

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum Verfahren *Least Squares Matching* zur automatisierten Messung homologer Bildstellen mit Subpixel-Auflösung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
DIPLOM-INGENIEUR

am Institut für

Photogrammetrie und Fernerkundung (E122)
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Norbert Pfeifer, und
Univ.-Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. Camillo Ressler als
verantwortlich mitwirkendem Universitätsassistenten

von

Matthias Ockermüller

Laaben Nr. 161
A-3053 Brand-Laaben

Wien, den 17. September 2012

.....

Anschrift des Autors

Laaben Nr. 161
A-3053 Brand-Laaben
Niederösterreich

Anschrift des Instituts E122

Gußhausstraße 27-29
A-1040 Wien
Tel.: +43/1/58801/12201
Fax: +43/1/58801/12299
URL: <http://www.ipf.tuwien.ac.at>

Zusammenfassung

Least-Squares Matching (LSM) ist ein Verfahren, das zu einer Referenz-Bildstelle in dem sogenannten (digitalen) Referenzbild, die korrespondierende Bildstelle in einem oder mehreren sogenannten (digitalen) Suchbildern mit Subpixel-Auflösung auffindet. Genauer formuliert ist LSM mehr eine Verfeinerungs- denn Auffindungsmethode, nachdem das Verfahren nach guten Näherungswerten für die gesuchten Bildstellen verlangt. Es handelt sich um einen iterativen Kleinste-Quadrate-Ansatz (Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, Gauß-Markoff-Modell) bei dem die Summe der quadratischen Grauwert-Differenzen zwischen Ausschnitten (oder »Fenstern«) in Referenz- und Suchbild(ern) minimiert wird. Dazu erlaubt das funktionale Modell geometrische und radiometrische Transformationen zwischen den Bildern.

Aufgabe dieser Arbeit war die Implementierung von einkanaligem Zweibild-LSM, d. h. beschränkt auf nur ein Suchbild und einen »Farb«kanal, mit verschiedenen Ansätzen für bestimmte Teile des Algorithmus und die Durchführung von vergleichenden Experimenten an realen Bilddaten. Als Bilddaten wurde ein orientierter Luftbild-Block an panchromatischen Microsoft/Vexcel UltraCamX-Bildern verwendet. Die Implementierung erfolgte im Programm MATLAB der Firma The MathWorks. Für folgende Algorithmus-Teile wurden verschiedene Ansätze implementiert und erprobt: (a) Der grundsätzliche Ansatz für das funktionale Modell von LSM: Ansatz nach Grün [1985] und Ansatz nach Kraus [2004]. (b) Die geometrische Transformation: *Shift*, Ähnlichkeits- und Affintransformation. (c) Die radiometrische Transformation: Mitschätzung vs. a priori Berechnung der Koeffizienten einer linearen radiometrischen Transformation. (d) Erweiterung des funktionalen Modells von LSM um eine geometrische Bedingung unter Verwendung der Kollinearitätsgleichungen bei bekannter Orientierung. Jede dieser Varianten und Erweiterungen wird im Theorieteil dieser Arbeit im Detail besprochen.

Die **Ergebnisse** zeigen: (a) Der Ansatz nach Kraus zeigt Vorteile in Prozessierungs-Geschwindigkeit (d. h. Laufzeit) und Geschwindigkeit der Parameterschätzung (d. h. Iterationszahlen bis zur Erreichung bestimmter Konvergenzkriterien). (b) Die beiden radiometrischen Ansätze führen in den Dimensionen von (a) zu mehr oder weniger gleichwertigen Resultaten mit leichten Vorteilen für den a priori Ansatz. (c) Einfachere geometrische Transformationen (*Shift*) können bei spezieller Bild-Textur ähnliche Bildstellen finden wie komplexere (affin), obwohl die damit verbundenen Modellannahmen verletzt sind (z. B. an schrägen Dachflächen). (d) An Bildstellen, wo keine der eingeführten Transformationen die perspektivischen Unterschiede zwischen Referenz- und Suchbild korrekt modelliert, kann die Hinzunahme der geometrischen Bedingung die Zuordnungsqualität verbessern.

Abstract

Least-Squares Matching (LSM) is a technique for finding the location in one or more so-called (digital) search images corresponding to a reference location in a so-called (digital) reference image with sub-pixel resolution. More precisely, LSM is rather a refining than a finding method, as it relies upon accurate approximate values for the corresponding locations searched for. It is an iterative least-squares approach (adjustment by indirect observations, Gauß-Markoff model) which minimizes the sum of squared grey value differences between windows in reference and search image(s). For that the functional model allows for geometric and radiometric transformations between the images.

The **task** in this thesis was to implement one-channel two-image LSM, i. e. LSM restricted to one search image and one »colour« channel, using different approaches for certain parts of the algorithm and perform comparing experiments based on real image data. As imagery an oriented aerial image block of panchromatic Microsoft/Vexcel UltraCamX images was used. The implementation was done in the software MATLAB from the company The MathWorks. For the following algorithm parts different approaches were implemented and examined: (a) The fundamental approach for the functional model of LSM: approach after Grün [1985] and approach after Kraus [2004]. (b) The geometric transformation: shift, similarity and affine transformation. (c) The radiometric transformation: simultaneous estimation vs. a priori computation of the coefficients of a linear radiometric transformation. (d) The addition of a geometric constraint to the functional model of LSM using the collinearity equations with known orientation. Each of these variants and extensions is discussed in detail in the theoretic part of this thesis.

The **results** show: (a) The approach after Kraus shows advantages in both, speed of computation (i. e. runtime) and speed of parameter estimation (i. e. iteration count for reaching certain convergence criteria). (b) The two radiometric variants perform more or less equally in the two dimensions of (a) with slight advantages for the a priori approach. (c) In situations with special image texture, more simple geometric transformations (shift) can find locations comparable to the results of the more complex ones (affine) although their geometric expectation is not met (e. g. on slanted roof tops). (d) Adding the geometric constraint can improve correspondence quality when matching image locations where none of the given geometric transformations models the perspective differences between reference and search image correctly.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Überblick, Anwendungen und Einteilung	1
1.2. Motivation und Zielsetzung	3
1.3. Struktur der Arbeit	4
1.4. Anmerkungen zur mathematischen Notation	5
2. Grundlagen	7
2.1. Das digitale Bild: radiometrischer Abbildungsvorgang	7
2.2. Geometrische Abbildungsvorstellung	7
2.3. Grauwertfunktion	10
3. Least Squares Matching – Modelle und deren Lösung	11
3.1. Das Basis-Modell in allgemeiner Form	11
3.2. Das geometrische Modell	19
3.3. Das Alternativ-Modell	23
3.4. Erweiterung um eine radiometrische Anpassung	26
3.5. Einführung der Kollinearitätsgleichungen als geometrische Bedingung	31
4. Implementierung	39
4.1. Grundlegendes	39
4.2. Eingangsdaten	39
4.3. Ergebnisdaten	42
4.4. Programmablauf	44
4.5. Einschränkungen	46
5. Daten	49
5.1. Bild-Block und Einzelbilder	49
5.2. Orientierung	49
6. Praktische Untersuchungen	53
6.1. Rahmenbedingungen	53
6.2. Die geometrischen Transformationen	56
6.3. Basis-Modell versus Alternativ-Modell	60
6.3.1. Identheit der gefundenen Position	62
6.3.2. Verhalten durch die Iterationen	63
6.3.3. Laufzeit	66
6.4. Die radiometrischen Transformationen	69
6.4.1. Identheit der gefundenen Position	70
6.4.2. Verhalten durch die Iterationen	70
6.5. Effekt der Kollinearitätsgleichungen	72

7. Zusammenfassung und Ausblick	75
7.1. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	75
7.2. Ausblick	78
A. Liste der Symbole	80
B. Zur inversen Verschiebung beim Alternativ-Modell	83
B.1. Inversion von Matrizen mit Determinanten	83
B.2. Inverse Verschiebung und partielle Ableitungen	83

Abbildungsverzeichnis

2.1. Zentralprojektion (schematisch)	8
2.2. Bild- und Objektkoordinatensystem, κ resp. K	9
3.1. LSM-Fenster in Referenzbild Ψ_f und Suchbild Ψ_g	12
3.2. Koordinatenreduktion anhand des Referenzbildes Ψ_f	13
3.3. Epipolarbedingung	32
3.4. Geometrische Bedeutung des Verschiebungsvektors ω_s	34
4.1. Ergebnisgraphik von <code>lsm.m</code>	43
4.2. Problem der Verspeicherungs-Orientierung für <code>lsm.m</code>	47
5.1. Verspeicherungs-Orientierung der Einzelbilder	50
6.1. 5×3 -Raster für die Punktauswahl (schematisch)	54
6.2. Graph über $\hat{\sigma}_{0,3V}$ der HEB-Punkte im schmalen Bildtripel	58
6.3. Graph über $\hat{\sigma}_{0,3V}$ der SEB-Punkte	59
6.4. Graph über $\hat{\sigma}_0$ aus den LSM-Läufen der SEB-Punkte in den Bildpaaren 1-2, 1-3 und 1-5	59
6.5. Zur Symmetrie in der Bild-Textur	61
6.6. Ergebnisse zur Schätz-Geschwindigkeit bei Basis- und Alternativ-Modell .	64
6.7. Ergebnis-Graphen der Laufzeit-Untersuchung	67
6.8. Ergebnisse zum Unterschied der Schätz-Geschwindigkeiten bei a priori und mitgeschätzter radiometrischer Transformation	71
6.9. Graph über $\hat{\sigma}_{0,3V}$ der NEB-Punkte im schmalen Bildtripel	73

Tabellenverzeichnis

1.1. Übersicht über die Notation grundlegender Größen	6
3.1. Geometrische Annahmen bei den Transformationsfunktionen t_S , t_H und t_A für den Fall eines Luftbild-Paares	21
3.2. Homogene Matrizen A_S , A_H und A_A der Transformationsfunktionen t_S , t_H und t_A	21
3.3. Partielle Ableitungen der Transformationsfunktionen t_S , t_H und t_A	22
3.4. Übersicht über die Unterschiede zwischen Basis- und Alternativ-Modell.	25
4.1. Aufbau der mandatorischen Eingabevariable <code>input1</code>	40
4.2. Aufbau der optionalen Eingabevariable <code>opt</code>	41
4.3. Hauptschritte des Ablaufes von <code>lsm.m</code> in Pseudo-Code.	45
4.4. Inhalt der Bildmatrizen O und P	46
5.1. Daten zum verwendeten Bild-Block und den Einzelbildern (UltraCamX)	50
6.1. Beispiele aus den Punktkategorien HEB , SEB und NEB und Punktzahlen	55
6.2. Kurz-Bezeichnungen für LSM-Ansätze und -Varianten	56
6.3. Mittelwert, Minimum und Maximum der \hat{p} -Differenzen bei Modell G und K	62
6.4. Relativer und absoluter LZ-Gewinn in der ITL von LSM-Modell K in Bezug zu LSM-Modell G	68
A.1. Liste der Symbole.	80

Kapitel 1.

Einleitung

1.1. Überblick, Anwendungen und Einteilung

Das Themengebiet dieser Arbeit ist *Least-Squares Matching* (LSM) in verschiedenen Ausprägungen und Ausbaustufen. LSM ist ein computergestütztes Verfahren aus dem großen Feld der Algorithmen zur Zuordnung (*Matching*) korrespondierender (oder homologer) Bildstellen in digitalen Bildern. Diese Algorithmen sind bspw. Grundlage für die automatisierte Objektrekonstruktion aus Photographien¹. Bei LSM erfolgt die Zuordnung hochaufgelöst im Subpixel-Bereich. Das Prinzip ist, durch Verschieben, Skalieren, Verdrehen und Verformen jene Bildausschnitte (oder Fenster) in den sogenannten *Suchbildern* zu finden, die optimal mit einem festen Bildausschnitt im sogenannten *Referenzbild* korrespondieren. Die Suchbilder sind im Allgemeinen von einer (Digital-)Kamera aufgenommene Abbildungen des Objektraums. Das Referenzbild kann ein synthetisches Muster sein, z. B. Zielmarken (*Template Matching*), oder wie die Suchbilder ein reale Photographie. Die *geometrische Transformation* berücksichtigt die perspektivischen Unterschiede zwischen dem Referenz- und den Suchbildern durch die Aufnahmeanordnung. Für die Auffindung des Optimums verwendet LSM einen iterativen Kleinste-Quadrate-Ansatz (*Ausgleichung*), der die Summe der quadratischen Grauwert-Differenzen zwischen dem Referenz- und den Suchfenstern minimiert. Der Begriff »Grauwerte« bezeichnet den Bildinhalt resp. die aufgezeichnete Strahlungsinformation. Das *funktionale Modell*, d. i. die mathematische Beziehung zwischen *Beobachtungen* (Grauwerte) und *Parametern* (der Transformation), ist nicht linear. LSM benötigt daher gute Näherungsorte für die gesuchten Stellen in den Suchbildern. Wegen dieser Rahmenbedingung bezeichnen wir LSM als *semi*-automatische Zuordnungsmethode. Neben der geometrischen Transformation enthält das funktionale Modell üblicherweise auch eine *radiometrische Transformation*, um systematische Grauwert-Unterschiede zwischen dem Referenz- und den Suchbildern zu kompensieren (z. B. ein Bild durchwegs heller als das andere). Mit jeder geometrischen und radiometrischen Transformation sind bestimmte Modellannahmen verbunden. Wichtig für die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Methode ist, dass diese Annahmen erfüllt sind.

Als gewissermaßen die Verallgemeinerung der bereits in den 1970'er Jahren verwendeten Kreuz-Korrelation zur Zuordnung korrespondierender Bildstellen in zwei digital(isiert)en Bildern, finden sich erste Ausführungen zu LSM bei [Förstner, 1982]. Das funktionale Modell ist noch eindimensional und als geometrische Transformation eine

¹Dazu müssen Projektionszentrum und räumliche Lage eines jeden Bildes (die sogenannte *äußere Orientierung*, sechs Parameter) und die Kamerageometrie (die sogenannte *innere Orientierung*, drei Parameter) bekannt sein. Zusammen werden diese Elemente als *Orientierung* bezeichnet. Details hierzu folgen in Abschnitt 2.2 ab Seite 7.

einfache Verschiebung eingeführt. Die mathematische Behandlung der in Aussicht gestellten Verallgemeinerung auf den zweidimensionalen Fall, komplexerer linearer Transformationen und einer radiometrischen Transformation gibt Ackermann [1984] bzw. Grün [1985]. Eine Formulierung für die simultane Korrespondenzsuche in mehr als einem Suchbild ist in [Förstner, 1998] zu finden. Ebenda ist auch eine zu den ersten Veröffentlichungen alternative Formulierung für das funktionale Modell angegeben, das auch von Kraus [2004] aufgegriffen wurde. Untersuchungen mit mehr als einem (Farb-)Kanal, d. h. Strahlungsinformation aus mehr als einem Wellenlängenbereich, haben Hahn und Brenner [1995] durchgeführt. Bethmann und Luhmann [2011] analysieren die Verwendung von komplexeren, auch nicht linearen geometrischen Transformationen für Aufgaben der Nahbereichs-Photogrammetrie. Eine wesentliche Erweiterung von LSM ist die Einführung geometrischer Bedingungen an die Zuordnung. Diese beruhen auf der Epipolarbedingung: im Zentrum des Referenzfensters liegt der Referenzpunkt, durch Referenzpunkt und Projektionszentrum geht der Referenz-Bildstrahl; der korrespondierende Bildpunkt in einem Suchbild muss auf dem Abbild des Referenz-Bildstrahles in diesem Suchbild liegen, der *Epipolarlinie*. Die Korrespondenzsuche reduziert sich damit auf eine eindimensionale entlang der Epipolarlinie. Grün [1985] berücksichtigt die Epipolarbedingung implizit durch Einführung der *Kollinearitätsgleichungen*, d. h. den Gleichungen zur mathematischen Beschreibung der Zentralprojektion; siehe bspw. [Kraus, 2004]. Eine weitere Möglichkeit ist LSM in synthetischen Normalfallbildern zu rechnen, den sogenannten *Normal-* oder *Epipolarbildern* [Kraus, 2004]. Wegen der Abwesenheit von sogenannten *y*-Parallaxen zwischen Referenz- und Such-Normalbild vereinfacht sich die geometrische Transformation; siehe bspw. [Förstner, 1993].

Anwendungen von LSM in der Photogrammetrie sind die Zuordnung von Rahmen- oder allgemeiner Zielmarken, die Messung von Verknüpfungspunkten (*tie points*) und Passpunkten (*control points*) für die Berechnung der Orientierung und die Messung von korrespondierenden Bildpunkten zur (punktweisen) Objektrekonstruktion. Erfolgt letzteres flächig bzw. in einem regelmäßigen Raster ist LSM als Massenpunkt-Lieferant für die Ableitung digitaler Höhenmodelle einsetzbar (DHMe). Wegen der verlangten guten Näherungsorte wird LSM üblicherweise aber erst in der Verfeinerung der Zuordnung verwendet. Für die automatische Bestimmung der Näherungsorte können andere *Matching*-Methoden wie bspw. Förstner-Operator [Förstner, 1986] oder SIFT-Operator [Lowe, 2004] verwendet werden. Zusätzliche Hilfe leistet die hierarchische Vorgehensweise mit Bildpyramiden, bei der die *Matching*-Ergebnisse eines gröber aufgelösten Niveaus die Zuordnungen in einem feiner aufgelösten Niveau stützen [McGlone, 2004], und die Epipolarbedingung. Das LSM-Prinzip kann auch auf drei Dimensionen verallgemeinert und so bspw. dazu verwendet werden, zwei oder mehr DHMe aufeinander, ein DHM auf ein (Pass-)Punktfeld oder eine dreidimensionale Kurve auf ein DHM zu transformieren. Die geometrische Transformation ist dann dreidimensional, je nach Formulierung wird die Summe der quadrierten Höhen-Differenzen minimiert [Ressl, Pfeifer, und Mandlbürger, 2011] oder die Summe der quadrierten euklidischen Abstände zwischen den beteiligten Flächen oder Kurven [Grün und Akca, 2005].

In der **Photogrammetrie** wird LSM als eine Methode des *Area-Based Matching* geführt, da die Grauwerte von Referenz- und Suchfenstern *flächig* miteinander »verglichen« werden. Beim *Feature-Based Matching* hingegen werden aus den beteiligten Bil-

dern unabhängig voneinander markante Bildpunkte oder -linien (*Features*) extrahiert und das *Matching anschließend* durch einen Vergleich der *Feature*-Merkmale vollzogen² [McGlone, 2004]. Zu diesen Methoden gehören bspw. der erwähnte Förstner- und SIFT-Operator. In der Nomenklatur der **Computer Vision** zählt LSM zu den *lokalen* Methoden der Stereo-Rekonstruktion (*Stereo Reconstruction*), nachdem im Gegensatz zu den globalen Methoden (a) Information über kleine Bildausschnitte aggregiert wird und (b) die Zuordnung korrespondierender Bildstellen unabhängig von allen weiteren korrespondierenden Bildstellen erfolgt [Szeliski, 2010]. Wie ebenda beschrieben sind globale Methoden den lokalen in der Stereo-Rekonstruktion überlegen. Wegen des höheren Rechenaufwandes waren globale Methoden bisher aber auf den Einsatz bei kleineren Bildformaten beschränkt. Hirschmüller [2008] ist es gelungen, die globale Optimierung so zu approximieren, dass auch großformatige Luftbilder effizient verarbeitet werden können. In kommerziellen Programmen zur Ableitung digitaler Höhenmodelle (DHMe) ersetzen dieser *semi-globale* und weitere verwandte Ansätze derzeit die lokalen Methoden. Eine Verallgemeinerung auf die simultane Korrespondenzsuche in mehr als zwei Bildern steht nach dem Wissen des Autors noch aus.

1.2. Motivation und Zielsetzung

Bei Erfüllung der Modellannahmen ist LSM speziell für die Feinmessung homologer Bildstellen eine qualitativ hochwertige Methode. Realistisch sind Positionierungs-Genauigkeiten von etwa 0.1 Pixel. Damit ist LSM nach dem Wissen des Autors nach wie vor die genaueste Methode für die computergestützte Messung einzelner homologer Bildstellen. Zielsetzungen dieser Arbeit sind: (a) LSM mit verschiedenen Ansätzen und in unterschiedlichen Ausprägungen zu implementieren; (b) anhand konkreter Experimente mit realen Luftbildern bekannter Orientierung (i) die Implementierung zu kontrollieren und (ii) Vergleiche zwischen den implementierten Varianten anzustellen. Damit soll insgesamt ein tieferes Verständnis für die Methode entwickelt werden. Wir beschränken uns auf Zweibild-LSM, d. h. ein Suchbild und ein reales Referenzbild, mit einkanaligen *Frame*-Bildern, d. h. Bildern von Kameras mit *Bildebenen*³. Wir fassen im Rahmen dieser Arbeit LSM als Werkzeug auf, um zu *qualifiziert* ausgewählten Referenzpunkten korrespondierende Bildpunkte in einem Suchbild vermittlels der umgebenden Grauwerte zu messen. Als Näherungsorte für die gesuchten Bildpunkte kommen der Einfachheit halber manuell gemessene Positionen zum Einsatz.

Die Variationen und Experimente erstrecken sich in den folgenden Dimensionen:

- Der grundsätzliche **Ansatz** für das **funktionale Modell**. Wir erproben den Ansatz nach Grün [1985], das »Basis-Modell«, und den Ansatz nach Kraus [2004], das »Alternativ-Modell«⁴. Die mathematische Formulierung lässt vermuten, dass das Alternativ-Modell Vorteile in »Schätz-Geschwindigkeit« (d. i. die Anzahl an Iterationen bis bestimmte Konvergenzkriterien erfüllt sind) und Laufzeit hat. Diese

²Die Berechnung der *Feature*-Merkmale erfolgt üblicherweise aber auch auf Basis von Fenstern.

³Kameras mit nur einzelnen Bildzeilen bzw. -elementen pro Kanal werden hier nicht behandelt.

⁴Obwohl das Alternativ-Modell bereits in [Förstner, 1998] gegeben wird, bezeichnen wir es dennoch nach Kraus [2004], da dort explizit der Zweibild-Fall behandelt wird.

Vermutung wird in den Experimenten untersucht. Zusätzlich gehen wir der Frage nach, ob beide Ansätze identische Positionen finden.

- Die **geometrische Transformation**. Wir beschränken uns auf lineare Transformationen von der Verschiebung (*Shift*, 2 Parameter) über die Ähnlichkeitstransformation (4 Parameter) bis zur Affintransformation (6 Parameter). Mit jeder dieser Transformationen sind Modellvorstellungen verbunden, die in den Experimenten überprüft werden.
- Die **radiometrische Transformation**. Die Parameter der radiometrischen Transformation können im Zuge der iterativen Ausgleichung mitgeschätzt oder vorab berechnet werden [Baltsavias, 1991]. Wir untersuchen die Unterschiede der beiden Möglichkeiten hinsichtlich gefundener Position, Schätz-Geschwindigkeit und Laufzeit.
- Die Erweiterung um eine **geometrische Bedingung**. Die Einführung der Epipolarbedingung verspricht eine größere Robustheit gegenüber der Konvergenz zu Nebenminima. Wir wählen wegen seiner Allgemeinheit den Ansatz mit Kollinearitätsgleichungen nach Grün [1985]. In den Experimenten wird beleuchtet, inwieweit die Zuordnung von Bildpunkten, an denen die geometrischen Modellvorstellungen verletzt werden, durch Verwendung dieser Gleichungen profitieren kann.

1.3. Struktur der Arbeit

In Kapitel 2 werden Grundlagen und -größen der Photogrammetrie und Zentralperspektive erklärt, soweit sie für diese Arbeit wichtig sind. Weiters werden die verwendeten Koordinatensysteme definiert. Der Theorie von LSM widmen wir uns in Kapitel 3. Wir behandeln darin die mathematische Formulierung von Basis- und Alternativmodell, die Parametrisierung der geometrischen Transformationen, die Einführung einer radiometrischen Anpassung und die Erweiterung des funktionalen Modells um die Kollinearitätsgleichungen. Dieses Kapitel ist vergleichsweise detailliert gehalten und verarbeitet konkrete Erkenntnisse aus den Implementierungsarbeiten. Als nicht zu vernachlässigenden Anteil dieser Arbeit wertend, sind in Kapitel 4 Details zur geschaffenen Implementierung gezeigt. Neben der Beschreibung von Eingangs- und Ergebnisdaten sowie den verfügbaren Parametern, enthält dieser Abschnitt den Programmablauf in Pseudo-Code und bespricht die Einschränkungen der bestehenden Implementierung. Im anschließenden Kapitel 5 wird ein Blick auf das Bildmaterial für die praktischen Untersuchungen geworfen. Einer technischen Beschreibung des Luftbild-Blocks folgt eine kurze Besprechung der Berechnung und Qualität der Orientierung. Die Experimente folgen in Kapitel 6. Nach einer Erörterung der Rahmenbedingungen (Messung der Bildpunkte, LSM-Varianten) folgen die wesentlichen Ergebnisse der Untersuchungen in vier separaten Abschnitten, entsprechend den in Abschnitt 1.2 angegebenen vier Dimensionen. Kapitel 7 schließt diese Arbeit mit einer Zusammenfassung über die gewonnenen Erkenntnisse und einem Ausblick auf offen gebliebene Themen und weiterführende Fragen.

1.4. Anmerkungen zur mathematischen Notation

Die Begriffe »Punkt« und »(Orts-)Vektor« werden in dieser Arbeit synonym verwendet. Wenn nicht durch Transposition oder Definition angezeigt, sind alle Vektoren Spaltenvektoren. Einen Vektor der Länge n nennen wir n -Vektor, eine Matrix mit Zeilendimension m und Spaltendimension n entsprechend (m, n) -Matrix. Vektorbasis ist stets die kanonische Basis; die Angabe eines n -Vektors kann daher auf dessen Komponenten beschränkt werden. Hauptsächlich werden die Vektoren in Repräsentation mit euklidischen Komponenten oder Koordinaten verwendet, an einigen Textstellen kommt die Repräsentation mit homogenen Koordinaten, d. h. Länge $n + 1$ und freier Skalierung, zum Einsatz⁵. Entsprechend werden auch Matrizen in euklidischer und homogener Notation verwendet. Koordinatensysteme definieren wir in Symbolen nur unter Angabe der aufbauenden Achsen, z. B. $\kappa = \{x, y, z\}$; Ursprung und konkrete Einheit sind entweder aus dem Zusammenhang ersichtlich oder für die jeweiligen Zwecke unerheblich. Die allgemein verwendeten Symbole für die mathematischen Größen dieser Arbeit fasst Tabelle 1.1 auf der nächsten Seite zusammen. Eine detaillierte Auflistung gibt Tabelle A.1 auf Seite 80.

Anmerkung: Trotz des Bemühens, die Notation eindeutig zu halten, ist dies nicht an allen Textstellen gelungen. Konkret verwenden wir das Symbol K zweimal: einmal als Bezeichnung für das Objektkoordinatensystem $K = \{X, Y, Z\}$ (Großbuchstabe von κ), und einmal als Anzahl K der Pixel im LSM-Fenster (Großbuchstabe des Fensterpunkt-Index k). Aus dem Zusammenhang ist jedoch stets klar, welche der beiden Entitäten gemeint ist.

⁵Auf eine Definition homogener Koordinaten und Vektoren sowie des dafür benötigten »projektiv abgeschlossenen Anschauungsraumes« \mathbb{P}^n wird hier verzichtet. Der Leser sei auf die Darstellungen von [Ressl \[2003\]](#) oder [Hartley und Zisserman \[2004\]](#) verwiesen.

Tab. 1.1. Übersicht über die Notation grundlegender Größen in dieser Arbeit. \mathbb{R}^2 bezeichnet den reellen 2-Raum. \mathbb{P}^2 bezeichnet den projektiv abgeschlossenen Anschauungsraum der Dimension 2, siehe bspw. [Ressl, 2003].

ALLGEMEINE GRÖSSEN		
Entität	Beispiele	Beschreibung
Skalar und Skalarfunktion	a	Schmaldruck, kursiv
<i>Bildpunkte</i> ($=2D$)		
euklidisch	\mathbf{p}, φ	Kleinbuchstaben, Fettdruck, kursiv
homogen	$\mathbf{p}, \boldsymbol{\varphi}$	Kleinbuchstaben, Fettdruck, aufrecht
<i>Objektpunkte</i> ($=3D$)		
euklidisch	\mathbf{P}	Großbuchstaben, Fettdruck, kursiv
Ebenen	Ψ	griechische Großbuchstaben, aufrecht
euklidische (m, n) -Matrix	\mathbf{A}	Großbuchstaben, Schmaldruck, kursiv, serifenlos
homogene (m, n) -Matrix	\mathbf{A}	Großbuchstaben, Schmaldruck, aufrecht, serifenlos
euklidische Vektorfunktion, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$\mathbf{t}(\mathbf{p}), \mathbf{s}(\boldsymbol{\varphi})$	Fettdruck, kursiv; um Verwechslungen vorzubeugen, sind ausschließlich \mathbf{T}, \mathbf{t} und \mathbf{s} für Vektorfunktionen reserviert
homogene Vektorfunktion, $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$	$\mathbf{t}(\mathbf{p}), \mathbf{s}(\boldsymbol{\varphi})$	Fettdruck, aufrecht; wie euklidische Vektorfunktion

SPEZIELLE GRÖSSEN	
Entität	Bezeichnung
(m, n) -Nullmatrix	$\mathbf{0}_{(m,n)}$
n -Nullvektor	$\mathbf{0}_n$
n -Einheitsmatrix	\mathbf{E}_n
j -te Spalte von \mathbf{E}_n	\mathbf{e}_j

Kapitel 2.

Grundlagen

LSM ist ein Verfahren, das auf der in Bildern gespeicherten Strahlungsinformation – den sogenannten Grauwerten – und den geometrischen Vorstellungen des Abbildungsprozesses beruht. Dieses Kapitel gibt hierzu einen physikalisch und mathematisch sehr einfach gehaltenen Überblick.

2.1. Das digitale Bild: radiometrischer Abbildungsvorgang

Objekte emittieren, reflektieren und transmittieren elektromagnetische Strahlung. Ein Teil dieser Strahlung gelangt durch die Kameraoptik in das Innere einer Digitalkamera und fällt auf die Bildebene Ψ ein¹. Dort sind lichtempfindliche, in einer Matrix angeordnete Detektoren angebracht (*picture elements* bzw. Pixel), die die auftreffende Strahlung messen. Um die Aufzeichnung über mehrere Wellenlängenbereiche (oder Kanäle) erstrecken zu können, werden (a) mehrere Bildebenen verschiedener Wellenlängensensitivität eingebaut [Jansa und Dorigo, 2008], oder (b) verschieden sensitive Filter vor der Bildebene angeordnet, z. B. nach dem weit verbreiteten Bayer-Muster [Bayer, 1976]. Das vollständige Bild eines Kanals folgt in Fall (b) dann durch Interpolation der jeweiligen Messwerte.

Die Messung der Strahlung erfolgt diskret und die Verspeicherung der Messwerte quantisiert: (i) diskret, da die einzelnen Pixel einen bestimmten Abstand voneinander haben; (ii) quantisiert, da Computer nicht beliebig viele Zahlen darstellen können.

Bevor wir auf die mathematische Beschreibung des digitalen Bildes eingehen, ist es notwendig ein Bildkoordinatensystem einzuführen. Dieser Schritt erfolgt im nächsten Abschnitt. Wir kommen dann in Kapitel 2.3 auf die ausstehende Definition zurück.

2.2. Geometrische Abbildungsvorstellung

Zentralprojektion. Die geometrische Beziehung zwischen Bildpunkten und Objektpunkten wird idealisiert durch eine Zentralprojektion erklärt; die zugehörige Kamera wird als Lochkamera oder *Pinhole Camera* bezeichnet [Ressl, 2003]. Das bedeutet: es existiert ein eigentlicher, fester Punkt, das Projektionszentrum \mathbf{P}_0 , und für alle Paare einander zugeordneter Bild- und Objektpunkte $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{P}$ gilt $\{\mathbf{p}, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}\}$ liegen auf einer Geraden, d. h. sind kollinear (Figur 2.1 auf der nächsten Seite) [Manhart, 2004]. Man nennt diese Geraden auch Bildstrahlen. Der Normalriss \mathbf{P}_0^n von \mathbf{P}_0 in der Bildebene Ψ

¹Wie in Abschnitt 1.2 auf Seite 3 ausgeführt, beziehen wir uns im Rahmen dieser Arbeit nur auf *Frame-Kameras*.

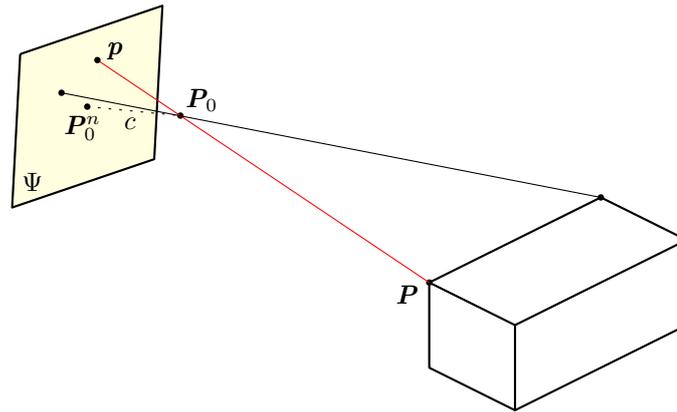


Fig. 2.1. Schematische Darstellung einer Zentralprojektion (in Negativstellung, siehe Text) mit Bildpunkt p in Bildebene Ψ , Projektionszentrum P_0 , Hauptpunkt P_0^n , Objektpunkt P und Kamerakonstante c . p , P_0 und P sind kollinear.

heißt Hauptpunkt, den Abstand $\overline{P_0^n P_0}$ bezeichnet man als Distanz oder Kamerakonstante c .

Da das Projektionszentrum P_0 zwischen Bildebene Ψ und Objektpunkten liegt, ist das Bild horizontal und vertikal gespiegelt (Negativ, Negativstellung). Verspeichert wird in digitalen Kameras das Positiv. Für die weiteren Ausführungen nehmen wir daher die Bildebene in der synthetischen Positivstellung an. Die Bildebene Ψ befindet sich dann zwischen Projektionszentrum und Objektpunkten.

Koordinatensysteme. Um die Abbildung mathematisch formulieren zu können, sind in Bild- und Objektraum Koordinatensysteme einzuführen. Für das **Bildkoordinatensystem** $\kappa = \{x, y, z\}$ verwenden wir in dieser Arbeit aus praktischen Gründen das System wie es in dem Programm Orpheus realisiert ist [Kager *et al.*, 2002]. Die Definition lautet (Figur 2.2 links):

- Ursprung $(0, 0, 0)^\top$ ist die Mitte des linken oberen Pixels der Bildmatrix.
- Die x -Achse weist von links nach rechts, d. h. in Richtung einer Bildzeile.
- Die y -Achse weist im Sinne eines Rechtssystems nach oben, d. h. in Richtung einer Bildspalte; für jeden Bildpunkt gilt daher $y \leq 0$.
- Die z -Achse komplettiert κ zu einem räumlichen Rechtssystem und weist *zum* Projektionszentrum. Für jeden Bildpunkt gilt $z = 0$.

Der Abstand zweier Pixel beträgt 1, die Einheit nennen wir gleichlautend »Pixel« oder [Px]. Das **Objektkoordinatensystem** $K = \{X, Y, Z\}$ sei ebenfalls ein räumliches, kartesisches Rechtssystem (Figur 2.2 rechts). Die Lagerung von K wird bspw. durch die Verwendung eines geodätischen Datums oder durch fingierte Passelemente erzielt [Kraus, 1996].

Abbildungsvorschrift. Basierend auf den Koordinatensystemen κ und K wollen wir nun festlegen (Figur 2.2): Das Projektionszentrum hat in K die Koordinaten $P_0 = (X_0, Y_0, Z_0)^\top$ und in κ die Koordinaten $p_0 = (x_0, y_0, c)^\top$ mit c der Kamerakonstante. Der

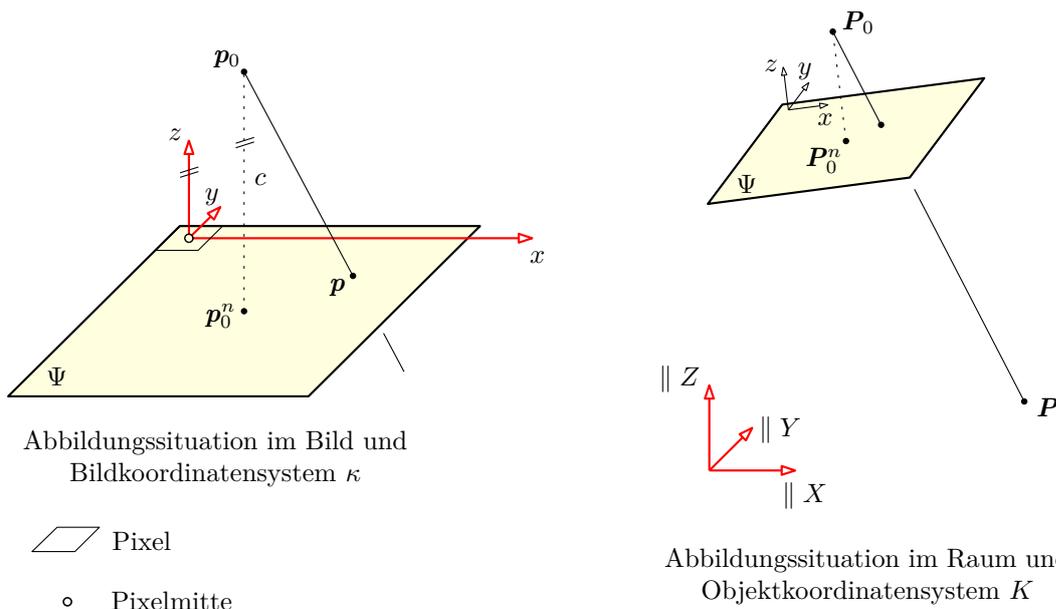


Fig. 2.2. Darstellung von Bildkoordinatensystem $\kappa = \{x, y, z\}$, Objektkoordinatensystem $K = \{X, Y, Z\}$ und der Abbildungssituation in Positivstellung. Für eine Erläuterung der eingetragenen Punkte siehe Absatz Abbildungsvorschrift im Text.

Hauptpunkt in κ ist $\mathbf{p}_0^n = (x_0, y_0, 0)^\top$ und in K allgemein (und ohne weitere Bedeutung) $\mathbf{P}_0^n = (X_0^n, Y_0^n, Z_0^n)^\top$.

In der Aufnahmesituation ist κ gegenüber K im Allgemeinen verdreht. Die Verdrehung wird durch eine räumliche Rotationsmatrix R beschrieben. Diese wird üblicherweise aus drei sequentiellen, ebenen Drehungen um die Koordinatenachsen von entweder κ oder K zusammengesetzt. Die drei Drehwinkel und die drei Koordinaten von \mathbf{P}_0 bilden zusammen die sechs Parameter der sogenannten **äußeren Orientierung** eines Bildes. Die Koordinaten von \mathbf{p}_0 , d. h. Hauptpunkt \mathbf{p}_0^n und Kamerakonstante c , bezeichnet man als **innere Orientierung** der Kamera [Kraus, 2004].

