DIPLOMARBEIT

Optimale Dividendenzahlungen im Brownschen Modell mit Zinsen

ausgeführt am

Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao. Univ.-Prof. Dipl.-ing. Dr. techn. Peter Grandits

durch

Jimmy Xue, BSc
Matrikelnummer: 01325154
Vorgartenstraße 163
1020 Wien

Wien, am Datum

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kurzfassung

In dieser Diplomarbeit befassen wir uns mit einem optimalen Dividendenproblem im Gebiet der stochastischen Kontrolltheorie. Dabei modellieren wir den Überschussprozess eines Unternehmens mit einer Brownsche Bewegung mit Drift, im Speziellen handelt es sich um eine Diffusionsapproximation eines klassischen Cramér-Lundberg-Modells aus der Risiko- und Ruintheorie. Wir betrachten somit ein Modell in stetiger Zeit, in der Prämienzahlungen konstant gezahlt werden und Schäden zufällig auftreten. Ein zusätzliches Merkmal im Modell ist die Verzinsung des Überschusses durch eine konstante Zinsrate. Das Ziel ist es nun eine Dividendenstrategie zu finden, sodass die erwarteten diskontierten Dividendenzahlungen maximiert werden. Im Fall eines Modells ohne Verzinsung wird die Optimalität durch eine Barrierestrategie bei unbeschränkter Dividendenrate erreicht. Unter Anwendung einer Barrierestrategie wird der Anteil des Überschussprozesses über einer Barriere sofort als Dividende ausbezahlt. Der Ruin des Unternehmens ist im Fall einer Barrierestrategie garantiert. Womit wir eine Beschränkung der Dividendenrate durch eine Konstante in Betracht ziehen. Unter dieser zusätzlichen Bedingung werden wir zeigen, dass die optimale Dividendenstrategie eine Threshold-Strategie ist, in der solange sich der Überschussprozess über einer bestimmten Schranke befindet die maximale Dividendenrate ausbezahlt wird. Sobald sich der Prozess unterhalb der Schranke befindet wird nichts ausgeschüttet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Abstract

In this thesis we deal with an optimal dividend proplem on the field of stochastic control theory. Thereby we model the surplus process of a company with a brownian motion with drift, this in particular is a diffusionapproximation of the classic Cramér-Lungberg model from the risk and ruin theory. We consider therefore a model in continuous time, in which premium payments are paid constantly and claims occur randomly. An additional feature in this model is that the surplus earns an investment income at a constant force of interest. The objective now is to find a dividend strategy so as to maximize the expected discounted value of dividend payments. In case of a model without interest the optimality is achieved by using a barrier strategy for unrestricted dividend rate. Using this strategy, all surplus above the barrier is paid as a dividend immediately. The ruin of the company is certain in case of a barrier strategy. Therefore we consider a restriction of the dividend rate bounded by a constant. Under this additional constraint, we show that the optimal dividend strategy is formed by a threshold strategy, in which dividends are paid out at the maximal rate as soon as the surplus exceeds a certain threshold. Whenever the surplus is below the threshold no dividends are paid.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken die mich während meines Studiums unterstützt und motiviert haben. Zuallererst möchte ich mich besonders bei Ao. Univ.-Prof. Dipl.-ing. Dr. techn. Peter Grandits bedanken, dass ich meine Diplomarbeit bei ihm schreiben durfte. Vielen Dank für die geduldige Betreuung und anregende Unterstützung.

Des Weiteren gilt mein Dank meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht haben. Sie haben nie aufgehört an mich zu glauben und haben mich in meinem Weg stets moralisch unterstützt. Auch meinem Bruder gebührt ein herzlicher Dank, weil er immer meinen Rücken gestärkt hat.

Darüber Hinaus bedanke ich mich bei all meinen Freunden und Studienkollegen, die mich auf vielfältiger Weise unterstützt haben.
Abschließend ein großes Dankeschön an meine Freundin, die mir stets in schwierigen Zeiten motivierend und verständnisvoll zur Seite stand.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am Datum

Name des Autors

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Stochastische Analysis **1**
- 1.1 Stochastische Prozesse, Filtrationen und Stoppzeiten 1
- 1.2 Martingale 4
- 1.3 Die Brownsche Bewegung 4
- 1.4 Itô-Integral und Itô-Formel 6

2 Risiko- und Ruintheorie **9**
- 2.1 Risikotheorie 9
  - 2.1.1 Das individuelle Modell 9
  - 2.1.2 Das kollektive Modell 10
  - 2.1.3 Das klassische Modell 12
- 2.2 Ruintheorie 13
- 2.3 Diffusionsapproximation 14

3 Stochastische Kontrolltheorie **17**
- 3.1 Das stochastische Kontrollproblem 17
- 3.2 Dynamische Optimierung 20
- 3.3 Das Verifikationstheorem 23

4 Optimale Dividendenstrategie im Diffusionsmodell **28**
- 4.1 Dividendenstrategie mit beschränkter Dividendenrate 28
- 4.2 Dividendenstrategie mit unbeschränkter Dividendenrate 36

5 Optimale Dividendenstrategie mit Zinsen **44**
- 5.1 Das Modell 44
- 5.2 Kummer'sche Differentialgleichung 46
- 5.3 Die optimale Barriere 48

6 Simulation **59**
- 6.1 Vergleich der Resultate 59
- 6.2 Realisierung eines Unternehmensverlaufs 61

A Matlab-Codes **64**

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kapitel 1

Grundlagen der Stochastische Analysis

Im ersten Kapitel werden wir grundlegende Definitionen und Sätze vorstellen. Es dient zur Wiederholung der wichtigsten Resultate der stochastischen Analysis, welche wir im Verlauf dieser Arbeit benötigen werden. Wir verzichten hier weitestgehend auf Beweise und verweisen auf Literaturen wie Protter [11], Deck [5] oder Øksendal [9].

1.1 Stochastische Prozesse, Filtrationen und Stoppzeiten

Gegeben sei ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zusätzlich sei eine *Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ gegeben mit einer Zeitmenge $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. Unter Filtration verstehen wir eine Familie von wachsende σ-Algebren $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, sodass $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für $s \leq t$ gilt.

Definition 1.1. Ist $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ eine Filtration, dann ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Filtration heißt

- vollständig, falls alle $\mathbb{P}$-Nullmengen aus $\mathcal{F}$ bereits in $\mathcal{F}_0$ enthalten sind,
- rechtsstetig, falls $\mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ gilt, für alle $t \in \mathbb{T}$.

Ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ erfüllt die *üblichen Bedingungen*, falls die Filtration vollständig und rechtsstetig ist.

Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass die *üblichen Bedingungen* erfüllt sind.

Definition 1.2. Ein stochastischer Prozess ist eine Familie $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ von $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei sie durch die Zeit t indiziert ist.

Also ist ein stochastischer Prozess eine Abbildung

$$\begin{aligned} X :&\mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^d \\ &(t, \omega) \mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Betrachten wir für ein festes $\omega \in \Omega$ die Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$, dann erhalten wir einen einzelnen Verlauf eines zufälligen Vorganges. Dieser wird auch *Pfad des Prozesses* genannt.

Definition 1.3. Ein stochastischer Prozess X heißt adaptiert (bezüglich $\mathbb{F}$), falls X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist, für alle $t \in \mathbb{T}$.

Anschaulich lässt sich aus einem adaptierten Prozess nicht mehr Informationen als die bis zum Zeitpunkt t aufgetretenen Ereignissen gewinnen. Jeder stochastischer Prozess X ist adaptiert an die von ihm erzeugte Filtration

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^X &:= \sigma(X_s \mid s \in \mathbb{T}, s \leq t) \\ &:= \sigma\Big(\bigcup_{s \leq t} X_s^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))\Big), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borel'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet wird. Dies ist außerdem die kleinste Filtration, an die X adaptiert ist.

Definition 1.4. Ein stochastischer Prozess X heißt càdlàg (continue à droite, limite à gauche, französisch für „rechtsstetig mit linksseitigem Grenzwert"), falls ihre Pfade $t \mapsto X_t$ an jeder Stelle t fast sicher rechtsstetig sind und der linksseitige Limes existiert, also $X_{t-} = \lim_{s \to t} X_s$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Definition 1.5. Ein stochastischer Prozess X heißt progressiv messbar (bezüglich $\mathbb{F}$), wenn für alle $t \in \mathbb{T}$, der Prozess als Abbildung

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

$\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar ist.

Aus der Definition der progressiv Messbarkeit kann man schließen, dass für einen stochastischen Prozess X, Adaptiertheit aus progressiv Messbarkeit folgt. Ist ein stochastischer Prozess X adaptiert und rechtsstetig, dann ist X progressiv messbar.

Definition 1.6. Zwei stochastische Prozesse heißen Modifikationen voneinander, falls für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt, dass fast sicher $X_t = Y_t$.
Zwei stochastische Prozesse X und Y heißen ununterscheidbar, falls fast sicher gilt, dass $X_t = Y_t$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Man merke an, dass falls X und Y ununterscheidbare Prozesse sind, diese immer Modifikationen voneinander sind. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Der folgende Satz zeigt unter welchen Voraussetzungen die Umkehrung gültig ist.

Satz 1.1. *Seien X und Y zwei stochastische Prozesse, die Modifikationen voneinander sind. Falls X und Y rechtsstetige Pfade fast sicher besitzen, dann sind X und Y ununterscheidbar.*

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Damit sind zwei stochastische Prozesse X und Y die càdlàg und Modifikationen voneinander sind, auch ununterscheidbar.

Als nächstes durchleuchten wir den Begriff Stoppzeit. Stoppzeiten sind ein allgemein wichtiges Hilfsmittel zur Steuerung von stochastischen Prozessen sowie zur Ermittlung optimaler Strategien. Dabei wird ein zufälliger Zeitpunkt τ modelliert, an dem ein bestimmtes Ereignis erstmalig eintritt.

Definition 1.7. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ heißt Stoppzeit (bezüglich $\mathbb{F}$), falls $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Folgender Satz illustriert die Bedeutung der Bedingung der Rechtsstetigkeit der Filtration.

Satz 1.2. *Das Ereignis $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$ genau dann, wenn T eine Stoppzeit ist*

Satz 1.3. *Seien τ und σ Stoppzeiten. Dann sind folgende Funktionen ebenfalls Stoppzeiten:*

1. $\tau \wedge \sigma = min(\tau, \sigma)$;
2. $\tau \vee \sigma = max(\tau, \sigma)$;
3. $\tau + \sigma$.

Jede deterministische Zeit t ist zudem trivialerweise eine Stoppzeit. Außerdem ist jede Stoppzeit τ $\mathcal{F}_\tau$-messbar.

Definition 1.8. Ist $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess und $A \subset \mathbb{R}^d$, so heißt die Funktion $\tau_A : \Omega \to [0, \infty]$ mit

$$\tau_A(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) \in A\}$$

Eintrittszeit in A. Es gilt folgende Konvention für die leere Menge, $\inf \emptyset = \infty$.

Satz 1.4. *Sei X ein pfadstetiger, $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess in $\mathbb{R}^d$. Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, so ist die Eintrittszeit τ_A eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit.*

Eine Menge von Ereignissen, deren Eintreten bis τ entscheidbar ist, wird durch Beobachtung eines stochastischen Prozess bis zu einem zufälligen Zeitpunkt τ bestimmt. Da die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ alle verfügbaren Informationen bis einschließlich dem Zeitpunkt t enthält, wollen wir einen analogen Begriff für beobachtbare Ereignisse bis zu einer Stoppzeit definieren.

Definition 1.9. Sei τ eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann ist die σ-Algebra der Ereignisse bis zur Zeit τ definiert durch

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{ für alle } t \in \mathbb{T}\}.$$

Wir wollen nun einen stochastischen Prozess *kontrollieren*, indem wir ihn stoppen sobald ein bestimmtes Ereignis erstmals eintritt.

Definition 1.10. Sei X ein stochastischer Prozess und τ eine Stoppzeit. Dann heißt der Prozess

$$X_t^\tau := X_{t \wedge \tau}$$

der gestoppte Prozess bezüglich τ.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

1.2 Martingale

Definition 1.11. Sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{R}$-wertiger und bezüglich $\mathbb{F}$ adaptierter Prozess mit $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$, für alle $t \geq 0$. Dann heißt M

1. Martingal, falls für $s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ fast sicher gilt,
2. Submartingal, falls für $s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$ fast sicher gilt,
3. Supermartingal, falls für $s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s$ fast sicher gilt.

Ein Martingal kann den Verlauf eines fairen Spiels modellieren. Entsprechend beschreibt ein Submartingal (Supermartingal) Prozesse bei denen im Mittel Gewinne (Verluste) auftreten.

Satz 1.5 (Martingalkonvergenzsatz)**.** *Sei X ein rechtsstetiges Supermartinal mit $\sup_{0\leq t<\infty} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$. Dann existiert die Zufallsvariable $Y = \lim_{t\to\infty} X_t$ fast sicher und es gilt $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Satz 1.6. *Sei M ein Martingal und τ eine endliche Stoppzeit. Dann ist M^τ ein zum Zeitpunkt τ gestopptes Martingal, auch ein Martingal.*

Wir betrachten nun eine vereinfachte Version des *Optional Sampling Theorems*.

Satz 1.7 (Optional Sampling Theorem)**.** *Sei M ein $\mathbb{F}$-Submartingal und σ, τ seien beschränkte $\mathbb{F}$-Stoppzeiten mit endlichen Wertemengen und mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt*

$$M_\sigma \leq \mathbb{E}[M_\tau|\mathcal{F}_\sigma].$$

Ist M ein Martingal, so gilt sogar Gleichheit.

1.3 Die Brownsche Bewegung

Wir wollen uns nun einem der prominentesten Beispielen eines Martingals zuwenden. Die Brownsche Bewegung, die durch den Botaniker Robert Brown[1] 1827 entdeckt wurde, beschreibt zufällige unregelmäßige Bewegung von molekularen Teilchen. Die Brownsche Bewegung findet mittlerweile in verschiedensten Forschungsgebieten Anwendung. Im Besonderen in der Finanzmathematik zur Modellierung von Aktien. Die Brownsche Bewegung ist somit das wichtigste Beispiel für stetige Martingale, welches uns in dieser Arbeit durchgehend begleiten wird. Viele weitere Prozesse lassen sich durch sie darstellen, wie etwa Diffusionsprozesse. Norbert Wiener[2] beschrieb 1923 erstmalig die Brownsche Bewegung durch ein mathematisches Modell, weshalb die standardisierte Version auch häufig als Wiener-Prozess bezeichnet wird. Wir werden die Brownsche Bewegung mit der Abkürzung BB bezeichnen.

Definition 1.12. Ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess $B = (B_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ heißt Brownsche Bewegung (bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$), wenn

[1] Robert Brown, schottischer Botaniker, *21. Dezember 1773 in Montrose, †10. Juni 1858.

[2] Norbert Wiener, US-amerikanischer Mathematiker, *26. November 1894 in Columbia, †18. März 1964 in Stockholm.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

1. $B_0 = x$ $\mathbb{P} - f.s.$,
2. die Inkremente unabhängig sind, also für beliebige $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ sind $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ unabhängige Zufallsvariablen,
3. die Inkremente normalverteilt sind, also
   für alle $0 \leq s < t$ gilt $B_t - B_s \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$,
4. B stetige Pfade besitzt, also die Abbildung $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$.

Sei $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ und wir verschärfen die 1. Bedingung zu $\mathbb{P}[B_0 = 0] = 1$, dann erhalten wir die *Standard Brownsche Bewegung*. Wir werden im Folgenden mit $W = (W_t)_{t \geq 0}$ stets die standardisierte Brownsche Bewegung bezeichnen.
Wichtige Eigenschaften der Brownschen Bewegung sind:

- Die BB $(B_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal, also mit der durch die BB erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ gilt:

$$\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s^B] = B_s \text{ fast sicher, für } s \leq t.$$

- Die BB $(B_t)_{t \geq 0}$ ist mit Wahrscheinlichkeit 1 nirgends stetig differenzierbar.
- Die Pfade der BB $(B_t)_{t \geq 0}$ haben fast sicher eine unendliche Totalvariation, also

$$\sup\{\sum_{k=0}^{n} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|\} = \infty, \qquad \mathbb{P} - f.s.,$$

  wobei das Supremum über alle Zerlegungen von $[\alpha, \beta]$ gebildet wird.
- Allerdings haben die Pfade der BB $(B_t)_{t \geq 0}$ endliche quadratische Variationen, also für $0 \leq \alpha < \beta$ und $t_k^{(n)} := \alpha + (\beta - \alpha)\frac{k}{2^n}$, für $k = 0, 1, \ldots, 2^n$, gilt:

$$\sum_{k=0}^{2^n - 1} (B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}})^2 \xrightarrow{n \to \infty} \beta - \alpha, \qquad \mathbb{P} - f.s.,$$

Eine Brownsche Bewegung lässt sich einfacherweise durch die Standard Brownsche Bewegung darstellen:

Definition 1.13. Sei W eine Standard Brownsche Bewegung. Dann heißt der Prozess $B_t = x + \mu t + \sigma W_t$ Brownsche Bewegung mit Startwert x, Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma^2 > 0$.

Definition 1.14. Sei W eine Standard Brownsche Bewegung. Dann heißt der Prozess $M_t = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ geometrische Brownsche Bewegung.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

1.4 Itô-Integral und Itô-Formel

Wir wollen stochastische Integrale über elementare Funktionen konstruieren. Für diese definiert man deren Integral als geeignete Summe und setzt das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen durch einen Grenzübergang fort. Als erstes legen wir die elementaren Funktionen fest.

Definition 1.15. Der Vektorraum aller Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}$ sei die Menge aller Linearkombinationen aus Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_{[a,b)}$ und wird notiert als

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}) := span\{\mathbb{1}_{[a,b)} \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Insbesondere ist der Vektorraum aller Treppenfunktionen auf $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ definiert durch $\mathcal{T}([\alpha, \beta]) := \{g|_{[\alpha,\beta]} \mid g \in \mathcal{T}(\mathbb{R})\}$.

Ist $f \in \mathcal{T}([\alpha, \beta])$ so gibt es Zeitpunkte t_j mit $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta$ und $e_j \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) + e_N \mathbb{1}_{\{\beta\}}(t), \quad \text{für alle } t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.1}$$

Definition 1.16. Ist $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung und f durch (1.1) gegeben, so heißt

$$I(f) := \int_\alpha^\beta f(t) dW_t := \sum_{j=0}^{N-1} e_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \tag{1.2}$$

das Wiener-Integral über f.

Satz 1.8 (Elementare Itô-Isometrie)**.** *Für* (1.2) *gilt:*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_\alpha^\beta f(t) dW_t\Big)^2\Big] = \int_\alpha^\beta |f(t)|^2 dt.$$

Die Elementare Itô-Isometrie besagt, dass lineare Abbildungen $f \mapsto I(f)$ eine Isometrie vom Raum $\mathcal{T}([\alpha, \beta])$ nach $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ ist. Damit erlaubt sie die Abbildung stetig von $\mathcal{T}([\alpha, \beta])$ auf den $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$-Abschluss fortzusetzen. Ist $f \in \mathcal{L}^2([\alpha, \beta])$ der Grenzwert für eine geeignete Folge $f_n \in \mathcal{T}([\alpha, \beta])$, dann folgt für $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^2([\alpha, \beta])$, dass (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2([\alpha, \beta])$ ist. Wegen der Itô-Isometrie ist $(I(f_n))$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, deren Grenzwert $I(f)$ ist. Eine detaillierte Darstellung der Bestimmung des $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$-Abschlusses kann in Deck [5] Kapitel 2 nachgelesen werden.

Wir wollen nun das Wiener-Integral verallgemeinern, indem wir die Treppenfunktion durch Treppenprozesse ersetzen. Wir werden zuerst die Itô-Isometrie für quadratintegrierbare Integranden verallgemeinern und dann das fortgesetzte Integral als Limes im quadratischen Mittel definieren. Wir legen nun eine Klasse von Integranden für das Itô-Integral fest.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Definition 1.17. Sei $p \in [1, \infty)$ und $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}_+$. Die Menge $\mathcal{L}_a^p([\alpha, \beta])$ bezeichne alle $\mathbb{F}$-adaptierten Prozesse f mit $f \in \mathcal{L}^p([\alpha, \beta] \times \Omega, \mathcal{B}([\alpha, \beta]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes \mathbb{P})$. Gibt es eine Zerlegung $\{t_0, \ldots, t_N\}$ von $[\alpha, \beta]$ und Zufallsvariablen $e_0, \ldots, e_N$ so, dass für alle $(t, \omega) \in [\alpha, \beta] \times \Omega$ die Darstellung

$$f_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(\omega) \mathbb{1}_{t_j, t_{j+1}}(t) + e_N(\omega) \mathbb{1}_{\{\beta\}}(t), \tag{1.3}$$

besteht, so heißt f Treppenprozess.

