Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

D I P L O M A R B E I T

M A S T E R ' S T H E S I S

Stoßbeanspruchung von Bohrpfahlwandsystemen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen
Grades eines Diplom-Ingenieurs

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. **Rudolf Heuer**
Institut für Hochbau und Technologie
Forschungsbereich für Baumechanik und Baudynamik
Fakultät für Bauingenieurwesen
Technische Universität Wien

und

Dipl.-Ing. Dr. techn. **Stefan Blovsky**
Institut für Grundbau und Bodenmechanik
Forschungsbereich für Grundbau und Bodenmechanik
Fakultät für Bauingenieurwesen
Technische Universität Wien

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Franz Bamer

Matr.Nr.: 02 27 201
Hauptstrasse 26
A - 3143 Pyhra

Wien, im Oktober 2009

Danksagung

Besonders bedanken will ich mich bei der ÖBB Infrastruktur Bau AG vertreten durch Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Johann Glatzl und Dipl.-Ing. Dr. Hannes Kari durch die ich die Möglichkeit bekam, mich mit diesem interessanten Thema zu befassen.
Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Dipl.-Ing Erhard Kubek, Geschäftsführender des Ingenieurbüros Tecton consult, der mich in die Problemstellung einführte und mir zahlreiches Planungsmaterial zur Verfügung stellte.
Die Fa. SIEMENS AG hat ein Versuchsergebnis zur Verfügung gestellt und ich möchte mich für die Mitarbeit herzlich bedanken.

Spezieller Dank gilt auch Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer, der mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand.
Für die Betreuung im Bereich des Grundbaues möchte ich mich bei Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Blovsky, der es mir möglich machte neue Methoden zu erlernen, bedanken.

Herzlichen Dank an meine Familie, die mich in meiner Ausbildung immer unterstützt und mir den richtigen Weg gezeigt hat und an meine Freundin, die immer für mich da war.

Kurzfassung

Die Aufgabenstellung dieser Diplomarbeit entstand im Rahmen des Umbaues des Südbahnhofes in Wien in Zusammenarbeit des Institutes für *Hochbau und Technologie, Forschungsbereich für Baumechanik und Baudynamik* und der *ÖBB-Infrastruktur Bau AG* mit dem Statik Büro *TECTON consult.*

Bei der Planung des Bahnhofes und dessen zugehörigen Gleis- und Tunnelsystemen wurde entschieden, die Tunnelwände aus Bohrpfahlwandsystemen, bei denen die Bohrpfähle in einem Abstand zwischen 1,5 und 3,0 Meter entfernt zueinander stehen, herzustellen.

Die Basis dieser Diplomarbeit ist ein gedachtes Katastrophenszenario, in dem im Tunnelsystem ein Zug entgleist und gegen die Tunnelwand prallt. Normalerweise werden bei herkömmlichen Tunnelschalen beim Aufprall des Zuges nur Kräfte in Querrichtung (und eventuell in Längsrichtung Reibungskräfte) erzeugt. Bei Tunnelwänden dieser Bauart ist auf Grund ihrer Beschaffenheit zu berücksichtigen, dass im Falle eines Stoßvorganges auch Kräfte in Tunnellängsrichtung erzeugt werden.

Ausgewählt zur Untersuchung wurde Tunnelabschnitt T13 (von km +1116,00 bis km +1140,00). Dieser Tunnelabschnitt ist eine Teilstrecke einer Abzweigung und befindet sich ca. 60 - 80 m vor dem Weichenanfangspunkt im Feld SO4. Die Annahme ist, dass der Zug im Bereich der Weiche entgleist und dass es anschließend im Feld T13 zu einem Stoßvorgang kommt.

Es stellt sich die Frage, ob es notwendig ist, eine zusätzliche Vorsatzschale zu errichten, oder die Räume zwischen den Bohrpfählen mit Beton auszufüllen um eine Stoßkraft in Längsrichtung zu verhindern.

Die Aufgabe dieser Arbeit ist es, die Kräfte, die bei Stoßvorgängen dieser Art entstehen, unter Einbeziehung des Untergrundes zu ermitteln. Außerdem sind die Ergebnisse mit den Vorgaben der technischen Norm zu vergleichen um diese dann anhand dieser Arbeit qualitativ bewerten zu können.

Fa. SIEMENS stellte ein Versuchsergebnis zur Verfügung, in dem eine Taurus-Lok mit 5 $\frac{m}{s}$ gegen eine starre Wand fährt. Um einen Vergleich mit anderen Stoßberechnungen zu bekommen, wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit diese ebenfalls mit einer Anfahrgeschwindigkeit von 5 $\frac{m}{s}$ durchgeführt. Für die Entwurfsgeschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ wurde eine statisch äquivalente Anpralllast mittels direkter Zeitintegration ermittelt.

Bei den Berechnungen wird das dreidimensionale Modell auf zwei zweidimensionale Rechenmodelle zurückgeführt, in ein Rahmensystem in Längsrichtung und eines in Querrichtung, die beide durch den Stoßvorgang gleichzeitig belastet werden.
Erste Ergebnisse, bei denen die Mitwirkung des Bodens noch nicht berücksichtigt wurde, liegen weit über den Werten der technischen Norm *ÖNORM EN 1991-1-7*. Es ergeben sich Schnittkräfte, die auf keinen Fall konstruktiv in den Griff zu bekommen sind. Daraus ergibt sich die

Schlussfolgerung, dass ein Stoß in Längsrichtung auf jeden Fall zu verhindern ist, oder mit dem Ausfall mehrerer Bohrpfähle zu rechnen ist.

Bei weiteren Berechnungen wird die Wirkung des Bodens in Form von elastischer Bettung miteinbezogen und schon von Anfang an angenommen, dass Stoßkräfte in Längsrichtung zum System verhindert werden. Der elastische Stoß wird ausgeschlossen und der Berechnung wird nur mehr ein vollkommen unelastischer (plastischer) Stoß zugrunde gelegt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen werden in Abhängigkeit des Winkels zwischen Anstoßrichtung und Tunnelwand und der Bettungswirkung des Bodens dargestellt.

Abstract

This Master's Thesis was composed in the course of the reconstruction of the Vienna Südbahnhof in close collaboration of the Vienna University of Technology's *Institute of Building Construction and Technology, Research Center of Mechanics and Structural Dynamics* and the *ÖBB-Infrastruktur Bau AG* together with the engineering office *TECTON consult.*

During the planning phase of the new railway station and the connected railway and tunnel systems, it was decided that the tunnel walls were to be constructed by the use of contiguous pile wall systems with bored pile walls being placed every 1,5 to 3,0 meters.

The main topic of the present Master's Thesis is a possible accident, in which a train derails and consequently collides with the wall of the tunnel. In the case of commonly shells a train crash merely causes forces in lateral direction (and possibly friction forces in longitudinal direction). However, tunnels using contiguous pile wall systems additionally provoke forces in longitudinal direction when hit by a derailed train.

For means of analysis of the consequences of a train crashing into the tunnel wall, section T13 (from km +1116.00 to km +1140.00) was selected. T13 is part of an intersection and is situated approximately 60-80 m before the beginning of the switch point in the field SO4. The analysed scenario infers that the train derails at the switch point and hits the tunnel wall in section T13.

Hereby, the question arises whether it is necessary to add an additional shell or to fill the free space between the bored piles with concrete in order to avoid forces in longitudinal direction.

The challenge is to evaluate those forces, that appeare at accidents of this kind, in involvement of the geotechnical influences. Furthermore these data have to be compared with the specifications of the technical norm in order to appraise them.

The company SIEMENS provided an experimental result, in which a Taurus-lokomotive collides with a rigid wall with the velocity of 5 $\frac{m}{s}$. To compare calculations based on this szenario with the classical theory all calculations are done by assuming a velocity of 5 $\frac{m}{s}$. For the design speed, which is 80 $\frac{km}{h}$, a statically equivalent force has been calculated by integrating the force path, which is dependent on time.

The three-dimensional system is split into two two-dimensional systems, i.e. one frame in longitudinal direction and one frame in lateral direction. During the collision both systems are strained at the same time.
First data, which were calculated without geotechnical influences, are much larger than those proposed by the standart *ÖNORM EN 1991-1-7*. The conclusion is, that collisions in longitudinal direction have to be avoided so as to avoid the complete damage of additional bored piles.

The following calculations are dedicated to the consideration of the geotechnical influence by

means of continous elastic support. The assumption is, that no force in longitudinal direction will occure due to the special construction and only plastic collision is considered. The results of these calculations are illustrated dependent on the angle of the direction of the collision and the elastic support of the soil.

Symbolverzeichnis

$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$	generalisierte Beschleunigung der Umkehrlage
$\dot{q}' = \frac{dq'}{dt}$	generalisierte Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß
$\dot{q} = \frac{dq}{dt}$	generalisierte Geschwindigkeit
η	Verhältnis des E-Modul Stahl zu E-Modul Beton
λ_p	passiver Erddruckbeiwert
ω	Eigenkreisfrequenz
ω_d	gedämpfte Eigenkreisfrequenz
$\phi(x)$	Formfunktion
σ_{hi}	Bodenspannung an der Stelle i
ζ	Lehrsches Dämpfungsmaß
c^*	Ersatzsteifigkeit
e_{phi}	passiver Erddruck an der Stelle i
F_{stat}	statische Äquivalenzkraft
k_{sh}	Bettungsmodul
M^*	Ersatzmasse
q	Lagekoordinate des Rahmens
q_u	Auslenkung des Rahmens zum Zeitpunkt der Umkehrlage
r	viskoser Dämpfungsparameter
S	Stoßantrieb
T'	kinetische Energie unmittelbar nach dem Stoß
T_u	kinetische Energie zum Zeitpunkt der Umkehrlage
U	potentielle Energie der inneren Kräfte
u_i	Durchbiegung des Bohrpfahles an der Stelle i
v	Geschwindigkeit des Zuges vor dem Stoß
V'	potentielle Energie unmittelbar nach dem Stoß
v'	Geschwindigkeit des Zuges nach dem Stoß
v_l	Geschwindigkeit in Längsrichtung

v_q	Geschwindigkeit in Querrichtung
V_u	potentielle Energie zum Zeitpunkt der Umkehrlage
$w(x,t)$	Durchbiegungsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Problemstellung . . . 1
1.2 Vorgehensweise . . . 2

2 Theoretische Grundlagen **4**
2.1 Die homogene Schwingungsgleichung . . . 4
2.1.1 Ungedämpfter Einmassenschwinger . . . 4
2.1.2 Gedämpfter Einmassenschwinger . . . 4
2.2 Inhomogene Schwingungsgleichung . . . 5
2.2.1 Das Duhamelsche Faltungsintegral für Kraftanregung . . . 6
2.3 Die klassische Stoßtheorie . . . 7
2.3.1 Der vollkommen elastische Stoß . . . 8
2.3.2 Der vollkommen unelastische Stoß . . . 8
2.3.3 Der Reale Stoß . . . 9
2.4 Energiesatz und Umkehrlage . . . 10
2.4.1 Energiesatz der Mechanik . . . 10
2.4.2 Die Umkehrlage . . . 10
2.4.3 Statisch äquivalente Ersatzkraft . . . 11
2.5 Generalisierter Einmassenschwinger . . . 11
2.6 Das Bettungsmodulverfahren . . . 12

3 Mechanische Modellierung **14**
3.1 Modellierung des reduzierten Rahmensystems . . . 14
3.1.1 Querrahmen . . . 14
3.1.2 Längsrahmen . . . 14
3.2 Modellierung des gebetteten Rahmensystems . . . 15
3.3 Ermittlung der Querschnittswerte . . . 16
3.3.1 Ermittlung der Querschnittswerte des Bohrpfahles . . . 16
3.3.2 Ermittlung der Querschnittswerte des Riegels . . . 17

4 Berechnungsvorgaben **19**
4.1 Massenangaben . . . 19
4.2 Geometrieangaben . . . 19
4.3 Geschwindigkeitsvorgaben . . . 19
4.4 Vorgaben der ÖNORM . . . 19
4.5 Versuchsergebnis eines Anfahrstoßes . . . 19

5 Berechnung des eingespannten Systems **22**
5.1 Die klassische Stoßtheorie . . . 22
5.1.1 Stoß auf den Querrahmen . . . 22
5.1.2 Stoß auf den Längsrahmen . . . 25
5.1.3 Koppelung der Systeme Längsrahmen und Querrahmen . . . 26
5.2 Stoßberechnungen mit Verwendung eines Kraft-Zeit-Verlaufes . . . 29

5.2.1 Koppelung der Systeme Längs und Querrahmen 32

6 Berechnung des gebetteten Systems nach klassischer Stoßtheorie 33

6.1 Der gebettete Rahmen - ohne Aufschüttung 33

6.1.1 Projizierter Querstoß in Abhängigkeit des Winkels 38

6.2 Der gebettete Rahmen mit mitwirkender Aufschüttung 38

6.2.1 Berechnung nach Bettungsmodulverlauf Fall b 39

6.2.2 Berechnung nach Bettungsmodulverlauf Fall a 41

6.2.3 Berechnung nach Bettungsmodulverlauf Fall c 43

6.2.4 Berechnung nach Bettungsmodulverlauf Fall d 45

6.2.5 Auflistung der Ergebnisse im Vergleich 47

7 Berechnung des gebetteten Systems mit Verwendung eines Kraft-Zeit-Verlaufes 51

7.1 Der gebettete Rahmen - ohne Aufschüttung 51

7.2 Der gebettete Rahmen - Fall a 52

7.3 Der gebettete Rahmen - Fall b 52

7.4 Der gebettete Rahmen - Fall c 53

7.5 Der gebettete Rahmen - Fall d 53

7.6 Momente im Vergleich 54

8 Schlussfolgerungen 56

8.1 Eingespanntes System – Berechnung nach klassischer Stoßtheorie 56

8.2 Eingespanntes System – Berechnung unter Annahme eines zeitlichen Stoßkraftverlaufes 56

8.3 Gebettetes System – klassische Stoßtheorie 56

8.4 Gebettetes System – Berechnung unter Annahme eines zeitlichen Stoßkraftverlaufes 57

9 Anhang 58

9.1 Berechnung eingespanntes System 58

9.1.1 Berechnung des Stoßes auf den Längsrahmen 58

9.2 Gebetteter Rahmen ohne Schüttung 61

9.3 Gebetteter Rahmen mit Schüttung 69

9.4 Exemplarischer Momentenverlauf für ein gebettetes System 71

10 Literatur 72

11 Verwendete Software Pakete für die durchgeführten Berechnungen 72

1 Einleitung [9], [10]

1.1 Problemstellung

Im Zuge des Um - bzw. Neubaues des Südbahnhofes wurde in die Planung ein bestimmtes Katastrophenszenario miteinbezogen. Dieses Katastrophenszenario ist dadurch charakterisiert, dass ein Zug entgleist und auf die Tunnelwand prallt. Dabei wurde die ÖNORM EN 1991-1-7 vorerst als Grundlage für die Berechnung verwendet. Den Verantwortlichen erschien es sinnvoll die ÖNORM in ihrer Auswirkung auf das Katastrophenszenario zu untersuchen und deren Werte zu bestätigen. Die in der Planung verwendeten Konstruktionen für die Tunnelwand sind Bohrpfahlwandkonstruktionen.
Als Stelle des Unfalles wird gemäß Planungsunterlagen der Tunnelabschnitt T13 (von km +1116,00 bis km +1140,00) ausgewählt. Angenommen wird, dass der Zug, der aus südwestlicher Richtung kommt, im Bereich des Weichenanfangspunktes (km +1215,00) entgleist und dann in Abschnitt T13 aufprallt. Als Veranschaulichung zeigt die Abbildung 1 einen Grundriss und die Abbildung 2 einen Aufriss des Feldes T13.

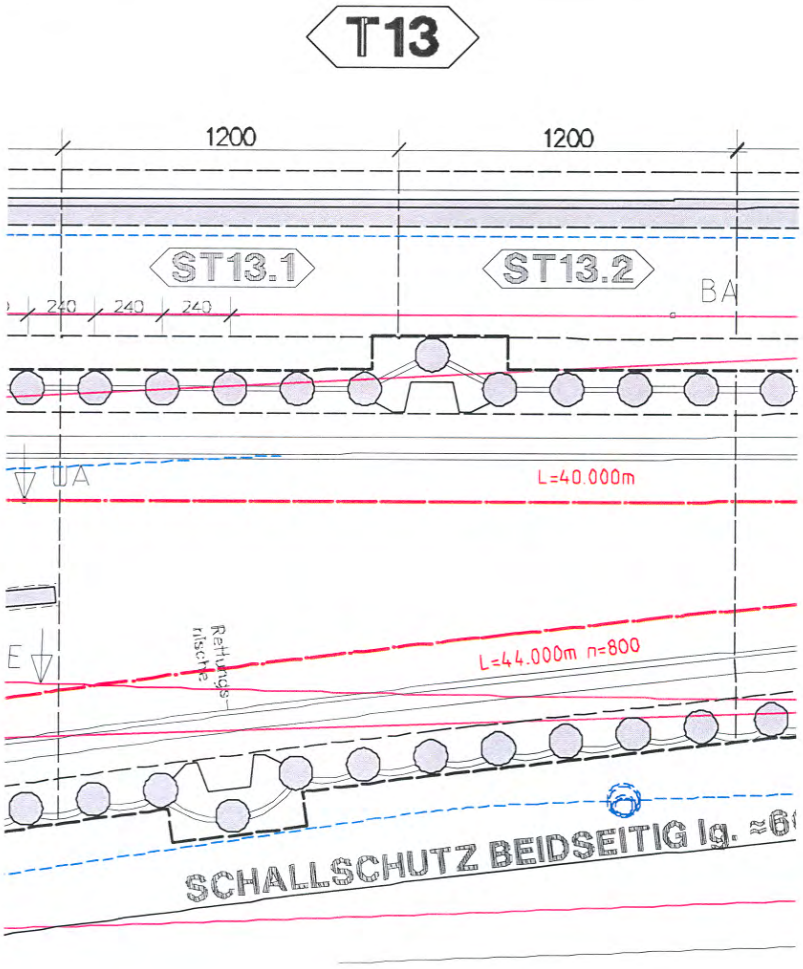


Abbildung 1: Grundriss Feld T13

Es stellt sich die Frage, in wie weit die ÖNORM dem tatsächlichen Katastrophenszenario für

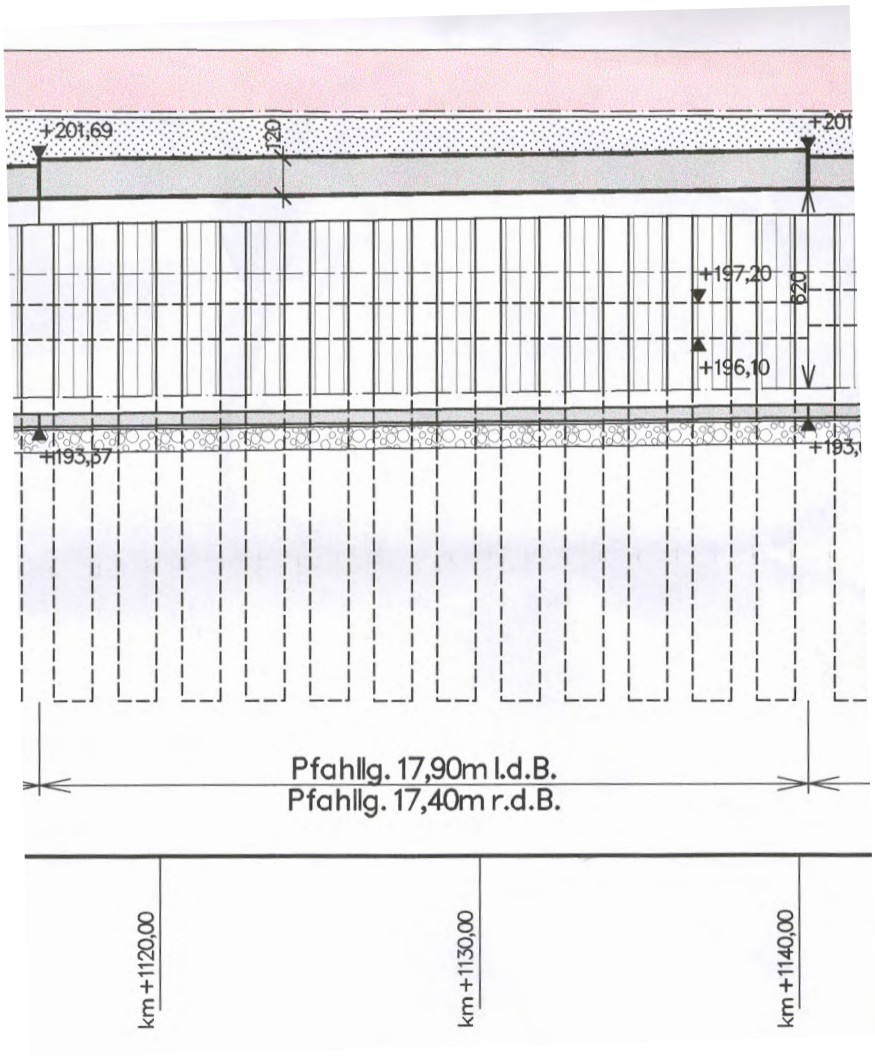


Abbildung 2: Aufriss Feld T13

diesen speziellen Fall gerecht wird – wie groß demnach die Kräfte sind, die durch einen Aufprall auf die Wand entstehen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass im Verlaufe des Aufpralls nicht nur Kräfte in Querrichtung sondern auch in Längsrichtung erzeugt werden können.
Die Sorge der Verantwortlichen ist, dass diese Kräfte die Vorschläge der ÖNORM eventuell überschreiten könnten.

1.2 Vorgehensweise

Aus der Problemstellung ergibt sich zunächst die Notwendigkeit, die benötigten theoretischen Grundlagen aufzuarbeiten und unter Berücksichtigung der Literatur zu diskutieren.
In Kapitel 3 und 4 werden die realen Gegebenheiten durch mechanische Modelle ersetzt. Dabei wird das dreidimensionale Problem auf zwei zweidimensionale Probleme zurückgeführt – ein System in Längsrichtung und ein System in Querrichtung. Außerdem werden Annahmen getroffen bezüglich Geschwindigkeitsangaben, Massenangaben und Geometrieangaben der Taurus Lok 1116. Zusätzlich wird das Versuchsergebnis der Fa. SIEMENS eingebunden und für die Berechnungen, die im Zuge der Arbeit folgen, angepasst.
Unter Berücksichtigung dieser Annahmen werden in Kapitel 5 die ersten Berechnungen mit ver-

einfachten Systemen durchgeführt.
In Kapitel 6 und 7 werden die Systeme unter Mitwirkung des Bodens für mehrere Verdichtungsklassen berechnet.

2 Theoretische Grundlagen [1], [2], [4], [11]

2.1 Die homogene Schwingungsgleichung

2.1.1 Ungedämpfter Einmassenschwinger

Das Modell des ungedämpften Einmassenschwingers besteht aus einer Masse M^* und einer Feder der Steifigkeit c^*. Die Feder wird linear elastisch angenommen.

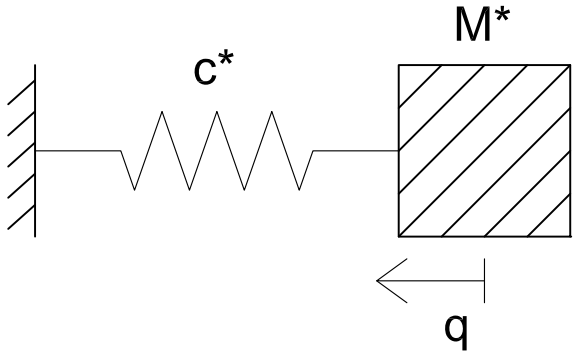


Abbildung 3: Modell Einmassenschwinger

Durch Anwendung des Impulssatzes ergibt sich die homogene Schwingungsgleichung

$$M^*\ddot{q}(t) + c^*q(t) = 0\,. \tag{1}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,. \tag{2}$$

$\omega = \sqrt{\frac{c^*}{M^*}}$ ist die Eigenkreisfrequenz, A und B ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Man kann die Lösung der Gleichung aber auch anders darstellen, indem man $A = a_h\cos(\epsilon)$ und $B = a_h\sin(\epsilon)$ setzt. Man kommt damit auf eine kürzere Darstellung der Lösung der Schwingungsgleichung

$$q(t) = a_h\cos(\omega t - \epsilon),\ \text{wobei}\ \ a_h = \sqrt{A^2 + B^2},\ \ \cos\epsilon = \frac{A}{a}\,. \tag{3}$$

2.1.2 Gedämpfter Einmassenschwinger

In dem System wird eine viskose Dämpfung r^* berücksichtigt, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Durch Anwendung des Impulssatzes ergibt sich die homogene Schwingungsgleichung für den gedämpften Einmassenschwinger

$$M^*\ddot{q}(t) + r^*\dot{q}(t) + c^*q(t) = 0\,. \tag{4}$$

Es gilt der Zusammenhang für das dimensionslose Lehr'sche Dämpfungsmaß, $\zeta = \frac{r^*}{2\omega M^*}$. Bei Stahl ist $\zeta < 0,02$, bei Stahlbeton ist $\zeta \approx 0,05$.