Sei nun² ein Objektpunkt gegeben durch $\mathbf{P} = (X, Y, Z)^\top$ und dessen zugeordneter Bildpunkt durch $\mathbf{p} = (x, y, 0)^\top$. Dann ist der Bildstrahl in K gegeben durch $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0$ und jener in κ , $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$, durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \lambda \cdot R^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \tag{2.1}$$

mit λ einem von Bildpunkt zu Bildpunkt wechselnden Maßstab [Kraus, 1996]. Gleichung (2.1) ist die Abbildungsvorschrift der Zentralprojektion und wird in Abschnitt 3.5 in Form der Kollinearitätsgleichungen wieder auftauchen. Die Drehmatrix R wird in (2.1) so angenommen, dass sie eine Drehung von κ nach K vermittelt. Andere als atmosphärische und datumsspezifische Abweichungen von der Kollinearität werden als *Verzeichnung* bezeichnet und haben ihre Ursache bspw. in optischen und mechanischen Unzulänglichkeiten der Kamera-Optik und Unebenheiten des Sensors. Deren Berücksichtigung in (2.1) erfolgt allgemein ausgedrückt durch Ersetzung des Hauptpunktes $\mathbf{p}_0^n \in \kappa$ mit bivariaten Polynomen [Kraus, 1996].

²Diese Argumentation ist sinngemäß [Ressl, 2003] entnommen.

2.3. Grauwertfunktion

Wir wenden uns nun der mathematischen Definition des Inhaltes eines digitalen Bildes zu. Verwenden wir das in Abschnitt 2.2 eingeführte Bildkoordinatensystem $\kappa = \{x, y, z\}$ und lassen die z -Koordinate weg³, können wir eine bivariate Funktion g anschreiben, die jeder Stelle (x, y) (resp. jedem Pixel) eines (einkanaligen) Bildes Ψ den quantisierten Messwert $g(x, y)$ zuordnet. Adaptiert nach [Fuchs \[1997\]](#) lautet die Definition:

$$\begin{aligned} g : \quad & (x, y) \rightarrow g(x, y) \\ & D_x \times D_y \rightarrow W_g \end{aligned} \tag{2.2}$$

mit dem Definitionsbereich

$$\begin{aligned} D_x \times D_y = \{ & (x, y) \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \leq x_{\max}, \\ & y \in \mathbb{Z} \text{ und } y_{\min} \leq y \leq 0 \} \end{aligned} \tag{2.3}$$

und dem Wertebereich

$$W_g = \{g(x, y) \mid g \in \mathbb{N}_0 \text{ und } g \leq 2^b - 1, b \in \mathbb{N}\}. \tag{2.4}$$

x_{\max} und y_{\min} sind durch die Ausdehnung des Bildes festgelegt. Die Funktionswerte $g(x, y)$ werden üblicherweise als *Grauwerte*, die Funktion selbst als Grauwertfunktion bezeichnet. Die natürliche Zahl b wird *Bildtiefe* genannt und entspricht der Anzahl der Bits, die zur Verspeicherung der Grauwerte verwendet werden [[Jansa und Dorigo, 2008](#)]. Typische Werte für die Bildtiefe heute in der Photogrammetrie verwendeter Digitalkameras sind $b = 8$ bis 16. Grauwerte an reellwertigen Stellen können durch Interpolation gewonnen werden, siehe bspw. [[Luhmann, 2003](#)].

Eine Anmerkung zur Notation: Die Begriffe »Bild« und »Grauwerte« bzw. »Grauwertfunktion« werden nicht synonym behandelt. Wir verwenden »Bild« zur Identifikation eines Bildes, bspw. Bild Ψ . Mit »Grauwerte« bezeichnen wir den Bild*inhalt* eines Bildes, bspw. die Grauwerte g von Bild Ψ .

³Für alle Punkte der Bildebene gilt nach Abschnitt 2.2 $z = 0$.

Kapitel 3.

Least Squares Matching – Modelle und deren Lösung

In der Auslegung für diese Arbeit ist das Ziel von LSM das Auffinden korrespondierender Bildpunkte in zwei oder mehr Bildern vermittelt der umgebenden Grauwerte. Dieser Abschnitt beschreibt die mathematische Formulierung dieser Aufgabe. Wie in Abschnitt 1.2 auf Seite 3 erwähnt, beschränken wir uns dabei auf den Zweibild-Fall mit einkanaligen *Frame*-Bildern. Wir führen zunächst das grundlegende funktionale Modell nach Grün [1985] in allgemeiner Form ein und konkretisieren dann die geometrische Transformation. Anschließend besprechen wir das »Alternativ-Modell« nach Kraus [2004], erweitern die Modelle um eine radiometrische Anpassung und behandeln schließlich die Hinzunahme der Kollinearitätsgleichungen als geometrische Bedingung.

3.1. Das Basis-Modell in allgemeiner Form

Situation und Gleichungssystem. Gegeben seien zwei Bilder Ψ_f und Ψ_g mit Koordinatensystem $\kappa_f = \{\xi, \eta, \zeta\}$ und $\kappa_g = \{x, y, z\}$ wie in Abschnitt 2.2 auf Seite 7 definiert. Nachdem alle Bildpunkte in der Bildebene liegen ($\zeta = z = 0$), lassen wir die dritte Komponente in Folge weg. Gesucht ist der zu einem gegebenen Referenzpunkt $\varphi = (\xi, \eta)^\top \in \kappa_f$ korrespondierende Punkt $\mathbf{p} = (x, y)^\top \in \kappa_g$. Das Bild Ψ_f nennt man daher Referenzbild, das Bild Ψ_g Suchbild [Kraus, 2004]. Beide Punkte, φ und \mathbf{p} , haben im Allgemeinen unrunde Koordinaten, liegen also nicht in Pixelmitten. Um \mathbf{p} zu finden, geht man bei LSM davon aus, dass sich in einem Bereich um φ und \mathbf{p} – dem Referenz- resp. Suchfenster – die Grauwerte f und g von Referenzbild Ψ_f und Suchbild Ψ_g gleichen. Bezeichnen $\varphi_k = (\xi_k, \eta_k)^\top$, $k = 1, \dots, K$, die Fensterpunkte des Referenzfensters und $\mathbf{p}_k = (x_k, y_k)^\top$ die korrespondierenden Fensterpunkte des Suchfensters, lautet das Basis-Modell nach Grün [1985] allgemein (Figur 3.1 auf der nächsten Seite):

$$\begin{aligned} f(\varphi_k) &= g(\mathbf{p}_k) = \\ &= g(\mathbf{T}(\varphi_k, \boldsymbol{\omega}_T)) \quad \text{mit } k = 1, \dots, K. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Transformationsfunktion $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_k \rightarrow \mathbf{p}_k$, berücksichtigt, dass das Suchfenster gegenüber dem Referenzfenster aufgrund der Abbildungssituation im Allgemeinen verschoben und mehr oder weniger verformt ist; man spricht auch vom perspektivischen Unterschied. Der Vektor $\boldsymbol{\omega}_T = (\omega_{T,1}, \omega_{T,2}, \dots, \omega_{T,J})^\top$ bezeichnet die Parameter der Transformationsfunktion¹. Diese sind unbekannt und zu bestimmen.

¹ \mathbf{T} wird als *aktive* Koordinatentransformation aufgefasst, d. h. die Koordinatensysteme κ_f und κ_g werden als inzident und fest behandelt und die Punktmenge $\varphi_k \in \kappa_f$, $k = 1, \dots, K$, an Orte $\mathbf{p}_k \in \kappa_g$ mit anderen *Koordinaten* transformiert. Siehe [Stöcker, 1999, Seite 308].

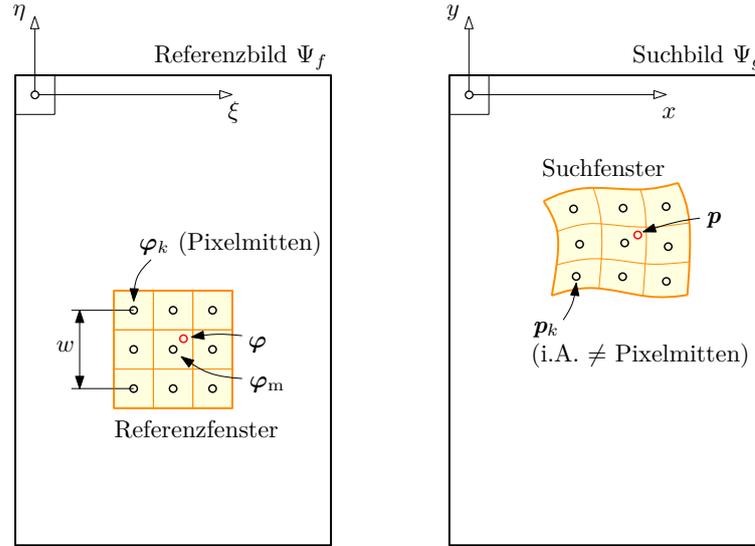


Fig. 3.1. Links: Referenzfenster in Referenzbild Ψ_f mit runden Fensterpunkten $\varphi_k \in \kappa_f = \{\xi, \eta\}$, $k=1, \dots, K=w^2$ um den gegebenen Referenzpunkt φ und Fensterzentrum φ_m . Rechts: verschobenes und verformtes Suchfenster in Suchbild Ψ_g mit i. A. unrunder Fensterpunkten $\mathbf{p}_k \in \kappa_g = \{x, y\}$ um den gesuchten Punkt \mathbf{p} . Für w und eine Erklärung zu runden/unrunder Fensterpunkten siehe Text.

Das Referenzfenster kann im Grunde in beliebiger Form definiert werden. Es wird hier aus Gründen der Einfachheit zu einem Quadrat festgelegt mit w Pixeln entlang der Quadratseite, wobei $w = 2h + 1$ und $h \in \mathbb{N}$; somit gilt $K = w^2$. Damit aus Referenzbild Ψ_f originale und nicht interpolierte Grauwerte entnommen werden, definieren wir die Koordinaten der $\varphi_k \in \kappa_f$ ganzzahlig, d. h. in Pixelmitten liegend. Der ganzzahlige Fenstermittelpunkt φ_m ist $[\varphi]$, mit $[\cdot]$ der Rundungsfunktion (Figur 3.1). Dazu ist eine Anmerkung notwendig, die später im Absatz *Initialisierung* auf Seite 17 gegeben wird. Die $\mathbf{p}_k \in \kappa_g$ sind im Allgemeinen keine Pixelmitten.

Aus numerischen Gründen führen wir eine Koordinatenreduktion um die festen Punkte φ_{red} und \mathbf{p}_{red} und damit verbunden eine »Reduktion« der Transformationsfunktion durch. Als Reduktionspunkt φ_{red} verwenden wir den Mittelpunkt φ_m des Referenzfensters; \mathbf{p}_{red} belassen wir hier noch symbolisch, er wird im Absatz *Initialisierung* auf Seite 17 definiert. Die reduzierten Punkte ${}_r\varphi_k$ und ${}_r\mathbf{p}_k$ in den Koordinatensystemen ${}_r\kappa_f = \{r\xi, r\eta\}$ resp. ${}_r\kappa_g = \{rx, ry\}$ (Figur 3.2) sind

$$\begin{aligned} {}_r\varphi_k &= \varphi_k - \varphi_{\text{red}}, \\ {}_r\mathbf{p}_k &= \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{\text{red}} \quad \text{mit } k \text{ wie in (3.1)}. \end{aligned}$$

Für die \mathbf{p}_k gilt nun mit der »reduzierten« Transformationsfunktion $\mathbf{t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, {}_r\varphi_k \rightarrow {}_r\mathbf{p}_k$, und deren Parametervektor $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J)^\top$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= \mathbf{T}(\varphi_k, \boldsymbol{\omega}_T) = \\ &= {}_r\mathbf{p}_k + \mathbf{p}_{\text{red}} = \mathbf{t}({}_r\varphi_k, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{p}_{\text{red}} \quad \text{mit } k \text{ wie in (3.1)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

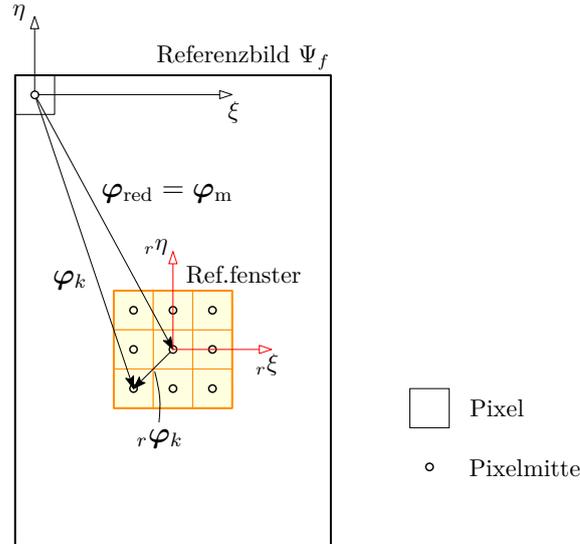


Fig. 3.2. Koordinatenreduktion anhand des Referenzbildes Ψ_f . Die Reduktion von $\varphi_k \in \kappa_f$ nach $r\varphi_k \in r\kappa_f = \{r\xi, r\eta\}$ lautet $r\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{\text{red}}$ mit $\varphi_{\text{red}} \in \kappa_f$ dem Reduktionspunkt. Als φ_{red} wird der (ganzzahlige) Mittelpunkt φ_m des Referenzfensters festgelegt.

Wie Grün [1985] beschreibt, verhindern unvermeidbare zufällige Messfehler in den Grauwerten f und g (Rauschen, *noise*), dass (3.1) exakt erfüllt sein kann. Diesem Umstand wird durch Anbringen von Verbesserungen v_k begegnet². Zusammen mit (3.2) wird aus (3.1) auf Seite 11 damit

$$f(\varphi_k) + v_k = g(\mathbf{t}(r\varphi_k, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{p}_{\text{red}}) \quad \text{mit } k = 1, \dots, K. \quad (3.3)$$

Formal liegt mit (3.3) das funktionale Modell einer vermittelnden Ausgleichung vor (auch Gauß-Markoff-Modell, *adjustment by indirect observations*) mit den K Grauwerten $f(\varphi_k)$ als Beobachtungen und den J Elementen von $\boldsymbol{\omega}$ als unbekanntem Parametern. Die Auflösung basiert auf einer Minimierung der gewichteten Verbesserungsquadratsumme, in Symbolen $\mathbf{v}^\top \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{v} \rightarrow \min$, mit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k, \dots, v_K)^\top$ und \mathbf{Q}_{ll} der Kofaktormatrix³, welche die Stochastik der Beobachtungen berücksichtigt (Definitionen folgen später). Anhand der folgenden Formeln wird sich zeigen, dass das gesuchte Minimum dem Minimum der quadrierten Grauwert-Differenzen zwischen Referenz- und Suchfenster entspricht. Für eine Einführung in das Kalkül der Ausgleichungsrechnung und speziell die Herleitung der Lösungsformeln für das Gauß-Markoff-Modell sei auf den Text von Niemeier [2008] verwiesen. Eine sehr kompakte Darstellung der verschiedenen Ausgleichungsansätze gibt McGlone [2004].

²Systematische Unterschiede in den Grauwerten werden erst in Abschnitt 3.4 behandelt, um das Modell nicht von Beginn an zu überfrachten.

³Bezeichnung nach [Niemeier, 2008]. In [McGlone, 2004] wird diese Matrix treffender als initiale Varianz-Kovarianzmatrix bezeichnet (*initial variance-covariance matrix*). In der deutschen Literatur ist die Bezeichnung Kofaktormatrix jedoch verbreiteter.

Lösungsweg. Um (3.3) nach den obigen Vorstellungen zu lösen, sind folgende Schritte notwendig:

- Die Stochastik der Beobachtungen $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ ist über die Kofaktormatrix \mathbf{Q}_{ll} einzubringen. Die Lösung (ausgenommen numerische Instabilitäten) ist unabhängig von der Skalierung von \mathbf{Q}_{ll} . Es reicht daher, die Genauigkeitsverhältnisse der Beobachtungen zu kennen oder plausibel anzunehmen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden identgenaue, unkorrelierte Beobachtungen $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ angenommen, d. h.

$$\boxed{\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{E}_K}. \quad (3.4)$$

Damit folgt für die Minimumsbedingung $\mathbf{v}^\top \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \rightarrow \min$. Wegen der zweifellos vorhandenen Korrelationen zwischen benachbarten $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ ist das aber lediglich eine bequeme Annahme.

- Das funktionale Modell (3.3) ist um Näherungswerte zu linearisieren und iterativ zu lösen, denn der funktionale Zusammenhang zwischen den Unbekannten $\boldsymbol{\omega}$ und den Beobachtungen $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ ist nicht linear.

Wir wenden uns im Folgenden der Linearisierung zu. Die Taylor-Entwicklung von (3.3) bis Grad 1 lautet

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varphi}_k) + v_k &= g(\mathbf{p}_k^0) + \frac{\partial(g(\mathbf{p}_k))}{\partial \boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{\omega} \\ &= g(\mathbf{p}_k^0) + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k^0} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^0} \cdot d\boldsymbol{\omega} \quad \text{mit } k = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.5)$$

wobei die Hochzahl »⁰« für den Näherungswert der betreffenden Größe steht (Präzisionen folgen später). Wegen (3.2) auf Seite 12 gilt

$$\frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial(\mathbf{t}_r \mathbf{p}_k)}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial(\mathbf{t}_r \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\omega}}. \quad (3.6)$$

$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} = (\nabla g)^\top$ ist der Gradient der Grauwertfunktion g . Die vektorielle Darstellung der Ableitungen in (3.5) ist zwar kompakt, aber nur bedingt klar verständlich. Da Anzahl und Dimensionen der Vektoren beherrschbar klein sind, wechseln wir daher im Folgenden auf die skalare Schreibweise. Diese lautet für (3.5) mit den eingeführten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f(\xi_k, \eta_k) + v_k &= g(x_k^0, y_k^0) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k^0} \left(\sum_{j=1}^J \left. \frac{\partial x_k}{\partial \omega_j} \right|_{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^0} d\omega_j \right) + \\ &+ \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k^0} \left(\sum_{j=1}^J \left. \frac{\partial y_k}{\partial \omega_j} \right|_{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^0} d\omega_j \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für die Auflösung nach den Unbekannten ω_j , $j = 1, \dots, J$, schreiben wir das linearisierte Gleichungssystem (3.7) in die übliche Form der vermittelnden Ausgleichung mit Design-Matrix \mathbf{D} , gekürztem Beobachtungsvektor \mathbf{l} , Verbesserungsvektor \mathbf{v} und Vektor der Unbekanntenzuschläge \mathbf{u} um. Mit den Abkürzungen

$$\begin{pmatrix} g_{x_k}^0 \\ g_{y_k}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k^0} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k^0} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

für die partiellen Ableitungen von g an den Näherungsorten $\mathbf{p}_k^0 = (x_k^0, y_k^0)^\top$, $k = 1, \dots, K$, ist die (K, J) -Design-Matrix D des Basis-Modells allgemein

$$D = \begin{bmatrix} g_{x_1}^0 \frac{\partial x_1}{\partial \omega_1} + g_{y_1}^0 \frac{\partial y_1}{\partial \omega_1} & \dots & g_{x_1}^0 \frac{\partial x_1}{\partial \omega_j} + g_{y_1}^0 \frac{\partial y_1}{\partial \omega_j} & \dots & g_{x_1}^0 \frac{\partial x_1}{\partial \omega_J} + g_{y_1}^0 \frac{\partial y_1}{\partial \omega_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_k}^0 \frac{\partial x_k}{\partial \omega_1} + g_{y_k}^0 \frac{\partial y_k}{\partial \omega_1} & \dots & g_{x_k}^0 \frac{\partial x_k}{\partial \omega_j} + g_{y_k}^0 \frac{\partial y_k}{\partial \omega_j} & \dots & g_{x_k}^0 \frac{\partial x_k}{\partial \omega_J} + g_{y_k}^0 \frac{\partial y_k}{\partial \omega_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_K}^0 \frac{\partial x_K}{\partial \omega_1} + g_{y_K}^0 \frac{\partial y_K}{\partial \omega_1} & \dots & g_{x_K}^0 \frac{\partial x_K}{\partial \omega_j} + g_{y_K}^0 \frac{\partial y_K}{\partial \omega_j} & \dots & g_{x_K}^0 \frac{\partial x_K}{\partial \omega_J} + g_{y_K}^0 \frac{\partial y_K}{\partial \omega_J} \end{bmatrix}_{\omega=\omega^0} \quad (3.9)$$

Mit \mathbf{l} , dem gekürzten Beobachtungsvektor,

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} f(\xi_1, \eta_1) - g(x_1^0, y_1^0) \\ \vdots \\ f(\xi_k, \eta_k) - g(x_k^0, y_k^0) \\ \vdots \\ f(\xi_K, \eta_K) - g(x_K^0, y_K^0) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

und $\mathbf{u} = (d\omega_1, \dots, d\omega_j, \dots, d\omega_J)^\top = d\boldsymbol{\omega}$, dem Vektor der Unbekanntenzuschläge, folgt für (3.7) schließlich die Darstellung

$$\mathbf{v} = D\mathbf{u} - \mathbf{l}. \quad (3.11)$$

Mit $N = D^\top Q_{ll}^{-1} D$ und $\mathbf{n} = D^\top Q_{ll}^{-1} \mathbf{l}$ ist die Lösung von (3.11) nach \mathbf{u} unter der Bedingung $\mathbf{v}^\top Q_{ll}^{-1} \mathbf{v} \rightarrow \min$ dann bekannterweise gegeben durch; bspw. [Niemeier, 2008]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} = N^{-1} \mathbf{n}. \quad (3.12)$$

Hierin reduzieren sich N und \mathbf{n} wegen (3.4) auf $N = D^\top D$ und $\mathbf{n} = D^\top \mathbf{l}$. Im Sinne einer iterativen Lösung werden anschließend mit den aktualisierten Näherungswerten für die Unbekannten $\boldsymbol{\omega}^{0(2)} = \boldsymbol{\omega}^{0(1)} + \mathbf{u}^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^0 + \mathbf{u}^{(1)}$ über (3.2) auf Seite 12 neue Näherungsorte $\mathbf{p}_k^{0(2)}$ ermittelt, die Gleichungen (3.9) und (3.10) neu ausgewertet und mit (3.12) ein neuer Zuschlagsvektor $\mathbf{u}^{(2)}$ berechnet, und so fort. Das Prozedere wird bei jener Iteration I abgebrochen, bei der ein Konvergenzkriterium eintritt (siehe Absatz Konvergenzkriterium auf Seite 19) oder eine vorgegebene Maximalanzahl I_{\max} an Iterationen erreicht wird. Primäres Ergebnis der Rechnung sind die *geschätzten* Transformationsparameter $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}^{0(I+1)}$.

Berechnung des gesuchten Punktes. Gesucht war der zu $\boldsymbol{\varphi} = (\xi, \eta)^\top \in \kappa_f$ korrespondierende Punkt $\mathbf{p} = (x, y)^\top \in \kappa_g$. Die Lösung folgt durch Anwendung von Transformation (3.2) auf Seite 12 mit den geschätzten Parametern $\hat{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{t}(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) + \mathbf{p}_{\text{red}}. \quad (3.13)$$

Weitere Ergebnisse. Als Sekundär-Ergebnisse einer Ausgleichung fallen stochastische Informationen zu Beobachtungen und Unbekannten an. Die Formeln der folgenden Ausführungen können Niemeier [2008] entnommen werden.

In (3.4) auf Seite 14 wurde die Kofaktormatrix Q_{ll} eingeführt. Der Zusammenhang mit der Varianz-Kovarianzmatrix⁴ C_{ll} ist per Definition über den Varianzfaktor σ_0^2 gegeben

⁴Im Englischen als »true variance-covariance matrix« bezeichnet [McGlone, 2004].

und lautet

$$C_{ll} = \sigma_0^2 \cdot Q_{ll}. \quad (3.14)$$

Über den a posteriori Schätzwert $\hat{\sigma}_0$ für σ_0 ,

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^\top Q_{ll}^{-1} \hat{\mathbf{v}}}{K - J}}, \quad (3.15)$$

kann über (3.14) daher die geschätzte **Varianz-Kovarianzmatrix** \hat{C}_{ll} der Beobachtungen $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ angegeben werden:

$$\hat{C}_{ll} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{ll}. \quad (3.16)$$

Da im Basis-Modell nach (3.4) $Q_{ll} = E_K$ angenommen wird, gibt $\hat{\sigma}_0$ die gesamte, geschätzte Stochastik der Beobachtungen wieder. $\hat{\sigma}_0$ misst somit das Rauschen der Grauwerte f von Referenzbild Ψ_f . Es handelt sich um eine innere Genauigkeit (*precision*). Genau genommen quantisiert $\hat{\sigma}_0$ das Rauschen der Grauwertdifferenzen $f - g$, da auch die Grauwerte g von Suchbild Ψ_g stochastische Größen sind und nur für die Modellbildung auf die Parameterseite des funktionalen Modells (3.3) gestellt werden [Grün, 1985; McGlone, 2004].

Weiters kann eine Schätzung \hat{C}_{uu} für die Varianz-Kovarianzmatrix der Unbekannten über die Beziehung

$$\hat{C}_{uu} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} \quad (3.17)$$

angegeben werden. Diese inneren Genauigkeiten sind bei LSM sehr optimistisch wie bspw. Luhmann [2003, Seite 370] ausführt. Typische Werte für die Genauigkeit der Verschiebungsparameter von \mathbf{t} liegen im Bereich weniger Hundertstel Pixel. Geschätzte Bildmessgenauigkeiten aus Aerotriangulationen von Bild-Blöcken zeigen, dass bei Bildern heutiger Luftbildkameras Werte um 0.1 Pixel realistisch sind. Als Ursache für die optimistischen Werte können die mit $Q_{ll} = E_K$ nicht berücksichtigten Korrelationen zwischen den Beobachtungen $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ vermutet werden.

Eine weitere Möglichkeit die Qualität eines LSM-Resultates zu überprüfen, bieten die **Grauwert-Differenzen**

$$d(\boldsymbol{\varphi}_k) = f(\boldsymbol{\varphi}_k) - g(\hat{\mathbf{p}}_k) \quad \text{mit } k = 1, \dots, K. \quad (3.18)$$

Die Grauwerte $g(\hat{\mathbf{p}}_k)$, $k = 1, \dots, K$, werden hierbei als lokales *Resampling* des Suchbildes Ψ_g in den Koordinatenrahmen κ_f von Referenzbild Ψ_f interpretiert [Kraus, 2004]. Übliche Bewertungsmethoden für die Grauwert-Differenzen sind die Analyse einer Statistik (Mittelwert, Standardabweichung, Median, usw.) und die Wiedergabe als Bild in Kodierung mit einer geeigneten Farbpalette (Figur 4.1 auf Seite 43 zeigt ein Beispiel). Speziell geeignet ist das farbkodierte Differenzenbild für die Analyse lokaler systematischer Grauwert-Unterschiede zwischen Referenz- und Suchfenster.

Anmerkungen zum Lösungsweg. Der gezeigte Lösungsweg verlangt in einigen Punkten noch nach einer Präzisierung. Diese wird in den folgenden Absätzen gegeben.

— **Initialisierung (Näherungswerte).** Für die Initialisierung der Ausgleichung werden Näherungswerte ω^0 für die Transformationsparameter verlangt und ein initiales Suchfenster, ausgedrückt durch die Näherungsorte \mathbf{p}_k^0 , $k = 1, \dots, K$.

Das initiale Suchfenster definieren wir in pragmatischer Weise in identischer Form und Größe wie das Referenzfenster um einen ausreichend guten (festen) Näherungsort \mathbf{p}^0 für den gesuchten Punkt \mathbf{p} . In ω^0 sind damit jene Werte einzusetzen, die die bekannten ${}_r\varphi_k$ auf die selben Koordinaten abbilden (Identabbildung). Wie wir in Abschnitt 3.2 sehen werden, bedeutet das bei den konkreten Parametrisierungen von \mathbf{t} den Zahlenwert $\omega^0 = \mathbf{0}$. Referenz- und Suchbilder, die im Bereich von Referenzpunkt φ und Näherungsort \mathbf{p}^0 stark von dieser Annahme abweichen, können damit eventuell nicht bearbeitet werden. Kraus [1996, Seite 396] gibt bspw. für den Rotationsparameter etwa 30° und für den Skalierungsparameter etwa 0.25 als maximal bewältigbare Zuschläge an. Bei größeren Abweichungen müssen bessere Strategien zur Initialisierung der Suchfenster verwendet werden.

Den Näherungsort \mathbf{p}^0 setzen wir als bekannt voraus; dieser kann bspw. aus einer unabhängigen automatischen Messung stammen oder durch manuelle Messung bestimmt worden sein und hat im Allgemeinen unrunde Koordinaten. Ob das initiale Suchfenster direkt in \mathbf{p}^0 oder in $[\mathbf{p}^0]$ zentriert wird, d. h. $\mathbf{p}_m^0 = \mathbf{p}^0$ oder $\mathbf{p}_m^0 = [\mathbf{p}^0]$, ist für die Lösbarkeit unerheblich. Aus Konsistenzgründen mit der Definition des Referenzfensters wählen wir die zweite Variante⁵ (vgl. Figur 3.1 links auf Seite 12). \mathbf{p}_m^0 dient gleichzeitig als Reduktionspunkt \mathbf{p}_{red} .

Wir fassen zusammen:

- Referenzfenster und initiales Suchfenster sind identisch geformt und skaliert.
- Die Fenster sind in den Reduktionspunkten $\mathbf{p}_{\text{red}} = \mathbf{p}_m^0$ bzw. $\varphi_{\text{red}} = \varphi_m$ zentriert.
- Die Fensterpunkte \mathbf{p}_k^0 bzw. φ_k , $k = 1, \dots, K$, sind (standardmäßig) ganzzahlig, d. h. in Pixelmitten liegend. Die Entnahme der Grauwerte aus f , g und ∇g für die Initialisierung von D und \mathbf{l} , siehe (3.9) resp. (3.10) auf Seite 15, erfordert daher keine Interpolation. Für die reduzierten Punkte gilt: ${}_r\varphi_k = {}_r\mathbf{p}_k^0$, $\forall k = 1, \dots, K$.
- Das Referenzfenster ist fest durch die Iterationen, d. h. $\varphi_k = \text{konst} \forall k = 1, \dots, K$ und $\forall i = 1, \dots, I$; das Suchfenster ändert sich mit (3.2) auf Seite 12 von Iteration zu Iteration gemäß $\mathbf{p}_k^{0(i)} = \mathbf{t}({}_r\varphi_k, \omega^{0(i)}) + \mathbf{p}_{\text{red}}$.
- Die Wahl $\varphi_m = [\varphi]$ bedeutet, dass \mathbf{p} auf Basis eines zu φ exzentrischen Fensters bestimmt wird. Erfasst \mathbf{t} den perspektivischen Unterschied nicht korrekt, liegt in $\hat{\mathbf{p}}$ ein (wenn auch kleiner) Positionsfehler vor.

— **Gradient.** Für das Aufstellen der Design-Matrix D werden die partiellen Ableitungen g_x und g_y der Grauwertfunktion $g(x, y)$ von Suchbild Ψ_g benötigt. Nachdem g gemäß (2.2) auf Seite 10 eine diskrete Funktion ist, sind diskrete Ableitungen zu bilden.

⁵In der Implementierung stellen wir beide Möglichkeiten zur Verfügung. Nähere Angaben hierzu folgen in Tabelle 4.2 ab Seite 41.

Diese lassen sich nach [Gonzalez et al. \[2009\]](#) recheneffizient als diskrete Korrelation der Grauwertfunktion g mit den Ableitungskernen H_x resp. H_y berechnen. Geeignete Ableitungskerne gibt es viele; einzige Forderung ist, dass ein Differenzenquotient formuliert ist. Untersuchungen von [Baltsavias \[1991\]](#) zufolge sind für LSM die einfachen Kerne der »ersten Zentral-Differenzen« ausreichend. Diese sind nach [Jansa und Dorigo \[2008\]](#) unter Berücksichtigung der Achsdefinition des gewählten Bildkoordinatensystems (siehe Seite 8 in Abschnitt 2.2) festgelegt durch

$$H_x = 0.5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$H_y = 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

— **Grauwert-Interpolation in den Iterationen.** Ab der zweiten Iteration haben die Suchfensterpunkte $\mathbf{p}_k^{0(i)}$, $k = 1, \dots, K$ und $i \geq 2$, im Allgemeinen unrunde Koordinaten, liegen also nicht in Pixelmitten. Die Relinearisierung, d. h. die Neuaufstellung von D und \mathbf{l} mit den aktuellen Näherungswerten, verlangt daher nach einer Interpolation in g , g_x und g_y an den Stellen $\mathbf{p}_k^{0(i)}$. [Ackermann \[1984\]](#) gibt nach Tests mit mehreren Interpolationsmethoden an, dass für LSM die Verwendung der einfachen bilinearen Interpolation ausreichend ist. Die Berechnungsvorschrift kann bspw. [Kraus \[2004\]](#) entnommen werden.

— **Redundanz.** Die Redundanz des Basis-Modells beträgt $r = K - J \stackrel{!}{\geq} 0$. Im Allgemeinen ist das System stark überbestimmt: Bei einer typischen Fensterlänge von $w = 15$ Pixel liegen $K = 225$ Beobachtungen vor. Die Anzahl J der zu bestimmenden Transformationsparameter beträgt bspw. im Rahmen dieser Arbeit nur 2 bis 6 (Details folgen in Abschnitt 3.2), [Bethmann und Luhmann \[2011\]](#) setzen komplexere Polynomfunktionen mit 12 Parametern ein.

— **Fenstergröße.** Entscheidender als der Blick auf die Bilanz ist für die Lösung die Bestimmbarkeit der Transformationsparameter durch die gegebenen Grauwerte. Dafür ist in Abhängigkeit der zu bestimmenden Parameter (Verschiebung, Skalierung, Scherung, usw.) ausreichende Variabilität in den Grauwert-Ableitungen resp. ausreichende Bild-*Textur* innerhalb der LSM-Fenster notwendig. Über die Wahl einer größeren Fensterlänge w kann darauf positiv Einfluss genommen werden. Hier besteht jedoch das folgende Spannungsfeld: während größere Fenster potentiell mehr Textur bedeuten, führen sie im Allgemeinen zu einer stärkeren Verletzung der geometrischen und radiometrischen Modellannahmen (siehe die späteren Abschnitte 3.2 und 3.4). Die Folge sind fehlerhafte Schätzwerte $\hat{\mathbf{p}}$ für \mathbf{p} . Sinngemäß gilt daher: Die Fenstergröße wählt man so klein wie möglich und so groß wie nötig. Übliche Fenstergrößen bewegen sich im Bereich von 7–31 Pixel. Adaptive Methoden finden eine geeignete Fenstergröße (und -form) in Abhängigkeit der vorliegenden Textur selbst, siehe bspw. [Veksler, 2003](#). Wir wählen in dieser Arbeit einen pragmatischen Zugang und arbeiten in den praktischen Untersuchungen in Kapitel 6 weitgehend mit konstanten Fenstergrößen. Wegen der kontrollierten Bedingungen unter denen wir LSM erproben – an qualifiziert ausgewählten Bildpunkten – ist das ein akzeptierbarer Zustand.

— **Konvergenzkriterium.** Konvergenzkriterien prüfen das Stationärwerden von Größen der Ausgleichung ($\hat{\sigma}_0, \mathbf{u}, \dots$) und erlauben so einen qualifizierten Abbruch der Iterationen. Die Kriterien setzen sich zusammen aus Maßzahl und zu unterschreitender Schranke und sind in jeder Iteration auszuwerten. Wir verzichten für die folgenden Ausführungen aus Übersichtlichkeitsgründen auf eine Indexierung mit der Iterationszahl i .

Wir verwenden in dieser Arbeit testweise zwei Kriterien. Das Konvergenzkriterium nach Kraus [1996, Seite 80] lautet⁶

$$|\bar{\mathbf{l}}^\top \bar{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{v}}^\top \bar{\mathbf{v}}| < \bar{\mathbf{l}}^\top \bar{\mathbf{l}} \cdot \varepsilon_K \quad (3.21)$$

und entspringt der Hypothese $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$. Die Vektoren $\bar{\mathbf{v}}$ und $\bar{\mathbf{l}}$ heißen *homogenisiert*. Deren Komponenten \bar{v}_k bzw. \bar{l}_k sind bei unkorrelierten Beobachtungen definiert als $\bar{v}_k = v_k \sqrt{w_{ll,k}}$ bzw. $\bar{l}_k = l_k \sqrt{w_{ll,k}}$ mit $\mathbf{w}_{ll} = \text{diag}(\mathbf{Q}_{ll}^{-1})$. $\bar{\mathbf{v}}$ und $\bar{\mathbf{l}}$ sind damit notwendigerweise dimensionslos. Für die Schranke ε_K empfiehlt Kraus [1996] einen Wert von $\varepsilon_K = 0.0001$.

Das Konvergenzkriterium nach Förstner [2011, Seite 629] lautet in der Interpretation des Autors

$$\frac{u_m}{\hat{\sigma}_{u_m}} < \varepsilon_F \quad (3.22)$$

mit $u_m = \max(|\mathbf{u}|) = \max(|u_1|, \dots, |u_j|, \dots, |u_J|)$ und $\hat{\sigma}_{u_m}$ der zugeordneten, geschätzten Genauigkeit aus $\hat{\mathbf{C}}_{uu}$ gemäß (3.17) auf Seite 16. Für die Schranke ε_F nennt Förstner [2011] den Wert $\varepsilon_F = 0.1$. Weitere Konvergenzkriterien, jedoch ohne konkrete Schrankenwerte, sind bspw. bei [Mikhail, 1976] zu finden.

3.2. Das geometrische Modell

Die Transformationsfunktion \mathbf{t} wurde im Basis-Modell (3.3) auf Seite 13 lediglich symbolisch eingeführt. In diesem Abschnitt werden die Transformationsfunktionen dieser Arbeit definiert, deren Linearisierung gegeben und die damit folgenden Design-Matrizen aufgestellt.

Annahmen über den Objektraum. Nach (3.2) auf Seite 12 leistet $\mathbf{t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung des Referenzfensters im reduzierten System ${}_{r\kappa_f}$ in das inzidente reduzierte System ${}_{r\kappa_g}$ von Suchbild Ψ_g . \mathbf{t} dient so zur Modellierung der perspektivischen Unterschiede zwischen Referenz- und Suchbild innerhalb des Bereiches der durch die LSM-Fenster abgedeckt wird. Sind die Unterschiede zu groß – treten bspw. Abschattungen in einem der beiden LSM-Fenster auf – kann auch eine komplexe 2-dimensionale Transformation die Beziehung nicht mehr in aller Strenge beschreiben⁷. Es werden daher Modellannahmen über den Objektraum getroffen und damit \mathbf{t} auf einfach bewältigbare Transformationsvorschriften eingeschränkt. Wie in der Einleitung auf Seite 4 angerissen, beschränken wir uns hier auf ausgewählte lineare Transformationen bis zur Affintransformation (6 Parameter). Damit verbunden ist die geometrische Modellvorstellung, dass das abgebildete

⁶Der Absolutbetrag $|\cdot|$ ist als Korrektur zur publizierten Formel eingefügt und fängt eventuelle numerische Probleme auf.

⁷Wie Grün [1985] konzeptionell ausführt, wäre die Perspektivtransformation zu verwenden. Diese benötigt jedoch Informationen über Objektraum und Orientierung der Bilder. Eine Behandlung dieser Abbildung ist außerhalb des Fokus dieser Arbeit.

Objekt innerhalb der LSM-Fenster eben ist und die zugehörigen Bildstrahlen parallel sind⁸. Abweichungen von dieser Annahme führen nach [McGlone \[2004\]](#) entweder zum Scheitern der Zuordnung (Divergenz der Ausgleichung) oder zu einem Fehler im Schätzwert $\hat{\mathbf{p}}$ für die gesuchte Position \mathbf{p} .