Definition 1.18. Ist $f \in \mathcal{T}_a([\alpha, \beta])$ wie in (1.3), so ist das Itô-Integral von f definiert durch

$$I(f) := \int_\alpha^\beta f_t \, dW_t := \sum_{j=0}^{N-1} e_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

Für $p = 2$ erhalten wir folgende Verallgemeinerung der Itô-Isometrie für Wiener-Integrale.

Satz 1.9. *Für $f \in \mathcal{L}_a^2([\alpha, \beta])$ gilt:*

$$\mathbb{E}\Big[\Big| \int_\alpha^\beta f_t \, dW_t \Big|^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_\alpha^\beta f_t^2 dt\Big]. \tag{1.4}$$

Die Gleichung (1.4) zeigt, dass die Abbildung $f \mapsto I(f)$ eine Isometrie von $\mathcal{T}_a^2([\alpha, \beta])$ nach $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ ist. Somit ist eine stetige Fortsetzung auf $\mathcal{L}^2$-Grenzwerte von Treppenprozessen möglich. Auf den Beweis der tatsächlichen Dichtheit von $\mathcal{T}_a^2([\alpha, \beta])$ in $\mathcal{L}_a^2([\alpha, \beta])$ werden wir hier nicht mehr eingehen. Für interessierte Leser sei auf Deck [5] Kapitel 4 verwiesen.

Definition 1.19. Sei $0 \leq \alpha \leq \beta$. Für $f \in \mathcal{L}_a^2([\alpha, \beta])$ wähle $f_n \in \mathcal{T}_a^2([\alpha, \beta])$ mit $f_n \to f$ in $\mathcal{L}_a^2([\alpha, \beta])$. Dann ist das Itô-Integral über f definiert durch

$$I(f) := \int_\alpha^\beta f_t \, dW_t.$$

Mit der Definition des Itô-Integrals wollen wir nun eine Verallgemeinerung der Kettenregel aus der gewöhnlichen Analysis einführen. Ziel ist es eine Kompositionsregel für Funktionen $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit X_t, welches einen sogenannten Itô-Prozess darstellt, zu finden. Zunächst verallgemeinern wir den Begriff des Itô-Integrals, damit wir bezüglich dX_t statt dW_t integrieren können.

Definition 1.20. Ein Itô-Prozess $(X_t)_{t \in [\alpha, \beta]}$ ist ein stetiger, $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess, der für alle $t \in [\alpha, \beta]$ eine Darstellung besitzt von der Form

$$X_t = X_\alpha + \int_\alpha^t f(r) dr + \int_\alpha^t g(r) dW_r \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{1.5}$$

mit geeignetem $f \in \mathcal{L}_\omega^1([\alpha, \beta])$ und $g \in \mathcal{L}_\omega^2([\alpha, \beta])$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Für alle $\alpha \leq s < t \leq \beta$ gilt die Gleichheit

$$X_t - X_s = \int_s^t f(r)dr + \int_s^t g(r)dW_r \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

In Differentialschreibweise erhält man

$$dX_t = f_t\, dt + g_t\, dW_t.$$

Satz 1.10 (Itô-Formel). *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega([\alpha,\beta])$, $g \in \mathcal{L}^2_\omega([\alpha,\beta])$ und X_α eine $\mathbb{F}$-messbare Zufallsvariable. Sei weiter X ein Itô-Prozess der Form (1.5). Ist $F \in C^{1,2}([\alpha,\beta]\times\mathbb{R})$, so gilt für feste $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$:*

$$F(t,X_t) - F(s,X_s) = \int_s^t \frac{\partial F}{\partial t}(u,X_u)du + \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u,X_u)dX_u + \frac{1}{2}\int_s^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u,X_u)(dX_u)^2 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Mit den Regeln $(du)^2 = 0$, $dudW_u = 0$ und $(dW_u)^2 = du$, erhalten wir durch Ausmultiplizieren $(dX_u)^2 = g^2(u,X_u)du$. In Differentialnotation schreibt man die Itô-Formel auch als

$$dF(t,X_t) = \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)g^2(t,X_t)\Big)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)dX_t.$$

Definition 1.21. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein reeller stochastischer Prozess. Wenn für jedes $t > 0$ und jede Zerlegungsnullfolge $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[0,t]$ der Grenzwert

$$\langle X\rangle_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} [X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}}]^2$$

existiert, so nennt man $\langle X\rangle_t$ die quadratische Variation von X.

Satz 1.11 (Quadratische Variation von Itô-Prozessen). *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega([\alpha,\beta])$, $g \in \mathcal{L}^2_\omega([\alpha,\beta])$, und $X_t := \int_\alpha^t f(s)ds + \int_\alpha^t g(s)dW_s$ für $t \in [\alpha,\beta]$. Dann gilt für jede Zerlegungsnullfolge $\{t_0^{(n)},\ldots,t_{N_n}^{(n)}\}$ von $[\alpha,\beta]$:*

$$\langle X\rangle_t = \int_\alpha^\beta g^2(s)ds.$$

Aus Satz 1.11 folgt für jedes $f \in \mathcal{L}^2([0,\infty))$ die Implikation

$$X_t = \int_0^t f(s)dW_s \implies \langle X\rangle_t = \int_0^t f^2(s)ds.$$

Insbesondere hat die BB quadratische Variation $\langle W\rangle_t = t$. Ist X eine BB und $F \in C^{1,2}([\alpha,\beta]\times\mathbb{R})$ dann kann man die Itô-Formel umformen in

$$dF(t,X_t) = \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)\Big)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)dX_t.$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kapitel 2

Risiko- und Ruintheorie

Das Geschäftsmodell eines Versicherungsunternehmens besteht darin einzelne Schadensverläufe von Einzelrisiken durch ein Kollektiv auszugleichen. Man spricht von einem *Ausgleich im Kollektiv*. Durch feste Zahlungen von Prämien soll die Gesamtheit aller Schäden in einem Bestand gedeckt werden. Die Höhe der Gesamtschäden, auch *Schadenssumme* genannt, kann in zwei unterschiedliche Arten modelliert werden. Zum Einen in der Betrachtung aller einzelnen Risiken und zum Anderen in der Betrachtung der Risiken als Kollektiv. Geht man davon aus, dass das Versicherungsunternehmen ihre Prämien vorsichtig und korrekt kalkuliert, dann ist es eher unwahrscheinlich, dass die Schäden die Prämien komplett aufzehren. Das dadurch überschüssige Kapital kann entweder wieder ins Unternehmen reinvestiert oder als Dividende an die Aktionäre ausgeschüttet werden. Unter Berücksichtigung der Schadensausgaben und Prämieneinnahmen, sind wir daran interessiert ein konkretes Modell für das freie Kapital aufzustellen. Das Werk von Hans U. Gerber [8] sowie die Modern Actuarial Risk Theory [6] werden uns hierbei begleiten.

2.1 Risikotheorie

2.1.1 Das individuelle Modell

Im individuellen Modell betrachten wir einzelne Polizzen in einem Bestand, deren Anzahl wir mit n definieren. Wir bezeichnen Y_i als die Schäden der i-ten Polizze, die innerhalb eines festgelegten Zeitraums, beispielsweise ein Jahr, auftreten. Der Gesamtschaden des Bestands ist damit die Summe der Einzelschäden $Y_1, \ldots, Y_n$. In diesem Modell sind wir an der Verteilung der Gesamtschadensumme interessiert.

Definition 2.1. Sei $Y_1, \ldots, Y_n$ die Schäden eines Portfolios. Dann ist die Schadenssumme definiert als

$$S^{ind} := \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Wir können die Einzelschäden als unabhängig und identisch verteilt annehmen, womit wir ein homogenes Portfolio betrachten. Der Erwartungswert und die Varianz lässt sich dann einfach berechnen:

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big] = n\mathbb{E}[Y_1]$$
$$\mathbb{V}[S] = n\mathbb{V}[Y_1]$$

Durch Einsetzen in die Tschebyscheff'sche Ungleichung kann man den Effekt des Ausgleichs im Kollektiv bei wachsendem Bestand beobachten.

$$\mathbb{P}\Big(\frac{|S - \mathbb{E}[S]|}{\mathbb{E}[S]} \geq \epsilon\Big) = \mathbb{P}(|S - \mathbb{E}[S]| \geq \epsilon\mathbb{E}[S]) \leq \frac{\mathbb{V}[S]}{(\epsilon\mathbb{E}[S])^2} = \frac{\mathbb{V}[Y_1]}{n\epsilon^2\mathbb{E}[Y_1]}$$

Man kann sehen, dass die relative Abweichung von Schadenssumme S und erwartete Schadenssumme $\mathbb{E}[S]$ um mehr als ϵ, mit wachsendem Bestand kleiner wird. Die rechte Seite der Gleichungen konvergiert außerdem für $n \to \infty$ gegen 0.

2.1.2 Das kollektive Modell

Im Gegensatz zum individuellen Modell betrachten wir im kollektiven Modell nicht die Verteilung der Gesamtschäden, sondern vielmehr einen Bestand als Kollektiv, die in einem bestimmten Zeitraum eine gewissen Anzahl an Schäden verursacht. Mit N haben wir eine Zufallsvariable, die eine zufällige Anzahl an Schäden beschreibt. Für $i = 1, \ldots, N$ ist X_i, eine unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable, die die Höhe des i-ten Schaden beschreibt.

Definition 2.2. Sei N eine zufällige Anzahl an Schäden in einem Portfolio und $X_1, \ldots, X_N$ die Schadenshöhen. Dann ist der Gesamtschaden eine Zufallssumme und definiert durch

$$S^{koll} := X_1 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Dabei ist X_i für alle $i = 1, \ldots, N$ unabhängig und identisch verteilt und N unabhängig von X_i für alle $i = 1, \ldots, N$. Wenn keine Schäden auftreten, ist der Gesamtschaden gleich Null, daher gilt $S = 0$ für $N = 0$.

Folgende Varianten des Modells sind gebräuchlich:

- Besitzt N eine Poisson-Verteilung, dann hat S eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung (bzw. compound poisson distribution).
- Falls N (negativ) binomial verteilt ist, dann hat S eine zusammengesetzte (negative) Binomial-Verteilung.

Die Momente der Gesamtsumme S lassen sich durch die Momente von N und der X_i's, mithilfe der Iterativität des Erwartungswerts, herleiten.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X],\\ Var[S] &= \mathbb{E}[Var[S|N]] + Var[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[NVar[X] + Var[N\mathbb{E}[X]]\\ &= \mathbb{E}[N]Var[X] + [\mathbb{E}[X]]^2 Var[N].\end{aligned}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Wir untersuchen das kollektive Modell im Fall der zusammengesetzten Poisson-Verteilung noch etwas genauer.

Definition 2.3. Die Schadensanzahl N sei poisson-verteilt mit Parameter λ, also $N \sim P(\lambda)$ und sind $F_i(\cdot)$ die Verteilungsfunktionen der Schadenshöhen X_i. Dann schreibt man für die Verteilung des Gesamtschadens

$$S \sim CP(\lambda, F(\cdot)).$$

So folgt für die Momente

$$\mathbb{E}[S] = \lambda \mathbb{E}[X] \quad \text{bzw.} \quad Var[S] = \lambda \mathbb{E}[X^2].$$

Die momentenerzeugende Funktion kann ebenso leicht hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{tS}|N]] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{t(X_1+\ldots+X_N)}|N=n]\mathbb{P}[N=n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{t(X_1+\ldots+X_n)}]\mathbb{P}[N=n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(t))^n \mathbb{P}[N=n] = \mathbb{E}[(e^{ln(M_X(t))})^N] \\ &= M_N(ln(M_X(t))). \end{aligned}$$

Satz 2.1. *Seien $S_1, \ldots, S_m$ unabhängig und zusammengesetzt poisson-verteilt mit Poisson-Parameter λ_i sowie Schadensverteilungen F_i, $i = 1, \ldots, m$, dann besitzt $S = S_1 + \cdots + S_m$ eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit $S \sim CP(\lambda, F(\cdot))$ wobei*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \quad \textit{und} \quad F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x). \tag{2.1}$$

Beweis. Seien M_{X_i} die momentenerzeugende Funktion von F_i. Dann besitzt S eine momentenerzeugende Funktion der Gestalt:

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{m} \exp\left\{\lambda_i [M_{X_i}(t) - 1]\right\} = \exp \lambda \left\{\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i M_{X_i}(t) - 1\right\}.$$

Somit besitzt S eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Parameter der Gestalt (2.1). □

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

2.1.3 Das klassische Modell

Für diesen Abschnitt wird uns das kollektive Modell weiterhin als Grundlage dienen. Im vorigen Abschnitt wurde ein bestimmter Zeitraum festgelegt und damit der Eintrittszeitpunkt der Einzelschäden nicht berücksichtigt. Wir wollen nun ein Modell beschreiben, dessen Gesamtschaden bis zu einem bestimmten Zeitpunkt durch einen stochastischen Prozess zum Zeitpunkt t definiert wird.

Definition 2.4. Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ der Schadensanzahlprozess und X_n die Schadenshöhe des n-ten Schadens. Dann wird der Gesamtschaden definiert durch

$$S_t := \sum_{n=1}^{N_t} X_n, \quad t \geq 0.$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass $N_t \sim P(\lambda_t)$ für alle $t \geq 0$. Dann ist S_t ein zusammengesetzter Poisson-Prozess und dessen Momente können geschrieben werden als

$$\mathbb{E}[S_t] = \lambda t \mathbb{E}[X], \text{ für } t \geq 0 \quad \text{und} \quad Var[S_t] = \lambda t \mathbb{E}[X^2], \text{ für } t \geq 0.$$

Wir wollen die eingenommenen Prämien des Unternehmens in einem Prozess darstellen:

$$c_t = ct, \quad t \geq 0.$$

Diese stellt mit Prämienrate $c > 0$ die Prämien bis zum Zeitpunkt t dar. Der Prämienprozess, dessen Prämienrate durch Prämienkalkulationsprinzipien bestimmt werden, ist deterministisch. Jedoch werden wir auf die Prämienkalkulationsprinzipien in dieser Arbeit nicht eingehen.

Der zentrale Gegenstand dieses Kapitels ist das klassische Modell. Die Arbeiten von Harald Cramér[1] und Filip Lundberg[2] legten das Fundament für die moderne Risikotheorie, weshalb das klassische Modell auch als *Cramér-Lundberg Modell* bekannt ist. Unter Berücksichtigung der Gesamtschäden sowie der eingenommenen Prämien können wir einen Überschussprozess aufstellen

$$U_t = u + c_t - S_t, \quad t \geq 0,$$

wobei U_t das Kapital des Unternehmens zum Zeitpunkt t, $U_0 = u$ das Anfangskapital, c_t der Prämienprozess und $S_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n$ den Gesamtschadensprozess darstellt.

[1] Harald Cramér, schwedischer Mathematiker, *25. September 1893 in Stockholm, †5. Oktober 1985 in Stockholm.

[2] Filip Lundberg, schwedischer Mathematiker, *31. Dezember 1876 in Uppsala, †2. Juni 1965 in Stockholm.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2.2 Ruintheorie

Sei $U_t = u + c_t - S_t$ der Überschuss bzw. das freie Kapital eines Unternehmens zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Im Folgenden wollen wir annehmen, dass die *Gewinnbedingung* erfüllt ist:

$$c > \lambda\mu_1, \tag{2.2}$$

wobei μ_1 die erwartete Schadenshöhe notiert. Die Gewinnbedingung basiert auf der Annahme, dass die eingenommenen Prämien die erwarteten Schäden zu jeder Zeit übersteigen. Dies führt uns zum Begriff des relativen Sicherheitszuschlags:

$$\Lambda := \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1,$$

dessen Positivität vorausgesetzt wird. Der relative Sicherheitszuschlag wird auch definiert als der relative Anteil um welcher die Prämienrate die durchschnittlichen Schadenshöhe pro Zeiteinheit übersteigt. Mit $\rho := \lambda\mu_1$ kann der Sicherheitszuschlag auch angeschrieben werden als

$$\Lambda = \frac{c - \rho}{\rho}.$$

Wenn das freie Kapital des Unternehmens negativ wird und somit der Gesamtschaden die eingenommenen Prämien übersteigt, dann sprechen wir vom technischen Ruin des Unternehmens. Hauptaugenmerk dieses Abschnitts ist eine geeignete Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit.

Definition 2.5. Die Ruinzeit τ wird definiert durch

$$\tau = \inf\{t > 0 \mid U_t < 0\}.$$

Wobei $\tau = \infty$, falls $U_t > 0$ für alle t gilt.

Das führt uns zu einer geeigneten Definition der Ruinwahrscheinlichkeit.

Definition 2.6. Die Ruinwahrscheinlichkeit $\Phi(u)$ wird definiert durch

$$\Phi(u) = \mathbb{P}\Big[\inf_{t>0} U_t < 0 \;\Big|\; U_0 = u\Big] = \mathbb{P}[\tau < \infty].$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit ist eine Funktion abhängig vom Anfangskapital u. Die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit ist definiert durch $\Phi(u,t) = \mathbb{P}(T < t)$. Wir werden im Folgenden die Ruinwahrscheinlichkeit $\Phi(u)$ über einen unendlichen Zeithorizont betrachten.

Die Ruinwahrscheinlichkeit kann für eine exponentiell-verteilte Schadenshöhe explizit berechnet werden. Für allgemeine Verteilungen nutzt man üblicherweise eine elegante Abschätzung:

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$$\Phi(u) \leq e^{-Ru}, \tag{2.3}$$

wobei R hierbei den *Anpassungskoeffizient* bezeichnet. Der Anpassungskoeffizient R spielt eine wichtige Rolle in der Ruintheorie und (2.3) ist auch als *Cramér-Lundberg Gleichung* bekannt, die für alle u gültig ist. R ist eine nicht-triviale positive Lösung der Gleichung

$$\lambda + rc = \lambda M_X(r). \tag{2.4}$$

Die linke Seite ist eine lineare Funktion und die rechte Seite ist eine konvexe Funktion von r. Diese Gleichung hat somit zwei Lösungen, wobei es eine triviale Lösung gibt: $r = 0$. Mit der Gewinnbedingung (2.2) ist die Ableitung der linken Seite größer als die rechte Seite an der Stelle $r = 0$. Da die rechte Seite stärker steigt und mit $r \to \infty$ gegen ∞ konvergiert, existiert eine zweite Lösung, die wir als den Anpassungskoeffizienten R identifizieren.

Satz 2.2 (Lundberg Ungleichung)**.** *Sei U_t ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Anfangskapital u, einer Prämienrate c, Schäden mit Verteilungsfunktion $F(\cdot)$ und momentenerzeugender Funktion $M_X(t)$, und sei R der Anpassungskoeffizient der die Gleichung* (2.4) *erfüllt. Dann gilt die Lundberg Ungleichung* (2.3)*.*

2.3 Diffusionsapproximation

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einer Approximation des Cramér-Lundberg Modells befassen. Wir entnehmen den Inhalt des Abschnitts aus Asmussen [3]. Ziel ist es den Überschussprozess im Cramér-Lundberg Modell durch eine Brownsche Bewegung mit Drift zu approximieren. Die Methodik dahinter liegt in der Gleichsetzung des ersten und des zweiten Moments.
Wir formulieren zuerst *Donsker's Theorem* für einfache Random Walks in diskreter Zeit:

Satz 2.3. *Sei $(S_n)_{n=0,1,\dots}$ ein Random Walk. Falls $\mu = \mathbb{E}[S_1]$ der Drift und $\sigma^2 = Var[S_1]$ die Varianz, dann gilt*

$$\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{k}}(S_{\lfloor tk \rfloor} - tk\mu)\Big)_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (B_0(t))_{t\geq 0}, \quad k \to \infty, \tag{2.5}$$

wobei $(B_\zeta(t))_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung mit Drift ζ und Varianz 1 ist.

