



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

## DIPLOMARBEIT

### Grundlagen der Netzplantechnik für Schule und Praxis

Ausgeführt am Institut für  
Diskrete Mathematik und Geometrie  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von Univ. Prof. Dr. Dietmar Dorninger

durch

Tanja Best  
4600 Wels, Sauerbruchstr. 9/b

Wels, 1. März 2010

## **Danksagung**

An dieser Stelle möchte ich all jenen meinen Dank aussprechen, die mich durch mein Studium begleitet haben.

Allen voran meine Eltern Ursula BEST und Alfred RADINGER, die mich durch alle Höhen und Tiefen hindurch unterstützt und bestärkt haben. Meinem Vater möchte ich überdies auf diese Weise noch einmal für die große Unterstützung beim Korrekturlesen meiner Diplomarbeit danken.

Ebenso danke ich Roland IGELSBÖCK, der während meines gesamten Studiums immer ein offenes Ohr für mich hatte und mich mit Rat und Tat unterstützt hat.

Ein großer Dank gebührt auch Herrn Univ. Prof. Dr. Dietmar DORNINGER, der mir beim Verfassen meiner Diplomarbeit mit vielen guten Hinweisen und Tipps zur Seite gestanden ist.

Natürlich möchte ich auch allen anderen Professoren/innen und meinen vielen lieben Studienkollegen/innen danken, durch die ich meine Studienzeit stets in guter Erinnerung behalten werde.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b> .....	4
<b>2. Grundlagen der Netzplantechnik</b> .....	6
<b>2.1. Problemstellung und Zielsetzung</b> .....	6
<b>2.2. Grundbegriffe</b> .....	7
<b>2.3. Historische Entwicklung</b> .....	13
<b>3. Mathematische Grundlagen</b> .....	15
<b>3.1. Graphentheorie</b> .....	15
<b>3.2. Stochastische Grundlagen</b> .....	31
<b>3.3. Lineare Optimierung</b> .....	42
<b>4. Ausgewählte Typen der Netzplantechnik</b> .....	56
<b>4.1 Critical Path Method („CPM“)</b> .....	56
<b>4.1-a Grundbegriffe und Zielsetzungen</b> .....	56
<b>4.1-b Strukturplanung – Aufstellen eines CPM-Netzplans</b> .....	57
<b>4.1-c Zeitplanung</b> .....	62
<b>4.1-d Kostenplanung</b> .....	70
<b>4.1-e Kapazitätsplanung</b> .....	80
<b>4.2 Metra-Potential-Method („MPM“)</b> .....	84
<b>4.2-a Grundbegriffe und Zielsetzungen</b> .....	84
<b>4.2-b Strukturplanung – Aufstellen eines MPM-Netzplans</b> .....	85
<b>4.2-c Zeitplanung</b> .....	90
<b>4.3 Program Evaluation and Review Technique (PERT)</b> .....	97
<b>4.3-a Grundbegriffe und Zielsetzungen</b> .....	97
<b>4.3-b Strukturplanung – Aufstellen eines PERT-Netzplans</b> .....	98
<b>4.3-c Zeitplanung</b> .....	99
<b>4.3-d Unsicherheiten und Fehler bei der Verwendung von PERT</b> .....	106
<b>5. Einsatz in der Praxis</b> .....	109
<b>5.1 Überlegungen zur Sinnhaftigkeit und Rentabilität des Einsatzes der         Netzplantechnik bei Projekten</b> .....	109
<b>5.2 Praxisbeispiele für den Einsatz der Netzplantechnik</b> .....	113
<b>6. Bemerkungen zum Einsatz im Mathematikunterricht</b> .....	121
<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	124
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	127
<b>Quellenverzeichnis</b> .....	131

## 1. Einleitung

### **Grundlagen der Netzplantechnik für Schule und Praxis**

Die folgenden Erläuterungen, mathematischen Hintergründe, Beispiele, ... sollen allen Interessierten einen Einblick in das große Gebiet der Netzplantechnik bieten. Neben der Zielgruppe der „Praktiker/innen“, die sich Grundlagen der Netzplantechnik für die konkrete Planung und Durchführung eines Projekts aneignen möchten, sollen vor allem auch interessierte Lehrer/innen angesprochen werden, die das praxisrelevante und durchaus in der Schule umsetzbare Thema Netzplantechnik in ihren Mathematikunterricht einbauen möchten bzw. laut Lehrplan müssen. Zielsetzung der Diplomarbeit war es, darin alle Inhalte aufzubereiten, über die ein/e Lehrer/in Bescheid wissen muss, um das Thema Netzplantechnik kompetent im Unterricht behandeln zu können. Bei den Ausführungen handelt es sich um Informationen für die Lehrkraft und **nicht** um für den Unterricht geeignetes Material.

Bevor die themenspezifischen Aspekte erläutert werden, sollen in Kapitel 2 – *Grundlagen der Netzplantechnik* einige grundlegende Fragen zu dieser Technik beantwortet werden: Was ist Netzplantechnik? Wozu brauche ich sie? Welche Ziele habe ich beim Einsatz von Netzplantechnik? ... Darüber hinaus sollen auch schon einige ganz grundlegende Definitionen von wichtigen Begriffen wie Netzplantechnik, Netzplan, Vorgang, Ereignis,... gegeben werden. Dieser Abschnitt richtet sich daher eher an Leser/innen, denen das Thema noch relativ fremd ist.

Das Kapitel 3 – *Mathematische Grundlagen* behandelt für die Netzplantechnik relevante Themen, die ein/e Lehrer/in als Hintergrundwissen kennen und beherrschen sollte, um den SchülerInnen Netzplantechnik korrekt und professionell vermitteln zu können. Noch einmal – es handelt sich hierbei nicht um mathematische Inhalte, die im Unterricht direkt vermittelt werden sollen und können, sondern um einen für den/die Lehrer/in notwendigen Level über dem Unterrichtsniveau. Auch für den/die Praktiker/in stellt dieses Kapitel eine notwendige Verständnisgrundlage beim praktischen Einsatz der Netzplantechnik dar. Es werden sowohl mathematische Grundlagen erläutert, als auch Begründungen für viele wichtige, in der konkreten Planung verwendete, Algorithmen gegeben.

Das Kapitel 4 – *Ausgewählte Typen der Netzplantechnik* bietet dem/der Leser/in die Möglichkeit sich über die bekanntesten Arten der Netzplantechnik (CPM, MPM, PERT) zu

informieren. Dabei steht die Beantwortung der Fragen „Wie erstelle ich einen Netzplan?“ und „Wie kann ich zur Planung notwendige Berechnungen anstellen?“ im Vordergrund.

Auch in der schulischen Anwendung sollen diese verschiedenen Typen der Netzplantechnik thematisiert werden. Die Ausführungen dazu sind allerdings für den Lehrenden gedacht und erst auf ein Schullevel zu transformieren.

Das Kapitel 5 – *Einsatz in der Praxis* soll die Vielfalt der Einsatzmöglichkeiten der Netzplantechnik in der Praxis aufzeigen. Gleichzeitig sollen aber auch Grenzen der Möglichkeiten und Überlegungen zu Sinnhaftigkeit und Rentabilität des Einsatzes der Netzplantechnik angestellt werden. Sowohl diese Überlegungen, als auch die Auswahl konkret durchgeführter Projektplanungen sollen im schulischen Kontext eher zur Information der Lehrkraft dienen. Einige Teilaspekte daraus können und sollen den Unterricht aber natürlich bereichern, da sie eine Anwendung der Mathematik in der „Realität“ aufzeigen. Gerade das wird von Seiten der Schüler/innen so oft eingefordert und leider fast ebenso oft nicht aufgezeigt.

Schlussendlich werden im Kapitel 6 – *Bemerkungen zum Einsatz im Mathematikunterricht* Überlegungen zur schulischen Relevanz des Themas angestellt. Dabei geht es vor allem darum, in welchen Kontexten eine Behandlung des Themas Netzplantechnik sinnvoll sein kann und welche Themen sich als Ausgangspunkt für die Netzplantechnik im Unterricht eignen.

Nach der Lektüre der gesamten Ausführungen sollte der/die Leser/in einen Überblick über die Netzplantechnik in Theorie und Praxis haben. Den interessierten Lehrkräften sollte die Diplomarbeit eine Grundlage zur Gestaltung ihres Unterrichts vermitteln.

## **2. Grundlagen der Netzplantechnik**

### **2.1. Problemstellung und Zielsetzung <sup>1</sup>**

Die Netzplantechnik ist seit Beginn ihrer Entwicklung ein wichtiges und wirksames Mittel zur Planung von Projekten, wie zum Beispiel Bauvorhaben, Entwicklungsaufgaben, und vielem mehr. Für jedes individuelle Projekt wird mittels Netzplantechnik eine optimale Planung und Überwachung der Ausführung, zumeist auch unter Berücksichtigung der anfallenden Kosten, ermittelt.

Das Grundkonzept ist einfach erklärt:

- Im ersten Schritt wird das gesamte Projekt, bzw. der Projektablauf in viele einzelne Vorgänge zerlegt.
- Im Folgenden werden die Abhängigkeiten zwischen den Einzelschritten analysiert.
- Graphisch können diese Abhängigkeiten dann übersichtlich in einem Netzplan dargestellt werden.

Welchen Zweck erfüllt der Einsatz der Netzplantechnik in der Planung, Umsetzung und Überwachung von Projekten?

1. Logische Zusammenhänge des Projekts können übersichtlich dargestellt werden
2. Aktivitäten innerhalb des Projekts, deren Dauer eine direkte Auswirkung auf die Gesamtdauer und Kosten des Projekts haben, sind leicht zu erkennen.
3. Für alle Aktivitäten eines Projekts kann mittels Netzplantechnik ein Zeit- oder auch Kostenplan erstellt werden.

Gegenüber anderen Planungstechniken bietet die Netzplantechnik den großen Vorteil, dass nicht vor Beginn des Projekts ein Plan erstellt wird, der erst nach Vollendung überprüft werden kann, sondern dass der Netzplan eine gute Basis für eine laufende Projektkontrolle und Terminüberwachung ist. Auch bietet sich die Möglichkeit, während des Projekts Änderungen des geplanten Ablaufs in die Planung mit einzubeziehen.

<sup>1</sup> Vgl. [15], [39], [44], [54]

Durch den Einsatz der Netzplantechnik können folgende Fragen in den entsprechenden Projektstadien beantwortet werden:

<i>Projektstadium</i>	<i>Zu beantwortende Fragen</i>
vor dem Projektstart	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Wie lange wird das gesamte Projekt dauern?</li> <li>- Welche Aktivitäten (Vorgänge) können das Projekt verzögern, wenn sie nicht rechtzeitig fertig gestellt werden?</li> <li>- Welche Kosten fallen an?</li> <li>- Welche Kapazitäten stehen zur Verfügung?</li> </ul>
während der Durchführung des Projekts	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Entspricht der derzeitige Projektzustand dem Zeitplan?</li> <li>- Was kann ich machen, um das Projekt zu beschleunigen? Wie kann ich diese Beschleunigung mit möglichst geringem Kapazitäts- und Kostenaufwand erreichen?</li> </ul>

**Abb.2.1.1** Anwendungsgebiete der Netzplantechnik in den einzelnen Projektphasen

Das primäre Ziel der Netzplantechnik ist, die logischen Beziehungen zwischen den Vorgängen des Projekts und der zeitlichen Lage der Vorgänge zu analysieren und dadurch eine wirkungsvolle Planung des Gesamtprojekts zu ermöglichen.

## 2.2. Grundbegriffe<sup>2</sup>

Das Deutsche Institut für Normung hat in seinem Normblatt 69 900 für "Projektmanagement - Netzplantechnik; Beschreibungen und Begriffe" Definitionen für die wichtigsten Begriffe der Netzplantechnik veröffentlicht. Diese werden im Folgenden verwendet und teilweise noch durch andere Formulierungen ergänzt und erklärt.

### **Def. 2.2.1 Netzplantechnik** (Kurzzeichen NPT) (nach Normblatt DIN 69 900)

Alle Verfahren zur Analyse, Beschreibung, Planung, Steuerung, Überwachung von Abläufen auf der Grundlage der Graphentheorie, wobei Zeit, Kosten, Einsatzmittel und weitere Einflussgrößen berücksichtigt werden können.

<sup>2</sup> Vgl. [23], [27], [44], [54]

Der Begriff Netzplantechnik ist also ein Sammelbegriff, der alle Methoden der Struktur-, Zeit- und Termin-, Kosten- und Kapazitätsplanung denen die Graphentheorie zu Grunde liegt, umfasst. Je nach Aufgabenstellung können also Einflussgrößen wie Zeit, Kosten, Einsatzmittel oder Kapazitäten berücksichtigt werden  
Davon zu unterscheiden ist der Begriff des Netzplans:

**Def. 2.2.2 Netzplan** (nach Normblatt DIN 69 900)

Graphische oder tabellarische Darstellung von Abläufen und deren Abhängigkeiten.

Die Abhängigkeiten innerhalb des Projekts, die durch den Einsatz der Netzplantechnik identifiziert werden konnten, werden in Form eines Netzplans dargestellt.

Um einen Netzplan erstellen zu können, muss das Gesamtprojekt in viele einzelne Vorgänge zerlegt werden.

**Def. 2.2.3 Vorgang** (nach Normblatt DIN 69 900)

Zeiterforderndes Geschehen mit definiertem Anfang und Ende.

Ein Vorgang ist im Sinne der Netzplantechnik eine abgegrenzte Arbeitseinheit, also ein Element eines Projekts, das ein bestimmtes Geschehen beschreibt. Im Projektmanagement verwendet man statt Vorgang den Begriff Arbeitspaket. Ein solcher Vorgang kann zum Beispiel „Anziehen der Socken“ im Projekt „Ankleiden“, oder „Baugrube ausheben“ im Projekt „Hausbau“ sein. Ein Vorgang hat immer eine Zeitdauer, einen definierten Beginn und ein Ende. Der Beginn und das Ende jedes Vorgangs werden in der Netzplantechnik als Ereignisse bezeichnet.

**Def. 2.2.4 Ereignis** (nach Normblatt DIN 69 900)

Eintreten eines definierten Zustands im Ablauf.



In den oben angeführten Beispielen, wären solche Ereignisse „Beginn des Socken Anziehens“, „Socken angezogen“, „Beginn der Baggararbeiten“ und „Fertigstellung der Baugrube“.

Um nun einen Netzplan erstellen zu können, bedarf es noch einer Ordnung sämtlicher Vorgänge und Ereignisse des Projekts.

**Def. 2.2.5 Anordnungsbeziehung** (Kurzzeichen AOB) (nach Normblatt DIN 69 900)

Quantifizierbare Abhängigkeiten zwischen Ereignissen oder Vorgängen.

Die Gesamtheit der Anordnungsbeziehungen bildet den Netzplan. Grob kann die Erstellung eines Plans mit Hilfe der Netzplantechnik in zwei Phasen unterschieden werden. Erstere ist die sogenannte Strukturanalyse, in der genau die oben definierten Anordnungsbeziehungen innerhalb des Projekts ermittelt werden. Erst danach kann eine Zeitanalyse durchgeführt werden. Hierbei geht es um die Feststellung der Dauer der Vorgänge und schlussendlich des ganzen Projekts. Ebenso können daraus Zeitpunkte oder Termine für die einzelnen Ereignisse während des Projekts festgelegt werden. Darüber hinaus können dann je nach Aufgabenstellung auch noch Kosten- oder Kapazitätsüberlegungen miteinbezogen werden.

Für die graphische Darstellung des Netzplans werden typischerweise Knoten und Pfeile verwendet.

**Def. 2.2.6 Knoten** (nach Normblatt DIN 69 900)

Verknüpfungspunkt im Netzplan.

**Def. 2.2.7 Pfeil** (nach Normblatt DIN 69 900)

Gerichtete Verbindung zwischen zwei Knoten  
(in der Graphentheorie als gerichtete Kante bezeichnet).

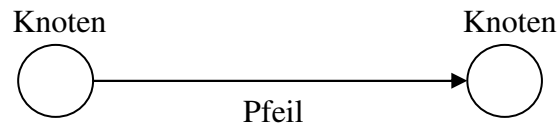


Abb.2.2.1 Knoten und Pfeil

In einem Netzplan geht es aber weniger um die einzelnen Knoten und Pfeile, sondern vielmehr um sogenannte Wege.

**Def. 2.2.8 Weg** (nach Normblatt DIN 69 900, zur genauen mathematischen Definition siehe Kapitel 3.1)

Durch einen oder mehrere aufeinander folgende Pfeile hergestellte Verbindung zweier Knoten.

Ein Weg kann also einen Teil eines Projekts beschreiben, zum Beispiel vom Beginn des Hausbaus bis zur Fertigstellung des Rohbaus, oder auch das gesamte Projekt. Besonders wichtig ist der Begriff des kritischen Wegs bzw. der kritischen Aktivitäten.

**Def. 2.2.9 Kritischer Weg und kritische Aktivitäten** (Zur genauen mathematischen Definition der Länge eines Weges siehe Kapitel 3.1)

Der kritische Weg bezeichnet den „längsten Weg“ zwischen zwei Knoten. Kritische Aktivitäten sind alle Vorgänge, die auf diesem kritischen Weg liegen.

Mit Hilfe des kritischen Wegs kann man die mindest erforderliche Projektdauer angeben. Um den Zeitplan einhalten zu können, müssen die kritischen Aktivitäten aber auf jeden Fall plangerecht durchgeführt werden und dürfen sich nicht verzögern.

In Abbildung 2.2.2 wird dies anhand eines einfachen Beispiels gezeigt (Beschriftung der Pfeile: Dauer des Vorgangs). Der kritische Weg ist durch dickere Pfeile gekennzeichnet. Die kritischen Aktivitäten sind die Vorgänge  $V_{12}$ ,  $V_{26}$  und  $V_{68}$  ( $V_{ij}$  ... Pfeil mit dem Anfangsknoten  $i$  und dem Endknoten  $j$ ). Diese dürfen sich also auf keinen Fall verzögern, wenn man eine Gesamtprojektdauer von 13 Zeiteinheiten einhalten möchte.

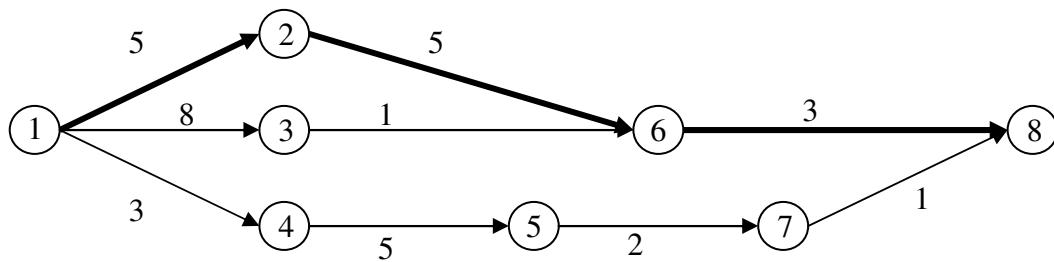


Abb.2.2.2 Beispiel „Kritischer Weg“

Bei der Zuordnung von Sachaussagen zu den graphischen Elementen Pfeil und Knoten müssen Unterscheidungen getroffen werden. Netze können nach verschiedenen Arten dargestellt werden. Die bekanntesten und gängigsten Arten von Netzplänen sollen im Folgenden kurz und ohne mathematische Strenge erläutert werden.

### 1. Vorgangspfeil-Netzpläne (kurz VPN)

Dabei werden Vorgänge beschrieben und durch Pfeile dargestellt. Die Knoten kennzeichnen Beginn und Ende der Vorgänge und geben dadurch auch die logische Reihenfolge vor. Ein Beispiel für Vorgangspfeil-Netzpläne ist die „Critical Path Method“ kurz CPM, die in Kapitel 4.1 näher erläutert wird.

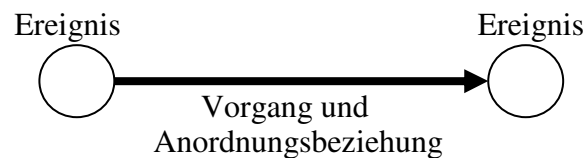


Abb.2.2.3 Vorgangspfeil-Netzplan

### 2. Vorgangsknoten-Netzpläne (kurz VKN)

Auch hier werden Vorgänge beschrieben aber im Gegensatz zum ersten Fall als Knoten dargestellt. Die Pfeile fungieren zur Kennzeichnung von Anordnungs- und Reihenfolgenbeziehungen. Das bekannteste und meistverwendetste Beispiel dafür ist die „Metra-Potential-Method“ kurz MPM (näheres zu dieser Methode in Kapitel 4.2)



Abb.2.2.4 Vorgangsknoten-Netzplan

### 3. Ereignisknoten-Netzpläne (kurz EKN)

In diesen Netzplänen werden nur Zustände der Aufgabe (Ereignisse) beschrieben, die durch eine Anordnungsbeziehung verknüpft werden. „Program Evaluation and Review Technique“ kurz PERT ist als Beispiel für Ereignisknoten-Netzpläne in Kapitel 4.3 ausführlich beschrieben.



Abb.2.2.5 Ereignisknoten-Netzplan

Übersichtlich kann man diese drei „Hauptarten“ von Netzplantechnik darstellen:

Darstellungselemente \ Sachaussagen	Pfeil	Knoten
Vorgang	Vorgangs-Pfeil-Netz	Vorgangs-Knoten-Netz
Ereignis		Ereignis-Knoten-Netz

Abb.2.2.6 Arten von Netzplänen (siehe [23] )

Es gibt noch viele weitere Typen von Netzplantechnik, die in der Praxis aber eher selten zum Einsatz kommen. Als Beispiele seien hier die Entscheidungs-Netzpläne (ENP) und die Graphical Evaluation and Review Technique (GERT) genannt. Entscheidungs-Netzpläne

basieren auf Vorgangspfeil-Netzwerken, enthalten aber zusätzlich ein stochastisches Element. Die Graphical Evaluation and Review Technique erlaubt neben Berechnungen der Netzwerklogik auch Schätzungen aus vergangenen Vorgangsdauern. Das amerikanische Project Management Institute (PMI) empfiehlt die Anwendung von GERT allerdings nicht, da die Grundlagen des Verfahrens nicht mehr als allgemeingültig betrachtet werden können.

### **2.3. Historische Entwicklung<sup>3</sup>**

Erste Verfahren, die der Netzplantechnik zugeschrieben werden können, wurden bereits Mitte der 1950er Jahre entwickelt. Den Beginn bildete die E.I. du Pont de Nemours & Company, die damals größte und umsatzstärkste chemische Industrieunternehmung. Sie gab der unternehmenseigenen Integrated Engineering Control Group 1956 den Auftrag, eine effektive Methode der Planung und Überwachung des Baus von neuen Betrieben, sowie der Instandhaltungs- und Reparaturarbeiten zu entwickeln (vgl. Thumb 1968, S.27). Vor allem der zweite Auftrag war für das Unternehmen von besonders bedeutender finanzieller Wichtigkeit. Ein Produktionsstopp für notwendige Instandhaltungs- und Reparaturarbeiten an den Geräten bedeutet pro Stunde einen immensen Produktionsausfall.

Bereits 1957 konnte ein erstes Verfahren zur Netzwerk-Zeitplanung vorgestellt werden. Das von Morgan R. Walker und James E. Kelley jr. entwickelte „Project Planning and Scheduling System“ (kurz PPSS). Die Zeitplanung erfolgte mit Hilfe eines Pfeildiagramms und der Berechnung des kritischen Weges. Somit enthielt es die zentralen Aspekte der Netzplantechnik und findet bis heute, in vielfach überarbeiteter Form, als „Critical Path Method“ (CPM) seine Anwendung.

Etwa zeitgleich zu dem oben beschriebenen industriellen Auftrag, allerdings gänzlich unabhängig, gaben auch das US-Departement of Defence und die National Aeronautics and Space Administration (NASA) einen Auftrag zur Entwicklung eines geeigneten Planungskonzepts für das POLARIS-Raketenprojekt. Die Schwierigkeiten, die es bei diesem Auftrag hauptsächlich zu lösen gab, waren die Unsicherheiten in der Dauer der einzelnen Entwicklungsschritte und die Koordination der über das ganze Land verstreuten Zulieferbetriebe.

<sup>3</sup> Vgl. [23], [47]

1957/1958 wurde die Entwicklung des „Program Evaluation and Review Technique“ (PERT) bekannt gegeben. Durch den Einsatz von PERT konnte der technologische Rückstand des POLARIS-Raketenprojekts aufgeholt und die gesamte Projektdauer sogar um etwa 18 Monate reduziert werden. Durch diesen Erfolg begann sowohl eine schnelle Verbreitung der Idee des Verfahrens, als auch ein „Wettrennen“ um die besten Weiterentwicklungen.

Die wichtigsten dieser Weiterentwicklungen stellten Anfang der 1960er Jahre die Erweiterung der Netzwerk-Zeitplanungssysteme CPM und PERT um die Faktoren Kosten und Einsatzmittel dar. Nicht zu vernachlässigen ist auch die erstmals 1961 miteinbezogene Überlegung der Kapazitäten. Das wohl bekannteste dieser erweiterten Netzplansysteme ist „PERT-COST“, das neben Zeitplanung auch noch Möglichkeiten zur Kostenplanung und Kapazitätskontrolle besitzt.

Der dritte unabhängige Entwicklungspfad der Netzplantechnik, entstand aus einem Auftrag der französischen Firma „Electricité Francaise“ zur optimierten Planung von Atomkraftwerken entlang der Loire. Die „Société d'Economie et de Mathématique Appliquées“ (SEMA) stellte 1958 die sogenannte „Potential-Methode“ vor. Heute ist sie als „Metra-Potential-Methode“ (MPM) bekannt, da SEMA damals zur „Metra International Group“ gehörte.

Zu allen drei Entwicklungspfaden gab es speziell in den ersten Jahren nach der Entwicklung, unzählige Weiterentwicklungen und Systemvarianten. Sehr viele sind heute nicht mehr aktuell, manche anderen werden auch nur selten für sehr spezielle Aufgabenstellungen herangezogen. Die bekanntesten und meist genutzten Systeme sind bis heute CPM, PERT und MPM. Daher werden auch in den folgenden Ausführungen nur diese Typen der Netzplantechnik aufgegriffen.

### 3. Mathematische Grundlagen

Im folgenden Kapitel werden all jene mathematischen Teildisziplinen angesprochen, deren Inhalte und Erkenntnisse wesentlich in die Konzeption und Umsetzung der Netzplantechnik eingeflossen sind.

#### 3.1. Graphentheorie <sup>4</sup>

Die Graphentheorie ist die mathematische Disziplin, auf der die Netzplantechnik aufbaut. Daher behandelt dieses Kapitel die Grundbegriffe, die zum Verständnis der weiteren Ausführungen unerlässlich sind. Vor der Definition der wichtigsten Begriffe wird noch ein kurzer Überblick über die Entwicklung und die Anwendungsgebiete der Graphentheorie gegeben.

Die Graphentheorie, Teil der diskreten Mathematik, gilt als relativ junge mathematische Wissenschaft und wurde 1736 von Leonhard Euler durch seine Ausführungen über das Königsberger Brückenproblem begründet. Erst weitere 200 Jahre später, verfasste Denes König die erste systematische Darstellung der Graphentheorie.

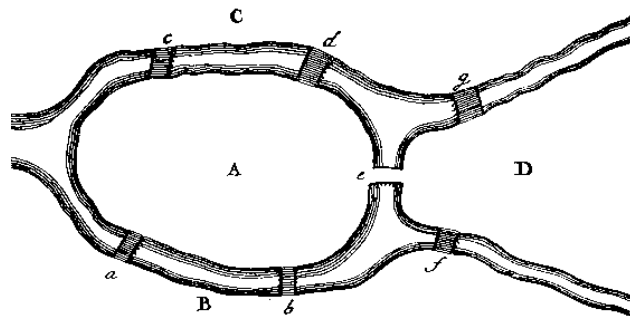
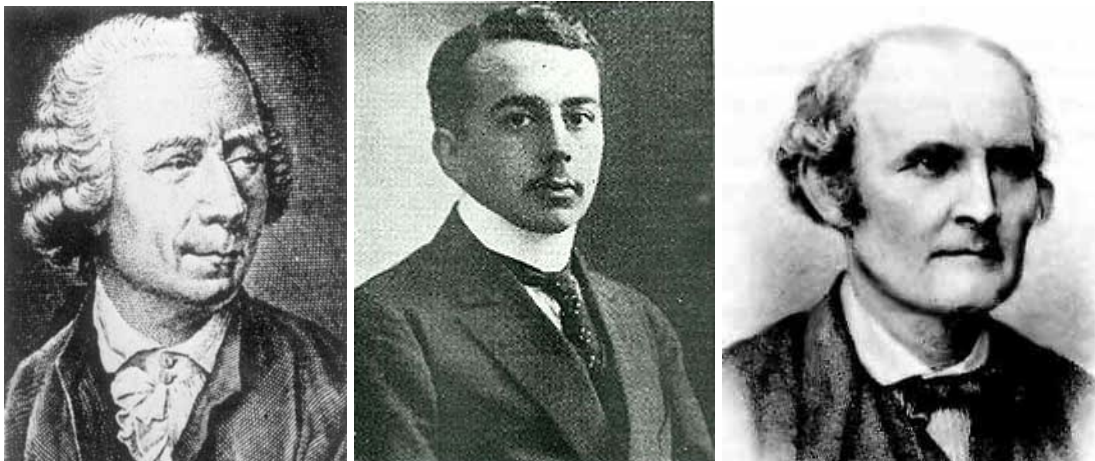


Abb.3.1.1 Königsberger Brückenproblem von L. Euler (siehe [55])

G.R. Kirchhoff (Darstellung elektrischer Netze) und F.A. Kekulé (Darstellung von Molekülen) verknüpften die Graphentheorie erstmals mit naturwissenschaftlichen und technischen Anwendungsgebieten. Auch Arthur Cayley gab durch die Veröffentlichung des bekannten Vierfarbenproblems 1878 einen wichtigen Impuls zur Weiterentwicklung der Graphentheorie. Nach 1945 eröffnete die Entwicklung der Computertechnik der Graphentheorie ganz neue Möglichkeiten. Viele anwendungsorientierte Optimierungsprobleme werden mit Hilfe von Graphen formuliert und können durch Computereinsatz gelöst werden. Typische Beispiele sind die Anwendungen in der Infrastrukturplanung oder eben das eigenständige Gebiet der Netzplantechnik.

<sup>4</sup> Vgl. [13], [15], [37], [40], [49]



**Abb.3.1.2** Wichtige Persönlichkeiten bei der Entwicklung der Graphentheorie: L. Euler, D. König, A.Cayley  
(siehe [56],[57],[58])

1878 wurde der Begriff „Graph“ von F. A. Kekulé erstmals in einer Publikation verwendet. Heute ist der Begriff namensgebend für eine große mathematische Teildisziplin und natürlich auch für die Netzplantechnik zentral.

### **Def. 3.1.1 Graph**

Ein Graph ist ein Tupel  $(V,E,f)$ , wobei  $f$  eine Abbildung von  $E$  in die Menge der geordneten oder ungeordneten Paare von Elementen aus  $V$  ist.

$E$  heißt die Menge der Kanten (engl. *edge*) und  $V$  die Menge der Knoten oder Ecken (engl. *vertex*).

Da die Graphentheorie ein großes und umfangreiches Thema der diskreten Mathematik ist, muss als erstes geklärt werden, welche Arten von Graphen für die Netzplantechnik relevant sind:

### **Def. 3.1.2 Endlicher Graph**

Ein Graph  $G$  heißt endlich, wenn seine Knotenmenge  $V(G)$  und seine Kantenmenge  $E(G)$  endlich sind.



**Def. 3.1.3 Gerichteter Graph**

Von einem gerichteten Graphen  $(V, E, f)$  spricht man dann, wenn die „Inzidenzfunktion“  $f$  die Kantenmenge  $E$  in die Menge  $V^2$  der geordneten Paare von Knoten abbildet. Die Kanten heißen in diesem Fall gerichtet.

Ist  $f$  injektiv, so kann man eine gerichtete Kante  $e$  als geordnetes Paar  $(i, j)$  auffassen.

Man schreibt  $e = (i, j)$  und spricht „ $e$  indiziert mit  $i$  und  $j$ “.

In der Folge wird statt *gerichtete Kante* oft der Begriff *Pfeil* verwendet.

Gilt in einem Graphen  $(V, E, f)$  für keine zwei Kanten  $e_1, e_2$  dass  $f(e_1) = f(e_2)$  ist, so enthält der Graph keine so genannten Mehrfachkanten (siehe Abb.3.1.3). Ist  $f(e) = (i, i)$  für ein  $i \in V$ , so heißt die Kante  $e$  Schlinge (siehe Abb.3.1.4).

Gerichteter Graph mit Mehrfachkante:

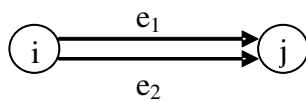


Abb.3.1.3 Mehrfachkante

Gerichteter Graph mit Schlinge:

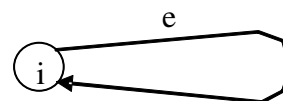


Abb.3.1.4 Schlinge

**Def. 3.1.4 Schlichter Graph**

Ein schlichter Graph ist ein Graph ohne Mehrfachkanten und Schlingen.

Im Folgenden verstehen wir unter einem Graphen stets einen schlichten Graphen. Bei den von uns ausschließlich behandelten schlichten Graphen können die Kanten als 2-elementige Teilmengen von Knoten aufgefasst werden. Das heißt, eine Kante ist durch die zwei Knoten, die sie verbindet, charakterisiert.

**Def. 3.1.5**

Netzpläne werden mit Hilfe von *endlichen*, *gerichteten* und *schlichten* Graphen modelliert.

Die für die Netzplantechnik verwendeten Graphen sind damit erklärt. Die Kanten sind oft mit einer Zeitdauer (Dauer des Vorgangs) verknüpft. Diese Verknüpfung bezeichnet man als Bewertung des Graphen:

### **Def. 3.1.6** Bewertung eines Graphen

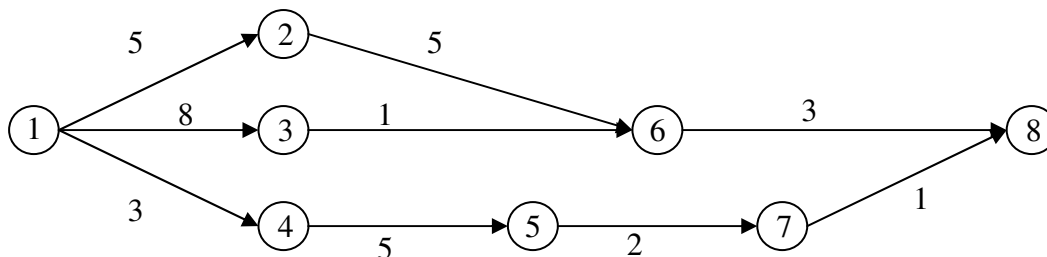
Sei  $G=G(E,V)$  ein Graph mit Kantenmenge  $E$  und Knotenmenge  $V$  und sei  $M$  eine beliebige Menge (meist  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}^+$ ).

Eine Abbildung  $b: E \rightarrow M$  heißt Bewertung von  $G(V,E)$  und

$G(V,E,b)$  wird dann als bewerteter Graph bezeichnet.

$b(e)$  für  $e \in E$  heißt Bewertung oder Gewicht der Kante  $e$

Besonders interessant sind nach diesen formalen Definitionen, die Möglichkeiten einen (endlichen, schlichten) bewerteten Graphen anzugeben.



**Abb.3.1.5** Beispielgraph

1. Ein solcher Graph ist durch die Angabe der Knotenmenge  $V$  und der Kantenmenge  $E$  eindeutig bestimmt. Ferner ist die Bewertung der einzelnen Kanten anzugeben.