Das Ausmaß der Modellfehler ist abhängig von der Bewegtheit der Objektoberfläche, dem Bildmaßstab der verwendeten Bilder und der Fenstergröße w . Die angenommene Parallelität der Bildstrahlen hat für Luftbilder wegen des kleinen Bildmaßstabes sehr wahrscheinlich keine nennenswerte negative Auswirkung: Untersuchungen von [Bethmann und Luhmann \[2011\]](#) zeigten, dass die Projektivtransformation (die allgemeinste lineare Transformation, 8 Parameter, konvergente Bildstrahlen) bereits bei großmaßstäbigen Nahbereichsaufnahmen und einer eher großen Fensterlänge von $w = 25$ Pixel zu keinen substantiell höheren Rekonstruktionsgenauigkeiten führt als die Affintransformation. Problematischer ist die Annahme ebener Objekte, da Objektoberflächen mit Höhen sprungen oft vorkommen, bspw. im städtischen Gebiet, an Dachrändern und in Vegetation; zumal die Fenstergröße wegen der zu bestimmenden Transformationsparameter nicht beliebig klein gewählt werden kann (siehe Absatz Fenstergröße auf Seite 18). Hier stößt LSM als lokales Verfahren an seine Modellgrenzen. Wie wir im Rahmen der Experimente in Kapitel 6 sehen werden, kann die Einführung geometrischer Bedingungen die Zuordnungsqualität in solchen Fällen immerhin verbessern.

Transformationsfunktionen und Parametrisierung. In dieser Arbeit werden die folgenden **linearen** Transformationen untersucht:

1. Verschiebung oder *Shift* S , 2 Parameter.
2. Ähnlichkeits- oder Helmert-Transformation H , 4 Parameter.
3. Affintransformation A , 6 Parameter.

Die zugeordneten, linearen Transformationsfunktionen benennen wir in obiger Reihenfolge mit \mathbf{t}_S , \mathbf{t}_H und \mathbf{t}_A . Jede dieser Transformationen ist mit bestimmten Modellvorstellungen verbunden. Tabelle 3.1 listet diese, formuliert für Luftbild-Paare, auf.

Für die mathematische Definition der Transformationen verwenden wir homogene Koordinaten resp. Vektoren (siehe Fußnote 5 auf Seite 5). Wie bspw. [[Hartley und Zisserman, 2004](#)] zu entnehmen, lassen sich lineare Abbildungen $\mathbf{t}_{\text{lin}} : \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ bei Verwendung homogener Vektoren $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^n$ sehr kompakt als Matrix-Vektor-Multiplikation formulieren. In unserem Fall ($n = 2$) mit ${}_r\boldsymbol{\varphi}_k = ({}_r\xi_k, {}_r\eta_k, 1)^\top$ den homogenen, reduzierten Fensterpunkten im Referenzbild Ψ_f , ${}_r\mathbf{p}_k = (q \cdot {}_rx_k, q \cdot {}_ry_k, q)^\top$ jenen im Suchbild Ψ_g und A einer homogenen $(3, 3)$ -Matrix, lautet die (homogene) Vorschrift allgemein:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\text{lin}} : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ {}_r\boldsymbol{\varphi}_k &\rightarrow {}_r\mathbf{p}_k \sim A \cdot {}_r\boldsymbol{\varphi}_k \quad \text{mit } k = 1, \dots, K. \end{aligned} \tag{3.23}$$

⁸Etwas detaillierter formuliert: die Annahme einer ebenen Objektoberfläche und paralleler Bildstrahlen bedeutet, dass das Objekt und dessen Bild in einer *Affinität* zugeordnet sind. Eine solche Affinität ist durch eine zweidimensionale Affintransformation A beschreibbar [[Manhart, 2004](#)]. Nachdem die Verkettung zweier A im Allgemeinen wieder eine A ergibt, ist auch die Transformationsfunktion \mathbf{t} zwischen Referenz- und Suchbild im Allgemeinen eine A .

Tab. 3.1. Geometrische Annahmen bei den Transformationsfunktionen t_S , t_H und t_A für den Fall eines Luftbild-Paares. Als Normalfall wird nach Kraus [2004] verstanden: Aufnahmerichtungen senkrecht zum Basisvektor $P_{0,2} - P_{0,1}$ und in einer Ebene.

Fkt.	Geometrische Annahme
t_S	Normalfall mit parallelen Bildachsen, ebene Objektoberfläche parallel zu Bildebenen
t_H	»Normalfall« (unterschiedliche Flughöhen erlaubt), ebene Objektoberfläche parallel zu Bildebenen
t_A	beliebige Bildstellungen, ebene Objektoberfläche

Das Proportionalzeichen \approx drückt aus, dass das Ergebnis nur bis auf einen Skalierungsfaktor q bestimmt ist. Wir gehen im Weiteren davon aus, dass A (und ${}_r\boldsymbol{\varphi}_k$) nicht global skaliert wird. Bei Abbildungen bis zur 2D-Affintransformation ist die letzte Zeile von A dann der Einheitsvektor $\mathbf{e}_3^\top = (0, 0, 1)$. Damit folgt $q = 1$ und das Proportionalzeichen \approx in (3.23) kann durch das Gleichheitszeichen $=$ ersetzt werden. Die euklidische Repräsentation ${}_r\mathbf{p}_k = ({}_rx_k, {}ry_k)^\top$ von ${}_r\mathbf{p}_k = ({}_rx_k, {}ry_k, 1)^\top$ folgt dann einfach durch Weglassen der homogenen Erweiterung $\gg 1$. Die Umkehrabbildung \mathbf{t}_{1in}^\top ist gegeben durch

$$\mathbf{t}_{1in}^\top : {}_r\mathbf{p}_k \rightarrow {}_r\boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{A}^{-1} \cdot {}_r\mathbf{p}_k \quad \text{mit } k \text{ wie in (3.23)}. \quad (3.24)$$

Die Matrizen für die konkreten Transformationsfunktionen t_S , t_H und t_A parametrisieren wir so, dass die einzelnen Parameter Zuschläge zur Identabbildung sind, vermittelt durch die Einheitsmatrix E_3 . Tabelle 3.2 listet die zugehörigen Transformationsmatrizen A_S , A_H und A_A auf.

Tab. 3.2. Homogene Matrizen A_S , A_H und A_A der (homogenen) Transformationsfunktionen t_S , t_H und t_A adaptiert nach Hartley und Zisserman [2004]. Die Funktion t_H wurde durch folgende Substitutionen linearisiert: $m \cdot \cos \epsilon = 1 + a_{mc}$ und $m \cdot \sin \epsilon = a_{ms}$.

A_S	A_H	A_A
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + a_{mc} & -a_{ms} & a_{13} \\ a_{ms} & 1 + a_{mc} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 + a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Die Parametervektoren $\boldsymbol{\omega}_G$ mit $G \in \{S, H, A\}$ sind somit (wir stellen die Verschiebungen aus Konsistenzgründen mit Transformation S an den Beginn eines jeden Vektors):

$$\boldsymbol{\omega}_S = (a_{13}, a_{23})^\top, \quad (3.25)$$

$$\boldsymbol{\omega}_H = (a_{13}, a_{23}, a_{mc}, a_{ms})^\top, \text{ und} \quad (3.26)$$

$$\boldsymbol{\omega}_A = (a_{13}, a_{23}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^\top. \quad (3.27)$$

Linearisierung und Design-Matrizen. Für das Aufstellen der Design-Matrix D des Basis-Modells werden die partiellen Ableitungen der gewählten Transformationsfunktion t nach deren Parametern ω benötigt, d. h. $\frac{\partial(\mathbf{r}p_k)}{\partial\omega} = \frac{\partial t}{\partial\omega}$ bzw. in Komponentenschreibweise $\frac{\partial(\mathbf{r}x_k)}{\partial\omega_j}$ und $\frac{\partial(\mathbf{r}y_k)}{\partial\omega_j}$, $\forall k = 1, \dots, K$ und $\forall j = 1, \dots, J$, mit ω_j dem j -ten Element von ω (siehe (3.9) auf Seite 15 unter Berücksichtigung von (3.6) auf Seite 14). Diese Ableitungen zu den drei Transformationen S, H und A dieser Arbeit sind in Tabelle 3.3 im Überblick aufgelistet.

Tab. 3.3. Komponentenweise partielle Ableitungen der Transformationsfunktionen t_S , t_H und t_A nach ihren Parametern ω_S , ω_H und ω_A . Ableitungen, die für eine der Funktionen nicht existieren, sind durch leere Felder gekennzeichnet.

	Transformation		
	S	H	A
$\frac{\partial(\mathbf{r}x_k)}{\partial a_{13}}$	1	1	1
$\frac{\partial(\mathbf{r}y_k)}{\partial a_{23}}$	1	1	1
$\frac{\partial(\mathbf{r}x_k)}{\partial a_{mc}}$		$r\xi_k$	
$\frac{\partial(\mathbf{r}x_k)}{\partial a_{ms}}$		$-r\eta_k$	
$\frac{\partial(\mathbf{r}y_k)}{\partial a_{mc}}$		$r\eta_k$	
$\frac{\partial(\mathbf{r}y_k)}{\partial a_{ms}}$		$r\xi_k$	
$\frac{\partial(\mathbf{r}x_k)}{\partial a_{11}}$			$r\xi_k$
$\frac{\partial(\mathbf{r}x_k)}{\partial a_{12}}$			$r\eta_k$
$\frac{\partial(\mathbf{r}y_k)}{\partial a_{21}}$			$r\xi_k$
$\frac{\partial(\mathbf{r}y_k)}{\partial a_{22}}$			$r\eta_k$

Die entsprechenden Design-Matrizen D_G , $G \in \{S, H, A\}$, ergeben sich dann durch Einsetzen der jeweiligen Ableitungen in Gleichung (3.9) auf Seite 15. Nachdem die K Beobachtungen des Basis-Modells dem gleichen funktionalen Modell gehorchen, können wir uns auf die Angabe der k -ten Zeilen $\tilde{\mathbf{d}}_{k,G}^\top$ beschränken. Diese lauten mit den Bezeichnungen von Abschnitt 3.1: (von links nach rechts geordnet nach den Elementen des jeweiligen Parametervektors ω_G)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{d}}_{k,S}^\top &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial a_{13}} & \frac{\partial g}{\partial a_{23}} \\ g_{x_k}^0 & g_{y_k}^0 \end{pmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{k,H}^\top &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial a_{13}} & \frac{\partial g}{\partial a_{23}} & \frac{\partial g}{\partial a_{mc}} & \frac{\partial g}{\partial a_{ms}} \\ g_{x_k}^0 & g_{y_k}^0 & g_{x_k}^0 r\xi_k + g_{y_k}^0 r\eta_k & -g_{x_k}^0 r\eta_k + g_{y_k}^0 r\xi_k \end{pmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{k,A}^\top &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial a_{13}} & \frac{\partial g}{\partial a_{23}} & \frac{\partial g}{\partial a_{11}} & \frac{\partial g}{\partial a_{12}} & \frac{\partial g}{\partial a_{21}} & \frac{\partial g}{\partial a_{22}} \\ g_{x_k}^0 & g_{y_k}^0 & g_{x_k}^0 r\xi_k & g_{x_k}^0 r\eta_k & g_{y_k}^0 r\xi_k & g_{y_k}^0 r\eta_k \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Wie in (3.28) ersichtlich, sind wegen der Linearität der gewählten Transformationen für das Aufstellen der Design-Matrizen keine Näherungswerte für die jeweiligen Transformationsparameter $\omega_{\mathbf{G}}$ notwendig. Da das funktionale Modell jedoch nicht linear ist und iterativ gelöst wird, sind auch für die Transformationsparameter Näherungswerte zu definieren. Wie im Absatz **Initialisierung** auf Seite 17 beschrieben, wählen wir pragmatischerweise jene Werte, die zur Identabbildung führen ($\mathbf{A}_{\mathbf{S}} = \mathbf{A}_{\mathbf{H}} = \mathbf{A}_{\mathbf{A}} = \mathbf{E}_3$). Mit den gewählten Parametrisierungen (Tabelle 3.2 auf Seite 21) bedeutet das:

$$\omega_{\mathbf{S}}^0 = \mathbf{0}_2, \quad \omega_{\mathbf{H}}^0 = \mathbf{0}_4, \quad \omega_{\mathbf{A}}^0 = \mathbf{0}_6. \quad (3.29)$$

3.3. Das Alternativ-Modell

Kraus [2004] gibt eine interessante Alternative zum Basis-Modell an. Im funktionalen Modell (3.3) auf Seite 13 tauschen die Grauwertfunktionen g von Suchbild Ψ_g und f von Referenzbild Ψ_f die Plätze: die Grauwerte $g(\mathbf{p}_k)$ des Suchfensters, $k = 1, \dots, K$, stehen nun auf der Beobachtungsseite des Gleichungssystems, die Grauwerte $f(\varphi_k)$ des Referenzfensters auf der Parameterseite. Gesucht ist nach wie vor der zu $\varphi = (\xi, \eta)^\top \in \kappa_f$ korrespondierende Punkt $\mathbf{p} = (x, y)^\top \in \kappa_g$. Dieses alternative funktionale Modell ist in entsprechender Adaption von (3.3) damit

$$g(\mathbf{p}_k) + v_k = f\left(\mathbf{s}(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{\text{red}}, \mathbf{w}) + \varphi_{\text{red}}\right) \quad \text{mit } k = 1, \dots, K. \quad (3.30)$$

Darin bedeuten $\mathbf{p}_{\text{red}} \in \kappa_g$ und $\varphi_{\text{red}} \in \kappa_f$ die bereits bekannten Reduktionspunkte (vgl. Figur 3.2 auf Seite 13). Die geometrische Transformationsfunktion \mathbf{s} mit Parametervektor \mathbf{w} bildet gegensinnig zum bisherigen Modell die reduzierten Fensterpunkte ${}_r\mathbf{p}_k = (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{\text{red}}) \in {}_r\kappa_g$ in die reduzierten Fensterpunkte ${}_r\varphi_k = \mathbf{s}({}_r\mathbf{p}_k, \mathbf{w}) \in {}_r\kappa_f$ ab. Mit der Beschränkung auf lineare Transformationsfunktionen \mathbf{s}_{lin} lautet die Vorschrift, analog zu Gleichung (3.23) auf Seite 20 und den dortigen Anmerkungen, in homogener Schreibweise

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\text{lin}} : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ {}_r\mathbf{p}_k &\rightarrow {}_r\varphi_k = \mathbf{B} \cdot {}_r\mathbf{p}_k \quad \text{mit } k = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.31)$$

mit der homogenen (3,3)-Transformationsmatrix \mathbf{B} . Die Matrizen für die konkret ausgewählten Transformationen \mathbf{S} , \mathbf{H} und \mathbf{A} werden analog zu den Definitionen in Tabelle 3.2 auf Seite 21 verwendet. Wir bezeichnen die Transformationsmatrizen im Alternativ-Modell mit $\mathbf{B}_{\mathbf{S}}$ (für Transformationsfunktion $\mathbf{s}_{\mathbf{S}}$), $\mathbf{B}_{\mathbf{H}}$ (für $\mathbf{s}_{\mathbf{H}}$) und $\mathbf{B}_{\mathbf{A}}$ (für $\mathbf{s}_{\mathbf{A}}$). Die Parametervektoren sind entsprechend (3.25) auf Seite 21 dann

$$\mathbf{w}_{\mathbf{S}} = (b_{13}, b_{23})^\top, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{w}_{\mathbf{H}} = (b_{13}, b_{23}, b_{mc}, b_{ms})^\top, \text{ und} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{w}_{\mathbf{A}} = (b_{13}, b_{23}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})^\top, \quad (3.34)$$

mit den Näherungswerten gemäß (3.29)

$$\mathbf{w}_{\mathbf{S}}^0 = \mathbf{0}_2, \quad \mathbf{w}_{\mathbf{H}}^0 = \mathbf{0}_4, \quad \mathbf{w}_{\mathbf{A}}^0 = \mathbf{0}_6. \quad (3.35)$$

Linearisierung. Die Linearisierung von (3.30) geschieht analog zu den Ausführungen auf den Seiten 14–15 zum Basis-Modell. Wir verzichten hier auf eine detaillierte Ableitung und geben direkt die Resultate für die Design-Matrizen $D_{\mathbf{G}}^*$, $\mathbf{G} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{A}\}$, und die gekürzten Beobachtungsvektoren $\mathbf{l}_{\mathbf{G}}^*$ an, mit »*« der Bezeichnung für das Alternativ-Modell. Die k -ten Zeilen $\tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{G}}^{*\top}$ der Design-Matrizen lauten: (von links nach rechts geordnet nach den Elementen des jeweiligen Parametervektors $\mathbf{w}_{\mathbf{G}}$ und $k = 1, \dots, K$)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{S}}^{*\top} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial b_{13}} & \frac{\partial f}{\partial b_{23}} \\ f_{\xi_k} & f_{\eta_k} \end{pmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{H}}^{*\top} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial b_{13}} & \frac{\partial f}{\partial b_{23}} & \frac{\partial f}{\partial b_{mc}} & \frac{\partial f}{\partial b_{ms}} \\ f_{\xi_k} & f_{\eta_k} & f_{\xi_k} r x_k^0 + f_{\eta_k} r y_k^0 & -f_{\xi_k} r y_k^0 + f_{\eta_k} r x_k^0 \end{pmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{A}}^{*\top} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial b_{13}} & \frac{\partial f}{\partial b_{23}} & \frac{\partial f}{\partial b_{11}} & \frac{\partial f}{\partial b_{12}} & \frac{\partial f}{\partial b_{21}} & \frac{\partial f}{\partial b_{22}} \\ f_{\xi_k} & f_{\eta_k} & f_{\xi_k} r x_k^0 & f_{\xi_k} r y_k^0 & f_{\eta_k} r x_k^0 & f_{\eta_k} r y_k^0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Darin bezeichnen entsprechend Gleichung (3.8) auf Seite 14

$$\begin{pmatrix} f_{\xi_k} \\ f_{\eta_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \Big|_{\varphi=\varphi_k} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_{\varphi=\varphi_k} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

die partiellen Ableitungen der Grauwertfunktion f von Referenzbild Ψ_f an den Fensterpunkten $\varphi_k = (\xi_k, \eta_k)^\top \in \kappa_f$, und $(r x_k^0, r y_k^0)^\top = r \mathbf{p}_k^0 \in r \kappa_g$ die reduzierten Fensterpunkte des genäherten Suchfensters. Für das k -te Element $\mathbf{l}_{k,\mathbf{G}}^*$ des gekürzten Beobachtungsvektors $\mathbf{l}_{\mathbf{G}}^*$ gilt (symbolisch unabhängig von der gewählten Transformation)

$$\mathbf{l}_{k,\mathbf{G}}^* = g(\mathbf{p}_k^0) - f(\varphi_k). \tag{3.38}$$

Bei der ersten Iteration gilt speziell $\mathbf{l}_{k,\mathbf{G}}^* = -\mathbf{l}_{k,\mathbf{G}}$; vgl. mit (3.10) auf Seite 15.

Ablauf der Ausgleichung und Vergleich mit Basis-Modell. Für den folgenden Textteil werden die Größen der geometrischen Transformation mit den indexlosen Bezeichnungen \mathbf{s} , \mathbf{w} und \mathbf{B} geführt und angenommen, dass eine der oben definierten Transformationen gewählt wurde.

Die Lösung nach den unbekanntem Transformationsparametern \mathbf{w} erfolgt weitgehend analog zu den Vorschriften des Basis-Modells. Speziell stochastisches Modell, Formeln für die iterative Lösung, sowie Initialisierung und Redundanz der Ausgleichung sind identisch zum Basis-Modell und können Abschnitt 3.1 ab Seite 14 entnommen werden. Die stochastische Information a posteriori ist analog zu den Angaben auf Seite 15 zu berechnen. Wir gehen im Folgenden auf die Unterschiede zum Basis-Modell ein. Tabelle 3.4 hält diese in kompakter Form bereit.

Tab. 3.4. Übersicht über die Unterschiede zwischen Basis- und Alternativ-Modell. Vgl. die Design-Matrizen (3.28) auf Seite 22 und (3.36) und die gekürzten Beobachtungsvektoren (3.10) auf Seite 15 und (3.38).

	Basis-Modell	Alternativ-Modell
Beobachtungen	$f(\boldsymbol{\varphi}_k)$, fest	$g(\boldsymbol{p}_k^0)$, veränderlich
Unbekannte	Parameter $\boldsymbol{\omega}$ von \boldsymbol{t}	Parameter \boldsymbol{w} von \boldsymbol{s}
partielle Ableitungen	g_x, g_y	f_ξ, f_η
Interpolation in	g, g_x, g_y (=3)	g (=1)
Aufbau Design-Matrix	$r\xi_k, r\eta_k$ (fest) und $g_{x_k}^0, g_{y_k}^0$ (veränderlich)	rx_k^0, ry_k^0 (veränderlich) und f_{ξ_k}, f_{η_k} (fest)
Schätzwert $\hat{\boldsymbol{p}}$ für \boldsymbol{p}	$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{p}_{\text{red}}$	$\boldsymbol{s}^\top(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}, \hat{\boldsymbol{w}}) + \boldsymbol{p}_{\text{red}}$

— **Gradient und Grauwert-Interpolation.** Beim Basis-Modell gehen in die Design-Matrix die partiellen Ableitungen g_x und g_y der Grauwertfunktion $g(x, y)$ von Suchbild Ψ_g ein, im Alternativ-Modell hingegen die Ableitungen f_ξ und f_η der Grauwertfunktion $f(\xi, \eta)$ von Referenzbild Ψ_f . Die Berechnung erfolgt analog, siehe Absatz Gradient auf Seite 17.

Nachdem das Referenzfenster durch die Iterationen $i = 1, \dots, I$ fest ist, sind die partiellen Ableitungen f_{ξ_k} und f_{η_k} konstant. Für die Relinearisierung sind daher keine Interpolationen in f_ξ und f_η nötig. Es verbleibt nur die Interpolation in g an den aktuellen Suchfensterpunkten $\boldsymbol{p}_k^{0(i)}$, $i \geq 2$, für die Relinearisierung von \boldsymbol{l}^* . Die $\boldsymbol{p}_k^{0(i)}$ werden mittels der inversen Transformation \boldsymbol{s}^\top berechnet über

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_k^{0(i)} &= \boldsymbol{s}^\top(r\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{w}^{0(i)}) + \boldsymbol{p}_{\text{red}} \\ &= r\boldsymbol{p}_k^{0(i)} + \boldsymbol{p}_{\text{red}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Unter Berücksichtigung von (3.31) auf Seite 23 und (3.24) auf Seite 21 (Umkehrabbildung) folgt für die reduzierten Fensterpunkte $r\boldsymbol{p}_k^{0(i)}$ in homogener Schreibweise explizit

$$r\boldsymbol{p}_k^{0(i)} = \mathbf{B}^{-1} \cdot r\boldsymbol{\varphi}_k, \quad (3.40)$$

wobei \mathbf{B} mit dem aktuellen Näherungswert $\boldsymbol{w}^{0(i)}$ des Parametervektors gebildet wird.

Der einen Interpolation pro Iteration beim Alternativ-Modell (in g), stehen beim Basis-Modell drei Interpolationen gegenüber (in g, g_x und g_y , siehe Absatz Grauwert-Interpolation auf Seite 18). Demnach sind mit dem Alternativ-Modell – zumindest augenscheinlich – Rechenzeitvorteile zu erwarten⁹. Zusätzlich ist jede Interpolation mit einer mehr oder weniger starken Glättung des Signalinhaltes verbunden. Da beim Basis-Modell auch in den Ableitungen interpoliert wird und das Minimum von $\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{v}$ mit »geglätteten« Ableitungen potentiell langsamer erreicht wird, könnte das Basis-Modell mehr Iterationen bis zur Konvergenz brauchen als das Alternativ-Modell. Diesen Punkten wird im Rahmen der praktischen Untersuchungen in Kapitel 6 nachgegangen.

⁹Speziell im hier nicht behandelten Simultan-LSM mit mehreren Suchbildern, denn Referenzfenster gibt es stets nur eines.

— **Dynamische Beobachtungen.** Beim Alternativ-Modell steht die Grauwertfunktion g von Suchbild Ψ_g auf der Beobachtungsseite des funktionalen Modells. Nachdem in g an den Stellen $\mathbf{p}_k^{0(i)}$ interpoliert wird, ändern sich die Beobachtungen von Iteration zu Iteration.

— **Aufbau der Design-Matrix.** Die Design-Matrix D_G^* im Alternativ-Modell, $G \in \{\mathbf{H}, \mathbf{A}\}$, besteht aus den festen Ableitungen f_{ξ_k}, f_{η_k} und den veränderlichen Koordinaten ${}_r x_k^0, {}_r y_k^0$ der reduzierten Fensterpunkte ${}_r \mathbf{p}_k^0$ des Suchfensters; D_G^* ist konstant, denn es gehen nur f_{ξ_k} und f_{η_k} ein, vgl. (3.36) auf Seite 24. Die Design-Matrix D_G im Basis-Modell, $G \in \{\mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{A}\}$, besteht hingegen aus den veränderlichen Ableitungen $g_{x_k}^0, g_{y_k}^0$ und den festen Koordinaten ${}_r \xi_k, {}_r \eta_k$ der reduzierten Fensterpunkte ${}_r \boldsymbol{\varphi}_k$ des Referenzfensters und ändert sich bei allen Transformationen von Iteration zu Iteration, vgl. (3.28) auf Seite 22.

— **Verwehrte Einsatzgebiete.** Das Alternativ-Modell ist in der Erweiterung auf dreidimensionales LSM (siehe Anwendungen auf Seite 2) nicht geeignet für die Einpassung eines digitalen Höhenmodells als »Suchmodell« auf ein festes Punktfeld als »Referenzmodell« wegen der benötigten Ableitungen im Referenzmodell. Der umgekehrte Fall ist möglich.

Berechnung des gesuchten Punktes. Gesucht ist wie beim Basis-Modell der zu $\boldsymbol{\varphi} = (\xi, \eta)^\top \in \kappa_f$ korrespondierende Punkt $\mathbf{p} = (x, y)^\top \in \kappa_g$. Die Lösung folgt durch Anwendung der inversen Transformation \mathbf{s}^\top mit den geschätzten Parametern $\hat{\mathbf{w}}$:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{s}^\top(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}, \hat{\mathbf{w}}) + \mathbf{p}_{\text{red}}. \quad (3.41)$$

Die inverse Abbildung erfolgt entsprechend Gleichung (3.40).

3.4. Erweiterung um eine radiometrische Anpassung

Bisher wurde unterstellt, dass sich die Grauwerte $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ und $g(\mathbf{p}_k)$, $k = 1, \dots, K$, von Referenz- und Suchfenster nur um zufällige Messfehler unterscheiden. Systematische Grauwert-Unterschiede sind in den funktionalen Modellen (3.3) auf Seite 13 (Basis-Modell) und (3.30) auf Seite 23 (Alternativ-Modell) noch nicht berücksichtigt. Die Erweiterung der Modelle um Möglichkeiten einer solchen radiometrischen Anpassung ist Thema dieses Abschnitts.

Ursachen. Gründe für systematische Grauwert-Unterschiede zwischen Referenz- und Suchfenster sind breitgefächert. Unter den bedeutendsten Ursachen sind; siehe auch [Baltsavias, 1991]

- **Anisotrope Reflexionseigenschaften** der aufgezeichneten Objekte. Diese werden durch die sogenannte *bi-directional reflectance distribution function* (BRDF) oder »Reflexionsfunktion« beschrieben (deutsche Bezeichnung nach [Kraus und Schneider, 1988]). In dieser Funktion kommt zum Ausdruck, dass die von einem Objekt(punkt) abgehende Strahlung im Allgemeinen sowohl von Aufzeichnungsrichtung (oder Abstrahlrichtung) als auch Richtung der Bestrahlungsquelle (oder In-

zidenzrichtung) abhängig ist. [Szeliski \[2010\]](#) gibt einen kurzen Überblick zu diesem Themenkreis mit weiterführenden Referenzen; eine radiometrisch fundierte Behandlung ist bei [Kraus und Schneider \[1988\]](#) zu finden.

- **Atmosphärische Unterschiede** entlang der Ein- und Abstrahlungswege zwischen den Aufnahmen. Davon sind speziell Luft- und Satellitenbilder betroffen. Anteile der »atmosphärischen« Grauwert-Unterschiede können vor der eigentlichen Verwendung des Bildmaterials unter Verwendung von Atmosphärenmodellen oder anderen nicht-parametrischen Verfahren korrigiert werden.
- **Unzulänglichkeiten des Objektivs** in radiometrischer Hinsicht. Darunter fällt bspw. der Lichtabfall zum Bildrand hin und die Vignettierung durch die Objektivfassung, siehe [\[Kraus, 2004\]](#). Diese Effekte können vorab korrigiert werden, so dass eventuell nur mehr Restfehler der verwendeten Modelle vorliegen.

Korrekturansatz. Um systematische Grauwert-Unterschiede zu kompensieren, wird LSM auf transformierte Grauwerte einer oder beider Grauwertfunktionen f und g von Referenzbild Ψ_f resp. Suchbild Ψ_g gestützt. Ähnlich zur geometrischen Beziehung zwischen Referenz- und Suchfenster (siehe Seite 19 in Abschnitt 3.2), können auch zwischen deren Grauwerten komplexe »Deformationen« bestehen, die nur schwer zu formalisieren sind. Ansätze auf Basis radiometrisch invarianter Information, wie z. B. der Census-Transformation, oder mit komplexen Grauwert-Transformationen von f und g , wie z. B. über *Mutual Information*, werden hier nicht verfolgt¹⁰. Wir verwenden den einfachen Ansatz, die systematischen Grauwert-Unterschiede durch Erweiterung des funktionalen Modells um *eine* radiometrische Transformationsfunktion R zu kompensieren. Anhand der Berechnungsart der Parameter \mathbf{r} von R können zwei Ansätze unterschieden werden:

- (A1) Einführung der radiometrischen Parameter \mathbf{r} als zusätzliche Unbekannte und Mitschätzung im Rahmen der vermittelnden Ausgleichung [\[Ackermann, 1984\]](#)
- (A2) Berechnung der radiometrischen Parameter \mathbf{r} und Ausführung der Grauwert-Transformation R »a priori« [\[Grün und Baltsavias, 1988; Baltsavias, 1991\]](#).

Wir formulieren im folgenden Absatz die Erweiterung des funktionalen Modells um R und diskutieren anschließend die beiden Ansätze (A1) und (A2) im Detail.

Erweiterung des funktionalen Modells. Es existieren zwei Ansätze, das funktionale Modell um eine Grauwert-Transformation R zu erweitern. [Ackermann \[1984\]](#) formuliert R an der Grauwertfunktion der *rechten* Seite des funktionalen Modells (Parameterseite). [McGlone \[2004\]](#) bringt R hingegen an der Grauwertfunktion der *linken* Seite an (Beobachtungsseite) und stellt diese anschließend auf die Parameterseite um (die Beobachtungen haben dann den Wert 0). Wir verwenden im Rahmen dieser Arbeit den Ansatz von Ackermann und beschränken uns im Weiteren auf die Erweiterung des Basis-Modells (3.3) von Seite 13. Die Vorschriften für das Alternativ-Modell (3.30) auf Seite 23 können in analoger Weise gewonnen werden.

¹⁰Siehe [\[Szeliski, 2010\]](#) für eine Kurz-Besprechung dieser Ansätze und weitere Referenzen.

Die konkrete Annahme für die Erweiterung des Basis-Modells nach [Ackermann \[1984\]](#) ist, dass sich die Grauwerte $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$ des Referenzfensters, $k = 1, \dots, K$, und die Grauwerte $g'(\mathbf{p}_k)$ des Suchfensters nur um zufällige Messfehler unterscheiden. $g'(\mathbf{p}_k)$ wird aus der transformierten Grauwertfunktion $g' = R(g, \mathbf{r})$ entnommen. Die radiometrische Transformationsfunktion R ist allgemein

$$\begin{aligned} R : W_g &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\rightarrow g' \end{aligned} \quad (3.42)$$

mit Parametervektor \mathbf{r} und W_g gemäß Gleichung (2.3) auf Seite 10. Das erweiterte funktionale Basis-Modell ist in Adaption von (3.3) auf Seite 13 damit

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varphi}_k) + v_k &= g'(\mathbf{p}_k) \\ &= g'(\mathbf{t}({}_r\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{p}_{\text{red}}) \quad \text{mit } k = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.43)$$

bzw. bei expliziter Verwendung von R und Kompaktierung von \mathbf{t}

$$\boxed{f(\boldsymbol{\varphi}_k) + v_k = R(g(\mathbf{p}_k), \mathbf{r}) \quad \text{mit } k \text{ wie in (3.43).}} \quad (3.44)$$

Wir beschränken uns im Rahmen dieser Arbeit auf **lineare** Transformationsfunktionen R_{L} mit Parametervektor \mathbf{r}_{L} . Damit verbunden ist die Annahme lambert'scher Rückstreuung [[Pfeifer, 2012](#)]. Wegen der generell kleinen Fenstergrößen von LSM – typischerweise zwischen 7–31 Pixel – ist dieser einfache Zugang überraschend leistungsfähig.

Mitschätzung der radiometrischen Parameter \mathbf{r}_{L} (A1). Beim Mitschätzungs-Ansatz werden die Elemente des Parametervektors \mathbf{r}_{L} von R_{L} als zusätzliche Unbekannte zu den J Elementen des Parametervektors $\boldsymbol{\omega}$ von \mathbf{t} angesehen und im Rahmen der vermittelnden Ausgleichung des erweiterten (Basis-)Modells (3.44) mitgeschätzt. Dazu ist im Sinne der Anmerkungen auf Seite 14 Gleichung (3.44) bezüglich der Unbekannten $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{r}_{L} zu linearisieren und iterativ zu lösen. Nachdem das generelle Formelwerk identisch zum Basis-Modell (3.3) auf Seite 13 ist, beschränken wir uns auf die Angabe der Linearisierung.

Wir verwenden für R_{L} die übliche Parametrisierung

$$\boxed{R_{\text{L}} : g' = B + (1 + C) \cdot g} \quad (3.45)$$

mit den Parametern Helligkeit B (*brightness*) und Kontrast C (*contrast*) und daher $\mathbf{r}_{\text{L}} = (B, C)^{\top}$. Die Redundanz sinkt gegenüber dem Basis-Modell um 2 und beträgt konkret $r = K - J - 2$. Mit (3.45) lautet die Taylor-Entwicklung von (3.44) bis Grad 1

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varphi}_k) + v_k &= R_{\text{L}}(g(\mathbf{p}_k^0), B^0, C^0) + \\ &+ 1 \cdot dB + g(\mathbf{p}_k^0) \cdot dC + \\ &+ (1 + C^0) \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^0} \cdot d\boldsymbol{\omega} \quad \text{mit } k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (3.46)$$

B^0 und C^0 bezeichnen die Näherungswerte für B und C . Die weiteren Bezeichnungen entsprechen jenen in der Taylor-Entwicklung (3.5) des Basis-Modells auf Seite 14.

Die »geometrischen« partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial \omega}$ bleiben offensichtlich unverändert zum Basis-Modell. Für B^0 und C^0 wählen wir naheliegend

$$B^0 = C^0 = 0. \quad (3.47)$$

Wie bisher führen wir nun Gleichungssystem (3.46) für die praktische Berechnung in die Form $\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{l}$ über. Um eine einheitliche Notation zu haben, verwenden wir im Folgenden den Index »GE«, wobei E für die Mitschätzung (*estimation*) der radiometrischen Parameter von R_L steht und $\mathbf{G} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{A}\}$ entsprechend Abschnitt 3.2 als Platzhalter für die geometrische Transformation. Für die Angabe von Design-Matrix $D_{\mathbf{GE}}$ und gekürztem Beobachtungsvektor $\mathbf{l}_{\mathbf{GE}}$ können wir uns wie bisher auf die k -te Zeile $\tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{GE}}^\top$ resp. das k -te Element $l_{k,\mathbf{GE}}$ beschränken. Schreiben wir zuerst die »geometrischen« und dann die »radiometrischen« Unbekannten an, lautet die k -te Zeile von $D_{\mathbf{GE}}$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{GE}}^\top = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_L}{\partial \omega} & \frac{\partial R_L}{\partial B} & \frac{\partial R_L}{\partial C} \\ (1 + C^0) \tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{G}}^\top & 1 & g(\mathbf{p}_k^0) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

mit $\tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{G}}^\top$ nach (3.28) auf Seite 22. Der Vektor $\mathbf{u}_{\mathbf{GE}}$ der Unbekanntenzuschläge ist entsprechend $\mathbf{u}_{\mathbf{GE}} = (d\omega, dB, dC)^\top$. Für das k -te Element von $l_{k,\mathbf{GE}}$ gilt mit der Abkürzung

$$g^0(\mathbf{p}_k^0) = R_L(g(\mathbf{p}_k^0), B^0, C^0) \quad (3.49)$$

schließlich

$$l_{k,\mathbf{GE}} = f(\varphi_k) - g^0(\mathbf{p}_k^0). \quad (3.50)$$

Bei der ersten Iteration ist wegen (3.47) speziell $l_{k,\mathbf{GE}} = l_{k,\mathbf{G}}$.