Wir wollen das Resultat auf stetige Random Walks übertragen um eine Approximation für unseren Schadensprozess zu erhalten. Hierfür wollen wir voraussetzen, dass der relative Sicherheitszuschlag Λ klein und positiv ist. Um der Bedingung zu genügen betrachten wir eine Familie von Überschussprozessen $(S_t^{(c)})_{t\geq 0}$, wobei c die festgelegte Prämienrate repräsentiert, sodass die Schadensverteilung $F_X(\cdot)$ und die Häufigkeitsintensität λ klein für alle c ist, also $S_t^{(c)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct$. Des Weiteren betrachten wir den Grenzübergang $c \to \rho$, wobei ρ als die kritische Prämienrate $\lambda\mu_X$ definiert ist.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Satz 2.4. *Für $c \to \rho$ gilt*

$$\left(\frac{|\mu|}{\sigma^2} S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (B_{-1}(t))_{t\geq 0},$$

mit $\mu = \mu_c = \rho - c$, $\sigma^2 = \lambda \mathbb{E}[X^2]$

Beweis. Sei zunächst angemerkt, dass

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{k}}(S^{(c)}_{tk} - tk\mu_c)\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{k}} S^{(\rho)}_{tk}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (B_0(t))_{t\geq 0} \tag{2.6}$$

gilt, mit $k = k_c \to \infty$ wenn $c \to \rho$ läuft. Dies ist eine Konsequenz aus (2.5) und der Ungleichung

$$S^{(\rho)}_{nh} - \rho h \leq S^{(\rho)}_t \leq S^{(\rho)}_{(n+1)h} + \rho h. \tag{2.7}$$

Um die Ungleichung zu zeigen, sei $u, v \geq 0$, mit

$$S_{u+v} \geq S_u - \rho v.$$

In der Tat nimmt $S_{u+v} - S_u$ ihr Minimum in $-\rho v$ an. Demnach gilt für $t = nh + v$ mit $0 \leq v \leq h$:

$$S_{nh} - \rho h \leq S_{nh} - \rho v \leq S_t.$$

Die rechte Ungleichheit in (2.7) kann ähnlich gezeigt werden.
Sei $k = \frac{\sigma^2}{\mu_c^2}$, dann erhalten wir für (2.6) die Form

$$\left(\frac{|\mu|}{\sigma^2} S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2} + t\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (B_0(t)),$$
$$\left(\frac{|\mu|}{\sigma^2} S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (B_0(t) - t) = (B_{-1}(t))$$

□

Insgesamt haben wir die Beziehung des Überschussprozesses im CP-Modell und einer Brownschen Bewegung mit Drift gezeigt. Sei daher der Überschussprozess modelliert durch einen zusammengesetzten Poissonprozess

$$U_t = u - S_t,$$

mit

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n - ct.$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Zusätzlich dazu wollen wir nun einen weiteren Risikoprozess betrachten:

$$\hat{U}_t = u + \mu t + \sigma W_t.$$

Wir leiten die Parameter μ und σ her indem wir die zwei Prozesse gleichsetzen, also

$$\begin{aligned} & U_t = \hat{U}_t \\ \Leftrightarrow \quad & u - S_t = u + \mu t + \sigma W_t \\ \Leftrightarrow \quad & -S_t = \mu t + \sigma W_t. \end{aligned}$$

Indem wir $t = 1$ setzen und für $-S_1 = \mu + \sigma W_1$ den Erwartungswert und die Varianz bestimmen erhalten wir die gewünschten Parameter:

$$\begin{aligned} \mu = \mathbb{E}[-S_1] &= \mathbb{E}[c - X_1] \\ &= c - \lambda \mathbb{E}[X_1] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma^2 = Var[-S_1] &= Var[S_1] \\ &= \lambda \mathbb{E}[X_1^2]. \end{aligned}$$

Insgesamt können wir nun einen Prozess im klassischen Cramér-Lundberg Modell mittels Brownscher Bewegung mit Drift approximieren.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kapitel 3

Stochastische Kontrolltheorie

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Der Inhalt des folgenden Kapitels basiert auf die Vorlesung *Stochastische Kontrolltheorie* von Dr. Peter Grandits an der TU Wien. Wichtige Nachschlagsliteratur hierbei ist unter anderem Øksendal [9]. Die stochastische Kontrolltheorie befasst sich mit Optimierung von dynamischen Systemen, welche durch Zustandsprozesse modelliert werden. Mittels externer Steuerung in Form eines Kontrollprozesses soll ein Optimierungsziel erreicht werden. Das Optimierungsziel ist durch ein Zielfunktional gegeben.
Wir greifen zum Lösen eines stochastischen Kontrollproblems auf die Methode des dynamischen Programmierens zurück. Die Methode beruht auf das *Bellman Prinzip der dynamischen Programmierung*, welches durch den Mathematiker Richard Bellman[1] formuliert wurde. Nach diesem Prinzip wird ein Optimierungsproblem in einzelne gleichartige Teilprobleme zerlegt, deren Lösungen dann zur Gesamtlösung zusammengesetzt werden. Der Ansatz liefert eine partielle Differentialgleichung, genannt *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* (abgekürzt HJB-Gleichung), deren Lösung das Optimum ergibt. Das Verifikationstheorem validiert dann die Optimalität einer gefundenen Lösung aus der HJB-Gleichung.

3.1 Das stochastische Kontrollproblem

Gegeben sei ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Filtration $\mathbb{F}$, die die *üblichen Bedingungen* erfüllt. Wir setzen einen Zeithorizont $T > 0$ fest und sei $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ eine d-dimensionale Standard Brownsche Bewegung.

Folgende Komponenten sind zur Beschreibung des Kontrollproblems nötig:

- Der *Kontrollprozess* $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein progressiv messbarer stochastischer Prozess mit Werten aus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$.
- Der *Zustandsprozess* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ist durch eine stochastische Differentialgleichung (bzw. Diffusionsgleichung) gegeben in Form von

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t \quad \text{mit } X_0 = x, \tag{3.1}$$

[1] Richard Bellmann, US-amerikanischer Mathematiker, *29. August 1920 in Brooklyn, †19. März 1984 in Los Angeles

wobei

$$b(\cdot,\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

und

$$\sigma(\cdot,\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n\times d}$$

Borel-messbare Abbildungen sind. $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ ist der *Driftkoeffizient* und $\sigma(\cdot,\cdot,\cdot)$ ist der *Diffusionskoeffizient* des Diffusionsprozesses. Die Notation X_t^u symbolisiert im Folgenden die Abhängigkeit des Zustandsprozesses vom Kontrollprozess u.

- Das *Zielfunktional* $J(t,x,u)$ ist gegeben durch

$$J(t,x,u) = \mathbb{E}\Big[\int_t^T \varphi(s, X_s^u, u_s)ds + \Psi(T, X_T^u) \;\Big|\; X_t^u = x\Big], \tag{3.2}$$

  wobei $\varphi(s, X_s, u_s)$ die laufenden Kosten bzw. den laufenden Nutzen und $\Psi(T, X_T)$ die Endkosten bzw. den Endnutzen bezeichnet.

- Die Menge aller zulässigen Kontrollprozesse $A(t,x) \ni (u_s)_{s\in[t,T]}$ sind progressiv messbare Prozesse, die in (3.1) eine eindeutige, starke Lösung auf $[t,T]$ besitzen und für die (3.2) wohldefiniert ist.

- Die *Wertfunktion des Optimierungsproblems* ist definiert durch

$$V(t,x) = \sup_{u\in A(t,x)} J(t,x,u).$$

Das Ziel ist nun für einen vorgegebenen Startwert x_0 den Wert $V(0,x_0)$ zu berechnen und einen *optimalen Kontrollprozess* u^* so zu ermitteln, dass die Zielfunktionale maximiert wird, daher $V(0,x_0) = J(0,x_0,u^*)$ gilt.

Satz 3.1 (Eindeutigkeit und Existenz einer starken Lösung)**.**
Sei $T > 0$ und $b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ messbare Funktionen die

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le C(1+|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T],$$

für eine Konstante $C > 0$ erfüllt und so, dass

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le D|x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T],$$

für eine Konstante $D > 0$ gilt.
Sei Z eine Zufallsvariable, die unabhängig von der durch die Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\ge 0}$ erzeugte Filtration $\mathbb{F}$ ist, und erfüllt

$$\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty.$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Dann besitzt die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \; X_0 = Z$$

eine eindeutige, starke Lösung X_t. Diese Lösung ist in t stetig und adaptiert an der durch Z und $(W_t)_{t\geq 0}$ erzeugte Filtration $\mathcal{F}_t^Z$, und erfüllt

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |X_t|^2 dt\Big] < \infty.$$

Beweis. Für einen ausführlichen Beweis siehe Øksendal [9] Thereom 5.2.1. □

Die Lösung nennt man auch Itô-Diffusion.

Definition 3.1. Eine zeit-homogene Itô-Diffusion ist ein stochastischer Prozess $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ der eine Lösung einer stochastischen Differentialgleichung der Form

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad t \geq s, X_s = x$$

ist, mit Koeffizienten b, σ die die Bedingungen aus Satz 3.1 erfüllen, wobei in dem Fall diese vereinfacht werden zu:

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir werden im weiteren Verlauf die folgenden Notationen benutzen:

$$\mathbb{E}_{t,x}[Y] = \mathbb{E}[Y|X_t = x] \quad \text{sowie} \quad \mathbb{E}_x[Y] = \mathbb{E}_{0,x}[Y].$$

Satz 3.2 (Markov Eigenschaft für Itô-Diffusionen)**.** *Sei X_t eine Itô-Diffusion und f eine beschränkte Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann gilt:*

1. *Für alle $t, s \geq 0$ und $\omega \in \Omega$ gilt*

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t](\omega) = \mathbb{E}_{X_t(\omega)}[f(X_s)].$$

2. *Ist τ eine Stoppzeit, mit $\tau < \infty$. Dann gilt für alle $s \geq 0$ und $\omega \in \Omega$*

$$\mathbb{E}_x[f(X_{\tau+s})|\mathcal{F}_\tau](\omega) = \mathbb{E}_{X_\tau(\omega)}[f(X_s)].$$

Beweis. Da für $r \geq t$

$$X_r(\omega) = X_t(\omega) + \int_t^r b(X_u)du + \int_t^r \sigma(X_u)dW_u$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

gilt, erhalten wir wegen Eindeutigkeit $X_r(\omega) = X_r^{t,X_t}(\omega)$. Wir können $F(x,t,r,\omega) = X_r^{t,x}(\omega)$ für $r \geq t$ definieren und erhalten

$$X_r(\omega) = F(X_t, t, r, \omega), \quad r \geq t.$$

Wir merken an, dass $\omega \to F(x,t,r,\omega)$ unabhängig von $\mathcal{F}_t$ ist. Wir können also

$$\mathbb{E}[f(F(X_t,t,t+h,\omega))|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(F(x,0,h,\omega))]_{x=X_t} \tag{3.3}$$

schreiben. Wir betrachten $g(x,\omega) = f \circ F(x,t,t+h,\omega)$, die aufgrund Zusammensetzung messbarer Funktionen messbar ist. Man kann g durch eine Funktion punktweise beschränkt approximieren in Form von

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_k(x)\psi_k(\omega).$$

Nutzen wir die Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X_t,\omega)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\Big[\lim \sum \phi_k(X_t)\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= \lim \sum \phi_k(X_t)\mathbb{E}[\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t] \\
&= \lim \sum \mathbb{E}[\phi_k(y)\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t]_{y=X_t} \\
&= \mathbb{E}[g(y,\omega)|\mathcal{F}_t]_{y=X_t} = \mathbb{E}[g(y,\omega)]_{y=X_t}.
\end{aligned}$$

Da X_t zeithomogen ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(F(X_t,t,t+h,\omega))|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[f(F(y,t,t+h,\omega))]_{y=X_t} \\
&= \mathbb{E}[f(F(y,0,h,\omega))]_{y=X_t},
\end{aligned}$$

was gleich (3.3) ist und womit die 1. Behauptung bewiesen ist.
Für die 2. Behauptung siehe Øksendal [9] Theorem 7.2.4. □

3.2 Dynamische Optimierung

Sei eine stochastische Differentialgleichung der folgenden Form gegeben:

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t,$$

Die Koeffizienten erfüllen zudem die Lipschitz-stetigkeit und Wachstumsbedingung, sodass die eindeutige starke Lösung der Differentialgleichung eine Itô-Diffusion ist. Wir bezeichnen außerdem $a(t,x) := \sigma(t,x)^2$ als *Diffusionskoeffizient* von X.

Definition 3.2. Der infinitesimale Generator einer Itô-Diffusion X ist definiert durch

$$Lf(s,x) := \lim_{t \to s} \frac{\mathbb{E}_{s,x}[f(t,X_t)] - f(s,x)}{t-s}, \qquad \text{für alle } s \geq 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L := \{f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid Lf(s,x) \text{ existiert für alle s und x}\}$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Definition 3.3. Der partielle Differentialoperator ist definiert durch

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

mit Definitionsmenge

$$\mathcal{C}^{1,2} := \Big\{ f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\Big|\; \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ sind stetig für } i,j = 1,...,n \Big\}.$$

Der partielle Differentialoperator erfüllt

$$\mathcal{L}f(t,x) := f_t(t,x) + b(t,x)D_x f(t,x) + \frac{1}{2}tr(a(t,x)D_{xx}f(t,x)),$$

wobei $D_x f(t,x)$ den Gradienten von $f(t,x)$ notiert und $D_{xx}f(t,x)$ die Hesse-Matrix von $f(t,x)$ bezeichnet.

Satz 3.3. *Sei $f \in \mathcal{C}^{1,2}$, $T \geq t$ und es gelten*

$$\mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^T |\mathcal{L}f(s,X_s)|ds\Big] < \infty, \tag{3.4}$$

$$\mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^T \|D_x f(s,X_s)\sigma(s,X_s)\|^2 ds\Big] < \infty. \tag{3.5}$$

Dann gilt: $f \in \mathcal{D}_L$ und $Lf(t,x) = \mathcal{L}f(t,x)$.

Beweis. Man wende die Itô-Formel auf $f(s,X_s)$ in der Definition des infinitesimalen Generators an. Mit (3.4) und (3.5) ist die Existenz aller Integrale sowie die Vertauschbarkeit von Erwartungswert und Grenzübergänge garantiert. Die Behauptung folgt dann unmittelbar. □

Satz 3.4 (Dynkin-Formel)**.** *Sei $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ mit kompaktem Träger und τ eine Stoppzeit, mit $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}_x[f(\tau, X_\tau)] = f(0,x) + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\tau \mathcal{L}f(s,X_s)ds\Big].$$

Beweis. Wir wenden die Itô-Formel auf $f(\tau \wedge n, X_{\tau\wedge n})$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ an, also

$$f(\tau\wedge n, X_{\tau\wedge n}) = f(0,x) + \int_0^{\tau\wedge n} \mathcal{L}f(s,X_s)ds + \int_0^{\tau\wedge n} \sigma(s,X_s)D_x f(s,X_s)dW_s. \tag{3.6}$$

Wenden wir den Erwartungswert an, dann fällt der rechte Summand in (3.6) weg, weil $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ mit kompaktem Träger und wir erhalten:

$$\mathbb{E}_x[f(\tau\wedge n, X_{\tau\wedge n})] = f(0,x) + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau\wedge n} \mathcal{L}f(s,X_s)ds\Big]. \tag{3.7}$$

Durch Abschätzung des rechten Erwartungswertes in (3.7) und wegen Satz von der dominierten Konvergenz folgt die Behauptung. □

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Zur Herleitung der HJB-Gleichung dient uns das Bellmann-Prinzip. Das Prinzip sagt aus, dass wenn man sich optimal im Intervall $[t, t_1]$ verhält und auch nach t_1 optimal handelt, dann führt dies zu einem globalen Optimum. Das Bellmann-Prinzip wird somit folgendermaßen formuliert:

$$V(t,x) = \sup_{u \in A(t,x)} \mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s^u, u_s)ds + V(t_1, X_{t_1}^u)\Big], \text{ für } t_1 \geq t. \tag{3.8}$$

Wir setzen voraus, dass die Wertfunktion glatt genug ist, also $V(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}$. Wenden wir die Itô-Formel auf $V(t_1, X_{t_1})$ an, dann folgt

$$\begin{aligned} V(t_1, X_{t_1}^u) =& V(t,x) + \int_t^{t_1} \Big(V_t(s, X_s^u) + b(s, X_s^u, u_s)D_x V(s, X_s^u) + \\ & \frac{1}{2} tr(a(s, X_s^u, u_s)D_{xx}V(s, X_s^u))\Big)ds + \int_t^{t_1} D_x V(s, X_s^u, u_s)dW_s. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird $V(t_1, X_{t_1}^u)$ in (3.8) eingesetzt und weil wir annehmen, dass

$$\int_t^{t_1} V_x(s, X_s^u)\sigma(s, X_s^u, u_s)dW_s$$

für $t_1 > t$ ein Martingal ist und daher unter dem Erwartungswert Null wird, gilt

$$\begin{aligned} V(t,x) = \sup_{u \in A(t,x)} \mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s^u, u_s)ds + V(t,x) + \int_t^{t_1} \Big(V_t(s, X_s^u) + \\ b(s, X_s^u, u_s)D_x V(s, X_s^u) + \frac{1}{2} tr(a(s, X_s^u, u_s)D_{xx}V(s, X_s^u))\Big)ds\Big] \end{aligned}$$

Man dividiere durch $(t_1 - t)$ und bilde den Grenzwert $\lim_{t_1 \to t}$, unter der Annahme, dass Vertauschungen erlaubt sind, dann erhalten wir die HJB-Gleichung:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}}\{\varphi(t,x,u) + V_t(t,x) + b(t,x,u)D_x V(t,x) + \frac{1}{2} tr(a(t,x,u)D_{xx}V(t,x))\}.$$

Mit $\mathcal{L}^u V(t,x) := V_t(t,x) + b(t,x,u)D_x V(t,x) + \frac{1}{2} tr(a(t,x,u)D_{xx}V(t,x))$ folgt eine vereinfachte Darstellung der HJB-Gleichung:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}}\{\varphi(t,x,u) + \mathcal{L}^u V(t,x)\}. \tag{3.9}$$

Zur Bestimmung eines optimalen Kontrollprozesses u^* wird folgender Ablauf befolgt:

1. Man bestimme das Maximum $u = \hat{u}(t,x)$ in (3.9). Existiert diese, dann steht sie in Abhängigkeit von V_t,V_x, und V_{xx}, daher gilt
$$\hat{u}(t,x) = \tilde{u}(t,x, V_t(t,x), V_x(t,x), V_{xx}(t,x)).$$
2. Setzen wir das u aus 1. in (3.9) ein, dann erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für $V(\cdot,\cdot)$ mit Randbedingung $V(T,x) = \Psi(T,x)$. Die Lösung diese Randwertproblems stellt die möglichen Kandidaten für die Wertfunktion des Optimierungsproblems dar.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

3.3 Das Verifikationstheorem

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass $V(t,x)$ unter bestimmten Annahmen die Lösung der HJB-Gleichung ist. Das *Verifikationstheorem* soll die Frage beantworten, unter welchen Bedingungen eine Lösung der HJB-Gleichung die gesuchte Wertfunktion ist.
Wir betrachten hierbei die Ausgangssituation wie in Abschnitt 3.1, also

$$\begin{aligned} &dX_s = b(t,X_s,u_s)ds + \sigma(t,X_s,u_s)dW_s, \quad \text{mit } X_0 = x, \\ &J(t,x,u) = \mathbb{E}\Big[\int_t^T \varphi(s,X_s,u_s)ds + \Psi(T,X_T) \;\Big|\; X_t = x\Big], \quad \text{und} \\ &V(t,x) = \sup_{u\in A(t,x)} J(t,x,u). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Wir bestimmen noch welche Bedingungen die Menge aller zulässigen Kontrollprozesse $A(t,x)$ erfüllen muss:

1. Der Kontrollprozess $u = (u_s)_{s\in[t,T]}$ ist progressiv messbar, mit
$$\mathbb{E}\Big[\int_t^T \|u_s\|^2 ds\Big] < \infty.$$
2. Die stochastische Differentialgleichung in (3.10) besitzt für alle $u \in A(t,x)$ eine eindeutige starke Lösung X_t mit $X_t = x$ und
$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\le s\le T} \|X_s\|^2\Big] < \infty.$$
3. Das Zielfunktional $J(t,x,u)$ ist wohldefiniert.

Satz 3.5 (Verifikationstheorem)**.** *Sei $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ stetig und existieren Konstanten $C_\varphi, C_\sigma > 0$ so, dass*

$$\begin{aligned} |\varphi(t,x,u)| &\le C_\varphi(1+\|x\|^2+\|u\|^2), \text{ und} \\ \|\sigma(t,x,u)\|^2 &\le C_\sigma(1+\|x\|^2+\|u\|^2) \end{aligned}$$

für alle $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{U}$. Dann gilt:

1. *Sei $\Phi \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ mit $|\Phi(t,x)|^2 \le C_\Phi(1+|x|^2)$ für eine Konstante $C_\Phi > 0$. Des Weiteren erfüllt Φ die HJB-Gleichung*
$$\sup_{u\in\mathcal{U}}\{\varphi(t,x,u) + \mathcal{L}^u\Phi(t,x)\} = 0, \text{ für } t\in[0,T], x\in\mathbb{R} \tag{3.11}$$
mit
$$\Phi(T,x) = \Psi(T,x), \text{ für } x\in\mathbb{R}.$$
Dann gilt:
$$\Phi(t,x) \ge V(t,x)$$
für alle $t\in[0,T]$ und $x\in\mathbb{R}$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2. *Existiert zusätzlich eine Funktion* $\hat{u}(t,x)$ *die die Abbildung* $u \mapsto \varphi(t,x,u) + \mathcal{L}^u\Phi(t,x)$ *maximiert und der für einen zulässigen Kontrollprozess* $u^* = (u_t^*)_{t\in[0,T]}$ $u_t^* = \hat{u}(t, X_t^*)$ *erfüllt, dann gilt:*

$$\Phi(t,x) = V(t,x), \text{ für alle } t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist u^* *die optimale Strategie, daher* $V(t,x) = J(t,x,u^*)$, *und* X_t^* *ist die Lösung von* (3.10) *für den Kontrollprozess* u^*.

