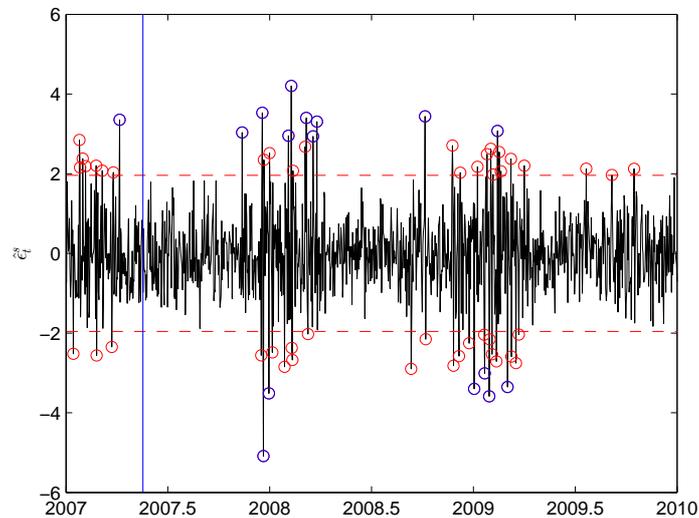


Abbildung A.8: *auxiliary residuals* des AIC-Modells der 9 Uhr Zeitreihe

Komp.	Hilfsfehler	m. excess Kurtosis		m. Jarque Bera	
		Teststa.	P-Wert	Teststa.	P-Wert
	$\hat{\epsilon}^s$	11,57	0,00	133,96	0,00
gegl. Heizungsfaktor	$\hat{\kappa}_8^s$	1,55	0,06	4,13	0,12

Tabelle A.9: Teststatistiken der *auxiliary residuals* des AIC-Modells der 9 Uhr Zeitreihe

Modellauswahl auf Grund des NMSE-Kriterium

Wird die Reihung der erhaltenen Modelle nach dem NMSE-Kriterium vorgenommen, so ergibt sich „Modell F_9 “ als bestes Modell:

$$\begin{aligned}
 y_t = & \mu + c_t + \underbrace{\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \beta_3 x_{3,t} + \beta_4 x_{4,t}}_{\text{Tages-Dummys}} \\
 & + \underbrace{\beta_6 x_{6,t}}_{\text{gegl. Temp.}} + \underbrace{\beta_7 x_{7,t}}_{\text{Heizungsf.}} + \underbrace{\beta_9 x_{9,t}}_{\text{st. verga. Mittel}} + \epsilon_t
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Die Maximum-Likelihood-Schätzer liefern eine Varianz von $\sigma_\epsilon^2 = 70.855,47$ und eine Frequenz von $\lambda_c = 0,017$ (368 Tage). Der Übergang der diffusen Initialisierung zu dem „normalen“ Kalman Filter findet zu dem Zeitpunkt $d=120$ statt. Eine Besonderheit dieses Modells ist, dass es keine stochastischen Zustände aufweist. Das AIC- bzw. BIC-Kriterium liefern folgende

Werte:

$$\text{AIC} = (2 \cdot 7592,53 + 2 \cdot (10 + 2))/1081 = 14,069 \quad (\text{A.8})$$

$$\text{BIC} = (2 \cdot 7592,53 + \log(1081) \cdot (10 + 2))/1081 = 14,125$$

Die Teststatistiken der Ein-Schritt Prognosefehler sind in Tabelle A.10 wiedergegeben. Wie ersichtlich ist, werden alle drei Alternativhypothesen angenommen. Die Abbildung A.9 stellt die Ein-Schritt Prognosefehler ihrem

Test		Teststa.	P-Wert
Unabhängigkeit	$Q(30)$	60,39	0,00
Homoskedastizität	$H(325)$	0,64	0,01
Normalverteilung	JB	79,51	0,00

Tabelle A.10: Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 9 Uhr Zeitreihe

Zeitverlauf gegenüber dar. Die Anzahl der Ausreißer beträgt 79, was einen Anteil von ungefähr 8 % ausmacht. Die geschätzte Dichte der standardisier-

