



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

MODELLBILDUNG UND QUERDYNAMISCHE UNTERSUCHUNG EINES FAHRRADES

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl
und

Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann

E 325 / A1

Institut für Mechanik und Mechatronik
Abteilung für Fahrzeugdynamik und Biomechanik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften
von

Wolfgang Müller

Matrikelnummer: 0525443

Maierhöfenerstraße 11

3041 Asperhofen

Wien, im Mai 2011

Vorwort

Diese Arbeit entstand am Institut für Mechanik und Mechatronik der Technischen Universität Wien im Zuge des sich in der Abteilung für Fahrzeugdynamik und Biomechanik entwickelten Forschungsschwerpunktes der Fahrrad-Dynamik.

Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl für die ausgezeichnete Betreuung meiner Arbeit bedanken. In zahlreichen Besprechungen trug er durch seine eingebrachten Anregungen ganz wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann für die hervorragende Unterstützung bei der Einarbeitung in das Programmsystem SIMPACK. Erst seine in vielen Diskussionen eingebrachte Erfahrung ermöglichte die Umsetzung verschiedener Modellierungsprobleme, und damit den Aufbau eines die Realität ausreichend beschreibenden Fahrradmodells.

Zudem danke ich allen Mitarbeitern des Institutes für Mechanik und Mechatronik, sowie den Kollegen des Diplomantenraumes für die Kollegialität und Hilfsbereitschaft.

Im privaten Rahmen möchte ich mich vor allem bei meinen Eltern und meiner Freundin Alexandra für ihre Unterstützung während meines gesamten Studiums bedanken.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Modellbildung und dem querdynamischen Verhalten von Fahrrädern. Zunächst wird ein in der Mehrkörpersystem-Software SIMPACK aufgebautes Fahrradmodell vorgestellt, das gemäß der einschlägigen Literatur, unter Berücksichtigung der Rahmennachgiebigkeit und eines linearen Reifenmodells, die Realität ausreichend wiedergibt.

Da bei der aufrechten Fahrt mit dem Fahrrad stets ein Mittelweg aus Stabilisierung und Manövrierung gefunden werden muss, ist bei querdynamischen Untersuchungen auch das Stabilitätsverhalten des Fahrrades von Interesse. Folglich wird dieses vorweg ausreichend behandelt, und entsprechende Einflussfaktoren besprochen. Aufbauend darauf wird das durchaus komplexe querdynamische Verhalten des Fahrrades anhand der instationären Einfahrt in eine Kurve und der über Slalomfahrmanöver charakterisierten System-Übertragungsfunktionen diskutiert. Dabei zeigt sich, dass das Fahrrad ein Allpassverhalten (Nichtphasenminimumverhalten) besitzt und stark verzögert auf unterschiedliche Fahrereingriffe (Lenkmoment bzw. Fahreroberkörperneigung) reagiert. Daher werden an den Fahrer als Regelsystem entsprechend hohe Anforderungen gestellt. Dies wird insbesondere bei Anfängern, die noch nicht mit dem Systemverhalten des Fahrrades vertraut sind, offensichtlich.

Abstract

The diploma thesis deals with the modeling and lateral dynamics of bicycles. Initially a bicycle model, built up in the multibody-system-software SIMPACK, is presented. According to scientific literature this multibody-model, including frame compliance and a linear tyre model, reproduces reality sufficiently.

Since riding a bicycle is a compromise between stabilizing and maneuvering, the lateral dynamics of bicycles are highly affected by their stability behaviour. Consequently, this is adequately addressed in advance, and some respective influencing factors are analysed. Afterwards the quite complex lateral dynamic behaviour of the bicycle is discussed on the basis of a transient curve entrance maneuver and the system transfer functions (characterized by slalom maneuvers). It turns out, that the bicycle has an all-pass behaviour (nonminimum-phase behaviour) and reacts strongly delayed to different rider interventions (steering torque or rider upper body tilt). Therefore, high demands needed to be solved by the rider as the control system. This is especially obvious for beginners, who are unfamiliar with the system behaviour of the bicycle.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Motivation und Zielsetzung	7
1.2	Aufbau der Arbeit	8
2	Literaturstudie	10
2.1	Das Fahrrad - Ein historischer Rückblick	10
2.2	Modellierung und Querdynamik des Fahrrades	12
3	Modellbildung	17
3.1	Modellaufbau und Parametrierung	18
3.1.1	Modellbeschreibung	18
3.1.2	Parameterwerte	22
3.2	Modellierung des Reifens	27
3.2.1	Grundlegende Erklärungen und Definitionen	27
3.2.2	Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn	33
3.2.3	Das lineare Reifenmodell	39
3.3	Der Fahrer als Regler	42
3.3.1	Die Stabilisierungsaufgabe des Fahrers	42
3.3.2	Fahrgeschwindigkeitsregelung	51

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	6
4 Das Stabilitätsverhalten des Fahrrades	53
4.1 Stabilitätsdefinitionen	54
4.1.1 Stabilität im Sinne Ljapunows	54
4.1.2 Asymptotische Stabilität	54
4.2 Lineare Stabilitätsanalyse	55
4.3 Stabilität der Geradeausfahrt	57
4.3.1 Grundsätzliches Stabilitätsverhalten - auftretende Modes	57
4.3.2 Einflüsse auf das Stabilitätsverhalten	61
4.4 Stabilität der stationären Kurvenfahrt	69
5 Die Querdynamik des Fahrrades	72
5.1 Die stationäre Kurvenfahrt	72
5.2 Die instationäre Kurvenfahrt	75
5.2.1 Autostabiler Geschwindigkeitsbereich	75
5.2.2 Instabiler Geschwindigkeitsbereich	77
5.2.3 Lenkeffekt zufolge Fahreroberkörperneigung	79
5.3 Das Übertragungsverhalten des Fahrrades	81
5.3.1 Das Slalomfahrmanöver	82
5.3.2 Übertragungsfunktionen	83
6 Zusammenfassung	87
Appendix	89

Kapitel 1

Einleitung

Die Bedeutung des Fahrrades als Individualverkehrsmittel wird häufig unterschätzt. Während Ende der 1960er Jahre die Produktionszahlen von Fahrrädern und Automobilen noch auf etwa gleichem Niveau lagen, ist seither ein zunehmender Anstieg der globalen Fahrradproduktion im Vergleich zu jener von Automobilen feststellbar. So liefen etwa im Jahr 2007 weltweit mit rund 130 Millionen, mehr als doppelt so viele Fahrräder wie Autos von den Produktionsbändern, [1].

Der jüngste Erfolg des Fahrrades, der einerseits im zunehmenden Einsatz als Transportmittel und andererseits in der steigenden Popularität des Fahrradsports begründet ist, zeigt sich vor allem im urbanen Bereich vieler Industrieländer. So werden etwa in den städtischen Gebieten der Niederlande rund 27% der Wegstrecken mit dem Fahrrad zurückgelegt, [2]. In Städten wie Münster und Kopenhagen liegt der Radverkehrsanteil bereits bei über einem Drittel [3], weshalb diese Vorbildwirkung für viele Städte, die den Fahrradverkehr zur Entspannung der Verkehrsproblematik fördern, haben.

1.1 Motivation und Zielsetzung

Ein wesentlicher Grund für die Faszination, die dem Fahrrad als emissionsfreies Fortbewegungsmittel entgegengebracht wird, ist sicherlich dessen hoher Wirkungsgrad. *„Die erforderliche Bewegungsenergie (in Joule pro Kilogramm und Kilometer) ist relativ zur Masse bei keiner Fortbewegungsart so niedrig wie beim Fahrrad.“*, [3].

Neben der Energieeffizienz des Fahrrades beeindruckt aber vor allem die scheinbare Selbstverständlichkeit der aufrechten Fahrt. Versucht man jedoch das Verbleiben des Fahrrades in der aufrechten Position zu erklären, so merkt man schnell, dass dies auf-

grund des durchaus komplexen, und damit überaus interessanten querdynamischen Verhaltens des Fahrrades ad hoc nicht möglich ist.

Die diesbezügliche Problematik, einen Kompromiss aus ausreichender Stabilität und hinreichender Manövrierbarkeit zu finden, wurde bereits 1901 von Wilbur Wright vor seinem erstmalig erfolgreich durchgeführten kontrollierten Motorflug erkannt:

*„Men know how to construct airplanes. Men also know how to build engines. Inability to **balance and steer** still confronts students of the flying problem. When this one feature has been worked out, the age of flying will have arrived, for all other difficulties are of minor importance.“*

Doch in welchem Zusammenhang ist dieses Problem treffender als beim Fahrradfahren? Genau dieser Mittelweg aus Stabilisierung und Manövrierung muss auch bei der aufrechten Fahrt mit dem Fahrrad gefunden werden.

Ziel dieser Arbeit ist es nun ein mechanisches Ersatzmodell eines Fahrrades aufzubauen, mit dem das querdynamische Verhalten des Fahrrades aufgezeigt und diskutiert werden kann. Dabei wird neben dem dynamischen Ansprechen des Fahrrades auf Fahrereingriffe (Manövrierbarkeit) auch dessen Stabilitätsverhalten von besonderem Interesse sein.

Wie aus nunmehr über 140 Jahren Forschungsarbeit zur Querdynamik des Fahrrades hervorgeht, ist für eine realitätsnahe Analyse des querdynamischen Fahrradverhaltens ein entsprechend komplexes Fahrradmodell erforderlich. Daher bot sich für die vorliegende Arbeit der Einsatz einer Mehrkörpersystem-Software zur Modellbildung des Fahrrades an.

1.2 Aufbau der Arbeit

Nach einem kurzen historischen Rückblick über die wesentlichsten Entwicklungsschritte des Fahrrades wird ein Überblick über die wichtigsten, die Fahrrad-Modellierung betreffenden Publikationen gegeben.

Darauf aufbauend wird das in dieser Arbeit verwendete Fahrradmodell vorgestellt, und entsprechende Parameterwerte angegeben. Da die Modellierung des Reifens sowie jene der Fahrereingriffe entscheidende Rollen in der Fahrradmodellierung einnehmen, wird auf diese detaillierter eingegangen.

Die mathematische Aufbereitung des Stabilitätsbegriffes, und die Angabe einer Methode zur Stabilitätsanalyse erlauben schließlich Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten des Fahrrades. Dabei wird einerseits die Stabilität der unbeschleunigten Geradeausfahrt

sowie dessen wichtigste Einflussgrößen, und andererseits jene der stationären Kurvenfahrt diskutiert.

Das anschließende Kapitel befasst sich mit der Querdynamik des Fahrrades. Nach der Betrachtung der stationären Kurvenfahrt, wird die instationäre Einfahrt in eine Kurve untersucht. Dabei wird neben der Kurveneinleitung zufolge der Aufbringung eines Lenkmomentes auch der Lenkeffekt zufolge der Fahreroberkörperneigung betrachtet. Weiters wird das über entsprechende Slalomfahrmanöver charakterisierte Übertragungsverhalten des Fahrrades diskutiert.

Abschließend wird eine kurze Zusammenfassung der wesentlichsten Erkenntnisse aus der vorliegenden Arbeit angegeben.

Kapitel 2

Literaturstudie

2.1 Das Fahrrad - Ein historischer Rückblick

Die Geschichte des Fahrrades beginnt 1817 mit dem vom Deutschen Karl von Drais entwickelten Laufrad, welches später nach dessen Erfinder auch „Draisine“ genannt wurde, [4] - [6]. Als Inspiration zu dessen Entwicklung diente Drais gemäß [6] der Bewegungsablauf beim Eislaufen. So saß der Fahrer bei der Fahrt mit der Draisine zwischen den beiden Rädern, und stieß sich mit den Füßen vom Boden ab. Das Vorderrad war lenkbar ausgeführt, sodass das Laufrad auch ohne Kontakt mit dem Boden im Gleichgewicht gehalten werden konnte. Im Jahr 1818 gelangte die Draisine nach England, wo Denis Johnson mit der Fabrikation einer etwas verbesserten Variante, dem so genannten „Hobby Horse“ begann, [6].

Ein ganz wesentlicher Entwicklungsschritt des Fahrrades folgte schließlich mit der Erfindung des Pedalantriebes. Die Anrechnung dieser Erfindung geht zwar üblicherweise auf den Schotten Kirkpatrick Macmillan um 1840 zurück [6], doch auch dem Franzosen Pierre Michaux und seinem Sohn Ernest wird die erstmalige Verwendung eines Kurbeltriebes zugeschrieben, [5]. Die Gefährte dieser Zeit wogen schwerfällige $30kg$, und waren als „Vélocipède“ oder „Bone Shaker“ bekannt, [6]. Letztere Bezeichnung verbreitete sich aufgrund der extrem unkomfortablen Fahrt, die dessen steife Holzkonstruktion auf dem zu diesen Zeiten üblichen Kopfsteinpflaster mit sich brachte.