Berechnung »a priori« (A2). Der a priori Ansatz geht auf Arbeiten von Grün und Baltasvias [1988] zurück. Wie McGlone [2004, Seite 490] beschreibt, konnten die Autoren damit Konvergenzprobleme bei Ansatz (A1) eindämmen. Die Idee ist, das funktionale Modell in der Formulierung (3.43) lediglich nach den J unbekanntenen Parametern der geometrischen Transformationsfunktion \mathbf{t} zu lösen und $g' = R_L(g, \mathbf{r}_L)$ mit vorab und losgelöst von der Ausgleichung bestimmten Parametern \mathbf{r}_L zu berechnen. Die Redundanz ist unverändert zum Basis-Modell $r = K - J$. Formal ist damit für die weitere Lösung der einzige Unterschied zum Basis-Modell, dass statt der Original-Grauwerte $g(\mathbf{p}_k)$ von Suchbild Ψ_g die transformierten Grauwerte $g'(\mathbf{p}_k)$ herangezogen werden. Der Vollständigkeit halber geben wir Design-Matrix und gekürzten Beobachtungsvektor in dieser angepassten Schreibweise an. Unter Verwendung des Index »GP«, mit P als Kennzeichnung für die a priori Korrektur, lautet die k -te Zeile $\tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{GP}}^\top$ von $D_{\mathbf{GP}}$ mit $\mathbf{G} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{A}\}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{SP}}^\top &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g'}{\partial a_{13}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{23}} \\ g_{x_k}^0 & g_{y_k}^0 \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{HP}}^\top &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g'}{\partial a_{13}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{23}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{mc}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{ms}} \\ g_{x_k}^0 & g_{y_k}^0 & g_{x_k}^0 r\xi_k + g_{y_k}^0 r\eta_k & -g_{x_k}^0 r\eta_k + g_{y_k}^0 r\xi_k \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{d}}_{k,\mathbf{AP}}^\top &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g'}{\partial a_{13}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{23}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{11}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{12}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{21}} & \frac{\partial g'}{\partial a_{22}} \\ g_{x_k}^0 & g_{y_k}^0 & g_{x_k}^0 r\xi_k & g_{x_k}^0 r\eta_k & g_{y_k}^0 r\xi_k & g_{y_k}^0 r\eta_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Das k -te Element $l_{k,\text{GP}}$ von gekürztem Beobachtungsvektor¹¹ \mathbf{l}_{GP} ist

$$l_{k,\text{GP}} = f(\boldsymbol{\varphi}_k) - g'(\mathbf{p}_k^0). \quad (3.52)$$

In (3.51) bedeuten entsprechend Gleichung (3.8) auf Seite 14

$$\begin{pmatrix} g'_{x_k}{}^0 \\ g'_{y_k}{}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g'}{\partial x} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k^0} \\ \frac{\partial g'}{\partial y} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k^0} \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Offen ist noch die Wahl von R_{L} und die konkrete Durchführung der a priori Grauwert-Transformation, d. h. die Berechnung von g' , g'_x und g'_y . [Baltasvias \[1991\]](#) gibt mehrere Möglichkeiten für R_{L} an. Wir beschränken uns im Rahmen dieser Arbeit auf die (nicht robuste) Angleichung von Mittelwert und Standardabweichung:

$$R_{\text{L}} : g' = \frac{\sigma_f}{\sigma_g} \cdot (g - m_g) + m_f. \quad (3.54)$$

Darin bezeichnen m_g und m_f empirische, regionale Grauwert-Mittelwerte und σ_g und σ_f empirische, regionale Grauwert-Standardabweichungen. Die konkret benötigten Werte von g' an den Fensterpunkten \mathbf{p}_k^0 , $k = 1, \dots, K$, siehe (3.51) und (3.52), folgen dann durch einfache Auswertung von (3.54)

$$g'(\mathbf{p}_k^0) = \frac{\sigma_f}{\sigma_g} \cdot (g(\mathbf{p}_k^0) - m_g) + m_f. \quad (3.55)$$

Für die Ableitungen g'_x und g'_y findet man

$$g'_{x_k}{}^0 = \frac{\sigma_f}{\sigma_g} g'_{x_k}{}^0 \quad g'_{y_k}{}^0 = \frac{\sigma_f}{\sigma_g} g'_{y_k}{}^0. \quad (3.56)$$

Diese Beziehung folgt direkt aus (3.54) unter Anwendung der gewählten Ableitungskerne H_x (3.19) bzw. H_y (3.20), beide auf Seite 18. Die Berechnung der Parameter m_g , m_f , σ_g und σ_f erfolgt aus den Grauwerten von Suchbild Ψ_g und Referenzbild Ψ_f innerhalb von Fenstern um die gegebenen Punkte $\mathbf{p}^0 \in \kappa_g$ resp. $\boldsymbol{\varphi} \in \kappa_f$. Wir verwenden als diese »Statistik«-Fenster der Einfachheit halber die jeweiligen LSM-Fenster. Damit sind die Parameter konkret:

$$m_g = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K g(\mathbf{p}_k^0) \quad m_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K f(\boldsymbol{\varphi}_k) \quad (3.57)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (g(\mathbf{p}_k^0) - m_g)^2 \quad \sigma_f^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (f(\boldsymbol{\varphi}_k) - m_f)^2. \quad (3.58)$$

Nachdem das initiale Suchfenster nur näherungsweise mit dem Referenzfenster koinzidiert, ist diese Vorgangsweise nur sinnvoll, wenn genügend gute Näherungsorte \mathbf{p}_k^0 , $k = 1, \dots, K$, vorliegen. Davon gehen wir im Rahmen dieser Arbeit aus (siehe Absatz

¹¹Anmerkung zur **Notation**: Entgegen der Bezeichnung $g'(\mathbf{p}_k^0)$ bei Ansatz (A1) notieren wir die transformierten Grauwerte des genäherten Suchfensters bei (A2) mit $g'(\mathbf{p}_k^0)$, da die radiometrischen Parameter für die Berechnung von g' nicht im Rahmen der Ausgleichung geschätzt werden.

Initialisierung auf Seite 17). Um der Näherungswert-Situation dennoch Rechnung zu tragen, wird die a priori Transformation nicht nur am Beginn der Ausgleichung, sondern in jeder Iteration ausgeführt. Konkret werden in jeder Iteration i mit den aktuellen Suchfensterpunkten $\mathbf{p}_k^{0(i)}$ nach (3.57) und (3.58) neue Parameter $m_g = m_g^{(i)}$ und $\sigma_g = \sigma_g^{(i)}$ berechnet¹², die Gleichungen (3.55) und (3.56) neu ausgewertet und diese Werte für die Relinearisierung von D_{GP} (3.51) und \mathbf{l}_{GP} (3.52) eingesetzt. Wir folgen mit diesem Prozedere den Untersuchungsergebnissen von [Baltsavias \[1991, Seite 75\]](#).

Bemerkung. Funktional nicht kompensierte radiometrische Unterschiede zwischen Referenz- und Suchfenster können Fehler in der ermittelten Position $\hat{\mathbf{p}}$ bedingen. Auch möglich ist, dass trotz vorhandener radiometrischer Unterschiede und deaktivierter radiometrischer Transformation zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. In diesem Fall werden die radiometrischen Unterschiede aber im Verbesserungsvektor \mathbf{v} kompensiert. Das bedeutet einen Anstieg in $\hat{\sigma}_0$, vgl. (3.15) auf Seite 16. In Folge gibt auch die stochastische Information a posteriori ein verfälschtes Bild [[McGlone, 2004, Seite 490](#)]. Um solche Effekte auszuschließen, sollte die radiometrische Anpassung standardmäßig aktiviert sein. In den Experimenten verfolgen wir diese Empfehlung.

3.5. Einführung der Kollinearitätsgleichungen als geometrische Bedingung

Das Wissen um den geometrischen Abbildungsprozess des zu $\{\varphi, \mathbf{p}\}$ zugehörigen Objektpunktes $\mathbf{P} \in K$ in Referenz- und Suchbild kann dazu verwendet werden, den Suchraum für den gesuchten Punkt $\mathbf{p} \in \kappa_g$ einzuschränken. Die Methoden basieren auf der Bedingung, dass \mathbf{p} auf einer ausgezeichneten Geraden liegt, der Epipolarlinie $\mathbf{l}_\varphi \in \kappa_g$ von $\varphi \in \kappa_f$ (Figur 3.3)¹³. Die Orientierung setzen wir als bekannt voraus.

Einleitung. Eine mögliche Realisierung der Epipolarbedingung besteht darin, Referenz- und Suchbild in synthetische Normalfall- oder **Epipolarbilder** ${}_e\Psi_f$ resp. ${}_e\Psi_g$ umzubilden und LSM in diesen Bildern durchzuführen. Die Epipolarlinie ${}_e\mathbf{l}_\varphi \in {}_e\kappa_g$ ist parallel zur ${}_e x$ -Achse, die ${}_e y$ -Parallaxe (die Differenz zwischen ${}_e\eta$ und ${}_e y$) von ${}_e\varphi$ und ${}_e\mathbf{p}$ ist 0. Demgemäß reduziert sich die ${}_e y$ zugeordnete Zeile der geometrischen Transformationsfunktion auf die Identität ${}_e y = {}_e\eta$ [[Förstner, 1993, Seite 361](#)]. Für die Umbildung gibt es viele Ansätze; [McGlone \[2004, Seite 261\]](#) gibt eine elementare Methode an.

Eine weitere Möglichkeit zur Einbindung der Epipolarbedingung ist, die **Epipolarlinie** \mathbf{l}_φ explizit einzuführen und per Bedingungsgleichung die Inzidenz von \mathbf{p} und \mathbf{l}_φ zu fordern. Ein auf [Grün \[1985\]](#) zurückgehender, dritter Ansatz beruht darauf, als Bedingung eine Abwandlung der Abbildungsvorschrift der **Zentralprojektion**, Gleichung (2.1) auf Seite 9, zu verwenden. Wie noch ersichtlich sein wird, ist damit die Forderung $\mathbf{p} \in \mathbf{l}_\varphi$ implizit formuliert.

Wir verfolgen zur Erprobung der Epipolarbedingung im Rahmen dieser Arbeit den Zentralprojektions-Ansatz. Wie am Ende dieses Abschnitts ausgeführt wird, hat dieser Ansatz gegenüber den beiden expliziten Formulierungen einige fundamentale Vorteile.

¹²Die Neu-Berechnung von Mittelwert $m_g^{(i)}$ und Standardabweichung $\sigma_g^{(i)}$ stützt sich daher auf die interpolierten Grauwerte $g(\mathbf{p}_k^{0(i)})$.

¹³Einen umfassenden Text zur Epipolargeometrie geben bspw. [Hartley und Zisserman \[2004\]](#).

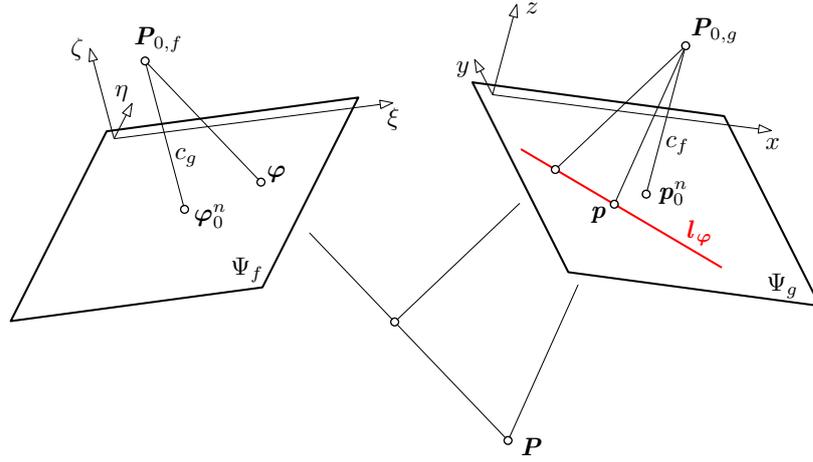


Fig. 3.3. Epipolarbedingung. Der gesuchte Punkt $\mathbf{p} \in \kappa_g = \{x, y, z\}$ in Suchbild Ψ_g liegt auf der Epipolarlinie $l_\varphi \in \kappa_g$ von $\varphi \in \kappa_f = \{\xi, \eta, \zeta\}$ in Referenzbild Ψ_f . l_φ ist das Bild des Bildstrahles durch φ (d. i. die Gerade durch die Punkte $\{\mathbf{P}_{0,f}, \varphi, \mathbf{P}\}$) in Ψ_g . Für die weiteren Bezeichnungen siehe Abschnitt 2.2 ab Seite 7.

Mathematische Formulierung. Aufgabe ist die Erweiterung des funktionalen Modells von LSM um die Abbildungsvorschrift der Zentralprojektion als geometrische Bedingungsgleichung für \mathbf{p} . Wir folgen in der Formulierung den Arbeiten von Grün und Baltasvias [1988] und führen hierzu die Kollinearitätsgleichungen (KG) von $\varphi \in \kappa_f$ und $\mathbf{p} \in \kappa_g$ als zusätzliche Beobachtungsgleichungen ein. Die Ausgleichung bleibt somit vermittelnd. Wegen der damit verbundenen Stochastik ist die geometrische Bedingung »weich« oder »beweglich«, die vermittelnde Ausgleichung wegen der unterschiedlichen Beobachtungsmetriken, Grauwerte von LSM und Pixel von den KG, *hybrid*. Den Objektpunkt $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ nehmen wir in Folge als unbekannt an. Innere und äußere **Orientierung** von Referenz- und Suchbild sollen bekannt sein; die Kamerakonstanten werden als identisch angenommen ($c_f = c_g = c$; Figur 3.3). Auf die Einführung einer Verzeichnung wird verzichtet.

Die KG werden erhalten indem (2.1) auf Seite 9 durch die dritte Zeile dividiert und nur die ersten zwei Zeilen der neuen Vektorfunktion angeschrieben werden [Kraus, 2004]. Für den Referenzpunkt $\varphi = (\xi, \eta)^\top \in \kappa_f$ lauten die Gleichungen, erweitert um Verbesserungen v_ξ und v_η , mit $\mathbf{R}_f = (\mathbf{i}_f, \mathbf{j}_f, \mathbf{k}_f)$ und den weiteren eingeführten Bezeichnungen

$$\xi + v_\xi = \xi_0 - c \frac{\mathbf{i}_f^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,f})}{\mathbf{k}_f^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,f})}, \quad \eta + v_\eta = \eta_0 - c \frac{\mathbf{j}_f^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,f})}{\mathbf{k}_f^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,f})}. \quad (3.59)$$

Die Gleichungen für den gesuchten Punkt $\mathbf{p} = (x, y)^\top \in \kappa_g$ lauten entsprechend

$$x + v_x = x_0 - c \frac{\mathbf{i}_g^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,g})}{\mathbf{k}_g^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,g})}, \quad y + v_y = y_0 - c \frac{\mathbf{j}_g^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,g})}{\mathbf{k}_g^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,g})}. \quad (3.60)$$

Setzen wir $x = x^0 + a_{13}$ und $y = y^0 + a_{23}$, mit a_{13} , a_{23} den Komponenten des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{\omega}_S$ der geometrischen Transformationsfunktion \mathbf{t} im Basis-Modell (vgl. (3.32) auf Seite 23) und x^0 , y^0 den Komponenten der festen Näherungsposition \mathbf{p}^0 , und

stellen die Gleichungen in (3.59) und (3.60) etwas um, folgt:

$$0 + v_\xi = \xi_0 - c \frac{\mathbf{i}_f^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,f})}{\mathbf{k}_f^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,f})} - \xi \quad (3.61)$$

$$0 + v_\eta = \eta_0 - c \frac{\mathbf{j}_f^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,f})}{\mathbf{k}_f^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,f})} - \eta \quad (3.62)$$

$$0 + v_x = x_0 - c \frac{\mathbf{i}_g^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,g})}{\mathbf{k}_g^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,g})} - (x^0 + a_{13}) \quad (3.63)$$

$$0 + v_y = y_0 - c \frac{\mathbf{j}_g^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,g})}{\mathbf{k}_g^\top (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{0,g})} - (y^0 + a_{23}). \quad (3.64)$$

Die K Grauwertgleichungen von LSM, bspw. (3.3) auf Seite 13, und die KG von \mathbf{p} , (3.63) und (3.64), sind über die gemeinsamen Unbekannten a_{13} und a_{23} verknüpft, die KG von $\boldsymbol{\varphi}$, (3.61) und (3.62), mit jenen von \mathbf{p} über die unbekanntenen Objektkoordinaten¹⁴ $(X, Y, Z) = \mathbf{P}^\top$.

Bevor wir auf die Linearisierung obiger Gleichungen eingehen, sind zwei **wichtige Bemerkungen** notwendig:

— **Bemerkung 1.** Für die tatsächliche Einführung in das **Basis-Modell**, wie es in Abschnitt 3.1 motiviert wurde, müssen die Gleichungen noch überarbeitet werden. Die Verschiebung $\boldsymbol{\omega}_s$ von \mathbf{t} ist wegen der standardmäßigen Rundung von $\boldsymbol{\varphi}$ und \mathbf{p}^0 (siehe Absatz Initialisierung auf Seite 17) nicht der Vektor von \mathbf{p}^0 nach \mathbf{p} sondern der Vektor vom Mittelpunkt $\mathbf{p}_m^0 = \mathbf{p}_{\text{red}}$ des initialen Suchfensters zum Mittelpunkt \mathbf{p}_m des zum Referenzfenster korrespondierenden Suchfensters (Figur 3.4 anhand \mathbf{t}_A). \mathbf{p}_m ist demgemäß der zu $\boldsymbol{\varphi}_m$ korrespondierende Punkt im Suchbild.

Eine einfache Möglichkeit diese Diskrepanz zu beheben ist, statt $\boldsymbol{\varphi} = (\xi, \eta)^\top$ und $\mathbf{p}^0 = (x^0, y^0)^\top$ die Mittelpunkte $\boldsymbol{\varphi}_m = (\xi_m, \eta_m)^\top$ und $\mathbf{p}_m^0 = (x_m^0, y_m^0)^\top$ in den Gleichungen (3.61)–(3.64) zu verwenden. Damit lauten die zusätzlichen Beobachtungsgleichungen in ihrer endgültigen Form

$$0 + v_\xi = \xi_0 - c \frac{\mathbf{i}_f^\top (\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{0,f})}{\mathbf{k}_f^\top (\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{0,f})} - \xi_m = \alpha_f \quad (3.65)$$

$$0 + v_\eta = \eta_0 - c \frac{\mathbf{j}_f^\top (\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{0,f})}{\mathbf{k}_f^\top (\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{0,f})} - \eta_m = \beta_f \quad (3.66)$$

$$0 + v_x = x_0 - c \frac{\mathbf{i}_g^\top (\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{0,g})}{\mathbf{k}_g^\top (\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{0,g})} - (x_m^0 + a_{13}) = \alpha_g \quad (3.67)$$

$$0 + v_y = y_0 - c \frac{\mathbf{j}_g^\top (\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{0,g})}{\mathbf{k}_g^\top (\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{0,g})} - (y_m^0 + a_{23}) = \beta_g. \quad (3.68)$$

¹⁴Potentiell kann die Orientierung von Referenz- und Suchbild unbekannt eingeführt und im Rahmen der hybriden Ausgleichung mitgeschätzt werden. Das ist, abgesehen von der Datumsproblematik, erst möglich, wenn *simultan* mehrere Punktpaare $\{\boldsymbol{\varphi}_i, \mathbf{p}_i\}$ verarbeitet werden und sehr gute Näherungswerte vorliegen. Orientierung und Objektrekonstruktion verschmelzen dann zu einem Schritt. Details hierzu sind in Grün und Baltasvias [1988] und ausführlicher in Baltasvias [1991] zu finden.

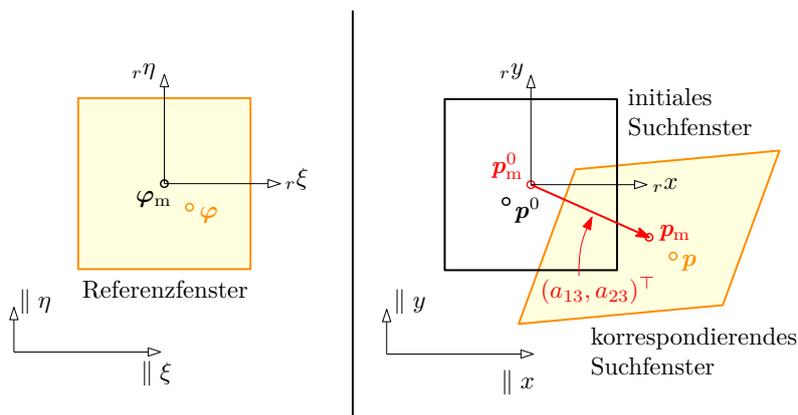


Fig. 3.4. Geometrische Bedeutung des Verschiebungsvektors $\omega_s = (a_{13}, a_{23})^\top$ anhand der geometrischen Transformationsfunktion t_A (stark übertrieben gezeichnet). ω_s ist der Vektor von p_m^0 nach p_m . Weitere Bezeichnungen nach Abschnitt 3.1.

P_m bezeichnet die Objektkoordinaten des Bildpunktpaars $\{\varphi_m, p_m\}$. Der »Schönheitsfehler«, dass P_m als Unbekannte auftritt und nicht P , muss mit dieser Lösung akzeptiert werden. Eine alternative Formulierung, mit P als Unbekannte, wäre $x^0 + a_{13}$ und $y^0 + a_{23}$ in den Gleichungen (3.63) resp. (3.64) durch die Komponenten von Gleichung (3.13) auf Seite 15 zu ersetzen. Wir bleiben im Weiteren jedoch bei der oben etablierten Formulierung. Die Bezeichnungen α_f, β_f , usw. auf den rechten Seiten der Gleichungen (3.65)–(3.68) werden im Zuge der Linearisierung weiter unten benötigt.

— **Bemerkung 2.** Beim **Alternativ-Modell** nach Abschnitt 3.3 wird eine Transformationsfunktion s mit Parametervektor $w = (b_{13}, b_{23}, \dots)^\top$ verwendet; die Transformationsrichtung ist umgekehrt zum Basis-Modell. Abgesehen von der trivialen Lösung $w_s = \omega_s = 0$, gilt $b_{13} \neq a_{13}$ und $b_{23} \neq a_{23}$. Um die oben formulierten KG beim Alternativ-Modell verwenden zu können, sind daher die Verschiebungen a_{13} und a_{23} in Gleichung (3.67) resp. (3.68) als Funktionen von w auszudrücken, d. h. $a_{13} = a_{13}(w)$ und $a_{23} = a_{23}(w)$. In anderen Worten sind die **Verschiebungen der inversen Funktion** s^\top in symbolischer Form gesucht. Im Fall der reinen Verschiebung als gewählte Transformation, $s = s_s$, ist die Inversion einfach: $a_{13} = -b_{13}$ und $a_{23} = -b_{23}$. Die Herleitung im Fall $s = s_H$ oder $s = s_A$ gelingt bspw. durch Matrizeninversion mittels Determinanten und ist im Anhang auf Seite 83 gegeben.

Linearisierung. Für die Anfügung an die Auflösung der bisher besprochenen funktionalen Modelle sind die zusätzlichen, nicht linearen Beobachtungsgleichungen (3.65)–(3.68) bezüglich der Unbekannten zu linearisieren. Zusätzlich zu den bisher möglichen Unbekannten, Parameter ω von t bzw. w von s und Parameter r_L von R_L , sind die Objektkoordinaten P_m zu berücksichtigen. Wir geben die Linearisierung stellvertretend anhand der x -KG (3.67) des Suchbildes an. Entsprechend Bemerkung 2 oben ist eine Fallunterscheidung bezüglich des Basis- und Alternativ-Modells notwendig. Die Taylor-Entwicklung bis Grad 1 lautet

$$0 + v_x = \alpha_g(P_m^0, a_{13}^0, \dots) + \left. \frac{\partial \alpha_g}{\partial P_m} \right|_{P_m = P_m^0} \cdot dP_m + H. \quad (3.69)$$

Darin bedeutet H beim Basis-Modell

$$H = \frac{\partial \alpha_g}{\partial a_{13}} da_{13} = -da_{13} \quad (3.70)$$

und beim Alternativ-Modell entsprechend

$$H = \frac{\partial \alpha_g}{\partial a_{13}} \frac{\partial a_{13}}{\partial \mathbf{w}} d\mathbf{w} = - \left. \frac{\partial a_{13}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^0} \cdot d\mathbf{w}. \quad (3.71)$$

Als neue Bezeichnung gegenüber den bisherigen funktionalen Modellen tritt der Näherungswert \mathbf{P}_m^0 von \mathbf{P}_m auf. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \alpha_g}{\partial \mathbf{P}_m}$ folgen nach kurzer Rechnung¹⁵ zu

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial \mathbf{P}_m} = -\frac{c}{N_g^2} [N_g \cdot \mathbf{i}_g^\top - Z_{g,x} \cdot \mathbf{k}_g^\top] \quad (3.72)$$

mit den skalaren Hilfsgrößen

$$N_g = \mathbf{k}_g^\top (\mathbf{P}_m^0 - \mathbf{P}_{0,g}), \quad (3.73)$$

$$Z_{g,x} = \mathbf{i}_g^\top (\mathbf{P}_m^0 - \mathbf{P}_{0,g}). \quad (3.74)$$

Offen sind noch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a_{13}}{\partial \mathbf{w}}$ in (3.71) im Fall des Alternativ-Modells. Sie erfordern etwas mehr Rechenarbeit und sind zusammen mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial a_{23}}{\partial \mathbf{w}}$ im Anhang ab Seite 83 angegeben.

Die Taylor-Entwicklungen der weiteren KG folgen analog zur Gleichungsreihe (3.69)–(3.74), wobei für die Gleichungen des Referenzbildes, (3.65) und (3.66), die Verschiebungsunbekannten entfallen. Wir verzichten hier auf eine explizite Wiedergabe und beschränken uns im Folgenden auf die Angabe von Design-Matrizen und gekürzten Beobachtungsvektoren. Die Design-Matrix D_K für die zusätzlichen Beobachtungsgleichungen (3.65)–(3.68) lauten im Fall des Basis-Modells

$$D_K = \begin{bmatrix} \partial/\partial a_{13} & \partial/\partial a_{23} & \partial/\partial \dots & \frac{\partial \alpha_f}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}^\top & \frac{\partial \beta_f}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}^\top & \frac{\partial \alpha_g}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \\ -1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \frac{\partial \beta_g}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \\ 0 & -1 & \mathbf{0}^\top & \frac{\partial \beta_g}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Darin bezeichnet die »Spalte« $\partial/\partial \dots$ die 0-Ableitungen nach den eventuell aktivierten, »erweiterten« geometrischen Parametern, a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} bei \mathbf{t}_A und a_{mc} , a_{ms} bei \mathbf{t}_H und radiometrischen Parametern $\mathbf{r}_L = (B, C)^\top$ (vgl. Tabelle 3.2 auf Seite 21 resp. (3.45) auf Seite 28). Die Design-Matrix D_K^* im Fall des Alternativ-Modells lautet entsprechend

$$D_K^* = \begin{bmatrix} \partial/\partial \mathbf{w} & \partial/\partial \mathbf{r}_L & \frac{\partial \alpha_f}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \frac{\partial \beta_f}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \frac{\partial \alpha_g}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \\ - \left. \frac{\partial a_{13}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^0} & \mathbf{0}^\top & \frac{\partial \beta_g}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \\ - \left. \frac{\partial a_{23}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^0} & \mathbf{0}^\top & \frac{\partial \beta_g}{\partial \mathbf{P}_m} \Big|_{\mathbf{P}_m=\mathbf{P}_m^0} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

¹⁵Für die skalare Schreibweise siehe bspw. [Kraus, 2004, Seite 494].

Der gekürzte Beobachtungsvektor ist (symbolisch unabhängig vom gewählten LSM-Modell)

$$\boldsymbol{l}_K = \boldsymbol{l}_K^* = \begin{pmatrix} 0 - \alpha_f(\boldsymbol{P}_m^0, \dots) \\ 0 - \beta_f(\boldsymbol{P}_m^0, \dots) \\ 0 - \alpha_g(\boldsymbol{P}_m^0, a_{13}^0, \dots) \\ 0 - \beta_g(\boldsymbol{P}_m^0, a_{23}^0, \dots) \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Im Fall des Alternativ-Modells ist hierbei zu beachten, dass a_{13}^0 und a_{23}^0 die Verschiebungen der *inversion* Transformationsfunktion \boldsymbol{s}^\top mit Parametervektor \boldsymbol{w}^0 sind.

Auflösung nach den Unbekannten und stochastisches Modell. Die Auflösung nach den Unbekannten, $\boldsymbol{\omega}$ resp. \boldsymbol{w} , \boldsymbol{P}_m und wahlweise \boldsymbol{r}_L erfolgt nach dem gleichen Formelwerk wie bisher. Da hier zusätzliche Beobachtungsgleichungen auftreten, geben wir die wichtigsten Formeln explizit an. Um dafür eine übersichtliche Notation zu haben, nehmen wir an, dass das Basis-Modell (3.3) von Seite 13 gewählt worden sei und die Berechnung einer radiometrischen Transformation R_L nicht aktiviert ist. Die weiteren möglichen Fälle sind ganz analog zu behandeln. Die Parameter der geometrischen Transformation belassen wir allgemein und bezeichnen sie entsprechend Abschnitt 3.2 mit $\boldsymbol{\omega}_G$, wobei $G \in \{\mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{A}\}$. Die Unbekannten der Ausgleichung sind somit die J Elemente von $\boldsymbol{\omega}_G$ und die Objektkoordinaten \boldsymbol{P}_m .

Die Normalgleichungsmatrix \boldsymbol{N} ist

$$\boldsymbol{N} = \bar{D}_G^\top \boldsymbol{Q}_{ll}^{-1} \bar{D}_G + D_K^\top \boldsymbol{Q}_{ll,K}^{-1} D_K. \quad (3.78)$$

Darin sind $\bar{D}_G = (D_G, \mathbf{0}_{(K,3)})$ und D_G entsprechend (3.28) auf Seite 22, und $\boldsymbol{Q}_{ll} = E_K$ nach (3.4) auf Seite 14. Die Kofaktormatrix $\boldsymbol{Q}_{ll,K}$ der KG ist unter Vernachlässigung von Korrelationen entsprechend

$$\boldsymbol{Q}_{ll,K} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \text{diag}(\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2, \sigma_x^2, \sigma_y^2) \quad (3.79)$$

mit σ_0 der angenommenen Beobachtungsgenauigkeit der Grauwerte $f(\boldsymbol{\varphi}_k)$, $k = 1, \dots, K$, vgl. (3.14) auf Seite 16, und σ_ξ , σ_η , σ_x und σ_y den Bildmessgenauigkeiten für die zugeordneten KG. Details hierzu folgen im Absatz Stochastik weiter unten. Mit

$$\boldsymbol{n} = \bar{D}_G^\top \boldsymbol{Q}_{ll}^{-1} \boldsymbol{l}_G + D_K^\top \boldsymbol{Q}_{ll,K}^{-1} \boldsymbol{l}_K \quad (3.80)$$

folgt für die Unbekanntenzuschläge $\boldsymbol{u} = (d\boldsymbol{\omega}_G, d\boldsymbol{P}_m)^\top$ analog zu (3.12) auf Seite 15

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{n}. \quad (3.81)$$

Die Ausgleichung wird iterativ wiederholt, bis ein Konvergenzkriterium oder eine Maximalzahl an Iterationen erreicht wird. Der Schätzwert $\hat{\sigma}_0$ für den Varianzfaktor ist entsprechend (3.15) auf Seite 16 gegeben durch

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\Omega_G + \Omega_K}{r}}. \quad (3.82)$$

Darin bedeuten

$$\Omega_G = \mathbf{v}_G^\top \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{v}_G, \quad (3.83)$$

$$\Omega_K = \mathbf{v}_K^\top \mathbf{Q}_{ll,K}^{-1} \mathbf{v}_K, \quad (3.84)$$

und

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_G \\ \mathbf{v}_K \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_G \\ D_K \end{bmatrix} \mathbf{u} - \begin{pmatrix} \mathbf{l}_G \\ \mathbf{l}_K \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

wobei die beteiligten Größen jene am Ende der Iterationen sind. Die Redundanz r beträgt $r = (K+4) - (J+3) = K - J + 1$ und wächst demnach gegenüber dem Basis-Modell um 1. Dieser Redundanz-Zuwachs um 1 gilt auch für alle weiteren Modelle. Der Schätzwert $\hat{\mathbf{p}}$ für den gesuchten Punkt \mathbf{p} folgt im gewählten Beispielfall schließlich durch Auswertung von (3.13) auf Seite 15.

Stochastik. Die Wahl der Bildmessgenauigkeiten in (3.79) definiert das relative Gewicht der KG resp. Bildstrahlen zu den Grauwertgleichungen. Die Genauigkeit des Bildstrahles im Referenzbild wird man hoch wählen, d. h. kleine Zahlenwerte für σ_ξ und σ_η verfügen, da dieser fest bleiben soll. Das bedeutet, dass der gesuchte Punkt \mathbf{p} *implizit* auf die »feste« Epipolarlinie \mathbf{l}_φ gedrängt wird¹⁶ (Figur 3.3 auf Seite 32). Die Genauigkeit des Bildstrahles im Suchbild soll die Qualität der Orientierung widerspiegeln und erlaubt, dass \mathbf{p} von der Epipolarlinie \mathbf{l}_φ etwas abweichen darf¹⁷. Konkrete Werte werden im Rahmen der praktischen Untersuchungen in Kapitel 6 auf Seite 72 gegeben.

Vorteile und Nachteile. Der substantielle Vorteil der KG gegenüber LSM in Epipolarbildern und der Epipolarlinie als expliziter Bedingung besteht in einer Eigenschaft, die bei Zweibild-LSM noch nicht zum Tragen kommt: der Ansatz lässt sich ohne spezielle Maßnahmen auf *simultanes* LSM in mehreren Suchbildern erweitern, d. h. der gleichzeitigen und voneinander abhängigen Bestimmung von Punkten \mathbf{p}_s in Suchbildern $\Psi_{g,s}$, $s = 1, \dots, S$, zu einem korrespondierenden Referenzpunkt φ in Referenzbild Ψ_f . Die Verknüpfung der einzelnen LSM-Fenster leistet – allgemein ausgedrückt – der zugehörige Objektpunkt \mathbf{P} . Die Arbeit von [Baltasvias \[1991\]](#) widmet sich diesem Themenkreis in großem Umfang. Darin werden weitere Eigenschaften des Ansatzes motiviert, wie bspw. Robustheit gegenüber Abschattungen der involvierten Punkte \mathbf{p}_s (und auch φ) und Verminderung von Konvergenz zu Nebenminima.

Nachteilig an dem vorgestellten Ansatz ist die Nicht-Linearität der Beobachtungsgleichungen und damit verbunden die Notwendigkeit nach Näherungswerten \mathbf{P}_m^0 für \mathbf{P}_m . Für die Beschaffung dieser Näherungswerte sind jedoch lineare Ansätze verfügbar. [Kraus \[1996, Seite 47\]](#) gibt an, wie die nicht linearen KG in lineare Gleichungen bezüglich der Objektkoordinaten (und Projektionszentren) umgeformt werden können. Eine projektive und damit inhärent lineare Methode ist bspw. bei [Haala \[2011\]](#) zu finden.

¹⁶Genauer formuliert wird wegen Bemerkung 1 auf Seite 33 tatsächlich der Punkt \mathbf{p}_m auf die Epipolarlinie \mathbf{l}_{φ_m} von φ_m gedrängt.

¹⁷Exakter ist die Feststellung, dass dadurch \mathbf{p}_m etwas von \mathbf{l}_{φ_m} abweichen darf.

Kapitel 4.

Implementierung

Ein Teil dieser Arbeit bestand in der Implementierung der in Kapitel 3 theoretisch besprochenen LSM-Ausprägungen und -Varianten. Auf Basis dieser Implementierung und der in Kapitel 5 besprochenen Datengrundlage erfolgten die praktischen Untersuchungen (Kapitel 6). In diesem Abschnitt werden die Nutzung, die wichtigsten Ein- und Ausgangsdaten, der grundsätzliche Programmablauf und die Einschränkungen der ausgearbeiteten LSM-Implementierung besprochen.

4.1. Grundlegendes

Die Implementierung erfolgte in der Programmiersprache und -umgebung MATLAB von The MathWorks¹, Version 7.8.0.347 (R2009a), als *Funktion* `lsm.m`. Die Funktion ist auf rein textlicher Ebene realisiert, auf die Entwicklung einer Benutzeroberfläche (*Graphical User Interface*) wurde verzichtet. Die Nutzung von `lsm.m` ist nur von MATLAB aus möglich.

Der Funktionsaufruf lautet allgemein

```
output = lsm( input1, input2, ids, opt ).
```

Die Eingabevariable `input1` beinhaltet das Referenzbild Ψ_f und die Koordinaten von potentiell mehreren Bildpunkten $\varphi \in \kappa_f$, `input2` beinhaltet entsprechend das Suchbild Ψ_g und ebenso Koordinaten von Bildpunkten² $p^0 \in \kappa_g$. Die Variable `ids` definiert, an welchen Bildpunkten ein LSM durchgeführt werden soll. Über die optionale Variable `opt` können die Default-Werte von diversen LSM-Parametern, wie bspw. grundlegendes LSM-Modell und Fenstergröße, verändert werden. In der Variable `output` werden die LSM-Ergebnisse, d. h. die gefundenen Bildpunkte $\hat{p} \in \kappa_g$, und weitere Daten der Prozessierung gespeichert. Zusätzlich zu diesen MATLAB-internen Ergebnisdaten werden Ergebnisgraphiken und log-Dateien zu den Berechnungen ausgegeben.

4.2. Eingangsdaten (*Input*)

Mandatorische Variablen. Die mandatorischen Variablen für `lsm.m` sind `input1`, `input2` und `ids`. `input1` und `input2` sind identisch organisiert, so dass die Beschreibung im Weiteren auf `input1` eingeschränkt werden kann. `input1` ist als Datentyp *Struktur* (*structure*) realisiert und besteht demnach aus *Feldern*, deren *Werte* verschiedene MATLAB-Datentypen annehmen können. Der Aufbau von `input1` ist in Tabelle 4.1 wiedergegeben.

¹<http://www.mathworks.de/products/matlab/>.

²Wir gehen davon aus, dass in einem LSM-Lauf (sequentiell) mehrere Punktepaare $\{\varphi_i, p_i^0\}$ bearbeitbar sein sollen. Aus Übersichtlichkeitsgründen verzichten wir auf die Indexierung »*l*«.

Tab. 4.1. Aufbau der mandatorischen Eingabevariable `input1` (Datentyp Struktur). Feld `eor` ist optional und nur mandatorisch, wenn `opt.method = 'rays'` gesetzt ist (siehe Tabelle 4.2). Die Feldnamen sind in Englisch gehalten. Zum Feld `pts` siehe Text.

	Feld	Datentyp	Bedeutung
<code>input1</code>	<code>.id</code>	Skalar $\in \mathbb{N}$	Bildnummer
	<code>.path</code>	String	Pfad zum Bild
	<code>.pts</code>	Struktur-Matrix	Bildpunkte
	<code>.eor</code>	Struktur	Äußere Orientierung
<i>Felder im Detail</i>			
<code>pts(l)</code>	<code>.id</code>	Skalar $\in \mathbb{N}$	Punktnummer
	<code>.p</code>	Zeilenvektor, Länge 2, $\in \mathbb{R}$	Bildkoordinaten $(\xi, \eta) \in \kappa_f$
<code>eor</code>	<code>.p0</code>	Zeilenvektor, Länge 3, $\in \mathbb{R}$	Projektionszentrum $(X_0, Y_0, Z_0) \in K$
	<code>.R</code>	(3, 3)-Matrix, $\in \mathbb{R}$	Drehmatrix, vermittelt Drehung von κ_f nach K

Das Feld `pts` enthält die Bildpunkte $\varphi \in \kappa_f$ (bzw. im Fall von `input2` die Bildpunkte $\mathbf{p}^0 \in \kappa_g$). Es ist vom Datentyp indexierte Struktur oder auch *Struktur-Matrix* (*structure matrix*), um mehrere Bildpunkte aufnehmen zu können. Tabelle 4.1 zeigt den Aufbau des l -ten Feldes `pts(l)` im Detail.

Mit der mandatorischen Variable `ids` werden die Punktnummern jener Bildpunkte übergeben, an denen ein LSM durchgeführt werden soll. `ids` ist als Zeilenvektor realisiert. Der Wert `[]` (Vektor der Länge 0) bewirkt, dass alle in `input1` gespeicherten Bildpunkte prozessiert werden. Die Abfrage, ob die angeforderten Punkte in `input1` bzw. in `input2` auch vorhanden sind, wird funktionsintern durchgeführt. Nicht vorhandene Punkte werden übersprungen.

Optionale Variable. Die optionale Variable `opt` ermöglicht die Veränderung von Default-Werten diverser LSM-Parameter und erlaubt unter anderem die Auswahl der verschiedenen LSM-Varianten und Ausprägungen. `opt` ist als Struktur realisiert, Tabelle 4.2 zeigt die verfügbaren Felder und (Default-)Werte im Detail.

Im Fall der angewählten geometrischen Bedingung (`opt.method = 'rays'`) werden nach Abschnitt 3.5 neben der äußeren Orientierung von Referenz- und Suchbild (in `input1` resp. `input2` in Tabelle 4.1) die innere Orientierung $(x_0, y_0, c) \in \kappa$ sowie Näherungen $(X^0, Y^0, Z^0) \in K$ für die Objektkoordinaten der Bildpunkte benötigt. Die dafür vorgesehen Felder in `opt` sind `ior` (Datentyp Struktur) und `obj` (Datentyp Struktur-Matrix). Tabelle 4.2 zeigt deren detaillierten Aufbau. Ob die mit Variable `ids` angeforderten Bildpunkte in Feld `obj` vorhanden sind, wird wiederum funktionsintern geprüft.

Die Implementierung bietet über `opt.project` die Möglichkeit, einen gegebenen Näherungsort \mathbf{p}^0 durch Normalprojektion auf die Epipolarlinie l_φ (Figur 3.3 auf Seite 32) zu verbessern. Dazu wird die innere und äußere Orientierung zwingend benötigt. Auf die Wiedergabe der mathematischen Vorschrift wird hier verzichtet.