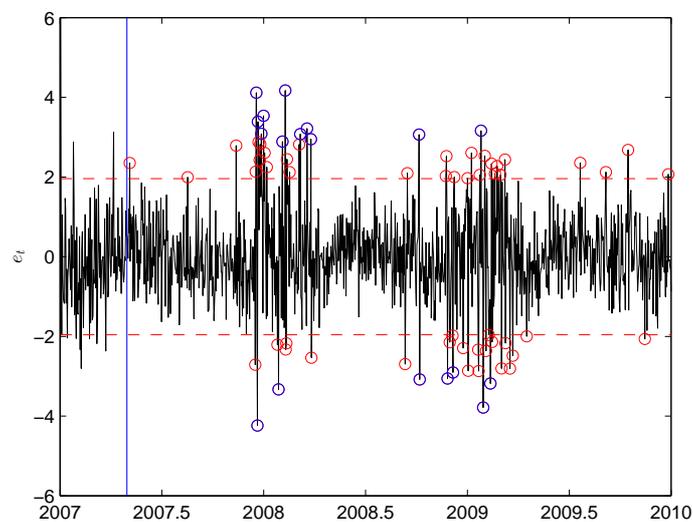


Abbildung A.9: Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells

ten Ein-Schritt Prognosefehler weicht vor allem um die Null von der Standardnormalverteilung ab. Des Weiteren sind eine Rechtsschiefe sowie dickere Verteilungsschwänze zu erkennen. Die geschätzte Autokorrelationsfunktion gibt eine erhöhte Korreliertheit zu den Lags 4, 9, 14, 26, 29 und 30 an. In Abbildung A.11 sind die *auxiliary residuals* abgebildet. Es ergeben sich 76 (7 %)

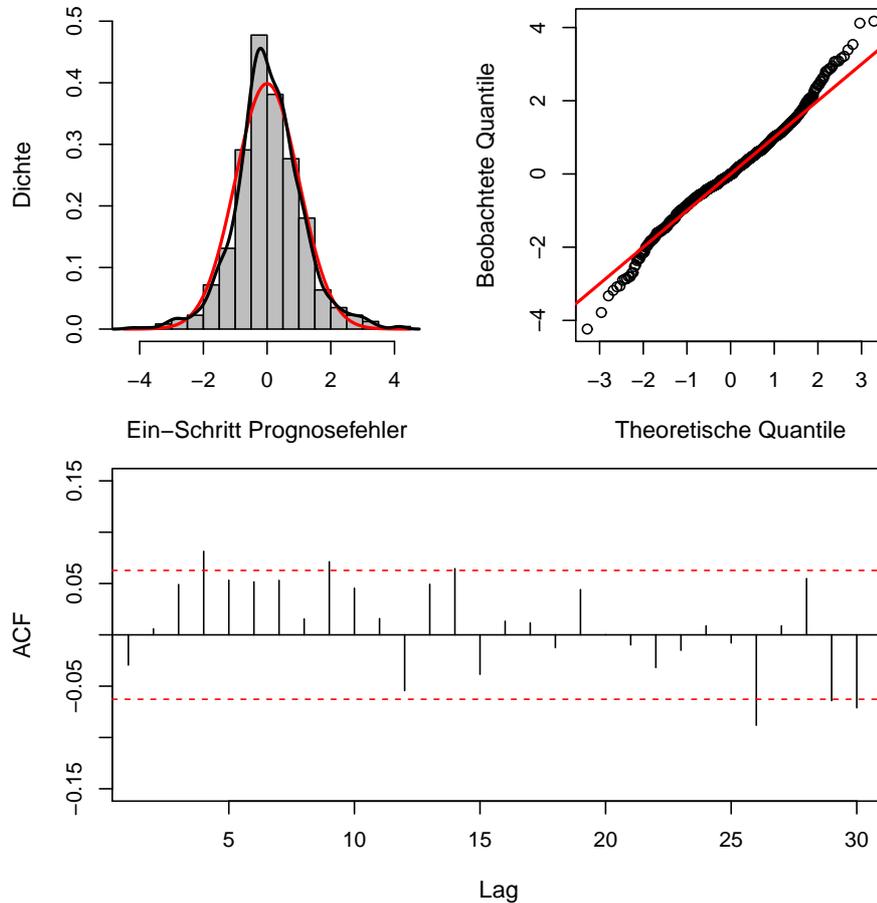


Abbildung A.10: Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 9 Uhr Zeitreihe

