



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

DISSERTATION

Eine spieltheoretische ex-post Analyse der Entdeckung Amerikas durch Christoph Kolumbus

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alexander Mehlmann
E105 Institut für Wirtschaftsmathematik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Mathematik und Geoinformation

von
Dipl. Ing. Albert Moik
Matrikelnr. 0225007
Neubaugasse 47/1/11, 1070 Wien

Wien, August 2009

Kurzfassung

Diese Dissertation behandelt die spieltheoretische Analyse der Entdeckung Amerikas durch Christoph Kolumbus. Die fächerübergreifende Arbeit soll zeigen, dass mit Hilfe der Spieltheorie in Fachgebieten, in denen mathematische Methoden bisher kaum eingesetzt werden, neue Einsichten gewonnen werden können. In die Untersuchung von komplexen historischen Entscheidungssituationen wird auch die Einbeziehung von wirtschaftlich-quantitativen Aspekten ermöglicht.

Zur Vorbereitung der spieltheoretischen Untersuchung werden die historischen Quellen hinsichtlich des Wissensstandes in Geografie, Nautik und Schiffbautechnik in der zweiten Hälfte des 15. Jh. ausgewertet. Aus der Kenntnis und Verarbeitung dieses Wissens hatte Kolumbus den Plan gefasst, einen Seeweg nach Indien über den Atlantik zu finden. Die Bemühungen von Kolumbus, die Genehmigung seines Planes einschließlich seiner persönlichen Forderungen zuerst vom König von Portugal, dann von der Königin von Kastilien y León (auch mit kurzen Versuchen in Frankreich und England) zu erreichen, werden dargestellt. Der Ablauf dieser wiederholten Bemühungen in einer Folge von Entscheidungsstufen, die letztlich zur Genehmigung des Planes durch Königin Isabella I. von Kastilien führten, werden als Spiele modelliert; ebenso die Maßnahmen von Kolumbus, die Überfahrt gegen den Widerstand der Mannschaft fortzusetzen.

Zuerst wird die Spielsituation der Verhandlungen hinsichtlich gleichgewichtigen Verhaltens untersucht. Aktionsmöglichkeiten und sequentieller Ablauf sind in diesem Fall exogen gegeben und es werden ausschließlich »extensive form trembling hand perfect equilibria« ermittelt. Der Prozess der Auseinandersetzung der Monarchen mit Kolumbus' Plan und der Frage nach dem optimalen Genehmigungszeitpunkt, wird anhand eines Timing Game untersucht. Bisherige Ergebnisse für Timing Games

werden zusammengeführt und für asymmetrischen Nutzen der Spieler, um einen Mindestzeitabstand für den Zeitfolger und um Restriktionen erweitert. Der Fall ohne Nachfolgemöglichkeit wird gesondert behandelt. Mit dem entwickelten Timing Game werden unterschiedliche Spielsituationen numerisch analysiert. Die Werte der für diese Berechnungen erforderlichen Parameter werden aus der Darstellung der historischen Ereignisse, sowie aus den erfassten wirtschaftlichen, technischen und geographischen Daten abgeleitet. Dabei sind z. T. grobe Schätzungen und Annahmen unumgänglich. Daraus ergibt sich, dass die errechneten Ergebnisse nicht mit den »wahren« übereinstimmen müssen und die erhaltenen Schlussfolgerungen keinen absoluten Gültigkeitsanspruch erheben.

Die Überfahrt wird als zwei Personen Differentialspiel mit zwei Zustandsvariablen modelliert. Die beiden Spieler sind Kolumbus, welcher repräsentativ für die Offiziere steht, und ein Seemann, der die Gruppe der Mannschaft repräsentiert. Die Zustandsvariable von Kolumbus stellt die Verteilung der Wahrscheinlichkeit eines Landfalls dar, jene des Seemannes die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Rückkehr. Die Kontrollvariablen der Spieler sind durch »Vergünstigungen« (Kolumbus) und »Störaktionen« (Seemann) gegeben. Abschließend wird die Nutzenfunktion des Seemannes erweitert. In den Modellen werden Gleichgewichte in offener Schleife ermittelt.

Abstract

This thesis presents a game theoretical analysis of the discovery of the Americas by Christopher Columbus. The interdisciplinary work shows that Game Theory can assist in gaining new insights in disciplines hardly using mathematical tools. Quantitative economic aspects can be included in the analysis of complex historical decision making.

The available historical documents are first analyzed to compile the state of knowledge in Geography, Nautics and Shipbuilding in the 15th century. Using this knowledge Columbus derived his plan to reach India sailing westwards. The decision stages in Columbus' endeavour to gain permission and funding from the kings of Portugal and Castilla y León (with short attempts in France and England) are modeled as games as well as Columbus' measures to proceed the cruise against the resistance of the crew.

First the negotiations are investigated as an extensive form game with imperfect information. The game tree is given exogenously and »extensive form trembling hand perfect equilibria« are computed. A Timing Game is used to model the competition between the monarchs for the optimal time of accepting Columbus' plan. Published results regarding Timing Games are assembled and extensions are made for asymmetric payoffs, for minimum time distance for the Follower and for restrictions. Various situations are analyzed numerically using the developed Timing Game. The numerical values of the required parameters are derived from historical documents including economic, technical and geographical data. Assumptions and estimates are needed, therefore, the received results do not claim to be absolutely valid.

Columbus' travel is modeled as a two-person Differential Game. The players are Columbus, representing the officers, and Seaman, representing the crew. The state variable of Columbus describes the distribution of probabilities of landfall, the state variable of Seaman the distribution of probabilities of successful return. The control variables are »benefits« (Columbus) and »disturbances« (Seaman). In the models equilibria in open loop strategies are computed.

Danksagung

Als erstes danke ich meinem Betreuer Alexander Mehlmann, der mich in jeder Hinsicht unterstützte und dabei meine Entfaltungsmöglichkeiten förderte. Besonderer Dank gilt auch Ulrich Berger, der mir als Begutachter wie ein Betreuer zur Seite stand und mich in angeregten Diskussionen auf Schwachstellen aufmerksam machte. Meinem Vater Johannes Moik danke ich für seine Hinweise zur Gestaltung der Arbeit. Ferner gilt mein Dank dem Institut von Professor Abele (VW 5 der WU Wien) an dem ich während der Erstellung dieser Arbeit beschäftigt war. Obwohl Dissertation und Beschäftigung an zwei unterschiedlichen Universitäten stattfanden, erhielt ich die Freiheit mich in dem nötigen Ausmaß meiner Dissertation zu widmen.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	i
Abstract	iii
Danksagung	v
1. Einleitung	1
2. Historische Ereignisse und politische Situation	4
2.1. Politische Lage im Europa des 15. Jahrhundert	5
2.2. Portugal und seine Entdeckungen im 15. Jahrhundert	9
2.3. Wissensstand	13
2.3.1. Antikes und Arabisches Wissen	14
2.3.2. Gerüchte und kirchliche Literatur	16
2.3.3. Ausgehendes Mittelalter und Zeitalter von Kolumbus	17
2.4. Christoph Kolumbus	18
2.4.1. Kolumbus Überlegungen über die Größe des Atlantischen Meeres	19
2.4.2. Kolumbus am portugiesischen Hofe	20
2.4.3. Kolumbus und die Junta dos Mathematicos	22
2.4.4. Kolumbus in Kastilien	23
2.4.5. Die Kapitulation von Santa Fé	28
2.5. Die Überfahrt	30
3. Die Verhandlungen	33
3.1. Die Spieler, ihre Strategien und der Spielbaum	34
3.2. Analyse des Spielbaums	37
3.3. Schlussbemerkungen	41

4. Timing Game	43
4.1. Ausgangssituation für Timing Games	45
4.2. Gleichgewichte bei Timing Games	47
4.2.1. Timing Game ohne Folger	50
4.2.2. Timing Game mit Folger	59
4.2.3. Timing Game mit Restriktion	69
5. Entscheidung über Kolumbus' Expedition als Timing Game	72
5.1. Historische Informationen	72
5.2. Numerisches Beispiel	75
5.2.1. Spezifikation der einzelnen Parameter	76
5.2.2. Rechenbeispiele	79
5.3. Schlussbetrachtungen	87
6. Differentialspiel	90
6.1. Einführung	91
6.2. Das Modell	92
6.3. Analyse des Modells	95
6.4. Erweiterung des Basismodells	102
7. Schlussbemerkungen	108
Anhang	110
A. Erklärung der verwendeten Parameterwerte	110
A.1. Extensives Spiel	110
A.2. Timing Game	112
Abbildungsverzeichnis	117
Tabellenverzeichnis	119
Literaturverzeichnis	120
Curriculum Vitae	123

Kapitel 1.

Einleitung

Es gehörte dennoch zuletzt ein Mann dazu,
der das alles zusammenfaßte, um Fabel und Nachricht,
Wahn und Überlieferung in Wirklichkeit zu verwandeln

Johann Wolfgang von Goethe
Schriften zur Natur- und Wissenschaftslehre -
Erfinden und Entdecken

Die vorliegende Arbeit behandelt die spieltheoretische Analyse der Entdeckung Amerikas durch Christoph Kolumbus. Motivation für diese interdisziplinäre Arbeit war, die Anwendung der Spieltheorie in einem der Mathematik fernerem Fachgebiet zu zeigen. Sie ist ein Beispiel dafür, wie die Spieltheorie in einem von ihr bisher kaum erschlossenen Fachgebiet einen Beitrag für quantitative Untersuchungen leisten kann. Damit soll sie dazu beitragen der Mathematik als nützlichem Werkzeug Eingang in neue Bereiche zu verschaffen. Auch kann damit Vertretern dieser Fachgebiete die Scheu vor einer mathematischen Betrachtungsweise genommen und ein Weg zur Untersuchung ihrer Probleme mit mathematischen Analysewerkzeugen aufgezeigt werden.

Militärische, evolutionäre und ökonomische Problemstellungen werden mit Hilfe der Spieltheorie seit langem eingehend untersucht. Im Zuge dieser Kooperationen wurde die Spieltheorie maßgeblich vorangetrieben. Über die mathematisch-wirtschaftliche Aufgabenstellung hinausgehend werden hier komplexe historische Entscheidungssituationen analysiert.

Zur Vorbereitung der spieltheoretischen Untersuchungen wird in Kapitel 2 der Stand des Wissens in Geographie, Nautik und Schiffsbautechnik in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts eingehend dargestellt. Auf Grundlage dieses Wissens und seiner Auswertung hatte Kolumbus seinen Plan, einen Seeweg nach Indien über den Atlantik zu finden, entwickelt. Die Bemühungen von Kolumbus, die Genehmigung dieses Planes einschließlich seiner persönlichen Forderungen an den Höfen Portugals, Kastiliens y Leóns, Frankreichs und Englands zu erlangen, werden beschrieben. Dieses Vorgehen wird in den Kapiteln 3 und 5 spieltheoretisch modelliert und untersucht. Abschließend werden die Ereignisse der Überfahrt, die für die spieltheoretische Analyse in Kapitel 6 benötigt werden, aus dem erhalten gebliebenen Bordbuch (Grün, 1970) zusammengefasst.

Kapitel 3 behandelt die Verhandlungssituation zwischen Kolumbus, João II. von Portugal und Isabella I. von Kastilien y León. Diese wird in einem extensiven Spiel mit unvollkommener Information modelliert und bezüglich »extensive form trembling hand perfect equilibria« untersucht.

Für die Analyse des Prozesses der Auseinandersetzung der Monarchen von Portugal, Kastilien y León, Frankreich und England mit Kolumbus' Plan werden in Kapitel 4 die Gleichgewichtsbedingungen, die für das in Kapitel 5 modellierte Timing Game benötigt werden, erarbeitet. Zuerst werden die bisherigen Ergebnisse für Timing Games zusammengeführt. Die Erweiterungen gegenüber den bekannten Ergebnissen umfassen asymmetrische Nutzenfunktionen, die Einführung eines Mindestzeitabstandes für den Folger und die Einbindung von Restriktionen. In Kapitel 5 wird die Problemstellung der Monarchen, den optimalen Zeitpunkt für die Zustimmung zu Kolumbus' Plan zu wählen, als Timing Game modelliert und in einem numerischen Beispiel mit Hilfe der in Kapitel 4 entwickelten Ergebnisse analysiert.

Kapitel 6 modelliert Kolumbus' Reise als 2-Personen Differentialspiel, in welchem Kolumbus ein Seemann gegenübersteht. Die Kontrollvariable von Kolumbus besteht in »Vergünstigungen«, jene des Seemanns in »Sabotageakten«. Mittels des entwickelten Differentialspiels werden Aussagen über den optimalen Pfad der Kontrollvariablen erlangt.

Die in den Berechnungen in den Kapiteln 3, 5 und 6 verwendeten Gleichungen basieren auf Daten aus den historischen Quellen. Die Werte der benötigten Parameter werden aus diesen Quellen abgeleitet und genähert (z.B. a priori Schätzung der erwarteten Gewinne einer Seeroute nach Asien). Die für diese Herleitung verwendeten Überlegungen sind in Anhang A beschrieben. Daraus ergibt sich, dass die damit errechneten Ergebnisse nicht mit den »wahren« übereinstimmen müssen und die erhaltenen Schlussfolgerungen keinen absoluten Gültigkeitsanspruch erheben.

Kapitel 2.

Historische Ereignisse und politische Situation

Venient annis saecula seris
quibus oceanus vincula rerum
laxet et ingens papeat tellus
tethysque novos detegat orbes
Nec sit terris ultima Thule¹
Seneca, Medea

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die politische und wissenschaftliche Situation in Europa im 15. Jahrhundert sowie über die wirtschaftlichen Gründe für die Bestrebungen einen Seeweg nach Indien und Ostasien zu finden. Es werden die historischen Ereignisse, vom Beginn der diesbezüglichen Überlegungen bis zu den Bemühungen von Kolumbus einen Monarchen von der Durchführbarkeit und den

¹ Nach langen Jahren werden Epochen kommen
da das Weltmeer die Fesseln der Ordnung
lockert und die Erde in ihrer Weite offen steht
und Tethys neue Welten enthüllt
und Thule nicht mehr das fernste Land auf Erden ist

Kolumbus gab in seinem »Libro de las Profecias« ebenfalls diesen Seneca Text an. Im Unterschied zu der angeführten heute akzeptierten Fassung steht jedoch tiphysque anstelle von tethysque. Bei der Übersetzung führt dies dazu, dass statt der Titanin Tethys der Steuermann der Argonauten Tiphys neue Welten enthüllt. Diese Fassung erleichterte Kolumbus die Argumentation für seine Expedition.

Gewinnaussichten seines Planes nach Westen zu segeln zu überzeugen, detailliert dargestellt. Abschließend werden die Ereignisse von der Genehmigung des Plans bis zur Ankunft in der »Neuen Welt« beschrieben. Als Quellen für die folgenden Darstellungen dienten (Hennig, 1940; Grün, 1970; Madariaga, 1989; Fischer-Fabian, 1991; Gierloff-Emden, 1994; Nader, 1996; Wallisch, 2006). Diese Darstellung bildet die Grundlage für die spieltheoretischen Modelle und Untersuchungen dieser Arbeit.

Nach der Erkenntnis, dass Christoph Kolumbus nicht den Seeweg nach Asien gefunden, sondern einen neuen Kontinent entdeckt hatte und nach der ersten Weltumsegelung durch Ferdinand Magellan², geriet Christoph Kolumbus im 16. Jahrhundert in Vergessenheit. Erst die Aufklärung erweckte ihn als »Entdecker Amerikas« wieder zum Leben. Es war auch die Aufklärung, welche den Mythos »Der Mann der beweisen wollte, dass die Erde rund ist« geboren hat.

2.1. Politische Lage im Europa des 15. Jahrhunderts

Europa war auf dem Weg aus dem Mittelalter. Durch die Mauren war viel des verloren gegangenen »griechischen« und »römischen« Wissens wieder nach Europa gelangt. »Arabisches« Wissen wurde in den von Mauren beherrschten Gebieten verbreitet. Seit dem 11. Jahrhundert entstanden in Europa Universitäten und Akademien. In ihnen wurde Wissen gesammelt und für die vom jeweiligen Herrscher vorgegebenen Ziele aufbereitet und erweitert.

Für den europäischen Adel waren Waren aus Asien, vor allem Gewürze aus Indien und Seide aus China sowie Edelsteine und Edelmetalle zu wichtigen Luxusgütern

² Fernão de Magalhães, * 1480 in Sabrosa, Portugal, † 27. April 1521 auf Mactan, Philippinen, war portugiesischer Seefahrer, welcher für die spanische Krone segelte und als erster die Welt umsegelte. Unter dem Banner Karl I. (Karl V. des heiligen römischen Reiches deutscher Nation) stach er am 20. September 1519 von Sanlúcar de Barrameda aus in See. Knapp drei Jahre später, am 6. September 1522, kehrte die Expedition ohne Fernão de Magalhães erfolgreich zurück.

geworden. Diese mussten auf einem langen und beschwerlichen Landweg³ nach Europa transportiert werden. Händler hatten mit vielen Ausfällen durch Überfälle zu rechnen, zudem waren in vielen der zu durchquerenden Gebiete hohe Zölle zu entrichten. Die Suche nach einem Seeweg nach Asien wurde, da schneller, sicherer und ohne Transferzölle, zu einem wichtigen Ziel des 15. Jahrhunderts. Kauf- und Seeleute erkannten, dass ein Seeweg nach Indien ein lukratives Geschäft sein könnte. Nach dem Fall Konstantinopels 1453 wurde der Landweg weiter erschwert und der Seehandel über das Schwarze Meer kam zum Erliegen. Dadurch wurde das Gewinnpotential eines Alternativweges weiter gesteigert. Nur wenige konnten die für solche Entdeckungsreisen notwendigen maritimen Voraussetzungen erfüllen. Die in Bezug auf den Seehandel einflussreichen Stadtstaaten des heutigen Italien hatten das Handelsmonopol im Mittelmeer. Sie verfügten sowohl über maritimes Wissen und Ausstattung als auch über die finanziellen Mittel für solche Unternehmen (in erster Linie die gut ausgebildeten und erfahrenen Seeleute der Republiken Genua und Venedig). Da aber ihr Einfluss und Reichtum, welcher durch ihre Dominanz im Mittelmeer gesichert wurde, durch einen Seeweg nach Asien (ob Südroute um Afrika oder Westroute um den Erdball) gefährdet worden wäre, bestand für solche Missionen kein Interesse⁴. Systematische Arbeit zur Erkundung eines Seeweges nach Asien fand nur in Portugal (siehe Kapitel 2.2) statt. Auch wenn die Erschließung eines Seeweges nach Indien und Ostasien von großer wirtschaftlicher Bedeutung war, lag das Hauptaugenmerk vieler europäischer Herrscherhäuser auf anderen Bereichen.

³ Die Karawane eines Handelsreisenden benötigte damals 3 - 4 Jahre, um von Damaskus über Indien nach Ostasien und wieder zurück zu gelangen (siehe (Fischer-Fabian, 1991)).

⁴ Um den Machtverlust, verursacht durch die von der Iberischen Halbinsel ausgehenden erfolgreichen Expeditionen, einzudämmen, schlugen venezianische Diplomaten 1504 dem osmanischen Sultan vor, einen Kanal vom Mittelmeer ins Rote Meer zu bauen.

Isabella I.⁵ und Ferdinand II.⁶ waren mit der Reconquista⁷ beschäftigt. In Jahr 1478 führte Isabella I. die Inquisition in ihrem Reich ein. Im September 1479 wurde der Vertrag von Alcacovas zwischen Alfons V.⁸ von Portugal auf der einen Seite und Isabella I. und Ferdinand II. auf der anderen geschlossen. Dieser Vertrag regelte die Aufteilung der neu erkundeten und zu erkundenden Gebiete zwischen diesen beiden Herrscherhäusern. Mit diesem Vertrag verzichtete Portugal endgültig auf den kastilischen Thron⁹ und trat alle Rechte an den Kanarischen Inseln an Kastilien ab. Dafür erhielt Portugal die Rechte für alle bis zu diesem Zeitpunkt entdeckten und später noch zu entdeckenden Ländereien südlich der Kanaren entlang des Weges nach Indien, die Inselgruppen der Azoren und Madeiras, sowie die Küstengebiete Nord- und Westafrikas. Isabella I. und Ferdinand II. verzichteten ihrerseits auf die Suche eines Seeweges nach Indien um Afrika herum (dieses Recht war ausschließlich portugiesischen Seefahrern vorbehalten) und auf den Handel in afrikanischen Gewässern. Dadurch waren sie gezwungen, sofern sie nicht vom Handel mit Ostasien ausgeschlossen sein wollten, andere Handelsrouten zu errichten. Der Vertrag von Alcacovas hatte nur 15 Jahre Gültigkeit. Kastilien fühlte sich durch diesen benachteiligt und bat den Kirchenstaat um Unterstützung für eine Vertragsänderung. Papst Alexander VI.¹⁰ erließ 1493 die Bulle »Inter Caetera«, in welcher die Aufteilung der Gebiete neu geregelt und Kastilien besser gestellt wurde. Von nun an sollte eine Ost-West-Teilung die neu entdeckten Gebiete abgrenzen. Die päpstliche Bulle sah

5 Isabella I. von Kastilien, * 22. April 1451 in Madrigal de las Altas Torres, † 26. November 1504 in Medina del Campo, war Königin von Kastilien y León von 1474 bis 1504 und mit ihrem Gatten Ferdinand II. Königin von Aragon und Sizilien.

6 Ferdinand II., »der Katholische«, * 10. März 1452 in Sos, † 23. Januar 1516 in Madrigalejo, heiratete Isabella I. 1469. 1474 bestieg er mit seiner Gattin den Thron von Kastilien y León und war ab 1479 König von Aragon und Sizilien.

7 Reconquista bezeichnet die Rückeroberung der Iberischen Halbinsel durch christliche Herrscher. Mit der Eroberung Granadas am 2. Jänner 1492 durch kastilische und aragonische Truppen fiel die letzte Festung der Mauren auf der Iberischen Halbinsel und die Reconquista war beendet. Dieses Ereignis sollte auch für Christoph Kolumbus von entscheidender Bedeutung sein.

8 Alfons V. »der Afrikaner«, * 15. Januar 1432 in Sintra, † 28. August 1481 ebendort, regierte von 1438 bis 1481 in Portugal.

9 1474 versuchte Alfons V. nach dem Tod seines Schwagers Heinrich IV. von Kastilien den kastilischen Thron zu übernehmen. Portugal verlor die Schlacht von Toro und Isabella I. konnte den kastilischen Thron besteigen.

10 1496 ernannte Papst Alexander VI. Isabella I. und ihren Gatten Ferdinand II. wegen ihrer Verdienste für die katholische Kirche zu Katholischen Königen.

eine Trennlinie 100 Leguas¹¹ westlich der Kapverdischen Inseln vor. Abgesehen von den schon entdeckten Gebieten sollten alle noch zu entdeckenden Gebiete östlich dieser Grenze an Portugal und westlich davon an Kastilien fallen. Diese Bulle war für Portugal in dieser Form nicht akzeptabel¹². Der portugiesische Einwand wurde berücksichtigt und man einigte sich 1494 auf den Vertrag von Tordesillas, welcher den Vertrag von Alcacovas und die päpstliche Bulle ablöste und bis ins 18. Jahrhundert seine Gültigkeit behielt. Die Grenzlinie verlief fortan 370 Leguas westlich der Kapverdischen Inseln. 1529 wurde dieser Vertrag durch den Vertrag von Saragossa, welcher eine weitere Grenzlinie 297,5 Leguas östlich der Molukken, vorsah, ergänzt. Diese Verträge wurden von anderen europäischen Herrscherhäusern nie anerkannt.

Nachdem die Mauren von der gesamten Iberischen Halbinsel vertrieben waren, konnte man sich ernsthaft neuen Aufgaben widmen. Die 1478 eingeführte Inquisition drohte jedoch ein großes Hemmnis für die Entwicklung des Landes zu werden, da es ihre Aufgabe war, Juden und Mauren aufzuspüren. Am 31. März 1492 erließ Isabella das »Alhambra-Edikt«¹³, welches durch die Inquisition mit Nachdruck umgesetzt wurde. Auch der noch bis 1494 gültige Vertrag von Alcacovas bedeutete eine beträchtliche Einschränkung der Entwicklungs- und Entfaltungsmöglichkeiten.

Für England und Frankreich war das 15. Jahrhundert von kriegerischen Auseinandersetzungen geprägt. England und Frankreich standen einander von 1338 bis 1453 im 100-jährigen Krieg gegenüber. Nur zwei Jahre später sollte sich England schon im nächsten Konflikt befinden. Von 1455 bis 1486 bestimmten die Rosenkriege die Geschehnisse auf der Britischen Insel. In diesen kämpften die englischen Adelshäuser um ihre Vormachtstellung und um die Königskrone. Frankreich ging

¹¹ Legua ist eine alte Längeneinheit und entspricht etwa 5,9 km. Auch heute ist dieses Längenmaß noch in manchen Erdteilen in Verwendung. Es ist zu berücksichtigen, dass es kein »Normlegua« gibt.

¹² Portugal bestand darauf, die Grenze weiter nach Westen zu verlegen. Möglicherweise hatten portugiesische Seefahrer, welche nach den Erfolgen von Kolumbus ebenfalls nach Westen segelten, schon die Küste des heutigen Brasilien (welches offiziell erst sechs Jahre später entdeckt wurde) erreicht.

¹³ Das Alhambra-Edikt besagte, dass alle Juden, die nicht bereit waren zum Christentum zu konvertieren, binnen drei Monaten den Herrschaftsbereich Isabellas zu verlassen hatten. Damit wurde eine Vertreibungswelle der jüdischen Bevölkerung auf der Iberischen Halbinsel eingeleitet.

aus dem 100-jährigen Krieg geschwächt hervor und sah sich bald Bedrohungen und daraus resultierenden Konflikten, die ihren Ursprung in der Heiratspolitik der Habsburger hatten, gegenüber. Der Kirchenstaat war mit dem Erhalt seines Einflusses in Europa sowie der Unterstützung der Kriege gegen Mauren und Osmanen beschäftigt.

2.2. Portugal und seine Entdeckungen im 15. Jahrhundert

Portugal hatte aufgrund seiner geographischen Lage beste Voraussetzungen und hohes Interesse an einer maritimen Expansion. Ein Seeweg nach Indien bzw. Ostasien versprach nicht nur Einkünfte und Unabhängigkeit von den im Mittelmeer dominierenden Seemächten und europäischen Herrscherhäusern sondern bedeutete auch, bedingt durch die Umklammerung auf der Iberischen Halbinsel, die einzige Möglichkeit einer Expansion.

Im Jahre 1288 wurde die Universität zu Lissabon (Estudo Geral) gegründet und 1317 trat der in Portugal ansässige Christusorden¹⁴ das Erbe des in Europa verbreiteten und kurz zuvor aufgelösten Templerordens¹⁵ an. Folge davon war ein großer »Brain Drain« nach Portugal. Im Jahre 1415 gründete Herzog Heinrich der Seefahrer¹⁶ die

¹⁴ Am 14. März 1319 legitimierte Papst Johannes XXII. in der Bulle »Ad ea ex quibus cultus« den in Portugal ansässigen Christusordens. Als Gegenleistung übergab der portugiesische König unbefristet die in der Algarve gelegene königliche Burg von Castro Marim als zukünftigen Sitz des neuen Ordens. Des weiteren bestimmte der Papst, dass die Güter des Templerordens in Portugal an den neuen Orden zu übergeben seien.

¹⁵ In der Bulle »Ad providam« verfügte Papst Clemens V. am 2. Mai 1312, die Güter der Templer dem Ritterorden vom Hospital St. Johannis zu Jerusalem (Johanniter), dem späteren Malteserorden, zu übergeben. Ausgenommen von dieser päpstlichen Anordnung waren ausdrücklich Portugal, Kastilien, Aragon und Mallorca.

¹⁶ Heinrich der Seefahrer, * 4. März 1394 in Porto, † 13. November 1460 in Sagres, war Herzog von Viseu. Die von ihm initiierten Entdeckungsfahrten entlang der westafrikanischen Küste begründeten die portugiesische See- und Kolonialmacht und stellten den Beginn der europäischen Expansion dar. Er selbst nahm an keiner der von ihm so geförderten Expeditionen teil.

»Nautische Akademie in Sagres«¹⁷ und schaffte somit die Voraussetzungen¹⁸ für die von ihm initiierte »Atlantische Expansion« und die Suche nach einem Seeweg nach Indien und Ost-Asien. Heinrich der Seefahrer brachte viele Ressourcen und finanzielle Mittel für die Erschließung dieses Seeweges auf, während die portugiesischen Könige des 15. Jahrhunderts die »Atlantischen Expansion« in jedem Bereich ausser dem finanziellen unterstützten. Im Jahre 1419 erreichten Schiffe unter dem Banner Heinrichs des Seefahrers¹⁹ Madeira, 1424 die Kanaren und 1432 die Azoren. Gil Eneas gelang im Jahr 1434 unter Heinrichs Banner die Umschiffung des Kap Bojador²⁰. Mit diesem Erfolg wählte man sich der Erschließung des Seeweges nach Indien nahe, besonders, da der Versuch der Umschiffung des Kap Bojador zwischen 1422 und 1434 15-mal misslungen war. Die Entdecker mussten jedoch feststellen, dass mit ihren Schiffen aufgrund anderer Wind- und Strömungsverhältnisse hinter dem Kap Bojador ein Navigieren zurück in die Heimat äußerst schwierig war. Motiviert durch diese Schwierigkeiten und gewillt die »Atlantische Expansion« und die Erkundung des Seeweges nach Asien weiter voranzutreiben, ließ Heinrich 1441 die erste Karavelle²¹ bauen.

Quellen weisen darauf hin, dass 1450 der portugiesische Seefahrer Diogo de Teiro von den Azoren aus Richtung Nord-Westen segelte. Er kreuzte vermutlich sogar den Golfstrom und gelangte in den kalten Sankt-Lorenz-Strom, welcher ihn zur Rückkehr

17 Dies war die erste nautische Forschungsanstalt Europas. Aus dem ganzen Mittelmeerraum wurden Geographen, Mathematiker, Astronomen und Kartographen zusammengezogen, um die Methoden der Schifffahrt und der Navigation zu verbessern und neue zu entwickeln.

18 Portugiesische Gelehrte konnten Erfolge in der Navigation erzielen. Sie perfektionierten das Breitensegeln und verbesserten Jakobsstab und Kompass. Ebenso verbesserten und erweiterten sie Seekarten und astronomische Tafeln. Außerdem wurde intensiv an der Lösung des Längenproblems gearbeitet (welches erst im 18. Jahrhundert durch hinreichend genaue Chronometer gelöst wurde). Dies führte zu Erleichterungen in der Navigation allgemein und zu einer Steigerung der Genauigkeit mittels Koppelnavigation.

19 Rotes Christuskreuz auf weißem Hintergrund.

20 Das Kap Bojador bildet den westlichen Ausläufer des Gebirgszugs Dschebel el Aswad in der Sahara und galt im Mittelalter lange Zeit als das westliche Ende der Welt.

21 Dieser neue Schiffstyp war in der Lage auch »sehr hoch am Wind« zu segeln. Dies erleichterte das Kreuzen und verkürzte die Fahrtzeit erheblich. Dadurch war man in der Lage den widrigen Bedingungen hinter dem Kap Bojador zu trotzen. Außerdem konnten Karavellen ausreichend Proviant und Ersatzteile für eine längere Reise mitführen. Durch eine »neuartige« Beplankung war man in der Lage eine Überholung des Rumpfes und andere größere Reparaturen selbst an ungünstigen Orten ohne die technischen Möglichkeiten einer Werft durchzuführen.

zwang. 1456 wurden die Kapverdischen Inseln entdeckt und dem Christusorden zur Besiedlung im Namen Portugals übergeben. 1460 erreichten portugiesische Seefahrer Guinea. Ein wichtiges Merkmal der portugiesischen Entdeckungsreisen war, dass sich der Königshof nie an der Finanzierung²² einer Expedition beteiligte. Im Jahr 1474 informierte Dottore Paolo dal Pozzo Toscanelli²³ den portugiesischen Hof, dass seiner Ansicht nach die Möglichkeit bestehe den indischen Subkontinent über eine Westroute zu erreichen. Diese Dokumente wurden als »Toscanelli-Briefe« bekannt. Toscanelli hatte die aus seiner Sicht für diese Problemstellung relevanten Dokumente zusammengefasst. Auch die Fortschritte der Nautik, an welchen Portugal maßgeblich beteiligt war, machten seiner Meinung nach die Umsetzung seines Planes möglich. Seine Überlegungen wurden, da portugiesische Gelehrte nicht von ihnen überzeugt waren, unter Alfons V. nicht für portugiesische Expeditionen herangezogen. 1474 veröffentlichte Regiomontanus²⁴ sein Werk »Ephemerides astronomicae ab anno 1475–1506«²⁵. Die Erfolge der Seefahrer unter portugiesischer Flagge auf der Südroute nach Indien führten zur Überzeugung, dass auf diesem Wege der Seeweg bald erschlossen sein würde. 1481 bestieg João II.²⁶ den portugiesischen Thron. Er war wie seine Vorgänger darauf erpicht die »Atlantische Expansion« Portugals und die Erkundung eines Seeweges nach Asien weiter voranzutreiben. João II. setzte die »Junta dos Mathematicos«²⁷ als wissenschaftlichen Beirat ein. Sie war für Schifffahrt,

22 Bei all den genannten portugiesischen Entdeckungsreisen mussten immer die Seefahrer das finanzielle Risiko tragen. Entweder brachten sie selbst die notwendigen finanziellen Mittel auf, oder sie fanden einen Investor. Das Königshaus sicherte ihnen diverse Rechte im Falle eines Erfolges zu und stellte ihnen die Ergebnisse der Arbeiten von Universität und Akademie zur Verfügung.

23 Paolo dal Pozzo Toscanelli lebte von 1397 bis 1482 und war florentinischer Arzt, Mathematiker und Kosmograph, der sich unter anderem mit der Berechnung der Breite des Atlantik beschäftigte.

24 Johannes Müller, * 6. Juni 1436 in Königsberg, Bayern, † 6. Juli 1476 in Rom, genannt Regiomontanus, war Mathematiker und Astronom. 1450, mit 14 Jahren, immatrikulierte er sich an der Wiener Universität. 1452 wurde er Baccalaureus, 1457 Magister. Er vereinfachte die Konstruktion des Jakobsstabes und stellte zu Themen wie Geometrie, Trigonometrie und Astronomie Berechnungen an.

25 Die Positionsangaben der Gestirne in diesem Werk waren für die Seefahrer des späten 15. Jh. eine große Hilfe bei der Navigation.

26 João II., * 3. Mai 1455 in Lissabon, † 25. Oktober 1495 in Alvor, er regierte sein Land mit Strenge und führte es zu einer absolutistisch und zentral regierten Monarchie.

27 Die Junta dos Mathematicos wurde Anfang der 1480-er gegründet. Mitglieder waren der Bischof von Céuta, Diogo Ortiz de Casadilla, der Astronom Diogo de Vilhegas der königliche Physiker und Mathematiker und des Königs Leibärzte Rodrigo und José Vizinho. Ersterer stand der Junta dos Mathematicos vor und war zugleich des Königs Beichtvater. Zusätzlich zu den oben genannten

Seewesen und Entdeckungen zuständig mit den Hauptaufgaben, die für die Seefahrt notwendigen Hilfsmittel zu erstellen, zu verbessern und portugiesische Seefahrer damit auszustatten. Außerdem überprüfte sie Expeditionspläne auf ihre Durchführbarkeit. Ihr Urteil war ausschlaggebend, ob der König eine Expedition genehmigte oder ablehnte. 1482 wurde die Festung São Jorge da Mina²⁸ gegründet. Portugal war somit in der Lage, die »Schätze« Afrikas zu erschließen und in das Herz des Kontinents vorzustoßen. Der portugiesische Seefahrer Diogo Cão leitete Expeditionen Richtung Süden wobei er 1483 auf dem Kongo ins Landesinnere vordrang.

Es ist wahrscheinlich dass 1487, als Kolumbus' Plan in Portugal schon abgelehnt worden war, João Estreito und Fernando Dulmos versuchten diesen für Portugal umzusetzen. Sie finanzierten diese Reise selbst und stachen von den Azoren aus in See, kamen jedoch erfolglos wieder zurück²⁹. Portugiesische Seefahrer stießen entlang der Küste Afrikas immer weiter nach Süden vor. Bartolomeu Dias³⁰ gelang es 1488 als Erstem das Kap der Guten Hoffnung und somit die Südspitze Afrikas zu umsegeln. Damit sah man sich endgültig der Erschließung des Seeweges nach Indien nahe. Dias, der sein Hauptaugenmerk auf die Erkundung der Südroute legte, war ein direkter Konkurrent von Kolumbus. 1498 startete eine geheim gehaltene Mission zur Entdeckung Südamerikas. Diese wurde von Duarte Pacheco Pereira geleitet. Ob diese Expedition Südamerika erreichte, ist ungewiss. Im Jahre 1497 brach Vasco da Gama³¹ auf, um den Seeweg nach Indien über die Südroute zu finden. Im Mai 1498

berieten Gelehrte der entsprechenden Fachgebiete bei ihren Portugalaufenthalten die Junta dos Mathematicos.

28 An der »Goldküste«, dem heutigen Ghana.

29 Diogo Ortiz de Cazadilla dürfte ihnen die Pläne des Kolumbus, soweit sie ihm bekannt waren, zukommen haben lassen und sie auch bei der Finanzierung unterstützt haben. Doch die Azoren, welche zwar weit westlich liegen, eigneten sich nicht, um gegen Westen zu segeln. Die Wind- und Strömungsverhältnisse gaben einem solchen Unternehmen mit damaliger technischer Ausstattung nur geringe Erfolgsaussichten.

30 Bartolomeu Dias, * um 1450 in der Algarve, † 29. Mai 1500 südlich des Kap der Guten Hoffnung, erhielt 1486 von João II. den Auftrag an die Ergebnisse von Diogo Cão anzuknüpfen und die Südspitze Afrikas zu finden, diese zu umsegeln sowie falls möglich den Seeweg nach Indien zu erschließen. Für seine Erfolge wurde er zum obersten Verwalter der Handels- und Steuerbehörde, welche den gesamten Handel mit neu entdeckten Gebieten abwickelte, ernannt. Im Jahr 1500 nahm er unter dem Kommando von Pedro Álvares Cabral an einer Indien Reise, welche auch offiziell Brasilien entdeckte, teil. In der Nähe des Kap der Guten Hoffnung, welches er 12 Jahre zuvor als erster Europäer umschiffte hatte, ging sein Schiff unter.

31 Vasco da Gama, Graf von Vidigueira, * um 1469 in Sines, † 24. Dezember 1524 in Cochin, Indien.

erreichte er Calicut in Indien und war somit der erste Seefahrer, der eine Seeroute nach Indien erschlossen hatte. 1499 kehrte er erfolgreich von seiner Indienreise nach Portugal zurück.

2.3. Wissensstand

Anders als oftmals angenommen, war im 15. Jahrhundert fast ganz Europa davon überzeugt, dass die Erde kugelförmig sei. Die Hypothese, die Erde sei eine Scheibe war, wenn überhaupt, nur bei einfachen Leuten vorhanden.