Im Beispiel (Abb.3.1.5) kann man den Graph dann wie folgt formal angeben:

$$V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},$$

$$E = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,6), (3,6), (4,5), (5,7), (6,8), (7,8)\}$$

$$b = \{(1,2) \rightarrow 5, (1,3) \rightarrow 8, (1,4) \rightarrow 3, (2,6) \rightarrow 5, (3,6) \rightarrow 1, (4,5) \rightarrow 5, (5,7) \rightarrow 2, (6,8) \rightarrow 3, (7,8) \rightarrow 1\}$$

2. Ebenso ist die Angabe eines Graphen mit Hilfe einer Liste an Vorläufern oder Nachfolgern möglich

**Def. 3.1.7 Vorläufer und Nachfolger**Ist  $(i,j) \in E$ , so heißt**j** Nachfolger von **i****i** Vorläufer von **j** $S(i)$  sei die Menge aller Vorläufer von  $i \in V$ ,  $P(i)$  die Menge aller NachfolgerIst der Graph bewertet, ist die zusätzliche Angabe der  $b(i,j)$  nötig.

Im Beispiel würde die Angabe des Graphs mit Hilfe der Liste der Nachfolger bzw. Vorläufer wie folgt aussehen:

i	P(i)	S(i)
1	{2,3,4}	{}
2	{6}	{1}
3	{6}	{1}
4	{5}	{1}
5	{7}	{4}
6	{8}	{2, 3}
7	{8}	{5}
8	{}	{6, 7}

$b(1,2) \rightarrow 5,$   
 $b(1,3) \rightarrow 8,$   
 $b(1,4) \rightarrow 3,$   
 $b(2,6) \rightarrow 5,$   
 $b(3,6) \rightarrow 1,$   
 $b(4,5) \rightarrow 5,$   
 $b(5,7) \rightarrow 2,$   
 $b(6,8) \rightarrow 3,$   
 $b(7,8) \rightarrow 1$

**Abb.3.1.6** Liste der Vorläufer und Nachfolger

3. Die dritte Möglichkeit zur Angabe eines Graphen ist die Darstellung mit Hilfe einer Matrix. Diese Möglichkeit ist aus zwei Gründen die meistgenutzte. Erstens ist die Matrix als geschlossene Angebeform die wohl übersichtlichste Möglichkeit und zweitens zur Eingabe in den Computer geeignet.

Adjazenzmatrix  $A=(a_{ij})$  mit

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = 1 \text{ für } (i,j) \in E \\ a_{ij} = 0 \text{ sonst} \end{array} \right.$$

Besonders groß ist der Vorteil dieser Möglichkeit für die Angabe eines bewerteten Graphen:

Bewertungsmatrix  $B=(b_{ij})$  mit

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{ij} = 0 \text{ für } i = j \\ b_{ij} = b((i,j)) \text{ für } (i,j) \in E \\ b_{ij} = \infty \text{ sonst} \end{array} \right.$$

Im Beispiel aus Abb. 3.1.5 sieht die Bewertungsmatrix wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Graphen, wie sie für die Netzplantechnik verwendet werden, sind somit definiert und können auf verschiedene Weisen angegeben werden. Es gibt aber noch einige weitere Eigenschaften von Graphen, die für viele praktische Anwendungen relevant sind.

So ist es zum Beispiel wichtig, Aussagen über den Zusammenhang der Knoten des Netzplans treffen zu können.

### **Def. 3.1.8 Zusammenhang**

Zwei Knoten  $i_1$  und  $i_k \in V$  heißen *verbunden*, wenn es eine Folge  $i_1, i_2, \dots, i_k \in V$  gibt, sodass für  $n=2, \dots, k$  entweder  $(i_{n-1}, i_n)$  oder  $(i_n, i_{n-1}) \in E$  gilt.

Ein Graph heißt *schwach zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten verbunden sind.

Die  $i_1$  und  $i_k$  verbindende Folge  $i_1, i_2, \dots, i_k \in V$  wird eine „Pfeilfolge“  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  genannt, wenn für  $n=2, \dots, k$  gilt:  $(i_{n-1}, i_n) \in E$ . Damit erklären wir:

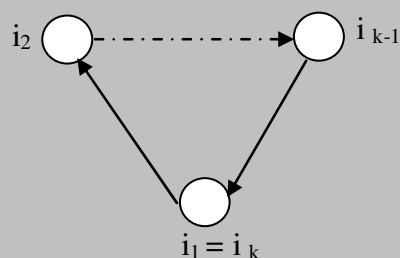
### **Def. 3.1.9 (gerichteter) Weg, Pfad**

Ein (gerichteter) Weg oder Pfad ist eine Pfeilfolge  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , in der alle  $i_j, j=1, 2, \dots, k$  paarweise verschieden sind.

Ein (gerichteter) Graph heißt stark zusammenhängend, wenn je zwei Knoten durch eine Pfeilfolge verbunden sind. Im Folgenden werden wir allerdings nur den Begriff schwach zusammenhängend benötigen, wofür wir kurz oft nur zusammenhängend sagen werden.

### **Def. 3.1.10 Zyklus**

Bilden die  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  mit  $i_1, i_2, \dots, i_k \in V$  eine Pfeilfolge und gilt  $i_1 = i_k$  und sind alle anderen Knoten paarweise verschieden, so spricht man von einem Zyklus.



Die weiteren Begriffsbildungen sind für die praktische Arbeit mit Netzplänen wichtig. Außerdem führen sie zum ersten zentralen Satz der Graphentheorie, der für die Netzplantechnik eine große Rolle spielt und noch öfters aufgegriffen wird.

Zuerst muss der sogenannte Hingrad bzw. Weggrad eines Knotens bestimmt werden:

$$\text{Hingrad} \quad \delta_H(i) := |P(i)|$$

$$\text{Weggrad} \quad \delta_W(i) := |S(i)|$$

Der Hingrad eines Knotens  $i$  ist also die Mächtigkeit der Menge aller Vorläufer von  $i$ . Analog dazu ist der Weggrad des Knotens  $i$  die Mächtigkeit der Menge aller Nachfolger von  $i$ .

Daraus leiten sich folgende ausgezeichnete Knoten ab:

### **Def. 3.1.11 Quelle und Senke**

Eine Quelle eines Graphen ist ein Knoten  $i$ , für den gilt:

$$\delta_H(i) = 0$$

Als Senke wird ein Knoten  $i$  bezeichnet, wenn

$$\delta_W(i) = 0$$

In dem Beispiel aus Abbildung 3.1.5 gilt:

$$\delta_H(1) = 0 \rightarrow \text{Knoten 1 ist eine Quelle}$$

$$\delta_W(8) = 0 \rightarrow \text{Knoten 8 ist eine Senke}$$

**Def. 3.1.12 Isolierter Knoten**

Sei  $i \in V$  und gilt

$$\delta_H(i) = \delta_W(i) = 0$$

so heißt  $i$  isolierter Knoten.

Isolierte Knoten sind Quelle und Senke zugleich. In zusammenhängenden Graphen mit mehr als einem Knoten kommen keine isolierten Knoten vor.

**Def. 3.1.13 Netzwerk**

Ein bewerteter Graph  $G(V,E,b)$  ohne isolierte Knoten heißt Netzwerk.

In der Netzplantechnik kommen hauptsächlich schwach zusammenhängende Netzwerke zum Einsatz.

**Def. 3.1.14 Netz**

Ein Netz ist ein endlicher, schwach zusammenhängender, gerichteter Graph, der keine Zyklen enthält.

**Satz 3.1**

In einem Netz existieren mindestens eine Quelle und eine Senke.

Beweis:

(a) z.z.  $\exists$  Quelle:

- Sei  $i \in V$  ein beliebiger Knoten des Graphen, dann kann man  $P(i)$  bestimmen.

- Existiert  $k \in P(i)$  dann kann  $P(k)$  ermittelt werden. Da der Graph endlich und zusammenhängend ist, führt diese Iteration nach endlich vielen Schritten zu

$$P(n) = 0 \text{ mit } n \in P(n-1) \rightarrow n \text{ ist Quelle}$$

(b) z.z.  $\exists$  Senke:

- Sei  $i \in V$  ein beliebiger Knoten des Graphen, dann kann man  $S(i)$  bestimmen.

- Existiert  $k \in S(i)$  dann kann  $S(k)$  ermittelt werden.

Diese Iteration führt nach endlich vielen Schritten zu

$$S(n) = 0 \text{ mit } n \in S(n-1) \rightarrow n \text{ ist Senke}$$

Daraus ergibt sich, dass jeder Knoten von der Quelle durch einen Weg erreicht werden kann und dass es von jedem Knoten einen Weg zu einer Senke gibt. Die Aussage aus Satz 3.1 kann noch präzisiert werden:

Netze, wie oben definiert, können offen oder geschlossen sein. Geschlossene Netze zeichnen sich dadurch aus, dass sie genau eine Quelle und genau eine Senke besitzen. Andernfalls heißt das Netz offen. Man kann zeigen:

**Satz 3.2** (siehe [37], S.9)

Jedes offene Netz kann man zu einem geschlossenen ergänzen.

Beweis:

Seien  $i_1, \dots, i_k \in V$  die Knoten des Netzes. Fügt man nun einen Knoten  $i_0$  hinzu und verbindet ihn mit allen Quellen des ursprünglichen Netzes, sodass die Pfeile  $i_0$  als Anfangsknoten besitzen, existiert im neuen Netz genau eine Quelle. Analog fügt man einen Knoten  $i_{k+1}$  hinzu und ergänzt das neue Netz durch Pfeile die  $i_{k+1}$  als Endknoten besitzen.

Für Anwendungen ist es oft nützlich, die Knoten des Graphen so zu nummerieren, dass es nur Pfeile gibt, deren Anfangsknoten eine niedrigere Nummer hat als ihr Endknoten. Für schwach zusammenhängende, zyklenfreie Graphen mit genau einer Quelle und genau einer Senke ist es möglich, die Knoten  $\{1, \dots, n\}$  nach folgenden Anforderungen zu sortieren:

**Def. 3.1.15 Sortierter Graph**

Ein schwach zusammenhängender, zyklenfreier Graph  $G(V,E)$  mit  $V = \{1,2,\dots,n\}$  und mit genau einer Quelle und genau einer Senke heißt topologisch knotensortiert, wenn gilt:

$$\forall (i,j) \in E \text{ ist } i < j$$

Für Sortierung von Knoten gibt es den KSORT-Algorithmus der auf der Adjazenzmatrix  $A=(a_{ij})$  basiert:

- (1) Wähle den (einzigsten) Knoten  $j$  für den gilt  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0$  und bezeichne ihn mit 1 (=Quelle).
- (2) Setze in der Adjazenzmatrix alle Einträge der  $j$ -Zeile Null. D.h. es werden alle Pfeile die von der Quelle ausgehen gestrichen.
- (3) Wähle in der so erhaltenen Matrix einen Knoten  $k$  für den gilt  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0$  und gib ihm den „Namen“ 2.
- (4) Streiche auch die  $k$ -Zeile aus der Adjazenzmatrix
- (5) Fahre wie oben fort, bis alle Knoten eine Nummer haben.

Beispiel:

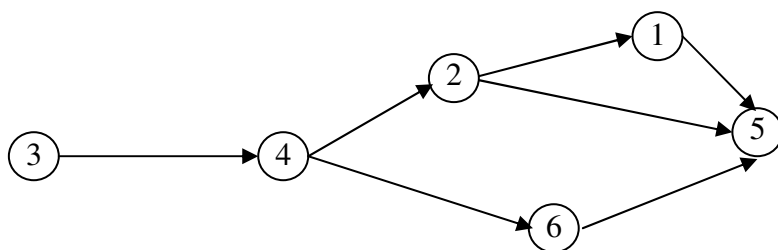


Abb.3.1.7 Beispiel KSORT - 1

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

Die dritte Spalte enthält nur Nullen  $\rightarrow$  Knoten 3 ist die Quelle, d.h.  $3 \rightarrow 1$

Schritt 2:

Alle Pfeile die von Knoten 3 ausgehen werden gestrichen, d.h. die Einträge der Zeile 3 werden Null gesetzt.



$$\begin{array}{cccc}
 \text{Schritt 2} & \text{Schritt 3} & \text{Schritt 4} & \text{Schritt 5} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 4 \rightarrow 2 & 6 \rightarrow 3 & 2 \rightarrow 4 & 1 \rightarrow 5
 \end{array}$$

$$\text{Schritt 6: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5 \rightarrow 6$$

Der Netzplan mit den neuen Knotennummern sieht also wie folgt aus:

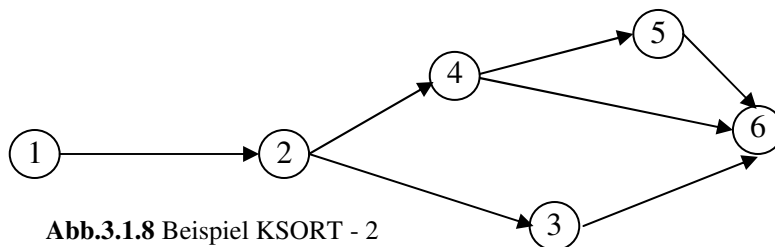


Abb.3.1.8 Beispiel KSORT - 2

Festzuhalten ist, dass der Algorithmus KSORT keine eindeutige Knotensortierung liefert, da in jedem Schritt ein Knoten  $j$  mit  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0$  beliebig ausgewählt werden kann.

Eine der zentralen Aufgaben der Netzplantechnik ist die Bestimmung der längsten Wege. Die Definitionen und Algorithmen zur Berechnung hängen natürlich entscheidend davon ab, ob der Graph bewertet oder nicht bewertet ist.

Für einen nicht bewerteten Graphen gilt:

**Def. 3.1.16 Länge eines Weges**

Die Länge eines Weges in einem Graphen  $G(E,V)$  ist die Anzahl der Kanten, die dieser Weg beinhaltet.

Liegt ein bewerteter Graph  $G(E,V,b)$  mit  $b \geq 0$  vor, so ist die Länge eines Weges die Summe der Kantenbewertungen dieses Weges. Analog ist die Länge eines Zyklus definiert.

Für einen bewerteten Graphen gibt es mehrere verschiedene Algorithmen zur Bestimmung eines längsten Wegs.

Wie oben sei  $b_{ij} = b(i,j)$  für  $(i,j) \in E$  und  $V = \{1,2,\dots,n\}$

Algorithmus von Bellman

*Voraussetzungen:* Der Graph ist schwach zusammenhängend, zyklensfrei,  $\forall e \in E$  gilt  $b(e) \geq 0$  und es existiert genau eine Quelle und genau eine Senke

*Algorithmus:*

(1) Setze  $d_1 = 0$  (Länge des Weges bis zur Quelle = 0)

(2) Berechne sukzessive  $d_k$  für  $k = 2, \dots, n$ :

$$d_k = \max_{i \in P(k)} (d_i + b_{ik})$$

(3) Notiere  $M_k := \{i \in V \mid d_k \text{ maximal}\}$

(4) Wähle  $n_1 \in M_n, n_2 \in M_{n_1}, n_3 \in M_{n_2}, \dots, n_r = 1 \in M_2$

(5)  $1, n_{r-1}, \dots, n_1, n$  ist ein längster Weg von der Quelle (Knoten 1) bis zum Knoten  $n$ . Da die Wahl der Knoten aus der Menge  $M_{n_k}$  nicht eindeutig ist, wird es im Allgemeinen mehrere Wege von gleicher maximaler Länge geben.

Beispiel:

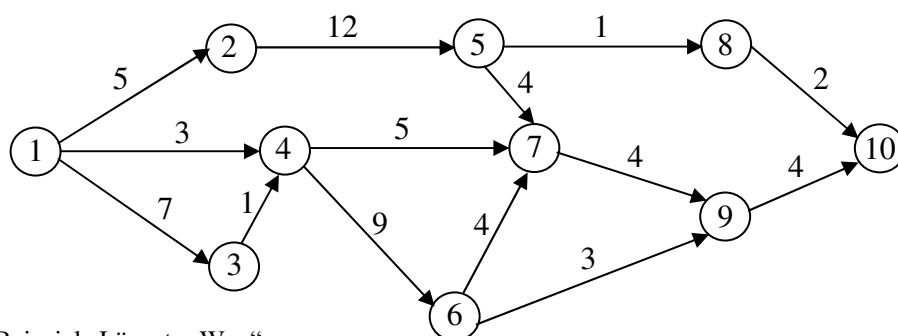


Abb.3.1.9 Beispiel „Längster Weg“

Knoten j	Vorläufer i	$d_i$	$b(i,j)$	Länge des längsten Weges von der Quelle bis zum Knoten j $d_j$	$M_j$
1	-	-	-	0	{}
2	1	0	5	$\max \{0+5\} = 5$	{1}
3	1	0	7	$\max \{0+7\} = 7$	{1}
4	1	0	3	$\max \{0+3, 7+1\} = 7+1 = 8$	{3}
	3	7	1		
5	2	5	12	$\max \{5+12\} = 17$	{2}
6	4	8	9	$\max \{8+9\} = 17$	{4}
7	4	8	5	$\max \{17+4, 8+5, 17+4\} = 17+4 = 21$	{5,6}
	5	17	4		
	6	17	4		
8	5	17	1	$\max \{17+1\} = 18$	{5}
9	6	17	3	$\max \{21+4, 17+3\} = 21+4 = 25$	{7}
	7	21	4		
10	8	18	2	$\max \{18+2, 25+4\} = 25+4 = 29$	{9}
	9	25	4		

Abb. 3.1.10 Algorithmus von Bellman

Die längsten Wege erhält man daraus wie folgt:

10  $\rightarrow$  Wähle ein Element aus  $M_{10} \rightarrow$  9  $\rightarrow$  Wähle ein Element aus  $M_9 \rightarrow$  7  $\rightarrow$  Wähle ein Element aus  $M_7 \rightarrow$  z.B. 5  $\rightarrow$  Wähle ein Element aus  $M_5 \rightarrow$  2  $\rightarrow$  Wähle ein Element aus  $M_2 \rightarrow$  1

Ein längster Weg wird durch die Knotenfolge 1,2,5,7,9,10 beschrieben, und die Zeitdauer beträgt 29 Zeiteinheiten. Würde man aus  $M_7$  den Knoten 6 (statt 5) auswählen, würde der längste Weg 1,3,4,6,7,9,10 lauten.

Für ein Projekt, das mittels Netzplantechnik geplant wird, ist vor allem der längste Weg von der Quelle bis zur Senke interessant, da dies die mindestens notwendige Projektdauer angibt (Voraussetzung: die Bewertung der Kanten entspricht der Zeitdauer des Vorgangs).

**Def. 3.1.17 Kritischer Pfad**

In einem Graphen bezeichnet man jeden längsten Weg von der Quelle bis zur Senke als kritischen Pfad.

Wenn ein Graph die Voraussetzungen für den Algorithmus von Bellmann nicht erfüllt, gibt es eine Reihe anderer Algorithmen mit abgeschwächten oder anderen Anforderungen an den Graphen. Hier ein kurzer Überblick:

Algorithmus	Voraussetzung
Algorithmus von Ford	Der Graph darf sowohl negative Kantenbewertungen aufweisen, als auch Zyklen. Zyklen dürfen aber keine negativen Bewertungen besitzen.
Algorithmus von Floyd und Warshall	Auch hier dürfen Zyklen existieren. Allerdings ist es ebenso Voraussetzung, dass diese keine negative Bewertung besitzen.

**Abb.3.1.11** Übersicht über Algorithmen zur Bestimmung des längsten Weges

Vor allem die Algorithmen von Ford bzw. von Floyd und Warshall werden neben dem Bellman Algorithmus in der Netzplantechnik oft verwendet. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass Vorgangsknoten-Netzpläne genau die Voraussetzungen für die genannten Algorithmen aufweisen.

Für alle angeführten Algorithmen ist eine Bedingung Voraussetzung: Der Graph darf keine negativen Zyklen aufweisen. Um das sicher zu stellen, ist der Begriff des Potentials eines Graphen wichtig:

**Def. 3.1.18 Potential eines Graphen**

Für  $G(V,E,b)$  heißt eine Abbildung  $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\pi(j) - \pi(i) \geq b_{ij} \quad \text{für } (i,j) \in E$$

Potential des Graphen  $G$ .

Um nachzuweisen, dass ein Graph keine negativen Zyklen enthält, wird, bei gegebenem Potential, folgende neue Kantenbewertung bestimmt (siehe [63]):

$$b_{\pi}(i, j) = b(i, j) + \pi(i) - \pi(j) \quad \text{für } (i, j) \in E$$

Gilt, dass die neuen Kantenbewertungen aller Kanten des Graphen nicht-negativ sind, so gibt es keine negativ bewerteten Zyklen. Die oben angeführten Algorithmen können also angewendet werden.

Die Definition des Potentials eines Graphen wird später im Kapitel 4.3 nochmals aufgegriffen.

### EXKURS Dynamische Optimierung<sup>5</sup>

In folgendem Exkurs werden mathematische Grundlagen des oben genannten Algorithmus von Bellman beleuchtet.



**Abb.3.1.12** Richard Bellman (\*1920, †1984)  
(siehe [62])

1952: Entwicklung der dynamischen Programmierung

ab 1965: Professor für Mathematik, Elektrotechnik und Medizin an der University of Southern California

*Herausragende Erkenntnisgewinne:*

- Dynamische Optimierung
- Bellmann'sches Optimalitätsprinzip
- Algorithmus von Bellman und Ford
- Bioinformatik.

Der US-Amerikanische Mathematiker Richard Bellman ist vor allem für die Entwicklung der dynamischen Optimierung bekannt. Diese wird bei der Lösung von Optimierungsproblemen eingesetzt, die aus vielen gleichartigen Teilproblemen bestehen. Dabei wird für jedes Teilproblem in Abhängigkeit von noch zu bestimmenden Parametern, die von den folgenden Teilproblemen abhängen, die optimale Lösung gesucht. Diese Vorgehensweise wird vom letzten Teilproblem zurückrechnend so lange fortgesetzt, bis die optimale Lösung des ersten Teilproblems in Abhängigkeit von den gegebenen

<sup>5</sup> Vgl. [59], [60], [61]

Anfangswerten und damit des gesamten Problems gefunden ist. Dieses Vorgehen ist als *Optimalitätsprinzip von Bellman* bekannt.

Bei diskreten Problemen bei denen die Zeit in einzelne Zeitstufen eingeteilt werden kann, auf denen Entscheidungen fallen und das System in einem gewissen Zustand ist, der von den vorangegangenen Entscheidungen und Zuständen abhängt, liefert die Methode der dynamischen Optimierung die Grundlage für eine optimale Entscheidungspolitik. Diese erweist sich in der Netzplantechnik als besonders wichtig.

Zusammenfassend skizzieren wir die einzelnen Schritte beim Optimalitätsprinzip von Bellman nochmals:

- (1) Das Problem wird in einzelne Stufen  $n$  unterteilt,  $n = 1 \dots N$
- (2) In jeder Stufe ist eine Entscheidung  $u_n$  zu treffen.
- (3) Jeder Stufe ist ein bestimmter Zustand  $x_n$  zugeordnet.
- (4) Jede Entscheidung hat zwei Auswirkungen:
  - (a) direkter Effekt: Auswirkung der Entscheidung auf den Zustand  $x_n$
  - (b) indirekter Effekt: Auswirkung auf den dadurch erreichten Folgezustand
- (5) Der Algorithmus beginnt bei der letzten Stufe und sucht für jedes Teilproblem die optimale Lösung. Man erhält die optimale Lösung für die Stufe  $n$  rekursiv aus der optimalen Lösung für die Stufe  $n + 1$ . Bei Maximierungsproblemen lautet die Bellman'sche Rekursionsgleichung:

$$f_n^*(x_n) = \max_{u_n} \{g(x_n, u_n) + f_{n+1}^*(x_{n+1})\}$$

mit  $g(x_n, u_n) :=$  Beitrag von  $u_n$  zur Zielfunktion  $f_n^*$

- (6) Sind alle Teilprobleme bis zur Stufe 1 rekursiv gelöst, so kann mittels einer Vorwärtsrechnung das Gesamtproblem gelöst werden.

Für eine genauere Beschreibung der Methode der Dynamischen Optimierung siehe [59].

## 3.2. Stochastische Grundlagen <sup>6</sup>

Der zweite Abschnitt über die mathematischen Grundlagen der Netzplantechnik beschäftigt sich mit der Stochastik. Die am Ende dieses Kapitels behandelte Theorie über die Beta- und Gammaverteilung wird später im Kapitel 4 für die Netzplantechnik PERT wieder aufgegriffen.

Folgende Ausführungen sollen einen knappen Einblick in die zentralen Begriffe und Ideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung liefern. Erst danach wird die unmittelbar für die Netzplantechnik nötige Theorie behandelt.

Man nennt ein Geschehen, bei dem aus einer Ausgangssituation, mehrere verschiedene, sich gegenseitig ausschließende Folgesituationen möglich sind, ein zufallsabhängiges Geschehen oder einen stochastischen Vorgang. Die möglichen Folgesituationen werden als Elementarereignisse bezeichnet.

### **Def. 3.2.1 Ergebnismenge**

Ergebnismenge  $\Omega := \{\omega \mid \omega \text{ ist ein Elementarereignis}\}$

Betrachtet man wiederholbare Handlungen mit unsicherem Ausgang (statistische Experimente), so ist man am Eintritt bestimmter Versuchsausgänge interessiert.

### **Def. 3.2.2 Ergebnis**

Ein Ereignis  $A$  ist eine Teilmenge von  $\Omega$ .

Betrachtet man zum Beispiel den Wurf eines Würfels und interessiert man sich für das Ereignis „Augenzahl  $\leq 2$ “ so ist

$$A = \{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$$

<sup>6</sup> Vgl. [2], [6], [16], [24], [48]

Das komplementäre Ereignis  $A^c$ , das dem Ereignis „Augenzahl  $> 2$ “ entspricht, wird durch

$$\Omega \setminus A,$$

also allen Elementen von  $\Omega$  die nicht in  $A$  liegen, angegeben.

Man fordert, dass folgende Teilmengen von  $\Omega$  Ereignisse eines Versuchs sind:

- (a) die leere Menge  $\emptyset$  („unmögliches Ereignis“)
- (b) die ganze Ereignismenge  $\Omega$  („sicheres Ereignis“)
- (c) für jedes Ereignis  $A$  auch das Komplement  $A^c$
- (d) für eine Folge  $A_1, A_2, \dots$  von Ereignissen auch die Vereinigungsmenge aller  $A_i$
- (e) für eine Folge  $A_1, A_2, \dots$  von Ereignissen auch die Durchschnittsmenge aller  $A_i$

$A \cup B$  ist zu interpretieren als  $A$  oder  $B$  tritt ein,  $A \cap B$  steht dafür, dass sowohl  $A$  als auch  $B$  eintritt.

**Def. 3.2.3** Ergebnisfeld,  $\sigma$ -Algebra  $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$

Eine Menge von elementaren Ereignissen  $\Omega$  zusammen mit einer Menge  $\mathcal{F}(\Omega)$  von Ereignissen, welche die Forderungen (a) – (e) erfüllt, heißt Ergebnisfeld oder  $\sigma$ -Algebra.

Beispiele für  $\sigma$ -Algebren sind z.B. die Potenzmenge  $P(M)$  einer Menge  $M$  oder die Borelmengen  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Die Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines Ereignisses  $A$  kann weder gemessen noch berechnet werden und wird daher wie folgt axiomatisch festgelegt:



**Def. 3.2.4** Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $(\Omega, \mathcal{f}(\Omega))$ 

Eine Funktion  $P$ , welche jedem  $A$  aus einem Ereignisfeld  $(\Omega, \mathcal{f}(\Omega))$  seine „Wahrscheinlichkeit“  $P(A)$  zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $(\Omega, \mathcal{f}(\Omega))$ ,

falls gilt:

$$(1) 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{für alle } A \in \mathcal{f}(\Omega)$$

$$(2) P(\emptyset) = 0 \quad \text{und} \quad P(\Omega) = 1$$

(3) Ist  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{f}(\Omega)$  eine Folge an Ereignissen mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $i, j \in \mathbb{N}$ , so

ist

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

**Def. 3.2.5** Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{f}(\Omega), P)$ 

Ein Ereignisfeld  $(\Omega, \mathcal{f}(\Omega))$  zusammen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  heißt

Wahrscheinlichkeitsraum.

Manchmal ist es zweckmäßig bereits vorhandene Zusatzinformation in die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit einfließen zu lassen. Man kann mit Hilfe der so genannten bedingten Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses  $A$  unter der Voraussetzung dass  $B$  eintritt berechnen.

**Def. 3.2.6** Bedingte Wahrscheinlichkeit

Unter der Voraussetzung  $P(B) > 0$  ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter  $B$

definiert durch

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ein weiterer, ganz zentraler Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist die Unabhängigkeit von Ereignissen. Die Unabhängigkeit von Ereignissen beschreibt jede Situation, bei der der Eintritt eines Ereignisses die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses nicht beeinflusst.

Sind A und B zwei unabhängige Ereignisse, so gilt für die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(A|B) = P(A)$  und  $P(B|A) = P(B)$ . Daraus folgt die Definition:

**Def. 3.2.7 Unabhängigkeit zweier Ereignisse**

Die Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bei einem Zufallsvorgang ist man oft nicht an der gesamten Information der einzelnen Versuchsausgänge, die einem Punkt  $\omega \in \Omega$  entsprechen, interessiert, sondern nur an einem Teil der Information oder Folgerungen daraus. Man kann die Teilinformation oder Folgerung erhalten, in dem man jedem  $\omega \in \Omega$  eine reelle Zahl  $X(\omega)$  zuordnet. Danach ist die Frage nahe liegend, wie groß die Wahrscheinlichkeit eines Wertes  $x$  von  $X$  ist bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass das Versuchsergebnis innerhalb gewisser Schranken liegt. Um diese Frage zu beantworten, erweisen sich die Borelmengen  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  als geeignetes Ereignisfeld für die reellen Zahlen  $X(\omega)$ . Die Borelmengen kann man sich am Besten so verdeutlichen, dass dies die Mengen sind, welche man durch Anwendung der Operationen  $\cup$  und  $\cap$  und durch Komplementbildung aus den Intervallen von  $\mathbb{R}$  erhalten kann.

**Def. 3.2.8 Zufallsvariable**

Eine Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Zufallsvariable, wenn die Bedingung erfüllt ist, dass das Urbild  $X^{-1}(B)$  jeder Borelmenge  $B$  als Ereignis in  $\mathcal{F}(\Omega)$  enthalten ist.

Eine Zufallsvariable ist keine Variable im Sinne der Differential- und Integralrechnung, sondern eine Funktion.

Ist  $X$  eine Zufallsvariable, so definiert man

$$P_X(B) = P(\{\omega | X(\omega) \in B\}) \text{ für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Dadurch erhalten wir die durch die Zufallsvariable  $X$  induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , die ermöglicht, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass  $X(\omega)$  aus einer Borelmenge (insbesondere aus einem Intervall) ist.

Ist der Wahrscheinlichkeitsraum  $(R, \mathcal{B}(R), P_X)$  aus dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$  ermittelt, so ist letzterer hinsichtlich der Verteilung von  $X$  nicht mehr von Interesse.

**Def. 3.2.9 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable**

Die Verteilungsfunktion von  $X$  ist definiert als Funktion  $F$ , die jeder reellen Zahl  $x$  die Wahrscheinlichkeit  $F(x) = P(X \leq x)$  zuordnet.

Durch die Verteilungsfunktion sind für alle Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten festgelegt und es gilt für  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Die Zufallsvariable betreffend ist noch eine in der Folge wichtige Unterscheidung zu treffen:

- (a) Kann eine Zufallsvariable nur abzählbar viele oder gar nur endlich viele Werte  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  annehmen, so nennt man die Zufallsvariable diskret.

**Def. 3.2.10 Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsvariable**

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_i \text{ falls } x = x_i \text{ für } i = 1, 2, \dots \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

- (b) Wenn die Zufallsvariable jede Zahl  $\in R$  annehmen kann, so heißt sie stetig.

**Def. 3.2.11 Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable**

Sei die Zufallsvariable stetig, dann gibt es eine Funktion  $f(x)$ , so dass die Verteilungsfunktion von  $X$  für alle  $x \in R$  folgende Gestalt besitzt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

An allen Punkten  $x$ , an denen  $f(x)$  stetig ist, gilt:  $F'(x) = f(x)$

Die Funktion  $f(x)$  heißt Dichtefunktion oder Wahrscheinlichkeitsdichte von  $X$  und besitzt die Eigenschaften:

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Nach dieser kurzen allgemeinen Einführung, soll nun die Frage: „Wozu sind Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Netzplantechnik notwendig?“ im Mittelpunkt stehen.

In der Planungsphase der meisten Projekte können die Faktoren wie etwa Zeit oder Kosten nur ungefähr abgeschätzt werden. Dies trifft vor allem dann zu, wenn es sich um ein einmaliges Projekt handelt. Die Zeitdauer der einzelnen Vorgänge kann also nur abgeschätzt werden und kann etwas variieren. Diese nicht deterministisch vorgegebenen Werte müssen mit Hilfe stochastischer Größen modelliert werden.

Gesucht ist jetzt also eine Verteilung, die folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) Die Verteilung soll stetig sein, da die Menge der „möglichen Vorgangsdauern“ der einzelnen Vorgänge des Projekts ein Kontinuum bildet.
- (2) Die Vorgangsdauer muss beschränkt sein, d.h. die tatsächliche Vorgangsdauer liegt innerhalb einer definierten unteren und oberen Grenze. Außerhalb dieser Grenzen ist die Dichtefunktion der gesuchten Verteilung gleich Null.
- (3) Die Zufallsgrößen sollen sich um einen Mittelwert konzentrieren, da mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit eine Vorgangsdauer rund um den geschätzten Wert eintrifft. Die Dichtefunktion der zu definierenden Verteilung soll an einem Mittelwert  $m$  ein Maximum annehmen.

Vor allem die Forderungen aus Punkt (2) schränken die Auswahl geeigneter Verteilungen stark ein. Als geeignet stellt sich die in der Praxis verwendete Beta-Verteilung heraus:

**Def. 3.2.12** Betaverteilung erster Art

Eine nicht-negative Zufallsvariable  $X$  genügt der Betaverteilung (erster Art) mit den positiven Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  auf dem offenen Intervall  $(c,d)$ , wenn sie folgende

Verteilungsdichte aufweist:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(d-c)^{1-\alpha-\beta}}{B(\alpha, \beta)} (x-c)^{\alpha-1} (d-x)^{\beta-1} & \text{für } c < x < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $B(\alpha, \beta)$  Betafunktion

**Def. 3.2.13** Betafunktion

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

mit  $\alpha, \beta > 0$

Alternativ kann die Betaverteilung auch mit Hilfe der Gammafunktion definiert werden. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

mit Gammafunktion  $\Gamma(x)$ :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Auf Grund des in der Gammafunktion auftretenden uneigentlichen Integrals wird an dieser Stelle ein kurzer Exkurs eingeschoben.

**EXKURS Uneigentliche Integrale:**<sup>7</sup>

Von uneigentlichen Integralen spricht man in zwei Fällen:

(a) Uneigentliches Integral 1. Art:

Dabei handelt es sich um Integrale bei denen eine der beiden oder beide

<sup>7</sup> Vgl. [25], [34]

Intervallgrenzen unbeschränkt sind.

Man definiert (für den Fall, dass die obere Intervallgrenze unbeschränkt ist):

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

(b) Uneigentliches Integral 2. Art:

Uneigentliche Integrale 2. Art sind dadurch gekennzeichnet, dass die zu integrierende Funktion in mindestens einem Punkt eine Singularität besitzt.

Sei die zu integrierende Funktion  $f$  an der Stelle  $b$  unbeschränkt, so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x) dx$$

Befindet sich die Polstelle der Funktion  $f(x)$  im Inneren des Intervalls, so kann man durch Zerlegung des Integrals ebenfalls auf obige Form kommen.