Beobachtungen, welche außerhalb des Signifikanzniveaus liegen. Von denen stimmen 16 Ausreißer mit jenen aus dem NMSE-Modell der 12 Uhr Zeitreihe überein. Die Teststatistiken der geglätteten Hilfsfehler der Beobachtungsgleichung verwerfen sowohl die Nullhypothese des modifizierten Excess Kurtosis Tests als auch die Nullhypothese des modifizierten Jarque Bera Tests (nicht abgebildet). Die Tabelle A.11 bildet die Prognosekriterien von „Modell A_9 “ und „Modell F_9 “ inklusive Erweiterungen, welche zu einer Verbesserung des AIC- oder NMSE-Wertes geführt haben, ab. Ebenso lässt sich erkennen, dass wie auch schon bei der 6 Uhr Zeitreihe das AIC-Modell mit den perfekten Temperaturprognosen am besten von allen Modellerweiterungen abschneidet. Ist jedoch keine perfekte Temperaturprognose vorhanden, so erreicht „Modell F_9 “ mit der adaptierten AR-Temperaturprognose ein optimales Er-

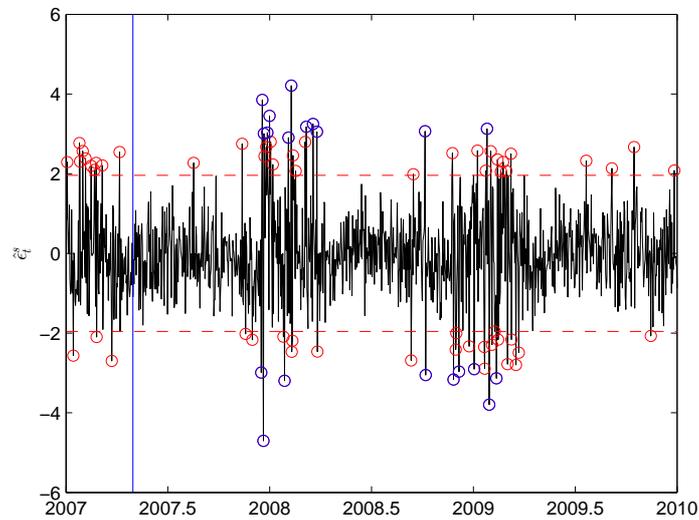


Abbildung A.11: *auxiliary residuals* des NMSE-Modells der 9 Uhr Zeitreihe

gebnis.

Als besondere Modellkombination stellt sich jene der gepoolten Ausreißer $\hat{\epsilon}_t^s$ in Verbindung mit der Erweiterung der großen Temperaturveränderungen (TSG 5 - adaptierte AR) für das AIC-Modell heraus. Dieses Modell weist einen AIC-Wert von 13,558 und einen NMSE-Wert von 0,0229 auf.

Modell	NMSE	MAPE	AIC
A_9	0,0242	0,1166	14,021
A_9 inkl. Ausreißer	0,0234	0,1147	13,577
A_9 inkl. Temp. - perfekt	0,0160	0,0911	13,793
A_9 inkl. Temp. - AR(484)	0,0215	0,1044	13,965
A_9 inkl. Temp. - adapt. AR	0,0217	0,1081	13,922
A_9 inkl. Temp. - state space model	0,0265	0,1187	13,984
A_9 inkl. TSG 5 - perfekt	0,0207	0,1052	13,862
A_9 inkl. TSG 5 - AR(484)	0,0238	0,1159	13,996
A_9 inkl. TSG 5 - adapt. AR	0,0237	0,1156	13,998
A_9 inkl. TSG 9 - state space model	0,0241	0,1162	14,005
F_9	0,0208	0,1088	14,069
F_9 inkl. Ausreißer	0,0208	0,1081	13,753
F_9 inkl. Temp. - perfekt	0,0169	0,0936	13,898
F_9 inkl. Temp. - AR(484)	0,0201	0,1046	14,021
F_9 inkl. Temp. - adapt. AR	0,0201	0,1031	14,075
F_9 inkl. Temp. - state space model	0,0210	0,1085	14,118
F_9 inkl. TSG 5 - perfekt	0,0190	0,1015	13,924
F_9 inkl. TSG 5 - AR(484)	0,0205	0,1083	14,049
F_9 inkl. TSG 5 - adapt. AR	0,0205	0,1082	14,051
F_9 inkl. TSG 6 - state space model	0,0208	0,1088	14,064