Durch die Renaissance waren weltliche Herrscher der »Wissenschaft« gegenüber aufgeschlossener geworden. Argumentationen Geistlicher waren hingegen von der Spätscholastik dominiert. Die Tatsache, dass Papst Sixtus IV. 1477 den Auftrag erteilte einen Erdglobus zu fertigen zeigt, dass auch im Kirchenstaat kein Zweifel bestand, dass die Erde eine kugelförmige Gestalt habe. Schon der bedeutende Kirchenlehrer Thomas von Aquin³² vertrat die These der kugelförmigen Erde. Aus historischen Unterlagen lässt sich erkennen, dass es sich bei der Vermutung, im 15. Jahrhundert habe in Europa die Überzeugung geherrscht, die Erde sei eine Scheibe, um nicht mehr als einen modernen Mythos handelt. Der Reichsapfel³³ ist ein weiterer Hinweis darauf, dass kein Zweifel an der kugelförmigen Gestalt der Erde bestand. Große Uneinigkeit herrschte jedoch bei den Überlegungen, wie groß diese »Kugel« sei, und ob es möglich wäre westwärts nach Ost-Asien zu gelangen.

Die Gründung von nautischen Akademien, Universitäten und die Suche eines Seeweges nach Indien führten dazu, dass im 15. Jahrhundert alles relevante Wissen zu dieser Frage akribisch zusammen getragen wurde. Doch war der »Wissenstransfer«

³² Thomas von Aquin, * um 1225 auf Schloss Roccasecca bei Aquino in Italien, † 7. März 1274 in Fossanova, war einer der bedeutendsten Kirchenlehrer des Hochmittelalters. Sein Werk »Summa Theologica« kann als Enzyklika seiner Zeit betrachtet werden.

³³ Der Reichsapfel symbolisiert den Erdball und ist Sinnbild für die Weltherrschaftsansprüche des Kaisers des Heiligen Römischen Reich Deutscher Nation. Erstmals wurde er bei der Krönung Heinrich VI. 1191 übergeben.

innerhalb Europas zu jener Zeit ein langsamer Prozess. Der folgende Zusammenstellung soll den Wissensstand der für diese Arbeit relevanten Bereiche im ausgehenden 15. Jahrhundert erörtern.

2.3.1. Antikes und Arabisches Wissen

In den durch die Mauren wiedererlangten antiken Aufzeichnungen waren auch Informationen über Form und Dimension der Erde enthalten. So ist bei Seneca³⁴ und Plutarch³⁵ zu lesen, dass noch weitere vorerst unbekannte Teile der Erde existieren und bewohnbar sind. Auch Aristoteles³⁶ schreibt in seinem Werk »De caelo et mundo II« von der kugelförmigen Gestalt der Erde und dass zwischen den Säulen des Herakles³⁷ und Indien nur ein Meer liegt. Eratosthenes³⁸ beschreibt in seinem Werk »Geographica«³⁹ die Größe und Gestalt der Erde. Dort liest man, dass nur die Größe des Atlantischen Meeres eine Überfahrt von der Iberischen Halbinsel nach Indien verhindert. Seiner Ansicht nach liegen Indien und die Iberische Halbinsel auf demselben Breitengrad. Eratosthenes hält es für sehr wahrscheinlich, dass in diesem großen Meer auf der gemäßigten Breite auch noch ein weiterer bewohnter Erdteil liegt. Er schätzt, dass der bisher bekannte Erdteil etwas mehr als ein Drittel des Erdumfangs ausmacht. Ebenso hatte Eratosthenes den Äquatorumfang berechnet und angegeben. Die exakte Umrechnung seiner Angaben in heutige Längenzeinheiten ist jedoch keine triviale Aufgabe, da seine Angaben in Stadien⁴⁰ (252.000 Stadien) erfolgt sind. Da er in Alexandria lebte, ist es plausibel anzunehmen, dass er ägyptische Stadien verwendet hat, womit sich ein Äquatorumfang von 39 690 km ergibt. Mit einer

34 Lucius Annaeus Seneca, * etwa im Jahre 1 in Corduba, † 65 n. Chr. in der Nähe Roms, beschrieb in seinem Werk »Naturales Quaestiones« die Natur.

35 Plutarch, * um 45 in Chaironeia, † um 125, schreibt in seinem Werk »Moralia XII« unter anderem über die Gestalt der Erde.

36 Aristoteles, * 384 v. Chr. in Stageira auf der Halbinsel Chalkidike, † 322 v. Chr. in Chalkis auf der Insel Euböia.

37 Antike Bezeichnung für Gibraltar.

38 Eratosthenes von Kyrene, * ca. 276 v. Chr. in Kyrene, † 194 v. Chr. in Alexandria, war Leiter der Bibliothek von Alexandria.

39 Dieses Werk ist nur durch Strabon's Schriften »Strabo I - II« erhalten.

40 Allgemein kann ein Stadion jeden Wert zwischen 157 Meter und 211 Meter annehmen. Beispielsweise entsprach das Ägyptische Stadion 157,5 Meter, das Attische Stadion 184,97 Meter und das Olympische Stadion 192,27 Meter.

sich daraus ergebenden Abweichung von weniger als 1 % erreichen Erathostenes' Berechnungen eine erstaunliche Genauigkeit.

Ptolemäus'⁴¹ Werke⁴² waren bis in die Neuzeit die Standardwerke für Astronomie und Geographie. Er postulierte auch das geozentrische Weltbild, welches später auch das ptolemäische Weltbild genannt wurde. In diesem befindet sich die »kugelförmige« Erde im Zentrum des Universums und wird von allen anderen Himmelskörpern umkreist. In seinem Werk »Geographike Hyphegesis« zeichnete er die damals bekannte Welt mit ihren Bewohnern auf. Er verwendete alle ihm zugänglichen Informationen dafür (auch Erzählungen). Für den Äquatorumfang gab er je Längengrad nicht wie Erathostenes 700 sondern 500 Stadien an. Es ist jedoch nicht geklärt, ob beide sich auf dieselben Stadien beziehen. In jedem Fall kommt Ptolemäus auf ein kleineres und somit »schlechteres« Ergebnis. Da sowohl Ptolemäus als auch Erathostenes im heutigen Ägypten lebten, ist es plausibel anzunehmen, dass beide dieselbe Stadiongröße als Längenmaß verwendeten. Die Ausdehnung der Ökumene⁴³ beschreibt er mit 180° Länge und 80° Breite. Nimmt man an, dass Erathostenes und Ptolemäus dieselben Maßeinheiten verwendet haben, ergibt sich eine nahezu idente Ausdehnung der Ökumene. Seine Angaben waren Grundlage für die Verbreitung der Annahme eines um 2/7 zu kleinen Äquatorumfangs. Marinus von Tyrus⁴⁴ entwarf Karten der bekannten Welt, bei ihm nimmt die Ökumene 225° Länge und 87° Breite ein. Ptolemäus verwendete Gradangaben, seine Einteilung der Breitengrade hat sich durchgesetzt und über die Zeit gehalten, der von ihm für Längenangaben als Referenz dienende »Ferro-Meridian«⁴⁵ war bis ins 19. Jahrhundert gebräuchlich.

41 Klaúdios Ptolemaíos, * um 100, vermutlich in Ptolemais Hermii, Ägypten, † um 175, vermutlich in Alexandria, Ägypten.

42 Almagest und Geographike Hyphegesis.

43 Als Ökumene wurde der ständig bewohnbare und nutzbare Teil der »bekannten« Erde bezeichnet.

44 Marinus von Tyrus, zirka 70 - 130 n. Chr. in Griechenland.

45 Ferro, Kanarische Insel, heute El Hierro.

Der Arabische Gelehrte al-Fargani⁴⁶ berechnete, dass ein Grad am Erdäquator $56 \frac{2}{3}$ Meilen⁴⁷ entsprach, womit er nach heutigen Maßen auf einen Umfang von 40 259 400 Meter kommt. Bei dem Äquatorumfang nach heutigem Stand von 40 075 004 Meter bedeutet dies eine Abweichung von weniger als 0,5 %.

2.3.2. Gerüchte und kirchliche Literatur

An den Westküsten Europas und Nordafrikas waren Gerüchte über eine große Landmasse im Westen im Umlauf. Diese basierten auf Funden an den Küsten. Angespülte Gegenstände und Leichen trugen zur Verbreitung dieser Gerüchte bei. In den nördlicheren Teilen Europas kursierten Erzählungen von Menschen, die auf Inseln im Westen lebten. Auch gab es Berichte von Seeleuten, die behaupteten, es existiere Land im Westen, zu welchem verschollene Seefahrer gelangt seien. Auch Berichte über Inseln westlich von Thule⁴⁸ kursierten.

In der Bibel finden sich Stellen⁴⁹ mit Hilfe derer Größe und Form der Erde gedeutet werden können. Augustinus schreibt in seinem Werk »De imagine mundi« von einem einst entdeckten und wieder verloren gegangenen Land im Westen Europas. Albertus Magnus⁵⁰ schreibt ebenfalls von einem vierten bewohnbaren und bewohnten

46 Abul Abbas Akhmad ibn Mohammed ibn Kasir al-Fargani, * Ende des 8. Jahrhundert vermutlich in Feranga, heute Usbekistan, † nach 861 vermutlich in Ägypten, war Astronom, Mathematiker und Ingenieur. Er arbeitete als Astronom und Ingenieur am Bagdader Kalifenhof und beschäftigte sich ebenso mit Geographie, Geodäsie und Chronologie. Außerdem leitete er die Arbeiten am großen Nilometer im heutigen Kairo und entwickelte die Astronomie zu einer eigenständigen Wissenschaft. Seine Schriften wurden ins Lateinische übersetzt und kursierten bis in die Neuzeit hinein in ganz Europa. Etliche Handabschriften sind nach wie vor erhalten.

47 Arabische Meile = 1973,5 Meter; Römische Meile = 1477,5 Meter; Seemeile (nautische Meile) = 1852 Meter Abk.: NM.

48 Vermutlich antiker Name für Island; in der Antike bezeichnete »ultima Thule« auch den äußersten Nordrand der Erde.

49 Z.B.: Buch Jesaja 60,9 ; 65,17.

50 Albertus Magnus, * um 1200 in Lauingen an der Donau, † 15. November 1280 in Köln, war Bischof von Regensburg. Er wurde zum Kirchengelehrten und ist Schutzparton der Naturwissenschaftler.

Erdteil⁵¹ und dass zwischen den Gaden des Herkules⁵² und Indien nur ein kleines Meer liegt⁵³.

Pierre Kardinal d'Ailly⁵⁴ schreibt, sich unter anderem auf Aristoteles beziehend, von der Überschiffbarkeit des »Westmeeres«⁵⁵ und somit von der Realisierung der Seeroute nach Asien rund um den Globus. Seiner Ansicht nach benötigt man bei gutem Wind für die Überfahrt nur wenige Tage⁵⁶. All dies bestätigt, dass auch klerikale Kreise von der Kugelgestalt der Erde überzeugt waren.

2.3.3. Ausgehendes Mittelalter und Zeitalter von Kolumbus

Das Wissen des 15. Jahrhunderts in Europa basierte im Großen und Ganzen auf den Schriften der Antike. Dieses durch die Mauren und Araber wiedererlangte Wissen wurde den eigenen Vorstellungen entsprechend gedeutet und basierend auf diesen Quellen stellten Gelehrte eigene Berechnungen an. Die Mathematik hatte, da für die genaue Berechnung des Ostertermins absolut notwendig, zunehmend an Bedeutung gewonnen.

In Europa verbreitet waren die Reiseberichte des Marco Polo⁵⁷ über seine China-reise. In diesen beschreibt er die Ausdehnung der eurasischen Landmasse, ohne diese jedoch bestimmt zu haben. Die Erzählungen in Nord-Europa über im Westen lebende Menschen kamen denen Marco Polos über die Mongolen sehr nahe.

Dottore Paolo del Pozzo Toscanelli (siehe Fußnote 23) kam mit seinen Überlegungen zu dem Ergebnis, dass die Entfernung von Lissabon nach Shanghai 230° der Erdkugel

51 De natura locorum.

52 Bezeichnung der Gebirge an den Seiten der Straße von Gibraltar im Mittelalter.

53 De caelo et mundo.

54 Pierre d'Ailly, * 1350 in Compiègne, † 9. August 1420 in Avignon.

55 Imago mundi de Pierre d'Ailly.

56 Compendium cosmographiae.

57 Marco Polo, * ca. 1254 vermutlich in Venedig, † 8. Januar 1324 ebendort, war ein venezianischer Händler, der durch die Berichte über seine China-Reise Berühmtheit erlangte.

ausmache. Diese Erkenntnisse entsprechen etwa jenen Marinus von Tyrus. Der Dottore kommt auch zu dem Ergebnis, dass ein Grad Länge am Erdäquator 62,5 Seemeilen entspricht. Auch beschreibt er Inseln im »Westmeer« und bezeichnet diese namentlich als »Antilia« und »Brasil«.

Zusammenfassend zeigt sich, dass kaum eigene Messungen und daraus folgende Berechnungen für die Größe der Erde angestellt wurden. Vielmehr übernahm, adaptierte und interpretierte man im 15. Jahrhundert Aufzeichnungen der Antike und Laienberichte.

2.4. Christoph Kolumbus

Die frühen Jahre des Kolumbus⁵⁸ sind für diese Arbeit nicht von Relevanz, daher wird auf diesen Lebensabschnitt nicht eingegangen. Kolumbus widmete sein Leben der Seefahrt ohne je eine entsprechende Ausbildung erhalten zu haben und er strebte nach Wohlstand. Als 1476 das Handelsschiff, auf welchem er sich befand in einem Seegefecht vor der Küste Portugals versenkt wurde, konnte er sich schwimmend an die Küste retten. Völlig mittellos strandete er bei Lagos.

Kolumbus ließ sich in Portugal nieder und erfuhr, wie portugiesische Seefahrer durch ihre Expeditionen zu beträchtlichem Wohlstand gelangten. In seinem Streben nach Wohlstand erkannte er, dass die Entdeckung einer Seeroute nach Asien ihn zu beträchtlichem Reichtum führen könnte. Durch seine Heirat mit Dona Filipa Moniz Perestrelo⁵⁹ erhielt er Zugang zum portugiesischen Hof und zu den Erkenntnissen der nautischen Akademie, der »Atlantischen Expansion« sowie deren Erfahrungen. Durch diese Einblicke kam Kolumbus zur Überzeugung eine »Westroute« nach Asien finden zu können. Da der portugiesische Schwerpunkt auf der Erkundung einer »Südroute« lag, bot die »Westroute« Kolumbus die Möglichkeit, auf dieser ausgedehnte Privilegien zu fordern und für sich zu sichern. Kolumbus begann

⁵⁸ Cristoforo Colombo (span. Cristóbal Colón, port. Cristóvão Colombo), * um 1451 in Genua, † 20. Mai 1506 in Valladolid.

⁵⁹ Die Familie Moniz gehört dem portugiesischen Hochadel an und geht auf Egon Moniz, welcher der Legende nach 1147 das Castelo de Sao Jorge gegen die Mauren verteidigt hatte, zurück.

akribisch alle für sein Vorhaben relevanten Informationen, unabhängig von ihrer Herkunft, zusammen zu tragen.

2.4.1. Kolumbus Überlegungen über die Größe des Atlantischen Meeres

In diesem Abschnitt wird dargelegt, wie Kolumbus die Entfernung nach China ermittelte. Auch wenn ihm die Erkenntnisse des Erathostenes über die Größe der Erde bekannt gewesen sein müssten⁶⁰, nahm er sie nicht in seine Überlegungen auf. Ebenso vernachlässigte er die Quellen und Hinweise, gemäß welchen die »Ost-West-Ökumene« ein Drittel der Erde bedeckte. Er ging bei seinen Überlegungen von den Einschätzungen von Marinus von Tyrus und von Toscanelli, sowie von den Schriften von d'Ailly⁶¹ aus. Diese gaben eine Ausdehnung der »Ost-West-Ökumene« von 225° an. Weiter argumentierte er, dass Marco Polo in Cathay⁶² neue Regionen entdeckt und in seinen Reiseberichten beschrieben hatte, welche bei Marinus von Tyrus und Toscanelli nicht berücksichtigt worden seien. Folglich seien zu den 225° weitere 28° zu addieren. Kolumbus argumentierte weiters, dass sich die Distanz um weitere 9° verkürze, wenn anstelle Lissabons die Kanaren als Abfahrtsort dienten und um zusätzliche 30°, wenn anstelle von Cathay Cipangu⁶³ als Ziel angesteuert würde. Dies sei zulässig, da Cipangu sich auf der selben Breite wie die Kanaren befinde. Daraus ergebe sich eine zu überbrückende Restdistanz von 68°. Kolumbus war bewusst, dass mit der damaligen Technik ein Schiff, auch wenn Proviant und Ausrüstung für maximal ein Jahr mitgeführt würden, nicht länger als 30 - 40 Tage auf hoher See sein konnte. Bis zu seiner Zeit wurde in Europa immer nur in »Küstennähe« navigiert und kein Schiff befand sich länger als zwei bis drei Wochen auf hoher See. Kolumbus argumentierte, dass auch Ptolemäus sich mit Ortsangaben, beispielsweise mit nördlichen Inseln wie Thule, geirrt hatte. Er ging davon aus, dass somit auch bei seinen verwendeten Quellen leichte Korrekturen vorzunehmen seien. Deshalb verkürzte

60 Durch seine Einsicht in die Unterlagen am portugiesischen Hof.

61 (Gerhard, 1956) schreibt, dass laut Alexander von Humbolt die Hauptquelle des Kolumbus die Schriften von Pierre Kardinal d'Ailly waren.

62 Heute China.

63 Heute Japan.

er die zu bewältigende Distanz von 68° auf 60°. Weiters ging Kolumbus davon aus, dass Toscanelli bei den Umrechnungen, mit welchen er zu dem Ergebnis gelangt war, dass 1° Länge 62,5 Seemeilen entspricht, Fehler begangen hatte. Seiner Meinung nach habe Toscanelli bei der Umrechnung der aus dem Arabischen kommenden Quellen angenommen, dass die Angaben in Arabischen Meilen seien, doch in »Wirklichkeit«⁶⁴ seien die dort zu findenden Angaben in Römischen Meilen. Womit Kolumbus zu dem abgerundeten Ergebnis kam, dass die Distanz zwischen zwei Längengraden am Äquator 45 Seemeilen entspricht und somit auf der Breite der Kanaren nur noch 40 Seemeilen zwischen den Längengraden lägen. Insgesamt ergäbe dies eine Entfernung Kanaren - Cipangu von 2400 Seemeilen. Neben der Ausdehnung der eurasischen Landmasse verkleinerte Kolumbus den Erdumfang um etwa 25%. In Tabelle 2.1 sind die geschätzten Entfernungen in Nautische Meilen umgerechnet den tatsächlichen gegenübergestellt.

Westeuropa bis	Kolumbus	Toscanelli	Ptolemäus	Erathostenes	Tats.
Japan	2 400	3 000			10 600
China	3 600	5 000	6 630	14 280	11 800
San Salvador					3 100

Tabelle 2.1.: Entfernungen auf der Westroute in Nautischen Meilen

Die tatsächliche Entfernung von La Gomera bis San Salvador⁶⁵ beträgt etwa 3100 Nautische Meilen, jene von La Gomera bis nach Barbuda nur 2520. Dies zeigt, dass trotz der exorbitanten Fehlberechnungen über die Lage Cipangus sich in der Nähe der von Kolumbus und Toscanelli vermuteten Lage Land befindet.

2.4.2. Kolumbus am portugiesischen Hofe

Kolumbus erhielt 1482 über seine Frau seine erste Audienz bei König João II., 1483 legte er ihm seinen Plan für die Erkundung einer Westroute mit seinen Berechnungen

⁶⁴ D.h. nach Kolumbus Meinung.

⁶⁵ Dies sind Kolumbus' Abfahrts- bzw. Ankunftsinseln.

vor. Der König war von Kolumbus' überzeugendem Auftreten beeindruckt; dessen Plan entsprach seinen Vorstellungen von der Welterkundung. Kolumbus stellte hohe Forderungen an das Königshaus. Im Falle eines Erfolges beanspruchte er ein Zehntel aller Einkünfte aus Handel mit Metallen, Edelsteinen, Gewürzen, etc. aus den neuen Kolonien. Er forderte das Recht, sich an allen Missionen in die »Neuen Gebiete« mit einem Achtel zu beteiligen, des weiteren forderte er den Titel des Vizekönigs der neuen Ländereien und den des Admirals des Atlantischen Meeres. Er verlangte auch das Recht, dem König einen Dreierorschlag für die Gouverneure der neuen Gebiete zu unterbreiten, aus welchem dieser dann auszuwählen hätte. Seine Titel sollten nach seinem Ableben an seine Nachfahren übergehen. Außerdem forderte er die oberste Gerichtsbarkeit bei allen Streitigkeiten betreffend die Seefahrt in die von ihm entdeckten Gebiete und den Handel mit diesen. Zusätzlich zu den Forderungen für den Fall des Erfolges seiner Mission verlangte Kolumbus, dass das portugiesische Königshaus ihm drei Karavellen inklusive Mannschaft, Proviant und Ausrüstung zur Verfügung stellen solle. Die von Kolumbus vom portugiesischen König geforderten Zusagen sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

Monetäre Forderungen

10 % aller Einkünfte aus den »Neuen Gebieten«
Das Recht sich mit 1/8 an jeder Mission zu beteiligen,
welche die von ihm entdeckte Route benützt
Ausstattung (Schiffe, Mannschaft, Versorgungsgüter)

Politische Forderungen

Titel des Vizekönigs der neuen Länder
Titel des Admirals des Atlantischen Meeres
Das Recht, dem König einen Dreierorschlag für die Gouverneure der
»Neuen Gebiete« vorzulegen, aus welchem dieser auszuwählen hätte
Oberste Gerichtsbarkeit bei allen Streitigkeiten betreffend die Seefahrt in
und den Handels mit den von ihm entdeckten Gebieten
Vererbbarkeit seiner Titel und Rechte

Tabelle 2.2.: Zusammenfassung der Forderungen von Kolumbus

Die Anteile von Kolumbus an den Kosten und Erträgen sollten denen der »folgenden« Missionen entsprechen. Dies widersprach dem üblichen Vorgehen der portugiesischen Krone bei Expeditionen. Dennoch beauftragte João II. die »Junta dos Mathematicos« mit der Prüfung des Planes von Kolumbus.

2.4.3. Kolumbus und die Junta dos Mathematicos

Die »Junta dos Mathematicos«, welcher alle relevanten Schriften und Quellen zur Verfügung standen, prüfte Kolumbus' Plan auf Wahrheitsgehalt und Realisierbarkeit. Die Mitglieder schlossen ihre Arbeit zügig ab und kamen zu einem negativen Urteil, da sie keine Möglichkeit zur Umsetzung von Kolumbus' Vorhaben sahen. Ihrer Ansicht nach hatte Kolumbus zu viel bei dem Venezianer und »notorischen Aufschneider« Marco Polo gelesen und seine Worte seien »seichtes Gerede«. Die »Junta« argumentierte auch, dass die Pläne Phantasien seien und die Argumente auf vagen Vermutungen beruhten. Trotz der vagen Hinweise, dass zwischen der westlichen Küste Europas und der östlichen Asiens Land existieren könnte, konzentrierte sich Kolumbus und folglich auch die »Junta« ausschließlich auf eine direkte Reise von den Kanaren nach Cipangu. Die Gelehrten kamen zu dem Schluss, dass Kolumbus' Berechnungen auf falschen Grundlagen basierten und die zu überbrückende Entfernung nicht wie von Kolumbus angegeben 2 400 sondern mehr als 10 000 Seemeilen betrage. Außerdem seien seine Forderungen zu hoch. Zudem kamen die Erfolge portugiesischer Seefahrer an den Küsten Afrikas, Diogo Cão war gerade von einer seiner erfolgreichen Missionen zurückgekehrt.

Kolumbus gab dennoch nicht auf; er erkannte, dass seine Chance in Portugal gewahrt blieb. Als ihm nochmals die Gelegenheit gegeben wurde seinen Plan vorzutragen, berief er sich erneut und verstärkte auf Toscanelli, Behaim⁶⁶ und d'Ailly. João II. wollte der »Zukunft Portugals nicht im Wege stehen« und beauftragte deshalb die »Junta«,

⁶⁶ Martin Behaim, * 6. Oktober 1459 in Nürnberg, † 29. Juli 1507 in Lissabon, Portugal, nahm an mehreren portugiesischen Entdeckungsfahrten teil. »Behaims Erdapfel« ist der älteste heute noch erhaltene Erdglobus.

sich ein weiteres mal mit dem Kolumbus-Plan auseinanderzusetzen. Außerdem berief er den Kronrat ein, welcher auf Empfehlung der Junta die endgültige Entscheidung treffen sollte.

João II. sprach Kolumbus auf seine überhöhten Forderungen an, doch dieser war zu keiner Verminderung bereit. Kolumbus betonte, dass die »Junta« bei ihren Berechnungen irren würde. Diese kam erneut zu einem für Kolumbus negativen Urteil. Im Kronrat, welchem auch Mitglieder der »Junta dos Mathematicos« angehörten, stellte sich heraus, dass neben den sachlichen Argumenten der »Junta« auch noch andere Gründe für die ablehnende Haltung vorlagen. Die »Kirche«⁶⁷ war an den schon weit vorangeschrittenen Expeditionen von Dias beteiligt. Somit lag es nicht in ihrem Interesse eine Konkurrenz zuzulassen, welche die Erträge durch Dias' Reisen schmälern könnte. Auch sahen einige im Kronrat die Gefahr der Zersplitterung portugiesischer Ressourcen, wenn nun in beide Richtungen gesegelt würde. Man war der Ansicht, dass aufgrund der Erfolge und Okkupationen⁶⁸ in Afrika der Weg um Afrika vorteilhafter sei als eine Westroute. Auch der Kronrat lehnte Kolumbus' Plan ab und folgte der Empfehlung der »Junta«.

Da Dona Filipa 1485 gestorben, sein Plan durch João II. abgelehnt worden und Kolumbus nahe dem Ruin war, verließ er Portugal in Richtung Kastilien. Dabei nahm er, damit man seinen Plan nicht ohne ihn umsetzen könne, seine persönlich erstellten Unterlagen mit, sowie unberechtigtweise Abschriften aller für ihn relevanten Dokumente. Wegen dieser Entwendungen und hinterlassener Schulden war Kolumbus in Portugal strafbar geworden.

2.4.4. Kolumbus in Kastilien

Trotz der Ablehnung in Portugal war Kolumbus weiterhin von seinem Plan überzeugt und gewillt, diesen mit Unterstützung eines anderen Herrscherhauses umzusetzen. Es ist wahrscheinlich, dass Kolumbus vor hatte, nach Frankreich zu ziehen. Bei seinem Aufenthalt in La Rabida in Kastilien fand seine Idee jedoch Gehör. Juan Perez der Abt

⁶⁷ Insbesondere der Bischof von Céuta, Vorsitzender der »Junta«.

⁶⁸ João II. war durch die Entdeckungen des Diogo Cão zum König von Guinea geworden.

des Klosters sowie der Astronom Antonio de Machera wollten mehr von Kolumbus über seine Pläne wissen. Juan Perez war zudem der ehemalige Beichtvater von Isabella I. wodurch ein Zugang zum kastilischen Hof ermöglicht wurde. Kolumbus erkannte seine Chance und beschloss die Unterstützung des kastilischen Hofes zu suchen. Einige sahen in Kolumbus, ob von der Realisierung seiner Pläne überzeugt oder nicht, eine Chance zu Reichtum zu gelangen und Expansionen durchzuführen. Geistliche Kastiliens erkannten die Möglichkeit der Christianisierung im Falle eines Erfolges und waren von dem Gedanken der christlichen Expansion begeistert. So kam es, dass Kolumbus 1486 die Gelegenheit erhielt, seinen Plan dem kastilischen Hof vorzutragen. Aus seinen Erfahrungen am portugiesischen Hof und mit der Gewissheit, dass die »Kirche« in Kastilien noch größeren Einfluss besaß, passte er seine Argumentation entsprechend an. Seine Berechnungen und Forderungen blieben unverändert, die geplante Reiseroute behielt er, wie in Portugal, für sich.

In Kastilien galt das Hauptaugenmerk der Vertreibung der Mauren von der Iberischen Halbinsel. Zur Durchführung dieses Vorhabens wurden die gesamten zur Verfügung stehenden finanziellen und personellen Ressourcen eingesetzt. Zudem hatte die Seefahrt in Kastilien bis ins 15. Jahrhundert eine untergeordnete Bedeutung. Dennoch verfügte Isabella I. den »Talavera-Ausschuss« einzusetzen, welcher mit der Überprüfung des Planes von Kolumbus auf Realisierbarkeit beauftragt wurde.

Kolumbus trug seinen Plan dem »Talavera-Ausschuss«, welcher später als »Salamanca-Kommission« in die Geschichte eingehen sollte, vor. Er wurde über die Grundlagen seines Plans und seine Berechnungen befragt. Welche Informationen Kolumbus im Detail preisgab, ist nicht bekannt. Obwohl es die Aufgabe dieses Ausschusses war, beschäftigte man sich nicht intensiv mit der Prüfung auf Realisierbarkeit. Vier Jahre sollten vergehen, ehe dieser Ausschuss sein erstes Urteil fällte. Bei sporadisch stattfindenden Befragungen, welche zum Teil einem Verhör glichen, versuchte Kolumbus, den Klerus mit »klerikalen« Argumenten auf seine Seite zu bringen. Er zitierte Bibelstellen, die seiner Ansicht nach seinen Plan untermauerten. Zudem postulierte er die Möglichkeiten zur Verbreitung des christlichen Glaubens in neu entdeckten Gebieten. Ebenso stellte er die Möglichkeit in den Raum, dass mit den gewonnenen finanziellen Mitteln ein neuer Kreuzzug finanziert werden könnte. Bei den meisten Mitgliedern

des Ausschusses fand er wenig Gehör. Das einzige Mitglied, das Kolumbus klar befürwortete, war Diego de Deza⁶⁹.

Man widersprach Kolumbus bezüglich seiner Auslegung der Bibelzitate, wodurch er in Gefahr geriet, von der Inquisition aufgesucht zu werden. Kolumbus betonte, dass die Heilige Schrift in keiner Weise falsch, nur die Auslegung mancher Geistlicher nicht korrekt sei. Zur Unterstützung seiner Pläne zog er auch eine Prophezeiung aus der Bibel heran, nach welcher gemäß seiner Interpretation noch vor der Apokalypse ein weiterer Erdteil entdeckt werden würde. Er rechnete vor, dass es noch maximal 130 Jahre bis zur Apokalypse dauern würde und vor ebendieser alle Prophezeiungen in Erfüllung gehen müssten. Daraus schloss er, dass er auserwählt sei diesen neuen Erdteil zu entdecken. Man darf aber nicht dem Irrglauben verfallen, dass der »Talavera-Ausschuss« keine »wissenschaftliche« Prüfung des Plans von Kolumbus vornahm. Die Universität von Salamanca gehörte zu den »besten« ihrer Zeit, Ordinarien dieser waren ebenfalls Mitglieder des Ausschusses. Kolumbus' Plan wurde in Kastilien ebenso wie in Portugal, basierend auf den vorliegenden Quellen und Informationen, eingehend geprüft. Der Unterschied bestand darin, dass Kolumbus erkannt hatte, wie wichtig es war, sich der Unterstützung der Geistlichkeit zu vergewissern. Es war ihm während seiner Zeit in Kastilien gelungen, zunehmend Geistliche von seiner Idee zu überzeugen. Manche waren zwar nicht Mitglieder des »Talavera-Ausschusses«, doch gewann er so einflussreiche Freunde am Hof.

Sein Bruder Bartolomäus war unterdessen nach London gereist, um dort für Kolumbus' Plan zu werben. Am Hofe Heinrich VII. nahm man den Vorschlag von Bartolomäus nicht sehr ernst und begutachtete nicht einmal alle mitgebrachten Dokumente. England war durch die vorhergegangenen Kriege finanziell erschöpft und politisch uneins. Zwar war sich der König bewusst, dass »Englands Zukunft im Meere liege«, doch der Hofstaat sprach sich gegen Kolumbus' Vorhaben aus. Mit den Worten »Wir haben keine Gedanken und kein Geld für die Pläne eines Narren« in den Ohren

⁶⁹ Diego de Deza, OP (Ordo fratrum Praedicatorum, *deut. Orden der Dominikaner*), * 1443 in Toro, Kastilien, † 1523 in Sevilla, Kastilien, war Theologieprofessor an der Universität von Salamanca. 1487 wurde er Bischof von Zamora, 1498 Generalinquisitor Kastiliens und 1504 Erzbischof von Sevilla.

verließ Bartolomäus London. Da Kolumbus hartnäckig blieb, wandte sich sein Bruder an den französischen Hof.

Nachdem Dias vom Kap der Guten Hoffnung Ende 1488 zurückgekehrt war, versuchte João II. 1489 über einen Briefwechsel⁷⁰ wieder mit Kolumbus Kontakt aufzunehmen. Er sicherte ihm Straffreiheit zu und dass man in Portugal einen Weg finden werde, um die Begabung des Kolumbus für den portugiesischen Hof zu nutzen. Die Motive für diesen Schritt liegen im Ungewissen. Es kann vermutet werden, dass man sich in Portugal der Route nach Indien nun endgültig gewiss war. Der eigene Versuch weiter westwärts in den Atlantik vorzudringen war vorerst gescheitert und Portugal wollte verhindern, dass Kolumbus unter dem Banner Kastiliens erfolgreich nach »Indien« segelte und damit Konkurrenz zu den portugiesischen Seefahrern entstünde. Kolumbus griff dieses Angebot nicht auf, vermutlich da er davon ausging, dass seine Forderungen nicht erfüllt werden würden.

1490 befand sich der Hof Isabellas in Salamanca und Kolumbus suchte diesen dort auf. Der »Talavera-Ausschuss«, welcher von nun an als »Salamanca-Kommission« bezeichnet wurde, verkündete sein erstes Urteil, das Kolumbus' Plan ablehnte. Die Kommission war sich einig darüber, dass man auf einer Westroute Indien erreichen könne, dies aber zum damaligen Zeitpunkt mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich sei. Die »Salamanca-Kommission« deren Vorstand Hernando de Talavera⁷¹ war, gab sechs Gründe an weshalb man Kolumbus' Plan nicht befürwortet hatte:

- Es würde drei Jahre dauern, um nach Ostasien zu segeln
- Der Ozean sei zu groß und möglicherweise unnavigierbar
- Selbst wenn Kolumbus Indien erreichen würde, wäre es ihm nicht möglich zurückzukehren

⁷⁰ Coleccion de documentos ineditos de America e Oceania, Madrid 1873, XIX 459 ff.

⁷¹ Hernando de Talavera, * um 1428 in Talavera de la Reina, Kastilien, † 14. Mai 1507 in Granada, war ab 1486 Bischof von Ávila und Beichtvater Isabella I.. Er gehörte zu den einflussreichsten Personen in Kastilien und lenkte das Reich aus dem Hintergrund. Isabella I. hatte ihn 1486 mit der Einsetzung des »Talavera-Ausschusses« beauftragt. Hernando de Talavera war ein Gegner von Kolumbus und setzte sich für eine Isolationspolitik Kastiliens ein.

- Der Großteil der Erde sei mit Wasser bedeckt und auf der langen Reise bis Ostasien existiere kein Land
- Nur drei der fünf Erdteile seien bewohnbar, der Rest zu lebensfeindlich
- Gott würde keine Menschen so lange nach Christi Geburt leben lassen, ohne dass man sie hätte missionieren können und sie die »Wahrheit« erführen

Dem Urteil schloss sich die Königin an, doch ließ sie eine Hintertüre offen. Es sei ein ungünstiger Moment und wenn die Zeiten besser seien, möge das Urteil vielleicht ein anderes sein.

Kolumbus' Fürsprecher, hier vor allem Diego de Deza und Juan Perez, überzeugten ihn zuzuwarten und bewogen Isabella I. ihre Entscheidung nochmals zu überdenken. Ebenso wie João II. in Portugal verfügte Isabella I., dass die zuständige Kommission sich abermals mit dem Plan beschäftigen sollte. Während der neuerlichen Wartezeit erfuhr Kolumbus, dass sein Bruder in Frankreich mit seinem Plan auf großes Interesse gestoßen war. Auch wenn König Karl VIII. Kolumbus' Plan nicht befürwortete, hatte Bartolomäus mit Anna von Beaujeu⁷² eine mächtige und einflussreiche Fürsprecherin gewonnen. Es schien, als ob Kolumbus mit einem persönlichen Vorsprechen in Frankreich die gewünschte Unterstützung und die Zusage für seine Forderungen erhalten könnte.

1492 erfolgte das nächste Urteil der »Salamanca-Kommission«. Unmittelbar vorher war es nochmals zu einer Befragung von Kolumbus gekommen. Seine Argumentation blieb unverändert, er konnte sich aber auf »gebesserte« Zeiten berufen. Bei diesem Aufenthalt bei Hofe freundete sich Kolumbus mit Louis de Santangel⁷³ an. Zudem hatte er in Pedro González de Mendoza⁷⁴ einen weiteren mächtigen und einflussreichen Fürsprecher gewonnen. Aus Berichten über Zusammenkünfte mit Isabella I. lässt sich vermuten, dass diese von Kolumbus angetan war und er sie auch mit Aussagen wie »Dort wo der Verstand aufhört, beginnt die Größe einer Frau« auf seine Seite ziehen konnte. Auch diesmal lehnte die »Salamanca-Kommission«

⁷² Schwester Karl VIII., hatte bis 1491 dessen Vormundschaft inne.

⁷³ Verwalter der Pfründe von Isabella I. Nach dem Erlass des »Alhambra-Edikts« konvertierte er zum Christentum.

⁷⁴ Ab 1482 Erzbischof von Toledo und somit Primas von Kastilien.

Kolumbus' Plan ab. In der Begründung hieß es, »Jeder Mensch von ein wenig Bildung wird erkennen, dass Eure Pläne verschwommen sind und ihre Durchführung nicht möglich ist. Der Würde der Hoheiten steht es nicht an, eine Unternehmung zu fördern, die auf schwachen Beinen ruht, es sei denn Sie begäben sich in die Gefahr an Ansehen Einbussen zu erleiden und an Geld Verluste.«. Die Hauptbegründung lag im Gegensatz zur ersten Ablehnung in der Nichtfinanzierbarkeit der Mission und in den hohen Forderungen des Kolumbus. Kolumbus war zu keinem Zeitpunkt von seinen erstmals am portugiesischen Hofe formulierten Forderungen abgerückt. Enttäuscht von der abermaligen Ablehnung, jedoch sich seiner Chancen in Frankreich bewusst, verließ Kolumbus den Hof, der inzwischen in Santa Fé, in der Nähe von Granada residierte. Vermutlich wollte er direkt nach Paris reisen, doch ehe er die Stadtumgebung verlassen hatte, ereilte ihn ein königlicher Bote mit der Nachricht, dass die Königin seinen Forderungen zugestimmt und seinen Plan genehmigt hatte.

2.4.5. Die Kapitulation von Santa Fé

Als Kapitulation von Santa Fé wird der Vertrag zwischen Isabella I., Ferdinand II. und Christoph Kolumbus bezeichnet, in dem die Zugeständnisse an Kolumbus und die Einzelheiten der Expedition geregelt wurden. Was war geschehen, dass es zur Kapitulation von Santa Fé kam? Kolumbus hatte in Kastilien bereits einige mächtige Fürsprecher gewonnen. Nach seiner Abreise wandten sich Luis de Santangel und Gabriel Sanchez, der Schatzmeister der Königin (wie Luis de Santangel ein Marrane⁷⁵) an Isabella I.. Erstmals nahmen die für Finanzen zuständigen Berater der Königin zu Kolumbus' Plan Stellung und befürworteten diesen. Auf die Frage der Königin, wer das bezahlen solle, antwortete Santangel, »Eure Majestät lasst dies meine Sorge sein«. Außerdem überzeugte er die Königin, dass die Forderungen des Kolumbus nicht unverschämt hoch seien und stellte ihr den »übermäßigen« Gewinn und Ruhm bei Erfolg in Aussicht.