Beweis. Sei $u \in A(t,x)$ beliebig und $\tau_n := \inf\{s \geq t : \|X_s - X_t\| = n\} \wedge T$ für ein festes $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}$.
Wenden wir die Itô-Formel mit $X_t = x$ an, so folgt:

$$\Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) = \Phi(t,x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^{u_s}\Phi(s,X_s)ds + \int_t^{\tau_n} \sigma(s,X_s,u_s)D_x\Phi(s,X_s)dW_s.$$

Wegen der Zulässigkeit von u, Stetigkeit von Φ und der Beschränktheit von X auf $[t,\tau_n]$ gilt $\mathbb{E}_{t,x}[\int_t^{\tau_n} \|\sigma(s,X_s,u_s)D_x\Phi(s,X_s)\|^2 ds] < \infty$ und damit folgt

$$\mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^{\tau_n} \sigma(s,X_s,u_s)D_x\Phi(s,X_s)dW_s\Big] = 0.$$

Weil Φ die HJB-Gleichung erfüllt und $u_s \in \mathcal{U}$ für $s \in [t,T]$, gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^{\tau_n} \varphi(s,X_s,u_s)ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n})\Big] \\
&= \mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^{\tau_n} \varphi(s,X_s,u_s)ds + \Phi(t,x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^{u_s}\Phi(s,X_s)ds\Big] \\
&= \Phi(t,x) + \mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^{\tau_n} \underbrace{\big(\varphi(s,X_s,u_s) + \mathcal{L}^{u_s}\Phi(s,X_s)\big)}_{\leq 0} ds\Big] \\
&\leq \Phi(t,x). \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Die Abschätzung im vorletzten Term in (3.12) folgt aus (3.11). Für $n \to \infty$ erhalten wir $\tau_n \to T$. Die quadratische Wachstumsbedingung von φ und Φ sowie die Zulässigkeit von u impliziert

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_t^{\tau_n} \varphi(s,X_s,u_s)ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n})\Big| \\
&\leq \int_t^T C_\varphi(1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2)ds + C_\Phi(1 + \|X_T\|^2) \in L^1.
\end{aligned}$$

Wegen Satz von der dominierten Konvergenz und Stetigkeit von Φ gilt für $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}_{t,x}\Big[\int_t^{\tau_n} \varphi(s,X_s,u_s)ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n})\Big] \to J(t,x,u).$$

Mit (3.12) gilt $J(t,x,u) \leq \Phi(t,x)$ und mit Supremumsbildung gilt letztendlich $V(t,x) \leq \Phi(t,x)$. Damit ist die 1. Behauptung bewiesen.
Für den Beweis der 2. Behauptung können wir in der (3.12) ein Maximum $\hat{u}(t,x)$ bestimmen und annehmen, dass der Kontrollprozess $u_t^* = \hat{u}(t,x)$ durch das Maximum definiert ist. Damit folgt $J(t,x,u^*) = V(t,x) = \Phi(t,x)$. □

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Erweitern wir die Betrachtung auf einen unendlichen Zeithorizont und nehmen an, dass die laufenden Kosten $\varphi(X_t, u_t)$ sowie die Koeffizienten $b(X_t, u_t)$, $\sigma(X_t, u_t)$ des Zustandsprozesses nicht von der Zeit abhängen. Dann schreiben wir für den Zustandsprozess die stochastische Differentialgleichung in Form von

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t \quad \text{mit } X_0 = x. \tag{3.13}$$

Der partielle Differentialoperator $\mathcal{L}^u$ lässt sich dann vereinfachen zu

$$\mathcal{L}^u f(x) := b(x,u)D_x f(x) + \frac{1}{2}tr(a(x,u)D_{xx}f(x)).$$

Das Zielfunktional sieht dann folgendermaßen aus:

$$J(x,u) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty e^{-\beta t}\varphi(X_t, u_t)dt\Big]$$

mit Zinsintensität $\beta > 0$. Des Weiteren sei $A(x)$ die Menge der zulässigen Kontrollprozesse, was uns zur Wertfunktion führt:

$$V(x) = \sup_{u \in A(x)} J(x,u).$$

Die Menge der zulässigen Kontrollprozesse $A(x)$ erfüllen diesselben Bedingungen wie $A(t,x)$ für das Verifikationstheorem im endlichen Zeithorizont.

Satz 3.6 (Verifikationstheorem)**.** *Sei $\varphi(\cdot,\cdot)$ stetig und existieren Konstanten $C_\varphi, C_\sigma > 0$ so, dass*

$$\begin{aligned} |\varphi(x,u)| &\leq C_\varphi(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2), \text{ und} \\ \|\sigma(x,u)\|^2 &\leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{U}$. Dann gilt:

1. *Sei $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ mit $|\Phi(x)|^2 \leq C_\Phi(1 + |x|^2)$ für eine Konstante $C_\Phi > 0$. Des Weiteren erfüllt Φ die HJB-Gleichung*

$$\sup_{u \in \mathcal{U}}\{\varphi(x,u) + \mathcal{L}^u\Phi(x) - \delta\Phi(x)\} = 0, \text{ für } x \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

mit

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\delta T}\Phi(x)] = 0. \tag{3.15}$$

Dann gilt:

$$\Phi(x) \geq V(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2. *Existiert zusätzlich eine Funktion* $\hat{u}(x)$ *die* (3.14) *maximiert und der für einen zulässigen Kontrollprozess* $u^* = (u_t^*)_{t\geq 0}$ $u_t^* = \hat{u}(X_t^*)$ *erfüllt, dann gilt:*

$$\Phi(x) = V(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist u^* *ist die optimale Strategie, daher* $V(x) = J(x, u^*)$*, und* X_t^* *ist die Lösung der Differentialgleichung* (3.13) *versehen mit dem Kontrollprozess* u^**.*

Beweis. Wir werden zuerst das Verifikationstheorem für einen endlichen Zeithorizont $T > 0$ anwenden. Per Grenzübergang $T \to \infty$ führen wir auf den Fall im unendlichen Zeithorizont über.

Sei $\hat{\Phi}(t,x) = e^{-\delta t}\Phi(x)$ sowie $\hat{\varphi}(t,x,u) = e^{-\delta t}\varphi(x,u)$ und setzen diese in die HJB-Gleichung (3.9) ein, dann erhalten wir

$$\sup_{u\in\mathcal{U}}\Big\{e^{-\delta t}\varphi(x) + e^{-\delta t}\mathcal{L}^u\Phi(x) - e^{-\delta t}\delta\Phi(x)\Big\}.$$

Dividieren wir durch $e^{-\delta t}$ so erhalten wir die gesuchte HJB-Gleichung

$$\sup_{u\in\mathcal{U}}\{\varphi(x,u) + \mathcal{L}^u\Phi(x) - \delta\Phi(x)\} = 0. \tag{3.16}$$

Wenden wir nun die Itô-Formel auf $e^{-\delta T}\Phi(X_T)$ mit $X_0 = x$ an, so folgt

$$\begin{aligned} e^{-\delta T}\Phi(X_T) =& \Phi(x) + \int_0^T \Big(e^{-\delta s}\mathcal{L}^{u_s}\Phi(X_s) - \delta e^{-\delta s}\Phi(X_s)\Big)ds \\ &+ \int_0^T e^{-\delta s}\sigma(X_s,u_s)D_x\Phi(X_s)dW_s. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Unter den selben Argumenten wie im Beweis von Satz 3.5 lassen wir das stochastische Integral verschwinden. Weil $\Phi(x)$ die HJB-Gleichung erfüllt und $u \in \mathcal{U}$ für $s \in [0,T]$, gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x\Big[\int_0^T e^{-\delta t}\varphi(X_t,u_t)dt + e^{-\delta T}\Phi(X_T)\Big] \\ &= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^T e^{-\delta t}\varphi(X_t,u_t)dt + \Phi(x) + \int_0^T \Big(e^{-\delta t}\mathcal{L}^{u_t}\Phi(X_t) - \delta e^{-\delta t}\Phi(X_t)\Big)dt\Big] \\ &= \Phi(x) + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^T e^{-\delta t}\Big(\underbrace{\varphi(X_t,u_t) + \mathcal{L}^{u_t}\Phi(X_t) - \delta\Phi(X_t)}_{\leq 0}\Big)dt\Big] \\ &\leq \Phi(x). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Die Abschätzung im vorletzten Term in (3.18) folgt wegen (3.16). Lassen wir nun $T \to \infty$ laufen und beachten, dass (3.15) gilt dann erhalten wir insgesamt

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$$\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\delta t}\varphi(X_t,u_t)dt\Big] = J(x,u) \leq \Phi(x).$$

Bilden wir das Supremum dann erhalten wir die Behauptung $V(x) \leq \Phi(x)$.
Für den Beweis der 2. Behauptung können wir in (3.12) ein Maximum $\hat{u}(t,x)$ bestimmen und annehmen, dass der Kontrollprozess $u_t^* = \hat{u}(t,x)$ durch das Maximum definiert ist. Somit folgt insgesamt $J(x,u^*) = V(x) = \Phi(t,x)$. Damit ist der Satz bewiesen.

□

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kapitel 4

Optimale Dividendenstrategie im Diffusionsmodell

Der Inhalt dieses Kapitels folgt überwiegend dem Paper *Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out* [2]. Des Weiteren wurde auch *Stochastic Control in Insurance* [12] als Hilfsliteratur verwendet.

In diesem Kapitel wollen wir die optimale Dividendenstrategie für ein Versicherungsunternehmen ermitteln. Das Ziel ist die Maximierung der Dividendenausschüttungen bis zum Eintritt des Ruins. Wir werden zwei Fälle untersuchen, zum Einen, wo eine Obergrenze für die Dividendenrate gesetzt wird und zum Anderen wo es eine unbeschränkte Dividendenrate gibt. Im ersten Fall werden wir zeigen, dass eine *Threshold-Strategie* die optimale Strategie darstellt, in der die maximale Dividendenrate ausbezahlt wird, solange der Zustandsprozess einen bestimmten Wert übersteigt, und ansonsten nichts ausgeschüttet wird. Andererseits ist bei unbeschränkter Dividendenintensität die *Barrierestrategie* die optimale Strategie, hierbei wird exakt der überschüssige Teil des freien Kapitals ausbezahlt der eine bestimmte Barriere übersteigt.

4.1 Dividendenstrategie mit beschränkter Dividendenrate

Im Folgenden werden wir den Zustandsprozess als Brownsche Bewegung mit Drift μ und Volatilität σ^2 modellieren und um eine zusätzliche Dividendenkomponente $u = (u_t)_{t\geq 0}$ erweitern. Der Kontrollprozess u ist die Rate der auszuzahlende Dividende, wobei wir annehmen, dass die maximale Dividendenintensität nicht $a_0 < \infty$ übersteigt. Demnach betrachten wir einen Überschussprozess nach Dividendenzahlung in der Form von

$$dX_t^u = (\mu - u_t)dt + \sigma\, dW_t.$$

Erlaubt sind nur adaptierte Prozesse u mit $0 \leq u_t \leq a_0$. Der Ruin des Prozesses ist definiert als $\tau^u = \inf\{t \leq 0 \,|\, X_t^u < 0\}$. Das Zielfunktional ist gegeben durch $J(x,u) = \mathbb{E}[\int_0^{\tau^u} e^{-\delta s} u_s ds]$, und entsprechend schreiben wir die Wertfunktion des

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Problems an als $V(x) = \sup_u J(x,u)$. Fluktuationen der Brownschen Bewegung treiben ein Unternehmen an der Stelle 0 unmittelbar in den Ruin, weshalb $V(0) = 0$ gilt.

Wir werden als allererstes die HJB-Gleichung motivieren. Sei $\epsilon > 0$, dann existiert für jedes $y > 0$ eine Strategie u^y so, dass $J(y, u^y) \geq V(y) - \epsilon$, was als ϵ-optimal bezeichnet wird. Wir wollen eine Dividendenrate a bis zu einem Zeitpunkt $h > 0$ respektive bis zum Ruinzeitpunkt τ, falls dieser vorher eintritt, auszahlen lassen. Betrachte daher die Dividendenstrategie

$$u_t = \begin{cases} a, & \text{für } 0 \leq t \leq \tau \wedge h, \\ u_{t-h}^{X_h}, & \text{für } t > h \text{ und } \tau > h. \end{cases}$$

Somit sehen wir, dass

$$\begin{aligned} V(x) \geq J(x,u) &= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau\wedge h} a e^{-\delta s} ds\Big] + \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{1}_{\{\tau>h\}} \int_h^{\tau} u_s e^{-\delta(s+h)} ds\Big] \\ &= a\mathbb{E}_x\Big[\frac{1-e^{-\delta(s\wedge h)}}{\delta}\Big] + e^{-\delta h}\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\tau>h\}} J(X_h, u^{X_h})] \\ &\geq a\frac{1-\mathbb{E}_x[e^{-\delta(s\wedge h)}]}{\delta} + e^{-\delta h}\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\tau>h\}}(V(X_h)-\epsilon)] \\ &\geq a\frac{1-\mathbb{E}_x[e^{-\delta(s\wedge h)}]}{\delta} + e^{-\delta h}\mathbb{E}_x[V(X_{\tau\wedge h})-\epsilon]. \end{aligned}$$

Es gilt $V(X_\tau) = V(0) = 0$ und da ϵ beliebig war erhalten wir

$$V(x) \geq \; a\frac{1-\mathbb{E}_x[e^{-\delta(s\wedge h)}]}{\delta} + e^{-\delta h}\mathbb{E}_x[V(X_{\tau\wedge h})]. \tag{4.1}$$

Wir nehmen an, dass $V(x)$ zweifach stetig differenzierbar ist und wenden die Itô-Formel auf $V(X_{\tau\wedge h})$ an, also gilt

$$\begin{aligned} V(X_{\tau\wedge h}) = V(x) &+ \int_0^{\tau\wedge h} \sigma V'(X_s) dW_s \\ &+ \int_0^{\tau\wedge h} \Big((\mu - a)V'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2}V''(X_s)\Big) ds. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass $\int_0^t \sigma V'(X_s) dW_s$ ein Martingal ist. Somit ist der Erwartungswert des stochastischen Integrals gleich Null. Wir setzen (4.2) in (4.1) ein und ziehen $V(x)$ von beiden Seiten ab. Des Weiteren dividieren wir durch h und wenden den Erwartungswert an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \geq\; & a\mathbb{E}_x\Big[\frac{1-e^{-\delta(s\wedge h)}}{\delta h}\Big] - \frac{1-e^{-\delta h}}{h}V(x) \\ & + e^{-\delta h}\mathbb{E}_x\Big[\frac{1}{h}\int_0^{\tau\wedge h}\Big((\mu-a)V'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2}V''(X_s)\Big) ds\Big]. \end{aligned}$$

TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Man nehme an, dass Vertauschung von Grenzwertübergänge und Erwartungswert erlaubt ist. Dann folgt für $h \to 0$

$$0 \geq \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - a)V'(x) - \delta V(x) + a.$$

Die Ungleichung muss für alle $0 \leq a \leq a_0$ gültig sein, daher folgt

$$0 \geq \sup_{0 \leq a \leq a_0} \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - a)V'(x) - \delta V(x) + a \right\}. \tag{4.3}$$

Für mindesten ein $a \in [0, a_0]$ ist (4.3) eine Gleichheit. Damit können wir die HJB-Gleichung betrachten:

$$0 = \sup_{0 \leq a \leq a_0} \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - a)V'(x) - \delta V(x) + a \right\}, \tag{4.4}$$

$$V(0) = 0. \tag{4.5}$$

Im Folgenden werden wir annehmen, dass $f(x)$ die Lösung von (4.4) und (4.5) ist. Die Funktion die (4.4) maximiert, ist eine lineare Funktion in a für jedes x. Damit ist das Maximum $u^*(x)$ an jedem x entweder 0 oder a_0. Offenbar ist

$$u^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } V'(x) > 1, \\ a_0, & \text{für } V'(x) \leq 1. \end{cases}$$

In Folge dessen betrachten wir zwei Differentialgleichungen

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - \delta f(x), \qquad \text{für } 0 \leq x < x_0, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - \delta f(x) + a_0, \qquad \text{für } x \geq x_0. \tag{4.7}$$

Wir wollen als nächstes eine zweifach differenzierbare Lösung für (4.4) finden. Es gibt ein $x_0 > 0$ so, dass $f'(x) > 1$ für $x < x_0$ und $f'(x) \leq 1$ für $x \geq x_0$. Daher können wir annehmen, dass $f(x)$ eine konkave Funktion ist. Die Differentialgleichung kann somit in zwei Bereiche getrennt werden und an einer Stelle x_0, wo $f'(x_0) = 1$ gilt, zusammengefügt werden.
Betrachten wir als erstes (4.6), die eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Die allgemeine Lösung besitzt daher eine Form von

$$f_1(x) = Ae^{\theta_1(0)x} + Be^{-\theta_2(0)x},$$

mit Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\theta_1(0) = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2} - \mu}{\sigma^2} > 0 \quad \text{und} \quad \theta_2(0) = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2} + \mu}{\sigma^2} > 0.$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Wegen $f(x) > 0$ für $x > 0$ sowie $0 = V(0) = f_1(0)$ gilt $A = -B > 0$, also

$$f_1(x) = Ae^{\theta_1(0)x} - Ae^{-\theta_2(0)x}.$$

Für die zweite Gleichung (4.7), die eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, nutzen wir den Lösungsansatz

$$f_2(x) = \frac{a_0}{\delta} + Ce^{\theta_1(\mu-a_0)x} + De^{-\theta_2(\mu-a_0)x},$$

wobei $f_2^p(x) = \frac{a_0}{\delta}$ eine partikuläre Lösung ist und

$$\theta_{1,2}(\mu - a_0) = \frac{\sqrt{(\mu-a_0)^2 + 2\delta\sigma^2} \mp (\mu - a_0)}{\sigma^2} > 0.$$

Man merke an, dass für jeglichen Kontrollprozess u das Zielfunktional $J(x,u)$ niemals $\frac{a_0}{\delta}$ überschreiten kann. Dies können wir leicht erkennen, indem wir folgende Gleichung betrachten:

$$J(x,u) \leq V(x) = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\tau a_0 e^{-\delta s} ds\Big] \leq \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty a_0 e^{-\delta s} ds\Big] = \frac{a_0}{\delta}.$$

Somit können wir $f(x)$ von oben abschätzen durch $f(x) \leq \frac{a_0}{\delta}$, womit $C = 0$ gilt. Da $f(x)$ eine steigende Funktion ist, erhalten wir $D < 0$, also insgesamt

$$f_2(x) = \frac{a_0}{\delta} + De^{-\theta_2(\mu-a_0)x}.$$

Nun wollen wir die Konstanten so bestimmen, dass wir die zwei Lösungen zusammensetzen können. Das Verifikationstheorem verlangt eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Daher wählen wir unsere Konstanten geeignet, sodass die Lösungen in der Stammfunktion, 1. und 2. Ableitung am Punkt x_0 übereinstimmen. Dieser Ansatz wird auch *the principle of smooth fit* genannt. Zur Bestimmung der Konstanten betrachten wir folgende Bedingungen:

$$f(x_0^+) = f(x_0^-), \tag{4.8}$$
$$f'(x_0^+) = 1 = f'(x_0^-), \tag{4.9}$$
$$f''(x_0^+) = f''(x_0^-). \tag{4.10}$$

Wegen

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x_0^-) + \mu \underbrace{f'(x_0^+)}_{=1} - \delta f(x_0) = 0 \implies \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x_0^-) = \delta f(x_0) - \mu,$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x_0^+) + (\mu - a_0) \underbrace{f'(x_0^-)}_{=1} - \delta f(x_0) + a_0 = 0 \implies \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x_0^+) = \delta f(x_0) - \mu,$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

folgt aus den ersten zwei Bedingungen automatisch die Dritte. Seien nun $\theta_1 := \theta_1(0)$, $\theta_2 := \theta_2(0)$ und $\theta_3 := \theta_2(\mu - u_0)$. Dann sehen wir, dass (4.8)-(4.10) äquivalent zu

$$A(e^{\theta_1 x_0} - e^{-\theta_2 x_0}) = \frac{a_0}{\delta} + De^{-\theta_3 x_0}, \tag{4.11}$$

$$A(\theta_1 e^{\theta_1 x_0} + \theta_2 e^{-\theta_2 x_0}) = 1, \tag{4.12}$$

$$-D\theta_3 e^{-\theta_3 x_0} = 1. \tag{4.13}$$

Lösen wir nun (4.13) in Richtung D auf, also

$$D = -\frac{e^{\theta_3 x_0}}{\theta_3}, \tag{4.14}$$

und setzen diese in (4.11) ein, dann erhalten wir

$$A(e^{\theta_1 x_0} - e^{-\theta_2 x_0}) = \frac{a_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_3} =: \alpha. \tag{4.15}$$

Wir sehen, dass die Lösungen (4.11)-(4.13) nur dann existieren, wenn die Bedingung

$$\alpha = \frac{a_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_3} > 0 \tag{4.16}$$

erfüllt ist.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass diese Bedingung hinreichend ist. Wir multiplizieren (4.15) mit (4.12) und erhalten

$$\alpha A(\theta_1 e^{\theta_1 x_0} + \theta_2 e^{-\theta_2 x_0}) = A(e^{\theta_1 x_0} - e^{-\theta_2 x_0}).$$

Durch geeignete Umformungen bekommen wir

$$e^{x_0(\theta_1+\theta_2)} = \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 - \alpha\theta_1}.$$

Da $1 + \alpha\theta_2 > 0$ muss $1 - \alpha\theta_1 > 0$ folgen, und damit bleibt zu zeigen, dass

$$\alpha\theta_1 < 1 \tag{4.17}$$

gilt.
Hierfür verwenden wir die elementare Ungleichung

$$\sqrt{a^2 + b} - a < \frac{b}{2a}, \quad \text{für alle } a, b > 0.$$

Indem wir $a = \mu$ sowie $b = 2\sigma^2\delta$ setzen und geeignet umformen, folgt

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2\delta} - \mu}{\sigma^2} < \frac{\delta}{\mu}. \tag{4.18}$$

Durch einsetzen von α in (4.17) erhalten wir

$$\frac{a_0}{\delta} < \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}. \tag{4.19}$$

Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle. Falls $a_0 \leq \mu$, folgt (4.19) direkt aus (4.18). Falls $a_0 \geq \mu$, dann gilt

$$\theta_3 = \frac{\sqrt{(\mu - a_0)^2 + 2\sigma^2\delta} + (\mu - a_0)}{\sigma^2} < \frac{\delta}{(a_0 - \mu)}. \tag{4.20}$$

Mit (4.18) und (4.20) erhält man (4.19).