Besonders interessant ist im Zusammenhang mit uneigentlichen Integralen immer die Integrierbarkeit bzw. die Konvergenz der Grenzwerte. Für diese Überlegungen ist das Majorantenkriterium sehr wichtig:

### **Satz 3.3 Majorantenkriterium**

Wenn  $f$  und  $g$  stetige Funktionen auf dem Intervall  $[a,b)$  sind und  $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a,b)$

gilt, dann folgt aus der Existenz von

$$\int_a^b g(x) dx$$

die Existenz von

$$\int_a^b f(x) dx$$

Beweis:

Es gilt

$$|F(u) - F(v)| \leq |G(u) - G(v)| \quad \text{für } u, v \in [a, b)$$

mit

$$F(u) = \int_a^u f(x) dx \quad G(u) = \int_a^u g(x) dx$$

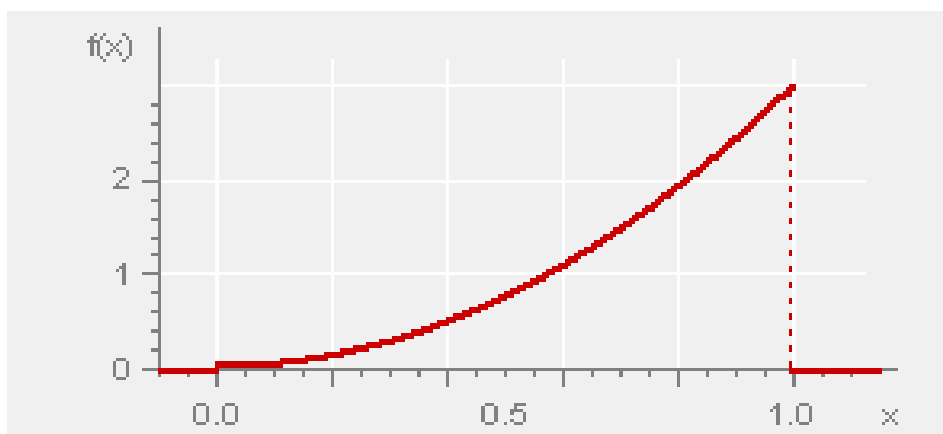
F erfüllt somit für  $u \rightarrow b$  das Cauchysche Konvergenzkriterium, da der Grenzwert von  $G(u)$  für  $u \rightarrow b$  existiert und G daher das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt.

Es wird nun ein Weg gezeigt wie man beweist, dass das Gammaintegral für alle  $x \in \mathbb{R}^+$  konvergiert. Dabei sind die kritischen Werte 0 und  $\infty$  zu untersuchen (siehe [34]):

- In  $(0,1]$  gilt  $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$ . Da man unschwer beweist, dass das Integral von  $t^{x-1}$  in den Grenzen 0 und 1 für alle  $x \in \mathbb{R}^+$  existiert, existiert laut Majorantenkriterium auch das Integral von  $t^{x-1}e^{-t}$  in den Grenzen 0 und 1.
- In  $[1,\infty)$  gilt wie man zeigen kann  $t^{x-1}e^{-t} \leq ce^{-t/2}$  mit  $c \in \text{Konstante}$ . Da das Integral  $e^{-t/2}$  in den Grenzen 1 bis  $\infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}^+$  existiert, existiert laut Majorantenkriterium auch das Integral von  $t^{x-1}e^{-t}$  in den Grenzen 1 und  $\infty$ .

Nach diesem kurzen Exkurs in die Analysis, nun wieder zurück zu den in der Netzplantechnik verwendeten stochastischen Grundlagen.

Als Beispiel hier zwei Graphen die die Verteilungsdichte der Betaverteilung im offenen Intervall  $(0,1)$  für verschiedene Parameterwerte  $\alpha$  und  $\beta$  zeigen:



Parameter:

$$\alpha = 3$$

$$\beta = 1$$

Parameter:

$$\alpha = 1,5$$

$$\beta = 3$$

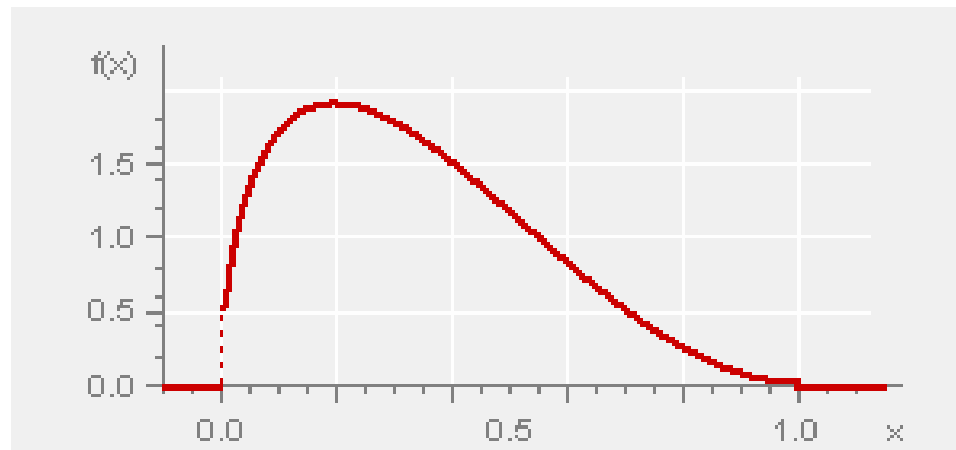


Abb. 3.2.1 Dichten der Betaverteilung auf (0,1) (erstellt mit Hilfe von [66])

Für die praktische Anwendung der Betaverteilung in der Netzplantechnik benötigt man noch einige Verteilungsparameter.

**Def. 3.2.14 Modus  $x_m$**

Der Modus ist jener Wert  $x$ , an dem  $f(x)$  maximal wird.

**Def. 3.2.15 Median  $x^*$**

Der Median  $x^*$  ist definiert durch die Bedingungen

$$P(x \leq x^*) = 0,5 \text{ und } P(x \geq x^*) = 0,5$$

Der wichtigste Lageparameter einer Verteilung heißt Erwartungswert und wird analog zum arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung definiert.



**Def. 3.2.16 Erwartungswert**

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen  $X$  ist wie folgt festgelegt

(1) für  $X$  diskret:

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$$

(2) für  $X$  stetig:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Neben dem Erwartungswert ist bei vielen Fragestellungen auch wichtig, wie stark die Verteilung der Zufallsvariable um den Erwartungswert streut.

**Def. 3.2.17 Varianz**

(1) für diskrete Zufallsvariablen definiert man:

$$\text{Var}(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 f(x_i)$$

(2) für stetige Zufallsvariablen legt man fest:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - E(x)]^2 f(x) dx$$

Die Abweichungen der  $x_i$  von  $E(X)$  werden quadriert, sodass sich positive und negative Abweichungen bei der Summation bzw. Integration nicht gegenseitig aufheben.

Zwischen den beiden wichtigsten Parametern einer Verteilung besteht folgender Zusammenhang:

$$\text{Var}(X) = E[(X-E(X))^2] = \dots = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Die Einführung eines zweiten Streuungsparameters beruht auf folgender heuristisch erklärter Idee: Um die mittlere Abweichung der  $x_i$  vom Erwartungswert zu erhalten, wird aus der Varianz von  $X$  die Wurzel gezogen:

**Def. 3.2.18 Standardabweichung  $\sigma$** 

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Für die Beta-Verteilung ergeben sich aus obigen Definitionen Lage- und Streuungsparameter (siehe [6]):

Modus	$x_m = c + (d - c) \frac{(\alpha - 1)}{(\alpha + \beta - 2)} = \frac{c(\beta - 1) + d(\alpha - 1)}{(\alpha - 1) + (\beta - 1)}$
Erwartungswert	$E(x) = c + (d - c) \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)}$
Varianz	$Var(X) = \frac{(d - c)^2 \alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$

### 3.3. Lineare Optimierung<sup>8</sup>

Im dritten und letzten Kapitel über die mathematischen Grundlagen der Netzplantechnik wird auf das Thema der linearen Optimierung eingegangen, welches in der Netzplantechnik hauptsächlich in Verbindung mit Kosten- oder Kapazitätsplanungen verwendet wird. Die zur allgemeinen Zeitplanung durch die Faktoren Kosten und Kapazität erweiterten bzw. veränderten Fragestellungen werden in Unterkapiteln zu Kapitel 4 erläutert.

Bei einer linearen Optimierungsaufgabe ist das Minimum oder das Maximum einer linearen Funktion

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + d$$

so zu finden, sodass lineare Nebenbedingungen der Form

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n \geq b_i$$

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n \leq b_i$$

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n = b_i$$

erfüllt sind.

<sup>8</sup> Vgl. [14], [17], [21], [36], [38], [39],

Im Jahre 1939 verfasste L. Kantorowitsch die erste Publikation zum Thema der linearen Optimierung im heutigen Sinn. Schon er betonte darin die hohe Bedeutung dieser Verfahren in der wirtschaftlichen Planung, blieb jedoch mit seiner These lange unbeachtet. Erst nach dem Ende des zweiten Weltkriegs schafften Hitchcock und Koopman unabhängig voneinander die Lösung wichtiger Probleme mit Hilfe der linearen Optimierung. 1947 war der Durchbruch der linearen Optimierung: G. Dantzig entwickelte eine allgemeine Lösungsmethode welche erlaubte, Probleme mit sehr vielen Variablen rasch zu lösen, das sogenannte Simplexverfahren. Die Simplexmethode ist bis heute eines der wichtigsten Lösungsverfahren geblieben und wird im Folgenden näher erläutert. Der Name geht auf eine zentrale Idee der Theorie zurück. Die Menge aller Konvexkombinationen endlich vieler Punkte heißt konvexes Polyeder. Ein konvexes Polyeder des  $\mathbb{R}^n$  wird Simplex genannt und ist namensgebend für das wichtigste Lösungsverfahren der linearen Optimierung.



**Abb.3.3.1** Berühmte Persönlichkeiten bei der Entwicklung der linearen Optimierung: L. Kantorowitsch, G.

Dantzig (siehe [64],[65])

Nach diesem kurzen historischen Exkurs, nun wieder zurück zur Aufgabenstellung. Um einen möglichst allgemeinen Lösungsweg beschreiben zu können, ist das erste Ziel, unterschiedlich formulierte Probleme in einheitlicher Darstellungsform anzugeben.

**Def. 3.3.1 Erste Normalform**

Problemstellungen die nur Ungleichungen der folgenden Typen enthalten nennt man

„erste Normalform“:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \max$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n \leq b_i$$

Für alle Aufgabenstellungen kann gezeigt werden:

**Satz 3.4**

Zu jedem linearen Optimierungsproblem der Form

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + d = \max \text{ oder } \min$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n \geq b_i$$

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n \leq b_i$$

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n = b_i$$

kann eine Optimierungsaufgabe in erster Normalform gefunden werden, sodass die Lösungen der beiden Probleme übereinstimmen.

Beweis:

(1) Die Gleichung

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + d$$

nimmt an jenem Punkt  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ihr Maximum an, an dem auch

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

das Maximum annimmt.

(2) Minimal wird

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + d$$

dort, wo

$$(-\lambda_1)x_1 + (-\lambda_2)x_2 + \dots + (-\lambda_n)x_n$$

das Maximum annimmt.

(3) Alle Nebenbedingungen der Form

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq b_i$$

können durch Ungleichungen der Form

$$(-\alpha_{i1})x_1 + (-\alpha_{i2})x_2 + \dots + (-\alpha_{in})x_n \leq (-b_i)$$

ersetzt werden.

(4) Gleichungen der Form

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n = b_i$$

werden von den Punkten erfüllt, für die sowohl

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n \leq b_i$$

als auch

$$(-\alpha_{i1})x_1 + (-\alpha_{i2})x_2 + \dots + (-\alpha_{in})x_n \leq (-b_i)$$

gilt.

Zur Auffindung von Lösungsstrategien und -algorithmen ist es also ausreichend, Problemstellungen in erster Normalform zu betrachten.

Im, in der Praxis höchst seltenen, Fall eines Problems in zwei Variablen, lässt sich die optimale Lösung sogar graphisch finden. Jede Bedingung

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 \leq b_i$$

wird gerade von den Punkten erfüllt, die in einer der beiden durch

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 = b_i$$

getrennten Halbebenen liegen (für  $\alpha_{i1} > 0 \rightarrow$  Linke Halbebene, für  $\alpha_{i1} < 0 \rightarrow$  Rechte Halbebene).

Werden auf diese Weise alle Bedingungen in ein  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatensystem gezeichnet, so ergibt sich der Bereich aller zulässigen Lösungspaare, das sind Paare  $(x_1, x_2)$ , welche alle Nebenbedingungen erfüllen.

Die Aufgabe ist es, der Zielfunktion einen maximalen Wert  $m$  zuzuordnen. Die durch die Gleichung

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = m$$

entstehende Gerade ist parallel zu

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$$

Die Gerade durch den Ursprung wird so lange parallel verschoben, bis sie den Rand des zulässigen Bereichs erreicht hat. Dabei sind für die Schieberrichtung die Fälle  $\lambda_1 > 0$  und  $\lambda_1 < 0$  zu unterscheiden.

Beispiel (siehe [14]):

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

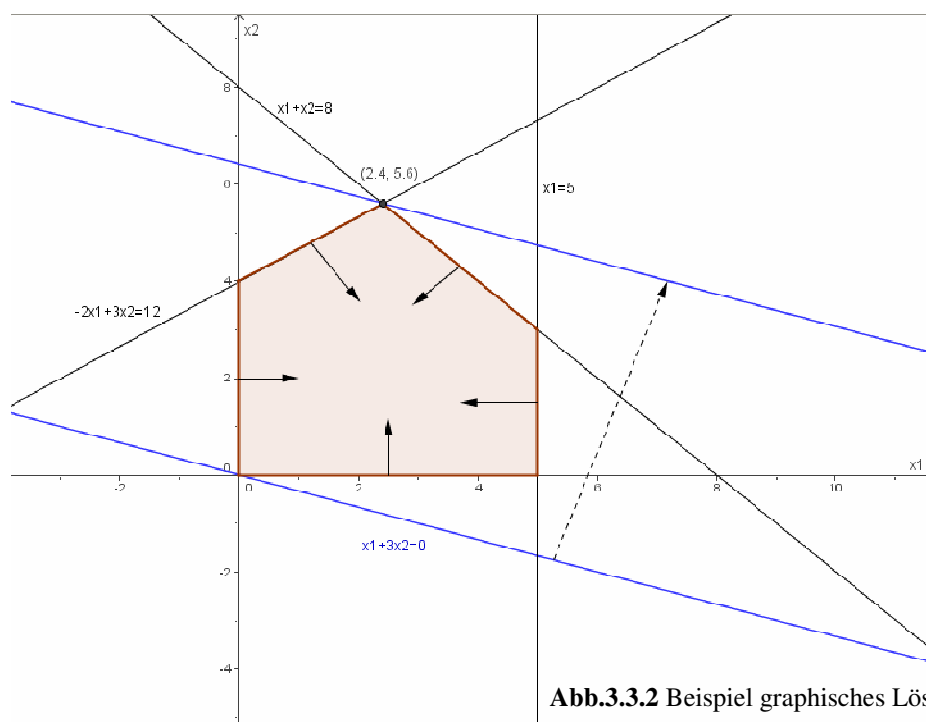


Abb.3.3.2 Beispiel graphisches Lösungsverfahren

Der maximale Wert der Zielfunktion wird also im Punkt  $(2,4 \mid 5,6)$  erreicht und beträgt dort, wie durch Einsetzen nachzurechnen, 19,2.

In der Praxis treten aber, wie bereits oben erwähnt, selten Probleme in zwei Variablen auf. Viel häufiger sind Problemstellungen mit mehreren hunderten Variablen. Es ist leicht einzusehen, dass das vorgestellte Lösungsverfahren schon mit drei Variablen an seine Grenzen stößt.

Der große Vorteil, den die lineare Optimierung gegenüber anderen Optimierungsmethoden hat, ist jener, dass es möglich ist, in relativ kurzer Rechenzeit auch Probleme mit vielen hunderten Variablen zu lösen. Dazu braucht es natürlich ein effizientes Verfahren, wie das Simplex-Verfahren, das im Folgenden dargestellt wird. Zuvor bedarf es aber noch einiger Vorbereitungen:

### **Def. 3.3.2 Zweite Normalform**

Unter der zweiten Normalform eines linearen Optimierungsproblems, versteht man eine

Aufgabenstellung der Form:

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \dots + \lambda_nx_n = \max$$

sodass für  $i = 1, \dots, m$  gilt:

$$b_i \geq 0$$

$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  linear unabhängig

Vor dem nächsten wichtigen Satz ist noch der Begriff der Schlupfvariablen zu definieren:

**Def. 3.3.3 Schlupfvariable**

Variablen  $y_i \geq 0$  die zusätzlich zu den bereits existierenden Variablen  $x_i$  eingeführt werden um Ungleichungen der Form

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n \leq b_i$$

auf Gleichungen der Form

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n + y_i = b_i$$

umformen zu können, werden Schlupfvariablen genannt.

**Satz 3.5**

Jede lineare Optimierungsaufgabe kann auf eine lineare Optimierungsaufgabe in zweiter Normalform zurückgeführt werden.

Beweis: es kann wegen Satz 3.3.1 von einer Aufgabenstellung in erster Normalform ausgegangen werden.

Durch die Einführung von  $m$  zusätzlichen Schlupfvariablen  $y_1, y_2, \dots, y_m$  entsteht ein System aus linearen Gleichungen der Form:

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + y_1 = b_1$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + y_2 = b_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n + y_m = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$$

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \dots + \lambda_nx_n + 0y_1 + 0y_2 + \dots + 0y_m = \max$$

Existieren in diesen Gleichungen  $b_i < 0$ , so wird die entsprechende Gleichung mit dem Faktor (-1) multipliziert, was nichts an der Lösung ändert. Die lineare Unabhängigkeit der Zeilenvektoren  $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$  ist gegeben, da der Rang der Koeffizientenmatrix  $m$  beträgt. Würde dies nicht der Fall sein, würden redundante Gleichungen auftreten, die man schon zuvor weglassen würde. Es sind also alle Bedingungen für eine lineare Optimierungsaufgabe in der zweiten Normalform erfüllt.



Ist  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$  eine Lösung des Problems, so ist  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine Lösung des ursprünglichen Problems. Da  $y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$  gilt, erfüllt  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die Bedingungen des ursprünglichen Problems.

Das heißt, gäbe es ein  $n$ -Tupel  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  für das die Zielfunktion einen größeren Wert annehmen würde, so würde auch  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  dort ein Maximum annehmen. Analog kann man überlegen, dass die Maxima  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$  allen Lösungen der linearen Optimierungsaufgabe entsprechen.

Zur übersichtlicheren Darstellung kann die Aufgabe in Matrizenform angegeben werden:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n)$$

Die Optimierungsaufgabe lässt sich in zweiter Normalform also kurz schreiben als:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$cx = \max$$

All jene Punkte, für die das Gleichungssystem lösbar ist, werden zulässige Punkte genannt. Festzuhalten ist, dass dies noch keine Lösungen des Optimierungsproblems sind.

#### **Def. 3.3.4 Zulässige Punkte**

Zulässige Punkte sind all jene  $x$ , die alle Bedingungen der linearen Optimierungsaufgabe erfüllen.

#### **Satz 3.6**

Die Menge aller zulässigen Lösungen einer linearen Optimierungsaufgabe ist konvex.

Beweis:

Zu zeigen ist also, dass für zwei zulässige Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  auch  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  eine zulässige Lösung ist.

(1) z.z.  $Ax = b$

Es gilt  $Ax_1 = b$  und  $Ax_2 = b$ . Daraus folgt:

$$Ax = A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 = \lambda b + (1 - \lambda)b = (\lambda + (1 - \lambda))b = b$$

(2) z.z.  $x \geq 0$

Aus  $x_1, x_2, \lambda, (1 - \lambda) \geq 0$  folgt  $x = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq 0$

### **Def. 3.3.5 Eckpunkt**

Ein Punkt  $x$  aus der Menge aller zulässigen Lösungen heißt Eckpunkt, wenn er nicht als echte Linearkombination zweier verschiedener Punkte aus der Menge dargestellt werden kann.

Die Menge aller zulässigen Punkte ist unendlich, allerdings beschränken sich die optimalen Lösungen im Wesentlichen auf die Eckpunkte der Menge (vgl. graphisches Lösungsverfahren).

### **Satz 3.7 Hauptsatz der linearen Optimierung (Eckpunkt-Theorem)**

- (a) Ist die Menge aller zulässigen Punkte beschränkt (also ein konvexes Polyeder), so existiert das Maximum und wird in mindestens einem Eckpunkt angenommen.
- (b) Ist die Menge aller zulässigen Punkte unbeschränkt und existiert das Maximum, so wird es ebenfalls in einem Eckpunkt angenommen.

### **Def. 3.3.6 Basislösung**

$x$  wird als Basislösung bezeichnet, wenn  $x$  das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  löst indem man  $p - q$  Variablen, mit  $p :=$  Anzahl der Variablen und  $q :=$  Anzahl der Gleichungen des Systems, Null setzt und das erhaltene System mit  $m$  Unbekannten eindeutig lösbar ist.

Die Variablen nach denen das System zur Bestimmung der Basislösung aufgelöst wird heißen Basisvariable, alle anderen werden Nicht-Basisvariable genannt.

Gilt für eine so gefundene Basislösung weiters  $x \geq 0$ , so heißt sie zulässige Basislösung.

**Satz 3.8**

Ein Punkt  $x$  aus der Menge der zulässigen Punkte ist genau dann ein Eckpunkt, wenn  $x$  eine zulässige Basislösung ist.

Für die Lösung praktischer Probleme gilt nun:

**Satz 3.9**

- (a) Unter den optimalen Lösungen einer linearen Optimierungsaufgabe befindet sich mindestens eine Basislösung
- (b) Ist die Menge aller zulässigen Lösungen beschränkt, so ergeben sich alle optimalen Lösungen aus konvexen Linearkombinationen aller optimalen Basislösungen.

Ist ein System lösbar und die Menge aller zulässigen Lösungen beschränkt, so kann man nach endlich vielen Schritten durch das Auffinden der optimalen Basislösungen und durch die Bildung von konvexen Linearkombinationen alle optimalen Lösungen finden. Ab einer gewissen Anzahl an Variablen wird diese Vorgangsweise aber sehr rechenzeitintensiv. Daher geht man systematisch vor:

- (1) Suche eine Basislösung
- (2) Überprüfe ob sie optimal ist (Wenn nicht → Schritt 3)
- (3) Geh zur nächsten Basislösung, indem eine Basisvariable Null gesetzt wird und eine Nicht-Basisvariable zu einer Basisvariable wird

Die konkrete Vorgangsweise wird an Hand des folgenden Beispiels (vgl. Beispiel „graphisches Lösungsverfahren“) dargestellt:

$$x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + y_1 = 8$$

$$-2x_1 + 3x_2 + y_2 = 12$$

$$x_1 + y_3 = 5$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

(1)  $p-q = 5-3 = 2$  Variablen Null setzen (durch Probieren):  $x_1 = x_2 = 0$

$$y_1 = 8$$

$$y_2 = 12$$

$$y_3 = 5$$

Die erste Basislösung lautet also  $(0,0,8,12,5)$ .

(2) Diese gefundene Basislösung wird nun auf Optimalität überprüft:

Dazu wird die gefundene Basislösung festgehalten und die Nicht-Basisvariablen wachsen. Die Lösung von  $x_1 + 3x_2$  bleibt zulässig, wächst aber. Die Basislösung ist also nicht optimal.

(3) Daher wird eine Basisvariable ausgetauscht. Zielführender Weise wird jene Nicht-Basisvariable hineingetauscht, deren Koeffizient in der zu maximierenden Funktion den größten positiven Wert hat. In unserem Fall ist das  $x_2$ . Dafür wird  $y_1$  zur Nicht-Basisvariable

$$x_2 = 8$$

$$3x_2 + y_2 = 12$$

$$y_3 = 5$$

Die Basislösung lautet also  $(0,8,0,-12,5)$ . Diese Lösung ist nicht zulässig, da  $y_2 < 0$  ist.

Statt  $y_1$  wird  $y_2$  zur Nicht-Basisvariable.

$$x_2 + y_1 = 8$$

$$3x_2 = 12$$

$$y_3 = 5$$

Die zulässige Basislösung lautet  $(0,4,4,0,5)$ .

(4) Überprüfung der Optimalität:

Ein Ansteigen von  $x_1$  führt auch zu einem Ansteigen der zu maximierenden Zielfunktion, was einer Optimalität der Basislösung widerspricht.

(5) Die Nicht-Basisvariable  $x_1$  wird Basisvariable, die Basisvariable  $y_1$  wird Nicht-Basisvariable:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 8 \\-2x_1 + 3x_2 &= 12 \\x_1 + y_3 &= 5\end{aligned}$$

Die zulässige Basislösung lautet  $(2,4;5,6;0;0;2,6)$

(6) Überprüfung der Optimalität:

Die Zielfunktion  $x_1 + 3x_2$  steigert sich durch ein Erhöhen der Nicht-Basisvariablen  $y_1$  und  $y_2$  nicht. Die Basislösung ist also optimal. Die Zielfunktion wird also an der Stelle  $(2,4;5,6)$  maximal und nimmt dort den Wert 19,2 an.

Ganz allgemein kann man die Optimalität einer Basislösung wie folgt mit Hilfe des Simplex-Kriteriums überprüfen (siehe [14]):

Drückt man die Basisvariablen durch die Nicht-Basisvariablen  $b_v$  aus und setzt diese in die Zielfunktion ein, so erhält man die Form

$$\sum_{v=1}^{n-m} \mu_v b_v + d$$

Sind die  $\mu_v$  für alle  $v$  nicht-positiv, so ist die Basislösung optimal. Sind die  $\mu_v$  sogar echt kleiner als 0, so ist mit der Basislösung schon die einzige optimale Lösung gefunden.

In unserem Beispiel kann man dadurch zeigen, dass die gefundene Basislösung die einzige optimale Lösung ist:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{3}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 + \frac{12}{5} \\x_2 &= -\frac{2}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2 + \frac{28}{5}\end{aligned}$$

Für die Zielfunktion gilt daher:

$$x_1 + 3x_2 = \left(-\frac{9}{5}\right)y_1 + \left(-\frac{2}{5}\right)y_2 + \frac{96}{5}$$

Um eine computergestützte Bearbeitung linearer Optimierungsaufgaben nach eben beschriebenen Ideen zu ermöglichen, stellt man ein allgemeines lineares Optimierungsproblem in 2. Normalform in der so genannten Tableauform dar:

	$x_1$	...	$x_n$	$y_1$	...	$y_m$	
$u_1$	$\alpha_{11}$	...	$\alpha_{1n}$	1	0	0	$b_1$
...	...	...	...	0	...	0	...
$u_m$	$\alpha_{m1}$	...	$\alpha_{mn}$	0	0	1	$b_m$
$u_{m+1}$	$-\lambda_1$	...	$-\lambda_n$	0	...	0	$z$

Ein wesentlicher Schritt beim Simplex-Algorithmus stellt nun die Idee dar, Basisvariable gegen Nicht-Basisvariable nur dann zu tauschen, wenn das die Zielfunktion verbessert oder wenn diese zumindest gleich bleibt.

Reguläres Simplex-Verfahren:

- (1) Suche den kleinsten  $\lambda$ -Wert  $\lambda_j$ .
- (2) Suche den kleinsten Quotienten  $b_i / \alpha_{ij}$  (mit  $\alpha_{ij}$  positiv) und markiere den entsprechenden Wert  $\alpha_{ij}$ .
- (3) Dividiere alle Einträge der  $i$ -ten Zeile durch  $\alpha_{ij}$ .
- (4) Addiere oder subtrahiere Vielfache der  $i$ -ten Zeile zu den anderen Zeilen, sodass die Einträge in der  $j$ -ten Spalte Null werden.
- (5) Führe dieses Verfahren so lange durch, bis alle Einträge der Zeile  $u_{m+1}$  nicht-negativ sind.

Anwendung des regulären Simplex-Verfahren auf das obige Beispiel:

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
$u_1$	1	1	1	0	0	8
$u_2$	-2	<b>3</b>	0	1	0	12
$u_3$	1	0	0	0	1	5
$u_4$	-1	-3	0	0	0	0

Der kleinste  $\lambda$ -Wert wird in der Spalte  $x_2$  mit -3 angenommen. Man berechnet daher  $b_2 / \alpha_{22} = 12/3 = 4$  und  $b_1 / \alpha_{12} = 8/1 = 8$ . Da 4 der minimale Wert ist, ist das im ersten Schritt gesuchte Element  $\alpha_{ij} = \alpha_{22} = 3$ . Alle Einträge der Zeile  $u_2$  werden durch 3 dividiert. Durch elementare Zeilenumformungen werden die Elemente  $\alpha_{12}, \alpha_{32}, \alpha_{42}$  eliminiert.

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
$u_1$	<b>1,67</b>	0	1	- 0,33	0	4
$u_2$	- 0,67	1	0	0,33	0	4
$u_3$	1	0	0	0	1	5
	-3	0	0	1	0	12

Das Verfahren wird wiederholt: das gesuchte Element  $\alpha_{ij}$  ist in diesem Fall  $\alpha_{11} = 1,67$ . Nach den analog zu oben durchgeführten Zeilen- und Spaltenumformungen ergibt sich folgendes, optimales Tableau:

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
$u_1$	1	0	0,6	0,2	0	2,4
$u_2$	0	1	0,4	0,46	0	5,6
$u_3$	0	0	-0,6	-0,2	1	2,6
	0	0	1,8	1,6	0	19,2

Daraus ist abzulesen:

$$x_1 = 2,4$$

$$x_2 = 5,6$$

$$z = 19,2$$

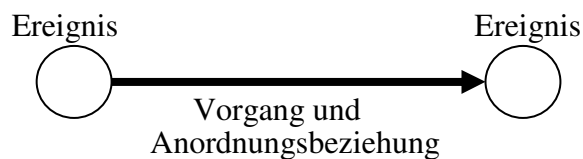
## **4. Ausgewählte Typen der Netzplantechnik**

In den folgenden Kapiteln werden drei wichtige Vertreter der einzelnen Typen der Netzplantechnik vorgestellt. Schon in Kapitel 2 wurde angedeutet, dass die wichtigsten Techniken in „Vorgangspfeil-Netzpläne“, „Vorgangsknoten-Netzpläne“ und „Ereignisknoten-Netzpläne“ eingeteilt werden können. Die Grundbegriffe und –ideen ihrer jeweils prominentesten Vertreter „CPM“, „PERT“ und „MPM“ werden im Folgenden erläutert.

### **4.1 Critical Path Method („CPM“)**

#### **4.1-a Grundbegriffe und Zielsetzungen <sup>9</sup>**

Bei der Critical Path Method werden die Vorgänge den Pfeilen zugeordnet, die Knoten repräsentieren Ereignisse.



**Abb.4.1.1** Zuordnung bei „CPM“

Um einen Netzplan aufzustellen geht man also von einer Liste an Vorgängen aus, deren Gesamtheit das ganze Projekt ergibt, und ordnet sie Pfeilen zu. Zusätzliche Pfeile werden in Form so genannter Scheinvorgänge eingeführt. Welche Funktion diese Scheinvorgänge erfüllen, wird in Kapitel 4.1.2 erklärt. Beginn und Beendigung jedes Vorgangs werden durch sogenannte Anfangs- und Endereignisse gekennzeichnet, die durch Knoten dargestellt werden. Wichtig ist also, dass jeder Pfeil einen zeitlichen Ablauf symbolisiert, Beginn und Ende sind hingegen die termin- und zeitbestimmenden Ereignisse.

Wichtig ist auch die Beziehung der Vorgänge zueinander. Wir setzen bei CPM voraus:

<sup>9</sup> Vgl. [1], [12], [19], [27], [46], [47], [52]



**Def. 4.1.1 Ende-Start-Beziehung**

Ist der Vorgang B ein Nachläufer des Vorgangs A, so kann Vorgang B erst begonnen werden, wenn Vorgang A bereits beendet ist.

Das heißt: ist Vorgang B ein Nachläufer von Vorgang A, dann muss der Anfangsknoten von B im Netzplan erst nach dem Endknoten von A vorkommen. Diese Beziehungen treten in der Praxis sehr häufig auf. Nimmt man zum Beispiel das Projekt „Hausbau“, so ist das „Errichten des Kellers“ ein Nachläufer von „Baugrube ausheben“ und kann erst begonnen werden, wenn die Baggerarbeiten abgeschlossen sind.

Welche Ziele verfolgt man nun bei der Anwendung der Critical Path Method?

Erstes Ziel ist die Erstellung einer Ablaufplanung. Das heißt alle Teile des Projektes (Vorgänge) werden in eine systematische Anordnung gebracht, in der Vorgangsfolgen und -abhängigkeiten dargestellt werden. Dieser Ablauf- oder Strukturplan zeigt, welche Vorgänge abgeschlossen sein müssen, bevor ein anderer Vorgang begonnen werden kann.

Im zweiten Schritt steht die Zeitplanung im Vordergrund. Ziel dabei ist es, die frühesten bzw. spätesten Zeitpunkte für den Anfang oder das Ende jedes Vorgangs festzulegen, die mindestens erforderliche Zeitdauer für die Abwicklung des gesamten Projekts zu berechnen, den „kritischen Weg“ zu finden und eventuelle Zeitpuffer im Ablauf zu erkennen.

Im Schritt drei können dann zusätzliche Faktoren wie Kosten oder Kapazitäten berücksichtigt werden.

**4.1-b Strukturplanung – Aufstellen eines CPM-Netzplans<sup>10</sup>**

Es wird folgende Notation verwendet:

Vorgänge	Anfangsereignisse	Endereignisse
A, B, C, ...	$a_1, b_1, c_1, \dots$	$a_2, b_2, c_2, \dots$

Wir nehmen an der Vorgang A kann als geordnetes Paar  $(a_1, a_2)$  angegeben werden. Um dies zu erfüllen, werden wir Vorgänge mit denselben Anfangs- und Endknoten geeignet modifizieren.

<sup>10</sup> Vgl. [15], [46], [47]

Bekannt seien für ein Projekt alle Vorgänge mit den Vorgangsdauern, sowie die Beziehungen zwischen diesen. Es gilt in der ersten Phase die Vorgänge dem Ablauf entsprechend zu sortieren und die Beziehungen in einem Netzplan sichtbar zu machen.

Grundregeln zum Aufstellen eines CPM-Netzplans:

(1) Ein Vorgang kann erst beginnen, wenn alle vorangegangenen abgeschlossen sind. Ist Vorgang B ein direkter Nachläufer des Vorgangs A, so sei  $a_2 = b_1$ .

Ist zum Beispiel C der Nachläufer von B und A der Vorläufer von B, so sieht der korrekte Netzplan dafür aus, wie in Abbildung 4.1.2 gezeigt.

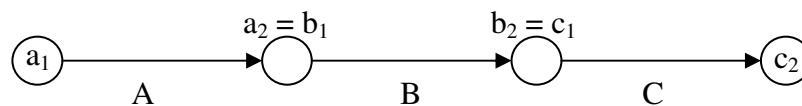


Abb.4.1.2 Beispiel „Regel 1“

(2) Folgen die Vorgänge C und D unmittelbar den Vorgängen A und B nach, so ist das wie folgt darzustellen:

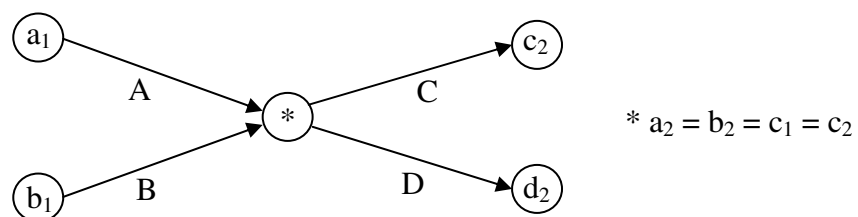


Abb.4.1.3 Beispiel „Regel 2“

Für die weiteren Regeln für das Aufstellen eines CPM – Netzplans wird in den Abbildungen auf die Beschriftung der Knoten verzichtet.

