



DIPLOMARBEIT

*Modellierung atmosphärischer Einflüsse auf die Erdrotation  
in verschiedenen Zeitskalen*

Ausgeführt am Institut für  
Geodäsie und Geophysik  
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von Prof.Dr. Harald Schuh und Dr. Johannes Böhm als  
verantwortlich mitwirkendem Universitätsassistenten

durch

**Michael Schindelegger**

Panholzergasse 7  
3252 Petzenkirchen



Modellierung atmosphärischer Einflüsse auf die  
Erdrotation in verschiedenen Zeitskalen

Michael Schindelegger

August 2009



## Kurzfassung

Variationen des atmosphärischen Drehimpulses werden durch großräumige Massenverlagerungen und Veränderungen des Windfelds der Atmosphäre hervorgerufen. Durch Interaktion mit der darunterliegenden Kruste und dem Mantel beeinflussen derartige atmosphärische Vorgänge auch das Rotationsverhalten der Erde - sie sind so für einen Teil der beobachteten Polbewegung und Tageslängenschwankung (LOD) verantwortlich. In der vorliegenden Diplomarbeit wird versucht, den Einfluss der Atmosphäre auf die Erdrotation anhand der sogenannten *Drehimpulsfunktionen* zu modellieren. Die Drehimpulsfunktionen werden dabei auf Basis der meteorologischen Daten des ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) durch Integration über die Dichte und das Geschwindigkeitsfeld der Atmosphäre berechnet. Die Zeitreihen der geodätisch beobachteten Polbewegung und Tageslängenschwankung entstammen dem C04-Datensatz des IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) bzw. den GPS- und VLBI-Beobachtungen für die Dauer des Beobachtungsprogrammes CONT08. Je nachdem in welchem Periodenbereich der Einfluss der Atmosphäre in der Erdrotation untersucht wird, sind unterschiedliche Modellierungsansätze zu gebrauchen. Für Effekte mit Perioden von wenigen Tagen bis hin zu mehreren Wochen oder länger ist die Übereinstimmung zwischen geodätischen und atmosphärischen Daten sehr gut, und der Vergleich im Zeitbereich auf Ebene der Drehimpulsfunktionen (Differentiationsansatz) oder auf Ebene der Polbewegung (Integrationsansatz) empfehlenswert. Im täglichen bzw. subtäglichen Bereich müssen in den Gleichungen neben dem Chandler Wobble (CW) auch die Effekte der Free Core Nutation (FCN) miteinbezogen werden. Die Kohärenz zwischen Drehimpulsfunktionen und geodätischen Zeitreihen sinkt für hochfrequente Signale jedoch drastisch, sodass sich der Verfasser auf die Abschätzung der Amplituden in den Spektren der atmosphärisch angeregten Erdrotationsparameter (Polbewegung und LOD) beschränkt.

Die verwendeten Drehimpulsfunktionen sind nach verschiedenen Varianten berechnet und besitzen je nach zu behandelnder Zeitskala auch unterschiedliche Auflösung (1 d, 6 h oder 1 h). Zusätzlich stehen die Drehimpulsfunktionen des NCEP (National Centers for Environmental Prediction) zur Verfügung. Im Vergleich mit Erdrotationsparametern ergeben sich beim Differentiationsansatz Kor-

relationskoeffizienten bis zu 0.80 in der äquatorialen Komponente bzw. 0.99 in LOD. Im Fall des Integrationsansatzes beträgt die Standardabweichung zwischen Polbewegung aus C04 und Polbewegung aus Atmosphärendaten bestenfalls 6.3 mas. Die täglichen und subtäglichen atmosphärischen Effekte besitzen grundsätzlich Amplituden, die kleiner als  $10 \mu\text{as}$  (Polbewegung) bzw.  $10 \mu\text{s}$  (LOD) sind.

## Abstract

Variations in the angular momentum of the atmosphere are caused by large-scale atmospheric mass redistributions as well as changes in the pattern of winds. By interacting with the underlying mantle, those processes give rise to fluctuations in all three components of the Earth's rotation vector. Certain parts of geodetic polar motion and observed changes in length of day (LOD) can always be attributed to variations of atmospheric angular momentum. The overall goal of this paper is to model the influence of the atmosphere on Earth rotation via the so-called *atmospheric angular momentum functions*, which are calculated as integrals over density and wind velocities. For this purpose, the meteorological data of the ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) are used. Time series for observed polar motion and LOD are taken from the C04-record of the IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) and from GPS- and VLBI-observations that were accumulated during the geodetic observation program CONT08. In order to study the influence of the atmosphere on Earth rotation, one has to apply different models depending on the time scale examined. For periods of a few days or longer, the correspondence between geodetic and atmospheric time series is very good, and the comparison may be effectively carried out in time domain - either on the level of angular momentum functions (differentiation approach) or on the level of polar motion (integration approach). In the diurnal and semi-diurnal frequency band it is necessary to take into account both eigenmodes of the Earth, Chandler Wobble (CW) and Free Core Nutation (FCN). However, there is a significant drop of coherence between atmospheric angular momentum functions and geodetic observations when examining high frequency signals. As a consequence, only the mean amplitudes of short-periodic atmospheric excitation in polar motion and length of day are estimated.

Calculation of the atmospheric angular momentum functions is done in a few different ways. Depending on the frequency band that is looked at, time series with various resolutions are used (1 d, 6 h or 1 h). Additionally, the author includes the angular momentum functions derived from NCEP (National Centers for Environmental Prediction) data. When comparing with geodetic data, the differentiation approach yields correlation coefficients up to 0.80 in the equatorial component and 0.99 for LOD. As for the integration approach, the standard deviation between polar motion from C04 and polar motion from atmospheric excitation is 6.3 mas in the best case. In the diurnal and semi-diurnal frequency band the mean amplitudes of atmospheric signals are generally smaller than 10  $\mu$ as (polar motion) and 10  $\mu$ s (LOD), respectively.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
1.1	Motivation . . . . .	9
1.2	Aufgabenstellung . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1	Variabilität der Erdrotation . . . . .	13
2.1.1	Die Erde als Kreisel . . . . .	13
2.1.2	Celestial Intermediate Pole . . . . .	16
2.1.3	Die Erdrotationsparameter . . . . .	18
2.2	Erdrotation aus Geodätischen Weltraumverfahren . . . . .	22
2.2.1	Interferometrie auf langen Basislinien (VLBI) . . . . .	22
2.2.2	Global Positioning System (GPS) . . . . .	26
2.3	Erdrotation und Atmosphärische Anregung . . . . .	30
2.3.1	Die Liouville-Gleichung . . . . .	30
2.3.2	Die Anregungsfunktionen . . . . .	31
2.3.3	Die Drehimpulsfunktionen . . . . .	34
2.3.4	Korrektur der Drehimpulsfunktionen: Low Frequency Case . . . . .	36
2.3.5	Korrektur der Drehimpulsfunktionen: High Frequency Case . . . . .	40
2.3.6	Berechnungsvarianten . . . . .	42
2.4	Drehimpulsfunktionen und Erdrotationsparameter . . . . .	45
2.4.1	Polbewegung - Low Frequency Case . . . . .	45
2.4.2	Polbewegung - High Frequency Case . . . . .	49
2.4.3	LOD . . . . .	53

<b>3</b>	<b>Praktische Umsetzung</b>	<b>55</b>
3.1	Berechnung zeitdiskreter Drehimpulsfunktionen . . . . .	57
3.1.1	Eingabedaten und Rechengang . . . . .	58
3.1.2	Berechnungsergebnisse - Low Frequency Case . . . . .	63
3.1.3	Berechnungsergebnisse - High Frequency Case (6 h) . . . . .	68
3.2	Verkettung der Drehimpulsfunktionen aus Vorhersagedaten . . . . .	72
3.2.1	Der 4DVar-Algorithmus . . . . .	72
3.2.2	Verkettung der stündlichen Drehimpulsfunktionen . . . . .	73
3.2.3	Berechnungsergebnisse - High Frequency Case (1 h) . . . . .	79
3.3	Atmosphärische Beiträge zu Polbewegung und LOD:	
	Low Frequency Case . . . . .	83
3.3.1	Polbewegung . . . . .	84
3.3.2	LOD . . . . .	91
3.3.3	Druck- und Windterme in den Drehimpulsfunktionen - Low Frequency Case . . . . .	93
3.4	Atmosphärische Beiträge zu Polbewegung und LOD:	
	High Frequency Case (6 h) . . . . .	95
3.4.1	Polbewegung . . . . .	97
3.4.2	LOD . . . . .	101
3.4.3	Druck- und Windterme in den Drehimpulsfunktionen - High Frequency Case . . . . .	104
3.5	Atmosphärische Beiträge zu Polbewegung und LOD:	
	High Frequency Case (1 h) . . . . .	107
3.5.1	Polbewegung . . . . .	109
3.5.2	LOD . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Conclusio und Ausblick</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Variablen und Symbole</b>	<b>121</b>
A.1	Schreibweise von Variablen . . . . .	121
A.2	Verwendete Variablen und Symbole . . . . .	121
<b>B</b>	<b>Verwendete Konstanten</b>	<b>125</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Rotation der Erde ist nicht gleichförmig. Sie ändert sich auf allen denkbaren Zeitskalen - im Bereich von Stunden bis hin zu geologischen Zeiträumen. Irregularitäten im Rotationsverhalten kommen einerseits durch Richtungsänderungen der Erdachse, andererseits durch eine variable Winkelgeschwindigkeit zum Ausdruck. Beide Phänomene sind auf die Anwesenheit externer Kräfte oder interner dynamischer Prozesse zurückzuführen. Sonne, Mond und Planeten verursachen beispielsweise äußere Drehmomente, während großräumige geophysikalische Vorgänge für den Drehimpulsaustausch zwischen fluiden und festen Teilen der Erde verantwortlich sind. Neben den Ozeanen und dem flüssigen Kern ist es hauptsächlich die Atmosphäre, die Veränderungen im Rotationsverhalten hervorruft. Ihre Masse ist vergleichsweise klein (etwa  $1/300$  der Masse der Ozeane), die Mobilität, angetrieben durch tägliche und langperiodischere thermodynamische Zyklen, aber über jene von Ozeane und Kern zu stellen. Die gängige Vorgangsweise ist es, diesen atmosphärischen Drehimpuls aus meteorologischen Beobachtungen abzuleiten und anschließend mit den Komponenten der Erdrotation zu vergleichen. Geodätische Weltraumverfahren wie VLBI (Very Long Baseline Interferometry) oder GNSS (Global Navigation Satellite Systems) bestimmen das Rotationsverhalten der Erde heute mit einer zeitlichen Auflösung von 1 h auf wenige mm genau. Auch die entsprechenden geophysikalischen Datensätze stehen mit vergleichbarer Qualität zur Verfügung. Eine perfekte Übereinstimmung zwischen geodätischen und geophysikalischen Größen wird aufgrund von notwendigen Näherungen in Messung

und mathematischer Formulierung nie erzielt werden können - die Interpretation der Ergebnisse macht es aber möglich, Wechselwirkungen im System „Erde“ zu untersuchen und die angewendeten Modelle zu verbessern. Es sind schließlich die genauen Modelle der Erdrotation, die für verschiedenste Positionierungsaufgaben auf der Erde und im Weltraum unerlässlich geworden sind.

## 1.2 Aufgabenstellung

Gegenstand dieser Diplomarbeit ist es, den Einfluss von atmosphärischen Massenverlagerungen und variablen Winden auf die Komponenten der Erdrotation zu modellieren. Etwaige äußere Drehmomente von Sonne, Mond oder Planeten werden dabei vernachlässigt. Der Gesamtdrehimpuls der Erde kann damit als konstant angesehen werden, und Veränderungen des Erdrotationsvektors in seiner Länge (Tageslängenschwankung) sowie in seiner Richtung gegenüber einem erdfesten System (Polbewegung) sind mithilfe der sogenannten *Drehimpulsfunktionen* bestimmbar. Drehimpulsfunktionen können grundsätzlich für alle fluiden Teile der Erde formuliert werden. Beschränkt man sich so wie in dieser Arbeit aber ausschließlich auf die Atmosphäre, folgen die Drehimpulsfunktionen aus den Volumen- bzw. Oberflächenintegralen über diverse meteorologische Parameter. Geopotential, Temperatur, spezifische Feuchte und Windgeschwindigkeiten werden zu diesem Zweck beispielsweise vom ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) auf verschiedenen Druckniveaus und in unterschiedlicher horizontaler Auflösung zur Verfügung gestellt. Auch die zeitliche Auflösung der Daten kann gewählt werden. Im Speziellen bestimmt der Verfasser Drehimpulsfunktionen aus stündlichen und 6-stündigen meteorologischen Daten und unterscheidet in der gesamten Arbeit stets folgende 2 Fälle:

- **Low Frequency Case:** Dabei werden die 6-stündigen Drehimpulsfunktionen zu 1 Wert pro Tag gemittelt und in weiterer Folge atmosphärische Einflüsse in der Erdrotation mit Perioden von 2 Tagen oder mehr untersucht.
- **High Frequency Case:** Die stündlichen und 6-stündigen Drehimpulsfunktionen erlauben die Abschätzung der hochfrequenten Anteile der Atmosphäre in Polbewegung und Tageslängenschwankung. Diese Beiträge werden jedoch entscheidend kleiner sein als im langperiodischen Fall.

Damit können die einzelnen Aufgabenbereiche genannt werden:

- Die Massenterme der Drehimpulsfunktionen sind sowohl aus dem Volumenintegral über die Dichte als auch aus dem Oberflächenintegral über den Druck an der Erdoberfläche zu bestimmen.
- Die Windterme der Drehimpulsfunktionen müssen aus rein räumlichen Integralen über die meridionalen und breitenkreisparallelen Windgeschwindigkeiten ermittelt werden. Diese ersten beiden Arbeitsschritte sind unabhängig von der zeitlichen Auflösung.
- Die 6-stündigen Drehimpulsfunktionen sind mit jenen des NCEP (National Centers for Environmental Prediction) zu vergleichen.
- Die stündlichen Drehimpulsfunktionen liegen nach der Berechnung als Aneinanderreihung von 12 h-Bögen vor und weisen daher an den Intervallenden Sprungstellen auf, die für weitere Modellierungsschritte zu beseitigen sind.
- Aus den Drehimpulsfunktionen sind im zentralen Teil der Arbeit die atmosphärisch angeregten Polschwankungen und Tageslängenvariationen zu bestimmen. Je nach untersuchtem Periodenbereich müssen unterschiedliche Modellierungsansätze gewählt werden. Für die hochaufgelösten Zeitreihen empfiehlt sich die Bearbeitung im Frequenzbereich.
- Die aus Atmosphärendaten ermittelten Komponenten der Erdrotation sind mit jenen aus geodätischen Beobachtungen zu vergleichen. Dazu stehen folgende Datensätze zur Verfügung:
  - Die C04-Reihen des IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) mit täglicher Auflösung.
  - Die stündlichen GPS<sup>1</sup>-Schätzungen für das Jahr 2008.
  - Die stündlichen VLBI<sup>2</sup>-Schätzungen des geodätischen Beobachtungsprogrammes CONT08 (12.8.-26.8.2008).
- Zusätzlich ist sowohl für den langperiodischen als auch den kurzperiodischen Fall zu untersuchen, ob Massen- oder Bewegungsterme den größeren Einfluss auf die Erdrotation ausüben.

---

<sup>1</sup>Global Positioning System

<sup>2</sup>Very Long Baseline Interferometry

Die Arbeit ist prinzipiell in einen theoretischen und einen praktischen Teil untergliedert. Im theoretischen Teil (Kapitel 2) wird versucht, einige grundlegende Aspekte aus der Erdrotation zu erläutern. Abschnitt 2.1 stellt dazu die Erdorientierungs- und Erdrotationsparameter vor, während Abschnitt 2.2 deren Bestimmung mithilfe geodätischer Weltraumverfahren skizziert. Es folgt die Herleitung der Drehimpulsfunktionen. In Abschnitt 2.4 wird schließlich darauf eingegangen, wie Drehimpulsfunktionen und Erdrotationskomponenten ineinander umzurechnen sind.

Der praktische Teil (Kapitel 3) folgt im Wesentlichen der o.a. Aufgabenstellung. Zunächst werden die Integrale aus Kapitel 2 diskretisiert und die Drehimpulsfunktionen berechnet. Abschnitt 3.2 geht auf die spezielle Bearbeitung der stündlichen Drehimpulsfunktionen ein. In den 3 abschließenden Abschnitten werden für jede zeitliche Auflösung der Drehimpulsfunktionen (1 d, 6 h bzw. 1 h) die atmosphärischen Beiträge zu Polbewegung und Tageslängenschwankung ermittelt.

## Kapitel 2

# Theoretische Grundlagen

### 2.1 Variabilität der Erdrotation

Bewegung und Orientierung der Erde gegenüber einem Inertialsystem sind komplizierte Funktionen der Zeit, und müssen bei der Transformation gegebener Stationskoordinaten vom erdfesten ins himmelfeste Referenzsystem bestmöglich bekannt sein. Während das Rotationsverhalten eines Körpers in der klassischen Mechanik durch 3 zeitabhängige Eulerwinkel parametrisiert wird, verwendet die Astronomie zu diesem Zweck traditionell 5 Winkel, die unter den Begriffen *Nutation*, *Polbewegung* und *Tageslängenschwankung* zusammengefasst sind. Im folgenden Abschnitt werden diese Phänomene rein vom kinematischen Standpunkt aus vorgestellt. 2.1.2 gibt anschließend die heute gültigen Definitionen der IAU (International Astronomical Union) wieder. Die Ausführungen folgen Schuh und Mendes (2008 [35]) bzw. Gross (2007 [21]).

#### 2.1.1 Die Erde als Kreisel

##### Nutation

Man betrachtet die Erde vereinfacht als abgeplattetes Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse die Himmelskugel im Nord- oder Himmelspol durchstößt. Die Äquatorebene ist gegenüber der Ebene der Sonnenbahn (Ekliptik) um  $\epsilon \approx 23.5^\circ$  geneigt. Die Eigenrotation wird vorerst außer Acht gelassen, sodass bei der Revolutionsbewegung der Erde um die Sonne der Fliehkraftvektor in allen Punkten der Erde gleiche Richtung und gleichen Betrag hat. Fliehkraft und Attraktions-

wirkung durch die Sonne heben sich aber nur im Geozentrum auf, in allen anderen Punkten bleibt ein resultierender Kraftvektor, der eine Komponente in und eine Komponente normal zur Äquatorebene aufweist. Die Normalkomponenten versuchen den Äquator in die Ekliptikebene zu zerren, die rotierende Erde reagiert darauf als Kreisel unter Zwang. Analog sind die Einflüsse von Mond und Planeten zu beschreiben. Die resultierende Bewegung der Rotationsachse im Raum verläuft in erster Näherung entlang eines Kegelmantels, dessen halber Öffnungswinkel der Schiefe der Ekliptik  $\epsilon$  entspricht. Diese gleichförmige (oder säkulare) Bewegung wird *Präzession* genannt. Sie ist rückläufig mit einer Periode von rund 26000 Jahren. Daneben existieren auch viele periodische Bewegungsanteile, die kurz mit *Nutation* bezeichnet werden. Die Periode des größten Nutationsterms beträgt 18.6 Jahre. Dabei handelt es sich um eine elliptische Bewegung mit einer großen Halbachse von  $9.2''$ .

Präzession und Nutation lassen sich aus den Ephemeriden der wichtigsten Himmelskörper berechnen und werden allgemein in einem Nutationsmodell zusammengefasst, welches, vereinfacht gesagt, Neigung und Verdrehung der Rotationsachse gegenüber dem Pol der Ekliptik beschreibt. Man spricht bei diesem klassischen Ansatz auch von *Nutation in Schiefe* und *Nutation in Länge*.

### Length of Day (LOD)

Ursachen für die variable Rotationsgeschwindigkeit sind geophysikalische Prozesse, auf die in Abschnitt 2.1.3 noch genauer eingegangen wird. Einsichtig ist, dass Veränderungen der Kreisfrequenz der Erde proportional zu Tageslängenschwankungen sind. LOD bezeichnet den relativen Überschuss der Tageslänge gegenüber einem nominalen Wert von 86400 s. Differentiation von LOD führt auf dUT1, der Differenz der Weltzeit UT1 (Universal Time) zur koordinierten Weltzeit UTC (Coordinated Universal Time). dUT1 wird zur Berechnung des Erdrotationswinkels benötigt.

### Polbewegung

Unter Polbewegung versteht man grundsätzlich Bewegungen des Erdkörpers gegenüber einer Achse, deren Orientierung im Raum bekannt ist bzw. durch ein Nutationsmodell erfasst wird. Für einen erdfesten Beobachter äußert sich die Polbewegung einer Achse somit als mehr oder weniger periodische Verlagerung des

entsprechenden Durchstoßpunktes auf der Erdoberfläche. Wäre die Erde eine starre Kugel, würde keine Polbewegung existieren, da in diesem Fall Rotationsachse und Achse des größten polaren Trägheitsmomentes (polare Hauptträgheitsachse) zusammenfallen. Betrachtet man wieder ein starres, abgeplattetes Rotationsellipsoid, ist diese Übereinstimmung nicht mehr gegeben, und die Reaktion der Erde folgt den Eulerschen Kreisgleichungen. Setzt man darin die externen Drehmomente Null, bleibt die Drehimpulsachse  $\mathbf{H}$  raumfest. Rotations- und Figurenachse (die der Hauptträgheitsachse im Fall von Rotationssymmetrie entspricht) bewegen sich in dieser freien Lösung auf Kreisbahnen um  $\mathbf{H}$ . Poincot (1851 [31]) gibt eine geometrische Interpretation der Eulergleichungen:

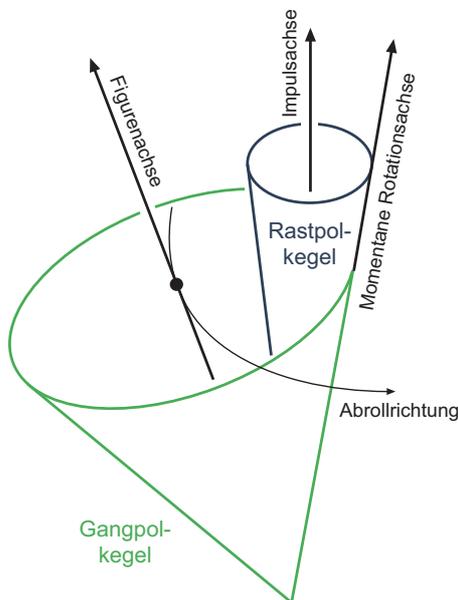


Abbildung 2.1: Geometrische Deutung der Eulergleichungen nach Poincot.

astischen Eigenschaften der Erde wird jedoch die Chandlerperiode von rund 430 d beobachtet. Der Chandler Wobble stellt die wichtigste Eigenschwingung der Erde dar.

Im Inertialsystem rollt ein körperfester Kegel, der Gangpolkegel, auf dem raumfesten Rastpolkegel ab. Die Symmetrieachsen sind Figurenachse bzw. Drehimpulsachse und der Öffnungswinkel beträgt  $300$  mas im Fall des Gangpolkegels bzw.  $1$  mas für den Rastpolkegel. Die beiden Kegel berühren einander stets entlang der momentanen Rotationsachse, sodass alle 3 Achsen koplanar sind. Im raumfesten System beschreibt der Rotationspol durch das Abrollen eine marginale Kreisbewegung um  $\mathbf{H}$ , welche als *Freie Nutation* bezeichnet wird. Für einen Beobachter auf der Erde umkreist der Rotationspol die Figurenachse mit einer Periode von 300 d (Eulerperiode für den starren Fall). Aufgrund der el-

### 2.1.2 Celestial Intermediate Pole

Beim Übergang vom inertialen ins erdfeste Bezugssystem und umgekehrt werden Nutation und Polbewegung parametrisiert bzw. als koordinatensystemabhängige Größen verstanden. 2 Nutationsparameter, 2 Polbewegungsparameter und dUT1 transformieren vom raumfesten **GCRS** (Geocentric Celestial Reference System) ins erdfeste **TRS** (Terrestrial Reference System). Beide Systeme haben ihren Ursprung im Massenzentrum der Erde, sodass in der Transformation kein Verschiebungsvektor enthalten ist. Über die Orientierung der x-Achsen ist in dieser Arbeit keine spezielle Aussage notwendig. Wichtig ist, dass die Grundebene des GCRS nach McCarthy und Petit (2003 [27]) nahe am mittleren Äquator der Standard-epoche J2000.0 liegt. Auch das TRS ist verständlicherweise ein äquatoriales System, sodass GCRS- und TRS-Pol nur durch kleine Winkel (rund  $4''$ ) voneinander entfernt sind. Es ist daher zweckmäßig, die Verhältnisse in einer mittleren Tangentialebene zwischen GCRS- und TRS-Pol zu veranschaulichen, in der sämtliche Winkelgrößen als ebene Koordinaten gedeutet werden können:

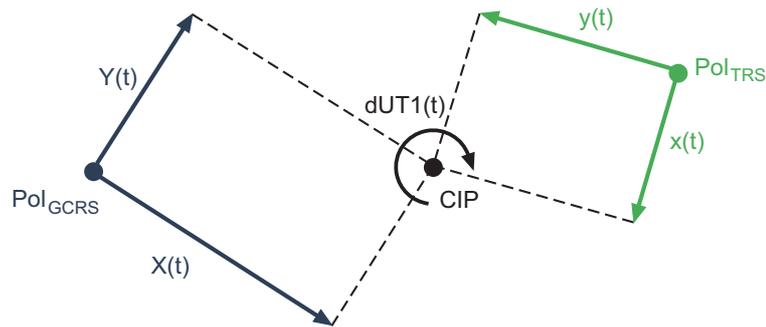


Abbildung 2.2: Zeitabhängige Erdorientierungsparameter in einer Tangentialebene zwischen GCRS- und TRS-Pol. Quelle: Schuh und Mendes (2008 [35]), vom Verfasser überarbeitet.

Aus Abbildung 2.2 ist ersichtlich, dass die Transformation  $\text{CRS} \rightleftharpoons \text{TRS}$  ein Zwischensystem mit dem **CIP** (Celestial Intermediate Pole) als Referenzpol verwendet und damit durch 5 Winkel, die sogenannten Erdorientierungsparameter, beschrieben wird. dUT1 führt auf den Erdrotationswinkel, der über eine einfache Drehung um die z-Achse im CIP-System in die Transformation einfließt. Die restlichen vier Parameter folgen, wenn der CIP (nahe der mittleren Drehimpulsachse) als Zwischenpol definiert wird, der die Bewegung des TRS-Poles im GCRS in 2

Teile aufspaltet:

- **Polbewegung** wird als terrestrische Bewegung des CIP für alle Frequenzen mit Ausnahme von  $\sigma_t \in (-1.5, -0.5)$  cpsd<sup>1</sup> verstanden. Die Koordinaten des CIP im TRS lauten analog zu Abbildung 2.2  $x$  und  $y$ .
- **Nutation** bezeichnet die zälestische Bewegung des CIP im Frequenzband  $\sigma_c \in (-0.5, 0.5)$ . Die Größen  $X$  und  $Y$ , welche aus einem Modellanteil  $(X, Y)_{Modell}$  und einem aus Beobachtungen geschätzten Anteil  $(\delta X, \delta Y)$  zusammengesetzt werden, positionieren den CIP im GCRS. ( $X$  und  $Y$  können in Nutation in Länge und Schiefe nach dem klassischen Ansatz umgerechnet werden.)

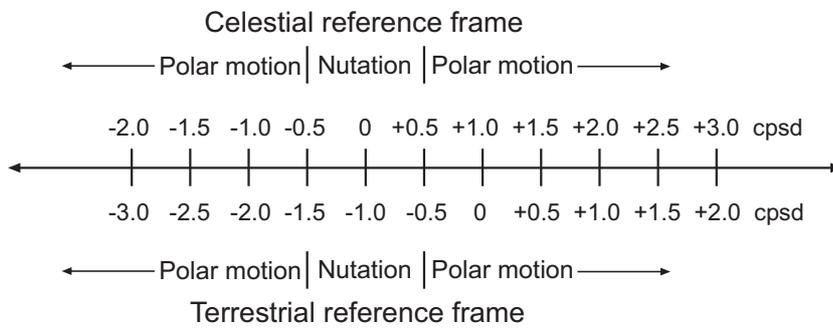


Abbildung 2.3: Frequenzbeziehung für eine Bewegung, die einmal im himmelfesten System (obere Hälfte) und einmal im erdfesten System (untere Hälfte) betrachtet wird. Quelle: Gross (2007 [21]).

Dadurch, dass man 5 anstelle von nur 3 notwendigen Parametern verwendet, sind Polbewegung und Nutation voneinander abhängig. Für eine Bewegung, die einmal vom zälestischen System  $c$ , einmal vom terrestrischen System  $t$  aus betrachtet wird, sei nach Gross (2007 [21]) hier nur die Frequenzbeziehung angegeben:

$$\sigma_c = \sigma_t + \Omega \quad (2.1)$$

$\Omega$  steht für die Winkelgeschwindigkeit der Erde. Die Bedeutung von (2.1) ist in Abbildung 2.3 veranschaulicht. Retrograd tägliche Polbewegungsterme ( $\sigma_t \approx -\Omega$ ) sind nun also auf Seiten der Nutation zu berücksichtigen, während Frequenzen in der Nutation mit  $|\sigma_c| > 0.5$  cpsd durch die äquivalente Polbewegung modelliert

<sup>1</sup>cycles per sidereal day

werden. Diese Trennung von Polbewegung und Nutation nach Frequenzen steht im Gegensatz zur in Abschnitt 2.1.1 eingeführten Unterscheidung zwischen geophysikalischer und astronomischer Erdrotation, für die ausschlaggebend war, ob Drehmomente existieren (astronomische Erdrotation) oder nicht (geophysikalische Erdrotation).

### 2.1.3 Die Erdrotationsparameter

Von den im Abschnitt 2.1.2 angeführten Erdorientierungsparametern zählen  $x, y$  und dUT1 (bzw. LOD) zu den 3 Erdrotationsparametern. Während die lunisolaren Effekte in der Nutation gut vorhersagbar sind, unterliegen die Erdrotationsparameter vielfach irregulären geophysikalischen Einflüssen, deren Auswirkungen in der Erdrotation oft nur empirisch bestimmbar sind. Das Modell der starren Erde in Abschnitt 2.1.1, dessen Polbewegung der Poincaré-Darstellung folgt und dessen Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt, ist nicht haltbar. Vielmehr zeigt die reale Erde Deformationen sowie Massenverlagerungen und besitzt fluide Teile, in denen durch Strömungen Relativdrehimpulse auftreten.

Abbildung 2.5 fasst schematisch die wichtigsten Einflüsse auf die Polbewegung zusammen. Sieht man von der freien Schwingung des Chandler Wobbles ab, erkennt man, dass im Periodenbereich von wenigen Tagen bis hin zu vielen Jahren die Atmosphäre den entscheidenden Einfluss darstellt. Wenn auch der Ozeanbeitrag nicht vernachlässigt werden darf, sind die Polschwankungen von monatlicher, jährlicher oder dekadischer Periode größtenteils meteorologischen Ursprungs. Insbesondere entsteht durch die Überlagerung des Chandler Wobbles (Amplitude  $\approx 160$  mas nach Brzezinski et al. (2002 [12])) mit einem durch Luftdruckschwankungen hervorgerufenen jährlichen Wobble (Amplitude  $\approx 90$  mas) die charakteristische Schwebung in der Polbewegung (Abbildung 2.4). Im täglichen und subtäglichen Bereich werden atmosphärische Effekte jedoch von den Ozeangezeiten und den Gezeiten der festen Erde dominiert. Brzezinski et al. (2002 [12]) schätzen den Beitrag der Ozeane zu Variationen in Polbewegung und LOD um das 30-fache größer ein als jenen der Atmosphäre. Dennoch können 2 Arten von atmosphärischer Anregung in der Polbewegung detektiert werden:

- **Atmosphärische Gezeiten:** Dabei handelt es sich um Wellen thermischen Ursprungs, die tägliche und halbtägliche Perioden aufweisen. Die entsprechenden Amplituden in der Polbewegung sind generell kleiner als  $10 \mu\text{as}$ ,

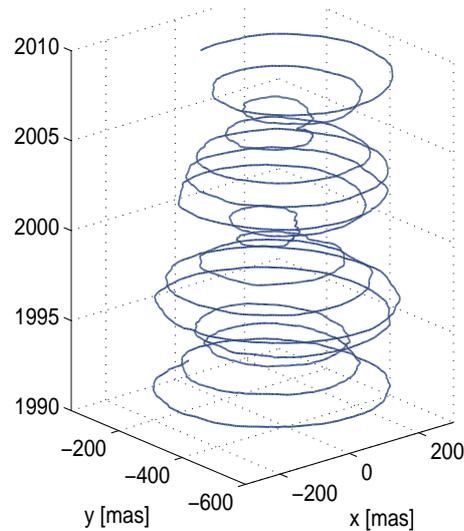


Abbildung 2.4: Polschwankung der Jahre 1991 - 2008. Quelle: Bizouard (2009 [5]).

siehe Brzezinski und Petrov (2000 [14]).

- **Eigenmoden der Atmosphäre:** Freie Schwingungen in der globalen atmosphärischen Zirkulation verursachen Polschwankungen mit unterschiedlichster Frequenz und Amplitude. Die rund 10-tägige retrograde Periode ist die markanteste.

Abbildung 2.6 zeigt das Spektrum für dUT1. Wieder ist für langperiodische Variationen die Atmosphäre, genauer gesagt der Drehimpuls des zonalen Windfeldes, hauptverantwortlich. Der Ozeanbeitrag ist geringer als jener in der Polbewegung, die Gezeiten der festen Erde sind vor allem mit einer 14-tägigen Periode vertreten. Darüberhinaus führen Kern-Mantel-Interaktionen zu dekadischen Fluktuationen. Im hochfrequenten Bereich sind nach Gross (2007 [21]) über 90% der UT1-Variationen auf Ozeangezeiten zurückzuführen. Die von atmosphärischen Gezeiten und Eigenmoden verursachten Amplituden werden grundsätzlich kleiner als  $0.5 \mu\text{s}$  sein, siehe Brzezinski und Petrov (2000 [14]).

Neben diesen periodischen Variationen treten auch lineare Trends in den Erdrotationsparametern auf. So verlangsamt sich aufgrund der Gezeitenreibung die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, was durch eine Rate von  $+1.8 \text{ ms/cy}$  in LOD verdeutlicht wird. In der Polbewegung ist eine Drift in Richtung Kanada mit

einer Geschwindigkeit von 3.51 mas/yr (Quelle: Gross (2007 [21])) zu erkennen. Als Ursache wird in erster Linie die isostatische Reaktion der festen Erde auf das Schmelzen regionaler Eisschilde angeführt.

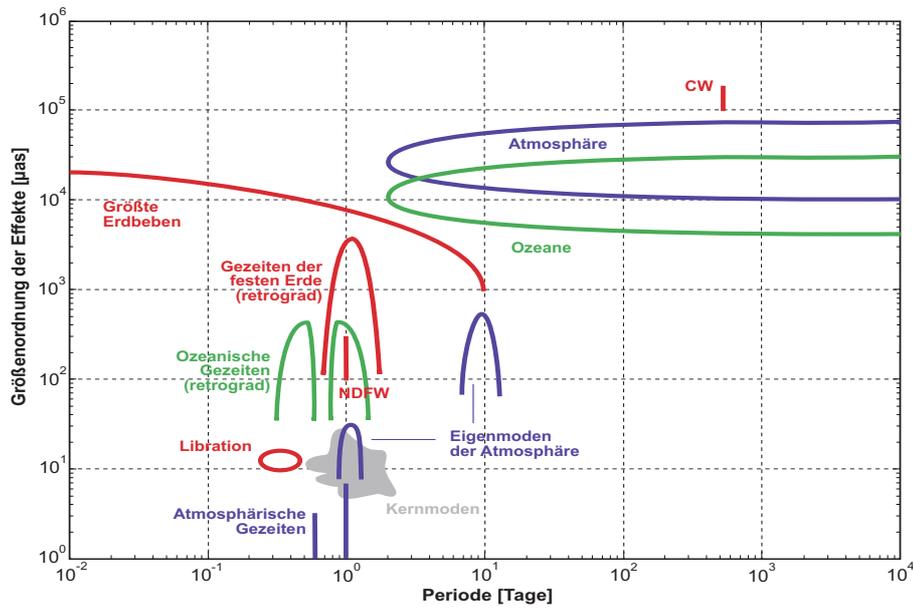


Abbildung 2.5: Geophysikalische Einflüsse auf die Polbewegung. Quelle: Schuh et al. (2003 [34]), vom Verfasser nach Brzezinski et al. (2002 [12]) modifiziert.

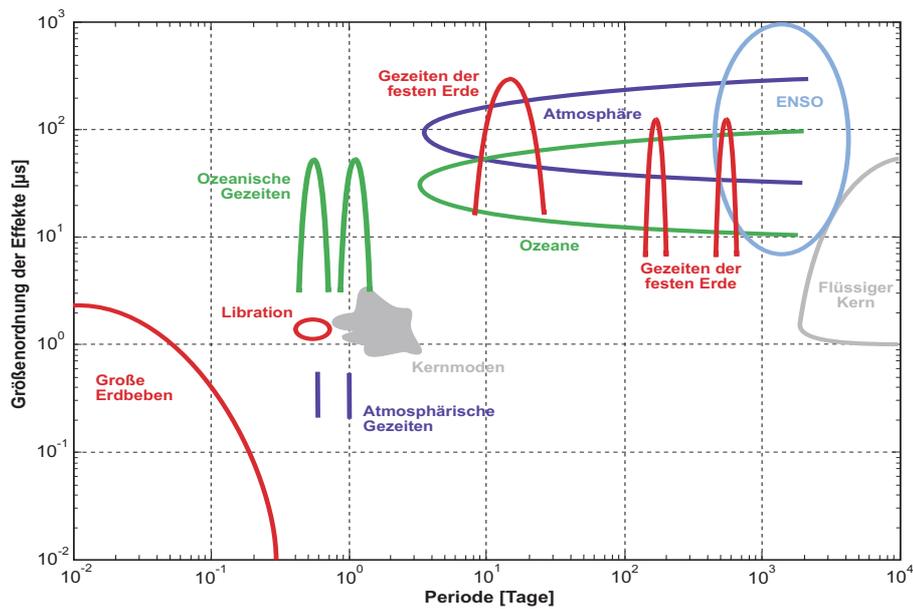


Abbildung 2.6: Geophysikalische Einflüsse auf dUT1. Quelle: Schuh et al. (2003 [34]), vom Verfasser nach Brzezinski et al. (2002 [12]) modifiziert.

## 2.2 Erdrotation aus Geodätischen Weltraumverfahren

Das Rotationsverhalten der Erde lässt sich mit hoher Genauigkeit aus geodätischen Weltraumverfahren bestimmen. Die in dieser Arbeit verwendeten Zeitreihen der Polbewegung und der Tageslängenschwankung sind speziell aus GPS- und VLBI-Beobachtungen abgeleitet. In den folgenden 2 Abschnitten soll daher anhand von Campbell (2000 [15]), Schuh (2000 [33]) bzw. Weber (2008 [39]) sowie Bretterbauer und Schuh (2004 [9]) ein Überblick über beide Messverfahren gegeben werden.

### 2.2.1 Interferometrie auf langen Basislinien (VLBI)

Die große Bedeutung der VLBI liegt in ihrer Fähigkeit eine direkte geometrische Verbindung zwischen einem erdfesten Referenzsystem und einem himmelfesten Inertialsystem herstellen zu können. Das Inertialsystem der VLBI wird durch die Koordinaten extragalaktischer Radioquellen (Quasare) realisiert, die dank ihrer großen Entfernung von der Erde (etwa 13 Milliarden Lichtjahre) als kompakte und eigenbewegungsfreie Fixpunkte angesehen werden können.

#### Messprinzip

Die VLBI entwickelte sich aus der Interferometrie im Radiofrequenzbereich (kurz: Radiointerferometrie), bei der im einfachsten Fall 2 Antennen samt Empfänger durch ein Kabel mit einer zentralen Prozesseinheit, dem Korrelator, verbunden sind. Die Messanordnung ist in Abbildung 2.7 nach Campbell (1992 [16]) skizziert. Der typische Stationsabstand beträgt etwa 1 km. Die verwendeten Frequenzen können in ein S-Band (2.3 GHz) und ein X-Band (8.4 GHz) gruppiert werden. Bei simultaner Beobachtung derselben Radioquelle lässt sich im Korrelator durch Amplituden- und Phasendifferenzmessung auf die eigentliche Beobachtungsgröße schließen. Es ist dies die Differenz der Ankunftszeiten einer Wellenfront an den Basislinienenden. Sie wird als Laufzeitdifferenz bzw. Laufzeit  $\tau$  bezeichnet.