⁷⁵ Ein anlässlich des Alhambra-Edikts zum Christentum konvertierter Jude.

Da nun das Finanzielle gelöst und die Königin von dem möglichen ihr in Aussicht gestellten Ruhm und finanziellen Erfolg entzückt war, stimmte sie dem Plan zu, ließ Kolumbus herbeiholen und gewährte ihm seine Forderungen. Tabelle 2.3 listet die Aufwendungen Isabellas für Kolumbus' Expedition auf. Die Schätzung der Kosten in DM (Äquivalent 1991) sind (Gierloff-Emden, 1994) entnommen und beruhen auf der Goldparität.

	Maravedis	DM (Äquivalent 1991)
Gehalt für Offiziere	268 000	48 979
Gehalt für Seeleute	252 000	46 055
Kosten für Wartungsarbeiten	319 680	58 424
Miete der Santa Maria	172 800	31581
Ausrüstung	15 062	28 339
Summe	1 167 542	213 379

Tabelle 2.3.: Kosten der Mission lt. (Gierloff-Emden, 1994)

Dieses Ergebnis deckt sich auch mit den auf Goldparität beruhenden Schätzungen in (Columbus and Fuson, 1987), wo als Kosten 63 000 US-Dollar (Äquivalent 1985) angegeben werden. Nach Fusons Berechnungen entspricht dies nach Kaufkraft einem Wert von 700 000 US-Dollar (Äquivalent 1985). Zusätzlich werden in (Columbus and Fuson, 1987) noch Kosten für die Pinta (115 200 Maravedis) und die Ninã (57 600 Maravedis) angeführt. Für das Jahr 2009 entspräche dies nach Kaufkraft etwa 1 Million Euro. Eine weitere Schätzung der Kosten der Mission (Hennig, 1940) besagt, dass diese 0.59 % der Jahreseinkünfte Kastiliens ausgemacht haben und somit geringer waren als die Kosten für ein neues Handelsschiff. Robert H. Fuson hat in (Columbus and Fuson, 1987) auch eine Schätzung der Erträge Kastiliens vorgenommen. Ihm zufolge brachte allein im 16. Jahrhundert jeder von Kastilien investierte Maravedi 1 733 000 Maravedis ein.

Der Vertrag zwischen den Katholischen Königen und Kolumbus über die Durchführung der Mission wurde am 17. April 1492 von Isabella I., Ferdinand II. und dem Staatssekretär Juan de Coloma unterzeichnet. Nachdem die Mittel bereitgestellt

und alle Vorbereitungen getroffen waren, stach Kolumbus mit drei Schiffen, zwei Karavellen und einer Karacke⁷⁶ am 3. August 1492 in See.

2.5. Die Überfahrt

Kolumbus' Bordbuch (Grün, 1970) der ersten Reise ist nicht im Original erhalten. Eine direkte Abschrift, welche von Bartolomé de las Casas, der an der vierten Reise Kolumbus' nach Hispaniola teilnahm, angefertigt wurde, ist erhalten. Man kann davon ausgehen, dass diese Abschrift dem Original entspricht. In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Ereignisse der Überfahrt, welche auch die Grundlage für das Differentialspiel dieser Arbeit liefern, zusammengefasst werden.

Am 3. August 1492 verließen Kolumbus und seine Mannschaft mit den Schiffen Santa Maria, Niña und Pinta Palos de la Frontera in Richtung der Kanarischen Inseln. Nach nur drei Tagen kam es auf der Pinta zum ersten Zwischenfall. Das Steuerruder brach oder sprang heraus. Der Verdacht fiel auf einen Seemann, welcher auf Anstiftung des Schiffseigentümers Christoph Quintero gehandelt haben soll. Dieser nahm nur ungern an der Reise teil. Schon am nächsten Tag ereignete sich an Bord der Pinta die nächste Steuerhavarie. Kolumbus plante La Canaria anzulaufen und, wegen des fehlerhaften Steuerruders und eines Lecks, die Pinta durch ein anderes Schiff zu ersetzen. Da die Pinta nicht mehr seetüchtig und kein anderes Schiff aufzutreiben war, musste das Schiff auf den Kanarischen Inseln repariert werden. Die Reparatur gelang und die Vorräte der Schiffe wurden aufgefüllt. Am 6. September 1492 setzte Kolumbus mit seiner Flottille die Expedition von der Insel La Gomera aus fort. Ziel war nun Cipangu. Vor der Inselgruppe der Kanaren kreuzten portugiesische Schiffe, welche den Auftrag hatten, Kolumbus abzufangen. Es kam jedoch zu keiner Begegnung zwischen der Expedition und den portugiesischen Karavellen. Von Beginn der Expedition an führte Kolumbus zwei Aufzeichnungen über die zurückgelegte

⁷⁶ Santa Maria, das Flaggschiff der Expedition wurde von Kolumbus befehligt. Santa Maria war eine Karacke, ähnlich einer Karavelle, jedoch bedeutend größer und schwerer. Pinta (das schnellste Schiff der Flottille), von Kapitän Martín Alonso Pinzón und Niña (das kleinste Schiff) von Kapitän Vicente Yáñez Pinzón kommandiert.

Strecke. Eine enthielt die tatsächlich von ihm ermittelte Strecke und in der zweiten trug er geringere Entfernungen ein, die er der Mannschaft mitteilte. Die ersten Tage hatten die Schiffe mit Gegenströmungen zu kämpfen. Probleme bereitete auch der nicht vorhandene Wind⁷⁷. Nach wenigen Tagen besserte sich die Lage und man kam gut voran. Bereits in den ersten Tagen der Reise wurden die Rudergänger vor der Mannschaft gerügt, da sie vom vorgegebenen Kurs abwichen. Der Kurs der Expedition war immer westwärts, wie beim Breitensegeln üblich. Die Kapitäne stellten fest, dass ihre Kompassse abwichen und regelmäßig justiert werden mussten. Dies und der schlechte Wind zu Beginn der Reise führten dazu, dass sich unter der Mannschaft Skepsis verbreitete. Der kontinuierliche NO-Passat und der Kanarenstrom brachten Teile der Mannschaft zu der Überzeugung, dass eine Rückreise sehr lange dauern würde und daher unmöglich sei, wenn die Expedition nicht bald umkehren würde. Sichtung von Vögeln, Flusskrebse oder Golfkraut verbesserten die Stimmung unter den Matrosen, da dies als Hinweise auf Land in der Nähe gedeutet wurde. Am 25. September kam es zu einer falschen Landsichtung. Martín Alonso Pizón forderte des öfteren aufgrund von Indizien, wie Wolkenform, Golfkraut und Vogelflug, eine Kursänderung, um einen Landfall zu ermöglichen. Nur ein einziges Mal wich die Expedition von ihrem Westkurs ab, um etwas weiter nördlich nach Land zu suchen. Doch bald kehrte man wieder auf den ursprünglichen Breitengrad zurück und segelte wieder ausschließlich westwärts.

Mit fortschreitender Dauer der Reise begann sich Unmut auszubreiten. Auch fürchteten immer mehr Seeleute, aufgrund des permanenten NO-Windes und der erkannten Strömung nicht mehr zurück nach Kastilien segeln zu können. Um die Mannschaft aufzumuntern, stellte ihr Kolumbus immer wieder die Belohnung, die sie erhalten würde, in Aussicht⁷⁸. Bedingt durch die Dauer der Reise und die Tatsache, dass immer noch kein Land gesichtet wurde, stieg die Möglichkeit einer Meuterei. Es kam vermehrt zu Zusammenrottungen und zu allgemeinen Ausbrüchen der Verzweiflung. Selbst Offiziere hegten mittlerweile Zweifel an Kolumbus' Plan und spielten mit dem Gedanken der Umkehr. Am 6. Oktober trat auch bei Kolumbus erstmals Unsicherheit

⁷⁷ Kolumbus hatte von dem für seine Überfahrt günstigen NO-Passat Kenntnis.

⁷⁸ Dem, der als Erster Land sichten würde, stand ein lebenslängliches Ruhegehalt von 10 000 Maravedis pro Jahr zu.

auf, da nach seiner Rechnung Cipangu seit einigen Tagen hätte in Sicht sein müssen. Er gestand sich ein, dass er womöglich an Cipangu vorbeigesegelt sei und nun direkt bis Cathay segeln müsse. Am 10. Oktober spitzte sich die Lage zu. Kolumbus entnahm seinen geheimen Aufzeichnungen, dass die Expedition schon über 3000 Seemeilen zurückgelegt hatte und somit die Sichtung Cathays unmittelbar bevorstehen müsse. Die Mannschaft beklagte sich vehement über die lange Dauer der Reise; manche Berichte gehen davon aus, dass eine Meuterei unmittelbar bevorstand. Kolumbus erinnerte abermals an die Belohnung und beteuerte vor versammelter Mannschaft, dass eine Umkehr nicht möglich sei, denn er werde solange segeln, bis er Cathay erreicht habe. Zudem setzte er eine weitere Prämie (eine Seidenjacke) für den Seemann, der zuerst Land sichten würde, aus. Als Erster sichtete ein Matrose der Pinta namens Rodrigo da Triana in der Nacht vom 11. auf den 12. Oktober 1492, nach 36 Tagen auf hoher See, Land. Am 12. Oktober 1492 ging die Expedition auf der Insel San Salvador an Land und Kolumbus konnte den erfolgreichen Landfall in seinem Bordbuch verzeichnen. Nie zuvor war eine Expedition so lange auf hoher See gewesen.

Aus Tabelle 2.4 ersieht man, auf welche Entfernung eine Landerhebung bestimmter Höhe von einem Schiff aus sichtbar ist.

Landerhebung in Meter	Deck (4 Meter)	Mast (8 Meter)
2	12,2	15,2
10	18,4	21,4
50	32,4	35,4
100	42,9	45,8
200	57,7	60,6

Tabelle 2.4.: Maximale Sichtweiten von Schiffen in Kilometer

Kapitel 3.

Die Verhandlungen

... denn das Unbekannte
ist das was uns suchen,
was uns leben läßt
Milan Kundera

Dieses Kapitel untersucht die Verhandlungssituation zwischen Kolumbus, João und Isabella. Die Untersuchungen beschränken sich auf eine Analyse der Verhandlungen mittels eines extensiven Spiels; die Verhandlungen zwischen Kolumbus und den Monarchen werden nicht einzeln und nicht mittels Methoden der Verhandlungstheorie analysiert. Die Handlungsmöglichkeiten¹ der Spieler und die Zugabfolge werden exogen vorgegeben und sind aus den historischen Ereignissen hergeleitet. Das modellierte extensive Spiel ist eine vereinfachte Darstellung der Ereignisse, da es sich auf drei Spieler und deren wesentlichste Züge beschränkt. Diese Vereinfachung wurde getroffen, um die Übersicht im extensiven Spiel zu bewahren und den Komplexitätsgrad zu beschränken.

¹ Handlungsmöglichkeiten und Strategien werden in diesem Kapitel *kursiv* geschrieben.

3.1. Die Spieler, ihre Strategien und der Spielbaum

Das modellierte extensive Spiel berücksichtigt mit Kolumbus, João und Isabella drei Spieler. Diese waren die entscheidenden Akteure in der realen Situation, weshalb es notwendig ist diese sie einzubeziehen. Da Kolumbus' Plan laut Quellen in England strikt abgelehnt wurde und er in Frankreich nur eine informelle Zusage erhielt, sind die berücksichtigten Spieler hinreichend.

Die Spieler verfügen über unvollkommene Information. Zu Beginn des Spieles entscheidet die »Natur«, ob Kolumbus Vorhaben gelingt oder nicht. Zu keinem Zeitpunkt im Spiel hat ein Spieler die Information, wie die Natur entschieden hat. Dies entspricht in einem Normalformspiel einem Spiel mit zwei Zuständen, wobei der »wahre« keinem Spieler bekannt ist. Alle Spieler verfügen in jedem ihrer Entscheidungsknoten über zwei Handlungsmöglichkeiten. João und Isabella können in jedem ihrer Entscheidungsknoten zwischen *accept* und *deny* wählen

- *accept*: Kolumbus' Plan wird genehmigt, seine Forderungen werden akzeptiert. Das Spiel kommt zu einem Endknoten
- *deny*: Kolumbus' Plan wird nicht bewilligt, und das Spiel wird fortgesetzt

Diese beiden Handlungsmöglichkeiten sind ausreichend, um die Situation beschränkt abzubilden.

Die Reihenfolge, in der die Spieler zum Zug kommen ist exogen gegeben. Kolumbus, der in Portugal lebt und sich dort gute Kontakte geschaffen hat, legt zu Beginn João seinen Plan vor. Diese Entscheidung wird als exogen vorgegeben, wodurch João als erster Spieler zum Zug kommt. Lehnt João den Plan ab, so findet das Spiel mit Kolumbus seine Fortsetzung. Dieser kann entscheiden, ob er *beharren* (*beh*) wählt und in Portugal verweilt oder ob er nach Kastilien zu Isabella weiterzieht (*Kastilien*). Falls er weiterzieht, besteht nicht mehr die Möglichkeit nach Portugal zurückzukehren. Dadurch wird auf diesem Ast des Spielbaums kein Entscheidungsknoten João's mehr

erreicht. Falls Kolumbus in Portugal verbleibt, folgt ein weiterer Entscheidungsknoten João's. Diese Struktur bildet die nochmalige Prüfung des Planes durch die Junta dos Mathematicos (Beraterkommission von João) ab. Nach einer abermaligen Ablehnung durch João hat Kolumbus nur die Möglichkeit weiter zu ziehen. Eine weitere Prüfung und mögliche Genehmigung des Planes durch João wird ausgeschlossen. Eine solche widerspräche dem Anspruch »Wir König von Gottes Gnaden« und dem Unfehlbarkeitsdogma des Herrschers. Dies gilt auch für Isabella.

Nach der zweimaligen Ablehnung durch João muss Kolumbus entscheiden, ob er nach *Frankreich (Fra)* oder nach *Kastilien* reist. Kolumbus hat nach der ersten Ablehnung durch João nicht die Möglichkeit nach Frankreich zu reisen, da seinem Bruder Bartholomäus die informelle Zusage von Anne de Beaujeu nicht von Anfang an vorlag. Kolumbus' Zug *Frankreich* führt immer zu einem Endknoten. Begibt sich Kolumbus nach der ersten oder zweiten Ablehnung durch João nach Kastilien, so folgen Entscheidungsknoten Isabellas. Diese liegen in der selben Informationsmenge (unvollkommene Information). Isabella besitzt wie João die Handlungsmöglichkeiten *accept* und *deny*. Lehnt sie ab, so kommt Kolumbus zum Zug und kann sich entscheiden, ob er in Kastilien verweilt oder nach Frankreich weiterzieht. Zieht Kolumbus *Frankreich*, kommt es zu einem Endknoten. Verbleibt er in Kastilien, so findet das Spiel mit Isabella seine Fortsetzung. Dies gilt, ebenso wie die folgenden Erklärungen, sowohl für den Ast des Spielbaums nach einmaliger als auch nach zweimaliger Ablehnung durch João. Mittlerweile ist Isabella bekannt, wie oft der Plan durch João abgelehnt wurde. Wird der Plan durch Isabella erneut abgelehnt, folgt bevor das Spiel endet ein letzter Zug von Kolumbus. In seinem letzten Entscheidungsknoten kann Kolumbus zwischen der Weiterreise nach Frankreich (*Frankreich*) und der Aufgabe (*surrender*) seines Plans wählen. Die Nutzen der einzelnen Spieler werden ordinal angenommen. Die Begründung für die Nutzenordnung der Spieler findet sich in Anhang A.1. In Abbildung 3.1 ist der gesamte Spielbaum dargestellt.

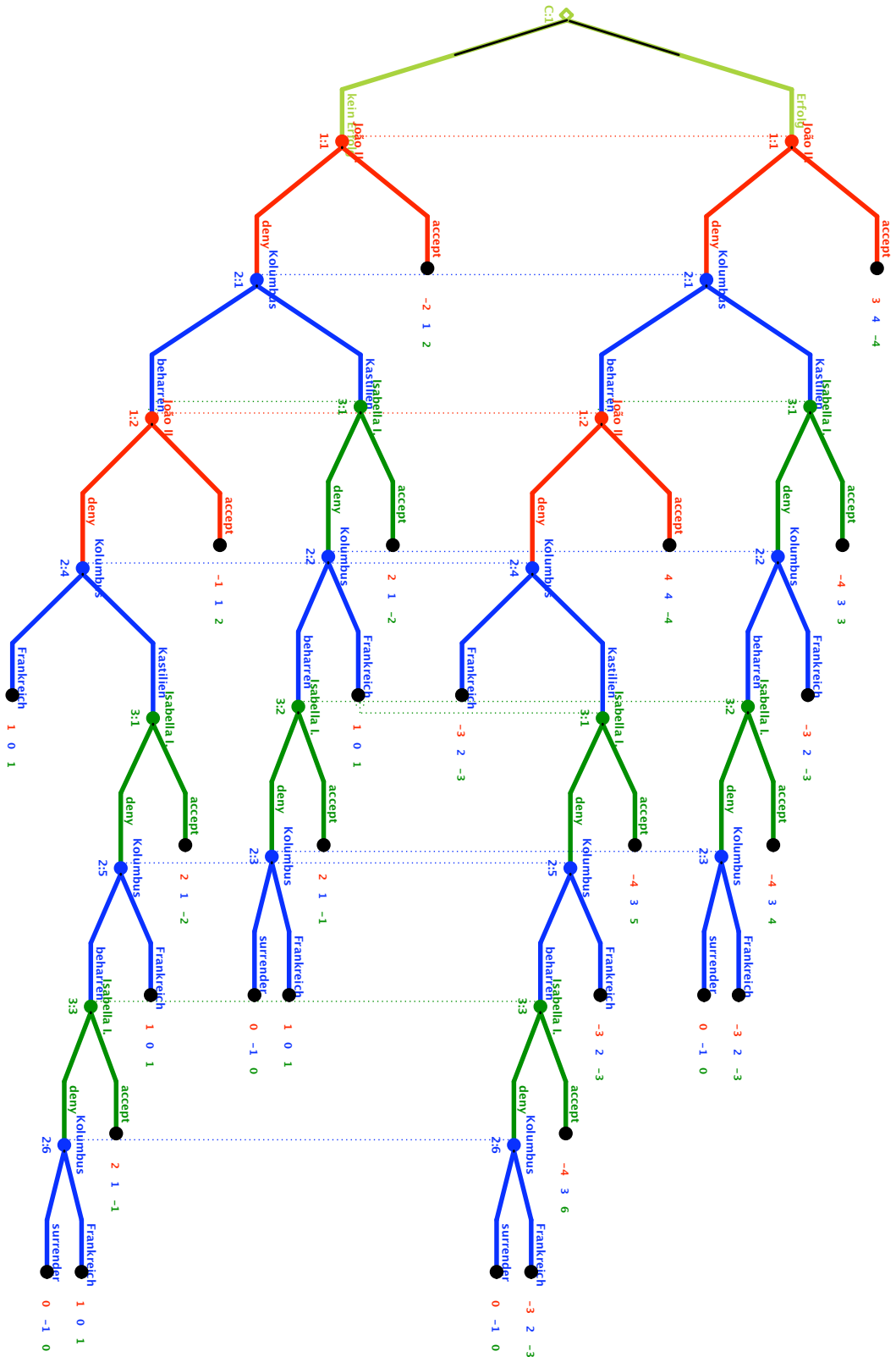


Abbildung 3.1.: Spielbaumdarstellung des extensiven Spiels

Insgesamt verfügen João über 4, Isabella über 8 und Kolumbus über 32 Strategien. Aufgrund der sich daraus ergebenden Größe und Unübersichtlichkeit wird auf eine äquivalente Normalformdarstellung verzichtet (Größe der Normalform $4 \times 8 \times 32$ bzw. der Agentennormalform $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$).

3.2. Analyse des Spielbaums

Die »Natur« entscheidet im Wurzelknoten mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$, ob Kolumbus' Mission zu einem Erfolg wird oder nicht. Diese Entscheidung ist den Spielern zu keinem Zeitpunkt des Spieles bekannt. Dadurch lässt sich der Spielbaum aus Abbildung 3.1 in folgender Weise vereinfachen. Für alle Strategieprofile ermittelt jeder Spieler seinen erwarteten Nutzen unter der Annahme, dass die Mission mit einer Wahrscheinlichkeit p ($0 \leq p \leq 1$) ein Erfolg wird. Durch diesen »Kunstgriff« gelingt es den Spielbaum zu »halbieren« ohne einen Informationsverlust zu erleiden, wodurch Abbildung 3.2 entsteht.

In der folgenden Analyse werden nicht alle Nash-Gleichgewichte ermittelt. Es wird nur auf die in (Selten, 1975) eingeführten »extensive form trembling hand perfect equilibria« eingegangen. Diese Gleichgewichte sind nicht nur teilspielperfekt, sondern bleiben auch bei ungewollten Fehlern der Spieler in ihrer Strategiewahl bestehen und genügen somit gewissen »Perfektheitsbedingungen« und können als »robuste« Gleichgewichte angesehen werden.

In den Teilspielen beginnend mit **KOL IV**² und **KOL VI** ist *surrender* eine streng dominierte Strategie für Kolumbus, wodurch diese entfernt werden kann. In den Teilspielen beginnend im Entscheidungsknoten **ISAB II** und **ISAB III** hängt die optimale Wahl Isabellas von p ab. Bevor diese Entscheidungen genauer untersucht werden, wird im restlichen Spiel noch nach Entscheidungsknoten gesucht, in welchen eine reine Wahl getroffen werden kann. Im Knoten **KOL III** kann Kolumbus zwischen *Frankreich*, womit er einen Nutzen von $2p$ erhält, und *beharren* wählen.

² Bezeichnungen der Entscheidungsknoten aus Abbildung 3.2 werden in diesem Kapitel **fett** geschrieben.

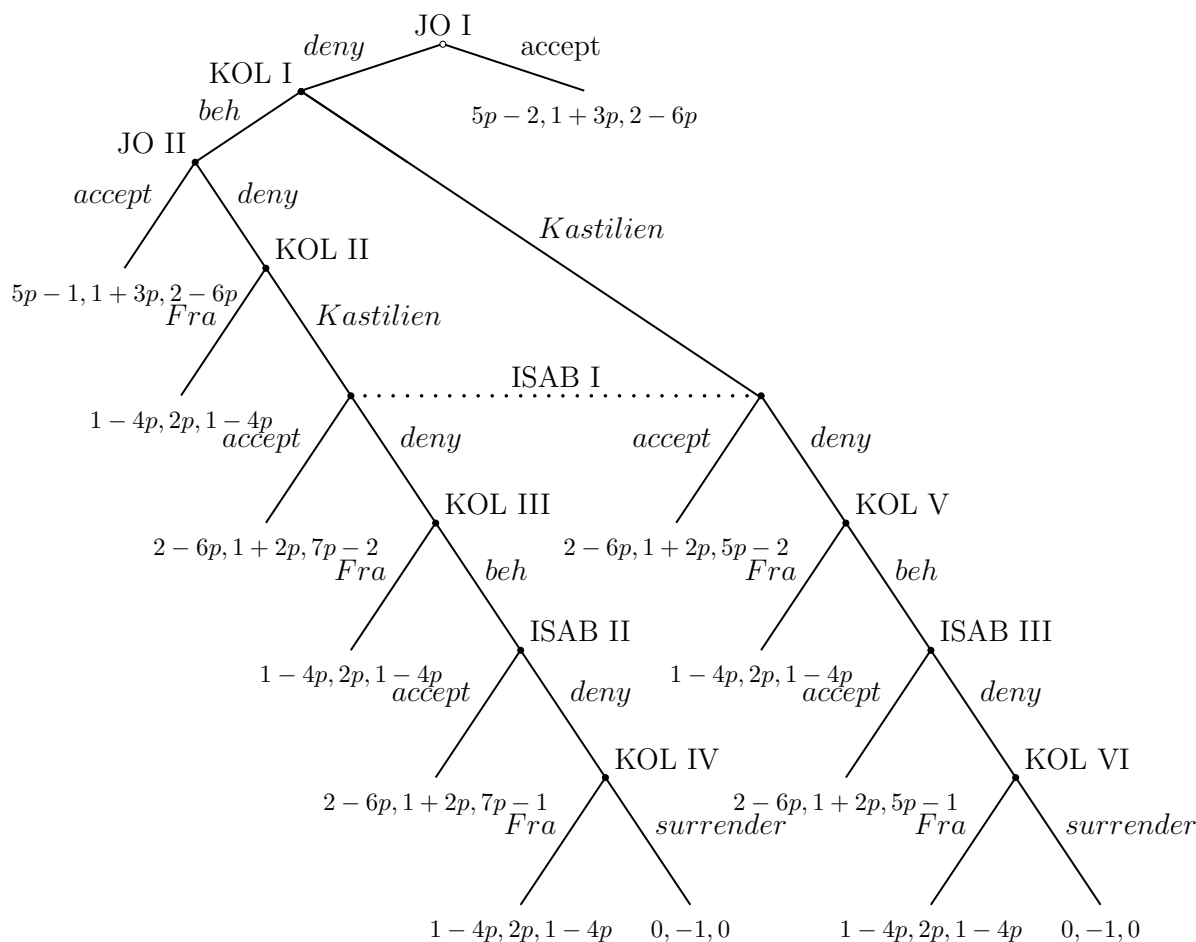


Abbildung 3.2.: Reduzierte Spielbaumdarstellung des extensiven Spiels

Da Isabellas Entscheidung im folgenden Zug von p abhängt nimmt Kolumbus an, dass Isabella mit Wahrscheinlichkeit α seinem Plan zustimmt. Kolumbus errechnet sich einen erwarteten Nutzen von $\alpha(1 + 2p) + (1 - \alpha)2p = 2p + \alpha$. Sein Nutzen bei *beharren* ist für alle α nicht kleiner als bei *Frankreich*, unabhängig von p . *Frankreich* wird somit schwach dominiert und kann in keinem »extensive form trembling hand perfect equilibrium« enthalten sein. Auch im Entscheidungsknoten **KOL V** gilt $E(\text{Frankreich}) = 2p \leq E(\text{beharren}) = 2p + \beta$ (β ist die Wahrscheinlichkeit, dass Isabella im Entscheidungsknoten **ISAB III** Kolumbus' Plan zustimmt.) und folglich ist *beharren* für Kolumbus eine schwach dominante Strategie. Betrachtet man die erste Entscheidung Isabellas so ist zu beachten, dass sie nicht weiß, ob João den

Plan erst einmal oder bereits zweimal abgelehnt hat. Sie verfügt somit über unvollkommene Information für ihre Entscheidung. Isabella ist zwar nicht in der Lage zu rekonstruieren, was bis zu ihrem Zug geschehen war, doch aufgrund ihrer profunden spieltheoretischen Kenntnisse ist sie fähig zukünftige Züge vorherzusehen und diese Erkenntnisse in ihre Entscheidung einfließen zu lassen. Da Isabella weiß, dass all ihre Mitspieler nur Strategien eines »extensive form trembling hand perfect equilibrium« spielen werden, kann sie voraussehen, dass Kolumbus im Falle einer erstmaligen Ablehnung des Plans durch sie, unabhängig vom bisherigen Spielverlauf, *beharren* wählen wird und sie ein weiteres Mal über die Genehmigung seines Planes entscheiden kann. Wissend, dass die »Natur« zu Beginn des Spieles über Erfolg und Misserfolg der Mission entschieden hat und sich p somit bis zu ihrer abermaligen Entscheidung nicht ändern, wird erkennt sie, dass sie im Falle einer späteren Ablehnung keinen Nutzenverlust, bei späterer Zustimmung jedoch einen Nutzengewinn unabhängig vom bisherigen Spielverlauf und von p erzielen kann. Der königliche Verstand kommt zu der Erkenntnis, dass im Gleichgewicht Kolumbus' Plan zuerst (im Entscheidungsknoten **ISAB I**) abzulehnen sei.

Kolumbus erkennt in seinem Entscheidungsknoten **KOL II**, dass die Strategie *Kastilien* aus denselben Gründen der Strategie *Frankreich* vorzuziehen ist, wie in **KOL III** bzw. **KOL V** die Strategie *beharren* der Strategie *Frankreich*. Die optimale Strategiewahl von João in **JO II** ist von p abhängig und wird gesondert untersucht. In seinem ersten Entscheidungsknoten steht Kolumbus vor der Wahl in Portugal zu *beharren* oder nach *Kastilien* zu reisen. Kolumbus weiß, dass das Abwarten einer zweiten Entscheidung von João keine negativen Auswirkungen auf seinen Nutzen haben wird, er jedoch bei einem *accept* von João zu einem höheren Nutzen gelangt. Voraussehend dass Kolumbus in Portugal verharren werde, lehnt João in seinem ersten Entscheidungsknoten **JO I** (Wurzelknoten des »halbierten« Spielbaums) den Plan ab. Die bisherigen Schlussfolgerungen lassen sich in einem Spielbaum graphisch darstellen. In Abbildung 3.3 sind die von p unabhängigen Züge eines »extensive form trembling hand perfect equilibrium« rot eingezeichnet, und jene die von p abhängen in strichliertem Blau.

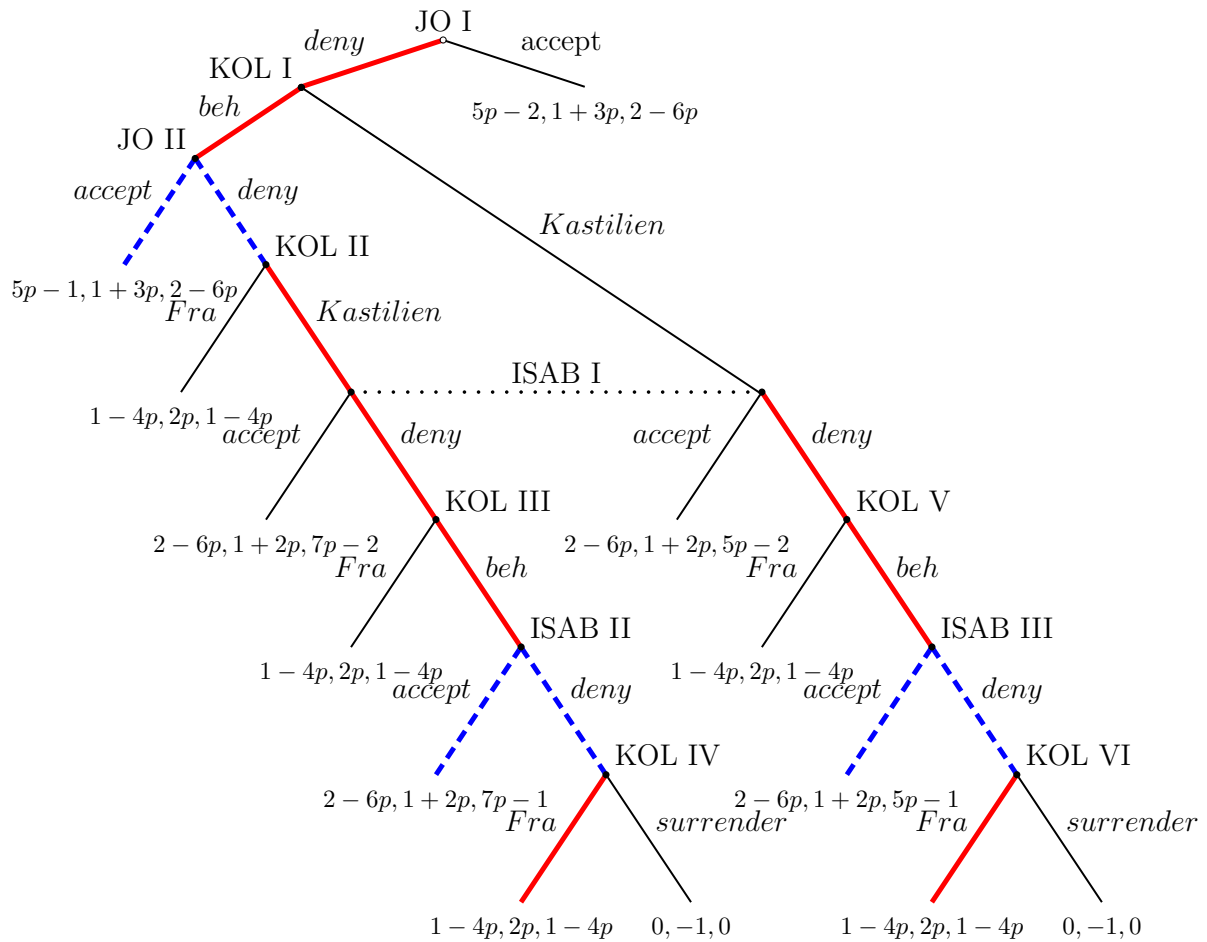


Abbildung 3.3.: Reduzierte Spielbaumdarstellung des extensiven Spiels mit optimalen Entscheidungen

Um die folgenden Berechnungen anstellen zu können wird angenommen, dass die ordinalen Nutzen kardinalen Nutzenwerten der Spieler entsprechen. Im Entscheidungsknoten **ISAB III** hat Isabella die erwarteten Nutzen $E(\text{accept}) = 5p - 1$ und $E(\text{deny}) = 1 - 4p$. Gilt $p < \frac{2}{9}$, ist *deny* die bessere Wahl, andernfalls *accept*. Bei $p = \frac{2}{9}$ ist Isabella indifferent. Für den Entscheidungsknoten **ISAB II** folgt $E(\text{accept}) = 7p - 1$ und $E(\text{deny}) = 1 - 4p$, womit für $p \geq \frac{2}{11}$ *accept* und bei $p \leq \frac{2}{11}$ *deny* die optimale Entscheidung ist. Schließlich ist der zweite Entscheidungsknoten Joãos **JO II** zu untersuchen. In seiner königlichen Weisheit ist ihm der für Isabellas Entscheidung relevante Grenzwert von $p = \frac{2}{11}$ bekannt. Gilt $p < \frac{2}{11}$ ist für ihn vorhersehbar, dass Isabella dem Plan nicht zustimmen wird. Die Erwartungswerte für seine beiden Möglichkeiten

sind durch $E(\text{accept}) = 5p - 1$ und $E(\text{deny}) = 1 - 4p$ gegeben. Er kommt zu einer Indifferenz in seinem Entscheidungsknoten falls $p = \frac{2}{9}$ gilt. Bei kleinerem p entscheidet er sich für *deny* und bei höherem für *accept*. Da er den Fall $p < \frac{2}{11}$ betrachtet, ist *deny* seine optimale Wahl. Falls João zu dem Schluss kommt dass $p > \frac{2}{11}$, errechnet er sich $E(\text{accept}) = 5p - 1$ und $E(\text{deny}) = 2 - 6p$ als seine erwarteten Nutzen, da Isabella dem Plan zustimmen wird. In diesem Fall genehmigt João die Mission falls $p \geq \frac{3}{11}$. Gleichzeitig erkennt man, dass im Fall von $p = \frac{2}{11}$ João den Plan ablehnen wird³. Abhängig von p erhält man vier »extensive form trembling hand perfect equilibria« in Verhaltensstrategien:

- $0 \leq p \leq \frac{2}{11}$: [(*deny, deny*), (*beharren, Kastilien, beharren, Frankreich, beharren, Frankreich*), (*deny, deny, deny*)]
- $\frac{2}{11} \leq p \leq \frac{2}{9}$: [(*deny, deny*), (*beharren, Kastilien, beharren, Frankreich, beharren, Frankreich*), (*deny, accept, deny*)]
- $\frac{2}{9} \leq p \leq \frac{3}{11}$: [(*deny, deny*), (*beharren, Kastilien, beharren, Frankreich, beharren, Frankreich*), (*deny, accept, accept*)]
- $\frac{3}{11} \leq p \leq 1$: [(*deny, accept*), (*beharren, Kastilien, beharren, Frankreich, beharren, Frankreich*), (*deny, accept, accept*)]

3.3. Schlussbemerkungen

Die Ergebnisse der Analyse der Verhandlungen mittels eines extensiven Spiels zeigen, dass abhängig von der durch die »Natur« bestimmten Erfolgswahrscheinlichkeit p unterschiedliche Gleichgewichte zustande kommen. Die ermittelten Grenzwerte von p wurden durch die Verwendung der ordinalen Nutzen als kardinale ermittelt, wodurch die exakten Werte mit Vorsicht zu betrachten sind. Liegt die Wahrscheinlichkeit, dass die Mission erfolgreich ist, unter einem gewissem Grenzwert, so stimmen

³ Lässt man Isabella im Entscheidungsknoten **ISAB II** *accept* mit Wahrscheinlichkeit α , $0 \leq \alpha \leq 1$ wählen, so lauten die erwarteten Nutzen von João $E(\text{accept}) = 5p - 1$ und $E(\text{deny}) = \alpha(2 - 6p) + (1 - \alpha)(1 - 4p)$. Da $p = \frac{2}{11}$ gilt, folgt $E(\text{accept}) < E(\text{deny})$ für alle α .

im Gleichgewicht weder João noch Isabella zu. Überschreitet diese Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Schwellwert, so stimmen im Gleichgewicht beide Monarchen nach einmaliger Ablehnung des Plan zu. Liegt der Schätzer für die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Mission zwischen diesen beiden Grenzwerten, so stimmt Isabella der Mission zu, während sie von João abgelehnt wird. Werden die ordinalen Nutzenwerte als kardinale Größen für die Berechnung verwendet, ergibt sich $[\frac{2}{11}, \frac{3}{11}]$ als Intervall mit einer Zustimmung von Isabella und einer Ablehnung durch João. Verfolgt man den Gedanken, dass die Kardinalisierung der Nutzenwerte für das oben eingeführte Modell zutreffend ist, die Junta dos Mathematicos und die Salamanca-Kommission zu derselben a priori Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Mission gelangt sind und die Spieler ausschließlich an »extensive form trembling hand perfect equilibria« interessiert sind, so haben Isabella und João genau dann optimal gehandelt, wenn Kolumbus' Mission eine Erfolgswahrscheinlichkeit von mehr als 18.18% jedoch geringer als 27.27% eingeräumt wurde.

Kapitel 4.

Timing Game

Bereit sein ist viel,
warten können ist mehr,
doch erst den rechten
Augenblick nützen ist alles
Arthur Schnitzler

In Kapitel 3 wurde die Spielsituation hinsichtlich gleichgewichtigen Verhaltens untersucht. Die Aktionsmöglichkeiten und der sequentielle Ablauf waren gegeben und fest, wodurch der zeitliche Verlauf nicht Gegenstand der Untersuchung war und ausschließlich optimale Strategien ermittelt wurden. Im folgenden Abschnitt wird der zeitliche Ablauf und die damit verbundene Hauptfrage »WANN« eine Aktion zu setzen ist, behandelt. Diese Fragestellung wird mit einem Timing Game untersucht. In einem Timing Game stehen alle Beteiligten vor der Fragestellung, wann sie eine irreversible Aktion (Innovation, Investment, Genehmigung eines Plans,...) durchführen sollen. Der Vorteil eines Timing Games gegenüber anderen Methoden (z.B. Net Present Value) besteht darin, dass die Lösung nicht auf »now or never« eingeschränkt wird, sondern jeder Zeitpunkt als Lösung in Frage kommt. (Dresher, 1981) beschrieb diesen zeitlichen Aspekt erstmals am Beispiel eines Duells, wobei der optimale Zeitpunkt der Schussabgabe ermittelt wurde.