Tab. 4.2. Aufbau der optionalen Eingabevariable `opt` (Datentyp Struktur). Nur die wichtigsten Parameter sind gezeigt. Wenn vorhanden, sind Default-Werte **fett** gedruckt. Die Feldnamen sind in Englisch gehalten.

Feld	Datentyp	Mögliche Werte	Bedeutung
<code>.layout</code>	String	'kraus' 'gruen'	grundlegendes LSM-Modell: Alternativ- oder Basis-Modell, Abschn. 3.3 und 3.1
<code>.geometry</code>	String	'shift' 'helmert' 'affine'	Geometrische Transformation: S, H oder A, siehe 3.2
<code>.radiometry</code>	String	'apriori' 'estim' 'none'	Radiometrische Transformation: a priori Berechnung, Mitschätzung oder keine, siehe 3.4
<code>.method</code>	String	'unconst' 'rays'	ohne oder mit geometrischer Bedingung, siehe 3.5
<code>.window</code>	Skalar	\mathbb{N} (17), möglich: 3 bis 99	Fenstergröße in [Px], siehe 3.1
<code>.maxIter</code>	Skalar	\mathbb{N} (15), möglich: 1 bis 1000	maximale Iterationszahl, siehe 3.1
<code>.convCrit</code>	String	'forst' 'kraus' 'none'	Konvergenzkriterium: nach Förstner, nach Kraus oder keines, siehe 3.1
<code>.sigGreyval</code>	Skalar	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (10)	Beobachtungsgenauigkeit der Grauwertgleichungen in [Grauwerten], siehe 3.5
<code>.sigImageSea</code>	Zeilenvektor, Länge 2	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (0.1, 0.1)	Beob.gen. der Kollinearitätsgleichungen des Suchbildes in [Px], siehe 3.5
<code>.scalePal</code>	Skalar	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (3)	Maßstab für die Z-Kodierung des Differenzbildes in [Grauwerten]; siehe 3.1
<code>.project</code>	Boole'sch	true false	Verbesserung von \mathbf{p}^0 durch Projektion auf Epipolarlinie l_φ ein/aus, siehe Text
<code>.noroundSea</code>	Boole'sch	true false	Rundung von \mathbf{p}^0 auf Pixelmitten ein/aus, siehe 3.1
optional und nur mandatorisch, wenn <code>opt.method = 'rays'</code> oder <code>opt.project = true</code>			
<code>.ior.p0</code>	Zeilenvektor, Länge 3	\mathbb{R}	Projektionszentrum $(x_0, y_0, c) \in \kappa$, siehe 2.2
<code>.obj(1).id</code>	Skalar	\mathbb{N}	Nummer von Objektpunkt <code>obj(1)</code>
<code>.obj(1).P</code>	Zeilenvektor, Länge 3	\mathbb{R}	Näherungskordinaten $(X^0, Y^0, Z^0) \in K$ von Objektpunkt <code>obj(1)</code>

4.3. Ergebnisdaten (*Output*)

Der *Output* von `lsm.m` gliedert sich in (a) die MATLAB-interne Variable `output` und (b) Ergebnisdaten zur MATLAB-externen Inspektion eines LSM-Laufes. Die Variable `output` enthält für jeden Bildpunkt die gefundenen Bildkoordinaten $\hat{\mathbf{p}} \in \kappa_g$ (Primär-Ergebnisse), und Qualitätsinformation der Ausgleichung, Daten aus jeder Iteration und Meta-Daten zum LSM-Lauf (Sekundär-Ergebnisse). Die externen Ergebnisdaten bestehen aus einer log-Datei zu den Berechnungen und einer Ergebnisgraphik für jeden Punkt. Aus Platzgründen beschreiben wir hier nur die Ergebnisgraphik im Detail.

Ergebnisgraphik. Die Ergebnisgraphik dient zur graphischen Analyse der LSM-Resultate und wird für jeden prozessierten Punkt ausgegeben. Figur 4.1 zeigt eine solche Ergebnisgraphik an einem Beispielpunkt. Darin eingezeichnet sind sieben Boxen, deren Inhalte im Folgenden erläutert werden.

Box 1 enthält die grundlegenden Meta-Daten der Ergebnisgraphik: Nummer des prozessierten Bildpunktes, Nummer des Referenzbildes (`input1.id`) und Nummer des Suchbildes (`input2.id`).

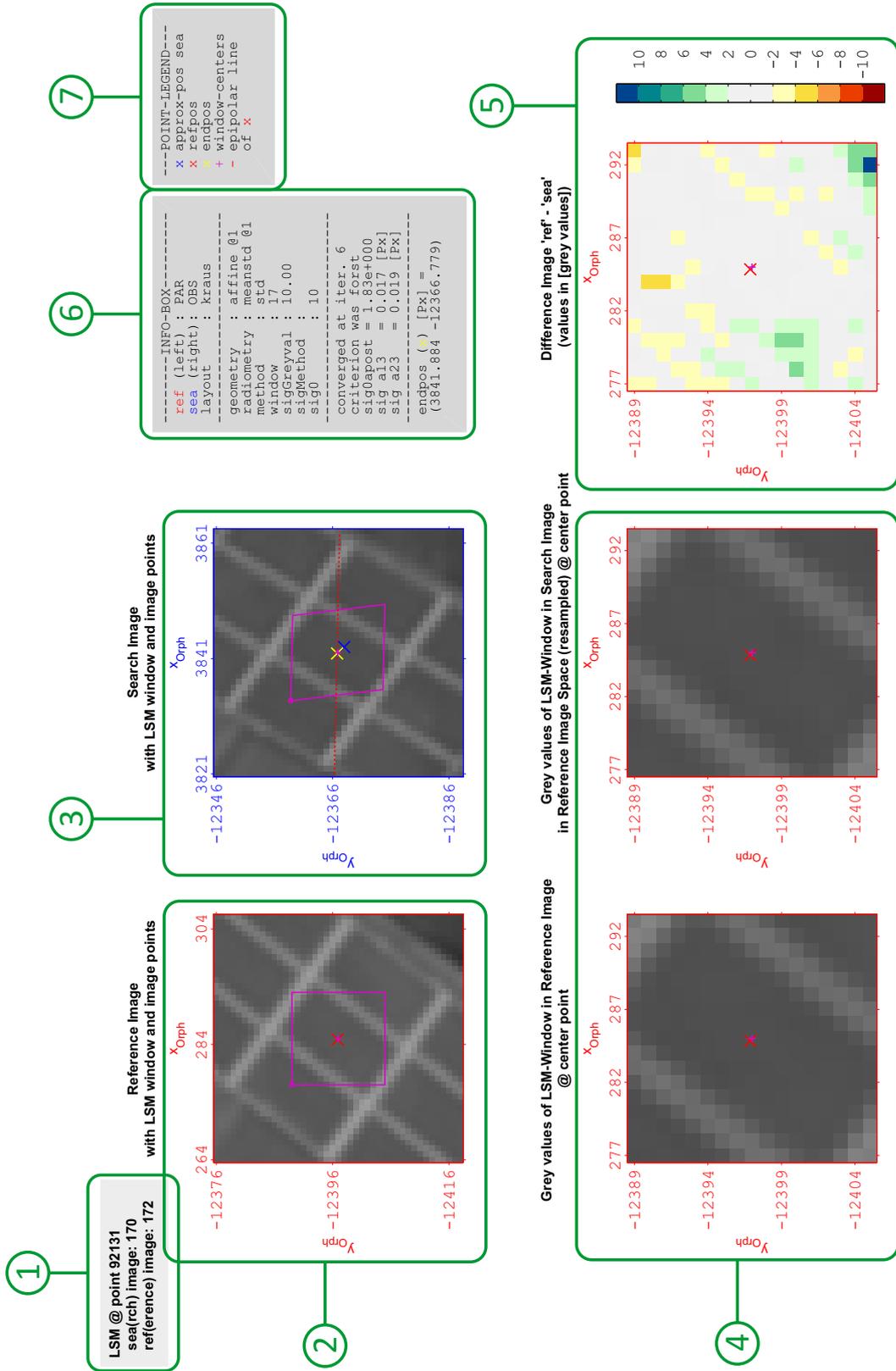
Box 2 zeigt die originalen Grauwerte f des Referenzbildes Ψ_f in einem Ausschnitt und das feste Referenzfenster. Zusätzlich ist der Fenstermittelpunkt φ_m und der Referenzpunkt φ eingezeichnet. Das Koordinatensystem dieses Ausschnitts ist $\kappa_f = \{\xi, \eta\}$.

Box 3 zeigt die originalen Grauwerte g des Suchbildes Ψ_g und das Suchfenster am Ende der Berechnung. Zusätzlich zum zugehörigen Fenstermittelpunkt $\hat{\mathbf{p}}_m$ ist der ermittelte Punkt $\hat{\mathbf{p}}$ eingezeichnet. Sind sowohl innere Orientierung als auch äußere Orientierung von Referenz- und Suchbild gegeben, wird zur visuellen Stützung weiters die Epipolarlinie $l_\varphi \in \kappa_g$ von φ (Figur 3.3 auf Seite 32) eingezeichnet. Die Berechnung von l_φ erfolgt über Fundamentalmatrix und anschließende Normalisierung, siehe bspw. [McGlone, 2004]. Das Koordinatensystem dieses Ausschnitts ist $\kappa_g = \{x, y\}$.

Box 4 besteht aus zwei a posteriori Bild-Ausschnitten. Das Koordinatensystem ist in beiden Fällen $\kappa_f = \{\xi, \eta\}$. Im linken Ausschnitt sind die Grauwerte $f(\varphi_k)$, $k = 1, \dots, w^2 = K$, des Referenzfensters abgebildet. Der rechte Ausschnitt zeigt die *interpolierten* Grauwerte $g(\hat{\mathbf{p}}_k)$ des Suchfensters am Ende der Iterationen, wiedergegeben an den Fensterpunkten $\varphi_k \in \kappa_f$. Für die graphische Darstellung wird auf den Wertebereich W_g , vgl. (2.4) auf Seite 10, mit $b = 8$ skaliert. Das entspricht der Bildtiefe der gegebenen Daten (Tabelle 5.1 auf Seite 50). Dieser Ausschnitt visualisiert demnach ein lokales *Resampling* des Suchbildes in den Koordinatenrahmen von Referenzbild Ψ_f .

Bei aktivierter **radiometrischer Transformation** R_L ist an den Grauwerten eines der beiden Ausschnitte die radiometrische Transformation R_L angebracht. Beim Basis-Modell (`opt.layout = 'gruen'`) ist der rechte Such-Ausschnitt radiometrisch transformiert, beim Alternativ-Modell (`opt.layout = 'kraus'`) der linke Referenz-Ausschnitt (siehe Abschnitt 3.4 ab Seite 27). Für die Darstellung wird wiederum auf W_g skaliert.

Fig. 4.1. Ergebnisgraphik von `lsm.m` anhand Beispielpunkt 92131 (um 90° rotiert). Die diversen Eintragungen sind in Englisch gehalten. Für Erläuterungen zu den Boxen 1–7 siehe Text.



Zusätzlich sind die ausgezeichneten Punkte des Referenzfensters eingezeichnet: Fenstermittelpunkt φ_m und Referenzpunkt φ .

Box 5 enthält die Grauwert-Differenzen $d(\varphi_k)$, d. h. die Differenz der Ausschnitte von Box 4 (vor Anbringung der Skalierung auf W_g); vgl. hierzu (3.18) auf Seite 16 unter Beachtung einer eventuell aktivierten radiometrischen Transformation. Das Bild ist unter Verwendung einer geeigneten Palette farbkodiert, um die Interpretation zu erleichtern. Die Palette ist rechts neben dem Differenzbild abgebildet, die Skalierung ist frei wählbar (`opt.scalePal`; im gezeigten Fall ist der Wert 2). Wie in den Ausschnitten von Box 4 sind weiters der Mittelpunkt φ_m des Referenzfensters und der Referenzpunkt φ abgebildet.

Box 6 besteht aus ausgewählter Information zu den Einstellungen und Ergebnissen des LSM-Laufes («Info-Box»). Speziell sind darin die Koordinaten des ermittelten Punktes $\hat{p} \in \kappa_g$ und Qualitätsinformation der Ausgleichung wiedergegeben ($\hat{\sigma}_0$ und $\hat{\sigma}_{a_{13}}, \hat{\sigma}_{a_{23}}$). Für die weiteren Eintragungen siehe direkt Figur 4.1.

Box 7 enthält die Legende für die eingezeichneten Punkte und die optionale Epipolarlinie. In der eingeführten Notation bedeuten die Einträge:

x approx-pos sea	:	$p^0 \in \kappa_g$
x refpos	:	$\varphi \in \kappa_f$
x endpos	:	$\hat{p} \in \kappa_g$
+ window-centers	:	$\varphi_m \in \kappa_f$ bzw. $\hat{p}_m \in \kappa_g$
- epipolar line of x	:	$l_\varphi \in \kappa_g$

4.4. Programmablauf

Um einen Einblick in den Programmablauf von `lsm.m` zu geben, sind die wesentlichen Prozessschritte in Tabelle 4.3 in Pseudo-Code wiedergegeben. Zu einigen dieser Schritte werden in den folgenden Absätzen erklärende Anmerkungen gemacht.

Beobachtungs- und Parameterbild. In Tabelle 4.3 werden die Bezeichnungen Beobachtungsbild Ψ_O und Parameterbild Ψ_P samt den zugehörigen Bildmatrizen O bzw. P eingeführt. In diesen Bezeichnungen drückt sich aus, welches der gegebenen Bilder – Referenzbild Ψ_f und Suchbild Ψ_g – bei dem gewählten LSM-Modell auf der Beobachtungsseite »O« bzw. Parameterseite »P« des funktionalen Modells steht. Wurde beispielsweise das Basis-Modell gewählt (`opt.layout = 'gruen'`), gilt $\Psi_O = \Psi_f$. Die Bildmatrix O besteht in der Notation von Kapitel 3 dann aus den Grauwerten $f(\varphi_k)$, $k = 1, \dots, K$ (vgl. Tabelle 3.4 auf Seite 25). Eine Auflistung der möglichen Zuordnungen ist in Tabelle 4.4 auf Seite 46 gegeben.

Übergang auf Ausschnitte »C«. Um Rechenzeit zu sparen, wird in Prozessschritt 11 für jeden Bildpunkt vor den rechenintensiven Operationen, wie Berechnung der partiellen Ableitungen und der Grauwertinterpolation in den Iterationen, auf Bildausschnitte O_C und P_C übergegangen. Die Ausschnittgröße wurde zu $4w + 1$ definiert, mit w der gewählten Fenstergröße (`opt.window`). Damit kann das (unverformte) Suchfenster, ausgehend von seiner Startposition, in alle Richtungen um jedenfalls eine Fenstergröße verschoben werden, ohne, dass in den partiellen Ableitungen der Randeffect der diskreten Korrelation einwirkt; siehe [Gonzalez *et al.*, 2009].

Tab. 4.3. Hauptschritte des Ablaufes von `lsm.m` in Pseudo-Code. Für eine Erläuterung von Beobachtungsbild Ψ_O und Parameterbild Ψ_P resp. die Bildmatrizen O_\bullet und P_\bullet siehe Text. Auf eine Indexierung mit Iterationszahl i wird verzichtet. Die im Typ bisher nicht definierte Ergebnisvariable `output` kommt hier explizit vor. Sie ist als Struktur-Matrix realisiert.

1	Selektion angeforderter Punkte in <code>input1</code> und <code>input2</code> .
2	wenn Anzahl gefundener Punkte ≥ 1 , dann setze fort, sonst Abbruch.
3	Interpretation Parameterwerte.
4	wenn Parameter gültig und vollständig, dann setze fort, sonst Abbruch.
5	wenn <code>opt.method = 'rays'</code> , dann wiederhole Schritt 2 in <code>opt.obj</code> .
6	Zuweisung von Referenzbild Ψ_f und Suchbild Ψ_g auf die Beobachtungsseite »O« und Parameterseite »P« des funktionalen Modells.
7	Einlesen der Bildmatrizen O und P (resp. Grauwerte) von Beobachtungsbild Ψ_O und Parameterbild Ψ_P entsprechend Schritt 6.
8	für jeden selektierten Punkt l führe aus :
9	Vorbereitung: Initialisierung <code>output(1)</code> , Berechnung der Epipolarlinie von φ , Setzen der Reduktionspunkte $\varphi_{\text{red}} \in \kappa_f$, $\mathbf{p}_{\text{red}} \in \kappa_g$.
10	Setzen von \mathbf{U}^0 (Näherungswerte aller unbekannt Parameter).
11	Übergang auf Ausschnitte O_C in O und P_C in P , zentriert in den zugehörigen Reduktionspunkten $\{\varphi_{\text{red}}, \mathbf{p}_{\text{red}}\}$, Ausschnittgröße = $4w + 1$ mit w der Fenstergröße.
12	Berechnung des Gradienten von P_C , hier bezeichnet mit ∇P_C .
13	Aufstellen der Kofaktormatrizen Q_{ll} und $Q_{ll,k}$.
14	Erstentnahme der Fenster-Grauwerte O_w aus O_C und P_w aus P_C sowie der Fenster- Ableitungen ∇P_w aus ∇P_C an den zugehörigen Stellen $\{\varphi_k, \mathbf{p}_k^0\}$, $k = 1, \dots, w^2 = K$.
15	wiederhole bis gew. Konvergenzkrit. erfüllt oder Iterationszahl $i = \text{opt.maxIter}$:
16	wenn <code>opt.radiometry = 'apriori'</code> , führe an P_w a priori Grauwert-Transformation durch.
17	Aufstellen von D und l gemäß gewählten Parametern.
18	Normalgleichungslösung $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \hat{\sigma}_0, \hat{C}_{uu})$.
19	$\mathbf{U}^0 \leftarrow \mathbf{U}^0 + \mathbf{u}$
20	Berechnung der aktuell gefundenen Position $\mathbf{p} \in \kappa_g$ resp. <code>output(1).pit(i+1,:)</code>
21	Berechnung neuer Fensterpunkte $\mathbf{p}_k^0 \in \kappa_g$, $k = 1, \dots, K$.
22	Interpolation neuer Grauwerte P_w aus P_C an \mathbf{p}_k^0 , wenn <code>opt.layout = 'gruen'</code> , sonst O_w aus O_C .
23	Interpolation neuer Ableitungen ∇P_w aus ∇P_C an \mathbf{p}_k^0 , wenn <code>opt.layout =</code> 'gruen' .
24	$i \leftarrow i + 1$.
25	Durchführung Grauwert-Transformation R_L an P_w , wenn <code>opt.radiometry \neq 'none'</code> .
26	Berechnung des Differenzbildes $O_w - P_w$, wenn <code>opt.layout = 'gruen'</code> , sonst $-(O_w - P_w)$.
27	Wiederholung Schritt 19 (= Schätzwert $\hat{\mathbf{p}} \in \kappa_g$ resp. <code>output(1).p</code>).
28	Verspeicherung der log-Datei und Ergebnisgraphik.
29	Ausgabe <code>output</code> .

Tab. 4.4. Inhalt der Bildmatrizen O und P in Abhängigkeit des gewählten LSM-Modells (`opt.layout`) in der Schreibweise von Kapitel 3, $k=1, \dots, w^2=K$; vgl. Tabelle 3.4 auf Seite 25.

<code>opt.layout</code>	O	P
'gruen'	$f(\varphi_k)$	$g(\mathbf{p}_k^0)$
'kraus'	$g(\mathbf{p}_k^0)$	$f(\varphi_k)$

4.5. Einschränkungen

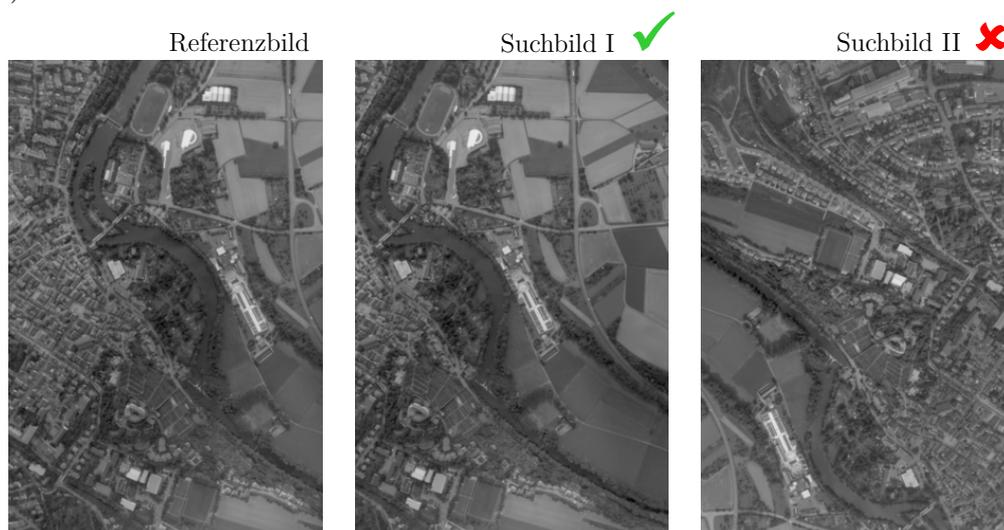
Die bestehende Implementierung weist einige Einschränkungen auf. Die bedeutendsten sind in den folgenden Absätzen beschrieben.

Näherungswerte. Wie im Absatz *Initialisierung* auf Seite 17 ausgeführt, werden die Näherungswerte ω_G^0 resp. w_G^0 , $G \in \{S, H, A\}$, mit $\mathbf{0}$ initialisiert. Damit wird die Identabbildung als Startabbildung zwischen Referenz- und Suchfenster angenommen. Das hat Konsequenzen (a) auf die maximal bearbeitbaren perspektivischen Verzerrungen (siehe angegebene Textstelle) und (b) auf die erlaubte »Verspeicherungs-Orientierung« der verwendeten Bilder. Unter der Verspeicherungs-Orientierung (VO) verstehen wir die Ausrichtung mit der ein Bild in der Bild-Datei gespeichert ist. Konsequenz (b) soll am Beispiel des in dieser Arbeit verwendeten West \leftrightarrow Ost-Luftbild-Blockes (siehe Abschnitt 5.1 ab Seite 49) erläutert werden: Für die Verwendbarkeit in `lsm.m` muss die VO so gewählt sein, dass die zu bearbeitenden Bilder topologisch korrekt erscheinen; d.h. für beide Bilder ist z.B. Gitter-Nord »oben« und Gitter-Ost »rechts«. Bei den vorliegenden Daten ist das nicht für alle Bilder der Fall: Die VO ist so gegeben, dass die Flugrichtung eines jeden Bildes in Richtung der x -Achse des Bildkoordinatensystems weist. Aufnahmen eines Ost \rightarrow West-Streifens erscheinen daher im Vergleich zu Aufnahmen eines West \rightarrow Ost-Streifens auf den Kopf gestellt. Figur 4.2 zeigt ein positives und ein negatives Beispiel.

Im Fall der hier verwendeten Aufnahmen ist die äußere Orientierung bereits bekannt (Abschnitt 5.2 auf Seite 49). Eine Neu-Verspeicherung der Bilder mit passender VO löst das beschriebene »VO-Problem« daher nicht hinreichend: Die Erweiterung des funktionalen Modells um geometrische Bedingungen und Folgeberechnungen mit den gefundenen Punkten (bspw. Vorwärtsschnitte in den praktischen Untersuchungen in Kapitel 6) sind von der äußeren Orientierung bezüglich der ursprünglichen VO abhängig. Eine hinreichende Behebung des VO-Problems bestünde darin, die Näherungswerte der geometrischen Transformation in Abhängigkeit der äußeren Orientierung des Suchbildes zu wählen. Im konkreten Fall der schematisch angeordneten Luftbilder wäre eine *Startrotation* einzuführen. Als Wert wäre bei der gegebenen Parametrisierung der Rotationsmatrix (*Roll*, *Pitch*, *Yaw*; siehe Abschnitt 5.2 auf Seite 51) die Differenz der *Yaw*-Winkel von Referenz- und Suchbild zu verwenden³. Aufgrund des zusätzlichen Implementierungsaufwandes wurde auf eine Behebung des VO-Problems im Rahmen dieser Arbeit jedoch verzichtet. Es können daher nur Aufnahmen innerhalb eines Streifens

³Die Transformation $S(\text{lift})$ müsste dann ebenso mit einer Startrotation initialisiert werden.

Fig. 4.2. Beispiel zum Problem der Verspeicherung-Orientierung (VO) für 1sm.m. Suchbild II ist zum Referenzbild topologisch nicht korrekt (Gitter-Nord von II ist »unten«). Für weitere Details siehe Text.



(bzw. nach Tabelle 5.1 auf Seite 50 wegen $q_B > 50\%$ auch des übernächsten Streifens) bearbeitet werden.

Verfeinerte Ausgleichung. Fortgeschrittene Prinzipien der Ausgleichsrechnung, wie die Elimination von überflüssigen bzw. nicht schätzbaren Parametern (bspw. auf Basis von Signifikanz und Korrelation bzw. Bestimmbarkeit), die Stützung der Normalgleichungslösung durch fiktive Beobachtungen zu einigen freien Parametern oder die Elimination grober Fehler (bspw. über iterative Abgewichtung oder *Data Snooping*; siehe [Kraus, 1996]) sind in der bestehenden Implementierung nicht realisiert. Aufgrund der kontrollierten Bedingungen unter denen 1sm.m im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt wird, ist das Fehlen dieser Methoden akzeptierbar.

Kapitel 5.

Daten

Die experimentellen Untersuchungen in Kapitel 6 zu den in Kapitel 3 besprochenen LSM-Varianten und -Erweiterungen erfolgen anhand von panchromatischen UltraCamX-Bildern eines orientierten Luftbild-Blockes. Dieser Abschnitt beschreibt den Bild-Block und enthält Angaben zu dessen Orientierung.

5.1. Bild-Block und Einzelbilder

Bei dem verwendeten Luftbild-Block handelt es sich um Bild-Daten, die im Rahmen der »Kameraevaluierung 2009« der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie und Fernerkundung (DGPF) in Flügen mit verschiedenen Kamerasystemen akquiriert wurden [Cramer, 2010]. Beflogen wurde das photogrammetrische Testgebiet Vaihingen an der Enz in Deutschland. Wir verwenden in dieser Arbeit den UltraCamX-Block. Die digitale Luftbild-Kamera UltraCamX ist ein Fabrikat der Firma Microsoft/Vexcel [Gruber *et al.*, 2008]. Tabelle 5.1 auf der nächsten Seite fasst die technischen Daten dieses Bild-Blocks und der Einzelbilder zusammen.

Der Bild-Block ist so geplant, dass die einzelnen Längsstreifen parallel zur X - (oder Rechtswert-) Achse der UTM-Projektion, Zone 32N, liegen (»West \leftrightarrow Ost-Block«). Die mittlere Längsüberlappung l_B beträgt etwa 80 %, demnach ist jedes Bild in Längsrichtung mit vier Nachbarbildern überlappt. Die mittlere Querüberlappung q_B ist 68 %. Jedes Bild ist in Querrichtung daher von zwei direkten Nachbarbildern überlappt. In Summe gibt es (abgesehen vom Block-Rand) pro Längsstreifen-Bild somit 14 mögliche Bildpaare: 4 Bildpaare im bildeigenen Streifen und $2 + 4 + 4$ Quer-Bildpaare. Vom gegebenen Bildmaterial (PAN, RGB) wurden nur die einkanaligen PAN-Bilder verwendet. Diese liegen »vorab entzeichnet« vor. Dazu kam den Bildflug-Unterlagen zufolge ein von Vexcel kalibriertes, diskretes Korrekturgitter zum Einsatz. Die Einzelbilder sind so gespeichert, dass die Flugrichtung in Richtung der x -Achse des Bildkoordinatensystems $\kappa = \{x, y\}$ weist (Figur 5.1 auf der nächsten Seite, κ nach Abschnitt 2.2 auf Seite 8). Bilder, die im Ost \rightarrow West-Flug aufgezeichnet wurden, stehen im Vergleich zu West \rightarrow Ost-Aufnahmen somit auf dem Kopf. Diese Verspeicherungs-Orientierung (VO) entspricht in der offiziellen Bezeichnung von Vexcel der »CW 270°«-Stellung.

5.2. Orientierung

Die Orientierung der Luftbilder wurde vom Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung als teilnehmende Einrichtung an der genannten Kameraevaluierung photogrammetrisch über eine Bündelblock-Ausgleichung (Aerotriangulation, AT) berechnet. Eine

Tab. 5.1. Daten zum verwendeten Bild-Block und den Einzelbildern (UltraCamX). Lage-Objektkoordinaten X, Y in UTM-Projektion, Zone 32N, Z sind ellipsoidische Höhen über dem Bezugsellipsoid WGS 84. Zur Verspeicherungs-Orientierung siehe Text.

Eigenschaft	Wert
Flugdatum	11.09.2008
Mittl. Pixelgröße am Boden	8 cm
Bildmaßstab	ca. 1:12 000
Mittl. Flughöhe über Grund	Z = 1200 m
Mittl. Geländehöhe	Z = 300 m
Mitte Projektgebiet	X = 495 700 m, Y = 5 420 300 m
Ausdehnung Bild-Block	in X rund 6.4 km, in Y rund 3.7 km
Ausrichtung Längsstreifen	X-parallel
Anzahl Längs-/Querstreifen	5 / 2
Mittl. Längs-/Querüberlappung	$l_B = 81\% / q_B = 68\%$
Anzahl Bilder	215
Bildformat (<i>along- × across-track</i>)	9420 × 14 430 Px
Mittl. Bildformat am Boden	in X rund 810 m, in Y rund 1240 m
Pixelgröße	7.2 μm × 7.2 μm
Kamerakonstante c	100.5 mm = 13 958.3 Px
Bildmaterial	PAN, RGB
Bild-Level	3
Bildtiefe b	8 bit
Verspeicherungs-Orientierung	CW 270°
GNSS und IMU im Einsatz	ja

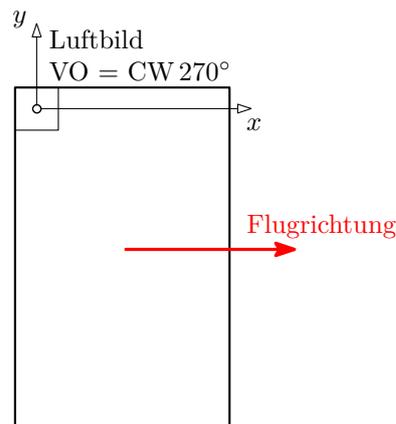


Fig. 5.1. Zur Verspeicherungs-Orientierung (VO) der Einzelbilder in »CW 270°«-Stellung. Jedes Bild ist so gespeichert, dass die Flugrichtung in Richtung der x -Achse zeigt (ev. Kurskorrektur- und Verkantungswinkel vernachlässigend). Bilder aus Ost \rightarrow West-Streifen, stehen im Vergleich zu West \rightarrow Ost-Aufnahmen daher auf dem Kopf.

mathematische Behandlung des Bündelblock-Konzepts ist außerhalb des Fokus dieser Arbeit; der Leser sei auf die beiden Lehrbücher [Kraus, 2004] und [Kraus, 1996] verwiesen.

Die AT ist ausführlich in [Jacobsen *et al.*, 2010] beschrieben, wir beschränken uns daher auf die wesentlichen Angaben. Das Bezugssystem ist UTM, Zone 32N. Die Pass- und Verknüpfungspunkt-Messung erfolgte mit INPHO Match-AT¹, die Bündelblockausgleichung in H. Kager's ORIENT². Die GPS- und IMU-Beobachtungen (Projektionszentren und Bildstellungen) sind in Form streifenweiser (GPS) und eines globalen 3D-Modells (IMU) berücksichtigt. Systematische Fehler in den GPS-Koordinaten werden durch freie Verschiebungen in den streifenweisen Modellen berücksichtigt, systematische Fehler in den IMU-Winkeln durch additive Komponenten. Das mathematische Modell hierzu kann [Ressl, 2001] entnommen werden. Verzeichnungsparameter waren aktiviert und sind in [Jacobsen *et al.*, 2010] dokumentiert. Weitere Standardkorrekturen, namentlich Refraktions-, Erdkrümmungs- und Projektionskorrektur (RK, EK resp. PK), waren ebenfalls aktiv. Die Rotationsmatrizen sind in den Winkeln *Roll*, *Pitch* und *Yaw* nach ARINC 705-Standard parametrisiert. Die Anzahl der aktiven Passpunkte (PP) betrug 59 (3221 Beobachtungen im Bildraum), die Anzahl der aktiven Verknüpfungspunkte (VP) 2322 (51 249 Beobachtungen). Mittels Varianzkomponenten-Schätzung (*variance-component analysis* [Förstner, 1979]) wurden a posteriori Genauigkeiten für die einzelnen Beobachtungsgruppen geschätzt. Für die Bildmessgenauigkeit von PP und VP betragen die ermittelten Werte: $\hat{\sigma}_{xy, PP} = 0.09$ Px resp. $\hat{\sigma}_{xy, VP} = 0.11$ Px.

Für den Einsatz der Luftbilder in dieser Arbeit wurde die gegebene Orientierung etwas **abgewandelt**: Wir wiederholten die AT mit möglichst einfachen Modellvorstellungen, um notwendige Zusatz-Implementierungen gering zu halten. Konkret wurden gegenüber dem Referenzzustand die Schätzung von Verzeichnungsparametern, RK, EK und PK deaktiviert. Der absolute Anstieg in den geschätzten Bildmessgenauigkeiten $\hat{\sigma}_{xy, PP}$ und $\hat{\sigma}_{xy, VP}$ ist geringer als 0.002 Px, der relative Anstieg beträgt in etwa 1.5%. Damit erscheint die Annahme gerechtfertigt, dass der Übergang auf das einfache Modell ohne nennenswerte Genauigkeitseinbußen möglich ist.

¹http://www.inpho.de/index.php?seite=index_match-at&navigation=1908&root=165&kanal=html

²http://www.ipf.tuwien.ac.at/products/produktinfo/orient/html_hjk/orient_e.html

Kapitel 6.

Praktische Untersuchungen

Die praktischen Untersuchungen geben empirische Antworten zu Fragestellungen, die sich aus der Theorie und im Zuge der Implementierungsarbeiten zu den vorgestellten LSM-Ausprägungen und -Varianten (Kapitel 3) ergaben. Die **Themenkreise** dieser Experimente sind:

- Untersuchungen zu den geometrischen Transformationen (Abschnitt 6.2 ab Seite 56).
- Untersuchungen zu Basis-Modell und Alternativ-Modell (Abschnitt 6.3 ab Seite 60).
- Untersuchungen zu a priori und mitgeschätzter radiometrischer Transformation (Abschnitt 6.4 ab Seite 69).
- Untersuchungen zur Einführung der Kollinearitätsgleichungen als geometrische Bedingung (Abschnitt 6.5 ab Seite 72).

Jede Untersuchung wird anhand spezifischer LSM-Einstellungen geführt. Diese sind jeweils in den oben angegebenen Abschnitten besprochen und motiviert. Die konstanten Rahmenbedingungen der Untersuchungen geben wir im folgenden Abschnitt.

6.1. Rahmenbedingungen

Die Arbeiten basieren auf der geschaffenen MATLAB-Implementierung (Kapitel 4) und den orientierten und entzeichneten, panchromatischen UltraCamX-Daten des gegebenen Luftbild-Blocks mit $l_B \approx 80\%$ und $q_B \approx 70\%$ (Kapitel 5). Um das »Problem« der verlangten guten Näherungsorte zu umgehen, kommen als Referenzpunkte und zugehörige Näherungsorte qualifiziert ausgewählte und manuell gemessene Bildpunkte in drei (Objekt-)Kategorien zur Anwendung. Details zu Punktauswahl und -messung werden im nächsten Absatz besprochen. Angaben zur Bezeichnung der LSM-Modelle und -Varianten im Rahmen der Experimente hält der darauffolgende Absatz bereit.

Bildmaterial, Punktauswahl, -messung und -kategorien. Die Auswahl und Messung der korrespondierenden Bildstellen erfolgte manuell in fünf aufeinanderfolgenden Bildern eines Längsstreifens¹. Wir bezeichnen die Bilder dieses Quintupels im Weiteren mit Bild 1 bis 5. Wegen $l_B \approx 80\%$ sind Bild 1 und Bild 5 zu etwa 20% überlappt (siehe Figur 6.1 auf der nächsten Seite für eine Übersicht). In den Experimenten wird üblicherweise Bild 1 als Referenzbild Ψ_f verwendet und die Bilder 2–5 dienen als Suchbilder. Das erlaubt, dass die maximal möglichen perspektivischen Verzerrungen zwischen Längsstreifen-Bildern

¹Dass keine Bilder von benachbarten Längsstreifen verwendet werden konnten, hängt mit dem »VO-Problem« der Implementierung zusammen, siehe Absatz **Näherungswerte** auf Seite 46.

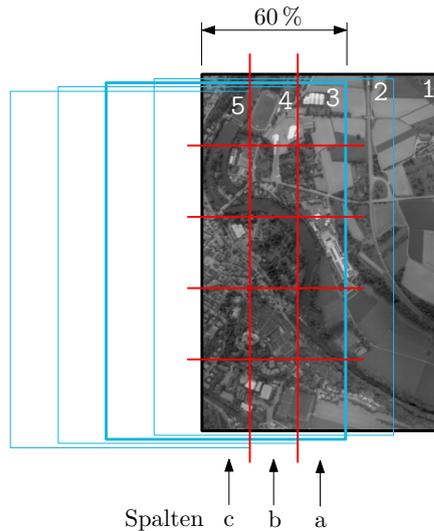


Fig. 6.1. 5×3 -Raster (rot) im 60%-Bereich von üblichem Referenzbild 1 und mittlerem Bild 3 des Quintupels für die Punktauswahl. Jede der Spalten a, b und c hat eine Ausdehnung von etwa 20 % einer Bildlänge. Die Darstellung ist schematisch und spiegelt die äußere Orientierung der fünf Bilder nur näherungsweise wider.

des verwendeten Bild-Blockes in die Untersuchungen eingehen. Für manche Experimente wird auch Bild 2 als Referenzbild und Bild 1 als Suchbild herangezogen (Abschnitte 6.3 und 6.4).

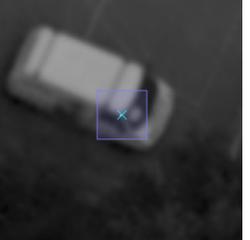
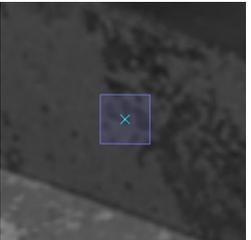
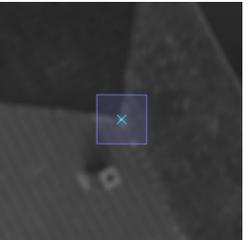
Der Punktauswahl zugrundegelegt ist ein regelmäßiges Raster im 60%-Längsüberlappungs-Bereich von Referenzbild 1 und mittlerem Bild 3 mit fünf Zeilen und drei Spalten (a, b, und c; Figur 6.1). Spalte c entspricht demnach der Zone 20%-iger Überlappung zwischen Bild 1 und Bild 5. Motiviert ist dieses Messdesign vor dem Hintergrund einer guten Punktverteilung über den Bildraum und der Forderung, dass jeder gemessene Punkt in zumindest drei Bildern vorkommen soll (als Voraussetzung für die 3-Strahlen-Vorwärtsschnitte in den Abschnitten 6.2 und 6.5). Die Punktmessung erfolgte in drei Punktkategorien:

- (1) Bildpunkte von Objektpunkten mit horizontalen bzw. in etwa bildebene-parallel Ebenen als Umgebungsfläche, Kategorie **HEB**.
- (2) Bildpunkte von Objektpunkten mit Schrägebene als Umgebungsfläche, Kategorie **SEB**.
- (3) Bildpunkte von Objektpunkten mit nicht ebener Umgebungsfläche, Kategorie **NEB**.