Wegen der enormen Entfernung der Quasare ist es zulässig die Wellenfront als eben anzusehen. Dadurch entsteht eine einfache geometrische Konstellation - ein rechtwinkeliges Dreieck, in dem der Basislinienvektor  $\mathbf{b}$  und der Quellvektor  $\mathbf{k}$  über

$$\tau = -\frac{1}{c} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) \quad (2.2)$$

in Beziehung stehen.  $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit.

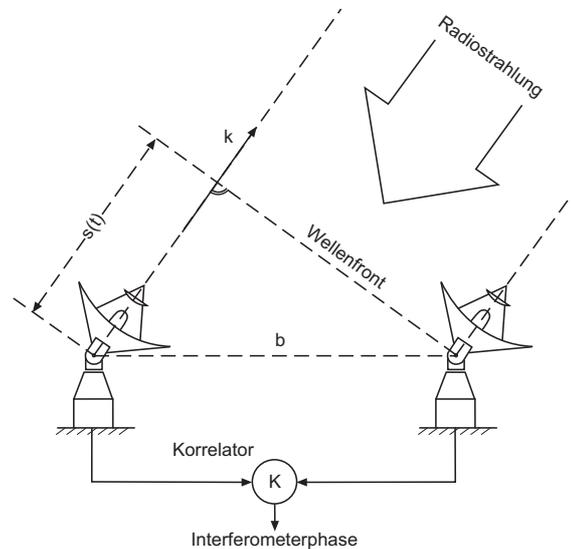


Abbildung 2.7: Grundkonfiguration der Radiointerferometrie. Quelle: Campbell (1992 [16])

Mit Vergrößerung des Stationsabstandes bis auf interkontinentale Basislinien ist der Schritt zur VLBI getan. Diese Trennung der Komponenten lässt aber kein gemeinsames Frequenznormal mehr zu, sodass die einzelnen Stationen nun mit voneinander unabhängigen Uhren ausgestattet sind. Heute existieren rund 50 derartiger Radioteleskope, die im Zuge von Experimenten Quasare nach einem strikten Beobachtungsplan ansteuern und beobachten. Dabei werden die eingehenden Signale mittels Parabolantenne im Empfangshorn gebündelt, verstärkt und auf eine Zwischenfrequenz heruntergemischt. Es folgt die Aufspaltung der beiden Frequenzbänder in einzelne Kanäle. Auf dem S-Band werden üblicherweise 6, auf dem X-Band 8 Frequenzen beobachtet. Nach einem neuerlichen Mischvorgang sind die Signale zu digitalisieren. Die dabei entstehenden Bitströme werden mittels der Stationsuhr mit Zeitmarken versehen und auf Festplatten gespeichert.

Die beobachtete Laufzeitdifferenz entsteht im Schritt der Korrelation, der parallel für alle Frequenzkanäle ausgeführt wird. Das Grundprinzip besteht in der Erzeugung eines Interferenzmusters aus den Signalen zweier simultaner Beobachtungen zu ein und derselben Radioquelle. Die aufgezeichneten Bitströme werden solange verschoben, bis ihre Kreuzkorrelationsfunktion ein Maximum zeigt. Aus dieser Interferometerphase  $\varphi$  folgt für die jeweilige Frequenzkomponente  $\sigma$  die

Phasenlaufzeit (*Phase Delay*) gemäß:

$$\tau_{pd} = \frac{\varphi(\sigma, t)}{\sigma}$$

Die Ableitung der Phasenlaufzeiten auf den verschiedenen Kanälen ergibt die mehrdeutigkeitsfreie Messgröße der Gruppenlaufzeit (*Group Delay*):

$$\tau_{gd} = \frac{\partial \varphi(\sigma, t)}{\partial \sigma}$$

### VLBI-Analyse

Das Konzept der Auswertung von VLBI-Beobachtungen ist im Flussdiagramm (Abbildung 2.8) veranschaulicht. Die Ausführungen dazu folgen im Wesentlichen Schuh (2000 [33]).

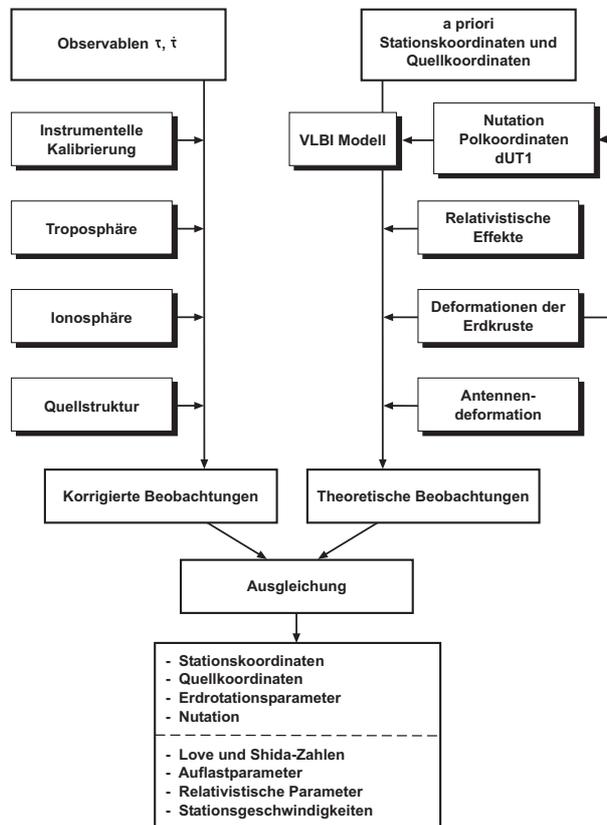


Abbildung 2.8: Flussdiagramm der VLBI-Analyse.

Quelle: Schuh (2000 [33])

Grundsätzlich werden die Observablen einem theoretischen Modell gegenübergestellt und mithilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten verbesserte Modellparameter geschätzt. Auf diese Weise folgen z.B. die Zuschläge zu den a priori eingeführten Werten von Stationskoordinaten und Erdorientierungsparametern. Genauso können aber auch relativistisch relevante Größen oder troposphärische Einflüsse bestimmt werden. Die VLBI-Analyse lässt sich nach dem Flussdiagramm in 2 Äste gliedern: Der linke Teil beinhaltet alle Korrekturen der Ob-

servablen wegen äußerer Einflüsse auf das Instrumentarium und das Signal selbst. Der rechte Teil umfasst die Berechnung von theoretischen Beobachtungen (in 1. Näherung nach (2.2)) und die Anbringung weiterer geometrisch bedingter Korrekturen. Die wichtigsten Punkte auf beiden Seiten seien an dieser Stelle kurz erwähnt:

Linker Teil:

- **Instrumentelle Kalibrierung:** Veränderungen der Laufzeit im Antennensystem (z.B. durch Temperaturunterschiede) müssen durch Einspeisung eines Kabelkalibrierungssignals bestimmt werden. Etwaige Antennenoffsets sind durch ein Modell zu berücksichtigen.
- **Troposphäre:** Laufzeitverzögerungen in der neutralen Atmosphäre werden mithilfe von elevationsabhängigen *Mapping-Functions* korrigiert.
- **Ionosphäre:** Zur Elimination dispersiver Effekte im oberen Teil der Atmosphäre bildet man Linearkombinationen der Gruppenlaufzeiten auf S- und X-Band.
- **Quellenstruktur:** Radiogalaxien variieren in ihrer Struktur sowohl zeitlich als auch nach der Frequenz. Die Auswirkung solcher Strukturänderungen auf die Observablen sind ebenfalls zu modellieren.

Rechter Teil:

- **VLBI-Modell:** Der Basisvektor  $\mathbf{b}$  ist üblicherweise im TRS gegeben, während der Quellvektor  $\mathbf{k}$  in einem zälestischen System vorliegt. Zur Transformation von  $\mathbf{b}$  und zur Auswertung von (2.2) ist somit ein genaues Erdorientierungsmodell zur Beobachtungszeit unabdingbar. Darüberhinaus erfolgt die Berechnung der geometrischen Laufzeit nicht in einem geozentrischen, sondern in einem baryzentrischen System (SSB, Solar System Barycentric).
- **Relativistische Effekte:** (2.2) stellt wie erwähnt nur eine grobe Näherung dar. Durch Berücksichtigung von Effekten der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie gelangt man zu einer ungleich komplexeren Formulierung. So muss beispielsweise auch der Einfluss gravitierender Körper auf die geometrische Laufzeit (Strahlableitung und Laufzeitverzögerung) korrigiert werden. Die Berechnung erfolgt nach Sovers et al. (1998 [36]) wieder vorzugsweise im SSB.

- **Deformationen der Erdkruste:** Periodische und aperiodische Deformationen der Erdkruste aufgrund von Erdgezeiten, Auflasteffekten oder tektonischen Prozessen sind an den Stationskoordinaten im TRS anzubringen.
- **Antennendeformation:** Thermische Belastungen bzw. Schneelasten verändern die Teleskopstruktur. Die Auswirkungen dieser Deformationen auf die geometrische Laufzeit können beispielsweise durch Temperaturmessungen erfasst werden.

Unsicherheiten in der Modellierung der troposphärischen Laufzeitverzögerung leisten den Hauptanteil zum Fehlerbudget der modernen VLBI. Die Genauigkeiten von Polbewegung und dUT1 liegen bei  $100 \mu\text{s}$  bzw.  $5 \mu\text{s}$ , wenn diese im Zuge einer 24 h-Session geschätzt werden.

### 2.2.2 Global Positioning System (GPS)

Das von den USA betriebene GPS zählt wie sein russisches Pendant GLONASS zu den GNSS und ist neben vielseitigen Positionierungsaufgaben im zivilen Leben auch für hochpräzise geodätische Anwendungen geeignet. Verwendet die VLBI Radioquellen zur Realisierung eines Inertialsystems, so dienen bei GPS künstliche Erdsatelliten als zeitabhängige Festpunkte. Durch Messung der Entfernungen zwischen erdfesten Empfängern und den Satelliten im All kann mittels GPS eine Vielzahl von Parametern bestimmt werden.

#### Systemaufbau

Das GPS-System lässt sich grundsätzlich in 3 Segmente unterteilen:

- Das **Weltraumsegment** umfasst die Konstellation der Satelliten und die Satelliten an sich. Bei GPS bewegen sich in rund 20200 km über der Erdoberfläche auf 6 Bahnebenen je 4 Satelliten. Die Umlaufzeit beträgt 12 h.
- Das **Kontrollsegment** besteht aus einem globalen Netz von permanenten Bodenstationen und dient zur fortlaufenden Beobachtung jedes einzelnen Satelliten des Systems. In dieser Komponente werden auch die für die Positionsbestimmung notwendigen Bahndaten (*Ephemeriden*) und Uhrenkorrekturen der Satelliten prädiiziert.

- Sämtliche GPS-Empfänger weltweit werden zum **Nutzersegment** zusammengefasst.

### Signalstruktur

Die für die Entfernungsmessung benutzten Signale im Mikrowellenbereich sind aus der Frequenz 10.23 MHz einer hochgenauen, bordseitigen Atomuhr abgeleitet. Durch Multiplikation mit dieser Grundfrequenz entstehen die 2 sinusförmigen Trägerwellen  $L_1$  und  $L_2$ :

$$L_1 = 1575.42 \text{ MHz} = 154 \cdot 10.23 \text{ MHz}$$

$$L_2 = 1227.60 \text{ MHz} = 120 \cdot 10.23 \text{ MHz}$$

Den Trägern werden mittels Phasenmodulation unterschiedlich lange, satelliten-spezifische binäre Sequenzen, sogenannte PRN-Codes (*Pseudo Random Noise-Codes*) aufgeprägt. Diese erlauben zum einen die Identifikation des Satelliten im Empfänger, zum anderen wird dadurch das Ausmessen der Signallaufzeit vom Sende- bis zum Empfangszeitpunkt ermöglicht. Man unterscheidet den **C/A-Code**, den **P-Code** und das **Datensignal**. Das Datensignal enthält alle wesentlichen Informationen für eine Positionsbestimmung vor Ort. Dazu zählen u.a. die sogenannten *Broadcast-Ephemeriden*, Satellitenuhrkorrekturen in Form von Polynomkoeffizienten oder ein grobes Modell der ionosphärischen Laufzeitverzögerung. Die Chip-Längen von C/A-Code und P-Code betragen 300 bzw. 30 m. Damit ermöglicht der P-Code eine exaktere Entfernungsmessung (Fehler ca.  $\pm 30$  cm nach Bretterbauer und Schuh (2004 [9])) als der C/A-Code, sofern der P-Code nicht durch Überlagerung eines zusätzlichen Signals verschlüsselt ist (*Anti-Spoofing*).

### Beobachtungsgleichung

Bei der Bestimmung einer Position mittels Satellitenverfahren fallen prinzipiell 4 Unbekannte an - 3 Koordinaten des Beobachters in einem erdgebundenen System sowie der Uhrfehler des Empfangssystems. Zur eindeutigen Lösung bedarf es also 4 Streckenbeobachtungen, die entweder aus Code- oder Phasenmessungen ermittelt werden. Bei der Code- oder **Pseudorange**-Messung wird im Empfänger eine Kopie des vom Satelliten ausgesendeten Codesegments solange verschoben, bis die Korrelation zwischen dem empfangenen Satellitensignal und dem verschobenen Code maximal ist. Die dem Korrelationsmaximum entsprechende zeitliche

Verschiebung ist als Laufzeit anzusehen. Diese enthält aber noch die Fehler der Satelliten- und Empfängeruhr und kann vorerst nur in eine Pseudoentfernung umgerechnet werden.

Phasenbeobachtungen ermöglichen Positionsbestimmungen auf wenige mm genau. Die Beobachtungsgröße ist dabei die Differenz  $\varphi_E^S$  zwischen ausgesendeter Trägerphase im Satellitenzeitrahmen und der Phase eines Referenzsignals im Empfängerzeitrahmen. In  $\varphi_E^S$  bleibt für den Empfänger die Anzahl der vollen Wellenzyklen zunächst unbestimmt. Diese muss als Mehrdeutigkeits- oder *Ambiguity*-Term  $N_E^S$  in der Beobachtungsgleichung berücksichtigt werden. Durch Multiplikation mit der Wellenlänge  $\lambda$  erhält man die Phasenbeobachtungsgleichung in Längeneinheiten:

$$\begin{aligned} L_E^S &= \lambda \varphi_E^S \\ &= r_E^S + c\delta t_E - c\delta t^S + \lambda N_E^S \\ &= |\mathbf{r}_{E,i}(t_E) - \mathbf{r}_i^S(t^S)| + c\delta t_E - c\delta t^S + \lambda N_E^S \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die geometrische Distanz  $r_E^S$  errechnet sich im Inertialsystem  $i$  aus der Satellitenposition  $\mathbf{r}_i^S$  zum Sendezeitpunkt  $t^S$  und der Empfängerposition  $\mathbf{r}_{E,i}$  zum Empfangszeitpunkt  $t_E$ .  $\delta t_E$  und  $\delta t^S$  bezeichnen die Uhrfehler. Das vereinfachte Beobachtungsmodell (2.3) muss um weitere Korrekturterme (relativistische Effekte, Mehrwegausbreitung, Signalverzögerung in der Troposphäre und Ionosphäre) ergänzt werden. Diese Fehlereinflüsse werden zumeist modelliert, können aber auch durch die Kombination mehrerer Beobachtungen eliminiert werden.

### Bestimmung von Erdorientierungsparametern

Nutation, Polbewegung und Tageslängenschwankung werden genauso wie z.B. Satellitenbahnen oder Stationskoordinaten üblicherweise in einer allgemeinen Parameterschätzung berechnet. Voraussetzung ist dabei, dass alle Satelliten- und Empfängerpositionen im selben Referenzsystem vorliegen. In (2.3) ist dies das raumfeste System. Die Stationskoordinaten  $\mathbf{r}_E$  sind jedoch immer im TRS gegeben und müssen ins raumfeste System transformiert werden:

$$\mathbf{r}_{E,i} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{r}_E \quad (2.4)$$

In den 5 hier nicht weiter spezifizierten Transformationsmatrizen sind alle Erdorientierungsparameter  $p_j \in \{x, y, \text{dUT1}, X, Y\}$  berücksichtigt. Im Fall einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten müssen zum Aufstellen der Designmatrix die

partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichung (2.3) nach  $p_j$  bekannt sein. Bedenkt man, dass die Erdorientierungsparameter nur im Distanzterm  $r_E^S$  enthalten sind, folgt nach Anwendung der Kettenregel:

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial p_j} = \frac{\partial r_E^S}{\partial \mathbf{r}_{E,i}} \frac{\partial \mathbf{r}_{E,i}}{\partial p_j}$$

Der 1. Term auf der rechten Seite führt auf den negativen Einheitsvektor vom Empfänger zum Satelliten im raumfesten System. Im 2. Term wird (2.4) substituiert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_E^S}{\partial \mathbf{r}_{E,i}} &= \frac{\mathbf{r}_{E,i}(t_E) - \mathbf{r}_i^S(t^S)}{r_E^S} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{E,i}}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j} \{\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \cdot \} \mathbf{r}_E \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht also darin, die Transformationsmatrizen nach den Erdorientierungsparametern abzuleiten.

Abschließend sei angemerkt, dass alle Satellitenverfahren, so auch GPS, für die 3 Komponenten dUT1,  $X$  und  $Y$  nur Änderungen messen können. Bei der VLBI ist dies gegenüber dem stabilen Inertialsystem der Quasare möglich, während bei GPS so ein Inertialsystem nur über kurze Zeiträume von wenigen Tagen realisierbar ist. Dies ist auch der Grund, warum mit Beobachtungen aus Satellitenverfahren nur kurzperiodische Nutationsterme geschätzt werden können.

## 2.3 Erdrotation und Atmosphärische Anregung

Der Einfluss der Atmosphäre auf die Rotation der Erde wird entweder als Drehmoment oder als Drehimpuls modelliert. Im Drehmomentansatz wird nach Brzezinski et al. (2002 [12]) das atmosphärische Drehmoment an den Grenzflächen der festen Erde berechnet und in weiterer Folge als Erreger in die Bewegungsgleichungen eingeführt. Die Grundlage für diese Arbeit bildet jedoch der mathematisch einfachere Drehimpulsansatz. Der Verfasser hält sich dabei im Wesentlichen an Barnes et al. (1983 [2]) bzw. Gross (2007 [21]). Sämtliche Gleichungen und Funktionen werden zunächst für eine einfache, nicht deformierte Erde aufgestellt, bevor in den Abschnitten 2.3.4 und 2.3.5 die Formulierungen an ein realistisches Erdmodell angepasst werden.

Zur eindeutigen Begriffsfestlegung sei an dieser Stelle noch Folgendes angemerkt: Unter „Erde“ wird in den nachstehenden Punkten stets das gesamte System (Kern, Mantel, Kruste, Hydro- und Atmosphäre) verstanden, während der Begriff „feste Erde“ nur Kruste und Mantel bezeichnet. Das körperfeste, rotierende System wird dieser festen Erde auf erst später zu definierende Weise angegliedert. Das Inertialsystem (Index „i“) hat mit dem rotierenden System z-Achse und Ursprung gemeinsam, ist aber um den Erdrotationswinkel gegen dieses verdreht.

### 2.3.1 Die Liouville-Gleichung

Beim Drehimpulsansatz wird grundsätzlich angenommen, dass der Drehimpuls der Erde im Raum  $\mathbf{H}_i$  eine erhaltene Größe darstellt. Es folgt dies unmittelbar aus der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{L}_i = \dot{\mathbf{H}}_i \quad (2.5)$$

bei Abwesenheit externer Drehmomente  $\mathbf{L}_i$ . Wird (2.5) ins rotierende System transformiert, erhält man die Eulergleichung:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} + \dot{\mathbf{H}} \quad (2.6)$$

Der Drehimpuls  $\mathbf{H}$  lässt sich in einen trägheitsabhängigen Teil ( $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ , Trägheitstensor  $\mathbf{I}$ , Erdrotationsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  im TRS) und einen bewegungsabhängigen Teil (Relativedrehimpuls  $\mathbf{h}$ ) aufgliedern. Der Relativedrehimpuls ist auf Massenbewegungen relativ zum rotierenden System zurückzuführen, im trägheitsabhängigen

Teil steckt hingegen der Einfluss der Massenverlagerung an sich.  $\mathbf{I}$  und  $\mathbf{h}$  enthalten neben den Beiträgen der festen Erde, des Kerns und der Ozeane auch die von Druckunterschieden und Winden stammenden atmosphärischen Anteile.

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{I} = \int_{Erde} \rho \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} dV \quad (2.8)$$

$$\mathbf{h} = \int_{Erde} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV \quad (2.9)$$

(2.7) veranschaulicht nochmals den Drehimpulsansatz. Schließt man in die Betrachtungen Winde, Strömungen, etc. in den fluiden Teilen der Erde ein, entstehen Relativedrehimpulse und es kommt zu Variationen im Trägheitstensor. Da aber bei Abwesenheit externer Drehmomente  $\mathbf{H}$  konstant bleibt, muss sich  $\boldsymbol{\omega}$  in Richtung (Polbewegung) und Magnitude (Tageslängenschwankung) verändern. Substitution von (2.7) in (2.6) führt auf die Liouville-Gleichung:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) \quad (2.10)$$

### 2.3.2 Die Anregungsfunktionen

Um aus der Liouville-Gleichung Aussagen über die variable Rotation der festen Erde zu treffen, wird nach Barnes et al. (1983 [2]) vorgegangen. Sämtliche Gleichungen sind dort für Kruste und Mantel formuliert, der Erdkern bleibt vorerst unberücksichtigt.

Die Rotation der festen Erde weicht nur geringfügig vom starren Fall ab - es kann eine Linearisierung vorgenommen werden. Zu diesem Zweck wird von folgendem Initialzustand (Index „0“) ausgegangen: Das System Kruste und Mantel rotiert gleichförmig als starrer Körper um die z-Achse des erdfesten Systems. Der Trägheitstensor dieses Systems soll Diagonalform annehmen, z-Achse und Hauptträgheitsachse fallen also zusammen:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \Omega \mathbf{z} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$\Omega$  steht für die mittlere Winkelgeschwindigkeit,  $A_m$  und  $C_m$  sind äquatoriales und polares Hauptträgheitsmoment der festen Erde. Die Anwesenheit der fluiden Teile der Erde (Atmosphäre und Ozeane) und deren Bewegung führen zu kleinen Abweichungen vom Initialzustand. Relativdrehimpulse sind zu berücksichtigen, Trägheitstensor und Winkelgeschwindigkeit werden zu zeitabhängigen Größen:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}_0 + \Delta\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}_0 + \begin{pmatrix} \Delta I_{11} & \Delta I_{12} & \Delta I_{13} \\ \Delta I_{12} & \Delta I_{22} & \Delta I_{23} \\ \Delta I_{13} & \Delta I_{23} & \Delta I_{33} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ 1 + m_3(t) \end{pmatrix} \Omega \quad (2.15)$$

Für diese, vom Initialzustand abweichende Erde wird nun das körperfeste Koordinatensystem spezifiziert. Dazu ist zu sagen, dass Kruste und Mantel bei atmosphärischer oder ozeanischer Anregung Deformationen zeigen, die u.a. wiederum Beiträge zum Relativdrehimpuls leisten. (Der Beitrag zum Trägheitstensor wird in Abschnitt 2.3.4 behandelt.) Um weitere theoretische Überlegungen einfacher zu gestalten, fordert man, dass im körperfesten Koordinatensystem der Relativdrehimpulsanteil des Mantels und der Kruste verschwindet (Mittleres Tisserand-System des Mantels). Durch diese Bedingung wird allein die Bewegung der Achsen festgelegt, über ihre Orientierung im Erdmodell muss an dieser Stelle keine Aussage gemacht werden.

Aus (2.15) ist ersichtlich, dass die kleinen dimensionslosen Größen  $m_1$  und  $m_2$  den momentanen Rotationspol im Tisserand-System positionieren und damit seine Polbewegung angeben.  $m_3$  beschreibt die variable Rotationsrate und kann in LOD umgerechnet werden (siehe Abschnitt 2.4.3). Die  $m_i$  lassen sich aus den Komponenten der Liouville-Gleichung bestimmen, wenn für Trägheitstensor und Rotationsvektor nach (2.14) bzw. (2.15) eingesetzt wird. Betrachtet man nachstehende Größen als sehr klein,

$$|\Delta I_{ij}| \ll C_m, \quad |h_i| \ll \Omega C_m, \quad |m_i| \ll 1, \quad |\dot{m}_i| \ll \Omega$$

können die Produkte zwischen ihnen vernachlässigt werden. Die Liouville-Gleichung führt auf folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{m}_1}{\sigma_r} + m_2 &= \psi_2 \\ \frac{\dot{m}_2}{\sigma_r} - m_1 &= -\psi_1\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\dot{m}_3 &= \dot{\psi}_3 \\ \sigma_r &= \frac{(C_m - A_m)\Omega}{A_m}\end{aligned}\quad (2.17)$$

$\sigma_r$  ist die Eulerfrequenz der freien Polbewegung für Kruste und Mantel. Die  $\psi_i$  werden Anregungsfunktionen genannt und lauten nach Barnes et al. (1983 [2]) ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\Omega^2 \Delta I_{13} + \Omega \Delta \dot{I}_{23} + \Omega h_1 + \dot{h}_2 - L_2}{\Omega^2 (C_m - A_m)} \\ \psi_2 &= \frac{\Omega^2 \Delta I_{23} - \Omega \Delta \dot{I}_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1}{\Omega^2 (C_m - A_m)} \\ \psi_3 &= \frac{-\Omega^2 \Delta I_{33} - \Omega h_3 + \int_0^t L_3 d\tau}{\Omega^2 C_m}\end{aligned}\quad (2.18)$$

In der vorliegenden Arbeit wird stets davon ausgegangen, dass die Abweichungen im Trägheitstensor ( $\Delta \mathbf{I}$ ) und der Relativdrehimpuls ( $\mathbf{h}$ ) auf Druckvariationen und Winde in der Atmosphäre zurückzuführen sind. Etwaige externe Drehmomente  $\mathbf{L}$ , welche für Nutation, erzwungene Polbewegung und Gezeiten verantwortlich sind, bleiben unberücksichtigt. Die Anregungsfunktionen können dann ausschließlich aus meteorologischen Daten abgeleitet werden. Fasst man die äquatorialen Komponenten der nun besprochenen Größen als komplexe Zahl zusammen,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{m}} &= m_1 + im_2 \\ \hat{\mathbf{h}} &= h_1 + ih_2 \\ \Delta \hat{\mathbf{I}} &= \Delta I_{13} + i\Delta I_{23} \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} &= \psi_1 + i\psi_2 = \frac{\Omega^2 \Delta \hat{\mathbf{I}} - i\Omega \Delta \dot{\hat{\mathbf{I}}} + \Omega \hat{\mathbf{h}} + i\dot{\hat{\mathbf{h}}}}{\Omega^2 (C_m - A_m)}\end{aligned}\quad (2.19)$$

kann für das Gleichungssystem (2.16) die analytische Lösung in äquatorialer bzw. axialer Richtung angegeben werden:

$$\hat{\mathbf{m}}(t) = e^{i\sigma_r t} \left( \hat{\mathbf{m}}(0) - i\sigma_r \int_0^t \hat{\boldsymbol{\psi}}(\tau) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau \right) \quad (2.20)$$

$$m_3 = \psi_3 + \text{const} \quad (2.21)$$

### 2.3.3 Die Drehimpulsfunktionen

Nach Moritz und Müller (1987 [28]) besteht der Nachteil der in (2.18) definierten Anregungsfunktionen darin, dass die axiale Komponente  $\psi_3$  als Drehimpuls interpretiert werden kann, während die äquatorialen Komponenten den Charakter eines Drehmoments aufweisen.  $\psi_1$  und  $\psi_2$  enthalten die zeitlichen Ableitungen von  $\Delta \mathbf{I}$  und  $\mathbf{h}$  - diese können aber nur mit unzureichender Genauigkeit aus Atmosphärendaten berechnet werden. In Anlehnung an Barnes et al. (1983 [2]) ist es aber möglich, die Anregungsfunktionen in (2.20) partiell zu integrieren und so leichter handhabbare Funktionen, die sogenannten **Drehimpulsfunktionen** abzuleiten:

Das Integral in (2.20) lautet mit (2.19) ausgeschrieben:

$$\Omega^2(C_m - A_m) \int_0^t \hat{\boldsymbol{\psi}}(\tau) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau = \int_0^t \left( \Omega^2 \Delta \hat{\mathbf{I}} - i\Omega \Delta \dot{\hat{\mathbf{I}}} + \Omega \hat{\mathbf{h}} + i\dot{\hat{\mathbf{h}}} \right) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau$$

Addiert und subtrahiert man im Integranden den Ausdruck

$$\left( \Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}} \right) e^{-i\sigma_r \tau}$$

kann umgeordnet und zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[ \Omega(\Omega + \sigma_r) \Delta \mathbf{I} + (\Omega + \sigma_r) \hat{\mathbf{h}} - i \left( \Omega \Delta \dot{\hat{\mathbf{I}}} - i\Omega \sigma_r \Delta \hat{\mathbf{I}} \right) - i \left( \dot{\hat{\mathbf{h}}} - i\sigma_r \hat{\mathbf{h}} \right) \right] e^{-i\sigma_r \tau} d\tau = \\ = (\Omega + \sigma_r) \int_0^t \left( \Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}} \right) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau - i \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left[ \left( \Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}} \right) e^{-i\sigma_r \tau} \right] d\tau \end{aligned}$$

Entscheidend ist, dass sich im letzten Term Differentiation und Integration aufheben, und damit die Ableitungen von  $\Delta \mathbf{I}$  und  $\mathbf{h}$  umgangen werden. An dieser Stelle führt man nun die **äquatorialen Drehimpulsfunktionen** ein:

$$\hat{\boldsymbol{\chi}} = \chi_1 + i\chi_2 = \frac{\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}}{\Omega(C_m - A_m)} = \frac{\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}}{A_m \sigma_r} \quad (2.22)$$

Das Integral der Anregungsfunktionen lautet somit:

$$\int_0^t \hat{\boldsymbol{\psi}}(\tau) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau = \frac{\Omega + \sigma_r}{\Omega} \int_0^t \hat{\boldsymbol{\chi}}(\tau) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau - \frac{i}{\Omega} \left( \hat{\boldsymbol{\chi}}(t) e^{-i\sigma_r t} \right) \quad (2.23)$$

Eingesetzt in (2.20) kann die Lösung für  $\hat{\mathbf{m}}(t)$  in Abhängigkeit der komplexen Drehimpulsfunktion  $\hat{\chi}(t)$  formuliert werden:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}(t) = e^{-i\sigma_r t} & \left[ \hat{\mathbf{m}}(0) - i\sigma_r \left( 1 + \frac{\sigma_r}{\Omega} \right) \int_0^t \hat{\chi}(\tau) e^{-i\sigma_r \tau} d\tau \right] - \\ & - \frac{\sigma_r}{\Omega} [\hat{\chi}(t) - e^{i\sigma_r t} \hat{\chi}(0)] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aus (2.23) lässt sich nach Differentiation und Vereinfachung folgender Zusammenhang formulieren:

$$\hat{\psi} = \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}} \quad (2.25)$$

Damit ist aber das Gleichungssystem (2.16) neu anschreibbar. Der 1. Teil stellt nichts anderes als die Differentialform von (2.24) dar:

$$\hat{\mathbf{m}} + \frac{i}{\sigma_r} \dot{\hat{\mathbf{m}}} = \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}} \quad (2.26)$$

$$m_3 = -\chi_3 + \text{const.} \quad (2.27)$$

Ein Vergleich mit (2.21) zeigt, dass für die **axiale Drehimpulsfunktion**  $\chi_3 = -\psi_3$  gilt. Der analytische Ausdruck für  $\psi_3$  wurde bereits in (2.18) durch direkte Integration abgeleitet. Die  $\chi_i$  haben nun einheitlich Drehimpulscharakter. Sie lassen sich in einen von Dichteunterschieden abhängigen Massenterm (engl. *Matter- oder Pressure-Term*  $p$ ) und einen vom Relativdrehimpuls abhängigen Bewegungsterm (engl. *Motion- oder Wind-Term*  $w$ ) aufgliedern:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^p &= \frac{\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}}}{\Omega(C_m - A_m)} = \\ &= \frac{-1}{C_m - A_m} \iiint \rho(x_1 x_3 + i x_2 x_3) dV \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^w &= \frac{\hat{\mathbf{h}}}{\Omega(C_m - A_m)} = \\ &= \frac{1}{\Omega(C_m - A_m)} \iiint (x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2) + i(x_1 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_1) dV \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \chi_3^p &= \frac{\Omega \Delta I_{33}}{\Omega C_m} = \\ &= \frac{1}{C_m} \iiint \rho(x_1^2 + x_2^2) dV \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\chi_3^w = \frac{h_3}{\Omega C_m} =$$

$$= \frac{1}{\Omega C_m} \iiint \rho(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) dV \quad (2.31)$$

Die Integrale auf der rechten Seite erhält man, wenn die Ausdrücke für Trägheitstensor und Relativdrehimpuls in (2.8) bzw. (2.9) in Komponenten ausgeführt werden. Die Volumenintegrale erstrecken sich jeweils über die gesamte Atmosphäre. Ortsvektor  $\mathbf{x}$  und Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  werden nach Schuh et al. (2003 [34]) in einem geeigneten geografischen Koordinatensystem ausgedrückt:

$$\mathbf{x} = r \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = u \mathbf{e}_{Ost} + v \mathbf{e}_{Nord} + w \mathbf{e}_{Vert}$$

Damit lauten die Drehimpulsfunktionen in ihrer strengen Formulierung:

$$\begin{aligned} \hat{\chi} &= \frac{-1}{C_m - A_m} \iiint \rho r^4 \sin \phi \cos^2 \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dr + \\ &+ \frac{-1}{\Omega(C_m - A_m)} \iiint \rho r^3 (u \sin \phi + iv) \cos \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dr = \\ &= \hat{\chi}^p + \hat{\chi}^w \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \chi_3 &= \frac{1}{C_m} \iiint \rho r^4 \cos^3 \phi d\lambda d\phi dr + \\ &+ \frac{1}{\Omega C_m} \iiint \rho r^3 u \cos^2 \phi d\lambda d\phi dr = \\ &= \chi_3^p + \chi_3^w \end{aligned} \quad (2.33)$$

### 2.3.4 Korrektur der Drehimpulsfunktionen: Low Frequency Case

Die in Abschnitt 2.3.2 und 2.3.3 aufgestellten Gleichungen gelten für eine nicht deformierte Erde, die nur aus Kruste und Mantel besteht (Index „m“). Werden die darin verwendeten Hauptträgheitsmomente  $A_m$  und  $C_m$  durch die entsprechenden Werte  $A$  und  $C$  für die gesamte Erde ersetzt, erhält man ein Erdmodell, das auch Ozeane, Atmosphäre und Kern berücksichtigt. Die fluiden Teile der Erde sind durch diese formale Anpassung nun starr mit Kruste und Mantel, also dem mittleren Tisserand-System verbunden. Dieses Modell ist nicht realistisch und muss durch Anbringung kleiner Korrekturfaktoren an den Drehimpulsfunktionen verbessert werden. Nach Gross (2007 [21]) ist folgendermaßen zu argumentieren:

- Kruste und Mantel wurden bisher als starr betrachtet. Sie sind jedoch begrenzt elastisch. Bei Massenverlagerungen in der Atmosphäre kommt es daher zu Deformationen, die als Auflasteffekte zu behandeln sind.
- Ferner entstehen durch die Variationen im Rotationsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  veränderliche Zentrifugalkräfte, die eine Reihe indirekter Effekte zur Folge haben. Rotationsschwankungen, die in (2.26) und (2.27) errechnet werden, können grundsätzlich in allen Teilen unseres Erdmodells Relativdrehimpulse ( $\Delta\mathbf{h}$ ) sowie Veränderungen des Trägheitstensors ( $\Delta\mathbf{I}$ ) hervorrufen. Addiert man diese Effekte zu Trägheitstensor und Relativdrehimpuls in der ursprünglichen Formulierung (2.28) - (2.31), gelangt man zu den angesprochenen Korrekturfaktoren.

Zum 2. Punkt ist anzumerken, dass Kruste und Mantel per Definition des mittleren Tisserand-Systems keinen Relativdrehimpuls aufweisen. Ferner wird für die Reaktion der Ozeane auf die Polbewegung eine Gezeitenwelle im Gleichgewicht, die sogenannte *Poltide*, angenommen. Eine derartige Gezeitenwelle verursacht keine Strömungen, sodass auch die Bewegung der Ozeane nicht zum zusätzlichen Relativdrehimpuls beiträgt. (Die Poltide befindet sich nur näherungsweise im Gleichgewicht. Nach Wahr (2005 [38]) ist diese Vereinfachung für Perioden  $\gg 1$  d aber hinreichend genau.) Wenn darüberhinaus die Auswirkungen von Rotationsschwankungen in der Atmosphäre aufgrund ihrer kleinen Masse vernachlässigt werden, ist der Kern alleine für  $\Delta\mathbf{h}$  verantwortlich:

### Relativdrehimpuls des Kerns

Gross (2007 [21]) gibt für die Komponenten von  $\Delta\mathbf{h}$  folgende, ausschließlich für große Perioden gültige Näherung an:

$$\begin{pmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & iE' & 0 \\ -iE' & E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$E = \left(\frac{\sigma^2}{\Omega}\right) A_c, \quad E' = -\sigma(1 - \epsilon_c)A_c, \quad \tilde{E} = -\Omega C_c$$

$A_c$  und  $C_c$  sind äquatoriales bzw. axiales Hauptträgheitsmoment des Kerns,  $\epsilon_c$  steht für die Exzentrizität der Kern-Mantel-Grenze.

### Rotationsdeformation

Die Auswirkung der variablen Rotation auf den Trägheitstensor wird mit  $\Delta \mathbf{I}^r$  bezeichnet. Zur Bestimmung von  $\Delta \mathbf{I}^r$  wird vorerst eine Erde ohne Ozeane angenommen. Dieses Modell soll auf das geänderte Zentrifugalpotential genauso reagieren, wie eine nicht-rotierende Erde auf ein stationäres Potential derselben Größe. Unter Verwendung der Rotations-Lovezahl  $k_2$  für die gesamte Erde und der Größe  $n_0$  (sie berücksichtigt Änderungen im mittleren Trägheitsmoment der Erde durch rein radiale Deformationen) erhält man in Komponentenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \Delta I_{13}^r \\ \Delta I_{23}^r \\ \Delta I_{33}^r \end{pmatrix} = \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \begin{pmatrix} k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 + \frac{4}{3}k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

### Massenverlagerungen in den Ozeanen

Erweitert man das eben aufgestellte Erdmodell um Ozeane und Poltide, müssen die Hauptdiagonalelemente in (2.35) neu angeschrieben werden. Die sehr kleinen Nebendiagonalelemente  $\Delta D_{ij}$  drücken die Kopplung zwischen äquatorialer und axialer Komponente des Gleichungssystems aus:

$$\begin{pmatrix} \Delta I_{13}^r \\ \Delta I_{23}^r \\ \Delta I_{33}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D + \Delta D & \Delta D_{12} & \Delta D_{13} \\ \Delta D_{12} & D - \Delta D & \Delta D_{23} \\ \Delta D_{13} & \Delta D_{23} & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$D = (k_2 + \Delta k_{ocn,w}) \frac{R^5 \Omega^2}{3G}$$

$$\tilde{D} = \left[ n_0 + \frac{4}{3} (k_2 + \Delta k_{ocn,s}) \right] \frac{R^5 \Omega^2}{3G}$$

$\Delta k_{ocn,w}$  und  $\Delta k_{ocn,s}$  bezeichnen die Ozean-Lovezahlen für die 2 Komponenten (Polbewegung und Rotationsrate, bzw. *Wobble* und *Spin*).

### Auflastverformung

Die veränderliche Massenverteilung in der Atmosphäre stellt einen Auflasteffekt dar, unter dem die festen Bestandteile der Erde elastisch nachgeben. Zur Berücksichtigung des Einflusses auf den Trägheitstensor sind die Massenterme (2.28) und (2.30) der Drehimpulsfunktionen mit dem Faktor  $(1 + k'_2)$  zu multiplizieren.  $k'_2$  wird als Auflast-Lovezahl bezeichnet. Sie ist nach Gross (2007 [21]) in axialer

Richtung mit einem zusätzlichen Korrekturfaktor  $\alpha_3 = 0.792$  zu versehen, um der Entkopplung des Kerns bei Auflastverformung Rechnung zu tragen.