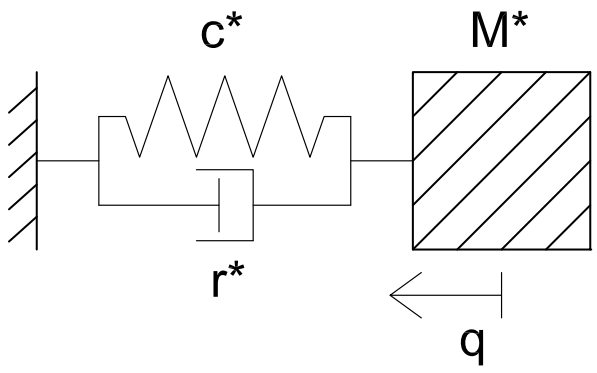


Abbildung 4: Modell gedämpfter Einmassenschwinger

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$q(t) = e^{-\zeta\omega t}\left[A\cos\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + B\sin\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right]\,. \tag{5}$$

Die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ ist für kleine ζ fast gleich jener des ungedämpften, $\omega_d \approx \omega$.

Die etwas kürzere Darstellung erhält man wieder durch Ersetzen von $A = a_h\cos(\epsilon)$ und $B = a_h\sin(\epsilon)$, und nach anschließendem Umformen folgt

$$q(t) = e^{-\zeta\omega t}a_h\cos(\omega_d t - \epsilon),\ \text{wobei}\ \ a_h = \sqrt{A^2+B^2},\ \ \cos\epsilon = \frac{A}{a}\,. \tag{6}$$

Bei der klassischen Stoßtheorie werden Anfagsgeschwindigkeiten ermittelt, mit denen der Schwinger erregt wird. Das heißt, die Lösungen der homogenen Schwingungsgleichungen werden durch die Anfangsbedingungen angepasst.

2.2 Inhomogene Schwingungsgleichung

Bei krafterregten Systemen ergibt durch die Anwendung des Impulssatzes

$$M^*\ddot{q}(t) + r^*\dot{q}(t) + c^*q(t) = F(t)\,. \tag{7}$$

Es ergibt sich eine inhomogene Differentialgleichung, wobei zuerst wieder das homogene Pro-

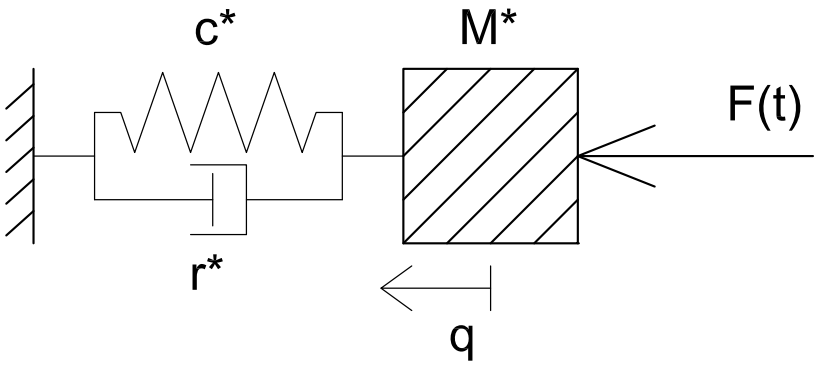


Abbildung 5: Modell krafterregter gedämpfter Einmassenschwinger

blem gelöst werden muss und dann ein partikulärer Ansatz angepasst wird. Ist F(t) jedoch ein allgemeiner (nicht periodischer) Kraft-Zeit-Verlauf und nicht mehr durch geschlossene mathematische Funktionen beschreibbar, lässt sich die Schwingungsgleichung durch das Duhamelsche Faltungsintegral numerisch lösen.

2.2.1 Das Duhamelsche Faltungsintegral für Kraftanregung

Gegeben ist ein allgemeiner Kraft-Zeit-Verlauf. Der Belastungsverlauf wird gedanklich als eine

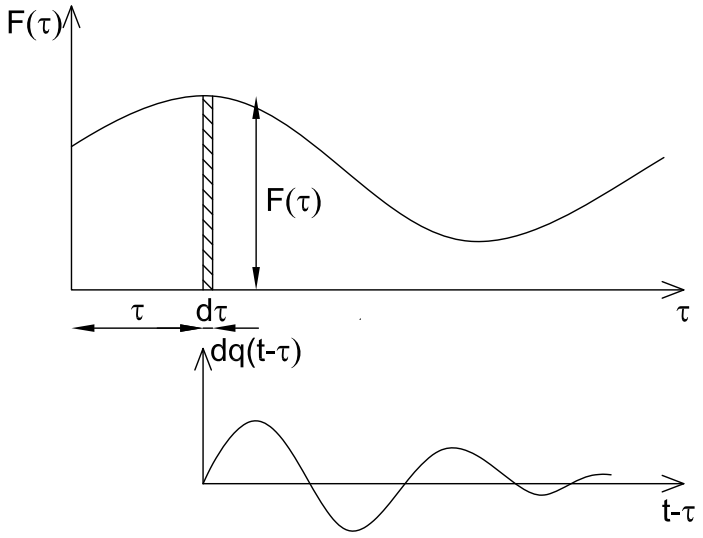


Abbildung 6: Allgemeiner Kraft-Zeit-Verlauf mit der Schwingungsantwort auf einen Einzelimpuls

Summe von Einzelimpulsen $p(\tau)d\tau$ aufgefasst. Der Impulssatz (mit $\epsilon \longrightarrow 0$)

$$J(\tau+\epsilon) - J(\tau-\epsilon) = F(\tau) \tag{8}$$

liefert mit

$$J(\tau-\epsilon) = 0, \;\; J(\tau+\epsilon) = m\, d\dot{q}_0 \tag{9}$$

die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = \tau$ für den Einzelimpuls $F(\tau)d\tau$:

$$d\dot{q}_0(t=\tau) = \frac{F(\tau)d\tau}{m}\,. \tag{10}$$

Die Antwort des Einmassenschwingers zufolge eines Einzelimpulses wird durch die homogene Bewegungsgleichung

$$d\ddot{q} + 2\zeta\omega d\dot{q} + \omega^2 dq = 0 \tag{11}$$

beschrieben. Ihre Lösung mit der Anfangsgeschwindigkeit $d\dot{q}_0(t=\tau)$ und mit der Anfangsauslenkung dq_0 ist Null ist:

$$dq(t) = \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau), \qquad t \geq \tau\,. \tag{12}$$

Die Gesamtlösung ist die Aufsummierung aller Antworten dq von $\tau = 0$ bis $\tau = t$. Es ergibt sich das Duhamel'sche Faltungsintegral:

$$q(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_{\tau=0}^{t} F(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) d\tau \,. \tag{13}$$

Im Duhamelschen Faltungsintegral ist bereits die Lösung zufolge den homogenen Anfangsbedingungen $q_0 = 0$ und $\dot{q}_0 = 0$ enthalten.

2.3 Die klassische Stoßtheorie

Von einem Stoß bzw. einer stoßartigen Belastung spricht man dann, wenn sehr große Kräfte während eines kurzen Zeitraumes auf einen Körper einwirken. Die Annahme ist, dass sich der Geschwindigkeitszustand des Körpers sprunghaft ändert. Die Dauer des Kraft - Stoßverlaufes geht gegen Null, und die Lage des gestoßenen Körpers bleibt während des Stoßes unverändert.

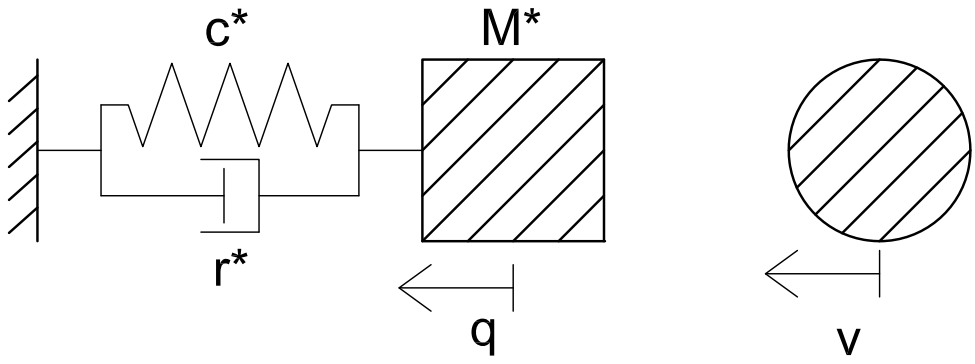


Abbildung 7: System unmittelbar vor dem Stoß

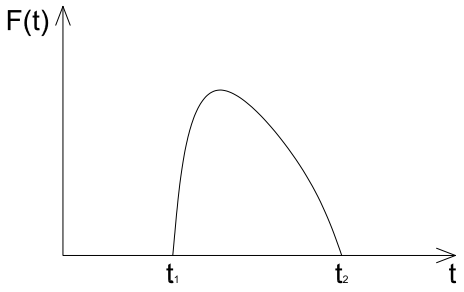


Abbildung 8: allgemeiner Kraft - Zeit - Verlauf eines Stoßvorganges

Der Impulserhaltungssatz lautet somit

$$\vec{J}(t_2) - \vec{J}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\, dt \,, \tag{14}$$

wobei $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ mit $\vec{F}_i$ als äußerer Einzelkraft. Wenn man die Dauer des Stoßvorganges

gegen 0 gehen lässt, also $(t_1, t_2) \longrightarrow 0$, ist die erste Stoßgleichung

$$\vec{J}' - \vec{J} = \sum_{i=1}^{n} \lim_{(t_1,t_2)\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \, dt = \sum_{j=1}^{m\leq n} \vec{S}_j \,. \tag{15}$$

Die Aussage der ersten Stoßgleichung heißt:
Die Änderung des Impulses ist gleich dem Stoßantrieb.
Bezogen auf diese Arbeit werden folgende Annahmen getroffen:

- zwei starre Massen in translatorischer Bewegung
- zentrischer Stoß
- die Geschwindigkeit der gestoßenen Masse (Rahmen - Bohrpfahlwand) ist Null

$$mv' - mv = -S \qquad \longrightarrow \quad \text{System Zug} \tag{16}$$

$$M\dot{q}' = S \qquad \longrightarrow \quad \text{System Rahmen} \tag{17}$$

Elimination von S ergibt die erste Stoßgleichung vereinfacht zu

$$mv' + M\dot{q}' = mv \,. \tag{18}$$

2.3.1 Der vollkommen elastische Stoß

Beim vollkommen elastischen Stoß ist kein Energieverlust im Gesamtsystem, das heißt die Bedingung ergibt sich aus dem Energiesatz: In einem konservativen System (die Reibung wird vernachlässigt) bleibt die Gesamtenergie erhalten, daraus folgt:
Die Gesamtenergie unmittelbar vor dem Stoß ist gleich der Gesamtenergie unmittelbar nach dem Stoß. Die Bedingung des elastischen Stoßes lautet somit

$$\begin{aligned} T + V &= T' + V' \,, \\ \text{oder } \; T &= T' \,, \\ \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}'^2 &= \frac{1}{2}mv^2 \,. \end{aligned} \tag{19}$$

Aus den beiden Beziehungen (19) und (18) erhält man die Geschwindigkeit der Masse m (Lok) nach dem Stoß

$$v' = v\frac{m - M^*}{m + M^*} \tag{20}$$

und die Geschwindigkeit der Masse M^* (System Rahmen) nach dem Stoß

$$\dot{q}' = v\left(\frac{m - M^*}{m + M^*} + 1\right) \,. \tag{21}$$

2.3.2 Der vollkommen unelastische Stoß

Beim vollkommen unelastischen Stoß wird ein Teil der kinetischen Energie in Verformungsenergie dissipiert, das heißt der Energiesatz gilt nicht mehr. Bei der Stoßbedingung des vollkommen

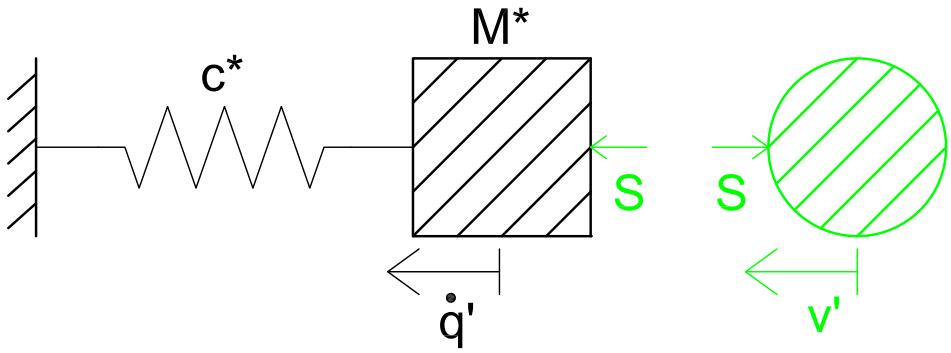


Abbildung 9: System unmittelbar nach dem elastischen Stoß

unelastischen Stoßes geht man davon aus, dass die Geschwindigkeiten der Massen in Stoßnormalrichtung nach dem Stoß gleich sind. Die Stoßbedingung lautet demnach:

$$\dot{q}' = v' \,. \tag{22}$$

Einsetzten der Stoßbedingung (22) in die Beziehung (18) ergibt die Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Stoß

$$v' = \dot{q}' = v \frac{m}{m + M^*} \,. \tag{23}$$

Im Rahmen dieser Arbeit gilt die Annahme, dass unmittelbar nach dem vollkommen unelas-

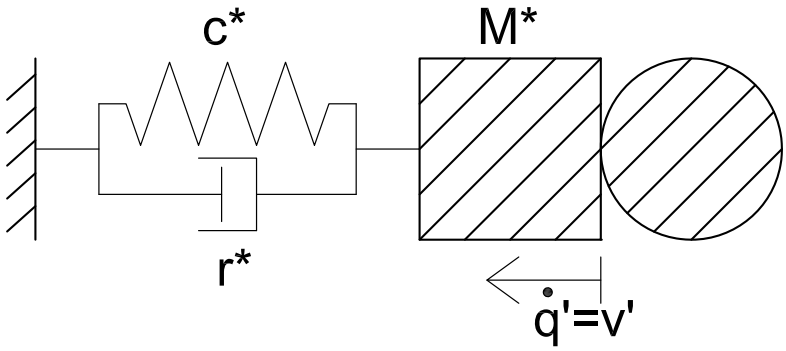


Abbildung 10: System unmittelbar nach dem vollkommen unelastischen Stoß

tischen Stoß die stoßende Masse (Lok) zusammen mit der gestoßenen Masse (Rahmen) eine Einheit bilden.

2.3.3 Der Reale Stoß

Der vollkommen elastische und vollkommen unelastische Stoß sind Extremfälle. Der reale Stoß liegt zwischen diesen beiden Werten.
Man definiert den Grad der Plastifizierung mit einer Stoßzahl β mit $0 \leq \beta \leq 1$. Einsetzen für $\beta = 0$ ergibt den vollkommen unelastischen Stoß, für $\beta = 1$ den elastischen Stoß. Die Stoßbedingung für den realen Stoß ist:

$$\dot{q}' - v' = \beta(v - \dot{q}) \;, \quad \dot{q} = 0 \,. \tag{24}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (24) in (18) erhält man die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v' = v\frac{m - \beta M^*}{m + M^*}\,, \qquad \dot{q}' = v\left(\frac{m - \beta M^*}{m + M^*} + \beta\right)\,. \tag{25}$$

2.4 Energiesatz und Umkehrlage

2.4.1 Energiesatz der Mechanik

Der Energiesatz der Mechanik besagt, dass die Summe der mechanischen Energie (kinetische und potentielle Energie) des Körpers während der Bewegung in einem konservativen Kraftfeld konstant bleibt. Vorraussetzung für ein konservatives Kraftfeld sind keine Reibung und keine Dämpfung. Der Energiesatz lautet für die Zeitpunkte t_1 und t_2

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2\,, \tag{26}$$

angewendet auf das aktuelle Problem ergibt sich

$$T' + V' = T_u + V_u\,. \tag{27}$$

2.4.2 Die Umkehrlage

Unmittelbar nach dem Stoß hat der lineare Schwinger keine Anfangsauslenkung, $q_0 = 0$, und eine durch den Stoß induzierte Anfangsgeschwindigeit $\dot{q}_0 = 0$. Zu diesem Zeitpunkt t' hat die potentielle Energie ihr Minimum. Wenn man berücksichtigt, dass das Gewichtspotential in allen Lagen des Schwingers konstant ist, kann man das Problem auf das Potential der inneren Kräfte zurückführen, das zum Zeitpunkt t' gleich Null ist. Die kinetische Energie hat jedoch ihr Maximum.

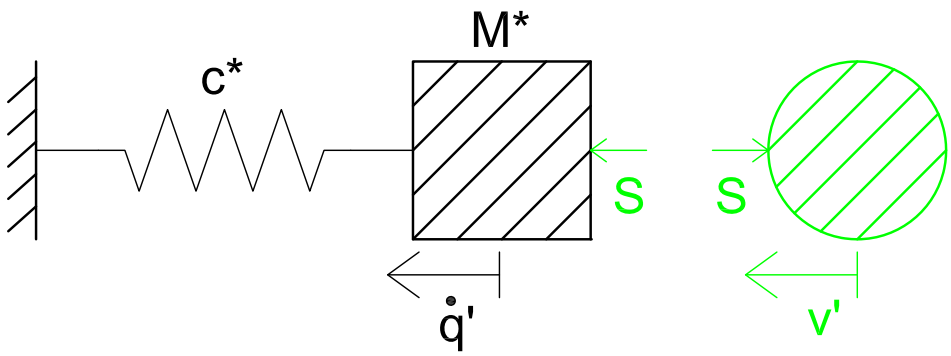


Abbildung 11: Auslenkung des Schwingers zm Zeitpunkt t'

Von Interesse ist der Zeitpunkt t_u der Umkehrlage und dessen Auslenkung q_u.
Zum Zeitpunkt t_u hat die kinetische Energie ihr Minimum, sie ist Null, und die potentielle Energie hat ihr Maximum. Einsetzen in Gleichung (27) ergibt:

$$\frac{M^*\dot{q}'^2}{2} + 0 = 0 + \frac{c^* q_u^2}{2}\,.$$

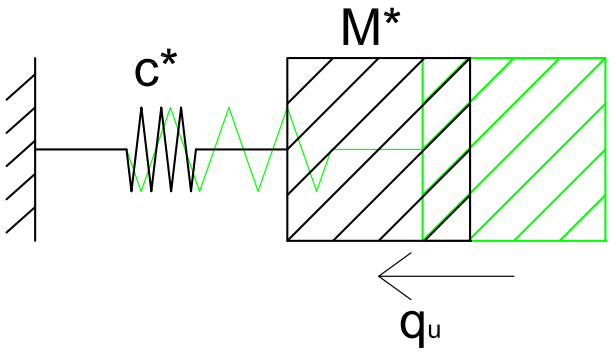


Abbildung 12: Auslenkung des Schwingers zum Zeitpunkt t_u

Durch Umformen erhält man die Auslenkung in der Umkehrlage

$$q_u = \sqrt{\frac{M^*}{c^*}}\dot{q}' = \frac{\dot{q}'}{\omega}\,. \tag{28}$$

2.4.3 Statisch äquivalente Ersatzkraft

Aus der Umkehrlage kann man nun durch folgende lineare Beziehung

$$F_{stat} = c^* \cdot q_u \tag{29}$$

jene äquivalente statische Kraft berechnen, die notwendig wäre, um eine solche Auslenkung in einem ungedämpften Schwinger hervorzurufen. Mittels dieser Belastung lassen sich anschließend Schnittkräfte berechnen, die mit zulässigen Werten verglichen werden .

2.5 Generalisierter Einmassenschwinger

Die hauptsächlich auftretenden mechanischen Systeme in dieser Arbeit sind kontinuierliche Rahmentragwerke. Jedes kontinuierliche System kann als diskreter Mehrmassenschwinger angenähert werden. Bei deutlich ausgeprägter Grundfrequenz genügt die Approximation in Form eines Einmassenschwingers, der durch die Parameter c^*, r^* und M^* charakterisiert wird. Die zugehörige Bewegungsgleichung kann z.B. mit Hilfe der Lagrange'schen Bewegungsgleichung formuliert werden. Die Lagrange'sche Bewegungsgleichung lautet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0\,. \tag{30}$$

Der Ritz'sche Ansatz separiert die Durchbiegungsfunktion in eine nur von der Zeit abhängige Lagekoordinate $q(t)$ und eine nur vom Ort abhängige Formfunktion $\phi(x)$:

$$w(x,t) = q(t).\phi(x)\,. \tag{31}$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (31), konstanter Dichte und konstanter Querschnittsabmessung über die Länge L der deformierbaren Rahmenabschnitte ergibt sich die kinetische

Energie T zu

$$T = \frac{1}{2}\rho A \int_{x=0}^{L} \dot{w}(x,t)dx = \frac{1}{2}\rho A \int_{x=0}^{L} \phi(x)^2 \dot{q}(t)^2 dx = \frac{1}{2}\rho A \dot{q}(t)^2 \int_{x=0}^{L} \phi(x)^2 dx\,. \tag{32}$$

In Abwesenheit von äußeren Erregerkräften reduziert sich das gesamte Potential V zu der Energie der inneren Kräfte

$$V = U = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{L} EI(w'')^2 dx = \frac{1}{2}q^2 EI \int_{x=0}^{L} (\phi'')^2 dx\,. \tag{33}$$

Einsetzen in die Beziehung (30) liefert die Schwingungsgleichung

$$\rho A \int_{x=0}^{L} \phi(x)^2 dx\, \ddot{q} \;+\; EI \int_{x=0}^{L} (\phi'')^2 dx\, q = 0\,. \tag{34}$$

Koeffizientenvergleich mit Gleichung (1) führt auf die Ersatzmasse M^*

$$M = \rho A \int_{x=0}^{L} \phi(x)^2 dx \tag{35}$$

und die Ersatzsteifigkeit c^*

$$c = EI \int_{x=0}^{L} (\phi'')^2 dx\,. \tag{36}$$

Für die Berechnung des Ausschwingvorganges kann in diesem System mit einem Freiheitsgrad die Dämpfung nachträglich (in modaler Form) berücksichtigt werden.

2.6 Das Bettungsmodulverfahren

Bei Stoßproblemen, wie sie in dieser Arbeit vorkommen, ist die Mitwirkung des Bodens sehr wichtig. Bei horizontal beanspruchten Pfählen ist das Bettungsmodulverfahren sehr geeignet.
Die Bettungsspannungen im Boden ergeben sich zu

$$\sigma_h(z) = k_{sh}(z) \cdot s(z)\,. \tag{37}$$

Der Bettungsmodul k_{sh} wird aufgrund der Untergrundverhältnisse abgeschätzt und ist abhängig von den Parametern

- Steifemodul,
- Scherfestigkeit des Bodens,
- Art der Konstruktion,
- Form der Kontaktfläche zwischen Boden und Bauwerk und
- von der Tiefenlage

Bettungsmoduln werden in der Regel als veränderlich mit der Tiefe angenommen. In dieser Arbeit wird ein parabolischer Verlauf bis in eine gewisse Tiefe angenommen und anschließend ein konstanter Verlauf.
Der Bettungsmodul wird durch diskrete Federn angesetzt. Der Abstand der Federn wurde so

gewählt, dass er kleiner als der Durchmesser des Bohrpfahles ist. Es wurde ein Abstand von $1m$ gewählt.
Die Bettungsspannungen können nie größer werden als der passive Erddruck. Sollte das in der Berechnung doch der Fall sein, muss der Verlauf der Bettungsspannung im jeweiligen Bereich auf die Größe des passiven Erddruckes abgemindert werden.
Die Formel des passiven Erddruckes für nicht kohäsive Böden ist:

$$e_{ph} = \gamma\, h\, \lambda_p, \quad \lambda_p = \tan(45 + \frac{\varphi}{2})^2 . \tag{38}$$

Bei dynamischen Problemen, bei denen mit statischen Äquivalenzkräften gerechnet wird, ist F_{stat} von der Steifigkeit des Systems abhängig. Kommt es nach der ersten Berechnung in gewissen Bereichen zum Fließen des Bodens, das heißt, wird der passive Erdruck überschritten, muss die mögliche Spannung abgemindert werden und es kommt in der Folge zu einer Veränderung der Steifigkeit des Systems. Folglich muss die statische Äquivalenzkraft iterativ angenähert werden.

3 Mechanische Modellierung [8], [9], [10]

Das tragende System im Feld T13 besteht aus 17 m langen Bohrpfahlwänden, die unterhalb der Bodenoberkante des Tunnels noch 10 m in das Erdreich ragen. Der nur schwach veränderliche Riegelquerschnitt wird in den Berechnungen durch einen konstanten Querschnitt angenähert. Für einen Grund- und Aufriss des Feldes T13 siehe Kapitel 1.1 Seite 1.