Bald war die Fahrgeschwindigkeit des Fahrrades im Fokus der Entwicklungen, und das Vélocipède verlor zunehmend, aufgrund seiner großen Masse und seiner geringen Antriebsübersetzung, an Popularität. 1870 kamen schließlich die ersten Hochräder auf, die der Forderung nach höheren Fahrgeschwindigkeiten mit Hilfe eines möglichst großen Vorderrades nach kamen. Diese Fahrräder hatten bereits Vollgummireifen, und wurden

größtenteils aus Metall gefertigt, was zu einer erheblichen Gewichtseinsparung führte. Der hohe Schwerpunkt des Hochrades bereitete nicht nur beim Auf- bzw. Abstieg Schwierigkeiten, sondern führte auch bei der Fahrt häufig zu Stürzen, bei denen der Fahrer kopfüber nach vorne fiel.

Die Gefährlichkeit des Hochrades führte schließlich 1878 zu den ersten Fahrrädern mit Kettenantrieb, die sich erstmals - über unterschiedlich große Zahnkränze an Kurbel und Hinterradachse - das Prinzip der Übersetzung zu Nutze machten, [3]. Mit dieser Technologie konnten Fahrräder mit weit niedrigeren Schwerpunkten und annähernd gleich großen Reifen konstruiert werden, welche aufgrund des im Vergleich zu den Hochrädern wesentlich sichereren Fahrverhaltens auch Sicherheitsniederräder oder Safety-Bicycles genannt wurden. Als bekanntester Vertreter dieser Bauform gilt das von John Kemp Starley seit 1885 angebotene „Rover Safety Bicycle“, [3].

Ein weiterer Meilenstein in der Fahrradentwicklung war die Erfindung des Luftreifens 1888 durch den Schotten John Boyd Dunlop, welche eine komfortablere Fahrt und höhere maximale Fahrgeschwindigkeiten ermöglichte, [6]. Zu dieser Zeit konnten auch einige weitere Patente (1885: Diamantrahmenform, 1887: Rahmen aus nahtlos gezogenen Stahlrohren, 1889: Freilaufnabe, etc.), die eine schrittweise Annäherung an das moderne Fahrrad bedeuteten, angemeldet werden.

Zur Jahrhundertwende erlebt das Fahrrad schließlich seine Blütezeit. Das stetig weiterentwickelte Niederfahrrad war nicht mehr nur das wichtigste Transportmittel, sondern eine im zunehmenden Maße populäre Form der Erholung. So gab es etwa 1896 bereits über 1000 Fahrradklubs in der österreichisch-ungarischen Monarchie, [5].

Die Erfindungen bei der Entwicklung des Fahrrades waren zwar Wegbereiter für das Aufkommen von Motorrädern und Automobilen, doch wurde dessen eigene Weiterentwicklung dadurch gebremst. Mit dem Wirtschaftsaufschwung setzte sich schließlich das Automobil endgültig durch, und löste das Fahrrad als Statussymbol ab. Die zunehmende individuelle Mobilität kehrte sich jedoch bald in ihr Gegenteil um, und das Fahrrad erlebte in der Energiekrise der 70er Jahre als umweltschonende und gesundheitsfördernde Alternative eine Renaissance. Im Jahr 1973 gibt eine Gruppe kalifornischer Pioniere den Startschuss für die neueste Entwicklung in Sachen Fahrrad, [7]. Mit den ersten, 20kg schweren Mountainbikes rasen sie einen Hügel in der Nähe von San Francisco herunter, und eröffnen damit einen neuerlichen Innovationsschub des Fahrrades. Im Zuge dieser neuen Form des Fahrradsports entstehen präzisere Gangschaltungen, Federungen und in jüngster Zeit Leichtbauahmen aus verschiedensten Werkstoffen.

Heute stellt das Fahrrad ein hochtechnisiertes Fortbewegungsmittel mit jeweils auf den entsprechenden Fahrradtyp (Rennrad, Citybike, Trekkingbike, Mountainbike) angepassten Ansprüchen dar.

2.2 Modellierung und Querdynamik des Fahrrades

Bereits früh nach der Erfindung des Fahrrades fesselte dessen querdynamisches Verhalten die Wissenschaftler der damaligen Zeit. Seither wurden unzählige Untersuchungen zur Querdynamik des Fahrrades publiziert, wobei die Fortschritte, die zum Verständnis der Fahrraddynamik führten, aufgrund einiger gegensätzlicher Schlussfolgerungen relativ langsam vor sich gingen, [8].

Im Folgenden soll ein chronologischer Überblick über die relevante Literatur, die den wesentlichen Hintergrund für die Modellbildung bei querdynamischen Betrachtungen von Zweirädern bildet, gegeben werden. Dabei wurde bewusst der Begriff des Zweirades verwendet, da in einigen Publikationen die grundsätzlich analoge Dynamik des Fahrrades und des Motorrades zusammenfassend betrachtet wird. Leser, die an einem detaillierten Literaturrückblick interessiert sind, werden auf [8] oder [9] verwiesen. Der folgende Rückblick soll sich nicht durch einen derartigen Detaillierungsgrad auszeichnen, sondern vielmehr die wichtigsten Publikationen hervorheben:

In den Jahren 1869 und 1870 veröffentlichte der bekannte Thermodynamiker William Rankine [10] eine der ersten Arbeiten zur Fahrraddynamik. Seine in fünf Teilen präsentierten, eher elementaren Analysen über das „Balancieren“ und „Manövrieren“ des *Vélocipède*'s beruhen auf keinerlei Differentialgleichungen, und sind daher eher von historischem Interesse. Dennoch enthält [10] die älteste bekannte Darstellung des „Gegenlenkens“¹ - wonach das Einfahren in eine Rechtskurve ein kurzzeitiges Einlenken nach links erfordert.

Erst mit den, Ende der 1890er Jahre entwickelten Safety-Bicycles mit Luftreifen und Kettenantrieb wurde offensichtlich, dass praktisch jeder das Balancieren eines Fahrrades erlernen konnte, [9]. Ausschlaggebend für das verbesserte Stabilitätsverhalten dieser, einem modernen Fahrrad durchaus ähnlichen Sicherheitsniederräder war deren geneigte Lenkachse sowie der vorgesehene Nachlaufversatz. Aus Interesse an der Bewegung und Stabilität des Safety-Bicycles organisierte 1897 die Französische Akademie der Wissenschaften das Prix Fourneyron-Preisausschreiben, [11]. Dabei konnten sich die Publikationen von Bourlet [12] und Carvallo [13] auszeichnen.

Nahezu zeitgleich veröffentlichte der Cambrigestudent Francis Whipple einen Artikel [14], der ganz wesentlich zum Verständnis der Querdynamik des Fahrrades beitragen sollte. Dieser enthielt gemäß [6] erstmals einen allgemeinen Satz nichtlinearer Differentialgleichungen, der die generelle Bewegung eines Fahrrades beschrieb. Die Lösung dieser Differentialgleichungen war zwar zu dieser Zeit nicht möglich, doch Whipple konnte mit

¹In der Literatur allgemein als „Countersteering“ bekannt.

Hilfe der linearisierten Bewegungsgleichungen und der Anwendung des Routh-Hurwitz-Kriteriums eine Selbststabilisierung des betrachteten Fahrrades in einem Geschwindigkeitsbereich von 16 bis 20km/h nachweisen. Diese Erkenntnisse ähnelten qualitativ jenen von Carvallo [13], und konnten auch experimentell beobachtet werden. Auf das von Whipple verwendete Fahrradmodell wird in der Literatur heute noch, unter der Bezeichnung *Whipple-* oder *Basic-Bicycle-Model*, Bezug genommen. Wie zu dieser Zeit üblich, wurde dabei der Reifen nicht als „Erzeuger“ von Kräften betrachtet, sondern der Reifen-Fahrbahn-Kontakt über nicht-holonome Zwänge beschrieben, [8].

Klein und Sommerfeld [15] führten 1910 die von Whipple und Carvallo festgestellte Selbststabilisierung des Fahrrades auf das Eigenlenkverhalten des Vorderrades zufolge des gyroskopischen Effektes (Kreiselwirkung) zurück. Dazu merkten sie an: „*Die eigentlich stabilisierende Kraft, die die Schwerkraft überwindet, ist die Centrifugalkraft, der Kreiselwirkung fällt die Rolle der Auslösung zu.*“

Eine Zeit weiterer wesentlicher Vorstöße bei der dynamischen Analyse des Fahrrades begann um 1970, vermutlich aufgrund der beginnenden Computerunterstützung, die die Integration der ermittelten Bewegungsgleichungen erleichterte, [9]. Dabei wurde zunehmend der rollende Reifen als Kräfteerzeuger angesehen, und entsprechende Modellierungen der Reifenkräfte (Reifenmodelle) verwendet.

So untersuchten etwa Kondo, Nagaoka und Yoshimura [16] erstmals ein Zweiradmodell mit linear von Schräglauf- und Sturzwinkel abhängigen Reifenkräften. Dabei beging man jedoch signifikante Fehler bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen, [8].

Basierend auf dem Modell von [16] analysierte Robin Sharp 1971 [17] das Stabilitätsverhalten von Motorrädern. Dabei untersuchte er die Auswirkungen eines adaptierten Reifenmodelles, das den auftretenden Zeitverzug beim Aufbau von Seitenkräften zufolge der Relaxationseigenschaft des Reifens berücksichtigte. Bei den Stabilitätsbetrachtungen kristallisierten sich drei physikalisch signifikante Eigenmodes heraus, welche Sharp als „Capsize“, „Weave“ und „Wobble“ bezeichnete¹. Dabei stellte der Capsize-Mode einen reellen, mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit immer labiler werdenden Eigenmode dar. Weave und Wobble wurden dagegen als oszillierende Eigenmodes beschrieben, wobei ersterer für geringere Fahrgeschwindigkeiten ein instabiles (divergentes) Verhalten zeigte. Damit markierte die Geschwindigkeit, bei der sich der Weave-Mode stabilisierte den Beginn der Selbststabilisierung des Motorrades. Bezüglich des in den früheren Modellen mit nicht-holonomen Zwängen nicht ersichtlichen Wobble-Modes (Lenkungs-

¹Diese Bezeichnungen beschreiben die jeweils mit den entsprechenden Eigenmodes assoziierbaren Bewegungen des Zweirades, und finden seither allgemein in der Literatur Anwendung. In der deutschsprachigen Literatur haben sich weitgehend die Übersetzungen „Kentern“, „Pendeln“ und „Lenkungsflattern“ (bzw. schlicht „Flattern“) durchgesetzt.

flattern) schreibt Sharp [17]: „*With the no-sideslip model, however, the wobble mode is completely missing and no possibility for explanation of the 'speedsman's-wobble' phenomenon is afforded.*“ Des Weiteren zeigte sich aus dem Vergleich der Stabilitätskurven mit und ohne Berücksichtigung des zeitverzögerten Seitenkraftaufbaues eine Verschiebung des Wobble-Modes. Daraus schlussfolgerte Sharp, dass die Modellierung des angesprochenen Zeitversatzes für eine realitätsnahe Abbildung des Stabilitätsverhaltens notwendig wäre.

Im Jahr 1972 untersuchte David Weir [18] im Zuge seiner Doktorarbeit die Stabilisierung und Manövrierung des Motorrades über unterschiedliche Fahrereingriffe. Dabei zeigte sich, dass im Vergleich zur Aufbringung von Lenkmomenten, der regelnde Eingriff des Fahrers über Rollbewegungen mit relativ großen Rollmomenten (Fahreroberkörperneigungen) verbunden ist.

Sharp veröffentlichte 1980 eine weitere Arbeit [19], in der Rahmen- und Gabelelastizitäten berücksichtigt, und deren Einflüsse auf das Stabilitätsverhalten des Motorrades analysiert wurden. Dazu betrachtete er drei unterschiedliche Modellvarianten. Die dabei jeweils untersuchten Elastizitäten beinhalteten (a) die laterale Nachgiebigkeit des Vorderrades bezüglich der Gabel, (b) die torsionale Gabelelastizität parallel zur Lenkachse, bzw. (c) die torsionale Nachgiebigkeit des Rahmens am Lenkkopf, modelliert durch eine Verdrehung der vorderen lenkbaren Teilkörper um eine Achse die normal zur Lenkachse stand. Bei allen drei Modellen wurden die jeweils entstandenen Freiheitsgrade mit linearen, parallel angeordneten Feder- und Dämpfer-Elementen versehen. Während die Berücksichtigung der Elastizitäten der Modellvarianten (a) und (b) nur einen äußerst geringen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten zeigten, konnte aus der Analyse des Modelles (c) eine merklich reduzierte Dämpfung des Wobble-Modes zufolge der Modellierung der Rahmennachgiebigkeit festgestellt werden.