Systematische Untersuchungen von Timing Games begannen mit (Reinganum, 1981). In diesem Artikel untersucht Reinganum den Adaptionsprozess einer neuen Technologie. Der spieltheoretische Ansatz der Untersuchung erfolgt in einem 2-Personen

Timing Game mit symmetrischem Nutzen. Bei der Untersuchung wird gefordert, dass bei den Spielern ein »precommitment« der Adaptionzeitpunkte erfolgt. Fudenberg und Tirole forderten in ihrem Artikel (Fudenberg and Tirole, 1985) kein »precommitment« der Spieler mehr. Sie untersuchten ebenfalls die Einführung einer neuen Technologie anhand eines n-Spieler Timing Game mit symmetrischem Nutzen. Das zentrale und gleichzeitig bedeutendste Ergebnis dieses Artikels ist das »Rent Equalization Principle«. Dieses besagt, dass im Gleichgewicht die Spieler (wegen der Symmetrie für alle gültig) indifferent zwischen der Zeitführer- und Zeitfolgerschaft sind und den gleichen Nutzen haben. An die Nutzenfunktion wird die Anforderung gestellt, dass sie ein einziges lokales (globales) Maximum (*single-peak*) besitzt. In (Katz and Shapiro, 1987) untersuchen Katz und Shapiro das in (Fudenberg and Tirole, 1985) eingeführte Modell mit zwei Spielern, die asymmetrischen Nutzen haben. Es wird gezeigt, dass bei asymmetrischem Nutzen das »Rent Equalization Principle« nicht gelten muss. Hendricks Wilson stellen in (Hendricks and Wilson, 1987) fest, dass Timing Games »Bertrand like« Ergebnisse liefern. In seinem Artikel werden Zeit und Nutzen auf das Einheitsquadrat normiert. Er untersucht ein 2-Personen Timing Game mit asymmetrischem Nutzen. Die Nutzenfunktionen unterliegen jedoch den Annahmen, dass die Nutzen der Spieler als Führer auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ strikt größer sind als jene als Zeitfolger. Zudem wird gefordert, dass die Nutzenfunktionen der Spieler als Zeitführer auf dem halboffenen Intervall $[0, 1)$ streng monoton wachsend sind.

Anmerkung: Diese Transformation hat zur Folge, dass eine ökonomische Interpretation der Ergebnisse erschwert wird.

Bulow und Klemperer führen in (Bulow and Klemperer, 1999) den »War of Attrition« ein. Bei dem vorgestellten Modell handelt es sich um ein Timing Game in dem permanent Kosten anfallen und der Spieler, der als »Letzter« aussteigt, den Preis erhält. Fälle mit einer ähnlichen Struktur der Nutzenfunktion können auch bei Timing Games, welche die Einführung einer »neuen Technologie« untersuchen, auftreten. In (Hoppe and Lehmann-Grube, 2005) wird ein 2-Personen Timing Game mit symmetrischem Nutzen untersucht. Für den Zeitführer wird von der Forderung eines einzigen lokalen Maximums abgewichen. Für den Zeitführer wird jedoch ein »precommitment«

gefordert. Das heißt, dass der Zeitführer, wenn er seine Aktion zu einem Zeitpunkt t setzt und der Folger zum Zeitpunkt $t + \epsilon$ eintritt, seinen Eintrittszeitpunkt nicht nach »hinten« verschieben darf. Selbst wenn ihm ein Eintritt zu einem Zeitpunkt $t' > t + \epsilon$, gegeben dass sein Konkurrent zu $t + \epsilon$ eintritt, einen größeren Nutzen bringt.

Die vorliegende Arbeit führt die unterschiedlichen Ansätze der bisherigen Publikationen zusammen und erweitert sie. Die Forderung an die Nutzenfunktionen, ein einziges lokales Maximum zu haben, wird aufgegeben, ebenso ein »precommitment« der Spieler. Es werden systematisch die Fälle mit symmetrischem und asymmetrischem Nutzen untersucht. Ergänzend zu bisherigen Arbeiten wird der Fall ohne Nachfolgemöglichkeit analysiert. Des weiteren erfolgt die Einführung eines Mindestabstandes für den Zeitfolger sowie jene von Restriktionen. Durch »weichere« Anforderungen an die Nutzenfunktionen treten Fälle ohne Gleichgewicht auf. Diese werden charakterisiert und ihre Eigenschaften erörtert. Die hier erarbeiteten Ergebnisse werden für die spieltheoretische Analyse des Genehmigungsprozesses in Kapitel 5 verwendet.

4.1. Ausgangssituation für Timing Games

Besitzt nur ein Spieler die Möglichkeit die Aktion durchzuführen, lässt sich für ihn der optimale Zeitpunkt der Aktion durch das optimale Kontrollproblem

$$\max_{t \in \mathbb{R}_+} \Pi(t) \tag{4.1}$$

$$\Pi(t) = \int_t^\infty (\pi(\tau) - \Pi_0) e^{-r\tau} d\tau - C(t) \tag{4.2}$$

ermitteln, mit

- $\Pi(t)$ Nutzen, falls die Aktion zum Zeitpunkt t durchgeführt wird
- Π_0 Nutzen ohne Durchführung der Aktion
- $\pi(\tau)$ Instantannutzen zum Zeitpunkt τ
- $C(t)$ Kosten bei Durchführung zum Zeitpunkt t
- t Zeitparameter
- r Diskontfaktor (Rate der Zeitpräferenz)

Abbildung 4.1 zeigt ein Kontrollproblem (4.1) und (4.2) mit optimalem Eintrittszeitpunkt t^* . Ist der Nutzen des Kontrollproblems $\Pi(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, wird die Aktion nie durchgeführt. Ist der Nutzen $\Pi(t) > 0$ zumindest für ein $t \in \mathbb{R}_+$, wird die Aktion zum Zeitpunkt t^* , welcher sich aus Gleichung (4.1) ergibt, durchgeführt.

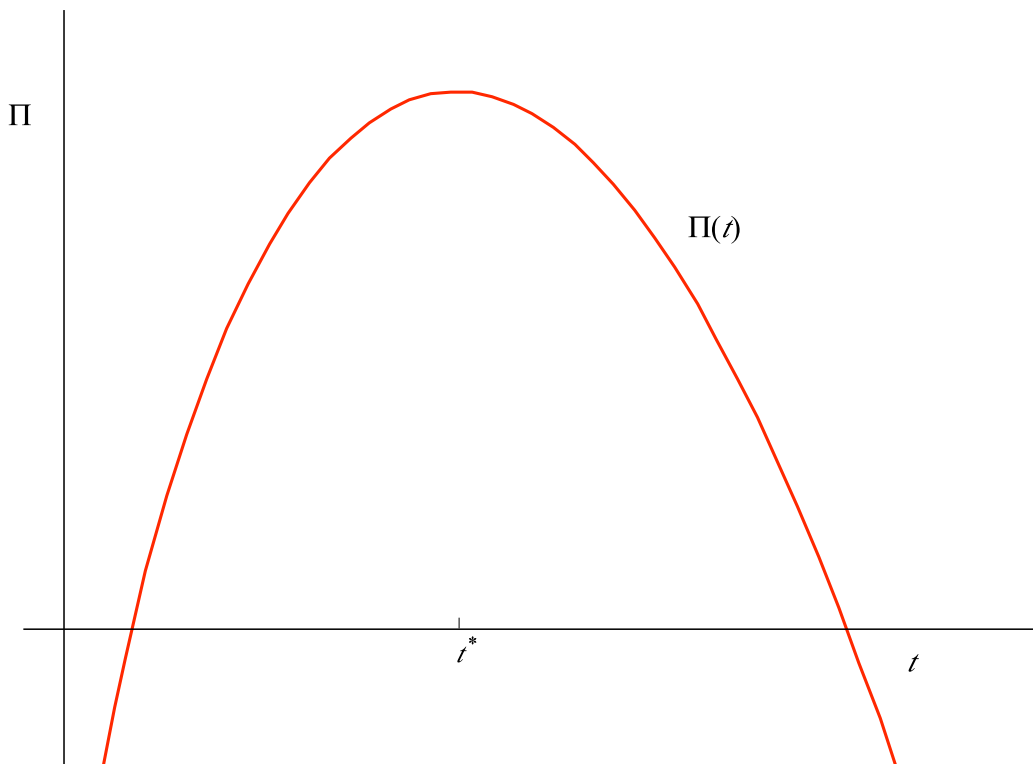


Abbildung 4.1.: Optimaler Zeitpunkt der Aktion bei nur einem Spieler

Timing Games werden in zwei Klassen eingeteilt, einerseits in »War of Attrition« (Bulow and Klemperer, 1999), bei welchem der Nutzen der Spieler mit der Zeit ab-

nimmt, jeder Spieler jedoch den Anreiz hat zuzuwarten, da es von Vorteil ist nicht als Erster zu ziehen¹; andererseits in »Preemption Game« (Reinganum, 1981; Fudenberg and Tirole, 1985; Katz and Shapiro, 1987; Hendricks and Wilson, 1987; Hoppe and Lehmann-Grube, 2005), bei dem der Nutzen der Spieler mit der Zeit wächst, jedoch jeder einen Anreiz hat vor seinem Gegenspieler zu ziehen. Wählen die Spieler den gleichen Eintrittszeitpunkt, so wird exogen mittels Zufall die Zeitführerschaft vergeben.

4.2. Gleichgewichte bei Timing Games

In diesem Abschnitt werden die unterschiedlichen Ansätze für Timing Games zusammengeführt und erweitert. Die sich daraus ergebenden Gleichgewichte werden ermittelt und beschrieben. Sofern nicht explizit darauf hingewiesen, wird immer von Perfect Knowledge ausgegangen. Alle Beteiligten verfügen somit über alle notwendigen Informationen. Stehen sich nun zwei (identische) Spieler gegenüber, hängt der Nutzen der Spieler davon ab, ob sie Zeitführer oder Zeitfolger sind. Für jeden Spieler ist sowohl der Nutzen als Führer als auch der Nutzen als Folger festzulegen. Ist t_a der Eintrittszeitpunkt von Spieler i und t_b jener von Spieler j und Spieler i Zeitführer ($t_a < t_b$), ist sein Nutzen gegeben durch

$$\Pi_i^L(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} (\pi^M(\tau) - \rho\Pi_{0i})e^{-r\tau} d\tau + \int_{t_b}^{\infty} (\pi_i^L(\tau) - \rho\Pi_{0i})e^{-r\tau} d\tau - C(t_a) \quad (4.3)$$

Der Zeitführer ist in der Lage von t_a bis t_b einen Monopolgewinn π^M zu generieren. Ab dem Eintritt eines weiteren Konkurrenten erhält der Spieler den Duopolnutzen mit Zeitführerschaft π^L . $\rho \in [0, 1]$ beschreibt den Ersetzungsgrad. Dieser ist ein Maß dafür, in welchem Ausmaß das »Bestehende« durch die Aktion ersetzt wird.

¹ Z.B. Ausstieg aus einem Projekt oder Bietverfahren für das laufend Kosten anfallen.

Ist Spieler i Zeitfolger ($t_a > t_b$), so ist sein Nutzen

$$\Pi_i^F(t_a, t_b) = - \int_{t_b}^{t_a} \rho \Pi_{0_i} e^{-r\tau} d\tau + \int_{t_a}^{\infty} (\pi_i^F(\tau) - \rho \Pi_{0_i}) e^{-r\tau} d\tau - C(t_a) \quad (4.4)$$

Für den Zeitfolger ergeben sich bis zur Durchführung seiner Aktion Ausfälle, da die bestehenden Ertragsquellen nur noch eingeschränkt genutzt werden können (Ersetzungsgrad). Neue Ertragsquellen sind rentabler. Nach seinem Eintritt erhält er den Duopolgewinn π^F als Zeitfolger.

Der Instantannutzen π kann, je nach untersuchtem Fall, von unterschiedlichen Parametern abhängen. Diese können sich mit der Zeit durch »Wissens-update« verändern. Die Parameter der Nutzenfunktion können zwischen Zeitführer und Zeitfolger unterschiedlich sein.

Ist der Eintrittszeitpunkt t_b des Spielers j gegeben, so liefert die Relation zwischen den Gleichungen (4.3) und (4.4) ob Spieler i die Zeitführerschaft ($t_a < t_b$) zu übernehmen versucht oder sich für Zeitfolgerschaft ($t_a > t_b$) entscheidet.

Kann nur ein einziger die Aktion durchführen, und gilt² $\Pi(t, >) > 0$ auf einem Intervall $[t_a, t_b]$ mit $t_a < t_b$ und $t^* \in (t_a, t_b)$, so hat jeder Spieler, der die Aktion nicht zum Zeitpunkt t^* durchführen kann den Anreiz, die Aktion zum Zeitpunkt $t^* + \epsilon$, $\epsilon > 0$ und hinreichend klein, falls es sich um einen »War of Attrition« oder zum Zeitpunkt $t^* - \epsilon$, falls es sich um ein »Preemption Game« handelt, durchzuführen. Welche der beiden Arten des Timing Game vorliegt hängt davon ab, ob ein »first-move« oder »second-move« Vorteil gegeben ist.

² In dem betrachteten Modell hat die Differenz zwischen dem Eintrittszeitpunkt des Führers und jenem des Folgers keinen Einfluss darauf welche der Nutzenfunktion aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) gilt. Damit die Notation übersichtlich bleibt wird für die Nutzenfunktion der Spieler folgende Schreibweise eingeführt:

$$\Pi(t, >) = \Pi^L(t_a, t_b), \text{ falls } t_a < t_b$$

$$\Pi(t, <) = \Pi^F(t_a, t_b), \text{ falls } t_a > t_b$$

$$\Pi(t, =) = \alpha \Pi^L(t_a, t_b) + (1 - \alpha) \Pi^F(t_a, t_b), \text{ falls } t_a = t_b \text{ und } 0 < \alpha < 1$$

Die Symbole $>$, $<$ stehen für alle Eintrittszeitpunkte t des Konkurrenten, sodass es zu keinem Wechsel zwischen Führer und Folger kommt. Falls nicht anders angegeben gilt $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\Pi(t, >) > \Pi(t, <) \quad t \in [t_a, t_b] \quad \text{Preemption Game} \quad (4.5)$$

$$\Pi(t, >) < \Pi(t, <) \quad t \in [t_a, t_b] \quad \text{War of Attrition} \quad (4.6)$$

Genauer bedeutet dies, dass sich die Spieler in einem »Preemption Game« (4.5) befinden, falls der erwartete Nutzen als Zeitführer größer ist als jener bei Nachfolge. Ist dieser erwartete Nutzen bei Zeitführerschaft kleiner als jener bei Nachfolge, so befinden sie sich in einem »War of Attrition« (4.6). Daraus folgt, dass der erwartete Umsatz, die Kosten und die Erfolgsaussichten darüber entscheiden, welcher Typ eines Timing Game im Intervall $[t_a, t_b]$ mit $t_a < t_b$ vorliegt.

Folgende Annahmen werden an die Nutzenfunktionen der Spieler gestellt.

Annahmen:

Annahme 4.1. $\Pi_i \left(t, \begin{smallmatrix} \geq \\ < \end{smallmatrix} \right)$ seien stetig auf $t \in [0, \infty) \forall i \in I$

Annahme 4.2. Für ein $i \in I \exists t \in \mathbb{R}_+ : \Pi_i(t, >) \geq 0$

Annahme 4.3. $\forall i \in I$ besitzt $\Pi_i \left(t, \begin{smallmatrix} \geq \\ < \end{smallmatrix} \right)$ zumindest ein globales Maximum, zu einem Zeitpunkt $t_i^* < \infty$

Annahme 4.4. Ist ein Spieler zwischen mehreren Eintrittszeitpunkten indifferent, so entscheidet er sich für den frühesten

Annahme 4.2 garantiert, dass zumindest ein Spieler den Anreiz hat die Aktion durchzuführen.

Sei T_i die Menge aller t_i^* und $t_i^{*min} \leq t_i^* \forall t_i^* \in T_i$ bzw. $t_i^{*max} \geq t_i^* \forall t_i^* \in T_i$, so lassen sich folgende Funktionen konstruieren:

$$\bar{\Pi}_i(t, >) = \begin{cases} \max_{\tau \in [0, t]} \Pi_i(\tau, >) & \text{für } t < t_i^{*min} \\ \Pi_i(t_i^{*min}, >) & \text{für } t_i^{*min} \leq t \leq t_i^{*max} \\ \max_{\tau \in [t, \infty)} \Pi_i(\tau, >) & \text{für } t > t_i^{*max} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\bar{\Pi}_i(t, <) = \begin{cases} \max_{\tau \in [0, t]} \Pi_i(\tau, <) & \text{für } t < t_i^{*min} \\ \Pi_i(t_i^{*min}, <) & \text{für } t_i^{*min} \leq t \leq t_i^{*max} \\ \max_{\tau \in [t, \infty)} \Pi_i(\tau, <) & \text{für } t > t_i^{*max} \end{cases} \quad (4.8)$$

$\bar{\Pi}_i(t, >)$ ist für $t < t_i^{*min}$ monoton wachsend und für $t > t_i^{*max}$ monoton fallend. Für die Berechnung der Gleichgewichte sind diese Funktionen von Vorteil. Lokale Extremwerte die keine globalen Lösungen enthalten können, müssen aufgrund der Konstruktion von $\bar{\Pi}$ nicht weiter berücksichtigt werden.

4.2.1. Timing Game ohne Folger

In diesem Abschnitt wird untersucht wann, die Aktion optimal durchzuführen ist, falls keine Möglichkeit des Nachfolgens besteht. Diese Überlegungen dienen zur Untersuchung der Frage, wie sich ein Spieler unter der Annahme verhalten sollte, dass nur einer die Aktion durchführen kann. Somit besteht nicht die Möglichkeit als nicht erstdurchführender Spieler nach einem Erfolg der Aktion eine eigene zu setzen und als Folger teilzunehmen. Daraus ergibt sich, dass der Nutzen des Folgers aus Gleichung (4.4) nur aus dem durch den Ersetzungsgrad reduzierten Π_0 besteht und somit immer ≤ 0 ist. Gleichzeitig folgt, dass in diesem Fall nur ein »Preemption Game« vorliegen kann. Entweder ist der erwartete Nutzen des Zeitführers $\Pi(t, >)$ immer so gering, dass die Aktion nie durchgeführt wird oder sein Nutzen³ $\Pi(t, >) \geq 0$ ist für zumindest ein $t_a \in \mathbb{R}_+$, wodurch ein »Preemption Game« entsteht.

³ Im Fall ohne Nachfolgemöglichkeit kann für die Berechnung des gleichgewichtigen Eintrittszeitpunkt $\Pi(t, <) = 0$ gesetzt werden, da der durch den Ersetzungsgrad reduzierte Nutzen Π_0 konstant ist und bei Zeitführer und Zeitfolger denselben Einfluss hat. Daher muss Π_0 nicht weiter berücksichtigt werden.

Der Nutzen von Spieler i , falls er die Aktion zum Zeitpunkt t , $t \in \mathbb{R}_+$ durchführt, ist durch

$$\Pi_i(t, >) = \int_{t_a}^{\infty} (\pi_i^M(\tau) [-\rho \Pi_{0_i}]) e^{-r\tau} d\tau - C(t_a) \quad (4.9)$$

$$\Pi_i(t, <) = 0 \left[- \int_{t_a}^{\infty} \rho \Pi_{0_i} e^{r\tau} d\tau \right] \quad (4.10)$$

$$\Pi_i(t, =) = \frac{\Pi_i(t, >)}{2} \quad (4.11)$$

gegeben.

Symmetrischer Nutzen

Der Nutzen der Spieler sei symmetrisch. D.h. $\Pi_i(t, \frac{\geq}{<}) = \Pi_j(t, \frac{\geq}{<}) \forall i, j \in I$ und $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Die Gleichheit für alle Spieler gilt somit auch für⁴ $\bar{\Pi}_i(t, \frac{\geq}{<})$ aus den Gleichungen (4.7) und (4.8). In diesem Fall reicht es, das Spiel mit zwei Beteiligten zu untersuchen, da alle Beteiligten dieselbe Nutzenfunktion besitzen und nur einer die Aktion durchführen kann. Abbildung 4.2 zeigt ein Beispiel für $\bar{\Pi}_i(t, >)$ bei Zeitführerschaft.

Der Einfachheit halber wird in diesem Abschnitt auf den Spielerindex i verzichtet. Aus $\bar{\Pi}(t, >)$ und den Aktionsmöglichkeiten (Zeitpunkt der Durchführung) ergeben sich Beste-Antwort-Funktionen (Best-Response-Function) $BR(t_{-i})$ der Spieler, welche unter der Annahme symmetrischer Nutzenfunktionen für alle Spieler ident sind. Können die Spieler den Eintrittszeitpunkt stetig wählen, so erhält man

$$BR(t_{-i}) = \begin{cases} t^{*min} & \text{für } t_{-i} > t^{*min} \\ \emptyset & \text{für } t^{*min} \geq t_{-i} > \tilde{t} \text{ mit } \tilde{t} = \min_{t \in \mathbb{R}_+} \{t | \Pi(t, =) = 0\} \\ \tilde{t} & \text{für } t_{-i} \leq \tilde{t} \text{ mit } \tilde{t} = \min_{t \in \mathbb{R}_+} \{t | \Pi(t, =) = 0\} \end{cases} \quad (4.12)$$

⁴ Beachte: $\Pi_i(t, <) = 0$.

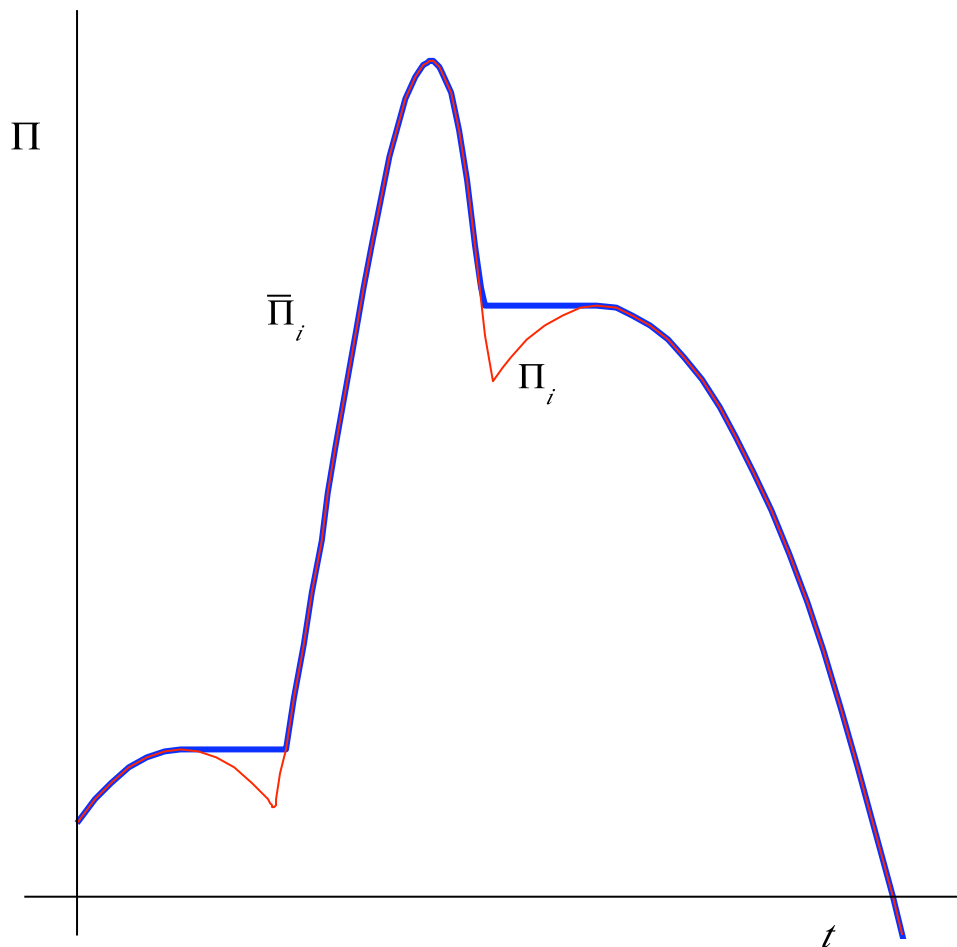


Abbildung 4.2.: Beispiel für $\bar{\Pi}_i(t, >)$ bei Zeitführerschaft

als Beste-Antwort-Funktion. Die leere Menge als Beste-Antwort für den zweiten Fall ergibt sich, da bei $t_j \in (\tilde{t}, t^{*min}]$ als Eintrittszeitpunkt von Spieler j und stetig wählbaren Eintrittszeitpunkten, für Spieler i jedes $t_i \in [\tilde{t}, t_j)$ mit $\Pi(t, >) > \frac{\Pi(t_j, =)}{2}$ bessere Antwort ist, jedoch keines Beste-Antwort. Schränkt man die Eintrittswahl der Spieler auf diskrete Zeitpunkte mit Abstand δ ein, so ist die Beste-Antwort-Funktion durch

$$BR(t_{-i}) = \begin{cases} t^{*min} & \text{für } t_{-i} > t^{*min} \\ t_{-i} - \delta & \text{für } t^{*min} \geq t_{-i} > \tilde{t} \text{ mit } \tilde{t} = \min_{t \in \mathfrak{T}} \{t | \Pi(t - \delta, =) \geq 0\} \\ \tilde{t} & \text{für } t_{-i} \leq \tilde{t} \text{ mit } \tilde{t} = \min_{t \in \mathfrak{T}} \{t | \Pi(t - \delta, =) \geq 0\} \end{cases} \quad (4.13)$$

gegeben, wobei \mathfrak{T} die Menge der zulässigen Eintrittszeitpunkte t aus dem Intervall $[0, t^{*min}]$ beschreibt.

Die Funktion (4.12) gibt die beste Antwort eines Spielers an, gegeben die Aktion (Durchführungszeitpunkt) des Gegners wird zum Zeitpunkt t_{-i} durchgeführt.

Abbildung 4.3 zeigt eine Beste Antwort-Korrespondenz im stetigen und Abbildung 4.4 im diskreten Fall in der t_1, t_2 -Ebene bei einem Timing Game mit zwei Spielern. Zu beachten ist, dass BR_1 eine Funktion von t_2 und BR_2 eine Funktion von t_1 ist.

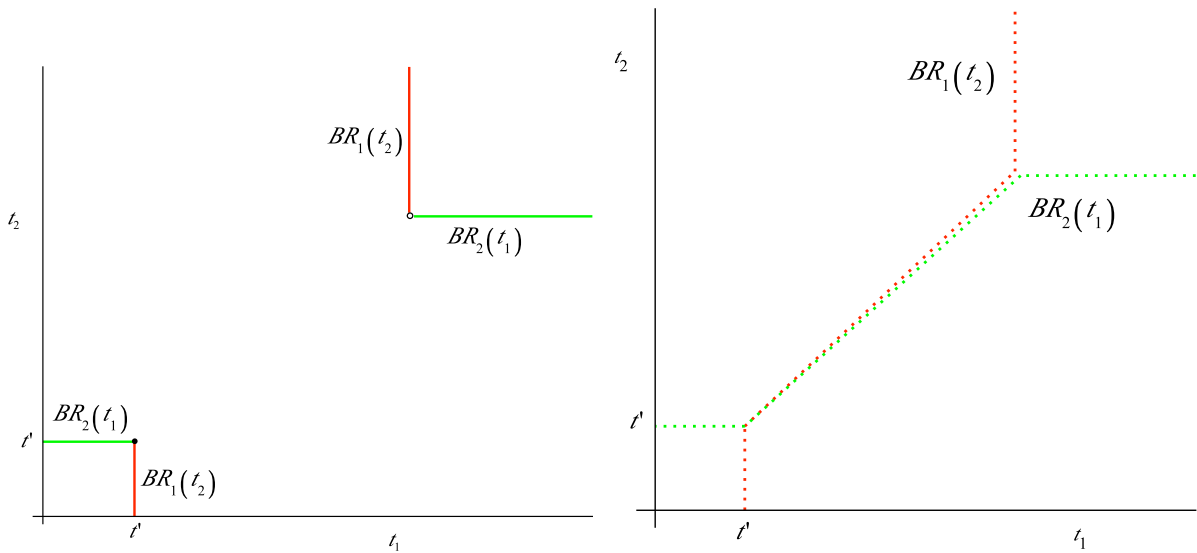


Abbildung 4.3.: Beste-Antwort-Funktionen im stetigen Fall

Abbildung 4.4.: Beste-Antwort-Funktionen im diskreten Fall

Satz 4.1. Bei symmetrischem Nutzen wählen die Spieler den gleichgewichtigen Zeitpunkt t^s mit $\Pi(t^s, =) = 0$ und $\Pi(t, >) < 0 \forall t < t^s$.

Beweis: Der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt (Nash-Gleichgewicht) ist der Schnittpunkt der Graphen in der t_1, t_2 -Ebene der Beste-Antwort-Funktionen (siehe z.B. (Osborne and Rubinstein, 1994) Section 2.2). Die Beste-Antwort-Funktionen sind durch die Gleichungen (4.12) bzw. (4.13) gegeben. Aufgrund der symmetrischen Nutzenfunktionen haben alle Spieler idente Beste-Antwort-Funktionen d.h. $BR_i(t) = BR_{-i}(t) =: BR(t)$. Ein Gleichgewicht wird durch $BR(BR(t)) = t$ charakterisiert.

Für t^s gilt $\Pi(t^s, =) = 0$ und $\Pi(t, >) < 0 \forall t < t^s$ wodurch t^s dem \tilde{t} aus Gleichung (4.12) entspricht. Damit erhält man

$$BR(BR(t^s)) = BR(t^s) = t^s$$

Dies ist auch das einzige Gleichgewicht⁵. Für $\tilde{t} < t^s$ ist $BR(BR(\tilde{t})) = BR(t^s) = t^s$ und für $\tilde{t} > t^s$ ist

$$BR(BR(\tilde{t})) = \begin{cases} BR(\emptyset) & \text{für } \tilde{t} \leq t^{*min} \\ BR(t^{*min}) = \emptyset & \text{für } \tilde{t} > t^{*min} \end{cases}$$

Anmerkung: Für den diskreten Fall liegt der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt bei t^{sd} mit $\Pi(t^{sd}, =) \geq 0$ und $\Pi(t, >) < 0 \forall t < t^{sd}$. Beweis analog zu Beweis von Satz 4.1.

Asymmetrischer Nutzen

Der Nutzen der Spieler sei nicht mehr symmetrisch. D.h. $\exists \{i, j\}$ mit $i \neq j$ und $t \in \mathbb{R}_+ : \Pi_i(t, \geq) \neq \Pi_j(t, \geq)$ und $\forall i \in I \exists t_i \in \mathbb{R}_+ : \Pi_i(t_i, >) > 0$. Untersucht werden Fälle mit einer Asymmetrie auf dem Intervall $[t_a, t_b]$ mit $\bar{\Pi}_i(t_a, >) < 0$ und $\bar{\Pi}_i(t_b, >) > 0 \forall i \in I$.

⁵ Wegen Annahme 4.4. Wird auf diese Annahme verzichtet, so kann ein Intervall an Gleichgewichten $t' \in [t^s, t_g]$ auftreten. Diese haben die Eigenschaften $\forall t \in [t^s, t_g]$ gilt $\Pi(t, =) = 0$ und $\forall t < t^s \Pi(t, >) \leq 0$.

Korollar 4.1. Fälle, bei denen die Asymmetrie anders in Erscheinung tritt, sind äquivalent zum symmetrischen Fall.

Beweis: Der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt aus Satz 4.1 liegt im Intervall $[t_a, t_b]$. Da die Spieler auf diesem Zeitintervall idente Nutzenfunktionen haben kommt der symmetrische Fall zur Anwendung.

$\bar{\Pi}_i(t, \gtrless)$ ist durch die Gleichungen (4.7) und (4.8) gegeben. Da nur ein Spieler die Aktion durchführen kann, stehen jedem Spieler alle anderen gegenüber. Gleichung (4.14) beschreibt den »besten« Nutzen der Gegenspieler von Spieler i

$$\bar{\Pi}_{-i}\left(t, \gtrless\right) = \max_{j \in I \setminus i} \bar{\Pi}_j\left(t, \gtrless\right) \quad \forall t \quad (4.14)$$

Abbildung 4.5 zeigt eine Darstellung von Gleichung (4.14) mit den eingezeichneten Gleichgewichtspunkten t^a des Spieles mit asymmetrischem Nutzen und t^s bei symmetrischem Nutzen falls der Nutzen aller Spieler Π_1 ist.

Im asymmetrischen Fall ohne Nachfolgemöglichkeit lassen sich die Beste-Antwort-Funktionen der Spieler ermitteln als

$$BR_i(t_{-i}) = \begin{cases} i_1^{*min} & \text{für } t_{-i} > t_i^{*min} \\ \emptyset & \text{für } t_i^{*min} \geq t_{-i} > \tilde{t}_i \text{ mit } \tilde{t}_i = \min_{t \in \mathbb{R}_+} \{t | \Pi_i(t, =) = 0\} \\ \tilde{t}_i & \text{für } t_{-i} \leq \tilde{t}_i \text{ mit } \tilde{t}_i = \min_{t \in \mathbb{R}_+} \{t | \Pi_i(t, =) = 0\} \end{cases} \quad (4.15)$$

mit der alternativen Darstellung

$$BR_i(t_{-i}) = \operatorname{argmax}_{t \in \mathbb{R}^+} \{ \bar{\Pi}_i(t, >) | t \in [0, t_{-i}) \} \cup \{ \Pi_i(t, =) | t = t_{-i} \} \cup \{ \bar{\Pi}_i(t, <) | t \in (t_{-i}, \infty) \} \quad (4.16)$$

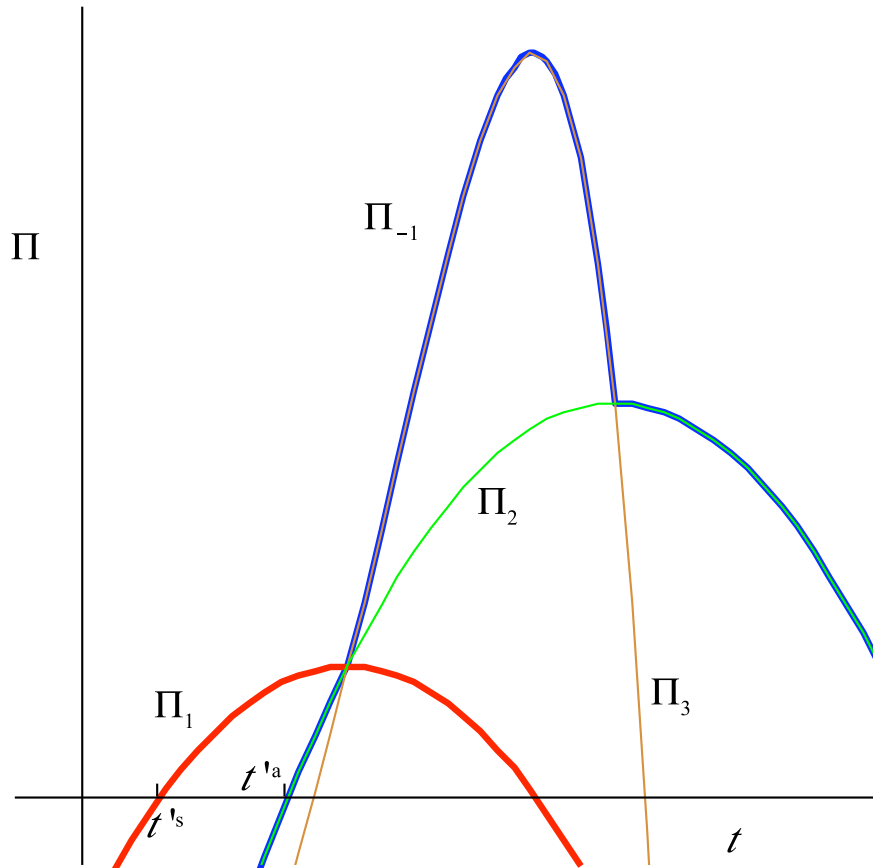


Abbildung 4.5.: Zusammengefasster Nutzen der Gegenspieler von Spieler i

im stetigen Fall und für den diskreten als

$$BR_i(t_{-i}) = \begin{cases} t_i^{*min} & \text{für } t_{-i} > t_i^{*min} \\ t_{-i} - \delta & \text{für } t_i^{*min} \geq t_{-i} > \tilde{t}_i \text{ mit } \tilde{t}_i = \min_{t \in \mathcal{T}} \{t | \Pi_i(t - \delta, =) \geq 0\} \\ \tilde{t}_i & \text{für } t_{-i} \leq \tilde{t}_i \text{ mit } \tilde{t}_i = \min_{t \in \mathcal{T}} \{t | \Pi_i(t - \delta, =) \geq 0\} \end{cases} \quad (4.17)$$

Abbildung 4.6 zeigt die Beste-Antwort-Korrespondenz für zwei Spieler bei asymmetrischem Nutzen und diskreter Wahl der Eintrittszeitpunkte.

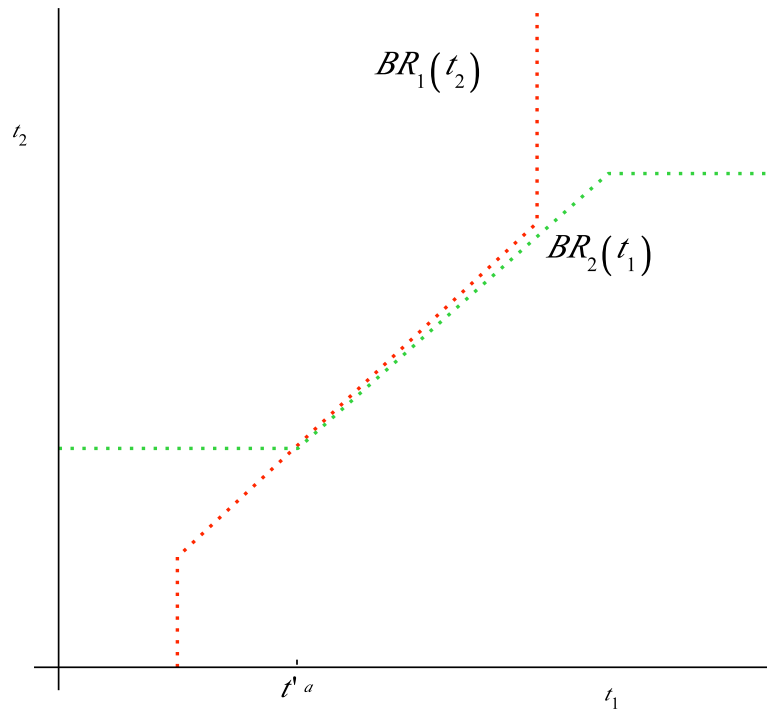


Abbildung 4.6.: Beste-Antwort-Funktionen bei asymmetrischem Nutzen und diskreten Eintrittszeitpunkten

Satz 4.2. a) Bei asymmetrischem Nutzen und bei diskretem Zeitabstand zwischen den Eintrittszeitpunkten führt Spieler i die Aktion zum Zeitpunkt t^{ad} mit $\bar{\Pi}_i(t^{ad}, >) \geq 0$ und $\Pi_{-i}(t, =) < 0$ für $t < t^{ad}$ durch.