Tabelle A.11: Prognosekriterien der analysierten Modelle

Anhang B

Sonstige Abbildungen

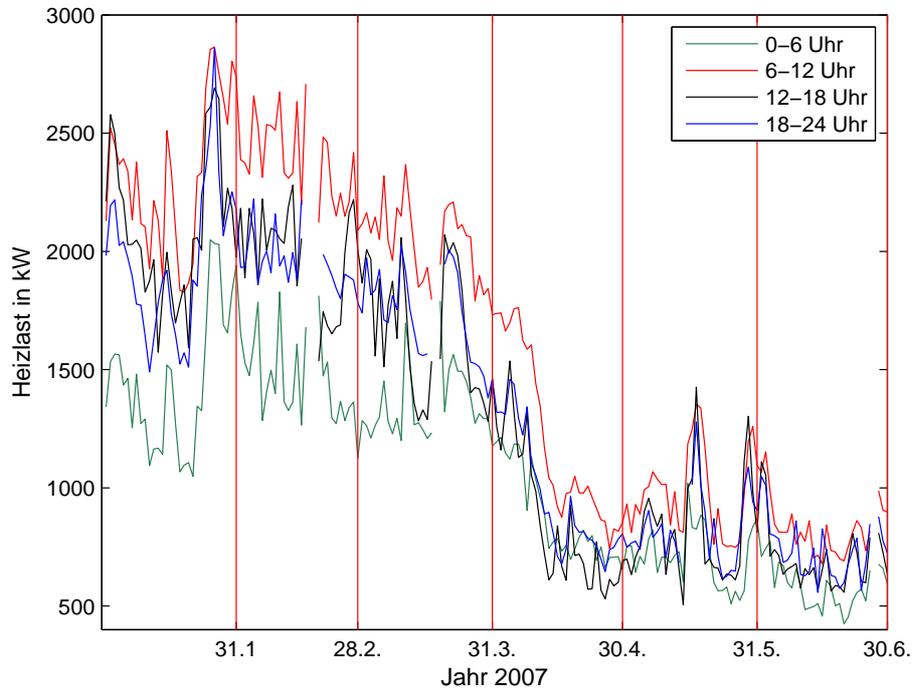


Abbildung B.1: Durchschnittlicher aufgesplitteter Tagesverbrauch der Heizlast von 1.1.2007 bis 30.6.2007

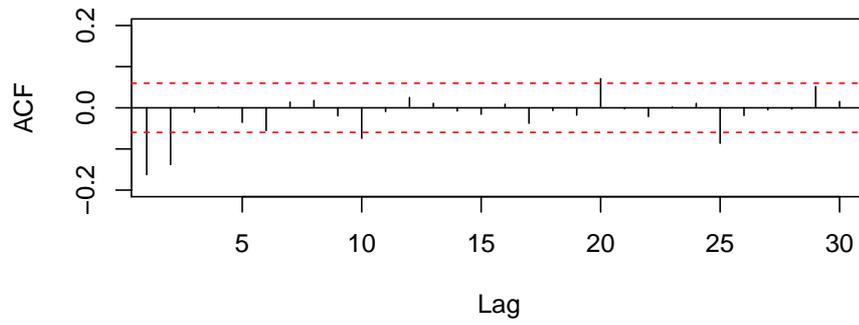


Abbildung B.2: Geschätzte Autokorrelationsfunktion der *auxiliary residuals* $\hat{\epsilon}^s$ von „Modell A_{12} “

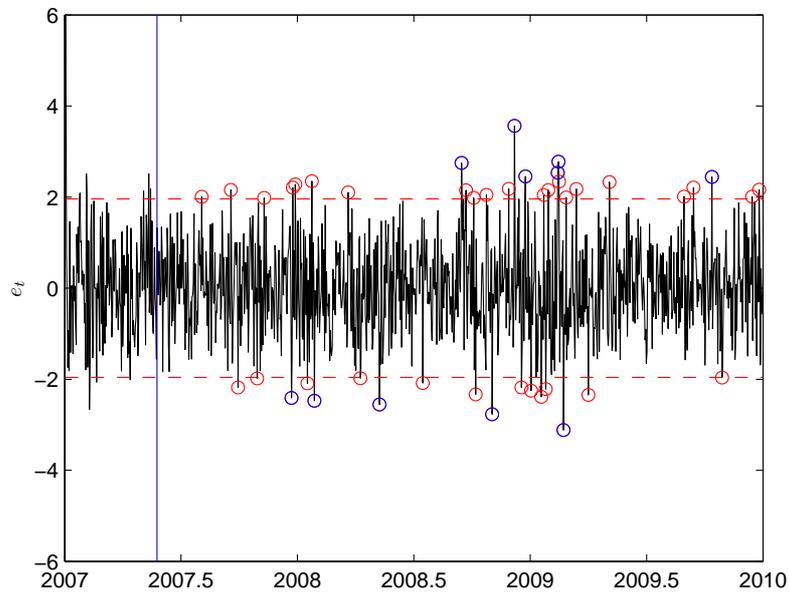


Abbildung B.3: Ein-Schritt Prognosefehler des erweiterten AIC-Modells (gepoolte Ausreißer) der 12 Uhr Zeitreihe