1983 untersuchte Koenen [20] aufbauend auf seiner vorangehenden Arbeit mit Pacejka [21] erstmals das Stabilitätsverhalten eines Motorrades in der stationären Kurvenfahrt. Dabei beobachtete er, dass für derartige Analysen die Modellierung von Federungsfreiheitsgraden ganz wesentlich ist. Im Falle der stationären Kurvenfahrt zeigte sich nämlich eine Interaktion der ansonsten entkoppelten Eigenmodes der Vertikaldynamik (In-Plane Modes) und der Querdynamik (Out-Of-Plane Modes).

Als schließlich um die Jahrtausendwende der Fokus querdynamischer Untersuchungen immer mehr auf nichtlinearen Bewegungsgleichungen und der Modellierung des Reifens sowie der Rahmennachgiebigkeit lag, erlebte das *Basic-Bicycle-Model* mit nicht-holonomen Zwängen (Whipple) eine Wiedergeburt. Schwab, Meijaard und Papadopoulos stellten 2004 auf einer Konferenz [22] eine Überarbeitung des Whipple-Modells als

Benchmark-Model vor. In der darauf folgenden Publikation [9] wurden die linearisierten Bewegungsgleichungen detailliert hergeleitet, und mit den numerischen Ergebnissen zweier Mehrkörpersystem-Programme (AutoSim und SPACAR) auf deren Korrektheit überprüft. Weiters wurde in [23] ein mit Messeinrichtungen ausgestattetes Fahrrad zur Validierung des *Benchmark-Models* herangezogen. Dabei zeigten die Messergebnisse innerhalb eines Geschwindigkeitsbereiches von 2 bis 6m/s eine gute Übereinstimmung mit den Modellberechnungen. Da beim *Benchmark-Model* auf die Modellierung des Reifens und der Rahmenflexibilität verzichtet wird, zeichnet es sich durch eine minimale Anzahl an zu bestimmender Parameter aus. Obwohl es dadurch keine Beschreibung des Wobble-Modes ermöglicht, können damit vor allem für geringere Fahrgeschwindigkeit grundsätzliche Stabilitätsaussagen getroffen werden, weshalb es häufig als Referenzmodell Verwendung findet.

Limbeer und Sharp [6] publizierten 2006 eine besonders interessante Arbeit. Darin beschrieben sie anhand verschiedener Modellvereinfachungen die Einflüsse des Nachlaufes, des Nachlaufwinkels, des Nachlaufversatzes sowie des gyroskopischen Effekts auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades. Weiters untersuchten sie das dynamische Lenkverhalten des Fahrrades bei der instationären Kurveneinfahrt für unterschiedliche Fahrgeschwindigkeiten. Um derartige Analysen auch im Geschwindigkeitsbereich mit instabilen Systemverhalten zu ermöglichen, wurde ein den regelnden Fahrereingriff modellierender Lenkungsregler eingeführt. Basierend auf Modellvergleichen gaben Limbeer und Sharp in [6] bezüglich des Ersetzens von Reifenmodellierungen durch nicht-holonome Zwänge (analog dem *Benchmark-Model* [9]) an: „*When the tire is regarded as constraining the motion of the vehicle, the model validity is restricted to low speeds ($< 10m/s$), low frequencies ($< 1.0Hz$), and low tire-force utilization associated with benign maneuvering ($< 20\%$ of capacity).*“ Des Weiteren zeigten sie dezidiert den jeweiligen Einfluss der Modellierung des pneumatischen Reifens und der Rahmenflexibilität auf den Weave- und Wobble-Mode auf, und kamen schließlich zu dem Schluss: „*By extension from measured motorcycle behavior, there is every reason to suspect that the accurate reproduction of bicycle weave- and wobblemode behavior requires a model that includes both relaxed sideslipping tires and flexible frame representations.*“

Etwa zeitgleich beschäftigte sich auch Karl Åström [24] mit der Fahrraddynamik. Dabei verwendete er verschiedene Modellvarianten unterschiedlicher Komplexität, um das prinzipielle Fahrverhalten von Fahrrädern und deren Stabilisierung durch den Fahrer, sowie die Problematik bei Fahrrädern mit Hinterradlenkung aufzuzeigen. Des Weiteren beschrieb Åström in [24] das inverse Verhalten des Fahrrades bei der Kurveneinfahrt (*Countersteering*) und führte dieses auf eine, in den entsprechenden Übertragungsfunktionen des Systems auftretende positive Nullstelle (*right-half-plane zero*) zurück.

Zumal Sharp bereits in [6] verschiedene Möglichkeiten der Modellierung des „Teilsystems“ Fahrerkörper diskutierte¹, erweiterte er sein Fahrradmodell in [11] mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad, sodass sich der Fahreroberkörper relativ zum Rahmen aus dessen Symmetrieebene neigen konnte. Weiters wich er von der Modellierung eines unendlich dünnen Reifens ab, und berücksichtigte zufolge der Aufbringung des so genannten *Overturning Couples* einen kreisförmigen Reifenquerschnitt. Mit diesem Detaillierungsgrad der Darstellung des Reifens, des Rahmens und des Fahrers kann schließlich gemäß [11] das Fahrverhalten des Fahrrades über den gesamten relevanten Geschwindigkeitsbereich ausreichend genau beschrieben werden. Die stabilisierende Wirkung des regelnden Fahrereingriffs wurde mit Hilfe eines Fahrermodells basierend auf dem Prinzip der „Regelung durch Optimierung“ im Fahrradmodell implementiert.

Derartige Fahrermodelle sind, wie bereits erwähnt, für dynamische Analysen außerhalb des Geschwindigkeitsbereiches der Selbststabilisierung des Fahrrades unabdingbar. Je nachdem, in wie weit dabei individuelle Eigenschaften und Fähigkeiten des Fahrers im Vordergrund des Interesses stehen, finden in der Literatur sehr unterschiedliche Modellierungsansätze ([6], [11], [24] oder [25]) Anwendung.

Diese im Laufe der Zeit erarbeiteten Erkenntnisse verdeutlichen schlussendlich, dass zur ausreichend realitätsnahen Analyse des dynamischen Verhaltens eines Fahrrades ein entsprechend komplexes Fahrradmodell erforderlich ist. Daher bietet sich analog [26] oder [27] der Einsatz eines Mehrkörpersystem-Programmes an. Für die in dieser Arbeit diskutierten Untersuchungen wurde ein derartiges Modell mit Hilfe der Mehrkörpersystem-Software SIMPACK aufgebaut. Dieses soll im folgenden Kapitel vorgestellt werden.

¹In den meisten früheren Fahrradmodellen wurde der Fahrer lediglich als eine starr mit dem Rahmen verbundene Einzelmasse beschrieben.

Kapitel 3

Modellbildung

Um ein reales komplexes System mit Hilfe von physikalischen Gesetzen beschreiben, und damit simulieren zu können, bedarf es zunächst einer Modellbildung. Dabei wird das reale System durch Vereinfachungen und idealisierte Annahmen wie

- starre statt elastische Körper,
- Massenmittelpunkte statt verteilte Massen,
- masselose statt massebehaftete Federn,
- etc.

in ein mechanisches Ersatzmodell übergeführt. Dieses Modell sollte so einfach wie möglich gestaltet werden, um einerseits den Modellierungsaufwand in Grenzen zu halten, und andererseits Modelluntersuchungen mit technisch und wirtschaftlich vertretbarem Aufwand zu ermöglichen. Dabei dürfen jedoch keine das Systemverhalten zu stark verfälschende Annahmen getroffen werden. Gemäß [28] formulierte Albert Einstein einmal diese Maxime folgendermaßen:

„Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher!“

Zur Analyse der Bewegung eines Systems aus mehreren Körpern bedient man sich dazu so genannter Mehrkörpersystem-Modelle (MKS-Modelle)¹. Diese bestehen aus starren Teilkörpern, welche mit Koppellementen (Gelenken) verbunden und damit in ihrer Bewegungsfreiheit eingeschränkt sind.

¹Im Englischen Multi-Body-System-Model (MBS-Model)

Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens des MKS werden unter Anwendung bekannter Prinzipien der Mechanik [29], wie

- das d'Alembert'sche Prinzip (Prinzip der virtuellen Arbeit),
- das Jourdain'sche Prinzip (Prinzip der virtuellen Leistung) oder
- das Gauß'sche Prinzip des kleinsten Zwanges

eine Vielzahl von Bewegungsgleichungen aufgestellt, welche das reale System genügend genau beschreiben. Die Bestimmung dieser Gleichungen wird mit zunehmender Modellkomplexität (charakterisiert durch die Anzahl der Teilkörper, Systemfreiheitsgrade und Bindungen) immer schwieriger, fehleranfälliger und letztlich „per Hand“ schlichtweg undurchführbar. Deshalb wurden Programmsysteme entwickelt, die den Benutzer weitgehend unterstützen, und die entsprechenden Bewegungsgleichungen automatisch erstellen und auswerten, [29].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Mehrkörpersystem-Software SIMPACK zur Modellbildung und Simulation eingesetzt. Dieses Programm bedient sich ausgehend von den Newton-Euler-Gleichungen dem d'Alembert'schen Prinzip zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems. Eine detaillierte Herleitung der Vorgehensweise des Programmsystems SIMPACK bei der Bestimmung der entsprechenden Bewegungsgleichungen wird beispielsweise in [30] gegeben.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird zunächst der grundsätzliche Modellaufbau des verwendeten Fahrrad-Modells beschrieben, und entsprechende Parameterwerte angegeben. Danach wird auf die Reifenmodellierung, welche für fahrdynamische Untersuchungen eine ganz entscheidende Rolle einnimmt, im Detail eingegangen. Schließlich wird der regelnde Eingriff des Fahrers auf das Fahrrad diskutiert, und entsprechende Modellierungsansätze zur Abbildung der relevanten Fahrereinflüsse angegeben.

3.1 Modellaufbau und Parametrierung

3.1.1 Modellbeschreibung

Der Aufbau des in der MKS-Software SIMPACK erstellten Fahrrad-Modells ist schematisch in Abbildung 3.1 dargestellt. Es besteht aus sechs Körpern, welche alle als starr angenommen wurden. Nicht vernachlässigbare strukturelle Nachgiebigkeiten, wie

die Rahmen- und Fahreroberkörpernachgiebigkeit, wurden mit zusätzlichen Freiheitsgraden, durch entsprechende Steifigkeits- und Dämpfungscharakteristika modelliert.