Beweis: Analog zu Beweis von Satz 4.1.

b) Bei stetigem Zeitabstand existiert kein Gleichgewicht. Die Existenz eines Gleichgewichtes ist gegeben, falls für die Spieler die Wahrscheinlichkeit bei gleichem Eintrittszeitpunkt die Zeitführerschaft zu erhalten ($\Pi(t, =)$), durch $\alpha_i = 1$ und $\alpha_j = 0$ gegeben sind⁶ (α_i ist die Wahrscheinlichkeit des Spielers, der früher einen Gewinn durch die Unternehmung erzielen kann). Der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt liegt dann bei t^a mit $\Pi_i(t^a, =) \geq 0$ und $\bar{\Pi}_{-i}(t, >) < 0$ für $t < t^a$.

⁶ Dies kann durch eine exogene Entscheidung (im später untersuchten Anwendungsbeispiel z.B. durch Kolumbus) gesichert und erklärt werden.

Beweis: Durch den Kunstgriff der Festlegung der Wahrscheinlichkeiten auf $\alpha_i = 1$ und $\alpha_j = 0$ erhält man als Beste-Antwort-Funktion

$$BR_i(t_{-i}) = \operatorname{argmax}_{t \in \mathbb{R}^+} \{ \bar{\Pi}_i(t, >) | t \in [0, t_{-i}] \} \cup \{ \bar{\Pi}_i(t, <) | t \in (t_{-i}, \infty) \}$$

$$BR_j(t_{-j}) = \operatorname{argmax}_{t \in \mathbb{R}^+} \{ \bar{\Pi}_j(t, >) | t \in [0, t_{-j}] \} \cup \{ \bar{\Pi}_j(t, <) | t \in [t_{-j}, \infty) \}$$

d.h. die Darstellung aus Gleichung (4.15) wird für Spieler i um

$$t_{-i} \text{ für } t^{\star \min_i} \geq t_{-i} > \tilde{t}_i \text{ mit } \tilde{t}_i = \min_{t \in \mathbb{R}_+} \{ t | \Pi_i(t, =) = 0 \}$$

erweitert. Daraus folgt, dass

$$BR_i(BR_{-i}(t'^a)) = BR_i(t'^a) = t'^a$$

gilt. Führt man diesen Kunstgriff nicht durch, folgt

$$BR_i(BR_j(t)) = \begin{cases} BR_i(t_j^*) = \begin{cases} t_i^* \text{ für } t > t_j^* > t_i^* \\ \emptyset \text{ für } t > t_i^* > t_j^* \end{cases} \\ BR_i(\emptyset) \text{ für } t_j^* \geq t > \min\{t | \Pi_j(t, =) = 0\} \\ BR_i(\min\{t | \Pi_j(t, =) = 0\}) = \emptyset \text{ für } t \leq \min\{t | \Pi_j(t, =) = 0\} \end{cases} \quad (4.18)$$

wodurch kein Gleichgewicht existiert.

Erklärung: Ohne den Kunstgriff der Festlegung der Wahrscheinlichkeiten auf $\alpha_i = 1$ und $\alpha_j = 0$ existiert kein Gleichgewicht, da die Beste-Antwort-Funktionen im stetigen Fall keinen Schnittpunkt haben. Bleibt der Zufall gleichverteilt, so hat Spieler i in t'^a immer den Anreiz auf einen früheren Zeitpunkt abzuweichen, da er dadurch die Zeitführerschaft erlangen würde (bessere Antwort), aber im stetigen Fall, wie in Gleichung (4.15) ersichtlich, keine Beste-Antwort existiert. Durch die Festlegung der Wahrscheinlichkeit α wird dieses Problem umgangen, da Spieler i bei Wahl des gleichen Eintrittszeitpunkts in jedem Fall die Zeitführerschaft erhält.

Korollar 4.2. *Liegt ein Timing Game ohne Folger vor, so liegt der gleichgewichtige Zeitpunkt t^s bei symmetrischem Nutzen nicht später als der gleichgewichtige Zeitpunkt t^a bei asymmetrischem Nutzen⁷. Es gilt $t^s \leq t^a$.*

Beweis: O.B.d.A. ist Spieler i der »früheste« ($\exists t, \epsilon \mid \bar{\Pi}_i(t, >) > \bar{\Pi}_j(t, >) \text{ und } \bar{\Pi}_j(\tilde{t}, >) < 0 \forall \tilde{t} \in [t - \epsilon, t]$ mit $\epsilon > 0$ und $i \neq j$). Nach Satz 4.1 und 4.2 liegt der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt t^a für idente Spieler i bei hinreichend großem ϵ im Intervall $[t - \epsilon, t]$. Betrachtet man nur Spieler die nicht ident mit Spieler i sind, gilt für den gleichgewichtigen Eintrittszeitpunkt t^a , $t^a > t$.

Erklärung: Ist die Asymmetrie in den Nutzenfunktionen dadurch gegeben, dass einer der beiden Spieler für ein $t < t^s$ nun einen Nutzen größer Null hat, so wird dieser zum Zeitpunkt t^s ziehen. Ebenso wie in Satz 4.2 b) ist der »Kunstgriff« mit Wahrscheinlichkeiten für ein Gleichgewicht notwendig. Ist die Asymmetrie dadurch gegeben, dass der Nutzen eines der beiden Spieler $\forall t \in [t^s, \bar{t}]$ nun kleiner 0 ist, so wird der andere Spieler zum Zeitpunkt \bar{t} ($> t^s$) die Aktion durchführen. Der Spieler mit der abweichenden Nutzenfunktion wird, da jedes ehre Ziehen einen negativen Nutzen liefert, seinem Gegenspieler nicht zuvorkommen. Zusammenfassend folgt, dass $t^s \leq t^a$ gilt.

4.2.2. Timing Game mit Folger

In diesem Abschnitt wird die Nachfolgemöglichkeit zugelassen. Somit besteht nach der erstmaligen Umsetzung des Plans für Zeitfolger die Möglichkeit eine »eigene« Aktion durchzuführen. Annahme 4.4 wird in diesem Abschnitt nicht mehr berücksichtigt. Diese Spieler können in infinitesimalen Abständen als Folger in das Spiel eintreten. Im Unterschied zum Fall ohne Nachfolgemöglichkeit ist $\Pi_i(t, <)$ nicht 0, sondern durch die Gleichung (4.4) bestimmt. Wie in den Gleichungen (4.7) und (4.8) lässt sich für jeden Spieler $\bar{\Pi}_i(t, >)$ und $\bar{\Pi}_i(t, <)$ ermitteln. In dem Modell mit Nachfolgemöglichkeit können die Spieler die Wahrscheinlichkeiten α_i , $0 \leq \alpha_i \leq 1$ für

⁷ Ausgehend von identen Nutzenfunktionen kommt es durch exogene Einflüsse zu Unterschieden in den Nutzenfunktionen der Spieler.

$\Pi(t, =)$ selbst festlegen⁸. Im Unterschied zu dem in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen Timing Game ohne Folger kann im Fall der Nachfolgemöglichkeit die Konstruktion von $\bar{\Pi}$ zu Lösungen führen, die kein Gleichgewicht beschreiben. Diese Fälle haben die Eigenschaft, dass zum ermittelten Zeitpunkt $\bar{\Pi} \neq \Pi$ gilt.

Annahme 4.5. $\forall i \in I \exists \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}_+ : \bar{\Pi}_i(t_i, >), \bar{\Pi}_i(t_i, <) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}$

Annahme 4.6. $\bar{\Pi}_i(0, >) < \bar{\Pi}_i(t_i^{*f}, <)$

Annahme 4.7. $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Pi}_i(t_i, <) < \bar{\Pi}_i(t_i^{*l}, >)$

Annahme 4.5 stellt sicher, dass jeder Spieler die Aktion zumindest zu einem Zeitpunkt mit positivem Nutzen durchführen kann. Ist Annahme 4.6 nicht erfüllt, so wird die Aktion sofort zum Zeitpunkt $t = 0$ durchgeführt, da der Nutzen für $t = 0$ positiv ist und es aufgrund der Monotonie von $\bar{\Pi}_i$ zu einem »Preemption Game« wie im Abschnitt 4.2.1 ohne Folger kommt. Ist Annahme 4.7 nicht erfüllt, wird die Aktion nie durchgeführt.

Symmetrischer Nutzen

Dem Aufbau von Abschnitt 4.2.1 folgend wird zuerst ein Timing Game mit Folger und symmetrischem Nutzen untersucht. Abbildung 4.7 zeigt ein Beispiel der Funktionen $\Pi(t, >)$ und $\Pi(t, <)$ eines Spielers bzw. aller Spieler bei symmetrischem Nutzen mit t^{*sf} als gleichgewichtigen Eintrittszeitpunkt.

Die Beste-Antwort-Funktion der modifizierten Nutzenfunktion $\bar{\Pi}$ ist durch

$$BR(t_{-i}) = \underset{t}{\operatorname{argmax}} \{ \bar{\Pi}(t, >) \mid t \in [0, t_{-i}) \} \cup \{ \Pi(t, =) \mid t = t_{-i} \} \cup \{ \bar{\Pi}(t, <) \mid t \in (t_{-i}, \infty) \} \quad (4.19)$$

gegeben.

⁸ Spieler die den gleichen Eintrittszeitpunkt wählen, können selbst bestimmen, wer die Zeitführer- und wer die Zeitfolgerschaft übernimmt.

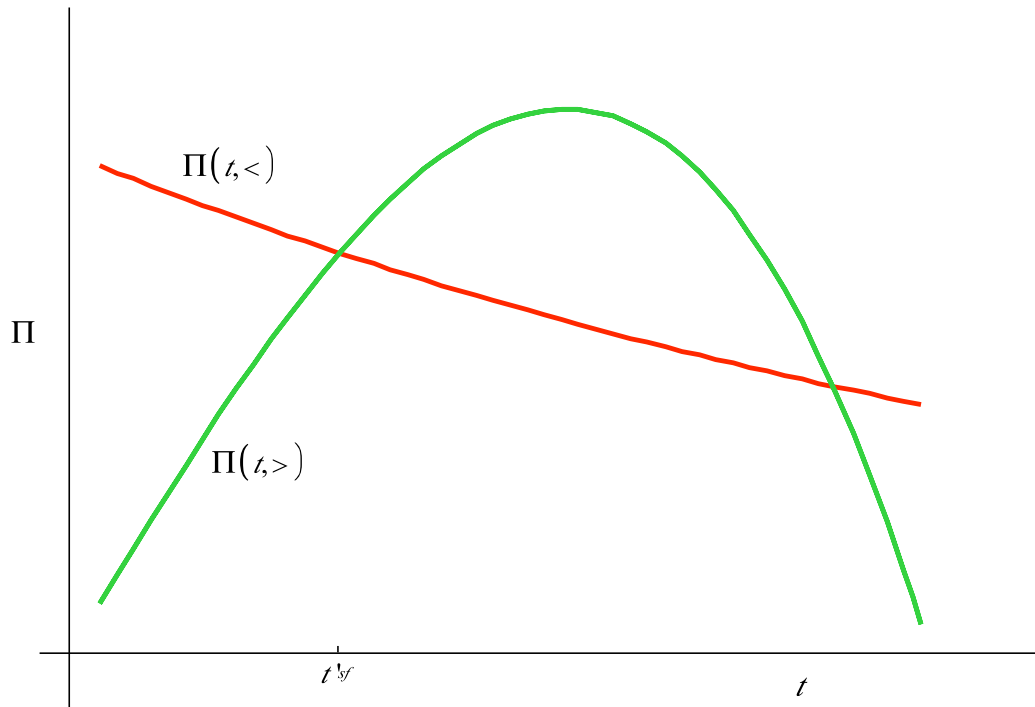


Abbildung 4.7.: Führer-Folger mit symmetrischem Nutzen

Lemma 4.1. Ist $\Pi(t^{*l}, >) = \Pi(t^{*f}, <)$ mit $t^{*l} \leq t^{*f}$, so ist der Eintritt des Zeitführers zu t^{*l} und der des Folgers zu t^{*f} ein Gleichgewicht.

Beweis: $BR(BR(t^{*l})) = BR(t^{*f}) = t^{*l}$

Proposition 4.1. Existieren mehrere t^{*l} und t^{*f} , die die Forderung aus Lemma 4.1 erfüllen, so ist jede Kombination ein Gleichgewicht.

Korollar 4.3. Tritt der Fall von Lemma 4.1 nicht ein, so kann der gleichgewichtige Zeitpunkt nur in einem Schnittpunkt der Graphen der Beste-Antwort-Funktionen liegen. Damit t ein gleichgewichtiger Eintrittszeitpunkt ist, muss für t $\bar{\Pi}(t, >) = \Pi(t, >)$ gelten.

Beweis: Ist $\bar{\Pi}(t, >) > \Pi(t, >)$, so existiert ein \tilde{t} , $\tilde{t} < t$ mit $\Pi(\tilde{t}, >) > \Pi(t, >)$

Satz 4.3. *Gilt*

i) $\bar{\Pi}(t'^{sf}, >) = \bar{\Pi}(t'^{sf}, <)$ mit

$$a) \bar{\Pi}(t, >) \leq \bar{\Pi}(t'^{sf}, >) \forall t \in [0, t'^{sf})$$

$$b) \bar{\Pi}(t, <) \leq \bar{\Pi}(t'^{sf}, <) \forall t \in [t'^{sf}, \infty)$$

ii) $\bar{\Pi}(t'^{sf}, >) = \Pi(t'^{sf}, >)$ und $\bar{\Pi}(t'^{sf}, <) = \Pi(t'^{sf}, <)$

so ist t'^{sf} ein gleichgewichtiger Eintrittszeitpunkt bei symmetrischem Nutzen und Nachfolgemöglichkeit.

Beweis: Die Beste-Antwort-Funktion ist durch Gleichung (4.19) gegeben. Aus i) folgt,

$$BR(BR(t'^{sf})) = BR(t'^{sf}) = t'^{sf}.$$

Damit t'^{sf} ein gleichgewichtiger Eintrittszeitpunkt ist, muss wegen Korollar 4.3 auch ii) für t'^{sf} zutreffen.

Anmerkung: Ist ii) zu \bar{t}^{sf} nicht erfüllt, so existiert für den Zeitführer nach Korollar 4.3 zumindest ein Zeitpunkt \tilde{t} mit $\Pi(\tilde{t}, >) > \Pi(\bar{t}^{sf}, >)$. Der Zeitführer verlegt seinen Eintrittszeitpunkt nach t' mit $t' = \underset{t}{\operatorname{argmax}}\{\Pi(t, >)\}$. Zum Zeitpunkt t' gilt $\Pi(t', <) \geq \Pi(\bar{t}^{sf}, <)$. Dies führt dazu, dass auch der Folger seinen Eintrittszeitpunkt nach vorne verschiebt. Durch diesen nach vorne gezogenen Eintrittszeitpunkt hat der Führer den Anreiz, seinen Eintrittszeitpunkt hinter jenen des Folgers zu verlegen da $\Pi(t', >) < \Pi(t', <)$ gilt. Dies führt zu einem Reaktionszyklus ohne Gleichgewicht.

Abbildung 4.8 zeigt einen Fall für den ii) aus Satz 4.3 nicht gilt. Startet man im globalen Maximum von $\Pi(t, >)$, haben beide Spieler den Anreiz ihren Eintrittszeitpunkt vorzuziehen. Gelangt man in den Abschnitt für den $\Pi(t, >) \neq \bar{\Pi}(t, >)$ gilt, hat der Zeitführer den Anreiz das »erste« lokale Maximum \tilde{t} als Eintrittszeitpunkt zu wählen. Unter der Annahme dass Spieler 1 \tilde{t} als Eintrittszeitpunkt wählt, tritt Spieler 2 zum Zeitpunkt $\tilde{t} + \epsilon$, $\epsilon < 0$ und hinreichend klein, ein. Gegeben, dass Spieler 2 zu $\tilde{t} + \epsilon$ eintritt, hat Spieler 1 einen Anreiz seinen Eintrittszeitpunkt knapp hinter $\tilde{t} + \epsilon$ zu

verschieben und Spieler 2 die Zeitführerschaft zu überlassen. Diese Überlegungen wiederholen sich bis zum Schnittpunkt von $\bar{\Pi}(t, >)$ und $\Pi(t, <)$. Wählt Spieler 2 diesen Eintrittszeitpunkt, so ist es für Spieler 1 optimal zum Zeitpunkt \tilde{t} einzutreten und die Zeitführerschaft zu übernehmen. Der Zyklus startet von neuem und ein Reaktionszyklus ohne Gleichgewicht entsteht.

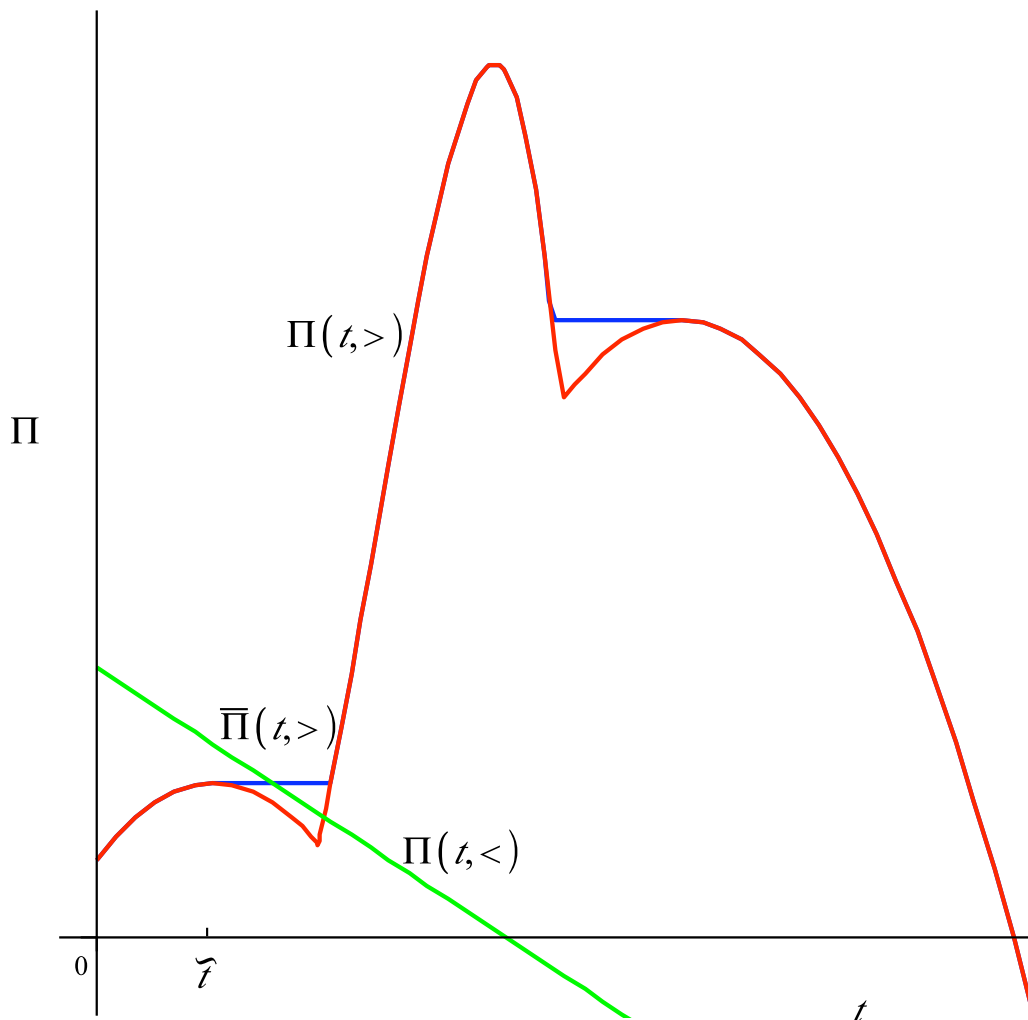


Abbildung 4.8.: Fall der Verletzung von ii) aus Satz 4.3

Werden entweder *i)* oder *ii)* aus Satz 4.3 nicht erfüllt, entsteht ein Reaktionszyklus \mathcal{T} und die Existenz eines gleichgewichtigen Zeitpunkts ist nicht gegeben. Im folgenden

wird ein aus der Verletzung von *i*) entstehender Reaktionszyklus beschrieben und gezeigt, dass in diesem Fall kein Gleichgewicht existiert.

Ist Eigenschaft *i*) von Satz 4.3 nicht erfüllt und ist $\bar{\Pi}(t^{*l}, >) > \bar{\Pi}(t^{*f}, <)$, so bewegt sich der Eintrittszeitpunkt der Spieler (startend mit t^{*l}) nach »vorne« bis $\bar{\Pi}(\hat{t}, >) = \bar{\Pi}(t^{*f}, <)$ mit $\hat{t} < t^{*l}$ gilt. Diese Dynamik entsteht, da für $t - \epsilon \in (\hat{t}, t^{*l})$

$$\bar{\Pi}(t - \epsilon, >) > \begin{cases} \Pi(t, =) \\ \Pi(t^{*l}, <) \end{cases}$$

gilt. Ist \hat{t} erreicht, ist es für den Folger optimal erst zum Zeitpunkt t^{*f} in das Spiel einzusteigen, da

$$\Pi(t^{*f}, <) > \begin{cases} \Pi(\hat{t}, =) \\ \bar{\Pi}(\hat{t} - \epsilon, >) \end{cases}$$

mit $\epsilon > 0$ und hinreichend klein, gilt. Gegeben, dass Spieler 2 seinen Eintritt zum Zeitpunkt t^{*f} vornimmt, ist es für Spieler 1 optimal zum Zeitpunkt t' mit $t' = \operatorname{argmax}\{\bar{\Pi}(t, >)| t \in [0, t^{*f}]\}$ einzusteigen ($t' > \hat{t}$). Da für t' gilt $\bar{\Pi}(t' - \epsilon, >) > \Pi(t^{*f}, <)$, wird Spieler 2 seinen Eintrittszeitpunkt vorziehen. Zusammenfassend folgt, dass dieser Reaktionszyklus nach »vorne« kein Gleichgewicht beinhaltet. Ist $\bar{\Pi}(t^{*l}, >) < \bar{\Pi}(t^{*f}, <)$, so entsteht analog zum Reaktionszyklus nach »vorne« ein Reaktionszyklus nach »hinten« ohne Gleichgewicht.

Die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen Beispiele für Reaktionszyklen nach »vorne« bzw. nach »hinten«. Die Zyklen verlaufen von Punkt A nach Punkt B, springen dann über Punkt C zu Punkt A und starten wieder von Anfang.

Anmerkung: In der Praxis kommt es dennoch zu einem Eintrittszeitpunkt, da die Zeit voranschreitet wodurch eine der Annahmen 4.6 oder 4.7 nicht mehr erfüllt ist und es nach Verschieben des Reaktionszyklus zu einer Randlösung kommt.

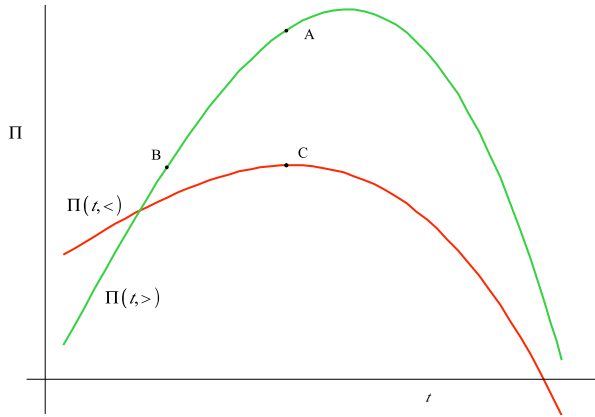


Abbildung 4.9.: Beispiel für einen Reaktionszyklus nach »vorne«

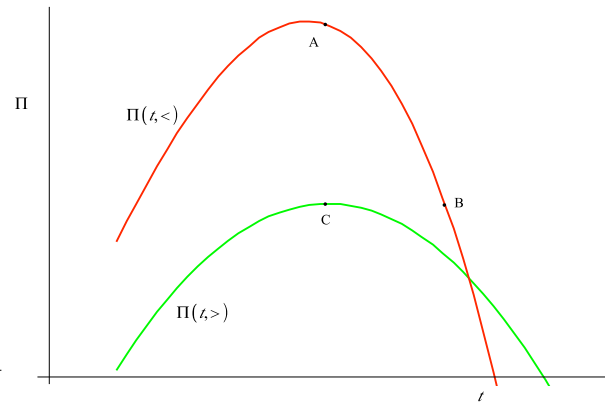


Abbildung 4.10.: Beispiel für einen Reaktionszyklus nach »hinten«

Korollar 4.4. Existiert der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt mit Nachfolgemöglichkeit, liegt er nicht vor jenem ohne Nachfolgemöglichkeit. Es gilt $t'^o \leq t'^f$.

Beweis. Das Modell ohne Nachfolgemöglichkeit entspricht jenem mit Nachfolgemöglichkeit, wobei durch die Nichtberücksichtigung des durch den Ersetzungsgrad reduzierten Nutzen Π_0 , $\Pi(t, <) = 0$ ist. Im Fall der Nachfolgemöglichkeit kommt zu $\Pi(t, <)$ ohne Nachfolgemöglichkeit noch der Instantannutzen durch das Nachfolgen hinzu, wodurch sich das Gleichgewicht nicht nach »vorne« verschieben kann.

Schränkt man die Möglichkeit des Nachfolgens so ein, dass ein Nachfolgen nicht in infinitesimalen Abständen, sondern nur in Abständen δ , $\delta > 0$ möglich ist, so verändert sich der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt.

Liegt kein Gleichgewicht vor und ist die Differenz⁹ $t_{max} - t_{min} > \delta$, verkürzt sich der Reaktionszyklus. Durch die Einführung des Mindestabstandes δ für den Folger muss der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt nicht mehr bei einem Schnittpunkt von $\Pi(t, >)$ und $\Pi(t, <)$ liegen. Analoges gilt für Lemma 4.1.

⁹ $t_{max} = \operatorname{argmax}_t \{t | t \in \mathcal{T}\}$ und $t_{min} = \operatorname{argmin}_t \{t | t \in \mathcal{T}\}$

Satz 4.4. Für den gleichgewichtigen Eintrittszeitpunkt $t^{sf\delta}$ bei symmetrischem Nutzen und Nachfolgemöglichkeit mit Abstand δ gilt $\Pi(t^{sf\delta}, >) = \Pi(t^{sf\delta} + \delta, <)$ mit $\Pi(t, >) \leq \Pi(t^{sf\delta}, >) \quad \forall t \in [0, t^{sf\delta})$ und $\Pi(t, <) \leq \Pi(t^{sf\delta} + \delta, <) \quad \forall t \in [t^{sf\delta} + \delta, \infty)$.

Beweis. Analog zu Satz 4.3.

Korollar 4.5. Ist das Nachfolgen erst mit einem Abstand δ möglich, so liegt der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt nicht nach jenem ohne diese Einschränkung, es gilt $t^\delta \leq t^f$.

Asymmetrischer Nutzen

In diesem Abschnitt wird der Fall mit Nachfolgemöglichkeit und asymmetrischem Nutzen untersucht. Zuerst wird unterstellt, dass das Nachfolgen in infinitesimalen Abständen möglich ist. Jeder Spieler ermittelt für sich den Eintrittszeitpunkt unter der Annahme symmetrischen Nutzens bzw. den sich ergebenden Reaktionszyklus. Sei Ω_1 die Menge der Spieler die für sich ein Gleichgewicht, Ω_2 die Menge der Spieler die für sich einen Reaktionszyklus nach »vorne« und Ω_3 die Menge der Spieler die für sich einen Reaktionszyklus nach »hinten« ermittelt haben. \hat{t}_i ist der ermittelte Eintrittszeitpunkt für Spieler aus Ω_1 . Für Spieler mit einem Reaktionszyklus sei \hat{t}_i der Zeitpunkt, der in den Abbildungen 4.9 und 4.10 durch Punkt B gekennzeichnet wird. Für Spieler aus Ω_2 entspricht dies dem »kleinsten« t des Reaktionszyklus und für jene aus Ω_3 dem »größten« t des Reaktionszyklus. Die Menge der \hat{t}_i lässt sich ordnen, sodass $\hat{t}_1 \leq \dots \leq \hat{t}_n$. Spieler 1 wird als der **eheste Spieler** bezeichnet. Folglich sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1. t_1^{*min}
2. gleichgewichtiger Eintrittszeitpunkt zu t^{af} , $t^{af} = \underset{t}{\operatorname{argmax}}\{\Pi(t, >)\mid t \in [0, \hat{t}_2]\}$
mit $\alpha_1 = 1$
3. gleichgewichtige Eintrittszeitpunkte t^{af} , $t^{af} \in [\max\{\hat{t}_1, t_2^{*f}\}, \hat{t}_2]$ mit $\alpha_1 = 1$
4. gleichgewichtige Eintrittszeitpunkte t^{af} , $t^{af} \in [\max\{\hat{t}_1, t_2^{*f}\}, \min\{\hat{t}_2, t_1^{*l}\}]$
mit $\alpha_1 = 1$

5. Reaktionszyklus ohne Gleichgewicht

Ist Spieler 1 nicht aus Ω_3 und ist $t_1^{*min} < \hat{t}_2$, so kann er zu $t_1^{*min} < \hat{t}_2$ eintreten, was für ihn ein globales Maximum darstellt. Die restlichen Spieler treten entsprechend ihrem Nutzen $\Pi(t_1^{*min}, <)$ in das Spiel ein. Ist Spieler 1 aus Ω_3 und Spieler 2 aus einem beliebigen Ω und gilt zudem noch $\hat{t}_1 < t_2^{*f}$, so ist wegen

$$BR_1(BR_2(t_1^{*l})) = BR_1(t_2^{*f}) = t_1^{*l}$$

t_1^{*l} ein gleichgewichtiger Eintrittszeitpunkt.

Ist Spieler 1 aus Ω_1 oder Ω_2 und Spieler 2 aus Ω_1 , trifft Fall 2 zu. Da Spieler 1 aus $\Omega_{1,2}$ und Spieler 2 aus Ω_1 , gilt

$$\Pi_1(t'^{af}, >) \geq \begin{cases} \Pi_1(t', >) \text{ mit } t' < t'^{af} \\ \Pi_1(t', <) \text{ mit } t' > t'^{af} \end{cases}$$

$$\Pi_2(t'^{af}, <) \geq \begin{cases} \Pi_2(t', >) \text{ mit } t' < t'^{af} (\leq \hat{t}_2) \\ \Pi_2(t', <) \text{ mit } t' > t'^{af} \end{cases}$$

Die exogene Festlegung von $\alpha_1 = 1$ ist notwendig, da sonst aus demselben Grund wie in Satz 4.2 b) kein Gleichgewicht existiert. Für Fall 3 muss Spieler 1 aus Ω_1 und Spieler 2 aus Ω_3 sein. Für alle $t'^{af} \in [\max\{\hat{t}_1, t_2^{*f}\}, \hat{t}_2]$ mit $\alpha_1 = 1$ gilt

$$\Pi_1(t'^{af}, >) \geq \begin{cases} \Pi_1(t', >) \text{ mit } t' < t'^{af} \\ \Pi_1(t', <) \text{ mit } t' > t'^{af} \end{cases}$$

$$\Pi_2(t'^{af}, <) \geq \begin{cases} \Pi_2(t', >) \text{ mit } t' < t'^{af} (\leq \hat{t}_2) \\ \Pi_2(t', <) \text{ mit } t' > t'^{af} \end{cases}$$

wodurch jeder Zeitpunkt des Intervalls $[\max\{\hat{t}_1, t_2^{*f}\}, \hat{t}_2]$ ein gleichgewichtiger Eintrittszeitpunkt ist. Im Unterschied zu Fall 2 bedarf es keines exogenen Einflusses für die Festlegung von α , da beide Spieler $\alpha_1 = 1$ vorschlagen. Damit Fall 4 eintritt, müssen Spieler 1 aus Ω_2 und Spieler 2 aus Ω_3 sein. Dass alle

$t^{af} \in [\max\{\hat{t}_1, t_2^{*f}\}, \min\{\hat{t}_2, t_1^{*l}\}]$ mit $\alpha_1 = 1$ gleichgewichtige Eintrittszeitpunkte beschreiben, folgt aus denselben Argumenten wie bei Fall 3. Auch in Fall 4 verständigen sich die Spieler auf $\alpha_1 = 1$. Bei allen übrigen Kombinationen der Spieler aus Ω_i trifft Fall 5 zu.

Der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt bei asymmetrischem Nutzen und Nachfolgemöglichkeit liegt nicht vor jenem bei symmetrischem Nutzen mit Nachfolgemöglichkeit. Abbildung 4.11 zeigt eine Möglichkeit der Nutzenfunktionen für zwei Spieler als Zeitführer und Zeitfolger. Führt man die Restriktion ein, dass der Nachfolger erst mit einem Abstand δ , $\delta > 0$ in das Spiel eintreten kann, so verschiebt sich der gleichgewichtige Eintrittszeitpunkt. Die Auswirkungen der Einführung des Mindestabstandes δ bei symmetrischem Nutzen lassen sich auf die Lösung bei asymmetrischem Nutzen übertragen.

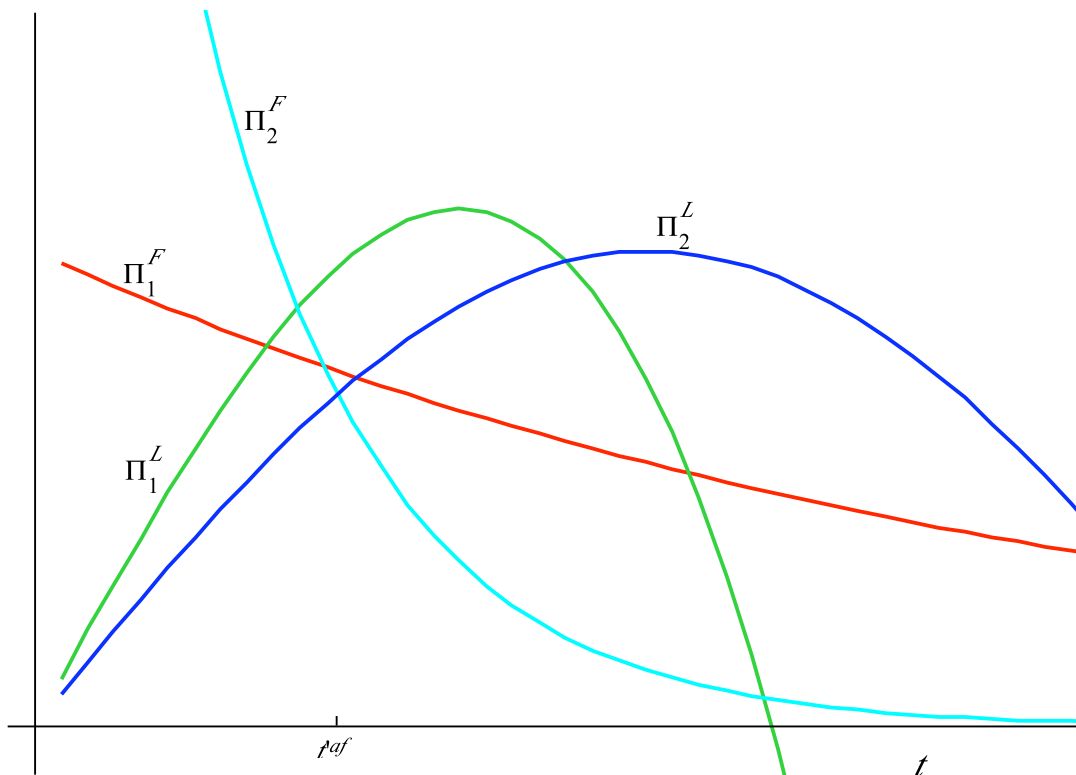


Abbildung 4.11.: Führer-Folger mit asymmetrischem Nutzen

Anmerkung: Gilt ab einer hinreichend großen Anzahl N , $N \in \mathbb{N}$ an Spielern: Für jeden Spieler i existiert ein Spieler j mit $\Pi_i \left(t, \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} \right) = \Pi_j \left(t, \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} \right)$ für fast alle t , so konvergiert der Eintrittszeitpunkt bei asymmetrischem Nutzen mit steigender Teilnehmerzahl gegen jenen bei symmetrischem. Daraus folgt: für $\# \text{ Spieler} \rightarrow N$ gilt $t^a \rightarrow t^s$.

4.2.3. Timing Game mit Restriktion

In den bisher behandelten Varianten wurde davon ausgegangen, dass ein Spieler die Aktion zu jedem Zeitpunkt durchführen kann und nur auf die Rentabilität der Aktion zu achten hat. Diese Voraussetzung wird jedoch in der Realität oftmals verletzt, da Spieler einer Budgetrestriktion $\mathcal{B}(t)$ unterliegen können. Die Aktion kann dann nicht zu jedem beliebigen Zeitpunkt ausgeführt werden, da beispielsweise Anfangsinvestitionen (sunk costs) notwendig sind.

Bisher war es nicht notwendig die Kosten C zu berücksichtigen. Da ein Spieler die Aktion jedoch nur zu Zeitpunkten $t \in \mathbb{R}_+$ durchführen kann wenn $C(t) \leq \mathcal{B}(t)$ gilt, ist eine genauere Betrachtung von $\mathcal{B}(t)$ und $C(t)$ notwendig.

Annahme 4.8. $C(0) \geq \mathcal{B}(0)$

Annahme 4.9. $\mathcal{B}(t)$ ist nirgends streng fallend in t

Annahme 4.10. $\exists! t \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{B}(t) = C(t)$

Annahme 4.9 bedeutet, dass Spieler für spätere Zeitpunkte nicht weniger Mittel zur Verfügung haben. Annahme 4.10 stellt sicher, dass für jeden Spieler, ab einem Zeitpunkt t zu welchem er die Aktion finanzieren kann, diese finanzierbar bleibt. Abbildung 4.12 zeigt den Führer- und Folgernutzen eines Spielers, sowie dessen Budgetrestriktion und Aktionskosten.

Die Auswirkung der Budgetrestriktion mit den Annahmen 4.8, 4.9, 4.10 auf die erhaltenen Ergebnisse besteht darin, dass nur solche $t \in \mathbb{R}_+$ zulässig sind, die $C(t) \leq \mathcal{B}(t)$ erfüllen. Aus Annahme 4.10 folgt, dass $t \in [\mathbb{B}, \infty)$ sein muss, wobei \mathbb{B} den Schnittpunkt der Budgetrestriktion \mathcal{B} mit der Kostenfunktion C darstellt.