3.1 Modellierung des reduzierten Rahmensystems

Es wird vorausgesetzt, dass der Zug in einem gewissen Winkel α gegen den Bohrpfahl in einer Höhe von 1,80 m prallt. Daraus ergeben sich je eine Belastungskomponente quer und eine Belastungskomponente längs zur Fahrtrichtung. Bei der ersten Modellierung wird die Mitwirkung des Bodens quer zur Fahrtrichtung noch nicht berücksichtigt, auf Grund des 10 m in den Boden reichenden Bohrpfahls wird zunächst der Rahmen in Querrichtung auf Höhe der Tunnelunterkante abgeschnitten und dort das restliche System durch eine Drehfeder und eine Wegfeder ersetzt. Eine Mitwirkung benachbarter Rahmensysteme wird nicht miteinberechnet.
In Längsrichtung wird keine Mitwirkung des Bodens berücksichtigt, da sich das Erdreich, das zwischen den Bohrpfählen befindet, bei Belastungen in Längsrichtung mitbewegt und daher keinen nennenswerten Widerstand aufbringen kann.

3.1.1 Querrahmen

Die Abmessungen des dynamischen Systems in Querrichtung zeigen sich gemäß Abbildung 13.

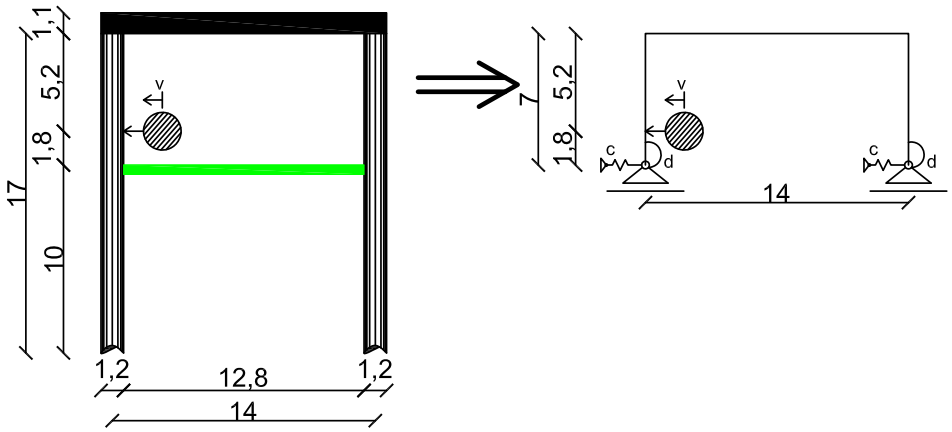


Abbildung 13: Mechanisches System in Querrichtung $[m]$

3.1.2 Längsrahmen

Die Abmessungen der Bohrpfahlwand in Längsrichtung zeigen sich in Abbildung 14.
Da sich die Bohrpfahlwand in Längsrichtung so weit erstreckt wie der Tunnel lange ist, werden für das dynamische Berechnungssystem so viele Bohrpfähle aktiviert, dass sich die Steifigkeit des Gesamtsystems in Längsrichtung nur mehr um weniger als $3,7\%$ verändert. Aus baustatischen Überlegungen wird vorausgesetzt, dass sich die Steifigkeit bei ansteigender Anzahl der Bohrpfahlwände einem Grenzwert annähert. Das daraus folgende mechanische System zeigt sich in

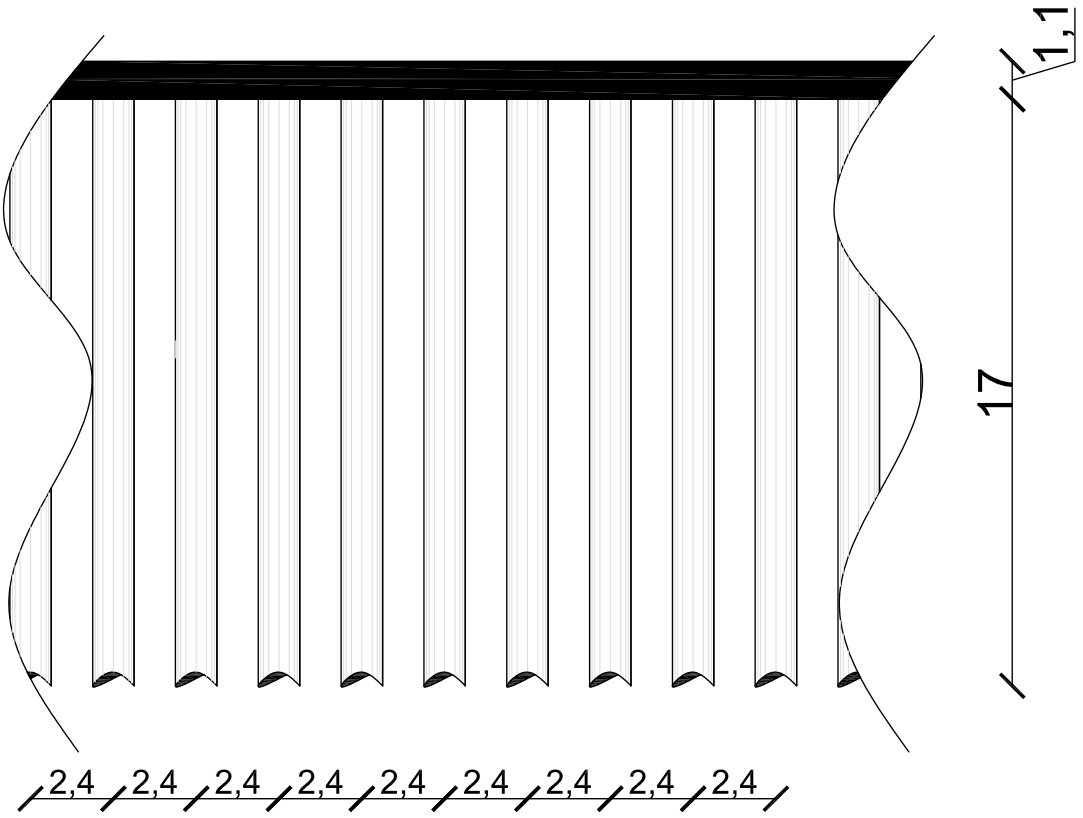


Abbildung 14: Bohrpfahlwand [m]

Abbildung 15.
Es hat sich gezeigt, dass vom dritten auf das vierte Feld sich die Gesamtsteifigkeit nur mehr um drei Prozent ändert.

3.2 Modellierung des gebetteten Rahmensystems

Bei der Bettung wird die Federwirkung des Bodens berücksichtigt und das gesamte System in die Rechnung miteinbezogen. Gebettet wird das Rahmensystem nur in Querrichtung, in Längsrichtung wird keine Bettung angenommen. Die Abmessungen des dynamischen Systems zeigen sich in Abbildung 16.

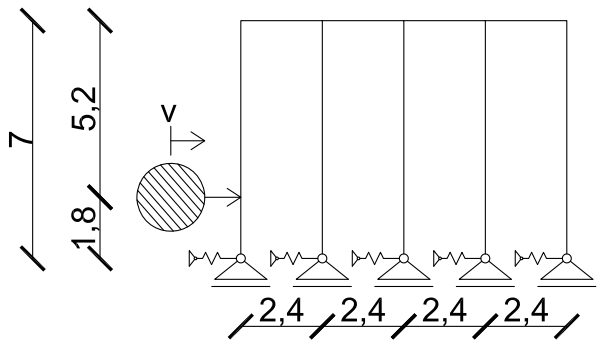


Abbildung 15: Mechanisches System in Längsrichtung [m]

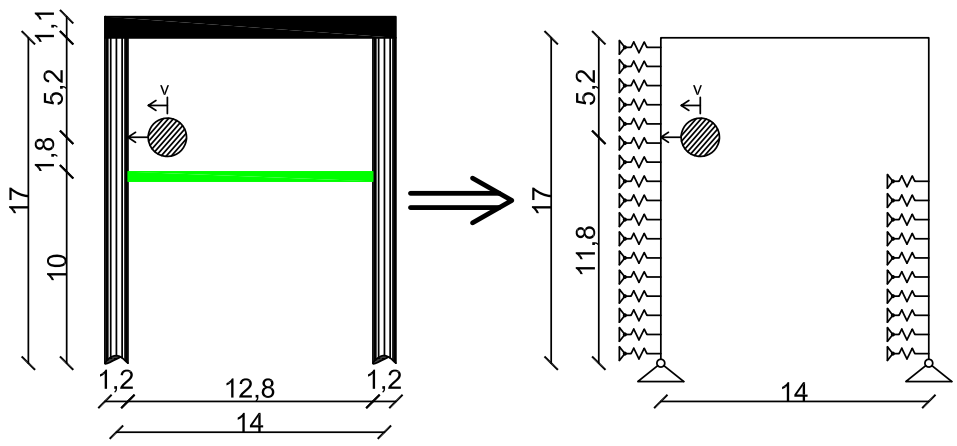


Abbildung 16: Mechanisches System in Querrichtung gebettet [m]

3.3 Ermittlung der Querschnittswerte

3.3.1 Ermittlung der Querschnittswerte des Bohrpfahles

Wie in Abbildung 14 dargestellt, setzt sich die Bohrpfahlwand aus Pfählen zusammen, die in einem mittleren Abstand von 2,40 m angeordnet sind. Die Beschaffenheit der Bohrpfahlwand ist großteils auf beiden Seiten gleich. Die genauen Querschnittsabmessungen eines Bohrpfahles werden in Abbildung 17 gezeigt. Die Biegebewehrung des Bohrpfahls besteht aus 2x24 Stäben

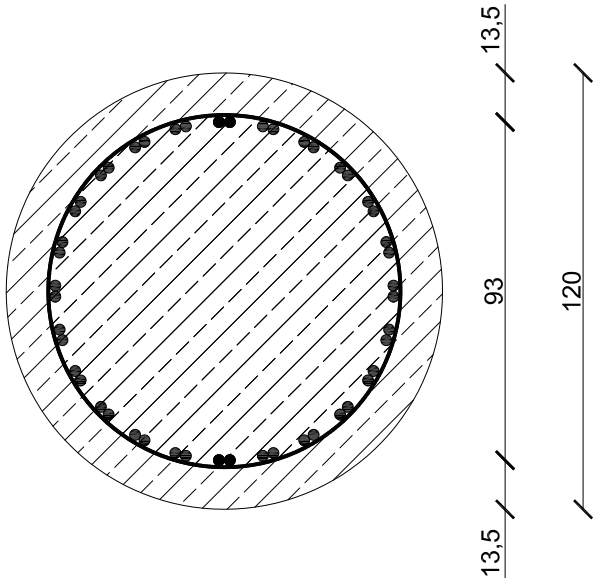


Abbildung 17: Schnitt durch den Bohrpfahl [cm]

mit ⌀ 30 mm. Das ergibt in Summe eine Gesamtbewehrungsfläche von 340 cm^2 pro Bohrpfahl. Die Bügelbewehrung ist in Form einer Wendelbewehrung ausgeführt, an der die Biegebewehrung angebunden bzw. angeschweißt wird. Zur Ermittlung des Trägheitsmomentes wird ein etwas einfacherer Querschnitt verwendet, bei dem die kreisförmig angeordneten Bewehrungsstäbe durch einen konstanten Bewehrungsring mit gleicher Fläche ersetzt werden. Die genaue Lage des Be-

wehrungsrings wird in folgender Gleichung ermittelt:

$$\begin{aligned} A_{Ring} &= \left(R^2 - r^2\right)\pi = \left[(46,5+c)^2 - (46,5-c)^2\right]\pi = 339,3\,cm^2 \\ c &= 0,582\,cm\,. \end{aligned}$$

Die Dicke des fiktiven Kreisringes ergibt sich zu $2c = 1,164\,cm$, die gesamte Geometrie des fiktiven Querschnitts ist der Abbildung 18 zu entnehmen. Zur Berechung des Trägheitsmoments

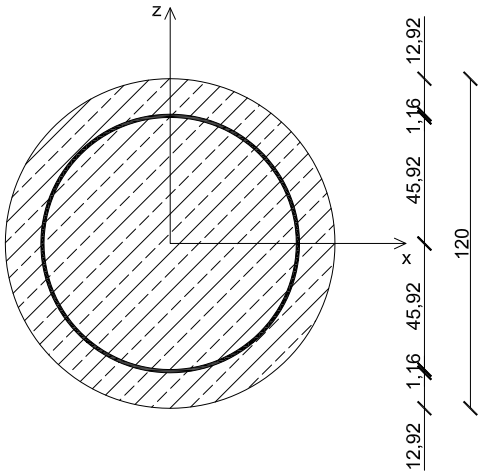


Abbildung 18: Fiktiver Querschnitt durch den Bohrpfahl $[cm]$

wird der aus mehreren Werkstoffen bestehende Qerschnitt mittels Verhältnis der E-Moduln auf einen Werkstoff umgerechnet:

$$\eta = \frac{E_s}{E_c} = 6,885\,. \tag{39}$$

Wobei der E-Modul von Stahl $E_s = 21\,000\,\frac{kN}{cm^2}$ und der E-Modul von Beton $E_c = 3\,050\,\frac{kN}{cm^2}$ ist. Berechnung des Trägheitsmoments des Bohrpfahls unter der Berücksichtigung der Formel des Trägheitsmoments eines Kreisquerschnittes mit dem Radius r ($I = \pi\frac{r^4}{4}$):

$$\begin{aligned} I_x = I_z = &\left[\pi\frac{60^4}{4} - \pi\frac{(45,918+1,164)^4}{4}\right] + \left[\pi\frac{(45,918+1,164)^4}{4} - \right. \\ &\left.\pi\frac{45,918^4}{4}\right]\cdot 6,885 + \pi\frac{45,918^4}{4} = 12\,342\,855\;cm^4\,. \end{aligned}$$

3.3.2 Ermittlung der Querschnittswerte des Riegels

Wie bereits in Kapitel 3, Seite 14 erwähnt, ist der Riegelquerschnitt ein Querschnitt veränderlicher Höhe, die Querschnittshöhe wird aber gemittelt und als konstant angenommen. Um von der Decke auf einen Riegelquerschnitt zu kommen, werden 1,50 m aus der Decke in Querrichtung herausgeschnitten, das heißt, eine Verteilungswirkung auf benachbarte Rahmensysteme wird nicht berücksichtigt. Eine Skizze des Querschnitts zeigt Abbildung 19, die Bewehrungsstäbe sind schon durch konstante Flächen ersetzt worden. Die grün gefärbten Flächen sind die Schwerpunktabstände der einzelnen Flächen von der Gesamtschwerlinie. Unter Berücksichtigung, dass

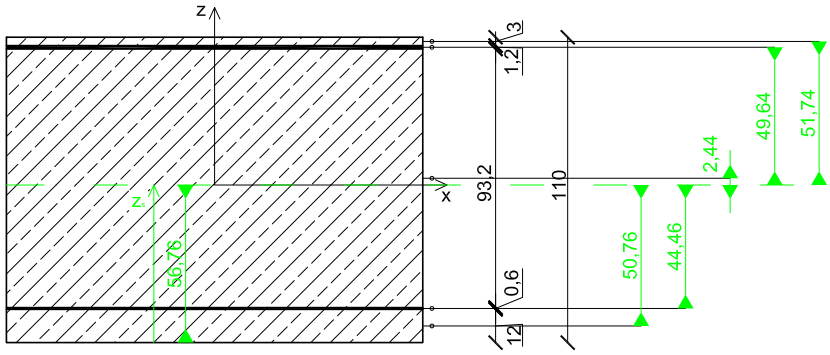


Abbildung 19: Schnitt durch den Riegel $[cm]$

$\bar{z}$-Koordinate von unten nach oben wandert, ergibt sich die Koordinate der Schwerlinie:

$$
\begin{aligned}
\bar{z}_s &= \frac{\sum_i A_i \bar{z}_{si}}{\sum_i A_i} = \\
&= \Bigg[12 \cdot 150 \cdot 6 + 0,6 \cdot 150 \cdot \left(12 + \frac{0,6}{2}\right) \cdot 6 \cdot 885 + 93,2 \cdot 150 \cdot \left(12 + 0,6 + \frac{93,2}{2}\right) + \\
&\quad +1,2 \cdot 150 \cdot \left(12 + 0,6 + 93,2 + \frac{1,2}{2}\right) \cdot 6,885 + 3 \cdot 150 \cdot \left(12 + 0,6 + 93,2 + 1,2 + \frac{3}{2}\right)\Bigg] \\
&\quad / \\
&\quad [150 \cdot (12 + 93,2 + 3) + 150 \cdot (0,6 + 1,2) \cdot 6,885] \\
&= 56,76\, cm\,.
\end{aligned}
$$

Das Trägheitsmoment um die y-Achse lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
I_y = & \sum_i I_{yi,eigen} + A_i z_{si}^2 = \\
= & \left[150 \cdot \frac{12^3}{12} + 150 \cdot 12 \cdot 50,76^2\right] + \left[150 \cdot \frac{0,6^3}{12} + 150 \cdot 0,6 \cdot 44,46^2\right] \cdot 6,885 + \\
& + \left[150 \cdot \frac{93,2^3}{12} + 150 \cdot 93,2 \cdot 2,44^2\right] + \left[150 \cdot \frac{1,2^3}{12} + 150 \cdot 1,2 \cdot 49,64^2\right] \cdot 6,885 + \\
& + \left[150 \cdot \frac{3^3}{12} + 150 \cdot 3 \cdot 51,74^2\right] = 20\,345\,961\, cm^4\,.
\end{aligned}
$$

Das Trägheitsmoment I_y wird sowohl für das System in Längsrichtung als auch für das System in Querrichtung verwendet.

4 Berechnungsvorgaben [5], [7]

4.1 Massenangaben

Als Anstoßobjekt wird eine Lok vom Typ *Taurus 1116* gewählt. Ihr Dienstgewicht beträgt 86 t. Da aber ein Versuch der Fa. SIEMENS AG vorliegt, bei dem ein Anfahrstoß einer Taurus Lok mit einer Masse von 89 t durchgeführt wurde, wird aus Vergleichsgründen diese Masse für die Berechnungen zugrunde gelegt.
Der Fahrzeugaufbau besteht aus zwei bereiften Drehgestellen, die durch einen steifen Stahlrahmen miteinander verbunden sind. Es wird angenommen, dass das stoßende System um ein Vielfaches steifer ist als das gestoßene System (Bauwerk).
Aufgrund dieser Annahmen wird die Lok im Berechnungsmodell durch eine Punktmasse von 89 t ersetzt.

4.2 Geometrieangaben

Die Mittellinie der Puffer der Lok befinden sich in einer Höhe von 1040 mm. Da die Taurus Lok mit einem Elektromotor und sonstigen notwendigen technischen Einrichtungen versehen ist, die sich alle in einer höheren Lage befinden, muss davon ausgegangen werden, dass der Schwerpunkt um einiges höher liegt. Außerdem muss die Lok vor dem Anstoß noch einen kleinen Betonsockel überwinden, was den Anstoßpunkt noch höher setzt. Die Anstoßhöhe wird in 1,80 m Höhe von Tunnelunterkante angenommen, was der Norm entspricht.

4.3 Geschwindigkeitsvorgaben

Die gewünschte Projektierungsgeschwindigkeit im Tunnel beträgt $80\frac{km}{h}$. Von der SIEMENS AG wurde aber wie bereits erwähnt ein Stoßversuch durchgeführt, in dem eine Lok mit $18\frac{km}{h}$ (das entspricht $5\frac{m}{s}$) gegen eine starre Wand fährt. Dieser Versuch macht es möglich die klassische Stoßtheorie mit der Antwort aperiodischer Schwingungsanregung (Duhamel Integral) zu vergleichen. Deswegen werden die Berechnungen alle mit $5\frac{m}{s}$ durchgeführt.
Um auf die Kräfte bei einer Geschwindigkeit von $80\frac{km}{h}$ zu kommen, müssen die Kräfte bei $5\frac{m}{s}$ mit dem Faktor 4,44 multipliziert werden, was nur funktioniert, solange das System linear elastisch reagiert.

4.4 Vorgaben der ÖNORM

Tabelle 1 ist ein Auszug der Tabelle 4.4 aus der ÖNORM EN 1991-1-7 (Eurocode 1 - Einwirkungen auf Tragwerke, Teil 1-7: Allgemeine Einwirkungen - Außergewöhnliche Einwirkungen).
Endergebnisse der Berechnung (Äquivalenzkräfte) sind anschließend mit den Werten der Norm zu vergleichen.

4.5 Versuchsergebnis eines Anfahrstoßes

Dank der Mitarbeit der Fa. SIEMENS AG war es möglich, Zugriff auf ein Versuchsergebnis zu bekommen.
Bei dem Versuch ließ man eine Taurus Lok mit einer Masse von 89 t mit $5\frac{m}{s}$ gegen eine starre Wand prallen.

Abstand d des Hindernisses von der Mittelachse des nächstgelegenen Gleises [m]	Kraft ${F_{dx}}^a$ [kN]	Kraft ${F_{dy}}^a$ [kN]
Bauelement: $d < 3m$	Im Einzelfall zu spezifizieren. Weitere Hinweise liefert der Anhang B	Im Einzelfall zu spezifizieren. Weitere Hinweise liefert der Anhang B
Bei durchlaufenden Wänden und wandähnlichen Konstruktionen: $3m \leq d \leq 5m$	4 000	1 500
$d > 5m$	0	0
[a] x = in Fahrtrichtung; y = quer zur Fahrtrichung.		

Tabelle 1: Tabelle 4.4 der ÖNORM EN 1991-1-7

Das Ergebnis ist ein Kraft-Verformungs-Verlauf in Abbildung 20. Der Stoßvorgang dauert 200 ms und die anschließende Rückfederung der Lok nochmal 60 ms, also insgesamt 260 ms.
Zur dynamischen Auswertung ist jedoch ein Kraft-Zeit-Verlauf notwendig. Da aber nicht genau gesagt werden kann, wie groß die Dauer der einzelnen Abschnitte des Verlaufes ist, wird das geschätzte Mittel der Kurve konstant angenommen und so der Kraft-Zeit-Verlauf angenähert. Der Kraft-Zeit-Verlauf ist der Abbildung 21 zu entnehmen.

Für diese aperiodische Anregung wird eine Schwingungsantwort mittels Duhamelschen Faltungsintegral berechnet.

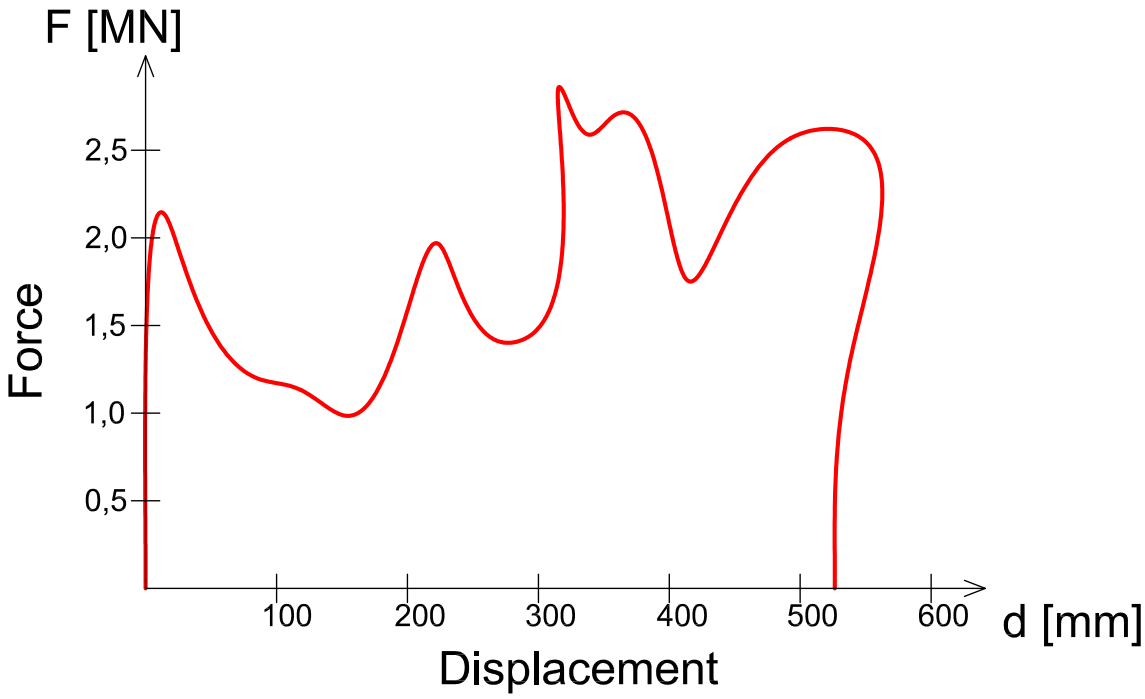


Abbildung 20: Kraft-Verformungs-Verlauf

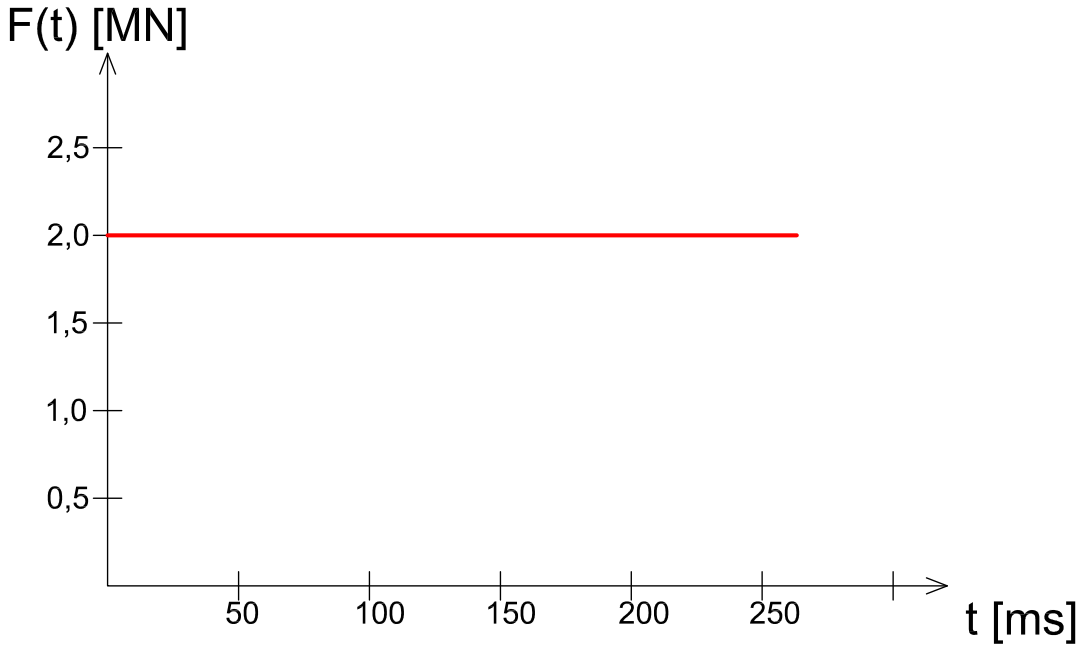


Abbildung 21: Kraft-Zeit-Verlauf

5 Berechnung des eingespannten Systems [6]

5.1 Die klassische Stoßtheorie

Ausgegangen wird vom System Querrahmen, das in Abbildung 13 zu sehen ist. Jedoch werden die Drehfeder und die Wegfeder als unendlich steif angenommen, wodurch in Höhe Tunnelunterkante eine Einspannung entsteht.