(3) Gilt für zwei Vorgänge A und B dass sowohl die Anfangsereignisse  $a_1 = b_1$  als auch die Endereignisse  $a_2 = b_2$  übereinstimmen, so muss, um Mehrfachkanten zu vermeiden, ein Scheinvorgang, der zur Unterscheidung nicht durchgezogen dargestellt wird, eingeführt werden. Die Darstellung in Abbildung 4.1.4 ist also falsch.

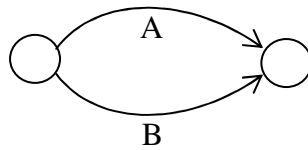


Abb.4.1.4 Beispiel „Regel 3“ - FALSCH

Stattdessen kann aus den Möglichkeiten in Abbildung 4.1.5 beliebig ausgewählt werden.

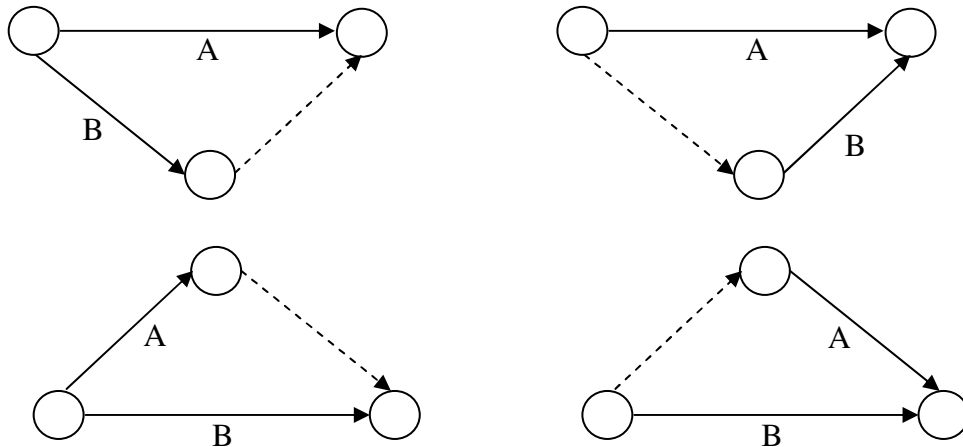


Abb.4.1.5 Beispiel „Regel 3“

- (4) Scheinvorgänge sind auch für die Darstellung von Parallelvorgängen notwendig. Sei etwa der Vorgang A Vorläufer von B und D, der Vorgang C Vorläufer von D, aber für den Beginn des Vorgangs B sei die Beendigung von C keine notwendige Voraussetzung. Abbildung 4.1.6 zeigt den korrekten Netzplan der diesen Sachverhalt darstellt.

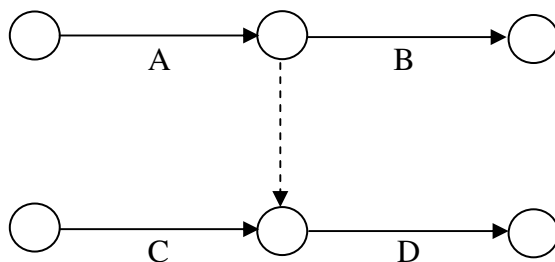


Abb.4.1.6 Beispiel „Regel 4“

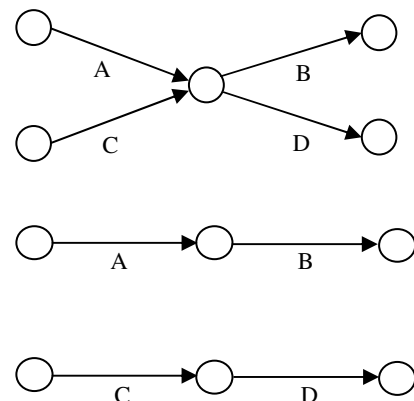


Abb.4.1.7 Beispiel „Regel 4“ – FALSCH

- (5) Existiert eine Beziehung zwischen zwei Vorgängen, bei der der Nachläufer B bereits begonnen werden kann, wenn der Vorläufer A erst teilweise beendet wurde, so ist in einem CPM Netzplan der Vorgang A in zwei Teilvorgänge  $A_1$  und  $A_2$  zu zerlegen.

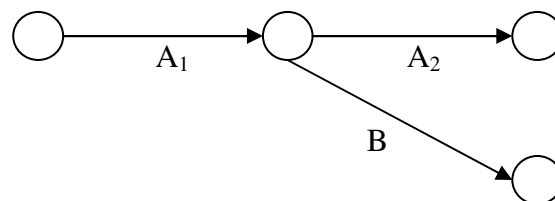


Abb.4.1.8 Beispiel „Regel 5“

- (6) Existieren in einem Projekt Minimalabstände zwischen der Beendigung des Vorläufers und dem Beginn des nachfolgenden Vorgangs, dann wird ein vor- bzw. nachgelagerter Vorgang in den Netzplan eingefügt. Diese Bedingung könnte in der Praxis etwa zwischen dem Auftragen des Estrichs (Vorgang A) und dem Verlegen der Fliesen (Vorgang B) entstehen, da eine mindestens notwendige Trocknungszeit (Vorgang Z) zu beachten ist.

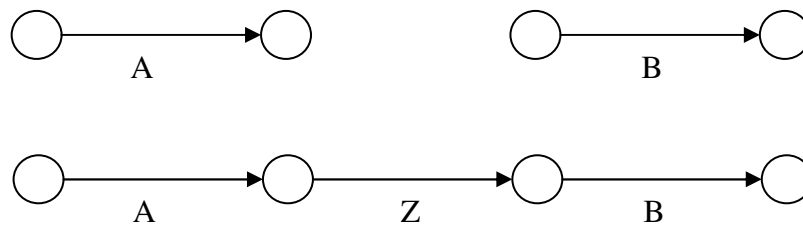


Abb.4.1.9 Beispiel „Regel 6“

Maximalabstände sind wegen der Ende-Start-Beziehungen nicht modellierbar. Dazu müsste man einen anderen Netzplantyp wie etwa MPM (siehe Kapitel 4.3) verwenden.

- (7) Für einige wichtige Sätze und Algorithmen der Graphentheorie, die in Kapitel 2.1 bereits besprochen wurden und für die Zeitplanung eines Projekts mit CPM verwendet werden, ist die Existenz genau einer Quelle und einer Senke notwendig. Daher werden im Falle mehrerer Quellen und Senken entweder neue Knoten eingefügt und diese mit sämtlichen

alten Quellen bzw. Senken durch Scheinvorgänge verbunden, oder alle Quellen bzw. Senken werden zu einer Quelle bzw. Senke zusammengefasst:

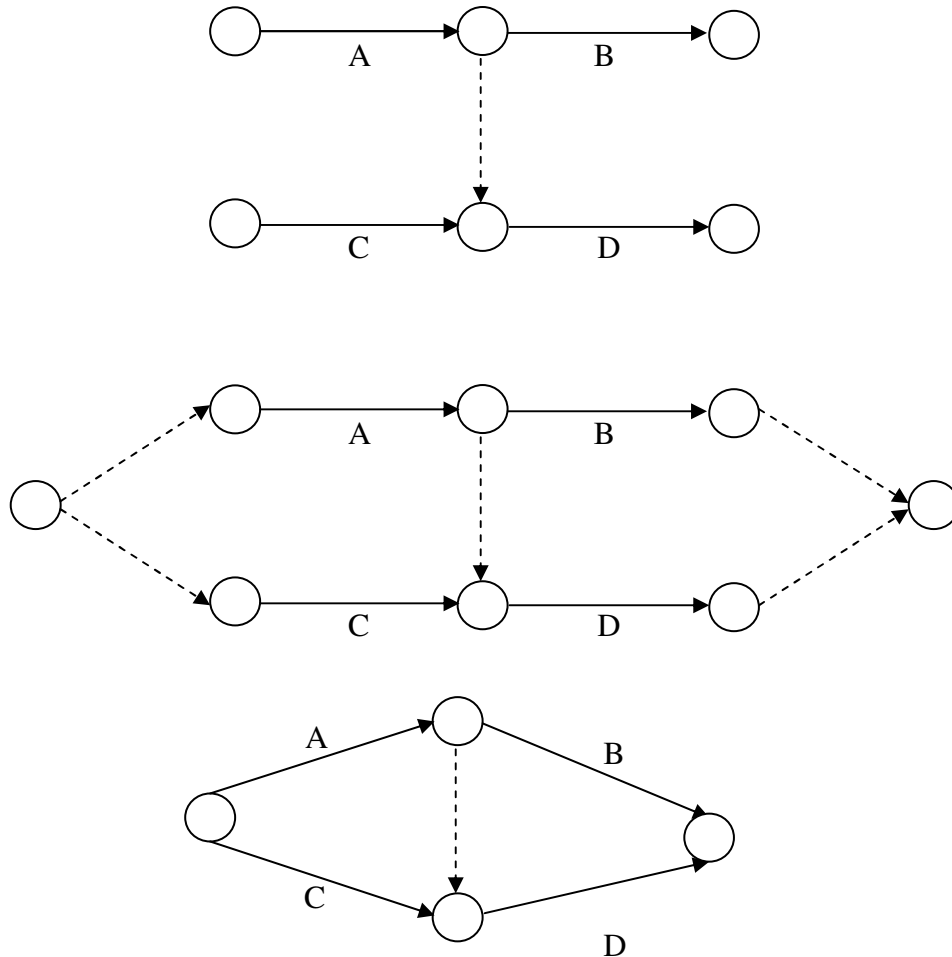


Abb.4.1.10 Beispiel „Regel 7“

Beachtet man all diese Regeln, so kann für ein beliebiges Projekt ein Netzplan erstellt werden. Es ist jedoch anzumerken, dass der Netzplan eines Projekts, auch bei Einhaltung aller Regeln, nicht eindeutig ist. Es kann derselbe Sachverhalt auf verschiedene völlig korrekte Arten dargestellt werden.

Diese Tatsache macht man sich auch zu Nutzen, wenn man versucht, manchmal auftretende Überschneidungen von Pfeilen in einem Netzplan zu vermeiden. Man versucht möglichst jedes Projekt in einem so genannten „planaren Graphen“ darzustellen:

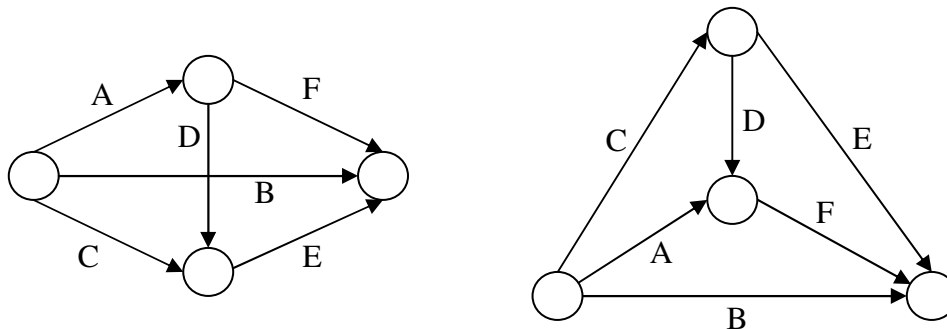


Abb.4.1.11 Beispiel „Nichtplanarer Graph“ (links) und „Planarer Graph“ (rechts)

#### 4.1-c Zeitplanung <sup>11</sup>

Nachdem im Strukturplan der Projektablauf dargestellt wurde, geht es im nächsten Schritt darum, die Dauer des Projekts zu ermitteln und einen Terminplan für die Durchführung der einzelnen Vorgänge bzw. Ereignisse anzulegen. Sind im Netzplan des Projekts Scheinvorgänge hinzugefügt, so bekommen diese die Bewertung Null.

Die Dauer des gesamten Projekts ergibt sich aus der Berechnung des längsten Weges vom Projektbeginn (= Quelle) bis zum Projektabschluss (= Senke), dem sogenannten kritischen Pfad, und wird mit Hilfe des in Kapitel 2.1 erläuterten Bellman-Algorithmus bestimmt. Kritisch heißt der Weg deshalb, weil eine Verzögerung eines Vorgangs dieses Weges (= kritische Vorgänge) die Verzögerung des gesamten Projekts nach sich zieht.

Jeder Vorgang  $V_{ij}$  besitzt vier elementare „Zeitpunkt-Eigenschaften“:

- (1) Der frühestmögliche Beginn des Vorgangs (Notation:  $FA_{ij}$ )
- (2) Der spätesterlaubte Beginn des Vorgangs (Notation:  $SA_{ij}$ )
- (3) Das frühestmögliche Ende des Vorgangs (Notation:  $FE_{ij}$ )
- (4) Das spätesterlaubte Ende des Vorgangs (Notation:  $SE_{ij}$ )

Der Begriff des spätesterlaubten Beginns heißt, dass ein späterer Beginn des Vorgangs, nicht nur den Vorgang und dessen unmittelbare Nachläufer verzögert, sondern der gesamte Projektabschluss dadurch hinausgezögert würde.

<sup>11</sup> Vgl. [15], [46], [47]

Formell ist noch festzuhalten, dass die frühestmöglichen und spätestenlaubten Beginnzeitpunkte  $FA_{ij}$  und  $SA_{ij}$  gleichbedeutend mit dem frühestmöglichen bzw. spätestenlaubten Zeitpunkt des Knoten  $i$  sind (Notation:  $FZ_i$  und  $SZ_i$ ). Analoges gilt für die Zeitpunkte des Endes eines Vorgangs und die Zeitpunkte des Knotens  $j$ . Das heißt es gilt:

$$FA_{ij} = FZ_i$$

$$SA_{ij} = SZ_i$$

$$FE_{ij} = FZ_j$$

$$SE_{ij} = SZ_j$$

#### Berechnung der frühestmöglichen Zeitpunkte des Ereignisses $i$ ( $FZ_i$ ):

Das Ereignis  $i$  kann frühestens dann eintreten, wenn alle Vorläufer der Vorgänge  $V_{ij}$  bereits abgeschlossen sind. Gesucht ist also die maximal benötigte Zeit vom Start des Projekts bis zur Beendigung der Vorgänge  $V_{hi}$  (=Vorläufer von  $V_{ij}$ ). Das heißt es ist der längste Weg von der Quelle (= Knoten 1) bis zum Knoten  $i$  zu bestimmen.

Das Projekt beginne zum Zeitpunkt 0; das heißt es gelte:

$$FZ_1 = 0$$

Der längste Weg wird mit Hilfe des Algorithmus von Bellman berechnet und es ist daher

$$FZ_i = \max_{k \in P(i)} (FZ_k + D_{ki}) \quad \text{für } i=2,3,\dots,n$$

#### Berechnung der spätestmöglichen Zeitpunkte für das Eintreten der Ereignisse $i$ ( $SZ_i$ ):

(Unter der Bedingung, dass der Endtermin des Projekts eingehalten wird)

Das Ereignis  $i$  muss spätestens dann eintreten, wenn es gerade noch möglich ist, dass alle Nachläufer des Vorgangs  $V_{hi}$  bis zum veranschlagten Projektende ausgeführt werden können. Das heißt, der spätestmögliche Zeitpunkt für das Eintreten des Ereignisses  $i$  plus die maximale Zeitdauer vom Knoten  $i$  zur Senke (= Knoten  $n$ ) darf die veranschlagte Gesamtprojektdauer  $T$  nicht überschreiten.

$$SZ_n = T$$

Die veranschlagte Gesamtprojektdauer ( $T$ ) muss mindestens so lange sein, wie der längste Weg von der Quelle bis zur Senke ( $T_0$ ), d.h:  $T_0 \leq T$

Der längste Weg vom Knoten  $i$  zum Knoten  $n$  wird ebenfalls mit Hilfe des Algorithmus von Bellman (Vgl. Kapitel 2.1) berechnet. Dazu werden die Orientierungen der Pfeile umgedreht, die Nummerierung der Knoten bleibt aber gleich. Die Größen, die zu dem „Neuen Netzplan“ gehören, werden mit einem \* gekennzeichnet. Man berechnet von der neuen Quelle (= Knoten  $n$ ) aus sukzessive

$$SZ_i = SZ_n - \max_{j \in P^*(i)} (d_j^* + D_{ji}^*)$$

Wobei mit  $d_j^*$  die maximale Dauer vom Knoten  $n$  bis zum Knoten  $j$  gemeint ist. Aufgrund der Änderung der Pfeilorientierungen, gelten auch folgende leicht zu überlegende Zusammenhänge:

$$d_j^* = SZ_n - SZ_j$$

$$P^*(i) = S(i)$$

$$D_{ji}^* = D_{ij}$$

Setzt man diese Aussagen in die obere Iterationsvorschrift ein, so erhält man

$$SZ_i = SZ_n - \max_{j \in S(i)} (SZ_n - SZ_j + D_{ij}) = \min_{j \in S(i)} (SZ_j - D_{ij}) \quad \text{für } i = n-1, n-2, \dots$$

Mit den zwei Größen  $FZ_i$  und  $SZ_j$  kann man nun alle vier oben genannten „Zeit-Punkt-Eigenschaften“ der Vorgänge  $V_{ij}$  wie folgt ausdrücken:

$$FAZ_{ij} = FZ_i$$

$$FEZ_{ij} = FZ_i + D_{ij}$$

$$SAZ_{ij} = SZ_j - D_{ij}$$

$$SEZ_{ij} = SZ_j$$

Die Zeitspanne zwischen frühestmöglichem Anfangszeitpunkt und spätestesterlaubten Anfangszeitpunkt des Vorgangs  $V_{ij}$  wird Gesamtpuffer des Vorgangs  $V_{ij}$  genannt:

**Def. 4.1.2** Gesamtpuffer des Vorgangs  $V_{ij}$  (Notation:  $GP_{ij}$ )

$$GP_{ij} = SAZ_{ij} - FAZ_{ij} = SEZ_{ij} - FEZ_{ij} = SZ_j - (FZ_i + D_{ij})$$

Der Gesamtpuffer sagt, unter den unten angegebenen Bedingungen (1) und (2), aus, um wie viele Zeiteinheiten sich der Beginn eines Vorgangs, ausgehend vom frühestmöglichem



Anfangszeitpunkt verschieben darf, ohne eine Verzögerung des gesamten Projekts zu bewirken.

- (1) Alle Vorläufer des Vorgangs  $V_{ij}$  werden zum frühestmöglichen Endzeitpunkt abgeschlossen.
- (2) Alle Nachläufer werden zum spätesten erlaubten Anfangszeitpunkt begonnen.

Auf Grund der Bedingung, dass alle Vorläufer zum frühestmöglichen Endzeitpunkt abgeschlossen werden, gilt

$$\min_{(i,j) \in E} GP_{ij} = SZ_n - FZ_n = SZ_1$$

Wenn der spätesten erlaubte Zeitpunkt des Ereignisses  $n$  mit der mindestens benötigten Dauer des Projekts, also dem frühestmöglichen Zeitpunkt von  $n$  übereinstimmt, dann darf der Beginn des Projektes nicht verzögert werden:

$$\text{sei } SZ_n = T_0 = FZ_n \quad \text{dann ist } SZ_1 = T_0 - T_0 = 0$$

Zur Bestimmung des kritischen Weges, wurde in Kapitel 2.1 der Algorithmus von Bellman vorgestellt. Eine weitere Möglichkeit die kritischen Vorgänge zu identifizieren, ergibt sich aus dem Zusammenhang:

$$GP_{ij} = SZ_1 \Leftrightarrow \text{Vorgang } V_{ij} \text{ kritisch}$$

Da die Bedingungen an die anderen Vorgänge des Projekts die Aussagekraft des Gesamtpuffers in der Praxis stark einschränken, werden im Folgenden weitere Pufferzeiten definiert:

**Def. 4.1.3 Freier Puffer des Vorgangs  $V_{ij}$**  (Notation:  $FP_{ij}$ )

Entspricht der Zeitspanne zwischen dem frühesten Ende des betrachteten Vorgangs und dem frühesten aller Anfänge der unmittelbaren Nachläufer.

$$FP_{ij} = FZ_j - FEZ_{ij} = FZ_j - (FZ_i + D_{ij})$$

**Def. 4.1.4 Freier Rückwärtspuffer des Vorgangs  $V_{ij}$**  (Notation:  $FRP_{ij}$ )

Entspricht der Zeitspanne zwischen dem spätesten Anfang des Vorgangs  $V_{ij}$  und dem spätesten erlaubten Ende aller unmittelbaren Vorläufer.

$$FRP_{ij} = SAZ_{ij} - SZ_i = SZ_j - (SZ_i + D_{ij})$$

**Def. 4.1.5 Unabhängiger Puffer des Vorgangs  $V_{ij}$**  (Notation:  $UP_{ij}$ )

Ist die Zeitspanne zwischen dem spätesten erlaubten Ende des Vorgangs und dem frühestmöglichen Anfang aller Nachfolger.

$$UP_{ij} = \max\{0, (FZ_j - (SZ_i + D_{ij}))\}$$

Für die Anwendung ist es natürlich notwendig, dass die Pufferzeiten größer oder gleich 0 sind. Um dies zu gewährleisten, setzt man den unabhängigen Puffer, falls dieser einen negativen Wert hat, gleich null.

Die Pufferzeiten geben die Zeitspanne an, innerhalb der der Vorgang begonnen oder beendet werden muss, um eine fristgerechte Fertigstellung des Projekts zu ermöglichen. Von welchen Bedingungen die einzelnen Puffer ausgehen, ist in Graphik 4.1.13 dargestellt.

	in frühestmöglicher Lage	in spätesten erlaubter Lage
Gesamtpuffer	Vorläufer	Nachläufer
Freier Puffer	Vorläufer und Nachläufer	
Freier Rückwärtspuffer		Vorläufer und Nachläufer
Unabhängiger Puffer	Nachläufer	Vorläufer

Abb.4.1.12 Puffer (siehe [46])

**Satz 4.1**

Für die Pufferzeiten des Vorgangs  $V_{ij}$  gelten die Zusammenhänge

$$UP_{ij} \leq FP_{ij} \leq GP_{ij}$$

$$UP_{ij} \leq FRP_{ij} \leq GP_{ij}$$

Beweis:(a) z.z.  $UP_{ij} \leq FP_{ij}$ Aus  $SZ_i \geq FZ_i$  folgt  $FZ_j - (SZ_i + D_{ij}) \leq FZ_j - (FZ_i + D_{ij})$  und  $0 \leq FP_{ij} \rightarrow UP_{ij} \leq FP_{ij}$ (b) z.z.  $FP_{ij} \leq GP_{ij}$ Aus  $FZ_j \leq SZ_j$  folgt  $FZ_j - (FZ_i + D_{ij}) \leq SZ_j - (FZ_i + D_{ij}) \rightarrow FP_{ij} \leq GP_{ij}$ (c) z.z.  $UP_{ij} \leq FRP_{ij}$ Aus  $FZ_j \leq SZ_j$  folgt  $FZ_j - (SZ_i + D_{ij}) \leq SZ_j - (SZ_i + D_{ij})$  und  $0 \leq FP_{ij} \rightarrow UP_{ij} \leq FRP_{ij}$ (d) z.z.  $FRP_{ij} \leq GP_{ij}$ Aus  $FZ_i \leq SZ_i$  folgt  $SZ_j - (SZ_i + D_{ij}) \leq SZ_j - (FZ_i + D_{ij}) \rightarrow FRP_{ij} \leq GP_{ij}$ 

An folgendem einfachen Beispiel werden alle wichtigen Größen der Zeitplanung mit CPM berechnet:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

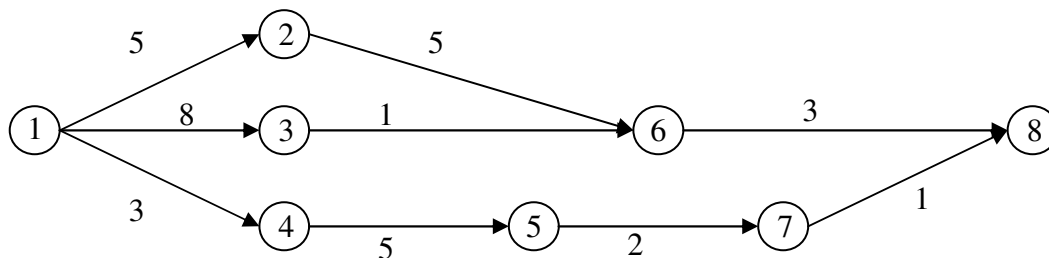


Abb 4.1.13 Beispiel Zeitplanung

Da in diesem Beispiel ein knotensortierter CPM-Netzplan vorliegt, kann mit Hilfe des Algorithmus von Bellman der „kritische Pfad“ bestimmt werden.

(1) Berechnung „Kritischer Pfad“

Knoten j	Vorläufer i	$d_i$	$D_{ij}$	Länge des längsten Weges von der Quelle bis zum Knoten j $d_j$	$M_i$
1	-	-	-	0	{}
2	1	0	5	$\max \{0+5\} = 5$	{1}
3	1	0	8	$\max \{0+8\} = 8$	{1}
4	1	0	3	$\max \{0+3\} = 3$	{1}
5	4	3	5	$\max \{3+5\} = 8$	{4}
6	2	5	5	$\max \{5+5, 8+1\} = 10$	{2}
	3	8	1		
7	5	8	2	$\max \{8+2\} = 10$	{5}
8	6	10	3	$\max \{10+3, 10+1\} = 13$	{6}
	7	10	1		

Abb.4.1.14 Berechnung „Kritischer Pfad“

Der kritische Pfad wird durch die Knotenfolge 1, 2, 6, 8 beschrieben.

Die mindest notwendige Zeit für das Projekt beträgt 13 Zeiteinheiten. Im Beispiel soll dies auch die geplante Projektdauer sein (d.h.  $T_0=T$ )

(2) Berechnung der frühestmöglichen und spätesterlaubten Zeitpunkte der Ereignisse i

Die  $FZ_i$  sind direkt aus der Abbildung 4.1.14 abzulesen. Die  $SZ_i$  werden iterativ durch eine „Rückwärtsrechnung“ bestimmt:

$$SZ_i = \min_{j \in S(i)} (SZ_j - D_{ij}) \quad \text{für } i = n-1, n-2, \dots$$

mit  $SZ_8 = 13$

Knoten i	Vorläufer h	$D_{hi}$	$FZ_i$	Knoten i	Nachläufer j	$D_{ij}$	$SZ_i$
1	-	-	0	1	2	5	0
					3	8	
					4	3	
2	1	5	5	2	6	5	5
3	1	8	8	3	6	1	9
4	1	3	3	4	5	5	5
5	4	5	8	5	7	2	10
6	2	5	10	6	8	3	10
	3	1					
7	5	2	10	7	8	1	12
8	6	3	13	8	-	-	13
	7	1					

Abb.4.1.15 Berechnung der  $FZ_i$  und  $SZ_i$ 

## (3) Berechnung der Zeitpunkt-Eigenschaften der Vorgänge (i,j)

Vorgang (i,j)	$D_{ij}$	$FAZ_{ij}$	$FEZ_{ij}$	$SAZ_{ij}$	$SEZ_{ij}$
(1,2)	5	0	5	0	5
(1,3)	8	0	8	1	9
(1,4)	3	0	3	2	5
(2,6)	5	5	10	5	10
(3,6)	1	8	9	9	10
(4,5)	5	3	8	5	10
(5,7)	2	8	10	10	12
(6,8)	3	10	13	10	13
(7,8)	1	10	11	12	13

Abb.4.1.16 Berechnung der  $FAZ_{ij}$ ,  $FEZ_{ij}$ ,  $SAZ_{ij}$ ,  $SEZ_{ij}$

(4) Berechnung der Pufferzeiten

Vorgang (i,j)	GP <sub>ij</sub>	FP <sub>ij</sub>	FRP <sub>ij</sub>	UP <sub>ij</sub>
(1,2)	$5-(0+5) = 0$	$5-(0+5) = 0$	$5-(0+5) = 0$	$\max(0,(5-(0+5))) = 0$
(1,3)	$9-(0+8) = 1$	$8-(0+8) = 0$	$9-(0+8) = 1$	$\max(0,(8-(0+8))) = 0$
(1,4)	$5-(0+3) = 2$	$3-(0+3) = 0$	$5-(0+3) = 2$	$\max(0,(3-(0+3))) = 0$
(2,6)	$10-(5+5) = 0$	$10-(5+5) = 0$	$10-(5+5) = 0$	$\max(0,(10-(5+5))) = 0$
(3,6)	$10-(8+1) = 1$	$10-(8+1) = 1$	$10-(9+1) = 0$	$\max(0,(10-(9+1))) = 0$
(4,5)	$10-(3+5) = 2$	$8-(3+5) = 0$	$10-(5+5) = 0$	$\max(0,(8-(5+5))) = 0$
(5,7)	$12-(8+2) = 2$	$10-(8+2) = 0$	$12-(10+2) = 0$	$\max(0,(10-(10+2))) = 0$
(6,8)	$13-(10+3) = 0$	$13-(10+3) = 0$	$13-(10+3) = 0$	$\max(0,(13-(10+3))) = 0$
(7,8)	$13-(10+1) = 2$	$13-(10+1) = 2$	$13-(12+1) = 0$	$\max(0,(13-(12+1))) = 0$

Abb. 4.1.17 Berechnung der Pufferzeiten

**4.1-d Kostenplanung**<sup>12</sup>

Die Kostenplanung stellt die wichtigste Erweiterung der Zeitanalyse in Netzplänen dar. Für jedes Projekt sind verschiedene Faktoren wie zum Beispiel Arbeit, Material, Kapital,... notwendig. Diese verursachen Kosten, die in der Kostenplanung als vorgangsbezogene Information einfließen. Allen Teilaufgaben und Vorgängen des Projekts müssen daher die entsprechenden Kosten zugeordnet werden.

Aufgabe der Kostenplanung ist es, die Kosten für das gesamte Projekt möglichst gering zu halten. Dabei unterscheidet man zwischen:

- direkte Projektkosten: sind gleich der Summe aller Kosten für die einzelnen Vorgänge
- indirekte Kosten: Kosten die als Funktion der Gesamtprojektdauer angegeben werden

<sup>12</sup> Vgl. [15], [19], [26], [46], [47]

Ziel der Kostenplanung ist es einerseits die minimalen Projektkosten in Abhängigkeit von der Projektdauer und andererseits die minimale Projektdauer bei vorgegebenen Projektkosten zu bestimmen.

Zuerst werden hier einige heuristische Überlegungen angestellt, um die wichtigsten Ideen für die Kostenplanung deutlich zu machen:

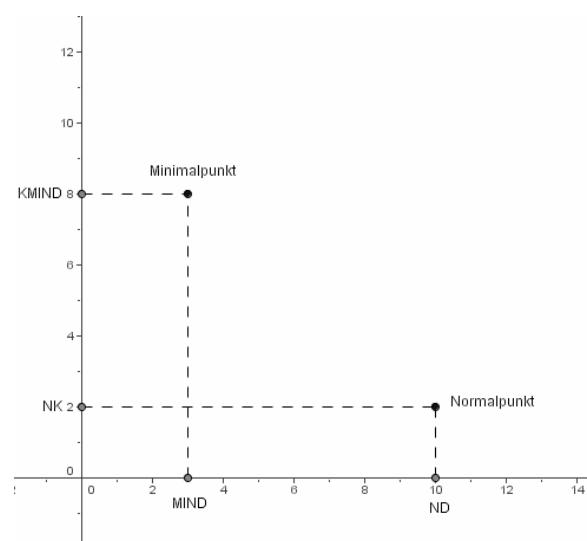
(a) Kosten jedes Vorgangs bei normaler Dauer

So wie in der Zeitplanung jedem Vorgang seine Dauer zugeschrieben wurde (mathematisch korrekt: Graph wird bewertet), werden nun jedem Vorgang die Kosten zugeschrieben, die seine Durchführung in der normalen Dauer  $ND_{ij}$  verursacht.

(b) Zeit-Kosten-Relation der Vorgänge

Die Kosten der einzelnen Vorgänge hängen ebenso wie die benötigte Zeit von der Intensität des Einsatzes der Faktoren Arbeit, Ausstattung, ... ab. Es ist daher meistens möglich, die für einen Vorgang benötigte Zeit durch den Mehreinsatz von Kosten zu verkürzen. So kann zum Beispiel ein Vorgang in einem Bauprojekt schneller beendet werden, wenn mehr Arbeitskräfte zur Verfügung stehen. Dies erhöht aber natürlich die Kosten.

Graphisch kann diese Situation wie folgt dargestellt werden:



**Abb.4.1.18** Normal- und Minimalpunkt

Der Normalpunkt gibt an, wie viele Kosten anfallen, wenn die normale Vorgangsdauer eingehalten wird. Die Dauer des Vorgangs kann bis zu einem Wert MIND reduziert werden, was die Kosten bis zu KMIND erhöht. Dieser Punkt wird Minimalpunkt genannt.

In der Praxis gibt es vier verschiedene Zeit-Kosten-Relationen eines Vorgangs:

- Normal- und Minimalpunkt fallen zusammen, d.h. es ist keine Verkürzung möglich. Diese Situation tritt zum Beispiel dann ein, wenn es sich um technisch notwendige Wartezeiten handelt (etwa Trocknungszeit des Estrichs).
- Es gibt nur den Normal- und den Minimalpunkt. Es gibt also nur zwei Möglichkeiten, etwa den Transport von Gütern, für die es die Möglichkeiten „per Schiff“ oder „per Flugzeug“ gibt.
- Zwischen Normal- und Minimalpunkt gibt es einzelne weitere mögliche Punkte. So kann der Transport zum Beispiel per Bahn, per LKW oder per Flugzeug durchgeführt werden.

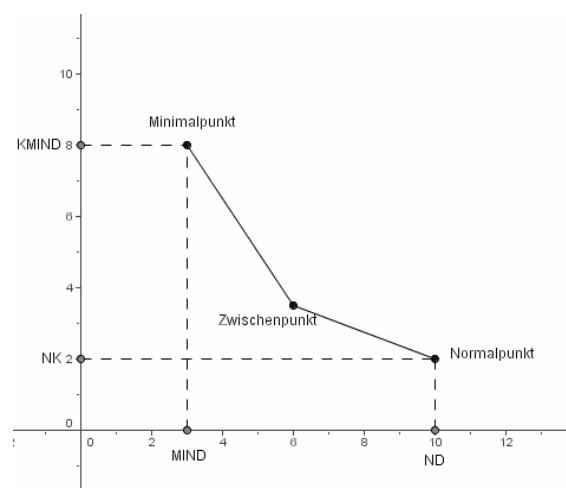


Abb.4.1.19 Beispiel

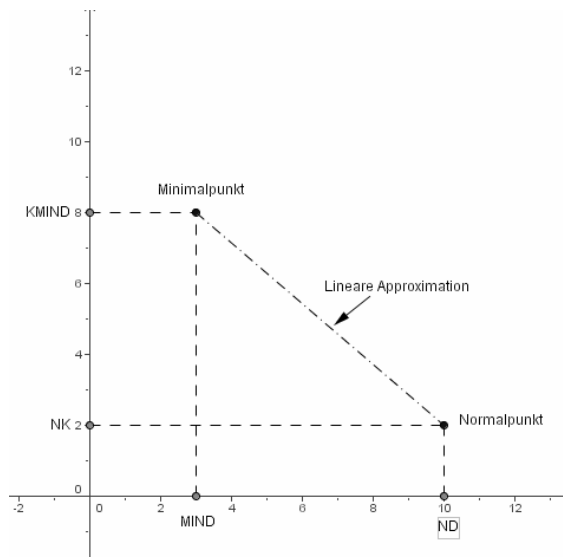
- Zwischen Normal- und Minimalpunkt ist eine stetige Kurve definiert, die in den meisten Fällen nicht der linearen Verbindung entspricht. Dieser Fall tritt etwa bei stetig ergänzten täglich anfallenden Kosten auf.