Die in (2.34) und (2.36) angegebenen Änderungen von Relativdrehimpuls und Trägheitstensor werden den Massen- bzw. Bewegungstermen (2.28) - (2.31) zugeschlagen. (Die Trägheitsmomente für Kruste und Mantel sind durch  $A$  und  $C$  für die gesamte Erde zu ersetzen.) Beschränkt man sich auf große Perioden, entstehen zahlreiche Größen die klein von 2. Ordnung und damit vernachlässigbar sind. Die so erhaltenen Drehimpulsfunktionen führt man in das Differentialgleichungssystem (2.26) und (2.27) ein. Die Formulierung kann beibehalten werden - die Eulerfrequenz  $\sigma_r$  wird aber durch die theoretische Chandlerfrequenz  $\sigma_{cw}$  ersetzt:

$$\sigma_{cw} = \left( \frac{C - A - D}{A_m + \epsilon_c A_c + D} \right) \Omega \quad (2.37)$$

Die Drehimpulsfunktionen stellen sich nach Gross (2007 [21]) dann folgendermaßen dar:

$$\hat{\chi} = \frac{\Omega(1 + k'_2)\Delta\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}}{(C - A - D)\Omega} \quad (2.38)$$

$$\chi_3 = k_r \frac{\Omega(1 + \alpha_3 k'_2)\Delta I_{33} + h_3}{\Omega C_m} \quad (2.39)$$

Die Korrektur wegen Auflastverformung wurde ebenfalls an dieser Stelle angebracht. Der Vorfaktor  $k_r$  in (2.39) kommt für die Rotationsdeformation in axialer Richtung auf:

$$k_r = \left\{ 1 + \left[ n_0 + \frac{4}{3} (k_2 + \Delta k_{ocn,s}) \right] \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \frac{1}{C_m} \right\}^{-1} = 0.997191$$

### Anelastizität des Mantels

Die aus (2.37) berechnete theoretische Chandlerperiode (423 d mit den Konstanten aus Anhang B) stimmt nicht mit ihrem beobachteten Wert von 433 mittleren Sonnentagen (siehe Eubanks (1993 [19])) überein. Die Diskrepanz kann hauptsächlich durch die Anelastizität des Mantels erklärt werden. Dieses anelastische Verhalten bedingt einerseits einen kleinen Zuschlag zur Auflast-Lovezahl  $k'_2$ ,

$$\Delta\hat{\mathbf{k}}'_{an} = -0.011 + i0.003$$

andererseits wird auch die Rotations-Lovezahl  $k_2$  modifiziert. Dieser Einfluss wird berücksichtigt, indem man in (2.26) und im Nenner der Drehimpulsfunktionen

(2.38) und (2.39) für  $\sigma_{cw}$  die beobachtete und komplexe Chandlerfrequenz  $\hat{\sigma}_{cw}$  substituiert:

$$\hat{\sigma}_{cw} = \frac{2\pi}{T_{cw}} \left( 1 + \frac{i}{2Q_{cw}} \right) \quad (2.40)$$

$$T_{cw} = 433$$

$$Q_{cw} = 100$$

Das aus der Liouville-Gleichung hervorgehende Differentialgleichungssystem lautet daher:

$$\dot{\mathbf{m}} + \frac{i}{\hat{\sigma}_{cw}} \dot{\mathbf{m}} = \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}} \quad (2.41)$$

$$m_3 = -\chi_3 + \text{const.} \quad (2.42)$$

$\hat{\chi}$  und  $\chi_3$  enthalten sämtliche o.a. Korrekturen und werden nach Barnes et al. (1983 [2]) *Effektive Drehimpulsfunktionen* genannt. Sie sollen in dieser Arbeit aber weiter die ursprüngliche Bezeichnung *Drehimpulsfunktionen* tragen, da die Drehimpulsfunktionen der starren Erde, wie in (2.32) und (2.33) angegeben, nicht mehr verwendet werden.

$$\hat{\chi} = \frac{\Omega(1 + \Delta\hat{\mathbf{k}}'_{an} + k'_2)\Delta\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}}{(C - A + A_m + \epsilon_c A_c)\hat{\sigma}_{cw}} \quad (2.43)$$

$$\chi_3 = k_r \frac{\Omega(1 + \Delta\hat{\mathbf{k}}'_{an} + \alpha_3 k'_2)\Delta I_{33} + h_3}{\Omega C_m} \quad (2.44)$$

Mit den Konstanten aus Anhang B erhält man folgende numerische Werte als Vorfaktoren in den Realteilen von Massen- und Bewegungstermen:

$$\hat{\chi} = \frac{1.100 \Omega \Delta\hat{\mathbf{I}} + 1.608 \hat{\mathbf{h}}}{(C - A)\Omega} \quad (2.45)$$

$$\chi_3 = \frac{0.748 \Omega \Delta I_{33} + 0.998 h_3}{\Omega C_m} \quad (2.46)$$

### 2.3.5 Korrektur der Drehimpulsfunktionen: High Frequency Case

Die im Abschnitt 2.3.4 hergeleiteten Verbesserungen können nur begrenzt im Periodenbereich  $\leq 24$  h verwendet werden. So wurden beispielsweise die Korrekturen wegen Massenverlagerungen in den Ozeanen und wegen des Relativedrehimpulses

des Kerns ausschließlich für große Perioden formuliert. Im täglichen und subtäglichen Bereich stehen dafür aber keine derartigen Modelle zur Verfügung. Die entsprechenden Effekte bleiben in diesem Abschnitt daher unberücksichtigt. Der einzige Beitrag zum Trägheitstensor kommt von der Rotationsdeformation und lautet analog zu (2.35):

$$\Delta \hat{\mathbf{I}} = k_2 \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \hat{\mathbf{m}}$$

$$\Delta I_{33} = \left[ n_0 + \frac{4}{3} k_2 \right] \frac{R^5 \Omega^2}{3G} m_3$$

Berücksichtigt man diese Zuschläge in den Drehimpulsfunktionen (2.28) - (2.31) und im Gleichungssystem (2.26) - (2.27), erhält man im 1. Schritt:

$$\hat{\chi} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2 R^5 k_2}{3(C-A)G}} \frac{\Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}}{\Omega(C_m - A_m)} \quad (2.47)$$

$$\chi_3 = \left\{ 1 + \left[ n_0 + \frac{4}{3} k_2 \right] \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \frac{1}{C_m} \right\}^{-1} \frac{\Omega \Delta I_{33} + h_3}{\Omega C_m} \quad (2.48)$$

Bei dieser Umrechnung wird auch die Eulerfrequenz durch einen genäherten theoretischen Wert für die Chandlerfrequenz ersetzt. Wenn man im 2. Schritt wegen Auflastverformung und Anelastizität des Mantels korrigiert, kann statt der theoretischen Chandlerfrequenz wieder ihr beobachteter Wert verwendet werden. Auflastdeformation und Anelastizität äußern sich auch in den Drehimpulsfunktionen:

$$\hat{\chi} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2 R^5 k_2}{3(C-A)G}} \frac{\Omega \left( 1 + k'_2 + \Delta \hat{\mathbf{k}}'_{an} \right) \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}}}{\Omega(C_m - A_m)} \quad (2.49)$$

$$\chi_3 = \left\{ 1 + \left[ n_0 + \frac{4}{3} k_2 \right] \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \frac{1}{C_m} \right\}^{-1} \frac{\Omega \left( 1 + \alpha_3 \left( k'_2 + \Delta \hat{\mathbf{k}}'_{an} \right) \right) \Delta I_{33} + h_3}{\Omega C_m} \quad (2.50)$$

Somit ergeben sich folgende Korrekturfaktoren an Massen- und Bewegungstermen:

$$\hat{\chi} = \frac{0.998 \Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + 1.459 \hat{\mathbf{h}}}{(C_m - A_m) \Omega} \quad (2.51)$$

$$\chi_3 = \frac{0.748 \Omega \Delta I_{33} + 0.998 h_3}{\Omega C_m} \quad (2.52)$$

Es bleibt zu erwähnen, dass in den äquatorialen Drehimpulsfunktionen (2.51) im Gegensatz zur langperiodischen Formulierung (2.45) die Hauptträgheitsmomente für Kruste und Mantel eingehen. Die Effekte des flüssigen Kerns werden in Abschnitt 2.4.2 behandelt.

### 2.3.6 Berechnungsvarianten

Die Bestimmung der Drehimpulsfunktionen als räumliches Integral über Dichte und Geschwindigkeitsfeld der Atmosphäre wurde bereits in (2.32) und (2.33) angedeutet. Als unabhängige Variable im radialen Integral kann sowohl der Druck als auch die Radiuslänge verwendet werden. Darüberhinaus lassen sich manche Größen, die bei der Integration nur wenig variieren, als konstant ansetzen. Man erhält damit verschiedene Berechnungsvarianten, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Die Formulierung ist dabei ganz allgemein und bezieht sich nicht auf die Drehimpulsfunktionen, sondern auf den atmosphärischen Drehimpuls:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}^{(a)} &= H_1^{(a)} + iH_2^{(a)} = \Omega\Delta\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}} \\ H_3^{(a)} &= \Omega\Delta I_{33} + h_3\end{aligned}$$

Die Komponenten des Trägheitstensors  $\Delta\mathbf{I}$  und des Relativdrehimpulses  $\mathbf{h}$  nennt man analog zu (2.28) - (2.31) Massen- und Bewegungsterme. Diese Größen werden durch die nachstehenden Integrale beschrieben und können je nach untersuchtem Frequenzbereich zur Berechnung der Drehimpulsfunktionen nach (2.45),(2.46) bzw. (2.51),(2.52) herangezogen werden.

#### Integration über Radiuslänge

Diese Variante entspricht bis auf die Vorfaktoren genau (2.32) und (2.33). Das radiale Integral über die Atmosphärenschale ist von der Erdoberfläche bis streng genommen  $r = \infty$  zu führen. Als obere Grenze verwendet man aber eine gewisse Höhe (etwa 55 km bzw. 1 hPa), ab welcher Dichte und Windgeschwindigkeit vernachlässigbar klein sind. Die äquatorialen und axialen Komponenten lauten:

$$\Delta\hat{\mathbf{I}} = - \iiint \rho r^4 \sin\phi \cos^2\phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dr \quad (2.53)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{h}} = - \iiint \rho r^3 (u \sin\phi + iv) \cos\phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dr \quad (2.54)$$

$$I_{33} = \iiint \rho r^4 \cos^3\phi d\lambda d\phi dr \quad (2.55)$$

$$h_3 = \iiint \rho r^3 u \cos^2\phi d\lambda d\phi dr \quad (2.56)$$

### Integration über Druck

Wird für die Atmosphäre ein vertikaler Druckgradient anhand der hydrostatischen Gleichung  $dp = -\rho g dr$  angenommen, lässt sich das radiale Integral als Integral über Druckinkremente formulieren.  $p = 0$  stellt die untere Grenze dar,  $p = p_s$  (Oberflächendruck) die obere.

$$\Delta \hat{\mathbf{I}} = - \iiint \frac{r^4}{g} \sin \phi \cos^2 \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dp \quad (2.57)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{h}} = - \iiint \frac{r^3}{g} (u \sin \phi + iv) \cos \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi dp \quad (2.58)$$

$$I_{33} = \iiint \frac{r^4}{g} \cos^3 \phi d\lambda d\phi dp \quad (2.59)$$

$$h_3 = \iiint \frac{r^3}{g} u \cos^2 \phi d\lambda d\phi dp \quad (2.60)$$

### Integration über Druck: Radius und Schwere konstant

Eine weitere Berechnungsvariante ergibt sich, wenn die Atmosphäre als dünne Schale mit konstantem mittleren Radius  $\bar{r}$  und damit konstanter Schwere  $\bar{g}$  betrachtet wird. Vergleicht man den Erdradius mit der geringen Atmosphärenausdehnung, ist diese Vereinfachung gerechtfertigt. Der Vorteil liegt darin, dass  $\bar{r}$  und  $\bar{g}$  als Konstanten vor das Integral gezogen werden können. Das Druckintegral in den Massentermen hängt damit nur mehr von druckunabhängigen Größen ab und kann unmittelbar berechnet werden. Es bleibt der Oberflächendruck  $p_s$ .

$$\Delta \hat{\mathbf{I}} = - \frac{\bar{r}^4}{\bar{g}} \iint p_s \sin \phi \cos^2 \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi \quad (2.61)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{h}} = - \frac{\bar{r}^3}{\bar{g}} \iint (u \sin \phi + iv) \cos \phi e^{i\lambda} d\lambda d\phi \quad (2.62)$$

$$I_{33} = \frac{\bar{r}^4}{\bar{g}} \iint p_s \cos^3 \phi d\lambda d\phi \quad (2.63)$$

$$h_3 = \frac{\bar{r}^3}{\bar{g}} \iint u \cos^2 \phi d\lambda d\phi \quad (2.64)$$

Beschränkt man sich auf Frequenzen  $\sigma \ll \Omega$ , kann bei der Berechnung der Massenterme die Reaktion der Ozeane auf Luftdruckschwankungen miteinbezogen werden. Es wird von einem statischen Modell ausgegangen, in dem jede Druckanomalie  $\delta p_s$  den Meeresspiegel nach der hydrostatischen Gleichung verformt:

$$\delta \zeta = - \frac{\delta p_s}{\rho g} \quad (2.65)$$

$\rho$  ist die Dichte des Ozeanwassers,  $g$  die Schwerebeschleunigung. Bei höherem Luftdruck wird nach (2.65) der Meeresspiegel  $\zeta$  um  $\delta\zeta$  tiefergedrückt, bei niedrigerem Luftdruck ist die Druckanomalie negativ und der Meeresspiegel steigt. Man bezeichnet dieses Verhalten üblicherweise als **invers barometrisch** (kurz: IB). Wichtig ist, dass unter Annahme des IB-Effektes alle horizontalen Druckgradienten in der Atmosphäre kompensiert werden, der ozeanische Bodendruck aber unverändert bleibt, siehe Schuh et al. (2003 [34]). Dazu eine kurze theoretische Überlegung: In einem Zustand, in dem der Luftdruck exakt dem durchschnittlichen Wert  $\bar{p}$  entspricht, ist  $\zeta$  die Höhe der Meeresoberfläche und der Wasserdruck in einer beliebigen Höhe  $h$ :

$$p_w(h) = - \int_{\zeta}^h \rho g dz + \bar{p} \quad (2.66)$$

Weicht der Luftdruck vom Mittelwert ab, ist der Meeresspiegel durch  $\zeta + \delta\zeta$  gegeben. Der Wasserdruck lautet in diesem Fall:

$$p_w(h) = - \int_{\zeta + \delta\zeta}^h \rho g dz + \delta p_s + \bar{p} \quad (2.67)$$

Setzt man für die Druckanomalie die Integralform von (2.65) ein, erhält man abermals (2.66). Das lässt den Schluss zu, dass unmittelbar unter der Meeresoberfläche trotz Anwesenheit der Anomalie  $\delta p_s$  die Druckverhältnisse dem ungestörten Zustand entsprechen. Damit ist klar, dass die IB-Korrektur in den Massentermen aus einer Mittelung des Oberflächendrucks  $p_o$  über der Ozeanfläche  $O$  besteht:

$$\bar{p}_o = \frac{1}{O} \iint p_o dO \quad (2.68)$$

Das führt nach Barnes et al. (1983 [2]) zur Reduktion der Amplitude des Massenterms in den Drehimpulsfunktionen.

Es bleibt zu erwähnen, dass eine Anwendung der IB-Korrektur bei der Untersuchung täglicher und subtäglicher atmosphärischer Signale die Übereinstimmung mit geodätischen Daten verschlechtert, z.B. Brzezinski et al. (2002 [12]). Solange kein Modell für die Reaktion der Ozeane auf hochfrequente Druckvariationen in der Atmosphäre existiert, muss daher im täglichen Bereich die Dynamik der Weltmeere gänzlich vernachlässigt werden.

## 2.4 Drehimpulsfunktionen und Erdrotationsparameter

Eine Aufgabenstellung dieser Arbeit ist es, die aus Atmosphärenparametern berechneten Drehimpulsfunktionen  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  mit den 3 Erdrotationsparametern  $x, y$  und LOD zu vergleichen. Die in Abschnitt 2.3 vorgestellten Gleichungen, wie z.B. (2.41) und (2.42), müssen zu diesem Zweck noch modifiziert werden. Die dafür notwendigen Berechnungen sind Gegenstand der nun folgenden Ausführungen.

### 2.4.1 Polbewegung - Low Frequency Case

Die von Erdrotationsdiensten zur Verfügung gestellten Polbewegungsparameter  $x$  und  $y$  geben im Allgemeinen die Position des CIP im TRS an. Die aus (2.41) berechneten Größen  $m_1$  und  $m_2$  beschreiben jedoch die Bewegung des Rotationspols in einem Tisserand-System. Das TRS kann aber in guter Näherung als Tisserand-System betrachtet werden, siehe Altamimi et al. (2003 [1]). Um die geodätisch beobachtete Polbewegung mit der aus atmosphärischen Drehimpulsfunktionen berechneten Polbewegung zu vergleichen, bleibt somit die Aufgabe, eine Beziehung zwischen den beiden Parametersätzen  $(m_1, m_2)$  und  $(p_1, p_2)$  zu finden. Das ist beispielsweise durch Untersuchung der Eigenschaften von Transformationsmatrizen möglich. Der Verfasser hält sich dazu an Gross (1992 [20]). Dort wird grundsätzlich davon ausgegangen, dass das Nutationsmodell vollständig ist und damit in allen Betrachtungen subtrahiert bzw. außer Acht gelassen werden kann. Es bleibt daher keine Bewegung des CIP im Inertialsystem - eine Unterscheidung zwischen GCRS und einem raumfesten Zwischensystem mit dem CIP als Pol ist hinfällig.

Zunächst geht man von einem erdfesten Koordinatensystem, dem TRS, aus, welches gegenüber dem inertialen System, dem GCRS, mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_i$  rotiert. Ursprung von TRS und GCRS fallen zusammen, sodass einander entsprechende Ortsvektoren in beiden Systemen über eine zeitabhängige Drehmatrix verbunden sind:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}_i \quad (2.69)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_i \quad (2.70)$$

Größen im Inertialsystem sind mit dem Index „i“ versehen. Die Ableitung von (2.69) führt auf die Geschwindigkeit eines im GCRS ruhenden Punktes im erdfes-

ten System:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{x}_i = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T &\equiv \mathbf{C}\end{aligned}\quad (2.71)$$

Berücksichtigt man, dass  $\dot{\mathbf{x}}$  auch aus nachstehendem Kreuzprodukt berechnet werden kann,

$$\dot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

lassen sich folgende Beziehungen formulieren:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \mathbf{x} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \\ \Rightarrow \mathbf{C} &= (-\boldsymbol{\omega} \times) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.72)$$

Um die Komponenten  $\omega_i$  des Rotationsvektors in Abhängigkeit der Elemente von  $\mathbf{C}$  auszudrücken, muss nach (2.71) eine Darstellung für die Transformationsmatrix  $\mathbf{R}$  gefunden werden. Zu diesem Zweck ist es hilfreich, ein erdfestes Zwischensystem, das IRS<sup>2</sup>, einzuführen. Ursprung und z-Achse koinzidieren mit dem CGRS, beide Systeme besitzen damit den CIP als Pol. Das IRS soll gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um seine z-Achse rotieren, sodass zwischen einem Ortsvektor im GCGRS und im IRS (Index „u“) folgender einfacher Zusammenhang besteht:

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{U}\mathbf{x}_i \quad (2.73)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Für das TRS wird das erdfeste Zwischensystem als Initialzustand betrachtet. Unter der Wirkung innerer dynamischer Prozesse (wie z.B. geophysikalischer oder speziell atmosphärischer Anregung) weicht die Bewegung und Orientierung des TRS jedoch vom IRS ab. Die z-Achse verläuft nicht mehr durch den CIP und die Rotationsrate ist veränderlich. Sind die Störkräfte klein, wird auch die Abweichung des TRS vom Initialzustand klein sein. Der Übergang ins IRS kann

---

<sup>2</sup>Indermediate Reference System

daher nach Gross (1992 [20]) mithilfe einer infinitesimalen Transformationsmatrix formuliert werden:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}_u \quad (2.75)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & p_3 & p_1 \\ -p_3 & 1 & p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

Setzt man in (2.75) beispielsweise  $\mathbf{x}_u = (0, 0, 1)^T$  und damit den Ortsvektor zum CIP ein, erhält man im TRS den Vektor  $\mathbf{x} = (p_1, p_2, 1)^T$ . Die Größen  $p_1$  und  $p_2$  positionieren daher den CIP im erdfesten System und können mit den Polbewegungsparametern  $x$  und  $y$  gleichgesetzt werden:

$$p_1 = x, \quad p_2 = -y \quad (2.77)$$

$y$  wird in Richtung  $90^\circ$  westliche Länge positiv gezählt, die  $y$ -Achse des terrestrischen Systems weist hingegen in Richtung  $90^\circ$  östliche Länge, was durch das negative Vorzeichen in der 2. Komponente berücksichtigt wird. (s. auch Abbildung 2.2)  $p_3$  führt auf die Abweichung der Winkelgeschwindigkeit vom nominalen Wert. Diese wird genauer in Abschnitt 2.4.3 untersucht.

Substitution von (2.73) in (2.75) liefert:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{x}_i = \mathbf{R}\mathbf{x}_i$$

Führt man das Matrizenprodukt  $\mathbf{B}\mathbf{U}$  aus, ist die Transformationsmatrix  $\mathbf{R}$  und in weiterer Folge auch  $\mathbf{C}$  bekannt. Bei Vernachlässigung von Größen, die klein von 2. Ordnung sind, gilt:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dp_3}{dt} + \Omega & \frac{dp_1}{dt} - p_2\Omega \\ -\frac{dp_3}{dt} - \Omega & 0 & \frac{dp_2}{dt} + p_1\Omega \\ -\frac{dp_1}{dt} + p_2\Omega & -\frac{dp_2}{dt} - p_1\Omega & 0 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \Omega p_1 + \frac{dp_2}{dt} \quad (2.79)$$

$$\omega_2 = \Omega p_2 - \frac{dp_1}{dt} \quad (2.80)$$

Unter Verwendung von (2.77) und (2.15) werden die letzten beiden Ausdrücke zu:

$$m_1 = x - \frac{1}{\Omega} \dot{y} \quad (2.81)$$

$$m_2 = -y - \frac{1}{\Omega} \dot{x} \quad (2.82)$$

Wieder ist es vorteilhaft, alle Koordinaten in der komplexen Ebene anzuschreiben:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}} &= m_1 + im_2 \\ \hat{\mathbf{p}} &= x - iy \\ \hat{\mathbf{m}} &= \hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\mathbf{p}}} \end{aligned} \quad (2.83)$$

(2.83) stellt den gesuchten Zusammenhang zwischen den Polbewegungen von Rotationsachse und CIP dar. Um die Berechnung von  $\hat{\mathbf{m}}$  aus den Drehimpulsfunktionen zu umgehen, bedient man sich der Differentialgleichung aus Abschnitt 2.3.4.  $\hat{\chi}$  bezeichnet darin eine Drehimpulsfunktion, an der sämtliche Korrekturen für große Perioden angebracht sind:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}} + \frac{i}{\hat{\sigma}_{cw}} \dot{\hat{\mathbf{m}}} &= \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\mathbf{p}}} + \frac{i}{\hat{\sigma}_{cw}} \frac{d}{dt} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\mathbf{p}}} \right) &= \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}} \\ \hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\hat{\sigma}_{cw}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} - \frac{i}{\Omega} \frac{d}{dt} \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\hat{\sigma}_{cw}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} \right) &= \hat{\chi} - \frac{i}{\Omega} \dot{\hat{\chi}} \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Terme auf der linken und rechten Seite gibt folgende grundlegende Beziehung, die entweder in Differential- oder Integralform angeschrieben wird:

$$\hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\hat{\sigma}_{cw}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\chi} \quad (2.84)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = e^{-i\hat{\sigma}_{cw}t} \left( \hat{\mathbf{p}}(0) - i\hat{\sigma}_{cw} \int_0^t \hat{\chi}(\tau) e^{-i\hat{\sigma}_{cw}\tau} d\tau \right) \quad (2.85)$$

Je nachdem ob (2.84) oder (2.85) verwendet wird, hat man prinzipiell 2 Möglichkeiten um Drehimpulsfunktionen und geodätisch beobachtete Polbewegung gegenüberzustellen:

- **Differentiationsansatz** nach (2.84): Aus der beobachteten Polbewegung folgen mittels Differentiation die theoretischen (äquatorialen) Drehimpulsfunktionen.
- **Integrationsansatz** nach (2.85): Durch Integration der geophysikalischen Drehimpulsfunktionen kann der Anteil der Atmosphäre an der Polbewegung bestimmt werden.

### 2.4.2 Polbewegung - High Frequency Case

Die Herleitungen des vorigen Abschnitts unterstellen durch Verwendung der Drehimpulsfunktionen aus (2.45) ein Erdmodell, in dem ein flüssiger Kern gegenüber einem elastischen Mantel Relativdrehimpulse aufweist. Zur Untersuchung täglicher und subtäglicher atmosphärischer Signale in der Erdrotation müssen nach Brzezinski (1994 [10]) aber auch die komplizierten Kern-Mantel-Interaktionen entsprechend berücksichtigt werden. Das geschieht in der vorliegenden Arbeit auf Ebene der zu (2.84) analogen Gleichung, welche geodätische Polbewegung und atmosphärische Drehimpulsfunktionen miteinander verbindet.

Die angesprochenen Effekte des flüssigen Kerns manifestieren sich in der **Free Core Nutation** (kurz: FCN), die neben dem Chandler Wobble (kurz: CW) als wichtigste Eigenschwingung der Erde gilt. Nach Zürn (1997 [40]) koppelt die Abplattung der *Core-Mantle-Boundary* (CMB) Mantel und flüssigen Kern und verursacht Rückstellkräfte falls Kernrotationsachse und Symmetrieachse der CMB nicht zusammenfallen. Die Reaktion der Erde auf dieses innere Moment ist eine retrograde tägliche Schwingung der Rotationsachse im erdfesten System, welche als **Nearly Diurnal Free Wobble** (kurz: NDFW) bezeichnet wird. Die mit dem NDFW assoziierte freie Nutation der Rotationsachse im Inertialsystem ist schließlich die Free Core Nutation. Sie ist ebenfalls retrograd und die zälestische Periode wird nach Ducarme et al. (2009 [18]) auf  $T'_f \approx -430$  d geschätzt. Für weitere Ausführungen werden aber erdfeste (ungestrichene) Größen benötigt:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_f &= \frac{2\pi}{T_f} \left(1 - \frac{i}{2Q_f}\right) \\ \sigma_f &= \frac{2\pi}{T_f} = -\Omega \left(1 - \frac{1}{T'_f}\right) \\ Q_f &= Q'_f \left(1 - \frac{T'_f}{T_{sid}}\right)\end{aligned}\tag{2.86}$$

Die Berechnung der Dämpfung  $Q_f$  folgt Brzezinski et al. (2002 [12]) und verwendet für die äquivalente raumfeste Größe nach Ducarme et al. (2009 [18]) den Wert  $Q'_f = 15000$ .  $T_{sid} = 0.9973$  d steht für die Länge eines Sterntages ausgedrückt in Sonnentagen.

Der Verfasser hält sich ab nun an Brzezinski (1994 [10]), wo von folgender Glei-

chung im Frequenzbereich ausgegangen wird:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}(\sigma) = & \left[ \frac{A}{A_m}(\tau - \mu) \frac{\Omega}{\sigma - \sigma_1} + \frac{A_f}{A_m} \eta \frac{\Omega}{\sigma - \sigma_2} \right] \hat{\Phi}_L \\ & - \left[ \frac{A}{A_m} \frac{\Omega}{\sigma - \sigma_1} - \frac{A_f}{A_m} \frac{n_f}{\Omega} \frac{\Omega}{\sigma - \sigma_2} \right] \frac{\hat{\mathbf{h}}}{A\Omega} \end{aligned} \quad (2.87)$$

(2.87) beschreibt die vom komplexen Auflastpotential  $\hat{\Phi}_L$  und vom Relativdrehimpuls  $\hat{\mathbf{h}} = h_1 + ih_2$  verursachte Polbewegung. Dabei sind  $A$ ,  $A_f$  und  $A_m$  die äquatorialen Hauptträgheitsmomente für die ganze Erde, den flüssigen Kern bzw. den Mantel.  $\tau$ ,  $\mu$  und  $\eta$  sind dimensionslose Koeffizienten und  $\sigma_1$  sowie  $\sigma_2 = -\Omega + n_f$  stehen für die theoretischen Frequenzen von CW und NDFW. ( $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  gelten für ein Erdmodell ohne Ozeane. Es ist nicht notwendig Zahlenwerte für sie anzugeben, da am Ende dieses Abschnittes die entsprechenden beobachteten Werte eingesetzt werden.)

Moritz und Müller (1987 [28]) geben mithilfe der Formel von MacCullagh an, wie Auflastpotential und korrespondierende Trägheitsmomente ineinander umzurechnen sind:

$$\hat{\Phi}_L = -\frac{\Delta \hat{\mathbf{I}}}{A\tau} \quad (2.88)$$

Wenn in (2.87) nach den 2 Eigenmoden CW und NDFW sortiert wird, folgt mit (2.88):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}(\sigma) = & -\frac{1}{\Omega A_m} \left[ \left(1 - \frac{\mu}{\tau}\right) \Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{h}} \right] \frac{\Omega}{\sigma - \sigma_1} \\ & - \frac{A_f}{\Omega A A_m} \left[ \frac{\eta}{\tau} \Omega \Delta \hat{\mathbf{I}} - \frac{n_f}{\Omega} \hat{\mathbf{h}} \right] \frac{\Omega}{\sigma - \sigma_2} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Es ist nun zweckmäßig, die in (2.49) definierten Drehimpulsfunktionen umzuschreiben. Bedenkt man, dass für die Chandlerfrequenz einer elastischen Erde (Index „e“) bestehend aus Kruste und Mantel gilt:

$$\sigma_e = \left( 1 - \frac{\Omega^2 R^5 k_2}{3(C - A)G} \right) \frac{\Omega(C_m - A_m)}{A_m} \quad (2.90)$$

stellen sich Massen- und Bewegungsterme in (2.49) wie folgt dar:

$$\hat{\chi}^p = \chi_1^p + i\chi_2^p = \frac{\Omega \left( 1 + k_2' + \Delta \hat{\mathbf{k}}_{an}' \right) \Delta \hat{\mathbf{I}}}{\sigma_e A_m} \quad (2.91)$$

$$\hat{\chi}^w = \chi_1^w + i\chi_2^w = \frac{\hat{\mathbf{h}}}{\sigma_e A_m} \quad (2.92)$$

Für den Vorfaktor im Massenterm ist eine Vereinfachung möglich. Man vergleiche dazu die numerischen Werte von Gross (2007 [21]) und Brzezinski (1994 [10]):

$$k'_2 + \Delta \hat{\mathbf{k}}'_{an} \approx -\frac{\mu}{\tau} \quad (2.93)$$

(2.91) - (2.93) in (2.89) eingesetzt, ergibt für die geophysikalisch angeregte Polbewegung eine verallgemeinerte Gleichung, in der neben dem CW auch die 2. Eigenschwingung des NDFW bzw. der FCN enthalten ist. Sie besitzt für alle Frequenzen Gültigkeit:

$$\hat{\mathbf{p}}(\sigma) = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma} (\hat{\boldsymbol{\chi}}^p + \hat{\boldsymbol{\chi}}^w) + \frac{\sigma_e}{\sigma_2 - \sigma} (a_p \hat{\boldsymbol{\chi}}^p + a_w \hat{\boldsymbol{\chi}}^w) \quad (2.94)$$

$$a_p = \frac{A_f \eta}{A \tau - \mu} = 9.2 \cdot 10^{-2} \quad (2.95)$$

$$a_w = -\frac{A_f n_0}{A \Omega} = 5.5 \cdot 10^{-4} \quad (2.96)$$

Die numerischen Werte für die dimensionslosen Koeffizienten  $a_p$  und  $a_w$  sind Brzezinski et al. (2002 [12]) entnommen. Für eine detailliertere Diskussion sei auf Brzezinski (1994 [10]) verwiesen. Wichtig ist, dass im retrograd täglichen Frequenzband (Resonanzfall:  $\sigma \approx \sigma_f$ ) der FCN-Term eine entscheidende Rolle spielt. Druck- und Windterm müssen dann jedoch aufgrund der Diskrepanz von  $a_p$  und  $a_w$  um mehr als 2 Größenordnungen stets getrennt betrachtet werden. Dies ist für den CW-Term, dem im langperiodischen Bereich die größere Bedeutung zukommt, nicht der Fall.

Ersetzt man die theoretischen Frequenzen von CW und NDFW durch die entsprechenden beobachteten Werte wie in (2.40) und (2.86) angegeben, sind die Gleichungen nicht mehr theoretisch konsistent. Man erreicht aber eine bessere Übereinstimmung mit den realen Verhältnissen. Zusätzlich werden durch Verwendung der Dämpfungsfaktoren die Singularitäten in (2.94) beseitigt. Die Polbewegungsgleichung nimmt folgende Form an:

$$\hat{\mathbf{p}}(\sigma) = \hat{\mathbf{T}}_p(\sigma) \hat{\boldsymbol{\chi}}^p(\sigma) + \hat{\mathbf{T}}_w(\sigma) \hat{\boldsymbol{\chi}}^w(\sigma) \quad (2.97)$$

$\hat{\mathbf{T}}_p(\sigma)$  und  $\hat{\mathbf{T}}_w(\sigma)$  werden nach Brzezinski et al. (2002 [12]) als *Transferfunktionen* bezeichnet. Sie ermöglichen die Bestimmung der von Druck- und Windterm hervorgerufenen Polbewegung:

$$\hat{\mathbf{T}}_p(\sigma) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{cw} \left( \frac{1}{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{cw} - \sigma} + \frac{a_p}{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_f - \sigma} \right) \quad (2.98)$$

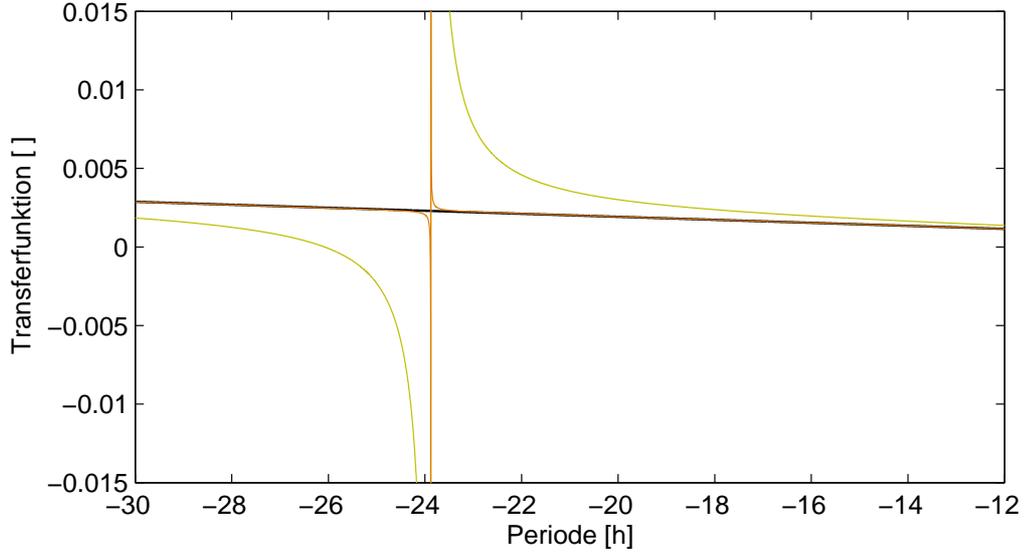


Abbildung 2.9: Transferfunktionen  $\hat{\mathbf{T}}_p$  (Grün),  $\hat{\mathbf{T}}_w$  (Orange) sowie Transferfunktion ohne FCN-Term (Schwarz), aufgetragen über der Periode  $T = \frac{2\pi}{\sigma}$ .

$$\hat{\mathbf{T}}_w(\sigma) = \hat{\sigma}_{cw} \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_{cw} - \sigma} + \frac{a_w}{\hat{\sigma}_f - \sigma} \right) \quad (2.99)$$

Abbildung 2.9 zeigt die druck- und windspezifischen Transferfunktionen im Vergleich mit einer Transferfunktion, bei welcher der FCN-Term vernachlässigt wird. Zum einen erkennt man, dass  $\hat{\mathbf{T}}_p$  aufgrund des großen numerischen Unterschieds zwischen  $a_p$  und  $a_w$  die weitaus größere Bedeutung bei der Umrechnung von Drehimpulsfunktionen in Polbewegung zukommt. Zum anderen wird klar, dass außerhalb des retrograd täglichen Frequenzbandes bei Nichtberücksichtigung des FCN-Terms nur geringe Fehler in der Transformation entstehen. Brzezinski (1994 [10]) gibt beispielsweise bei  $\sigma = -2$  bzw.  $2 \text{ cpd}^3$  für das Verhältnis FCN- zu CW-Transferfunktion die Werte 0.19 bzw. 0.05 an.

Zur praktischen Berechnung benützt man vorzugsweise die einfache Beziehung (2.97) im Frequenzbereich, um allfällige Differentiationen im Zeitbereich analog zu (2.84) zu vermeiden. (Moritz und Müller (1987 [28]) argumentieren beispielsweise, dass durch Ableitung einer empirischen Funktion ihre Ungenauigkeiten vergrößert werden.) Dennoch sei hier der Vollständigkeit halber die Formulierung im Zeitbe-

---

<sup>3</sup>cycles per day

reich angegeben:

$$\begin{aligned} (\partial_t - i\hat{\sigma}_{cw})(\partial_t - i\hat{\sigma}_f)\hat{\mathbf{p}} = \\ - i\hat{\sigma}_{cw} [(\partial_t - i\hat{\sigma}_f)(\hat{\chi}^p + \hat{\chi}^w) + (\partial_t - i\hat{\sigma}_{cw})(a_p\hat{\chi}^p + a_w\hat{\chi}^w)] \end{aligned} \quad (2.100)$$

Abschließend ist anzumerken, dass (2.94) bei Vernachlässigung des FCN-Terms mit dem Ergebnis (2.84) des vorigen Abschnitts übereinstimmt. Werden wieder die beobachteten Frequenzen substituiert, lautet (2.94):

$$\hat{\mathbf{p}}(\sigma) = \frac{\hat{\sigma}_{cw}}{\hat{\sigma}_{cw} - \sigma} \hat{\chi} \quad (2.101)$$

Das ist nichts anderes als die zu (2.84) äquivalente Formulierung im Frequenzbereich.

### 2.4.3 LOD

Der Zusammenhang zwischen der axialen Drehimpulsfunktion  $\chi_3$  und der Tageslängenschwankung wird nach Schuh und Mendes (2008 [35]) hergeleitet. Man schreibt zunächst die 3. Komponente von (2.15) nochmals an:

$$\omega_3 = \Omega(1 + m_3) \quad (2.102)$$

$\omega_3$  lässt sich auch aus der Tageslänge  $\Lambda$  berechnen. Diese kann wiederum aus der nominalen Tageslänge  $\Lambda_0$  und dem Exzess  $\partial\Lambda$  zusammengesetzt werden:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{2\pi}{\Lambda_0 + \partial\Lambda} \\ &= \frac{2\pi}{\Lambda_0 \left(1 + \frac{\partial\Lambda}{\Lambda_0}\right)} \\ &= \Omega \frac{1}{1 + \frac{\partial\Lambda}{\Lambda_0}} \\ \Rightarrow \omega_3 &\approx \Omega \left(1 - \frac{\partial\Lambda}{\Lambda_0}\right) \end{aligned} \quad (2.103)$$

Das Verhältnis der Abweichung von der nominalen Tageslänge zur nominalen Tageslänge selbst wird als LOD definiert. Diese Größe ist klein, deshalb ist die Näherung in (2.103) ausreichend. Vergleicht man (2.103) mit (2.102), wird die Beziehung zwischen LOD und  $\chi_3$  deutlich:

$$\chi_3 = -m_3 = \frac{\partial\Lambda}{\Lambda_0} + \text{const} = \text{LOD} + \text{const} \quad (2.104)$$

Der Anteil des atmosphärischen Drehimpulses in LOD ist damit direkt und ohne weiteren rechnerischen Aufwand abschätzbar.