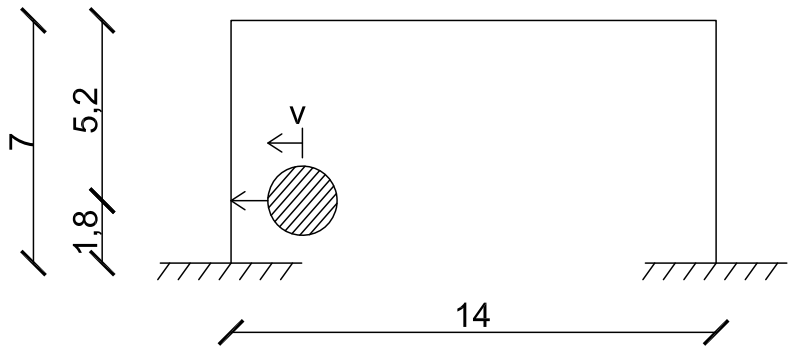


Abbildung 22: Vereinfachtes mechanisches System Querrahmen $[m]$

Auch beim Längssystem gem. Abbildung 14 wird in Höhe Tunnelunterkante die Wegfeder und die Drehfeder als unendlich steif angenommen und somit das System statisch eingespannt. Die Änderung der Steifigkeit des Systems vom dritten auf das vierte Feld beträgt nur mehr 3,7 Prozent, weshalb nur vier Felder bei der dynamischen Analyse berücksichtigt werden.

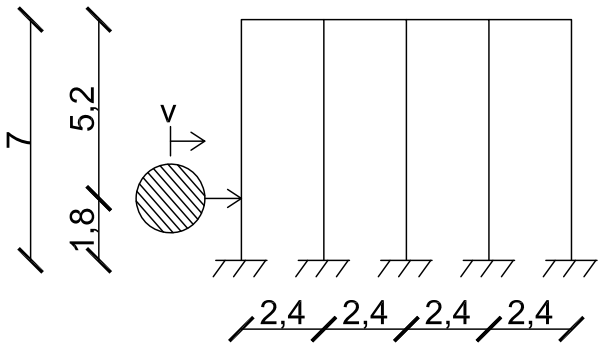


Abbildung 23: Vereinfachtes mechanisches System Längsrahmen $[m]$

5.1.1 Stoß auf den Querrahmen

Zunächst wird das System als Einmassenschwinger generalisiert. Dazu müssen Ersatzsteifigkeit c^* und Ersatzmasse M^* berechnet werden. Wenn man das System mit einer bekannten Kraft F belastet, lässt sich die Durchbiegung w ermitteln und $c^* = \frac{F}{w}$ ergibt sich als Ersatzfedersteifigkeit für das Gesamtsystem. Im gegebenen Fall wird $c^* = \frac{1}{w(x=1{,}8)} = 2\,941\,176\,500\,\frac{N}{m}$.

Die Berechnung der Ersatzmasse erfolgt gemäß der Beziehung (35). Die Formfunktionen $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, (2x Stiel, 1x Riegel) werden dadurch erzeugt, dass sie an die Durchbiegungsfunktion

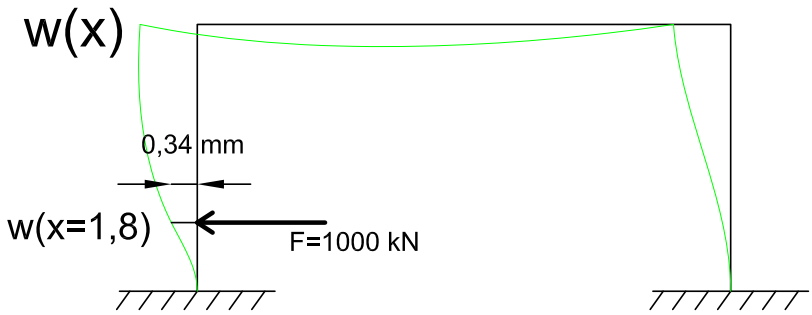


Abbildung 24: Durchbiegungsfunktion zufolge Kraft F

durch Polynome approximiert werden und anschließend durch die Durchbiegung an der Stelle $x = 1,8$ normiert werden.
Die Approximation der ersten Formfunktion erfolgt durch ein Polynom vierten Grades:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \tag{40}$$

Abbildung 25 zeigt die Durchbiegungsfunktion des Stiels. Die fünf Unbekannten lassen sich durch

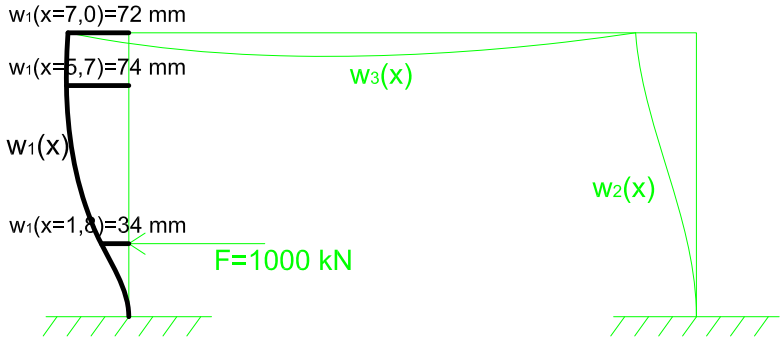


Abbildung 25: Durchbiegungsfunktion des Stiels zufolge Kraft F

folgende Bedingungen bestimmen:

$$\begin{aligned}
w'(x=0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a_1 = 0 \\
w(x=0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a_2 = 0 \\
w(x=1,8) = 0,00034 \quad &\Longrightarrow \quad 3,24a_2 + 5,832a_3 + 10,498a_4 = 0,00034 \\
w(x=5,7) = 0,00074 \quad &\Longrightarrow \quad 32,49a_2 + 185,19a_3 + 1055,60a_4 = 0,00074 \\
w(x=7,0) = 0,00072 \quad &\Longrightarrow \quad 49a_2 + 343a_3 + 2401a_4 = 0,00072\,.
\end{aligned}$$

Da a_0 und a_1 wegfallen bleibt ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen:

$$\begin{pmatrix} 3,24 & 5,832 & 10,498 \\ 32,49 & 185,19 & 1055,60 \\ 49 & 343 & 2401 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00034 \\ 0,00074 \\ 0,00072 \end{pmatrix}$$

Die Auflösung der Gleichung ergibt

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0001722 \\ -0,00042149 \\ 0,000002856 \end{pmatrix} .$$

Einsetzen ergibt die Durchbiegungsfunktion als Polynomfunktion. Die anschließende Normierung ergibt die Formfunktion $\phi_1(x)$:

$$\phi_1(x) = \frac{w_1(x)}{w_1(1,8)} = 0,5065x^2 - 0,1250x^3 + 0,0084x^4 .$$

Die Approximation der zweiten Formfunktion erfolgt durch ein Polynom zweiten Grades. Die Betrachtung der Durchbiegungsfunktionen liefert folgende Annahme:

$$\phi_1(x = 7,0) \approx \phi_2(x = 7,0) = 2,1199 .$$

Die zweite Formfunktion $\phi_2(x)$ lässt sich nun annähern:

$$\phi_2(x) = (\frac{x}{l})^2.2,1199 = 0,04326x^2 .$$

Bei der dritten Formfunktion $\phi_3(x)$ wird die Annahme getroffen, dass die Verschiebungen über die Länge des Riegels ungefähr konstant sind:

$$\phi_3(x) \approx \phi_1(x = 7,0) \approx \phi_2(x = 7,0) = const. \Longrightarrow \phi_3(x) = 2,1199 .$$

Durch das Einsetzen in die Gleichung (35) ergeben sich die drei Ersatzmassen zufolge der drei Formfunktionen:

$$\begin{aligned} M_1^* &= 62\,150\,kg, \\ M_2^* &= 17\,790\,kg, \\ M_3^* &= 129\,760\,kg . \end{aligned}$$

Die drei Ersatzmassen werden summiert und es ergibt sich die Ersatzmasse des gesamten Systems:

$$M^* = 209\,700\,kg .$$

Anschließend wird zuerst der elastische Stoß durchgeführt und in der Folge der vollkommen unelastische (plastische) Stoß. Durch den Anprall werden Anfangsgeschwindigkeiten induziert und anschließend Umkehrlagen und daraus folgende statisch äquivalente Ersatzkräfte berechnet. Darüber hinaus ist für die Berechnung zur Ermittlung des einwirkenden Momentes die Momentenlinie am System zufolge der Kraft $F = 1$ in Abbildung (26) erforderlich.

Durchführung des elastischen Stoßes:

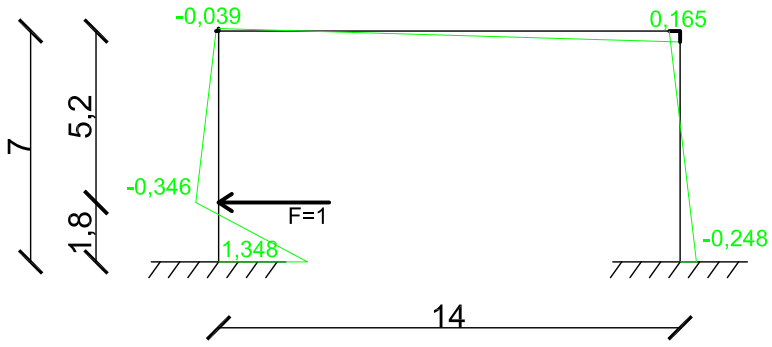


Abbildung 26: Momentenlinie am Querrahmen zufolge F=1 $[m]$

Das Einsetzen in Gleichung (21) liefert die Geschwindigkeit des Rahmens unmittelbar nach dem Stoß

$$\dot{q}' = 2,98\,\frac{m}{s},$$

nun lässt sich die Umkehrlage gemäß Beziehung (28) bestimmen

$$q_u = 25\,mm$$

und man kommt laut Gleichung (29) auf eine Ersatzkraft von

$$F_{stat,el} = 74\,MN$$

und einem daraus folgenden Einspannmoment von

$$M_{ed,el} = 100\,MNm\,.$$

Durchführung des plastischen Stoßes:
Erfolgt analog zum elastischen Stoß unter Verwendung der Gleichungen (23), (28) und (29):
Das Ergebnis ist die statisch äquivalente Ersatzkraft

$$F_{stat,pl} = 44\,MN$$

und das Moment

$$M_{ed,pl} = 60\,MNm\,.$$

5.1.2 Stoß auf den Längsrahmen

Der Rechenvorgang ist analog dem des Querrahmens.
Für c^* ergibt sich

$$c^* = 3\,864\,154\,000\,\frac{N}{m}$$

und für M^* ergibt sich

$$M^* = 77\,535\,kg\,.$$

Die Momentenlinie ist der Abbildung 27, die Berechnungen sind dem Anhang Kapitel 9.1.1 Seite

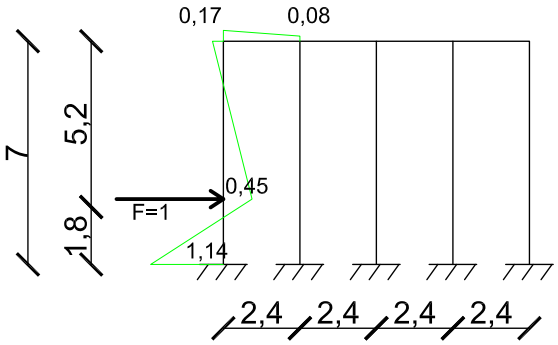


Abbildung 27: Momentenlinie am Längsrahmen zufolge F=1 $[m]$

58 zu entnehmen.

$$\begin{aligned} F_{stat,el} &= 92\,MN \\ M_{ed,el} &= 105\,MNm \\ F_{stat,pl} &= 70\,MN \\ M_{ed,pl} &= 79\,MNm\,. \end{aligned}$$

5.1.3 Koppelung der Systeme Längsrahmen und Querrahmen

Die Anfahrgeschwindigkeit, $v = 5\,\frac{m}{s}$, wird in Längs- und Querrichtung projiziert, woraus sich die entsprechenden Komponenten der Rahmenmomente berechnen und daraus das Gesamtmoment. Die Ergebnisse des Stoßes auf den Querrahmen und den Längsrahmen in Abhängigkeit des Winkels α elastisch und vollkommen unelastisch (plastisch) sind in Tabelle 2 und 3 ersichtlich. Darstellung der gesamten Momente zufolge Längs und Querstoß zeigt Tabelle 4. Die Aufteilung erfolgt durch $v_q = v \sin\alpha$ und $v_l = v \cos\alpha$.

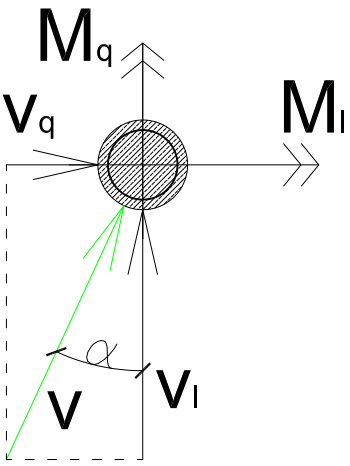


Abbildung 28: Aufteilung der Geschwindigkeit

α [°]	v_q [$\frac{m}{s}$]	q'_{el} [$\frac{m}{s}$]	$q_{u,el}$ [m]	$F_{stat,el}$ [MN]	$M_{q,el}$ [MNm]	q'_{pl} [$\frac{m}{s}$]	$q_{u,pl}$ [m]	$F_{stat,pl}$ [MN]	$M_{q,pl}$ [MNm]
1	0,09	0,05	0,000	1,30	1,75	0,03	0,000	0,77	1,04
2	0,17	0,10	0,001	2,59	3,49	0,05	0,001	1,55	2,09
3	0,26	0,16	0,001	3,89	5,24	0,08	0,001	2,32	3,13
4	0,35	0,21	0,002	5,18	6,98	0,10	0,001	3,09	4,17
5	0,44	0,26	0,002	6,47	8,73	0,13	0,001	3,86	5,21
6	0,52	0,31	0,003	7,76	10,47	0,16	0,002	4,63	6,25
7	0,61	0,36	0,003	9,05	12,20	0,18	0,002	5,40	7,28
8	0,70	0,41	0,003	10,34	13,94	0,21	0,002	6,17	8,32
9	0,78	0,47	0,004	11,62	15,66	0,23	0,002	6,93	9,35
10	0,87	0,52	0,004	12,90	17,39	0,26	0,003	7,70	10,38

Tabelle 2: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Querrahmen

α [°]	v_q [$\frac{m}{s}$]	q'_{el} [$\frac{m}{s}$]	$q_{u,el}$ [m]	$F_{stat,el}$ [MN]	$M_{l,el}$ [MNm]	q'_{pl} [$\frac{m}{s}$]	$q_{u,pl}$ [m]	$F_{stat,pl}$ [MN]	$M_{l,pl}$ [MNm]
1	5,00	5,34	0,02	92,27	105,01	2,67	0,02	67,62	76,95
2	5,00	5,34	0,02	92,23	104,96	2,67	0,02	67,59	76,91
3	4,99	5,34	0,02	92,16	104,88	2,67	0,02	67,53	76,85
4	4,99	5,33	0,02	92,06	104,77	2,67	0,02	67,46	76,77
5	4,98	5,32	0,02	91,94	104,62	2,66	0,02	67,37	76,67
6	4,97	5,31	0,02	91,78	104,45	2,66	0,02	67,26	76,54
7	4,96	5,30	0,02	91,60	104,24	2,65	0,02	67,12	76,39
8	4,95	5,29	0,02	91,39	104,00	2,65	0,02	66,97	76,21
9	4,94	5,28	0,02	91,15	103,73	2,64	0,02	66,79	76,01
10	4,92	5,26	0,02	90,89	103,43	2,63	0,02	66,60	75,79

Tabelle 3: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Längsrahmen

α [°]	$M_{l,el}$ $[MNm]$	$M_{q,el}$ $[MNm]$	$M_{ges,el}$ $[MNm]$	$M_{l,pl}$ $[MNm]$	$M_{q,pl}$ $[MNm]$	$M_{ges,pl}$ $[MNm]$
1	105,01	1,75	105,02	76,95	1,04	76,95
2	104,96	3,49	105,02	76,91	2,09	76,94
3	104,88	5,24	105,01	76,85	3,13	76,92
4	104,77	6,98	105,00	76,77	4,17	76,89
5	104,62	8,73	104,99	76,67	5,21	76,84
6	104,45	10,47	104,97	76,54	6,25	76,79
7	104,24	12,20	104,95	76,39	7,28	76,73
8	104,00	13,94	104,93	76,21	8,32	76,66
9	103,73	15,66	104,91	76,01	9,35	76,58
10	103,43	17,39	104,88	75,79	10,38	76,50

Tabelle 4: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – gekoppeltes System

5.2 Stoßberechnungen mit Verwendung eines Kraft-Zeit-Verlaufes

Ziel ist es, wie auch bei den Berechnungen nach klassischer Stoßtheorie, die erste Umkehrlage zu bestimmen und daraus die statische Äquivalenzkraft zu ermitteln. Die zu lösende Differenzialgleichung ergibt sich gemäß Gleichung (7)

$$M\ddot{q}(t) + r\dot{q}(t) + cq(t) = F(t)\,.$$

Der Kraftverlauf ist in Abbildung (21) ersichtlich. Durch Einsetzen in die Schwingungsantwort und das Lösen des Duhamelschen Faltungsintegrals ergibt sich die Schwingungsantwort im Zeitbereich des Kraftverlaufes. Deren Lösung wird gemäß Gleichung (13) wie folgt dargestellt:

$$q(t) = \frac{F(\tau)}{M^*\omega_d}\int_{\tau=0}^{t} e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau\,.$$

Hierbei ist $F(\tau) = F$ konstant und kann vor das Integral geschrieben werden. Zunächst wird das Integral ohne den Faktor $\frac{F(\tau)}{m\omega_d}$ durch zweimalige partielle Integration gelöst:

$$\int e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\zeta\omega}e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) +$$
$$+\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\int e^{-\zeta\omega(t-\tau}\cos\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)d\tau$$

$$\int e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\zeta\omega}e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}t-\tau) +$$
$$+\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta^2\omega}e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\cos\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) -$$
$$-\frac{1-\zeta^2}{\zeta^2}\int e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)d\tau$$

$$(1+\frac{1-\zeta^2}{\zeta^2})\int e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\zeta\omega}e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\,.$$
$$\cdot\left[\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta^2}\cos\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)\right]\,[+c]$$

$$\int e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)d\tau = \frac{\zeta}{\omega}e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\,.$$
$$\cdot\left[\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\cos\omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)\right]\,[+c]\,.$$

Die Lösung dieses unbestimmten Integrals wird jetzt in Gleichung (13) eingesetzt und aufgelöst. Unter Berücksichtigung der Beziehung $\omega\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$ ergibt sich die Funktion des Ausschwing-

vorganges:

$$q(t) = \frac{F}{M^*\omega_d}\frac{\zeta}{\omega}e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\left[\sin\omega_d(t-\tau)+\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\cos\omega_d(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=0}^{t} \tag{41}$$

$$= \frac{F}{M^*\omega^2}\left(1-e^{-\zeta\omega t}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right]\right). \tag{42}$$

Die Funktion $q(t)$ schwingt um die statische Auslenkung aus, das heißt bei wachsendem t nähert sie sich oszillierend immer mehr q_{stat} an. Die statische Auslenkung lässt sich berechnen durch

$$q_{stat} = \lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{F}{M^*\omega^2}\left(1-e^{-\zeta\omega t}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right]\right).$$

Der Therm $e^{-\zeta\omega t}$ geht gegen Null bei $t\to\infty$ und der Therm $\left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right]$ schwankt zwischen zwei konstanten Werten und bleibt daher in einem endlichen Bereich. Daraus folgt, dass der Ausdruck $e^{-\zeta\omega t}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right]$ gegen Null geht bei $t\to\infty$. Es ergibt sich die statische Auslenkung

$$q_{stat} = \frac{F}{M^*\omega^2} = \frac{F}{c^*}. \tag{43}$$

Im Anschluss wird die erste Umkehrlage ermittelt. Dazu wird zuerst $q(t)$ nach t abgeleitet und vereinfacht:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{F\omega_d}{M^*\omega^2(1-\zeta^2)}e^{-\zeta\omega t}\sin\omega_d t.$$

Die Ableitung wird dann zur Berechnung der Extremwerte Null gesetzt.

$$\begin{aligned}\frac{dq(t)}{dt} &= 0\\ \Longrightarrow 0 &= \frac{F\omega_d}{M^*\omega^2(1-\zeta^2)}e^{-\zeta\omega t}\sin\omega_d t\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{F\omega_d}{M^*\omega^2(1-\zeta^2)}e^{-\zeta\omega t}$ ist größer Null. Es kann folglich nur mehr der Ausdruck $\sin\omega_d t$ Null werden. Für folgende t gilt:

$$\sin\omega_d t = 0 \Longrightarrow t_k = \frac{k\pi}{\omega_d} \quad \forall\ k\in\mathbb{N} \tag{44}$$

Für die Berechnung der k-ten Umkehrlage $q_{k,u}$ zum Zeitpunkt t_k muss der Funktionswert $q(t = t_k)$ ausgewertet werden:

$$q(t=t_k) = q_{k,u} = \frac{F}{M^*\omega^2}\left(1-e^{-\zeta\omega t}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin k\pi+\cos k\pi\right]\right)$$

Eine Fallunterscheidung für gerade und ungerade k vereinfacht die Beziehung. Für gerade k ergibt sich eine Umkehrlage unterhalb von q_{stat}, für ungerade k eine Umkehrlage oberhalb q_{stat}.