Ist (4.16) gültig, können wir die Existenz einer eindeutigen Lösung für (4.11)-(4.13) zeigen. Zunächst dividieren wir (4.11) durch (4.15), dann erhalten wir

$$\frac{e^{\theta_1 x_0} - e^{-\theta_2 x_0}}{\theta_1 e^{\theta_1 x_0} + \theta_2 e^{-\theta_2 x_0}} = \alpha,$$

was äquivalent zu

$$e^{x_0(\theta_1+\theta_2)} = \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 - \alpha\theta_1}.$$

ist. Weil $\alpha\theta_1 < 1$ gilt, ist die eindeutige Lösung für x_0 gegeben durch

$$x_0 = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 - \alpha\theta_1} > 0.$$

Setzen wir x_0 in (4.12) beziehungsweise (4.14) ein, dann erhalten wir die Lösungen für die Konstanten A sowie D.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Lösung in (4.4) tatsächlich eine konkave Funktion ist. Dafür formulieren wir den folgenden Satz:

Satz 4.1. *Es existiert eine zweifach differenzierbare konkave Lösung für* (4.4) *und* (4.5). *Falls* $\frac{a_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_3} \leq 0$, *dann ist die Lösung gegeben durch*

$$f(x) = \frac{a_0}{\delta}(1 - e^{-\theta_3 x}), \tag{4.21}$$

wobei falls $\frac{a_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ *gilt, dann*

$$f(x) = \begin{cases} A(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), & 0 \leq x \leq x_0, \\ \frac{a_0}{\delta} - De^{-\theta_3 x}, & x > x_0, \end{cases}$$

wobei A, D, x_0 *die eindeutigen Lösungen von* (4.11)-(4.13) *sind.*

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Teilen.

(1) Die Funktion (4.21) erfüllt die Randbedingung (4.5). Sie ist damit konkav und für sie gilt $f'(0) = \frac{\theta_3 a_0}{\delta} \leq 1$. Deswegen gilt $f'(x) \leq 1$ für alle $x > 0$ und

$$(a_0 - a)(f'(x) - 1) \leq 0, \quad \text{für } a \in [0, a_0].$$

Addieren wir die Ungleichung zur Gleichung

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - \delta f(x) + a_0 = 0,$$

welche durch $f(x)$ erfüllt ist, erhalten wir die HJB-Gleichung (4.4).

(2) Angenommen (4.16) ist gültig. Dann erfüllt $f(x)$ die Randbedingung (4.5). Wegen $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ ist $f(x)$ per Konstruktion stetig. Weil $f(x)$ auf $[0, x_0]$ (4.6) und auf $[m, \infty)$ (4.7) erfüllt, erhalten wir

$$f''(x_0^-) = \frac{2}{\sigma^2}(\delta f(x_0) - \mu f'(x_0)),$$
$$f''(x_0^+) = \frac{2}{\sigma^2}(\delta f(x_0) - (\mu - a_0)f'(x_0) - a_0).$$

Wegen Konstruktion ist $f'(x_0) = 1$, haben wir $f''(x_0^+) = f''(x_0^-)$, und damit ist $f(x)$ zweifach stetig differenzierbar. Die Konkavität auf $[x_0, \infty)$ folgt unmittelbar.
Um die Konkavität auf $[0, x_0]$ zu überprüfen, leiten wir $f(x)$ dreimal ab. Wir erhalten $f'''(x) > 0$, woraus die Monotonie von $f''(x)$ folgt. Man sieht direkt, dass $f''(0) < 0$ gilt und weil $f''(x_0^+) < 0$, folgt mit dem soeben Bewiesenem, dass $f''(x_0^-) < 0$ und folglich $f''(x) < 0$ auf $[0, x_0]$. Insgesamt ist somit $f(x)$ konkav auf $[0, \infty)$.

(3) Sei $x \leq x_0$. Dann gilt $f'(x) > 1$, und durch Addieren der Ungleichung $-a(f'(x)-1) \leq 0$ zu (4.6), erhalten wir (4.4). Falls $x > x_0$, dann gilt $f'(x) < 1$. Analog durch Addieren von $(a_0 - a)(f'(x) - 1) \leq 0$ und (4.7), erhalten wir (4.4). Was den Beweis vervollständigt.

□

Wir wollen zum Abschluss noch zeigen, dass die Funktion $f(x)$, wie sie in Satz 4.1 definiert ist, tatsächlich optimal ist. Hierbei werden wir ein Verifikationstheorem formulieren.

Satz 4.2. *Sei u ein beliebiger zulässiger Kontrollprozess, dann erfüllt die Funktion $f(x)$ (wie in Satz 4.1 definiert)*

$$f(x) \geq V(x, u).$$

Sei $u^*(x) = \mathbb{1}_{\{x > x_0\}} a_0$. Dann gilt

$$f(x) = V(x, u^*).$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Beweis. Sei u eine beliebige Strategie. Wenden wir für eine Lösung f von (4.4) die Itô-Formel an, dann gilt:

$$\begin{aligned} e^{-\delta(\tau\wedge T)}f(X_{\tau\wedge T}) - f(x) \\ &= \int_0^{\tau\wedge T} \Big(\frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t) + (\mu - u_t)f'(X_t) - \delta f(X_t)\Big)e^{-\delta t}dt \\ &\quad + \int_0^{\tau\wedge T} e^{-\delta t} f'(X_t)\sigma\, dW_t. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Da f konkav ist, ist $f'(x)$ beschränkt durch $f'(0)$. Somit ist der letzte Term in (4.22) ein quadratisch integrierbares Martingal mit Erwartungswert Null. Indem wir (4.4) betrachten, sehen wir, dass der erste Integrand auf der rechten Seite von (4.22) durch $-u_t$ beschränkt ist. Wenden wir den Erwartungswert an und formen um, dann erhalten wir

$$f(x) \geq \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau\wedge T} e^{-\delta t}u_t\, dt\Big] + \mathbb{E}_x[e^{-\delta(\tau\wedge T)}f(X_{\tau\wedge T})]. \tag{4.23}$$

Wenn wir $T \to \infty$ laufen lassen und den Satz von der dominierten Konvergenz anwenden, erhalten wir

$$f(x) \geq \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau} e^{-\delta t}u_t\, dt\Big] = J(t,x,u) = V(x,u).$$

Für die zweite Behauptung setzen wir u_t^* statt u_t in (4.22) ein und erhalten eine Gleichheit in (4.23). Da $X_\tau = 0$ und $f(0) = 0$ gelten, folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[e^{-\delta(\tau\wedge T)}f(X_{\tau\wedge T})] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}e^{-\delta(\tau\wedge T)}f(X_{\tau\wedge T})] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}e^{-\delta T}f(X_{\tau\wedge T})] \\ &\leq e^{-\delta T}\sup_{x\geq 0} f(x) \\ &\leq e^{-\delta T}\frac{a_0}{\delta}. \end{aligned}$$

Da die Schranke mit $T \to \infty$ gegen Null geht und den Grenzwert in (4.23) einsetzen erhalten wir

$$f(x) = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau} e^{-\delta t}u_t^*\, dt\Big] = J(t,x,u^*) = V(x,u^*).$$

Womit auch die zweite Behauptung bewiesen ist.

□

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

4.2 Dividendenstrategie mit unbeschränkter Dividendenrate

Als nächstes wollen wir den Fall einer Dividendenstrategie mit unbeschränkter Dividendenintensität behandeln. Hierbei soll die ausgeschüttete Dividende bis zum Zeitpunkt t dargestellt werden durch

$$L(t) = \int_0^t u_t \, dt.$$

Wir bezeichnen $L(\cdot)$ als zulässig, wenn

$L(t) \in \mathcal{F}_t$,
$L(t)$ ein nicht-fallender, nicht-negativer Prozess ist.

Um Einmalzahlungen zu modellieren, wollen wir annehmen, dass $L(\cdot)$ cádlag ist. $L(t)-L(s)$ ist somit die ausgeschüttete Dividende im Intervall $(s,t]$ und $L(t)-L(t^-)$ kann eine Einmalzahlung zum Zeitpunkt t beschreiben. Ausgehend von der Gestalt des Kontrollprozesses schreiben wir den kontrollierten Risikoprozess nun in Form von

$$X_t^L = x + \int_0^t \mu \, ds + \sigma W_t - L_t. \tag{4.24}$$

Man merke an, dass im Fall von $X_0 = x - L(0)$, falls es eine Ausschüttung gibt, der Prozess auf $x - L(0)$ fällt. Deshalb wollen wir $X_0^- = x$ und $L(0^-) = 0$ voraussetzen. Das Zielfunktional verändert sich zu

$$J(x, L) = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\tau e^{-\delta t} dL_t\Big].$$

Die Wertfunktion nimmt folgende Form an:

$$V(x) = \sup_L J(x, L).$$

Das Ziel ist die *optimale Strategie* L^* zu finden, die das Supremum der Wertfunktion für alle zulässigen Strategien L bildet. Wir leiten zuallererst die HJB-Gleichung her. Für diese werden wir Variationsungleichungen, die das Zielfunktional erfüllen, ermitteln.

Für die erste Ungleichung erinnern wir uns daran, dass im beschränkten Fall unter der optimalen Strategie entweder nichts oder die maximale Dividendenrate ausbezahlt wird. In ähnlicher Methodik wie im beschränkten Fall werden wir daher eine Strategie betrachten in der in kleinen Intervall $[0, z)$ nichts ausgezahlt wird

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

und danach die ϵ-optimale Strategie angewendet wird. Im jetzigen Fall ist die Dividendenrate unbeschränkt also unendlich, daher kann es zum Zeitpunkt z zu einer Einmalzahlung kommen, die aus einer unbeschränkten Dividendenrate ergibt. Also sei $\epsilon > 0$, dann existiert für jedes y eine Strategie $L^y(\cdot)$ so, dass

$$J(y, L^y) \geq V(y) - \epsilon.$$

Sei $z > 0$ fest und $Y_t = x + \mu t + \sigma W_t$ eine Brownsche Bewegung mit Drift μ, Volatilität σ^2 und Anfangswert x, die den Überschussprozess ohne Berücksichtigung der Dividenden beschreibt. Wir definieren eine Strategie folgendermaßen:

$$L_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < z, \\ L^{Y_z}(t - z), & t \geq z. \end{cases}$$

Mit dieser Strategie zahlen wir vor z nichts aus und ändern die Ausschüttung erst ab z auf $L^{Y_z}(\cdot - z)$. Da die Strategie suboptimal ist, erhalten wir

$$V(x) \geq e^{-\delta z}\mathbb{E}_x[V(Y_z) - \epsilon \mid \tau \geq z].$$

Da ϵ beliebig war, folgt

$$V(x) - e^{-\delta z}\mathbb{E}_x[V(Y_z)] \geq 0. \tag{4.25}$$

Wenn wir annehmen, dass V zweifach stetig differenzierbar ist, und indem wir die Ito-Formel auf $e^{-\delta z}V(Y_z)$ anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{-\delta z}V(Y_z) =& V(x) + \int_0^z e^{-\delta t}\Big[\mu V'(Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(Y_t) - \delta V(Y_t)\Big]dt \\ &+ \int_0^z e^{-\delta t}V'(Y_t)\sigma \; dW_t. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Setzen wir (4.26) in (4.25) und nehmen an, dass das stochastische Integral ein Martingal ist, dann folgt

$$0 \geq \mathbb{E}_x\Big[\int_0^z e^{-\delta t}\big[\mu V'(Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(Y_t) - \delta V(Y_t)\big]dt\Big]. \tag{4.27}$$

Indem wir (4.25) durch z dividieren und den Grenzübergang $z \to 0$ betrachten, erhalten wir

$$0 \geq \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \delta V(x).$$

Um die zweite Gleichung zu motivieren, sei x fest sowie $z > 0$ und sei $L^y(\cdot)$ definiert wie oben mit $y = x - z$. Betrachte $\mathcal{L}_\epsilon(t) = z + L^{x-z}(t)$, eine Strategie die anfangs

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

eine Dividende in Höhe z ausschüttet und danach die Strategie $L^{x-z}(\cdot)$ verfolgt. Mit ähnlichen Argumenten wie oben, erhalten wir

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\tau e^{-ct} d\mathcal{L}_\epsilon(t)\Big] = z + \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\tau e^{-ct} dL^{x-z}\Big] \geq z + V(x-z) - \epsilon.$$

Da ϵ beliebig gewählt wurde, erhalten wir $V(x) - V(x-z) \geq z$ und womit

$$\lim_{z\to 0} \frac{V(x) - V(x-z)}{z} = V'(x) \geq 1.$$

gilt. Also lautet die zweite Gleichung

$$0 \geq 1 - V'(x).$$

Die Wertfunktion muss also beide Gleichungen erfüllen. Zusammengefasst erhalten wir

$$0 \geq \max\Big\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \delta V(x), 1 - V'(x)\Big\}.$$

Weil das Unternehmen sofort in den Ruin treibt, wenn das Anfangskapital gleich 0 beträgt, wollen wir festlegen, dass $V(0) = 0$ gilt. Wir sehen, dass die Wertfunktion die folgende HJB-Gleichung erfüllen muss:

$$\max\Big\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \delta V(x), 1 - V'(x)\Big\} = 0, \tag{4.28}$$

$$V(0) = 0. \tag{4.29}$$

Im folgenden Satz wollen wir zeigen, dass die Wertfunktion unter einer optimalen Strategie die HJB-Gleichung erfüllt.

Satz 4.3. *Die optimale Wertfunktion V erfüllt die HJB-Gleichung* (4.28) *und* (4.28).

Sei $f(x)$ eine konkave Funktion, $f'(x)$ ist also nicht wachsend, und sei $m := \sup\{x \mid f'(x) > 1\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &> 1, \quad \text{für } x < m, \\ f'(x) &= 1, \quad \text{für } x \geq m. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Wir erhalten unter Berücksichtigung der Annahmen, dass $f(x)$ in zwei Bereiche geteilt werden kann und $f(x)$ folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - \delta f(x) &= 0, \quad x < m, \\ 1 - f'(x) &= 0, \quad x \geq m. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Um die unbekannte Schranke m zu finden, werden wir wieder auf *the principle of smooth fit* zurückgreifen. Sei $f(x)$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion und für die gilt

$$f'(m) = f'(m^+) = f'(m^-),$$
$$f''(m) = f''(m^+) = f''(m^-).$$

Wir wollen also eine Lösung $f(x)$ finden die (4.31) löst und ein m finden so, dass

$$f(0) = 0, \tag{4.32}$$
$$f'(m) = 1, \tag{4.33}$$
$$f''(m) = 0. \tag{4.34}$$

Eine allgemeine Lösung für (4.31) hat die Form

$$Ae^{\theta_1 x} + Be^{-\theta_2 x},$$

wobei θ_1, θ_2 sowie in Kapitel 4.2 sind. Wegen (4.32) gilt $A = -B$, also

$$A(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}). \tag{4.35}$$

Indem wir (4.35) ableiten, erhalten wir

$$f'(x) = A(\theta_1 e^{\theta_1 x} + \theta_2 e^{-\theta_2 x}), \tag{4.36}$$
$$f''(x) = A(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x}). \tag{4.37}$$

Nutzen wir die Bedingung (4.34) in (4.37) aus, dann erhalten wir

$$m = \frac{2}{\theta_1 + \theta_2} \log \left| \frac{\theta_2}{\theta_1} \right|. \tag{4.38}$$

Mit (4.36) und der Bedingung (4.33) folgern wir

$$A = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}}. \tag{4.39}$$

Satz 4.4. *Sei*

$$f(x) = \begin{cases} A(e^{\theta_1 x} + e^{-\theta_2 x}), & \text{für } x \leq m, \\ A(e^{\theta_1 m} + e^{-\theta_2 m}) + x - m, & \text{für } x \geq m, \end{cases}$$

mit m und A gegeben durch (4.38) *und* (4.39). *Dann ist f die Lösung der HJB-Gleichung* (4.28).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Beweis. Damit $f(x)$ für (4.28) erfüllt ist, bleibt zu zeigen, dass

$$f'(x) \geq 1 \quad \text{für } x \leq m, \tag{4.40}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - \delta f(x) \leq 0 \quad \text{für } x \geq m. \tag{4.41}$$

Indem wir (4.37) differenzieren, sehen wir, dass $f'''(x) > 0$ gilt, womit $f''(x)$ eine steigende Funktion ist. Wegen $|\theta_2| > \theta_1$ ist $f''(0) < 0$. Da $f''(m) = 0$, folgt aus der Monotonie von $f''(x)$, dass $f''(x) \leq 0$ für $x \leq m$ und somit ist $f(x)$ eine konkave Funktion auf $[0, m]$. Daher gilt $f'(x) \geq f'(m) = 1$ für alle $x \leq m$, womit (4.40) gezeigt ist.

Man merke an, dass wegen der Annahme (4.30) für $x \geq m$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - \delta f(x) &= \mu - \delta f(x) \\ &\leq \mu - \delta f(m) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 f''(m) + \mu f'(m) - \delta f(m) = 0\end{aligned}$$

gilt, womit auch (4.41) gezeigt ist. □

Zum Abschluss werden wir zeigen, dass die Funktion in Satz 4.4 mit der optimalen Wertfunktion V übereinstimmt.