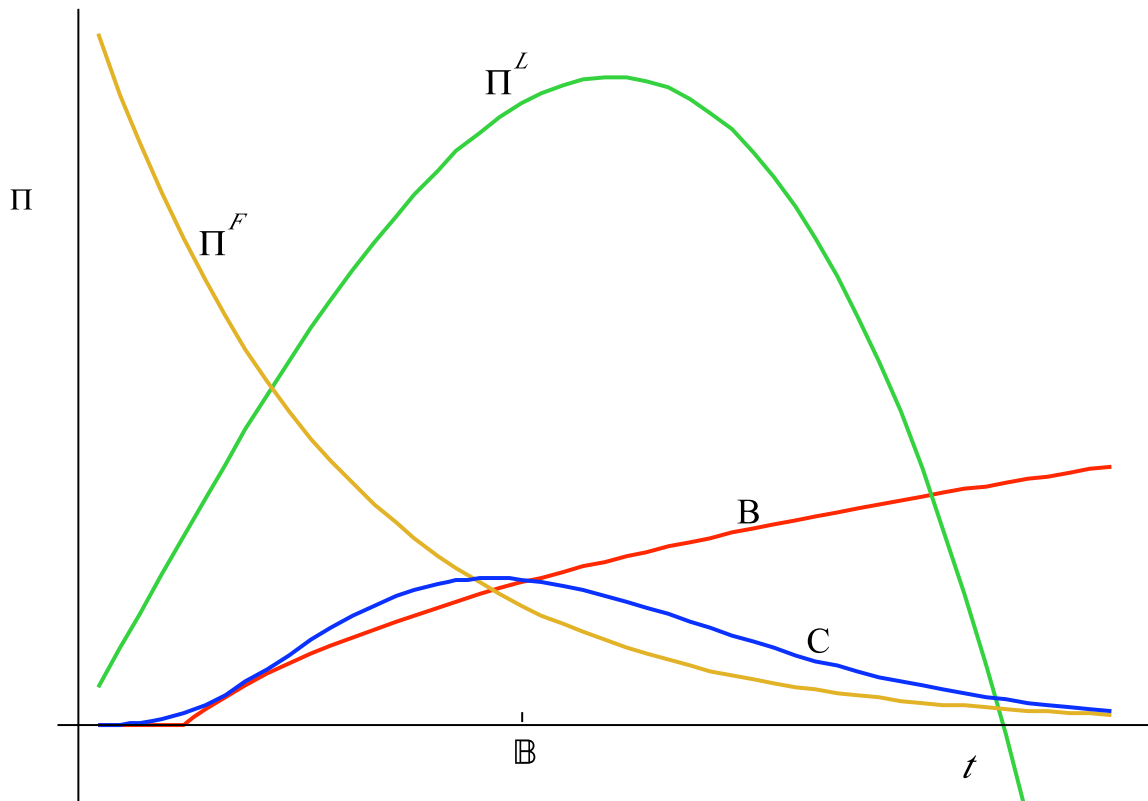


Abbildung 4.12.: Darstellung von Nutzenfunktionen Π^L und Π^F , Kosten $C(t)$ und Budgetrestriktion $B(t)$ eines Spielers

Nicht alle Spieler müssen ab demselben Zeitpunkt die Aktion durchführen können, wodurch die Einführung einer Zeitrestriktion \bar{T}_i sinnvoll ist. Die einzelnen Spieler unterliegen somit einer Restriktion ab wann sie die Aktion durchführen können.

Jeder Spieler i unterliegt nun einer Zeitrestriktion \bar{T}_i , wodurch er erst ab Zeitpunkt t_i mit $t_i \geq \bar{T}_i$ am Spiel teilnehmen kann. Berücksichtigt man, dass jeder Spieler i fortan nur noch Zeitpunkte $t_i \in [\bar{T}_i, \infty) \subseteq \mathbb{R}_+$ wählen kann, lassen sich die bisher gewonnenen Ergebnisse einfach übertragen.

Jeder Spieler hat eine »entscheidende« Restriktion \mathcal{R}_i , für die o.B.d.A. $\mathbb{B}_i > \bar{T}_i$ gilt. Liegt diese Restriktion \mathcal{R}_i vor dem gleichgewichtigen Eintrittszeitpunkt, hat sie keinen Einfluss auf denselben. Liegt sie in \mathcal{T}_i , so verkürzt sich der Reaktionszyklus. Gilt $\mathcal{R}_i \leq$

t^* , so führt dies zu einer Verschiebung des gleichgewichtigen Eintrittszeitpunktes in Richtung des globalen Maximums, was dazu führt, dass der Nutzen nicht fällt. Gilt jedoch $\mathcal{R}_i > t^*$, so führt dies aufgrund der Monotonie dazu, dass der Nutzen nicht steigt.

Kapitel 5.

Entscheidung über Kolumbus' Expedition als Timing Game

Nichts auf der Welt ist so mächtig
wie eine Idee deren Zeit gekommen ist

Viktor Hugo

In Kapitel 4 wurde die theoretische Grundlage für die spieltheoretische Analyse der Entscheidung über den Genehmigungszeitpunkt der Entdeckungsreise des Kolumbus erarbeitet. Mit dem entwickelten Timing Game werden unterschiedliche Situationen analysiert. Aus der detaillierten Darstellung der historischen Ereignisse und den geographischen und wirtschaftlichen Daten im Kapitel 2 werden die für die numerische Berechnung des Timing Game benötigten Informationen abgeleitet. Damit werden die Parameterwerte für die Gleichungen (4.3) und (4.4) bestimmt.

5.1. Historische Informationen

Der benötigte detaillierte historische Hintergrund ist im Kapitel 2, besonders in den Abschnitten 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 und 2.4.5 dargestellt. Die für die numerische Berechnung des Timing Game wichtigsten Informationen sind nachstehend kurz zusammengefasst.

Nachdem Kolumbus seinen Plan mehreren Monarchen unterbreitet hatte, standen sich diese in einer strategischen Situation gegenüber. Jeder war mit der Entscheidung **ob** und **wann** er Kolumbus' Plan genehmigen sollte, konfrontiert. Diese strategische Interaktion zwischen den verschiedenen Monarchen wird mit dem in Kapitel 4 entwickelten Timing Game untersucht.

Kolumbus hat in dem hier vorgestellten Modell keine direkte Einflussmöglichkeit. Seine Einflussnahme beschränkt sich auf das »Pre-Game«, in welchem Kosten, a-priori Erfolgsaussichten und die damit zu erwartenden Gewinne »festgelegt« werden. Er kann nur durch das Senken seiner Forderungen, durch das Vorlegen überzeugenderer und genauerer Pläne oder durch das Aufzeigen zusätzlicher Erträge (Kolumbus zog nie die Entdeckung eines neuen Kontinents, welche die wahre Ertragsquelle werden sollte, in Betracht) den für die Monarchen optimalen Zeitpunkt beeinflussen. Aus der (berechtigten) Furcht, andere könnten seinen Plan schneller und billiger umsetzen (siehe Seite 12), kam für ihn eine detaillierte Vorlage seines Plans nicht in Frage. Auch eine Reduktion seiner Forderungen lehnte er stets ab.

In dem vorgestellten Modell wird davon ausgegangen, dass Kolumbus zum Startzeitpunkt allen beteiligten Monarchen (Spielern) sein Angebot unterbreitet hat und er somit keinen Einfluss auf den Verlauf des Spiels mehr nehmen kann, da weitere Kommunikation zwischen den handelnden Parteien ausgeschlossen wird. Alle Spieler verfügen über vollständige Information und handeln rational. Die zeitliche Differenz zwischen dem jeweiligen Vorlegen des Plans an die Monarchen wird schlussendlich in das Modell eingebaut. Dafür wird für die einzelnen Spieler eine Zeitbeschränkung eingeführt. Jeder Spieler unterliegt einer Restriktion $t_i \geq \bar{T}_i$. Die strategische Situation besteht darin, dass die Monarchen vor das Problem gestellt werden, den Zeitpunkt der Genehmigung zu wählen. Kolumbus jedoch kann nur unter der Flagge eines Monarchen segeln.

Es ist zu beachten, dass jeder Monarch neben der Genehmigung der Mission auch die Möglichkeit hat abzuwarten bis ein Konkurrent Kolumbus finanziert. Nach dem Erfolg dieser Mission kann er eine eigene ausrüsten und als Nachfolger in das »Spiel« eintreten. Die Schätzungen über Kosten und Erträge (siehe Tabelle 2.3 und Seite 29) zeigen ex-post die beträchtlichen Vorteile der Zeitführerschaft.

Für jeden Monarchen entstehen im Falle einer Genehmigung der Mission einerseits Kosten und andererseits erwartete Erträge aus der Expedition, welche die Kosten für ihre Realisierung bereits beinhalten. Diese Erträge setzen sich aus folgenden Teilen zusammensetzen:

- erwartete Erträge aus einer Seeroute nach Asien (Transport- und Handelseinkünfte)
- erwartete Erträge aus Stützpunkten in Asien
- erwartete Erträge aus neu entdeckten Gebieten

Diesen Erträgen stehen folgende Kosten gegenüber:

- monetäre Kosten der Expedition
- Reputationsverlust durch Misserfolg und Gewährung der Forderungen

Die Erfolgsaussichten werden beeinflusst durch die zur Verfügung stehende Technik im Schiffsbau, die nautischen Fähigkeiten und das Wissen über astronomische und geographischen Gegebenheiten, die Einschätzung der Berater, den Unternehmerdrang des Monarchen und die erwartete Reisedauer.

Der Monarch, der als erster die Route nach Ostasien etablieren kann oder neue Gebiete erschließt, ist in der Lage ein Monopol in Europa für die Transportrouten und den Handel mit gewinnbringenden Gütern zu errichten sowie ein Monopson bei den Händlern in Asien und in den neuen Gebieten. Die Aufrechterhaltung dieses Monopols gelingt, bis Seefahrer weiterer Monarchen als Konkurrenz hinzu kommen. Von diesem Zeitpunkt an wird die Seeroute zu einem Oligopol und es besteht Konkurrenz bei der Besetzung neuer Territorien. Durch die Verträge von Alcacovas und Tordesillas (Seite 7f) ist eine Monopolstellung der jeweiligen Monarchen gesichert.

5.2. Numerisches Beispiel

Für die numerische Berechnung muss der Instantannutzen π in den Gleichungen (4.3) und (4.4) spezifiziert werden. Für π wird nachstehende Form angenommen:

$$\pi = (1 - \gamma)(\lambda_A E_{Asien} + \lambda_N E_{Neuland}) \quad (5.1)$$

$$\lambda_A = f_A(\kappa, \nu, \mu, \phi, \theta, \psi_{pro}, \psi_{con}) \quad (5.2)$$

$$\lambda_N = f_N(\kappa, \nu, \mu, \phi, \theta, \psi_{pro}, \psi_{con}) \quad (5.3)$$

mit

γ	monetäre Forderungen von Kolumbus (Tabelle 2.2)
κ	Qualität und Technik im Schiffsbau
ν	nautisches Wissen und Fähigkeiten
μ	Wissen über geographische Gegebenheiten
θ	erwartete Dauer der Reise bis zum Landfall
ϕ	Unternehmerdrang des Monarchen
ψ_{pro}	Einfluss und Einschätzung der positiv gesinnten Berater
ψ_{con}	Einfluss und Einschätzung der negativ gesinnten Berater
E_{Asien}	erwarteter Ertrag aus einer Handelsroute mit Ostasien und aus dort errichteten Stützpunkten
$E_{Neuland}$	erwarteter Ertrag aus neu entdeckten Gebieten

Die benötigten Parameter werden aus den historischen Quellen hergeleitet, erheben jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Alle Parameter sind in der Zeit durch »Wisensupdate« veränderbar. Alle Parameter können bei Führer und Folger unterschiedliche Werte annehmen. Die Funktionen f_A und f_N entsprechen den »subjektiven« Erfolgsaussichten und müssen somit Werte im Intervall $[0, 1]$ annehmen. Beide Funktionen sind in $\kappa, \nu, \mu, \phi, \psi_{pro}$ wachsend und fallend in ψ_{con}, θ .

Die Kosten C setzen sich zusammen aus

$$C = C_{Exp} + C_{Rep} \quad (5.4)$$

mit

- C_{Exp} Kosten der Expedition
- C_{Rep} Reputationsverlust durch Gewährung der Forderungen und durch möglichen Misserfolg

5.2.1. Spezifikation der einzelnen Parameter

Im folgenden Abschnitt werden die Parameter für die Gleichungen (5.1), (5.2) und (5.3) spezifiziert. Der Anspruch, die »wahre« Formel für den erwarteten Ertrag erstellt zu haben, wird nicht erhoben. Vielmehr lässt sich der Verlauf der verwendeten Funktionen aus den historischen Ereignissen herleiten und deren Zusammensetzung plausibel erklären.

Die Parameter für λ lassen sich in zwei Kategorien einteilen: κ, ν, μ als »harte« wissenschaftliche Parameter und $\phi, \psi_{pro}, \psi_{con}$ als »weiche« Parameter. Dazu kommt noch θ als erwartete Reisedauer. Der Zusammenhang der wissenschaftlichen Parameter wird durch ein Produkt ausgedrückt. Ist einer der Parameterwerte 0, so ist eine Umsetzung der Mission nicht möglich (ohne geeignetes Schiff, ohne hinreichende geographische Kenntnisse oder ohne ausreichende nautische Fähigkeiten ist an eine maritime Erkundungsmision nicht zu denken). Zu diesem wird noch ein konstanter Term addiert. Dieser beschreibt das Ausgangsniveau der wissenschaftlichen Parameter. Jeder Parameter κ, ν, μ ist in der Zeit steigend. Die nautischen Fähigkeiten ν waren bereits gut ausgeprägt (Breitensegeln, Jakobsstab, Astrolabium,...) und konvergieren¹ somit am schnellsten gegen 1. Die Erstellung genauer See- und Landkarten

¹ Werte der Parameter $\kappa, \nu, \mu (\in [0, 1])$ sind nicht als Prozentangaben (z.B. erreichter Fortschritt zur »perfekten« Technik), sondern als Einfluss auf den Erfolg der Mission zu verstehen. Schon lange vor GPS waren die navigatorischen Fähigkeiten von Kapitänen so ausgereift, dass kaum eine Verbesserung der Erfolgsaussichten einer Schiffsreise erzielt werden konnte.

war schwierig. Deshalb konvergiert μ , das die Genauigkeit dieser Karten repräsentiert, am langsamsten gegen 1. Qualität und Technik im Schiffsbau, welche durch den Parameter κ gemessen werden, haben ab Mitte des 15. bis Anfang des 16. Jahrhunderts rasche Fortschritte gemacht. Diese Entwicklung verlangsamte sich, weshalb κ langsamer als ν , aber schneller als μ gegen 1 konvergiert.

Für die Darstellung der zeitlichen Entwicklung dieser Parameter wird eine Funktion der Form $\sqrt[t]{a}$ mit $0 < a < 1$ gewählt. Insgesamt erhält man für die »harten« wissenschaftlichen Parameter die Form

$$\frac{1 + (n - 1) \prod_{i=1}^3 \sqrt[t]{a_i}}{n} \quad (5.5)$$

Je kleiner $n \in \mathbb{N}$ ist, desto besser ist die Ausgangslage der wissenschaftlichen Parameter. Während κ, ν ident für λ_A und λ_N sind, ist das geographische Wissen μ für λ_N deutlich geringer als für λ_A und konvergiert deshalb langsamer gegen 1. Wenn auch manche Schriften und Erzählungen auf Neuland hindeuteten, erhielt man erst durch erfolgreiche Expeditionen konkrete Informationen über neue Seewege und Gebiete.

Während die wissenschaftlichen Parameter für den Zeitführer mit der Zeit zunehmen, nehmen diese für den Zeitfolger nur die Werte 1 oder 0 an.

Die Werte für den Einfluss der Berater, welche sich in eine Pro- und eine Kontra-Gruppe aufteilen, sowie der Unternehmerdrang des Monarchen werden am Anfang des Timing Game festgesetzt und bleiben konstant. Hier bestünde die Möglichkeit zusätzlicher Untersuchungen durch den Einbau eines stochastischen Terms. Die »weichen« Einflüsse werden durch die Form

$$\max \{0, b\phi + (1 - b)(\psi_{pro} - \psi_{con})\} \quad \text{mit } 0 \leq \phi, \psi_{pro}, \psi_{con}, b \leq 1 \quad (5.6)$$

abgebildet. b stellt die Gewichtung zwischen König und Beratern dar. Damit die Relation zwischen Gleichung (5.5) und Gleichung (5.6) im zeitlichen Verlauf auch für kleine t erhalten bleibt, wird (5.6) mit $\tanh(t)$ »normiert«. Für den Folger nimmt Gleichung (5.6) den Wert 1 an. Insgesamt erhält man für λ

$$\lambda = \left(\alpha \frac{1 + (n-1) \prod_{i=1}^3 \sqrt[t]{a_i}}{n} + \beta \max \{0, b\phi + (1-b)(\psi_{pro} - \psi_{con})\} \tanh(t) \right) e^{-\theta^2} \quad (5.7)$$

$$\text{mit } \alpha + \beta = 1$$

α und β stellen die Gewichtung zwischen den »harten« wissenschaftlichen Parametern und den »weichen« Parametern dar. Für die numerische Berechnung werden α und β als konstant angenommen. θ ist die erwartete Reisedauer in Jahren.

Die erwarteten Erträge einer erfolgreichen Mission müssen geschätzt werden. Sind diese konsistent, so sind sie für Zeitführer und -folger ident.

Die Expeditionskosten C_{Exp} sind bekannt und werden aus Tabelle 2.3 entnommen. Der Kostenteil C_{Rep} , der sich durch Gewährung der Forderungen ergibt, muss geschätzt werden. Für die numerische Berechnung wird folgende Form angenommen

$$C_{Rep} = \eta\gamma(E_{Asien} + E_{Neuland}) + \zeta(C_{Exp}) \quad (5.8)$$

mit

$$\begin{array}{ll} \eta \in [0, 1] & \text{Bedeutung der monetären Forderungen} \\ \zeta > 0 & \text{Bedeutung der politischen Forderungen} \end{array}$$

γ beschreibt den monetären Anteil von Kolumbus aus den Erträgen der Mission. $\gamma(E_{Asien} + E_{Neuland})$ beschreibt somit die Ertragsverminderung durch monetäre Forderungen im Falle eines Erfolges. Ist $\eta = 1$ so bedeutet dies, dass der gesamte durch Zugeständnisse entgangene Ertrag als »Kosten« betrachtet wird. Ist $\eta = 0$, so wird dem durch Kolumbus' Forderungen nicht lukrierten Ertrag keine Bedeutung beigemessen. ζ ist ein »Strafparameter« für die politischen Forderungen.

5.2.2. Rechenbeispiele

Für die Rechenbeispiele werden alle notwendigen Parameterwerte aus den historischen Grundlagen (Kapitel 2) hergeleitet. Die Beträge für erwarteten Erträge und für die Kosten werden in Millionen Maravedis angegeben; die Zeit, dargestellt durch den Parameter t , in Jahren. Es werden die optimalen Genehmigungszeitpunkte für die Fälle

- symmetrischer Nutzen ohne Folger
- asymmetrischer Nutzen ohne Folger
- symmetrischer Nutzen mit Folger
- asymmetrischer Nutzen mit Folger
- Berücksichtigung von Restriktionen

berechnet.

Symmetrischer Nutzen ohne Folger

Die verwendeten Parameterwerte für das Timing Game mit symmetrischem Nutzen ohne Nachfolgemöglichkeit sind Tabelle 5.1 zu entnehmen und werden in Anhang A.2 hergeleitet und erklärt. Diese Werte werden für Portugal auch im Timing Game mit asymmetrischem Nutzen verwendet.

$\kappa = \sqrt[4]{0.025}$	$\mu_a = \sqrt[4]{0.001}$	$\nu = \sqrt[4]{0.4}$	$\mu_n = \sqrt[4]{1 \times 10^{-8}}$
$\phi = 0.8$	$\psi_{pro} = 0.4$	$\psi_{con} = 1$	$G_a = 100$
$\gamma = 0.1$	$\eta = 0.8$	$\zeta = 1.2$	$G_n = 10$
$\alpha = 0.4$	$\beta = 0.6$	$\theta = 0.25$	$r = 0.03$
$\Pi_0 = 4$	$\rho = 0.9$	$n = 10$	$b = \frac{2}{3}$

Tabelle 5.1.: Werte für Timing Game mit symmetrischem Nutzen (Portugal)

Die Expeditionskosten C_{Exp} belaufen sich auf 1.167542 Millionen Maravedis (siehe Tabelle 2.3). Die Werte aus Tabelle 5.1 in Gleichung (4.3) eingesetzt liefern

$$\begin{aligned} \Pi(t, >) = & \left(\left(90 \left(0.4 \frac{1 + 9\sqrt[4]{0.1 \times 10^{-4}}}{10} + \frac{1}{5} \tanh(t) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 9 \left(0.4 \frac{1 + 9\sqrt[4]{0.1 \times 10^{-10}}}{10} + \frac{1}{5} \tanh(t) \right) \right) \right. \\ & \left. e^{-0.0625t} - 3.6 \right) \frac{100}{3} e^{-0.03t} - 11.3685924 e^{-0.03t} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Der gleichgewichtige Genehmigungszeitpunkt im Timing Game mit symmetrischem Nutzen ohne Nachfolgemöglichkeit liegt bei $t = 0.02$. Diese Ergebnisse beruhen auf einer sehr konservativen Schätzung der erwarteten Erträge. Die Haupterträge sind durch die a-priori nicht erwarteten Rohstofflieferungen aus den »neuen Gebieten« zustande gekommen. Abbildung 5.1 zeigt den durch Gleichung 5.9 bestimmten Verlauf von $\Pi(t, >)$ für Portugal (im symmetrischen Fall gilt dieses $\Pi(t, >)$ für alle Monarchen).

Anmerkung: Als Lösung des optimalen Kontrollproblems aus Gleichung (4.1) mit Gleichung (5.9) für einen einzigen Monarchen ergibt sich $t = 12.80$ als optimaler Genehmigungszeitpunkt.

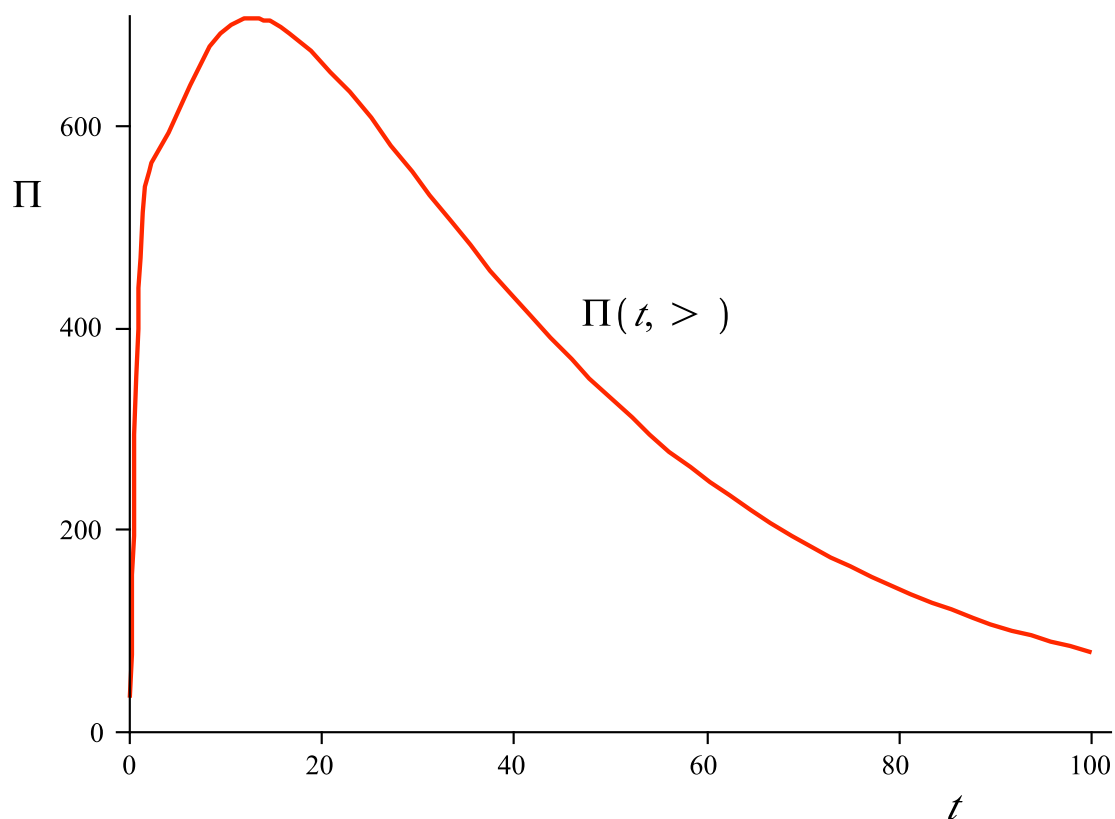


Abbildung 5.1.: Graphische Darstellung von Gleichung (5.9)

Asymmetrischer Nutzen ohne Folger

In Tabelle 5.2 sind die Werte für die Nutzenfunktion Kastiliens als Zeitführer aufgelistet (für die Erklärung der Werte siehe Anhang A.2).

Untersucht man das Timing Game mit asymmetrischem Nutzen ohne Nachfolgemöglichkeit, wobei die Nutzenfunktionen sich aus den Werten der Tabellen 5.1 und 5.2 ergeben, so liegt der gleichgewichtige Genehmigungszeitpunkt nach Satz 4.2 bei $t = 0.05$.

$\kappa = \sqrt[3]{0.025}$	$\mu_a = \sqrt[3]{0.001}$	$\nu = \sqrt[3]{0.4}$	$\mu_n = \sqrt[3]{1 \times 10^{-8}}$
$\phi = 0.5$	$\psi_{pro} = 0.7$	$\psi_{con} = 0.6$	$G_a = 100$
$\gamma = 0.1$	$\eta = 1$	$\zeta = 0.8$	$G_n = 10$
$\alpha = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{2}{3}$	$\theta = \frac{1}{3}$	$r = 0.03$
$\Pi_0 = 4$	$\rho = 0.9$	$n = 10$	$b = \frac{2}{3}$

Tabelle 5.2.: Werte der Nutzenfunktion Kastiliens als Zeitführer

Symmetrischer Nutzen mit Folger

Die Monarchen haben symmetrische Nutzenfunktionen, der Zeitführernutzen ergibt sich aus den Werten in Tabelle 5.1. Der Zeitfolgernutzen ist durch die Werte in Tabelle 5.3 festgelegt (Erklärung siehe Anhang A.2).

$\kappa = 1$	$\mu_a = 0$	$\nu = 1$	$\mu_n = 1$
$\phi = 1$	$\psi_{pro} = 1$	$\psi_{con} = 0$	$G_a = 0$
$\gamma = 0.1$	$\eta = 1$	$\zeta = 4$	$G_n = 30$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{1}{10}$	$r = 0.03$
$\Pi_0 = 4$	$\rho = 0.9$	$n = 10$	$b = \frac{2}{3}$

Tabelle 5.3.: Werte der Parameter für den Zeitfolger

Mit Satz 4.3 erhält man den gleichgewichtigen Genehmigungszeitpunkt $t = 5.98$. Betrachtet man den Fall, dass das Nachfolgen nicht in infinitesimalen Abständen, sondern erst mit einem Abstand δ möglich ist, so verändert sich der gleichgewichtige Genehmigungszeitpunkt entsprechend Satz 4.4. Da der Zeitfolger bis zur Rückkehr der Expedition abwarten wird, ist es plausibel $\delta \geq 2\theta$ anzunehmen. Setzt man $\delta = \frac{3}{4}$, so ergibt sich $t = 5.62$ als gleichgewichtiger Genehmigungszeitpunkt. Abbildung 5.2 zeigt den aus Gleichung (5.9) und Werten der Tabellen 5.1 und 5.3 bestimmten Verlauf von $\Pi(t, >)$ und $\Pi(t, <)$.

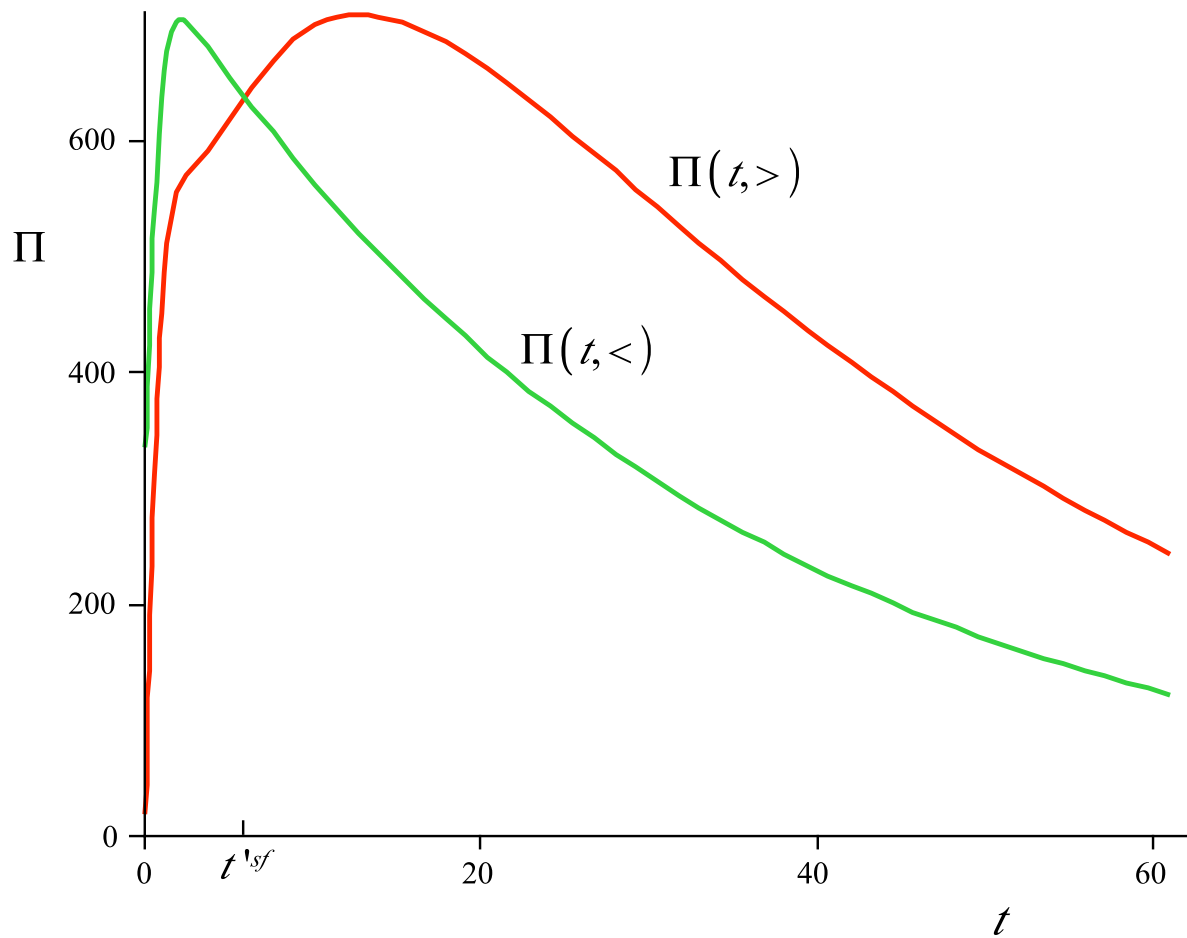


Abbildung 5.2.: Nutzenfunktionen für Zeitführer und -folger bei symmetrischem Nutzen mit den Werten aus Tabellen 5.1 und 5.3

Asymmetrischer Nutzen mit Folger

Im diesem Rechenbeispiel werden als dritter und vierter Spieler noch die Monarchen in Paris und London hinzugefügt. Die Nachfolgemöglichkeit, die den Monarchen zur Verfügung steht, sei für alle ident. Der Zeitführernutzen ergibt sich aus den Werten in Tabelle 5.4. Der Zeitfolgernutzen ergibt sich aus den Werten in Tabelle 5.2 (Erklärung Anhang A.2).

Portugal	Kastilien	England	Frankreich
$\kappa = \sqrt[t]{0.025}$	$\kappa = \sqrt[t]{0.025}$	$\kappa = \sqrt[t]{0.025}$	$\kappa = \sqrt[t]{0.025}$
$\mu_a = \sqrt[t]{0.001}$	$\mu_a = \sqrt[t]{0.001}$	$\mu_a = \sqrt[t]{0.001}$	$\mu_a = \sqrt[t]{0.001}$
$\mu_n = \sqrt[t]{1 \times 10^{-8}}$	$\mu_n = \sqrt[t]{1 \times 10^{-8}}$	$\mu_n = \sqrt[t]{1 \times 10^{-8}}$	$\mu_n = \sqrt[t]{1 \times 10^{-8}}$
$\nu = \sqrt[t]{0.4}$	$\nu = \sqrt[t]{0.4}$	$\nu = \sqrt[t]{0.4}$	$\nu = \sqrt[t]{0.4}$
$\alpha = 0.4$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$
$\phi = 0.8$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.75$
$\psi_{pro} = 0.4$	$\psi_{pro} = 0.7$	$\psi_{pro} = 0.1$	$\psi_{pro} = 0.5$
$\psi_{con} = 1$	$\psi_{con} = 0.6$	$\psi_{con} = 1$	$\psi_{con} = 0.2$
$\beta = 0.6$	$\beta = \frac{2}{3}$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.5$
$G_a = 100$	$G_a = 100$	$G_a = 100$	$G_a = 100$
$G_n = 10$	$G_n = 10$	$G_n = 10$	$G_n = 10$
$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.1$
$\eta = 0.8$	$\eta = 1$	$\eta = 0.6$	$\eta = 0.9$
$\zeta = 1.2$	$\zeta = 0.8$	$\zeta = 1$	$\zeta = 1.5$
$\theta = 0.25$	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = \frac{1}{8}$	$\theta = 0.4$
$r = 0.03$	$r = 0.03$	$r = 0.03$	$r = 0.03$
$\Pi_0 = 4$	$\Pi_0 = 4$	$\Pi_0 = 4$	$\Pi_0 = 4$
$\rho = 0.9$	$\rho = 0.9$	$\rho = 0.9$	$\rho = 0.9$
$n = 10$	$n = 10$	$n = 10$	$n = 10$
$b = \frac{2}{3}$	$b = \frac{2}{3}$	$b = \frac{2}{3}$	$b = \frac{2}{3}$

Tabelle 5.4.: Parameterwerte des Timing Game mit vier Teilnehmern

In diesem Fall erhält man als gleichgewichtigen Genehmigungszeitpunkt $t = 4.79$. Gestattet man in diesem Fall das Nachfolgen erst mit einem Abstand $\delta = 1$, so ergibt sich als gleichgewichtiger Genehmigungszeitpunkt $t = 4.17$. In Abbildung 5.3 sind

die Nutzenfunktionen der vier Monarchen als Führer, sowie $\Pi(t, <)$ als Folgenutzen aller dargestellt.

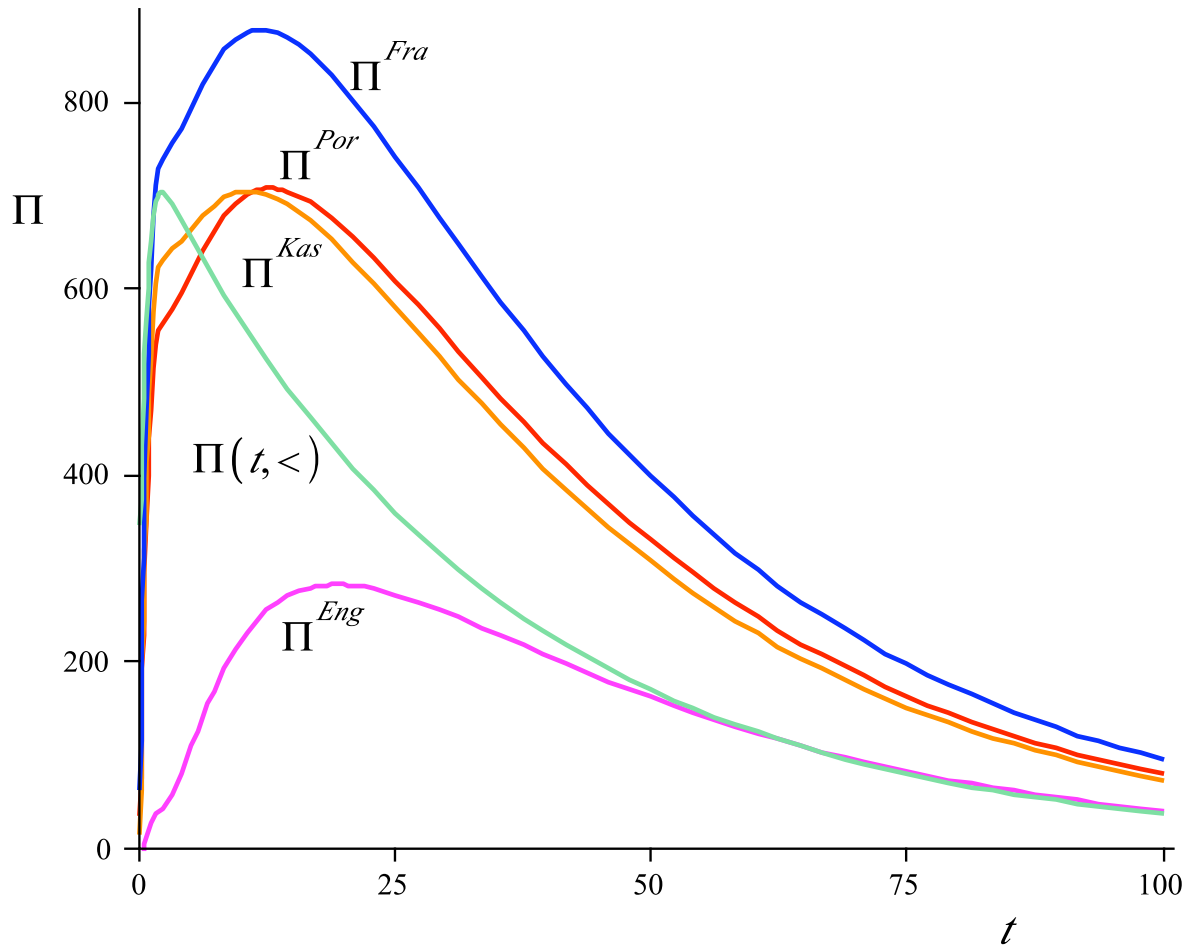


Abbildung 5.3.: Nutzenfunktionen der vier Monarchen

Restriktionen

Als letztes Rechenbeispiel wird das Timing Game mit Restriktion betrachtet. Um die Übersichtlichkeit der zugehörigen Abbildung zu bewahren, wird symmetrischer Nutzen der Monarchen gewählt und als bindende Restriktion die Budgetrestriktion β angenommen. Der Budgetrestriktion stehen die Expeditionskosten in Maravedis

gegenüber. Sei die Budgetrestriktion der Monarchen so festgelegt, dass pro Jahr 60 000 Maravedis für die Expedition beiseite gelegt und zu einem Zinssatz (wird gleichgesetzt mit der Diskontrate r) angelegt werden können, ergibt sich $t = 10.42$ als gleichgewichtiger Genehmigungszeitpunkt.