Zur Charakterisierung des Zeit-Kosten-Verlaufs eines Vorgangs ist vor allem das Steigungsverhältnis der linearen Verbindung zwischen Normal- und Minimalpunkt wichtig:



$$V = \frac{KMIND - NK}{ND - MIND}$$

Das Steigungsverhältnis gibt also, unter der Voraussetzung einer linearen Approximation, die Mehrkosten (= Beschleunigungskosten) an, die bei der Verkürzung des Vorgangs um eine Zeiteinheit anfallen.



**Abb.4.1.20** linearer Zeit-Kosten-Verlauf

(c) Gesamtkosten des Projekts (=Projektkosten)

Die Gesamtkosten eines Projekts sind aus den Kosten für die einzelnen Vorgänge leicht zu ermitteln. Da im Laufe des Projekts alle Vorgänge ausgeführt werden müssen, sind die Kosten, die bis zum Abschluss des Projekts anfallen, gleich der Summe der Kosten aller einzelnen Vorgänge. Die Projektkosten hängen von der Dauer der Durchführung ab. Das heißt, analog zum Kostenzuwachs der einzelnen Vorgänge bei einer Verkürzung der Dauer, erhöhen sich auch die Kosten für das gesamte Projekt durch die Verringerung der Projektdauer. Ebenfalls analog zur Dauer der Vorgänge gibt es eine minimale Projektdauer, unter der auch durch einen Mehraufwand an Kosten keine Zeiteinsparungen mehr möglich sind (siehe Abb.4.1.21).

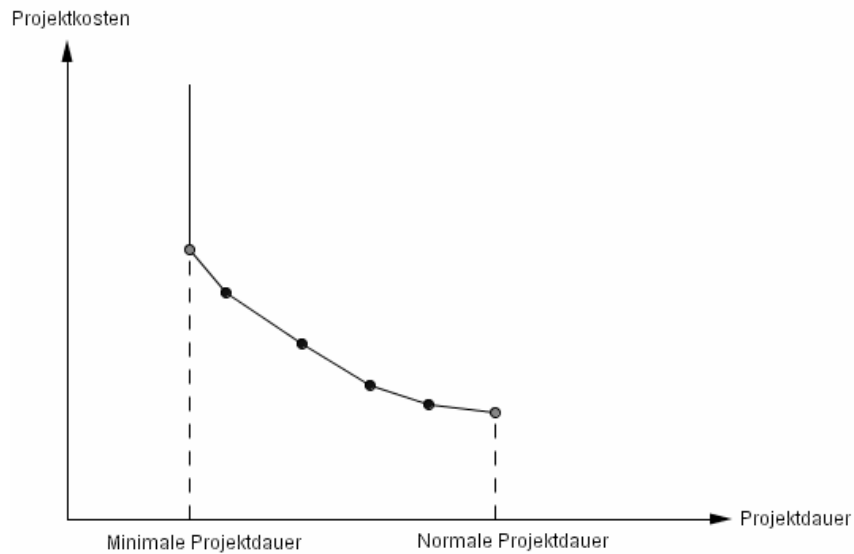
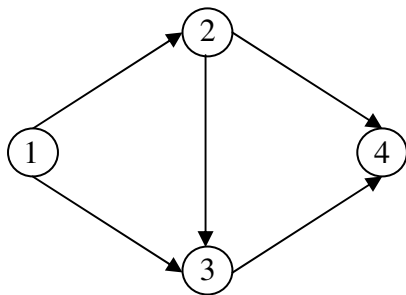


Abb.4.1.21 Projektkosten

Beispiel (siehe [26]):



Vorgang (i,j)	ND <sub>ij</sub>	MIND <sub>ij</sub>	NK <sub>ij</sub>	KMIND <sub>ij</sub>
(1,2)	5	4	10000	12000
(1,3)	10	5	20000	40000
(2,3)	2	1	6000	8000
(2,4)	8	4	16000	28000
(3,4)	5	3	15000	25000

Abb.4.1.22 Beispiel Kostenplanung

1. Schritt: Berechnung der Gesamtkosten bei Normaldauer

$$K = \sum_{(i,j) \in E} NK_{ij} = 67000$$

2. Schritt: Berechnung der Beschleunigungskosten

Vorgang (i,j)	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
Beschleunigungskosten	2000	4000	2000	3000	5000

3.Schritt: Berechnung des kritischen Weges auf Grund der Normaldauer der Vorgänge

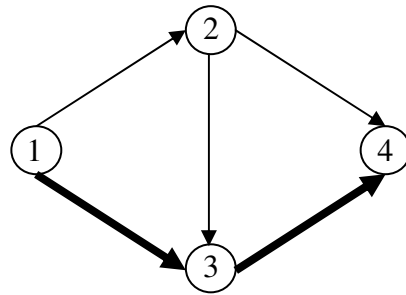


Abb.4.1.23 Beispiel Kostenplanung „Kritischer Pfad“

4. Schritt: Kürzung der Projektdauer

Eine Kürzung der Projektdauer ist entlang des kritischen Weges und mit möglichst geringen Beschleunigungskosten durchzuführen. Wir verkürzen also den Vorgang (1,3) so lange, bis ein anderer Weg ebenfalls zu einem kritischen wird, maximal aber bis die Dauer  $MIND_{13}$  beträgt.

→  $D_{13} = 8$  wodurch Beschleunigungskosten von 8000 entstehen.

Die gesamten Projektkosten steigen dadurch auf 75000. Gleichzeitig konnte aber die Projektdauer von 15 auf 13 Zeiteinheiten reduziert werden.

5.Schritt: Erneute Kürzung der Projektdauer

Durch die Kürzung des Vorgangs (1,3) sind nun mehrere Wege kritisch (siehe Abb. 4.1.25). Daher müssen mehrere Vorgänge gekürzt werden, um eine Verkürzung der gesamten Projektdauer zu erreichen.

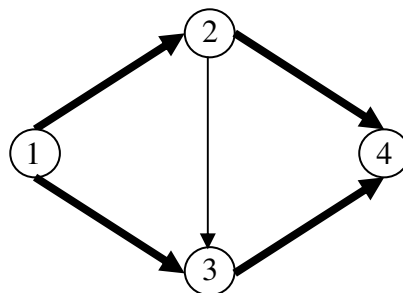


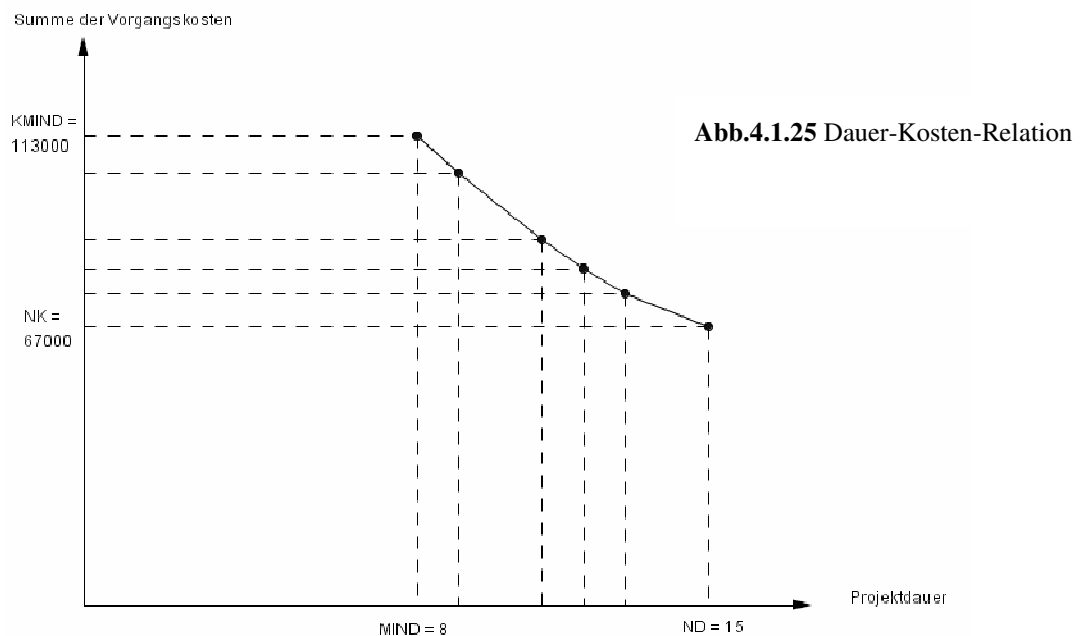
Abb.4.1.24 Beispiel Kostenplanung „Kritischer Pfad“ – 2

Gekürzte Vorgänge	Gekürzte Dauer	Verkürzungskosten
(1,2)	4	2000
(1,3)	7	4000

Das Projekt kann nun in 12 Zeiteinheiten ausgeführt werden und verursacht Kosten von 81000.

#### 6. Schritt: Weitere Kürzung der Projektdauer

Die Kürzung der Projektdauer wird analog zu den Schritten 4 und 5 so lange durchgeführt, bis die mindestens erforderliche Projektdauer MIND erreicht ist.



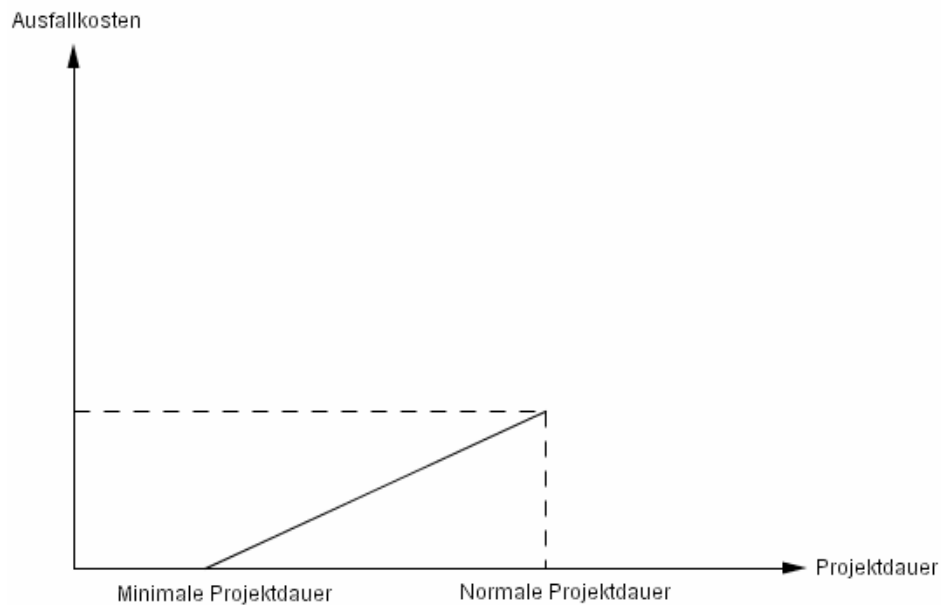
In diesen Überlegungen ist noch nicht beinhaltet, dass eine längere Projektdauer ebenfalls Kosten mit sich bringt.

#### (d) Ausfallkosten

Mit Hilfe der Ausfallkosten (Opportunity Costs) wird der entgangene Nutzen gemessen. Durch einen späteren Abschluss eines Projekts, kommt es zu einem Entgang an Nutzen. Zum Beispiel kommt es beim Bau einer Fabrik durch eine spätere Fertigstellung zu einem Produktionsausfall, durch den Verkaufserlöse ausbleiben. Besonders deutlich wird diese

Tatsache zum Beispiel bei der Wartung von großen Betriebsanlagen, bei denen jede Stunde Stillstand zu großen Produktionsverlusten führt.

Die Ausfallkosten können für jede Projektdauer berechnet werden und sind nur in der minimalen Projektdauer gleich Null.



**Abb.4.1.26** Ausfallkosten

Im Folgenden geht es darum, eine ideale Balance zwischen Verkürzung der Projektdauer und Kostenwachstum zu erreichen. Gesucht ist also jene Projektdauer, die wirtschaftlich optimal ist.

Maßgeblich sind zu eben dieser Bestimmung die Faktoren:

Projektkosten

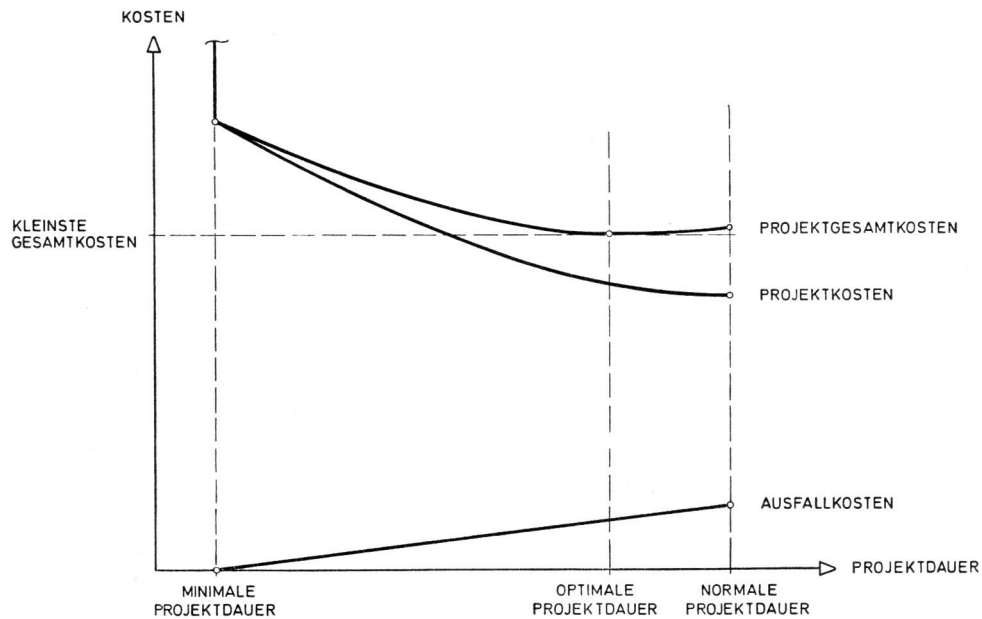
Ausfallkosten

(e) wirtschaftlich optimale Projektdauer

Allgemein gilt folgender Zusammenhang:

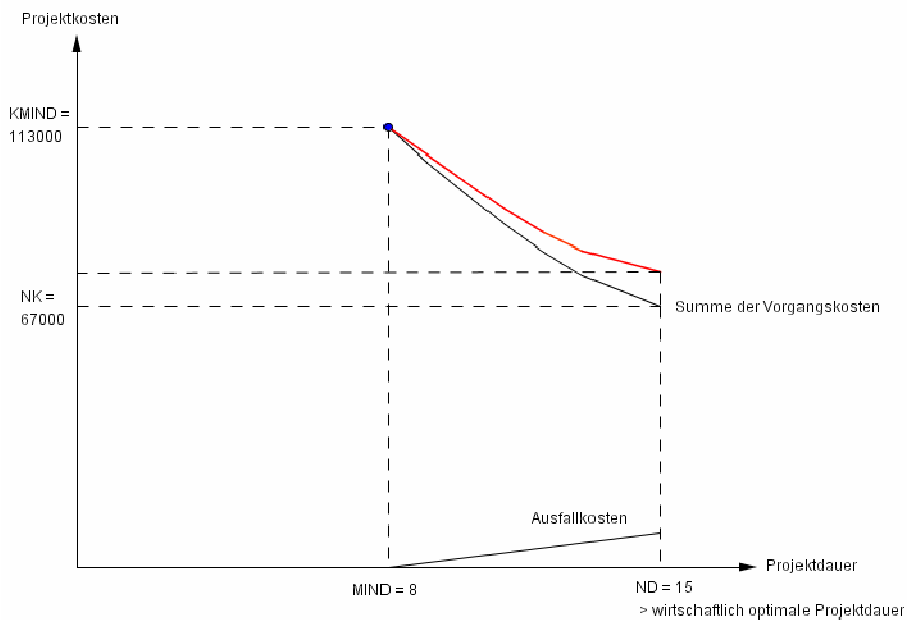
$$\text{Projektgesamtkosten} = \text{Projektkosten} + \text{Ausfallkosten}$$

Die wirtschaftlich optimale Projektdauer ist dann erreicht, wenn die Projektgesamtkosten minimal sind. Schematisch werden die Zusammenhänge in Abb.4.1.28 dargestellt.



**Abb.4.1.27** wirtschaftlich optimale Projektdauer (siehe [12])

In obigem Beispiel ergibt sich, unter der Annahme dass die Ausfallkosten durch  $K_i(T) = 1250 \cdot T + 10000$  gegeben sind, folgende wirtschaftliche Optimaldauer:



**Abb.4.1.28** Beispiel - wirtschaftlich optimale Projektdauer

Wir werden nun mathematisch konkret:

Wir bezeichnen die konvexe Kostenfunktion des Vorgangs  $(i,j)$  im Intervall  $[MIND_{ij}, ND_{ij}]$  mit  $K_{ij} = K_{ij}(D_{ij})$ . Diese Funktion nimmt ihr absolutes Minimum an der Stelle  $ND_{ij}$  an.

Für die tatsächlich geplante Dauer des Vorgangs ( $D_{ij}$ ) gilt folgender Zusammenhang:

$$MIND_{ij} \leq D_{ij} \leq ND_{ij}$$

Die Dauer eines Vorgangs ( $D_{ij}$ ) kann natürlich die mindestens dafür nötige Dauer ( $MIND_{ij}$ ) nicht unterschreiten und auch eine Überschreitung der normalen Dauer ( $ND_{ij}$ ) wird in der Planung nicht von Interesse sein, da diese sowohl zu einer Verlängerung des Vorgangs als auch zu höheren Kosten führen würde.

#### **Def. 4.1.6 Kostenfunktion**

Die Kostenfunktion des Vorgangs ( $i,j$ ) werde, in Abhängigkeit von der Dauer des Vorgangs ( $i,j$ ), wie folgt definiert:

$$K_{ij}(D_{ij}) = -b_{ij}D_{ij} + c_{ij} \quad \text{mit } b_{ij}, c_{ij} \geq 0$$

Für Scheinvorgänge gelte:  $b_{ij}, c_{ij} = 0$

Damit können wir die zwei am Anfang des Kapitels genannten Ziele mathematisch korrekt formulieren:

Sei  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  mit  $1 = \text{Quelle}$  und  $n = \text{Senke}$  die Knotenmenge und  $E$  die Kantenmenge eines CPM-Netzplans.  $Z_i$  gebe den Eintrittszeitpunkt des  $i$ -ten Ereignisses an.

(1) Minimierung der Projektkosten für eine Projektdauer  $T$ :

$$\sum_{(i,j)} (-b_{ij} D_{ij} + c_{ij}) = \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$Z_j - Z_i - D_{ij} \geq 0 \quad \text{für } (i, j) \in E$$

$$MIND_{ij} \leq D_{ij} \leq ND_{ij} \quad \text{für } (i, j) \in E$$

$$Z_1 = 0, Z_n = T$$

Es handelt sich also um ein lineares Optimierungsproblem, das vom Parameter  $T$  abhängt (Parametrisches lineares Optimierungsproblem). Aufgabe ist es, die Variablen  $Z_i$  und  $D_{ij}$  zu bestimmen. Ist  $T$  fest vorgegeben, so handelt es sich um ein lineares Optimierungsproblem, welches mit dem Simplex-Verfahren gelöst werden kann. Ist  $T$  nicht fest vorgegeben, so verwendet man zumeist das Verfahren von Kelly (siehe [67]), welches die in obigem Beispiel angegebene Methode der schrittweisen Verkürzung der

Projektdauer verallgemeinert und algorithmisch mit Hilfe des Verfahrens zur Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk (Algorithmus von Ford und Fulkerson, siehe z.B. [31]) umsetzt.

(2) Minimierung der Projektdauer bei vorgegebenen maximalen Projektkosten  $K$ :

$$T = Z_n = \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} Z_j - Z_i - D_{ij} &\geq 0 \quad \text{für } (i, j) \in E \\ \text{MIND}_{ij} &\leq D_{ij} \leq \text{ND}_{ij} \quad \text{für } (i, j) \in E \\ Z_1 &= 0 \\ \sum_{(i,j)} (-b_{ij} D_{ij} + c_{ij}) &\leq K \end{aligned}$$

Hier liegt ein lineares Optimierungsproblem vor, das mit Hilfe des Simplex-Verfahrens gelöst werden kann.

#### 4.1-e Kapazitätsplanung<sup>13</sup>

In den bisherigen Überlegungen zur Zeit- und Kostenplanung wurde nicht berücksichtigt, dass Arbeitskräfte, Maschinen, Kapitel,... nur in beschränktem Ausmaß vorhanden sind und daher für einen optimalen Projektplan auch die Aufteilung und Ausnutzung der Ressourcen optimal zu gestalten ist. Denn es nutzt in der Praxis kein optimaler Zeit- und Kostenplan, wenn die Durchführung an fehlenden Ressourcen scheitert.

In der Kapazitätsplanung kann man einige Hauptinteressen ansprechen, die in der Praxis aber meist gekoppelt auftreten:

(1) Kapazitätsbedarfsermittlung (resources allocation):

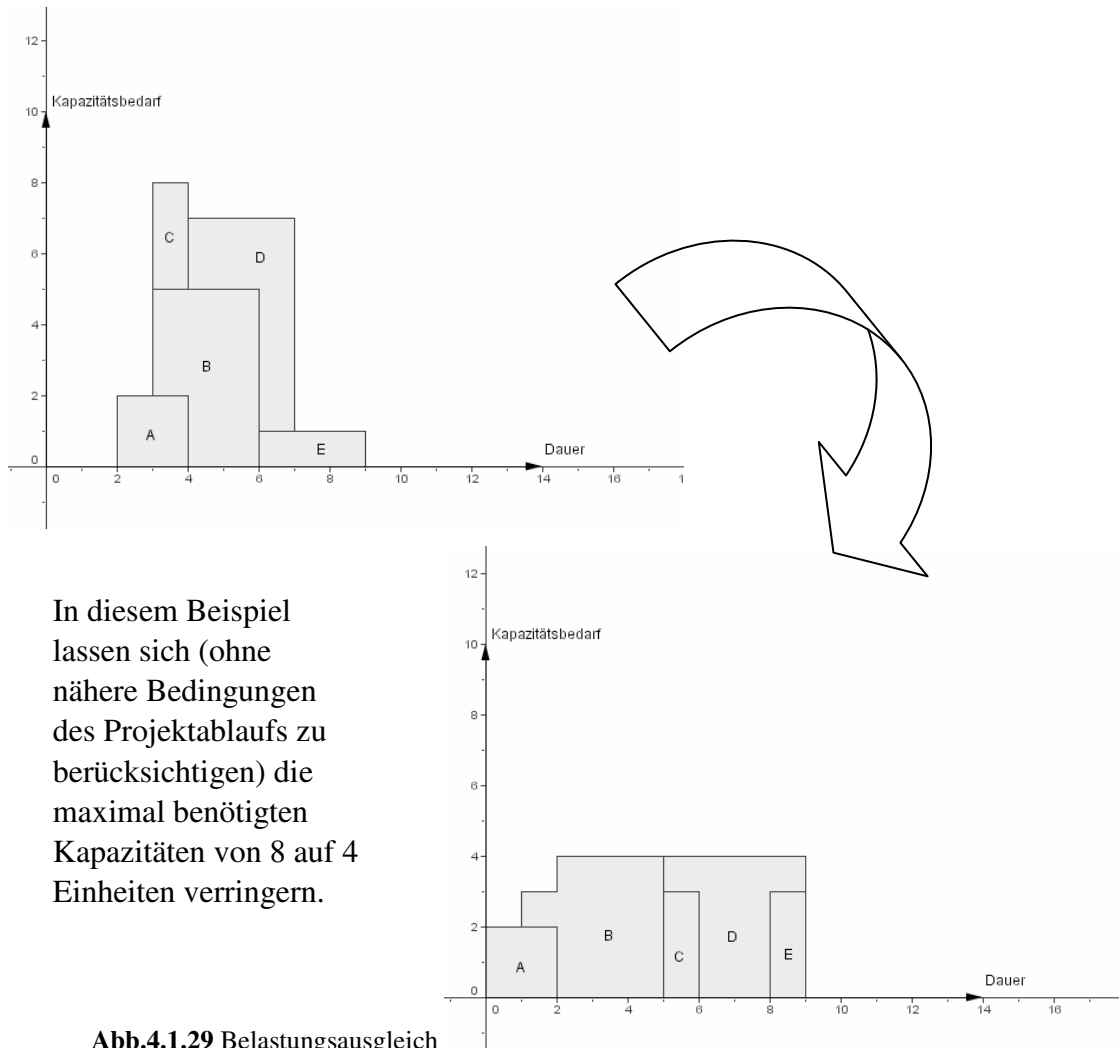
Soll die Frage klären: „Wann brauche ich wie viel von welcher Ressource?“

(2) Belastungsausgleich (smoothing oder levelling):

Versucht durch eine Verschiebung einzelner Vorgänge einen Ausgleich der Schwankungen des Kapazitätsbedarfs zu schaffen.

<sup>13</sup> Vgl. [15], [26], [47], [67]





(3) Berücksichtigung der Kapazitätsschranken bei der Terminplanung (resources allocation and scheduling):

Alle Termine eines Projekts werden so berechnet, dass vorgegebene Kapazitätsschranken nie überschritten werden. Dies führt meist zu einer Verschiebung einzelner Vorgänge und häufig auch zu einer Verlängerung der gesamten Projektdauer.

(4) Kostenoptimierung bei der Kapazitätsbelastung:

Dabei steht die Frage im Mittelpunkt: „Wie verteile ich die Ressourcen so auf die einzelnen Vorgänge, dass das Gesamtprojekt Kosten und Zeit minimal durchgeführt werden kann?“

Für die folgenden Ausführungen nehmen wir vereinfachend an, dass nur ein Einsatzmittel verwendet wird, das in Mengeneinheiten (ME) gemessen wird.

In einem ersten Schritt müssen folgende Parameter festgelegt bzw. ermittelt werden:

$t \in \{1, 2, \dots, T\}$  ist diskreter Zeitparameter

$$x_{ij,t} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, j) \in E \text{ zwischen } t-1 \text{ und } t \text{ ausgeführt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Projektdauer in Zeiteinheiten (ZE) = T

Einsatzmittelkapazität in ME / ZE im Zeitraum t-1 bis t =  $EMK_t$  mit  $t = 1, 2, \dots, T$

Einsatzmittelbedarf des Vorgangs (i,j) in ME / ZE =  $EMB_{ij}$

Die Bedarfsermittlung je Vorgang erfolgt folgendermaßen:

$$EMB_{ij} = A_{ij} \cdot D_{ij} \cdot L_{ij}$$

mit

$A_{ij}$  ... Anzahl der eingesetzten Arbeitskräfte bzw. Betriebsmittel in ME

$D_{ij}$  ... Dauer des Vorgangs in ZE

$L_{ij}$  ... Leistung je Zeiteinheit und Betriebsmittel bzw. Arbeitskraft

Bei der Planung eines Projekts ist aber nicht der Einsatzmittelbedarf der einzelnen Vorgänge wichtig, sondern der gesamte Einsatzmittelbedarf pro Zeiteinheit:

$$GEMB_t = \sum_{(i,j) \in E} x_{ij,t} EMB_{ij}$$

$GEMB_t$  gibt an, wie hoch der Einsatzmittelbedarf für alle auszuführenden Vorgänge im Zeitabschnitt von t-1 bis t pro Zeiteinheit ist. Da, wie oben unter dem Schlagwort Belastungsausgleich angeführt, immer versucht wird, die Kapazitäten über die Projektdauer möglichst gleichmäßig zu verteilen, ist auch der durchschnittliche gesamte Einsatzmittelbedarf über die Projektdauer wichtig:

$$\overline{GEMB} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T GEMB_t = \frac{1}{T} \sum_{(i,j) \in E} EMB_{ij} D_{ij}$$

Um die Einsatzmittel für das Projekt möglichst gleichmäßig über die Zeit zu verteilen, müssen zusätzliche Kosten in Kauf genommen werden. Diese werden als Nivellierungskosten bezeichnet und sind wie folgt definiert:

$$NK = c_1 \left( \sum_{t=1}^T (GEMB_t - \overline{GEMB})^2 \right), \text{ mit } c_1 \text{ eine Konstante}$$

Die wirtschaftliche Erklärung für die Definition der Nivellierungskosten ist, dass durch jede Abweichung von einem durchschnittlichen Einsatzmittelbedarf Kosten entstehen. Wird GEMB unterschritten, so entstehen durch die nicht vollständige Auslastung der Einsatzmittel Kosten. Wird GEMB hingegen überschritten, so verzögert sich die Vollendung. Auch das verursacht Kosten.

An einen Netzplan, der eine optimale Lösung des Kapazitätsproblems unter Berücksichtigung von Zeit- und Kostenplanung liefert, werden folgende Forderungen gestellt:

(1) Ist der Vorgang (k,i) ein Vorläufer des Vorgangs (i,j) dann muss gelten

$$D_{ki} x_{ij,t} \leq \sum_{s=1}^{t-1} x_{ki,s}$$

Durch diese Forderung wird sichergestellt, dass (k,i) bereits beendet ist, wenn (i,j) beginnt.

(2) Mit dieser Forderung wird sichergestellt, dass die Vorgänge ohne Unterbrechung ausgeführt werden:

$$D_{ij} (x_{ij,t} - x_{ij,t+1}) + \sum_{s=t+2}^T x_{ij,s} \leq D_{ij} \quad \text{für } t = 1, 2, \dots, T-1$$

(3) Schlussendlich muss noch festgestellt werden, dass der gesamte Einsatzmittelbedarf jeder Zeiteinheit nie die Einsatzmittelkapazität übersteigt:

$$GEMB_t \leq EMK_t$$

Da zwischen den  $AZ_{ij}$  und den  $x_{ij,t}$  folgender Zusammenhang besteht

$$x_{ij,t} = 1 \Leftrightarrow t - D_{ij} \leq AZ_{ij} \leq t - 1$$

sind die  $x_{ij,t}$  gesucht, die den Forderungen (1)-(3) genügen und die Gesamtkosten des Projekts minimieren:

$$NK + c_2 T = \min \quad \text{mit } c_2 \in \text{Konstante}$$

Eventuell sind auch noch direkte Projektkosten, die in der Kostenplanung berechnet wurden, zu berücksichtigen:

$$NK + c_2 T + \sum_{(i,j) \in E} K_{ij}(D_{ij}) = \min, \text{ mit } c_2 \text{ eine Konstante}$$

Zur Lösung des Kapazitätsproblems ist also die oben definierte binäre Optimierungsaufgabe zu lösen. Die vielen Variablen und Restriktionen machen aber eine Lösung der Aufgabe mit den Verfahren der ganzzahligen Optimierung unmöglich.

Es gibt eine Reihe heuristischer Lösungsverfahren, die in einer vertretbaren Rechenzeit zu einer Lösung führen, die zwar im mathematischen Sinn nicht optimal ist, für die Praxis jedoch völlig ausreicht.

## 4.2 Metra-Potential-Method („MPM“)

### 4.2-a Grundbegriffe und Zielsetzungen <sup>14</sup>

Die zweite deterministische Methode der Netzplantechnik, die in dieser Arbeit erläutert wird, ist die bekannteste Methode, welche auf Vorgangsknoten-Netzplänen beruht. Die Zuordnung der Sachargumente zu den formalen Elementen des Netzplans sieht wie folgt aus:



Abb.4.2.1 Vorgangsknoten-Netzplan

Ein Knoten eines MPM-Netzplans stellt also einen Vorgang des Projekts dar, wogegen die Pfeile „nur“ die Anordnungsbeziehungen zwischen den Vorgängen darstellen. Mathematisch präziser ausgedrückt heißt das, dass MPM den Knoten die Beginnzeiten der Vorgänge zuordnet. Die Anordnungsbeziehungen des Netzplans entsprechen einer sogenannten Start-Start-Beziehung:

#### **Def. 4.2.1 Start-Start-Beziehung**

Ein Vorgang B kann erst begonnen werden, nach dem sein Vorläufer A begonnen worden ist.

<sup>14</sup> Vgl. [12], [15], [47]

Als Beispiel könnte ein Schirennen genommen werden: Der Rennläufer mit der Startnummer 7 kann erst starten, wenn der Rennläufer mit der Nummer 6 bereits gestartet ist.

In der Praxis sind Beziehungen dieser Art eher selten vorzufinden. Daher ist es notwendig Zeitabstände zwischen den Vorgängen einzuführen. Dies geschieht über die Bewertung der Kanten, die im Kapitel 4.2-b besprochen wird. Hier sei nur aufgeführt, dass die Bewertung der Kanten  $(i,j)$  jeweils der Dauer vom Beginn des Vorgangs  $i$  bis zum Beginn des Nachläufers  $j$ , im Sinne eines Mindestabstands, entspricht.

Ziel der MPM-Netzplantechnik ist es, wie bei den anderen beschriebenen Methoden, einen Strukturplan zu erstellen, an Hand dessen eine optimale Zeit- und Kostenplanung möglich ist. Der Vorteil von MPM besteht darin, dass es möglich ist, zwischen den Vorgängen minimale und maximale Zeitabstände zu implementieren. Wie dies technisch umgesetzt wird, wird im Kapitel über die Strukturplanung (4.2-b) näher erläutert.

#### 4.2-b Strukturplanung – Aufstellen eines MPM-Netzplans <sup>15</sup>

Im Folgenden für MPM-Netzpläne verwendete Notation:

Vorgänge

a,b,c,d,...

Angenommen es ist ein Graph  $G(V,E)$  mit  $E = \{a,b,c,\dots,n\}$  zu konstruieren, so gibt es folgende spezielle Grundregeln zum Aufstellen eines MPM-Netzplans:

##### (1) Beziehungen zwischen Vorgängen welche aufeinander folgen:

Ein großer Vorteil der MPM-Netzplantechnik ist, dass zwischen den Anfangszeitpunkten von zwei Vorgängen sowohl ein minimaler als auch ein maximaler zeitlicher Abstand modelliert werden kann:

##### **Minimalabstand zwischen dem Beginn zweier Vorgänge (MIN)**

Ein Vorgang  $j$  kann frühestens eine vorgegebene Zeitspanne  $t_{ij} \geq 0$  nach Beginn des vorangegangenen Vorgangs  $i$  anfangen, d.h. es sei

<sup>15</sup> Vgl. [12], [15], [47]

$$AZ_j - AZ_i \geq t_{ij}$$

Die Kante (i,j) wird dann, wie in Abb.4.2.2 dargestellt, mit  $t_{ij}$  bewertet.

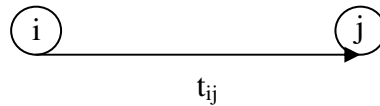


Abb.4.2.2 Beispiel „Regel 1“ Minimalabstand

### Maximalabstand zwischen dem Beginn zweier Vorgänge (MAX)

Ein Vorgang j muss spätestens eine vorgegebene Zeitspanne  $T_{ij} \geq 0$  nach Beginn des vorangegangenen Vorgangs i anfangen, d.h. es sei

$$AZ_j - AZ_i \leq T_{ij} \Leftrightarrow AZ_i - AZ_j \geq -T_{ij}$$

Dann wird von j nach i eine Kante gezeichnet und diese mit  $-T_{ij}$  bewertet (siehe Abb.4.2.3)

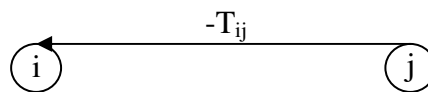


Abb.4.2.3 Beispiel „Regel 1“ Maximalabstand

Mit Hilfe dieser Beziehungen können weitere spezielle Beziehungen zwischen dem Beginn zweier Vorgänge in der Projektplanung berücksichtigt werden, die mit vielen anderen Netzplantypen, zum Beispiel CPM, nicht modellierbar sind:

#### (1a) Zwei Vorgänge sind in lückenloser Abfolge auszuführen:

Der Vorgang j muss genau dann beginnen, wenn der Vorgang i abgeschlossen wird. Das heißt, der Minimalabstand zwischen dem Beginn der beiden Vorgänge muss gleich dem Maximalabstand sein und der Dauer des Vorgangs i ( $D_i$ ) entsprechen.

$$D_i = t_{ij} \leq AZ_j - AZ_i \leq T_{ij} = D_i \Rightarrow AZ_j - AZ_i = D_i$$

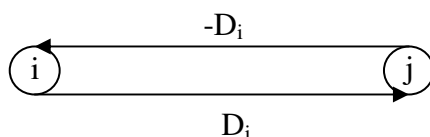


Abb.4.2.4 Beispiel „Regel 1a“

(1b) Zwei Vorgänge sind gleichzeitig zu beginnen:

Ist es für ein Projekt notwendig, dass die Vorgänge i und j zeitgleich begonnen werden, so muss der Abstand zwischen den Anfangszeitpunkten  $AZ_i$  und  $AZ_j$  gleich Null sein. Exakter formuliert: sowohl der Minimal- als auch der Maximalabstand der Anordnungsbeziehung (i,j) müssen gleich Null sein.

$$0 = t_{ij} \leq AZ_j - AZ_i \leq T_{ij} = 0 \Rightarrow AZ_j - AZ_i = 0$$

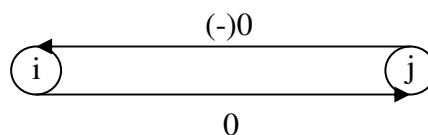


Abb.4.2.5 Beispiel „Regel 1b“

(2) Darstellung von Überlappungen zweier Vorgänge:

MPM bietet bei der Darstellung von zeitlichen Überlappungen zweier Vorgänge, durch die in (1) eingeführten Minimalabstände zwischen dem Beginn von Vorgängen, eine, im Vergleich zu den anderen Typen der Netzplantechnik, besonders einfache Möglichkeit.