Satz 4.5. *Sei L eine beliebige zulässige Dividendenstrategie, dann gilt*

$$f(x) \geq V(x, L).$$

Sei m gegeben wie in (4.38) *und L^* eine optimale Dividendenstrategie, dann gilt*

$$f(x) = V(x, L^*).$$

Beweis. Sei X_t gegeben wie in (4.24). Wir definieren für jedes steigendes $L(\cdot)$ die Menge der Unstetigkeitsstellen als $\Lambda := \{s \mid L(s^-) \neq L(s)\}$.
Sei $L^d(t) := \sum_{s \in \Lambda, s \leq t} L(s) - L(s^-)$ und $L^c(t) := L(t) - L^d(t)$. Wenden wir die verallgemeinerte Itô-Formel an, dann gilt

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

$$
\begin{aligned}
&e^{-\delta(\tau\wedge t)}f(X_{\tau\wedge t}) \\
&\quad = f(x) + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s}[\frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_s) + \mu f'(X_s) - \delta f(X_s)]ds + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s)dW_s \\
&\qquad - \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s)dL_s \\
&\qquad - \sum_{s\in\Lambda, s\leq\tau\wedge t} e^{-\delta s}[f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})(X_s - X_{s^-})] \\
&\quad = f(x) + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s}[\frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_s) + \mu f'(X_s) - \delta f(X_s)]ds + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s)dW_s \\
&\qquad - \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s)dL_s^c - \sum_{s\in\Lambda, s\leq\tau\wedge t} e^{-\delta s}[f(X_s) - f(X_{s^-})]. \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Da $f(x)$ konkav ist, also $0 < f'(x) < f'(0) < \infty$, folgt, dass das stochastische Integral ein quadratisch integrierbares Martingal mit Erwartungswert Null ist. Aus der HJB-Gleichung (4.28) können wir schließen, dass der zweite Term auf der rechten Seite von (4.42) nicht positiv ist. Wenden wir nun auf beiden Seiten den Erwartungswert an, dann erhalten wir die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x[e^{-\delta(\tau\wedge t)}f(X_{\tau\wedge t})] \\
&\quad \leq f(x) - \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s)dL_s^c\Big] \\
&\qquad - \mathbb{E}_x\Big[\sum_{s\in\Lambda, s\leq\tau\wedge t} e^{-\delta s}[f(X_s) - f(X_{s^-})]\Big]. \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

Dabei gilt für die linke Seite

$$
\mathbb{E}_x[e^{-ct}f(X_t)|t < \tau] = e^{-ct}\mathbb{E}_x[f(X_t)|t < \tau]. \qquad (4.44)
$$

Wegen der Konkavität von $f(x)$, folgt für Konstanten $a, b > 0$, dass $f(x) \leq a + bx$ gilt. Mit $X_t \leq |W_t|$, sieht man, dass die rechte Seite von (4.44) beschränkt ist durch $e^{-\delta t}(a + b\mathbb{E}[|W_t|])$, was gegen Null für $t \to \infty$ geht.
Wir erinnern uns, dass $f'(x) \geq 1$ und $X_s - X_{s^-} = L_{s^-} - L_s$ gelten. Damit gilt $f(X_s) - f(X_{s^-}) \leq L_{s^-} - L_s$. Betrachten wir den Limes $t \to \infty$ in (4.43), dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
0 &\leq f(x) - \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau} e^{-\delta s} dL_s^c\Big] \\
&\qquad - \mathbb{E}_x\Big[\sum_{s\in\Lambda, s\leq\tau\wedge t} e^{-\delta s}[L_s - L_{s^-}]\Big] \\
&= f(x) - \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau} e^{-\delta s} dL_s\Big].
\end{aligned}
$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$f(x) \geq V(x, L),$$

womit der erste Teil bewiesen ist.

Für den zweiten Teil betrachten wir die Barrierestrategie

$$L_t^* = \max_{s \leq t}[x + \mu s + \sigma W_s - m, 0].$$

Das heißt es gibt nur dann eine Ausschüttung, wenn der Zustandsprozess die Barriere m überschreitet. Sei X_t^* der Zustandsprozess, welcher Dividendenausschüttungen berücksichtigt und an der Barriere m reflektiert wird, also gilt

$$X_t^* \leq m \quad \text{für alle } t \geq 0, \tag{4.45}$$

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_t^* < m\}} dL_t^* = 0. \tag{4.46}$$

Wenden wir wieder die Itô-Formel an und ersetzen L, τ durch L^*, τ^*, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &e^{-\delta(\tau \wedge t)} f(X_{\tau \wedge t}) \\ &\quad = f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s}[\frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_s^*) + \mu f'(X_s^*) - \delta f(X_s^*)]ds + \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s^*) dW_s \\ &\quad\quad - \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s^*) dL_s^{*c} - \sum_{s \in \Lambda, s \leq \tau \wedge t} e^{-\delta s}(f(X_s^*) - f(X_{s^-}^*)). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Wegen (4.45) und $\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - \delta f(x) = 0$ für $x \leq m$, ist der zweite Term auf der rechten Seite von (4.47) gleich Null. Wenden wir den Erwartungswert an, verschwindet der Martingalterm erneut und wir bekommen

$$\mathbb{E}_x[e^{-\delta t} f(X_t^*) | t < \tau^*] = f(x) - \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s^*) dL_s^*\Big]. \tag{4.48}$$

Da f auf $[0, m]$ beschränkt ist, konvergiert die linke Seite für $t \to \infty$ gegen Null. Wegen (4.46) und $f'(m) = 1$, folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s^*) dL_s^*\Big] \\ &\quad = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} f'(X_s^*) \mathbb{1}_{\{X_s^* = m\}} dL_s^*\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} f'(m) \mathbb{1}_{\{X_s^* = m\}} dL_s^*\Big] \\ &\quad = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} \mathbb{1}_{\{X_s^* = m\}} dL_s^*\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} dL_s^*\Big]. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Setzen wir (4.49) in (4.48) ein und lassen $t \to \infty$ laufen, dann erhalten wir

$$f(x) - \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\tau e^{-\delta s} dL_s^*\Big] = 0,$$

was zu

$$f(x) = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^\tau e^{-\delta s} dL_s^*\Big] = V(x, L^*)$$

äquivalent ist. Womit auch die zweite Aussage bewiesen ist.

□

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kapitel 5

Optimale Dividendenstrategie mit Zinsen

In den bisherigen Optimierungsproblemen wurde das freie Kapital ohne Verzinsung modelliert. In diesem Kapitel wird ein Unternehmen betrachtet, welches seine Überschüsse in ein risikoloses Wertpapier anlegt. In diesem Zusammenhang wollen wir uns auf eine konstante Verzinsung $\rho > 0$ festlegen. Zusätzlich setzen wir voraus, dass

$$\rho < \delta$$

gilt, mit Diskontierungsrate $\delta > 0$. Die Bedingung stellt sicher, dass die erwartete Wertfunktion nicht uneingeschränkt groß werden kann. Es wird gezeigt, dass eine *Thresholdstrategie* die optimale Strategie des Kontrollproblems ist. Wir erinnern uns, dass unter einer Thresholdstrategie, Dividenden zu ihrer maximalen Ausschüttungsrate α ausgeschüttet werden, wenn der Überschussprozess die Schranke b^* überschreitet wird und falls der Überschussprozess sich unterhalb der Schranke befindet wird keine Dividende ausbezahlt. Im einfachen Fall, ohne Verzinsung, erfüllt die Wertfunktion eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Da ρ positiv ist, werden wir eine lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten betrachten. Die besagte Gleichung gehört zu der Klasse von den sogenannten *Kummer'schen konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichungen*, die uns erlaubt die Wertfunktion sowie die optimale Barriere numerisch zu bestimmen.

5.1 Das Modell

Wir nehmen an, dass der Überschuss durch ein Brownsches Modell modelliert wird. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ der Überschuss eines Unternehmens, bevor Dividenden ausbezahlt werden. Der Überschussprozess ist ein stetiger stochastischer Prozess, welcher die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = (\mu + \rho X_t)dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0,$$

erfüllt, wobei $\rho > 0$ der Zinssatz, $\sigma > 0$ die Standardabweichung und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung ist.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Sei $u = (u_t)_{t\geq 0}$ eine zulässige Dividendenstrategie und u_t die Dividendenrate zum Zeitpunkt t. Bezeichne $\tau^u := \inf\{t \geq 0 \mid X_t^u \leq 0\}$ den Ruinzeitpunkt des kontrollierten Überschussprozesses $(X_t^u)_{t\geq 0}$. Das Zielfunktional wird definiert durch

$$V^u(x) = \mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau^u} e^{-\delta t} u_t dt \mid X_0^u = x\Big],$$

wobei $\delta > 0$ dem Diskontierungssatz entspricht. Wir setzen voraus, dass $\rho < \delta$ ist und notieren $\mathcal{A}$ als die Menge aller zulässigen Dividendenstrategien. Ziel ist es nun, die optimale Dividendenstrategie u^* zu finden, die das Zielfunktional maximiert, daher

$$V(x) = V^{u^*}(x) = \sup_{u\in\mathcal{A}} V^u(x), \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Wir verfolgen einen ähnlichen Ansatz wie in Kapitel 4.1, indem wir die zulässige Dividendenrate durch $\alpha \in (0, \infty)$ beschränken. Das Ziel ist es nun die optimale Barriere b^* zu ermitteln.

Wir nehmen nun an, dass das die Dividendenausschüttungsstrategie unseres Versicherungsunternehmens einer Thresholdstrategie mit Parameter $b > 0$ und $\alpha > 0$ gleicht. Sei X_t^b der kontrollierte Überschussprozess und $V_b(x)$ der erwartete diskontierte Wert der Dividendenauszahlung. Wir notieren

1. $\tau_0^- := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \leq 0\}$ als den Ruinzeitpunkt,
2. $\tau_b^+ := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq b\}$ den Zeitpunkt an dem der Überschussprozess die Schranke b überschreitet und
3. $\eta_b^- := \inf\{t \geq 0 \mid X_t^b \leq b\}$ den Zeitpunkt an dem der kontrollierte Überschussprozess die Schranke b unterschreitet,

mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$.
Im Folgenden werden wir die HJB-Gleichung herleiten. Wir erinnern uns aus Kapitel 3.3 und (3.14), dass die HJB-Gleichung folgende Form annimmt:

$$\sup_{u\in\mathcal{A}}\{\varphi(x,u) + \mathcal{L}^u V(x) - \delta V(x)\} = 0, \text{ für } x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Betrachten wir den um die Dividendenzahlungen korrigierten Überschussprozess

$$dX_t^u = (\mu + \rho X_t - u_t)dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0.$$

Dann lässt sich der Differentialoperator, angewendet auf die Wertfunktion, schreiben als

$$\mathcal{L}^u V(x) = (\mu + \rho x - u)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x).$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Unsere laufenden Kosten sind daher $\varphi(t) = u_t$ und wir können (5.1) entsprechend angeben als

$$\sup_{u\in\mathcal{A}}\{u + (\mu + \rho x - u)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) - \delta V(x)\} = 0$$

Wir nehmen daher an, dass die Wertfunktion $V(x)$ zweifach stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$ ist und soll die HJB-Gleichung der folgenden Form erfüllen

$$\sup_{u\in\mathcal{A}}\{1 - V'(x)\}u + (\mu + \rho x)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) - \delta V(x) = 0, \tag{5.2}$$

$$V(0) = 0. \tag{5.3}$$

Zur Herleitung der möglichen Lösung der HJB-Gleichung (5.2) und (5.3), sei $f(x)$ die Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu + \rho x)f'(x) - \delta f(x) = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu + \rho x - \alpha)f'(x) - \delta f(x) = 0. \tag{5.5}$$

Aufgrund der Fluktuationen der Brownschen Bewegung würde diese das Unternehmen an der Stelle 0 sofort in den Ruin treiben, daher setzen wir $V(0) = 0$ voraus. Zudem schüttet das Unternehmen ab der Barriere b Dividenden aus, womit $V'(x) > 1$ für $x < b$ und $V'(x) \leq 1$ für $x \geq b$ gelten muss. Wir wollen eine zweifach stetig differenzierbare, wachsende und konkave Lösung $V(x)$ für die HJB-Gleichung (5.2) finden, die den Randbedingungen genügt.

5.2 Kummer'sche Differentialgleichung

Wir werden (5.4) in eine sogenannte *Kummer'schen Differentialgleichung* umformen:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (c - x)\frac{dy}{dx} - ay = 0. \tag{5.6}$$

Die allgemeine Lösung von (5.6) ist eine Linearkombination der Funktionen $M(a, c; x)$ und $U(a, c; x)$, den sogenannten *konfluente hypergeometrische Funktionen der ersten und zweiten Art.*
Die Funktion $M(a, c; x)$, auch *Kummer's Funktion* genannt, ist eine Lösung der Differentialgleichung und wird dargestellt durch

$$M(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)2!}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)3!}x^3 + \dots.$$

Eine weitere Lösung ist $U(a, c; x)$, manchmal auch als *Tricomi's Funktion* bezeichnet, und ist gegeben durch

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

$$U(a,c;x) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)}M(a,c;x) + \frac{\Gamma(c-1}{a}x^{1-c}M(1+a-c,2-c;x).$$

Für interessierte Leser sei für eine detailliertere Analyse auf Slater [13] verwiesen.

Im ersten Schritt definieren wir $z = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\rho}}(\mu+\rho x)$ und die Funktion $g(z)$ so, dass $g(z) = f(x)$. Also gilt

$$f'(x) = g'(z)\frac{\sqrt{2\rho}}{\sigma},$$
$$f''(x) = g''(z)\frac{2\rho}{\sigma^2}.$$

Substituieren wir dies in Gleichung (5.4), dann erhalten wir die Differentialgleichung für $g(z)$:

$$g''(z) + zg'(z) - \frac{\delta}{\rho}g(z) = 0, \quad z > \frac{\mu\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\rho}}. \tag{5.7}$$

Im nächsten Schritt definieren wir $t = -\frac{1}{2}z^2$ und die Funktion $h(t)$ so, dass $h(t) = g(z)$. Also gilt

$$g'(z) = h'(t)(-z),$$
$$g''(z) = h''(t)z^2 - h'(t) = -2th''(t) - h'(t).$$

Substituieren wir nun in (5.7), dann erhalten wir die Differentialgleichung für $h(t)$:

$$th''(t) + (\frac{1}{2} - t)h'(t) + \frac{\delta}{2\rho}h(t) = 0, \quad t < -\frac{\mu^2}{\rho\sigma^2} \tag{5.8}$$

Insgesamt haben wir mit $c = \frac{1}{2}$ und $a = -\frac{\delta}{2\rho}$ eine Gleichung der Form (5.6).
In dem Fall $x < 0$ ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination von

$$exp(x)U(c-a,c;-x), \quad x < 0,$$

und

$$(-x)^{1-c}exp(x)M(1-a,2-c;-x), \quad x < 0.$$

Vergleiche mit [1] 13.1.15 und 13.1.18 auf Seite 505.
Setzen wir $c = \frac{1}{2}$ und $a = -\frac{\delta}{2\rho}$ so erhalten wir zwei unabhängige positive Lösungen für (5.8):

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

$$h_1(x) = exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big\}U\Big(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2\rho},\frac{1}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big),$$
$$h_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho}\sigma}(\mu+\rho x)exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big\}M\Big(1+\frac{\delta}{2\rho},\frac{3}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big).$$

Dabei ist $h_1(x)$ strikt fallend und $h_2(x)$ strikt wachsend.
Somit sind zwei unabhängige Lösungen der Gleichung (5.4) gegeben durch

$$f_1(x) = exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big\}U\Big(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2\rho},\frac{1}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big), \tag{5.9}$$
$$f_2(x) = (\mu+\rho x)exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big\}M\Big(1+\frac{\delta}{2\rho},\frac{3}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big). \tag{5.10}$$

Für (5.5) erhalten wir analog zwei unabhängige Lösungen $f_3(x)$, $f_4(x)$, wobei $f_3(x)$ strikt fallend und $f_4(x)$ strikt wachsend ist:

$$f_3(x) = exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu-\alpha+\rho x)^2\Big\}U\Big(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2\rho},\frac{1}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu-\alpha+\rho x)^2\Big), \tag{5.11}$$
$$f_4(x) = (\mu-\alpha+\rho x)exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu-\alpha+\rho x)^2\Big\}M\Big(1+\frac{\delta}{2\rho},\frac{3}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu-\alpha+\rho x)^2\Big). \tag{5.12}$$

Eine Lösung für (5.4) hat die Form

$$V(x) = Af_1(x) + Bf_2(x).$$

Mit Beachtung der Randbedingung $V(0) = 0$ sowie $V'(b) = 1$ erhalten wir $A = -f_2(0)$ und $B = f_1(0)$.

5.3 Die optimale Barriere

In diesem Abschnitt wollen wir die optimale Barriere b^* und die zugehörige Wertfunktion $V_b(x)$ bestimmen. Die optimale Barriere b^* soll hierbei die Wertfunktion $V_b(x)$ für beliebige $x > 0$ maximieren. Wir bezeichnen $h(x) = f_1(0)f_2(x) - f_2(0)f_1(x)$ und merken an, dass $h(0) = 0$ und $h'(x) > 0$ gelten.

Satz 5.1.

1. *Für $0 \le x \le b$ gilt*

$$\mathbb{E}_x\Big[e^{-\delta\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+<\tau_0^-\}}\Big] = \frac{h(x)}{h(b)}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

2. *Für* $0 \leq x \leq b$ *gilt*

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{\tau_0^- < \tau_b^+\}}\right] = \frac{f_1(x)f_2(b) - f_2(x)f_1(b)}{h(b)}$$

3. *Für* $x > b$ *gilt*

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\eta_b^-}\right] = \frac{f_3(x)}{f_3(b)}$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage, die Anderen folgen analog.
Wir wollen also folgende Aussage zeigen:

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+ < \tau_0^-\}}\right] = \frac{f_1(0)f_2(x) - f_2(0)f_1(x)}{f_1(0)f_2(b) - f_2(0)f_1(b)}$$

Sei $J := [0, b]$ ein Intervall und $\tau_J := \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \notin J\}$ die erste Austrittszeit aus J. Dann können wir die starke Markov-Eigenschaft verwenden um folgende Gleichung aufzustellen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_b^+}\right] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{X_{\tau_J}=b\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{X_{\tau_J}=0\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{X_{\tau_J}=b\}}\right] + \mathbb{E}_0\left[e^{-\delta\tau_b^+}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{X_{\tau_J}=0\}}\right]. \qquad (5.13)\end{aligned}$$

Analogerweise gilt

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_0^-}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{X_{\tau_J}=0\}}\right] + \mathbb{E}_b\left[e^{-\delta\tau_0^-}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{X_{\tau_J}=b\}}\right]. \qquad (5.14)$$

Für eine einfache Übersicht schreiben wir $u(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_b^+}\right]$ und $v(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_0^-}\right]$ sowie $\theta^b(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{X_{\tau_J}=b\}}\right]$ und $\theta^0(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta\tau_0^-}\mathbb{1}_{\{X_{\tau_J}=0\}}\right]$. Lösen wir nun die Gleichungen (5.13) sowie (5.14) dann erhalten wir

$$\theta^b(x) = \frac{u(x) - u(0)v(x)}{1 - u(0)v(b)}.$$

Da $u(b) = \mathbb{E}_b\left[e^{-\delta\tau_b^+}\right] = 1$ und $v(0) = \mathbb{E}_0\left[e^{-\delta\tau_0^-}\right] = 1$ gelten, folgt

$$\theta^b(x) = \frac{v(0)u(x) - u(0)v(x)}{v(0)u(b) - u(0)v(b)}.$$

Per Konstruktion sind $u(x)$, $v(x)$ konstante Vielfache von $f_1(x)$, $f_2(x)$ als Lösungen der Differentialgleichungen (5.4) und (5.5), was in Breiman [4] ausführlich in Theorom 16.69 dargestellt wird. Insgesamt erhalten wir somit

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$$\theta^b(x) = \frac{f_1(0)f_2(x) - f_2(0)f_1(x)}{f_1(0)f_2(b) - f_2(0)f_1(b)}.$$

Womit die Behauptung bewiesen ist.