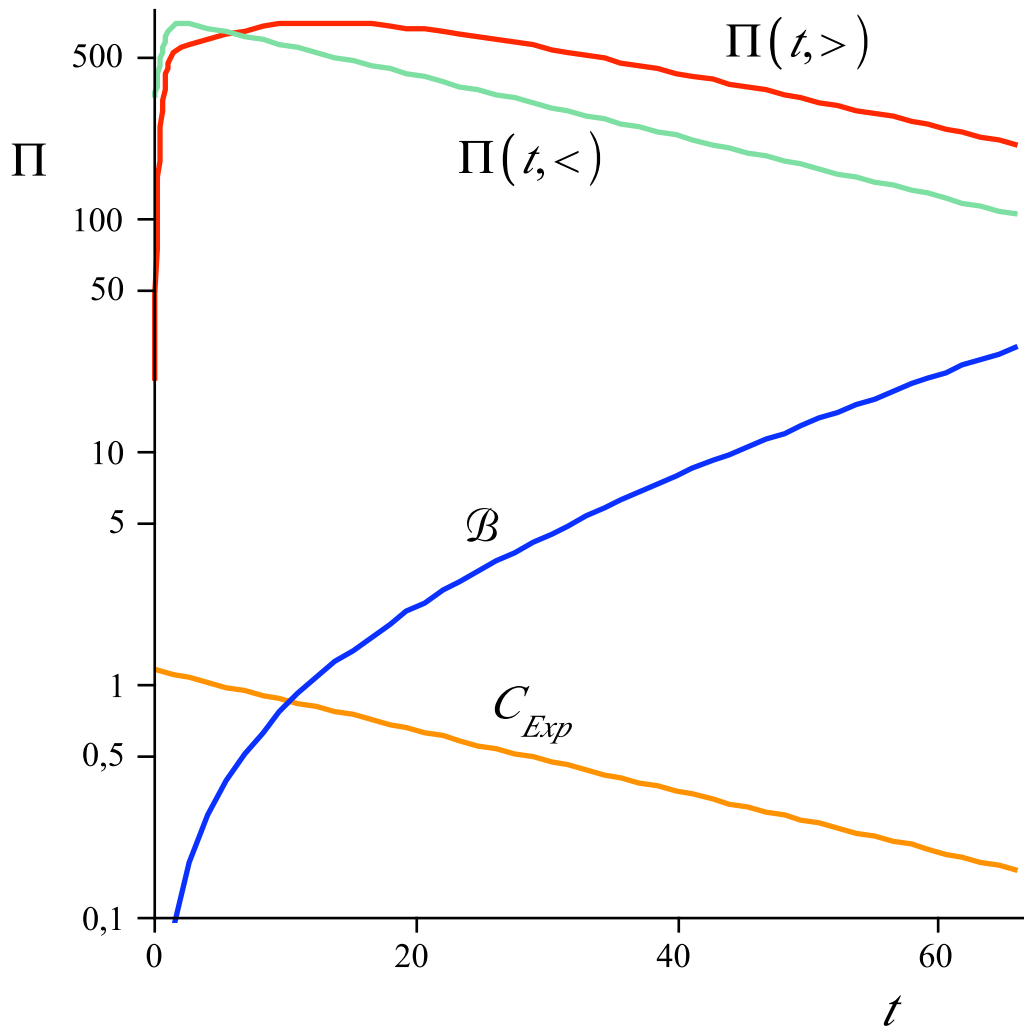


Abbildung 5.4.: Budgetrestriktion und Kosten der Mission

Abbildung 5.4 zeigt die Expeditionskosten C_{Exp} , Budgetrestriktion \mathcal{B} , Führernutzen $\Pi(t, >)$ und Folgernutzen $\Pi(t, <)$. Die Ordinate ist in logarithmischer Skala aufge-

tragen, damit der Schnittpunkt der Expeditionskosten mit der Budgetrestriktion gut erkennbar ist.

5.3. Schlussbetrachtungen

Aus dem Vergleich der Ergebnisse der numerischen Beispiele mit den historischen, lassen sich mehrere Schlussfolgerungen ziehen. Unter der Annahme, dass die tatsächlichen Nutzenfunktionen der Monarchen jenen aus Abschnitt 5.2 und die Werte der Parameter aus den Tabellen 5.4 und 5.3 der Wirklichkeit entsprechen, haben alle vier Monarchen, was die Zustimmung zu Kolumbus' Plan betrifft, richtig gehandelt. Die Zusage von Anna von Beaujeu an Kolumbus' Bruder Bartolomäus war ebenso optimal wie die Absage von Heinrich. Für Heinrich war der Vorteil einer Zeitfolgerschaft überwiegend, während Anna erkannt hatte, dass es optimal ist Kolumbus zu unterstützen. Während diese beiden Monarchen in der Frage der Zustimmung richtig gehandelt haben, begingen sie jedoch den Fehler, als Zeitfolger nicht unverzüglich eine eigene Mission aufzustellen.

Kastilien und Portugal haben richtig bezüglich ihrer Zustimmung für Kolumbus' Plan gehandelt. João hatte unter der Annahme, er würde sich in keiner Konkurrenzsituation befinden, mit dem Aufschub der Genehmigung die richtige Entscheidung getroffen. Falls zutreffend (Seite 12), war auch die Entscheidung eine Mission ohne Kolumbus zu genehmigen richtig, da diese mit geringeren Kosten verbunden war. Da diese Mission misslang und Kastilien mittlerweile als Konkurrent hinzugekommen war, handelte João weiterhin optimal indem er versuchte Kolumbus wieder nach Portugal zu holen (siehe Fußnote 70). Da dies misslang und Portugal somit nicht die für sich optimale Position des Zeitführers einnehmen konnte, handelte João im Gegensatz zu Heinrich und Karl optimal, indem er unverzüglich eine eigene Expedition ausrüsten ließ und als Zeitfolger an der Erkundung der neu entdeckten Kontinente im Rahmen des Vertrages von Tordesillas teilnahm.

Isabella handelte optimal; im Gegensatz zu Portugal, Frankreich und England gelang es ihr die Zeitführerschaft zu erlangen. Aufgrund der durch die Reconquista verur-

sachten Budgetrestriktion konnte die Genehmigung des Plans nicht eher erfolgen. Als die Budgetrestriktion kein Hindernis mehr darstellte, kam es, noch ehe Kolumbus ihr Reich Richtung Frankreich verlassen konnte, zur Kapitulation von Santa Fé. Jetzt erhielt Kolumbus die Genehmigung seiner Forderungen und die Zusage für seine Expedition.

Ausdrücklich wird abermals darauf hingewiesen, dass die verwendeten Gleichungen nicht den Anspruch erheben das damalige Entscheidungsproblem exakt wiederzugeben. Es handelt sich ausschließlich um plausibel aus den historischen Quellen hergeleitete Daten, die als Basis für die numerischen Beispiele benötigt wurden. Die hier getroffenen Schlussfolgerungen und erlangten Ergebnisse basieren ausschließlich darauf und gehen somit von der ex-ante Korrektheit der einzelnen Parameter in den Nutzenfunktionen und ihrer Spezifikationen aus. Aufgrund mangelhafter und unvollständiger historischer Nachweise stehen die gewählten Werte für die Parameter, welche zu diesen Schlussfolgerungen führen, nicht außer Zweifel. Ex-post sind manche Parameterwerte nicht haltbar, da die Entdeckung zweier neuer Kontinente ungeahnte Reichtümer lieferte und somit entsprechende Missionen schon früher gewagt hätten werden sollen. Nachstehend sind die optimalen Genehmigungszeitpunkte der numerischen Beispiele zusammengestellt. t gibt die Zeit in Jahren ab der ersten Vorlage des Plans an João an.

Symmetrischer Nutzen ohne Folger	0.02
Asymmetrischer Nutzen ohne Folger	0.05
Symmetrischer Nutzen mit Folger ohne Mindestzeitabstand	5.98
Symmetrischer Nutzen mit Folger mit Mindestzeitabstand	5.62
Asymmetrischer Nutzen mit Folger ohne Mindestzeitabstand	4.79
Asymmetrischer Nutzen mit Folger mit Mindestzeitabstand	4.17
Berücksichtigung der Budgetrestriktion	10.42
<i>Konrollproblem</i>	12.80

Tabelle 5.5.: Optimale Genehmigungszeitpunkte

In Tabelle 5.5 sind Ergebnisse der praxisrelevanten Berechnungen zusammengefasst. Für einen konsistenten Vergleich mit den in Kapitel 4 erarbeiteten Fällen sind in Tabelle 5.6 die Ergebnisse aller Fälle mit Frankreich (im vorliegenden numerischen Beispiel nimmt Frankreich die Rolle des **ehesten** Spielers ein) als Spieler für die symmetrischen Fälle und mit Mindestzeitabstand $\delta = 1$ berechnet.

Symmetrischer Nutzen ohne Folger	0.00
Symmetrischer Nutzen ohne Folger mit Mindestzeitabstand	0.00
Asymmetrischer Nutzen ohne Folger	0.00
Asymmetrischer Nutzen ohne Folger mit Mindestzeitabstand	0.00
Symmetrischer Nutzen mit Folger ohne Mindestzeitabstand	2.07
Symmetrischer Nutzen mit Folger mit Mindestzeitabstand	1.89
Asymmetrischer Nutzen mit Folger ohne Mindestzeitabstand	5.78
Asymmetrischer Nutzen mit Folger mit Mindestzeitabstand	5.18
Berücksichtigung der Budgetrestriktion	10.42
<i>Konrollproblem</i>	11.95

Tabelle 5.6.: Optimale Genehmigungszeitpunkte mit Frankreichs Nutzenfunktion für die symmetrischen Fälle

Kapitel 6.

Differentialspiel

Da ich den Ruhm der Helden der alten Zeiten entfalte
die ich dem wohlgezimmerten Schiff der palladischen Argo
durch die Mündung des Pontus und zwischen den schroffen Kyane
durchgesetzt, um dass Goldene Vließ von Kolchis zu holen

Die Argonauten des Apollonius von Rhodos

In Kapitel 3 und Kapitel 5 wurden spieltheoretische Analysen der historischen Entscheidungsprozesse bis zur Kapitulation von Santa Fé durchgeführt. Das folgende Kapitel untersucht Kolumbus' Schiffsreise mit spieltheoretischen Mitteln. Es wird Kolumbus' Fahrt von Palos de la Frontera nach San Salvator anhand eines Differentialspiels modelliert und analysiert. Mittels eines Differentialspiels kann die »kontinuierliche« Spielsituation auf hoher See übersichtlich erfasst und untersucht werden. Ein Differentialspiel wird charakterisiert durch die Zuweisung von Nutzenfunktionen an alle Spieler und durch Differentialgleichungen für die Zustandsvariablen, welche die Systemdynamik beschreiben. Kapitel 2 und Kolumbus' Bordbuch (Grün, 1970) liefern die historischen Grundlagen für die Modellierung des Differentialspiels. Die verwendeten Nutzenfunktionen und Zustandsgleichungen erheben nicht den Anspruch die historische Situation exakt wiederzugeben. Sie sind mathematische Formulierungen, welche sich aus den historischen Quellen herleiten und plausibel erklären lassen. Mathematisch gesehen entsprechen sie Einsteins Forderung »So einfach wie möglich – aber nicht einfacher«.

Die Grundlagen der Differentialspiele liegen bei Rufus Isaacs, welcher sich hauptsächlich mit militärischen Fragestellungen beschäftigt, diese in seinem Werk (Isaacs, 1975) behandelt und die Theorie der Differentialspiele begründet. In (Mehlmann, 1985, 1988) werden dynamische Konfliktsituationen als Differentialspiele und die bis dahin erweiterte Theorie der Differentialspiele als Zweig der Spieltheorie dargestellt. (Dockner et al., 2000) liefert eine zusammenhängende Erläuterung der Theorie der Differentialspiele und der dazugehörigen mathematischen Werkzeuge. Ökonomische Beispiele veranschaulichen die Anwendungsmöglichkeiten von Differentialspielen. Des weiteren werden die Verbindungen der Theorie der Differentialspiele zu anderen Gebieten, insbesondere zur Kontrolltheorie und Ökonomie, dargestellt. Die Theorie der Differentialspiele wird in der vorliegenden Arbeit nicht erneut vorgestellt, die benötigten Theoreme werden den angeführten Werken entnommen. Beispiele zu interessanten Fragestellungen sind unter anderem in den Artikeln (Chen and Leitmann, 1980; Mehlmann and Willing, 1983; Mehlmann, 1994; Jørgensen and Zaccour, 2007; Feichtinger and Novak, 2008; Jørgensen et al., 2009) enthalten.

6.1. Einführung

Die an der Reise teilnehmenden Personen werden in zwei Gruppen eingeteilt. Auf der einen Seite jene, allen voran Kolumbus, welche bei der Etablierung einer Handelsroute bzw. der Entdeckung neuer Gebiete hohe Erträge zu erwarten haben, beispielsweise in Form von übertragenen Rechten durch die Krone. Diese Gruppe charakterisiert sich dadurch, dass für sie nur ein erfolgreicher Abschluss der Mission von Bedeutung ist. Auf der anderen Seite stehen die Teilnehmer der Mission (Matrosen) deren Ziel die erfolgreiche Rückkehr nach Europa ist. Ihre monetäre Entlohnung fand vorab durch die erhaltene Heuer statt, wodurch dieser konstante Teil nicht weiter für die Nutzenmaximierung berücksichtigt werden muss. Die Einteilung in zwei Gruppen gestattet es, die Überfahrt als 2-Personen Differentialspiel zu modellieren, wobei eine Gruppe durch Kolumbus, die andere durch einen Seemann repräsentiert wird. Das Differentialspiel ist auf ein endliches Zeitintervall $[0, T]$ beschränkt, da die Expedition

nur eine begrenzte Zeit auf hoher See verbringen kann. Dies ist durch die Begrenzung an mitgeführten Versorgungsgütern gegeben.

6.2. Das Modell

Für Spieler 1, fortan Kolumbus, liegt das entscheidende Ereignis in einem Landfall in Asien bzw. in neuen Gebieten. Das Eintreten dieses Ereignisses geschieht zu einem stochastischen Zeitpunkt, somit lässt sich eine Zustandsvariable $x(t)$ definieren, welche die Wahrscheinlichkeit eines Landfalls in Asien oder in neuen Gebieten im Zeitintervall $[0, t)$ beschreibt. Seiner Überzeugung von der Kugelgestalt der Erde und von der Richtigkeit seines Planes folgend geht Kolumbus davon aus, dass $x(t)$ monoton gegen 1 konvergiert. Nimmt $x(t)$ ab einem gewissen Zeitpunkt den Wert 1 an, so entspricht $x(t)$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Landfalls. Erreicht $x(t)$ bis zum Zeitpunkt T nicht den Wert 1, so handelt es sich um eine abgeschnittene Wahrscheinlichkeitsverteilung. $\dot{x}(t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Landfalls zum Zeitpunkt t unter der Bedingung, dass bis zum Zeitpunkt t kein Landfall stattgefunden hat¹. Kolumbus vermutet, dass er mit der Vergabe von Vergünstigungen² die Wahrscheinlichkeit einer Landsichtung und damit eines Landfalls positiv beeinflussen kann. Diese Beeinflussung beruht auf der Annahme, dass die Mannschaft ihre Aufgaben nach bestem Wissen und Gewissen ausführt. Daraus folgt, dass sie bei Erhalt von zusätzlichen Versorgungsgütern (Proviand) ihren Aufgaben besser nachgehen kann. Die Vergünstigungen werden durch die Kontrollvariable u repräsentiert. Unter diesen Prämissen lässt sich für $x(t)$ die Zustandsgleichung

$$\dot{x} = (1 + u)(1 - x) \ ; \ x(0) = x_0 \tag{6.1}$$

¹ Aufgrund der Kugelgestalt der Erde und der ausgereiften Fähigkeit des Breitensegelns muss die Flottille bei Beibehaltung des Kurses nach hinreichender Zeit Asien oder neue Gebiete vorfinden. Notwendig für diese Hypothese ist das Mitführen von ausreichend Proviand und Ersatzteilen sowie das Nichteintreten von »Höherer Gewalt«, welche zum Untergang der Schiffe führen würde.

² Vergünstigungen werden hier als Überbegriff für Erleichterungen wie zusätzliche Verköstigungen, Rum, verschleißbares Material sowie Prämien für Spieler 2 (Spieler 2 repräsentiert in diesem Modell die Mannschaftsmitglieder, welche in die zweite Gruppe fallen) verstanden.

definieren³. Der Anfangszustand x_0 liegt Kolumbus' Einschätzung nach nahe bei 0, da von der Küste aus keine neuen Inseln sichtbar sind.

Spieler 2, fortan Seemann (siehe Fußnote 2), sieht das für ihn entscheidende Ereignis in einer erfolgreichen Rückkehr nach Europa. Analog zum Landfall in Asien oder neuen Gebieten lässt sich eine Zustandsvariable $y(t)$ definieren, welche die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Rückkehr nach Europa im Zeitintervall $[0, t)$ beschreibt. Ebenso wie $x(t)$ entspricht $y(t)$ einer (abgeschnittenen) Wahrscheinlichkeitsverteilung und $\dot{y}(t)$ der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte einer erfolgreichen Rückkehr zum Zeitpunkt t , gegeben dass diese bis zum Zeitpunkt t noch nicht stattgefunden hat. Der Seemann geht von der Annahme aus, dass er durch Störaktionen⁴ v diese positiv beeinflussen kann⁵. Der Parameter v stellt die Kontrollvariable des Seemanns dar. Daraus lässt sich für $y(t)$ die Zustandsgleichung

$$\dot{y} = v(1 - y) ; y(0) = y_0 \quad (6.2)$$

formulieren⁶.

Die Gesamtnutzen der Spieler im Differentialspiel werden als Integral dargestellt. Der Integrand beschreibt den Instantannutzen der Spieler, wodurch das Integral über den betrachteten Zeitraum den zu maximierenden Gesamtnutzen der Spieler darstellt. In diesem Basismodell wird ein ausschließlich an der erfolgreichen Rückkehr nach Europa orientierter Seemann betrachtet. Der Nutzen des Seemanns besteht aus zwei Teilen. Zum Ersten erwartet er sich einen Nutzen aus einer durch Meuterei erreichten

³ Im Rahmen der Beschäftigung mit weiteren Differentialspielen stellte sich heraus, dass in einem der Anwendungsbeispiele in (Mehlmann, 1988) eine ähnliche Zustandsgleichung wie Gleichung (6.1) bzw. Gleichung (6.2) verwendet wird. Bei (Mehlmann, 1988) wird im Rahmen der Modellierung des Faust'schen Teufelspakts als Differentialspiel $\dot{x} = cu(1 - x)$ als Zustandsgleichung für den »höchsten Augenblick« verwendet.

⁴ Die Störaktionen sind hier als Überbegriff für Meuterei, Sabotage, Streik, Unmut u.Ä. aufzufassen. Beachtet man, dass Seemann für eine Gruppe steht, so kann der Wert von v auch als Anteil der Gruppe (hier Mannschaft), welcher sich den Störaktionen anschließt, interpretiert werden.

⁵ Betrachtet man die Kontrollvariable v als Anteil der Mannschaft, der sich an einer Meuterei beteiligt, so ist die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Rückkehr nach Europa umso höher, je mehr Mannschaftsmitglieder sich an der Meuterei beteiligen.

⁶ Nicht notwendig aber sinnvoll ist $x_0 < y_0$ als Relation zwischen den Anfangswerten der beiden Zustandsvariablen, da zum Zeitpunkt $t = 0$ eine erfolgreiche Rückkehr wahrscheinlicher ist als ein Landfall.

Rückkehr, da er die Flottille und das erworbene Wissen über den Atlantischen Ozean »verkaufen« kann. Nimmt man diese Erträge als konstant⁷ an, so müssen diese mit der entsprechenden Eintrittswahrscheinlichkeitsdichte \dot{y} gewichtet werden. Zudem hängt der Nutzen des einzelnen Seemanns negativ von der Anzahl der an der Meuterei beteiligten Personen ab. Der zweite Teil des Instantannutzen des Seemanns besteht aus den Kosten, die sich durch seine Kontrollvariable ergeben ab. Durch Störaktionen muss er mit Repressalien⁸ rechnen. Die Nutzenfunktion des Seemanns, welche diesen Rahmenbedingungen genügt, lässt sich wie folgt ansetzen:

$$J_2 = \int_0^T [(1 - v)\dot{y} - cv(1 - y)]dt \quad \text{mit } 0 \leq c \leq 1 \quad (6.3)$$

Der Integrand aus Gleichung (6.3) entspricht dem erwarteten Instantannutzen des Seemanns zum Zeitpunkt t .

Kolumbus' Nutzenfunktion ist ebenfalls durch zwei Teile bestimmt. Erstens durch Kosten, die durch seine Kontrollvariable u (Verteilung von Verpflegung, Ausrüstung,...) entstehen. Da Kolumbus in Indien und den neuen Gebieten ein »El Dorado« erwartet, fallen diese Kosten nur an, bis es zu einem Landfall kommt. Mathematisch werden diese Kosten durch

$$u^2(1 - x) \quad (6.4)$$

dargestellt. Der zweite Teil der Nutzenfunktion ergibt sich aus den Erträgen eines Landfalls⁹. Zusammenfassend lässt sich für Kolumbus

$$J_1 = \int_0^T [\dot{x} - u^2(1 - x)]dt. \quad (6.5)$$

als zu maximierende Nutzenfunktion konstruieren. Ebenso wie beim Seemann beschreibt der Integrand aus Gleichung (6.5) den Instantannutzen von Kolumbus.

⁷ Für das modellierte Beispiel werden sie 1 gesetzt.

⁸ Die Kosten für Störaktionen erhalten einen Faktor c , $0 \leq c \leq 1$, da nur bei Störaktionen deren Verursacher bekannt sind, die Strafaktionen ausschließlich die »Schuldigen« treffen.

⁹ Diese werden in dem vorliegenden Beispiel auf 1 gesetzt wodurch sich \dot{x} als Nutzen ergibt.

6.3. Analyse des Modells

Das eingeführte Modell wird auf Nash-Gleichgewichte mit Strategien in offener Schleife (*open loop*) untersucht. Da ein Differentialspiel mit separablen Zuständen (*state-separable game*), auch Spiel mit linearen Zuständen (*linear state game*) genannt, vorliegt, ist jede Lösung in offener Schleife auch eine Lösung in Rückkopplung (*Markov perfect oder feedback*). Die Einführung dieser Klasse von Spielen und der Beweis der Äquivalenz zwischen Lösungen in offener Schleife und Rückkopplung ist bei (Dockner et al., 2000) in Kapitel 7.2 nachzulesen. Die Kontrollvariablen beider Spieler werden auf $[0, 1]$ normiert und entsprechen dem Anteil der zum Zeitpunkt t maximal zur Verfügung stehenden Vergünstigungen sowie der Intensität von Störaktionen zum Zeitpunkt t .

Das in Kapitel 6.2 erstellte Modell liefert das Differentialspiel

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \{J_1 = \int_0^T [\dot{x} - u^2(1-x)] dt\} \quad (6.6)$$

$$\max_{0 \leq v \leq 1} \{J_2 = \int_0^T [(1-v)\dot{y} - cv(1-y)] dt\} ; 0 \leq c \leq 1 \quad (6.7)$$

unter den dynamischen Nebenbedingungen:

$$\dot{x} = (1+u)(1-x); \quad x(0) = x_0 \quad (6.8)$$

$$\dot{y} = v(1-y); \quad y(0) = y_0 \quad (6.9)$$

mit x_0 nahe bei 0, $y_0 > x_0$.

Die Hamilton-Funktionen (siehe (Mehlmann, 1985, 1988; Dockner et al., 2000)) der beiden Spieler sind durch

$$\begin{aligned} H^1 &= \dot{x} - u^2(1-x) + \lambda_{11} [(1+u)(1-x)] + \lambda_{12} [(v)(1-y)] \\ &= (1+u-u^2)(1-x) + \lambda_{11} [(1+u)(1-x)] + \\ &\quad + \lambda_{12} [(v)(1-y)] \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} H^2 &= (1-v)\dot{y} - cv(1-y) + \lambda_{21} [(1+u)(1-x)] + \\ &\quad + \lambda_{22} [(v)(1-y)] \\ &= \left((1-c)v - v^2 \right) (1-y) + \lambda_{21} [(1+u)(1-x)] + \\ &\quad + \lambda_{22} [(v)(1-y)] \end{aligned} \tag{6.11}$$

gegeben, mit λ_{ij} als Kozustandsfunktionen (der erste Index steht für den Spieler, der zweite für den Zustand).

Anmerkung: Bei der Notation der Hamilton-Funktionen bezeichnen der hochgestellte Index den mit der Hamilton-Funktion verbundenen Spieler und die tief gestellten Indizes die Ableitung der Hamilton-Funktion nach dem jeweiligen Parameter.

Da keine gemischten Terme bezüglich der beiden Zustände auftreten, sind die Bedingungen für ein Differentialspiel in separablen Zuständen durch

$$\begin{aligned} H_{xx}^1 &= 0, & H_{ux}^1 &= 0 & \text{für} & H_u^1 &= 0 \\ H_{yy}^2 &= 0, & H_{vy}^2 &= 0 & \text{für} & H_v^2 &= 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

gegeben und werden erfüllt.

Die optimalen Strategien (Kontrollvariablen) der beiden Spieler liefern die Bedingungen erster Ordnung. Hinreichende Bedingung dafür ist die Konkavität der Hamilton-Funktionen bezüglich der Kontrollvariablen. H^1 ist in u für $x \leq 1$ konkav. Da x die Wahrscheinlichkeit eines Landfalls bezeichnet, ist dies gesichert. H^2 ist in v für

$y \leq 1$ konkav. y entspricht der Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Rückkehr nach Europa, wodurch dies gesichert ist. Insgesamt folgt, dass die Bedingungen erster Ordnung Maxima und somit die optimalen Strategien liefern. Als Bedingungen erster Ordnung erhält man:

$$H_u^1 = \frac{\partial H^1}{\partial u} = (1 - 2u)(1 - x) + \lambda_{11}(1 - x) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.13)$$

$$H_v^2 = \frac{\partial H^2}{\partial v} = (1 - c - 2v)(1 - y) + \lambda_{22}(1 - y) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.14)$$

Die optimale Strategie für Kolumbus ist somit durch

$$u^*(\lambda_{11}) = \frac{\lambda_{11} + 1}{2} \quad (6.15)$$

gegeben. Die optimale Intensität der Störaktionen des Seemanns wird durch

$$v^*(\lambda_{22}) = \frac{1 - c + \lambda_{22}}{2} \quad (6.16)$$

beschrieben. Das Auflösen der Bedingungen erster Ordnung zeigt, dass die optimalen Strategien direkt nur von den Kozuständen abhängen. Setzt man u^* und v^* in die Gleichungen (6.1) und (6.2) ein, so erhält man die Gleichungen für \dot{x}^* und \dot{y}^* . Die Kozustände λ_{ij} sind für Strategien in offener Schleife durch

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{ij} &= -\frac{\partial H^i}{\partial x_j} \\ \lambda_{ij}(T) &= S_{x_j}^i(x(T)) \end{aligned} \quad (6.17)$$

gegeben, wobei $S_{x_j}^i(x(T))$ die Ableitung bezüglich des Zustandes x_j der Schrottwertfunktion (*terminal value*) des Spielers i abhängig vom Endzustand bezeichnet. In dem untersuchten Modell werden die Schrottwertfunktionen beider Spieler gleich 0 angenommen. Die vier Kozustände genügen somit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_{11} &= (1 + u^* - u^{*2}) + \lambda_{11}(1 + u^*) \\
 &= (1 + u^* - u^{*2}) + (2u^* - 1)(1 + u^*) \\
 &= u^*(2 + u^*)
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\dot{\lambda}_{12} = [\lambda_{12}(v^*)] \tag{6.19}$$

$$\dot{\lambda}_{21} = [\lambda_{21}(1 + u^*)] \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_{22} &= - \left[-(v^* - cv^* - v^{*2}) - \lambda_{22}v^* \right] \\
 &= \left[(v^* - cv^* - v^{*2}) + v^*(2v^* + c - 1) \right] \\
 &= v^{*2}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\lambda_{ij}(T) = 0 \tag{6.22}$$

Die Kozustandsgleichungen besitzen wegen Gleichung (6.22)

$$\lambda_{11}(t) = \int_T^t u^*(p)(2 + u^*(p))dp \tag{6.23}$$

$$\lambda_{12}(t) = 0 \tag{6.24}$$

$$\lambda_{21}(t) = 0 \tag{6.25}$$

$$\lambda_{22}(t) = \int_T^t (v^*(q))^2 dq \tag{6.26}$$

als Lösungen.

Berücksichtigt man die sich aus den Gleichungen (6.15) und (6.16) ergebenden Identitäten

$$\lambda_{11} = 2u - 1; \quad \lambda_{22} = (2v + c - 1) \tag{6.27}$$

so erhält man für u^* und v^* folgendes Differentialgleichungssystem

$$\dot{u}^* = \frac{u^*(2 + u^*)}{2} \quad (6.28)$$

$$\dot{v}^* = \frac{v^{*2}}{2} \quad (6.29)$$

mit den sich aus $\lambda_{ij}(T) = 0$ ergebenden Randbedingungen

$$u^*(T) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad v^*(T) = \frac{1-c}{2} \quad (6.30)$$

Die Lösungen für $u^*(t)$ und $v^*(t)$ sind in Abhängigkeit vom Endzeitpunkt T durch

$$u^*(t) = \frac{2e^{-T}}{-e^{-T} + 5e^{-t}} \quad (6.31)$$

$$v^*(t) = \frac{2(1-c)}{4 - t(1-c) + T(1-c)} \quad (6.32)$$

mit $t \in [0, T]$ explizit gegeben.

Die Abbildungen 6.1 bis 6.4 zeigen die graphische Darstellung der Kontroll- und Zustandsvariablen über die Zeit mit $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0.25$, $T = 12$ und $c = 0.4$. $T = 12$ bedeutet, dass beide Spieler einen Zeitrahmen von einem Jahr berücksichtigen und t die Zeit in Monaten angibt. Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen den zeitlichen Verlauf der Zustände x und y im Gleichgewicht.

Der in Abbildung 6.4 dargestellte Verlauf der optimalen Störaktionen v zeigt, dass im Gleichgewicht der Seemann mit einem gewissen Niveau an Störaktionen beginnt und

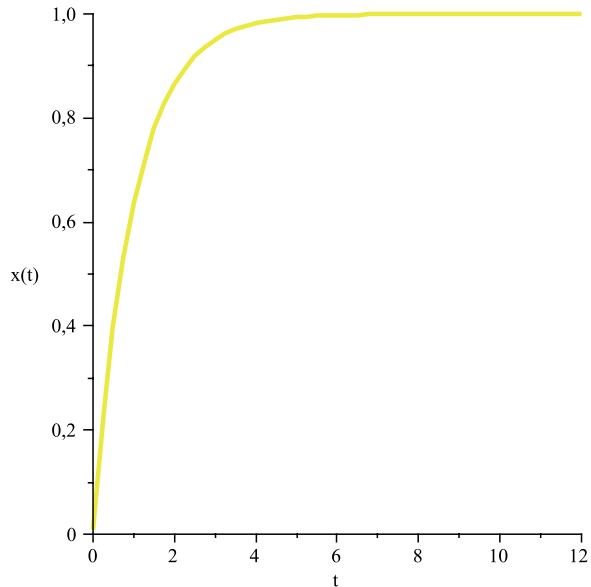


Abbildung 6.1.: Verlauf der Zustandsvariablen $x(t)$ über die Zeit (Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Landfalls)

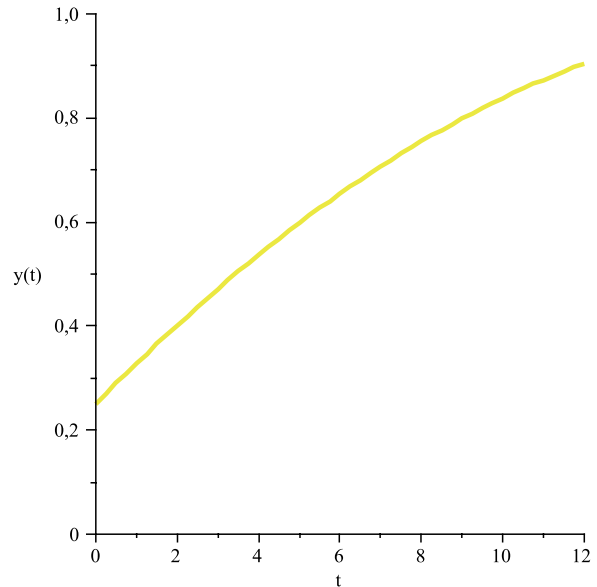


Abbildung 6.2.: Verlauf der Zustandsvariablen $y(t)$ über die Zeit (Wahrscheinlichkeitsverteilung einer erfolgreichen Rückkehr)

diese über die Zeit leicht zunehmen. Dies deckt sich mit den Aufzeichnungen des Bordbuches, worin ein dauerndes Maß an Zweifel und Unzufriedenheit beschrieben wird, welches mit leichten Schwankungen zunahm. Die Steuerhavarie, welche laut Kolumbus durch Sabotage entstanden war, spiegelt sich im Anfangswert der Kontrollvariablen v wieder. Kolumbus' optimale Strategie für Vergünstigungen weist eine exponentielle Zunahme auf und ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Das immer häufigere Motivieren der Mannschaft und die wiederholte Bekanntmachung, es werde keine Umkehr ohne Landfall geben, decken sich mit diesem Verlauf.

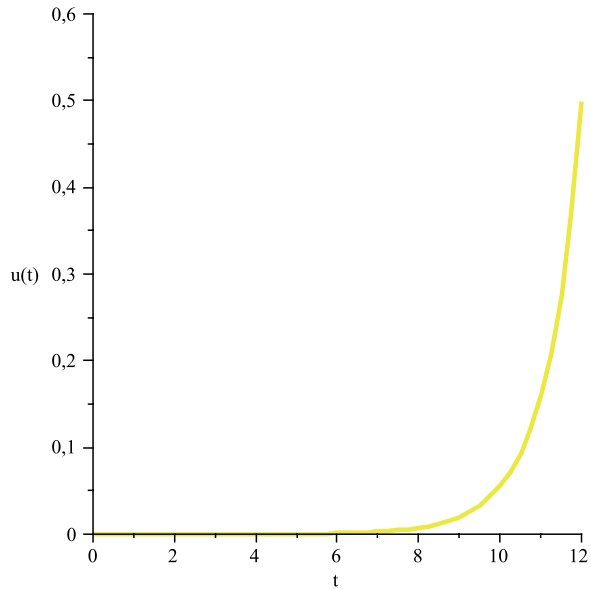


Abbildung 6.3.: Verlauf der Kontrollvariablen $u(t)$ über die Zeit (Vergünstigungen)

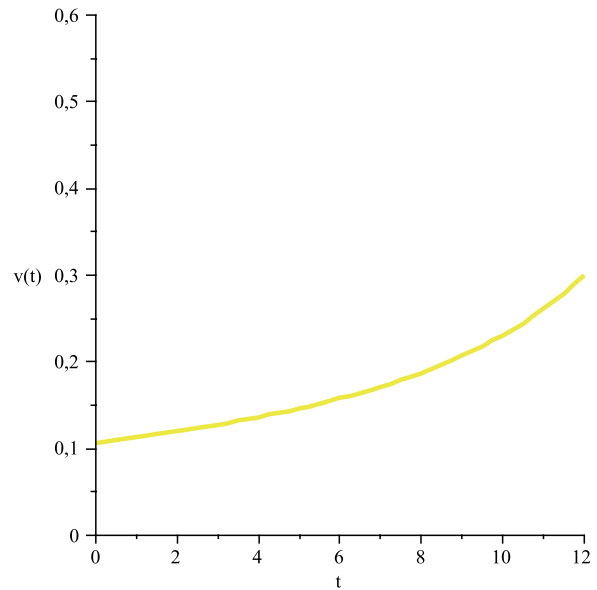


Abbildung 6.4.: Verlauf der Kontrollvariablen $v(t)$ über die Zeit (Störaktionen)

Abbildung 6.5 stellt die Relation der beiden Kontrollvariablen u und v über die Zeit graphisch dar. Im Gleichgewicht des vorgestellten Modells führt eine geringe Erhöhung der Kontrollvariablen des Seemanns v zu einem exponentiellen Anstieg der Kontrollvariablen u von Kolumbus. Durch den exponentiellen Zusammenhang der beiden Kontrollvariablen zeigt sich, dass bis zu einem gewissen Wert eine Erhöhung von v kaum eine Auswirkung auf u hat und danach eine geringe Zunahme von v zu einem deutlichen Anstieg von u führt.

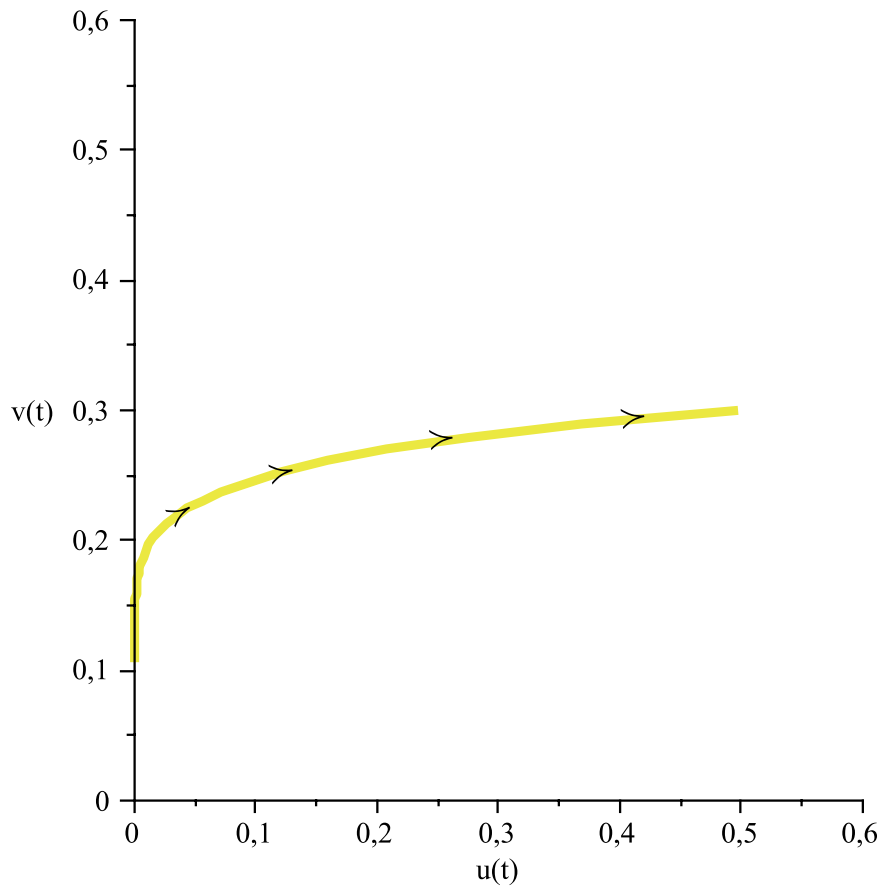


Abbildung 6.5.: Gleichgewichtiger Zusammenhang von $u(t)$ und $v(t)$

6.4. Erweiterung des Basismodells

In der folgenden Erweiterung wird dem Seemann im Unterschied zum Basismodell eine »kapitalistischere« Seele zu Grunde gelegt, sodass sein Nutzen nicht mehr ausschließlich durch die Rückkehr nach Europa, sondern auch durch die von Kolumbus gewährten Vergünstigungen bestimmt wird. Dies führt zu einer Erweiterung der Nutzenfunktion des Seemanns aus Gleichung (6.7)¹⁰. Versteht man die Kontrollvariable v des Seemanns als Anteil der Mannschaft, welcher sich an Störaktionen beteiligt, so kommen die Vergünstigungen u nur jenem Anteil zu, der sich nicht an diesen

¹⁰ Wie im Basismodell wird das Spiel hinsichtlich eines Gleichgewichts in offener Schleife untersucht.

beteiligt. Zusätzlichen Nutzen durch Vergünstigungen, insbesondere durch Prämien, erfährt der Seemann jedoch nur solange es zu keiner Rückkehr nach Europa kommt. Die erweiterte Nutzenfunktion des Seemanns wird durch

$$\max_{0 \leq v \leq 1} \{J_2 = \int_0^T [(1-v)\dot{y} - cv(1-y) + u(1-v)(1-y)] dt\} \quad \text{mit } 0 \leq d \leq 1 \quad (6.33)$$

beschrieben. Die Nutzenfunktion für Kolumbus aus Gleichung (6.5) und die Zustandsgleichungen (6.1) und (6.2) werden identisch übernommen.