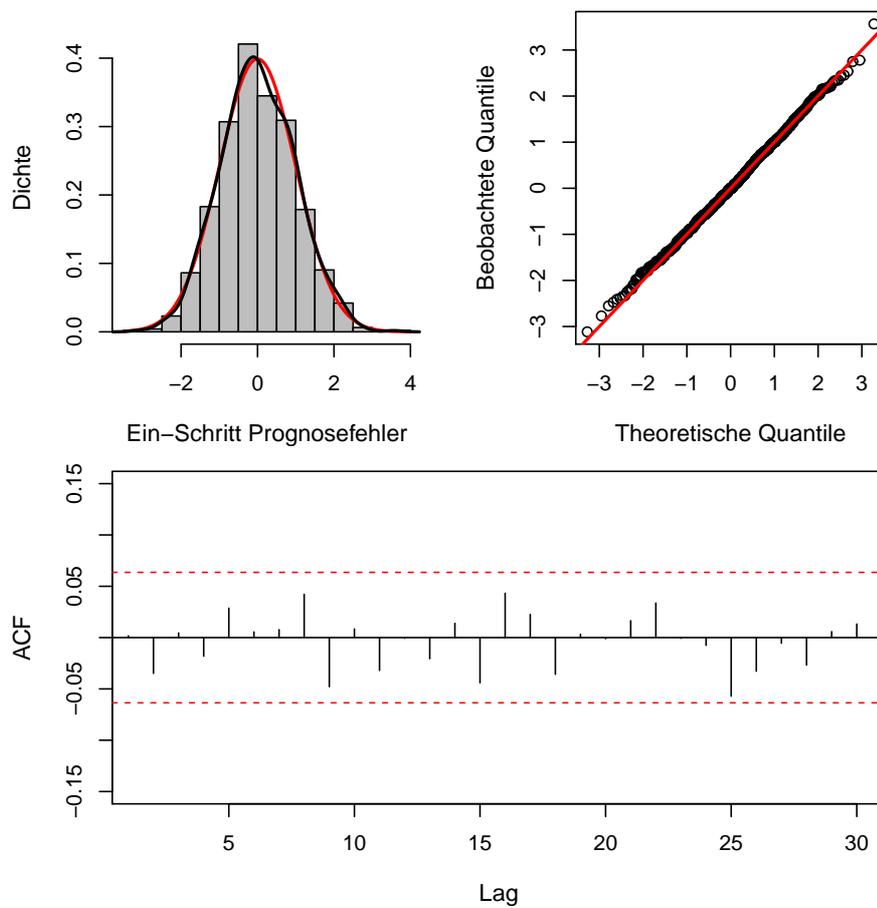


Abbildung B.4: Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des erweiterten AIC-Modells (gepoolte Ausreißer) der 12 Uhr Zeitreihe