□

Dividenden werden nur dann ausbezahlt, wenn der Überschussprozess die Schranke b vor Eintritt eines Ruins erreicht. Mit $0 \leq x \leq b$ gilt für den Wert der Dividenden

$$V_b(x) = \mathbb{E}_x\Big[e^{-\delta\tau_b^+}\mathbb{1}_{\{\tau_b^+ < \tau_0^-\}}\Big]V_b(b) = \frac{h(x)}{h(b)}V_b(b).$$

Wenn sich der Überschussprozess oberhalb der Schranke b befindet, wird sofort die maximale Dividendenrate α ausbezahlt bis der Überschussprozess die Schranke b erstmalig unterschreitet. Daher erhalten wir für $x > b$

$$\begin{aligned} V_b(x) &= \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\eta_b^-} \alpha e^{-\delta t}dt\Big] + \mathbb{E}_x\Big[e^{-\delta\eta_b^-}\Big]V_b(b) \\ &= \mathbb{E}_x\Big[-\frac{\alpha}{\delta}e^{-\delta\eta_b^-} + \frac{\alpha}{\delta}\Big] + \mathbb{E}_x\Big[e^{-\delta\eta_b^-}\Big]V_b(b) \\ &= \frac{\alpha}{\delta} + \Big[V_b(b) - \frac{\alpha}{\delta}\Big]\frac{f_3(x)}{f_3(b)} \end{aligned}$$

Nutzen wir die Stetigkeit der Funktion $V_b'(x)$ an der Stelle $x = b$ aus erhalten wir einen Ausdruck für $V_b(b)$:

$$\begin{aligned} & \frac{h'(b)}{h(b)}V_b(b) = \Big[V_b(b) - \frac{\alpha}{\delta}\Big]\frac{f_3'(b)}{f_3(b)} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b)}{f_3(b)} = V_b(b)\Big[\frac{f_3'(b)}{f_3(b)} - \frac{h'(b)}{h(b)}\Big] \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b)}{f_3(b)} = V_b(b)\Big[\frac{f_3'(b)h(b) - h'(b)f_3(b)}{f_3(b)h(b)}\Big] \\ \Leftrightarrow \quad & V_b(b) = \frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b)h(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)}. \end{aligned}$$

Für $0 \leq x \leq b$ gilt

$$\begin{aligned} V_b(x) &= \frac{h(x)}{h(b)}V_b(b) \\ &= \frac{h(x)}{h(b)}\frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b)h(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)} \\ &= \frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b)h(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)}. \end{aligned}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Für $x > b$ gilt

$$\begin{aligned}
V_b(x) &= \frac{\alpha}{\delta} + \Big[\frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b)h(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)} - \frac{\alpha}{\delta}\Big]\frac{f_3(x)}{f_3(b)} \\
&= \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}\Big[\frac{f_3'(b)h(b)f_3(x)}{\{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)\}f_3(b)} - \frac{f_3(x)}{f_3(b)}\Big] \\
&= \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}\Big[\frac{f_3'(b)h(b)f_3(x) - \{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)\}f_3(x)}{\{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)\}f_3(b)}\Big] \\
&= \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}\Big[\frac{f_3(b)h'(b)f_3(x)}{\{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)\}f_3(b)}\Big] \\
&= \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}\Big[\frac{h'(b)f_3(x)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)}\Big].
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir einen geschlossenen Ausdruck für die erwarteten diskontierten Dividenden:

$$V_b(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b)h(x)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)}, & 0 \le x \le b, \\ \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}\frac{h'(b)f_3(x)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)}, & x > b. \end{cases}$$

Im nächsten Schritt wollen wir die optimale Schranke b^* bestimmen, diese soll $V_b(x)$ für alle $x > 0$ maximieren. Für die bessere Überschaubarkeit definieren wir

$$\begin{aligned}
g_1(b) &:= \frac{f_3'(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)}, \\
g_2(b) &:= \frac{h'(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)}.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen $V_b(x)$ und $V_b'(x)$ an der Stelle $x = b$ erhalten wir

$$g_1(b)h(b) = 1 + g_2(b)f_3(b), \tag{5.15}$$
$$g_1(b)h'(b) = g_2(b)f_3'(b). \tag{5.16}$$

Indem wir (5.15) bezüglich b differenzieren und dann in (5.16) einsetzen, folgt

$$g_1'(b)h(b) = g_2'(b)f_3(b).$$

Mit Gültigkeit von $h(b) > 0$ und $f_3(b) > 0$ für $b > 0$ und, dass $g_1'(b)$ und $g_2'(b)$ dieselben Vorzeichen haben folgt, dass $g_1(b)$ und $g_2(b)$ gleichzeitig maximiert werden können.
Für $z \to \infty$ gilt

$$U(a, c, z) = z^{-a}[1 + o(|z|^{-1})], \tag{5.17}$$
$$M(a, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^z z^{a-c}[1 + o(|z|^{-1})], \tag{5.18}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

was in [1] nachgelesen werden kann. Das bedeutet im Fall von $U(a, c, z)$, dass sich dieser im wesentlichen wie z^{-a} für ein beliebiges a verhält, wobei für $z \to \infty$ die relative Abweichung zu z^{-a} schneller gegen 0 geht als $|z|^{-1}$. Mit Beachtung der Konstruktion von $g_1(b)$ und (5.17) sowie (5.18) erkennen wir, dass

$$\lim_{b\to\infty} g_1(b) = 0,$$

gilt und womit sofort

$$\lim_{b\to\infty} V_b(x) = 0$$

folgt. Daraus schließen wir, dass $V_b(x)$ nur für ein endliches $b^* < \infty$ maximal sein kann.
Wenn also $b^* > 0$ gilt, dann folgt $g_1'(b^*) = 0$. Wir leiten zunächst $g_1(b)$ ab, womit wir

$$g_1'(b) = \frac{f_3(b)[f_3'(b)h''(b) - f_3''(b)h'(b)]}{[f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)]^2} \tag{5.19}$$

erhalten. Wir wissen, dass der Nenner von (5.19) und $f_3(b)$ für $b > 0$ positiv sein muss, daher gilt mit $b^* > 0$

$$f_3'(b^*)h''(b^*) - f_3''(b^*)h'(b^*) = 0. \tag{5.20}$$

Wir erkennen, dass (5.20) genau dann gültig ist, wenn $V_{b^*}''(x)$ an der Stelle $x = b^*$ stetig ist, also

$$V_{b^*}''(b^{*-}) = V_{b^*}''(b^{*+}). \tag{5.21}$$

Für $0 \le x \le b$ erfüllt $V_b(x)$ die Differentialgleichung (5.4) und für $x > b$ die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_b''(x) + (\mu + \rho x - \alpha)V_b'(x) - \delta V_b(x) + \alpha = 0. \tag{5.22}$$

Setzen wir $x = b^-$ in (5.4) sowie $x = b^+$ in (5.22) ein, erhalten wir nach der Bildung ihrer Differenzen

$$V_b'(b) = 1 + \frac{\sigma^2}{2\alpha}[V_b''(b^+) - V_b''(b^-)].$$

Für eine optimale Schranke $b^* > 0$, die (5.21) erfüllt, erhalten wir

$$V_{b^*}'(b^*) = 1. \tag{5.23}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Betrachten wir $V'_{b^*}(b) = \frac{\alpha}{\delta}(g_1(b)h(b))'$ mit einer optimalen Schranke $b = b^*$ dann gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\delta}(g_1'(b)h(b) + g_1(b)h'(b)) - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\alpha}{\delta}g_1'(b)h(b) + \frac{\alpha}{\delta}g_1(b)h'(b) - 1 = 0 \\
\overset{(5.16)}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{\alpha}{\delta}g_1'(b)h(b) + \frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b)h'(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)} - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\alpha}{\delta}\underbrace{g_1'(b)h(b)}_{=0} + \frac{\frac{\alpha}{\delta}f_3'(b)h'(b) - f_3'(b)h(b) + f_3(b)h'(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\frac{\alpha}{\delta}f_3'(b)h'(b) - f_3'(b)h(b) + f_3(b)h'(b)}{f_3'(b)h(b) - f_3(b)h'(b)} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\alpha}{\delta}f_3'(b)h'(b) - f_3'(b)h(b) + f_3(b)h'(b) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\alpha}{\delta}f_3'(b)h'(b) + f_3(b)h'(b) = f_3'(b)h(b) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\alpha}{\delta} + \frac{f_3(b)}{f_3'(b)} = \frac{h(b)}{h'(b)}. \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

Wir schließen daraus, dass (5.23) genau dann erfüllt ist, wenn (5.24) gilt.
Mit (5.17) und (5.18) gelten

$$\lim_{b\to\infty}\frac{h(b)}{h'(b)} = \infty, \quad \lim_{b\to\infty}\frac{f_3(b)}{f_3'(b)} = 0.$$

Damit folgt, dass es nur dann eine positive Lösung für (5.24) gibt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\alpha}{\delta} + \frac{f_3(b)}{f_3'(b)} > 0.$$

Wir wollen nun verifizieren, dass eine bestimmte Schranke b^* tatsächlich die Wertfunktion V_b maximiert. Sei dafür b_0 die positive Lösung der Gleichung (5.24) und die optimale Schranke ist dann gegeben durch

$$b^* = \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} \le 0, \\ b_0, & \text{für } \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} > 0. \end{cases} \qquad (5.25)$$

Anschließend wollen wir die Existenz von zweifach differenzierbaren Lösungen der HJB-Gleichung (5.2) und (5.3) zeigen. Unter den Voraussetzungen aus den Vorbereitungen formulieren wir den folgenden Satz:

Satz 5.2. *Es existiert eine zweifach stetig differenzierbare konkave Lösung für* (5.2) *und* (5.3). *Falls*

$$\frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} \le 0 \qquad (5.26)$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

gilt, dann ist die Lösung gegeben durch

$$V_0(x) = \frac{\alpha}{\delta}\Big(1 - \frac{f_3(x)}{f_3(0)}\Big). \tag{5.27}$$

Falls andererseits

$$\frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} > 0 \tag{5.28}$$

gilt, dann ist die Lösung gegeben durch

$$V_{b_0}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(b_0)h(x)}{f_3'(b_0)h(b_0) - f_3(b_0)h'(b_0)}, & 0 \le x \le b_0, \\ \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}\frac{h'(b_0)f_3(x)}{f_3'(b_0)h(b_0) - f_3(b_0)h'(b_0)}, & x > b_0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Bevor wir uns dem Beweis widmen, wollen wir noch die zweite Ableitung von $f_3(x)$ herleiten, die wir im Beweis von Satz 5.2 öfters begegnen werden. Betrachte also

$$f_3(x) = exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu - \alpha + \rho x)^2\Big\} U\Big(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2\rho}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu - \alpha + \rho x)^2\Big)$$

Wir setzen $f_3(x) = g \circ h(x)$ mit

$$g(x) = exp(-x)U\Big(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2\rho}, \frac{1}{2}, x\Big),$$
$$h(x) = \frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu - \alpha + \rho x)^2.$$

Mit Anwenden der Kettenregel und der Produktregel erhalten wir

$$f_3''(x) = h''(x)(g' \circ h(x)) + h'^2(x)(g'' \circ h(x)). \tag{5.30}$$

Für die konfluente hypergeometrische Funktion gilt die Ableitungsregel

$$U'(a, b, z) = -aU(a + 1, b + 1, z).$$

Für die erste und zweite Ableitung von h bekommen wir

$$h'(x) = \frac{2}{\sigma^2}(\mu - \alpha + \rho x),$$
$$h''(x) = \frac{2\rho}{\sigma^2}.$$

Um die Ableitungen von $g(x)$ zu berechnen benötigen wir die folgende Formel, die in [1] Kapitel 13 unter 13.4.25 zu finden ist:

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$$U(a,b+1,z) = U(a,b,z) - U'(a,b,z). \tag{5.31}$$

Zur leichteren Übersicht setzen wir $a = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2\rho}$ und $b = \frac{1}{2}$. Leiten wir $g(x)$ ab bekommen wir

$$\begin{aligned} g'(x) &= -exp(-x)U(a,b,x) + exp(-x)U'(a,b,x) \\ &= -exp(-x)[U(a,b,x) - U'(a,b,x)] \\ &= -exp(-x)U(a,b+1,x). \end{aligned}$$

Mit der gleichen Methodik erhalten wir auch die zweite Ableitung, diese lautet dann

$$g''(x) = exp(-x)U(a,b+2,x).$$

Insgesamt erhalten wir für (5.30):

$$\begin{aligned} f_3''(x) &= -\frac{2\rho}{\sigma^2}exp(-h(x))U(a,b+1,h(x)) + \frac{4}{\sigma^4}(\mu-\alpha+\rho x)^2 exp(-h(x))U(a,b+2,h(x)) \\ &= \frac{4\rho}{\sigma^2}exp(-h(x))\Big[h(x)U(a,b+2,h(x)) - bU(a,b+1,h(x))\Big]. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Aus [1] Kapitel 13 wollen wir die Formeln 13.4.18 und 13.4.24 verwenden:

$$(b-a)U(a,b,z) + U(a-1,b,z) - zU(a,b+1,z) = 0, \tag{5.33}$$

$$(1+a-b)U(a,b-1,z) - (1-b)U(a,b,z) + zU'(a,b,z) = 0. \tag{5.34}$$

Den Term in der eckigen Klammer in (5.32) können wir umformen so, dass

$$\begin{aligned} & h(x)U(a,b+2,h(x)) - bU(a,b+1,h(x)) \\ &\overset{(5.34)}{=} h(x)U(a,b+2,h(x)) + h(x)U'(a,b+1,h(x)) - (b-a)U(a,b,h(x)) \\ &= h(x)\Big[U(a,b+2,h(x)) + U'(a,b+1,h(x))\Big] - (b-a)U(a,b,h(x)) \\ &\overset{(5.31)}{=} h(x)U(a,b+1,h(x)) - (b-a)U(a,b,h(x)) \\ &\overset{(5.33)}{=} U(a-1,b,h(x)). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir eine elegante Darstellung der zweiten Ableitung von $f_3(x)$:

$$f_3''(x) = \frac{4\rho}{\sigma^2}exp\Big\{-\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu-\alpha+\rho x)^2\Big\}U\Big(\frac{\delta}{2\rho}-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu-\alpha+\rho x)^2\Big).$$

Für die dritte Ableitung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ können wir in ähnlicher Weise vorgehen. Wir erhalten

$$f_1'''(x) = -\frac{8\rho(\mu+\rho x)}{\sigma^4}exp\Big\{-\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big\}U\Big(\frac{\delta}{2\rho}-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big),$$

$$f_2'''(x) = \frac{2\rho(\delta+\rho)}{\sigma^2}exp\Big\{-\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big\}M\Big(\frac{\delta}{2\rho}-1,\frac{1}{2},\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu+\rho x)^2\Big).$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Beweis. (von Satz 5.2)
Offensichtlich ist $f_3(x)$ als Lösung der Kummer'schen Differentialgleichung (5.6) zweifach differenzierbar, daher ist auch (5.27) zweifach differenzierbar und des Weiteren auch eine Lösung von (5.22). Wegen (5.26) gilt

$$V_0'(0^+) = -\frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3'(0)}{f_3(0)} \leq 1.$$

Zusammen mit

$$V_0''(x) = -\frac{\alpha}{\delta}\frac{f_3''(x)}{f_3(0)} < 0, \qquad \text{für alle } x > 0,$$

folgt, dass $V_0(x)$ konkav ist. Wegen $V_0'(x) < 1$ für alle $x > 0$ schlussfolgern wir, dass $V_0(x)$ die HJB-Gleichung (5.2) mit Randbedingung (5.3) erfüllt.
Falls $\frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} > 0$ gilt, dann folgt wegen der Äquivalenz von (5.21) und (5.24)

$$V_{b_0}''(b_0^-) = V_{b_0}''(b_0^+)$$

Damit ist $V_{b_0}(x)$ zweifach stetig differenzierbar.
Falls $x \in [b_0, \infty)$ erhalten wir für die zweite Ableitung

$$V_{b_0}''(x) = \frac{\alpha}{\delta} g_2(b_0) f_3''(x),$$

mit

$$f_3''(x) = \frac{4\rho}{\sigma^2} exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu - \alpha + \rho x)^2 \Big\} U\Big(\frac{\delta}{2\rho} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu - \alpha + \rho x)^2\Big)$$

Die Konkavität ist gegeben, weil $g_2(b_0) < 0$ ist.
Falls $x \in [0, b_0)$, betrachten wir die dritte Ableitung

$$V_{b_0}'''(x) = \frac{\alpha}{\delta} g_1(b_0) h'''(x),$$

mit

$$\begin{aligned}
h'''(x) &= f_1(0) f_2'''(x) - f_2(0) f_1'''(x), \\
f_1'''(x) &= -\frac{8\rho(\mu + \rho x)}{\sigma^4} exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu + \rho x)^2 \Big\} U\Big(\frac{\delta}{2\rho} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu + \rho x)^2\Big), \\
f_2'''(x) &= \frac{2\rho(\delta + \rho)}{\sigma^2} exp\Big\{ -\frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu + \rho x)^2 \Big\} M\Big(\frac{\delta}{2\rho} - 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{\rho\sigma^2}(\mu + \rho x)^2\Big).
\end{aligned}$$

Merke an, dass $g_1(b_0) > 0$ und $h'''(x) > 0$ gilt, womit $V_{b_0}''' > 0$ folgt. Somit ist $V_{b_0}''(x)$ strikt wachsend. Da $V_{b_0}''(b_0^+) < 0$ und der Stetigkeit von $V_{b_0}''(x)$ an der Stelle

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

$x = b_0$, gilt auch $V''_{b_0}(b_0^-) < 0$, womit folgt, dass $V''_{b_0}(x) < 0$ auf $[0, b_0)$. Damit ist die Konkavität von $V_{b_0}(x)$ auf $[0, \infty)$ gezeigt.
Die Funktion (5.29) erfüllt daher (5.4) auf $[0, b_0)$ und (5.22) auf $[b_0, \infty)$. Wegen $V'_{b_0}(b_0) = 1$ sieht man, dass $V'_{b_0}(x) > 1$ für $0 \leq x < b_0$ und $V'_{b_0}(x) < 1$ für $x \geq b_0$. Also erfüllt $V_{b_0}(x)$ gegeben durch (5.29) die HJB-Gleichung (5.2) mit Randbedingung (5.3). □

Schließlich wollen wir verifizieren, dass die Funktion aus Satz 5.2 tatsächlich optimal ist. Hierfür formulieren wir den folgenden Satz:

Satz 5.3. *Für eine beliebige zulässige Strategie $u \in \mathcal{A}$, gilt*

$$\begin{cases} V^u(x) \leq V_0(x), & \text{falls } \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} \leq 0, \\ V^u(x) \leq V_{b_0}(x), & \text{falls } \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} > 0. \end{cases}$$

Sei u^* eine optimale Strategie die eine Thresholdstrategie mit Schranke b^* durch (5.25) darstellt, dann gilt

$$V_{b^*}(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}} V^u(x).$$

Beweis. Sei $V(x)$ so wie in Satz 5.2 und u eine beliebige Strategie. Wenden wir die Itô-Formel auf $e^{-\delta t}V(X_t)$ an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & e^{-\delta(\tau \wedge t)}V(X_{\tau \wedge t}) - V(x) \\ &\quad = \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s}\Big(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(X_s) + (\mu + \rho X_s - u_s)V'(X_s) - \delta V'(X_s)\Big)ds \\ &\qquad + \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s}V'(X_s)\sigma dW_s. \end{aligned} \tag{5.35}$$

$V(x)$ ist konkav und $V'(x)$ ist durch $V'(0)$ beschränkt, daher ist das stochastische Integral ein quadratisch integrierbares Martingal mit Erwartungswert Null. Des weiteren ist der erste Integrand in (5.35) beschränkt durch $-u_t$. Wir formen um und wenden den Erwartungswert an und bekommen

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s}u_s ds\Big] + \mathbb{E}_x[e^{-\delta(\tau \wedge t)}V(X_{\tau \wedge t})]$$

Lassen wir nun $t \to \infty$ gehen, dann folgt mit dem Satz der dominierten Konvergenz

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau} e^{-\delta s}u_s ds\Big] = J(x, u) = V^u(x).$$

Sei nun u^* eine optimale Thresholdstrategie mit Parameter α und b^*. Wenden wir wieder die Itô-Formel an

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

$$
\begin{aligned}
e^{-\delta(\tau\wedge t)}V(X_{\tau\wedge t}) - V(x) & \\
&= \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s}\Big(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(X_s) + (\mu+\rho X_s - \alpha)V'(X_s) - \delta V'(X_s)\Big)ds \\
&\quad + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s}V'(X_s)\sigma dW_s. \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

Mit der selben Argumentation wie oben lassen wir das stochastische Integral verschwinden. Da α die HJB-Gleichung maximiert gilt

$$
\begin{aligned}
& \{1 - V'(x)\}\alpha + (\mu+\rho x)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) - \delta V(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu+\rho x - \alpha)V'(x) - \delta V(x) = -\alpha.
\end{aligned}
$$

Womit wir eingesetzt und umgeformt

$$
V(x) = \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\delta s}\alpha \; ds + e^{-\delta(\tau\wedge t)}V(X_{\tau\wedge t}).
$$

erhalten. Wenden wir den Erwartungswert an und lassen $t \to \infty$ gehen, dann gilt wegen Satz von der dominierten Konvergenz

$$
V(x) = \mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau} e^{-\delta s}\alpha \; ds\Big] = V^{u^*}(x).
$$