Die Punktauswahl in diesen Kategorien erfolgte unter Berücksichtigung einer Ziel-**Fenstergröße** von 17 Pixel. Dieser Wert liegt in der Mitte der generellen Empfehlungen von [Kraus, 1996, Seite 398]; siehe auch Absatz **Fenstergröße** auf Seite 18. Wenn nicht anders angegeben, wurden die Experimente mit dieser Fenstergröße durchgeführt. Die gemessenen Punkte sind unsignalisiert und Abbildungen natürlicher und nicht-natürlicher Objekte. Typische Vertreter der Kategorie **NEB** sind Giebel- und Firstpunkte sowie Punkte auf Autodächern. Kategorie **SEB** besteht wegen der weitgehenden Unbewegtheit des natürlichen Geländes zur Gänze aus Punkten auf Schrägdächern. Punkte der Kategorie

HEB sind Straßenmarkierungen, Punkte auf Feldern und Kanaldeckel. Bildbeispiele zu den gemessenen Punkten und die konkreten Punktzahlen sind in Tabelle 6.1 gegeben.

Tab. 6.1. Beispiele aus den Punktkategorien HEB, SEB und NEB und Punktzahlen in den einzelnen Spalten des Messrasters (Figur 6.1) sowie gesamt. Die Kreuze (cyan, \times) markieren die gemessenen Bildpositionen, die umschließenden Fenster haben die Ziel-Fenstergröße von 17 Pixel. Ausschnittabmessung etwa 7 m.

	HEB	SEB	NEB
Punktbeispiele			
			
Anz. Spalte a	9	0	5
Anz. Spalte b	5	0	4
Anz. Spalte c	6	6	7
Anz. gesamt	20	6	16

Jede Punktkategorie ist mit Modellvorstellungen verknüpft: Für ein LSM von einander zugeordneten HEB-Punkten sollte der *Shift* S als geometrische Transformation ausreichen, SEB-Punkte erfordern die Affintransformation A , und bei NEB-Punkten wird theoretisch mit allen eingeführten Transformationen ein Fehler in der gefundenen Position \hat{p} vorliegen (vgl. Tabelle 3.1 auf Seite 21).

Die praktische Durchführung der Punktauswahl und -messung erfolgte im *Photo Measurement Tool* von Inpho Match-AT². Das Programm speichert neben den Bildkoordinaten auch durch Vorwärtsschnitt (d. i. die Verschneidung korrespondierender Bildstrahlen im Objektraum) berechnete Objektkoordinaten der gemessenen Punkte. Für Analysen, wo Näherungswerte für die Objektkoordinaten der Bildpunkte benötigt werden, kamen diese Werte zur Verwendung (Abschnitte 6.2 und 6.5).

Bezeichnung der LSM-Modelle und -Varianten. Wir verwenden in den nachfolgenden Abschnitten in Figuren, Tabellen und teilweise im Text Kurz-Bezeichnungen für die möglichen LSM-Ansätze und -Varianten. Die Haupt-Unterscheidungsmerkmale sind (a) grundlegendes LSM-Modell (Basis-Modell oder Alternativ-Modell), (b) mit oder ohne geometrischer Bedingung, (c) Art der geometrischen und (d) Art der radiometrischen

²http://www.inpho.de/index.php?seite=index_match-at&navigation=1908&root=165&kanal=html

Transformation. Die basierend auf diesen Merkmalen eingeführten Bezeichnungen sind in Tabelle 6.2 angegeben. Einen Satz an LSM-Einstellungen (Parameter der Variable `opt`, siehe Tabelle 4.2 auf Seite 41) nennen wir auch ein »LSM-Setup«. Eine radiometrische Transformation wird entsprechend den Ausführungen im Absatz **Bemerkung** auf Seite 31 standardmäßig aktiviert; nur bei einzelnen Experimenten kommt auch die N-Variante zum Einsatz.

Tab. 6.2. Kurz-Bezeichnungen für LSM-Ansätze und -Varianten. Leere Bezeichnungsspalten »_« können von jedem möglichen Wert der betreffenden Spalte besetzt werden. Tabellenspalte »Ref.« verweist auf die maßgebenden Abschnitte im Theorieteil.

Wahlmöglichkeit	Werte	Bezg.	Ref.
grundlegendes LSM-Modell	Basis-Modell, » <u>G</u> rün«	___@G ³	3.1
	Alternativ-Modell, » <u>K</u> raus«	___@K	3.3
Geometr. Bedingung	keine, <i>unconstrained</i>	U__@_	3.1
	Kollinearitätsglg., » <u>r</u> ays«	R__@_	3.5
Geometr. Transformation	<u>S</u> hift	_S_@_	
	<u>H</u> elmert-Transformation	_H_@_	3.2
	<u>A</u> ffintransformation	_A_@_	
Radiometr. Transformation	keine, <i>none</i>	__N@_	
	Mitschätzung, <i>estimated</i>	__E@_	3.4
	a <u>p</u> riori Berechnung	__P@_	

6.2. Die geometrischen Transformationen

Mit jeder der geometrischen Transformationen **S**, **H** und **A** sind Modellvorstellungen verknüpft (Tabelle 3.1 auf Seite 21). In diesem Abschnitt werden die Transformationen auf Basis von LSM-Ergebnissen an den Bildpunkten der Kategorie **SEB** und **HEB** auf Einhaltung dieser Vorstellungen geprüft. Damit ist gleichzeitig eine Implementierungskontrolle der Transformationen gegeben. Da für die gemessenen Bildpunkte keine Sollkoordinaten (*Ground Truth*) vorhanden sind, prüfen wir die Einhaltung der Vorstellungen anhand eines »internen« Maßes. Wir verwenden dazu die Schnittgüte von 3-Strahlen-Vorwärtsschnitten (3-VWSe) mit folgenden Bildstrahlen: (a) Bildstrahl durch eine Referenzposition φ in Referenzbild 1, (b) Bildstrahl durch die korrespondierende LSM-Position \hat{p}_I in einem ausgewählten Suchbild »I«, und (c) Bildstrahl durch \hat{p}_{II} in einem ausgewähltem Suchbild »II«⁴. Die LSM-Positionen \hat{p}_I und \hat{p}_{II} sind unabhängig voneinander berechnet. Referenzbild, Suchbild I und Suchbild II bezeichnen wir als *Bildtripel*.

³Da hier ausschließlich die konkreten Transformationen **S**, **H** und **A** vorkommen, ist eine Verwechslung mit der in Abschnitt 3.2 eingeführten Allgemeinbezeichnung »G« für die Geometrische Transformation ausgeschlossen.

⁴2-Strahlen-Vorwärtsschnitte haben den Nachteil, dass LSM-Fehler in Richtung der Epipolarlinie nicht anhand der Qualität des Strahlenschnittes aufgedeckt werden können (vgl. Figur 3.3 auf Seite 32). Um diesen Nachteil zu minimieren, werden daher 3-VWSe verwendet.

Die konkreten Fragestellungen für die Untersuchung sind:

- (1) Ist die 3-VWS-Qualität von HEB-Punkten unabhängig davon, ob S, H oder A als geometrische Transformation gewählt werden?
- (2) Führt bei SEB-Punkten die Affintransformation A zur messbar besten 3-VWS-Qualität?

Vorbemerkungen. Die Berechnung der 3-VWSe erfolgt mit einer Eigenimplementierung in MATLAB auf Basis der Kollinearitätsgleichungen. Das funktionale Modell dieser nicht linearen Ausgleichungsaufgabe ist in (3.59) auf Seite 32 gegeben; die Orientierung ist bekannt, die Objektkoordinaten sind unbekannt. Die sechs Beobachtungen ξ , η , \hat{x}_I , \hat{y}_I , \hat{x}_{II} und \hat{y}_{II} pro Bildpunkt-Tripel werden der Einfachheit halber identgenau und unkorreliert eingeführt, somit $Q_{ll} = E_6$ gewählt. Eine Maßzahl für die Schnittgüte der Bildstrahlen besteht in der geschätzten Bildmessgenauigkeit aus der Ausgleichung. Diese wird wegen $Q_{ll} = E_6$ von $\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_{0,3V}$ beschrieben (siehe Absatz Weitere Ergebnisse auf Seite 15).

Als Bildtripel verwenden wir das »schmale« Tripel 1–2–3 und das »breite« Tripel 1–3–5 des gewählten Quintupels. Bild 1 ist jeweils das Referenzbild. Die Suchbilder 2 und 3 des schmalen Tripels überlappen mit 1 mit $l_B = 80\%$ resp. 60% ; die Suchbilder 3 und 5 des breiten Tripels entsprechend mit $l_B = 60\%$ resp. 20% (vgl. Figur 6.1 auf Seite 54). LSM-Modell und radiometrische Transformation können für diese Untersuchung beliebig gewählt werden. Wir wählen – ohne Wertung gegenüber den anderen Möglichkeiten – LSM-Modell G und radiometrische Transformation E. Wir behandeln nur die U-Ausprägung, variiert wird durch die geometrischen Transformationen. Als LSM-Lösung verwenden wir jene nach $I_{\max} = 25$ Iterationen; dieser Wert liegt über den typischen Iterationszahlen bis Konvergenz (Details hierzu folgen in Abschnitt 6.3.2 ab Seite 63).

Ergebnisse an den HEB-Punkten (Frage 1). Bis auf einen Punkt (Erklärung folgt) erfüllen die HEB-Punkte die Erwartung: Die Transformationen S, H und A führen zu sehr ähnlichen Werten für $\hat{\sigma}_{0,3V}$. Figur 6.2 auf der nächsten Seite zeigt beispielhaft die Ergebnisse im schmalen Bildtripel.

Die größten Unterschiede von $\hat{\sigma}_{0,3V}$ zwischen den einzelnen Transformationen betragen beim schmalen Bildtripel rund 0.01 Px (Punkte 91113, 91511, 91532; Figur 6.2) und beim breiten Bildtripel etwa 0.01 Px (91532) und 0.02 Px (91531). Abgesehen von Punkt 91532 im breiten Tripel werten wir diese Unterschiede als vernachlässigbar: Die Differenzen in den \hat{p}_I bei verschiedener Transformation überschreiten die (sehr optimistischen) geschätzten Genauigkeiten $\hat{\sigma}_{a_{13}}$ und $\hat{\sigma}_{a_{23}}$ der Verschiebungen a_{13} und a_{23} nicht um das Dreifache und sind daher sehr wahrscheinlich nicht signifikant. Entsprechendes gilt auch für \hat{p}_{II} . $\hat{\sigma}_{a_{13}}$ und $\hat{\sigma}_{a_{23}}$ überspannen an diesen Punkten einen Bereich⁵ von 0.01–0.02 Px. Punkt 91532 erfüllt diese Forderung in Bild 5 nicht. Er wurde als falsch ausgewählt klassifiziert und für weitere Untersuchungen mit dem breiten Tripel eliminiert.

⁵Werte entnommen aus den \hat{C}_{uu} -Matrizen bei Transformation S (siehe (3.17) auf Seite 16). Kritik: Die Abschätzung der Signifikanz müsste anhand der Genauigkeit der jeweiligen \hat{p} -Differenz erfolgen. Wegen der zweifellos vorhandenen, aber unbekanntenen Korrelationen von \hat{p} aus LSM-Läufen mit verschiedenen geometrischen Transformationen wird darauf jedoch verzichtet und die einfache Abschätzung mit $\hat{\sigma}_{a_{13}}$, $\hat{\sigma}_{a_{23}}$ gemacht.

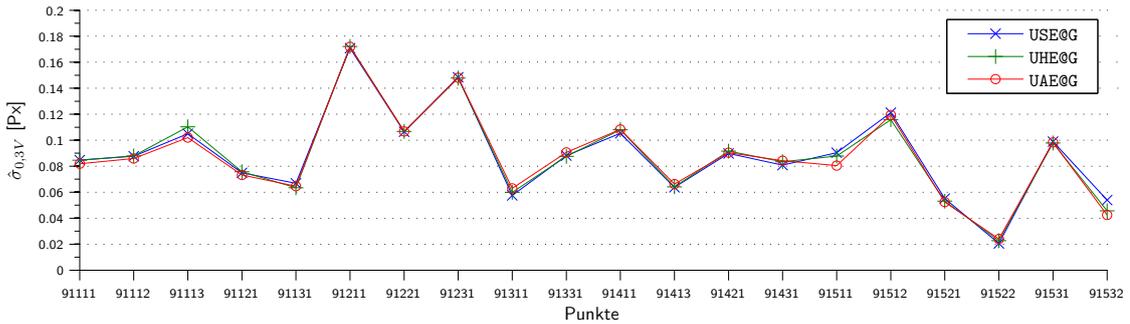


Fig. 6.2. Graph über $\hat{\sigma}_{0,3V}$ der HEB-Punkte im schmalen Bildtripel 1–2–3 bei LSM im Setup U_E@G mit geometrischer Transformation S (blau, \times), H (grün, $+$) bzw. A (rot, \circ). Abszisse = Punktnummern (*kein* funktionaler Zusammenhang).

Im Mittel ist $\hat{\sigma}_{0,3V} = 0.09$ Px. Die mittlere geschätzte Bildmessgenauigkeit beim 3-VWS unterschreitet damit geringfügig die geschätzte Bildmessgenauigkeit $\hat{\sigma}_{xy,VP} = 0.11$ Px aus der Aerotriangulation des Bild-Blockes (AT; siehe Seite 51 in Abschnitt 5.2). Diese Beobachtung ist auch in den weiteren Experimenten mit 3-VWSen zu machen, vgl. Figur 6.3 (Beantwortung Frage 2) und Figur 6.9 auf Seite 73 (LSM mit Kollinearitätsgleichungen). Als Ursache kann vermutet werden, dass die Verbesserungen der Bildkoordinaten beim 3-VWS prinzipiell weniger funktional nicht kompensierte Restfehler aufnehmen müssen als in der AT des gesamten Blockes (kleiner Ausschnitt aus dem Block hier vs. gesamter Block mit vielen Strahlenschnitten in der AT).

Wegen der Ähnlichkeit der $\hat{\sigma}_{0,3V}$ bei den verschiedenen Transformationen machen die Ergebnisse auch klar, dass Referenzbild 1 und die Suchbilder 2, 3 und 5 eine sehr ähnliche Stellung im Raum haben müssen; bzw. umgekehrt: der Verzicht auf Maßstab, Rotation und Scherung in der geometrischen Transformation hat bei den gegebenen Stellungsunterschieden und den generell kleinen LSM-Fenstern (vorliegend 17 Pixel) keinen nennenswerten Einfluss auf die Werte von $\hat{\sigma}_{0,3V}$.

Ergebnisse an den SEB-Punkten (Frage 2). Die Affintransformation A führt **nicht grundsätzlich** zu besseren Werten für $\hat{\sigma}_{0,3V}$ als die Transformationen S und H. Dieses Ergebnis ist unerwartet. Figur 6.3 zeigt die $\hat{\sigma}_{0,3V}$ zu beiden Bildtripeln in einer graphischen Übersicht.

Werten wir Unterschiede in $\hat{\sigma}_{0,3V}$ ab 0.05 Px als substantiell, werden mit A im schmalen Tripel bei einem SEB-Punkt merklich bessere Resultate erreicht als mit S und H (92431). Im breiten Tripel sind entsprechend vier bessere Strahlenschnitte gegenüber S (92131, 92231, 92332, 92431) und zwei gegenüber H festzustellen (92131, 92431; vgl. Figur 6.3). Diese kleine Stichprobe lässt zumindest schließen, dass ein LSM mit den »falschen« Transformationen S und H mit zunehmenden perspektivischen Verzerrungen tendenziell stärker »bestraft« wird. Als zusätzliche Informationsquelle kann $\hat{\sigma}_0$ aus den LSM-Läufen in den beteiligten Bildpaaren herangezogen werden. Es zeigt sich deutlich, dass A generell zu den besten und S generell zu den schlechtesten $\hat{\sigma}_0$ -Werten führt (Figur 6.4). Die Ausprägungen nehmen vom »schmalen« Bildpaar 1–2 zum »breiten« Bildpaar 1–5 kontinuierlich zu. Das ist ein erwartetes Ergebnis.

Unter Einbeziehung der Abweichungen der S- und H-Positionen von den A-Positionen

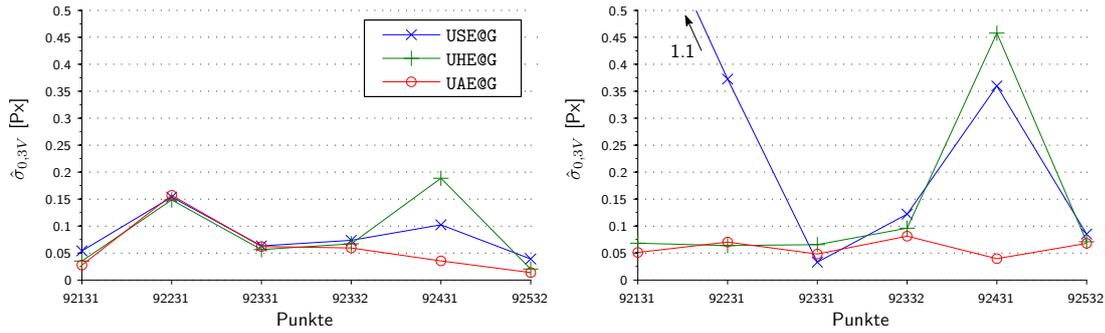


Fig. 6.3. Graph über $\hat{\sigma}_{0,3V}$ der SEB-Punkte im schmalen Bildtripel 1–2–3 (links) und im breiten Bildtripel 1–3–5 (rechts) bei LSM im Setup U_E@G mit geometrischer Transformation S (blau, \times), H (grün, $+$) bzw. A (rot, \circ). Abszisse = Punktnummern (*kein* funktionaler Zusammenhang).

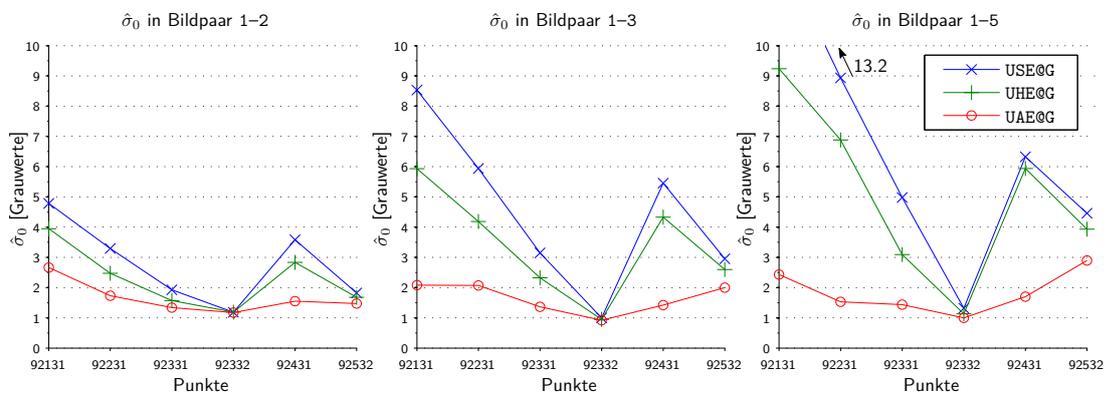


Fig. 6.4. Graph über $\hat{\sigma}_0$ aus den LSM-Läufen der SEB-Punkte in den Bildpaaren 1–2 (links), 1–3 (Mitte) und 1–5 (rechts) im Setup U_E@G mit geometrischer Transformationen S, H bzw. A. Der Linienstil ist identisch zu Figur 6.3. Abszisse = Punktnummern (*kein* funktionaler Zusammenhang).

im Bildraum konnten folgende **Gründe** für das insgesamt unerwartete Verhalten von $\hat{\sigma}_{0,3V}$ gefunden werden:

— **»Guter 3-VWS am falschen Ort«.** Die mit einer falschen Transformation gefundenen Bild-Positionen \hat{p}_I und \hat{p}_{II} sind zwar erkennbar falsch, aber ihre Abweichungen zu den Lösungen mit A sind so beschaffen, dass der 3-VWS mit den falschen Bild-Positionen zu ähnlichen Werten für $\hat{\sigma}_{0,3V}$ führt wie jener mit den A-Positionen. Damit muss der Schluss gezogen werden, dass $\hat{\sigma}_{0,3V}$ kein optimales Maß für die LSM-Beurteilung ist.

— **Symmetrien in der Bild-Textur.** Mit S (resp. H) können dann vergleichbare Schätzwerte \hat{p} und in Folge $\hat{\sigma}_{0,3V}$ wie mit A ermittelt werden, wenn das Suchfenster mit den Freiheitsgraden von S (resp. H) so um den gesuchten Punkt p einpassbar ist, dass die Summe der quadratischen Grauwert-Differenzen $d(\varphi_k)$, $k = 1, \dots, K$, dort ein lokales Minimum erreicht. Das wird speziell durch Bild-Texturen begünstigt, die symmetrisch zu φ und zu p liegen. An manchen Punkten ist diese Situation eher durch ein steifes Modell

(S) an anderen eher durch ein beweglicheres Modell (H) herstellbar. Für die Definition von $d(\varphi_k)$ siehe (3.18) auf Seite 16.

Ein bemerkenswertes Beispiel ist Punkt 92131. Figur 6.5 zeigt zur Illustration Ausschnitte aus den Ergebnisgraphiken der LSM-Läufe mit den Transformationen A bzw. S. Die Modellfehler von S sind anhand der farbkodierten Grauwert-Differenzen d in Figur 6.5 klar erkennbar. Wegen dieser Modellfehler liefert das LSM mit S deutlich schlechtere $\hat{\sigma}_0$ -Werte als mit A (vgl. Figur 6.4, \times vs. \circ). In den Suchbildern 2 und 3 werden wegen Symmetrie in der Bild-Textur jedoch ähnliche Bild-Positionen gefunden wie mit A. In Folge ist $\hat{\sigma}_{0,3V}$ im schmalen Tripel bei Verwendung von S mit einem Wert von 0.06 Px nur wenig schlechter als bei Verwendung von A (vgl. Figur 6.3). In Suchbild 5 wird das geforderte Minimum mit S offenbar an einer falschen Position erreicht (Figur 6.5). In Folge steigt $\hat{\sigma}_{0,3V}$ im breiten Tripel bei Verwendung von S auf den auffällig schlechten Wert 1.1 Px (Figur 6.3).

Anmerkung: In Zeile 2 von Figur 6.5 sind Anzeichen für die Beschränkung einer linearen radiometrischen Transformation zu erkennen (Bereiche systematischen Überhangs an einer Farbe).

Fazit. Die gefundenen Ergebnisse entsprechen den Erwartungen oder können erklärt werden. Das deutet auf die Korrektheit der Implementierung der geometrischen Transformationen hin. Die Untersuchungen machen folgendes klar: (a) Bei den gegebenen Unterschieden in der räumlichen Stellung von Referenzbild und Suchbildern ist die Verschiebung für das LSM einander zugeordneter HEB-Punkte als geometrische Transformation ausreichend. (b) Im Fall spezieller Textur-Situationen kann auch eine falsche geometrische Transformation »zufällig« zu Schätzwerten \hat{p} mit guter 3-VWS-Qualität führen. Damit ist $\hat{\sigma}_{0,3V}$ kein zweifelsfreies Maß, um die Richtigkeit der geschätzten Positionen zu überprüfen.

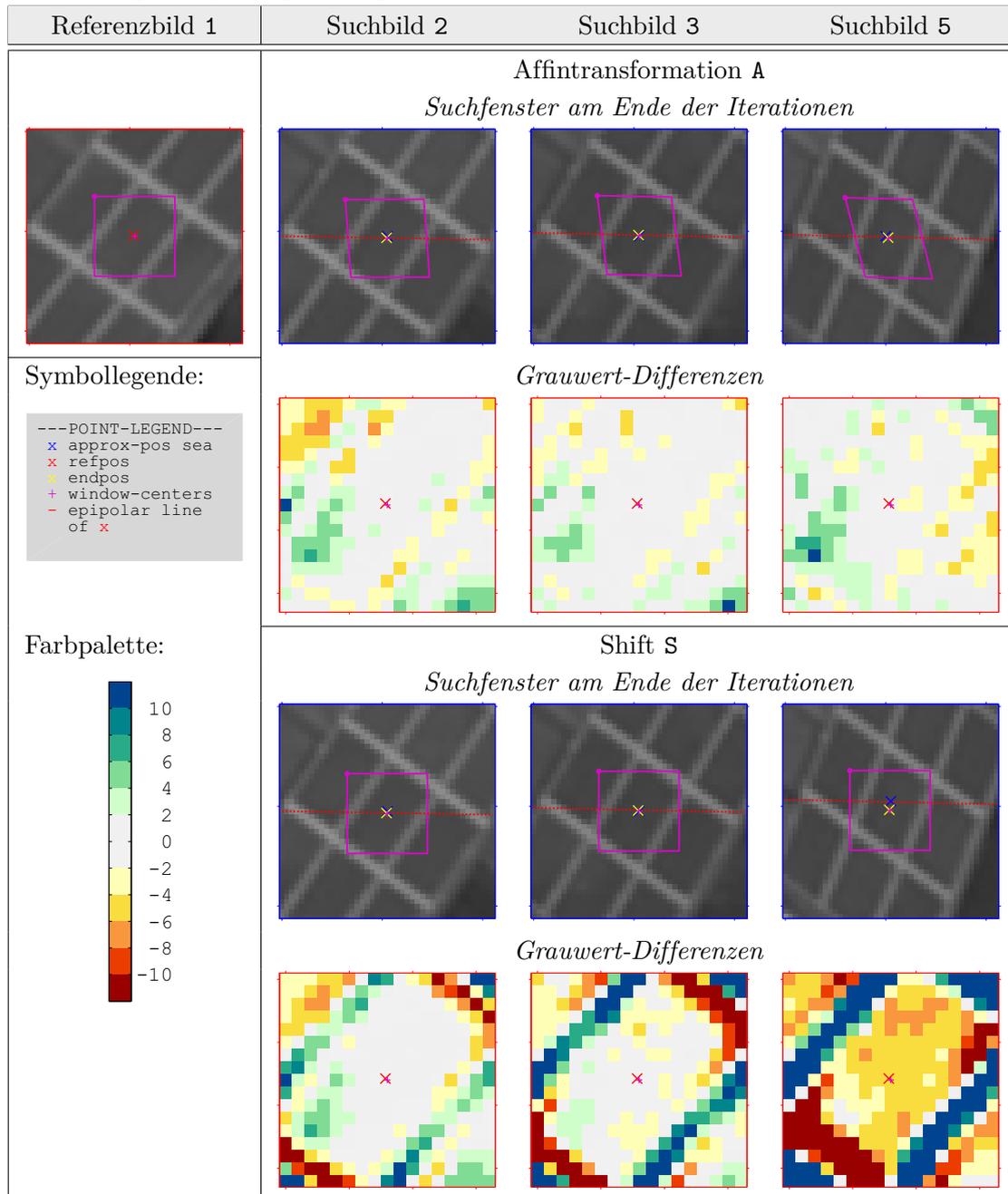
6.3. Basis-Modell versus Alternativ-Modell

Basis-Modell G und Alternativ-Modell K sind zwei unterschiedliche Ansätze für die selbe Aufgabe, das Auffinden des zu einem Referenzpunkt φ korrespondierenden Punktes p in Suchbild Ψ_g (vgl. Tabelle 3.4 auf Seite 25). Wir untersuchen in diesem Abschnitt die beiden Modelle auf die folgenden Fragen:

- (1) Liefern G und K ähnliche Schätzwerte \hat{p} für einen gesuchten Punkt p ? (Abschnitt 6.3.1 ab Seite 62)
- (2) Kann Modell K einen gesuchten Punkt p mit weniger Iterationen finden als Modell G, d. h. hat K eine höhere »Schätz-Geschwindigkeit«? (Abschnitt 6.3.2 ab Seite 63)
- (3) Hat Modell K in der bestehenden Implementierung messbare Laufzeit-Vorteile? (Abschnitt 6.3.3 ab Seite 66)

Frage (1) dient der Implementierungskontrolle. Die Fragen (2) und (3) sind aus den Unterschieden im funktionalen Modell von G und K motiviert und hängen mit der Grauwert-Interpolation in den Iterationen zusammen. Der zweite Teil von Absatz Gradient und Grauwert-Interpolation auf Seite 25 gibt hierzu die Erklärung.

Fig. 6.5. Zur Symmetrie in der Bild-Textur. Die Abbildung zeigt Ausschnitte aus den LSM-Ergebnisgraphiken bei Punkt 92131 in den Suchbildern 2, 3 und 5 mit Transformation A (Zeilen 1–2) bzw. S (Zeilen 3–4). Links oben: Referenzfenster (magenta) mit Referenzpunkt φ (rot, \times). Zeilen 1 und 3: Suchfenster und gefundene Positionen \hat{p} (gelb, \times); Zeilen 2 und 4: farbkodierte Grauwert-Differenzen mit Skalierungsfaktor 2 (siehe Farbpalette). Besprechung im Text.



6.3.1. Identtheit der gefundenen Position

Vorbemerkungen. Maßzahl für diese Untersuchung ist die Differenz der Schätzwerte \hat{p} von Modell G und K an jedem prozessierten Bildpunkt bei sonst jeweils gleichen LSM-Setups. Der Erwartungswert der Differenz ist 0 .

Die beiden Modelle entnehmen die Grauwert-Ableitungen bekanntlich nicht aus dem selben Bild: G aus Suchbild Ψ_g , K aus Referenzbild Ψ_f (vgl. Tabelle 3.4 auf Seite 25). Größere perspektivische Unterschiede zwischen Ψ_g und Ψ_f können daher zu unterschiedlichen Rahmenbedingungen für die Parameterschätzung bei G und K führen. Um einen möglichen Effekt auf den Vergleich auszuschließen, werden daher die Bildpunkte der Kategorie HEB als Datengrundlage verwendet. Durch die horizontale Umgebungsfläche ist eine hohe Ähnlichkeit von Referenz- und Suchbild-Ableitungen sichergestellt. Zusätzlich verwenden wir die LSM-Lösung nach einer festen Anzahl von Iterationen oberhalb der typischen Iterationszahl bis Konvergenz (Abschnitt 6.3.2). Konkret wird $I_{\max} = 25$ verwendet. Damit wird der Einfluss einer eventuell unterschiedlichen Abbruchsensitivität der Konvergenzkriterien (siehe Seite 19) bei G und K vermieden. Wir untersuchen nur die U-Ausprägung, variiert wird durch die geometrischen und radiometrischen Transformationen. Als Bildpaare kommen zum Einsatz: 1–2, 1–3, 1–4 und 1–5 mit Bild 1 als Referenzbild.

Ergebnisse. Die Erwartungen werden **bestätigt**. Tabelle 6.3 enthält als Beispiel die \hat{p} -Differenzen aus Bildpaar 1–3 in kondensierter Form.

Tab. 6.3. Mittelwert, Minimum (linker Index) und Maximum (rechter Index) der \hat{p} -Differenzen (im Sinne $G - K$) in x und y bei den verschiedenen LSM-Setups, beispielhaft anhand Bildpaar 1–3. Bewertung siehe Text.

Setup	in x [Px]			in y [Px]		
USE	-0.006	0.000	0.004	-0.005	0.000	0.004
UHE	-0.007	-0.001	0.004	-0.004	0.000	0.005
UAE	-0.008	-0.001	0.004	-0.005	0.001	0.007
USP	-0.003	0.000	0.002	-0.002	0.000	0.002
UHP	-0.002	0.000	0.002	-0.002	0.000	0.002
UAP	-0.004	0.000	0.003	-0.002	0.000	0.002

Die x - und y -Komponenten der \hat{p} -Differenzen liegen bei allen gerechneten Setups und Suchbildern im Intervall $[-0.01 \text{ Px}, +0.01 \text{ Px}]$, die Mittelwerte liegen zwischen ± 0.001 Pixel. Die Differenzen unterschreiten durchwegs die sehr optimistischen, geschätzten Genauigkeiten der Verschiebungen (Werte zwischen rund 0.01 bis 0.03 Px). Sie sind damit sehr wahrscheinlich nicht signifikant von 0 verschieden. Auf eine Berechnung der Signifikanzzahlen wird wegen der zweifellos vorhandenen, aber unbekanntenen Korrelationen der \hat{p} von G und K verzichtet.

Fazit. Die Modelle G und K führen zu identischen Schätzwerten \hat{p} bei gleichen LSM-Setups. Die Implementierung der grundlegenden funktionalen Modelle scheint daher korrekt zu sein.

6.3.2. Verhalten durch die Iterationen

Vorbemerkungen. Die Untersuchungen zur Schätz-Geschwindigkeit von Modell G und K werden geführt anhand der Anzahl an benötigten Iterationen zur Erfüllung bestimmter »Konvergenz«kriterien. Wir verwenden:

- Die Prüfung der Ablagen $\Delta_x^{(i)}$ und $\Delta_y^{(i)}$ auf gemeinsames Unterschreiten der Werte 0.1, 0.01 und 0.001 Pixel. Dabei bedeuten $(\Delta_x^{(i)}, \Delta_y^{(i)})^\top = \mathbf{\Delta}^{(i)} = |\mathbf{p}^{(i)} - \hat{\mathbf{p}}|$, $i = 1, \dots, I_{\max}$, mit $\mathbf{p}^{(i)}$ der in Iteration i gefundenen Position und $\hat{\mathbf{p}}$ der gefundenen Position nach $I_{\max} = 25$ Iterationen. Die zugeordneten Iterationszahlen für die Schranken 0.1, 0.01 bzw. 0.001 Pixel bezeichnen wir mit i_z , i_h bzw. i_t .
- Das Erreichen der beiden eingeführten Konvergenzkriterien nach Kraus und Förstner (siehe Seite 19). Die zugeordneten Iterationszahlen bezeichnen wir mit I_K und I_F .

Als Datengrundlage werden wegen des möglichen Einflusses perspektivischer Unterschiede wie in Abschnitt 6.3.1 die Bildpunkte der Kategorie HEB verwendet.

Die Berechnungen erfolgen mit **vertauschten** Such- und Referenzbildern zwischen Modell G und K (»Kreuz-Konfiguration«). Auf diese Weise misst man den Effekt der Interpolationen in den Grauwert-Ableitungen bei G auf die definierten Iterationszahlen, unter der wünschenswerten Eigenschaft, dass die Ableitungen bei G und K aus dem *selben* Bild entnommen werden. Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Vergleichs ist: (a) Die bezüglich der Startpositionen zu ermittelnden Verschiebungen sind nicht allzu groß, damit die Ableitungen bei G und K nicht an zu entfernten Stellen entnommen werden. (b) Die ermittelten Verschiebungen bei G und K in Kreuz-Konfiguration haben ähnliche Größenordnung. Forderung (a) kann mit den gegebenen Näherungsorten als erfüllt angesehen werden: die berechneten Verschiebungen sind in beiden Koordinatenrichtungen kleiner als 1 Px. Weil die Initialisierung an Pixelmitten erfolgt, ist auch Forderung (b) erfüllt⁶.

Wie im vorigen Abschnitt wird nur die U-Ausprägung untersucht und durch die geometrischen und radiometrischen Transformationen variiert. Als Bildpaar verwenden wir die Paare 1–2 und 2–1, jeweils in Kreuz-Konfiguration für G und K.

Ergebnisse. Figur 6.6 auf der nächsten Seite zeigt kondensierte Ergebnisse zur Analyse der Schätz-Geschwindigkeit in graphischer Form. Wir beschränken uns darin auf jene LSM-Setups, bei denen die gefundenen Ausprägungen minimal (USP) bzw. maximal (UAE) sind und die Resultate von Kreuz-Konfiguration 1–2 für G / 2–1 für K. Im Detail sind in Figur 6.6 abgebildet: (i) Histogramme über die Differenzen der Iterationszahlen i_z , i_h , i_t und I_F bei Modell G und K (im Sinne G – K) bei sonst gleichem LSM-Setup⁷. Links

⁶»Gleiche« Verschiebungen können nicht gefordert werden, da die Bestimmung der Verschiebungen bei G und K in Kreuz-Konfiguration auf vertauschten Referenzfenstern, d. h. verschieden abgetasteten Grauwert-Ensembles beruht. In der durchgeführten Kontrolle von Forderung (b) waren maximale Abweichungen von 0.1 Px in x und -0.06 Px in y festzustellen (bei dem selben Punkt). Die restlichen Abweichungen sind durchwegs kleiner als 0.05 Px. Mit diesen Zahlenwerten ist nach der Meinung des Autors die Forderung nach etwa gleich großen, zu überbrückenden Verschiebungen als erfüllt anzusehen.

⁷Der Grund, warum auf I_F beschränkt werden konnte, folgt in Nebenergebnis 1 auf Seite 65.

oben ist z. B. das Histogramm über die $\delta i_z = i_{z,G} - i_{z,K}$ der 20 HEB-Punkte bei Setup UAE abgebildet. (ii) Ein Graph über die tendenziell kleinsten (USP) und größten (UAE) Iterationszahlen I_F an den HEB-Punkten zur Einordnung der absoluten Verhältnisse.

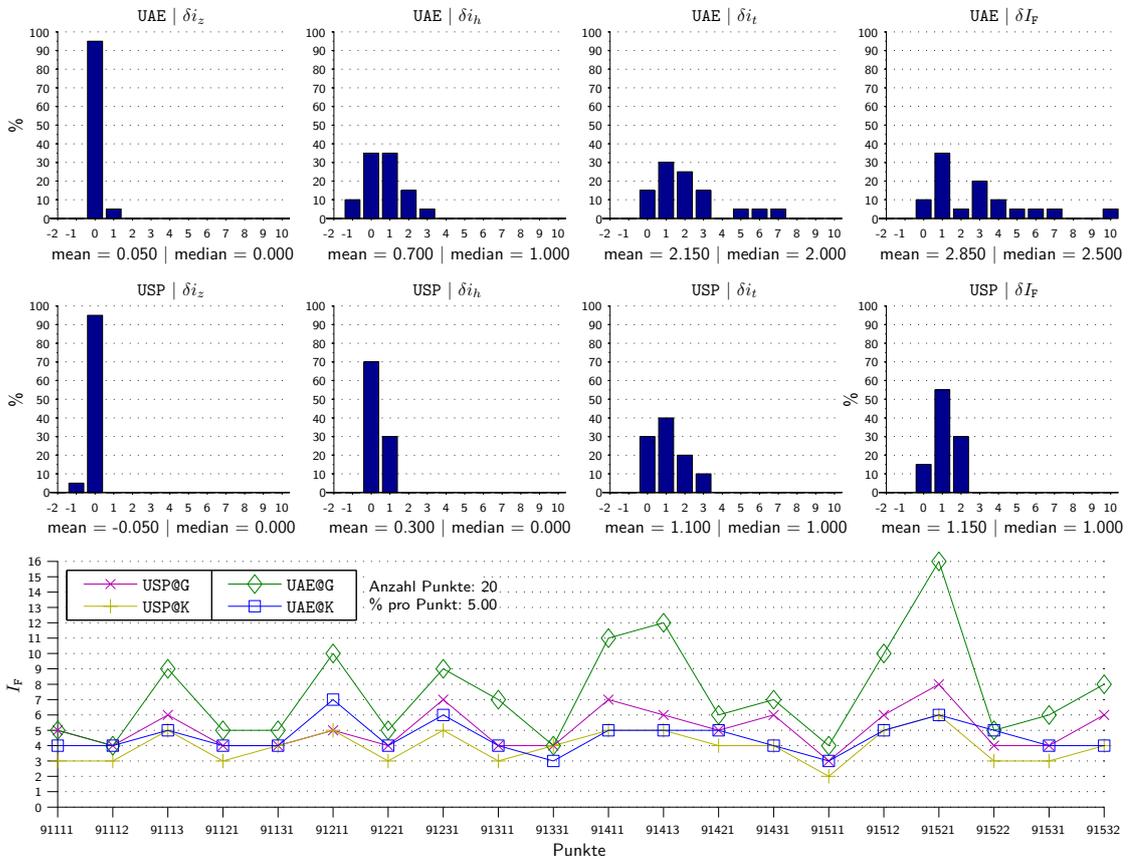


Fig. 6.6. Ergebnisse zur Schätz-Geschwindigkeit bei G und K unter den LSM-Setups mit maximalen (UAE) und minimalen Ausprägungen (USP) in Bildpaar 1–2 für G / 2–1 für K und 20 HEB-Punkten. Histogramme: Von li. nach re. über Differenzen $\delta i_z, \delta i_h, \delta i_t, \delta I_F$ im Sinne G – K. Unten: Tendenzuell größte (UAE) und kleinste (USP) absolute Iterationszahlen I_F . Besprechung siehe Text.