Es ergibt sich

$$q_{k,u} = \frac{F}{M^*\omega^2}\left(1 - e^{-\zeta k\pi}\right) \quad \forall\, k \in 2n \,|\, n \in \mathbb{N}\,, \tag{45}$$

$$q_{k,u} = \frac{F}{M^*\omega^2}\left(1 + e^{-\zeta k\pi}\right) \quad \forall\, k \in 2n-1 \,|\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{46}$$

Die erste Umkehrlage ergibt sich für $k = 1$. Es folgt gemäß Gleichungen (44) und (46)

$$t_{u,1} = t_u = \frac{\pi}{\omega_d}\,, \tag{47}$$

$$q_{t_u} = q_u = \frac{F}{M^*\omega^2}\left(1 + e^{-\zeta k\pi}\right) = q_{stat}\left(1 + e^{-\zeta\pi}\right)\,. \tag{48}$$

Der Plot der Funktion in Abbildung 29 veranschaulicht den Verlauf des Ausschwingungsvorganges, die Lage der statischen Auslenkung und die erste Umkehrlage. Nun kann die Berechnung

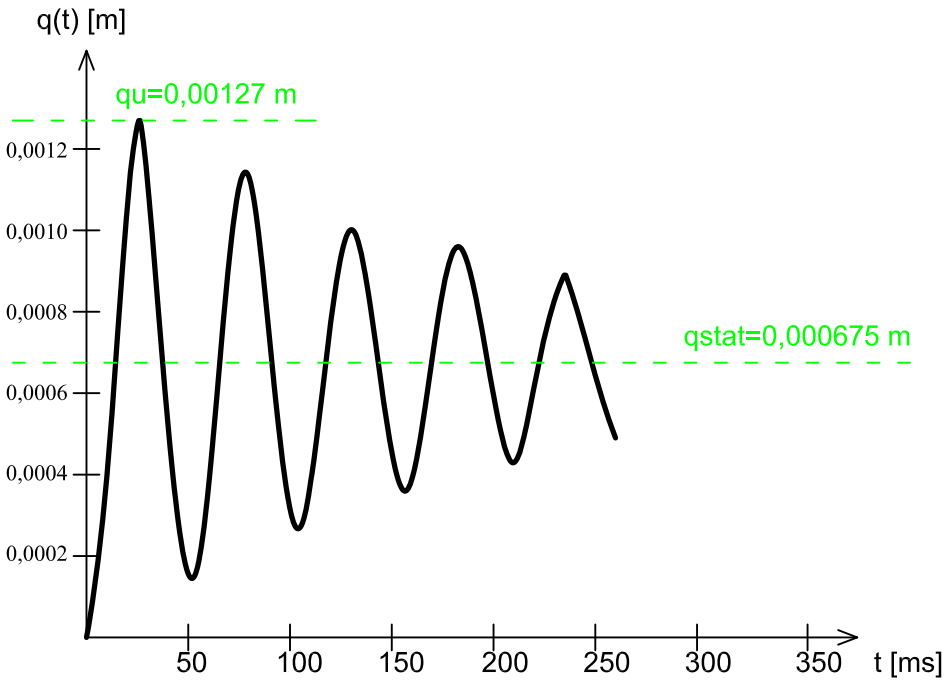


Abbildung 29: Schwingungsantwort auf den gegebenen konstanten Kraft-Zeit-Verlauf

der statischen Äquivalenzkraft erfolgen:

$$\begin{aligned} F_{stat} = c^* q_u &= c^* \frac{F}{M^*\omega^2}\left(1 + e^{-\zeta k\pi}\right) \\ &= \frac{c^* F}{M^* \frac{c^*}{M^*}}\left(1 + e^{-\zeta k\pi}\right) \\ &= F\left(1 + e^{-\zeta k\pi}\right)\,. \end{aligned}$$

Die statische Äquivalenzkraft ist für einen vorgegebenen konstanten Kraft-Zeit-Verlauf nur von ζ abhängig, die Steifigkeit und die Ersatzmasse wirken sich nicht explizit auf F_{stat} aus. Das heißt die statische Äquivalenzkraft ist für Querrahmen und Längsrahmen gleich, bei Voraussetzung gleicher Dämpfung. Sie ergibt sich durch Einsetzten in Gleichung (49) unter Berücksichtigung

von $\zeta = 0,04$ zu

$$F_{stat} = 3,76\,MN\,.$$

5.2.1 Koppelung der Systeme Längs und Querrahmen

Es wird der Kraft-Zeit-Verlauf und somit die statische Äquivalenzkraft im Winkel α angesetzt und auf Längs- und Querrahmen projiziert.
Tabelle 5 zeigt die projizierten Kräfte längs und quer, die dazugehörigen Momente und die daraus resultierenden Gesamtmomente in Abhängigkeit des Winkels α:

$F(\alpha)$	α	$F_l(\alpha)$	$F_q(\alpha)$	M_l	M_q	M_{ges}
3,76	0,00	3,76	0,00	4,29	0,00	4,29
3,76	1,00	3,76	0,07	4,29	0,09	4,29
3,76	2,00	3,76	0,13	4,28	0,18	4,29
3,76	3,00	3,75	0,20	4,28	0,27	4,29
3,76	4,00	3,75	0,26	4,28	0,35	4,29
3,76	5,00	3,75	0,33	4,27	0,44	4,29
3,76	6,00	3,74	0,39	4,26	0,53	4,30
3,76	7,00	3,73	0,46	4,25	0,62	4,30
3,76	8,00	3,72	0,52	4,24	0,71	4,30
3,76	9,00	3,71	0,59	4,23	0,79	4,31
3,76	10,00	3,70	0,65	4,22	0,88	4,31

Tabelle 5: Äquivalenzkrafte auf Längs- und Querrahmen in Abhängigkeit des Winkels α

6 Berechnung des gebetteten Systems nach klassischer Stoßtheorie [2], [3], [6]

Im Laufe der Berechnung werden mehrere Varianten des Bettungsverlaufes des Bodens angenommen und statische Äquivalenzkräfte verglichen.

6.1 Der gebettete Rahmen - ohne Aufschüttung

Über Tunnelunterkante wird vorerst keine Schüttung angenommen und unter Tunnelunterkante der gewachsene Boden. Es wird demnach kein Bettungsmodulverlauf oberhalb der Tunnelunterkante angesetzt, beim gewachsenen Boden die ersten 5 m ein parabolischer und anschließend ein konstanter Verlauf. Dieser ist Abbildung 30 zu entnehmen.

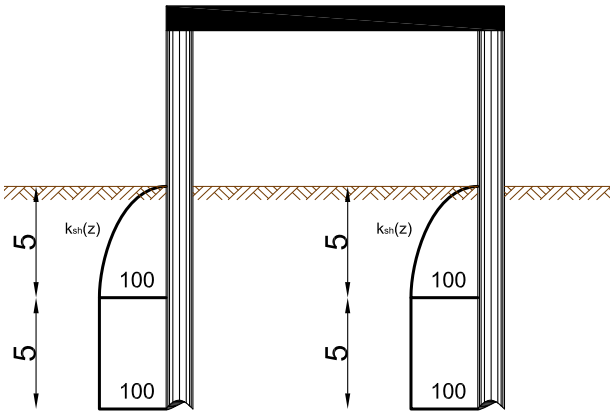


Abbildung 30: Verlauf des Bettungsmoduls k_{hs} $[m]$

Die Funktion des Bettungsverlaufes ist:

$$k_{sh} = \begin{cases} \sqrt{2000z} & \text{für } 0 \leq z \leq 5 \\ 100 & \text{für } h > 5 \end{cases} . \tag{49}$$

Es wird für alle gebetteten Systeme nur der plastische Stoß berechnet.
Die Berechnung ist iterativ. Die erste Iteration wird genauer angeführt, weitere Iterationsschritte werden gekürzt wiedergegeben.

Beginn des ersten Iterationsschrittes:
Der Verlauf des Bettungsmoduls wird durch diskrete Federn angenähert, die im Abstand von $1m$ angeordnet sind. Berechnung der Federsteifigkeiten:

$$\begin{aligned} c_1 &= d\int_0^1 \sqrt{2000z}\,dz = 35,778\,\frac{MN}{m} \\ c_2 &= d\int_1^2 \sqrt{2000z}\,dz = 65,417\,\frac{MN}{m} \\ c_3 &= d\int_2^3 \sqrt{2000z}\,dz = 84,712\,\frac{MN}{m} \\ c_4 &= d\int_3^4 \sqrt{2000z}\,dz = 100,316\,\frac{MN}{m} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_5 &= d\int_4^5 \sqrt{2000z}\,dz = 113,786\,\frac{MN}{m} \\
c_6 &= d\int_5^6 100\,dz = 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_7 &= d\int_6^7 100\,dz = 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_8 &= d\int_7^8 100\,dz = 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_9 &= d\int_8^9 100\,dz = 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{10} &= d\int_9^{10} 100\,dz = 120,000\,\frac{MN}{m}\,.
\end{aligned}
$$

Das System mit den diskreten Federn wird in Abbildung 31 dargestellt. Durch Belastung des

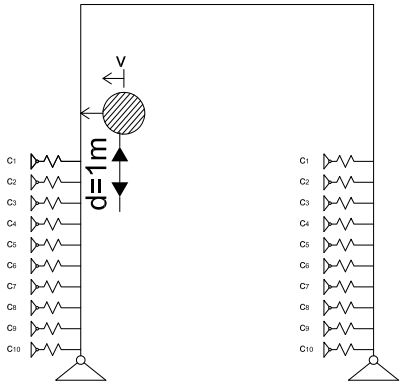


Abbildung 31: Berechnungsmodell

Systems mit der Kraft “1“ erhält man die Federsteifigkeit mittels der Gleichung $c = \frac{1}{w}$.

$$c^* = 111,\,982\,\frac{MN}{m}$$

Die Berechnungen für die Ersatzmasse erfolgen durch Approximation der Formfunktion durch eine Polynomfunktion und anschließendem Anwenden der Gleichung (35), für die Berechnungen der Ersatzmasse und der Startersatzsteifigkeit siehe Anhang Kapitel 9.2 Seite 61. Die Ersatzmasse wird über alle Iterationsschritte konstant angenommen, da sich der Verlauf der Formfunktion durch Änderung der Bettungsmoduln kaum ändert.

$$M^* = 143\,832\,kg$$

Im weiteren Verlauf wird ausschließlich der vollkommen unelastische Stoß durchgerechnet. Berechnung der Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß ergibt nach Gleichung (23):

$$\dot{q}' = 1,91\,\frac{m}{s}\,.$$

Die daraus folgende Umkehrlage gemäß Beziehung (28) ist:

$$q_u = 0,087\,m\,.$$

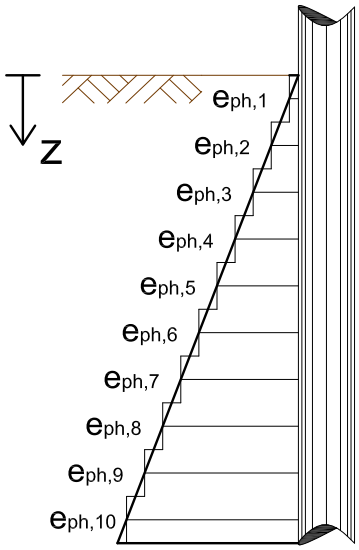


Abbildung 32: Passiver Erddruckverlauf

Für die statische Äquivalenzkraft ergibt sich:

$$F_{stat} = 9,759\,MN\,.$$

Der Erdruckverlauf wird diskretisiert um einen Vergleich mit der Bodenspannung möglich zu machen. Einsetzen in Gleichung (38) ergibt die Werte des diskreten Verlaufes.

$$\begin{aligned}
e_{ph,1} &= 0,038\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,2} &= 0,116\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,3} &= 0,194\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,4} &= 0,271\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,5} &= 0,349\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,6} &= 0,426\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,7} &= 0,504\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,8} &= 0,581\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,9} &= 0,659\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,10} &= 0,736\,\frac{MN}{m^2}\,.
\end{aligned}$$

Der Verlauf des passiven Erdrucks wird in der Abbildung 32 gezeigt. Die Berechnung mittels des Sabwerkpaketes R-Stab liefert die Durchbiegungsfunktion des Bohrpfahles. Bei beiden Bohrpfählen wird vereinfachend die gleiche Durchbiegung angenommen. Die Abbildung 33 zeigt die Durchbiegungsfunktion.

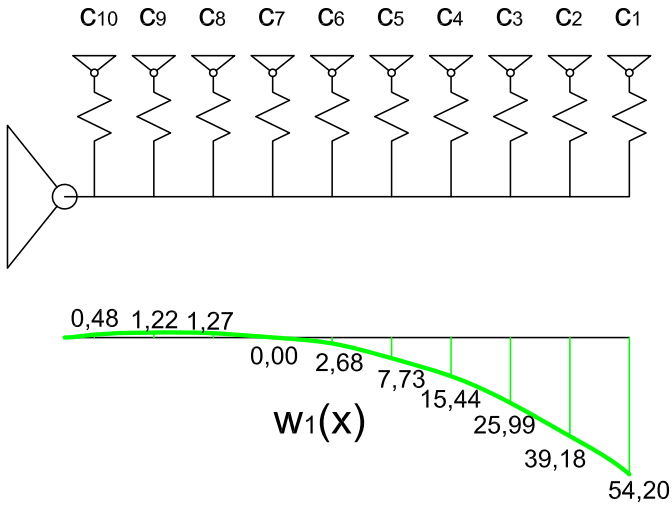


Abbildung 33: Durchbiegungsfunktion des Bohrpfahles im gebetteten Abschnitt [mm]

Die Werte der Durchbiegungen und die daraus folgenden Bodenspannungen sind nachfolgend aufgelistet und mit den Werten des passiven Erddruckes verglichen:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 0,046\,m \Longrightarrow \sigma_{h1} = k_{hs}u_1 = \frac{c_1u_1}{A} = \mathbf{1,616}\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} > \mathbf{e_{ph,1} = 0,038}\,\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} \\
w_2 &= 0,033\,m \Longrightarrow \sigma_{h2} = k_{hs}u_2 = \frac{c_2u_2}{A} = \mathbf{2,136}\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} > \mathbf{e_{ph,2} = 0,116}\,\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} \\
w_3 &= 0,022\,m \Longrightarrow \sigma_{h3} = k_{hs}u_3 = \frac{c_3u_3}{A} = \mathbf{1,835}\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} > \mathbf{e_{ph,2} = 0,116}\,\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} \\
w_4 &= 0,013\,m \Longrightarrow \sigma_{h4} = k_{hs}u_4 = \frac{c_4u_4}{A} = \mathbf{1,291}\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} > \mathbf{e_{ph,4} = 0,271}\,\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} \\
w_5 &= 0,006\,m \Longrightarrow \sigma_{h5} = k_{hs}u_5 = \frac{c_5u_5}{A} = \mathbf{0,733}\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} > \mathbf{e_{ph,5} = 0,349}\,\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m^2}} \\
w_6 &= 0,002\,m \Longrightarrow \sigma_{h6} = k_{hs}u_6 = \frac{c_6u_6}{A} = 0,268\frac{MN}{m^2} < e_{ph,6} = 0,426\,\frac{MN}{m^2} \\
w_7 &= 0,000\,m \Longrightarrow \sigma_{h7} = k_{hs}u_7 = \frac{c_7u_7}{A} = 0,000\frac{MN}{m^2} < e_{ph,7} = 0,504\,\frac{MN}{m^2} \\
w_8 &= 0,001\,m \Longrightarrow \sigma_{h8} = k_{hs}u_8 = \frac{c_8u_8}{A} = 0,127\frac{MN}{m^2} < e_{ph,8} = 0,581\,\frac{MN}{m^2} \\
w_9 &= 0,001\,m \Longrightarrow \sigma_{h9} = k_{hs}u_9 = \frac{c_9u_9}{A} = 0,122\frac{MN}{m^2} < e_{ph,9} = 0,659\,\frac{MN}{m^2} \\
w_{10} &= 0,0005\,m \Longrightarrow \sigma_{h10} = k_{hs}u_{10} = \frac{c_{10}u_{10}}{A} = 0,048\frac{MN}{m^2} < e_{ph,10} = 0,736\,\frac{MN}{m^2}\,.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Wie dem Vergleich entnommen werden kann, ist die Bettungsspannung an sechs Stellen höher als die passive Erddruckspannung, das heißt, der Boden beginnt an diesen Stellen zu fließen. Abbildung 34 zeigt die Bettungsspannung gemeinsam mit der Erddruckspannung.
Es wird nun an diesen Stellen die mögliche Bodenspannung – der passive Erddruck – und zufolge dieser Spannung eine neue Federkonstante $\bar{c}_j^*$ berechnet. Die neuen Berechnungsgrundlagen sind die neuen Bettungsspannungen und daraus resultierend die neuen Federsteifigkeiten.

$$
\bar{\sigma}_{1h} = 0,038\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_1^* = \frac{\bar{\sigma}_{1h}A}{u_1} = 1,0132\,\frac{MN}{m}
$$

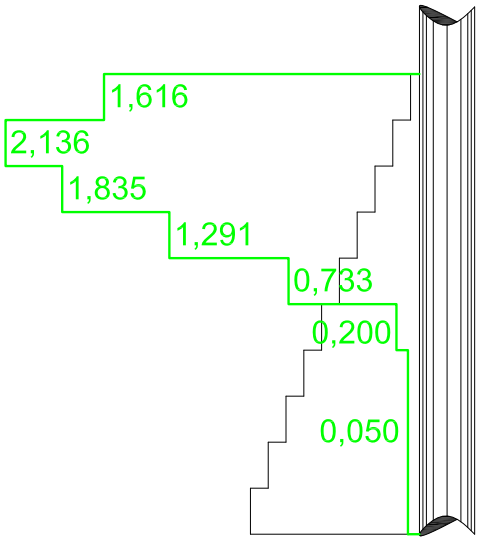


Abbildung 34: Bettungsspannungen $[\frac{MN}{m^2}]$

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{2h} &= 0,116\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_2^* = 4,204\,\frac{MN}{m} \\
\bar{\sigma}_{3h} &= 0,193\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_3^* = 10,562\,\frac{MN}{m} \\
\bar{\sigma}_{4h} &= 0,271\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_4^* = 24,902\,\frac{MN}{m} \\
\bar{\sigma}_{5h} &= 0,349\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_5^* = 63,888\,\frac{MN}{m} \\
\bar{\sigma}_{6h} &= 0,100\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_6^* = 120,000\,\frac{MN}{m} \\
\bar{\sigma}_{7h} &= 0,050\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_7^* = 120,000\,\frac{MN}{m} \\
\bar{\sigma}_{8h} &= 0,050\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_8^* = 120,000\,\frac{MN}{m} \\
\bar{\sigma}_{9h} &= 0,050\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_9^* = 120,000\,\frac{MN}{m} \\
\bar{\sigma}_{10h} &= 0,050\,\frac{MN}{m^2} \Longrightarrow \bar{c}_{10}^* = 120,000\,\frac{MN}{m}
\end{aligned}
$$

Ende des ersten Iterationsschrittes.

Die zweite Iteration ergibt eine Äquivalenzkraft von

$$F_{stat} = 6,479\,MN\,.$$

Dritte Iteration:

$$F_{stat} = 5,346\,MN\,.$$

Vierte Iteration:

$$F_{stat} = 4,619\,MN\,.$$

Fünfte Iteration:

$$F_{stat} = 4,179\,MN\,.$$

Sechste Iteration:

$$F_{stat} = 3,962\,MN\,.$$

Siebente Iteration:

$$F_{stat} = 3,863\,MN\,.$$

Bis zur sechsten Iteration beginnen von Geländeunterkante nach unten hin immer neue Abschnitte des Bodens zu fließen bis schließlich bei allen Abschnitten die Fließgrenze überschritten wird. Je größer die belastende Kraft ist, desto mehr Iterationsschritte sind notwendig um ein ausreichend genaues Ergebnis zu bekommen. In diesem Fall sind sieben Iterationen notwendig um eine Genauigkeit von unter $2,6$ % zu erreichen.
Für die gesamte Länge ist außer der letzten Feder der passive Erddruck für den Bettungsmodul verantwortlich.

6.1.1 Projizierter Querstoß in Abhängigkeit des Winkels

Hier wird auch nur der plastische Stoß berücksichtigt. Die Anfahrgeschwindigkeit wird in Querrichtung projiziert. Der Längsstoß wird als verhindert angesehen.
Iterationsschritte sind auch hier durchzuführen, es werden aber nur die Ergebnisse in Tabelle 6 angeführt.

α [°]	v [$\frac{m}{s}$]	v_q [$\frac{m}{s}$]	q' [$\frac{m}{s}$]	F_{stat} [kN]	M_{max} [kNm]
1	5,00	0,09	0,03	170	266
2	5,00	0,17	0,07	332	531
3	5,00	0,26	0,10	488	796
4	5,00	0,35	0,13	627	1058
5	5,00	0,44	0,17	763	1319
6	5,00	0,52	0,20	889	1574
7	5,00	0,61	0,23	1008	1827
8	5,00	0,70	0,27	1126	2079
9	5,00	0,78	0,30	1235	2325
10	5,00	0,87	0,33	1339	2567
15	5,00	1,29	0,49	1822	3743
20	5,00	1,71	0,65	2225	4839
30	5,00	2,50	0,96	2887	6831
90	5,00	5,00	1,91	3863	12637

Tabelle 6: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Querrahmen ohne Schüttung

6.2 Der gebettete Rahmen mit mitwirkender Aufschüttung

In diesem Fall wird angenommen, dass auch der Boden in Höhe über Tunnelunterkante einen gewissen Bettungsmodul erreicht. Man wählt für den Bettungsmodul einen parabolischen Verlauf, der bei einer Tiefe von 7 m sein Maximum erreicht. Abbildung 35 zeigt einen Bettungsmodulverlauf, der in der Tiefe von 7 m einen Modul von $50\frac{MN}{m^2}$ erreicht und dann in den Verlauf des gewachsenen Bodens übergeht. Darstellung der Funktion des Bettungsmodulverlaufes:

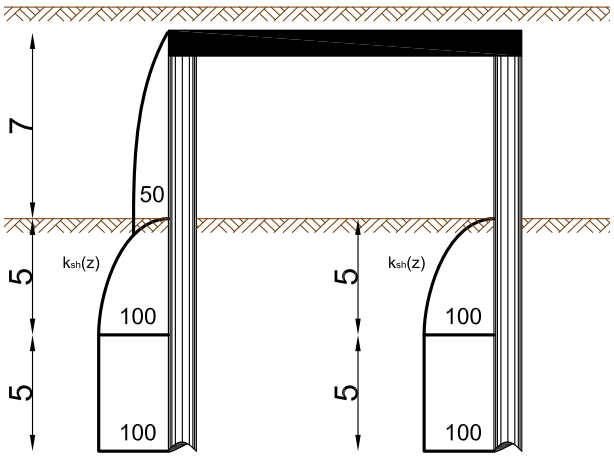


Abbildung 35: Bettungsmodulverlauf, Fall b $[m]$

$$k_{sh} = \begin{cases} \sqrt{357,1z} & \text{für } 0 \leq z < 7 \\ 50 & \text{für } 7 \leq z < 8,25 \\ \sqrt{(z-7)2000} & \text{für } 8,25 \leq z < 12 \\ 100 & \text{für } z \geq 12 \end{cases} . \tag{51}$$

Es werden 4 Fälle untersucht. Die Bettungsmodulverläufe unterscheiden sich durch die Annahmen für die Schüttungen, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie in einer Tiefe von $z = 7\,m$ (Höhe Tunnelunterkante) die Werte a) $25\frac{MN}{m^2}$, b) $50\frac{MN}{m^2}$, c) $75\frac{MN}{m^2}$ und d) $100\frac{MN}{m^2}$ annehmen.

6.2.1 Berechnung nach Bettungsmodulverlauf Fall b

Auf die Berechnung eines direkten Querstoßes mit Winkel $\alpha = 90°$ wird hier verzichtet. Nachfolgend werden die projezierten Stöße berechnet, ein Stoß in Längsrichtung wird verhindert. Das Modell mit den diskreten Federn kann man der Abbildung 36 entnehmen. Die Federkräfte nach

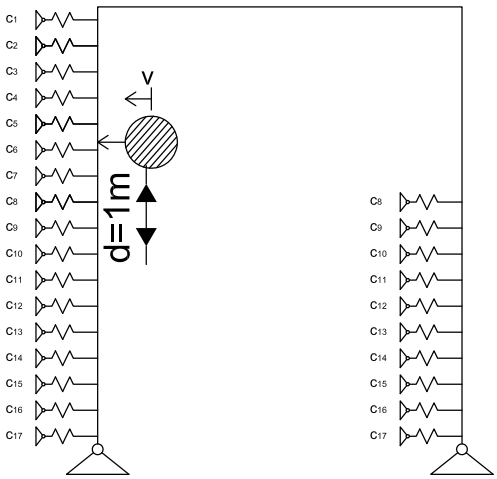


Abbildung 36: Berechnungsmodell für Bettungsmodulverlauf Fall b

Fall b ergeben sich zu:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{z=0}^{1} k_{sh} = 15,119\,\frac{MN}{m} \\
c_2 &= 27,643\,\frac{MN}{m} \\
c_3 &= 35,797\,\frac{MN}{m} \\
c_4 &= 42,390\,\frac{MN}{m} \\
c_5 &= 48,082\,\frac{MN}{m} \\
c_6 &= 53,166\,\frac{MN}{m} \\
c_7 &= 57,803\,\frac{MN}{m} \\
c_8 &= 60,000\,\frac{MN}{m} \\
c_9 &= 66,193\,\frac{MN}{m} \\
c_{10} &= 84,710\,\frac{MN}{m} \\
c_{11} &= 100,314\,\frac{MN}{m} \\
c_{12} &= 113,783\,\frac{MN}{m} \\
c_{13} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{14} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{15} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{16} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{17} &= 120,000\,\frac{MN}{m}\,.
\end{aligned}
$$

Die folgenden Startparameter für das System sind die Anfangsersatzsteifigkeit

$$c^* = 401\,606,426\,\frac{kN}{m}$$

und die Ersatzmasse

$$M^* = 73\,319\,kg\,.$$

Die Berechnung der Ersatzmasse erfolgt gemäß Kapitel 9.3 Seite 69.
Auffällig ist, dass die Ersatzmasse des überschütteten Systems viel kleiner als die des nicht überschütteten Systems ist. Das ist darauf zurückzuführen, dass die Durchbiegungsfunktion bei einer Höhe von ca 2,5 m über Tunnelunterkante ihr Maximum erreicht und dann wieder zurückgeht. Daraus folgt, dass die Durchbiegungsfunktion des Riegels, die für den größten Teil der Ersatzmasse verantwortlich ist, hier weitaus geringere Werte annimmt.
Bei der Erddruckberechnung ist zu berücksichtigen, dass der Rahmen ungefähr 2 m überschüttet

wird:

$$
\begin{aligned}
e_{ph,1} &= 0,194\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,2} &= 0,271\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,3} &= 0,349\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,4} &= 0,426\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,5} &= 0,504\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,6} &= 0,581\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,7} &= 0,659\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,8} &= 0,736\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,9} &= 0,814\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,10} &= 0,891\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,11} &= 0,969\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,12} &= 1,046\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,13} &= 1,124\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,14} &= 1,201\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,15} &= 1,279\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,16} &= 1,356\,\frac{MN}{m^2} \\
e_{ph,17} &= 1,434\,\frac{MN}{m^2}\,.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Mit den folgenden Angaben kann nun die iterative Berechnung durchgeführt werden. Die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α sind Tabelle 7 zu entnehmen.