Damit ist u^* eine optimale Strategie. □

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kapitel 6

Simulation

6.1 Vergleich der Resultate

In diesem Kapitel wollen wir unsere gewonnene Resultate praktisch anwenden sowie einige Ergebnisse explizit ausrechnen und beobachten. Für das Optimierungsproblem haben wir eine geschlossene Formel für die gesuchte Wertfunktion. Im ersten Schritt muss zuerst die optimale Barriere b^* ermittelt werden. Die Barriere ist gegeben durch (5.25), also

$$b^* = \begin{cases} 0, & \text{für } \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} \leq 0, \\ b_0, & \text{für } \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} + \frac{\alpha}{\delta} > 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Der Wert b_0 ist hierbei die positive Nullstelle von (5.24):

$$\frac{f_3(b)}{f_3'(b)} - \frac{h(b)}{h'(b)} + \frac{\alpha}{\delta} = 0$$

Zur Bestimmung der Nullstelle verwenden wir das Bisektionsverfahren.
Wir modellieren den Vermögenszuwachs eines Unternehmens mit 0.5 pro Zeiteinheit sowie eine Verzinsung von 1%. Des Weiteren nehmen wir eine Diskontierungsrate von 2% an.
Für die folgende MATLAB Simulation haben wir folgende Parameter festgelegt:

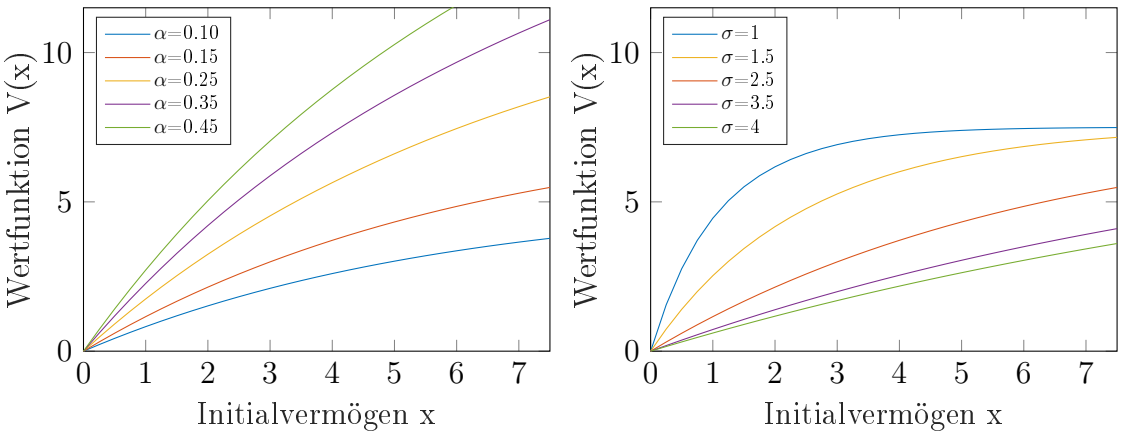
$$\mu = 0.5,\ \delta = 2\%,\ \rho = 1\%$$

Optimale Barriere b^*					
σ	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.35$	$\alpha = 0.45$
1	1.63349	2.09372	2.76608	3.32828	3.88025
1.5	1.78636	2.71472	4.01963	5.03899	5.95289
2.5	0	1.41914	4.25681	6.30928	8.00039
3.5	0	0	1.45585	4.65121	7.18173
4	0	0	0	2.87794	5.84642

Tabelle 6.1: Optimale Barrieren mit $\rho = 1\%$ und $\delta = 2\%$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Wir erkennen aus der Tabelle, dass je kleiner die Dividendenrate α ist, desto niedriger wird auch die optimale Barriere b^*. Bei σ steigt die Barriere zuerst an und fällt dann wieder in Richtung 0.
Zu einer gegebenen Barriere b^* können wir nun die Wertfunktion $V(x)$, abhängig von einem Initialvermögen x, bestimmen. Die folgende Grafik soll die Wertfunktion $V(x)$ in unterschiedlichen α und σ illustrieren. In 6.1a steigt die Wertfunktion mit größerem α schneller an. Während in 6.1b erkennbar ist, dass die Wertfunktion mit größerem σ langsamer steigt.



(a) $\sigma = 2.5$ fest (b) $\alpha = 0.15$ fest

Abbildung 6.1: Wertfunktion $V(x)$ mit $\mu = 0.5$, $\delta = 2\%$, $\rho = 1\%$

In der aktuellen Niedrigzinsphase sind risikolose Verzinsungen von 1% entweder sehr optimistisch gewählt oder nur durch Wertpapiere mit langfristiger Dauer möglich. Eine Verzinsung 0.5% entspricht eher der Realwirtschaft, die auch der Privatanleger durch beispielsweise ein Tages- oder Festgeldkonto erwirtschaften kann. Die folgende Tabelle soll die optimale Barriere b^* mit folgenden Parameter illustrieren:

$$\mu = 0.5,\ \delta = 2\%,\ \rho = 0.5\%$$

Optimale Barriere b^*					
σ	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.35$	$\alpha = 0.45$
1	1.63503	2.10301	2.79128	3.36982	3.93118
1.5	1.75159	2.69083	4.02003	5.05965	5.97672
2.5	0	1.18543	3.98613	6.00996	7.65313
3.5	0	0	0.83564	3.87298	6.25442
4	0	0	0	1.90575	4.65849

Tabelle 6.2: Optimale Barrieren mit $\rho = 0.5\%$ und $\delta = 2\%$

Vergleicht man 6.1 und 6.2 kann man erkennen, dass die Werte der optimale Barriere mit in Richtung kleinere σ zusammengestaucht werden. Das würde bedeuten, dass durch einen kleiner werdenden Zinssatz bei großen σ die Barrieren niedriger werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

In der nachfolgenden Tabelle stellen wir Wertfunktionen $V(x)$ mit zwei unterschiedlichen Initialvermögen x gegenüber. Insgesamt erkennen wir, dass bei größerem ρ auch mehr Dividenden ausgeschüttet werden.

$V(x)$	$x = 2$		$x = 5$	
α	$\rho = 0.5\%$	$\rho = 1\%$	$\rho = 0.5\%$	$\rho = 1\%$
0.10	1.46839	1.51718	2.92387	3.01410
0.15	2.06759	2.14454	4.18120	4.32648
0.25	3.09157	3.24524	6.32510	6.61141
0.35	3.95575	4.20680	8.09533	8.57128
0.45	4.67268	5.04018	9.56250	10.2692

Tabelle 6.3: Vergleich der Wertfunktion $V(x)$ mit unterschiedlichen ρ

6.2 Realisierung eines Unternehmensverlaufs

Abschließend wollen wir die theoretischen Resultate auch durch Simulation eines Unternehmensverlaufs bestätigen lassen. Wir stellen die Ergebnisse der Simulation eines Unternehmensverlaufs, der exakt ausgerechneten Werte gegenüber. Hierbei legen wir den Zeithorizont auf $T = 200$ und die Diskontierungsrate absichtlich auf 15% fest, um zum Einen den Zeitraum möglichst lang zu wählen und zum Anderen diskontierte Werte der späteren Zeitpunkte vernachlässigbar werden zu lassen. Unter diesen Bedingungen ist eine sehr hohe Anzahl an Simulationen der Unternehmensverläufe effektiv möglich. Wir werden also $N = 100000$ Simulationen in einem Vorgang durchführen.
Wir wählen des Weiteren $n = 100000$ um den Zeitraum in möglichst feine äquidistante Intervalle $\frac{T}{n}$ zu diskretisieren. Mit der Diskretisierung gilt für die Inkremente der Brownschen Bewegung $W_{j\frac{T}{n}} - W_{j+1\frac{T}{n}} \sim N(0, \frac{T}{n})$. Der Zustandsprozess wird folgendermaßen realisiert:
Für $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$X_{(j+1)\frac{T}{n}} = X_j + (\mu + \rho * X_{j\frac{T}{n}}) * \frac{T}{n} + \sqrt{\frac{T}{n}} * \sigma * N,$$
$$X_1 = x.$$

Die Variable N stellt eine standardnormalverteilte Zufallsvariable dar, die über die MATLAB-Funktion *randn* erzeugt wird. Die folgenden Parameter wurden für die Simulationen festgelegt:

$$\mu = 5,\ \sigma = 2.5,\ \alpha = 4.5,\ \delta = 15\%,\ \rho = 1\%$$

Als erstes wollen wir die Optimalität der optimalen Barriere b^* bestätigen. Wir legen hierbei das Initialvermögen auf $x = 0.5$ fest. Die geschlossene Formel für die optimale Barriere und der Wertfunktion liefern uns:

$$b^* = 3.2219, \quad V_{b^*}(x) = 14.0897.$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

In der nachfolgenden Abbildung sehen wir zum Einen die exakte Wertfunktion $V(x)$ und zum Anderen die simulierte Wertfunktion $\hat{V}(x)$ in unterschiedlichen Barrierehöhen. Der Wert mit der optimalen Barriere ist explizit gekennzeichnet. Man erkennt, dass sowohl die exakte Wertfunktion als auch die simulierte Wertfunktion ihr Maximum an der optimalen Barriere $b^* = 3.2219$ annehmen.

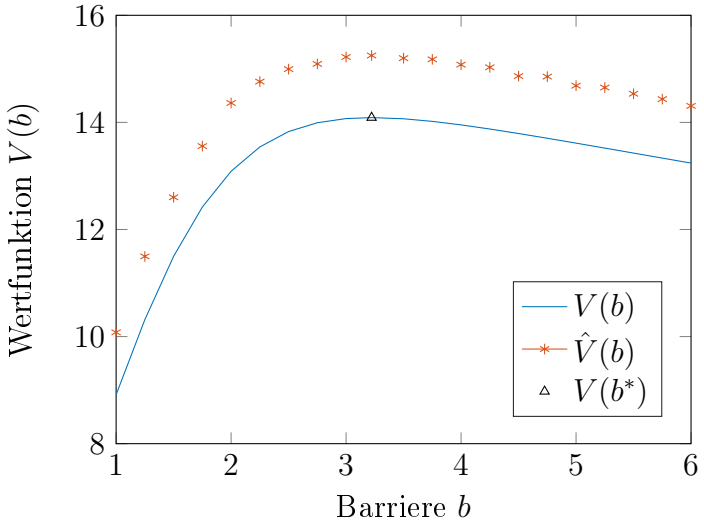


Abbildung 6.2: Simulation und exakte Auswertung der Wertfunktion mit unterschiedlichen Barrieren

Man erkennt die offensichtliche Abweichung der simulierten Ergebnisse von den exakten Werte. An der Stelle der optimalen Barriere weisen wir einen relativen Fehler auf von

$$\frac{|\hat{V}(b^*) - V(b^*)|}{V(b^*)} = \frac{\Delta_{V(b^*)}}{V(b^*)} \approx 8.23\%$$

mit $\hat{V}(b^*) = 15.2492$. Wenn man das Gesamtbild betrachtet ist die Abweichung insofern akzeptabel, weil die Simulationen sich den exakten Werten homogen annähern. Zum Abschluss vergleichen wir noch Wertfunktionen mit unterschiedlichem Initialvermögen x.

x	$V(x)$	$\hat{V}(x)$
0.5	14.0897	15.2492
1	20.5324	21.0671
1.5	23.5924	23.8623
2	25.1590	25.3127
2.5	26.0684	26.1891
3	26.6905	26.7163
4	27.6105	27.6685
5	28.2781	28.3170

Tabelle 6.4: Vergleich der Wertfunktion $V(x)$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Wir bemerken an den Ergebnissen sehr gut, dass mit größeren Initialvermögen, die relative Abweichung immer geringer ausfällt.

$$\frac{\Delta_{V(1)}}{V(1)} \approx 2,6\%, \quad \frac{\Delta_{V(2)}}{V(2)} \approx 0,61\%, \quad \frac{\Delta_{V(5)}}{V(5)} \approx 0,14\%$$

Dies erklärt sich dadurch, dass bei betragsmäßig größerer Differenz von Initialvermögen und Barriere, der Versicherungsverlauf volatiler und die Ruinwahrscheinlichkeit größer wird. Ist das Initialvermögen in der Nähe der Barriere oder sogar größer, so ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass das Unternehmen anfänglich Dividenden ausschüttet.

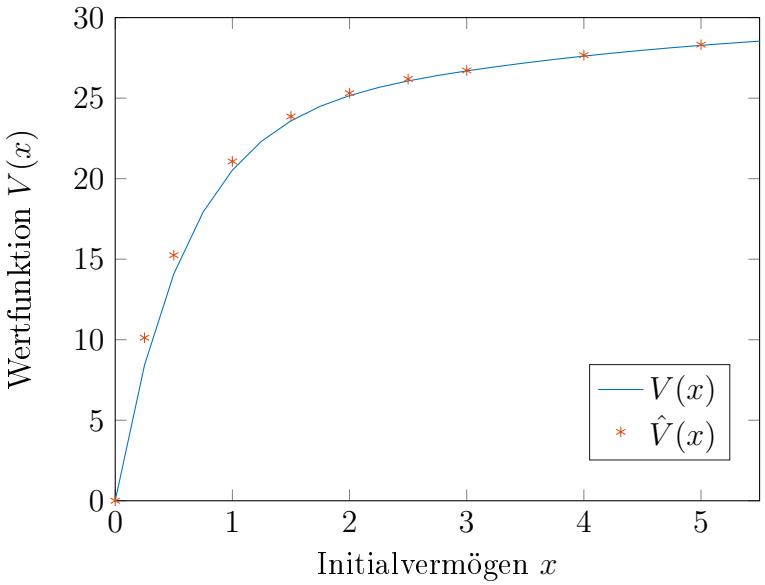


Abbildung 6.3: Wertfunktionen Vergleich mit unterschiedlichen Initialvermögen

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Anhang A

Matlab-Codes

Dieser Abschnitt dient zur Auflistung aller MATLAB Codes die zur Simulation verwendet wurden.

Die Folgenden Funktionen sind die Lösungen der Kummerschen DGL (5.9)-(5.11).

```
function outf1 = f1(rho,sigma,mu,delta,x)
outf1 = exp(-(1/(rho*sigma^2))*(mu+rho*x)^2)*...
        kummerU(1/2+(delta/(2*rho)),1/2,...
        (1/(rho*sigma^2))*(mu+rho*x)^2);
end

function outf2 = f2(rho,sigma,mu,delta,x)
outf2 = (mu+rho*x)*exp(-(1/(rho*sigma^2))*(mu+rho*x)^2)*...
        hypergeom(1+(delta/(2*rho)),3/2,...
        (1/(rho*sigma^2))*(mu+rho*x)^2);
end

function outf3 = f3(rho,sigma,mu,alpha,delta,x)
outf3 = exp(-(1/(rho*sigma^2))*(mu-alpha+rho*x)^2)*...
        kummerU(1/2+(delta/(2*rho)),1/2,...
        (1/(rho*sigma^2))*(mu-alpha+rho*x)^2);
end

function outdf1 = df1(rho,sigma,mu,delta,x)
outdf1 = -(2/sigma^2)*(mu+rho*x)*exp(-(1/(rho*sigma^2))*...
         (mu+rho*x)^2)*kummerU(1/2+(delta/(2*rho)),3/2,...
         (1/(rho*sigma^2))*(mu+rho*x)^2);
end

function outdf2 = df2(rho,sigma,mu,delta,x)
outdf2 = rho*exp(-(1/(rho*sigma^2))*(mu+rho*x)^2)*...
         hypergeom(delta/(2*rho),1/2,...
         (1/(rho*sigma^2))*(mu+rho*x)^2);
end

function outdf3 = df3(rho,sigma,mu,alpha,delta,x)
outdf3 = -(2/sigma^2)*(mu-alpha+rho*x)*exp(-(1/...
```


TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

```
        (rho*sigma^2))*(mu-alpha+rho*x)^2)*...
        kummerU(1/2+(delta/(2*rho)),3/2,...
        (1/(rho*sigma^2))*(mu-alpha+rho*x)^2);
end

function outh = h(rho,sigma,mu,delta,x)
outh = f1(rho,sigma,mu,delta,0)*f2(rho,sigma,mu,delta,x)-...
       f2(rho,sigma,mu,delta,0)*f1(rho,sigma,mu,delta,x);
end

function outdh = dh(rho,sigma,mu,delta,x)
outdh = f1(rho,sigma,mu,delta,0)*df2(rho,sigma,mu,delta,x)-...
        f2(rho,sigma,mu,delta,0)*df1(rho,sigma,mu,delta,x);
end
```

Die folgenden Funktion sind die Codes zur Bestimmung der optimalen Barriere und der Wertfunktion.

```
function cond = bed(rho,sigma,mu,alpha,delta)
cond = f3(rho,sigma,mu,alpha,delta,0)/...
       df3(rho,sigma,mu,alpha,delta,0)+...
       alpha/delta;
end

function b = getb(rho,sigma,mu,alpha,delta,x)
         format long
    b = f3(rho,sigma,mu,alpha,delta,x)/...
        df3(rho,sigma,mu,alpha,delta,x)-...
        h(rho,sigma,mu,delta,x)/dh(rho,sigma,mu,delta,x)...
        +alpha/delta;
end

function nullstelle = bisektion(rho,sigma,mu,alpha,delta,a,b)
    format long;
    eta = 0.000001;
    i=0;

    if getb(rho,sigma,mu,alpha,delta,b)*...
       getb(rho,sigma,mu,alpha,delta,a) < 0
        while(abs(b-a)>eta)
            if getb(rho,sigma,mu,alpha,delta,(a+b)/2)*...
               getb(rho,sigma,mu,alpha,delta,a) > 0
                a=(a+b)/2;
            else
                b=(a+b)/2;
            end
                i=i+1;
        end
        nullstelle=(a+b)/2;
end
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

```
function outv0 = v0(rho,sigma,mu,alpha,delta,x)
    outv0 = (alpha/delta)*(1-(f3(rho,sigma,mu,alpha,delta,x)/...
            f3(rho,sigma,mu,alpha,delta,0)));
end

function outvb = vb(b,rho,sigma,mu,alpha,delta,x)
    if x <= b
    outvb = (alpha/delta)*(df3(rho,sigma,mu,alpha,delta,b)...
            *h(rho,sigma,mu,delta,x))/(df3(rho,sigma,mu,alpha,...
            delta,b)*h(rho,sigma,mu,delta,b)-f3(rho,sigma,...
            mu,alpha,delta,b)*dh(rho,sigma,mu,delta,b));
    elseif x > b
    outvb = (alpha/delta)+(alpha/delta)*(dh(rho,sigma,mu,...
            delta,b)*f3(rho,sigma,mu,alpha,delta,x))/...
            (df3(rho,sigma,mu,alpha,delta,b)*h(rho,sigma,...
            mu,delta,b)-f3(rho,sigma,mu,alpha,delta,b0)*...
            dh(rho,sigma,mu,delta,b));
    end
end
```

Der folgende Code wird zur Realisierung eines Unternehmensverlaufs verwendet.

```
function [outVsim, outVarV] = Vsim(init,b,rho,sigma,mu,alpha,delta,T,n,N)

dt = T/n;
alphadt = alpha*dt;
deltadt = delta*dt;

for i = 1:N

x(1) = init;
u(1) = 0;

if x(1) >= b
u(1) = alphadt; %
x(1) = x(1)-alphadt; %
end

for j = 1:n
    incx = inc(x(j),rho,sigma,mu,dt);
    if(x(j)>=0)
        x(j+1)=x(j)+incx;
        if(x(j+1)<b)
            u(j+1)=0;
        else
            u(j+1)=alphadt*(exp(-deltadt*j));
            x(j+1)=x(j+1)-alphadt;
        end
    else
        x(j+1)=0;
```

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

```
            u(j+1)=0;
            C(i)=1;
            break
        end
    end
        D(i)=sum(u);
    clear u
    clear x
    end
        outVsim = sum(D)/N
    end

    function outinc = inc(x,rho,sigma,mu,dt)
        outinc = (mu+rho*x)*dt+sqrt(dt)*sigma*randn;
    end
```

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Literaturverzeichnis

[1] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, United States Department of Commerce, US Government Printing Office, Washington, DC, USA, 1972

[2] S. ASMUSSEN, M, TAKSAR: *Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out*, Department of Mathematical Statistics, University of Lund, Lund, Sweden, SUNY, Stony Brook, USA, 1997

[3] S. ASMUSSEN *Ruin Probabilities*, World Scientific Publishing Company, Singapur, 2000

[4] L. BREIMAN *Probability*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, 1968

[5] T. DECK: *Der Itô-Kalkül*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006

[6] M. DENUIT, J. DHAENE, M. GOOVAERTS, R. KAAS: *Modern Actuarial Risk Theory, Using R*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008

[7] Y. FANG, R. WU: *Optimal dividends in the Brownian motion risk model with interest*, Department of Mathematics and LPMC, Nankai University, Tianjin, PR China

[8] H. GERBER: *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelphia, 1979

[9] B. ØKSENDAL: *Stochastic Differential Equations*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2007

[10] H. PHAM: *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, 2009 Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2009

[11] P. PROTTER: *Stochastic Integration and Differential Equations*, Second Edition, Version 2.1, Springer-Verlag, Berlin, 2005

[12] H. SCHMIDLI *Stochastic Control in Insurance*,Springer-Verlag, London, 2008

[13] L. J. SLATER *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1960

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.