## Kapitel 3

# Praktische Umsetzung

Ziel dieses Abschnittes ist es, die in Kapitel 2 hergeleiteten Modelle und Formeln auf reale meteorologische Daten anzuwenden. Insbesondere sollen dabei die Unterschiede in der Modellierung atmosphärischer Effekte in Abhängigkeit von der betrachteten Periode herausgestrichen werden. Die zu diesem Zweck definierten Beobachtungsräume und zeitlichen Auflösungen erlauben die Fallunterscheidung aus Abschnitt 1.2 zu konkretisieren:

- **Low Frequency Case:** Beobachtungszeitraum: **2008**. Zeitliche Auflösung der Drehimpulsfunktionen und Erdrotationsparameter: **1 d**. Die Zeitreihen von Polbewegung und Tageslängenschwankung sind dem **EOP 05 C04**-Datensatz des IERS entnommen. Die Drehimpulsfunktionen werden aus den meteorologischen Daten des ECMWF mit einer zeitlichen Auflösung von 6 h abgeleitet. Die Funktionswerte um 0:00, 6:00, 12:00 und 18:00 Uhr UTC müssen anschließend auf einen Wert pro Tag gemittelt werden.
- **High Frequency Case (6 h):** Beobachtungszeitraum: **2008**. Zeitliche Auflösung der Drehimpulsfunktionen und Erdrotationsparameter: **6 h**. Zur Berechnung der Drehimpulsfunktionen kann derselbe meteorologische Datensatz wie im langperiodischen Fall verwendet werden. Die Mittelung der Funktionswerte entfällt jedoch. Für Polbewegung und LOD werden die 4 Werte pro Tag aus einem stündlichen GPS-Datensatz<sup>1</sup> herausgegriffen.
- **High Frequency Case (1 h)** Beobachtungszeitraum: **8.8.-31.8.2008**, umfasst die Dauer des Beobachtungsprogrammes CONT08 (12.8.-26.8.2008).

---

<sup>1</sup>Autor: Peter Steigenberger

Zeitliche Auflösung der Drehimpulsfunktionen und Erdrotationsparameter: **1 h**. Neben den mit GPS geschätzten Werten stehen auch die Zeitreihen der VLBI<sup>2</sup> für  $(x, y)$  und LOD zur Verfügung. Die stündlichen Drehimpulsfunktionen werden wieder aus den Atmosphärendaten des ECMWF berechnet.

Der praktische Teil dieser Arbeit lässt sich damit in 3 Aufgabenbereiche gliedern, wobei Aufgabenbereich 2 nur im Fall der hochaufgelösten Daten zu berücksichtigen ist:

1. **Berechnung zeitdiskreter Drehimpulsfunktionen:** Massen- und Bewegungsterme sind aus den Integralen (2.53)-(2.64) zu ermitteln und über die entsprechenden Korrekturfaktoren in Drehimpulsfunktionen  $\hat{\chi}(t)$  und  $\chi_3(t)$  umzurechnen. Die meteorologischen Daten (Druck, Windgeschwindigkeiten) stammen vom ECMWF.
2. **Verkettung der Drehimpulsfunktionen aus Vorhersagedaten:** Die für die Bestimmung von stündlichen Drehimpulsfunktionen notwendigen meteorologischen Größen sind überwiegend Vorhersageergebnisse und werden jeweils über 12 h-Intervalle geschätzt. Das führt dazu, dass in den nach Punkt 1 berechneten Reihen von  $\hat{\chi}(t)$  und  $\chi_3(t)$  an den Intervallenden der 12 h-Zeiträume markante Sprünge auftreten. Für weitere Modellierungsschritte ist es notwendig, diese Sprünge auf bestmöglichem Weg zu eliminieren.
3. **Abschätzung der atmosphärischen Beiträge in Polbewegung und LOD:** Mithilfe der in Punkt 1 (Low Frequency Case, High Frequency Case (6 h)) bzw. Punkt 1 und 2 (High Frequency Case (1 h)) bestimmten Drehimpulsfunktionen wird die atmosphärisch angeregte Erdrotation ermittelt und der geodätisch beobachteten Erdrotation unter Anwendung folgender Methoden gegenübergestellt:
  - (a) Low Frequency Case: Erdrotationsparameter aus C04. Vergleich der Polbewegung mit atmosphärischer Anregung im Zeitbereich über Differentiations- und Integrationsansatz.
  - (b) High Frequency Case (6 h bzw. 1 h): Erdrotationsparameter aus GPS bzw. VLBI und GPS. Vergleich der Polbewegung mit atmosphärischer Anregung im Frequenzbereich über Transferfunktionsansatz.

---

<sup>2</sup>Autor: Dan MacMillan

LOD und axiale Drehimpulsfunktion können durchwegs ohne Umrechnungsschritte miteinander verglichen werden. Dies geschieht für (a) im Zeitbereich und für (b) im Frequenzbereich.

### Frequenzspektrum

Zur Darstellung von Signalen im Frequenzbereich kommt in den Aufgabenbereichen 2 und 3 die Fouriertransformation zur Anwendung. Es seien daher an dieser Stelle die Formeln zur Bestimmung des Spektrums angeführt. Die komplexe Fouriertransformierte  $\hat{\mathbf{F}}(\sigma)$  einer kontinuierlichen Funktion der Zeit  $f(t)$  lautet:

$$\hat{\mathbf{F}}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\sigma t} dt \quad (3.1)$$

Für zeitdiskrete Funktionen wie in dieser Arbeit muss das Integral in (3.1) diskretisiert werden. Bezeichnet  $\delta t$  die Äquidistanz der  $n$  Funktionswerte in  $f(t)$  und legt  $\delta\sigma = 1/\delta t$  den entsprechenden Abstand der Stützstellen im Spektralbereich fest, kann die diskrete Fouriertransformierte angeschrieben werden:

$$\hat{\mathbf{F}}(p\delta\sigma) = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(j\delta t)e^{-2\pi ijp/n} \delta t \quad (3.2)$$

$$j, p = 0, 1, \dots, n - 1$$

Der Vorfaktor  $2/n$  dient zur Skalierung bei der Bestimmung des Amplitudenspektrums.

## 3.1 Berechnung zeitdiskreter Drehimpulsfunktionen

Die Vorgehensweise bei der Ermittlung der Drehimpulsfunktionen ist unabhängig von der zeitlichen Auflösung, sodass die Ausführungen in diesem Abschnitt gleichermaßen für die 1- und 6-stündigen Reihen gelten. Die grundsätzliche Übereinstimmung der in Abschnitt 2.3.6 vorgestellten Berechnungsvarianten wurde bereits von Müller (2008 [26]) anhand von Beispieldaten gezeigt. Aus diesem Grund beschränkt sich der Verfasser bei der Bestimmung von Massen- und Bewegungstermen auf folgende 2 Ansätze:

- **Integration über Radiuslänge**, siehe (2.53)-(2.56)

- **Integration über Druck: Radius und Schwere konstant**, siehe (2.61)-(2.64). Die Auswertung der Massenterme erfolgt sowohl mit als auch ohne IB-Korrektur.

Es werden zunächst die Komponenten des atmosphärischen Drehimpulses bestimmt. Durch Anbringung der in den Abschnitten 2.3.4 und 2.3.5 angegebenen Korrekturen erhält man anschließend die Drehimpulsfunktionen.

### 3.1.1 Eingabedaten und Rechengang

Um die Integrale für Trägheitstensor und Relativdrehimpuls als Summen zu diskretisieren, müssen verschiedene meteorologische Daten auf einem globalen Gitter definiert sein. Zur Auswertung des radialen Integrals ist es notwendig, dieses Oberflächengitter vertikal über bestimmte Druckniveaus der Atmosphäre fortzusetzen. Dadurch entsteht ein 3D-Gitter, dessen Auflösung im Zuge der Datenabfrage beim ECMWF festgelegt wird. Siehe dazu Tabelle 3.1.

<b>Komponente</b>	Breitenkreise [°]	Meridiane [°]	Druckniveaus [hPa]		
<b>Anzahl</b>	$n_\theta = 91$	$n_\lambda = 144$	21		
<b>Werte</b>	90	0	1	30	300
	88	2.5	2	50	400
	86	5	3	70	500
	...	...	5	100	700
	-86	352.5	7	150	850
	-88	355	10	200	925
	-90	357.5	20	250	1000

Tabelle 3.1: Spezifikation der Komponenten des Datengitters

Für jeden Gitterpunkt stehen die Werte folgender 5 Parameter zur Verfügung:

- Geopotential  $\Phi \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$
- Spezifische Feuchte  $s$  [ ]
- Temperatur  $T$  [K]
- Windgeschwindigkeit  $u \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ , breitenkreisparallel
- Windgeschwindigkeit  $v \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ , meridional

Zusätzlich benötigte Daten sind Luftdruck und Geopotential an der Erdoberfläche:

- Geopotential  $\Phi_s \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$
- Oberflächendruck  $p_s$  [hPa]

Die Matrix des Oberflächendrucks stellt im Gegensatz zu den in Tabelle 3.1 angeführten Levels keine Fläche gleichen Drucks dar. Jene Druckniveaus, die  $p_s$  umschließen, können daher von Gridpoint zu Gridpoint unterschiedlich sein. Die Niveaunzahl inklusive Oberflächendruck ist damit breiten- und längenabhängig und wird mit  $n_p$  bezeichnet.

Die durch Division von  $\Phi_s$  durch den mittleren Schwerewert  $\bar{g} \approx 9.80665 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$  errechnete Geländehöhe wird als Höhe über dem mittleren Erdellipsoid aufgefasst:

$$r_{Ob} = R_{ell} + h_{Ob} = R_{ell} + \frac{\Phi_s}{\bar{g}}$$

$R_{ell}$  ist der Ellipsoidradius in der jeweiligen Breite, berechnet aus der großen Halbachse  $a_{80}$  und der Abplattung  $f_{80}$  des GRS80-Ellipsoides. In analoger Weise kann bei der radialen Integration für jedes Intervall zwischen den Niveaus  $i$  und  $i+1$  eine mittlere Höhe bzw. ein mittlerer ellipsoidischer Radius definiert werden:

$$\bar{h}_i = \frac{\Phi_i + \Phi_{i+1}}{2\bar{g}} \quad (3.3)$$

$$\bar{r}_i = R_{ell} + \bar{h}_i \quad (3.4)$$

In der Regel muss aber die Höhenabhängigkeit der Schwerebeschleunigung berücksichtigt werden. Für die Höhe  $h$  liefert dazu die Normalschwereformel von Kraus (2004 [22]):

$$g(\phi, h) = 9.80665 \left( 1 - 2.6373 \cdot 10^{-3} \cos(2\phi) + 5.9 \cdot 10^{-6} \cos^2(2\phi) \right) \cdot \left( 1 - 3.14 \cdot 10^{-7} h \right) \quad (3.5)$$

### Numerische Integration

Zur Auswertung der Formeln (2.53)-(2.56) bzw. (2.61)-(2.64) zerlegt man die Mehrfachintegrale für Massen- und Bewegungsterme zweckmäßig in einfache Integrale, für die mittels Trapezformel jeweils ein numerischer Wert bestimmt werden kann:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (3.6)$$

Zunächst ist das radiale Integral über Druck- oder Radiusinkremente auszuwerten. Die allgemeine Trapezformel (3.6) wird dabei aber dahingehend vereinfacht, dass für jeden Integrationsschritt zwischen 2 Druck- oder Höhenniveaus der mittlere Intervallradius  $\bar{r}_i$  als konstant angenommen wird. Damit lassen sich die auftretenden Potenzen  $\bar{r}_i^n$  mit  $n = 3, 4$  vor das Integral ziehen. Bei Integration über  $dp$  lautet die Trapezformel für das Teilintervall  $(i, i + 1)$  daher:

$$\int_{p_i}^{p_{i+1}} r(p)^3 f(p) dp = \bar{r}_i^3 \frac{p_{i+1} - p_i}{2} (f(p_i) + f(p_{i+1})) \quad (3.7)$$

Für die Integration entlang der Meridiane und Parallelkreise kann (3.6) ohne Vereinfachung angewendet werden. Schreibt man das Integral über die Breite  $\phi$  in Abhängigkeit der Poldistanz  $\theta$  an, gilt:

$$\int_0^\pi f(\theta) d\theta \approx d\theta \sum_{i=2}^{n_\theta-1} f(\theta_i) \quad (3.8)$$

$$d\theta = \frac{b-a}{n_\theta} = \frac{\pi}{n_\theta}$$

Obere und untere Grenze der Summation folgen unmittelbar aus der Tatsache, dass alle Integranden (2.53)-(2.64) für  $a = 0$  und  $b = \pi$  identisch 0 sind. Im Integral über  $\lambda$  kann hingegen aufgrund der Periodizität der Winkelfunktionen  $g(0) = g(2\pi)$  gesetzt werden, sodass symmetrisch zu (3.8) folgt:

$$\int_0^{2\pi} f(\lambda) d\lambda \approx d\lambda \sum_{i=1}^{n_\lambda-1} f(\lambda_i) \quad (3.9)$$

$$d\lambda = \frac{b-a}{n_\lambda} = \frac{2\pi}{n_\lambda}$$

### Analytische Integration

Wird in den Massentermen bei der Integration über die Radiuslänge analog zu (3.7) ein konstanter mittlerer Teilintervallradius angesetzt, hängt das radiale Integral über das betrachtete Teilintervall (1,2)

$$\bar{r}_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \rho(r) dr \quad (3.10)$$

nur noch von der Dichte ab und kann unter bestimmten Annahmen analytisch gelöst werden. Aus der Gasgleichung und der Grundgleichung des hydrostatischen

Gleichgewichts

$$\rho = \frac{pM}{RT} \quad (3.11)$$

$$dp = -\rho g dr \quad (3.12)$$

bildet man zunächst den Quotienten

$$-\frac{dp}{p} = g \frac{M}{RT} dr.$$

$M$  bezeichnet das Molekulargewicht der feuchten Luft,  $R$  ist die universelle Gas-konstante. Integration im Teilintervall (auf der linken Seite von  $p_1$  nach  $p_2$ , auf der rechten Seite von  $r_1$  nach  $r_2$ ) ergibt mit  $\Delta r = r_2 - r_1$ :

$$\ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) = g \frac{M}{RT} \Delta r \quad (3.13)$$

Werden  $M$  und  $T$  im Teilintervall als konstant betrachtet, sind nach (3.11) die Verhältnisse von Druck- und Dichtewerten an den Intervallgrenzen gleich und (3.13) lässt sich umschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} &= e^{g \frac{M}{RT} \Delta r} \\ \Rightarrow \rho(\Delta r) &= \rho_1 e^{-g \frac{M}{RT} \Delta r} \end{aligned} \quad (3.14)$$

In (3.14) wurde  $\rho_2$  durch eine beliebige Dichte  $\rho(\Delta r)$  ersetzt. Damit ist ein analytischer Ausdruck für die Dichte gefunden und das Integral in (3.10) lösbar:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \rho(r) dr &= \int_0^{r_2-r_1} \rho(\Delta r) d\Delta r \\ &= -\rho_1 \frac{RT}{gM} \left( e^{-g \frac{M}{RT} \Delta r} - 1 \right) = -\frac{\rho_1}{a} \left( e^{-a\Delta r} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Der Koeffizient  $a$  errechnet sich nach Böhm (2008 [3]) aus dem Molekulargewicht für trockene Luft  $M_{tr}$ , der virtuellen Temperatur  $T_v$  und der mittleren Schwere  $\bar{g}$ :

$$\begin{aligned} M_{tr} &= 28.965 \text{ [kg/kmol]} \\ T_v &= \frac{T}{1 - \frac{0.378s}{0.622}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$a = \bar{g} \frac{M}{RT} = \bar{g} \frac{M_{tr}}{RT_v} \quad (3.17)$$

Es bleibt noch zu erwähnen wie Intervalllänge  $\Delta r$  und ganz allgemein die Dichte  $\rho$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Delta r = \Delta h &= \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{g(\phi, \bar{h})} \\ \rho &= p \frac{M_{tr}}{RT_v} \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.18) ist nicht nur auf die Lösung des analytischen Integrals beschränkt, sondern wird auch zur Dichtebestimmung in den Bewegungstermen herangezogen.

Es können nun die für die Integration verwendeten Summen angegeben werden. Dies erfolgt exemplarisch - für die Massenterme anhand der Komponente  $\Delta I_{13}$ , für die Bewegungsterme anhand von  $h_1$ . Die restlichen Komponenten unterscheiden sich von den Beispielen meist durch andere Winkelfunktionen im Integranden. Man vergleiche dazu am besten mit (2.53)-(2.56) bzw. (2.61)-(2.64). Alle Größen in den Summanden sind, wenn auch nicht explizit angeführt, Funktionen von  $\theta$  und  $\lambda$ . Die Laufindizes des Oberflächenintegrals folgen (3.8) bzw. (3.9). Im radialen Integral ist die obere Grenze stets durch die Topografie gegeben. Es wird die auf die Poldistanz  $\theta$  umgeschriebene Schwereformel (3.5) verwendet.

#### Massenterme, Integration über Oberflächendruck:

$$\Delta I_{13} \approx - \sum_{\lambda} \sum_{\theta} \frac{r_{Ob}^4}{g(\theta, h_{Ob})} p_s(\theta, \lambda) \cos \theta \sin^2 \theta \cos \lambda d\theta d\lambda \quad (3.19)$$

Während in (2.61) und (2.63) Radius und Schwere als Konstante vor dem Integral stehen, sind in (3.19) diese Größen jedoch wieder variabel. Die hier verwendeten Oberflächenwerte weichen aber nur geringfügig von  $\bar{r}$  und  $\bar{g}$  ab, sodass dadurch kein entscheidender Fehler entsteht.

Führt man den Oberflächendruck für alle Gitterpunkte unmodifiziert in (3.19) ein, entspricht das der Vernachlässigung des IB-Effektes. Durch Berechnung des mittleren Luftdrucks  $\bar{p}_O$  über den Ozeanen und Anwendung desselbigen auf die gesamte Ozeanfläche erhält man die Massenterme mit IB-Korrektur:

$$\bar{p}_O = \frac{\sum_{\lambda} \sum_{\theta} p_s(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda}{\sum_{\lambda} \sum_{\theta} \sin \theta d\theta d\lambda}$$

**Massenterme, Integration über Radiuslänge:**

$$\Delta I_{13} \approx - \sum_{\lambda} \sum_{\theta} \left( \int \rho r^4 dr \right) \cos \theta \sin^2 \theta \cos \lambda d\theta d\lambda \quad (3.20)$$

Das radiale Integral lautet mit der intervallweisen analytischen Lösung:

$$\int \rho r^4 dr = \sum_i^{n_p-1} \bar{r}_i^4 \left( -\frac{\rho_i}{a_i} (e^{-a_i \Delta r_i} - 1) \right)$$

**Bewegungsterme, Integration über Druck:**

$$\begin{aligned} h_1 \approx - \sum_{\lambda} \sum_{\theta} \sum_{i=1}^{n_p-1} \frac{\bar{r}_i^3}{g(\theta, \bar{h}_i)} \frac{p_{i+1} - p_i}{2} [(u_i \cos \theta \cos \lambda - v_i \sin \lambda) + \\ + (u_{i+1} \cos \theta \cos \lambda - v_{i+1} \sin \lambda)] \sin \theta d\theta d\lambda \quad (3.21) \end{aligned}$$

**Bewegungsterme, Integration über Radiuslänge:**

$$\begin{aligned} h_1 \approx - \sum_{\lambda} \sum_{\theta} \sum_{i=1}^{n_p-1} \bar{r}_i^3 \frac{\Delta h}{2} [(u_i \cos \theta \cos \lambda - v_i \sin \lambda) \rho_i + \\ + (u_{i+1} \cos \theta \cos \lambda - v_{i+1} \sin \lambda) \rho_{i+1}] \sin \theta d\theta d\lambda \quad (3.22) \end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, dass in (3.21) und (3.22) nach (3.7) vereinfacht wurde.

### 3.1.2 Berechnungsergebnisse - Low Frequency Case

Während für die stündlichen Drehimpulsfunktionen ein zusätzlicher Berechnungsschritt notwendig ist und weiterverarbeitbare Ergebnisse daher erst in Abschnitt 3.2 anfallen, können die aus den 6 h-Daten hervorgehenden Drehimpulsfunktionen bereits an dieser Stelle veranschaulicht werden. Im Folgenden wird aber ausschließlich auf die täglichen Reihen eingegangen. Für die 6-stündigen Drehimpulsfunktionen sei auf Abschnitt 3.1.3 verwiesen.

Grundsätzlich stellt der Verfasser die 2 Integrationsmethoden über Druck und Radius auf Basis der ECMWF-Daten gegenüber und vergleicht außerdem mit

den Drehimpulsfunktionen der NCEP-Reanalysis. Die NCEP-Zeitreihen werden als fertige Drehimpulsfunktionen vom *Special Bureau for Atmosphere* des IERS veröffentlicht, und sind nach Eubanks (1993 [19]) berechnet. Zur Unterscheidung und eindeutigen Bezeichnung der verschiedenen Berechnungsvarianten dient folgende Zusammenfassung:

Variante <b>L10</b>	
Atmosphärendaten	ECMWF
Massenterme	Integration über $p_s$ nach (3.19)
Bewegungsterme	Integration über $dp$ nach (3.21)

Variante <b>L20</b>	
Atmosphärendaten	ECMWF
Massenterme	Integration über $dr$ nach (3.20)
Bewegungsterme	Integration über $dr$ nach (3.22)

Variante <b>L30</b>	
Atmosphärendaten	NCEP
Massenterme	Integration über $p_s$ nach Eubanks (1993 [19])
Bewegungsterme	Integration über $dp$ nach Eubanks (1993 [19])

Tabelle 3.2: Berechnungsvarianten Low Frequency Case, (**L** für „Low“)

L10 und L30 verwenden bei der Berechnung der Massenterme einen mittleren Luftdruck über den Ozeanen (Inverser Barometereffekt). L20 schätzt den atmosphärischen Drehimpuls ohne das dynamische Verhalten der Ozeane miteinzubeziehen. Gemeinsam ist allen Reihen, dass die 4 Werte pro Tag durch Bildung des einfachen arithmetischen Mittels auf einen täglichen Wert zusammengefasst werden. Für L10 und L20 besteht die anschließende Umrechnung auf (effektive) Drehimpulsfunktionen durch Anwendung der in (2.45) bzw. (2.46) angeführten Korrekturen. Die Vorfaktoren für L30 folgen Eubanks (1993 [19]). Sie weichen geringfügig von den in dieser Arbeit verwendeten Werten ab, was darauf zurückzuführen ist, dass Eubanks (1993 [19]) anelastische Effekte und Relativedrehimpulse des Kerns vernachlässigt.

Die Abbildungen 3.1 - 3.6 geben die Druckterme  $\chi_i^p$  und die Windterme  $\chi_i^w$  für  $i = 1, 2, 3$  wieder. Die dimensionslosen Drehimpulsfunktionen sind in [mas] bzw.

$[\frac{\text{ms}}{\text{d}}]$  umgerechnet. Analog zu LOD entfällt fortan für alle axialen Komponenten die Bezeichnung der Rate in der Einheit („pro Tag“).  $\chi_3^p$  bzw.  $\chi_3^w$  werden somit in [ms] angegeben. In jeder der Abbildungen 3.1 - 3.6 sind die Drehimpulsfunktionen aus L10 und L20 derart verschoben, dass ihre Mittelwerte mit jenem der NCEP-Reihe L30 zusammenfallen. Für die Rechtfertigung dieser Verschiebung siehe Abschnitt 3.3.1.

- L10 (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB)
- L20 (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB)
- L30 (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB)

Tabelle 3.3: Legende zu den grafischen Darstellungen der täglichen Drehimpulsfunktionen (Abbildungen 3.1 - 3.6).

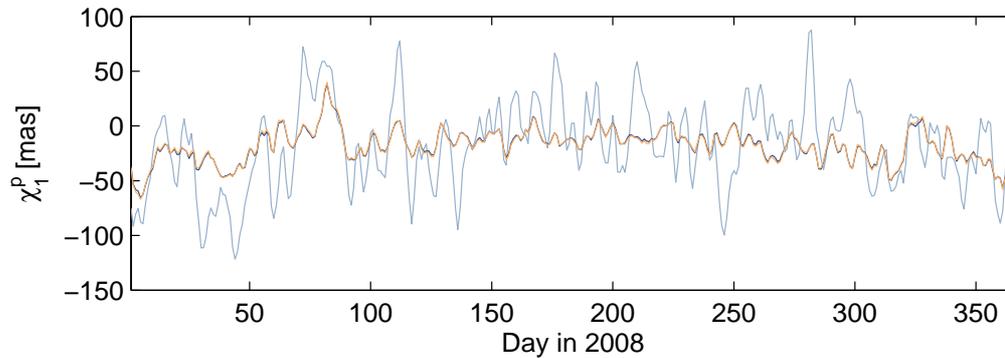


Abbildung 3.1: Massenterm  $\chi_1^p$ , Zeitl. Auflösung: 1 d, Legende: Tabelle 3.3

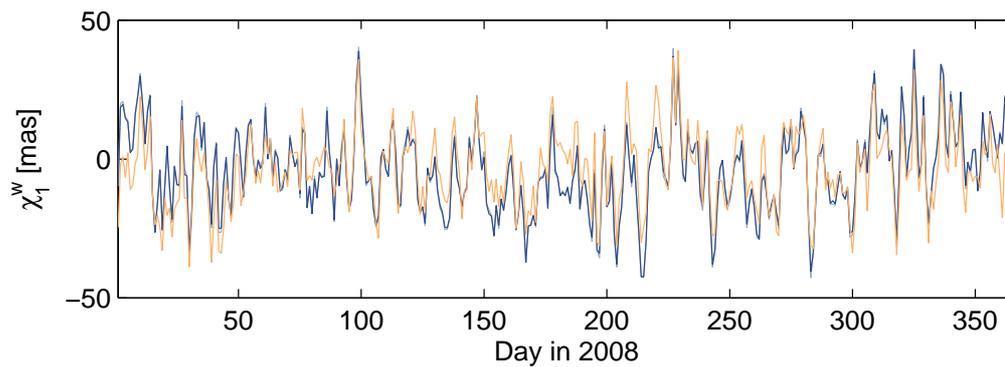


Abbildung 3.2: Bewegungsterm  $\chi_1^w$ , Zeitl. Auflösung: 1 d, Legende: Tabelle 3.3

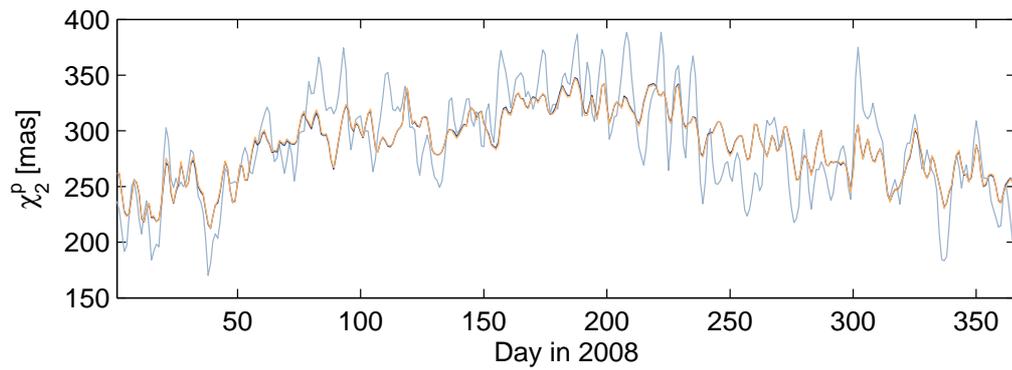


Abbildung 3.3: Massenterm  $\chi_2^p$ , Zeitl. Auflösung: 1 d, Legende: Tabelle 3.3

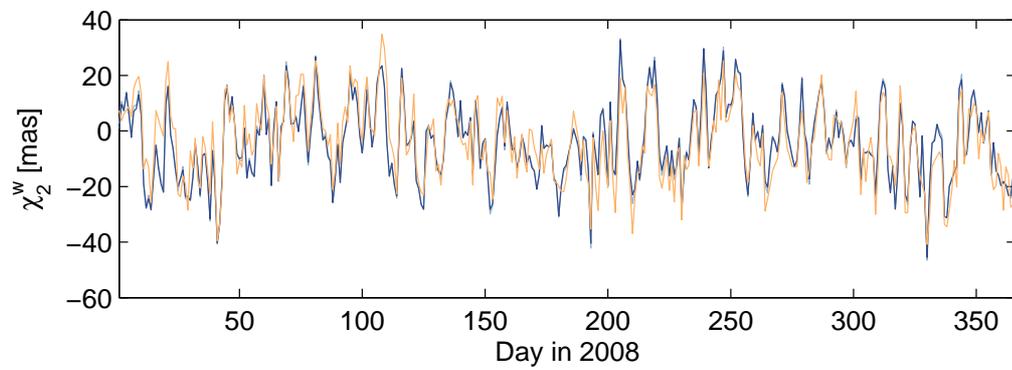


Abbildung 3.4: Bewegungsterm  $\chi_2^w$ , Zeitl. Auflösung: 1 d, Legende: Tabelle 3.3

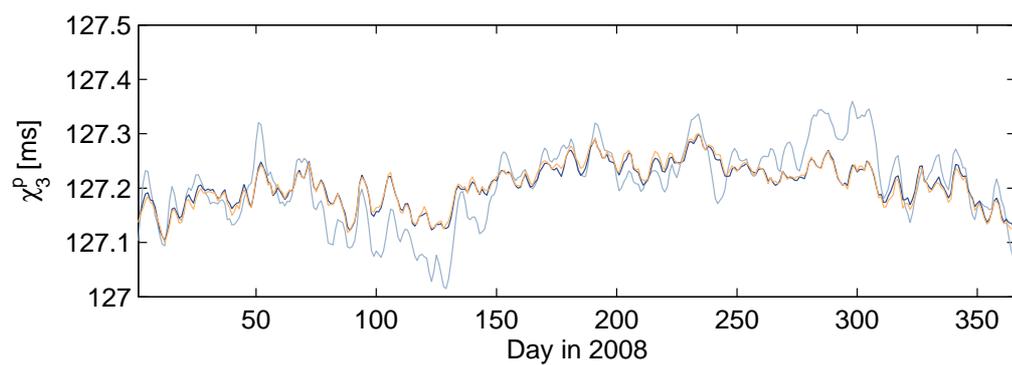
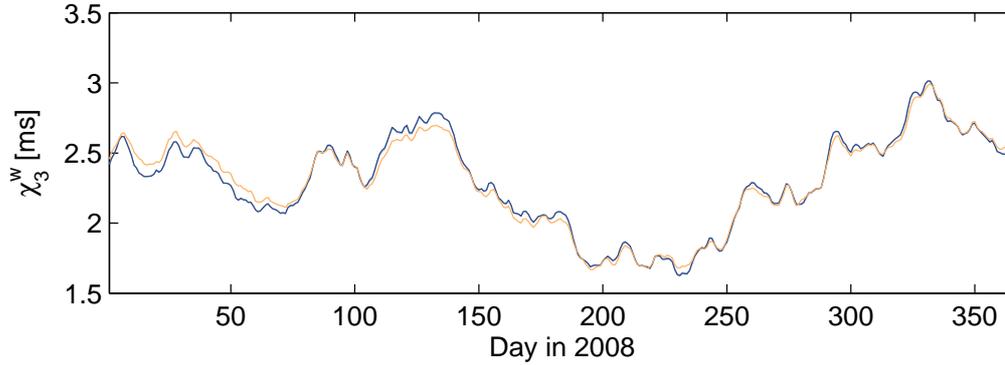


Abbildung 3.5: Massenterm  $\chi_3^p$ , Zeitl. Auflösung: 1 d, Legende: Tabelle 3.3


 Abbildung 3.6: Bewegungsterm  $\chi_3^w$ , Zeitl. Auflösung: 1 d, Legende: Tabelle 3.3

Ergänzend zu den grafischen Darstellungen der Drehimpulsfunktionen werden die Differenzen der Funktionen von je 2 Berechnungsvarianten gebildet. Mit (3.23) lassen sich daraus die Standardabweichungen  $\sigma$  der Differenzen errechnen.  $n$  steht für die Anzahl der Funktionswerte in L10, L20 und L30:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d\chi_k^{p,w}(i) - M(d\chi_k^{p,w}))^2} \quad (3.23)$$

$$d\chi_k^{p,w} = \chi_k^{p,w}(\text{1. Berechnungsvariante}) - \chi_k^{p,w}(\text{2. Berechnungsvariante}), \quad k = 1, 2, 3$$

	$\chi_1^p$	$\chi_1^w$	$\chi_2^p$	$\chi_2^w$	$\chi_3^p$	$\chi_3^w$
<b>L10 - L20</b>	33.0	0.9	26.8	0.9	44	4
<b>L10 - L30</b>	1.1	8.7	1.2	6.9	6	44
<b>L20 - L30</b>	33.1	8.7	26.8	6.8	46	44

Tabelle 3.4: Standardabweichungen der Differenzen verschiedener Berechnungsvarianten, angegeben in [mas] (äquatorial) und [ $\mu$ s] (axial). Berechnungsvarianten: **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB), **L20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), **L30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB).

Die Grafiken lassen erkennen, dass zwischen den aus ECMWF-Daten und NCEP-Daten berechneten Drehimpulsfunktionen eine gute Übereinstimmung besteht. Insbesondere sind die Massenterme von L10 und L30 praktisch ident, was auch durch die geringen Standardabweichungen in Tabelle 3.4 (2. Zeile) zum Ausdruck

kommt. Die etwas größeren Diskrepanzen in den Bewegungstermen können auf Unterschiede in der vertikalen Integration (z.B. Druckniveauezahl) zurückgeführt werden. Wie in Abschnitt 2.3.6 bereits erwähnt, führt die Vernachlässigung des inversen Barometereffekts in L20 zu größeren Amplituden in  $\chi_i^p$  (1. und 3. Zeile in Tabelle 3.4).

### 3.1.3 Berechnungsergebnisse - High Frequency Case (6 h)

Die eben veranschaulichten täglichen Drehimpulsfunktionen gehen grundsätzlich direkt aus den 6-stündigen Reihen hervor. Damit können die Berechnungsvarianten aus Tabelle 3.2 sowie deren Farbcodierung unter Änderung der Bezeichnung übernommen werden.

Variante <b>H10</b>	
Atmosphärendaten	ECMWF
Massenterme	Integration über $p_s$ nach (3.19)
Bewegungsterme	Integration über $dp$ nach (3.21)

Variante <b>H20</b>	
Atmosphärendaten	ECMWF
Massenterme	Integration über $dr$ nach (3.20)
Bewegungsterme	Integration über $dr$ nach (3.22)

Variante <b>H30</b>	
Atmosphärendaten	NCEP
Massenterme	Integration über $p_s$ nach Eubanks (1993 [19])
Bewegungsterme	Integration über $dp$ nach Eubanks (1993 [19])

Tabelle 3.5: Berechnungsvarianten High Frequency Case (6 h), (**H** für „High“)

Wie Tabelle 3.5 erkennen lässt, werden wieder ECMWF- bzw. NCEP-Reihen miteinander verglichen. Gegenüber der Berechnung der täglichen Drehimpulsfunktionen sind aber 2 Punkte anzumerken:

- In den 6-stündigen Reihen bleibt der IB-Effekt gänzlich unberücksichtigt. (In Abschnitt 2.3.6 wurde ja bereits auf die Problematik der IB-Korrektur im subtäglichen Bereich hingewiesen.)

- Zur Bestimmung der Drehimpulsfunktionen kommen nun die Korrekturfaktoren für den kurzperiodischen Bereich aus (2.51) und (2.52) zum Tragen.

— **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB)  
— **H20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB)  
— **H30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , Non-IB)

Tabelle 3.6: Legende zu den grafischen Darstellungen der 6-stündigen Drehimpulsfunktionen (Abbildungen 3.7 - 3.12).

Aus Gründen der Übersicht ist es zweckmäßig, die Berechnungsergebnisse nur über einige wenige Monate und nicht über das gesamte Jahr 2008 darzustellen. Sämtliche Funktionen in den Abbildungen 3.7-3.12 sind daher für den Zeitraum 20.1.-5.3.2008 wiedergegeben. Die Mittelwerte der Berechnungsvarianten H10 und H20 sind so gewählt, dass sie mit dem Mittelwert der jeweiligen NCEP-Reihe ident sind. Tabelle 3.7 fasst die Standardabweichungen der Differenzen von je 2 Berechnungsvarianten zusammen.

	$\chi_1^p$	$\chi_1^w$	$\chi_2^p$	$\chi_2^w$	$\chi_3^p$	$\chi_3^w$
<b>H10 - H20</b>	1.0	1.2	1.6	1.1	5	2
<b>H10 - H30</b>	1.9	14.0	2.3	13.6	7	19
<b>H20 - H30</b>	2.1	14.2	2.3	13.7	7	19

Tabelle 3.7: Standardabweichungen der Differenzen verschiedener Berechnungsvarianten, angegeben in [mas] (äquatorial) und [ $\mu$ s] (axial). Berechnungsvarianten: **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB), **H20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), **H30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , Non-IB).

Analog zu den Darstellungen der täglichen Drehimpulsfunktionen stimmen für die 6-stündigen Reihen die Massenterme der verschiedenen Berechnungsvarianten sehr gut überein. Einzig in der axialen Komponente  $\chi_3^p$  zeigt H30 durchwegs größere Amplituden als die entsprechenden ECMWF-Varianten H10 und H20. In den Bewegungstermen, insbesondere in  $\chi_1^w$  auf dem betrachteten Zeitintervall, bestehen ebenfalls Unterschiede. Es kann an dieser Stelle aber noch keine Aussage darüber gemacht werden, wie sich diese Diskrepanzen in den atmosphärisch angeregten Erdrotationsparametern niederschlagen.