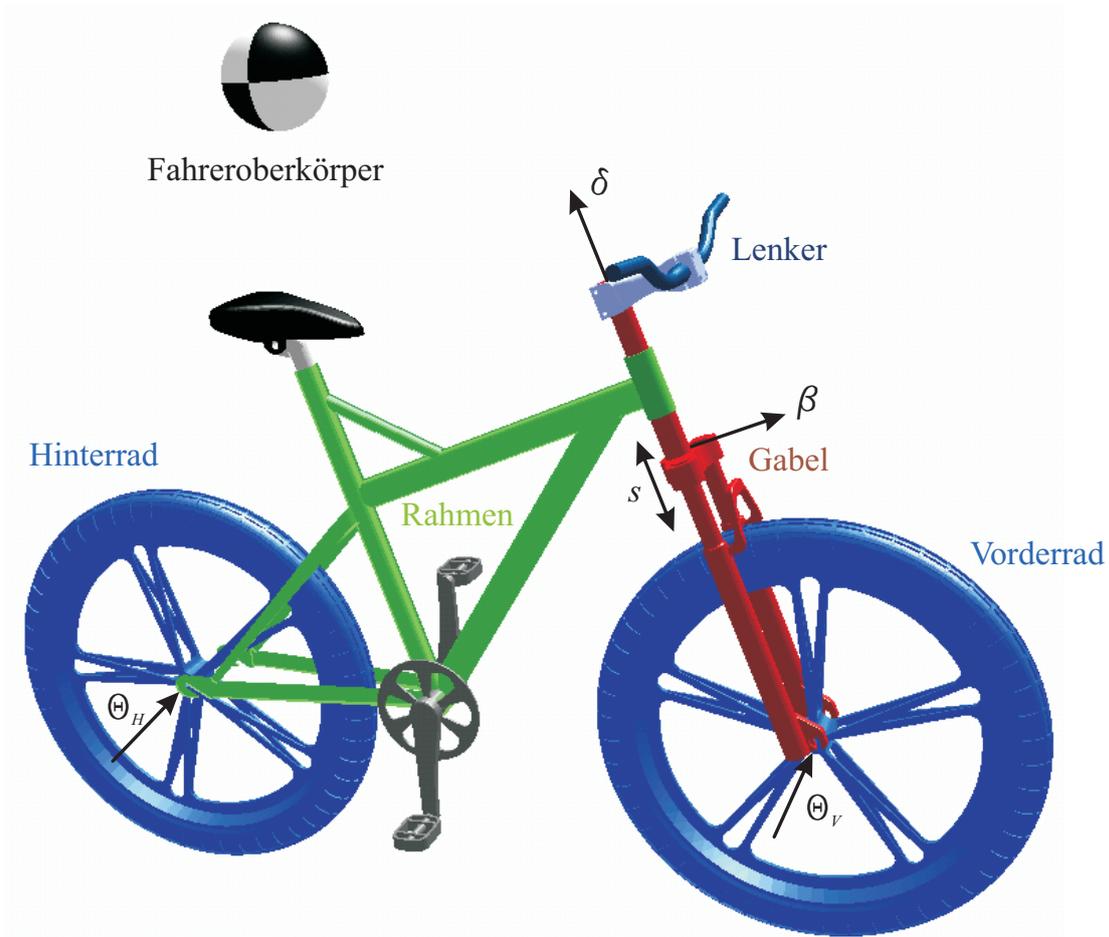


Abbildung 3.1: Fahrradmodell: schematischer Aufbau, Körperbezeichnungen

Die Topologie des MKS-Modells mit den zu Abbildung 3.1 korrespondierenden Körperbezeichnungen zeigt Abbildung 3.2. Daraus ist ersichtlich, dass die Lage des Gesamtsystems durch die Vorgabe von 12 unabhängigen Freiheitsgraden festgelegt ist.

Der Rahmen besitzt gegenüber dem Inertialsystem sechs Freiheitsgrade ($x_R, y_R, z_R, \alpha_R, \beta_R, \gamma_R$). Analog zur Arbeit von Pacejka [31] wurde ein Referenzkoordinatensystem (A, x, y, z) eingeführt, welches eine definierte und damit vergleichbare Bestimmung fahrdynamisch relevanter Größen wie den Rollwinkel φ und den Gierwinkel ψ ermöglicht. Der mit Hilfe eines masselosen Hilfskörpers festgelegte Koordinatenursprung A befindet sich dabei stets auf der Schnittlinie der Symmetrieebene des Fahr-

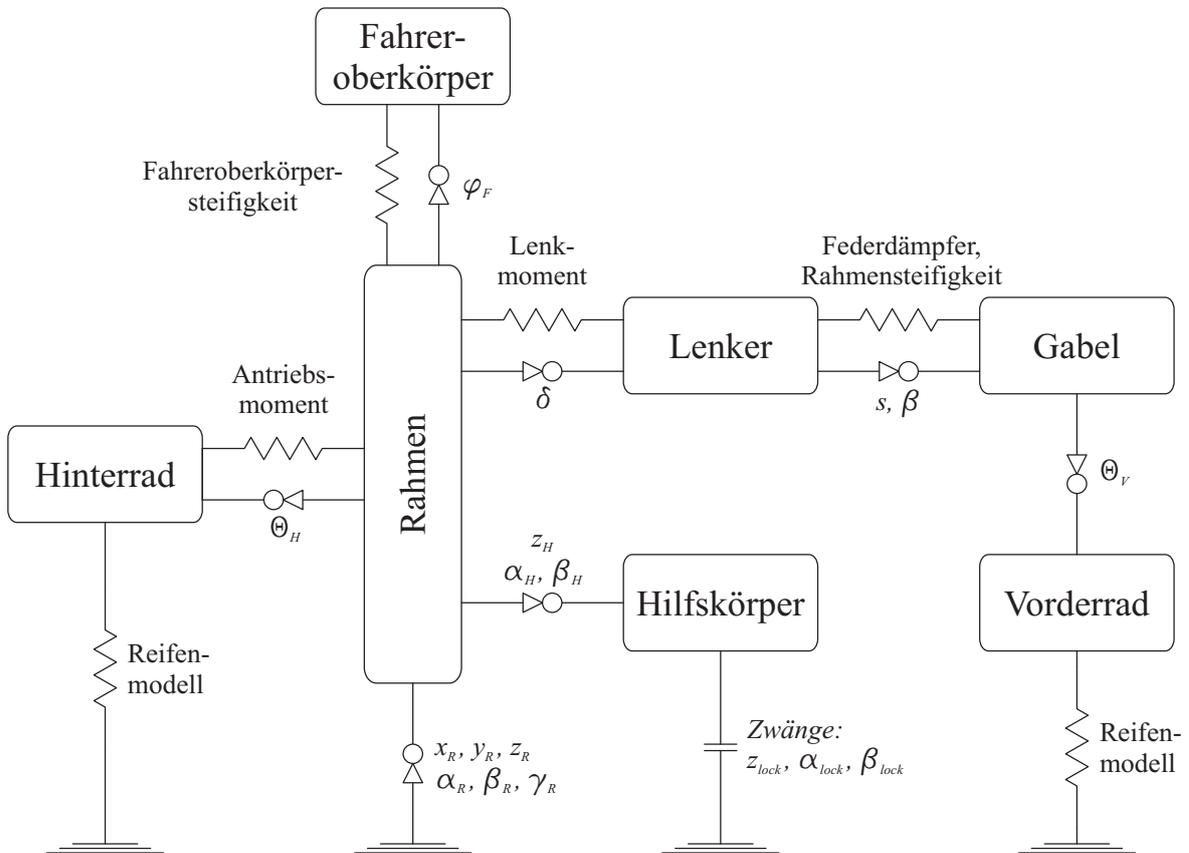


Abbildung 3.2: Fahrradmodell: topologischer Aufbau

rades und der Bodenebene¹, und liegt bei aufrechter Fahrradposition gemäß [31] unterhalb des kombinierten Rahmen- und Hinterradschwerpunktes (vgl. Abbildung 3.4). Die x-Achse des Referenzkoordinatensystems fällt mit der beschriebenen Schnittlinie zusammen, und ist nach vorne gerichtet. Von oben betrachtet zeigt die y-Achse nach links, wobei diese normal zur x-Achse steht und in der Bodenebene liegt. Die z-Achse steht normal auf die Bodenebene, und weist nach oben. Damit kann nun der Rollwinkel φ als Winkel zwischen Fahrradsymmetrieebene und z-Achse des Referenzkoordinatensystems (vgl. Abbildung 3.3) angegeben werden, [31]. Der Gierwinkel ψ beschreibt gemäß Abbildung 3.3 die Drehbewegung des Referenzkoordinatensystems gegenüber dem Inertialsystem.

Die Vorderradaufhängung des Fahrrades zeigt eine typische Baumstruktur, in der die jeweilige Bewegung eines Körpers relativ zur Bewegung des vorangegangenen Körpers beschrieben werden kann. Der Lenker führt gegenüber dem Rahmen eine über den Lenk-

¹Bewerkstellung über Freiheitsgrade z_H, α_H und β_H , welche durch kinematische Zwänge z_{lock}, α_{lock} und β_{lock} relativ zum Inertialsystem gesperrt werden.

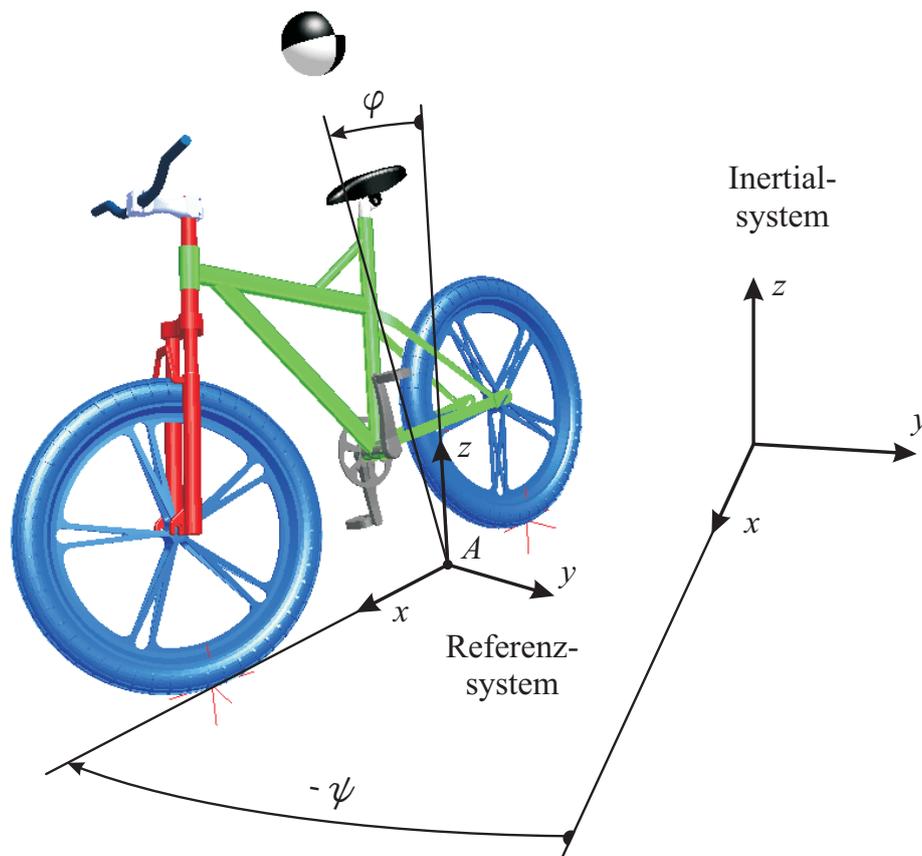


Abbildung 3.3: Fahrradmodell: Rollwinkel φ und Gierwinkel ψ

freiheitsgrad δ definierte Lenkbewegung um die Lenkachse aus. Die Gabel ist mit dem Lenker über zwei Freiheitsgrade verbunden: dem translatorischen Federungsfreiheitsgrad s in Richtung der Lenkachse, und dem die Steifigkeit des Rahmens modellierenden Drehfreiheitsgrad β , welcher eine Tortierung der Vorderradbaugruppe um eine auf die Lenkachse normal stehende Achse erlaubt. Schließlich besitzt noch das Vorderrad einen Drehfreiheitsgrad Θ_V um eine Achse, die normal auf die Symmetrieebene der Gabel steht.

Während in früheren Fahrradmodellen [14], [17] der Fahrer lediglich als eine starr mit dem Rahmen verbundene Einzelmasse beschrieben wurde, wird in der vorliegenden Arbeit analog [11] und [31] ausschließlich der Fahrerunterkörper starr mit dem Rahmen verbunden, und der Fahreroberkörper als inverses Pendel mit Rollfreiheitsgrad φ_F relativ zum Rahmen dargestellt. Dabei wird die Bewegungsfreiheit des Fahreroberkörpers mit einem entsprechenden Kraftelement eingeschränkt, womit den in der Realität vorhandenen strukturellen Steifigkeitseigenschaften des Fahrers auf sehr einfache Weise

Rechnung getragen wird. Damit kann auch das Systemverhalten zufolge der lateralen Neigung des Fahreroberkörpers untersucht werden. Die Drehachse des Rollfreiheitsgrades φ_F verläuft gemäß Abbildung 3.4 bei aufrechter Position des Fahrrades parallel zur x-Achse des Referenzkoordinatensystems. Die dem Fahrerunterkörper entsprechenden Anteile der Fahrer Masse und -trägheit wurden dem Rahmen angerechnet.

Das Hinterrad ist schließlich über einen normal zur Symmetrieebene des Fahrrades stehenden Drehfreiheitsgrad Θ_H , welcher den zwölften und letzten Systemfreiheitsgrad beschreibt, gelenkig mit dem Rahmen verbunden.

Zur Beschreibung der Charakteristika des Federdämpfer-Elementes sowie der beiden im Modell enthaltenen strukturellen Steifigkeiten bzw. Dämpfungen wurden jeweils lineare Kraftgesetze angenommen.

Aufgrund der herausragenden Rolle, die das Reifenmodell bei der fahrdynamischen Analyse als Bindeglied zwischen Reifen und Fahrbahn einnimmt, wird auf dieses in Abschnitt 3.2 detailliert eingegangen. Sonstige externe Kräfte und Momente wie Luft- und Rollwiderstände finden in dieser Arbeit keine Berücksichtigung.