Für den Seemann ergibt sich

$$\begin{aligned} H^2 = & (1-v)\dot{y} - cv(1-y) + u(1-v)(1-y) + \\ & + \lambda_{21} [(1+u)(1-x)] + \lambda_{22} [(v)(1-y)] \end{aligned} \quad (6.34)$$

als neue Hamiltonian. Die Bedingung erster Ordnung liefert

$$H_v^2 = (1-c-u-2v)(1-y) + \lambda_{22}(1-y) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.35)$$

Somit erhält man als optimalen Strategiefad für den Seemann

$$v^*(u, \lambda_{22}) = \frac{1-c-u+\lambda_{22}}{2} \quad (6.36)$$

Im Gleichgewicht bleibt der optimale Strategiefad für Kolumbus u^* unverändert und ist durch Gleichung (6.15) gegeben. Im Unterschied zum Basismodell ist die optimale Strategie des Seemanns direkt von den Vergünstigungen u abhängig. Die Kozustände λ_{ij} bleiben bis auf λ_{22} , welches Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_{22} &= -[(v^*(1-v^*) - cv^* + u^*(1-v^*) - \lambda_{22}v^*] \\
 &= -[(v^*(1-v^*) - cv^* + u^*(1-v^*) - v^*(2v^* + u^* + c - 1)] \\
 &= v^{*2} + u^*
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

ist, identisch. λ_{22} ist somit durch

$$\lambda_{22}(t) = \int_T^t (v^*(q)^2 + u^*(q))dq \tag{6.38}$$

bestimmt.

Durch diese Erweiterung des Basismodells erhält man unter Berücksichtigung der Identitäten aus den Gleichungen (6.15) und (6.36) folgendes System von Differentialgleichungen für u^* und v^*

$$\dot{u}^* = \frac{u^*(2 + u^*)}{2} \tag{6.39}$$

$$\dot{v}^* = \frac{2v^{*2} - u^{*2}}{4} \tag{6.40}$$

mit

$$u^*(T) = \frac{1}{2}; \quad v^*(T) = \frac{1-2c}{4} \tag{6.41}$$

als Randbedingungen.

Die Abbildungen 6.6 bis 6.9 zeigen den Verlauf der Zustands- und Kontrollvariablen über die Zeit mit $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0.25$, $T = 12$ und $c = 0.4$. Durch die vorgenommenen Erweiterungen des Basismodells kommt es bei den Störaktionen v zu

folgenden Unterschieden im Vergleich zum Basismodell: Im Gleichgewicht des erweiterten Modells wählt der Seemann für seine Kontrollvariable v einen signifikant kleineren Startwert als im Basismodell, wodurch $y(t)$ einen deutlich flacheren Verlauf aufweist.

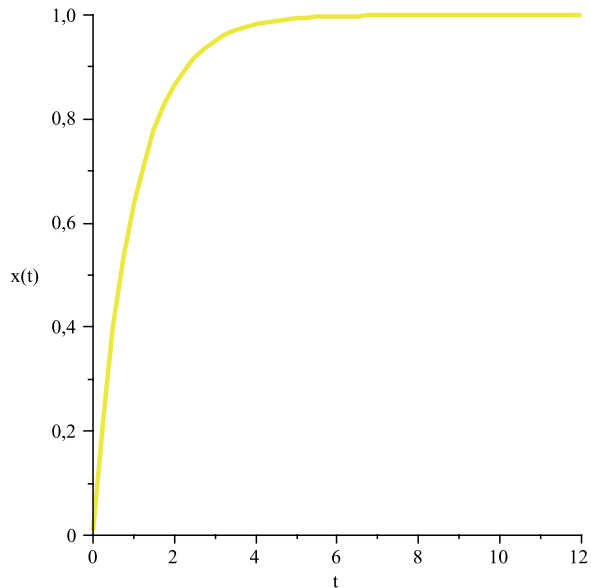


Abbildung 6.6.: Verlauf der Zustandsvariablen $x(t)$ bei Erweiterung

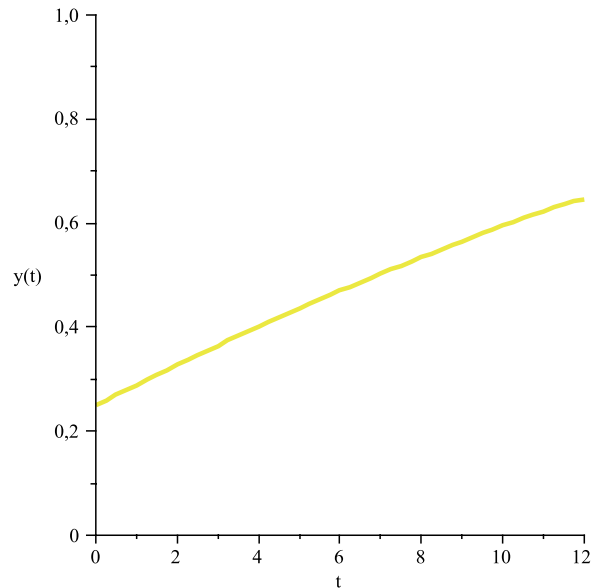


Abbildung 6.7.: Verlauf der Zustandsvariablen $y(t)$ bei Erweiterung

Anmerkung: Der exakte Verlauf von v und somit von y hängt von c ab, da der Endwert durch diesen Parameter bestimmt ist. Gilt $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$, so kommt es zu einer inneren Lösung, wobei der Endwert $v(T)$ für steigendes c gegen 0 konvergiert. Ist $c > \frac{1}{2}$ so liegt die Randbedingung in $[0, -\frac{1}{4}]$ und somit nicht mehr im zulässigen Bereich. Für die optimale Strategie des Seemanns erhält man dadurch einen früheren Abfall der Störaktionen gegen 0 und ab einem Grenzwert τ , welcher von c abhängt, die Randlösung $v^*(t) = 0$ für $t \geq \tau$.

Abbildung 6.9 zeigt den Verlauf der Kontrollvariable v über die Zeit. Während im Gleichgewicht des Basismodells ein kontinuierlicher Anstieg vorliegt, kommt es in

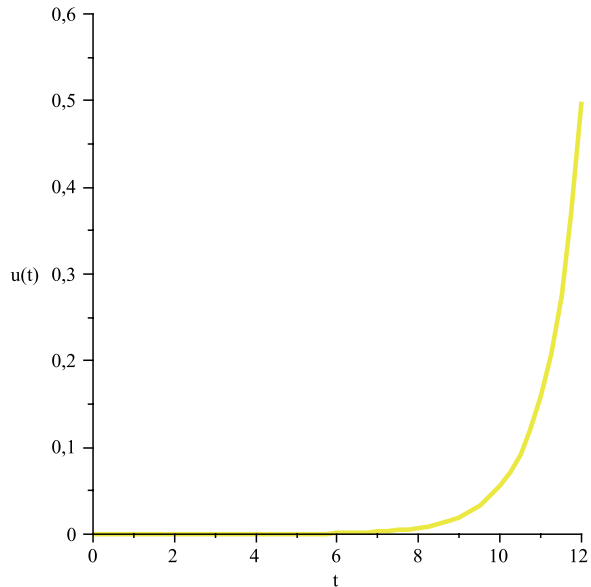


Abbildung 6.8.: Verlauf der Kontrollvariablen $u(t)$ bei Erweiterung

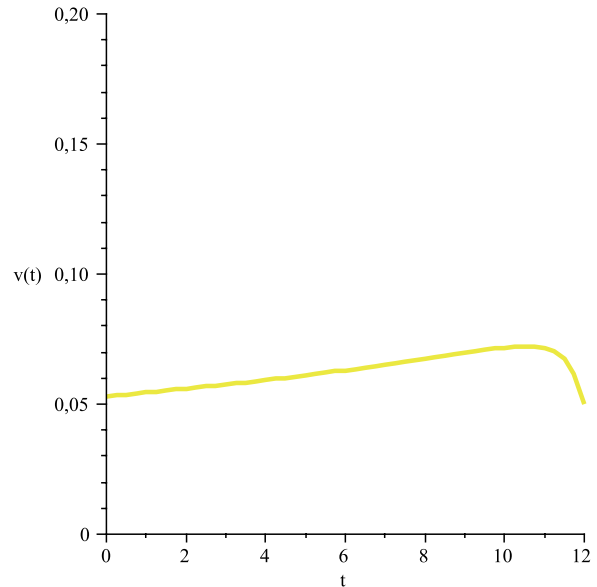


Abbildung 6.9.: Verlauf der Kontrollvariablen $v(t)$ bei Erweiterung

dem erweiterten Modell nach einem moderatem Anstieg zu einem Abfallen der Kontrollvariablen im Gleichgewicht.

Abbildung 6.10 zeigt den gleichgewichtigen Zusammenhang zwischen $u(t)$ und $v(t)$. Hier ist ein deutlicher Unterschied im Vergleich zum Basismodell erkennbar. Während im Gleichgewicht des Basismodells ein positiver Zusammenhang zwischen den beiden Kontrollvariablen vorliegt, ist dieser Zusammenhang in dem erweiterten Modell nicht eindeutig. Bis zu einem Grenzwert führt eine Zunahme der Kontrollvariablen u von Kolumbus zu einem Anstieg von v . Überschreitet u diesen Wert, so beginnen die Störaktionen v zu sinken. Die Aussetzung zusätzlicher Prämien, wie sie im Bordbuch (Grün, 1970) beschrieben ist, könnte als Überschreitung des Grenzwertes von u interpretiert werden. Diese zusätzlichen Prämien sollten eine Verminderung der Störaktionen bewirken. Die Flottille sichtete nach Aussetzung der zusätzlichen Prämien innerhalb von 48 Stunden Land, wodurch kein weiterer Vergleich möglich ist. Zu dem Zeitpunkt der Aussetzung der Zusatzprämie hatte sich die Lage zugespitzt.

Dies kann als Höhepunkt der Störaktionen gedeutet werden, da sich die Lage in der kurzen Zeit bis zum Landfall nicht weiter verschärft.

Abbildung 6.10 stellt den Zusammenhang der Kontrollvariablen im Gleichgewicht dar. Die Abbildungen 6.10 und 6.11 liefern den direkten Vergleich des gleichgewichtigen Zusammenhangs der Kontrollvariablen in beiden Modellen (Abbildung 6.11 ist mit Abbildung 6.5 identisch).

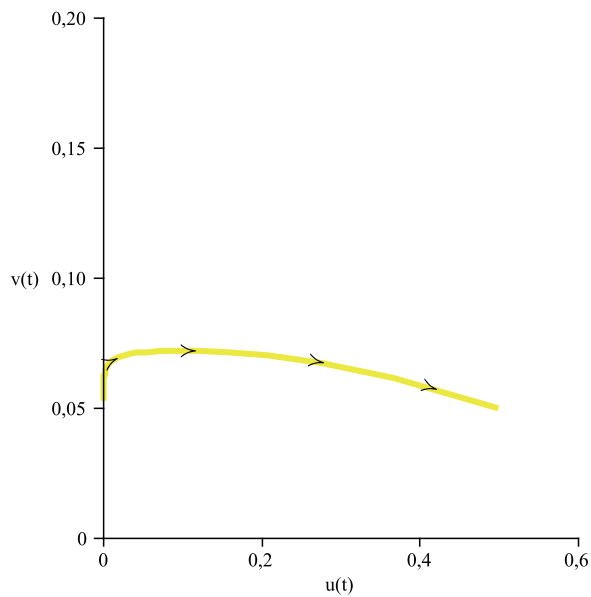


Abbildung 6.10.: Gleichgewichtiger Zusammenhang im erweiterten Modell von $u(t)$ und $v(t)$

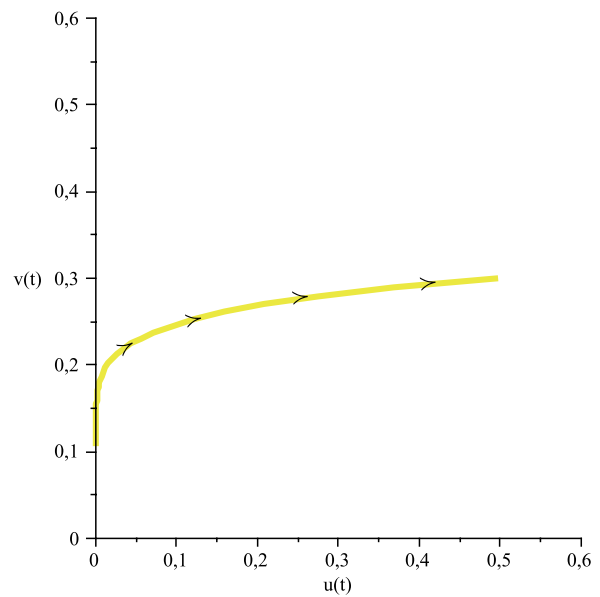


Abbildung 6.11.: Gleichgewichtiger Zusammenhang von $u(t)$ und $v(t)$ im Basismodell

Kapitel 7.

Schlussbemerkungen

Vier Dinge erhalten die Welt:
das Wissen der Weisen,
die Gerechtigkeit der Großen,
die Gebete der Guten
und die Tapferkeit der Mutigen
maurische Inschrift über Bildungsstätten

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass komplexe Entscheidungssituationen in an sich kaum mit Mathematik assoziierten Fachgebieten mit Hilfe eines spieltheoretischen Ansatzes aufgearbeitet und analysiert werden können.

Zur Untersuchung der Verhandlungssituation zwischen Kolumbus und den Monarchen hat sich ein extensives Spiel mit unvollkommener Information als besonders nützlich erwiesen. Trotz der rasant anwachsenden Größe der spieltheoretischen Darstellung und ordinaler Nutzenwerte werden klare und weitgehend eindeutige Ergebnisse erreicht.

Die konkurrierende Auseinandersetzung der Höfe Portugals, Kastiliens y Leóns, Frankreichs und Englands mit dem Plan von Kolumbus, die schließlich zur Genehmigung des Plans einschließlich aller Forderungen durch Königin Isabella führte, wurde anhand eines Timing Game modelliert. Die dafür benötigten Gleichgewichtsbedingungen wurden erarbeitet.

Für die Modellierung der Überfahrt erwies sich ein 2-Personen Differentialspiel mit zwei Zuständen als geeignet. Die Auswahl der Zustandsvariablen, die Wahrscheinlichkeiten darstellen, erfordert besondere Sorgfalt. Bei ungenauer Handhabung können Inkonsistenzen mit den Nutzenfunktionen auftreten. Die Nutzen der beiden Spieler, Kolumbus und Seemann, über den gesamten Zeitraum werden in einem Differentialspiel durch ein Integral beschrieben. Um eine sinnvolle Interpretation des Integrals zu erlangen, muss der Integrand dem Instantannutzen entsprechen.

Fortsetzungsmöglichkeiten dieser Arbeit im Hinblick auf das gewählte Anwendungsbeispiel bestehen in einer anderen Schätzung der Parameterwerte und in der Erweiterung der verwendeten Nutzenfunktionen. Bedeutendere Möglichkeiten der Fortsetzung bestehen in der Verwendung des vorgestellten »unorthodoxen« Analysezugangs. Das in dieser Arbeit angewandte Vorgehen kann als Anstoß dienen, ähnliche nicht vordergründig mit Mathematik assoziierte Problemstellungen mit spieltheoretischen Methoden zu untersuchen.

Anhang A.

Erklärung der verwendeten Parameterwerte

A.1. Extensives Spiel

Dieser Abschnitt liefert die Erklärungen für die ordinalen Nutzenwerte der Spieler des extensiven Spieles in Kapitel 3. Kolumbus beschäftigte sich ausschließlich damit, die Genehmigung und Finanzierung seines Plans einschließlich der Erfüllung seiner Forderungen zu erhalten. Der Zeitpunkt der Genehmigung ist für ihn nicht wesentlich.

Den größten Nutzen erzielt Kolumbus falls João den Plan genehmigt und die Mission gelingt. Dies basiert auf seiner Verbundenheit zum portugiesischen Thron, begründet durch seine Frau und den jahrelangen Aufenthalt in Portugal. Portugal verfügt zudem durch die »Atlantische Expansion« über eine beträchtliche Seefahrertradition, außerdem hat Kolumbus die Gewissheit, dass portugiesischen Seefahrern nach erfolgreicher Mission ihre zugestandenen Forderungen auch erfüllt werden. Den zweitgrößten Nutzen erzielt Kolumbus bei Gelingen der Mission unter kastilischer Fahne. Dieser ist größer als bei einer erfolgreichen Mission, welche durch den französischen Hof finanziert wird, da Kastilien y León zumindest im Mittelmeerraum über eine seefahrerische Tradition verfügt und mit den »Katholischen Königen« die politische Situation stabiler ist als in Frankreich¹. Scheitern der Mission liefert den nächst gereihten Nutzenwert. In diesem Fall unterscheidet Kolumbus nicht zwischen

¹ Ludwig XI. starb am 30. August 1483. Zu diesem Zeitpunkt war der Dauphin 13 Jahre alt, wodurch Streitigkeiten um die Vormundschaft absehbar waren.

der Genehmigung durch João oder Isabella. Die informelle Zusage in Frankreich bewertet er jedoch schlechter. Den geringsten Nutzenwert erhält die Nichtgenehmigung des Plans (Endknoten die auf den Zug *surrender* folgen).

Für die an dem extensiven Spiel teilnehmenden Monarchen João und Isabella basiert die ordinale Nutzenordnung auf folgenden Überlegungen. Den höchsten Nutzen erhalten sie, wenn Kolumbus' Mission unter ihrer Flagge gelingt. Unter den Endknoten, die diese Voraussetzungen erfüllen gilt die Überlegung, je später der Mission zugestimmt wird desto besser, da diese zu einem späteren Startzeitpunkt größere Erfolgsaussichten hat. Isabella wertet die Endknoten nach einer doppelten Ablehnung durch João höher als jene nach einer einfachen, begründet durch den Reputationszuwachs, welcher aus dem »Schlagen« Portugals und seiner »Atlantischen Expansion« erwächst. Nächst gereiht im Nutzen der Monarchen ist die Genehmigung der Mission durch einen anderen Monarchen mit einem Misserfolg. João und Isabella bevorzugen das Scheitern des jeweiligen direkten Konkurrenten auf der Iberischen Halbinsel gegenüber dem des französischen Monarchen. Der Zeitpunkt wann ein Konkurrent die »scheiternde« Mission genehmigt, hat keine Auswirkungen auf ihren jeweiligen Nutzen. Den bisher beschriebenen Endknoten sind jene, die nach *surrender* enden, nachgereiht. Danach folgen die Endknoten bei Misslingen der Mission bei eigener Zustimmung. Diese Endknoten liefern durch ihre zeitliche Ordnung abfallenden Nutzen für die Monarchen. Je früher ein Monarch die »scheiternde« Mission unterstützt, desto schlechter. Isabellas Nutzenwert in diesem Fall ist unabhängig davon ob João die Mission ein- oder zweimal abgelehnt hat. Noch schlechter für die Monarchen als »selbst« zu scheitern ist, wenn ein Konkurrent die Mission genehmigt und diese erfolgreich ist. In diesem Fall unterscheiden sich die Nutzenwerte für unterschiedliche Endknoten nur durch den genehmigenden Monarchen. Den geringsten Nutzen erhält ein Monarch, wenn sein direkter Konkurrent auf der Iberischen Halbinsel die Mission genehmigt und Erfolg hat. Tabelle A.1 stellt die ordinalen Nutzen der drei Spieler des extensiven Spiels schematisch dar. Die einzelnen Einträge enthalten nur den Hinweis, durch wen die Mission genehmigt wurde und ob sie erfolgreich ist oder nicht. Die zeitlichen Abstufungen der Monarchen bei eigener Genehmigung werden nicht angeführt.

	Kolumbus	João	Isabella
gut	João / Erfolg	João / Erfolg	Isabella / Erfolg
	Isabella / Erfolg	Isabella / Misserfolg	João / Misserfolg
	Fra / Erfolg	Fra / Misserfolg	Fra / Misserfolg
schlecht	João-Isabella / / Misserfolg	<i>surrender</i>	<i>surrender</i>
	Fra / Misserfolg	João / Misserfolg	Isabella / Misserfolg
	<i>surrender</i>	Fra / Erfolg	Fra / Erfolg
		Isabella / Erfolg	João / Erfolg

Tabelle A.1.: Schematische Darstellung der ordinalen Nutzen der Spieler ohne zeitliche Abstufungen

A.2. Timing Game

Im folgenden Abschnitt werden die in Kapitel 5.2.2 verwendeten Parameterwerte erklärt. Die Werte aus den Tabellen 5.1 bis 5.3 sind in Tabelle 5.4 enthalten und mit den Werten aus Tabelle A.2 ident. Die wissenschaftlichen Parameter $\kappa, \mu_a, \mu_n, \nu$ nehmen Werte aus dem Intervall $[0, 1]$ an und haben für alle vier Monarchien denselben Wert. Schon im 15. Jahrhundert war der Wissenstransfer stark ausgeprägt. Zudem waren Wissenschaftler und Techniker an Institutionen in verschiedenen Reichen aktiv. Ein Wert von eins bei diesen Parametern bedeutet, dass von dem entsprechenden Parameter kein negativer Einfluss auf die Erfolgsaussichten der Mission wirkt (ein Wert von eins ist nicht mit der »Perfektion« des jeweiligen Parameters gleich zu setzen). $\alpha \in [0, 1]$ beschreibt den Einfluss der wissenschaftlichen Parameter auf die Nutzenfunktion. Portugal legte im Rahmen der »Atlantischen Expansion« großen Wert auf diesen Bereich, der auch systematisch vorangetrieben wurde. Aus den von Bartholomäus Kolumbus überlieferten Aufzeichnungen der Gespräche am Hofe Heinrich lässt sich schließen, dass in England den wissenschaftlichen Argumenten eine geringere Bedeutung beigemessen wurde als in Portugal und Kastilien. β beschreibt den Einfluss der Meinung des Königs und seiner Berater auf die Nutzenfunktion. Der Wert ergibt sich als Komplement von α , da $\alpha + \beta = 1$ gilt. Die spärlichen Quellen über die Vorgänge in Frankreich lassen vermuten, dass Anne de Beaujeu großen Wert auf die technische Durchführbarkeit von Kolumbus' Plan legte. Der Unternehmerdrang ϕ der Monarchen, welcher ebenfalls in $[0, 1]$ liegt, war in Kastilien und England durch die Mauren- bzw- Rosenkriege nicht sehr ausgeprägt. In Portugal war dieser, wie

an der »Atlantischen Expansion« zu erkennen ist, stark vorhanden. Frankreich war in seinen Expansionsmöglichkeiten aus geographischen Gründen eingeschränkt. Es liegt also nahe, Frankreich einen Wert für ϕ unter jenem Portugals jedoch über jenem Kastiliens und Englands zuzuweisen. Die Parameter ψ_{pro} und ψ_{con} beschreiben den ausgeübten Einfluss der positiv bzw. negativ gesinnten Berater. In Kastilien waren, so die historischen Quellen, die Positionen unter den Beratern ausgeglichen. In der Salamanca-Kommission waren sowohl Befürworter von Kolumbus' Plan als auch Skeptiker vertreten. In Portugal hatten die Widersacher von Kolumbus starken Einfluss, zudem waren einige der Berater an den Unternehmungen, die Asien über die Südroute um Afrika erreichen sollten, beteiligt. Dennoch war ein Einfluss der Berater, die Kolumbus Vorhaben im Rahmen der »Atlantischen Expansion« unterstützten, vorhanden. Bartholomäus Kolumbus' überlieferte Aufzeichnungen lassen schließen, dass in London der Einfluss der wohlgesinnten Berater gering war und die Skeptiker ihren Einfluss voll ausübten. Die Werte für Frankreich können, da keine Aufzeichnungen bekannt sind, nur aufgrund des Ergebnisses geschätzt werden. Bartholomäus Kolumbus erhielt vermutlich eine informelle Zusage der Finanzierung, daher kann man schließen, dass die Befürworter unter den Beratern einen bedeutenderen Einfluss hatten als die Zweifler. Da in erster Linie das Interesse dem Seeweg nach Asien galt und nicht der Entdeckung neuer Gebiete, wird E_a deutlich höher angesetzt als E_n . Diese beiden Parameter beschreiben die a priori erwarteten Erträge (in Millionen Maravedis) bei Erfolg der Mission. Da für diese Werte keine Quellen vorliegen, konnten sie nur grob geschätzt. Kolumbus präsentierte immer denselben Plan, weshalb für diese beiden Parameter bei allen Monarchen derselbe Wert verwendet wird. γ liefert die Gewinnverminderung durch Kolumbus' Forderungen und ist bei allen Monarchen ident, da Kolumbus von seinen anfangs formulierten Forderungen nie abwich. Die Parameter η und ζ beschreiben die Kosten, die durch Reputationsverlust entstehen. Diese können nur grobe Schätzungen sein. Für Portugal waren Kolumbus' Forderungen an Rechten, die selbst im Rahmen der »Atlantischen Expansion« erhöht erscheinen, als auch die für die Krone entstehenden Kosten beträchtlich. In Portugal wurde im Allgemeinen eine Politik der »Genehmigung aber nicht Finanzierung« durch den König verfolgt. In Kastilien bewirkten die politischen Forderungen kaum Diskussionen. Die Widerstände gegen die monetären Forderungen beruhigten sich erst als Louis de Santangel, der Verwalter der Pfründe von Isabella, eingriff und die

Kosten für angemessen einschätzte. Für Frankreich und England geben diesbezüglich keine Quellen zuverlässige Auskünfte, weshalb sie sich hier an jenen Portugals und Kastiliens orientieren. Die a priori erwartete Reisedauer wird durch θ dargestellt. Den Quellen ist nur die von Kolumbus angegebene Reisedauer sowie die Einschätzung der Junta dos Mathematicos und der Salamanca-Kommission, dass diese zu kurz angesetzt sei, zu entnehmen. Die verwendeten Werte genügen dieser Relation, sind jedoch nur geschätzt. Der Diskontfaktor r und der Basisnutzen, der durch Handel über den Orient gegeben wird, sind für alle gleich angesetzt. Dieser Basisnutzen liegt unter dem a priori erwarteten Nutzen der Mission, da eine Schiffsreise billiger und schneller Güter aus Asien herbeischaffen kann als über den mühseligen Landweg durch den Orient. Da durch einen Erfolg der Mission der Handel über den Orient nahezu seine gesamte Bedeutung verlieren würde, wird der Ersetzungsgrad ρ mit 0.9 im oberen Bereich des zulässigen Wertebereichs $[0, 1]$ angesetzt. Der Parameter n , der die wissenschaftliche Ausgangssituation darstellt, wird für alle Monarchen gleich angesetzt und nimmt den Wert 10 an. Die Gleichheit von n folgt aus demselben Argument wie bei κ, μ und ν . b beschreibt die Gewichtung zwischen dem Unternehmerdrang des Monarchen und dem ausgeübten Einfluss der Berater. Dem Anspruch »Wir König von Gottes Gnaden« folgend, wird dem Unternehmerdrang der Monarchen mehr Bedeutung beigemessen als dem Einfluss der Berater (im Verhältnis 2 : 1).

Allen Monarchen werden für $\Pi(t, <)$ dieselben Werte zugewiesen. Diese sind in Tabelle A.3 dargestellt und mit jenen aus Tabelle 5.3 ident. Diese Werte für die Zeitfolgerschaft beruhen auf der Annahme, dass der Zeitführer mit der Mission neue Gebiete entdeckt hat. Die technischen Parameter κ, ν, μ_n nehmen den Werte 1 an, da die technische Realisierbarkeit zur Gewissheit geworden ist. Aus dieser Gewissheit heraus nehmen auch der Unternehmerdrang des Monarchen ϕ und der Einfluss der positiv gesinnten Berater ψ_{pro} den Wert 1, jener der negativ gesinnten ψ_{con} den Wert 0 an. Durch das Wissensupdate über die Existenz neuer Gebiete steigt der erwartete Ertrag E_n des Folgers an. Als Folge des in die Ferne Rückens einer Westroute nach Indien fallen μ_a und E_a auf 0. $\Pi_0, \rho, \gamma, r, b$ und n bleiben unverändert, da diese durch die Erkenntnisse der erfolgreichen Mission nicht beeinflusst werden. Die Erfahrung

Portugal	Kastilien	England	Frankreich
$\kappa = \sqrt[3]{0.025}$	$\kappa = \sqrt[3]{0.025}$	$\kappa = \sqrt[3]{0.025}$	$\kappa = \sqrt[3]{0.025}$
$\mu_a = \sqrt[3]{0.001}$	$\mu_a = \sqrt[3]{0.001}$	$\mu_a = \sqrt[3]{0.001}$	$\mu_a = \sqrt[3]{0.001}$
$\mu_n = \sqrt[3]{1 \times 10^{-8}}$	$\mu_n = \sqrt[3]{1 \times 10^{-8}}$	$\mu_n = \sqrt[3]{1 \times 10^{-8}}$	$\mu_n = \sqrt[3]{1 \times 10^{-8}}$
$\nu = \sqrt[3]{0.4}$	$\nu = \sqrt[3]{0.4}$	$\nu = \sqrt[3]{0.4}$	$\nu = \sqrt[3]{0.4}$
$\alpha = 0.4$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$
$\phi = 0.8$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.75$
$\psi_{pro} = 0.4$	$\psi_{pro} = 0.7$	$\psi_{pro} = 0.1$	$\psi_{pro} = 0.5$
$\psi_{con} = 1$	$\psi_{con} = 0.6$	$\psi_{con} = 1$	$\psi_{con} = 0.2$
$\beta = 0.6$	$\beta = \frac{2}{3}$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.5$
$G_a = 100$	$G_a = 100$	$G_a = 100$	$G_a = 100$
$G_n = 10$	$G_n = 10$	$G_n = 10$	$G_n = 10$
$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.1$
$\eta = 0.8$	$\eta = 1$	$\eta = 0.6$	$\eta = 0.9$
$\zeta = 1.2$	$\zeta = 0.8$	$\zeta = 1$	$\zeta = 1.5$
$\theta = 0.25$	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = \frac{1}{8}$	$\theta = 0.4$
$r = 0.03$	$r = 0.03$	$r = 0.03$	$r = 0.03$
$\Pi_0 = 4$	$\Pi_0 = 4$	$\Pi_0 = 4$	$\Pi_0 = 4$
$\rho = 0.9$	$\rho = 0.9$	$\rho = 0.9$	$\rho = 0.9$
$n = 10$	$n = 10$	$n = 10$	$n = 10$
$b = \frac{2}{3}$	$b = \frac{2}{3}$	$b = \frac{2}{3}$	$b = \frac{2}{3}$

Tabelle A.2.: Parameterwerte des Timing-Game mit vier Teilnehmern

der benötigten Reisedauer führt zu einer Anpassung von θ . Die Bedeutung der Berater β nimmt den Wert $\frac{1}{2}$ an, da der Schwerpunkt fortan zunehmend mehr auf Expeditionsplanungen als auf Grundsatzentscheidungen liegt. Die sich aus politischen Forderungen ergebenden Kosten nehmen im Fall der Zeitfolgerschaft einen deutlich höheren Wert an, da das Risiko durch Ungewissheit für die Expeditionen wegfällt. Ebenso erhalten die monetären Forderungen wegen der Konkurrenz unter den Seefahrern zunehmend Bedeutung.

$\kappa = 1$	$\mu_a = 0$	$\nu = 1$	$\mu_n = 1$
$\phi = 1$	$\psi_{pro} = 1$	$\psi_{con} = 0$	$G_a = 0$
$\gamma = 0.1$	$\eta = 1$	$\zeta = 4$	$G_n = 30$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{1}{10}$	$r = 0.03$
$\Pi_0 = 4$	$\rho = 0.9$	$n = 10$	$b = \frac{2}{3}$

Tabelle A.3.: Werte der Parameter für den Zeitfolger

Abbildungsverzeichnis

3.1. Spielbaumdarstellung des extensiven Spiels	36
3.2. Reduzierte Spielbaumdarstellung des extensiven Spiels	38
3.3. Reduzierte Spielbaumdarstellung des extensiven Spiels mit optimalen Entscheidungen	40
4.1. Optimaler Zeitpunkt der Aktion bei nur einem Spieler	46
4.2. Beispiel für $\bar{\Pi}_i(t, >)$ bei Zeitführerschaft	52
4.3. Beste-Antwort-Funktionen im stetigen Fall	53
4.4. Beste-Antwort-Funktionen im diskreten Fall	53
4.5. Zusammengefasster Nutzen der Gegenspieler von Spieler i	56
4.6. Beste-Antwort-Funktionen bei asymmetrischem Nutzen und diskreten Eintrittszeitpunkten	57
4.7. Führer-Folger mit symmetrischem Nutzen	61
4.8. Fall der Verletzung von $ii)$ aus Satz 4.3	63
4.9. Beispiel für einen Reaktionszyklus nach »vorne«	65
4.10. Beispiel für einen Reaktionszyklus nach »hinten«	65
4.11. Führer-Folger mit asymmetrischem Nutzen	68
4.12. Darstellung von Nutzenfunktionen $\Pi(t, >)$ und $\Pi(t, <)$, Kosten $C(t)$ und Budgetrestriktion $B(t)$ eines Spielers	70
5.1. Graphische Darstellung von Gleichung (5.9)	81
5.2. Nutzenfunktionen für Zeitführer und -folger bei symmetrischem Nut- zen mit den Werten aus Tabellen 5.1 und 5.3	83
5.3. Nutzenfunktionen der vier Monarchen	85
5.4. Budgetrestriktion und Kosten der Mission	86

6.1. Verlauf der Zustandsvariablen $x(t)$ über die Zeit (Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Landfalls)	100
6.2. Verlauf der Zustandsvariablen $y(t)$ über die Zeit (Wahrscheinlichkeitsverteilung einer erfolgreichen Rückkehr)	100
6.3. Verlauf der Kontrollvariablen $u(t)$ über die Zeit (Vergünstigungen) . .	101
6.4. Verlauf der Kontrollvariablen $v(t)$ über die Zeit (Störaktionen)	101
6.5. Gleichgewichtiger Zusammenhang von $u(t)$ und $v(t)$	102
6.6. Verlauf der Zustandsvariablen $x(t)$ bei Erweiterung	105
6.7. Verlauf der Zustandsvariablen $y(t)$ bei Erweiterung	105
6.8. Verlauf der Kontrollvariablen $u(t)$ bei Erweiterung	106
6.9. Verlauf der Kontrollvariablen $v(t)$ bei Erweiterung	106
6.10. Gleichgewichtiger Zusammenhang im erweiterten Modell von $u(t)$ und $v(t)$	107
6.11. Gleichgewichtiger Zusammenhang von $u(t)$ und $v(t)$ im Basismodell	107

Tabellenverzeichnis

2.1.	Entfernungen auf der Westroute in Nautischen Meilen	20
2.2.	Zusammenfassung der Forderungen von Kolumbus	21
2.3.	Kosten der Mission lt. (Gierloff-Emden, 1994)	29
2.4.	Maximale Sichtweiten von Schiffen in Kilometer	32
5.1.	Werte für Timing Game mit symmetrischem Nutzen (Portugal)	80
5.2.	Werte der Nutzenfunktion Kastiliens als Zeitführer	82
5.3.	Werte der Parameter für den Zeitfolger	82
5.4.	Parameterwerte des Timing Game mit vier Teilnehmern	84
5.5.	Optimale Genehmigungszeitpunkte	88
5.6.	Optimale Genehmigungszeitpunkte mit Frankreichs Nutzenfunktion für die symmetrischen Fälle	89
A.1.	Schematische Darstellung der ordinalen Nutzen der Spieler ohne zeit- liche Abstufungen	112
A.2.	Parameterwerte des Timing-Game mit vier Teilnehmern	115
A.3.	Werte der Parameter für den Zeitfolger	116

Literaturverzeichnis

- Bulow, J. and Klemperer, P. (1999). The Generalized War of Attrition. *American Economic Review*, 89(1):175–189.
- Chen, S. F.-H. and Leitmann, G. (1980). Labour-Management Bargaining Modelled as a Dynamic Game. *Optimal Control Applications and Methods*, 1:11–25.
- Columbus, C. and Fuson, R. H. (1987). *The log of Christopher Columbus*. International Marine Pub. Co., Camden, Me.
- Dockner, E., Jørgensen, S., Long, N. V., and Sorger, G. (2000). *Differential Games in economics and management science*. Cambridge University Press.
- Dresher, M. (1981). *The Mathematics of Games of Strategy*. Dover Publications.
- Feichtinger, G. and Novak, A. (2008). Terror and Counterterror Operations: Differential Game with Cyclical Nash Solution. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 139(3):541–556.
- Fischer-Fabian, S. (1991). *Um Gott und Gold*. Lübbe, Bergisch Gladbach.
- Fudenberg, D. and Tirole, J. (1985). Preemption and Rent Equalization in the Adoption of New Technology. *The Review of Economic Studies*, 52(3):383–401.
- Gerhard, J. E. (1956). *Christoph Columbus*. Schünemann, Bremen.
- Gierloff-Emden, H.-G. (1994). *Die erste Entdeckungsreise des Columbus*. Geobuch-Verlag, München.
- Grün, R. (1970). *Das Bordbuch 1492, Leben und Fahrten des Entdeckers der Neuen Welt in Dokumenten und Aufzeichnungen*. Erdmann Verlag für Internationalen Kulturaustausch, Tübingen.

- Hendricks, K. and Wilson, C. (1987). Equilibrium in preemption games with complete information. Technical Report 87-02, C.V. Starr Center for Applied Economics.
- Hennig, R. (1940). *Columbus und seine Tat*. Geist, Bremen.
- Hoppe, H. C. and Lehmann-Grube, U. (2005). Innovation timing games: a general framework with applications. *Journal of Economic Theory*, 121:30–50.
- Isaacs, R. (1975). *Differential Games*. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc.
- Jørgensen, S., Kort, P., and Zaccour, G. (2009). Optimal pricing and advertising policies for an entertainment event. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(3):583–596.
- Jørgensen, S. and Zaccour, G. (2007). Developments in differential game theory and numerical methods: economic and management applications. *Computational Management Science*, 4(2):159–181.
- Katz, M. L. and Shapiro, C. (1987). R & D Rivalry with Licensing or Imitation. *American Economic Review*, 77(3):402–420.
- Madariaga, S. d. (1989). *Kolumbus: Leben, Taten und die Zeit des Mannes, der mit seiner Entdeckung die Welt veränderte*. Scherz, Bern; Wien.
- Mehlmann, A. (1985). *Differentialspiele: Die Analyse dynamischer Konfliktsituationen*. Anton Hain.
- Mehlmann, A. (1988). *Applied Differential Games*. Plenum Press, New York and London.
- Mehlmann, A. (1994). On Differential Games with Markov Perfect Triggering. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 80(2):273–288.
- Mehlmann, A. and Willing, R. (1983). On nonunique closed-loop Nash equilibria for a class of differential games with a unique and degenerated feedback solution. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 41(3):463–472.
- Nader, H. (1996). *The book of privileges issued to Christopher Columbus by King Fernando and Queen Isabel*. University of California Press.

- Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). *A Course in Game Theory*. MIT Press.
- Reinganum, J. F. (1981). On the Diffusion of New Technology: A Game Theoretic Approach. *The Review of Economic Studies*, 48(3):395–405.
- Selten, R. (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4(1):25–55.
- Wallisch, R. (2006). *Cristoforo Colombo: Der erste Brief aus der neuen Welt*. Reclam, Stuttgart.

Curriculum Vitae

Dipl.-Ing. Albert Moik

E-Mail: albert.moik@gmail.com

wissenschaftlicher Werdegang

10/02 – 06/07 Studium der Technischen Mathematik Studienzweig Wirtschaftsmathematik an der Technischen Universität Wien (Abschluss mit Auszeichnung)

Thema der Diplomarbeit: Modellierung und Simulation von Verhandlungen zwischen zwei Agentengruppen

08/07 – Doktoratsstudium der Technischen Wissenschaften an der Technischen Universität Wien

03/08 – Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut VW 5 der Wirtschaftsuniversität Wien

bisherige Lehrtätigkeit

Grundkurs Spieltheorie (SS08, WS09, SS09)

Spieltheorie & Bargaining (WS09)