Beispiel: Vorgang a dauert 30 Zeiteinheiten. Vorgang b kann aber bereits 20 Zeiteinheiten nach Beginn des Vorgangs a begonnen werden. Die Vorgänge überlappen sich daher:

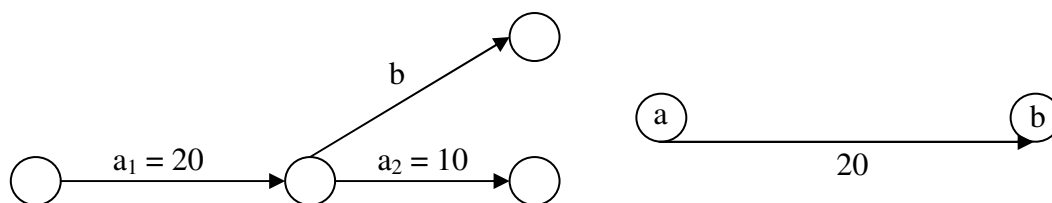


Abb.4.2.6 Beispiel „Regel 2“ in einem CPM-Netzplan (links) und einem MPM-Netzplan (rechts)

An der Darstellung des MPM-Netzplans ändert eine Überlappung von Vorgängen nichts. Nur die Bewertung der Pfeile ist im Falle einer einzuführenden Überlappung zu verändern.

(3) Projektbeginn bzw. Projektende:

Bei CPM-Netzplänen ist es kein Problem, mehrere voneinander unabhängige Startvorgänge eines Projekts von einem gemeinsamen Startknoten aus zu zeichnen. Bei

MPM-Netzplänen ist dies nicht so einfach möglich, da jeder Knoten den Beginn eines Vorgangs darstellt und daher nicht mehrere Knoten zusammengefasst werden können. Es wird daher eine weitere fiktive Starttätigkeit A eingeführt. Analog verfährt man mit der Senke des Netzplans durch Einführung einer fiktiven Endtätigkeit N.

Für die fiktive Starttätigkeit A gelte:  $AZ_A = 0$

Die hinzugefügten fiktiven Start- und Endtätigkeiten sind von Start- und Zielvorgängen zu unterscheiden:

#### **Def. 4.2.2 Startvorgang**

Ein Vorgang i heißt Startvorgang, falls  $i \neq A$  und es keinen Vorgang  $j \neq A$  gibt, der vor Beginn des Vorgangs i begonnen wird.

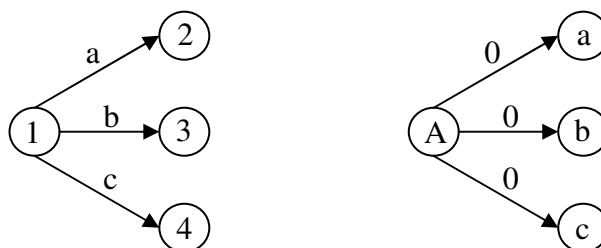
Für jeden Startvorgang ist ein Pfeil (A,i) einzuführen, der die Bewertung Null erhält, falls kein Minimalabstand zwischen A und i vorgegeben ist.

#### **Def. 4.2.3 Zielvorgang**

Ein Vorgang j heißt Zielvorgang, falls  $j \neq N$  und es keinen anderen Vorgang  $i \neq N$  gibt, der nach Beendigung des Vorgangs j begonnen wird.

Zu jedem Zielvorgang wird ein Pfeil (j,N) eingeführt, der mit der Dauer des Vorgangs j ( $D_j$ ) bewertet ist, wenn kein Mindestabstand zwischen j und N angegeben ist.

Beispiel: Ein Projekt hat drei Startvorgänge a, b und c, die alle gleichzeitig beginnen können.



**Abb.4.2.7** Beispiel „Regel 3“  
in einem CPM-Netzplan  
(links) und einem MPM-  
Netzplan (rechts)



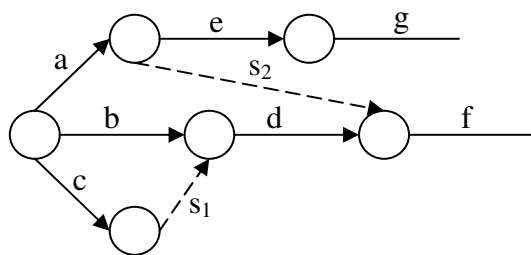
(4) Zeitliche Bindung eines Vorgangs an den Projektbeginn:

Diese, sehr praxisrelevante zeitliche Kopplung an den Projektbeginn legt fest, dass ein Vorgang  $i$  frühestens  $t_{Ai}$  und maximal  $T_{Ai}$  Einheiten nach dem Projektbeginn begonnen wird. Anwendung findet diese Anwendungsbeziehung zwischen einem Vorgang  $i$  und dem Projektbeginn unter anderem in der Wirtschaft. Zum Beispiel beim System der just-in-time-Produktion sind Vorgänge genau zu den bereits vor Projektbeginn festgelegten Lieferterminen auszuführen.

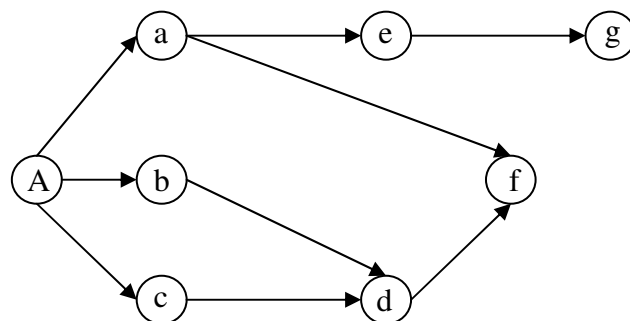
$$t_{Ai} \leq AZ_i - AZ_A \leq T_{Ai} = AZ_i$$

(5) Scheintätigkeiten:

Bei MPM-Netzplänen entfallen Scheintätigkeiten ausgenommen der fiktiven Start- und Endtätigkeiten des Projekts.



**Abb.4.2.8** Beispiel „Regel 4“ in einem CPM-Netzplan (links) und einem MPM-Netzplan (unten)



Veränderungen, die durch eine Änderung der Ablaufstruktur des Projekts im Netzplan durchzuführen sind, bereiten bei MPM relativ geringe Schwierigkeiten, denn

(a) es gibt keine Scheinvorgänge

(b) an dem System der Knoten (also den Vorgängen) ändert sich nichts, es sind lediglich einige Pfeile zu ändern.

MPM-Netzpläne weisen einige spezielle graphentheoretische Merkmale auf. Stellt man einen Netzplan mit den Regeln, wie oben beschrieben, auf, so ist dieser schwach

zusammenhängend, enthält sowohl positive als auch negative Kantenbewertungen und Zyklen. Alle Zyklen eines MPM-Netzplans sind  $\leq 0$ , da der Maximalabstand jeder Kante  $(i,j)$  größer oder gleich dem Minimalabstand von  $(i,j)$  sein muss. Ansonsten müsste ein Vorgang spätestens zu einem Zeitpunkt beginnen, an dem er noch gar nicht beginnen darf. Ferner hat der einen MPM-Netzplan repräsentierende Graph die Eigenschaft, dass jeder Knoten von der fiktiven Starttätigkeit A aus durch einen gerichteten Weg erreichbar ist und dass von jedem Knoten ein gerichteter Weg zur fiktiven Endtätigkeit N führt.

#### 4.2-c Zeitplanung

Gesucht ist:

- $FAZ_i$  ... frühest möglicher Anfangszeitpunkt des Vorgangs i
- $FEZ_i$  ... frühest möglicher Endzeitpunkt des Vorgangs i
- $SAZ_i$  ... spätest möglicher Anfangszeitpunkt des Vorgangs i
- $SEZ_i$  ... spätest möglicher Endzeitpunkt des Vorgangs i
- $GP_i$  ... Gesamtpuffer des Vorgangs i
- kritische Vorgänge (die Frage nach einem kritischen Weg ist bei MPM nicht sinnvoll, da mit einem, dem kritischen Weg zugeordneten Knoten der auf einem Zyklus der Länge Null liegt auch alle weiteren Vorgänge auf diesem Zyklus kritisch werden würden.)

Dabei gelten zwischen den Anfangs- und Endzeitpunkten die Zusammenhänge

$$FEZ_i = FAZ_i + D_i \quad \text{und} \quad SEZ_i = SAZ_i + D_i$$

und für den Gesamtpuffer

$$GP_i = SAZ_i - FAZ_i = SEZ_i - FEZ_i$$

Zur Berechnung der gesuchten Werte, benötigen wir die Definition des „Potential eines Graphen“, die in Kapitel 3.1 bereits ausgeführt wurde.

Bevor wir uns dieser graphentheoretischen Definition noch einmal zuwenden, legen wir fest:

$$FAZ_A = 0.$$

$FEZ_N \leq T$  wenn eine maximale Projektdauer  $T$  vorgegeben ist. Sollte das Projekt möglichst schnell abgeschlossen werden, so setzen wir voraus, dass  $SEZ_N = FAZ_N$  ist.

#### **Def. 4.2.4 Potential eines Graphen**

Für ein Netzwerk  $G(V,E,b)$  mit  $V = \{A,1,2,\dots,n, N\}$  heißt eine Abbildung  $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\pi(j) - \pi(i) \geq b_{ij} \quad \text{für } (i,j) \in E$$

Potential des Graphen  $G$ .

#### **Satz 4.2**

Es sei  $\pi$  ein Potential und  $c$  eine Konstante, so gilt

$\pi + c$  ist ein Potential.

Beweis: z.z.  $(\pi(j) + c) - (\pi(i) + c) \geq b_{ij}$

$$(\pi(j) + c) - (\pi(i) + c) \geq \pi(j) - \pi(i) \geq b_{ij}$$

Durch die Bedingungen

$$\pi(A) = 0 \quad \text{und} \quad \pi(N) = K, \quad \text{mit } K \text{ ist eine Konstante}$$

ist ein eindeutig minimales und maximales Potential bestimmt. Auf Grund der Ungleichungen

$$AZ_j - AZ_i \geq t_{ij} \quad \text{und} \quad AZ_j - AZ_i \leq T_{ij} \Leftrightarrow AZ_i - AZ_j \geq -T_{ij}$$

ist durch die  $AZ(i) = AZ_i$  für  $i=A,1,2,\dots,n, N$  bereits ein Potential auf dem MPM-Netzplan definiert.

Unter den Forderungen

$$\pi(A) = 0 \quad \text{und} \quad \pi(N) = SEZ_N = SAZ_N$$

ist  $FAZ(i) := FAZ_i$  das eindeutig bestimmte minimale und  $SAZ(i) := SAZ_i$  das eindeutig bestimmte maximale Potential des Netzplans.

$FAZ_i$  und  $SAZ_i$  werden mit Hilfe von Algorithmen zur Berechnung des längsten Weges durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsrechnung bestimmt.

$FAZ_i$  ... längster Weg von Knoten A zu Knoten i

$SAZ_i$  ...  $SAZ_N$  – längster Weg von Knoten i zu Knoten N

Da MPM-Netzpläne im Allgemeinen Zyklen und negative Kantenbewertungen enthalten, ist der, in Kapitel 3.1 vorgestellte, Algorithmus von Bellman nicht einsetzbar. Es stehen dann z.B. das Verfahren von Bellman-Ford oder der Tripel-Algorithmus von Floyd und Warshall zur Verfügung (für nähere Ausführungen dazu wird auf die Literatur zur Graphentheorie z.B. [10],[21],[31] und [11] verwiesen. Die Kantenbewertungen negativen und positiven Vorzeichens angegebener kürzester Weg-Verfahren können durch Änderung der Vorzeichen der Kantenbewertungen oft problemlos in längste Wege Verfahren übersetzt werden.)

DAENZER hat in seinem Werk „Netzplantechnik“ ([12]) noch eine Alternative zu den beiden Lösungsalgorithmen aufgezeigt, durch die die gesuchten Zeitpunkte auch durch eine einfache Vor- und Rückwärtsberechnung ermittelt werden können. Im Zuge dieses eher heuristischen Verfahrens, müssen die berechneten Werte allerdings immer noch einer Kontrolle unterzogen werden, um Fehler durch negative Kantenbewertungen auszuschließen. Das Verfahren ist daher eher zur Veranschaulichung und für Netzpläne mit sehr wenigen Vorgängen geeignet. Das Vorgehen soll an folgendem einfachen Beispiel gezeigt werden. Dazu führen wir eine abweichende graphische Darstellung des Netzplans ein, indem wir die Knoten durch Rechtecke bezeichnen, welche die folgenden Informationen enthalten:

Name des Vorgangs i		
FAZ <sub>i</sub>	D <sub>i</sub>	FEZ <sub>i</sub>
SAZ <sub>i</sub>	GP <sub>i</sub>	SEZ <sub>i</sub>

**Abb.4.2.9** Darstellung der Vorgänge im MPM-Netzplan

Für das Projekt „Eierspeise kochen“ seien folgende Vorgänge auszuführen:

- „Pfanne erhitzen“ (3 Minuten) → Vorgang a
- „Eier hineinschlagen“ (1 Minute) → Vorgang b
- „Schnittlauch schneiden“ (2 Minuten) → Vorgang c
- „Eierspeise wenden“ (1 Minute) → Vorgang d
- „Anrichten“ (1 Minute) → Vorgang e

Außerdem sollen folgende Anwendungsbeziehungen bestehen:

Vorgang b muss genau 3 Minuten nach dem Beginn von Vorgang a begonnen werden.

Vorgang c kann frühestens 1 Minute nach dem Beginn von Vorgang a begonnen werden,

muss allerdings mindestens 2 Minuten und maximal 4 Minuten vor Beginn des Vorgangs e begonnen werden. Der Start des Vorgangs d hat genau 3 Minuten nach Beginn des Vorgangs b zu erfolgen. Weitere 3 Minuten später ist der Vorgang e zu beginnen.

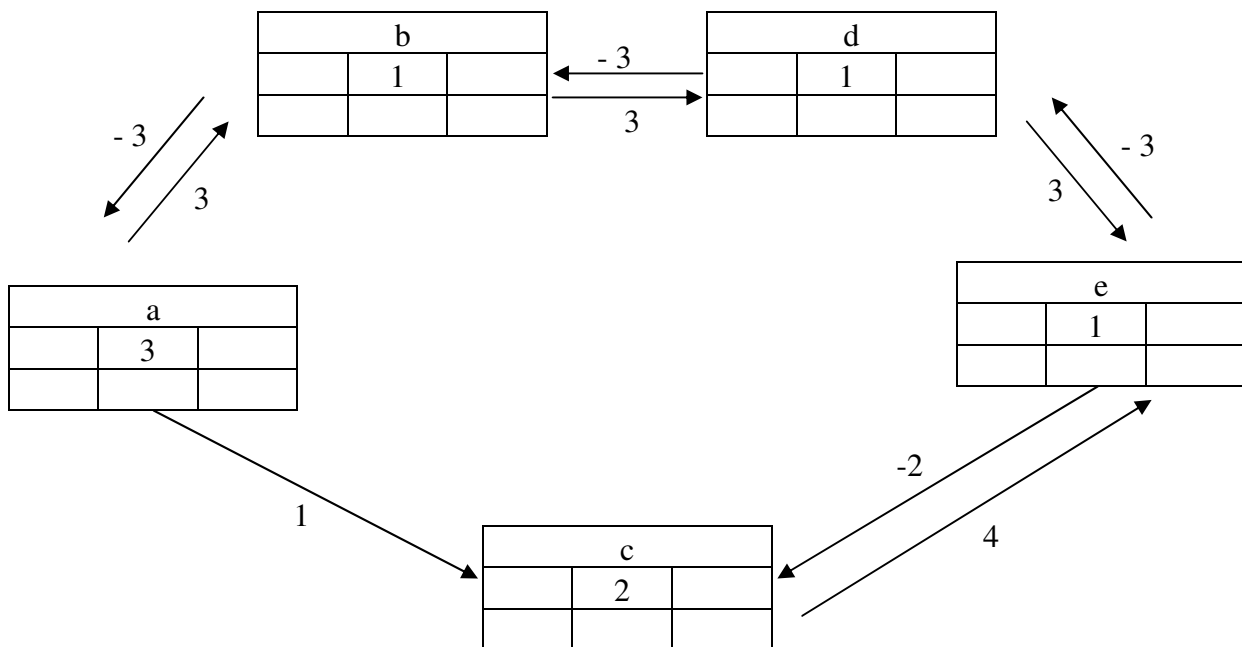


Abb.4.2.10 Beispiel – 1

### 1. Schritt:

Durch Vorwärtsrechnung werden die frühest möglichen Anfangszeitpunkte der Vorgänge i bestimmt indem zu den frühest möglichen Beginnzeiten der Vorläufer die mindestens notwendige Zeitdistanz hinzugezählt wird.

$$FAZ_i = \max_{j \in S(i)} (FAZ_j + t_{ij})$$

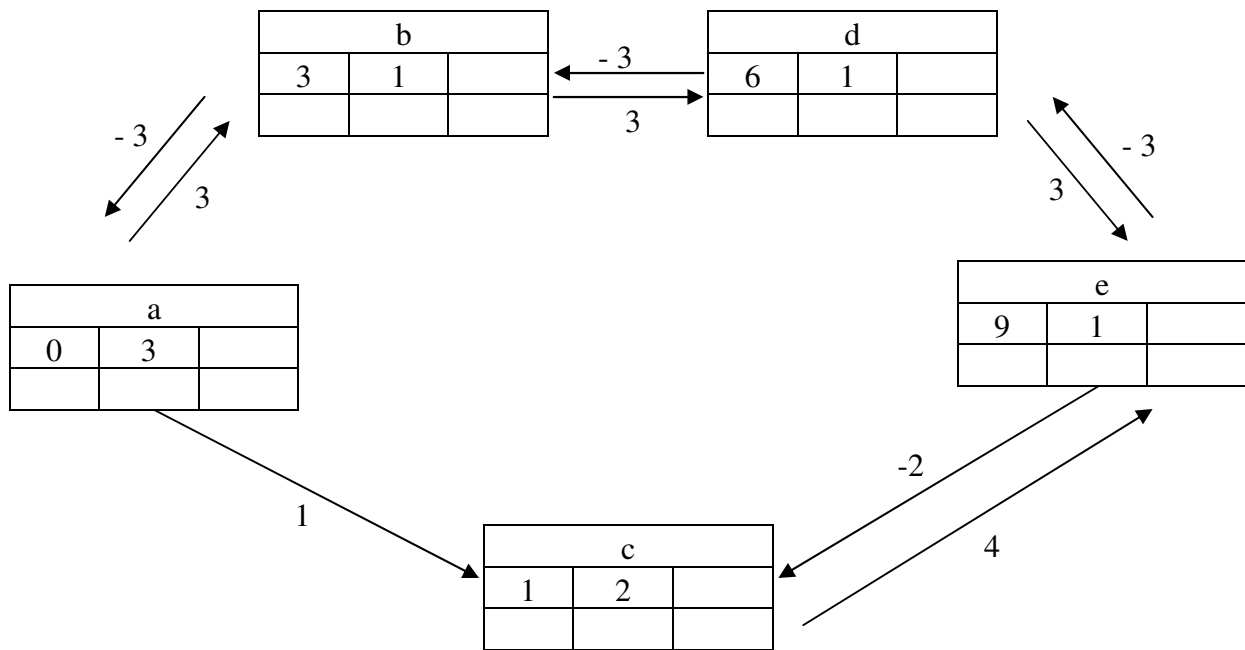


Abb.4.2.11 Beispiel – 2

## 2. Schritt:

Kontrolle der berechneten Zeitpunkte auf Widersprüche mit den negativ bewerteten Kanten, also den Maximalabständen zwischen dem Beginn zweier Vorgänge. Für jeden Pfeil (j,i) mit der Bewertung  $-T_{ij}$  wird überprüft, ob gilt:

$$FAZ_j - T_{ij} \leq FAZ_i$$

In unserem Fall ist diese Bedingung für alle Vorgänge i erfüllt.

## 3. Schritt:

Berechnung der mindestens erforderlichen Projektdauer:

$$FAZ_N = \max (FAZ_j + D_j) \quad \text{für } j \text{ ist ein Zielvorgang}$$

Ist keine maximale Projektdauer, die den Wert FAZ übersteigt, vorgegeben, so ist  $FAZ_N$  gleich  $SAZ_N$  zu setzen.

In unserem Fall gilt:

$$FAZ_N = FAZ_e + D_e = 9 + 1 = 10 = SAZ_N$$

## 4. Schritt:

Durch Rückwärtsrechnung erfolgt die Berechnung der SAZ aller Vorgänge  $i$ . Dabei geht man von  $SAZ_N$  aus und zieht für jeden Vorläufer den Mindestabstand zwischen dem Beginn der beiden Vorgänge ab.

$$SAZ_i = \min_{j \in S(i)} (SAZ_j - t_{ij})$$

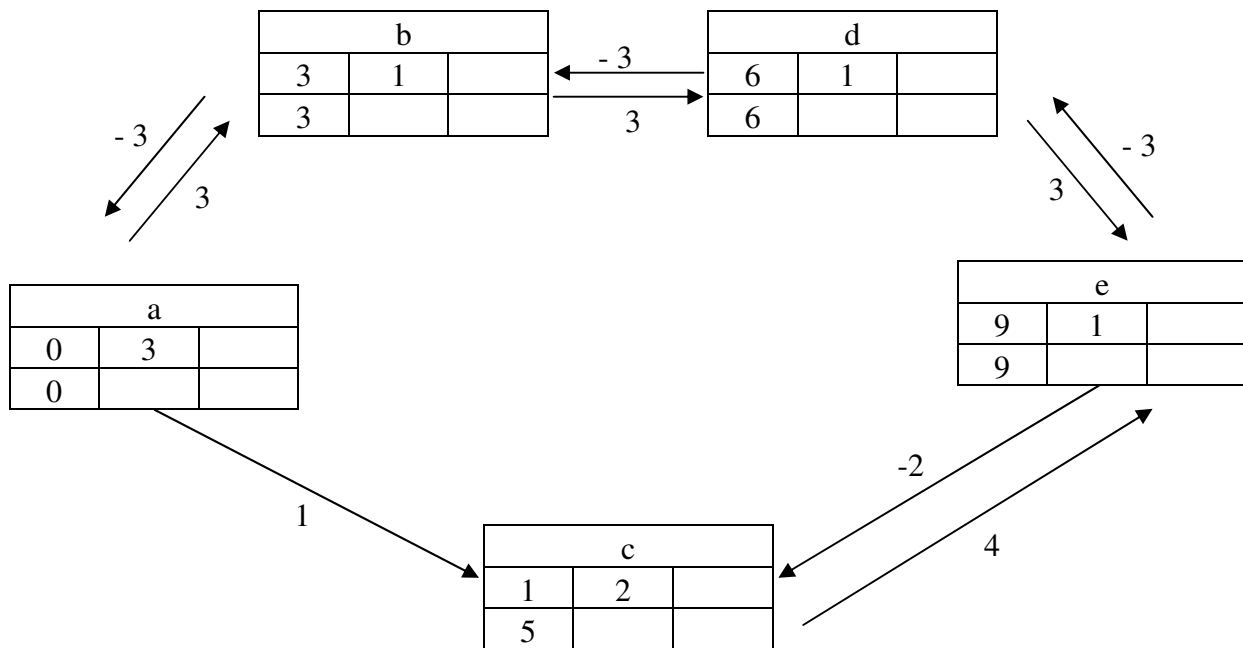


Abb.4.2.12 Beispiel – 3

## 5. Schritt:

Kontrolle der berechneten Werte  $SAZ_i$  auf Widersprüche mit den Angaben über Maximalabstände zwischen dem Beginn zweier Vorgänge.

Das heißt, es ist zu überprüfen, ob folgende Bedingung für alle Vorgänge  $i$  zutrifft:

$$SAZ_j - T_{ij} \leq SAZ_i \quad \text{für } j \in S(i)$$

Wie in der Abbildung 4.2.13 zu sehen, ist dies für den Pfeil (c,e) nicht gegeben, daher wird der späteste Anfangszeitpunkt des Vorgangs c von 5 auf 7 gesetzt.

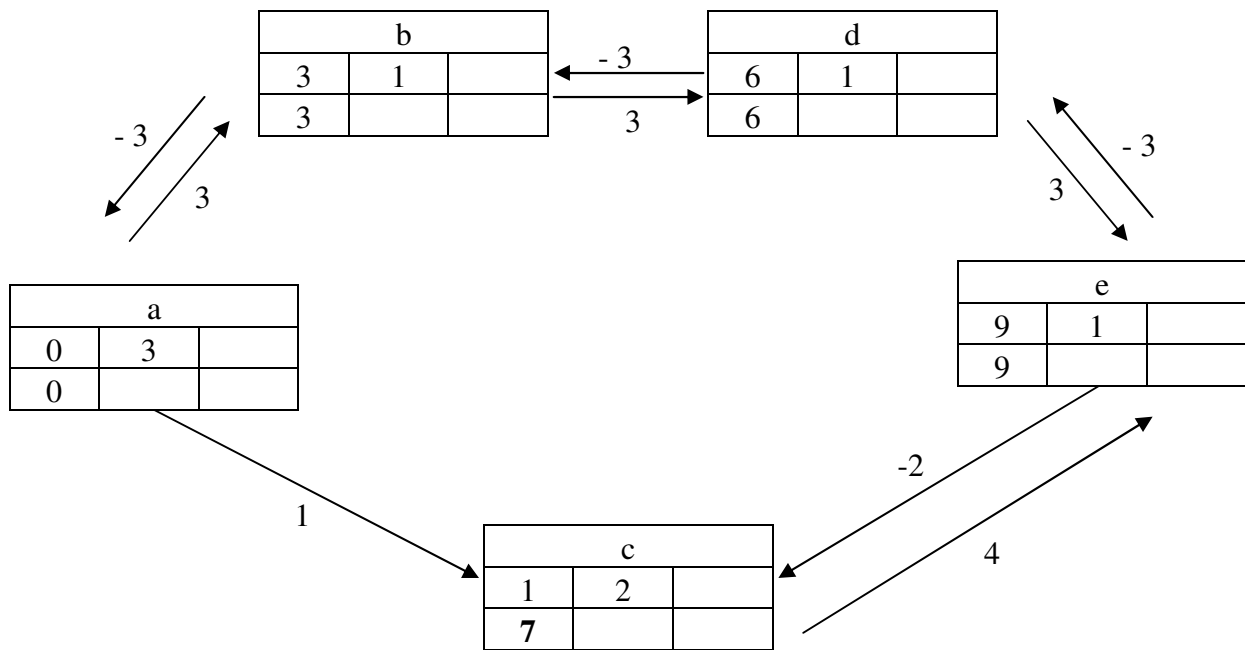


Abb.4.2.13 Beispiel – 4

6. Schritt:

Berechnung aller fehlenden Werte mit Hilfe der Zusammenhänge:

$$FEZ_i = FAZ_i + D_i \quad \text{und} \quad SEZ_i = SAZ_i + D_i$$

$$GP_i = SAZ_i - FAZ_i = SEZ_i - FEZ_i$$

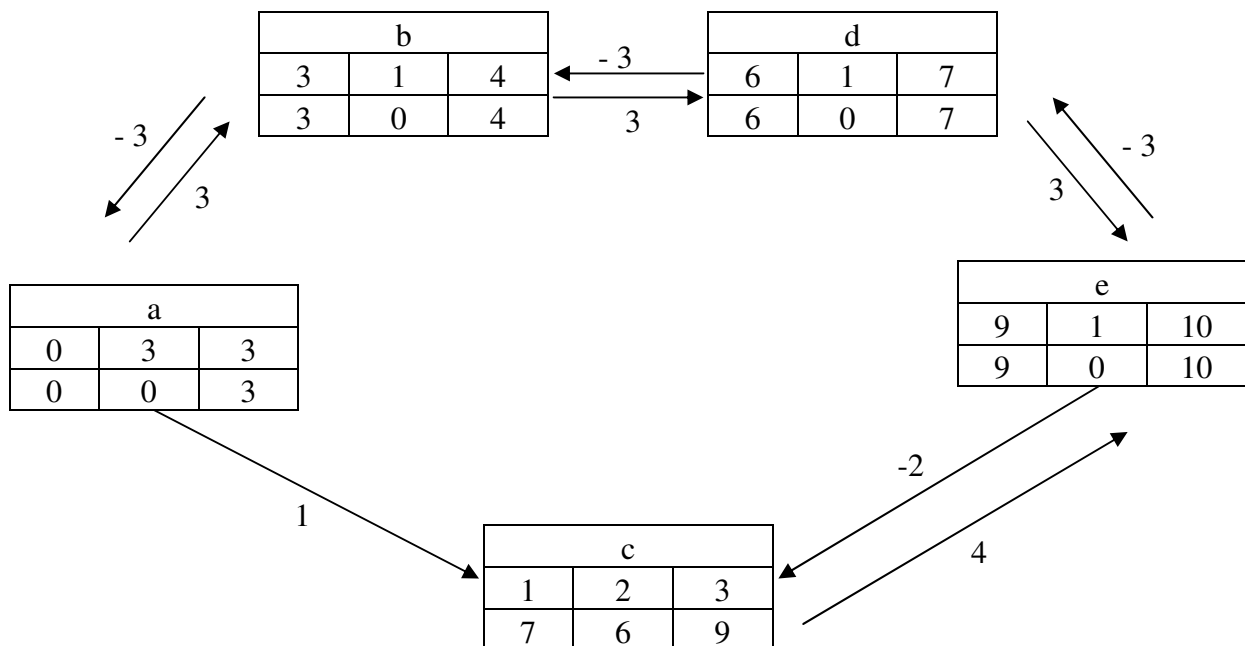


Abb.4.2.14 Beispiel – 5



## 4.3 Program Evaluation and Review Technique (PERT)

### 4.3-a Grundbegriffe und Zielsetzungen

Dieses Verfahren der Netzplantechnik unterscheidet sich von den zuvor vorgestellten Typen CPM und MPM in zwei wesentlichen Punkten:

(1) In der Strukturplanung stehen die Ereignisse und nicht die Vorgänge im Mittelpunkt. Das heißt, es sind die Ereignisse und die Beziehungen zwischen diesen angegeben. In der Praxis kann dies von Vorteil sein, da das Management meist eher an der Frage wann und ob eine Projektetappe abgeschlossen sein wird interessiert ist, als an den detaillierten Arbeitsvorgängen.

Die Ereignisse inklusive einem Start- und einem Endereignis werden den Knoten des Netzplans zugeordnet. Die Pfeile stellen entweder Arbeitsvorgänge dar oder es sind sogenannte Ordnungspfeile, auf die in Kapitel 4.3-b noch näher eingegangen wird.

Projekte werden bei Anwendung von PERT in einem sogenannten Ereignisknoten-Netzplan dargestellt:

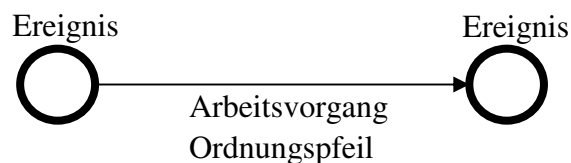


Abb.4.3.1 Ereignisknoten-Netzplan

Das, was als Arbeitsvorgang gilt, der durch den Ordnungspfeil zwischen den Ereignissen gegeben ist, kann recht verschieden sein. Zumeist stellen die Knoten die Endereignisse eines konkreten Arbeitsvorgangs dar, es kann sich aber auch um davon unabhängige Benchmarks in der Planung handeln. Im Falle eines konkreten Arbeitsvorgangs gibt die Bewertung der Pfeile dann an, wie groß der zeitliche Abstand zwischen dem Ende eines Vorgangs und dem Anfang seines Nachläufers ist.

(2) Anders als bei CPM und MPM sind die Zeitdauern bzw. Zeitabstände bei PERT nicht deterministisch vorgegeben. Man rechnet mit Zufallsschwankungen der Dauer. PERT ist also ein stochastisches Verfahren.

Wie im Kapitel über die Zeitrechnung bei PERT (4.3-c) später noch mathematisch exakt beschrieben werden wird, werden für alle Arbeitsvorgänge drei Schätzwerte für die Dauer angegeben: ein optimistischer Schätzwert (OD), ein Schätzwert für die normale Dauer (ND) und ein pessimistischer Schätzwert für die Dauer (PD). Unter Verwendung der Beta-Verteilung wird daraus ein mittlerer Wert für die Dauer (= Erwartungswert) berechnet.

Auch dieser Unterschied zu den bisher beschriebenen Verfahren der Netzplantechnik weist in der Praxis große Vorteile auf. So wird es vor allem ohne entsprechende Erfahrungswerte nicht möglich sein eine exakte Zeitdauer aller Vorgänge anzugeben.

Ziel einer Projektplanung mit PERT ist es, alle Ereignisse und ihre Beziehungen zueinander zu strukturieren und in einem Netzplan übersichtlich darzustellen (siehe Kapitel 4.3-b). Daran anschließend ist, ebenso wie bei der Planung mit CPM, die Zeit- und Kostenplanung (siehe Kapitel 4.3-c und -d) durchzuführen, um eine optimale Projektabwicklung zu ermitteln.

#### 4.3-b Strukturplanung – Aufstellen eines PERT-Netzplans<sup>16</sup>

Es wird folgende Notation verwendet:

Knoten = Ereignis	Pfeil = Arbeitsvorgang	Nicht durchgezogener Pfeil = Ordnungspfeil
1,2,3, ...	A, B, C, ...	a,b,c,...

##### Grundregeln zum Aufstellen eines PERT-Netzplans:

(1) Geht das Ereignis i einem Ereignis j (in seiner Abfolge) unmittelbar voraus, so werden i und j durch einen Pfeil verbunden (auch wenn ein oder mehrere Arbeitsvorgänge nötig sind, um vom Zustand des Projekts zum Ereignis i zum Ereignis j zu gelangen). Ganz allgemein gesagt, repräsentiert ein Pfeil das, was zwischen zwei aufeinander folgenden

<sup>16</sup> [12], [20], [47]

Ereignissen passiert. Um die Sprechweise an jene von Vorgangspfeilnetzen wie CPM anzugleichen, verwenden wir im Folgenden für einen Pfeil auch manchmal den Begriff „Vorgang“.

- (2) Analog zu Scheinvorgängen bei CPM, werden bei PERT Ordnungspfeile eingeführt, welche die Bewertung null erhalten.
- (3) Schleifen (d.h. Schlingen in graphentheoretischem Sinn) sind, wie bei CPM, verboten.
- (4) Um zu gewährleisten, dass jeder Netzplan genau eine Quelle und eine Senke hat, muss jeder Netzplan die Ereignisse „Projektstart“ und „Projektende“ beinhalten.