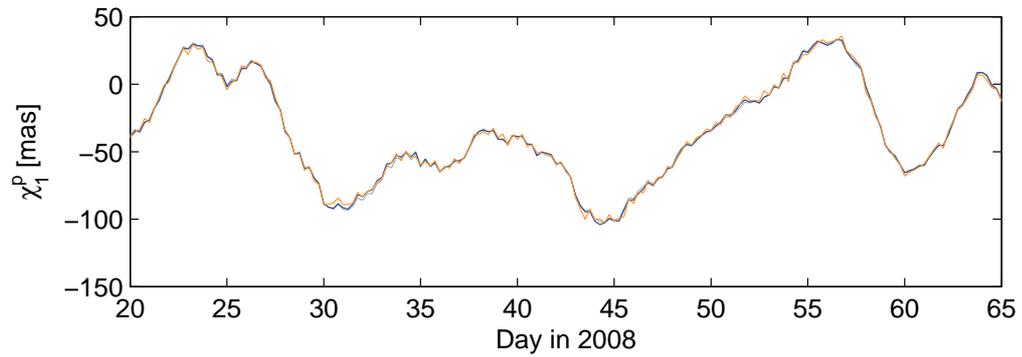


Abbildung 3.7: Massenterm  $\chi_1^p$ , Zeitl. Auflösung: 6 h, Legende: Tabelle 3.6

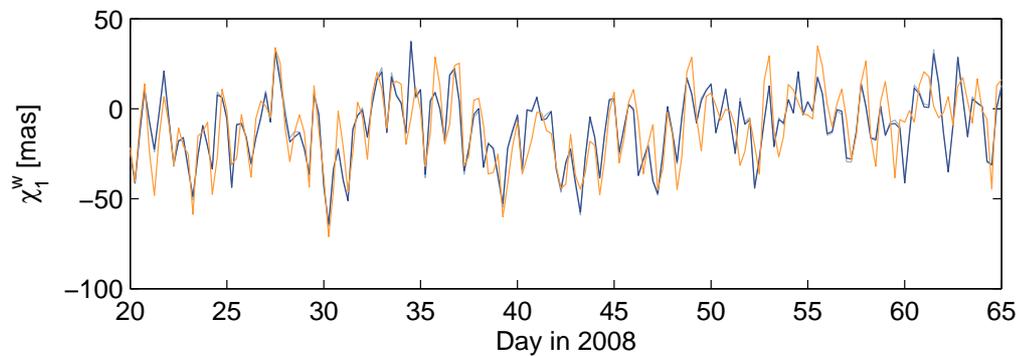


Abbildung 3.8: Bewegungsterm  $\chi_1^w$ , Zeitl. Auflösung: 6 h, Legende: Tabelle 3.6

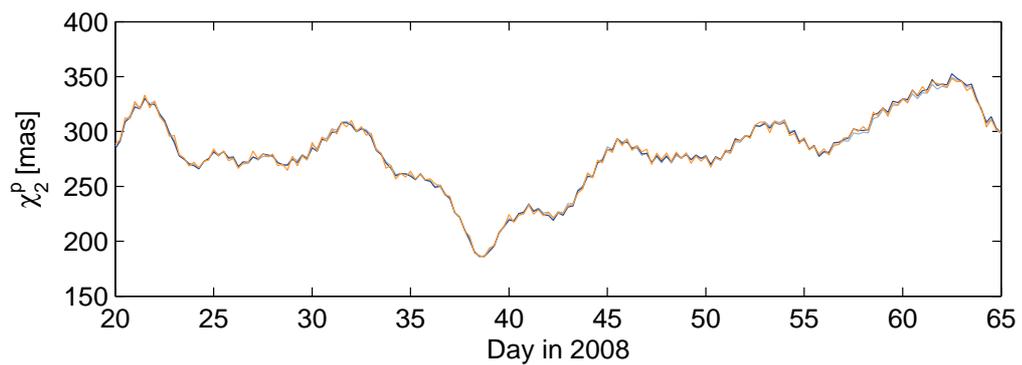


Abbildung 3.9: Massenterm  $\chi_2^p$ , Zeitl. Auflösung: 6 h, Legende: Tabelle 3.6

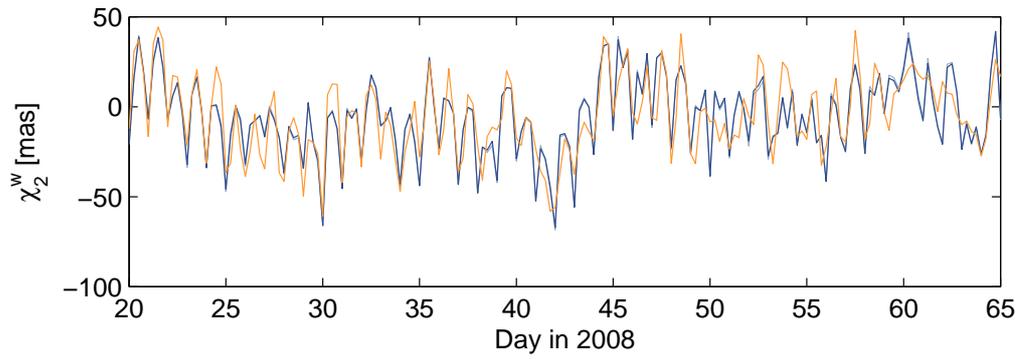


Abbildung 3.10: Bewegungsterm  $\chi_2^w$ , Zeitl. Auflösung: 6 h, Legende: Tabelle 3.6

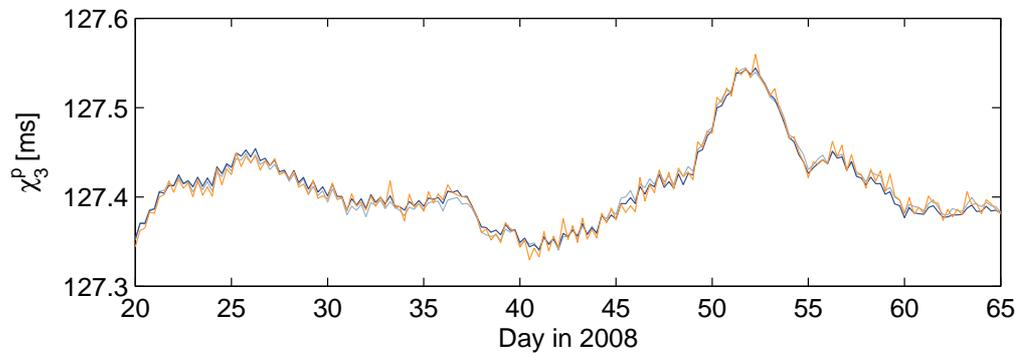


Abbildung 3.11: Massenterm  $\chi_3^p$ , Zeitl. Auflösung: 6 h, Legende: Tabelle 3.6

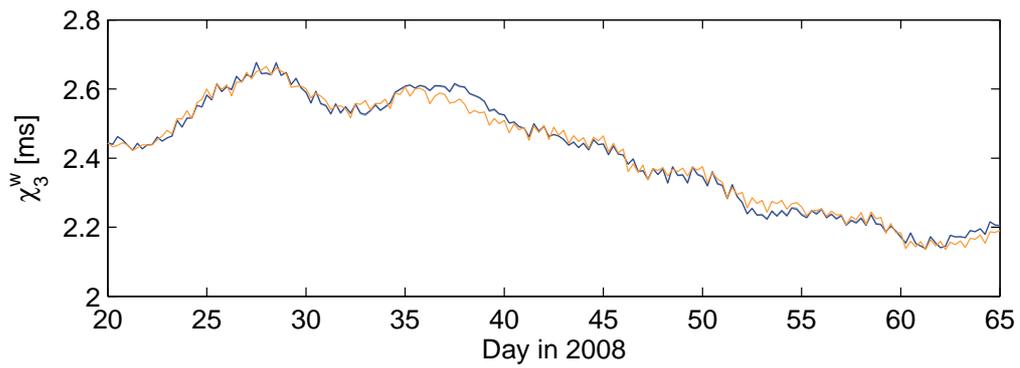


Abbildung 3.12: Bewegungsterm  $\chi_3^w$ , Zeitl. Auflösung: 6 h, Legende: Tabelle 3.6

## 3.2 Verkettung der Drehimpulsfunktionen aus Vorhersagedaten

### 3.2.1 Der 4DVar-Algorithmus

Die bisher behandelten Drehimpulsfunktionen mit einer Auflösung von 6 h sind aus meteorologischen Daten abgeleitet, die das Resultat einer Analyse (*Operational Analysis*) darstellen. Unter Analyse versteht man die bestmögliche Schätzung des Atmosphärenzustandes auf Basis von Beobachtungen. Vorhersagen über den zeitlichen Verlauf eines atmosphärischen Parameters (Druck, Temperatur, etc.) dienen nur zur Ermittlung von a priori-Werten. Zur Bestimmung von stündlichen meteorologischen Zeitreihen wird vom ECMWF jedoch der sogenannte 4DVar-Algorithmus (*Four-dimensional Variational Assimilation*) verwendet, welcher im Gegensatz zur herkömmlichen Analyse auf den Ergebnissen eines Vorhersagemodells aufbaut. Im Folgenden soll nach Bouttier und Courtier (2009 [7]) bzw. Persson und Grazzini (2007 [30]) eine kurze Einführung in die 4DVar-Analyse gegeben werden. Zur Illustration dient Abbildung 3.13.

Grundsätzlich verarbeitet der 4DVar-Algorithmus räumlich und zeitlich verteilte Beobachtungen. Er stellt eine globale Methode dar, d.h. es wird der Zustand der gesamten Atmosphäre (und nicht nur einer bestimmten Region) in einem Schritt geschätzt. Analog zum Kalman-Filter ist der Grundgedanke der 4DVar-Analyse, das Modellverhalten der Atmosphäre bzw. eines atmosphärischen Parameters mithilfe von Beobachtungen zu korrigieren. Man bedient sich dazu der Variationsrechnung, sodass das aktualisierte Systemverhalten mit einem geringeren Rechenaufwand ermittelt werden kann, als das bei einem gleichwertigen Kalman-Filter der Fall wäre.

Eine 4DVar-Analyse wird jeweils über ein 12 h-Intervall (beginnend entweder um 9:00 oder 21:00 Uhr) durchgeführt. Eingangsgrößen sind sämtliche Beobachtungen in diesem Zeitraum sowie die Trajektorie des Vorhersagemodells aus dem vorangegangenen 12 h-Intervall (der sogenannte Background  $x_b$ ). Für Beobachtungen und Background müssen auch die Fehlermaße in Form von Kovarianzmatrizen bekannt sein. Ausgangspunkt des Algorithmus' ist die Definition einer Kostenfunktion, welche die Abweichungen der Modellzustände  $x_a$  vom Background und den Beobachtungen misst. Die Kostenfunktion ist zu minimieren, wobei als Nebenbedingung gefordert wird, dass jeder Modellzustand im 12 h-Intervall eine

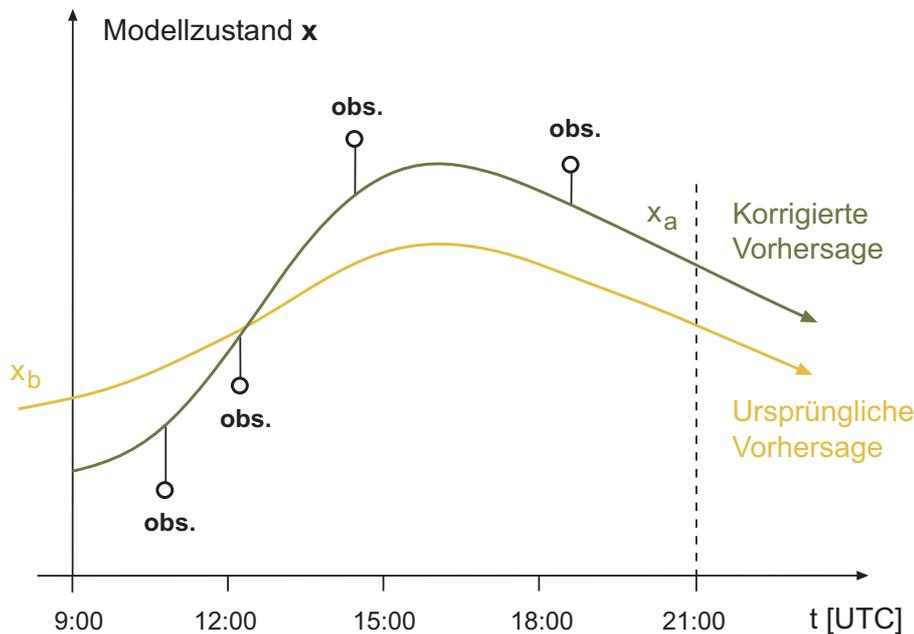


Abbildung 3.13: Illustration der 4DVar-Analyse: Aktualisierung der Vorhersage  $x_b$  an Beobachtungen. Quelle: Persson und Grazzini (2007 [30]), vom Verfasser überarbeitet.

Lösung der Gleichungen des Vorhersagemodells darstellt. Diese Optimierungsaufgabe wird durch einige Annahmen (u.a. Linearisierungen) vereinfacht, sodass zur Auswertung der Kostenfunktion genügt, die Modellgleichungen im Intervall zu integrieren - zuerst von 9:00 bis 21:00 Uhr und anschließend zurück von 21:00 bis 9:00 Uhr. Auf diese Weise erhält man jene aktualisierte Modelltrajektorie  $x_a$ , welche die Beobachtungen bestmöglich anpasst. (Genau genommen werden die Koeffizienten der Basisfunktionen des Modells aktualisiert. Die Basisfunktionen sind für jeden Parameter als Kugelfunktionen angesetzt.) Die Auswertung von  $x_a$  in Zeitschritten von 1 h führt schließlich auf die meteorologischen Eingabedaten für den hochaufgelösten Fall.

### 3.2.2 Verkettung der stündlichen Drehimpulsfunktionen

Werden auf Basis des 4DVar-Datensatzes mit den in Abschnitt 3.1.1 abgeleiteten Formeln stündliche Drehimpulsfunktionen berechnet, weisen diese bei 9:00 und

21:00 UTC in der Regel Sprungstellen auf. Grund dafür ist, dass die Eingabedaten als 12 h-Sätze mit diskreten Werten jeweils um  $\{9:00, 10:00, \dots, 20:00, 21:00\}$  bzw.  $\{21:00, 22:00, \dots, 8:00, 9:00\}$  zur Verfügung stehen. Dies lässt sich mit der intervallweisen Anwendung des 4DVar-Algorithmus' bei der Datenanalyse des ECMWF begründen. Entscheidend ist, dass für den gesamten Beobachtungszeitraum (8.8.-31.8.2008) um 9:00 und 21:00 jeweils 2, meist voneinander unterschiedliche Werte in jeder Drehimpulsfunktion vorhanden sind. Damit sind die Zeitreihen nicht äquidistant, was die Modellierung des atmosphärischen Einflusses auf Polbewegung und Tageslängenschwankung im Frequenzbereich erschwert. Löscht man jeweils einen der beiden Datenpunkte um 9:00 bzw. 21:00, kann zwar das Spektrum der Drehimpulsfunktion bestimmt werden, die Sprungstellen bleiben jedoch im Wesentlichen erhalten. Dies führt für alle Frequenzen zu unrealistischen Amplituden. Insbesondere kommt es im hochfrequenten Bereich zu Alias-Effekten. Die Abbildungen 3.16 bis 3.19 veranschaulichen die Problematik.

Es ist daher naheliegend, die diskreten 12 h-Bögen so aneinanderzureihen, dass Sprungstellen und Unstetigkeitsstellen über den gesamten Beobachtungszeitraum beseitigt werden, die resultierende Zeitreihe aber dennoch in ihrem lang- und kurzperiodischen Verlauf der ursprünglichen Funktion ähnelt. Der Verfasser testet dazu auf Ebene des Drehimpulses folgende 2 Varianten der Verkettung:

- **Variante 1** (siehe Abbildung 3.14): Für jedes 12 h-Intervall wird zunächst die Differenz  $\bar{y}$  zwischen den zeitlich übereinanderliegenden Datenpunkten am Ende des betrachteten Bogens ermittelt und auf die restlichen 12 Funktionswerte aufgeteilt. In Abhängigkeit von der jeweiligen zeitlichen Entfernung  $\Delta t$  von der Sprungstelle wird jeder Funktionswert um den Offset

$$\left( \left( \frac{\Delta t}{12} \right)^{1.5} \bar{y} \right)$$

korrigiert. Die Glättung der noch vorhandenen Unstetigkeitsstellen bei 9:00 bzw. 21:00 Uhr erfolgt durch Bestimmung einer kubischen Parabel aus den Funktionswerten und den numerisch gerechneten Ableitungen an den Intervallpunkten mit  $\Delta t = 0$  h und  $\Delta t = -5$  h. Die dazwischenliegenden Punkte werden durch die Funktionswerte der Parabel ersetzt.

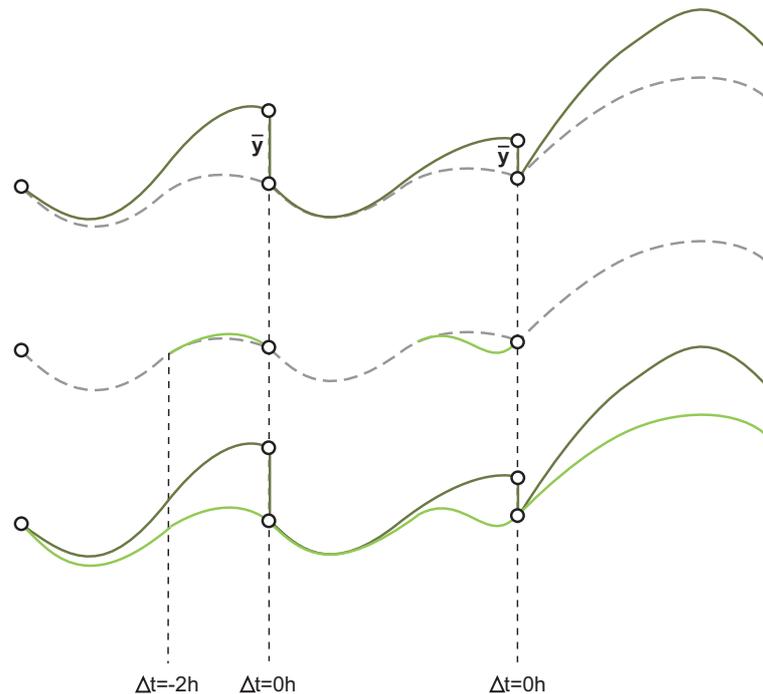


Abbildung 3.14: Bearbeitungsschritte für Variante 1. Oben: Fehleraufteilung in den 12 h-Intervallen. Mitte: Glätten der Unstetigkeitsstellen. Unten: Endergebnis, ursprüngliche Funktion (Dunkelgrün) gegenüber modifizierter Funktion (Hellgrün).

- **Variante 2** (siehe Abbildung 3.15): Die 12 h-Bögen werden vorerst entlang der Ordinatenachse solange verschoben, bis ihr 1. Datenpunkt mit dem letzten des vorangehenden Intervalls zusammenfällt. Ähnlich wie in Variante 1 beseitigt man anschließend die Unstetigkeitsstellen um 9:00 und 21:00 durch Einspannen einer kubischen Parabel - diesmal zwischen den Werten bei  $\Delta t = -2$  h und  $\Delta t = 2$  h. Die Endpunkte der so bestimmten Funktion  $f_1$  und der ursprünglichen Reihe fallen nicht zusammen - ihre Differenz  $\bar{Y}$  wird linear über den gesamten Bearbeitungszeitraum auf die verschobene Funktion aufgeteilt. Nun besitzt die korrigierte Reihe  $f_2$  aber immer noch nicht denselben langperiodischen Verlauf wie die Ausgangsfunktion. Dies hängt vor allem mit der stets unterschiedlichen Größe der im 1. Schritt eliminierten Sprünge zusammen. Zur Korrektur wird an die Differenzen  $\bar{y}$  eine diskrete Fourierreihe von niedrigem Grad (im Speziellen: 15) angepasst

und stündlich ausgewertet. Subtrahiert man die Fourierreihe von  $f_2$ , ist die Verkettung abgeschlossen.

(Bemerkung: der Grad der Fourierreihe muss niedrig sein, um nur langperiodische und nicht kurzperiodische Anteile mit  $T = 12$  h oder  $24$  h aus  $f_2$  im letzten Modifikationsschritt zu entfernen.

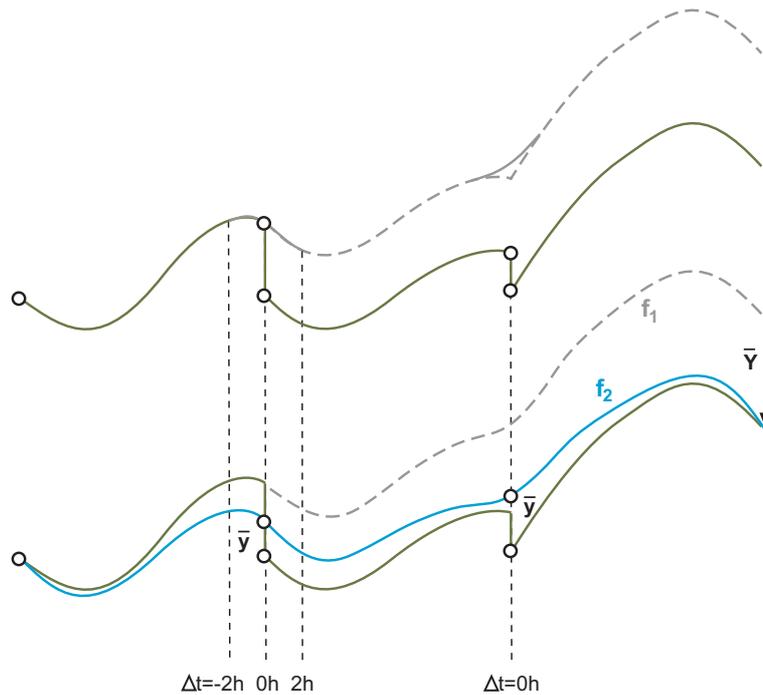


Abbildung 3.15: Bearbeitungsschritte für Variante 2. Oben: Parallelverschieben und Glätten der 12 h-Bögen. Unten: Aufteilung der Differenz  $\bar{Y}$  über den Bearbeitungszeitraum. Die Subtraktion der Fourierreihe von der modifizierten Funktion  $f_2$  (Hellblau) ist nicht abgebildet.

Alle Zeitreihen von Trägheitstensor und Relativdrehimpuls, berechnet mit den Formeln aus Abschnitt 3.1.1, werden sowohl nach Variante 1 als auch nach Variante 2 überarbeitet. Die Ergebnisse sind im nächsten Abschnitt zusammengefasst. An dieser Stelle sollen nur einige wenige Beispielplots zur Illustration der beiden Methoden wiedergegeben werden. Massen- und Bewegungsterme gehen dabei immer aus der Integration über den Druck hervor.

- Unkorrigierte Zeitreihe
- Variante 1
- Variante 2

Tabelle 3.8: Legende zu den grafischen Darstellungen der Massen- und Bewegungsterme in den Abbildungen 3.16 - 3.19.

Abbildung 3.16 zeigt ein Zeitbereichsdetail für den Druckterm von  $\Delta I_{13}$ . Formuliert man die äquatorialen Massenterme gemäß  $\Delta \hat{\mathbf{I}} = \Delta I_{13} + i\Delta I_{23}$  als komplexen Vektor, lässt sich das zweiseitige Amplitudenspektrum, aufgeteilt in pro- und retrograd, in Abbildung 3.17 bestimmen. Für den Windterm von  $h_3$  ist in Abbildung 3.19 das einseitige Amplitudenspektrum dargestellt. Generell ist erkennbar, dass durch die Beseitigung der Sprung- und Unstetigkeitsstellen die Alias-Effekte im Spektrum der unkorrigierten Zeitreihe praktisch eliminiert sind. Dass bei großen Sprüngen an den Grenzen der 12 h-Intervalle die verwendeten Varianten der Verkettung aber trotzdem nicht unproblematisch sind, zeigt Abbildung 3.18. Es bleibt abzuwarten, wie sehr solche Effekte die weiteren Ergebnisse beeinflussen.

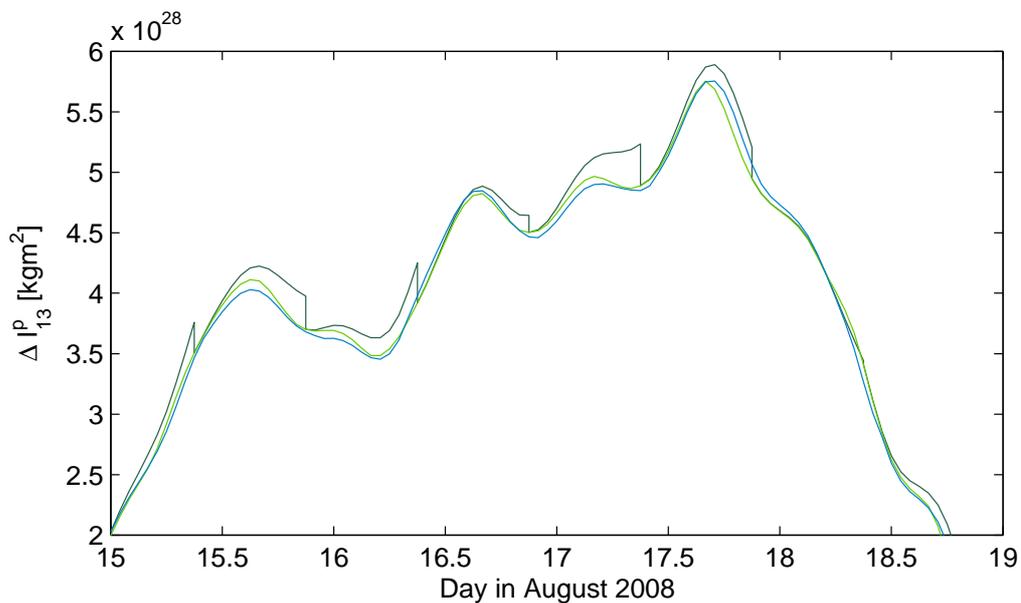


Abbildung 3.16: Ausschnitt im Zeitbereich für den Massenterm von  $\Delta I_{13}$ , Zeitl. Auflösung: 1 h, Legende: Tabelle 3.8

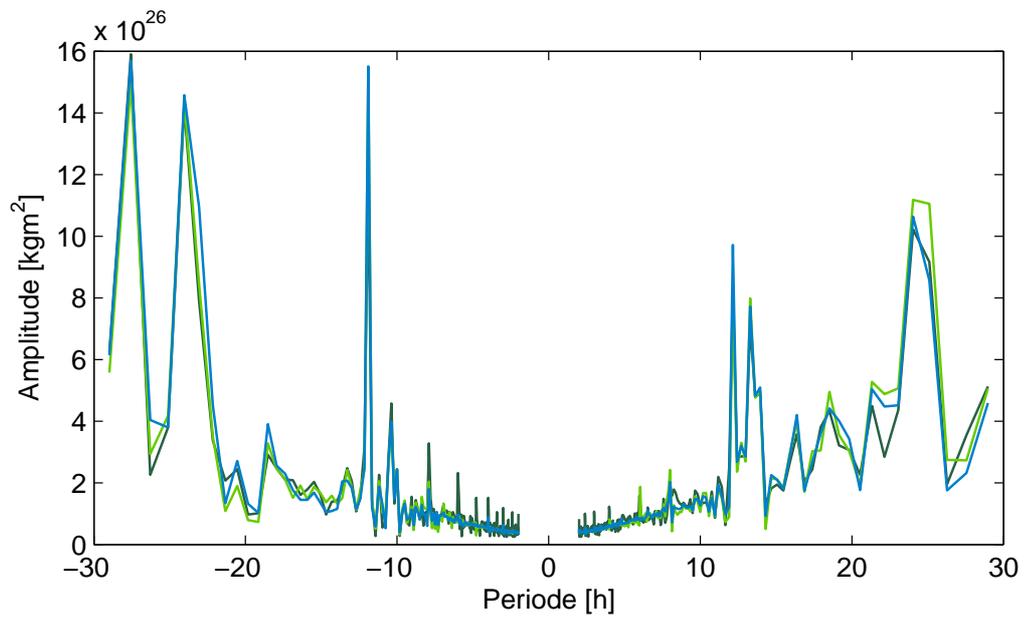


Abbildung 3.17: Amplitudenspektrum für den Massenterm von  $\Delta\hat{\mathbf{I}}$ , Legende: Tabelle 3.8

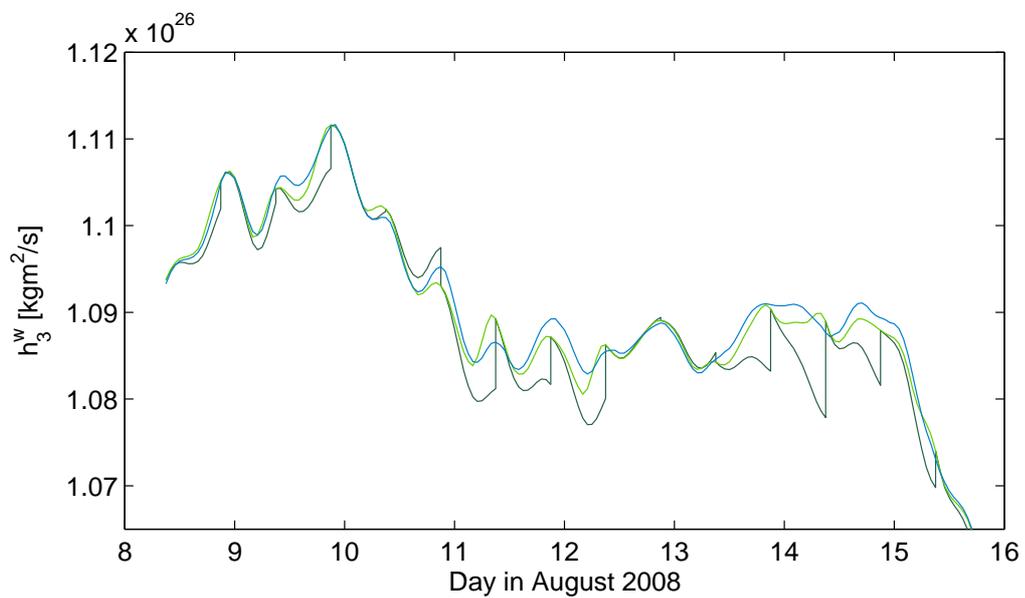


Abbildung 3.18: Ausschnitt im Zeitbereich für den Bewegungsterm von  $h_3$ , Zeitl. Auflösung: 1 h, Legende: Tabelle 3.8

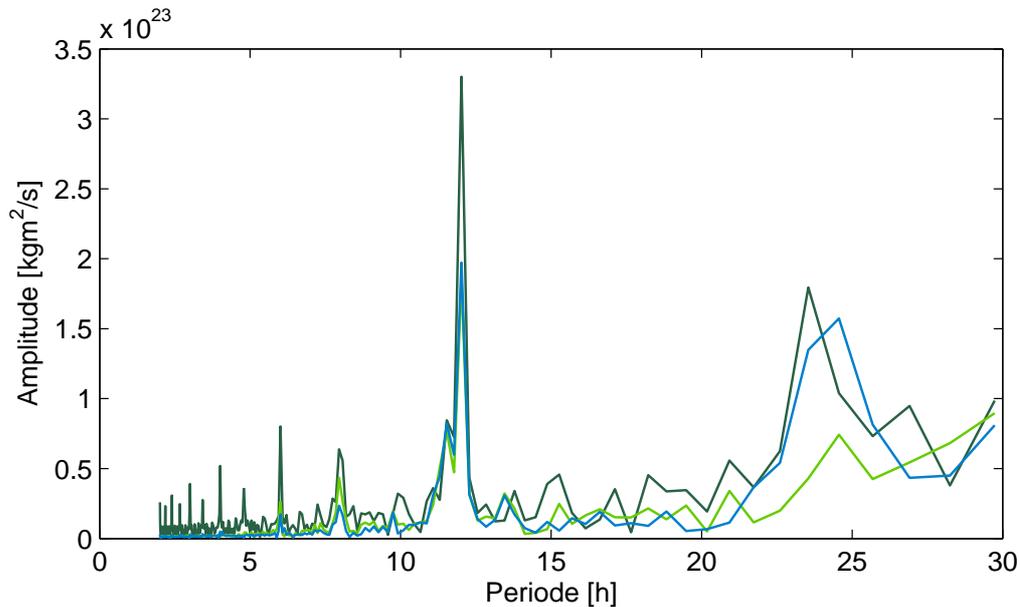


Abbildung 3.19: Amplitudenspektrum für den Bewegungsterm von  $h_3$ , Legende: Tabelle 3.8

### 3.2.3 Berechnungsergebnisse - High Frequency Case (1 h)

Werden die Komponenten des atmosphärischen Drehimpulses wieder mittels Integration über die Radiuslänge oder den Druck berechnet, und anschließend nach Variante 1 und 2 modifiziert, entstehen insgesamt 4 Berechnungsvarianten. Die Atmosphärendaten stammen dabei ausschließlich vom ECMWF. Die IB-Korrektur wird genauso wie für die 6-stündigen Reihen nicht angebracht:

Variante <b>C11</b>	
Massenterme	Integration über $p_s$ nach (3.19)
Bewegungsterme	Integration über $dp$ nach (3.21)
Verkettung	Variante 1

Variante <b>C12</b>	
Massenterme	Integration über $p_s$ nach (3.19)
Bewegungsterme	Integration über $dp$ nach (3.21)
Verkettung	Variante 2

Variante <b>C21</b>	
Massenterme	Integration über $dr$ nach (3.20)
Bewegungsterme	Integration über $dr$ nach (3.22)
Verkettung	Variante 1

Variante <b>C22</b>	
Massenterme	Integration über $dr$ nach (3.20)
Bewegungsterme	Integration über $dr$ nach (3.22)
Verkettung	Variante 2

Tabelle 3.10: Berechnungsvarianten High Frequency Case (1 h), (**C** für „Concatenation“). Die 1. Ziffer kennzeichnet die Integrationsmethode, die 2. Ziffer die verwendete Variante für die Verkettung.

- — **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB) als Spline
- **C11** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 1, Non-IB)
- **C12** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 2, Non-IB)

Tabelle 3.11: Legende zu den grafischen Darstellungen der stündlichen Drehimpulsfunktionen (Abbildungen 3.20 - 3.25). Entspricht prinzipiell Tabelle 3.8.

Gebraucht man zur Umrechnung des atmosphärischen Drehimpulses in Drehimpulsfunktionen wieder die Korrekturfaktoren aus (2.51) und (2.52), erhält man schließlich die stündlichen Reihen für August 2008 in den Abbildungen 3.20 - 3.25. Dort sind zusätzlich die täglichen Drehimpulsfunktionen (Variante L10) in Form von stündlichen Spline-Interpolierenden eingetragen. C11, C12, C21 und C22 werden mit ihren Mittelwerten auf die Mittelwerte der L10-Splinefunktion verschoben. Für die Differenzen der Drehimpulsfunktionen zweier Berechnungsvarianten sind in Tabelle 3.12 wieder die Standardabweichungen angeführt.

Variante 1 und 2 liefern offensichtlich vergleichbare Ergebnisse. Dies wird in der guten grafischen Übereinstimmung zwischen C11 und C12 und auch in den geringen Standardabweichungen zwischen allen Berechnungsvarianten deutlich. Die Massenterme  $\chi_i^p$  stimmen in der Regel besser überein als die entsprechenden Bewegungsterme  $\chi_i^w$ . Ferner ist zu erkennen, dass gegenüber der Drehimpulsfunktion

L10 für den langperiodischen Verlauf die stündlichen Reihen tägliche und halb-tägliche Schwingungen aufweisen. Am auffälligsten sind diese in  $\chi_1^w$  und  $\chi_2^w$ .

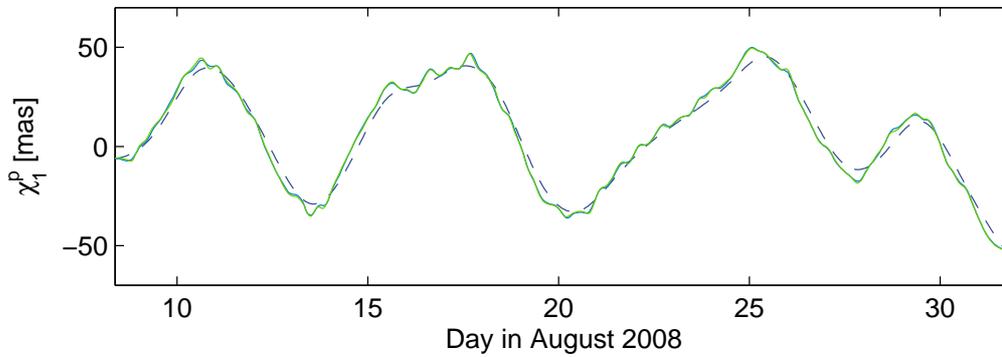


Abbildung 3.20: Massenterm  $\chi_1^p$ , Zeitl. Auflösung: 1 h, Legende: Tabelle 3.11

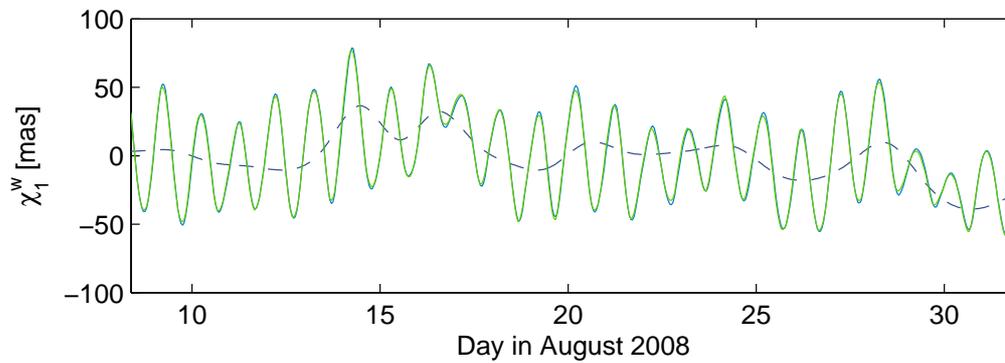


Abbildung 3.21: Bewegungsterm  $\chi_1^w$ , Zeitl. Auflösung: 1 h, Legende: Tabelle 3.11

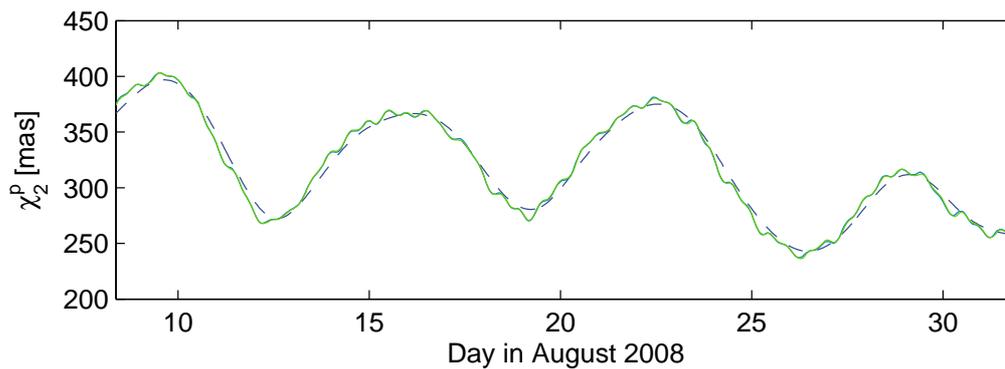


Abbildung 3.22: Massenterm  $\chi_2^p$ , Zeitl. Auflösung: 1 h, Legende: Tabelle 3.11

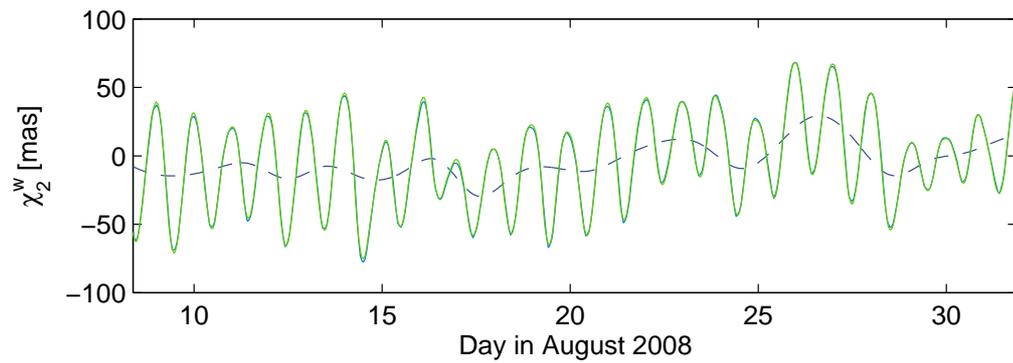


Abbildung 3.23: Bewegungsterm  $\chi_2^w$ , Zeitl. Auflösung: 1 h, Legende: Tabelle 3.11

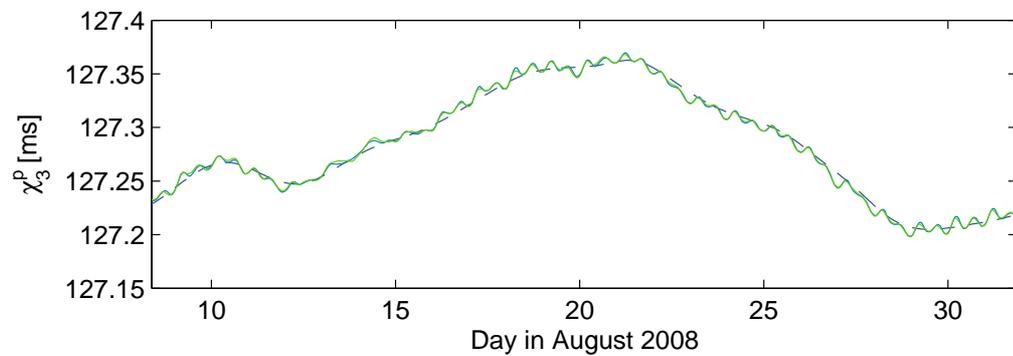


Abbildung 3.24: Massenterm  $\chi_3^p$ , Zeitl. Auflösung: 1 h, Legende: Tabelle 3.11

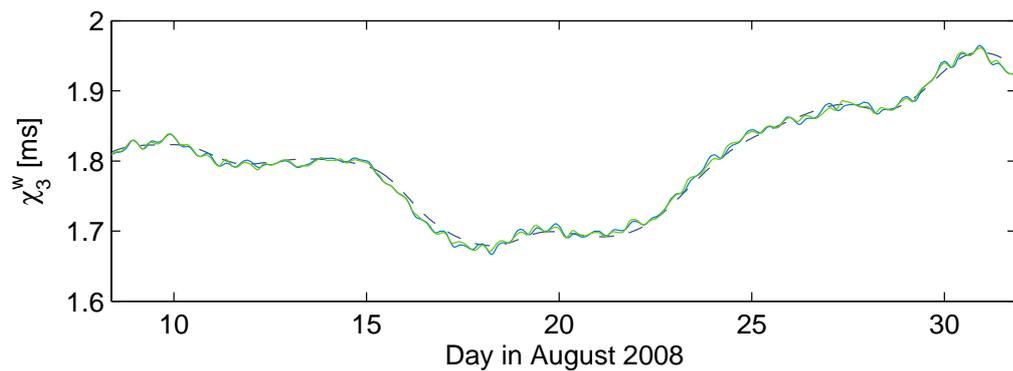


Abbildung 3.25: Bewegungsterm  $\chi_3^w$ , Zeitl. Auflösung: 1 h, Legende: Tabelle 3.11

	$\chi_1^p$	$\chi_1^w$	$\chi_2^p$	$\chi_2^w$	$\chi_3^p$	$\chi_3^w$
<b>C11 - C12</b>	0.6	1.8	0.6	1.6	1.0	2.9
<b>C11 - C21</b>	0.5	0.7	0.9	0.5	1.4	0.4
<b>C11 - C22</b>	0.7	1.9	0.8	1.8	1.4	3.0
<b>C12 - C21</b>	0.8	1.9	1.3	1.6	2.0	2.7
<b>C12 - C22</b>	0.5	0.7	0.9	0.5	1.4	0.4
<b>C21 - C22</b>	0.6	1.8	0.6	1.7	1.0	2.8

Tabelle 3.12: Standardabweichungen der Differenzen verschiedener Berechnungsvarianten, angegeben in [mas] (äquatorial) und [ $\mu$ s] (axial). Alle Berechnungsvarianten aus ECMWF-Daten und ohne IB-Korrektur: **C11** ( $\int dp$ , Verkettungsvariante 1), **C12** ( $\int dp$ , Verkettungsvariante 2), **C21** ( $\int dr$ , Verkettungsvariante 1), **C22** ( $\int dr$ , Verkettungsvariante 2).