Das Systemverhalten des Fahrrades wird entscheidend durch die regelnden Eingriffe des Fahrers beeinflusst. Daher muss im Folgenden stets unterschieden werden, ob der Fahrer regelnd (aktiv) auf das System einwirkt, oder passiv bleibt. Die Modellierung des Fahrereingriffes über das Lenkmoment-Kraftelement orientiert sich an [9] und wird in Abschnitt 3.3.1 beschrieben. Zur Analyse der ungesteuerten (unkontrollierten) Bewegung des Fahrrades (passiver Fahrer) wird das Lenkmoment zu Null gesetzt.

Die Regelung der Fahrgeschwindigkeit in Längsrichtung erfolgt über ein zwischen Rahmen und Hinterreifen angreifendes Antriebsmoment-Kraftelement. Der dafür notwendige Reglerentwurf wird in Abschnitt 3.3.2 vorgestellt.

3.1.2 Parameterwerte

Das Fahrrad-Modell wurde vollständig parametrisiert aufgebaut, um die Auswirkungen von Parametervariationen auf das fahrdynamische Verhalten des Fahrrades (vgl. Kapitel 4) aufzeigen zu können. Als Ausgangsbasis dient ein Trekking-Fahrrad der Firma KTM-Fahrrad GmbH, dessen Geometrie, Massen und Trägheitsmomente bereits in [32] ermittelt, und auf das vorliegende Modell umgerechnet wurden. Die für diese Ausgangskonfiguration verwendeten Parameterwerte sollen im Folgenden vorgestellt werden:

Geometrie des Fahrrades

In Abbildung 3.4 sind die wesentlichen geometrischen Abmessungen, die für die Erstellung des Fahrradmodells in der Mehrkörperdynamik-Software SIMPACK erforderlich sind, dargestellt. Die entsprechenden Parameterwerte sind in Tabelle 3.1 aufgelistet.

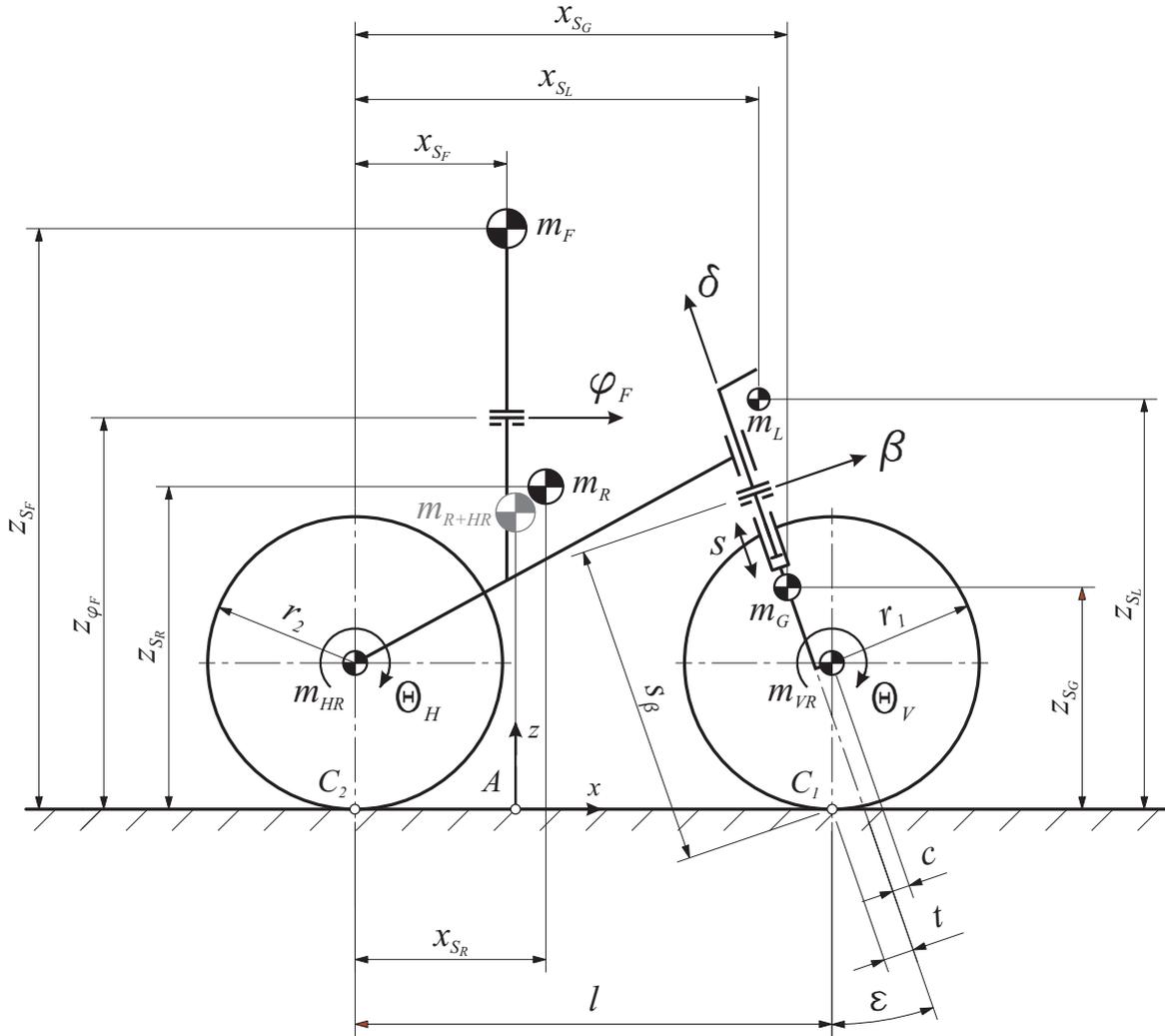


Abbildung 3.4: Fahrradmodell: Geometrie

Die Lenkgeometrie, charakterisiert durch den Nachlauf- oder Lenkkopfwinkel ϵ , den Nachlaufversatz c und den mechanischen Nachlauf t , beeinflusst, wie in den Folgekapiteln gezeigt, ganz wesentlich das Fahrverhalten des Fahrrades. Abweichend zur Definition des Nachlaufwinkels ϵ gemäß Abbildung 3.4 findet auch häufig die Einführung des entsprechenden Komplementärwinkels Anwendung. Der Nachlaufversatz c beschreibt

den Normalabstand des Vorderradmittelpunktes von der Lenkachse, und ist eine konstruktiv festgelegte Größe. Dagegen ist der mechanische Nachlauf t , als Normalabstand des Radaufstandspunktes C_1 zur Lenkachse, von der Lage des Aufstandspunktes, und damit von der jeweiligen Fahrsituation abhängig. Für die aufrechte Geradeausfahrt ergibt sich der in Tabelle 3.1 eingetragene Wert.

Weitere charakteristische Abmessungen des Fahrrades stellen der Radstand l sowie die Reifenradien im Symmetrieschnitt r_1 bzw. r_2 dar. Die Lage des Drehfreiheitsgrades β zur Modellierung der Rahmennachgiebigkeit wird durch den Abstand s_β , und jene des Rollfreiheitsgrades φ_F des Fahreroberkörpers durch z_{φ_F} definiert. Zur Beschreibung der Schwerpunktslagen der einzelnen Körper dient gemäß Abbildung 3.4 der Aufstandspunkt C_2 des Hintereifens als Bezugspunkt.

Bezeichnung	Symbol	Wert / Einheit
Nachlaufwinkel	ε	19 °
Nachlaufversatz	c	0.04 m
mechanischer Nachlauf	t	0.0717 m
Radstand	l	1.095 m
Reifenradius	$r_1 = r_2$	0.343 m
Lage des Drehfreiheitsgrades β	s_β	0.8528 m
Lage des Rollfreiheitsgrades φ_F	z_{φ_F}	1.0234 m
Schwerpunktslage Rahmen	x_{S_R}	0.3513 m
	z_{S_R}	0.7184 m
Schwerpunktslage Lenker	x_{S_L}	0.8795 m
	z_{S_L}	1.0480 m
Schwerpunktslage Gabel	x_{S_G}	0.9920 m
	z_{S_G}	0.5191 m
Schwerpunktslage Vorderrad	$x_{S_{VR}}$	1.095 m
	$z_{S_{VR}}$	0.343 m
Schwerpunktslage Fahreroberkörper	x_{S_F}	0.2999 m
	z_{S_F}	1.3625 m
Schwerpunktslage Hinterrad	$x_{S_{HR}}$	0 m
	$z_{S_{HR}}$	0.343 m

Tabelle 3.1: Parameterwerte: Geometrie

Massen und Trägheitsmomente

Die Massen und Trägheitsmomente des als Ausgangskonfiguration dienenden Trekkingfahrrades wurden grundsätzlich aus [32] übernommen. Da jedoch in [32] ein Fahrradmodell verwendet wird, das mit lediglich 4 Teilkörpern (Anteile von starr verbundenen Vorder- bzw. Hinterrreifen sind in Gabel bzw. Rahmen enthalten) auskommt, war eine Umrechnung der entsprechenden Parameterwerte erforderlich.

Körper	Bezeichnung / Symbol	Wert / Einheit
<i>Rahmen</i>	Masse m_R	40.7559 <i>kg</i>
	Trägheitsmoment $I_{R_{xx}}$	3.2477 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{R_{yy}}$	2.0000 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{R_{zz}}$	2.0859 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{R_{xz}}$	1.0630 <i>kgm</i> ²
<i>Lenker</i>	Masse m_L	1.0978 <i>kg</i>
	Trägheitsmoment $I_{L_{xx}}$	0.0273 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{L_{yy}}$	0.0015 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{L_{zz}}$	0.0268 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{L_{xz}}$	-0.0011 <i>kgm</i> ²
<i>Gabel</i>	Masse m_G	2.4000 <i>kg</i>
	Trägheitsmoment $I_{G_{xx}}$	0.0376 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{G_{yy}}$	0.0300 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{G_{zz}}$	0.0046 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{G_{xz}}$	0 <i>kgm</i> ²
<i>Vorder- bzw. Hinterrad</i>	Masse m_{Rad}	1.9500 <i>kg</i>
	Trägheitsmoment $I_{Rad_{xx}}$	0.0633 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{Rad_{yy}}$	0.1266 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{Rad_{zz}}$	0.0633 <i>kgm</i> ²
<i>Fahreroberkörper</i>	Masse m_F	55.3700 <i>kg</i>
	Trägheitsmoment $I_{F_{xx}}$	3.0704 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{F_{yy}}$	2.1209 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{F_{zz}}$	2.0480 <i>kgm</i> ²
	Trägheitsmoment $I_{F_{xz}}$	-0.3310 <i>kgm</i> ²

Tabelle 3.2: Parameterwerte: Massen und Trägheitsmomente

Steifigkeiten und Dämpfungen

Die für die Ausgangskonfiguration des Fahrrades verwendeten Parameterwerte des Federdämpfers, sowie der beiden strukturellen Steifigkeiten und Dämpfungen sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst.

Die Bestimmung der Steifigkeit c_s des Federdämpfer-Elements erfolgte durch eine praktische Messungen der Vorderradaufstandskraft und der zugehörigen Einfederung an der Federgabel eines Fahrrades. Die zugehörige Dämpfung k_s wurde überschlagsmäßig mit Hilfe eines immer wieder in der Literatur angegebenen Lehr'schen Dämpfungsmaßes von rund $D_s = 35\%$ abgeschätzt.

Die Rahmensteifigkeit c_β kann näherungsweise mit Hilfe eines Messversuches bestimmt werden. Dabei wird der Rahmen an der Hinterradnabe eingespannt, und dessen Verdrehung bei der Aufbringung eines definierten Momentes am Lenkkopfröhr gemessen. Übliche Werte für die Rahmensteifigkeit, welche häufig auch als Lenkkopfsteifigkeit bezeichnet wird, finden sich etwa in [6], [11] und [32]. Weit schwieriger zeigt sich die Ermittlung eines geeigneten Parameterwertes für die Rahmendämpfung k_β , was auch [11] feststellte: „*A little energy dissipation can be expected to occur when the frame twists but it is not known how much.*“ Die Angaben in der Literatur streuen demnach relativ stark: [6] verwendete etwa $20Nms/rad$ bzw. $50Nms/rad$, während in [11] ausgehend von $70Nms/rad$ auf $7Nms/rad$ bzw. $700Nms/rad$ variiert wurde. Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Werte der Rahmensteifigkeit und -dämpfung orientieren sich an [32].