#### 4.3-c Zeitplanung<sup>17</sup>

Bevor mit der Zeitplanung von PERT im engeren Sinne begonnen werden kann, müssen an dieser Stelle noch die Grundzüge und Besonderheiten der Bewertung der Pfeile besprochen werden.

Die Bewertung der Pfeile, ist im Gegensatz zu den Methoden CPM und MPM, nicht deterministisch (Ausnahme sind die Ordnungspfeile die die Bewertung null haben). Die Dauer der Vorgänge  $D_{ij}$  wird als Zufallsgröße betrachtet, die nach der Beta-Verteilung (vgl. Kapitel 3.2) verteilt ist. Die Beta-Verteilung erfüllt genau die drei Bedingungen, die an eine für PERT geeignete Verteilung gestellt werden:

- (1) Die Verteilung muss stetig sein, da die Menge der „möglichen Vorgangsdauern“ der einzelnen Vorgänge des Projekts ein Kontinuum bildet.
- (2) Die Vorgangsdauer muss beschränkt sein, d.h. die tatsächliche Vorgangsdauer liegt innerhalb einer definierten unteren und oberen Grenze. Außerhalb dieser Grenzen ist die Dichtefunktion der gesuchten Verteilung gleich Null.
- (3) Die Zufallsgrößen müssen sich um einen Mittelwert konzentrieren, da mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit eine Vorgangsdauer rund um den geschätzten Wert

<sup>17</sup> Vgl. [15], [20]

eintreffen soll. Die Dichtefunktion der zu definierenden Verteilung muss an einem Mittelwert  $m$  ein Maximum annehmen.

Wie in Kapitel 3.2 detaillierter dargestellt ist die Dichtefunktion der Betaverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(d-c)^{1-\alpha-\beta}}{B(\alpha, \beta)} (x-c)^{\alpha-1} (d-x)^{\beta-1} & \text{für } c < x < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

Für jede Dauer eines Pfeils (i,j) werden die vier Parameter  $c$ ,  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und ein Wert  $x_m$  wie folgt gewählt:

$c$	$OD_{ij}$	Optimistischer Schätzwert für die Dauer des Pfeils (i,j)
$d$	$PD_{ij}$	Pessimistischer Schätzwert für die Dauer des Pfeils (i,j)
$\alpha$	Es wird angenommen dass gilt: $\alpha + \beta = 4$ In der Praxis ist diese Annahme in den meisten Fällen gerechtfertigt.	
$\beta$		
$x_m$	$HD_{ij}$	Höchstwahrscheinliche Dauer des Pfeils (i,j)

**Abb.4.3.2** Parameter der Betaverteilung

$\alpha$  und  $\beta$  können dann durch den Zusammenhang

$$x_m = c + (d-c) \frac{(\alpha-1)}{(\alpha+\beta-2)} = \frac{c(\beta-1) + d(\alpha-1)}{(\alpha-1) + (\beta-1)}$$

direkt berechnet werden.

Sind die Parameter  $c$ ,  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  bestimmt, kann man auch  $MD_{ij}$  und  $VD_{ij}$  ermitteln:

- $MD_{ij}$  ... mittlere Dauer von (i,j)  $\rightarrow$  Erwartungswert
- $VD_{ij}$  ... Varianz von  $D_{ij}$

Durch Einsetzen in die Formeln für den Erwartungswert und die Varianz der Betaverteilung aus Kapitel 3.2 erhält man:

$$MD_{ij} = \frac{1}{6}(OD_{ij} + 4HD_{ij} + PD_{ij})$$

$$VD_{ij} = \frac{1}{28}(PD_{ij} + OD_{ij})^2 - \frac{1}{63}(OD_{ij} + PD_{ij} - 2HD_{ij})^2$$

Die Varianz von  $D_{ij}$  ist ungefähr

$$VD_{ij} \approx \frac{1}{36}(PD_{ij} - OD_{ij})^2$$

Diese Näherung für die Varianz reicht für die weiteren Berechnungen völlig und wird bei PERT standardmäßig verwendet.

Sind die Werte OD, PD, HD, MD, VD für alle  $(i,j) \in E$  ermittelt, so können die Kernfragen der Zeitplanung bei PERT behandelt werden.

Für die folgenden Ausführungen sei unter denselben Annahmen über den Netzplan wie bei CPM ein topologisch knotensortierter PERT-Netzplan mit einer Knotenmenge  $\{1,2,\dots,n\}$  gegeben, wobei 1 = Quelle und n = Senke sei.

Bei der Zeitplanung mittels PERT werden folgende Werte berechnet:

- (a) Erwartungswert für den frühesten Eintritt  $FZ_i$  bzw. den spätesten Eintritt  $SZ_i$  des Ereignisses i,  $MFZ_i$  bzw.  $MSZ_i$ .

Für die Berechnung des Erwartungswerts von  $FZ_i$  und  $SZ_i$  wird eine grundlegende Annahme getroffen:

Der Erwartungswert ML für einen Weg  $1=i_0, i_1, i_2, \dots, i_k$  von 1 nach  $i_k$  mit der Länge L werde wie folgt bestimmt:

$$ML = \sum_{z=1}^k MD_{i_{z-1}, i_z}$$

**Def. 4.3.1 Erwarteter längster Weg, kurz: längster Weg**

Ein längster Weg vom Knoten 1 zum Knoten i sei ein Weg  $W_i^*$  für dessen Länge  $L_i^*$  gilt:

$$ML_i^* \geq ML_i$$

für alle Wege  $W_i$  von 1 nach i der Länge  $L_i$ .

Diese Definition ist mathematisch nicht korrekt, da man die Bildung von Erwartungswert und Maximum nicht vertauschen darf. Es ist jedoch bei PERT gängige Praxis.

Sei nun  $W^*$  ein längster Weg vom Knoten 1 zum Knoten  $i$ , dann setzt man

$$MFZ_i = ML_i^*$$

Für die Quelle ( $i = 1$ ) wird  $MFZ_1 = 0$  gesetzt und für  $MSZ_n$

$$MSZ_n = \begin{cases} T & \text{falls das Projektende terminisiert ist} \\ MFZ_n & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Berechnung längster Wege erfolgt analog zu CPM mit dem Algorithmus von Bellman:

(a1) Berechnung der  $MFZ_i$ :

Mittels Vorwärtsrechnung ermittelt man ausgehend von  $MFZ_1 = 0$  mit  $i = 2, 3, \dots, n$

$$MFZ_i = \max_{k \in P(i)} (MFZ_k + MD_{ki})$$

(a2) Berechnung der  $MSZ_i$ :

Ausgehend von  $MSZ_n$  berechnet man „rückwärts“

$$MSZ_i = \min_{j \in S(i)} (MSZ_j + MD_{ij}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1$$

(b) Varianz von  $FZ_i$  bzw. von  $SZ_i$  (=  $VFZ_i$  bzw.  $VSZ_i$ )

Auch für die Berechnung der Varianzen wird eine zu den Erwartungswerten analoge Annahme getroffen:

Für die Varianz  $VL$  der Länge  $L$  eines Weges  $W$  von 1 nach  $i_k$  gelte:

$$VL = \sum_{z=1}^k VD_{i_{z-1}, i}$$

Diese Annahme ist aber nur dann gerechtfertigt, wenn die Vorgänge des Weges  $W$  paarweise unkorreliert sind. Das heißt die Pfeile des Weges müssen voneinander unabhängig sein, was in der Praxis oft nicht der Fall ist.

Analog zu den Erwartungswerten setzt man für einen längsten Weg  $W^*$  mit der Länge  $L^*$

$$VFZ_i = VL_i^*$$

(mathematisch ist dies ebenfalls nicht korrekt, da man wieder „Erwartungsbildung“ und „Maximierung“ unerlaubt vertauscht!)

Existieren mehrere längste Wege von 1 nach  $i$ , so ist für die Berechnung von  $VFZ_i$  jener Weg zu wählen, der die größte Streuung besitzt.

(b1) Berechnung der  $VFZ_i$ :

Ausgehend von  $VFZ_1 = 0$  berechnet man sukzessive

$$VFZ_i = \max_{k \in A(i)} (VFZ_k + VD_{ki}) \quad \text{für } i = 2, \dots, n$$

mit

$$A(i) = \{k \in P(i) \mid MFZ_k + MD_{ki} = \max\}$$

(b2) Berechnung der  $VSZ_i$ :

Durch Rückwärtsrechnung erhält man, ausgehend von  $VSZ_n = 0$

$$VSZ_i = \min_{j \in B(i)} (VSZ_j + VD_{ij}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1$$

mit

$$B(i) = \{j \in S(i) \mid MSZ_j + MD_{ij} = \min\}$$

(c) Erwartungswert für den gesamten Ereignispuffer des Ereignisses  $i$  (=  $MGP_i$ )

Dieser auch häufig als Schlupf bezeichnete Wert ergibt sich, analog zu deterministischen Netzplantechniken, aus der Differenz zwischen dem spätesten und dem frühesten Eintritt des Ereignisses  $i$ :

$$MGP_i = MSZ_i + MFZ_i$$

(d) Varianz von  $GP_i$  (=  $VGP_i$ )

$$VGP_i = VFZ_i + VSZ_i$$

Genau genommen handelt es sich nicht um die Varianz von  $GP_i$ , sondern um einen Näherungswert dafür.

(e) Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $FZ_i$ ,  $SZ_i$  und  $GP_i$

Es wird angenommen, dass die Bedingungen für den Zentralen Grenzwertsatz erfüllt sind.

Man geht daher davon aus, dass Normalverteilungen mit folgenden Mitteln und Streuungen vorliegen:

Normalverteilung der ...	Mittel	Streuung
$FZ_i$	$MFZ_i$	$\sqrt{VFZ_i}$
$SZ_i$	$MSZ_i$	$\sqrt{VSZ_i}$
$GP_i$	$MGP_i$	$\sqrt{VGP_i}$

**Abb.4.3.3** Verteilungen der  $FZ_i$ ,  $SZ_i$ ,  $GP_i$

Man sucht Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die  $FZ_i$ ,  $SZ_i$  und  $GP_i$  da es dann möglich ist, Wahrscheinlichkeiten für Terminüberschreitungen bzw. -unterschreitungen anzugeben.

(f) Kritischer Weg

**Def. 4.3.2 Kritischer Weg**

Ein Weg  $W$  von 1 nach  $n$  heißt kritisch, wenn die Länge von  $W = MFZ_n$  ist.

(g) Kritische Ereignisse

**Def. 4.3.3 Kritische Ereignisse**

Alle Knoten die auf dem kritischen Weg liegen, heißen kritische Ereignisse.

Ohne den kritischen Weg zu kennen, kann man die kritischen Ereignisse durch folgende Bedingung identifizieren:

$$i \text{ ist kritisch} \Leftrightarrow MPG_i = \min_j MGP_j = MSZ_1$$

Beispiel: (vgl. [15])

Ein Netzplan sei durch die Pfeile und die Bewertungen  $OD$ ,  $HD$  und  $PD$  für alle  $(i,j) \in E$  gegeben; außerdem seien auch die Werte  $MD_{ij}$  und  $VD_{ij}$  bereits gegeben:



Pfeile	OD	HD	PD	MD	VD
(1,2)	4	5	7	5,17	0,25
(2,3)	3	4	5	4,00	0,11
(2,4)	5	5	6	5,17	0,03
(3,5)	3	5	7	5,00	0,44
(4,6)	3	4	5	4,00	0,11
(5,6)	3	4	6	4,16	0,25

Abb.4.3.4 Beispiel -1

(1) Berechnung der MFZ<sub>i</sub> und VFZ<sub>i</sub> durch eine „Vorwärtsrechnung“:

Ereignis	MFZ <sub>i</sub>	VFZ <sub>i</sub>
1	0	0
2	$0 + 5,17 = 5,17$	$0 + 0,25 = 0,25$
3	$5,17 + 4,00 = 9,17$	$0,25 + 0,11 = 0,36$
4	$5,17 + 5,17 = 10,34$	$0,25 + 0,03 = 0,28$
5	$9,17 + 5,00 = 14,17$	$0,36 + 0,44 = 0,80$
6	$\max((10,34 + 4,00), (14,17 + 4,16))$ $= 18,33$	$0,80 + 0,25 = 1,05$

Abb.4.3.5 Beispiel -2

(2) Berechnung der MSZ<sub>i</sub> und VSZ<sub>i</sub> durch eine „Rückwärtsrechnung“:

Ereignis	MSZ <sub>i</sub>	VSZ <sub>i</sub>
6	18,33	0
5	$18,33 - 4,16 = 14,17$	$0 + 0,25 = 0,25$
4	$18,33 - 4,00 = 14,33$	$0 + 0,11 = 0,11$
3	$14,17 - 5,00 = 9,17$	$0,25 + 0,44 = 0,69$
2	$\min((9,17 - 4,00), (14,33 - 5,17)) =$ $5,17$	$0,69 + 0,11 = 0,80$
1	$5,17 - 5,17 = 0$	$0,80 + 0,25 = 1,05$

Abb.4.3.6 Beispiel -3

(3) Berechnung von  $MGP_i$  und  $VGP_i$ 

und Kennzeichnung der kritischen Ereignisse durch das Symbol „~“

Ereignis	$MFZ_i$	$VFZ_i$	$MSZ_i$	$VSZ_i$	$MGP_i$	$VGP_i$
1 ~	0	0	0	1,05	0	1,05
2 ~	5,17	0,25	5,17	0,80	0	1,05
3 ~	9,17	0,36	9,17	0,69	0	1,05
4	10,34	0,28	14,33	0,11	0,01	0,39
5 ~	14,17	0,80	14,17	0,25	0	1,05
6 ~	18,33	1,05	18,33	0	0	1,05

Abb.4.3.7 Beispiel -4

(4) Aussagen über Verteilungen und Wahrscheinlichkeiten zum Projektabschluss:

Der Erwartungswert für das Projektende beträgt 18,33.

Die kürzeste Projektdauer wird daher normalverteilt angenommen mit den Parametern:

$$\text{Mittel} = 18,33 \quad \text{und} \quad \text{Streuung} = \sqrt{1,05} = 1,02$$

Daraus kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass das Projekt vor einer Projektdauer T beendet werden kann.

$$P(FZ_6 \leq T)$$

So kann zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit errechnet werden, dass das Beispiel-Projekt nicht länger als 19 Zeiteinheiten dauert:

$$P(FZ_6 \leq 19) = \Phi\left(\frac{19 - MFZ_6}{\sqrt{VFZ_6}}\right) = \Phi(0,65) = 0,74215 \quad \text{mit } \Phi := \text{Verteilungsfunktion von } N(0,1)$$

#### 4.3-d Unsicherheiten und Fehler bei der Verwendung von PERT <sup>18</sup>

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass die Verwendung von PERT neben vielen Vorteilen auch Nachteile mit sich bringt, die in Unsicherheiten oder Fehlern der Berechnungen zum Ausdruck kommen. Die Problematik ergibt sich aus der stochastischen Vorgehensweise von PERT und den, im Verlaufe der Konzeption, getroffenen Annahmen und mathematischen Ungenauigkeiten. In der praktischen Anwendung sind diese Unsicherheiten meist nicht von

<sup>18</sup> Vgl. [20], [47]

großer Bedeutung. Trotzdem ist es wichtig, sich über die möglichen Fehler und Unsicherheiten im Klaren zu sein und dementsprechend damit umzugehen.

Hier werden im Folgenden einige dieser nicht immer gerechtfertigten Annahmen und mathematischen Ungenauigkeiten behandelt:

(a) Wahrscheinlichkeitskonzept der Methode

Für die Vorgangsdauern wurde angenommen, dass sie Beta-verteilt sind. Es kann aber kein schlüssiger Beweis erbracht werden, dass dies wirklich der Fall ist. Die Bedingungen, die an eine Verteilung der Vorgangsdauern gestellt werden, werden auch von anderen Verteilungen wie zum Beispiel der Dreiecksverteilung oder der Deltaverteilung erfüllt. Für die Dreiecksverteilung würde zum Beispiel sogar die Annahme  $\alpha + \beta = 4$ , die einen zusätzlichen Unsicherheitsfaktor darstellt, nicht benötigt. Die Betaverteilung wird nur daher als geeignet empfunden, da andere Verteilungen große formale Nachteile haben (z.B. Dreiecksverteilung: Ableitung des häufigsten Wertes ist nicht definiert, Deltaverteilung: Erwartungswert liegt sehr nahe beim häufigsten Wert).

Bei der Berechnung von Erwartungswert und Varianz der Vorgangsdauern können grundsätzlich drei Fehlerarten auftreten:

- (1) Fehler durch die Annahme der Betaverteilung der Vorgangsdauern
- (2) Fehler durch die Annahme  $\alpha + \beta = 4$
- (3) Fehler durch das Schätzen der Werte  $OD_{ij}$ ,  $HD_{ij}$  und  $PD_{ij}$

(b) Verletzungen der Unabhängigkeit der Vorgänge

Bei der Berechnung des kritischen Weges und der Projektdauer werden die Streuungen der Vorgangsdauern addiert. Dies ist mathematisch nur dann korrekt, wenn die Vorgänge unabhängig sind. In der Praxis ist diese Bedingung oft nicht erfüllt, da zum Beispiel eine Arbeitskraft an mehreren Vorgängen des Projekts beteiligt ist.

W.H. von GUÉRARD untersuchte verschiedene Korrelationsmodelle um deren Einfluss auf Streuung und Varianz einer Summe festzustellen. Für detaillierte Informationen und Formeln zur Berechnung der wahren Streuung und Varianz im Falle einer Korrelation wird auf [47] verwiesen.

Auch der zentrale Grenzwertsatz, der bei der Berechnung der Unsicherheiten der errechneten Werte verwendet wird, darf streng genommen durch die Verletzung der Unabhängigkeit der Vorgänge nicht angewandt werden.

Erfahrungen aus der Praxis zeigen, dass der Fehler, der durch die Anwendung von PERT bei der Projektplanung entsteht bis zu 30% betragen kann. Daher ist der Einsatz von PERT nur dann sinnvoll, wenn es sich um neuartige Projekte handelt, bei denen man im Bezug auf die Dauer der einzelnen Vorgänge nicht auf Erfahrungen zurückgreifen kann. Vor allem ist aber entscheidend, dass man die aus einer PERT-Planung erhaltenen Daten für ein Projekt richtig einschätzen kann und sich der Unsicherheiten bewusst ist.

## **5. Einsatz in der Praxis**

Nach den vorangegangenen ausführlichen theoretischen Ausführungen sollen folgende Ausführungen vor allem Überlegungen zur Anwendbarkeit der Netzplantechnik in der Praxis aufzeigen. Dazu werden zuerst einige Erfahrungen und Erkenntnisse zu Kosten der Netzplantechnik, Wahl der geeigneten Methode und Rentabilität des Einsatzes der Netzplantechnik aufgeführt. Im zweiten Abschnitt wird an Hand einiger konkreter praktisch durchgeführter Projekte ein Einblick in Umsetzungsmöglichkeiten und Erfahrungsberichte gegeben.

### **5.1 Überlegungen zur Sinnhaftigkeit und Rentabilität des Einsatzes der Netzplantechnik bei Projekten <sup>19</sup>**

Bei Überlegungen zur Rentabilität und Sinnhaftigkeit des Einsatzes der Netzplantechnik bei Projekten ist es notwendig, Unterscheidungen im Bezug auf die Art der Projekte zu treffen. Auch die Wahl der geeigneten Methode der Netzplantechnik ist von Projekteigenschaften abhängig. Einerseits sind einmalige oder erstmals durchgeführte Projekte von Projekten, die in vergleichbarer Form schon einmal durchgeführt wurden, zu unterscheiden. Darüber hinaus ist natürlich auch die „Größe“ der Projekte ausschlaggebend. Aber auch die projektausführende Organisation ist durch die unterschiedlichen Möglichkeiten und Ressourcen entscheidend.

Unabhängig von der Beschaffenheit der Projekte steht die Beantwortung von zwei, einander ergänzenden Fragen im Mittelpunkt der Überlegungen:

#### **(1) Ist die Wirtschaftlichkeit des Einsatzes der Netzplantechnik gewährleistet?**

Ganz allgemein gilt der Grundsatz: Ein Einsatz der Netzplantechnik ist dann rentabel, wenn die Kosten für die Durchführung der Planung und Projektüberwachung mittels Netzplantechnik geringer sind, als die Steigerung des Nutzens.

<sup>19</sup> Vgl. [5], [18], [28], [29], [47], [50],

Diese einfache Aussage ist aber in der Praxis nicht so leicht zu beurteilen. Um eine Aussage über die Rentabilität eines Projekts tätigen zu können, ist es notwendig auf der einen Seite die möglichen Einsparungspotentiale und andererseits die Kosten für die Planung genau zu kennen.

(a) Kosten für die Planung mittels Netzplantechnik

Im Wesentlichen können drei Kostenkategorien unterschieden werden:

- Die Kosten für die Strukturermittlung und Planaufstellung:

Diese Kosten fallen zum Großteil nur bei einmaligen Projekten, bzw. bei der ersten Durchführung eines Projektes an. Bei allen wiederholten Ausführungen des Projekts müssen meist nur mehr kleine Änderungen vorgenommen werden, was die Kosten natürlich drastisch reduziert. Einen großen Unterschied gibt es in dieser Kostenkategorie auch zwischen großen und kleineren Projekten. Kleinere Projekte haben den Vorteil, dass sie meist übersichtlicher und damit leichter zu strukturieren sind. Der Kostenvorteil der sich in diesem Punkt für kleinere Projekte ergibt, wird durch den nächsten Kostenfaktor meist schon wieder wettgemacht.

- Die Kosten der Berechnung:

Dieser Kostenfaktor macht vor allem bei großen Projekten einen Großteil der Gesamtkosten aus. Allerdings sind gerade in diesem Bereich durch die Verbesserung der technischen Möglichkeiten in den letzten Jahrzehnten, enorme Sparpotentiale möglich geworden. Für kleinere Projekte, die meist auch von kleineren Organisationseinheiten durchgeführt werden, stehen oft nicht die gleichen technischen Möglichkeiten zur Verfügung, wodurch die Kosten in diesem Fall sehr schwer gering gehalten werden können.

- Die Kosten der Ablaufkontrolle und der Planrevision:

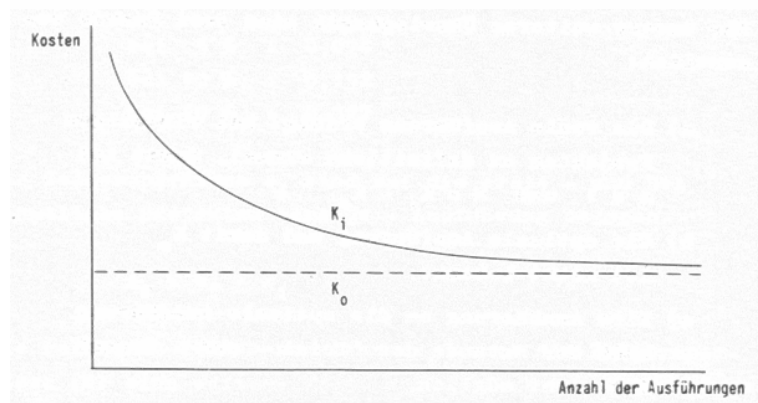
Auch diese schon während des Projektablaufs anfallenden Kosten sind nicht zu unterschätzen. Vor allem, da in diesem Bereich bis heute ein relativ hoher Einsatz an Arbeitskräften nötig ist. Analog zu den Kosten für die Berechnung ist aber natürlich auch hier die technische Ausstattung ein wichtiger Faktor.

Die Kosten für Ablaufkontrolle und Planrevision stellen meist einen problematischen Teil in der Berechnung der Rentabilität dar. Das kommt daher, dass die Häufigkeit der Planrevisionen vor dem Projektbeginn nur sehr schwer einzuschätzen ist und von Projekt zu Projekt sehr stark schwankt.

Für die Kosten der Planung mit Hilfe der Netzplantechnik werden in der Literatur Werte zwischen 0,4 und 4 Prozent der Gesamtprojektkosten genannt. Diese Werte stellen allerdings nur einen groben Richtwert dar und können bei einzelnen Projekten stark abweichen. Vor allem eine sehr umfangreiche Planung mit Kosten- und Kapazitätsplanung, wie sie in den meisten Fällen sinnvoll ist, kann die Kosten für die Planung noch beträchtlich erhöhen.

#### EXKURS Planungskosten für öfter ausgeführte Projekte

Der große Vorteil von öfter ausgeführten Projekten oder Projekten mit Referenzprojekten ist der Lerneffekt. Das heißt, durch wachsende Erfahrung sinken die Kosten für die Projektplanung und -durchführung. Die Kosten nähern sich, wie in Abb. 5.1.1 zu sehen, bei mehrfacher Durchführung des Projekts asymptotisch den Kosten bei optimaler Ausführung ( $K_0$ ) an.



**Abb.5.1.1** Kostenverlauf bei mehrfacher Ausführung eines Projekts (aus [18] S.111)

Wie groß die Einsparmöglichkeit bei der wiederholten Ausführung wirklich ist, hängt von drei Faktoren ab:

- (1) Faktor der Kosteneinsparung bei wachsenden Erfahrungen
- (2) Kostendifferenz zwischen den effektiven Kosten der ersten Durchführung und

den Kosten bei optimaler Ausführung

(3) Häufigkeit der Ausführung

Unterstellt man zum Beispiel einen logarithmisch-linearen Kostenverlauf, so lassen sich die Einsparungen bei Kenntnis des Faktors „Lerneffekt“ (1) ohne Probleme berechnen.

(b) Einsparungsmöglichkeiten durch den Einsatz von Netzplantechnik

Eine allgemein gültige Aussage über die Einsparungsmöglichkeiten durch den Einsatz von Netzplantechnik in der Projektplanung kann nicht getroffen werden. Aus Erfahrungsberichten geht aber hervor, dass durch den Einsatz von Netzplantechnik in vielen Projekten eine Zeitersparnis von bis zu 25 Prozent und eine Kostenersparnis von bis zu 15 Prozent erreicht werden konnte. Natürlich sind solche Ergebnisse nicht für alle Projekte zu erwarten. Vor allem für kleinere, leicht überschaubare Projekte stehen die Kosten oft nicht in Relation zu den möglichen Einsparungen, da in solchen Fällen auch weniger komplexe und aufwändige Planungsverfahren zum gewünschten Ziel führen.

(2) In welcher Form (welche Methode) sollte die Netzplantechnik sinnvollerweise eingesetzt werden?

Auch auf diese Frage gibt es keine allgemein gültige Antwort. Es ist aber eine Tendenz festzustellen, dass für kleine und mittlere Projekte die Methoden CPM und MPM meist ausreichen. Die Kosten für Planung sind für diese Methoden geringer als für PERT und übersteigen die möglichen Einsparungen durch die Planung meist nicht. Für umfangreiche und komplizierte Projekte hingegen hat sich in der Praxis PERT oft als geeignet erwiesen.

Ganz allgemein wird bei den Überlegungen zur Wahl der geeigneten Planungsmethode (verschiedene Methoden der Netzplantechnik oder auch ganz andere Planungsmethoden) immer mit Kostenvergleichen gearbeitet. Die Kosten, die bei der Durchführung des Projekts inklusive Planungskosten beim Einsatz verschiedener Planungsmethoden anfallen, werden verglichen. Dabei werden entgangene Erlöse durch eine längere Projektdauer als Mehrkosten berücksichtigt.



Formal ist also eine Optimierungsaufgabe zu lösen:

Sei  $i = 1, 2, \dots, n$

$K_i$  ... Kosten der  $i$ -ten Planung

$E_i$  ... Erlös der  $i$ -ten Planung

$G_i = E_i - K_i$  ... Gewinn bei der Durchführung der  $i$ -ten Planung

Unter der Voraussetzung dass  $E_1 = E_2 = \dots = E_n$  gilt daher

$$\text{Max}_i G_i = \text{Max}_i (E_i - K_i) = \text{Min}_i K_i$$

## 5.2 Praxisbeispiele für den Einsatz der Netzplantechnik

Nach den Überlegungen zur Rentabilität des Einsatzes der Netzplantechnik werden im Folgenden einige Projekte beschrieben, bei denen eine Planung mit Hilfe einer Methode der Netzplantechnik durchgeführt wird. Ziel dieses Abschnitts ist es, die vielseitigen Möglichkeiten des Einsatzes der Netzplantechnik in der Praxis aufzuzeigen und gleichzeitig auf einige Erfahrungsberichte hinzuweisen, die interessante Tipps für die Planung eines eigenen Projekts beinhalten.

### Wartung der Rohöldestillationsanlage 1 der OMV Raffinerie in Schwechat

Die Rohöldestillationsanlage 1 der OMV in Schwechat zerlegt täglich 6000 Tonnen Rohöl in Destillate. Eine vom TÜV (Technischer Überwachungsverein) durchzuführende technische Kontrolle der Anlage machte einen vorübergehenden Stopp der ansonsten kontinuierlich arbeitenden Anlage nötig. Da ein Stopp der Anlage große wirtschaftliche Verluste mit sich bringt, wurde eine eigene Abteilung „Stopplanungs“ mit der Planung beauftragt. Da die Koordination und Planung der notwendigen Arbeiten, an denen natürlich viele verschiedene Akteure beteiligt waren, sich vor allem als terminliches Problem erwies, wurde beschlossen, die Planung mit Hilfe der Netzplantechnik vorzunehmen.

Die Zeit-, Kosten – und Kapazitätsplanung ergab folgende Ergebnisse:

- Die Gesamtdauer konnte von ursprünglich berechneten 18 Arbeitstagen auf 12-13 Arbeitstage (allerdings ohne „Schwierigkeitsreserve“) reduziert werden. Um die arbeitstechnischen Bedingungen zu berücksichtigen wurde ein planmäßiger

Anlagenstopp von 15-16 Tagen festgelegt. Durch die Verkürzung des Stopps um 2-3 Tage konnten große wirtschaftliche Vorteile erzielt werden.

- Kostenüberlegungen haben auch ergeben, dass Arbeiten im 3-Schicht-Betrieb 24 Stunden am Tag sinnvoll sind. Durch diese Entscheidung wurde die Planung noch zusätzlich erschwert, da nur gewisse Arbeitsschritte in der Nacht durchgeführt werden konnten.
- In einer ersten Durchrechnung des Projektplans war gänzlich auf Kapazitätsüberlegungen verzichtet (oder vergessen) worden. Das eigentlich Überraschende brachte dann die Berücksichtigung von personellen und maschinellen Kapazitäten. Wie zu erwarten stieg die Gesamtprojektdauer dadurch leicht an, doch die Gesamtarbeitsstundenzahl konnte sogar reduziert werden. Dies ist vor allem auf die Tatsache zurückzuführen, dass die Arbeitskräfte pro 10-Stunden-Arbeitstag bezahlt wurden auch wenn ihr Einsatz nur wenige Stunden pro Tag benötigt wurde. Dieser Effekt wird am Beispiel der Wartung eines Wärmetauschers in Abbildung 5.2.1 gezeigt. Ohne Kapazitätsgrenzen ergeben sich benötigte 80 Kranfahrerstunden und 180 Helferstunden, bei Berechnungen mit Berücksichtigung der Kapazitätsgrenze von maximal 5 Helfern und 2 Kranfahrern sind plangemäß nur 70 Kranfahrerstunden und 160 Helferstunden notwendig.

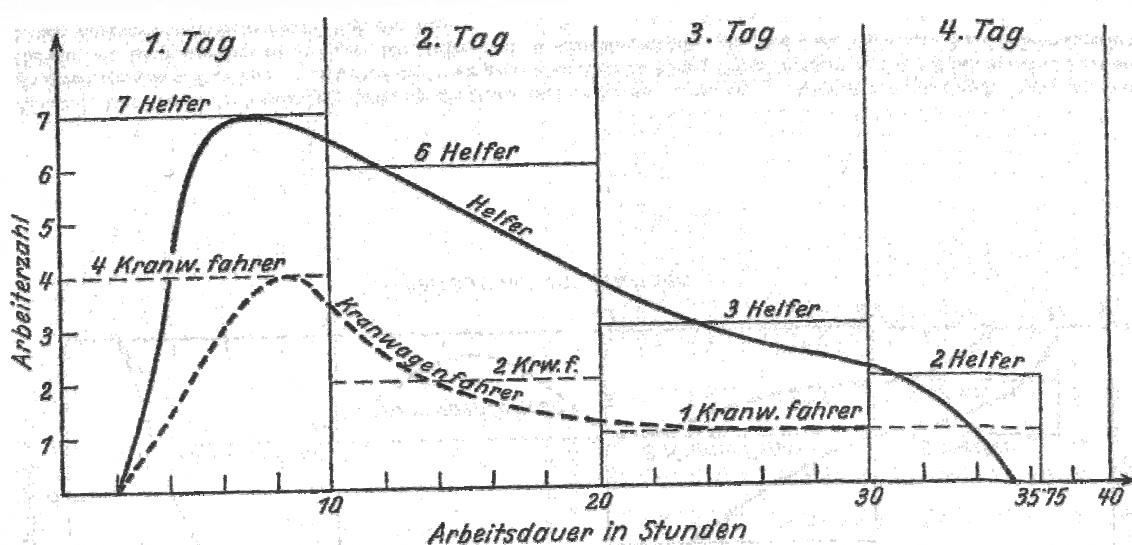
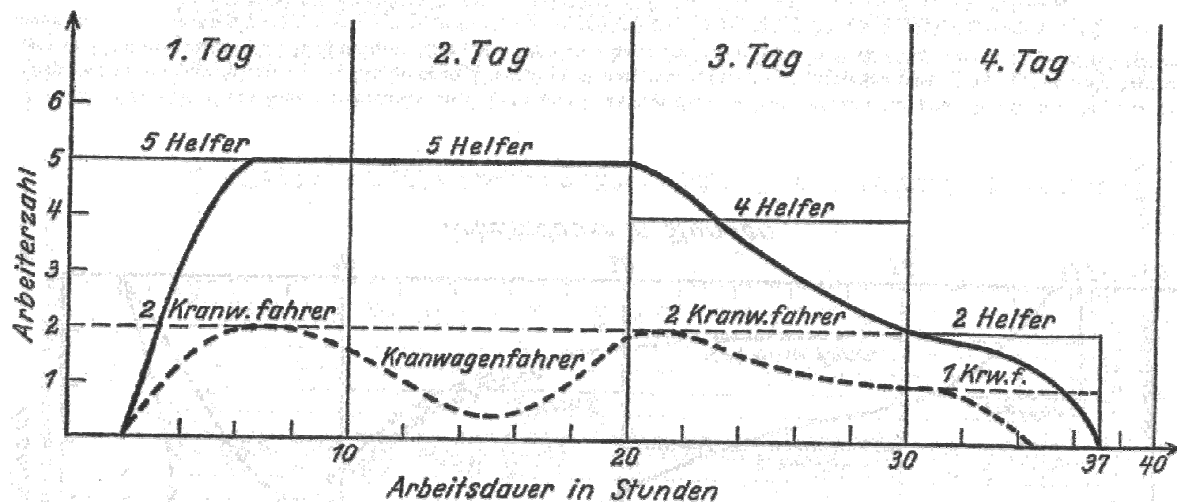


Abb.5.2.1 Arbeitskräftebedarf bei Berechnung ohne (oben) und mit Kapazitätsgrenzen (unten) (aus [47])



Nach der Planungsphase waren vor allem die Überwachung der Durchführung und eventuelle Planänderungen während der Durchführung wichtige Aufgaben, die mit Hilfe der Netzplantechnik durchgeführt werden sollten. Vor allem durch die vielen verschiedenen Arbeitseinheiten stellte die Überwachung der Einhaltung des Netzplans ein Problem dar. Mit Hilfe von Arbeitskarten konnte dann eine Überwachung der Durchführung des Projekts erreicht werden, die aber keiner exakten Kontrolle im Sinne der Netzplantechnik entsprochen hat.