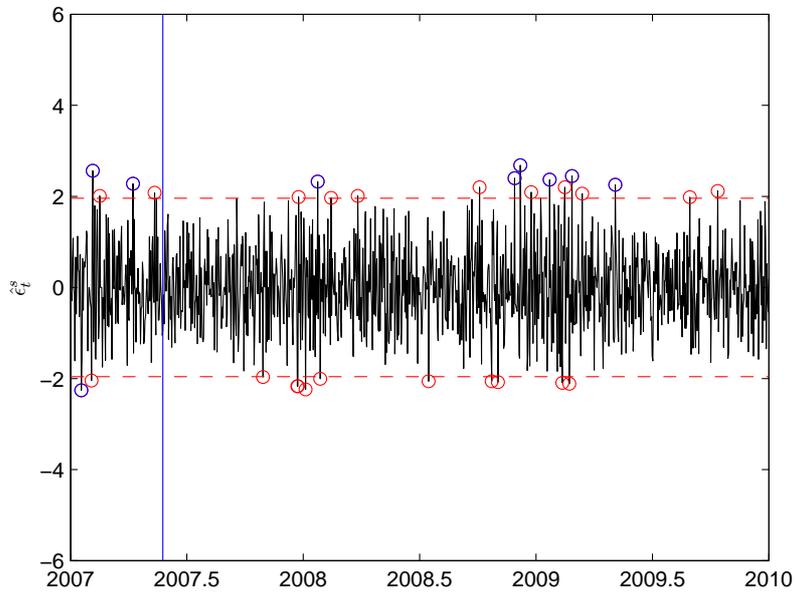


Abbildung B.5: *auxiliary residuals* des erweiterten AIC-Modells (gepoolte Ausreißer) der 12 Uhr Zeitreihe

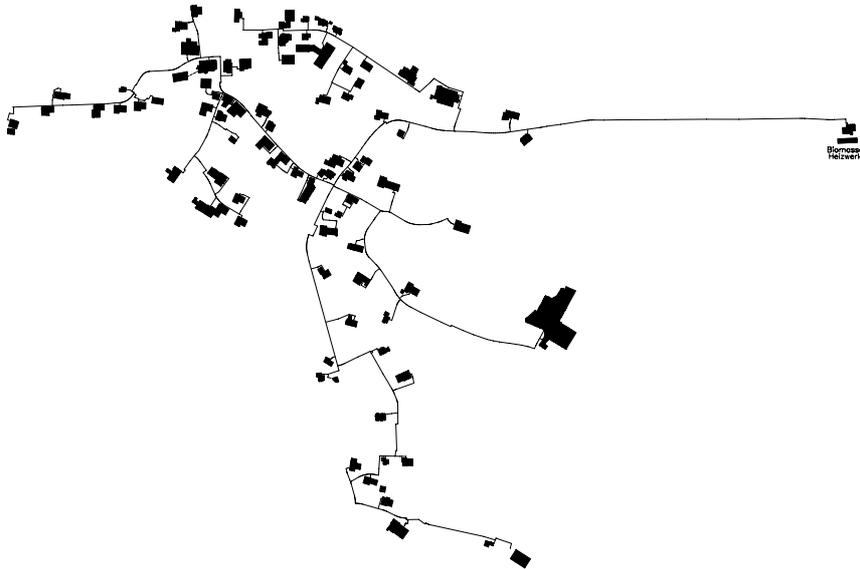


Abbildung B.6: Tannheim-Netzwerk

Abbildungsverzeichnis

1.1	12 und 20 Uhr Zeitreihe der Heizlastwerte im Zeitraum von 1.1.2007 bis 31.12.2009 (oben) bzw. von 1.1.2007 bis 31.12.2007 (unten)	3
1.2	12 Uhr Zeitreihe der Heizlastwerte im Zeitraum von 1.4.2007 bis 31.5.2007 (oben) und die Heizlast von 1.4.2007 bis 3.4.2007 (unten)	4
1.3	Periodogramm der Heizlast der 12 Uhr Zeitreihe	5
1.4	Außentemperatur des Monats Februar 2007 mit einer konstanten Weiterführung der fehlenden Werte (rot) bzw. mit der AR(484) Schätzung (schwarz)	6
1.5	12 und 20 Uhr Zeitreihe der Außentemperatur im Zeitraum von 1.1.2007 bis 31.12.2009 (oben) bzw. von 1.1.2007 bis 31.12.2007 (unten)	7
1.6	Streudiagramm der Heizlastwerte gegen Außentemperatur der 12 Uhr Zeitreihe	8
4.1	Geglättete Temperatur der 12 Uhr Zeitreihe	32
4.2	Heizungsfaktor der 12 Uhr Zeitreihe	34
4.3	Streudiagramm der Heizlastwerte der 12 Uhr Zeitreihe gegen das stündliche vergangene Mittel	35
4.4	Wahre und geschätzte Beobachtungen der ersten Hälfte des Jahres 2008 des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	38
4.5	Wahre und geschätzte Beobachtungen der ersten Hälfte des Jahres 2008 des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	40
4.6	Wahre und geschätzte Beobachtungen der ersten Hälfte des Jahres 2008 des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	41
4.7	Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells	43
4.8	Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	44
4.9	Ein-Schritt Prognosefehler des BIC-Modells	45