Auch bei der Wahl der Fahreroberkörpersteifigkeit c_{φ_F} und -dämpfung k_{φ_F} liegen, wie etwa Sharp [33] schreibt, nur Erfahrungswerte vor, die nicht der Weisheit letzter Schluss sind. Für eine angespannte Rumpfmuskulatur werden etwa die in Tabelle 3.3 angegebenen Werte vorgeschlagen.

Bezeichnung	Symbol	Wert / Einheit
Steifigkeit Federdämpfer	c_s	23137 N/m
Dämpfung Federdämpfer	k_s	753 Ns/m
Steifigkeit Rahmen	c_β	80 $Nm/^\circ$
Dämpfung Rahmen	k_β	62 Nms/rad
Steifigkeit Fahreroberkörper	c_{φ_F}	760 Nm/rad
Dämpfung Fahreroberkörper	k_{φ_F}	34 Nms/rad

Tabelle 3.3: Parameterwerte: Steifigkeiten und Dämpfungen

3.2 Modellierung des Reifens

Die fahrdynamischen Eigenschaften eines Fahrzeuges werden ganz wesentlich vom pneumatischen Reifen, dem kraftübertragenden Bindeglied zwischen Fahrzeug und Fahrbahn beeinflusst. Daher nimmt die Modellierung des Reifens eine zentrale Rolle bei jeder fahrdynamischen Untersuchung ein.

Bereits in den späten 1950er Jahren wurde die Komplexität der Reifenmodellierung erkannt [31]: *„The complexity of the structure and behaviour of the tyre are such that no complete and satisfactory theory has yet been propounded. This is an inviting field for the application of mathematics to the physical world...“* Seither konnten dank neuer, verbesserter Reifentests und der Computerunterstützung eine Vielzahl mathematischer Modelle für unterschiedliche Verwendungszwecke entwickelt werden. Die Bandbreite unterschiedlicher Reifenmodellierungen erstreckt sich dabei von rein auf Experimenten basierenden Modellen (empirische Reifenmodelle) bis hin zu Modellen, die detailliert das physikalische Verhalten der Reifenstruktur abbilden (physikalische Reifenmodelle).

Die empirischen Reifenmodelle beschreiben über Tabellen oder mathematische Formulierungen die bei Reifentests gemessene Reifencharakteristik. Dabei ermöglichen die in diesen Modellen enthaltenen Reifenparameter eine Anpassung an die jeweiligen Messergebnisse.

Physikalische Reifenmodelle modellieren dagegen beispielsweise mit der Methodik der Finiten Elemente detailliert die Nachgiebigkeit der Reifenkarkasse. Dies führt zu sehr komplexen Modellen, welche sich nicht gut für die Fahrdynamiksimulation eignen, sondern bei der detaillierten Analyse des Reifens in der Reifenkonstruktion ihre Anwendung finden.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels sollen zunächst einige für die Reifenmodellierung grundlegende Definitionen angegeben werden, um die Abhängigkeiten der im Berührungsbereich zwischen Reifen und Fahrbahn wirksamen Reifenkräfte und -momente aufzeigen zu können. Danach wird auf das in dieser Arbeit verwendete empirische Reifenmodell detaillierter eingegangen, und die verwendeten Reifenparameter angegeben.

3.2.1 Grundlegende Erklärungen und Definitionen

Die in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme und positiven Zählrichtungen orientieren sich an der von Pacejka [31] adaptierten SAE-Konvention für einen unendlich dünnen Reifen:

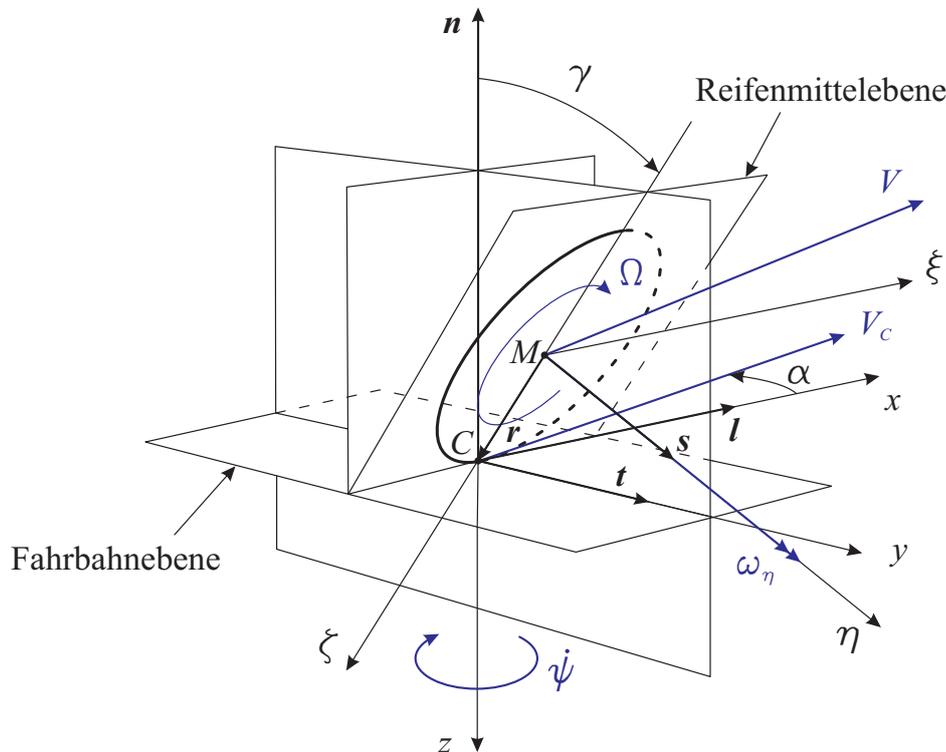


Abbildung 3.5: Konventionen für unendlich dünnen Reifen gemäß SAE

Dabei werden, wie Abbildung 3.5 zeigt, neben der Fahrbahnebene und der Reifenmittelebene zwei normal auf die Fahrbahn stehende Ebenen eingeführt, eine den Vektor \mathbf{l} (Schnittlinie aus Reifenmittel- und Fahrbahnebene) und die andere den Vektor \mathbf{s} (Radachse) beinhaltend. Der Schnittpunkt dieser Ebenen definiert unter der getroffenen Voraussetzung eines unendlich dünnen Reifens den Kontaktpunkt C .

Weiters werden in Abbildung 3.5 zwei Koordinatensysteme eingeführt: Zum Einen das Fahrbahn-Kontaktkoordinatensystem (C, x, y, z) mit x -Achse nach vorne in Richtung der Schnittlinie \mathbf{l} , y -Achse nach rechts entlang des Einheitsvektors \mathbf{t} und z -Achse nach unten normal auf die Fahrbahn $(-\mathbf{n})$. Und zum Anderen das Radachsen-Koordinatensystem (M, ξ, η, ζ) mit ξ -Achse parallel zur x -Achse, η -Achse entlang der Radachse (\mathbf{s}) und ζ -Achse in Richtung des Radiusvektors \mathbf{r} . Dabei ist zu beachten, dass der Betrag des Radiusvektors \mathbf{r} bei der Betrachtung eines unendlich dünnen Reifens unabhängig vom Sturzwinkel γ konstant bleibt.

Bei der Modellierung des Reifens in der Mehrkörpersystem-Software SIMPACK wurde jedoch von der Voraussetzung eines unendlich dünnen Reifens abgewichen, und ein dreidimensionaler Reifen mit Kreisquerschnitt modelliert (vgl. Abbildung 3.6). Dadurch wandert das Fahrbahn-Kontaktkoordinatensystem (C, x, y, z) mit zunehmenden

dem Sturzwinkel γ des Reifens immer weiter aus der Reifenmittelebene heraus. Der wirksame Reifenradius r kann nicht mehr als konstant angesehen werden, und variiert über den Sturzwinkel γ . Das Radachsen-Koordinatensystem (M, ξ, η, ζ) verbleibt dagegen unverändert gemäß SAE-Konvention.

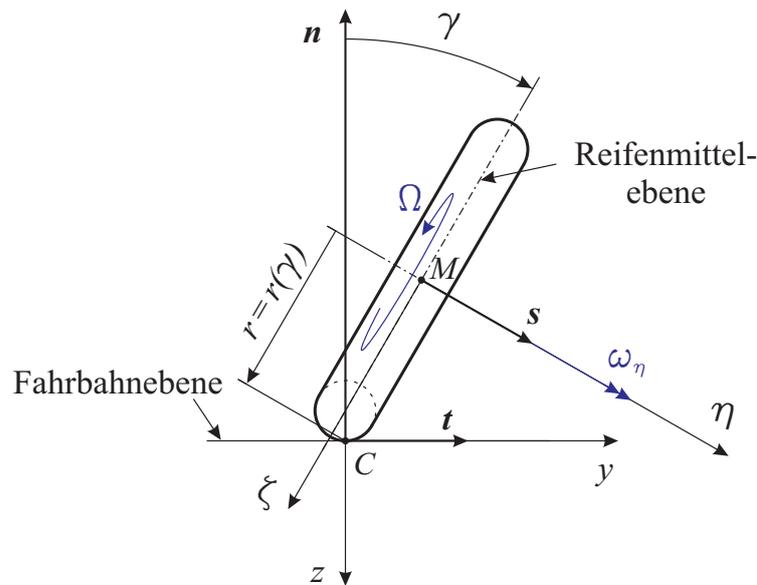


Abbildung 3.6: Adaptierte Konventionen am MKS-Reifenmodell

Auf die in den Abbildungen 3.5 bzw. 3.6 dargestellten kinematischen Größen wird bei den folgend angeführten Definitionen der wesentlichen fahrdynamischen Kenngrößen (Sturzwinkel γ , Längsschlupf κ und Schräglaufwinkel α) eingegangen.

Sturzwinkel γ

Der Sturzwinkel γ , häufig auch schlicht Sturz genannt, entspricht gemäß Abbildung 3.6 dem Winkel zwischen Reifennittelebene und Fahrbahnnormalen \mathbf{n} .

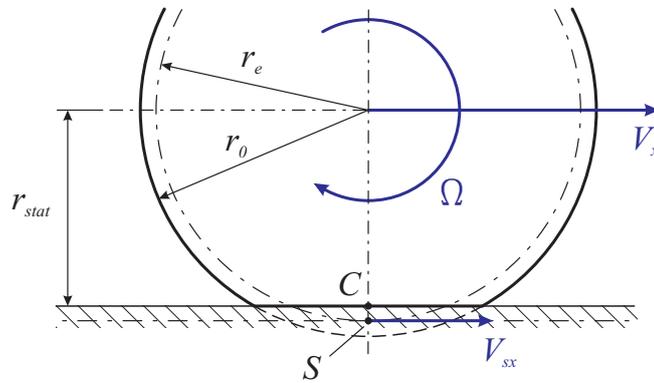
Im MKS-Modell wurde zur Bestimmung des Sturzwinkels γ der zu dieser Definition analoge Winkel zwischen Radachse \mathbf{s} und dem in der Fahrbahnebene liegenden Vektor \mathbf{t} herangezogen:

$$\gamma = \angle(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \quad (3.1)$$

Längsschlupf κ

Zur Erklärung des longitudinalen Schlupfes κ muss nun auf die Deformation des Reifens beim Kontakt mit der Fahrbahn eingegangen werden. Dabei soll der Einfachheit halber zunächst wieder von einem unendlich dünnen Reifen ausgegangen werden.

Wesentlich für die Definition des Längsschlupfes κ ist die Einführung des so genannten Schlupfpunktes S . Dieser liegt gemäß Abbildung 3.7 unterhalb des in der Fahrbahnebene liegenden Kontaktpunktes C auf einem Radius, der dem so genannten effektiven Rollradius r_e entspricht, und wird gedanklich fest mit dem Reifen verbunden.

Abbildung 3.7: Schlupfpunkt S

Betrachtet man ein rein rollendes, d.h. längsschlupffreies Rad (kein Antriebs- oder Bremsmoment) mit konstanter Geschwindigkeit auf einer ebenen Fahrbahn, so ist die Geschwindigkeit des Schlupfpunktes S in Längsrichtung V_{sx} gleich Null. In diesem Fall stellt also der Schlupfpunkt S den momentanen Drehpol bzw. Geschwindigkeitspol des Rades dar, und der Kreis mit effektivem Rollradius r_e rollt schlupffrei auf einer zur Fahrbahn parallelen Ebene ab. Wird zusätzlich eine aufrechte Position des Rades ($\gamma = 0$) und/oder keine Gierwinkelgeschwindigkeit ($\dot{\psi} = 0$) vorausgesetzt, so folgt nun die Radmittelpunktschwindigkeit in Längsrichtung zu

$$V_x = r_e \Omega \quad (3.2)$$

mit der Radeigendrehung des Reifens Ω . Hieraus ist ersichtlich, dass der effektive Rollradius r_e durch die Messung der Mittelpunktschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit des rein rollenden Rades ermittelt werden kann. Wie in Abbildung 3.7 angedeutet, liegt er im Allgemeinen zwischen dem undeformierten Reifenradius r_0 und dem statischen Reifenhalbmesser r_{stat} .