Ergebnis 1. Die (qualitative) Erwartung, dass Modell K Vorteile in der Schätz-Geschwindigkeit haben kann, wird **bestätigt**: Bis auf wenige Ausnahmen erreicht K die einzelnen Iterationszahlen gleich schnell oder schneller als G. Vgl. die Histogramme in Figur 6.6: fast durchwegs sind lediglich die positiven Abszissen-Äste besetzt.

Ergebnis 2. Der (quantitative) **Gewinn** von K gegenüber G hängt von der Feinheit der Schranke und offenbar von den Freiheitsgraden, d. h. der Anzahl freier Parameter, im funktionalen Modell ab:

a) G und K erreichen i_z de facto bei den gleichen Iterationen, unabhängig von der Komplexität des funktionalen Modells; vgl. Figur 6.6: δi_z plottet bei Minimal-Setup USP und Maximal-Setup UAE bemerkenswert homogen auf 0.

b) Zu den feineren Schranken hin steigt der Gewinn von K gegenüber G; vgl. Figur 6.6: die Verteilungen von δi_h , δi_t und δI_F zeigen eine deutliche Tendenz nach rechts (dass δI_F eine feine Schranke ist, folgt in Nebenergebnis 2 auf Seite 65).

c) Der fortschreitende Gewinn von K zeigt eine leichte Abhängigkeit mit den Freiheitsgraden des funktionalen Modells. Mehr Freiheitsgrade erhöhen den Gewinn, weniger Freiheitsgrade verringern den Gewinn; vgl. Figur 6.6: die Tendenz der Verteilungen von δi_h , δi_t und δI_F nach rechts ist bei Maximal-Setup UAE stärker ausgeprägt als bei Minimal-Setup USP. Das ist auch an den Ortsparametern ersichtlich, z. B. dem Mittelwert: bei UAE entwickelt sich der Mittelwert von etwa 0 bei i_z über 0.7 bei i_h zu 2.2 bei i_t und 2.9 Iterationen bei I_F . Die entsprechende Reihe bei USP ist 0, 0.3, 1.1 und 1.2 Iterationen. Diese Abhängigkeit ist eine Folge davon, dass die absoluten Iterationszahlen für das Erreichen der feineren Schranken bei Modell G bei Erhöhung der Freiheitsgrade tendenziell stärker ansteigen als bei Modell K; vgl. Figur 6.6 anhand der Graphen über I_F : »magenta« vs. »grün« für G und »gelb« vs. »blau« für K.

Ergebnis 3. Bei beiden Modellen zeigen die Setups mit wenigen Freiheitsgraden, resp. kleineren Gewinnen von K gegenüber G, tendenziell kleinere **absolute Iterationszahlen**, jene mit vielen Freiheitsgraden, resp. den größeren Gewinnen, tendenziell größere Iterationszahlen; vgl. Figur 6.6: Graphen magenta vs. grün für G und Graphen gelb vs. blau für K. Das ist nicht weiter verwunderlich, da ein Anstieg an Freiheitsgraden das funktionale Modell im Allgemeinen »weicher« macht und die Bestimmung der Parameter damit potentiell langsamer verläuft. Das hinsichtlich Iterationenzahlen minimale Setup ist bei beiden Modellen USP, das maximale UAE⁸. Zur Quantifizierung der absoluten Verhältnisse verwenden wir die mittlere Iterationszahl m_{I_F} bis zur Konvergenz nach Förstner'schem Kriterium (als feinste Schranke, siehe Nebenergebnis 2 auf Seite 65, und anhand beider möglichen Kreuz-Konfigurationen): bei Modell K reicht m_{I_F} von etwa 4.3 Iterationen bei USP bis 4.8 Iterationen bei UAE. K reagiert auf eine Steigerung der Freiheitsgrade also mit einem nur geringen Anstieg in der Iterationszahl. Bei Modell G reichen die Werte entsprechend von etwa 5.2 bis 7.4 Iterationen, der Anstieg ist stärker als bei G.

Folgende **Nebenergebnisse** der Untersuchung zur Schätz-Geschwindigkeit von G und K verdienen Erwähnung:

Nebenergebnis 1. Konvergenz nach Förstner'schem und Konvergenz nach Kraus'schem Kriterium treten mit den publizierten Schrankenwerten ($\varepsilon_F = 0.1$ und $\varepsilon_K = 0.0001$; siehe Seite 19) de facto gleich schnell ein: Die zugeordneten Iterationszahlen I_F und I_K unterscheiden sich bei allen gerechneten Setups und beiden LSM-Modellen lediglich in einer Bandbreite von ± 1 er Iteration mit 0 dem häufigsten Modus (jeweils zumindest 45 % der Werte von Differenz $I_F - I_K$).

Nebenergebnis 2. Die Konvergenz nach Förstner'schem Kriterium wird in der gleichen oder späteren Iterationen erreicht wie $\Delta < (0.001, 0.001)^\top P x$, aber nicht früher. Ein

⁸Dass UAE und nicht UAP das maximale Setup ist, ist in Zusammenschau mit den Ergebnissen von Abschnitt 6.4.2 nachvollziehbar, speziell Figur 6.8 auf Seite 71.

Plus von einer Iteration ist bei allen gerechneten Setups und beiden Modellen deutlich ausgeprägter Modus (jeweils zumindest 50 % der Werte von Differenz $I_F - i_t$).

Damit ist (a) bei Verwendung von $\varepsilon_F = 0.1$ eine Abweichung von schlechtestenfalls 0.001 Px zur »enditerierten« Lösung garantiert, und (b) das Erreichen des Konvergenzkriteriums mit $\varepsilon_F = 0.1$ generell eine feinere Schranke als das Erreichen der 0.001 Px-Ablage.

Fazit. Modell K zeigt tatsächlich Vorteile in der Schätz-Geschwindigkeit. Diese treten aber erst in der Phase der »Sub-Zehntel-Pixel-Verfeinerung« der gefundenen Position hervor. Die mittleren Gewinne in den Iterationszahlen I_F (als Kriterium mit maximalen Ausprägungen) reichen von einer Iteration (oder etwa 20 %) bei minimalen Freiheitsgraden bis zu drei Iterationen (oder grob geschätzt 40 %) bei maximalen Freiheitsgraden⁹.

6.3.3. Laufzeit

Vorbemerkungen. Die Laufzeit (LZ)-Analyse wird anhand der »Iterationen-Laufzeit« (ITL) geführt. Die ITL definieren wir als die Laufzeit der Prozessschritte 14–23 (Tabelle 4.3 auf Seite 45). Das ist jener Code-Teil, in dem die LZ-Unterschiede von G und K entstehen: die zwei zusätzlichen Interpolationen pro Iteration bei Modell G (Schritt 22) und die zeitlichen Unterschiede in der Berechnung der aktuellen Suchfensterpunkte $\mathbf{p}_k^{0(i)} \in \kappa_g$ durch »Vorwärtsabbildung« \mathbf{t} bei G und inverse Abbildung \mathbf{s}^I bei K (Schritt 20). Die Berechnung der aktuell gefundenen Position, Schritt 19, wurde für die Laufzeit-Untersuchung deaktiviert. Dieses Resultat wird nur für die Analyse der Prozess-Geschwindigkeit benötigt und ist im praktischen Einsatz unnötig.

Um eine Mittelung von inhärent vorhandenen LZ-Fluktuationen zu erzielen, werden (a) alle 20 Punkte der Kategorie HEB prozessiert und (b) an jedem zu prozessierenden Punkt 1000 Iterationen durchgeführt. Als Repräsentativ-Wert dient das arithmetische Mittel der ITL aller prozessierten Punkte. Das verwendete Bildpaar ist 1–2 mit Bild 1 als Referenzbild. Wie in den vorigen Abschnitten werden nur die U-Varianten untersucht und durch geometrische und radiometrische Transformationen variiert. Die Fenstergröße wird von einem Minimalwert von 13 Px (d. h. $13^2 = 169$ Pixel im LSM-Fenster) in 4 Px-Schritten bis zu einem Maximalwert von 33 Px (1089 Pixel im LSM-Fenster) verändert. Damit konnten die wesentlichen Tendenzen in der ITL erfasst werden. Der eingesetzte Rechner war ein Intel i5-2500T@2.30 GHz mit 16 GByte Hauptspeicher unter Windows 7 64-bit.

Ergebnisse. Figur 6.7 zeigt Ergebnisse der Laufzeit-Aufzeichnungen in graphischer Form. Wir beschränken uns dabei auf die Angabe des hinsichtlich Laufzeit minimalen und maximalen Modells, das sind USN resp. UAP¹⁰.

⁹Hier sei in Erinnerung gerufen, dass die Untersuchung anhand der HEB-Punkte erfolgte, die »zusätzlichen« geometrischen Parameter (Scherung, Rotation, Skalierung) sich daher von ihren Näherungswerten $\mathbf{0}$ nur »wenig entfernen« müssen. Bei Vorhandensein von perspektivischen Verzerrungen zwischen Referenz- und Suchbild ist zu erwarten, dass die Unterschiede zwischen G und K und zwischen Minimal- und Maximalmodellen weiter ansteigen. Diese Unterschiede lassen sich jedoch nicht akkurat quantifizieren, siehe **Vorbemerkungen** auf Seite 63.

¹⁰Dass UAP das maximale Modell ist, kann Seite 70 in Abschnitt 6.4 entnommen werden.

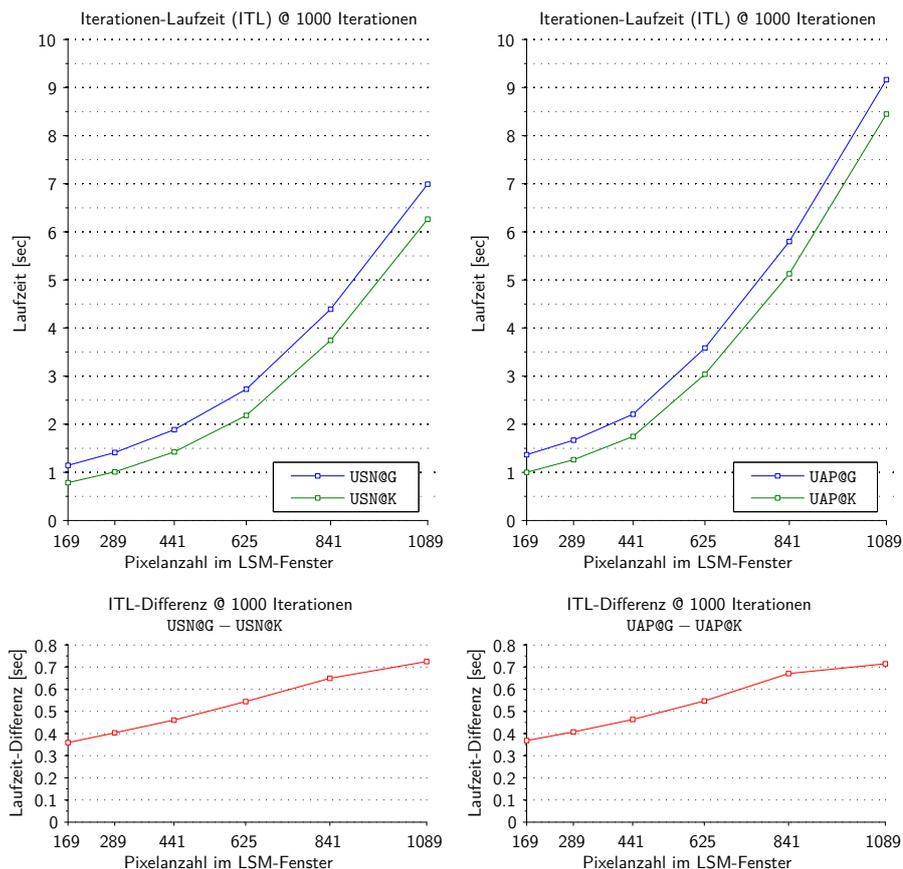


Fig. 6.7. Ergebnis-Graphen der Laufzeit-Untersuchungen. Links oben: Iterationen-Laufzeit (ITL) bei Minimalmodell USN. Rechts oben: ITL bei Maximalmodell UAP. Jeweils darunter: Differenz zwischen den ITL von Modell G und K; positive Werte bedeuten, dass K schneller rechnet als G.

Ergebnis 1. K rechnet in der bestehenden Implementierung **messbar kürzer** als G; vgl. Figur 6.7 unten: die ITL-Differenzen im Sinne $G - K$ sind durchwegs größer 0. Die ITL-Differenzen steigen streng monoton mit der Fenstergröße von rund 0.35 sec bei 13 Px bis etwa 0.7 sec bei 33 Px und sind bei Minimalmodell USN und Maximalmodell UAP erwartungsgemäß sehr ähnlich. Der relative Gewinn in der ITL bei Verwendung von K reicht bei USN entsprechend von rund 31 % bis 10 % und bei UAP von etwa 27 % bis 8 %. Um den absoluten Gewinn abzuschätzen, legen wir $I_F = 10$ Iterationen zugrunde und nehmen an, dass 2500 (Verknüpfungs-)Punkte (VP) zu prozessieren sind, wobei jeder VP im Mittel in 10 Bildern vorkommt¹¹. Mit der Abschätzungsformel

$$\text{ITL-Differenz pro Iteration} \cdot I_F \cdot \text{Anzahl VP} \cdot \text{mittlere Überlappung}$$

ergeben sich absolute Gewinne von rund 1.5 bis 3.0 min (vgl. Tabelle 6.4 auf der nächsten Seite).

¹¹Das entspricht etwa der Situation im verwendeten Bild-Block (Seite 51 in Abschnitt 5.2). Da sich unsere Untersuchung lediglich auf Zweibild-LSM erstreckt und reale Verknüpfungspunkte typischerweise nicht unabhängig voneinander prozessiert werden, handelt es sich nur um eine grobe Abschätzung. Als Anhaltspunkt für die absoluten Gewinne sind die Zahlenwerte dennoch zu gebrauchen.

Tab. 6.4. Relativer und absoluter LZ-Gewinn in der ITL für minimales (USN) und maximales Setup (UAP) bei minimaler (13 Px) und maximaler Fenstergröße (33 Px) von LSM-Modell K in Bezug zu LSM-Modell G. Die Zeile »abs. ITL« gilt für Modell G. Die absoluten Zahlen entspringen mit den Annahmen $I_F = 10$ Iterationen, 2500 (Verknüpfungs-)Punkte und mittlere Überlappung = 10 der Berechnungsvorschrift: ITL-Differenz pro Iteration $\cdot 10 \cdot 2500 \cdot 10$.

	$w_{\min} = 13 \text{ Px}$		$w_{\max} = 33 \text{ Px}$	
	USN	UAP	USN	UAP
rel. Gewinn [%]	31	27	10	8
abs. Gewinn [min]	1.5	1.5	3.0	3.0
abs. ITL [min]	4.8	5.7	29.1	38.2

Ergebnis 2. Eine Analyse der Quellen für die ITL-Differenz (Interpolationsaktion und Berechnung der Suchfensterpunkte) mit MATLAB's `profile`-Werkzeug hat gezeigt, dass die ITL-Differenzen von Vorwärtstransformation und inverser Transformation rund 50 mal kleiner sind als die ITL-Differenzen der Interpolationsaktion. Wir vernachlässigen daher den Unterschied wegen der Transformationsrichtung im Folgenden. Die ITL-Differenz gibt demnach die Mehr-Laufzeit durch die zwei zusätzlichen Interpolationen bei G an.

Ergebnis 3. Mit zunehmender Fenstergröße steigt die ITL bei beiden LSM-Modellen, G und K, stärker an als die ITL-Differenz. Das zeigt, dass die Nicht-Interpolationsanteile (NIA) der ITL eine stärkere Abhängigkeit mit der Fenstergröße haben als die Interpolationsanteile. Eine `profile`-Analyse offenbarte, dass der überwiegende Anteil der NIA, und insbesondere die Abhängigkeit mit der Fenstergröße, von der Normalgleichungslösung stammt (Prozessschritt 17, Tabelle 4.3 auf Seite 45).

Ergebnis 4. Die Erwartung an die Mehr-Laufzeit durch die zusätzlichen Interpolationen, resp. die ITL-Differenz, ist eine Faktor 2-Abhängigkeit mit der Pixelanzahl im LSM-Fenster. Eine Verdopplung der Pixelzahl sollte also zu einer Verdopplung der ITL-Differenz führen. Die ITL-Differenz steigt zwar in etwa linear mit der Pixelanzahl, die Faktor 2-Erwartung wird jedoch nicht bestätigt: die ITL-Differenz verdoppelt sich erst bei etwa einer Versechsfachung der Pixelzahl (vgl. Figur 6.7 auf der Vorseite). Daraus folgt die Vermutung, dass innerhalb der verwendeten MATLAB-Funktion für die Interpolation, `interp2`, konstante Anteile existieren (»Overhead«). Eine `profile`-Analyse konnte diese Vermutung bestätigen. Die Aktionen ausschließlich der Interpolation, d. h. Ermittlung der Bilinearkoeffizienten und Berechnung der interpolierten Grauwerte, zeigen in etwa die erwartete Faktor 2-Abhängigkeit. In der ITL-Differenz haben diese Anteile demnach untergeordnete Bedeutung und der *Overhead* überwiegt.

Anmerkung: Die drei Interpolationen bei G werden an den selben Stellen $\mathbf{p}_k^{0(i)}$, $k = 1, \dots, K$, durchgeführt und verwenden demnach die selben Bilinearkoeffizienten (BK). MATLAB's Interpolationsfunktion `interp2` bietet jedoch keine Möglichkeit die BK auszugeben und wird daher dreimal aufgerufen. Dass **Optimierungspotential** besteht, ist durch Ergebnis 4 deutlich erkennbar geworden. Eine Eigenimplementierung bzw. eine

Überarbeitung von `interp2` wurde im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht mehr angestrengt. Die `profile`-Ergebnisse lassen abschätzen, dass durch eine solche Optimierung die ITL-Differenzen auf etwa ein Fünftel des aktuellen Wertes sinken könnten (unter der Annahme, dass der *Overhead* und die BK-Ermittlung nur mehr einmal durchlaufen werden und daher bei beiden Ansätzen gleich lange dauern).

Fazit. Relative Gewinne von 30% bis 10% bei Modell K gegenüber Modell G (in der bestehenden Implementierung) zeigen die vermuteten *Performance*-Vorteile von K klar auf. Wegen der in absoluten Zahlen generell kurzen (Iterationen-)Laufzeiten – pro Punkt werden bei Maximal-Setup UAP und $I_F = 10$ Iterationen rund 0.1 sec benötigt, vgl. Figur 6.7 auf Seite 67 – fallen diese Gewinne aber erst bei sehr vielen zu prozessierenden Punkten ins Gewicht.

6.4. Die radiometrischen Transformationen

Die implementierten Berechnungsvarianten der radiometrischen Transformation, a priori Ansatz (P) und Mitschätzung im Rahmen der Ausgleichung (E), werden auf die folgenden Fragen hin untersucht:

- (1) Führen P und E zu gleichwertigen Schätzwerten $\hat{\mathbf{p}}$ für den gesuchten Punkt \mathbf{p} ? (Abschnitt 6.4.1 ab Seite 70)
- (2) Hat P eine höhere »Schätz-Geschwindigkeit« als E (Begriff siehe Abschnitt 6.3)? (Abschnitt 6.4.2 ab Seite 70)

Frage (1) dient im Wesentlichen der Implementierungskontrolle. Motivation für Frage (2) ist, dass das *funktionale* Modell bei E zwei freie Parameter mehr hat als jenes bei P (Helligkeit und Kontrast, siehe (3.45) auf Seite 28) und zusätzliche Freiheitsgrade im funktionalen Modell die Parameterschätzung potentiell verlangsamten können. Der naheliegenden Frage nach den **Laufzeit**-Unterschieden zwischen P und E wurde ebenfalls nachgegangen. Wegen der **widersprüchlichen** Ergebnisse für E beschränken wir uns auf eine nur kurze Charakterisierung im folgenden Absatz.

Laufzeit. Die Untersuchungen erfolgten analog zu den Angaben in Abschnitt 6.3.3 auf Seite 66 anhand der gemittelten Iterationen-Laufzeit (ITL) über 1000 Iterationen an den HEB-Punkten und Fenstergrößen von 13 bis 33 Px. Als LSM-Modell wurde Modell K gewählt¹². Wegen der zusätzlichen Rechenlast durch eine radiometrische Transformation ist die Erwartung, dass bei gleicher geometrischer Transformation sowohl P als auch E größere ITL aufweisen als N, d. h. ein LSM ohne radiometrische Transformation. Ansatz P entspricht dieser Erwartung und zeigt wie vermutet, dass die Mehr-Laufzeit unabhängig von der Komplexität der geometrischen Transformation ist. Ansatz E widerspricht der Erwartung: Bei dem Sprung von 2 auf 4 Unbekannte (geometrische Transformation S) und 4 auf 6 (H) ist gegenüber N zwar ein Anstieg der ITL zu beobachten (erwartet), bei dem Sprung von 6 auf 8 (A) hingegen eine Abnahme (unerwartet). Verantwortlich dafür ist die Normalgleichungslösung: bis inklusive 6 Unbekannte steigt die Laufzeit monoton mit Erhöhung der Unbekannten, ab 6 Unbekannte aber in Form eines Sägezahns mit

¹²Die Modellwahl hat keinen Einfluss auf die ITL (siehe Tabelle 4.3 auf Seite 45).

»Gipfel-Tal-Abstand« 2 Unbekannte und positivem Trend¹³. Schlussendlich rechnet E bei S und H länger als P (erwartet) und bei A kürzer (unerwartet). Das Maximalmodell hinsichtlich Laufzeit ist daher UAP mit 6 Unbekannten. Auf eine zahlenmäßige Angabe der ITL-Unterschiede zwischen E und P wird verzichtet; die Werte liegen bei gleicher geometrischer Transformation bei jeder Fenstergröße unterhalb der ITL-Unterschiede zwischen den LSM-Modellen G und K (Figur 6.7 auf Seite 67).

6.4.1. Identtheit der gefundenen Position

Vorbemerkungen. Analog zu Abschnitt 6.3.1 ab Seite 62 ist die Maßzahl für den Vergleich die Differenz von Schätzwerten \hat{p} , hier zwischen jenen bei Ansatz P und E und sonst jeweils gleichen LSM-Setups. Der Erwartungswert ist $\mathbf{0}$ nachdem beide Ansätze eine lineare radiometrische Transformation bedeuten und daher gleiches leisten. Wegen den Ergebnissen in Abschnitt 6.3.1 (LSM-Modelle G und K liefern gleiche Resultate) kann die Untersuchung auf ein LSM-Modell beschränkt werden. Wir wählen ohne Wertung Modell G. Wie im Modell-Vergleich werden die vier Bildpaare 1–2, 1–3, 1–4 und 1–5 und die LSM-Lösungen nach $I_{\max} = 25$ Iterationen herangezogen. Bild 1 ist das Referenzbild. Als Punktmenge kommen die Bildpunkte der Kategorie HEB und SEB zum Einsatz. Nur die U-Ausprägung wird behandelt, variiert wird neben den radiometrischen auch durch die geometrischen Transformationen.

Ergebnisse. Die Erwartungen werden **bestätigt**, solange die Modellvorstellungen der geometrischen Transformation erfüllt sind: Die x - und y -Komponenten der \hat{p} -Differenzen liegen im Intervall $[-0.01 \text{ Px}, +0.01 \text{ Px}]$ durch alle geometrischen Transformationen bei den HEB-Punkten und bei Transformation A bei den SEB-Punkten. Die Mittelwerte der Differenzen liegen zwischen $\pm 0.001 \text{ Px}$. Die Differenzen sind durchwegs kleiner als die geschätzten Genauigkeiten $\hat{\sigma}_{a_{13}}, \hat{\sigma}_{a_{23}}$ der Verschiebungen a_{13}, a_{23} und sind damit sehr wahrscheinlich nicht signifikant (vgl. die Ausführungen auf Seite 62 in Abschnitt 6.3.1).

Bei nicht korrekter geometrischer Transformation für die SEB-Punkte, d. h. S und H, sind an einzelnen Punkten Differenzen um 0.1 Px feststellbar. Eine Vermutung für dieses Verhalten ist: Falsche geometrische Transformationen induzieren systematische Grauwert-Unterschiede (ISGU; siehe Zeile 4 in Figur 6.5 auf Seite 61). Die radiometrischen Ansätze P und E können wegen ihrer verschiedenen Parametrisierungen unterschiedlich auf die ISGU reagieren und in Folge zu verschiedenen Schätzwerten \hat{p} führen. Da die ISGU nicht korrigierbar sind, sind beide Positionen im Allgemeinen falsch und deren Differenz daher unerheblich.

Fazit. Die radiometrischen Ansätze P und E führen bei korrekter geometrischer Transformation zu identischen Schätzwerten \hat{p} . Die Implementierung der radiometrischen Transformationen scheint daher korrekt zu sein.

6.4.2. Verhalten durch die Iterationen

Vorbemerkungen. Die Analyse der Schätz-Geschwindigkeit von Ansatz P und E wird anhand der gleichen Kriterien geführt wie die Untersuchung der LSM-Modelle G und K (Abschnitt 6.3.2 ab Seite 63). Wegen der dortigen Ergebnisse beschränken wir uns

¹³Wir vermuten, dass MATLAB Matrizen gewisser Dimensionen schneller verarbeiten kann als andere.

hinsichtlich Konvergenzkriterium auf das Förstner'sche. Da bei den Modellen G und K unterschiedliche Auswirkungen zu erwarten sind, gehen beide Modelle in die Untersuchung ein. Deren Vergleich wird wiederum in Kreuz-Konfiguration geführt. Als Bildpaar verwenden wir 1–2 und 2–1. Datengrundlage sind die 20 Punkte der Kategorie HEB. Untersucht wird wie bisher nur die U-Ausprägung, variiert werden neben den radiometrischen auch die geometrischen Transformationen.

Ergebnisse. Ansatz P zeigt Vorteile in der Schätz-Geschwindigkeit gegenüber E, die Gewinne sind jedoch sehr klein. Die Ausprägungen sind für das feinste der berechneten Kriterien, das Erreichen von Iterationszahl I_F , noch am stärksten ausgeprägt. Wir führen die Dokumentation und die weitere Besprechung daher anhand I_F bzw. der Differenz δI_F im Sinne E – P. Figur 6.8 zeigt Ergebnisse zur Schätz-Geschwindigkeit in Form von Histogrammen über δI_F bei Modell G (Bildpaar 1–2) und Modell K (Bildpaar 2–1)¹⁴ jeweils in Minimal- und Maximal-Setup, d. h. S bzw. A als geometrischer Transformation.

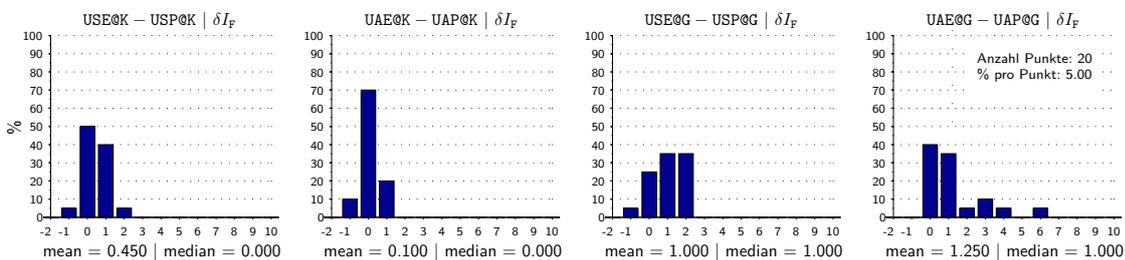


Fig. 6.8. Ergebnisse zum Unterschied in der Schätz-Geschwindigkeit der radiometrischen Ansätze E und P. Dargestellt sind Histogramme über die **Differenz** der I_F (im Sinne E – P) bei LSM-Modellen K (linke Hälfte) und G (rechte Hälfte) bei jeweils minimaler und maximaler geometrischer Transformation, S bzw. A; auf Basis der Bildpaare 2–1 (K) und 1–2 (G) und den 20 HEB-Punkten.

In Ergebnis 1 auf Seite 64 wurde bereits festgestellt, dass bei Modell K die absoluten Iterationszahlen bei Erhöhung der Freiheitsgrade nur sehr wenig wachsen. Dementsprechend sind die Unterschiede von P gegenüber E nur minimal und die beiden Ansätze sind als **gleichwertig** einzustufen. Die Mittelwerte von δI_F betragen etwa +0.5 Iterationen beim Minimal-Setup (S) und +0.1 Iteration beim Maximal-Setup (A) in Bildpaar 2–1, sowie +0.4 Iterationen bei beiden Setups in Bildpaar 1–2.

Bei Modell G sind die Gewinne von P gegenüber E erwartungsgemäß ausgeprägter. In den Verteilungen ist eine leichte Abhängigkeit mit den »geometrischen« Freiheitsgraden zu erkennen. Der Median von δI_F beträgt für Minimal- und Maximal-Setup in beiden Bildpaaren dennoch nur +1.

Fazit. Dass Ansatz P gegenüber E Vorteile in der Schätz-Geschwindigkeit haben kann, konnte nachgewiesen werden. Die Unterschiede zwischen P und E in den definierten Iterationszahlen sind bei sonst gleichen Setups aber geringer als jene zwischen den LSM-Modellen G und K; vgl. Figur 6.6 auf Seite 64. Für die Optimierung der Schätz-Geschwindigkeit ist daher die Wahl des grundlegenden LSM-Modells entscheidender als die Wahl eines der beiden radiometrischen Ansätze.

¹⁴Aus Konsistenzgründen mit Figur 6.6 auf Seite 64.

6.5. Effekt der Kollinearitätsgleichungen

LSM mit linearen geometrischen Transformationen kann die Abbilder eines Objektes, das im Bereich der Fenstergröße nicht eben ist, einander nicht exakt zuordnen und daher im Schätzwert $\hat{\mathbf{p}}$ für den gesuchten Punkt \mathbf{p} einen mehr oder weniger großen Fehler aufweisen (siehe Seite 19 in Abschnitt 3.2). Hier wird untersucht, inwieweit die Einbeziehung der Epipolarbedingung in Form der Kollinearitätsgleichungen (KG) an solchen Punkten der Kategorie NEB zu Verbesserungen in $\hat{\mathbf{p}}$ führen kann. Da für die gemessenen NEB-Punkte keine Sollkoordinaten bekannt sind, verwenden wir wie in Abschnitt 6.2 – trotz der besprochenen Einschränkungen, siehe Seite 59 – die geschätzte Bildmessgenauigkeit $\hat{\sigma}_{0,3V}$ aus 3-Strahlen-Vorwärtsschnitten (3-VWS) als Maßzahl. Die konkrete Fragestellung ist somit:

- (1) Inwieweit führt das LSM von HEB-Punkten mit KG zu besseren $\hat{\sigma}_{0,3V}$ als ohne?

Da eine Verbesserung jedenfalls zu erwarten ist, handelt es sich gewissermaßen um einen Funktionstest der impliziten Epipolarbedingung.

Vorbemerkungen. Die Berechnung der 3-VWSe erfolgt analog zu den Angaben in Abschnitt 6.2 ab Seite 56. Wie ebendort kommen das schmale Tripel 1–2–3 und das breite Tripel 1–3–5 zum Einsatz. Das LSM basieren wir auf der Affintransformation A als der allgemeinsten linearen Transformation dieser Arbeit und bezüglich LSM-Modell und radiometrischer Transformation auf jenen Werten, die durch die bisherigen Untersuchungen als die vorteilhaftesten erkannt wurden, d. h. Alternativ-Modell K und a priori Ansatz P. Wie in den bisherigen 3-VWS-Untersuchungen ziehen wir als LSM-Lösungen jene nach $I_{\max} = 25$ Iterationen heran. Die gemessenen Näherungsorte \mathbf{p}^0 der NEB-Punkte verbessern wir durch Projektion auf die zugeordneten Epipolarlinien l_φ , die Rundung der (verbesserten) \mathbf{p}^0 auf ganze Pixelmitten wird deaktiviert (d. h. $\mathbf{p}_m^0 = \mathbf{p}^0 \neq [\mathbf{p}^0]$; siehe Tabelle 4.2 auf Seite 41).

Die **Genauigkeiten** der x - und y -KG des Suchbildes, σ_x und σ_y , wählen wir gleich und variieren über die Werte¹⁵ 0.1 Px (= $\hat{\sigma}_{xy,VP}$), 0.01 Px und 0.001 Px. Der Referenzstrahl wird mit einer Beobachtungsgenauigkeit von 10^{-4} Px in beiden Koordinatenrichtungen als »fest« eingeführt (siehe auch Absatz Stochastik auf Seite 37). Als a priori Genauigkeit σ_0 der Grauwert-Beobachtungen verwenden wir den Wert 2 [Grauwerte]. Das ist der gerundete Mittelwert der $\hat{\sigma}_0$ aus LSM-Läufen mit Setup UAP@K über alle HEB- und SEB-Punkte und den vier Bildpaaren 1–2, 1–3, 1–4 und 1–5 mit Bild 1 als Referenzbild.

Ergebnisse. Mit KG werden an allen 16 NEB-Punkten bessere $\hat{\sigma}_{0,3V}$ -Werte erzielt als ohne. Die KG beginnen bei der Masse der Punkte aber erst bei Genauigkeiten $\sigma_x, \sigma_y < \hat{\sigma}_{xy,VP} = 0.1$ Px zu wirken. Bei $\sigma_x = \sigma_y = \hat{\sigma}_{xy,VP}$ (und »schlechter«) entspricht die Qualität der 3-VWSe mit R-Lösungen weitgehend jener mit U-Lösungen und die Grauwert-Gleichungen sind dominant. Verantwortlich dafür wird sein, dass bereits »U-LSM« zu $\hat{\sigma}_{0,3V} \approx 0.1$ Px führt. Figur 6.9 zeigt zu diesen Feststellungen beispielhaft die $\hat{\sigma}_{0,3V}$ -Ergebnisse für die verschiedenen Varianten im schmalen Tripel 1–2–3.

¹⁵ $\hat{\sigma}_{xy,VP} = 0.1$ Px ist die geschätzte Bildmessgenauigkeit der Verknüpfungspunkte der AT und spiegelt die Orientierungsqualität des Bild-Blockes wider (siehe Seite 51 in Abschnitt 5.2).

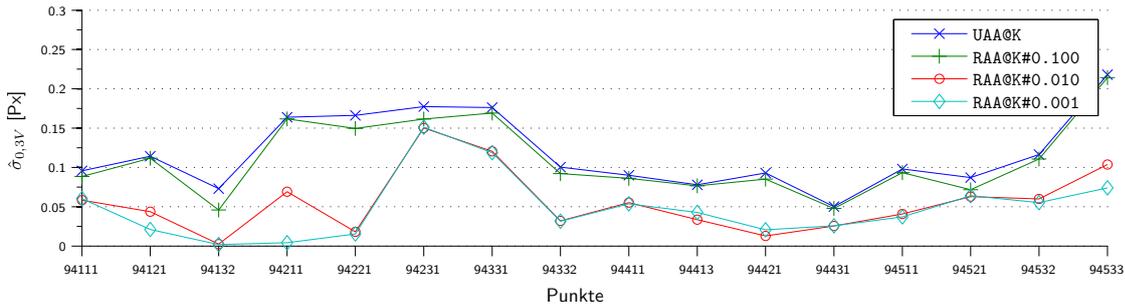


Fig. 6.9. Graph über $\hat{\sigma}_{0,3V}$ der 16 NEB-Punkte im schmalen Bildtripel 1–2–3 bei LSM im Setup `_AA@K` ohne (U, blau, \times) und mit Kollinearitätsgleichungen (R) verschiedener Beobachtungsgenauigkeit für den Suchbild-Strahl (= Zahlenwerte in Legende). Abszisse = Punktnummern (*kein* funktionaler Zusammenhang).

Die Normalabstände der ermittelten \hat{p} zu den jeweiligen Epipolarlinien l_φ zeigen ein ganz ähnliches Bild zu $\hat{\sigma}_{0,3V}$: bei $\sigma_x = \sigma_y = 0.1$ Px sind die Abstände vergleichbar zur jeweiligen U-Lösung, bei Verkleinerung bis $\sigma_x = \sigma_y = 0.001$ Px sinken die Abstände der R-Lösungen kontinuierlich gegen 0. Damit ist (teil-)verifiziert, dass die KG nur senkrecht zur Epipolarlinie wirken.

Nebenergebnis 1. Die Epipolarlinien verlaufen in etwa x -parallel. Um die obigen Vorstellungen weiter zu vertiefen, wurden Versuche mit stark verschlechtertem σ_x -Wert, konkret 1 Px, und $\sigma_y = 0.001$ Px unternommen. Die Erwartung ist, dass sich sehr ähnliche Positionen resp. $\hat{\sigma}_{0,3V}$ -Werte ergeben wie in der obigen Konfiguration mit $\sigma_y = \sigma_x = 0.001$ Px. An 14 von 16 Punkten wird diese Erwartung bestätigt. An 2 Punkten (94121, 94211) ist jedoch ein deutlicher Anstieg von $\hat{\sigma}_{0,3V}$ zu bemerken (von etwa 0.02 auf 0.07 Px bzw. von rund 0.01 auf 0.1 Px). Die Vermutung für dieses unerwartete Verhalten liegt darin, dass dort eine ausgeprägte Textur in y -Richtung in Verbindung mit den nur näherungsweise x -parallelen Epipolarlinien bei einer »Aufweichung« der KG in x -Richtung übermäßig an Einfluss auf die Gleichungslösung gewinnt und sich die gefundenen Positionen in Folge in Richtung U-Lösungen verschieben.

Fazit. Die Einbeziehung der Kollinearitätsgleichungen kann geometrische Modellfehler senkrecht zur Epipolarlinie in Abhängigkeit der gewählten Stochastik kompensieren. Die Implementierung der Kollinearitätsgleichungen scheint korrekt.

Kapitel 7.

Zusammenfassung und Ausblick

7.1. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Thema Themenkreis dieser Arbeit war *Least-Squares Matching* (LSM), ein Verfahren zur Messung korrespondierender Bildstellen in digitalen Bildern im Subpixel-Bereich. Das Prinzip ist, durch Verwendung von geometrischen und radiometrischen Transformationen solche Ausschnitte (oder Fenster) in den sogenannten Suchbildern zu finden, die optimal mit einem festen Ausschnitt im sogenannten Referenzbild korrespondieren. Der feste Ausschnitt heißt Referenzfenster und wird um den festen Referenzpunkt aufgespannt. LSM ist als Kleinste-Quadrate-Ansatz (»Ausgleichung«) formuliert und findet dieses Optimum iterativ durch Minimierung der Summe der quadrierten Grauwert-Differenzen zwischen dem Referenz- und den Suchfenstern. Der Begriff »Grauwerte« bezeichnet den Bildinhalt. Die Ausgleichung liefert Schätzwerte für die Parameter der Transformationen. Die Anwendung der geometrischen Transformationen auf den Referenzpunkt ergibt die gesuchten, korrespondierenden Bildpunkte in den Suchbildern. Wegen der Nicht-Linearität des funktionalen Modells sind Näherungsorte für die gesuchten Bildstellen notwendig.