4.10	Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	46
4.11	Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells	48
4.12	Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	49
4.13	<i>auxiliary residuals</i> des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe . . .	50
4.14	<i>auxiliary residuals</i> des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe . . .	51
4.15	Temperaturausschnitte der Jahre 2007 und 2008	52
4.16	<i>auxiliary residuals</i> des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe . . .	53
4.17	<i>auxiliary residuals</i> des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe . . .	54
4.18	<i>auxiliary residuals</i> des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe .	56
4.19	wahre Temperatur (schwarz) und Temperaturprognosen der Modelle (rot): AR(484)-Modell (oben), adaptiertes AR-Modell (mittig) und <i>state space model</i> (unten)	62
4.20	<i>auxiliary residuals</i> des AIC-Modells gegen die ersten Differenzen der Temperatur ohne Erweiterung (links), mit Erweiterung und TSG von 5 (rechts)	64
4.21	<i>one step ahead forecast</i> ausgewählter Modelle	68
4.22	NMSE-Verlauf der 1-Schritt (durchgezogene Linie), 3-Schritt (gepunktete Linie), 7-Schritt (strichlierte Linie) Prognose der drei Modelle	69
4.23	<i>one step ahead forecast</i> der 12 Uhr Zeitreihe: (oben) „Modell A_{12} “ (blau) gegen „Modell M_{AIC} “ (rot); (unten) „Modell F_{12} “ (blau) gegen „Modell M_F “ (rot); wahre Beobachtungen (schwarz)	76
A.1	Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells	81
A.2	Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 6 Uhr Zeitreihe	82
A.3	<i>auxiliary residuals</i> des AIC-Modells der 6 Uhr Zeitreihe . . .	83
A.4	Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells	85
A.5	Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 6 Uhr Zeitreihe	86
A.6	Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells	89

A.7	Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 9 Uhr Zeitreihe	90
A.8	<i>auxiliary residuals</i> des AIC-Modells der 9 Uhr Zeitreihe	91
A.9	Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells	92
A.10	Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 9 Uhr Zeitreihe	93
A.11	<i>auxiliary residuals</i> des NMSE-Modells der 9 Uhr Zeitreihe	94
B.1	Durchschnittlicher aufgesplitteter Tagesverbrauch der Heizlast von 1.1.2007 bis 30.6.2007	96
B.2	Geschätzte Autokorrelationsfunktion der <i>auxiliary residuals</i> $\hat{\epsilon}^s$ von „Modell A_{12} “	97
B.3	Ein-Schritt Prognosefehler des erweiterten AIC-Modells (gepoolte Ausreißer) der 12 Uhr Zeitreihe	97
B.4	Histogramm - standardnormalverteilte (rote Linie) und geschätzte Dichte der Fehler (schwarze Linie) - und QQ-Plot bzw. Autokorrelationsfunktion der Ein-Schritt Prognosefehler des erweiterten AIC-Modells (gepoolte Ausreißer) der 12 Uhr Zeitreihe	98
B.5	<i>auxiliary residuals</i> des erweiterten AIC-Modells (gepoolte Ausreißer) der 12 Uhr Zeitreihe	99
B.6	Tannheim-Netzwerk	99

Tabellenverzeichnis

1.1	Statistiken der Heizlast und der Temperatur	6
4.1	Diverse Grundkomponenten: <i>the integrated random walk, the random walk with fixed drift, the linear fixed trend, deterministic level</i>	30
4.2	Modellkomponente (außer Grundkomponente)	35
4.3	Kontingenztabelle der optionalen Komponenten gegen ihre Ausprägung (stochastisch, deterministisch oder nicht vorhanden) der besten 100 AIC-Modelle	37
4.4	Kontingenztabelle der optionalen Komponenten gegen ihre Ausprägung (stochastisch, deterministisch oder nicht vorhanden) der besten 100 BIC-Modelle	39
4.5	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	42
4.6	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	45
4.7	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	47
4.8	Tage der Über- und Unterschätzung (blaue Ausreißer)	50
4.9	Teststatistiken der <i>auxiliary residuals</i> des AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	52
4.10	Teststatistiken der <i>auxiliary residuals</i> des BIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	54
4.11	Teststatistiken der <i>auxiliary residuals</i> des NMSE-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	55
4.12	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des erweiterten AIC-Modells der 12 Uhr Zeitreihe	57
4.13	AIC- und BIC-Werte der Ausreißererweiterungen des BIC- und NMSE-Modells	58
4.14	Klassen der differenzierten Temperatur	63
4.15	AIC- und BIC-Werte des erweiterten AIC-Modells	65