Die Aufbringung eines Antriebs- oder Bremsmomentes führt zu einem von Null verschiedenen Längsschlupf κ . Auch die longitudinale Schlupfgeschwindigkeit V_{sx} weicht von Null ab, und kann wieder unter der Voraussetzung $\gamma\dot{\psi} = 0$ wie folgt bestimmt werden:

$$V_{sx} = V_x - r_e\Omega \quad (3.3)$$

Damit kann schließlich der Längsschlupf κ als Verhältnis aus longitudinaler Schlupfgeschwindigkeit V_{sx} des Schlupfpunktes S zu longitudinaler Geschwindigkeit des Radmittelpunktes V_x definiert werden:

$$\kappa = -\frac{V_{sx}}{V_x} \quad (3.4)$$

bzw. mit (3.3)

$$\kappa = -\frac{V_x - r_e\Omega}{V_x} \quad (3.5)$$

Obige Definition gilt, wie bereits erwähnt nur für ein Rad auf ebener Fahrbahn und $\gamma\dot{\psi} = 0$. Dabei wurde das Vorzeichen derart gewählt, dass κ für den Zustand des Antreibens stets positiv, und beim Bremsen stets negativ ist. Das blockierende Rad ($\Omega = 0$) führt gemäß (3.5) zu einem Längsschlupf von $\kappa = -1$.

Im allgemeinen Fall eines gestürzten Rades ($\gamma \neq 0$) mit Gierwinkelgeschwindigkeit $\dot{\psi} \neq 0$ gilt die generelle Definition des Längsschlupfes κ :

$$\kappa = -\frac{V_{sx}}{V_{cx}^*} \quad (3.6)$$

Darin bedeutet V_{cx}^* die Longitudinalgeschwindigkeit des fiktiven Punktes C^* , der sich deckungsgleich mit dem Schlupfpunkt S auf dem effektiven Rollradius r_e befindet, jedoch im Gegensatz zum Punkt S nicht körperfest mit dem Rad verbunden ist. Die longitudinale Schlupfgeschwindigkeit V_{sx} ergibt sich in Analogie zu (3.3) mit der absoluten Winkelgeschwindigkeit ω_η des Rades um die Radachse zu:

$$V_{sx} = V_{cx}^* - r_e(-\omega_\eta) \quad (3.7)$$

Wobei sich die absolute Radwinkelgeschwindigkeit ω_η durch die Radeigendrehung Ω ausdrücken lässt (vgl. Abbildung 3.5):

$$\omega_\eta = -\Omega + \dot{\psi} \sin \gamma \quad (3.8)$$

Setzt man in dieser allgemeinen Schlupfdefinition wieder $\gamma\dot{\psi} = 0$ voraus, so gelangt man mit $V_{cx}^* = V_x$ und $\omega_\eta = -\Omega$ gemäß (3.8) zur oben behandelten vereinfachten Schlupfdefinition (3.4) bzw. (3.5).

Beim Übergang von der Längsschlupfdefinition des unendlich dünnen Reifens gemäß (3.6), (3.7) und (3.8) auf jene der dreidimensionalen Reifenmodellierung muss beachtet werden, dass der effektive Rollradius r_e nicht mehr als konstanter Wert verstanden werden darf, sondern dieser eine Funktion des Sturzwinkels γ darstellt. Damit variiert auch die Lage des Schlupfpunktes S bzw. des deckungsgleichen fiktiven Punktes C^* mit dem Sturzwinkel. Da jedoch über die besagte Abhängigkeit des effektiven Rollradius r_e keine Informationen zur Verfügung stehen, wurde für das MKS-Reifenmodell

$$r_e(\gamma) = r_0(\gamma) \quad (3.9)$$

angenommen, was gemäß [34] häufig als Näherung verwendet wird. Entsprechend der Annahme (3.9) liegt nun der Schlupfpunkt S bzw. der deckungsgleiche fiktive Punkt C^* stets auf der undeformierten Reifenkontur:

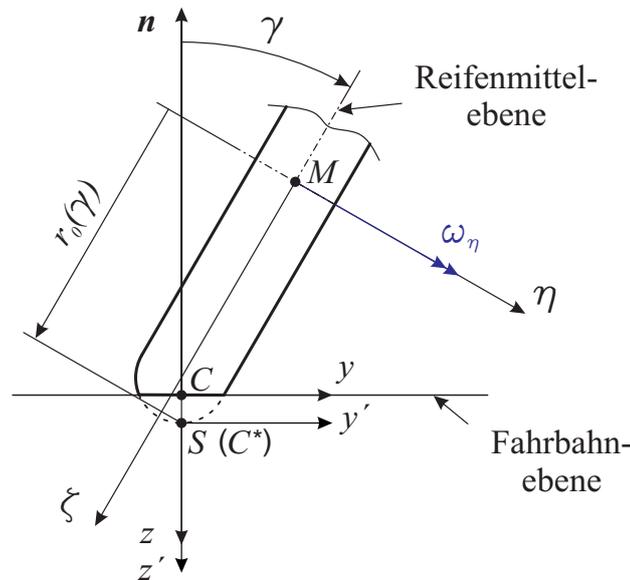


Abbildung 3.8: Lage des Schlupfpunktes S im MKS-Modell

Zur Bestimmung des Längsschlupfes κ im MKS-Modell wurde nun, gemäß Abbildung 3.8, zusätzlich zum Fahrbahn-Kontaktkoordinatensystem (C, x, y, z) , ein dazu in z -Richtung verschiebliches Reifen-Referenzkoordinatensystem (S, x', y', z') mit dem Schlupfpunkt S als Koordinatenursprung eingeführt. Damit konnte über die direkte Messung der longitudinalen Schlupfgeschwindigkeit V_{sx} und der gegenüber (3.7) adaptierten Berechnung der Longitudinalgeschwindigkeit V_{cx}^* aus

$$V_{cx}^* = V_{sx} + r_0(\gamma)(-\omega_\eta) \quad (3.10)$$

schlussendlich der Längsschlupf κ gemäß (3.6) ermittelt werden.

Schräglaufwinkel α , Querschlupf κ_y

Die Einführung des Schräglaufwinkels α erfolgt implizit über den häufig in der Literatur verwendeten Querschlupf κ_y , welcher als Verhältnis aus lateraler Geschwindigkeit V_{cy} des Aufstandspunktes C zu Longitudinalgeschwindigkeit V_{cx}^* des fiktiven Punktes C^* definiert ist:

$$\kappa_y = \tan \alpha = -\frac{V_{cy}}{V_{cx}^*} \quad (3.11)$$

Da in der Praxis die Punkte C und C^* sehr knapp beieinander liegen, treten bei der Bildung der Geschwindigkeitskomponenten für diese Punkte nur marginale Differenzen auf, welche eher von akademischem Interesse sind, [31]. Vernachlässigt man diese Unterschiede, so kann der Schräglaufwinkel α auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\alpha = \arctan \left(-\frac{V_{cy}}{V_{cx}} \right) \quad (3.12)$$

Diese vereinfachte Definition erlaubt die anschauliche Darstellung (vgl. Abbildung 3.5) des Schräglaufwinkels α als Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor des Aufstandspunktes C und der Schnittlinie zwischen Reifenmittel- und Fahrbahnebene, gemessen in der Fahrbahnebene.

Da jedoch bereits zur Bestimmung des Längsschlupfes κ die Longitudinalgeschwindigkeit V_{cx}^* gemäß (3.10) im MKS-Modell benötigt wurde, wird in dieser Arbeit die Schräglaufwinkeldefinition (3.11) verwendet.

3.2.2 Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn

Beim Kontakt zwischen Reifen und Fahrbahn bildet sich ein gemeinsames Berührgebiet (Latsch) aus, in dem Normaldruck $p(x, y)$ und Schubspannungen $\boldsymbol{\tau}(x, y) = [\tau_x, \tau_y, 0]^T$ übertragen werden.

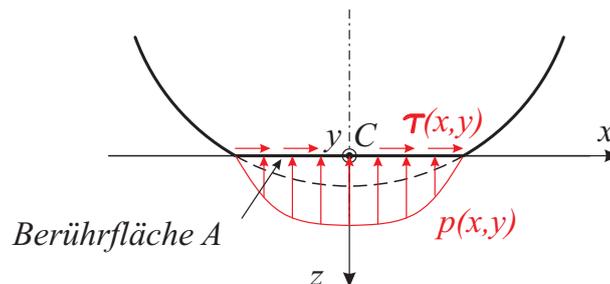


Abbildung 3.9: Kraftübertragung im Reifenlatsch

Aufgrund der Reifenelastizität können dabei im Allgemeinen Haft- und Gleitgebiete [34] beobachtet werden:

- Im Bereich des Haftens tritt keine lokale Relativbewegung zwischen Reifen und Fahrbahn auf (schlupffreie Bewegung) und für die lokal auftretende Schubspannung gilt die Haftbedingung

$$|\boldsymbol{\tau}(x, y)| \leq \mu_h p(x, y) \quad (3.13)$$

mit dem Haftreibungskoeffizienten μ_h . Die Ausbildung eines Haftgebietes erfolgt zumeist im Bereich des Reifeneinlaufes, [34].

- Dagegen bildet sich beim lokalen Überschreiten obiger Ungleichung ein Gleitgebiet aus, und die lokalen (eingepprägten) Schubspannungen ergeben sich direkt aus

$$|\boldsymbol{\tau}(x, y)| = \mu_g p(x, y) \quad (3.14)$$

mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ_g .

Ein empirisches Reifenmodell wie jenes das folgend vorgestellt werden soll, befasst sich nicht mit der lokalen Verteilung der in der Berührfläche wirksamen Normal- und Schubspannungen, sondern mit deren resultierenden Kraftkomponenten F_x , F_y und F_z . Diese können gemäß Abbildung 3.9 wie folgt bestimmt werden:

$$F_x = \int_A \tau_x \, dA \quad (3.15)$$

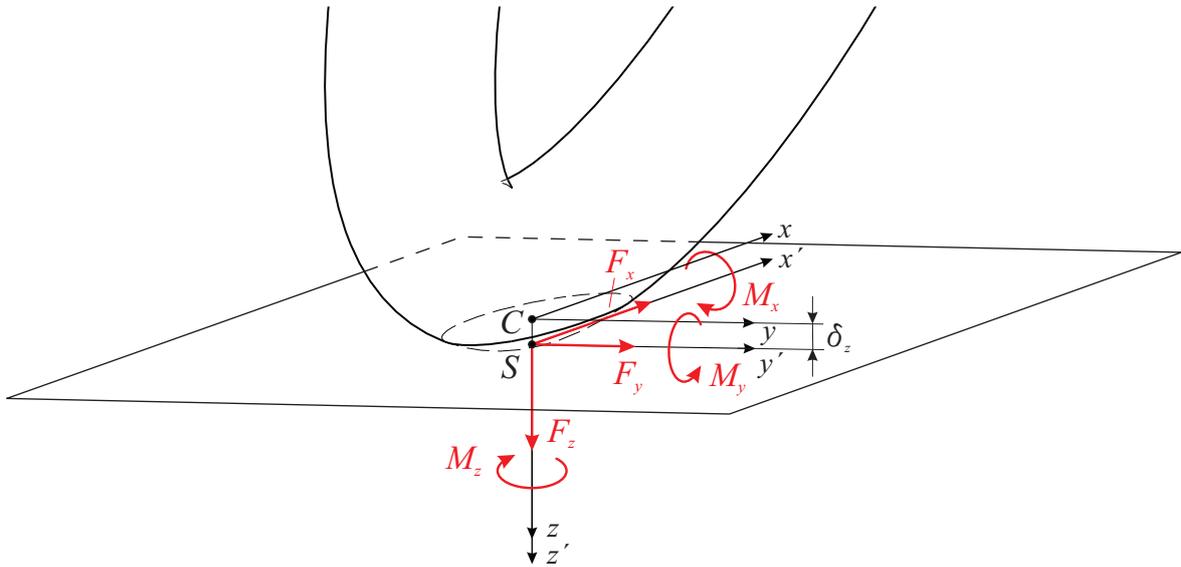
$$F_y = \int_A \tau_y \, dA \quad (3.16)$$

$$F_z = \int_A p \, dA \quad (3.17)$$

Da die Schubspannung τ_x und τ_y aufgrund der beschriebenen Ausbildung von Haft- und Gleitzonen im Allgemeinen asymmetrisch bezüglich des Kontaktpunktes C verteilt sind, muss bei der Verwendung des Kontaktpunktes C als Reduktionspunkt der Spannungssysteme das so genannte Rückstellmoment M_z berücksichtigt werden:

$$M_z = \int_A (\tau_y x - \tau_x y) \, dA \quad (3.18)$$

Im MKS-Modell erfolgte die Modellierung der Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn über ein am Ursprung des Reifen-Referenzkoordinatensystems S angreifendes Kraftelement, weshalb der Schlupfpunkt S den Reduktionspunkt der Spannungssysteme

Abbildung 3.10: Reifenkräfte und -momente für Reduktionspunkt S

me bildet. Daher treten gemäß Abbildung 3.10 zufolge der Reifeneinfederung δ_z neben dem Rückstellmoment M_z analog (3.18) zusätzliche Reduktionsmomente auf:

$$M_x = F_y \delta_z \quad (3.19)$$

$$M_y = -F_x \delta_z \quad (3.20)$$

Im Folgenden werden die jeweiligen Abhängigkeiten der auftretenden Reifenkräfte und -momente beschrieben und entsprechende mathematische Formulierungen für das später vorgestellte Reifenmodell abgeleitet.