Als Fazit kann festgehalten werden: der Einsatz der Netzplantechnik brachte einen beträchtlichen wirtschaftlichen Vorteil (wenn auch nicht in allen einzelnen Teilen). In der Durchführung der Überwachung gab es einige Schwierigkeiten, die vor der Durchführung eines weiteren Projekts noch behoben werden müssten.

Für genauere Ausführungen zu diesem Projekt wird auf die Literatur [47] verwiesen.

#### Planung und Durchführung des Baus der Per-Albin-Hansson-Siedlung Ost in Wien

Bei dem Großprojekt der Wiener Stadtplanung, im Zuge dessen zirka 5000 Wohnungen entstehen sollten, wurde ebenfalls auf Planungsmethoden der Netzplantechnik zurückgegriffen. Im Bereich der Durchführung des Baus konnte man schon auf einige Erfahrungen mit der CPM-Methode zurückgreifen. Die große Herausforderung stellte die Einführung der Netzplantechnik in der Projektplanungsphase dar. Besonders interessant ist dieses Projekt auch daher, da sowohl eine Berechnung an Hand des CPM-Modells als auch eines PCS-Systems durchgeführt wurde (PCS steht für **P**roject **C**ontrol **S**ystem). In der praktischen Umsetzung erwies sich vor allem durch die technischen Möglichkeiten (IBM

stellte ein eigens auf die Ansprüche ausgerichtetes System zur Verfügung) die Methode PCS 1130 als geeigneter.

Auf den detaillierten Erfahrungsbericht und die Beschreibung der PCS-Methode sei auf [47] verwiesen. Hier nur so viel: Der Einsatz der Netzplantechnik wurde als sehr positiv bewertet, auch wenn noch einige Verbesserungspotentiale im Bereich der Projektierung erkannt wurden.

#### Umbau eines Frachtschiffs in Hamburg

Mit Unterstützung von Netzplantechnik sollte einem Frachtschiff in Hamburg nachträglich ein Schwergutladegerät eingebaut werden. Um auch während der Durchführung des Projekts eine möglichst gute Kontrolle über die Ist-Soll-Abweichungen zu behalten, wurden für die verschiedenen, am Projekt beteiligten Führungshierarchien jeweils auf die Bedürfnisse zugeschnittene Netzpläne erstellt. So wurde für die oberste Führungsebene ein sehr grober Netzplan erstellt, der durch seine Übersichtlichkeit eine Kontrolle der einzelnen Projektabschnitte ermöglichte (siehe Abb.5.2.2). Für die unterste Führungsebene wurden sehr detaillierte, nur einen kleinen Teil des Projekts umfassende Netzpläne erstellt (siehe Abb.5.2.3). Somit wurde auch hier die Übersichtlichkeit und Kontrollierbarkeit gewährleistet. Die oberste Führungsebene war daher nur bei groben Planabweichungen dazu zu veranlassen, einzelne Arbeitsschritte detailliert zu beobachten bzw. einzugreifen.

Nach Abschluss des Projekts wurden auch die für die Planung und Kontrolle angefallenen Kosten dem Nutzen gegenübergestellt. Die Kosten für die Anwendung der Netzplantechnik lagen bei zirka 0,9 Prozent des Auftragswerts. Die Zahlen der Erfolgsrechnung basieren vor allem auf den Zeiteinsparungen: Es gelang eine Projektzeitverkürzung um 20 Tage (insgesamte Projektdauer 90 Tage) zu erreichen. Dies bedeutete bei einem Gesamtnutzenentgang durch das nicht einsetzbare Schiff von täglich etwa 4000 Euro (original 8000 DM) eine Kostenreduktion des Gesamtprojekts von 50000 Euro. Damit aber noch nicht genug: Durch die frühzeitige Fertigstellung des Frachtschiffs wurden Produktionskapazitäten im Dock frei, die einen weiteren erheblichen wirtschaftlichen Nutzen brachten. Einziges negatives Fazit das PRESSMAR (siehe [30]) zieht, ist, dass der wirtschaftliche Nutzen durch die Ein-Projekt-Planung nicht in ausreichendem Maß berücksichtigt wurde. Er spricht sich im Falle trotz erhöhtem Planungsaufwand klar für eine Mehr-Projekt-Planung aus.

Abb.5.2.2 Übersichtsnetzplan für die oberste Führungsebene (aus [30])

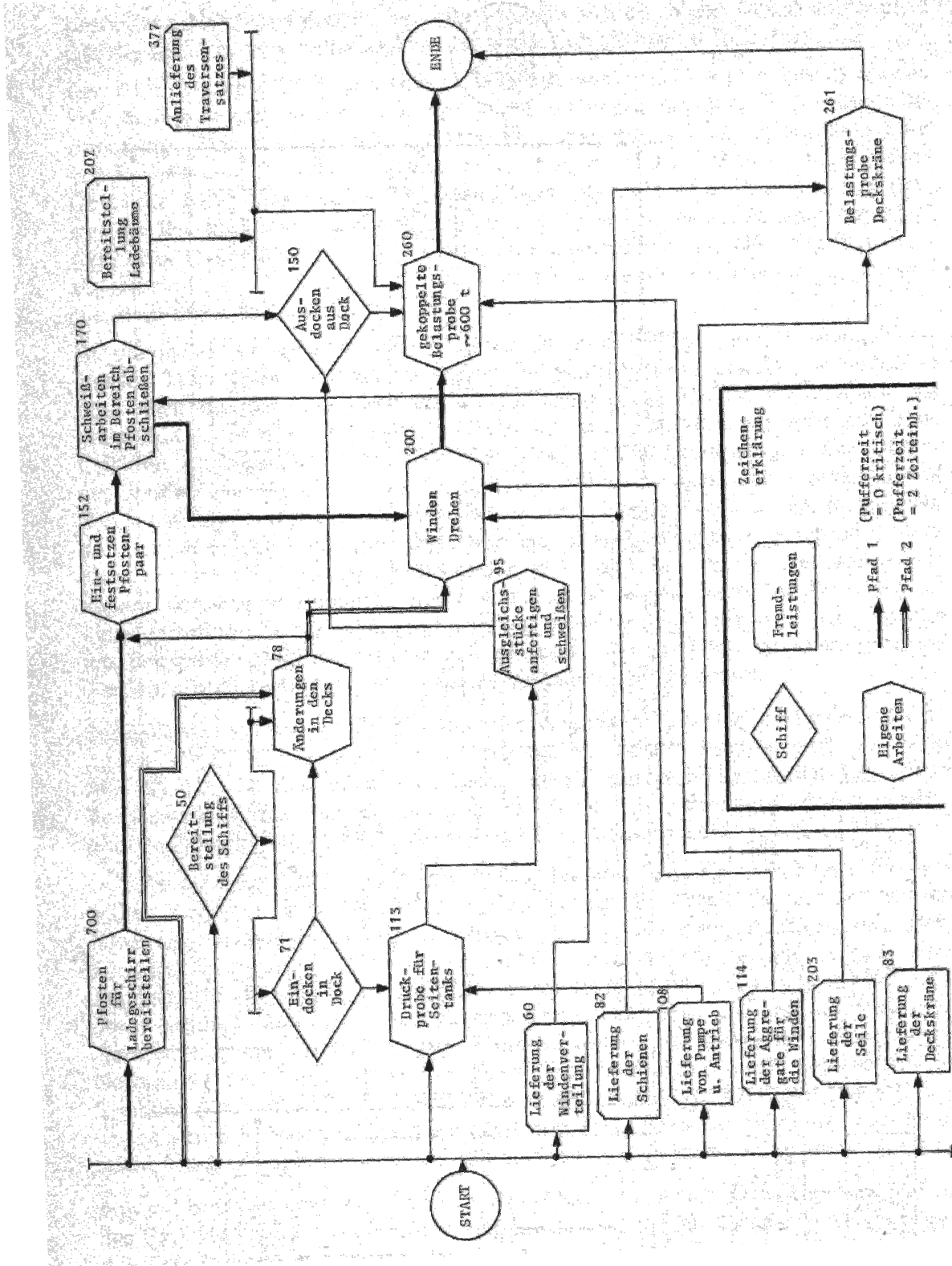
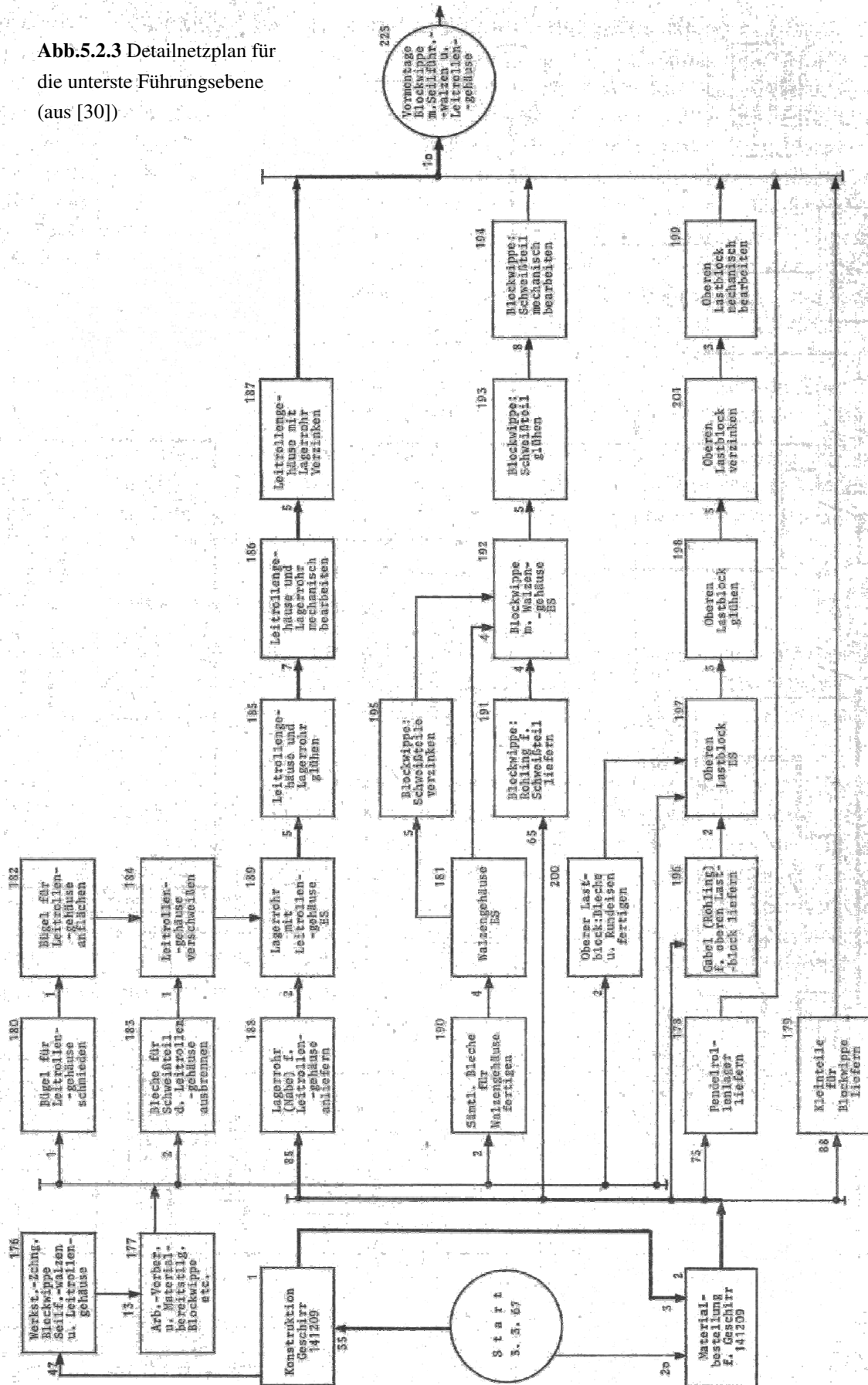


Abb.5.2.3 Detailnetzplan für die unterste Führungsebene (aus [30])



### Planung des Ausbaus des Bildungswesens im Hochschulbereich in der Bundesrepublik Deutschland

Der Wissenschaftsrat der Bundesrepublik Deutschland hat einen Netzplan entworfen, der die sachlichen und zeitlichen Abhängigkeiten von Maßnahmen zum Ausbau des Hochschulsystems sowie die Interdependenzen der wissenschaftlichen, politischen, organisatorischen und budgetären Entscheidungen veranschaulicht (vgl. [3], S.42).

Der große Vorteil, der durch den Einsatz von Netzplantechnik in diesem Fall erreicht wird, ist nicht wie in den vorangegangenen Beispielen wirtschaftlicher Natur, sondern liegt vor allem in der Transparenz. Es ist durch die Kommunizierbarkeit von Netzplänen allen Entscheidungsträgern möglich, sich an Hand einer einheitlichen Entscheidungsgrundlage eine Meinung zu bilden.

Ziel des Projekts war es, innerhalb von 11 Jahren ein, den Empfehlungen des Wissenschaftsrates entsprechendes Gesamtbildungssystem zu verwirklichen. Auf Grund der Größe und Komplexität dieses Vorhabens wurde das Gesamtprojekt in einem sogenannten Meilenstein-Netzplan dargestellt, der nur die wichtigsten Ergebnisse der Prozesse beinhaltet. Wie im Beispiel des Umbaus eines Frachtschiffes in Hamburg wurden auch hier die zuständigen Stellen damit beauftragt, den Ablauf der Prozesse zur Erreichung eines Ergebnisses mittels Netzplantechnik zu erstellen.

Im, in [3] genauer dargestellten Verfahren, war es nötig, die Methoden der Netzplantechnik stark auf dieses Projekt anzupassen. Die Netzplantechnik diente in diesem Fall vordergründig der Übersichtlichkeit der Darstellung. Zeit-, Kosten und Kapazitätsrechnungen waren dabei eher im Hintergrund. Dies war vor allem dadurch bedingt, dass eine Vielzahl politischer Entscheidungen zur Zeit der Planerstellung noch nicht getroffen waren.

Eine Auswahl an weiteren Projekten und Projektberichten:

- Einsatzmöglichkeiten in der Wirtschaftsprüfung (siehe [35] und [51])
- Einsatz im Zuge der Planung und Durchführung von Bauprojekten (insbesondere auch die Koordinierung mehrerer gleichzeitig ablaufender Bauprojekte) (siehe [32])
- Entwicklung des Prototyps eines Motors (siehe [5])
- Planung und Bau des Hamburger Fernmeldeturms (siehe [30])

- 
- Planungsprozess der Klagenfurter Hochschule (siehe [3]) und Planungs- und Organisationsüberlegungen an den Universitäten Bochum und Bremen (siehe [3] und [8])



## 6. Bemerkungen zum Einsatz im Mathematikunterricht

Nach den Methoden der Netzplantechnik, dem nötigen mathematischen Hintergrundwissen und Möglichkeiten des Einsatzes in der Praxis wird im Folgenden noch ausgeführt, in welchen Kontexten das Gebiet der Netzplantechnik in der Schule laut derzeitigen Lehrplänen sinnvoll umgesetzt werden könnte.

Erste Möglichkeit der Einsetzbarkeit der Netzplantechnik im Mathematikunterricht bezieht sich auf berufsbildende Schulen für wirtschaftliche Berufe und Handelsakademien.

Als Beispiel für die Verankerung der Netzplantechnik im Lehrplan dieser Schulrichtung wird hier ein Ausschnitt aus dem derzeitigen Lehrplan der HTL Betriebswissenschaften wiedergegeben:

*Unterrichtsfach Angewandte Mathematik – V. Jahrgang*

- ...

- **Operations Research:**

*Lineare Optimierung, Methode Branch and Bound ; Zuordnungsproblem;*

*Reisendenproblem, **Netzplantechnik***

*Aktuelle Themen der angewandten Mathematik mit besonderer Berücksichtigung des Ausbildungszweiges*

*(aus [68] mit eigenen Hervorhebungen)*

Eine explizite Erwähnung der Netzplantechnik in den Lehrplänen ist nicht überall gegeben. Allerdings ist die Behandlung des Themas durch den Hinweis „Themen der angewandten Mathematik mit besonderer Berücksichtigung des Ausbildungszweiges“, der in dieser oder einer leicht abgewandelten Form, in allen fachspezifischen Lehrplänen vorkommt, auf jeden Fall auch argumentierbar.

Durch die Schwerpunktsetzung dieser Ausbildungen ist bei der Behandlung des Themas Netzplantechnik vor allem auf die Umsetzung einer Planung mittels Netzplantechnik und die praktische Anwendung großes Gewicht zu legen. So würde sich das Thema zum Beispiel in Handelsakademien eignen, um den Mathematik- mit dem Betriebswirtschaftsunterricht zu verbinden. Die mathematische „Theorie“ könnte somit an konkreten betriebswirtschaftlichen Beispielen veranschaulicht werden.

Natürlich ist die Behandlung des Themas auch in anderen Höherbildenden Schulen gerechtfertigt und sinnvoll. Der derzeit aktuelle Lehrplan für das Unterrichtsfach Mathematik an Allgemein Höherbildenden Schulen enthält an vielen Stellen immer wieder den Hinweis auf die Wichtigkeit der Einbeziehung von Anwendungen der Mathematik in den Unterricht.

### Aspekte der Mathematik

- ...

- *Pragmatisch- anwendungsorientierter Aspekt:*

*Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder*

### Beiträge zu den Bildungsbereichen

- ...

- *Mensch und Gesellschaft:*

*Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt*

### Didaktische Grundsätze

- ...

- *Lernen in anwendungsorientierten Kontexten*

*Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.*

*(aus [69])*

Im Regelunterricht könnte die Netzplantechnik etwa als Beispiel für eine Anwendung des, je nach Lehrplan zu behandelnden Themas der Linearen Optimierung oder der Daten- und Beziehungsstrukturen herangezogen werden. In den Schulbüchern [9] und [42] wird zum Beispiel genau dieser Ansatz für eine kurze Einführung in das Thema gewählt.

Vor allem REICHEL (in [42]) führt das Thema Netzplantechnik relativ umfangreich aus. Als Ausgangspunkt wird die Möglichkeit zur Darstellung von Daten- und Beziehungsstrukturen

gewählt. Von der Darstellung eines Projekts im Netzplan wird zur Berechnung der längsten Wege und zur Darstellung von Netzplänen durch Matrizen übergegangen. Ein weiteres Kapitel beschäftigt sich abschließend noch mit der Berechnung von Pufferzeiten. Ist den Schüler/innen die Lineare Optimierung bekannt, wäre es natürlich sinnvoll auch noch kurz einen Einblick in die Kostenplanung, und damit in ein Beispiel der praktischen Anwendungen der Linearen Optimierung, zu geben.

In wirtschaftskundlichen Realgymnasien würde sich die Netzplantechnik als Möglichkeit für den vom Lehrer selbst zu wählenden Ergänzungsbereich auch thematisch gut eignen. Hier würde sich eventuell auch ein fächerübergreifender Unterricht mit dem Fach Geographie und Wirtschaftskunde anbieten, in dessen Aufgabenbereich es liegt, den Schüler/innen betriebswirtschaftliche Organisations- und Produktionsformen näher zu bringen.

Ebenso bietet sich das Thema Netzplantechnik gut zum Einsatz im vertiefenden Unterricht aus Mathematik an. Hier könnte neben dem theoretischen Vermittlungsinteresse vor allem auch die Durchführung einer eigenen Projektplanung (z.B. Organisation des Schulballs) ein Ziel sein.

Auch für Spezialgebiete oder eine Fachbereichsarbeit könnte das Thema der Netzplantechnik eine interessante und gute Alternative sein.

**Abbildungsverzeichnis**

	Seite
<b>Abb.2.1.1</b> Anwendungsgebiete der Netzplantechnik in den einzelnen Projektphasen	7
<b>Abb.2.2.1</b> Knoten und Pfeil	10
<b>Abb.2.2.2</b> Beispiel „Kritischer Weg“	11
<b>Abb.2.2.3</b> Vorgangspfeil-Netzplan	11
<b>Abb.2.2.4</b> Vorgangsknoten-Netzplan	12
<b>Abb.2.2.5</b> Ereignisknoten-Netzplan	12
<b>Abb.2.2.6</b> Arten von Netzplänen	12
<b>Abb.3.1.1</b> Königsberger Brückenproblem von L. Euler	15
<b>Abb.3.1.2</b> Wichtige Persönlichkeiten bei der Entwicklung der Graphentheorie: L. Euler, D. König, A. Cayley	16
<b>Abb.3.1.3</b> Mehrfachkante	17
<b>Abb.3.1.4</b> Schlinge	17
<b>Abb.3.1.5</b> Beispielgraph	18
<b>Abb.3.1.6</b> Liste der Vorläufer und Nachfolger	19
<b>Abb.3.1.7</b> Beispiel KSORT – 1	24
<b>Abb.3.1.8</b> Beispiel KSORT – 2	25
<b>Abb.3.1.9</b> Beispiel „Längster Weg“	26
<b>Abb.3.1.10</b> Algorithmus von Bellman	27
<b>Abb.3.1.11</b> Übersicht über Algorithmen zur Bestimmung des längsten Weges	28
<b>Abb.3.1.12</b> Richard Bellman	29
<b>Abb.3.2.1</b> Dichten der Betaverteilung auf (0,1)	40
<b>Abb.3.3.1</b> Berühmte Persönlichkeiten bei der Entwicklung der linearen Optimierung: L. Kantorowitsch, G. Dantzig	43
<b>Abb.3.3.2</b> Beispiel graphisches Lösungsverfahren	46
<b>Abb.4.1.1</b> Zuordnung bei „CPM“	56
<b>Abb. 4.1.2</b> Beispiel „Regel 1“	58
<b>Abb.4.1.3</b> Beispiel „Regel 2“	58
<b>Abb.4.1.4</b> Beispiel „Regel 3“ – FALSCH	59
<b>Abb.4.1.5</b> Beispiel „Regel 3“	59

---

<b>Abb.4.1.6</b> Beispiel „Regel 4“	59
<b>Abb.4.1.7</b> Beispiel „Regel 4“ – FALSCH	59
<b>Abb.4.1.8</b> Beispiel „Regel 5“	60
<b>Abb.4.1.9</b> Beispiel „Regel 6“	60
<b>Abb.4.1.10</b> Beispiel „Regel 7“	61
<b>Abb.4.1.11</b> Beispiel „Nichtplanarer Graph“ (links) und „planarer Graph“ (rechts)	62
<b>Abb.4.1.12</b> Puffer	66
<b>Abb.4.1.13</b> Beispiel Zeitplanung	67
<b>Abb.4.1.14</b> Berechnung „Kritischer Pfad“	68
<b>Abb.4.1.15</b> Berechnung der $FZ_i$ und $SZ_i$	69
<b>Abb.4.1.16</b> Berechnung der $FAZ_{ij}$ , $FEZ_{ij}$ , $SAZ_{ij}$ , $SEZ_{ij}$	69
<b>Abb.4.1.17</b> Berechnung der Pufferzeiten	70
<b>Abb.4.1.18</b> Normal- und Minimalpunkt	71
<b>Abb.4.1.19</b> Beispiel	72
<b>Abb.4.1.20</b> Linearer Zeit-Kosten-Verlauf	73
<b>Abb.4.1.21</b> Projektkosten	74
<b>Abb.4.1.22</b> Beispiel Kostenplanung	74
<b>Abb.4.1.23</b> Beispiel Kostensplanung „Kritischer Pfad“	75
<b>Abb.4.1.24</b> Beispiel Kostensplanung „Kritischer Pfad“ – 2	77
<b>Abb.4.1.25</b> Kosten-Dauer-Relation	76
<b>Abb.4.1.26</b> Ausfallkosten	77
<b>Abb.4.1.27</b> Wirtschaftlich optimale Projektdauer	78
<b>Abb.4.1.28</b> Beispiel – wirtschaftlich optimale Projektdauer	78
<b>Abb.4.1.29</b> Belastungsausgleich	81
<b>Abb.4.2.1</b> Vorgangsknoten-Netzplan	84
<b>Abb.4.2.2</b> Beispiel „Regel 1“ Minimalabstand	86
<b>Abb.4.2.3</b> Beispiel „Regel 1“ Maximalabstand	86
<b>Abb.4.2.4</b> Beispiel „Regel 1a“	86
<b>Abb.4.2.5</b> Beispiel „Regel 1b“	87
<b>Abb.4.2.6</b> Beispiel „Regel 2“ in einem CPM-Netzplan (links) und einem MPM-Netzplan (rechts)	87
<b>Abb.4.2.7</b> Beispiel „Regel 3“ in einem CPM-Netzplan (links) und einem MPM-	88

---

Netzplan (rechts)	
<b>Abb.4.2.8</b> Beispiel „Regel 4“ in einem CPM-Netzplan (links) und einem MPM-Netzplan (unten)	89
<b>Abb.4.2.9</b> Darstellung der Vorgänge im MPM-Netzplan	92
<b>Abb.4.2.10</b> Beispiel – 1	93
<b>Abb.4.2.11</b> Beispiel – 2	94
<b>Abb.4.2.12</b> Beispiel – 3	95
<b>Abb.4.2.13</b> Beispiel – 4	96
<b>Abb.4.2.14</b> Beispiel – 5	96
<b>Abb.4.3.1</b> Ereignisknoten-Netzplan	97
<b>Abb.4.3.2</b> Parameter der Betaverteilung	100
<b>Abb.4.3.3</b> Verteilungen der $FZ_i$ , $SZ_i$ , $GP_i$	104
<b>Abb.4.3.4</b> Beispiel - 1	105
<b>Abb.4.3.5</b> Beispiel - 2	105
<b>Abb.4.3.6</b> Beispiel - 3	105
<b>Abb.4.3.7</b> Beispiel - 4	106
<b>Abb.5.1.1</b> Kostenverlauf bei mehrfacher Durchführung eines Projekts	111
<b>Abb.5.2.1</b> Arbeitskräftebedarf bei Berechnung ohne und mit Kapazitätsgrenzen	114
<b>Abb.5.2.2</b> Übersichtsnetzplan für die oberste Führungsebene	117
<b>Abb.5.2.3</b> Detailnetzplan für die unterste Führungsebene	118

**Literaturverzeichnis**

- [1] G. Altrogge, Netzplantechnik. Oldenburg Verlag, München, Wien 1994.
- [2] G. Bamberg et.al., Statistik. Oldenbourg Verlag, München, Wien 2007.
- [3] M. Bayer, Die Netzplantechnik als Führungsinstrument im System Hochschule. Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt 1974.
- [4] W. Bayer, Netzplantechnik bei Serienproduktion – Modifikation bekannter Algorithmen. Dissertation Universität Mannheim 1969.
- [5] H. Behnke, Netzplantechnik und operative Planung in der Industrie. Verlag Moderne Industrie, München 1970.
- [6] F. Beichelt und D. Montgomery [Hrsg.], Teubner-Taschenbuch der Stochastik. Teubner Verlag, Wiesbaden 2003.
- [7] R. Bergen und P. Bubolz, Netzplantechnik. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1974.
- [8] K. Bergmann, H. Küsgen, C. Riepl, Netzplantechnik in der Hochschulplanung. Hochschul-Informations-System GmbH. 1973.
- [9] H. Bürger, et al., Mathematik Oberstufe 1. öbv&hpt, Wien 2004
- [10] N. Christofides: Graph Theory. Academic Press, New York, London, San Francisco 1975.
- [11] T.H. Cormen, et al., Algorithmen – eine Einführung. Oldenbourg Verlag, München, Wien 2007.
- [12] W. Daenzer [Hrsg.], Netzplantechnik – Grundlagen-Methoden-Praxis. Verlag Industrielle Organisation, Zürich 1973.
- [13] R. Diestel, Graphentheorie. Springer Verlag, Berlin 2006.
- [14] D. Dorninger et.al., Lineare Optimierung und Anwendungen. Österreichischer Bundesverlag für Unterricht, Wissenschaft und Kunst, Wien 1977.
- [15] D. Dorninger, Netzplantechnik – Unterlagen für einen Lehrerfortbildungstag. Wien, Klagenfurt 1989.
- [16] D. Dorninger, et.al., Mathematische Grundlagen für Chemiker II. Prugg Verlag, Eisenstadt 1981.

- 
- [17] W. Dürr und K. Kleinbohm, Operations Research – lineare Modelle und ihre Anwendungen. Carl Hanser Verlag, München, Wien 1992.
- [18] E. Flick, Zur Wirtschaftlichkeit der Netzplantechnik bei einmaligen Vorhaben. Dissertation Freie Universität Berlin 1966.
- [19] H. Götzke, Netzplantechnik – Theorie und Praxis. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1969.
- [20] A. Grimm, Netzplantechnik – Spezialgebiet der Graphentheorie und Algorithmik. Diplomarbeit Universität Wien 1995.
- [21] H. Hamacher und K. Klamroth, Lineare und Netzwerk-Optimierung. Friedrich Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden 2000.
- [22] B. Heigenhauser, Möglichkeiten des Einsatzes und Auswirkungen bei Anwendung der Netzplantechnik in der Termin- und Einsatzmittelplanung für Fertigungsarten typischer Betriebsgrößenklassen der Holzwirtschaft. Dissertation Universität Hamburg 1972.
- [23] B. Heigenhauser, Netzplantechnik – kurz und bündig. Vogel Verlag, Würzburg 1976.
- [24] N. Henze, Stochastik für Einsteiger. F. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden 2006.
- [25] H. Heuser, Lehbuch der Analysis – Teil 1. Teubner Verlag, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden 2003.
- [26] M. Hollauf, Netzplantechnik – Grundlagen und mathematischer Hintergrund – Anwendung im Unterricht. Diplomarbeit Universität Wien 1994.
- [27] G. Holzschuh, Was ist Netzplantechnik?. Elitera Verlag, Berlin 1977.
- [28] P. Hopmeier, Netzplantechnik und ihre Anwendbarkeit für Klein- und Mittelbetriebe. Dissertation Hochschule für Welthandel Wien 1973.
- [29] R. Hug, Die Kosten- und Kapazitätsanalyse mit Hilfe der Netzplantechnik und ihre Anwendungsmöglichkeiten in der Unternehmung der schweizerischen Maschinenindustrie zur Planung und Überwachung des Auftragsablaufes. Dissertation Universität Zürich 1970.
- [30] H. Jacob [Hrsg.], Anwendung der Netzplantechnik im Betrieb. Betriebswirtschaftlicher Verlag, Wiesbaden 1969.
- [31] D. Jungnickel, Graphen, Netzwerke und Algorithmen. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1994.



- 
- [32] G. Käppeli, Die Planung von Produktionsprozessen in der Bauunternehmung auf der Grundlage der Netzplantechnik. Europäische Hochschulschriften, Bern, Frankfurt/Main 1974.
- [33] N. Kern, Betriebswirtschaftliche Analyse der Netzplantechnik als Verfahren der industriellen Terminplanung. Dissertation Universität des Saarlandes 1968.
- [34] K. Königsberger, Analysis 1. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 2001.
- [35] P. Kraushaar, Die Anwendung der Netzplantechnik bei Abschlussprüfungen. Dissertation an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz 1970.
- [36] B. Krekó, Lehrbuch der linearen Optimierung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.
- [37] P. Kunz, Mathematische Grundlagen der Netzplantechnik. Diplomarbeit Technische Universität Wien 1972.
- [38] K. Marti und D. Gröger, Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung. Physica Verlag, Heidelberg 2000.
- [39] M. Meyer et.al., Mathematische Planungsverfahren I – Eine anwendungsorientierte Einführung in die Lineare Programmierung und die Netzplantechniken. Girardet Verlag, Essen 1973.
- [40] G. Nägler und F. Stopp, Graphen und Anwendungen. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig 1996.
- [41] F. Pleschak und D. Altmann, Netzplantechnik in Forschung, Entwicklung und Überleitung. VEB Verlag Technik, Berlin 1969.
- [42] H. Reichel, et al., Lehrbuch der Mathematik 5. öbv&hpt, Wien 1999.
- [43] F. Rosenkranz, Netzwerktechnik und wirtschaftliche Anwendung. Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan 1968.
- [44] J. Schärf und M. Schmucker, Netzplantechnik für Anfänger. Oldenbourg Verlag, Wien 1975.
- [45] J. Schwarze Jochen, Netzplantechnik. Verlag Neue Wirtschafts-Briefe, Herne, Berlin 1986.
- [46] D. Stempell et.al., Handbuch der Netzplantechnik. Westdeutscher Verlag, Opladen 1971.
- [47] N. Thumb, Grundlagen und Praxis der Netzplantechnik. Verlag Moderne Industrie, München 1968.

- 
- [48] R. Viertel, Einführung in die Stochastik. Springer Verlag, Wien, New York 2003.
- [49] L. Volkmann, Fundamente der Graphentheorie. Springer Verlag, Wien, New York 1996.
- [50] G. Wagner, Die Anwendung der Netzplantechnik (CPM, PERT) in der Bauwirtschaft durch Unternehmer, Bauträger, Ingenieure und Architekten. Bauverlag GmbH. Wiesbaden, Berlin 1966.
- [51] B. Wilfling, Planung und Kontrolle der Jahresabschlussprüfung mit Hilfe der Netzplantechnik. Dissertation Hochschule für Welthandel Wien 1973.
- [52] W. Zimmermann und U. Stache, Operations Research – Quantitative Methoden zur Entscheidungsvorbereitung. Oldenbourg Verlag, München, Wien 2001.
- [53] S. Zuchovickij und I. Radtschik, Mathematische Methoden der Netzplantechnik. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969.

**Quellenverzeichnis**

- [54] [www.wikipedia.de/Netzplantechnik](http://www.wikipedia.de/Netzplantechnik) 6. Okt. 2009
- [55] <http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Koenigsb/Biografi/Biogr2.htm> 9. Nov. 2009
- [56] <http://www.math.tugraz.at/~predota/old/history/mathematiker/img/uler4.jpg> 9. Nov. 2009
- [57] [www.ams.org/featurecolumn/images/konig1.jpg](http://www.ams.org/featurecolumn/images/konig1.jpg) 9. Nov. 2009
- [58] <http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates67/opciones/sabias/Cayley/Cayley/Cayley1.jpg> 9. Nov. 2009
- [59] [www.wu.ac.at/inst/or/dynopt.pdf](http://www.wu.ac.at/inst/or/dynopt.pdf) 15. Nov. 2009
- [60] [www.mathematik.uni-trier.de:8080/~tichatschke/History-article.pdf](http://www.mathematik.uni-trier.de:8080/~tichatschke/History-article.pdf) 15. Nov. 2009
- [61] [de.wikipedia.org/wiki/Optimalit%C3%A4tsprinzip\\_von\\_Bellman](http://de.wikipedia.org/wiki/Optimalit%C3%A4tsprinzip_von_Bellman) 15. Nov. 2009
- [62] [www.life.com/photos](http://www.life.com/photos) 15. Nov. 2009
- [63] [freiburg.de/lak\\_teaching/ss\\_08/homework/04\\_06\\_08\\_Negative\\_Zyklen.pdf](http://freiburg.de/lak_teaching/ss_08/homework/04_06_08_Negative_Zyklen.pdf) 16. Nov. 2009
- [64] <http://www.eagle-leipzig.de/kantorowitsch-leonid.jpg> 17. Nov. 2009
- [65] <http://news.stanford.edu/news/2005/may25/gifs/Dantzig.jpg> 17. Nov. 2009
- [66] <http://www.uni-konstanz.de/FuF/wiwi/heiler/os/vt-beta.html> 30. Nov. 2009
- [67] [www.kfunigraz.ac.at/sor/Downloads/WS2006\\_07/Betriebsw\\_Optimierung/Netzplan/NETZ51.pdf](http://www.kfunigraz.ac.at/sor/Downloads/WS2006_07/Betriebsw_Optimierung/Netzplan/NETZ51.pdf) 14. Dez. 2009
- [68] [http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL/BETRIEBSMAN.\\_Anlage\\_1.3.3\\_382-98.pdf](http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/HTL/BETRIEBSMAN._Anlage_1.3.3_382-98.pdf) 15. Jän. 2010
- [69] [http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp\\_neu\\_ahs\\_07.pdf](http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf) 20. Jän. 2010