### 3.3 Atmosphärische Beiträge zu Polbewegung und LOD: Low Frequency Case

Mit den im theoretischen Teil (Abschnitt 2.4.1 und 2.4.3) hergeleiteten Gleichungen ist es möglich, Drehimpulsfunktionen und Erdrotationsparameter ineinander umzurechnen. Der betrachtete Zeitraum ist das Jahr 2008. Alle Zeitreihen liegen mit täglicher Auflösung vor, sodass ein Vergleich zwischen beobachteter und atmosphärisch angeregter Erdrotation im Bereich von wenigen Tagen bis hin zu mehreren Wochen sinnvoll erscheint. Die Abbildungen 2.5 und 2.6 lassen vermuten, dass für diese langen Perioden der Anteil der Atmosphäre an Polbewegung und Tageslängenvariation sehr groß sein wird.

Für die Erdrotationsparameter wird die vom IERS veröffentlichte **C04**-Lösung verwendet. Die täglichen Werte von Nutationszuschlag, Polbewegung und LOD sind darin in Bezug auf das Nutationsmodell IAU2000A angegeben. Die Zeitreihen der Erdorientierungsparameter sind das Resultat eines speziellen Algorithmus', welcher die operationellen EOP-Serien verschiedener geodätischer Weltraumverfahren (u.a. VLBI und GPS) auf Ergebnisebene kombiniert. Die Genauigkeiten für Polbewegung und LOD betragen nach Bizouard und Gambis (2009 [6]) 30  $\mu$ as bzw. 15  $\mu$ as.

Im 1. Teil dieses Abschnitts werden die äquatorialen Drehimpulsfunktionen der

Polbewegung sowohl mittels Differentiationsansatz als auch mittels Integrationsansatz gegenübergestellt. Der 2. Teil beschäftigt sich anschließend mit dem Vergleich von axialer Drehimpulsfunktion und LOD.

### 3.3.1 Polbewegung

#### Differentiationsansatz

Sämtliche Berechnungen orientieren sich an (2.84), der Grundgleichung des Differentiationsansatzes. Zur einfacheren Handhabung der Gleichung ist es zweckmäßig, die äquatorialen Komponenten der in Abschnitt 3.1 bestimmten atmosphärischen Drehimpulsfunktionen als komplexe Funktion der Zeit zusammenzufassen, wobei analog zu (2.32) Druck- und Windterme aufsummiert werden können. Unabhängig von der Berechnungsvariante gilt somit:

$$\hat{\chi}_a = \chi_1 + i\chi_2 = \chi_1^p + \chi_1^w + i(\chi_2^p + \chi_2^w) \quad (3.24)$$

Ziel ist es nun, aus der Polbewegung der C04-Lösung  $\hat{\mathbf{p}} = x - iy$  eine theoretische äquatoriale Drehimpulsfunktion  $\hat{\chi}_t$  zu berechnen und diese  $\hat{\chi}_a$  gegenüberzustellen.  $\hat{\chi}_t$  folgt aus (2.84) in der Form

$$\hat{\chi}_t = \hat{\mathbf{p}} + \frac{i}{\hat{\sigma}_{cw}} \dot{\hat{\mathbf{p}}}. \quad (3.25)$$

Die zeitliche Ableitung  $\dot{\hat{\mathbf{p}}}$  lässt sich durch Bildung zentraler Differenzen in den beiden Komponenten  $x$  und  $-y$  annähern. Im 1. und letzten Datenpunkt (1.1. bzw. 31.12.2008) kann hingegen nur eine einfache Differenz zum folgenden bzw. vorangehenden Datenpunkt ermittelt werden.

Üblicherweise wird die aus Atmosphärendaten gerechnete Drehimpulsfunktion  $\hat{\chi}_a$  um einen gewissen Betrag  $\Delta\hat{\chi}$  gegenüber  $\hat{\chi}_t$  verschoben sein. Das liegt nach Barnes et al. (1983 [2]) an folgendem Umstand: Bei der Bildung der theoretischen Drehimpulsfunktion wurde für den Trägheitstensor  $\mathbf{I}$  der festen Erde Diagonalfom vorausgesetzt, siehe (2.12). Diese Bedingung kann aber nicht auf die atmosphärische Drehimpulsfunktion übertragen werden, da deren Eingabedaten und in weiterer Folge die Funktion selbst in einem geografischen Koordinatensystem definiert sind, dessen Pol vom mittleren Trägheitspol abweicht. Der Trägheitstensor besitzt in diesem Fall kleine Nebendiagonalelemente, welche sich in den angesprochenen Verschiebungsbeträgen äußern. Verlangt man, dass die

	$\Re$	$\Im$
<b>L10</b>	-84.9	608.1
<b>L20</b>	-66.5	719.1
<b>L30</b>	-93.8	625.1

Tabelle 3.13: Real- und Imaginärteile der Verschiebungsbeträge  $\Delta\hat{\chi}$  in [mas]. Berechnungsvarianten: **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB), **L20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), **L30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB).

Mittelwerte von atmosphärischer und theoretischer Drehimpulsfunktion über den bearbeiteten Zeitraum übereinstimmen, folgt  $\Delta\hat{\chi}$  aus:

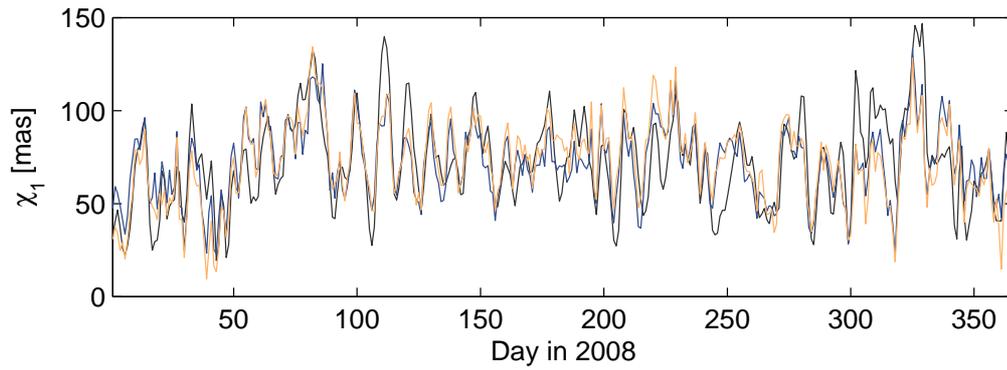
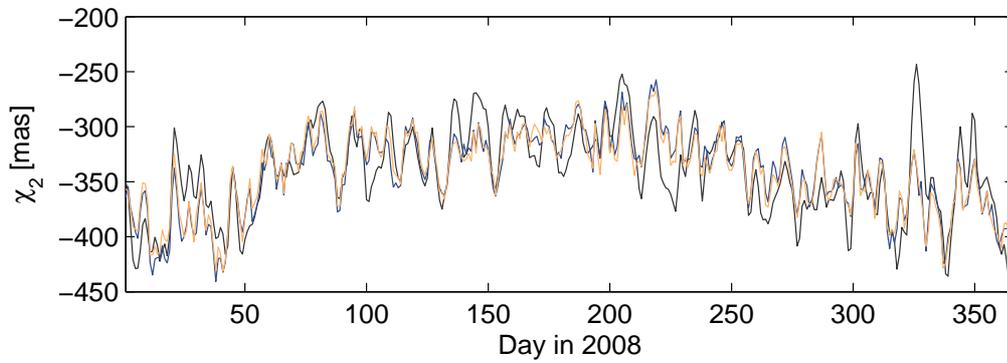
$$\Delta\hat{\chi} = M(\hat{\chi}_a) - M(\hat{\chi}_t) \quad (3.26)$$

Die Offsets der 3 untersuchten Berechnungsvarianten zur Drehimpulsfunktion aus C04 sind in Tabelle 3.13 zusammengestellt. Subtrahiert man diese Beträge von  $\hat{\chi}_a$ , sollten atmosphärische und theoretische Drehimpulsfunktion gut übereinstimmen. Qualitativ lässt sich die Übereinstimmung durch Darstellung der einzelnen Komponenten prüfen. Siehe dazu Abbildung 3.26 und Abbildung 3.27. (Um die Grafiken übersichtlich zu gestalten, wurden die Zeitreihen der Variante L20 nicht abgebildet.) Es ist ersichtlich, dass ein Großteil des Drehimpulses für die Polbewegung durch atmosphärische Effekte erklärbar ist. Eine noch bessere Übereinstimmung zwischen  $\hat{\chi}_a$  und  $\hat{\chi}_t$  könnte durch Miteinbeziehung ozeanischer Drehimpulsfunktionen mit täglicher Auflösung erreicht werden.

- **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB)
- **L30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB)
- $\hat{\chi}_t$  aus C04-Polbewegung

Tabelle 3.14: Legende zum Differentiationsansatz (Abbildungen 3.26 und 3.27)

Für den Vergleich der Komponenten von  $\hat{\chi}_a$  jeder Berechnungsvariante mit Real- und Imaginärteil von  $\hat{\chi}_t$  sind in Tabelle 3.15 der Korrelationskoeffizient  $\rho$  der betrachteten Reihen und die Standardabweichung  $\sigma$  ihrer Differenzen angeführt. Bezeichnet  $n$  die Anzahl der Funktionswerte, wird  $\sigma$  analog zu (3.23) mit nach-

Abbildung 3.26: Differentiationsansatz für  $\chi_1$ , Legende siehe Tabelle 3.14Abbildung 3.27: Differentiationsansatz für  $\chi_2$ , Legende siehe Tabelle 3.14

stehender Formel berechnet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d\chi_k(i) - M(d\chi_k))^2}, \quad k = 1, 2$$

$$d\chi_1 = \Re(\hat{\chi}_t) - \chi_1$$

$$d\chi_2 = \Im(\hat{\chi}_t) - \chi_2$$

An den Werten in Tabelle 3.15 lassen sich folgende Zusammenhänge ablesen:

- Die aus ECMWF- und NCEP-Daten berechneten Drehimpulsfunktionen (L10 und L30) liefern praktisch idente Ergebnisse.
- Bei Vernachlässigung des inversen Barometereffekts (L20) wachsen aufgrund

	L10	L20	L30		L10	L20	L30
$\sigma$	17.4	31.3	17.9	$\sigma$	24.7	31.2	24.0
$\rho$	0.705	0.624	0.705	$\rho$	0.794	0.776	0.801

Tabelle 3.15: Statistische Maße zum komponentenweisen Vergleich von theoretischer und atmosphärischer Drehimpulsfunktion: Standardabweichung [mas] und Korrelationskoeffizient [ ]. Links: Vergleich von  $\chi_1$  und  $\Re(\hat{\chi}_t)$ . Rechts: Vergleich von  $\chi_2$  und  $\Im(\hat{\chi}_t)$ . Berechnungsvarianten: **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB), **L20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), **L30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB).

der größeren Amplituden in  $\hat{\chi}_a$  die Differenzen zur theoretischen Drehimpulsfunktion, was sich auch im Wert der Standardabweichung niederschlägt.

- Der Korrelationskoeffizient für  $\chi_1$  beträgt 0.70, jener für  $\chi_2$  0.80. Der die Polbewegung verursachende Drehimpuls kann damit im betrachteten Periodenbereich  $> 1$  d hauptsächlich durch atmosphärische Effekte erklärt werden.

### Integrationsansatz

Während im vorigen Abschnitt Polbewegung und atmosphärischer Drehimpuls auf Ebene der Drehimpulsfunktionen verglichen wurden, ermöglicht (2.85) eine direkte Berechnung der atmosphärisch angeregten Polbewegung  $\hat{\mathbf{p}}_a$  durch Integration von  $\hat{\chi}_a$  nach der Zeit. Um  $\hat{\mathbf{p}}_a$  im selben Koordinatensystem wie die geodätisch beobachtete Polbewegung  $\hat{\mathbf{p}}$  zu erhalten, sind die um  $\Delta\hat{\chi}$  verschobenen Drehimpulsfunktionen des Differentiationsansatzes zu verwenden. Im Integrationsansatz muss also (2.85) in der Form

$$\hat{\mathbf{p}}_a(t) = e^{-i\hat{\sigma}_{cw}t} \left( \hat{\mathbf{p}}(0) - i\hat{\sigma}_{cw} \int_0^t \hat{\chi}_a(\tau) e^{-i\hat{\sigma}_{cw}\tau} d\tau \right) \quad (3.27)$$

numerisch gelöst werden. Während in Abschnitt 3.1.1 die Trapezregel zum Einsatz kam, erfolgt die numerische Integration für diese Aufgabe nach Simpson. Die Simpsonformel schätzt allgemein für eine äquidistante Zeitreihe  $f(x)$  mit  $k$  Datenpunkten den Wert der Stammfunktion an der Stelle  $k$  über:

$$F(k) = \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \dots + 4f(x_{k-1}) + f(x_k)] \quad (3.28)$$

$$h = \frac{x_k - x_1}{k}$$

(3.28) entsteht, wenn zur Flächenberechnung unter  $f(x)$  fortlaufend über jeweils 2 Teilintervalle (und damit 3 Stützstellen) Parabeln 2. Ordnung interpoliert werden. Die Anzahl der Teilintervalle muss damit gerade sein, die Anzahl der Datenpunkte ungerade. Der Integrand in (3.27)

$$f(x) = \hat{\mathbf{f}}(\tau) = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{\mathbf{a}}(\tau) e^{-i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{cw}\tau}$$

ist für den Zeitschritt  $i$  der Integration ein komplexer Vektor mit  $i$  Einträgen, wobei  $i = 1, 2, \dots, 366$  (1.1. - 31.12.2008) sein kann. Aus den eben genannten Gründen ist die Simpsonformel aber nur für ungerades  $i$  anzuwenden. Berücksichtigt man das und setzt man für  $\hat{\mathbf{p}}(0)$  den zeitlich 1. Wert der C04-Polbewegung an, ist (3.27) numerisch lösbar.

Neben den atmosphärischen Drehimpulsfunktionen  $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{\mathbf{a}}$  der Berechnungsvarianten L10, L20, L30 wird der Integrationsansatz auch für die aus dem Differenzierungsansatz hervorgehende theoretische Drehimpulsfunktion  $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{\mathbf{t}}$  durchgeführt. Man erhält dadurch Aufschluss über die Genauigkeit der gewählten numerischen Methoden und kann abschätzen, welche Fehler durch sie in den Ergebnissen eingeführt werden.

Dem Vergleich von  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}$  und  $\hat{\mathbf{p}}$  geht ein weiterer Berechnungsschritt voraus: Um die atmosphärisch angeregte Polbewegung entsprechend gegenüber der beobachteten Polbewegung darzustellen, wird  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}$  einer Helmerttransformation auf  $\hat{\mathbf{p}}$  unterworfen. Damit weicht man von der Bedingung aus der numerischen Integration  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}(0) = \hat{\mathbf{p}}(0)$  ab, die Kurven stimmen im Mittel dann aber bestmöglich überein. Die Helmerttransformation lässt sich durch folgende Angaben spezifizieren:

- Es werden  $p$  Passpunkte verwendet.  $p$  ist dabei die Länge des Vektors  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}$ , dessen komplexe Werte als 2D-Koordinaten im Ausgangskordinatensystem angesehen werden können. Die Zielkoordinaten der Passpunkte sind die entsprechenden Werte in  $\hat{\mathbf{p}}$ . (Jeder 2. Punkt in  $\hat{\mathbf{p}}$  stellt also einen Passpunkt dar.)
- Die geschätzten Parameter der Transformation sind 2 Verschiebungen  $(x_0, y_0)$  sowie ein Rotationswinkel  $\alpha$ . Der Maßstabsfaktor wird auf den Wert  $m = 1$  gesetzt, sodass die lokale Geometrie der Kurve  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}$  unverändert bleibt.

Bezeichnen  $(\bar{x}, \bar{y})$  die Ausgangskordinaten von  $\hat{\mathbf{p}}_a$  und  $(x, y)$  die Zielkoordinaten, lautet das verwendete Modell der Ähnlichkeitstransformation:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Nachdem die Helmerttransformation für  $\hat{\mathbf{p}}_a$  aus L10, L20, L30 sowie  $\hat{\chi}_t$  jeweils separat durchgerechnet wird, können zum Vergleich von atmosphärisch angeregter Polbewegung und geodätisch beobachteter Polbewegung wieder statistische Größen angegeben werden. Die Standardabweichungen der Differenzen  $\hat{\mathbf{p}}_a - \hat{\mathbf{p}}$  in x- und y-Richtung sind in Tabelle 3.16 zusammengestellt.

$\hat{\mathbf{p}}_a$ aus	L10	L20	L30	$\hat{\chi}_t$
$\sigma_x$	7.73	9.70	6.33	0.05
$\sigma_y$	11.33	8.18	8.75	0.04

Tabelle 3.16: Standardabweichung der Differenzen [mas]: Polbewegung des CIP aus C04 - Polbewegung des CIP aus Atmosphärenaten: **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB), **L20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), **L30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB).

Abbildung 3.28 gibt das Ergebnis der Integration und Transformation grafisch wieder. Die aus  $\hat{\chi}_t$  berechnete Polbewegung stimmt mit jener aus C04 bis auf kleine Abweichungen überein und ist daher in der Darstellung nicht enthalten.

Tabelle 3.16 und Abbildung 3.28 lassen folgende Schlüsse zu:

- Die geodätisch beobachtete Polbewegung kann im Periodenbereich  $> 1$  d sehr gut aus Atmosphärenaten rekonstruiert werden. Die Abweichungen betragen in beiden Komponenten etwa 10 mas oder 3 mm an der Erdoberfläche. Die Drehimpulsfunktion des NCEP liefert dabei die besten Ergebnisse.
- Anders als beim Differentiationsansatz erhält man bei Vernachlässigung des IB-Effektes wie in L20 nicht notwendigerweise schlechtere Ergebnisse als für die restlichen Berechnungsvarianten. Dazu ist zu sagen, dass die Fehlermaße in Tabelle 3.16 eigentlich nur reflektieren, wie gut der jährliche Wobble in den Drehimpulsfunktionen wiedergegeben wird. Jene kleinen Amplitudenunterschiede in der Polschwankung, die zwischen IB- und Non-IB-Variante

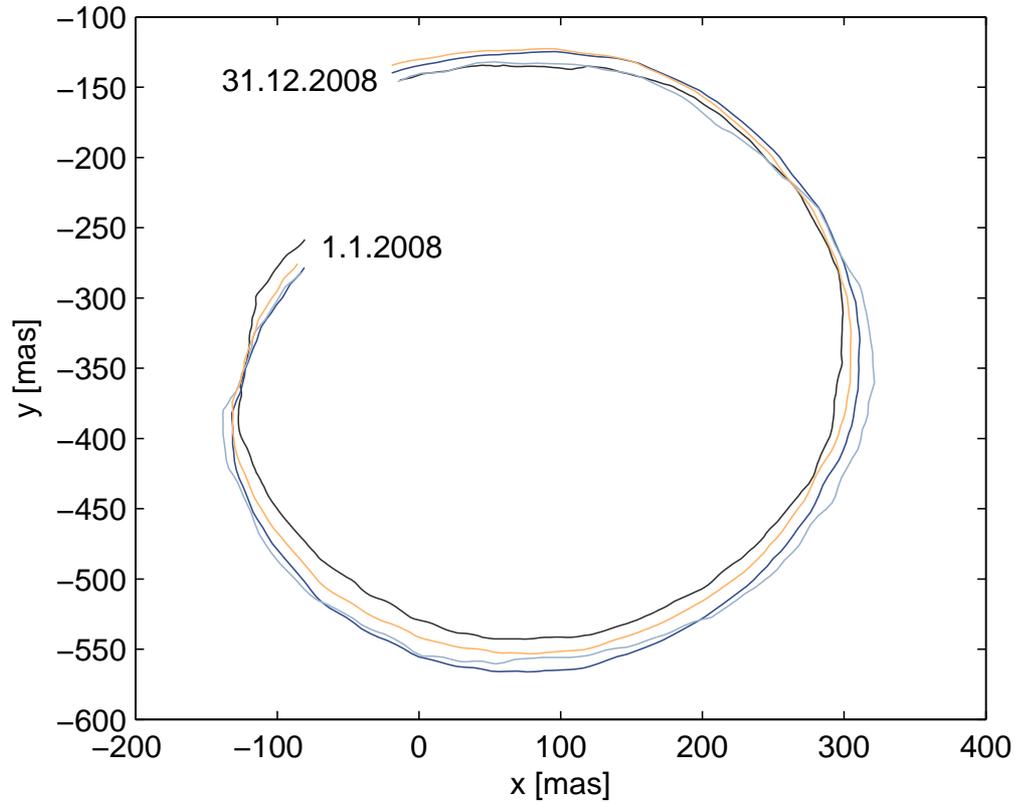


Abbildung 3.28: Polschwankungen  $\hat{\mathbf{p}}_a$  aus dem Integrationsansatz, Schwarz: C04-Polbewegung  $\hat{\mathbf{p}}$ , Dunkelblau: **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB), Hellblau: **L20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), Chamois: **L30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB).

bestehen, schlagen sich nicht unbedingt in den Werten der Standardabweichung nieder.

- Die aus der theoretischen Drehimpulsfunktion  $\hat{\chi}_t$  ermittelte Polbewegung weicht maximal  $50 \mu\text{as}$  von der ursprünglich beobachteten Polbewegung ab. Das lässt den Schluss zu, dass die gewählten numerischen Verfahren für die Aufgabenstellung passend sind.

Zu den sowohl für Differentiations- als auch Integrationsansatz angestellten Vergleichen sei abschließend noch nachgetragen, dass in beiden Fällen ähnliche Fehlermaße mit gleicher Einheit (generell [mas]) angegeben wurden. Es ist aber nicht sinnvoll die statistischen Werte zwischen den beiden Ansätzen zu vergleichen, da

im Differentiationsansatz auf Ebene der Drehimpulsfunktionen gerechnet wird. Im Integrationsansatz geschieht dies auf Ebene der Polbewegung, sodass nur dort die Winkelgrößen in Abstände an der Erdoberfläche umgerechnet werden können.

### 3.3.2 LOD

Während atmosphärischer Drehimpuls und Erdrotation in den äquatorialen Komponenten nur unter Verwendung einer Transferfunktion (siehe (2.101) bzw. Abschnitt 3.3.1) verglichen werden können, lassen sich axiale Drehimpulsfunktion und Variationen in der Tageslänge unmittelbar gegenüberstellen. Nach (2.104) unterscheiden sich atmosphärisch bedingte Schwankungen in LOD und  $\chi_3$  nur durch eine Konstante. Die Zeitreihe von LOD aus geodätischen Beobachtungen enthält neben den atmosphärischen Effekten aber auch den Einfluss zonaler Gezeitenkräfte, der jenen der Atmosphäre um ein Vielfaches übertrifft. Die dominierenden Gezeitenwellen besitzen Perioden von 9, 14 und 28 d und müssen durch ein geeignetes Modell beseitigt werden. Dem Verfasser wird zu diesem Zweck eine MATLAB-Subroutine zur Verfügung gestellt (Autor: Sebastien Lambert, Referenz: IERS-Konventionen 2000, Kapitel 8), die für den bearbeiteten Zeitraum die Korrekturen auf eine gezeitenfreie LOD-Reihe ermittelt. LOD ohne Gezeitenanteil wird mit LODR bezeichnet. Beide Reihen sind in Abbildung 3.29 veranschaulicht.

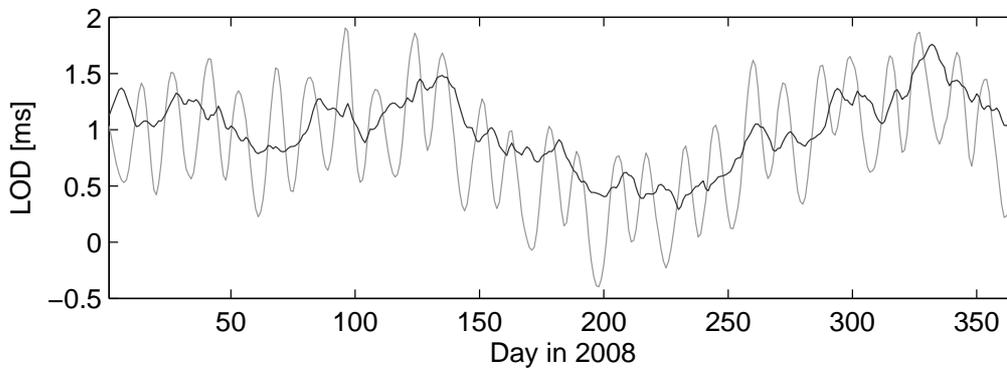


Abbildung 3.29: Grau: LOD aus C04 (mit Gezeitenanteil), Schwarz: LODR (ohne Gezeitenanteil).

Führt man LODR in (2.104) gemäß

$$\chi_3 = \frac{\partial \Lambda}{\Lambda_0} + \text{const} = \text{LODR} + \text{const} \quad (3.30)$$

ein, bleibt nur mehr über die Integrationskonstante zu verfügen. Man fasst sie als Verschiebungsbetrag für  $\chi_3$  auf und bestimmt sie analog zu (3.26) aus

$$\Delta\chi_3 = M(\chi_3) - M(\text{LODR}) \quad (3.31)$$

$\Delta\chi_3$  beträgt für alle Varianten rund 128 ms. Nach Verschiebung der axialen Drehimpulsfunktionen ist ein Vergleich mit LODR möglich. Siehe dazu Abbildung 3.30 und Tabelle 3.17.

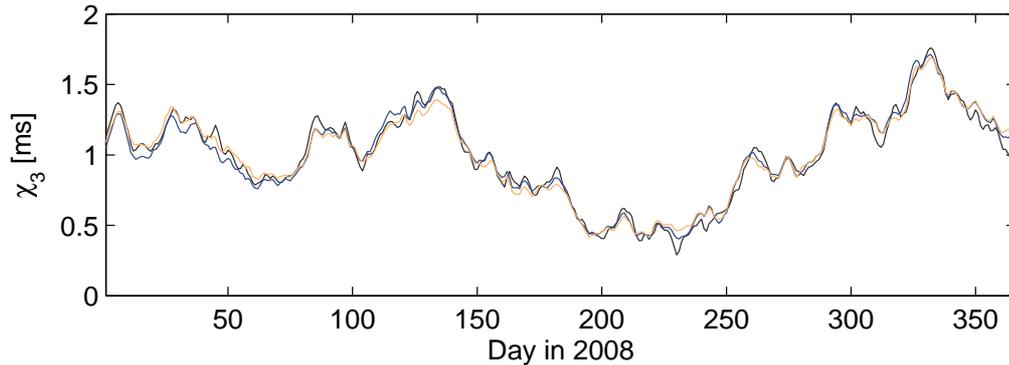


Abbildung 3.30:  $\chi_3$  und Tageslängenvariation, Schwarz: LODR aus C04, Dunkelblau: **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB), Chamois: **L30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB).

	<b>L10</b>	<b>L20</b>	<b>L30</b>
$\sigma$	54.2	67.8	58.7
$\rho$	0.985	0.977	0.983

Tabelle 3.17: Statistische Maße zum Vergleich von LODR und axialer atmosphärischer Drehimpulsfunktion: Standardabweichung [ $\mu\text{s}$ ] der Differenzen und Korrelationskoeffizient []. Berechnungsvarianten: **L10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , IB), **L20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), **L30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , IB).

Man kann folgende Schlüsse ziehen:

- Die Übereinstimmung zwischen beobachteter und atmosphärisch angeregter Tageslängenvariation ist für den Periodenbereich von mehreren Tagen und Wochen sehr gut. Dies kommt durch Korrelationskoeffizienten von generell 0.98 und Standardabweichungen in den Differenzen von weniger als 70  $\mu\text{s}$  zum Ausdruck.
- Die Vernachlässigung des IB-Effektes führt zu schlechteren Ergebnissen.

### 3.3.3 Druck- und Windterme in den Drehimpulsfunktionen - Low Frequency Case

Die Ausführungen zur langperiodischen Anregung der Erdrotation sollen mit dem Vergleich der Anteile von Druck- und Windtermen in den Drehimpulsfunktionen abgeschlossen werden. Als Beispieldaten dienen die täglichen NCEP-Reihen über den Zeitraum 2008. Die Betrachtungen erfolgen im Frequenzbereich. Die äquatorialen Komponenten der Drehimpulsfunktionen werden als komplexer Vektor  $\hat{\chi} = \chi_1 + i\chi_2$  zusammengefasst und ermöglichen so die Berechnung eines zweiseitigen Spektrums. Aus  $\chi_3$  lässt sich ein einseitiges Spektrum bestimmen. Die Fouriertransformation wird jeweils für  $\hat{\chi}^p$ ,  $\hat{\chi}^w$ ,  $\hat{\chi}^{p+w}$ ,  $\chi_3^p$ ,  $\chi_3^w$  sowie für  $\chi_3^{p+w}$  durchgeführt. Daraus folgen die Amplitudenspektren für äquatoriale und axiale Drehimpulsfunktion in Abbildung 3.31 und Abbildung 3.32.

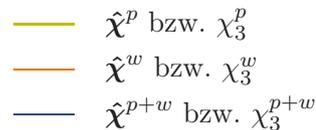


Tabelle 3.18: Legende zu den grafischen Darstellungen der Massen- und Bewegungsterme

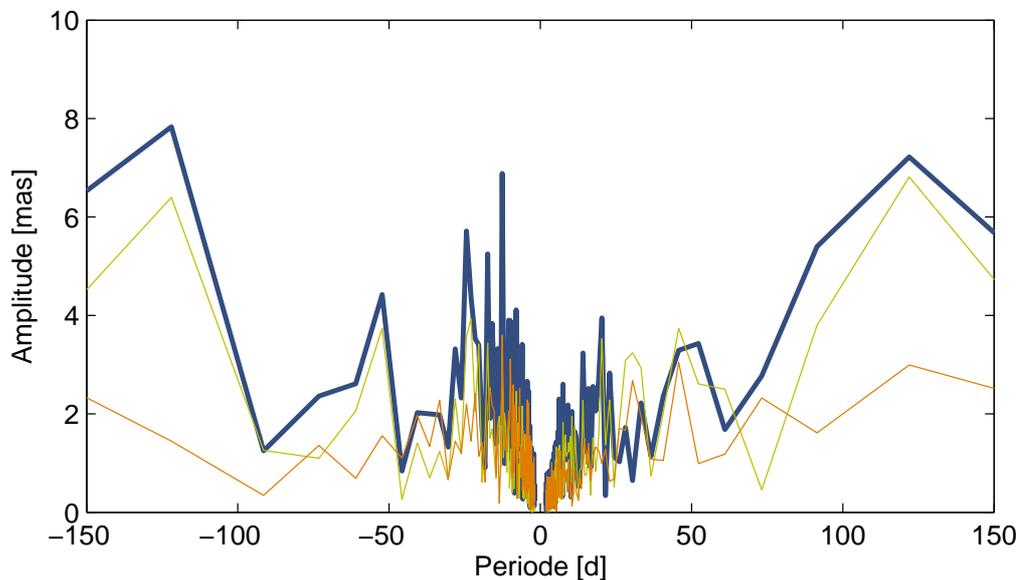


Abbildung 3.31: Anteile von Druck- und Windtermen in  $\hat{\chi}$ , Legende: Tabelle 3.18

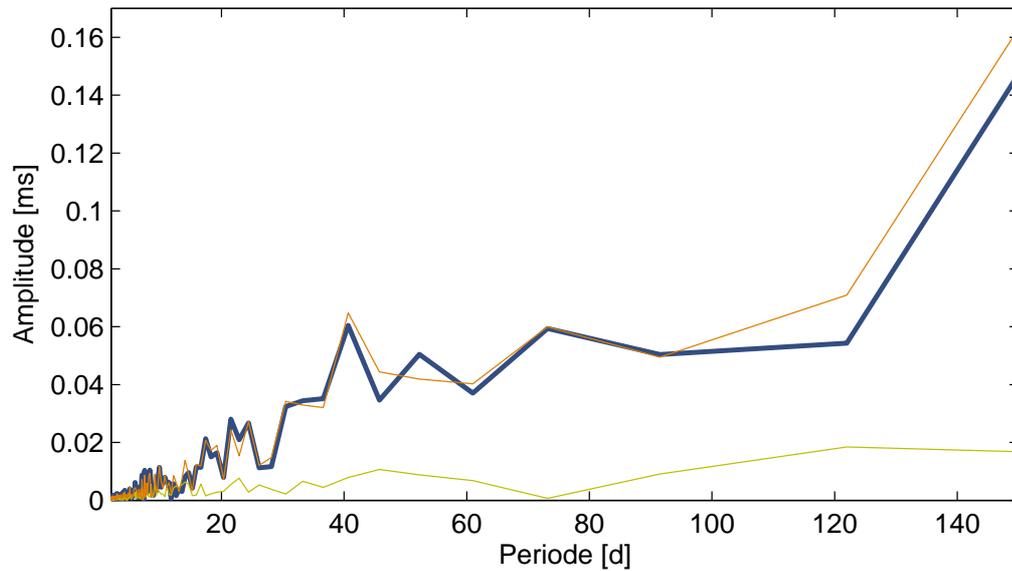


Abbildung 3.32: Anteile von Druck- und Windtermen in  $\chi_3$ , Legende: Tabelle 3.18

Es ist anzumerken, dass zur Berechnung des Amplitudenspektrums der Absolutbetrag der komplexen Fourier-Koeffizienten verwendet wurde. Damit erscheinen in den Abbildungen 3.31 und 3.32 negative Amplituden positiv, und das Spektrum von  $\chi_i^{p+w}$  kann nicht als Summe der beiden Teilspektren aufgefasst werden. Dieser Umstand hindert aber nicht daran, folgende qualitative Aussagen zu treffen:

- **Axiales Spektrum:** Der Windterm, welcher auf den Relativdrehimpuls zonaler Winde zurückzuführen ist, liefert auf allen Zeitskalen den bei weitem größten Beitrag zu  $\chi_3$ . Nach Barnes et al. (1983 [2]) ist der Druckterm nur für etwa 10 % der Variationen in der axialen Drehimpulsfunktion verantwortlich. Dieser Anteil steht mit meridionalen Massentransporten in Zusammenhang. Sie ändern das polare Trägheitsmoment der Erde.
- **Äquatoriales Spektrum:** Hier hat keiner der beiden Terme einen herausragenden Beitrag zu  $\hat{\chi}$ . Mit wachsender Periode lässt sich jedoch der Druckterm als größerer Einfluss identifizieren. Er ist mit Änderungen im tesseralen Teil des Auflastpotentials verbunden.

### 3.4 Atmosphärische Beiträge zu Polbewegung und LOD: High Frequency Case (6 h)

Die in Abschnitt 3.1.3 vorgestellten Drehimpulsfunktionen besitzen eine zeitliche Auflösung von 6 h und können somit zur Untersuchung täglicher und subtäglicher Signale in den Erdrotationsparametern herangezogen werden. Man geht dazu von den theoretischen Überlegungen der Abschnitte 2.4.2 und 2.4.3 aus. Speziell für die äquatorialen Komponenten sind dort die auszuwertenden Gleichungen durchwegs im Frequenzbereich angesetzt. Aber auch in der axialen Komponente wird die Darstellung im Frequenzbereich jener im Zeitbereich vorgezogen. Wie aus den Abbildungen 2.5 und 2.6 ersichtlich ist, kommt der Atmosphäre im hochfrequenten Bereich nämlich nur geringe Bedeutung zu. Die großen Beiträge der Ozeangezeiten können zum größten Teil aber modelliert werden. Nicht-modellierte ozeanische Effekte in Polbewegung und LOD erschweren jedoch den Vergleich von Erdrotationsparametern und Atmosphärendaten - vor allem im Zeitbereich. Deshalb erscheint eine Abschätzung der atmosphärischen Beiträge im Frequenzbereich sinnvoll. Im Folgenden werden durchwegs Amplituden aus der diskreten Fouriertransformation berechnet. Nach dem Abtasttheorem ist das bei den hier bearbeiteten 6-stündigen Zeitreihen nur für Frequenzen  $\sigma \leq 2$  cpd möglich.

Wie zu Beginn von Kapitel 3 bereits erwähnt, stammen die Zeitreihen der Erdrotationsparameter in diesem Abschnitt aus GPS-Beobachtungen. Dem Datensatz mit einer Auflösung von 1 h werden für jeden Tag des Jahres 2008 die Werte von Polbewegung und Tageslängenschwankung um 0:00, 6:00, 12:00 und 18:00 UTC entnommen. Für weitere Berechnungen muss in allen Parametern die angesprochene Korrektur wegen täglicher und subtäglicher Ozeangezeiten vorgenommen werden. Der Verfasser erhält zu diesem Zweck eine MATLAB-Subroutine (Autoren: McCarthy und Gambis [1997], Bizouard Ch. [2002], Plank L. [2009]), die für den untersuchten Zeitraum (Jahr 2008) die Anteile der Ozeangezeiten in  $x$ ,  $y$  und LOD mit der entsprechenden Auflösung von 6 h ermittelt. Durch Subtraktion dieser Reihen von den GPS-Serien wird der Hauptanteil der Ozeangezeiten in den Erdrotationsparametern beseitigt. Die Korrektur ist in den Abbildungen 3.33 und 3.34 über den Zeitraum 20.1.-5.3.2008 für  $x$  und LOD exemplarisch dargestellt. Für die Spektren der korrigierten Reihen sei auf die 2 folgenden Abschnitte verwiesen.

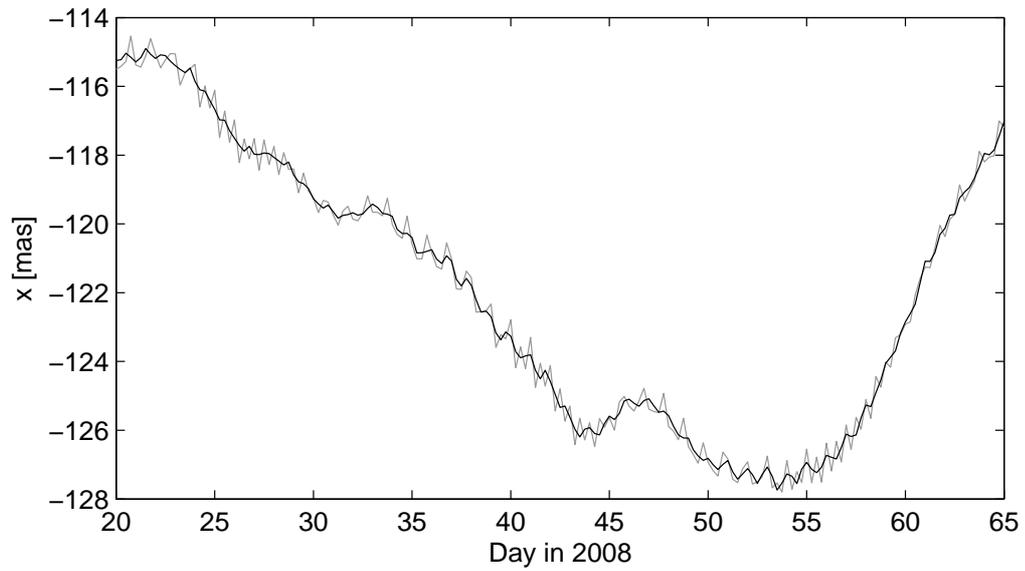


Abbildung 3.33: Grau:  $x$  aus GPS mit Ozeangezeiten, Schwarz:  $x$  nach Subtraktion des Ozeangezeitenmodells.