4.16	AIC- und BIC-Werte des erweiterten AIC-Modells	65
4.17	Prognosekriterien der analysierten Modelle	66
4.18	Prognosekriterien der 1-, 3- und 7-Schritt Prognosen	69
4.19	Vorgeschlagenes Modell der 12 Uhr Zeitreihe	71
4.20	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler der beiden multivariaten Modelle .	74
4.21	Prognosekriterien der multivariaten Modelle	75
A.1	Kontingenztabelle der optionalen Komponenten gegen ihre Ausprägung (stochastisch, deterministisch oder nicht vorhan- den) der besten 100 AIC-Modelle	80
A.2	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 6 Uhr Zeitreihe	81
A.3	Teststatistiken der <i>auxiliary residuals</i> des AIC-Modells der 6 Uhr Zeitreihe	83
A.4	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 6 Uhr Zeitrei- he	84
A.5	Teststatistiken der <i>auxiliary residuals</i> des NMSE-Modells der 6 Uhr Zeitreihe	87
A.6	Prognosekriterien der analysierten Modelle	87
A.7	Kontingenztabelle der optionalen Komponenten gegen ihre Ausprägung (stochastisch, deterministisch oder nicht vorhan- den) der besten 100 AIC-Modelle	88
A.8	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des AIC-Modells der 9 Uhr Zeitreihe	89
A.9	Teststatistiken der <i>auxiliary residuals</i> des AIC-Modells der 9 Uhr Zeitreihe	91
A.10	Teststatistiken und P-Werte der Tests der standardisierten Ein-Schritt Prognosefehler des NMSE-Modells der 9 Uhr Zeitrei- he	92
A.11	Prognosekriterien der analysierten Modelle	95

Literaturverzeichnis

- [1] Dordonnat, V.: *State-space modelling for high frequency data - three applications to french national electricity load*. Diplomarbeit, Universität Amsterdam, 2009.
- [2] Harvey, A. und S. J. Koopman: *Multivariate structural time series models*. *Systematic Dynamics in Economic and Financial Models*, S. 269–298, 1997.
- [3] Harvey, A. C. und S. J. Koopman: *Diagnostic checking of unobserved-components time series models*. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10(4):377–389, 1992.
- [4] Ioannis Vallios, Theocharis Tsoutsos, G. P.: *Design of biomass district heating systems*. *Biomass and Bioenergy*, 33:659–678, 2009.
- [5] Irma Hindrayanto, S. J. K. und M. Ooms: *Exact maximum likelihood estimation for non-stationary periodic time series models*. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55:2641–2654, 2010.
- [6] J. Durbin, S. K.: *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford Statistical Science Series, 2001.
- [7] J.J.F. Commandeur, S. K.: *An Introduction To State Space Time Series Analysis*. Oxford University Press, 2007.
- [8] Jyh-Ying Peng, J. A. A.: *The state space models toolbox for matlab*. *Journal of Statistical Software*, 1(46):1–26, May 2011. Software available at <http://sourceforge.net/projects/ssmodels>.
- [9] Lars Dannecker, Matthias Boehm, U. F. F. R. G. H. und W. Lehner: *A Survey of Forecast Models for Energy Demand and Supply*. *Miracl Energy*, Juni 2010.
- [10] Peter J. Brockwell, R. A. D.: *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, 2002.

- [11] R Development Core Team: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2011. <http://www.R-project.org>, ISBN 3-900051-07-0.
- [12] Ratko, E.: *Zustandsraum-Modelle, Kalman-Rekursionen und EM-Algorithmus*. Diplomarbeit, Universität München, 2008.
- [13] S. Grosswindhager, A. Voigt, M. K.: *Efficient physical modelling of district heating networks*. Techn. Ber., Institute of Mechanics and Mechatronics, 2011.
- [14] S. Grosswindhager, A. Voigt, M. K.: *Online short-term forecast of system heat load in district heating networks*. Techn. Ber., Institute of Mechanics and Mechatronics, 2011.
- [15] T.S. Nielsen, H. M.: *Predictive control of supply temperature in district heating systems*. 14(6):613–620, 1994.
- [16] Tusell, F.: *Kalman filtering in r*. Journal of Statistical Software, 39, März 2011.