Zielsetzung Ziel der Arbeit war LSM in verschiedenen Ansätzen und Ausprägungen zu **implementieren** und anhand **praktischer Untersuchungen** mit realen Bilddaten (a) eine Kontrolle der Implementierung zu geben und (b) Vergleiche zwischen den verschiedenen LSM-Varianten anzustrengen. Wir beschränkten uns auf die Behandlung von Zweibild-LSM, d. h. nur ein Suchbild, mit einkanaligen *Frame*-Bildern. Die Untersuchungen und damit die Variationen der Implementierung erstreckten sich auf:

- (U1) Den grundsätzlichen **Ansatz** für das **funktionale Modell**. Wir untersuchten den Ansatz nach Grün [1985] (»Basis-Modell«) und den Ansatz nach Kraus [2004] (»Alternativ-Modell«) hinsichtlich Identität der gefundenen Positionen, Laufzeit und »Schätz-Geschwindigkeit«, d. h. die Anzahl an Iterationen bis gewisse Konvergenzkriterien erreicht sind (Abschnitt 6.3 ab Seite 60).
- (U2) Die **geometrische Transformation**. Wir untersuchten die *linearen* Transformationen Verschiebung (*Shift*, 2 Parameter), Ähnlichkeitstransformation (oder Helmert-Transformation, 4 Parameter) und Affintransformation (6 Parameter) auf Einhaltung der mit ihnen verbundenen Modellvorstellungen (Abschnitt 6.2 ab Seite 56). Zur Quantifizierung verwendeten wir die geschätzte Bildmessgenauigkeit $\hat{\sigma}_{0,3V}$ aus 3-Strahlen-Vorwärtsschnitten von Referenzpunkten und korrespondierenden LSM-Punkten in zwei Suchbildern.

- (U3) Die **radiometrische Transformation**. Wir untersuchten die Unterschiede zwischen den Ansätzen der Mitschätzung und der a priori Berechnung von Parametern einer *linearen* Transformationsfunktion hinsichtlich gefundener Position, Schätz-Geschwindigkeit und Laufzeit (Abschnitt 6.4 ab Seite 69)
- (U4) Die Erweiterung um **geometrische Bedingungen**. Wir untersuchten inwiefern die Zuordnung von Bildpunkten, an denen die geometrischen Modellvorstellungen verletzt werden, durch Verwendung der Kollinearitätsgleichungen als implizite Epipolarbedingung profitieren kann (Abschnitt 6.5 ab Seite 72). Als Maßzahl verwendeten wir wie in (U2) die Bildmessgenauigkeit $\hat{\sigma}_{0,3V}$. Die Orientierung der verwendeten Bilder ist bekannt.

Überblick Die Aufarbeitung der zugrundeliegenden Theorie ist in Kapitel 3 ab Seite 11 gegeben. Wir besprechen darin zu Beginn die beiden grundlegenden funktionalen Modelle, Basis-Modell und Alternativ-Modell, und deren Haupt-Unterschiede in mathematischer Hinsicht. Anschließend werden die geometrischen Transformationen und deren Parametrisierung konkretisiert, die Erweiterung des funktionalen Modells um radiometrische Parameter formuliert, und schließlich eine »weiche« Epipolarbedingung in Form der Kollinearitätsgleichungen eingeführt.

Die Implementierung erfolgte im Programm MATLAB der Firma The MathWorks und ist in Kapitel 4 ab Seite 39 beschrieben. Wesentliche Ergebnisdaten sind für jedes prozessierte Punktepaar ein Log-File mit Details zur Ausgleichung und eine Ergebnisgraphik zur graphischen Analyse. Diese enthält unter anderem das Referenzfenster und das Suchfenster am Ende der Iterationen, diverse Punkteintragungen und ein farbkodiertes Differenzenbild zwischen den Grauwerten von Referenzfenster und (interpolierten) Grauwerten von enditeriertem Suchfenster (Abschnitt 4.3 ab Seite 42).

Als Bildmaterial kamen panchromatische Luftbilder aus einem orientierten Bild-Block zum Einsatz. Die Bild-Daten wurden mit der Kamera UltraCamX der Firma Microsoft/Vexcel aufgezeichnet (Kapitel 5 ab Seite 49).

Grundlage für die Berechnungen waren manuell gemessene, qualifiziert ausgewählte Bildpunkte in drei Kategorien: (a) Punkte mit horizontaler Ebene als Umgebungsfläche im Objektraum, (b) Punkte mit Schrägebene als Umgebungsfläche im Objektraum und (c) Punkte mit nicht ebener Umgebungsfläche im Objektraum. Wegen der manuellen, qualifizierten Messung basieren die Untersuchungen auf Punktepaaren mit sehr guten Näherungsorten. Weitere Rahmenbedingungen für die Experimente sind Abschnitt 6.1 ab Seite 53 zu entnehmen.

Ergebnisse und Schlussfolgerungen Die Untersuchungen zu Basis- und Alternativ-Modell erfüllen die Erwartungen: Die Ergebnisse von (U1) zeigen, dass (a) die Modelle – gemessen an internen Genauigkeiten – identische Schätzwerte für gesuchte Bildpositionen liefern und sich beim Alternativ-Modell Vorteile in (b) Iterationen-Laufzeit (d. i. die Laufzeit für die Iterationen der Ausgleichung, ITL) und (c) Schätz-Geschwindigkeit messen lassen. Ergebnis (a) ist ein Hinweis auf die Korrektheit der Modell-Implementierung. Hinsichtlich ITL war festzustellen, dass das Alternativ-Modell bei gleicher Anzahl an Iterationen zwischen etwa 30 % (bei kleiner Fenstergröße von 13 Pixel) und 10 % (bei großer Fenstergröße von 33 Pixel) schneller rechnet als das Basis-Modell. Durch Optimierung

der Implementierung ließe sich das Basis-Modell deutlich schneller machen. Dies wurde jedoch nicht weiter verfolgt. Für Details zur ITL siehe Abschnitt 6.3.3 ab Seite 66. Hinsichtlich Schätz-Geschwindigkeit war festzustellen, dass Basis- und Alternativ-Modell in der »Grob«-Annäherung an die ausiterierte Position – wir wählten dafür 25 Iterationen – de facto gleich viele Iterationen benötigen, in der »Fein«-Annäherung allerdings Vorteile beim Alternativ-Modell messbar sind. Bei kleinsten Freiheitsgraden benötigt das Alternativ-Modell um durchschnittlich eine Iteration weniger als das Basis-Modell, bei maximalen Freiheitsgraden im Mittel um 3 Iterationen weniger. Dieses Verhalten ist dadurch begründbar, dass beim Basis-Modell in den Ableitungen der Grauwerte interpoliert wird und beim Alternativ-Modell nicht. Für Details zur Schätz-Geschwindigkeit siehe Abschnitt 6.3.2 ab Seite 63. Die Ergebnisse legen den Schluss nahe das Alternativ-Modell als grundlegenden Ansatz für das funktionale Modell zu empfehlen.

Die Resultate von (U2) können die Erwartungen bestätigen: (a) Für Bildpunkte mit horizontaler Umgebungsebene reicht die Verschiebung als geometrische Transformation aus und (b) die besten Resultate an Punkten mit schräger Umgebungsebene liefert die Affintransformation. Die Implementierung der Transformationen scheint somit korrekt. Interessant ist die Beobachtung, dass bei Symmetrien in der Bild-Textur eigentlich falsche Transformationen zu ähnlichen Schätzwerten für die gesuchten Positionen führen können wie die richtigen Transformationen. Details zu diesem Themenkreis sind in Abschnitt 6.2 ab Seite 56 zu finden.

Die Ergebnisse von (U3) ließen erkennen: (a) A priori Ansatz und Mitschätzungs-Ansatz liefern identische Schätzwerte für die gesuchten Positionen (gemessen an internen Genauigkeiten), solange die verwendete geometrische Transformation adäquat ist. (b) Der a priori Ansatz zeigt gegenüber dem Mitschätzungs-Ansatz leichte Vorteile in der Schätz-Geschwindigkeit. Die Gewinne liegen bei sonst gleichen LSM-Einstellungen durchwegs unter jenen wegen Modellwahl, d. h. Basis-Modell vs. Alternativ-Modell. Bei den Einstellungen mit maximalen Ausprägungen (Basis-Modell, Affintransformation, Fein-Annäherung) war mit dem a priori Ansatz durchschnittlich eine Iteration weniger zu beobachten als beim Mitschätzungs-Ansatz. Aufgrund dieser nur geringen Unterschiede schätzen wir die beiden Ansätze auf Basis der Dimensionen von (U3) (und den Rahmenbedingungen der Untersuchungen) als gleichwertig ein. Hinsichtlich ITL ergab sich für den Mitschätzungs-Ansatz ein unerwartetes Bild: der Prozess läuft nicht global länger als ohne radiometrische Transformation, sondern in Abhängigkeit der Anzahl an freien geometrischen Parametern auch kürzer. Wir vermuten dahinter MATLAB-Internas. Detaillierte Ausführungen zu (U3) gibt Abschnitt 6.4 ab Seite 69.

Die Resultate von (U4) konnten die Erwartungen erfüllen: *mit* Kollinearitätsgleichungen werden an Punkten, an denen die Modellvorstellungen linearer geometrischer Transformationen verletzt werden (Punkte mit nicht ebener Umgebungsfläche), tatsächlich bessere Zuordnungen erreicht, als ohne. Das ist zurückzuführen auf den geometrischen »Zwang« senkrecht zur Epipolarlinie. Die Gleichungen beginnen aber erst bei verhältnismäßig kleinen Zahlenwerten für die angenommene Bildmessgenauigkeit zu wirken: Bei Werten von 0.1 Pixel (der geschätzten Bildmessgenauigkeit aus der Aerotriangulation des Bild-Blocks) sind nur minimale Unterschiede zu den Resultaten mit »ungezwängtem« LSM zu beobachten. Erst ab etwa 0.01 Pixel treten merkliche Verbesserungen ein. Die a priori Genauigkeit der Grauwert-Beobachtungen war mit einem Wert von 2 [Grauwerten]

eingeführt. Es war der Schluss zu ziehen, dass die Einbeziehung einer Epipolarbedingung geometrische Modellfehler von LSM senkrecht zur Epipolarlinie kompensieren kann. Die Ergebnisse sind in Abschnitt 6.5 ab Seite 72 zu finden.

7.2. Ausblick

Nicht alle sich ergebenden Fragen konnten im Rahmen dieser Arbeit zu Genüge beantwortet werden. Unter den offen gebliebenen Themen bzw. lediglich angeschnittenen Untersuchungen, die weiterer Vertiefung Wert scheinen, sind:

Schlechte Näherungsorte Versuche mit verschlechterten Näherungsorten für die gesuchten Bildpunkte haben gezeigt, dass die Anzahl an Iterationen bis zum Erreichen eines der Konvergenzkriterien deutlich ansteigen kann, speziell bei aktivierten Skalierungs-, Rotations- und Formparametern und aktivierter radiometrischer Transformation. Diese Beobachtungen werden in der Literatur bestätigt, z. B. bei [Grün und Baltsavias, 1988]. Als Abhilfe werden angegeben: (a) Andere Parameter als die Verschiebung erst in den späteren Iterationen zu aktivieren, d. h. die Ausgleichung mit einem steifen Modell zu starten; siehe [Luhmann, 2003, Seite 369] oder [Grün und Baltsavias, 1988, Seite 637]. (b) Die Grauwerte von Referenz- und Suchbild für die ersten Iterationen mit *Lowpass*-Filtern vor zu bearbeiten und so Variabilität und Rauschen zu minimieren; siehe [Ackermann, 1984], [Baltsavias, 1991, Seite 177]. Beide Möglichkeiten können auch kombiniert eingesetzt werden. Tests mit einfachen Mittelwertfiltern (3×3 und 5×5 Pixel) brachten deutliche Verbesserungen. Es stellt sich die Frage (a) »wann« und welche der zusätzlichen Parameter aktiviert werden sollen¹ und (b) welche *Lowpass*-Filter besonders geeignet sind um die Schätz-Geschwindigkeit zu erhöhen. Unter diesen Gesichtspunkten wären auch Basis- und Alternativ-Modell und die radiometrischen Ansätze neu zu beleuchten.

Robustheit und zusätzliche Parameter Die bestehende Implementierung ist für LSM unter kontrollierten Bedingungen ausgelegt. Eine Erweiterung um fortgeschrittene Prinzipien der Ausgleichsrechnung wie (a) Aufspüren und Eliminieren grober Fehler und (b) Elimination überflüssiger oder nicht schätzbarer Parameter bzw. deren Stützung, wäre für den Einsatz an beliebigen Bildpunkten wertvoll. Nicht eliminierte grobe Fehler führen im Regelfall zu schlechten oder falschen Lösungen. Überflüssige oder aufgrund schwacher Textur nur schwer schätzbare Parameter bedingen (nah-)singuläre Normalgleichungsmatrizen und bedeuten damit eine numerisch instabile oder mit üblichen Mitteln unmögliche Normalgleichungslösung.

Radiometrie An einigen Punktepaaren zeigte sich die Beschränkung einer linearen radiometrischen Transformation deutlich (Anzeichen dafür sind in Figur 6.5 auf Seite 61, zweite Zeile, zu erkennen). Es wäre interessant, akkuratere radiometrische Korrekturen zu beleuchten bzw. LSM auf Basis radiometrisch invarianter Information zu formulieren und zu untersuchen, inwieweit die Verwendung dieser kompaktierten Information Auswirkungen auf die Positionsgenauigkeit hat.

¹Die Autoren sind in ihren Empfehlungen pragmatisch und nennen »die finalen Iterationen« [Luhmann, 2003] und »die letzten 2–3 Iterationen« [Grün und Baltsavias, 1988].

Fenstergröße Für die meisten Untersuchungen dieser Arbeit wurden quadratische LSM-Fenster mit einer konstanten Seitenlänge von 17 Pixel zugrundegelegt. Für den Einsatz an beliebigen Punktepaaren ist das natürlich ein unbefriedigender Zustand. Adaptive Methoden, die die Fenstergröße (und -form) in Abhängigkeit der konkret vorliegenden Textur wählen, sind ein klarer Ansatzpunkt. Wegen der inhärenten Modellierungsfehler der geometrischen Transformation scheint speziell die Suche nach minimal möglichen Fenstergrößen interessant.

Güte der Näherungsorte Naheliegender ist die Frage, wie gut die Näherungsorte sein müssen, um Konvergenz sicherzustellen. A priori kann gesagt werden, dass die Antwort sowohl von Fenstergröße und -form als auch der konkret vorliegenden Textur abhängig sein wird. Absolute Zahlenwerte scheinen daher wenig sinnvoll. Grundlegende Arbeiten hierzu finden sich bei Förstner [1984] und Baltasavias [1991].

Geometrische Bedingungen Vor allem in der *Computer Vision* ist die Stereo-Rekonstruktion auf Basis von Epipolarbildern weit verbreitet (explizite Epipolarbedingung). Es stellt sich die Frage, ob im Rahmen von LSM Vor- oder Nachteile gegenüber der Lösung über die Kollinearitätsgleichungen bestehen (implizite Epipolarbedingung). A priori lässt sich festhalten, dass der Epipolarbild-Ansatz die Verwendung einer vereinfachten geometrischen Transformation erlaubt, siehe [Förstner, 1993]. Der Ansatz ist jedoch mit einer rechenaufwändigen Umbildung des Bildinhaltes verbunden, welche zusätzlich eine Grauwert-Interpolation bedeutet. Weiters ist er nicht auf das simultane LSM in beliebig vielen Suchbildern verallgemeinerbar.

Simultane Korrespondenzsuche in mehreren Suchbildern Die bestehende Implementierung ist auf Zweibild-LSM ausgelegt, d. h. die Korrespondenzsuche in nur einem Suchbild. Es wäre eine interessante Aufgabe, das Programm auf simultanes LSM in mehreren Suchbildern zu erweitern, d. h. eine gleichzeitige und voneinander *abhängige* Suche nach korrespondierenden Bildstellen in mehr als einem Suchbild.

Korrelation der Grauwertbeobachtungen. Die Stochastik a posteriori ist sehr optimistisch und wird in Aerotriangulationen von größeren Bild-Blöcken nicht bestätigt. Als Grund wird die übliche Negierung der Korrelation benachbarter Grauwerte im stochastischen Modell a priori vermutet. Eine Einbringung geeigneter Auto-Korrelationsmodelle bzw. der Variabilitäts-Struktur benachbarter Grauwerte könnte die a posteriori-Information realistischer machen.

Anhang A.

Liste der Symbole

Dieses Kapitel listet die meisten mathematischen Symbole dieser Arbeit auf. Auf die Angabe der in den Kapiteln 4 und 6 (Implementierung bzw. praktische Untersuchungen) eingeführten Bezeichnungen verzichten wir, da sie nur in diesen Textteilen vorkommen.

Ein Näherungswert für eine allgemeine Größe α ist in dieser Arbeit durch α^0 bezeichnet, der im Zuge einer Ausgleichung ermittelte Schätzwert durch $\hat{\alpha}$. Reduzierte Koordinaten sind durch den Prä-Index ${}_r\alpha$ gekennzeichnet. Nur hervorzuhebende Größen dieser genannten Kategorien werden hier explizit aufgelistet.

Tab. A.1. Liste der Symbole.

IDENTIFIKATOREN	
Symbol	Bedeutung
κ	Bildkoordinatensystem, Achsen $\{x, y, z\}$
K	Objektkoordinatensystem, Achsen $\{X, Y, Z\}$
Ψ	Bild bzw. Bildebene
Ψ_f, Ψ_g	Referenzbild bzw. Suchbild
κ_f	Bildkoordinatensystem von Ψ_f , Achsen $\{\xi, \eta, \zeta\}$
κ_g	Bildkoordinatensystem von Ψ_g , Achsen $\{x, y, z\}$
S	Transformation »Verschiebung«, <u>S</u> hift
H	<u>H</u> elmert-Transformation, Ähnlichkeitstransformation
A	<u>A</u> ffintransformation

SKALARE	
Symbol	Bedeutung
i	Iterationszahl, $1 \leq i \leq I$
I_{\max}	maximale Iterationszahl
k	Index der Fensterpunkte, $1 \leq k \leq K$
j	Index der geometrischen Transformationsparameter, $1 \leq j \leq J$
c	Kamerakonstante
w	Fenstergröße, ungerade positive Zahl
a_{pq}, b_{pq}	Parameter der geometr. Transformation im Basis- bzw. Alternativ-Modell, $p = 1, 2, q = 1, 2, 3$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

B, C	Helligkeit bzw. Kontrast
σ_0	Varianzfaktor
r	Redundanz der Ausgleichung
l_B, q_B	Längs- bzw. Querüberlappung

VEKTOREN	
Symbol	Bedeutung
φ	Referenzpunkt in Ψ_f , $\in \kappa_f$, Koordinaten $\xi, \eta(, 0)$
l_φ	Epipolarlinie von φ , $\in \kappa_g$
\mathbf{p}	zu φ gesuchter Punkt in Ψ_g , $\in \kappa_g$, Koordinaten $x, y(, 0)$
φ_m	Mittelpunkt des Referenzfensters; definiert als $[\varphi]$, mit $[\cdot]$ der Rundungsfunktion
\mathbf{p}_m^0	Mittelpunkt des initialen Suchfensters; definiert als $[\mathbf{p}^0]$ (Standardfall) oder \mathbf{p}^0
φ_{red}	Reduktionspunkt in Ψ_f ; es gilt $\varphi_{\text{red}} = \varphi_m$ (fest)
\mathbf{p}_{red}	Reduktionspunkt in Ψ_g ; es gilt $\mathbf{p}_{\text{red}} = \mathbf{p}_m^0$ (fest)
\mathbf{P}, \mathbf{P}_m	Objektpunkt von φ und \mathbf{p} bzw. φ_m und \mathbf{p}_m
φ_k	Fensterpunkte des Referenzfensters; ganzzahlige Koordinaten
\mathbf{p}_k	zu φ_k korrespondierende Fensterpunkte des Suchfensters; im Allgemeinen unrunde Koordinaten
\mathbf{p}_k^0	Näherungswerte für \mathbf{p}_k (initiales Suchfenster), ganzzahlige (Standardfall) oder unrunde Koordinaten
$\mathbf{p}_k^{0(i)}$	\mathbf{p}_k^0 in Iteration i , $\mathbf{p}_k^{0(1)} = \mathbf{p}_k^0$; im Allgemeinen unrunde Koordinaten für $i \geq 2$
$\mathbf{P}_0, \mathbf{p}_0$	Projektionszentrum, $\in K$ resp. κ
$\mathbf{P}_0^n, \mathbf{p}_0^n$	Hauptpunkt, $\in K$ resp. κ
$\boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}$	Vektor der Parameter ω_j von \mathbf{t} bzw. w_j von \mathbf{s}
$\boldsymbol{\omega}_G, \mathbf{w}_G$	Parametervektoren für Transformation $\mathbf{G} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{A}\}$
\mathbf{r}, \mathbf{r}_L	Vektor der Parameter von R bzw. R_L
\mathbf{v}	Verbesserungsvektor
\mathbf{u}	Vektor der Unbekanntenzuschläge
$\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^{0(i)}$	Vektor der Näherungswerte der Unbekannten in der ersten bzw. der i -ten Iteration
l_G, l_G^*	Vektor der gekürzten Beobachtungen bei Basis- bzw. Alternativmodell und Transformation \mathbf{G}
$\tilde{\mathbf{d}}_{k,G}^\top, \tilde{\mathbf{d}}_{k,G}^{*\top}$	k -te Zeile der Design-Matrix D_G bzw. D_G^* der Ausgleichung

FUNKTIONEN	
Symbol	Bedeutung
f, g	Grauwertfunktion von Ψ_f bzw. Ψ_g
g'	radiometrisch transformierte Grauwertfunktion g
f_ξ, f_η	partielle Ableitungen von f
g_x, g_y	partielle Ableitungen von g
∇g	Gradient von g
f_{ξ_k}, f_{η_k}	f_ξ, f_η an den Fensterpunkten φ_k des Referenzfensters
$g_{x_k}^0, g_{y_k}^0$	g_x, g_y an den Fensterpunkten \mathbf{p}_k^0 des genäherten Suchfensters
\mathbf{T}	geometrische Transformationsfunktion $\mathbf{T}(\mathbf{p}_k, \boldsymbol{\omega}_T) = \varphi_k$
\mathbf{t}	»reduzierte« Transformationsfunktion $\mathbf{t}({}_r\mathbf{p}_k, \boldsymbol{\omega}) = {}_r\varphi_k$
\mathbf{s}	wie \mathbf{t} jedoch $\mathbf{s}({}_r\varphi_k, \boldsymbol{\omega}) = {}_r\mathbf{p}_k$
$\mathbf{t}_G, \mathbf{s}_G$	Transformationsfunktion \mathbf{t} bzw. \mathbf{s} für Transformation $G \in \{\mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{A}\}$
$\mathbf{t}_G, \mathbf{s}_G$	\mathbf{t}_G bzw. \mathbf{s}_G in homogener Notation
R	allgemeine radiometrische Transformationsfunktion $R(g, \mathbf{r}) = g'$
R_L	wie R nur linear; $R_L(g, \mathbf{r}_L) = B + (1 + C) \cdot g = g'$

MATRIZEN	
Symbol	Bedeutung
H_x, H_y	Diskrete Ableitungskerne in allgemeine x - bzw. y -Richtung; in dieser Arbeit Vektoren, doch potentiell Matrizen
A, B	Homogene Matrix der allg. Transformationsfunktion \mathbf{t} bzw. \mathbf{s}
A_G, B_G	\mathbf{t}_G bzw. \mathbf{s}_G zugeordnete homogene Matrix für Transformation $G \in \{\mathbf{S}, \mathbf{H}, \mathbf{A}\}$
D	allgemeine Design-Matrix der Ausgleichung
N	Normalgleichungsmatrix
Q_{ll}	Kofaktormatrix der Beobachtungen
C_{ll}, C_{uu}	Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen bzw. Unbekannten

Anhang B.

Zur Verschiebung der inversion Transformationsfunktion des Alternativ-Modells

Anmerkung: Die Indizes entsprechen hier nicht jenen im Haupttext.

In Abschnitt 3.5 ab Seite 31 wurde die Erweiterung des funktionalen Modells von LSM um eine geometrische Bedingung in Form der Kollinearitätsgleichungen formuliert. Um die Gleichungen (3.65)–(3.68) auf Seite 33 als zusätzliche Beobachtungsgleichungen im Alternativ-Modell (3.30) von Seite 23 verwenden zu können, werden benötigt: (1) Die Verschiebungen a_{13} und a_{23} der inversen Transformationsfunktion \mathbf{s}^\top als Funktion der Parameter $(b_{13}, b_{23}, \dots)^\top = \mathbf{w}$, und (2) die partiellen Ableitungen von a_{13} , a_{23} nach b_{13} , b_{23} , usw. Abschnitt B.2 zeigt die Herleitung dieser Größen. Abschnitt B.1 enthält die notwendigen Grundlagen.

B.1. Inversion von Matrizen mit Determinanten

Nach [Stöcker \[1999\]](#) ist die Inverse M^{-1} einer regulären (n, n) -Matrix M gegeben durch

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \mathfrak{M}^\top = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{11} & \cdots & \mathbf{m}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_{1n} & \cdots & \mathbf{m}_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

mit \mathfrak{M} der *Matrix der Algebraischen Komplemente* \mathbf{m}_{ij} der Elemente m_{ij} von M . Für die einzelnen \mathbf{m}_{ij} gilt

$$\mathbf{m}_{ij} = (-1)^{i+j} \det U_{ij}, \quad (\text{B.2})$$

mit $\det U_{ij}$ dem Wert der Unterdeterminante von M , welche man durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte von M erhält.

B.2. Inverse Verschiebung und partielle Ableitungen

Wir führen die Rechnungen zunächst für die Affintransformation \mathbf{A} durch und behandeln die »Sonderfälle« Verschiebung \mathbf{S} und Helmert-Transformation \mathbf{H} später.

1. Schritt a_{13} und a_{23} .

Gegeben sei die homogene aber nicht weiter skalierte, invertierbare Matrix $\mathbf{B}_A = \mathbf{B}$ der Transformationsfunktion \mathbf{s}_A (vgl. Tabelle 3.2 auf Seite 21):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 1 + b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Gesucht sind die Verschiebungen a_{13} und a_{23} der inversen Abbildung \mathbf{s}_A^I vermittelt durch $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$ in symbolischer Form. Durch Verwendung von (B.1) auf Seite 83 können diese unmittelbar angegeben werden:

$$a_{13} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \mathfrak{b}_{31} \quad \text{mit } \mathfrak{b}_{31} = \det \mathbf{U}_{31} = \det \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} \\ 1 + b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

$$a_{23} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \mathfrak{b}_{32} \quad \text{mit } \mathfrak{b}_{32} = -\det \mathbf{U}_{32} = -\det \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

2. Schritt $\partial a_{13}/\partial b_{kl}$ und $\partial a_{23}/\partial b_{kl}$.

Die gesuchten partiellen Ableitungen $\frac{\partial a_{13}}{\partial b_{kl}}$ von (B.4) und $\frac{\partial a_{23}}{\partial b_{kl}}$ von (B.5) mit $k = 1, 2$ und $l = 1, 2, 3$ lauten

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial b_{kl}} = \frac{1}{(\det \mathbf{B})^2} \left(-\mathfrak{b}_{kl} \cdot \mathfrak{b}_{31} + \det \mathbf{B} \cdot \frac{\partial(\det \mathbf{U}_{31})}{\partial b_{kl}} \right), \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial b_{kl}} = \frac{1}{(\det \mathbf{B})^2} \left(-\mathfrak{b}_{kl} \cdot \mathfrak{b}_{32} - \det \mathbf{B} \cdot \frac{\partial(\det \mathbf{U}_{32})}{\partial b_{kl}} \right). \quad (\text{B.7})$$

Dabei ist $\mathfrak{b}_{kl} = \frac{\partial(\det \mathbf{B})}{\partial b_{kl}} = (-1)^{k+l} \det \mathbf{U}_{kl}$ entsprechend (B.2). Die noch benötigten partiellen Unterableitungen nach den b_{kl} sind

$$\frac{\partial(\det \mathbf{U}_{31})}{\partial b_{12}} = b_{23} \qquad \frac{\partial(\det \mathbf{U}_{32})}{\partial b_{11}} = b_{23} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial(\det \mathbf{U}_{31})}{\partial b_{13}} = -(1 + b_{22}) \qquad \frac{\partial(\det \mathbf{U}_{32})}{\partial b_{13}} = -b_{21} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial(\det \mathbf{U}_{31})}{\partial b_{22}} = -b_{13} \qquad \frac{\partial(\det \mathbf{U}_{32})}{\partial b_{21}} = -b_{13} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial(\det \mathbf{U}_{31})}{\partial b_{23}} = b_{12} \qquad \frac{\partial(\det \mathbf{U}_{32})}{\partial b_{23}} = (1 + b_{11}). \quad (\text{B.11})$$

Die partiellen Unterableitungen nach den hier fehlenden b_{kl} sind jeweils 0.

Transformationsfunktion \mathbf{s}_S . Im Fall der Verschiebung als gewählter Transformation mit $\mathbf{w}_S = (b_{13}, b_{23})^\top$ ist unmittelbar klar, dass gilt

$$a_{13} = -b_{13}, \quad (\text{B.12})$$

$$a_{23} = -b_{23}. \quad (\text{B.13})$$

Das folgt auch aus (B.4) und (B.5). Die partiellen Ableitungen (B.6) und (B.7) reduzieren sich dann auf

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial b_{kl}} = \begin{cases} -1 & \text{für } k = 1 \text{ und } l = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial b_{kl}} = \begin{cases} -1 & \text{für } k = 2 \text{ und } l = 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Transformationsfunktion $s_{\mathbb{H}}$. Im Fall der Helmert-Transformation muss für die Bildung der partiellen Ableitungen (B.6) und (B.7) beachtet werden, dass die Parameter b_{mc} und b_{ms} zweimal in der zugeordneten Transformationsmatrix $\mathbf{B}_{\mathbb{H}}$ vorkommen (siehe Tabelle 3.2 in Abschnitt 3.2). Wir geben die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a_{13}}{\partial b_{ms}}$, $\frac{\partial a_{13}}{\partial b_{mc}}$ und $\frac{\partial a_{23}}{\partial b_{ms}}$, $\frac{\partial a_{23}}{\partial b_{mc}}$ daher direkt in ihrer expliziten Form an. Sie lauten mit $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathbb{H}}$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial b_{ms}} = \frac{1}{(\det \mathbf{B})^2} \left(-2 b_{ms} \cdot \mathfrak{b}_{31} - \det \mathbf{B} \cdot b_{23} \right), \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial b_{mc}} = \frac{1}{(\det \mathbf{B})^2} \left(-(2 b_{mc} + 2) \cdot \mathfrak{b}_{31} - \det \mathbf{B} \cdot b_{13} \right), \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial b_{ms}} = \frac{1}{(\det \mathbf{B})^2} \left(-2 b_{ms} \cdot \mathfrak{b}_{32} + \det \mathbf{B} \cdot b_{13} \right), \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial b_{mc}} = \frac{1}{(\det \mathbf{B})^2} \left(-(2 b_{mc} + 2) \cdot \mathfrak{b}_{32} - \det \mathbf{B} \cdot b_{23} \right). \quad (\text{B.19})$$

Für die partiellen Ableitungen nach b_{13} und b_{23} behalten (B.6) und (B.7) ihre Allgemeingültigkeit; es werden noch die zugeordneten partiellen Unterableitungen benötigt. Diese lauten

$$\frac{\partial(\det U_{31})}{\partial b_{13}} = -(1 + b_{mc}) \quad \frac{\partial(\det U_{32})}{\partial b_{13}} = -b_{ms} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial(\det U_{31})}{\partial b_{23}} = -b_{ms} \quad \frac{\partial(\det U_{32})}{\partial b_{23}} = (1 + b_{mc}). \quad (\text{B.21})$$

Literaturverzeichnis

Die Werke sind alphabetisch nach den Nachnamen der Autoren sortiert. Bei mehreren Autoren erfolgt die Sortierung nach dem ersten Autor.

- Ackermann, F. (1984): High Precision Digital Image Correlation. In: *Photogrammetrische Woche 1983, Institut für Photogrammetrie, Schriftenreihe, Heft 9*, Seiten 231–243.
- Baltsavias, E. P. (1991): *Multiphoto Geometrically Constrained Matching*. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Bayer, B. E. (1976): COLOR IMAGING ARRAY. URL http://worldwide.espacenet.com/publicationDetails/biblio?locale=de_EP&CC=US&NR=3971065, Patent US3971065.
- Bethmann, F. und Luhmann, T. (2011): Kleinste-Quadrate-Zuordnung mit erweiterten geometrischen Transformationen. *Photogrammetrie - Fernerkundung - Geoinformation*, 2011(2):057–069.
- Cramer, M. (2010): The DGPF-Test on Digital Airborne Camera Evaluation – Overview and Test Design. *Photogrammetrie - Fernerkundung - Geoinformation*, 2010(2):073–082.
- Förstner, W. (1979): Ein Verfahren zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, 11-12:446–453.
- Förstner, W. (1982): ON THE GEOMETRIC PRECISION OF DIGITAL CORRELATION. In: *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Band 24 Teil 3, Seiten 179–189. Kommission III Symposium, Helsinki, Finnland.
- Förstner, W. (1984): QUALITY ASSESSMENT OF OBJECT LOCATION AND POINT TRANSFER USING DIGITAL IMAGE CORRELATION TECHNIQUES. In: *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Band 26 Teil A3a, Seiten 197–219. 25. ISPRS Kongress, Rio de Janeiro, Brasilien.
- Förstner, W. (1986): A FEATURE-BASED CORRESPONDENCE ALGORITHM FOR IMAGE MATCHING. In: *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Band 26 Teil 3/3, Seiten 150–166. ISPRS Kommission III Symposium, Rovaniemi, Finnland.
- Förstner, W. (1993): *Computer and Robot Vision*, Band II, Kapitel Image Matching (16), Seiten 289–379. Addison-Wesley.

- Förstner, W. (1998): On the Theoretical Accuracy of Multi Image Matching, Restoration and Triangulation. In: *Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. mult. G. Konecny*. 13 Seiten.
- Förstner, W. (2011): Minimal Representations for Uncertainty and Estimation in Projective Spaces. In: *Computer Vision – ACCV 2010*, herausgegeben von R. Kimmel, R. Klette, und A. Sugimoto, Band 6493 von *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 619–632. Springer-Verlag.
- Fuchs, C. (1997): *Extraktion polymorpher Bildstrukturen und ihre topologische und geometrische Gruppierung*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.
- Gonzalez, R. C., Woods, R. E., und Eddins, S. L. (2009): *Digital Image Processing using MATLAB*. Gatesmark Publishing, 2. Auflage.
- Grün, A. W. (1985): ADAPTIVE LEAST SQUARES CORRELATION: A POWERFUL IMAGE MATCHING TECHNIQUE. *South African Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Cartography*, 14(3):175–187.
- Grün, A. W. und Akca, D. (2005): Least squares 3D surface and curve matching. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 59(3):151–171.
- Grün, A. W. und Baltsavias, E. P. (1988): Geometrically Constrained Multiphoto Matching. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 54(5):633–641.
- Gruber, M., Ponticelli, M., Bernögger, S., und Leberl, F. (2008): ULTRACAMX, THE LARGE FORMAT DIGITAL AERIAL CAMERA SYSTEM BY VEXCEL IMAGING / MICROSOFT. In: *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Band 37 Teil 1, Seiten 665–670. 21. ISPRS Kongress, Peking, China.
- Haala, N. (2011): Multiray Photogrammetry and Dense Image Matching. In: *Photogrammetric Week '11*, herausgegeben von D. Fritsch. Wichmann Verlag.
- Hahn, M. und Brenner, C. (1995): Area Based Matching of Colour Images. In: *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Band 30 Teil 5W1, Seiten 227–236. ISPRS Intercommission Workshop “From Pixel to Sequence“, Zürich, Schweiz.
- Hartley, R. und Zisserman, A. (2004): *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2. Auflage.
- Hirschmüller, H. (2008): Stereo Processing by Semiglobal Matching and Mutual Information. *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 30(2):328–341.
- Jacobsen, K., Cramer, M., Ladstädter, R., Ressel, C., und Spreckels, V. (2010): DGPF-Project: Evaluation of Digital Photogrammetric Camera Systems – Geometric Performance. *Photogrammetrie - Fernerkundung - Geoinformation*, 2010(2):083–097.

- Jansa, J. und Dorigo, W. (2008): Unterlagen zur Vorlesung »Digitale Bildverarbeitung in Photogrammetrie und Fernerkundung«. LV-Nr. 122.035, jj@ipf.tuwien.ac.at.
- Kager, H., Rottensteiner, F., Kerschner, M., und Stadler, P. (2002): *ORPHEUS 3.2.1 User Manual*. Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien.
- Kraus, K. (1996): *Photogrammetrie – Band 2: Verfeinerte Methoden und Anwendungen*. Ferd. Dümmlers Verlag, 3. Auflage.
- Kraus, K. (2004): *Photogrammetrie – Band 1: Geometrische Informationen aus Photographien und Laserscanneraufnahmen*. Walter de Gruyter, 7. Auflage.
- Kraus, K. und Schneider, W. (1988): *Fernerkundung – Band 1: Physikalische Grundlagen und Aufnahmetechniken*. Ferd. Dümmlers Verlag.
- Lowe, D. G. (2004): Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2):91–110.
- Luhmann, T. (2003): *Nahbereichsphotogrammetrie*. Wichmann Verlag, 2. Auflage.
- Manhart, F. (2004): Skriptum zur Vorlesung »Geometrie für Vermessungswesen«. LV-Nr. 111.282, manhart@geometrie.tuwien.ac.at.
- McGlone, C., Hg. (2004): *Manual of Photogrammetry*. American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, 5. Auflage.
- Mikhail, E. M. (1976): *Observations and Least Squares*. IEP-A Dun-Donnelly Publisher.
- Niemeier, W. (2008): *Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter, 2. Auflage.
- Pfeifer, N. (2012): Mündliche Besprechung. np@ipf.tuwien.ac.at.
- Ressl, C. (2001): THE OEEPE-TEST 'INTEGRATED SENSOR ORIENTATION' AND ITS HANDLING WITHIN THE HYBRID BLOCK-ADJUSTMENT PROGRAM ORIENT. In: *OEEPE Workshop „Integrated Sensor Orientation“ (published only as CD-Rom)*.
- Ressl, C. (2003): *Geometry, Constraints and Computation of the Trifocal Tensor*. Dissertation, Technische Universität Wien.
- Ressl, C. (2012): Mündliche Besprechung. car@ipf.tuwien.ac.at.
- Ressl, C., Pfeifer, N., und Mandlbürger, G. (2011): APPLYING 3D AFFINE TRANSFORMATION AND LEAST SQUARES MATCHING FOR AIRBORNE LASER SCANNING STRIPS ADJUSTMENT WITHOUT GNSS/IMU TRAJECTORY DATA. In: *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Band 38 Teil 5/W12. ISPRS Workshop Laser Scanning 2011, Calgary, Kanada.
- Stöcker, H. (1999): *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Verlag Harri Deutsch, 4. Auflage.

Szeliski, R. (2010): *Computer Vision: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag.
URL <http://szeliski.org/Book/>, Entwurf vom 3. September 2010.

Veksler, O. (2003): Fast Variable Window for Stereo Correspondence using Integral Images. In: *Proceedings of the 2003 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'03)*, Band 1, Seiten 556–561.