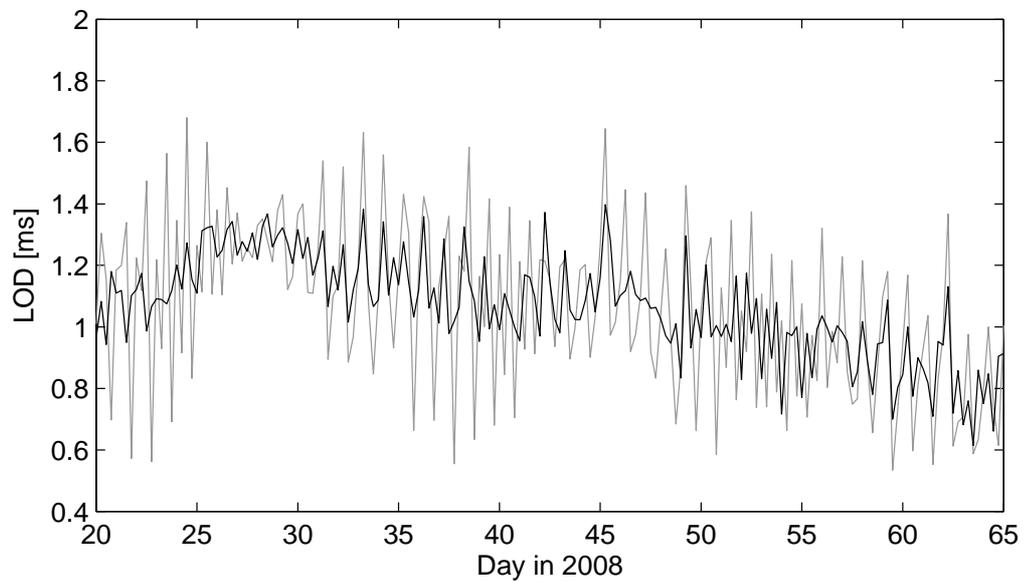


Abbildung 3.34: Grau: LOD aus GPS mit Ozeangezeiten, Schwarz: LOD nach Subtraktion des Ozeangezeitenmodells.

### 3.4.1 Polbewegung

Die Auswirkung von Variationen des äquatorialen atmosphärischen Drehimpulses in der Polbewegung wird analog zu Abschnitt 3.3.1 mit  $\hat{\mathbf{p}}_a$  bezeichnet. Will man bei der Berechnung von  $\hat{\mathbf{p}}_a$  neben dem CW auch die 2. Eigenschwingung des NDFW berücksichtigen, ist (2.97) in folgender Form zu verwenden:

$$\hat{\mathbf{p}}_a(\sigma) = \hat{\mathbf{T}}_p(\sigma)\hat{\chi}^p(\sigma) + \hat{\mathbf{T}}_w(\sigma)\hat{\chi}^w(\sigma) \quad (3.32)$$

In den Drehimpulsfunktionen  $\hat{\chi}^p$  und  $\hat{\chi}^w$  sind jeweils Druck- und Bewegungsterme für sich als komplexe Vektoren zusammengefasst, siehe dazu (2.91)-(2.92). Bei der diskreten Fouriertransformation dieser Vektoren fällt neben den Real- und Imaginärteilen von  $\hat{\chi}^p(\sigma)$  bzw.  $\hat{\chi}^w(\sigma)$  auch der zugehörige Frequenzvektor  $\sigma$  an. Für jeden Eintrag in  $\sigma$  werden mithilfe von (2.98) und (2.99) die Werte der Transferfunktionen  $\hat{\mathbf{T}}_p(\sigma)$ ,  $\hat{\mathbf{T}}_w(\sigma)$  an der Stelle  $\sigma$  ermittelt. Multipliziert man die so erhaltenen (komplexen) Vektoren anschließend wie in (3.32) mit den Fourier-Koeffizienten der Drehimpulsfunktionen, ist  $\hat{\mathbf{p}}_a$  über den gesamten diskreten Frequenzbereich  $\sigma$  festgelegt. Dieser Rechengang wird für alle Varianten der 6-stündigen Drehimpulsfunktionen (H10, H20 und H30) durchgeführt. Mittels

$$|\hat{\mathbf{p}}_a| = \sqrt{\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)^2 + \Im(\hat{\mathbf{p}}_a)^2} \quad (3.33)$$

lässt sich das jeweilige Amplitudenspektrum der atmosphärisch angeregten Polbewegung bestimmen. Für die Berechnungsvarianten H10 und H30 ist das Ergebnis, aufgeteilt in pro- und retrograde Anteile, in Abbildung 3.35 dargestellt. Die Wahl des Periodenbereichs von  $-16$  h bis  $30$  h fällt zum einen aus Gründen der Übersicht, da bei  $-24$  h Amplituden größer als  $100 \mu\text{as}$  vorhanden sind. Zum anderen zählt der retrograde Bereich von  $-16$  bis  $-48$  h nach den Ausführungen in Abschnitt 2.1.2 zur Nutation und nicht zur Polbewegung. Auch in den GPS-Reihen sind diese Frequenzen durch eine zusätzliche Bedingung auf Ebene der Normalgleichungen ausgespart. Das Spektrum der mit GPS geschätzten Polbewegung ohne Ozeangezeiten ist in Abbildung 3.36 wiedergegeben. Zur Berechnung werden die Absolutwerte der Polbewegung um die C04-Mittelwerte reduziert.

(Nebenbemerkung: Die Grenzfrequenzen zur Trennung von Polbewegung und Nutation sind in Abschnitt 2.1.2 in Zyklen pro Sterntag definiert. Alle Frequenzangaben des praktischen Teils basieren jedoch auf der UTC-Zeitskala. Streng genommen müsste also das Intervall  $(-1.5, -0.5)$  cpsd auf cpd umgerechnet werden.

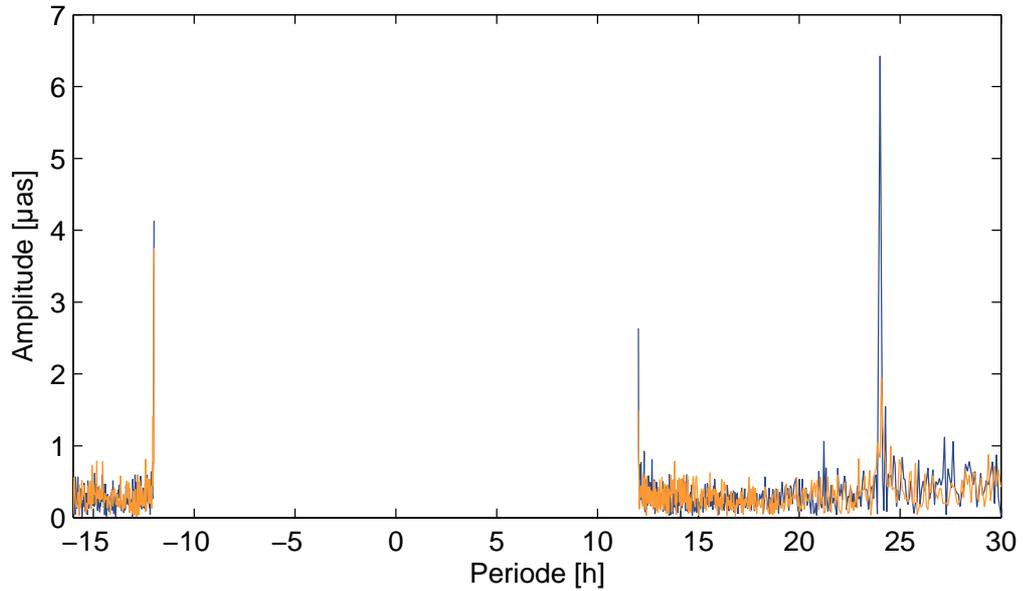


Abbildung 3.35: Amplitudenspektrum der atmosphärisch angeregten Polbewegung, berechnet aus 6-stündigen Drehimpulsfunktionen. Dunkelblau: **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB), Chamois: **H30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , Non-IB).

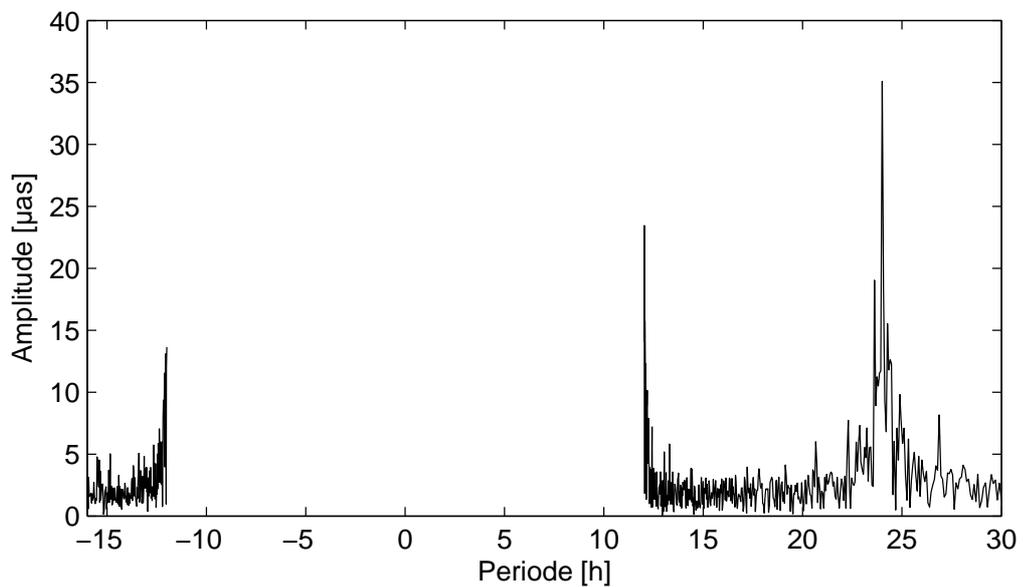


Abbildung 3.36: Amplitudenspektrum der täglichen und subtäglichen Polbewegung aus GPS-Beobachtungsdaten.

Diese Korrektur ist aber äußerst klein, sodass in allen Darstellungen der Polbewegung die Grenzfrequenz  $\sigma = -1.5$  cpd verwendet wird.) Vergleicht man die Abbildungen 3.35 und 3.36, so ist festzustellen, dass Variationen im atmosphärischen Drehimpuls nur etwa 25% der geodätisch beobachteten Polbewegung im betrachteten Zeitraum erklären. Diese Aussage vernachlässigt aber die Tatsache, dass in 3.36 noch immer ozeanische Anteile enthalten sein können. Geht man beispielsweise von einer realistischen Amplitude einer Ozeangezeitenwelle von  $200 \mu\text{as}$  und einem Modellfehler von 5-10% aus, beträgt der nicht-modellierte Anteil der Ozeangezeiten im betreffenden Frequenzband 10-20  $\mu\text{as}$ . Dieses Beispiel verdeutlicht noch einmal, dass im täglichen und subtäglichen Bereich ein Vergleich von atmosphärischen und geodätischen Daten erfolglos sein wird und man sich daher auf eine Abschätzung der Größenordnung der atmosphärischen Effekte beschränken muss.

Zu den in dieser Arbeit berechneten Größenordnungen dienen die mittleren Amplituden von Brzezinski und Petrov (2000 [14]) als Vergleichswerte, siehe dazu Tabelle 3.19. Es werden auch die in das Frequenzband der Nutation fallenden, retrograd täglichen atmosphärischen Effekte angegeben:

Periode [d]	Mittlere Amplitude
1.0	7 $\mu\text{as}$
0.5	2.9 $\mu\text{as}$
-0.5	2.9 $\mu\text{as}$
-1.0	183 $\mu\text{as}$
-1.2	30 $\mu\text{as}$

Tabelle 3.19: Mittlere Amplituden der von atmosphärischen Gezeiten und Eigenmoden verursachten hochfrequenten Signale in der täglichen Polbewegung. Quelle: Brzezinski und Petrov (2000 [14]).

Das äquatoriale Spektrum aus Abbildung 3.35 zeigt prinzipiell, dass die aus NCEP-Daten berechneten Drehimpulsfunktionen meist unterschiedliche Ergebnisse liefern als die ECMWF-Reihen. Die auffälligsten Diskrepanzen sind im prograden Bereich erkennbar. Zur genaueren Analyse sind in den nachstehenden Tabellen (3.20 bis 3.24) für alle Berechnungsvarianten die größten Amplituden in den jeweiligen Frequenzbändern nach (3.33) aufgegliedert. Real- und Imaginärteil

lassen sich dabei aus Druck- und Windanteilen zusammensetzen:

$$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a) = \Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p) + \Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w) \quad (3.34)$$

$$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a) = \Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p) + \Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w) \quad (3.35)$$

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>H10</b>	1.0000	6.4	1.1	6.3	2.4	0.8	-1.3	5.5
<b>H20</b>	1.0000	5.5	0.6	5.4	2.1	-0.2	-1.5	5.6
<b>H30</b>	1.0027	1.9	-0.5	-1.9	-0.3	-1.0	-0.2	-0.9

Tabelle 3.20: Maximale prograd tägliche ( $T \approx 24$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ]. Aufteilung der mittleren Amplitude (3.Spalte) in Real- und Imaginärteil und deren Druck- bzw. Windanteile. Berechnungsvarianten: **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB), **H20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), **H30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , Non-IB).

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>H10</b>	0.5007	2.6	-2.4	-1.0	0.3	0.1	-2.7	-1.1
<b>H20</b>	0.5007	2.6	-2.4	-1.1	0.3	0.1	-2.7	-1.2
<b>H30</b>	0.5007	1.4	-0.3	-1.4	0.2	-0.2	-0.5	-1.2

Tabelle 3.21: Maximale prograd halbtägliche ( $T \approx 12$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ].

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>H10</b>	-0.5000	4.4	-1.2	-4.0	-1.1	2.3	-0.1	-6.3
<b>H20</b>	-0.5000	4.2	-1.1	-4.0	-1.3	2.4	0.2	-6.4
<b>H30</b>	-0.5000	3.8	-3.7	-0.4	-2.1	3.6	-1.6	-4.0

Tabelle 3.22: Maximale retrograd halbtägliche ( $T \approx -12$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ].

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>H10</b>	-0.9973	114.4	37.6	-108.0	48.0	-80.4	-10.4	-27.6
<b>H20</b>	-0.9973	114.0	54.7	-100.0	65.1	-72.3	-10.4	-27.7
<b>H30</b>	-0.9946	164.1	-160.0	36.4	-146.5	43.6	-13.5	-7.2

Tabelle 3.23: Maximale retrograd tägliche ( $T \approx -24$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ].

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>H10</b>	-1.1845	14.7	14.2	3.9	0.9	0.3	13.3	3.6
<b>H20</b>	-1.1845	14.7	14.2	3.9	0.9	0.3	13.3	3.6
<b>H30</b>	-1.1845	13.1	11.6	6.1	0.9	0.3	10.7	5.8

Tabelle 3.24: Maximale retrograd tägliche ( $T \approx -28.8$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ].

Ganz allgemein lässt sich aus den Tabellen erkennen, dass die aus ECMWF-Daten ermittelten Drehimpulsfunktionen (H10 und H20) gleiche Ergebnisse liefern, die NCEP-Reihen sich davon mit Ausnahme des Frequenzbandes  $T = -1.2$  d aber stark unterscheiden. Während sich für die retro- und prograden Effekte im halbtäglichen Bereich die Differenzen ECMWF  $\Leftrightarrow$  NCEP hauptsächlich auf die Amplituden beschränken, sind bei  $T \approx \pm 24$  h auch die Phasen unterschiedlich. Dies kommt durch das entgegengesetzte Vorzeichen zwischen H10 (oder H20) und H30 zum Ausdruck - egal ob der Real- oder der Imaginärteil betrachtet wird. Vergleicht man schließlich noch mit den von Brzezinski und Petrov (2000 [14]) geschätzten Amplituden aus Tabelle 3.19, ist festzuhalten, dass mit den Varianten H10 und H20 im Wesentlichen sehr ähnliche Ergebnisse erzielt werden. Dies gilt aber nicht für den retrograd täglichen Bereich, wo Brzezinski und Petrov (2000 [14]) durchwegs doppelt so große Amplituden wie in dieser Arbeit angeben.

### 3.4.2 LOD

Wie schon in Abschnitt 3.3.2 diskutiert, muss in geodätisch beobachteten Tageslängenschwankungen immer der Effekt der zonalen Gezeitenkräfte berücksichtigt werden. In diesem Fall erhält man LODR durch Korrektur der LOD-Zeitreihe ohne Ozeangezeiten, wie sie in Abbildung 3.34 wiedergegeben ist. Um LODR mit der axialen Drehimpulsfunktion zu vergleichen, wird die zu (3.30) äquivalente Formulierung im Frequenzbereich angeschrieben:

$$\chi_3(\sigma) = \chi_3^p(\sigma) + \chi_3^w(\sigma) = \text{LODR}(\sigma) \quad (3.36)$$

$\chi_3$  geht dabei im Gegensatz zum äquatorialen Fall direkt aus der Summe von Massen- und Bewegungstermen hervor. Das einseitige Spektrum der axialen Drehimpulsfunktionen für H10 und H30 ist in Abbildung 3.37 dargestellt. Für LODR siehe Abbildung 3.38. So wie in der Polbewegung scheint die Atmosphäre nur

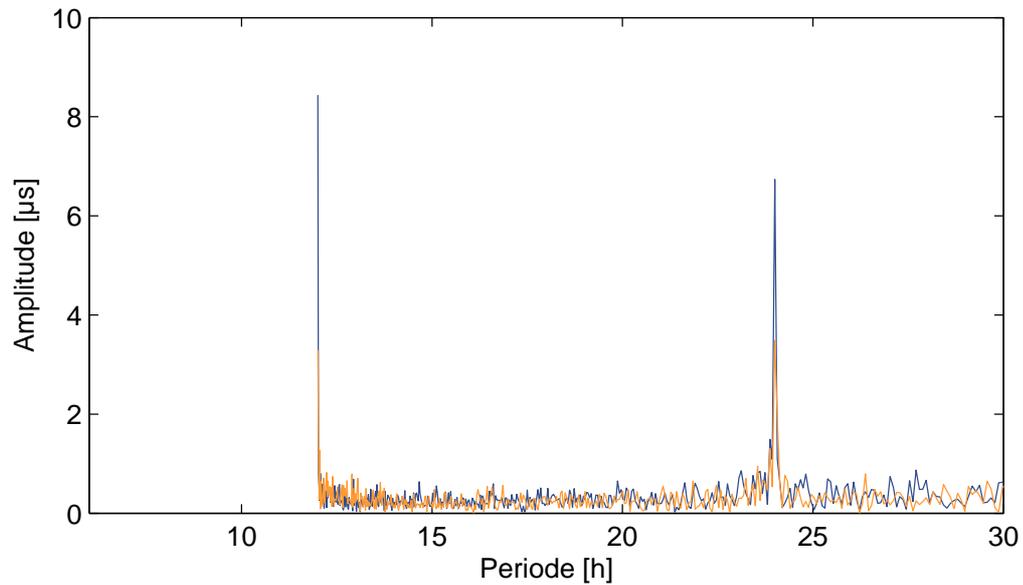


Abbildung 3.37: Amplitudenspektrum der atmosphärisch angeregten Tageslängenschwankung, berechnet aus 6-stündigen Drehimpulsfunktionen. Dunkelblau: **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB), Chamois: **H30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , Non-IB).

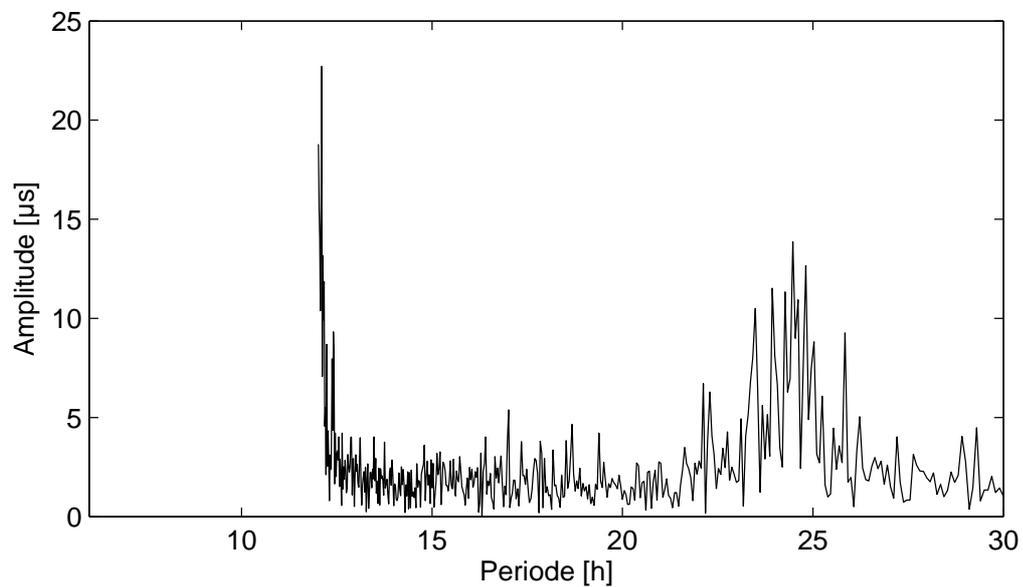


Abbildung 3.38: Amplitudenspektrum der täglichen und subtäglichem Tageslängenschwankung aus GPS-Beobachtungsdaten (ohne zonale Gezeitenwellen).

für einen kleinen Teil der Tageslängenschwankung bei  $T = 12$  h und  $T = 24$  h verantwortlich zu sein. Der Verfasser beschränkt sich daher wieder auf die Bestimmung der Größenordnung der hochfrequenten atmosphärischen Effekte in LOD. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 3.26 und 3.27 aufgelistet. Vergleichswerte aus der Literatur sind in Tabelle 3.25 angegeben.

Periode [d]	Mittlere Amplitude
0.5	$6 \mu s$
1.0	$3.3 \mu s$

Tabelle 3.25: Mittlere Amplituden der von atmosphärischen Gezeiten verursachten hochfrequenten Signale in der Tageslängenschwankung. Quelle: Brzezinski und Petrov (2000 [14]).

	$T_{max}$ [d]	$ \chi_3 $	$\Re(\chi_3)$	$\Im(\chi_3)$	$\Re(\chi_3^p)$	$\Im(\chi_3^p)$	$\Re(\chi_3^w)$	$\Im(\chi_3^w)$
<b>H10</b>	0.5000	8.4	8.4	0	-5.4	0	13.8	0
<b>H20</b>	0.5000	7.8	7.8	0	-5.7	0	13.5	0
<b>H30</b>	0.5000	3.3	3.3	0	-9.9	0	13.2	0

Tabelle 3.26: Maximale halbtägliche ( $T \approx 12$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Tageslängenschwankung in  $[\mu s]$ . Aufteilung der mittleren Amplitude (3.Spalte) in Real- und Imaginärteil und deren Druck- bzw. Windanteile. Berechnungsvarianten: **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB), **H20** (ECMWF-Daten,  $\int dr$ , Non-IB), **H30** (NCEP-Daten,  $\int dp$ , Non-IB).

	$T_{max}$ [d]	$ \chi_3 $	$\Re(\chi_3)$	$\Im(\chi_3)$	$\Re(\chi_3^p)$	$\Im(\chi_3^p)$	$\Re(\chi_3^w)$	$\Im(\chi_3^w)$
<b>H10</b>	1.0000	6.7	-6.1	2.8	-2.8	-1.5	-3.3	4.3
<b>H20</b>	1.0000	8.7	-7.7	4.1	-4.4	-0.3	-3.3	4.4
<b>H30</b>	1.0000	3.5	-1.1	3.3	-3.2	-4.2	2.1	7.5

Tabelle 3.27: Maximale tägliche ( $T \approx 24$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Tageslängenschwankung in  $[\mu s]$ .

Es ist ersichtlich, dass die aus ECMWF-Daten bestimmten Drehimpulsfunktionen (H10 und H20) vergleichbare Ergebnisse liefern, diese aber jedoch um rund das Doppelte größer sind als die NCEP-Amplituden. Das kann auch aus der Abbildung 3.37 abgelesen werden. Für die Effekte mit täglicher Periode besteht daher bessere Übereinstimmung zwischen H30 und Brzezinski und Petrov (2000 [14]), für die halbtäglichen Signale sind es hingegen die Berechnungsvarianten H10 und H20.

### 3.4.3 Druck- und Windterme in den Drehimpulsfunktionen - High Frequency Case

Für die in den vorangegangenen Ausführungen behandelten Drehimpulsfunktionen mit einer zeitlichen Auflösung von 6 h sollen ähnlich wie in Abschnitt 3.3.3 die unterschiedlichen Rollen von Massen- und Bewegungstermen untersucht werden. Der Verfasser verwendet dazu die Zeitreihen der Berechnungsvariante H10. Wichtig ist, dass dieser Vergleich für den hochfrequenten (äquatorialen) Fall auf Ebene der Polbewegung erfolgen muss. Denn erst durch Multiplikation mit der entsprechenden Transferfunktion  $\hat{\mathbf{T}}_p$  oder  $\hat{\mathbf{T}}_w$  erhalten Druckterme und Windterme jene Größenordnungen aus denen sich die Polbewegung zusammensetzt. (Für langperiodische atmosphärische Anregungen der Erdrotation besitzen Massen- und Bewegungsterme dieselbe Wertigkeit und können daher bereits auf Ebene der Drehimpulsfunktionen addiert werden.) In der axialen Komponente sind bekanntlich keine Umrechnungen notwendig.

Aus der diskreten Fouriertransformation werden die Amplitudenspektren von  $\hat{\mathbf{p}}_a^p$ ,  $\hat{\mathbf{p}}_a^w$ ,  $\hat{\mathbf{p}}_a^{p+w}$ ,  $\chi_3^p$ ,  $\chi_3^w$ ,  $\chi_3^{p+w}$  berechnet. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 3.39 - 3.41 dargestellt. Die Grafiken illustrieren darüberhinaus die Amplitudenwerte der Tabellen 3.20 - 3.24 bzw. 3.26 und 3.27. Dass das Amplitudenspektrum nicht die Summe der beiden Teilspektren darstellt, wurde bereits in Abschnitt 3.3.3 erwähnt.

Grafiken und Tabellenwerte können folgendermaßen interpretiert werden:

- **Axiales Spektrum:** Der Bewegungsterm liefert wie schon im langperiodischen Fall den Hauptbeitrag zum axialen Drehimpuls der Atmosphäre. Der Massenterm besitzt aber dennoch einen nicht zu vernachlässigenden Anteil. Dadurch, dass beide Terme meist entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen, reduziert der Druckterm die Gesamtamplitude.

	$\hat{\mathbf{p}}_a^p$ bzw. $\chi_3^p$
	$\hat{\mathbf{p}}_a^w$ bzw. $\chi_3^w$
	$\hat{\mathbf{p}}_a^{p+w}$ bzw. $\chi_3^{p+w}$

Tabelle 3.28: Legende zu den grafischen Darstellungen der Massen- und Bewegungsterme

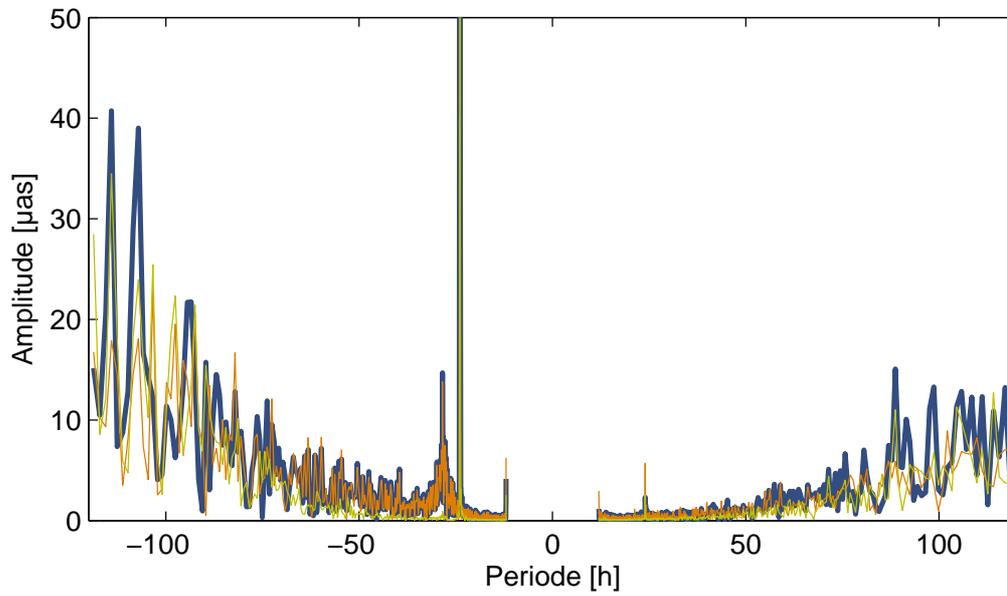


Abbildung 3.39: Anteile von Druck- und Windtermen in  $\hat{\mathbf{p}}_a^{p+w}$ , Legende: Tabelle 3.28

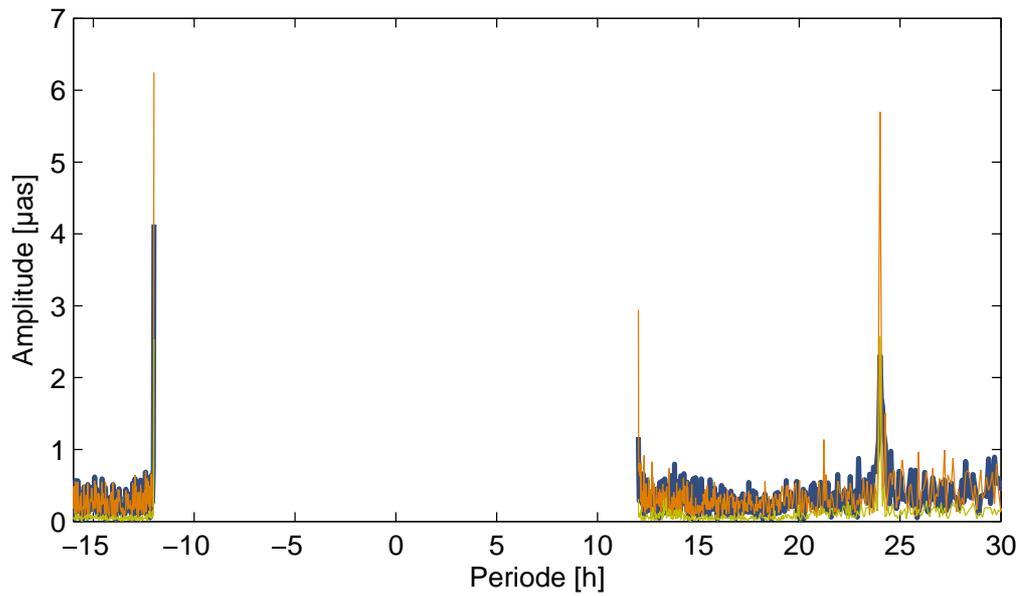


Abbildung 3.40: Detail zu Abbildung 3.39 für den täglichen Bereich, Legende: Tabelle 3.28

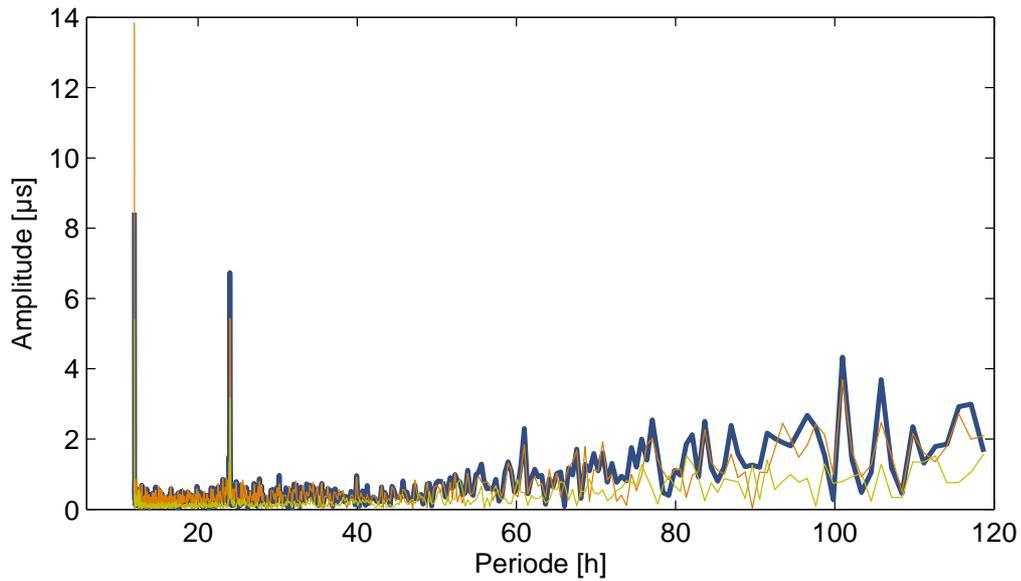


Abbildung 3.41: Anteile von Druck- und Windtermen in  $\chi_3$ , Legende: Tabelle 3.28

- Äquatoriales Spektrum:** Abbildung 3.40 zeigt die geringen Amplituden im prograden und retrograd halbtäglichen Frequenzbereich, während Abbildung 3.39 den retrograd täglichen Bereich veranschaulicht und an das äquatoriale Spektrum 3.31 anknüpfen soll. ( $T = 120$  h entspricht einer Periode von 5 d zum Vergleich mit dem langperiodischen Fall.) Bemerkenswert ist, dass mit Ausnahme des Frequenzbandes von  $\sigma \approx -1.0$  cpd der Bewegungsterm den dominanten Einfluss auf die Polbewegung darstellt. Dies ist auch aus den Tabellen 3.20 - 3.24 ersichtlich. Für Perioden  $|T| > \pm 2$  d kommt dem Druckterm wieder mehr Bedeutung zu. Es mag überraschend sein, dass bei  $\sigma \approx -1.0$  cpd trotz der starken retrograd täglichen Anteile in den Windtermen der bisher gezeigten Drehimpulsfunktionen der Massenterm über den Bewegungsterm zu stellen ist. Dies kann aber mit der unterschiedlichen Wertigkeit von  $\hat{\chi}^p$  und  $\hat{\chi}^w$  für  $\sigma \approx -1.0$  cpd begründet werden, welche durch das Koeffizientenverhältnis  $a_p \gg a_w$  zum Ausdruck kommt. (Siehe dazu Abschnitt 2.4.2 bzw. Abbildung 2.9.)

Abschließend ist zu erwähnen, dass die Grafiken zwar ausschließlich für die Berechnungsvariante H10 erstellt wurden, die eben getroffenen Aussagen aber durchaus

für alle anderen Varianten, insbesondere H20, zutreffen.

### 3.5 Atmosphärische Beiträge zu Polbewegung und LOD: High Frequency Case (1 h)

Der Verfasser versucht in diesem abschließenden Teil der Arbeit, den Transferfunktionsansatz auch für die stündlichen Drehimpulsfunktionen aus Abschnitt 3.2.3 durchzuführen und dabei ähnliche Ergebnisse wie bei den 6-stündigen Reihen zu erzielen. Die dafür notwendigen Berechnungen erfolgen wieder hauptsächlich im Frequenzbereich.

Die Drehimpulsfunktionen im Zeitraum 8.8.-31.8.2008 sollen mit den Erdrotationsparametern des Beobachtungsprogrammes CONT08 (12.8.-26.8.2008) verglichen werden. Alle Zeitreihen besitzen eine Auflösung von 1 h. Neben dem bereits behandelten GPS-Datensatz stehen nun auch die VLBI-Schätzungen von  $x$ ,  $y$  und  $dUT1$  zur Verfügung. Die Erdrotationsparameter aus VLBI sind als tägliche Files mit stündlichen Einträgen von 0:00 bis 24:00 UTC vorhanden. Damit entstehen bei Aneinanderreihung aller Sessions immer 2 Werte um Mitternacht, die gemittelt werden müssen. Darüber hinaus ist der Vektor von  $dUT1$  in LOD umzurechnen. Man bedient sich dazu der Beziehung

$$\text{LOD} = -\frac{d(dUT1)}{dt}$$

und nähert die Ableitung von  $dUT1$  numerisch über zentrale Differenzen an. So wie für die Beobachtungsdaten im Abschnitt 3.4 sind in den GPS- und VLBI-Reihen alle Gezeiteneffekte bestmöglich zu eliminieren. In der Polbewegung müssen für den Interessensbereich von CONT08 die Einflüsse täglicher und subtäglicher Ozeangezeiten subtrahiert werden, in LOD wie in Abschnitt 3.3.2 zusätzlich auch die zonalen Gezeitenkräfte mit 14-tägiger und 28-tägiger Periode. Die korrigierten GPS- und VLBI-Daten seien bereits an dieser Stelle gegenübergestellt. Zur Bestimmung der Spektren in den Abbildungen 3.42 und 3.43 werden die Zeitreihen von  $x$ ,  $y$  und LOD jeweils um mittlere Spline-Interpolierende reduziert, welche dem verwendeten VLBI-Datensatz entnommen sind.

Während GPS und VLBI für die Tageslängenschwankung ein vergleichbares Spektrum besitzen (man achte auf die Amplituden bei 12 und 24 h), ist in der Polbewegung überhaupt keine Übereinstimmung gegeben. Da außerdem die atmosphärischen Effekte in den Erdrotationsparametern unter  $10 \mu\text{as}$  (äquatorial)

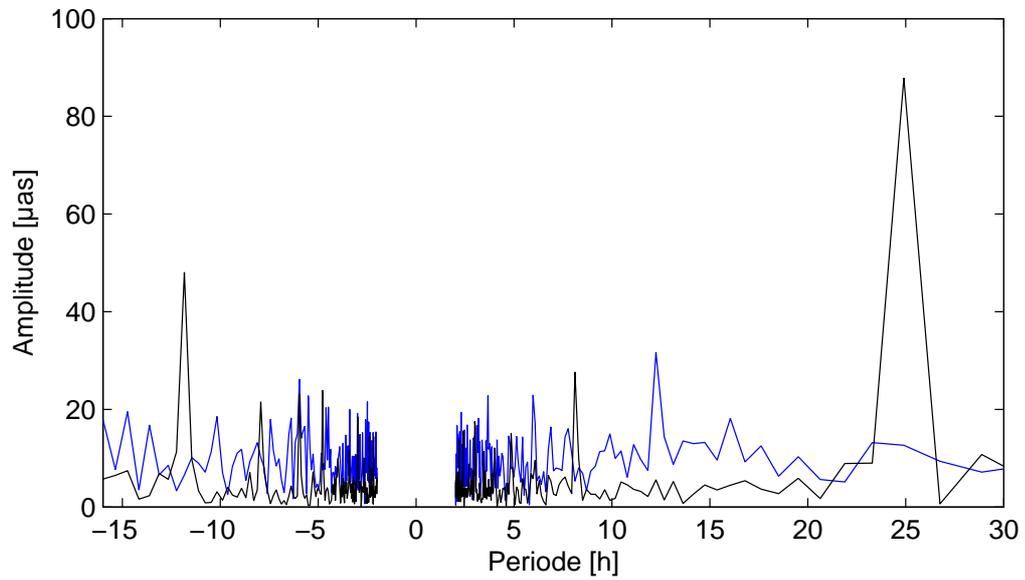


Abbildung 3.42: Amplitudenspektrum der hochaufgelösten Polbewegung aus GPS (Schwarz) und VLBI (Blau). Der retrograd täglicher Bereich zählt zur Nutation.

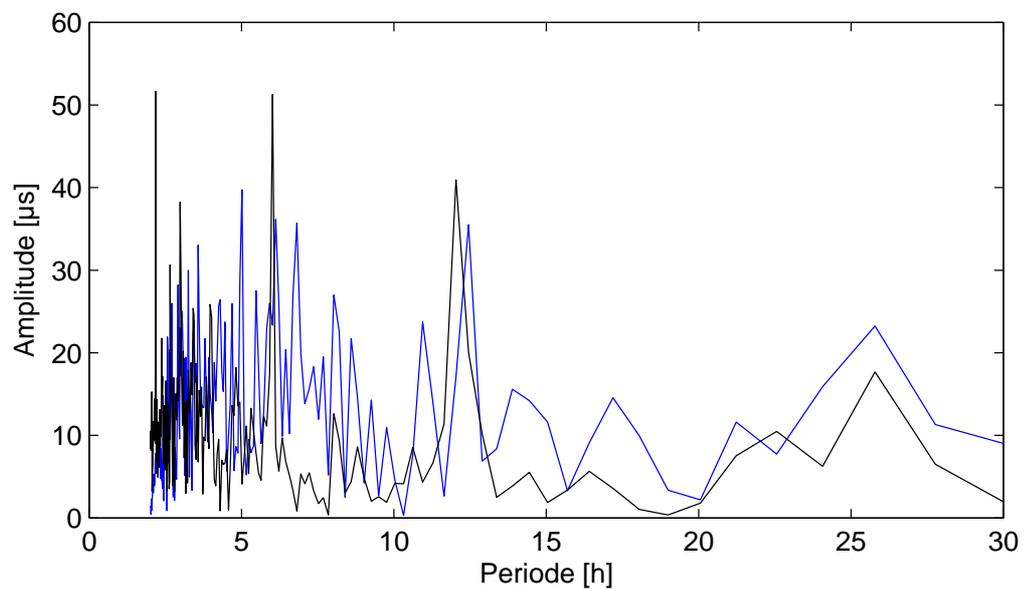


Abbildung 3.43: Amplitudenspektrum der hochaufgelösten Tageslängenschwankung aus GPS (Schwarz) und VLBI (Blau).

bzw.  $10 \mu\text{s}$  (axial) liegen werden, und diese Größenordnung dem Amplitudenniveau des Rauschens in  $(x, y)$  und LOD entspricht, wird von einem Vergleich von stündlichen Atmosphären- und Beobachtungsdaten abgesehen.