6.2.2 Berechnung nach Bettungsmodulverlauf Fall a

Funktion des Bettungsmodulverlaufes:

$$
k_{sh} = \begin{cases} \sqrt{89,286z} & \text{für } 0 \leq z < 7 \\ 25 & \text{für } 7 \leq z < 7,313 \\ \sqrt{(z-7)2000} & \text{für } 7,313 \leq z < 12 \\ 100 & \text{für } z \geq 12 \end{cases}\,. \tag{53}
$$

α [°]	v [$\frac{m}{s}$]	v_q [$\frac{m}{s}$]	q' [$\frac{m}{s}$]	F_{stat} [kN]	M_{max} [kNm]
1,00	5,00	0,09	0,05	386,31	363,13
2,00	5,00	0,17	0,10	772,49	726,14
3,00	5,00	0,26	0,14	1158,45	1088,94
4,00	5,00	0,35	0,19	1544,05	1451,40
5,00	5,00	0,44	0,24	1929,18	1813,42
6,00	5,00	0,52	0,29	2313,72	2174,89
7,00	5,00	0,61	0,33	2697,55	2535,70
8,00	5,00	0,70	0,38	3080,57	2895,73
9,00	5,00	0,78	0,43	3462,65	3254,89
10,00	5,00	0,87	0,48	3843,67	3607,18
15,00	5,00	1,29	0,71	5501,61	5276,51
20,00	5,00	1,71	0,94	6566,18	6720,15
30,00	5,00	2,50	1,37	8170,49	9300,22

Tabelle 7: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall b

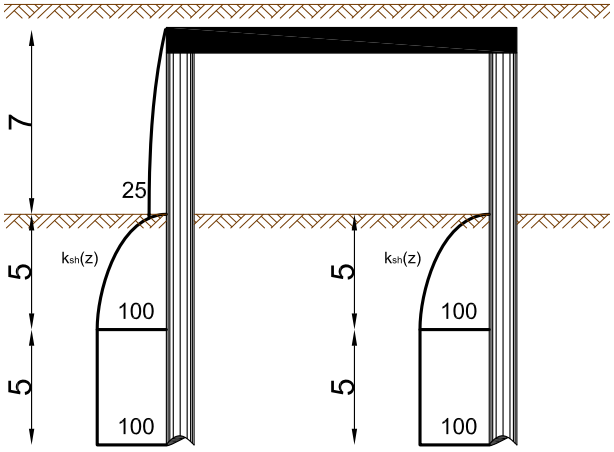


Abbildung 37: Bettungsmodulverlauf, Fall a [m]

Federsteifigkeiten:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1,2 \cdot \int_{z=0}^{1} k_{hs} = 7,559\,\frac{MN}{m} \\
c_2 &= 13,822\,\frac{MN}{m} \\
c_3 &= 17,898\,\frac{MN}{m} \\
c_4 &= 21,195\,\frac{MN}{m} \\
c_5 &= 24,041\,\frac{MN}{m} \\
c_6 &= 26,583\,\frac{MN}{m} \\
c_7 &= 28,902\,\frac{MN}{m} \\
c_8 &= 1,2 \cdot \int_{z=7}^{7,313} 25\,dz + 1,2 \cdot \int_{z=7,313}^{8} \sqrt{(z-7)2000}\,dz = 38,902\,\frac{MN}{m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_9 &= 65,416\,\frac{MN}{m} \\
c_{10} &= 84,710\,\frac{MN}{m} \\
c_{11} &= 100,314\,\frac{MN}{m} \\
c_{12} &= 113,783\,\frac{MN}{m} \\
c_{13} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{14} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{15} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{16} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{17} &= 120,000\,\frac{MN}{m}\,.
\end{aligned}
$$

Die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α sind Tabelle 8 zu entnehmen.

α [°]	v [$\frac{m}{s}$]	v_q [$\frac{m}{s}$]	q' [$\frac{m}{s}$]	F_{stat} [kN]	M_{max} [kNm]
1,00	5,00	0,09	0,05	311,07	337,63
2,00	5,00	0,17	0,10	622,06	675,17
3,00	5,00	0,26	0,14	932,85	1012,49
4,00	5,00	0,35	0,19	1243,35	1349,50
5,00	5,00	0,44	0,24	1553,48	1686,11
6,00	5,00	0,52	0,29	1863,13	2022,19
7,00	5,00	0,61	0,33	2172,22	2357,67
8,00	5,00	0,70	0,38	2480,65	2692,44
9,00	5,00	0,78	0,43	2788,32	3026,37
10,00	5,00	0,87	0,48	3095,14	3359,39
15,00	5,00	1,29	0,71	4613,24	5007,10
20,00	5,00	1,71	0,94	6072,56	6592,76
30,00	5,00	2,50	1,37	8021,51	9360,82

Tabelle 8: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall a

6.2.3 Berechnung nach Bettungsmodulverlauf Fall c

Funktion des Bettungsmodulverlaufes:

$$
k_{sh} = \begin{cases} \sqrt{803,571z} & \text{für } 0 \leq z < 7 \\ 75 & \text{für } 7 \leq z < 9,813 \\ \sqrt{(z-7)2000} & \text{für } 9,813 \leq z < 12 \\ 100 & \text{für } z \geq 12 \end{cases}\,. \tag{54}
$$

Federsteifigkeiten:

$$
c_1 = 1,2 \cdot \int_{z=0}^{1} k_{hs} = 22,678\,\frac{MN}{m}
$$

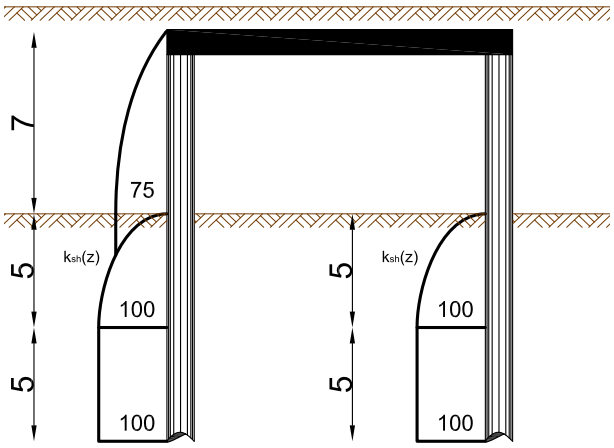


Abbildung 38: Bettungsmodulverlauf, Fall c $[m]$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= 41,465\,\frac{MN}{m} \\
c_3 &= 53,695\,\frac{MN}{m} \\
c_4 &= 63,585\,\frac{MN}{m} \\
c_5 &= 72,123\,\frac{MN}{m} \\
c_6 &= 79,749\,\frac{MN}{m} \\
c_7 &= 86,705\,\frac{MN}{m} \\
c_8 &= 90,000\,\frac{MN}{m} \\
c_9 &= 90,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{10} &= 1,2 \cdot \int_{z=9}^{9,813} 75\,dz + 1,2 \cdot \int_{z=9,813}^{10} \sqrt{(z-7)2000}\,dz = 90,287\,\frac{MN}{m} \\
c_{11} &= 100,314\,\frac{MN}{m} \\
c_{12} &= 113,783\,\frac{MN}{m} \\
c_{13} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{14} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{15} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{16} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{17} &= 120,000\,\frac{MN}{m}\,.
\end{aligned}
$$

Die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α sind Tabelle 9 zu entnehmen.

α [°]	v [$\frac{m}{s}$]	v_q [$\frac{m}{s}$]	q' [$\frac{m}{s}$]	F_{stat} [kN]	M_{max} [kNm]
1,00	5,00	0,09	0,05	449,39	386,83
2,00	5,00	0,17	0,10	898,64	773,54
3,00	5,00	0,26	0,14	1347,62	1160,02
4,00	5,00	0,35	0,19	1796,18	1546,14
5,00	5,00	0,44	0,24	2244,20	1931,80
6,00	5,00	0,52	0,29	2691,54	2316,86
7,00	5,00	0,61	0,33	3138,06	2701,22
8,00	5,00	0,70	0,38	3583,62	3084,76
9,00	5,00	0,78	0,43	4028,09	3467,35
10,00	5,00	0,87	0,48	4471,33	3848,89
15,00	5,00	1,29	0,71	5897,09	5508,25
20,00	5,00	1,71	0,94	6752,35	6827,54
30,00	5,00	2,50	1,37	8151,23	9320,70

Tabelle 9: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall c

6.2.4 Berechnung nach Bettungsmodulverlauf Fall d

Funktion des Bettungsmodulverlaufes:

$$k_{sh} = \begin{cases} \sqrt{1428,571z} & \text{für } 0 \leq z < 7 \\ 100 & \text{für } z \geq 7 \end{cases} . \tag{55}$$

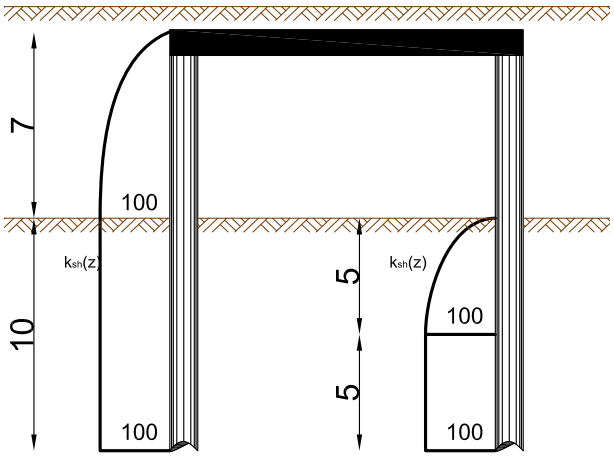


Abbildung 39: Bettungsmodulverlauf, Fall d [m]

Federsteifigkeiten:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1,2 \cdot \int_{z=0}^{1} k_{hs} = 30,237 \, \frac{MN}{m} \\ c_2 &= 55,286 \, \frac{MN}{m} \\ c_3 &= 71,593 \, \frac{MN}{m} \\ c_4 &= 84,780 \, \frac{MN}{m} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_5 &= 96,164\,\frac{MN}{m} \\
c_6 &= 106,332\,\frac{MN}{m} \\
c_7 &= 115,606\,\frac{MN}{m} \\
c_8 &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_9 &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{10} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{11} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{12} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{13} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{14} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{15} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{16} &= 120,000\,\frac{MN}{m} \\
c_{17} &= 120,000\,\frac{MN}{m}\,.
\end{aligned}
$$

Die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α sind Tabelle 10 zu entnehmen.

α [°]	v [$\frac{m}{s}$]	v_q [$\frac{m}{s}$]	q' [$\frac{m}{s}$]	F_{stat} [kN]	M_{max} [kNm]
1,00	5,00	0,09	0,05	502,77	409,15
2,00	5,00	0,17	0,10	1005,39	818,19
3,00	5,00	0,26	0,14	1507,71	1226,97
4,00	5,00	0,35	0,19	2009,56	1635,38
5,00	5,00	0,44	0,24	2510,80	2043,29
6,00	5,00	0,52	0,29	3011,28	2450,58
7,00	5,00	0,61	0,33	3510,84	2857,12
8,00	5,00	0,70	0,38	4009,33	3262,79
9,00	5,00	0,78	0,43	4491,35	3671,38
10,00	5,00	0,87	0,48	4871,69	4066,28
15,00	5,00	1,29	0,71	6150,99	5681,88
20,00	5,00	1,71	0,94	6920,20	6948,87
30,00	5,00	2,50	1,37	8260,22	9403,08

Tabelle 10: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall d

6.2.5 Auflistung der Ergebnisse im Vergleich

Tabelle 11 zeigt die auftretenden Äqivalenzkräfte der Lagerungsfälle 0, a, b, c, d in Abhängigkeit des Winkels (Fall 0 entspricht dem Fall ohne Schüttung):

α [°]	F_0 $[kN]$	F_a $[kN]$	F_b $[kN]$	F_c $[kN]$	F_d $[kN]$
1,00	144,23	311,07	378,77	449,39	502,77
2,00	284,15	622,06	757,43	898,64	1005,39
3,00	416,06	932,85	1135,86	1347,62	1507,71
4,00	538,86	1243,35	1513,94	1796,18	2009,56
5,00	655,24	1553,48	1891,57	2244,20	2510,80
6,00	769,27	1863,13	2268,61	2691,54	3011,28
7,00	871,71	2172,22	2644,96	3138,06	3510,84
8,00	972,89	2480,65	3020,51	3583,62	4009,33
9,00	1074,36	2788,32	3395,14	4028,09	4491,35
10,00	1165,83	3095,14	3768,74	4471,33	4871,69
15,00	1821,59	4613,24	5501,61	5897,09	6150,99
20,00	2224,81	6072,56	6566,18	6752,35	6920,20
30,00	2887,04	8021,51	8170,49	8151,23	8260,22

Tabelle 11: Äqivalenzkräfte der Lagerungsfälle 0, a, b, c, d in Abhängigkeit des Winkels α

Abbildung 40 zeigt die Äqivalenzkräfte der Lagerungsfälle 0, a, b, c, d in Abhängigkeit des Winkels in Diagrammform:

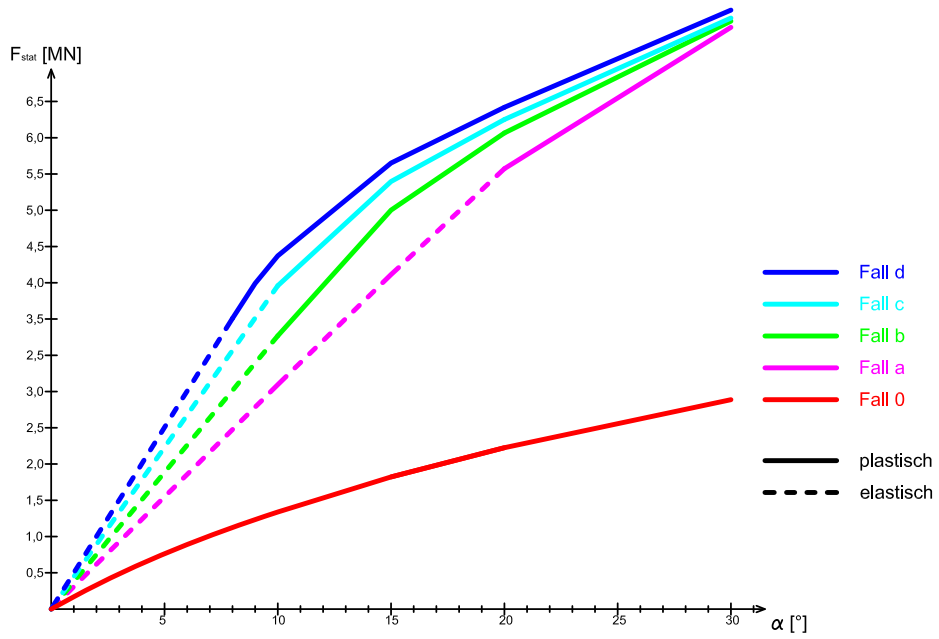


Abbildung 40: Äquivalenzkräfte in Abhängigkeit des Winkels und des Bettungsmoduls

Tabelle 12 zeigt die maximal auftretende Momente der Lagerungsfälle 0, a, b, c, d in Abhängigkeit des Winkels.

α [°]	M_0 $[kNm]$	M_a $[kNm]$	M_b $[kNm]$	M_c $[kNm]$	M_d $[kNm]$
1,00	224,62	337,63	360,27	386,83	409,15
2,00	450,11	675,17	720,43	773,54	818,19
3,00	674,26	1012,49	1080,37	1160,02	1226,97
4,00	896,88	1349,50	1439,98	1546,14	1635,38
5,00	1117,48	1686,11	1799,17	1931,80	2043,29
6,00	1337,06	2022,19	2157,79	2316,86	2450,58
7,00	1552,53	2357,67	2515,75	2701,22	2857,12
8,00	1765,99	2692,44	2872,96	3084,76	3262,79
9,00	1979,31	3026,37	3229,29	3467,35	3671,38
10,00	2186,87	3359,39	3584,64	3848,89	4066,28
15,00	3742,86	5007,10	5276,51	5508,25	5681,88
20,00	4838,66	6592,76	6720,15	6827,54	6948,87
30,00	6831,17	9360,82	9300,22	9320,70	9403,08

Tabelle 12: Äquivalenzkräfte in Abhängigkeit des Winkels und der Bettungsform

In Abbildung 41 sieht man die maximal auftretenden Momente der Lagerungsfälle 0, a, b, c, d in Abhängigkeit des Winkels.

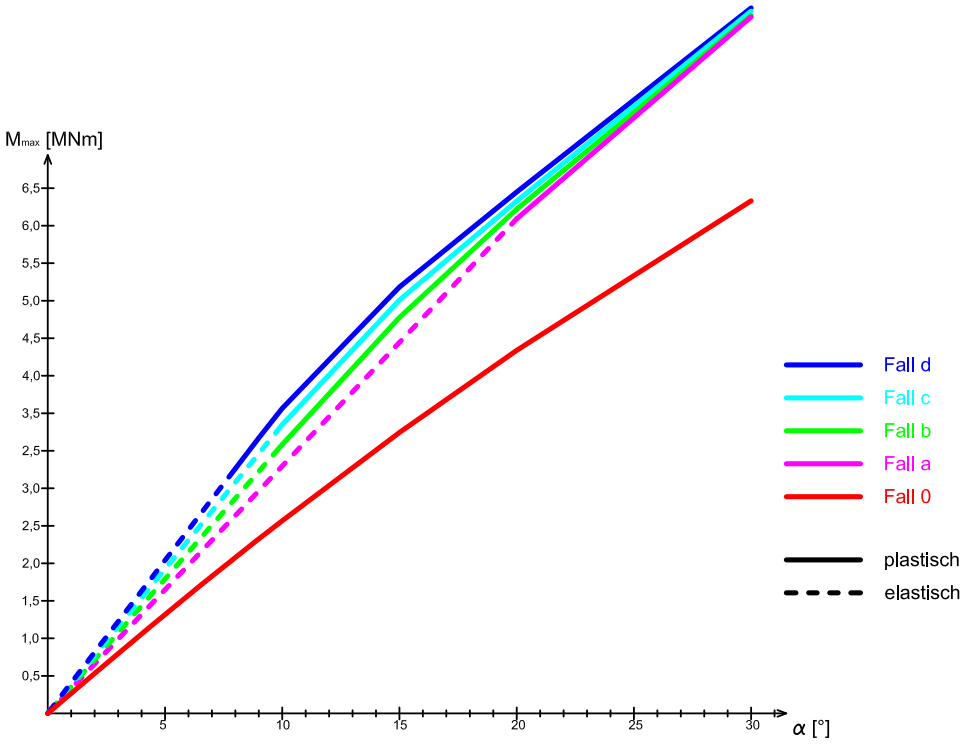


Abbildung 41: Maximal auftretende Momente in Abhängigkeit des Winkels und des Bettungsmoduls

Abbildung 42 zeigt das Verhältnis der Momente zu den Äquivalenzkräften in Abhängigkeit des Winkels für die Lagerungsfälle a, b, c, d.

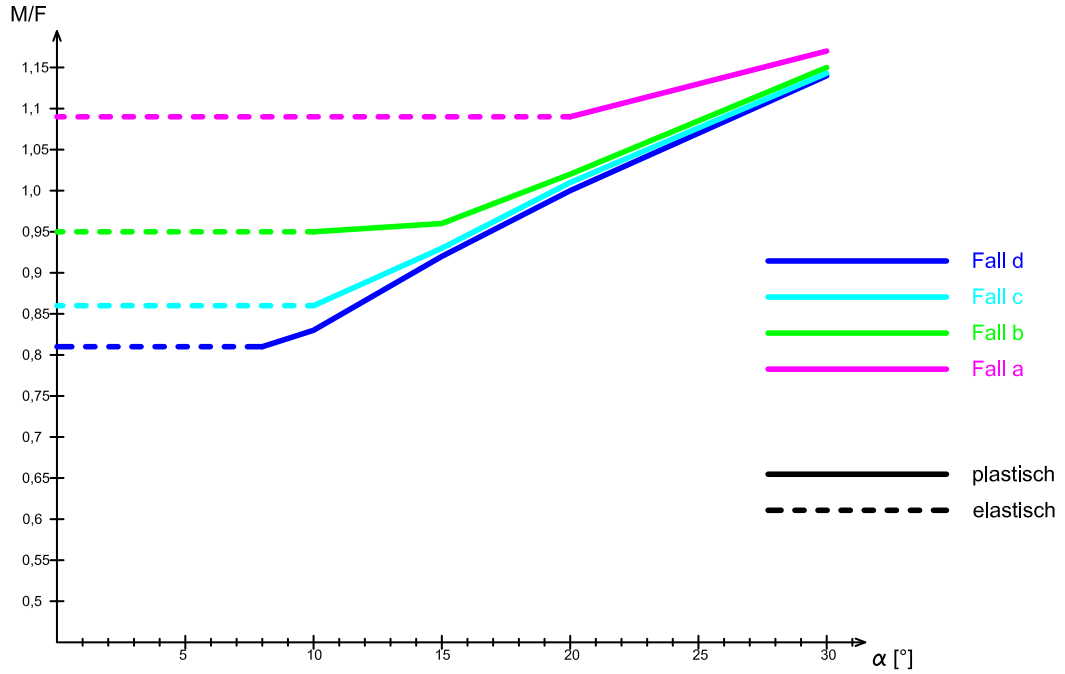


Abbildung 42: Verhältnis der Momente zu den Äquivalenzkräften in Abhängigkeit des Winkels

Es ist ersichtlich, dass die Kurve der Äquivalenzkräfte flacher wird, sobald Fließen des Bodens eintritt. Dasselbe gilt auch für die Momente, wobei zu berücksichtigen ist, dass je weicher der Boden wird (je größer die Kraft desto weicher wird der Boden), desto eher wird der Bohrpfahl auf Biegung belastet. So steigen die Momente im Verhältnis zu den Äquivalenzkräften stärker an. Der Anstieg dieser Verhälnisse ist in Abbildung 42 gut zu sehen.

7 Berechnung des gebetteten Systems mit Verwendung eines Kraft-Zeit-Verlaufes [3]

Wie in Kapitel 6 werden die Lagerungsfälle 0, a, b, c und d in Abhängigkeit des Winkels α berechnet. Die Gleichung (49) zeigt, dass die statische Äquivalenzkraft bei Verwendung eines konstanten Kraft-Zeit-Verlaufes von c^* unabhängig ist. Das heißt, falls Fließen im Boden eintritt, bleibt F_{stat} konstant, da die einwirkende Äquivalenzkraft nicht vom System abhängt. Jedoch, um das maximal einwirkende Moment zu erhalten, sind Iterationschritte notwendig, da sich die Veränderung des Systems auf das Moment auswirkt.
Im weiteren Verlauf wird die statische Äquivalenzkraft über den Winkel α auf den Querrahmen projiziert und die einwirkenden maximalen Momente werden iterativ berechnet, Längskräfte werden verhindert.

7.1 Der gebettete Rahmen - ohne Aufschüttung

Systemskizzen und Anfangsfedersteifigkeiten sind dem Kapitel 6.1 zu entnehmen.
Tabelle 13 zeigt die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α.

α [°]	F_{stat} $[kN]$	$F_{stat,q}$ $[kN]$	M_{max} $[kNm]$
1	3760	65,6	99,9
2	3760	131,2	199,5
3	3760	196,8	299,1
4	3760	262,3	398,7
5	3760	327,7	499,0
6	3760	393,0	607,6
7	3760	458,2	720,3
8	3760	523,3	836,2
9	3760	588,2	955,2
10	3760	652,9	1078,5
15	3760	973,2	1677,7
20	3760	1286,0	2316,9
30	3760	1880,0	3600,3

Tabelle 13: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall ohne Schüttung

7.2 Der gebettete Rahmen - Fall a

Systemskizzen und Anfangsfedersteifigkeiten sind dem Kapitel 6.2.2 zu entnehmen. Tabelle 14 zeigt die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α.

α [°]	F_{stat} $[kN]$	$F_{stat,q}$ $[kN]$	M_{max} $[kNm]$
1	3760	65,6	71,2
2	3760	131,2	142,4
3	3760	196,8	213,6
4	3760	262,3	284,7
5	3760	327,7	355,7
6	3760	393,0	426,6
7	3760	458,2	497,3
8	3760	523,3	568,0
9	3760	588,2	638,4
10	3760	652,9	708,7
15	3760	973,2	1056,2
20	3760	1286,0	1395,8
30	3760	1880,0	2040,5

Tabelle 14: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall a

7.3 Der gebettete Rahmen - Fall b

Systemskizzen und Anfangsfedersteifigkeiten sind dem Kapitel 6.2.1 zu entnehmen. Tabelle 15 zeigt die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α.