### 3.5.1 Polbewegung

Zur Bestimmung der atmosphärisch angeregten Polschwankung  $\hat{\mathbf{p}}_a$  aus stündlichen Drehimpulsfunktionen dient die spektrale Formulierung über druck- und windspezifische Transferfunktionen in (3.32). Die Gleichung wird für alle Berechnungsvarianten (C11, C12, C21, C22) unter Zuhilfenahme der diskreten Fouriertransformation ausgewertet. Real- und Imaginärteile führen mit (3.33) auf die Amplitudenspektren, welche für C11 und C12 in Abbildung 3.44 exemplarisch veranschaulicht sind:

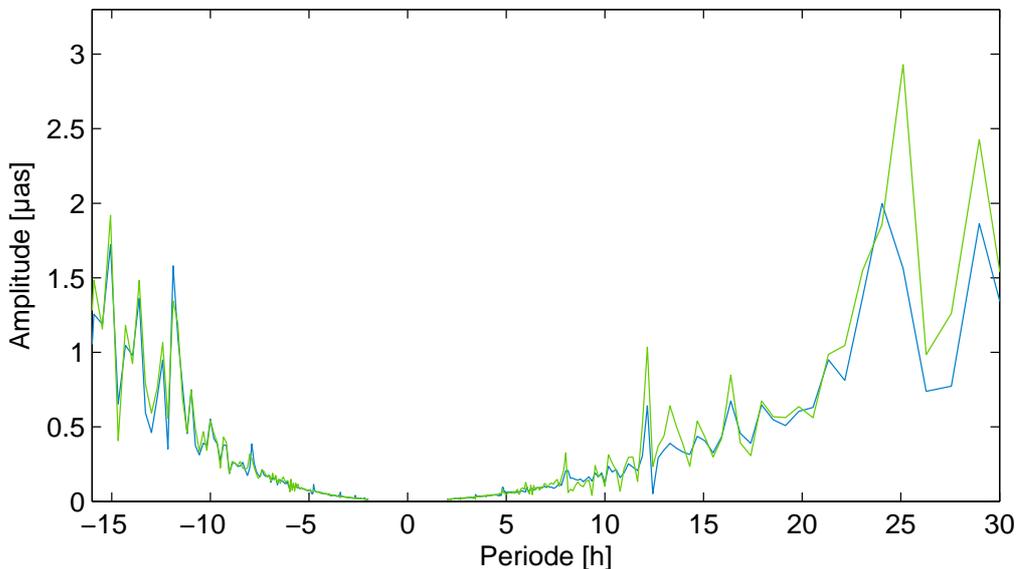


Abbildung 3.44: Amplitudenspektrum der atmosphärisch angeregten Polbewegung, berechnet aus stündlichen Drehimpulsfunktionen. Hellgrün: C11 (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 1, Non-IB), Hellblau: C12 (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 2, Non-IB).

Für beide Varianten der Verkettung entstehen ähnliche Spektren - die Größenordnung der charakteristischen Amplituden bei  $T = -12, 12$  und  $24$  h ist aber immer um zumindest 50% geringer als man nach den Ergebnissen in Abschnitt 3.4.1 erwarten würde. Um Aufschlüsse darüber zu erhalten, warum dem so ist, werden

für die maximalen Amplituden der wichtigsten Frequenzbänder wieder Real- und Imaginärteile in Druck- und Windterme aufgliedert. Der Verfasser beschränkt sich in den Tabellen 3.29 - 3.33 auf die Berechnungsvarianten C11 und C12.

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>C11</b>	1.0463	2.9	-2.7	1.0	-1.3	-2.0	-1.4	3.0
<b>C12</b>	1.0018	2.0	1.0	1.7	-0.4	2.2	1.4	-0.5

Tabelle 3.29: Maximale prograd tägliche ( $T \approx 24$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ]. Berechnungsvarianten: **C11** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 1, Non-IB), **C12** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 2, Non-IB).

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>C11</b>	0.5063	1.0	-0.2	1.0	-0.7	-0.5	0.5	1.5
<b>C12</b>	0.5063	0.6	0.0	0.6	-0.7	-0.8	0.7	1.4

Tabelle 3.30: Maximale prograd halbtägliche ( $T \approx 12$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ].

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>C11</b>	-0.4956	1.3	0.7	-1.1	-1.5	1.1	2.2	-2.2
<b>C12</b>	-0.4956	1.6	1.3	-1.0	-1.3	1.2	2.6	-2.2

Tabelle 3.31: Maximale retrograd halbtägliche ( $T \approx -12$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ].

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>C11</b>	-1.0018	65.7	-29.2	-58.8	4.2	-35.7	-33.4	-23.1
<b>C12</b>	-1.0018	68.5	-31.6	-60.8	1.5	-36.4	-33.1	-24.4

Tabelle 3.32: Maximale retrograd tägliche ( $T \approx -24$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ].

	$T_{max}$ [d]	$ \hat{\mathbf{p}}_a $	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$	$\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$	$\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$
<b>C11</b>	-1.2073	10.1	-8.9	-4.9	-0.7	0.2	-8.2	-5.1
<b>C12</b>	-1.2073	10.3	-8.8	-5.4	-0.8	0.3	-8.0	-5.7

Tabelle 3.33: Maximale retrograd tägliche ( $T \approx -28.8$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Polbewegung in [ $\mu\text{as}$ ].

Wird mit den numerischen Werten der Tabellen 3.20 - 3.24 für den 6 h-Fall verglichen, fällt auf, dass die Amplituden der stündlichen Drehimpulsfunktionen für jedes Frequenzband in allen spektralen Komponenten entscheidend geringer sind. (Einzig für  $T = -28.8$  h erhält man vergleichbare Ergebnisse.) Zusätzlich besitzen vor allem bei  $T = -12, 12$  und  $24$  h die zu addierenden Realteile  $\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$  und  $\Re(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$  entgegengesetztes Vorzeichen und heben sich folglich in  $\Re(\hat{\mathbf{p}}_a)$  auf. Das gleiche gilt für die Imaginärteile.

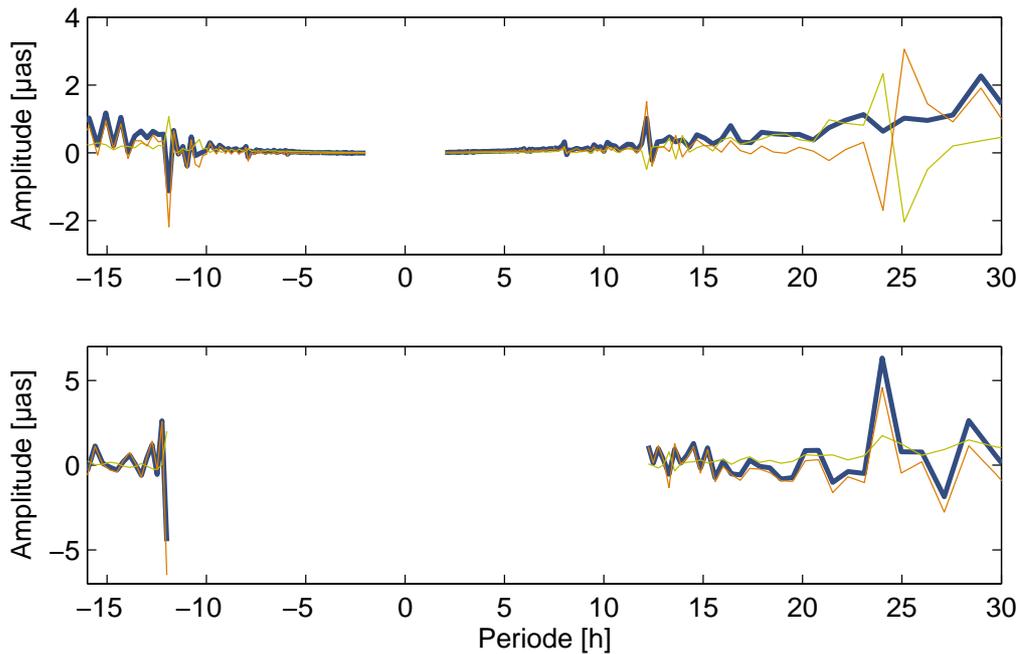


Abbildung 3.45: Amplitudenspektren (ohne Absolutbetrag) für die Imaginärteile der atmosphärisch angeregten Polbewegung:  $\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$  (Grün),  $\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$  (Orange) und  $\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$  (Dunkelblau). Oben: Spektrum der stündlichen Drehimpulsfunktion **C11** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 1, Non-IB), unten: Spektrum der 6-stündigen Drehimpulsfunktion **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB).

Die „Gegenphase“ von Druck- und Windtermen in den stündlichen Drehimpulsfunktionen ist in Abbildung 3.45 verdeutlicht. Es sind dort die positiven und negativen Amplituden von  $\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^p)$ ,  $\Im(\hat{\mathbf{p}}_a^w)$  sowie  $\Im(\hat{\mathbf{p}}_a)$  eingetragen. Zum Vergleich wird auch das Spektrum für die 6 h-Reihen über denselben Zeitraum (8.8.-31.8.2008) dargestellt. Man beachte die unterschiedliche Skalierung der Ordinatenachsen.

### 3.5.2 LOD

Zur Abschätzung der hochfrequenten atmosphärischen Effekte in der axialen Komponente der Erdrotation werden wieder Massen- und Bewegungsterme von  $\chi_3$  addiert und in den Frequenzbereich transformiert. Das Amplitudenspektrum für die Berechnungsvarianten C11 und C12 ist in Abbildung 3.46 wiedergegeben, Real- und Imaginärteile sind in den Tabellen 3.34 und 3.35 aufgliedert.

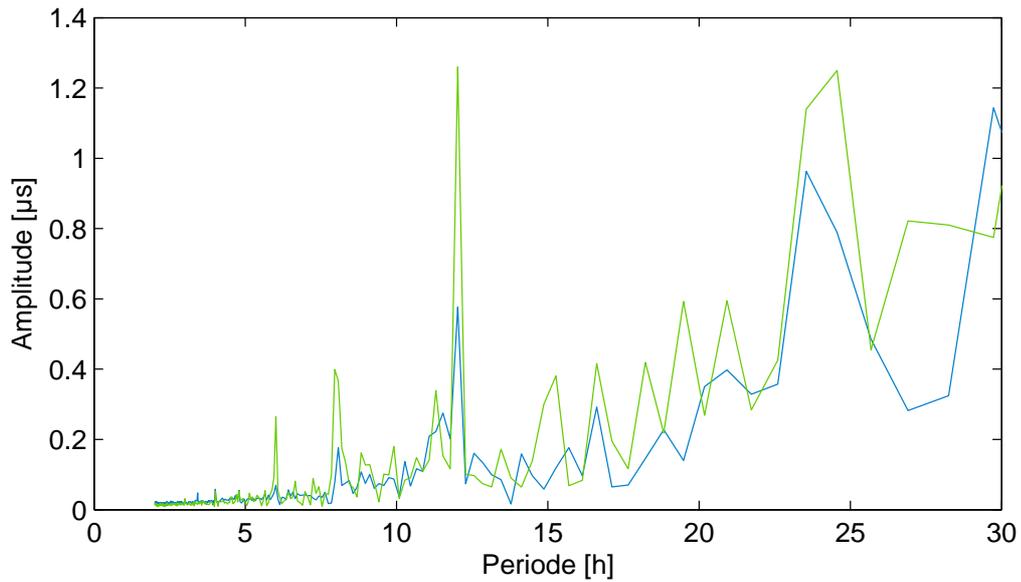


Abbildung 3.46: Amplitudenspektrum der atmosphärisch angeregten Tageslängenschwankung, berechnet aus stündlichen Drehimpulsfunktionen. Hellgrün: **C11** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 1, Non-IB), Hellblau: **C12** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 2, Non-IB).

	$T_{max}$ [d]	$ \chi_3 $	$\Re(\chi_3)$	$\Im(\chi_3)$	$\Re(\chi_3^p)$	$\Im(\chi_3^p)$	$\Re(\chi_3^w)$	$\Im(\chi_3^w)$
<b>C11</b>	0.5009	1.3	0.7	1.0	-2.2	2.1	2.9	-1.1
<b>C12</b>	0.5009	0.6	0.2	0.5	-2.2	2.8	2.4	-2.3

Tabelle 3.34: Maximale halbtägliche ( $T \approx 12$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Tageslängenschwankung in  $[\mu s]$ . Berechnungsvarianten: **C11** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 1, Non-IB), **C12** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 2, Non-IB).

	$T_{max}$ [d]	$ \chi_3 $	$\Re(\chi_3)$	$\Im(\chi_3)$	$\Re(\chi_3^p)$	$\Im(\chi_3^p)$	$\Re(\chi_3^w)$	$\Im(\chi_3^w)$
<b>C11</b>	1.0236	1.3	-0.5	1.1	0.2	2.1	-0.7	-1.0
<b>C12</b>	0.9809	1.0	0.2	0.9	0.1	-1.3	0.1	2.2

Tabelle 3.35: Maximale tägliche ( $T \approx 24$  h) Amplituden in der atmosphärisch angeregten Tageslängenschwankung in  $[\mu s]$ .

Abgesehen davon, dass C11 und C12 sehr unterschiedliche Ergebnisse liefern, sind die Amplituden für die stündlichen axialen Drehimpulsfunktionen ganz allgemein deutlich kleiner als bei den entsprechenden 6-stündigen Reihen aus Abschnitt 3.4.2. Die Diskrepanz fällt noch größer aus als dies bei der Polbewegung der Fall ist. Grund dafür ist, dass sich bei Addition von  $\Re(\chi_3^p)$  und  $\Re(\chi_3^w)$  bzw.  $\Im(\chi_3^p)$  und  $\Im(\chi_3^w)$  positive und negative Amplituden durchwegs aufheben. Dieser Effekt ist in Abbildung 3.47 illustriert.

Die Unterschiede zwischen  $\chi_3$  aus den beiden Berechnungsvarianten C11 und H10 lassen sich auch im Zeitbereich (Abbildung 3.48) veranschaulichen.  $\chi_3^p$ ,  $\chi_3^w$  und  $\chi_3$  werden dazu um ihre Mittelwerte reduziert, sodass gut zu erkennen ist, wie  $\chi_3$  aus der Addition von Massen- und Bewegungstermen hervorgeht. Die einzelnen Komponenten (Druck- und Windterm) in C11 und H10 sind sich durchaus ähnlich, die geringere Amplitude in den stündlichen Funktionen wird aber bereits deutlich. Der Vergleich der Summenkurven für C11 und H10 zeigt schließlich, wie sich in den stündlichen Reihen Massen- und Bewegungsterm abschwächen.

Abschließend möchte der Verfasser darauf hinweisen, dass die Abschätzung der atmosphärischen Beiträge zu Polbewegung und LOD auch für die stündlichen Drehimpulsfunktionen ohne Verkettung der 12 h-Bögen durchgerechnet wird. In den Spektren treten in diesem Fall aber genauso geringe Amplituden wie unter Anwendung von Variante 1 oder 2 auf. Da also mit keiner Form der stündlichen Drehimpulsfunktionen die numerischen Werte aus Abschnitt 3.4 bzw. jene von Brzezinski und Petrov (2000 [14]) reproduziert werden können, ist der Schluss zu

- $\chi_3^p$  im Zeit- und Frequenzbereich
- $\chi_3^w$  im Zeit- und Frequenzbereich
- $\chi_3^{p+w}$  im Zeit- und Frequenzbereich

Tabelle 3.36: Legende zu den Abbildungen 3.47 und 3.48

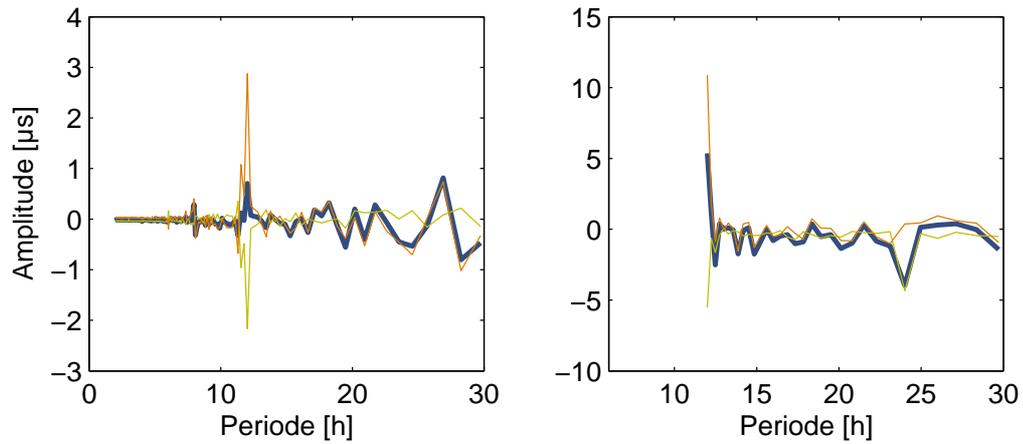


Abbildung 3.47: Amplitudenspektren (ohne Absolutbetrag) für die Realteile der atmosphärisch angeregten Tageslängenschwankung:  $\Re(\chi_3^p)$ ,  $\Re(\chi_3^w)$  und  $\Re(\chi_3)$ . Links: Spektrum der stündlichen Drehimpulsfunktion **C11** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 1, Non-IB), rechts: Spektrum der 6-stündigen Drehimpulsfunktion **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB).

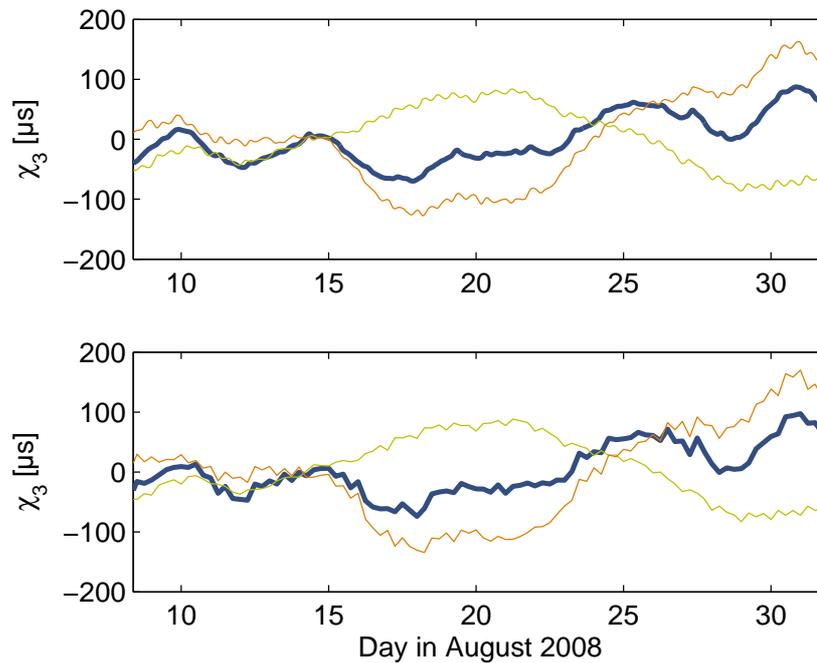


Abbildung 3.48: Axiale Drehimpulsfunktionen  $\chi_3^p$ ,  $\chi_3^w$  und  $\chi_3$ . Oben: stündliche Daten **C11** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Verkettungsvariante 1, Non-IB), unten: 6-stündige Daten **H10** (ECMWF-Daten,  $\int dp$ , Non-IB).

### 3.5. *ATMOSPHERISCHE BEITRÄGE: HIGH FREQUENCY CASE (1 H)* 115

ziehen, dass der hochaufgelöste Datensatz aus der 4DVar-Analyse für die Aufgabenstellung dieser Arbeit nicht geeignet ist.



## Kapitel 4

# Conclusio und Ausblick

Ganz allgemein wurde in der vorliegenden Diplomarbeit der Einfluss der Atmosphäre auf Polbewegung und Tageslängenschwankung untersucht. Je nach behandelte Zeitskala kamen dabei unterschiedliche Modellierungsansätze zum Einsatz. Während für Perioden ab einigen wenigen Tagen die Formulierung im Zeitbereich unter Berücksichtigung des Chandler Wobbles ausreichend war, musste im sub-täglichen Bereich auch die Eigenschwingung der Free Core Nutation eingebunden werden.

Die atmosphärischen Effekte in der Erdrotation sind für den langperiodischen Fall um ein Vielfaches größer als im hochfrequenten Bereich. Die geringere Größe der täglichen und sub-täglichen atmosphärischen Signale erschwert den Vergleich mit geodätisch beobachteten Erdrotationsparametern. Diese weisen aber ihrerseits auch ein starkes Rauschen auf und enthalten nicht-modellierbare Ozeanefekte. Die Diskrepanz zwischen den hochaufgelösten GPS- und VLBI-Serien wird vor allem in der Polbewegung offensichtlich. Neben diesen grundlegenden Aussagen können für die 3 unterschiedenen Fälle nochmals die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst werden:

### Low Frequency Case

- Atmosphärische Drehimpulsfunktionen und beobachtete Erdrotationsparameter aus C04 stimmen sehr gut überein. Speziell in der axialen Komponente erhält man hohe Korrelationskoeffizienten von 0.98. Auch die äquatorialen Komponenten sind mit Korrelationskoeffizienten von 0.70 bis 0.80 gut vergleichbar.

- Der Integrationsansatz zeigt anschaulich, wie groß der Beitrag der Atmosphäre zur Polbewegung für Frequenzen  $\sigma < \Omega$  ist.
- Bei Vernachlässigung der IB-Korrektur in den Massentermen werden durchwegs schlechtere Ergebnisse erzielt.
- Der Windterm liefert für große Perioden den entscheidenden Beitrag zu LOD. In der Polbewegung ist der Druckterm etwas dominanter.

#### High Frequency Case (6 h)

- Sowohl in der Polbewegung als auch in LOD sind die mittleren Amplituden der atmosphärischen Effekte immer kleiner als  $10 \mu\text{as}$  bzw  $10 \mu\text{s}$ , was durchaus mit den Ergebnissen aus der Literatur einhergeht. Es bestehen aber deutliche Unterschiede zwischen den Berechnungsvarianten (ECMWF und NCEP).
- Ein wesentlicher Beitrag der Atmosphäre zur Nutation wird durch Amplituden von mehr als  $100 \mu\text{as}$  bei einer terrestrischen Frequenz von  $-1.0 \text{ cpd}$  angezeigt.
- Hochfrequente axiale und äquatoriale Variationen des atmosphärischen Drehimpulses werden zum größten Teil vom Windterm verursacht.

#### High Frequency Case (1 h)

- Mit den stündlichen Drehimpulsfunktionen aus der 4DVar-Analyse können nicht dieselben Ergebnisse wie mit den 6-stündigen Reihen erzielt werden. Die mittleren Amplituden in Polbewegung und LOD liegen generell um mehr als 50% unter den erwarteten Werten, da sich Druck- und Windterme im Spektrum gegenseitig abschwächen.

Es bleibt zu erwähnen, dass in dieser Arbeit zur Berechnung des variablen Drehimpulses der Erde nur die Atmosphäre herangezogen wurde. Eine bessere Übereinstimmung zwischen geophysikalischen Daten und geodätisch beobachteten Erdrotationsparametern wäre durch Einführung von Drehimpulsfunktionen für alle fluiden Teile der Erde, wie beispielsweise Kern oder Ozeane, zu erreichen. Zur Reduktion der Beobachtungsreihen ist auch ein verbessertes Modell der täglichen

und subtäglichen Ozeangezeiten unumgänglich. Insbesondere bedarf es in Zukunft aber auch atmosphärischer Analysedaten mit einer feineren zeitlichen Auflösung als 6 h, um hochfrequente atmosphärische Effekte in der Erdrotation erfolgreich modellieren zu können.



# Anhang A

## Variablen und Symbole

### A.1 Schreibweise von Variablen

$x, \omega$	Reelle Zahl
$\hat{x}, \hat{\omega}$	Komplexe Zahl
$\mathbf{X}, \boldsymbol{\omega}$	Matrix oder Vektor
$\omega_i, \quad i = 1, 2, 3$	Vektorkomponenten
$X_{ij}, \quad i = 1, 2, 3$ $\quad \quad \quad j = 1, 2, 3$	Elemente einer Matrix

### A.2 Verwendete Variablen und Symbole

$A$	Äquatoriales Hauptträgheitsmoment der Erde (Bemerkung: Alle Hauptträgheitsmomente gelten für rotationssymmetrische Körper)
$A_m$	Äquatoriales Hauptträgheitsmoment der festen Erde
$A_c$	Äquatoriales Hauptträgheitsmoment des Kerns
$A_f$	Äquatoriales Hauptträgheitsmoment des flüssigen Kerns
$a_p$	Dimensionslose Konstante in der Transferfunktion der Massenterme
$a_w$	Dimensionslose Konstante in der Transferfunktion der Bewegungsterme
$a_{80}$	Große Halbachse des GRS80-Ellipsoides

$C_m$	Polares Hauptträgheitsmoment der festen Erde
$C_c$	Polares Hauptträgheitsmoment des Kerns
$c$	Lichtgeschwindigkeit
$f_{80}$	Abplattung des GRS80-Ellipsoides
$G$	Gravitationskonstante
$g$	Schwerebeschleunigung
$\mathbf{H}$	Drehimpuls
$\mathbf{H}^{(a)}$	Atmosphärischer Drehimpuls
$\mathbf{h}$	Relativedrehimpuls
$\hat{\mathbf{h}}$	$h_1 + ih_2$
$h$	Höhe über dem mittleren Erdellipsoid
$\mathbf{I}$	Trägheitstensor
$\Delta\mathbf{I}$	Abweichung vom Trägheitstensor im Hauptachsensystem
$\Delta\hat{\mathbf{I}}$	$\Delta I_{13} + i\Delta I_{23}$
$\Delta\mathbf{I}^r$	Zuschlag zum Trägheitstensor wegen Rotationsdeformation
$i$	Imaginäre Einheit
$\Im(\cdot)$	Imaginärteil
$k_2$	Rotations-Lovezahl
$k_{ocn,w}$	Ozean-Lovezahl für äquatoriale Komponente
$k_{ocn,s}$	Ozean-Lovezahl für axiale Komponente
$k'_2$	Auflast-Lovezahl
$\Delta k'_{an}$	Korrektur der Auflast-Lovezahl wegen anelastischer Effekte
$\mathbf{L}$	Drehmoment
$M$	Molekulargewicht der feuchten Luft
$M_{tr}$	Molekulargewicht der trockenen Luft
$m_i, i = 1, 2, 3$	Richtungscosinus der momentanen Rotationsachse im Tisserand-System
$\hat{\mathbf{m}}$	$m_1 + im_2$
$n_0$	Dimensionslose Größe zur Berücksichtigung der Auswirkung von radialen Deformationen im mittleren Trägheitsmoment der Erde
$n_f$	Abweichung der Kreisfrequenz des NDFW von der retrograd täglichen Frequenz
$n_\theta$	Anzahl der Breitenkreise des Datengitters
$n_\lambda$	Anzahl der Längengrade des Datengitters

$p$	Luftdruck
$p_s$	Luftdruck an der Erdoberfläche
$(p_1, p_2)$	Koordinaten des CIP im TRS
$\hat{\mathbf{p}}$	$x - iy$ bzw. $p_1 + ip_2$
$\hat{\mathbf{p}}_a$	Atmosphärisch angeregte Polbewegung
$Q_{cw}$	Dämpfungsfaktor der Chandlerschen Polbewegung
$Q'_f$	Dämpfungsfaktor der FCN
$Q_f$	Dämpfungsfaktor des NDFW
$R$	Mittlerer Erdradius bzw. universelle Gaskonstante
$R_{ell}$	Breitenkreisabhängiger Ellipsoidradius
$r$	Radialer Abstand vom Schwerpunkt der Erde
$\Re(\cdot)$	Realteil
$s$	Spezifische Feuchte
$t$	Zeit
$T$	Temperatur
$T_v$	Virtuelle Temperatur
$T_{cw}$	Beobachtete Chandlerperiode
$T'_f$	Beobachtete Periode der FCN
$T_f$	(Beobachtete) Periode des NDFW
$\hat{\mathbf{T}}_p$	Transferfunktion für die Massenterme
$\hat{\mathbf{T}}_w$	Transferfunktion für die Bewegungsterme
$u$	Breitenkreisparallele Windgeschwindigkeit
$V$	Volumen
$v$	Meridionale Windgeschwindigkeit
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor eines Massenelements
$w$	Vertikale Windgeschwindigkeit
$(X, Y)$	GCRS-Koordinaten des CIP aus dem Nutationsmodell
$(\delta X, \delta Y)$	Zuschläge zum Nutationsmodell
$(x, -y)$	Koordinaten des CIP im TRS
$\mathbf{x}$	Ortsvektor eines Massenelements
$\alpha_3$	Axialer Korrekturfaktor bei Auflastverformung
$\delta p_s$	Druckanomalie
$\epsilon$	Schiefe der Ekliptik
$\epsilon_c$	Exzentrizität der Kern-Mantel-Grenze
$\zeta$	Höhe der Meeresoberfläche

$\delta\zeta$	Änderung des Meeresspiegels
$\theta$	Poldistanz
$\Lambda$	Tageslänge
$\Lambda_0$	Nominale Tageslänge
$\partial\Lambda$	Exzess der Tageslänge vom nominalen Wert
$\lambda$	Geografische Länge bzw. Wellenlänge
$\rho$	Dichte bzw. Korrelationskoeffizient
$\sigma$	Kreisfrequenz bzw. Standardabweichung
$\sigma_c$	Kreisfrequenz im himmelfesten System
$\sigma_t$	Kreisfrequenz im terrestrischen System
$\sigma_r$	Eulerfrequenz für Kruste und Mantel
$\sigma_1$	Chandlerfrequenz für eine Erde ohne Ozeane
$\sigma_2$	Kreisfrequenz des NDFW für eine Erde ohne Ozeane
$\sigma_{cw}$	Theoretische Chandlerfrequenz
$\sigma_e$	Theoretische Chandlerfrequenz einer elastischen Erde
$\hat{\sigma}_{cw}$	Beobachtete Chandlerfrequenz
$\hat{\sigma}_f$	(Beobachtete) Kreisfrequenz des NDFW
$\tau$	Laufzeit elektromagnetischer Wellen
$\tau, \mu, \eta$	Dimensionslose Koeffizienten
$\Phi$	Geopotential
$\Phi_s$	Geopotential an der Erdoberfläche
$\hat{\Phi}_L$	Auflastpotential
$\phi$	Geografische Breite
$\varphi$	Signalphase
$\chi_i, i = 1, 2, 3$	Drehimpulsfunktionen
$\chi_i^p, i = 1, 2, 3$	Massenterme der Drehimpulsfunktionen
$\chi_i^w, i = 1, 2, 3$	Bewegungsterme der Drehimpulsfunktionen
$\hat{\chi}^p$	$\chi_1^p + i\chi_2^p$
$\hat{\chi}^w$	$\chi_1^w + i\chi_2^w$
$\hat{\chi}_a$	Atmosphärische Drehimpulsfunktion, äquatorial
$\hat{\chi}_t$	Theoretische Drehimpulsfunktion, äquatorial
$\psi_i, i = 1, 2, 3$	Anregungsfunktionen
$\hat{\psi}$	$\psi_1 + i\psi_2$
$\Omega$	Konstante mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde
$\omega$	Momentaner Erdrotationsvektor

## Anhang B

### Verwendete Konstanten

Variable	Wert		Einheit	Quelle
$A$	8.0101	$10^{37}$	$\text{kgm}^2$	[21]
$A_m$	7.0999	$10^{37}$	$\text{kgm}^2$	[21]
$A_c$	9.1168	$10^{36}$	$\text{kgm}^2$	[21]
$a_p$	9.2	$10^{-2}$		[12]
$a_w$	5.5	$10^{-4}$		[12]
$a_{80}$	6378137.0		m	[9]
$C$	8.0365	$10^{37}$	$\text{kgm}^2$	[21]
$C_m$	7.1236	$10^{37}$	$\text{kgm}^2$	[21]
$f_{80}$	1 : 298.2572221			[9]
$G$	6.674210	$10^{-11}$	$\text{m}^3/\text{kgs}^2$	[37]
$k_2$	0.298			[38]
$k'_2$	-0.305			[38]
$\Delta k'_{an}$	-0.011 + i 0.003			[38]
$\Delta k_{ocn,w}$	0.047715			[21]
$\Delta k_{ocn,s}$	0.043228			[21]
$n_0$	0.15505			[17]
$T_{cw}$	433.		d	[19]
$Q_{cw}$	179.			[19]
$T'_f$	-430.		d	[18]
$Q'_f$	15000.			[18]

$R^1$	6371000.0		km	[21]
$R^2$	8.3145		J/molK	[37]
$\alpha_3$	0.792			[21]
$\epsilon_c$	2.546	$10^{-3}$		[21]
$\Omega$	7.292115	$10^{-5}$	rad/s	[19]

---

<sup>1</sup>Mittlerer Erdradius

<sup>2</sup>Universelle Gaskonstante

# Literaturverzeichnis

- [1] Altamimi Z., Sillard P., Boucher C. The Impact of a No-Net-Rotation Condition on ITRF2000. *Geophys. Res. Lett.*, 30(2), 2003.
- [2] Barnes R., Hide R., White A., Wilson C. Atmospheric Angular Momentum fluctuations, length-of-day changes and polar motion. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 387:31–73, 1983.
- [3] Böhm J. Skriptum zur Vorlesung Atmosphärische Effekte in der Geodäsie. Institut für Geodäsie und Geophysik, TU Wien, 2008.
- [4] Böhm J., Mendes Cerveira C.J., English S., Schuh H. Atmosphere Angular Momentum Time Series for CONT05. In *The 5th IVS General Meeting Proceedings*, pages 14–18, 2008.
- [5] Bizouard C. Excitation of the polar motion and rotation rate. IERS EOP Product Center, Observatoire de Paris. <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/>, Stand: März 2009.
- [6] Bizouard C., Gambis D. The combined solution C04 for Earth Orientation Parameters consistent with International Terrestrial Reference Frame 2005. <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/>, Stand: Mai 2009.
- [7] Bouttier F., Courtier P. Data assimilation concepts and methods March 1999. [http://ecmwf.int/newsevents/training/lecture\\_notes/LN\\_DA.html](http://ecmwf.int/newsevents/training/lecture_notes/LN_DA.html), Stand: Mai 2009.
- [8] Bretterbauer K., Gerstbach G., Schuh H. Skriptum zur Vorlesung Kosmische Geodäsie. Institut für Geodäsie und Geophysik, TU Wien, 2004.

- [9] Bretterbauer K., Schuh H. Skriptum zur Vorlesung Höhere Geodäsie. Institut für Geodäsie und Geophysik, TU Wien, 2004.
- [10] Brzezinski A. Polar motion excitation by variations of the effective angular momentum function, II: extended-model. *Manuscripta Geodetica*, 19:157–171, 1994.
- [11] Brzezinski A. The CEP and Geophysical Interpretation of Modern Earth Rotation Observations. *Astronomical Society of the Pacific*, 208:585–594, 2000.
- [12] Brzezinski A., Bizouard C., Petrov S.D. Influence of the Atmosphere on Earth Rotation: What new can be learned from the recent Atmospheric Angular Momentum Estimates? *Surveys in Geophysics*, 23:33–69, 2002.
- [13] Brzezinski A., Capitaine N. The Use of the Precise Observations of the Celestial Ephemeris Pole in the Analysis of Geophysical Excitation of Earth Rotation. *J. Geophys. Res.*, 98(B4):6667–6675, 1993.
- [14] Brzezinski A., Petrov S. High Frequency Atmospheric Excitation of Earth Rotation. *IERS Technical Note*, (28):53–60, 2000.
- [15] Campbell J. From Quasars to Benchmarks: VLBI Links Heaven and Earth. In *IVS 2000 General Meetings Proceedings*, pages 19–34, 2000.
- [16] Campbell J. et al. Die Radiointerferometrie auf langen Basislinien (VLBI) als geodätisches Messverfahren höchster Genauigkeit. *AVN 11-12/1992*, 1992.
- [17] Dahlen F.A. The Passive Influence of the Oceans upon the Rotation of the Earth. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 76:363–406, 1976.
- [18] Ducarme B. et al. European Tidal Gravity Observations: Comparison with Earth Tide Models and Estimation of Free Core Nutation (FCN) parameters. *Intern. Ass. of Geod. Symposia*, 133:523–532, 2009.
- [19] Eubanks T.M. Variations of the orientation of the earth. In *Contributions of Space Geodesy to Geodynamics: Earth Dynamics Geodynamics*, volume 24, pages 1–54. American Geophysical Union, 1993.
- [20] Gross R.S. Correspondence between theory and observations of polar motion. *Geophys. J. Int.*, 109:162–170, 1992.

- [21] Gross R.S. Earth Rotation Variations - Long Period. In Herring T.A., editor, *Treatise on Geophysics*, volume 3, Geodesy, pages 239–294. Elsevier, 2007.
- [22] Kraus H. *Die Atmosphäre der Erde - Eine Einführung in die Meteorologie*. 3. Auflage, Springer Verlag, 2004.
- [23] Haas R. Investigating High-Frequency Earth Orientation Variations with Continuous Geodetic VLBI Campaigns. *IVS General Meetings Proceedings*, pages 316–319, 2006.
- [24] Haas R., Wunsch J. Sub-diurnal earth rotation variations from the VLBI CONT02 campaign. *J. Geodynamics*, 41:94–99, 2006.
- [25] IERS Central Bureau. Homepage des International Earth Rotation and Reference Systems Service. <http://www.iers.org/>, Stand: März 2009.
- [26] Müller M. Atmosphärische Drehimpulsfunktionen berechnet aus Daten des ECMWF. Master's thesis, Institut für Geodäsie und Geophysik der Technischen Universität Wien, 2008.
- [27] McCarthy D.D., Petit G. IERS Conventions. *IERS Technical Note*, (32):1–127, 2003.
- [28] Moritz H., Müller I.I. *Earth Rotation. Theory and Observation*. Ungar, New York, 1987.
- [29] Munk W.H., MacDonald G.J.F. *The Rotation of the Earth. A Geophysical Discussion*. Cambridge University Press, New York, 1960.
- [30] Persson A., Grazzini F. User Guide to ECMWF forecast products. <http://ecmwf.int/products/forecasts/guide/>, Stand: März 2007.
- [31] Poincot L. Théorie nouvelle de la rotation de corps. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 16:9–129, 1851.
- [32] Salstein D. A. et al. The Sub-bureau for Atmospheric Angular Momentum of the International Earth Rotation Service: A Meteorological Data Center with Geodetic Application. *Bulletin American Meteorological Society*, 74:67–80, 1993.

- [33] Schuh H. Geodetic Analysis Overview. In *IVS 2000 General Meetings Proceedings*, pages 219–229, 2000.
- [34] Schuh H. et al. Erdrotation und globale dynamische Prozesse. In *Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie*, volume 32. Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 2003.
- [35] Schuh H., Mendes Cerveira P.J. Skriptum zur Vorlesung Erdrotation und globale geodynamische Prozesse. Institut für Geodäsie und Geophysik, TU Wien, 2008.
- [36] Sovers O., Fanselow J., Jacobs C. Astrometry and geodesy with radio interferometry: experiments, models, results. *Reviews of Modern Physics*, 70(4):1393–1454, 1998.
- [37] Taylor B.N., Mohr P.J. The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty. <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>, Stand: Mai 2006.
- [38] Wahr J. Polar Motion Models: Angular Momentum Approach. In Plag H.P., Chao B.F., Gross R.S., van Dam T., editor, *Forcing of polar motion in the Chandler Frequency Band: A Contribution to Understanding Interannual Climate Change*. Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et du Séismologie, volume 24, Luxembourg, 2005.
- [39] Weber R. Skriptum zur Vorlesung Satellitengeodäsie. Institut für Geodäsie und Geophysik, TU Wien, 2008.
- [40] Zürn W. The Nearly-Diurnal Free Wobble-Resonance. In Wilhelm H., Zürn W., Wenzel H., editor, *Tidal Phenomena*, pages 95–107. Springer, 1997.