α [°]	F_{stat} $[kN]$	$F_{stat,q}$ $[kN]$	M_{max} $[kNm]$
1	3760	65,6	62,4
2	3760	131,2	124,8
3	3760	196,8	187,2
4	3760	262,3	249,5
5	3760	327,7	311,7
6	3760	393,0	373,8
7	3760	458,2	435,8
8	3760	523,3	497,7
9	3760	588,2	559,5
10	3760	652,9	621,0
15	3760	973,2	925,6
20	3760	1286,0	1223,2
30	3760	1880,0	1788,2

Tabelle 15: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall b

7.4 Der gebettete Rahmen - Fall c

Systemskizzen und Anfangsfedersteifigkeiten sind dem Kapitel 6.2.3 zu entnehmen. Tabelle 16 zeigt die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α.

α [°]	F_{stat} $[kN]$	$F_{stat,q}$ $[kN]$	M_{max} $[kNm]$
1	3760	65,6	56,5
2	3760	131,2	113,0
3	3760	196,8	169,4
4	3760	262,3	225,8
5	3760	327,7	282,1
6	3760	393,0	338,3
7	3760	458,2	394,4
8	3760	523,3	450,4
9	3760	588,2	506,3
10	3760	652,9	562,0
15	3760	973,2	837,7
20	3760	1286,0	1107,0
30	3760	1880,0	1618,3

Tabelle 16: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall c

7.5 Der gebettete Rahmen - Fall d

Systemskizzen und Anfangsfedersteifigkeiten sind dem Kapitel 6.2.4 zu entnehmen. Tabelle 17 zeigt die Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α.

α [°]	F_{stat} $[kN]$	$F_{stat,q}$ $[kN]$	M_{max} $[kNm]$
1	3760	65,6	56,5
1	3760	65,6	53,4
2	3760	131,2	106,8
3	3760	196,8	160,1
4	3760	262,3	213,4
5	3760	327,7	266,7
6	3760	393,0	319,8
7	3760	458,2	372,9
8	3760	523,3	425,8
9	3760	588,2	478,7
10	3760	652,9	531,3
15	3760	973,2	791,9
20	3760	1286,0	1046,5
30	3760	1880,0	1529,9

Tabelle 17: Ergebnisse in Abhängigkeit des Winkels α – Fall d

7.6 Momente im Vergleich

Tabelle 18 zeigt die maximalen Momente der Fälle 0, a, b, c, d in Abhängigkeit des Winkels α im Vergleich.

M_0 $[kNm]$	M_{25} $[kNm]$	M_{50} $[kNm]$	M_{75} $[kNm]$	M_{100} $[kNm]$
99,9	71,2	62,4	56,5	53,4
199,5	142,4	124,8	113,0	106,8
299,1	213,6	187,2	169,4	160,1
398,7	284,7	249,5	225,8	213,4
499,0	355,7	311,7	282,1	266,7
607,6	426,6	373,8	338,3	319,8
720,3	497,3	435,8	394,4	372,9
836,2	568,0	497,7	450,4	425,8
955,2	638,4	559,5	506,3	478,7
1078,5	708,7	621,0	562,0	531,3
1677,7	1056,2	925,6	837,7	791,9
2316,9	1395,8	1223,2	1107,0	1046,5
3600,3	2040,5	1788,2	1618,3	1529,9

Tabelle 18: Ergebnisse der maximalen Momente in Abhängigkeit des Winkels α der Fälle 0, a, b, c, d

In Abbildung 43 sieht man die maximal auftretenden Momente der Lagerungsfälle 0, a, b, c, d in Abhängigkeit des Winkels:

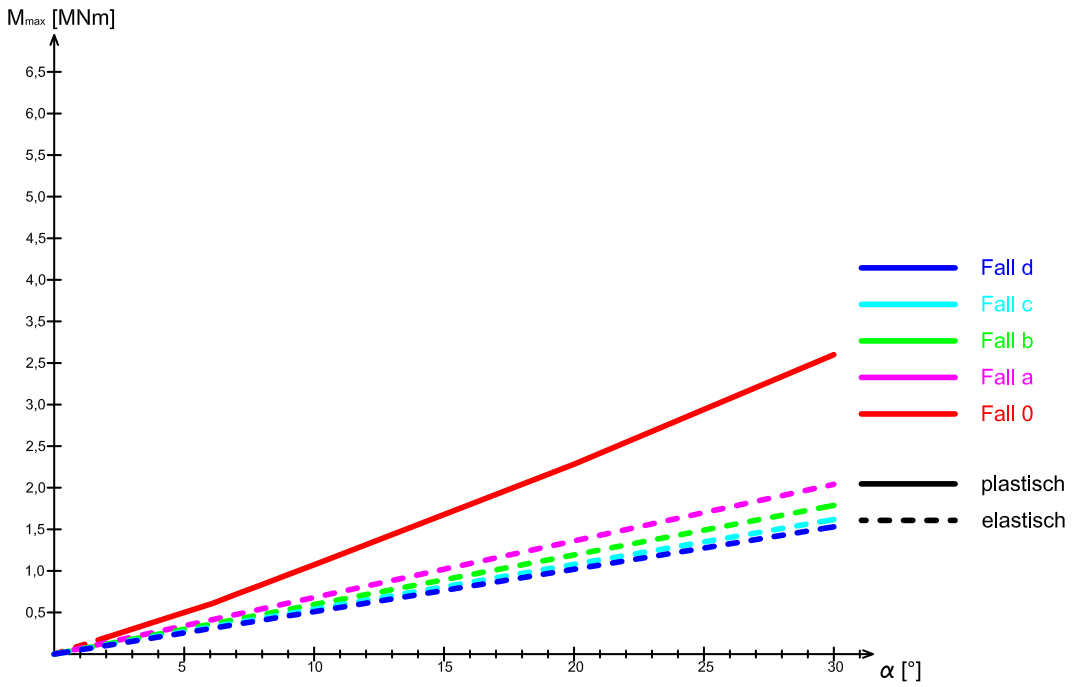


Abbildung 43: Maximal auftretende Momente in Abhängigkeit des Winkels und der Bettungsform

Die Abbildung 44 zeigt das Verhältnis der Momente zu den Äquivalenzkräften in Abhängigkeit des Winkels für die Lagerungsfälle a, b, c, d:

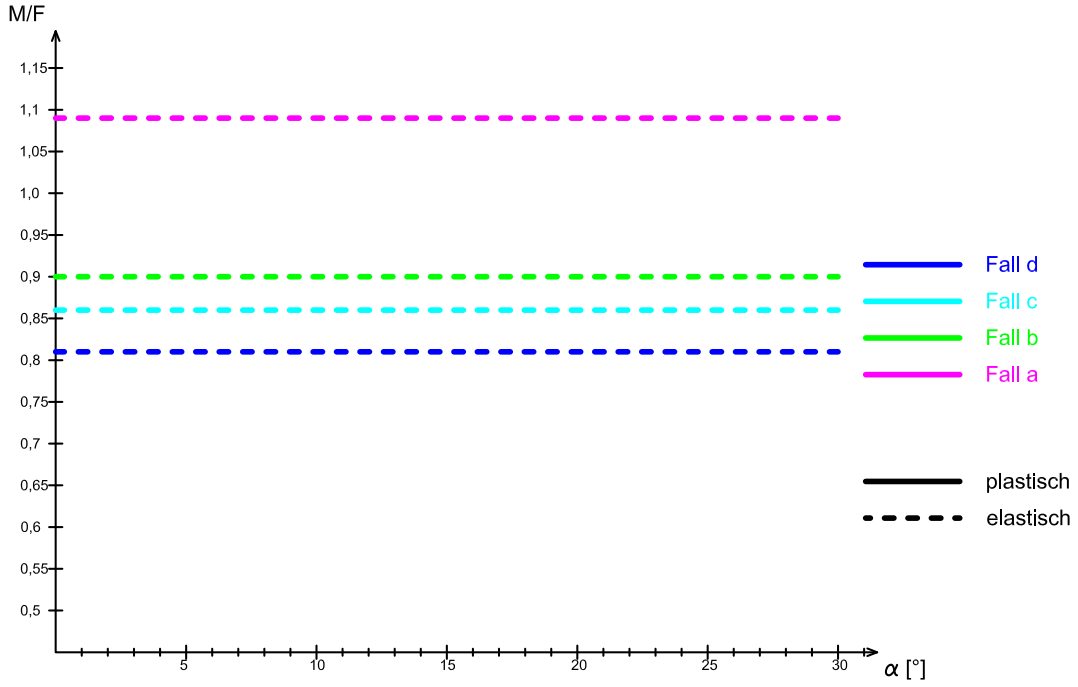


Abbildung 44: Verhältnis der Momente zu den Äquivalenzkräften in Abhängigkeit des Winkels

8 Schlussfolgerungen

8.1 Eingespanntes System – Berechnung nach klassischer Stoßtheorie

Aus den Ergebnissen sieht man, dass die Kräfte sehr groß sind und die Annahmen gemäß ÖNORM EN 1991-7-1 um ein vielfaches überschritten werden.
Die Berechnungsmodelle Querrahmen und Längsrahmen alleine sind natürlich nicht möglich und daher nur akkademischer Natur, jedoch sind sie notwendig um eine Koppelung der beiden Systeme zu ermöglichen.
Aus den Tabellen 2 und 3 kann man entnehmen, dass die Kräfte in Längsrichtung viel größer sind als jene in Querrichtung. Das liegt vor allem am Anfahrwinkel, der geometrisch bedingt nur zwischen 0 und 10 Grad angenommen werden kann und auch daran, dass das Längssystem wesentlich steifer ist. Da die auftretenden Kräfte in Längsrichtung unzulässig hohe Werte annehmen, muß ein Anstoß in Längsrichtung konstruktiv verhindert werden.

8.2 Eingespanntes System – Berechnung unter Annahme eines zeitlichen Stoßkraftverlaufes

Unter Verwendung des zur Verfügung gestellten Stoßkraftverlaufes (experimentell ermittelt) ergeben sich wesentlich geringere Kraftgrößen verglichen mit der klassischen Stoßtheorie. Hier wäre eine Extrapolation der Stoßgeschwindigkeit von 18 $\frac{km}{h}$ auf 80 $\frac{km}{h}$ sinnvoll. Der Multiplikationsfaktor für die Äquivalenzkraft ergibt sich aus dem Verhältnis der beiden Anfahrgeschwindigkeiten und ist $4,44$. Es ergibt sich eine Äquivalenzkraft von $F_{stat} = 16,69\,MN$ und dementsprechend allerdings wieder Momente, die ebenfalls weit über der plastischen Tragfähigkeit des Bohrpfahles liegen. Auch hier ist ein Anstoß in Längsrichtung konstruktiv zu verhindern.

8.3 Gebettetes System – klassische Stoßtheorie

In Abbildung 40 sieht man, dass mit ansteigendem Bettungsmodul auch die statischen Äquivalenzkräfte in Abhängigkeit des Winkels ansteigen. Das heißt, je steifer das System ist, desto größer wird die Ersatzkraft. Es zeigt sich auch, dass bei Systemen mit höherem Bettungsmodul die folglich höhere Äquivalenzkraft nicht nur von den steiferen Federn aufgenommen wird, im Gegenteil wächst auch das Moment, wie in Abbildung 41 ersichtlich. Es folgt: *bei einem Boden mit geringerem Bettungsmodul, das heißt geringerer Verdichtung, werden im Falle eines Anstoßes geringere Kräfte freigesetzt und daraus folgend geringere Momente.*
Mit wachsendem Winkel α steigen die Äquivalenzkräfte linear an, bis der Boden zu fließen beginnt, dann wird das System weicher und die Steigung der Funktionen werden mit wachsendem Winkel α geringer. Die Steigung der dazugehörigen Funktionen der Momente fällt jedoch bei steigendem Winkel α im Vergleich nicht so stark ab, weil die weicheren Systeme mehr über das Moment getragen werden müssen. Das führt auf die Überlegung des Diagrammes 42, welches zeigt, dass das Verhältnis des Momentes zur Kraft nachdem die Fließgrenze überwunden wurde, immer mehr ansteigt.
Auch auffällig ist, dass sich die Ergebnisse der Fälle a, b, c, d in allen drei Diagrammen bei steigendem Winkel α immer mehr einem gemeinsamen Ergebnis annähern, das bedeutet: *je größer der Winkel ist, desto größer ist die Kraft, desto weniger Einfluss hat der Bettungsmodul auf die*

Ergebnisse.

8.4 Gebettetes System – Berechnung unter Annahme eines zeitlichen Stoßkraftverlaufes

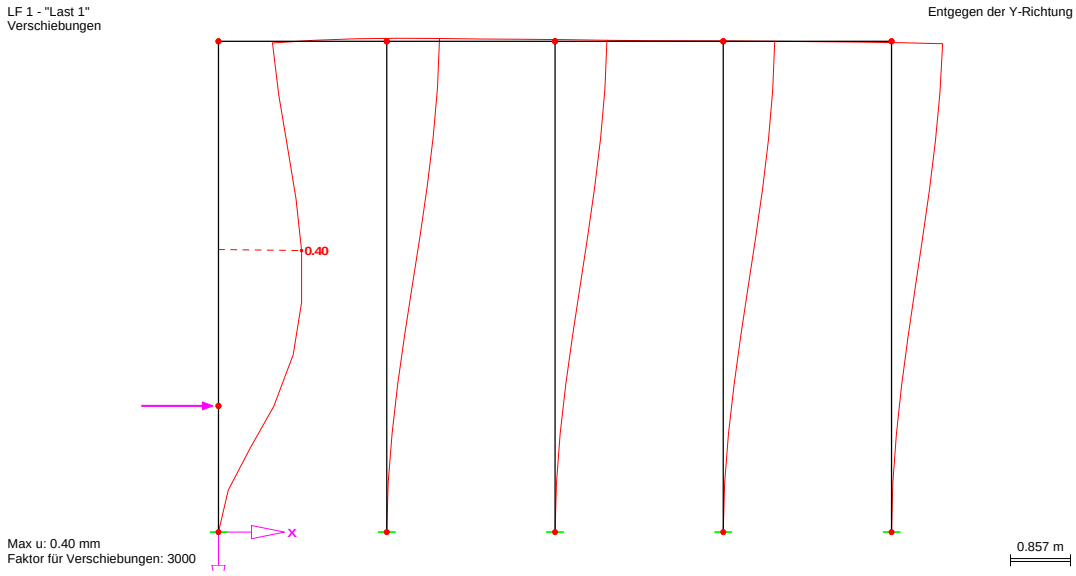
Fließen des Bodens tritt nur bei der Berechnung der Momente nach Bettungsmodulverlaufes Fall 0 auf, sonst sind alle Verformungen elastisch. Die statischen Äquivalenzkräfte sind für alle Systeme gleich und demnach wachsen sie, im Gegensatz zu den Äquivalenzkräften nach klassischer Stoßtheorie, bei wachsendem Bettungsmodulverlauf nicht an. Bei der Berechnung nach moderner Stoßtheorie gilt: *je steifer das System ist, das heißt, je höher der Bettungsmodulverlauf angesetzt wird, desto mehr wird die Federwirkung des Bodens aktiviert und desto geringer werden die einwirkenden Momente im Bohrpfahl.*

9 Anhang

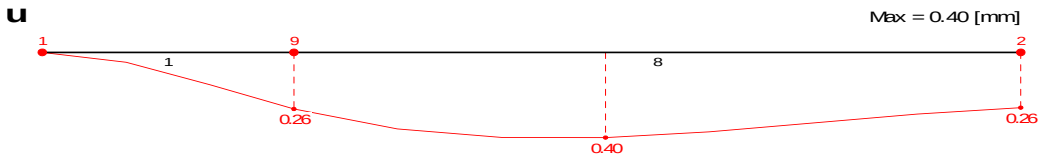
9.1 Berechnung eingespanntes System

9.1.1 Berechnung des Stoßes auf den Längsrahmen

Durchbiegungsfunktion zufolge $F = 1000kN$:



Durchbiegungsfunktion erster Stiel:



$$c^* = \frac{1}{w(x=1,8)} = \frac{1000\,kN.1000}{0,00026\,m} = 3\,846\,154\,846\,\frac{N}{m}$$

Für die Berechnung von M^* wird die Durchbiegungsfunktion des ersten Stiels durch ein Polynom vierten Grades und die Durchbiegungsfunktion des zweiten, dritten, vierten und fünften Stiel durch ein Polynom dritten Grades approximiert. Die Durchbiegungsfunktion des Riegels wird durch eine Funktion mit konstantem Verlauf angenähert.

Erster Stiel:

Funktion vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ \frac{dw_1(x)}{dx} &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^4 \end{aligned}$$

Geometrische Bedingungen:

$$w_1(x=0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = a_0$$

$$\begin{aligned}
\frac{dw_1}{dx}(x=0)=0 &\implies 0=a_1\\
w_1(x=1,8)=0,00026 &\implies 0,00026=a_2.1,8^2+a_3.1,8^3+a_4.1,8^4\\
w_1(x=4,02)=0,00040 &\implies 0,00040=a_2.4,02^2+a_3.4,02^3+a_4.4,02^4\\
w_1(x=7,00)=0,00026 &\implies 0,00040=a_2.7,00^2+a_3.7,00^3+a_4.7,00^4
\end{aligned}$$

Auflösen:

$$\begin{aligned}
&\implies \begin{pmatrix} 3,24 & 5,832 & 10,498 \\ 16,16 & 64,965 & 261,159 \\ 49 & 343 & 2401 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00026 \\ 0,00040 \\ 0,00026 \end{pmatrix}\\
&\implies \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0001509 \\ -0,00004567 \\ 0,000003552 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Formfunktion ϕ_1:

$$\phi_1(x)=\frac{w_1(x)}{w(x=1,8)}=\frac{0,0001509x^2-0,00004567x^3+0,000003552x^4}{0,00026}=0,58x^2-0,176x^3+0,014x^4$$

Zweiter, dritter, vierter und fünfter Stiel:
Für die Formfunktionen ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 und ϕ_5 wird dieselbe Formfunktion angenommen.
Kinematische Annahmen:

$$\phi_2(x=7,0)=\phi_1(x=7,0)=\frac{0,00026}{0,00026}=1,0$$

Funktion dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}
\phi_2(x)&=a_0+a_1.x+a_2.x^2+a_3.x^3\\
\frac{d\phi_2(x)}{dx}&=a_1+2.a_2.x+3.a_3.x^2
\end{aligned}$$

Geometrische Bedingungen und Auflösung:

$$\begin{aligned}
\phi_2(x=0)=0 &\implies a_0=0\\
\frac{d\phi_2}{dx}(x=0)=0 &\implies a_1=0\\
\frac{d\phi_2}{dx}(x=7)=0 &\implies 2a_2.7,0+3a_3.7,0^2=0\\
\phi_2(x=7,0)=1,0 &\implies a_2.7,0^2+a_3.7,0^3=1,0\\
&\implies \begin{pmatrix} 14,0 & 147,0 \\ 49,0 & 343,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,0 \end{pmatrix}\\
&\implies \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,061 \\ -0,006 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für die Formfunktionen ergibt sich:

$$\phi_2(x) = \phi_3(x) = \phi_4(x) = \phi_5(x) = 0,06122.x^2 - 0,00583.x^3$$

Riegel:
Die Formfunktion $\phi_6(x)$ ist konstant:

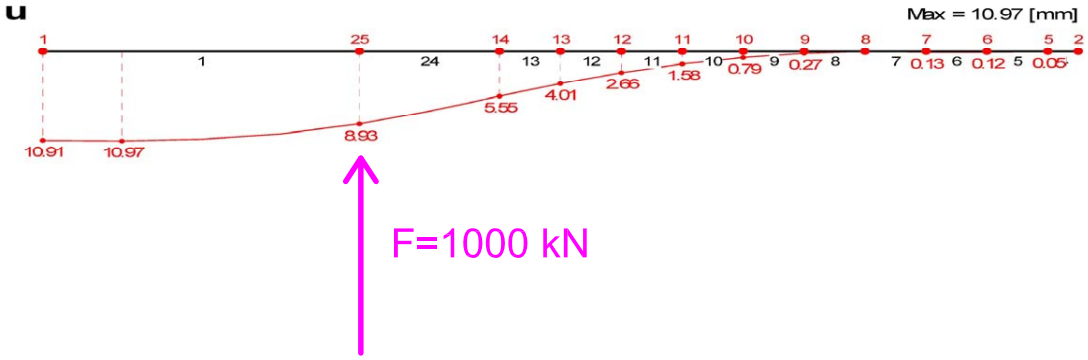
$$\phi_6(x) = \phi_1(x = 7,0) = 1,0$$

Berechnung der Ersatzmasse:

$$\begin{aligned}
M_i^* &= \rho A \int_{x=0}^{7,0} \phi_i(x)^2 \, dx \\
M_1^* &= 28\,790\, kg \\
M_2^* &= 7\,240\, kg \\
M_6^* &= 19\,795\, kg \\
&\Longrightarrow M_{ges} = M_1^* + 4M_2 * + M_6^* = 77\,535\, kg
\end{aligned}$$

9.2 Gebetteter Rahmen ohne Schüttung

Durchbiegungsfunktion des Stieles zufolge $F = 1000\,kN$:



Für die Formfunktionen des gebetteten Rahmens ohne Schüttung wird für die Stiele eine Funktion vierter Ordnung und für den Riegel eine Funktion mit konstatem Verlauf gewählt.
Stiele:

$$
\begin{aligned}
w_1(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\
\frac{dw_1(x)}{dx} &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^4 \\
w_1(x=0) = 0 &\Longrightarrow a_0 = 0 \\
\frac{dw_1}{dx}(x=0) = 0 &\Longrightarrow a_1 = 0 \\
w_1(x = 11.8) = 8,93 &\Longrightarrow 8,93 = a_2.11,8^2 + a_3.11,8^2 + a_4.11,8^2 \\
w_1(x = 15,7) = 10,97 &\Longrightarrow 10,97 = a_2.15,7^2 + a_3.15,7^2 + a_4.15,7^2 \\
w_1(x = 17,0) = 10,91 &\Longrightarrow 10,91 = a_2.17,0^2 + a_3.17,0^3 + a_4.17,0^4
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{pmatrix} 139,2 & 1643,0 & 19387,8 \\ 246,5 & 3869,9 & 60757,3 \\ 289,0 & 4913,0 & 83521,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,93 \\ 10,97 \\ 10,91 \end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,11836 \\ -0,00426 \\ -0,00003 \end{pmatrix}
$$

$$
\phi_1(x) = \phi_2(x) = \frac{w(x)}{w(x = 11,8)} = 0,02758x^2 - 0,00231x^3 - 0,00005x^4
$$

Riegel:

$$
\phi_3(x) = \phi_1(x = 17,0) = 1,22172
$$

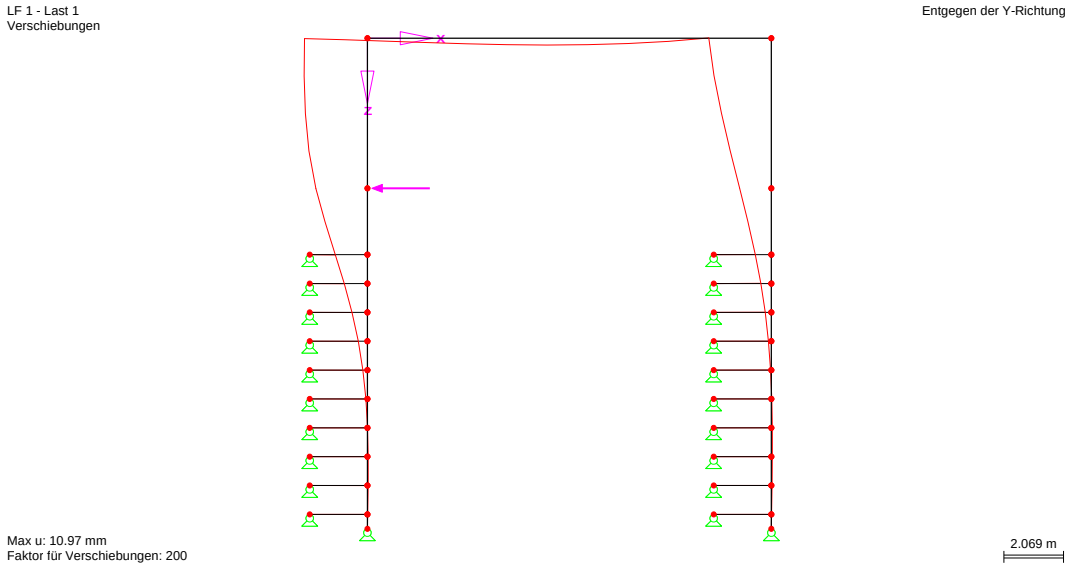
Berechnung der Ersatzmasse:

$$
\begin{aligned}
M_i^* &= \rho A \int_{x=0}^{7,0} \phi_i(x)^2 \, dx \\
M_1^* &= 28\,817\,kg
\end{aligned}
$$

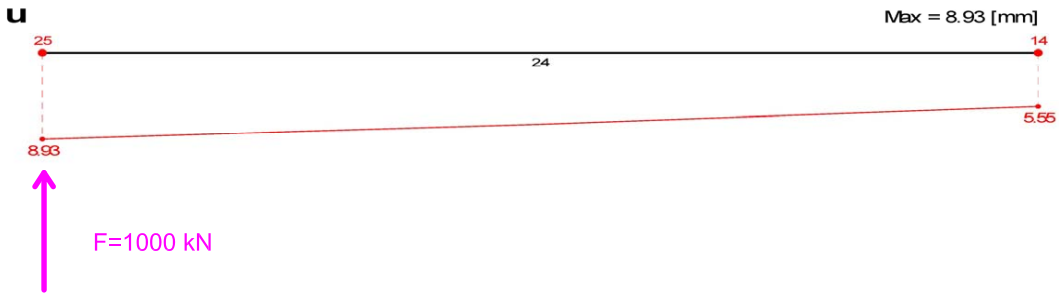
$$
\begin{aligned}
M_2^* &= 28\,817\,kg \\
M_6^* &= 86\,198\,kg \\
&\Longrightarrow \quad M_{ges} = M_1^* + 4M_2^* + M_6^* = 143\,832\,kg
\end{aligned}
$$

Berechnung des ersten und letzten Iterationsschrittes

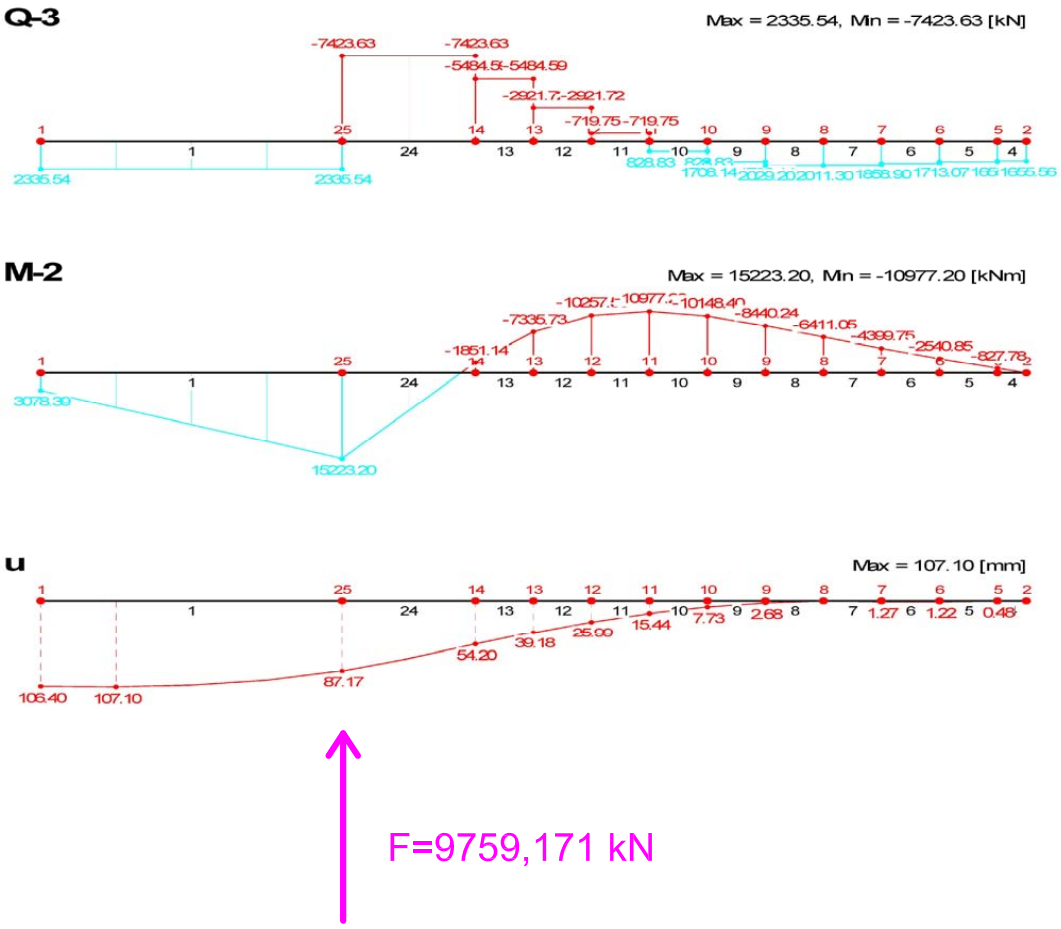
Erster Iterationsschritt: Durchbiegungsfunktion zufolge $F = 1000\,kN$:



Durchbiegung an der Stelle des Kraftangriffspunktes zufolge $F = 1000\,kN$:



Schnittkräfte und Durchbiegungsfunktion am belasteten Stiel zufolge berechnetem $F_{stat} = 9759,171\,kN$:



Berechnung der Federsteifigkeiten $\bar{c}_j^*$ für die nächste Iteration mit Excel:

			gamma	h	phi	lamdap			
c1=	35778,0	kN/m	21	0,5	35	3,690	ep1=	0,039	MN/m^2
c2=	65417,0	kN/m	21	1,5	35	3,690	ep2=	0,116	MN/m^2
c3=	84712,0	kN/m	21	2,5	35	3,690	ep3=	0,194	MN/m^2
c4=	100316,0	kN/m	21	3,5	35	3,690	ep4=	0,271	MN/m^2
c5=	113786,0	kN/m	21	4,5	35	3,690	ep5=	0,349	MN/m^2
c6=	120000,0	kN/m	21	5,5	35	3,690	ep6=	0,426	MN/m^2
c7=	120000,0	kN/m	21	6,5	35	3,690	ep7=	0,504	MN/m^2
c8=	120000,0	kN/m	21	7,5	35	3,690	ep8=	0,581	MN/m^2
c9=	120000,0	kN/m	21	8,5	35	3,690	ep9=	0,659	MN/m^2
c10=	120000,0	kN/m	21	9,5	35	3,690	ep10=	0,736	MN/m^2

	u=	8,93	mm
aus Rstab:	c*=	111982083	N/m
	m*=	143832	kg
Geschw. Plast.	q'=	1,91	m/s
Umkehrlage(plast.)	qu=	0,087	m
	Fäqu.=	**9759,171**	**kN**

aus Rstab ablesen

u1=	54,2	mm	sigmah1=	1,616	MN/m^2	<	0,039	MN/m^2
u2=	39,18	mm	sigmah2=	2,136	MN/m^2	<	0,116	MN/m^2
u3=	25,99	mm	sigmah3=	1,835	MN/m^2	<	0,194	MN/m^2
u4=	15,44	mm	sigmah4=	1,291	MN/m^2	<	0,271	MN/m^2
u5=	7,73	mm	sigmah5=	0,733	MN/m^2	<	0,349	MN/m^2
u6=	2,68	mm	sigmah6=	0,268	MN/m^2	<	0,426	MN/m^2
u7=	0	mm	sigmah7=	0,000	MN/m^2	<	0,504	MN/m^2
u8=	1,27	mm	sigmah8=	0,127	MN/m^2	<	0,581	MN/m^2
u9=	1,22	mm	sigmah9=	0,122	MN/m^2	<	0,659	MN/m^2
u10=	0,48	mm	sigmah10=	0,048	MN/m^2	<	0,736	MN/m^2

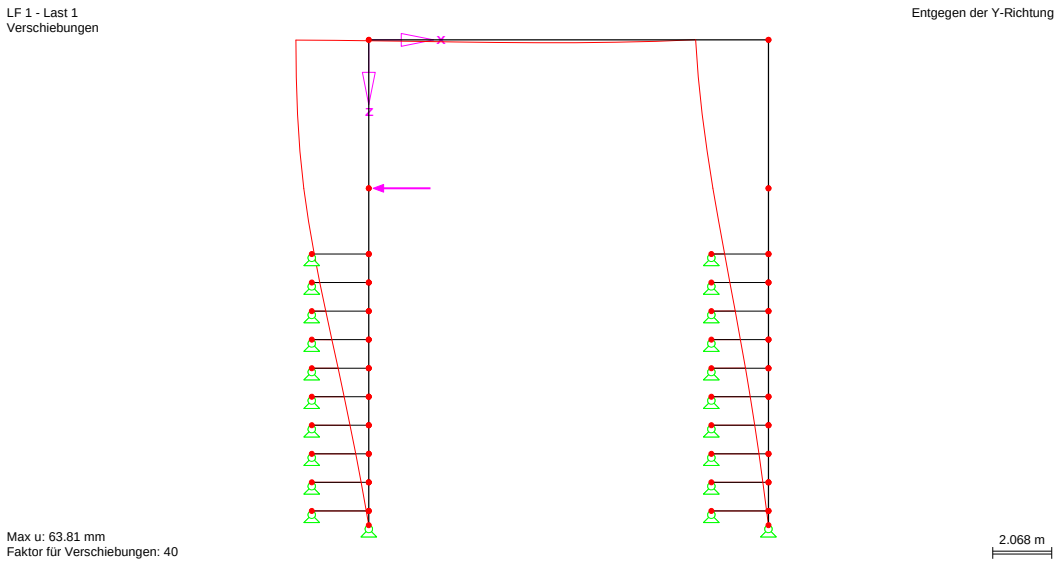
Ermittlung der nächsten c-Werte: cj<120 c=spannung*fläche/u

c1=	857,9	kN/m
c2=	3560,2	kN/m
c3=	8945,0	kN/m
c4=	21079,9	kN/m
c5=	54135,3	kN/m
c6=	120000,0	kN/m
c7=	120000,0	kN/m
c8=	120000,0	kN/m
c9=	120000,0	kN/m
c10=	120000,0	kN/m

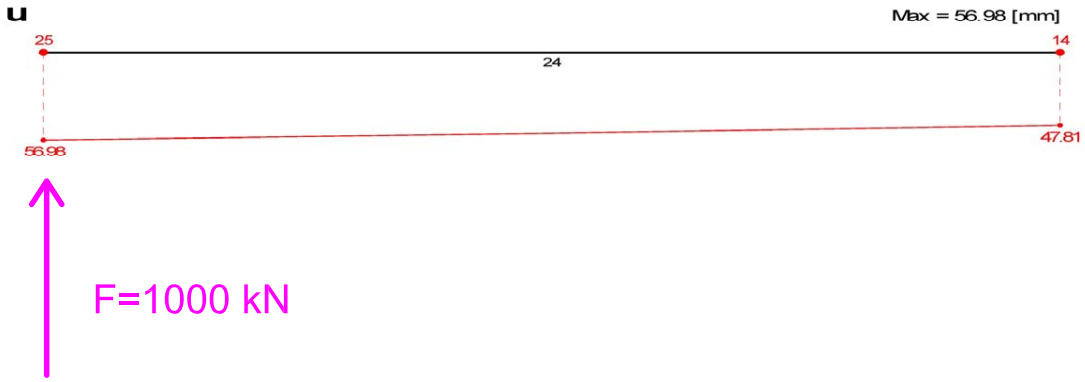
Mit diesen Ersatzsteifigkeiten beginnt der nächste Iterationsschritt, es wird so lange iteriert, bis eine Genauigkeit von 5 Prozent erreicht wird.

Siebenter Iterationsschritt:

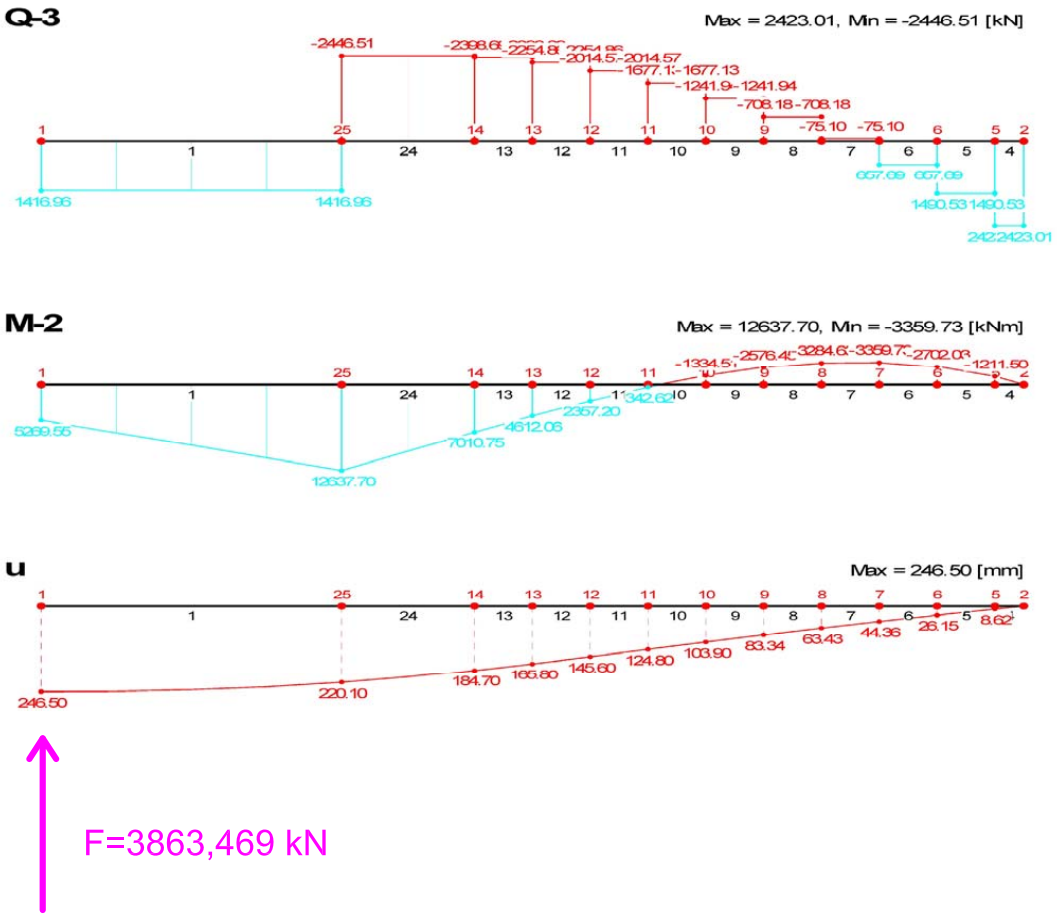
Durchbiegungsfunktion zufolge $F = 1000\,kN$:



Durchbiegung an der Stelle des Kraftangriffspunktes zufolge $F = 1000\,kN$:



Schnittkräfte und Durchbiegungsfunktion am belasteten Stiel zufolge berechnetem $F_{stat} = 3863,469\,kN$:



Berechnung der Federsteifigkeiten $\overline{c}_j^*$ zum Vergleich mit denen der letzten Iteration mit Excel:

			gamma	h	phi	lamdap			
c1=	258,9	kN/m	21	0,5	35	3,690	ep1=	0,039	MN/m^2
c2=	867,5	kN/m	21	1,5	35	3,690	ep2=	0,116	MN/m^2
c3=	1650,0	kN/m	21	2,5	35	3,690	ep3=	0,194	MN/m^2
c4=	2703,3	kN/m	21	3,5	35	3,690	ep4=	0,271	MN/m^2
c5=	4188,0	kN/m	21	4,5	35	3,690	ep5=	0,349	MN/m^2
c6=	6404,4	kN/m	21	5,5	35	3,690	ep6=	0,426	MN/m^2
c7=	9981,0	kN/m	21	6,5	35	3,690	ep7=	0,504	MN/m^2
c8=	16519,2	kN/m	21	7,5	35	3,690	ep8=	0,581	MN/m^2
c9=	31846,7	kN/m	21	8,5	35	3,690	ep9=	0,659	MN/m^2
c10=	108130,6	kN/m	21	9,5	35	3,690	ep10=	0,736	MN/m^2

	u=	56,98	mm
aus Rstab:	c*=	17550017,6	N/m
	m*=	143832	kg
Geschw. Plast.	q'=	1,91	m/s
Umkehrlage(plast.)	qu=	0,220	m
	Fäqu.=	**3863,469**	**kN**

aus Rstab ablesen

u1=	184,7	mm	sigmah1=	0,040	MN/m^2	<	0,039	MN/m^2
u2=	165,8	mm	sigmah2=	0,120	MN/m^2	<	0,116	MN/m^2
u3=	145,6	mm	sigmah3=	0,200	MN/m^2	<	0,194	MN/m^2
u4=	129,8	mm	sigmah4=	0,292	MN/m^2	<	0,271	MN/m^2
u5=	103,9	mm	sigmah5=	0,363	MN/m^2	<	0,349	MN/m^2
u6=	83,34	mm	sigmah6=	0,445	MN/m^2	<	0,426	MN/m^2
u7=	63,43	mm	sigmah7=	0,528	MN/m^2	<	0,504	MN/m^2
u8=	44,36	mm	sigmah8=	0,611	MN/m^2	<	0,581	MN/m^2
u9=	26,15	mm	sigmah9=	0,694	MN/m^2	<	0,659	MN/m^2
u10=	8,62	mm	sigmah10=	0,777	MN/m^2	<	0,736	MN/m^2

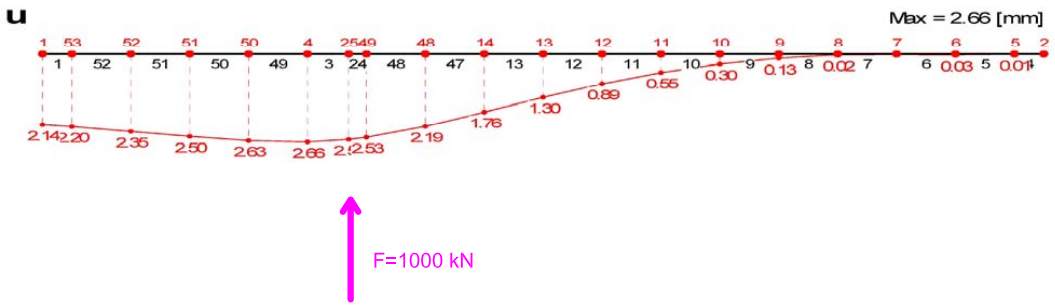
Ermittlung der nächsten c-Werte: cj<120 c=spannung*fläche/u

c1=	251,7	kN/m
c2=	841,3	kN/m
c3=	1596,7	kN/m
c4=	2507,5	kN/m
c5=	4027,6	kN/m
c6=	6137,0	kN/m
c7=	9529,4	kN/m
c8=	15722,3	kN/m
c9=	30227,0	kN/m
c10=	102485,8	kN/m

Man sieht hier, dass die Federsteifigkeiten zufolge der siebenten Iteration nur mehr gering von denen der sechsten Iteration abweichen.

9.3 Gebetteter Rahmen mit Schüttung

Berechnung der Ersatzmasse M^* für die Fälle a, b, c, d: Durchbiegungsfunktion des Stiels zufolge $F = 1000\,kN$:



Stiel 1:

$$
\begin{aligned}
w_1(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\
\frac{dw_1(x)}{dx} &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^4 \\
w_1(x=0) = 0 &\Longrightarrow a_0 = 0 \\
\frac{dw_1}{dx}(x=0) = 0 &\Longrightarrow a_1 = 0 \\
w_1(x=12.5) = 2,66 &\Longrightarrow 2,66 = a_2.12,5^2 + a_3.12,5^3 + a_4.12,5^4 \\
\frac{dw_1}{dx}(x=12,5) = 0 &\Longrightarrow 0 = 2a_2.12,5 + 3a_3.12,5^2 + 4a_4.12,5^3 \\
w_1(x=17,0) = 2,14 &\Longrightarrow 2,14 = a_2.17,0^2 + a_3.17,0^3 + a_4.17,0^4
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{pmatrix} 156,3 & 1953,1 & 24414,1 \\ 25,0 & 468,8 & 7812,5 \\ 289,0 & 4913,0 & 83521,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,66 \\ 0 \\ 2,14 \end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,07143 \\ -0,00598 \\ 0,00013 \end{pmatrix}
$$

$$
\phi_1(x) = \frac{w_1(x)}{w_1(x=11,8)} = 0,02758x^2 - 0,00231x^3 + 0,00005x^4
$$

Stiel 2:

$$
\phi_2(x) = (\frac{x}{l})^2 \phi_1(x=17,0) = x^2 \frac{0,8284}{17,0^2} = 0,002867x^2
$$

Riegel:

$$
\phi_3(x) = \phi_1(x=17,0) = x^2 \frac{0,8284}{17,0^2} = 0,00287x^2
$$

Berechnung der Ersatzmassen:

$$
\begin{aligned}
M_i^* &= \rho A \int_{x=0}^{7,0} \phi_i(x)^2 \, dx \\
M_1^* &= 27\,088\,kg
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_2^* &= 6\,600\,kg \\
M_3^* &= 39\,631\,kg \\
&\Longrightarrow \quad M_{ges} = M_1^* + M_2^* + M_3^* = 73\,319\,kg
\end{aligned}
$$

9.4 Exemplarischer Momentenverlauf für ein gebettetes System

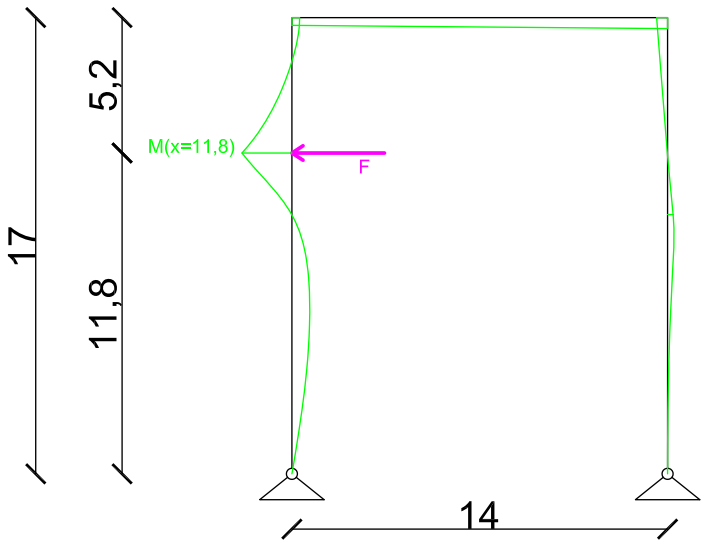


Abbildung 45: Momentenverlauf zufolge F_{stat} – exemplarisch für alle gebetteten Systeme $[m]$

Alle maximalen Momente, die bei den gebetteten Systemen der Fälle a, b, c, d und 0 berechnet wurden, treten an der Stelle $x = 11,8\,m$ des linken Stiels auf = Stelle des Kraftangriffspunktes.

10 Literatur

[1] Adam, C.: Schwingungen inelastischer Tragwerke, LVA Nr 201.079 Studienblätter zur Lehrveranstaltung mit Literatur, Verlag TU Wien.
[2] Simmer, K.: Grundbau Teil 2 Baugruben und Gründungen, B.G. Teubner Stuttgart Leibzig, 18. Auflage 1999, Seite 327 - 351
[3] Latotzke, J., Triantafyllidis, T.: Horizontale Stoßbelastung von Pfählen - Modellversuche in der geotechnischen Großzentrifuge in Bochum, Bautechnik 79 (2002) Heft 3, Seite 144 - 159.
[4] ÖNORM B 4435(1993): Erd- und Grundbau Erddruckberechnung, Österreichisches Normungsinstitut, Seite 36 - 38.
[5] ÖNORM EN 1991-1-7, Ausgabe: 2005-11-01: Eurocode 1 - Einwirkung auf Tragwerke Teil 1-7: Allgemeine Einwirkungen - Außergewöhnliche Einwirkungen, Seite 26 - 28.
[6] Schneider, K.J.: Bautabellen für Ingenieure, Werner Verlag, 17. Auflage 2006, Kap.4
[7] SIEMENS AG.: Kraft-Verformungsverlauf eines Stoßversuches
[8] TECTON consult: Standberechnung, Block T13, CODE: 30-WH-OB405_Block T13.doc
[9] TECTON consult: Plan, Plannr.: 60-WH-OB405-11-OST -E00, Einlagezahl: B7.AO.3E.02, Wien Hauptbahnhof, Strecke 105 01 / km 102.190 – km9 99.947 ≙ km 0.000 – km 3.446, Strecke 122 01 / km 7.787 – km 9.566 ≙ km 0.000 – km 1.200
[10] TECTON consult: Plan, Plannr.: 60-WH-OB405-11-UW -E00, Einlagezahl: B7.AO.3E.03, Wien Hauptbahnhof, Strecke 105 01 / km 102.190 – km9 99.947 ≙ km 0.000 – km 3.446, Strecke 122 01 / km 7.787 – km 9.566 ≙ km 0.000 – km 1.200
[11] Ziegler, F.: Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper, SpringerWienNewYork, 3. Auflage 1998, Kap. 3, 8, 10, 11 und 12.

11 Verwendete Software Pakete für die durchgeführten Berechnungen

- Maple 9 (Computeralgebra-System)
- Microsoft Office Excel (Tabellenkalkulationsprogramm)
- Dlubal R-Stab (Stabwerksprogramm)