Normalkraft F_z

Als Normal- oder Radaufstandskraft F_z wird die von der Fahrbahn normal zur Berührfläche auf den Reifen ausgeübte Kraft, also die Resultierende der Normaldruckverteilung $p(x, y)$ in der Aufstandsfläche gemäß (3.17), bezeichnet.

Misst man in einem einfachen praktischen Versuch die (statische) Radlast $F_{z,stat}$ über der Reifeneinfederung δ_z , so zeigt sich eine annähernd lineare vertikale Federungscharakteristik des Reifens. Diese Federungskennlinie variiert zwar sehr stark in Abhängigkeit von Reifendruck p_{Reifen} und -dimension (Durchmesser d , Breite B und Höhe H), kann aber bei festgelegten Reifenparametern linearisiert werden:

$$F_{z,stat} = c_{Reifen} \delta_z \quad (3.21)$$

mit der Reifensteifigkeit

$$c_{Reifen} = \left(\frac{\partial F_{z,stat}(\delta_z)}{\partial \delta_z} \right)_{\delta_z=0, p_{Reifen}=konst., d,B,H=geg.} \quad (3.22)$$

Neben der statischen Federungscharakteristik besitzt ein Reifen auch eine geringfügige Dämpfung, für die in der Literatur häufig ein Lehr'sches Dämpfungsmaß $D_{Reifen} = 1\%$ angegeben wird. Damit kann der Dämpfungskoeffizient des Reifens k_{Reifen} wie folgt bestimmt werden:

$$k_{Reifen} = 2D_{Reifen} \sqrt{c_{Reifen} m_{Reifen}} \quad (3.23)$$

Schließlich kann die linearisierte mathematische Formulierung der (dynamischen) Rad-aufstandskraft F_z zu

$$F_z = c_{Reifen} \delta_z + k_{Reifen} \dot{\delta}_z \quad (3.24)$$

angegeben werden.

Im MKS-Modell konnte die Reifeneinfederung δ_z bzw. deren Ableitung $\dot{\delta}_z$ direkt zwischen dem Fahrbahn-Kontakt- und dem Reifen-Referenzkoordinatensystem gemessen werden (vgl. Abbildung 3.10). Um auch ein Abheben des Reifens von der Fahrbahn ($F_z = 0$ für Messwert $\delta_z < 0$) simulieren zu können, wurde die Normalkraft gemäß (3.24) als unilaterales Feder-Dämpfer-Element modelliert.

Longitudinal- oder Umfangskraft F_x

Wie bereits bei der Einführung des Längsschlupfes κ erwähnt, ist die Aufbringung von Antriebs- oder Bremsmomenten, und damit die Übertragung von Umfangskräften F_x stets mit einem von Null verschiedenen Längsschlupf ($\kappa \neq 0$) verbunden.

Zur Beschreibung der Longitudinalkraft F_x wird in der Literatur (etwa in [34]) häufig, unter der Voraussetzung, dass im Reifenlatsch ausschließlich Schubspannungen τ_x übertragen werden ($\alpha = 0, \gamma = 0$), der so genannte Kraftschlusskoeffizient

$$\mu_x = \mu_x(\kappa, F_z) = \frac{F_x}{F_z} \quad (3.25)$$

eingeführt, und dessen Abhängigkeit vom Längsschlupf κ für unterschiedliche Radlasten F_z ermittelt. Abbildung 3.11 zeigt etwa einen typischen Verlauf für den Bremsbereich (schwarz) bei gegebener Normalkraft F_z . Dabei gewinnen mit zunehmend negativem Longitudinalschlupf κ (Bremsen) die eingangs angesprochenen Gleitgebiete der Berührfläche gegenüber den Haftgebieten an Dominanz, bis schließlich beim Blockieren des Rades ($\kappa = -1$) in der gesamten Berührfläche gleiten eintritt, und damit der Kraftschlusskoeffizient μ_x dem Gleitreibkoeffizienten μ_g entspricht.

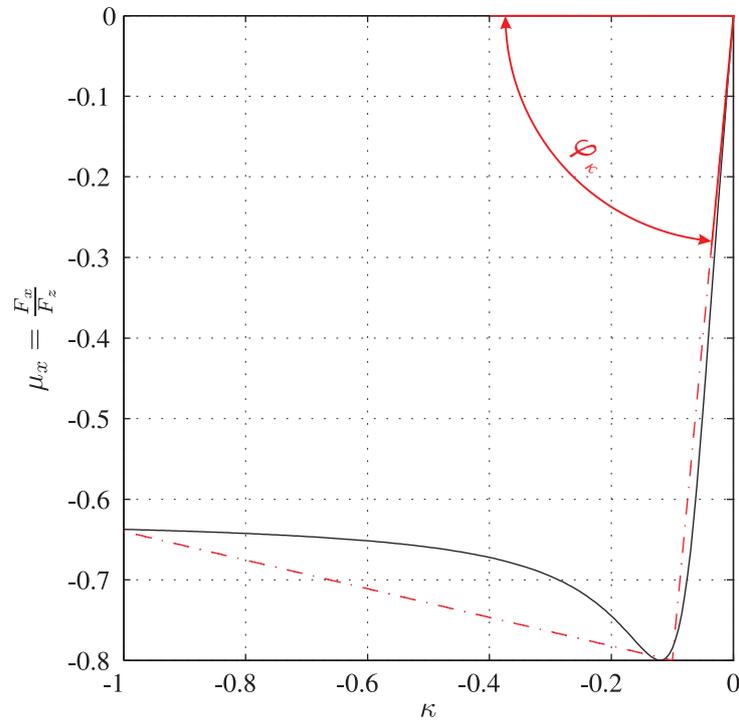


Abbildung 3.11: Kraftschlussdiagramm für den Bremsbereich ($F_z=\text{konst.}$)

Die durch eine bilineare Kennlinie angenäherte Approximation (rot, strichpunktiert) dieses nichtlinearen Kraftschlussverlaufes ist ebenfalls in Abbildung 3.11 dargestellt. Diese Näherung ermöglicht nun, bei Vernachlässigung der (zweitrangigen) Abhängigkeit des Kraftschlusskoeffizienten μ_x von der Normalkraft F_z , über die mathematische Formulierung

$$F_x = \begin{cases} \kappa c_\kappa F_z & \text{für } -0.1 \leq \kappa \leq 0 \\ -0.1 c_\kappa F_z - \frac{0.8-0.64}{1-0.1}(\kappa + 0.1)F_z & \text{für } -1 \leq \kappa \leq -0.1 \end{cases} \quad (3.26)$$

mit

$$c_\kappa = \tan \varphi_\kappa = \left. \frac{1}{F_z} \frac{dF_x}{d\kappa} \right|_{\kappa=0} \quad (3.27)$$

eine relativ einfache Implementierung der Umfangskraft F_x im Reifenmodell des Mehrkörpersystems.

Für den Antriebsbereich, also für den Bereich positiver Längsschlupfwerte ($0 \leq \kappa \leq \infty$) kann eine analoge Kraftschlusscharakteristik beobachtet, und eine entsprechende Approximation im MKS-Modell implementiert werden.

Lateral- oder Seitenkraft F_y

Die aus der Schubspannung τ_y resultierende Lateral- oder Seitenkraft F_y kann nur bei von Null verschiedenem Schräglauf- oder Sturzwinkel übertragen werden.

Dabei kann bei Fahrrädern und Motorrädern - im Gegensatz zu Automobilen und Lastkraftwagen - der Sturzwinkel γ als wesentlicher „Erzeuger“ von Seitenkräften verstanden werden, [35]. Die bei Zweirädern auftretenden Schräglaufwinkel α sind zwar im Allgemeinen klein im Vergleich zum Sturzwinkel γ , dennoch verweist [11] darauf, dass der aus dem Schräglauf resultierende Seitenkraftaufbau gerade für Stabilitätsbetrachtungen entscheidend ist.

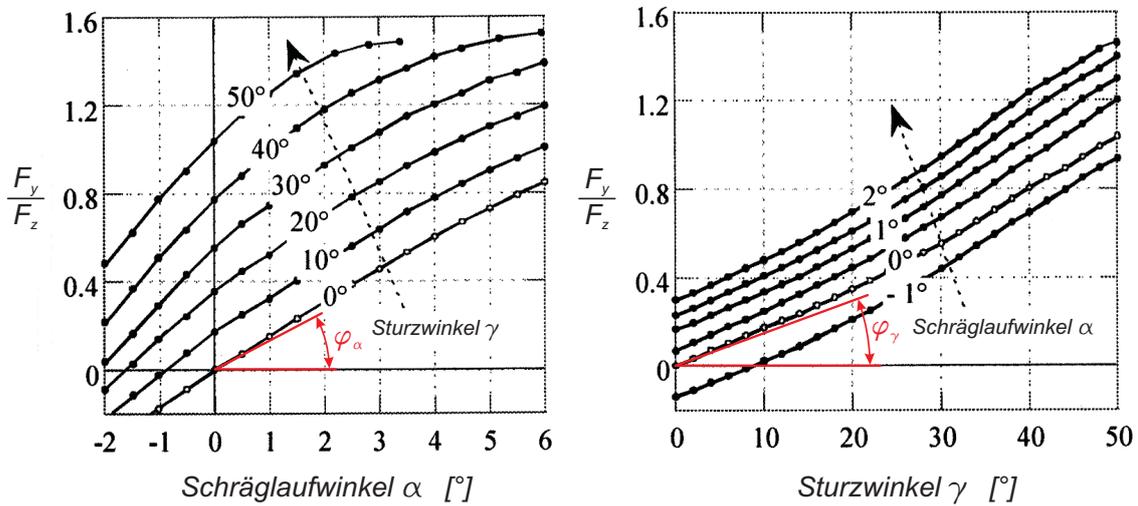


Abbildung 3.12: Abhängigkeiten der normierten Seitenkraft ($F_z=\text{konst.}$), [27]

Abbildung 3.12 zeigt qualitativ die jeweiligen, bei gegebener Normalkraft F_z charakteristischen Abhängigkeiten der normierten Seitenkraft vom Sturzwinkel γ und Schräglaufwinkel α . Für kleine Sturz- und Schräglaufwinkel kann die Seitenkraft F_y in guter Näherung durch

$$F_y = c_\alpha \alpha F_z + c_\gamma \gamma F_z \tag{3.28}$$

mit

$$c_\alpha = \tan \varphi_\alpha = \left. \frac{1}{F_z} \frac{dF_y}{d\alpha} \right|_{\alpha=0, \gamma=0} \tag{3.29}$$

$$c_\gamma = \tan \varphi_\gamma = \left. \frac{1}{F_z} \frac{dF_y}{d\gamma} \right|_{\alpha=0, \gamma=0} \tag{3.30}$$

linearisiert ausgedrückt werden.

Rückstellmoment M_z

Das Rückstellmoment M_z ist, wie bereits eingangs erwähnt, stark vom gewählten Reduktionspunkt der Spannungssysteme abhängig. Bei der Verwendung des Reduktionspunktes S kann analog [27] oder [31] der Anteil des Rückstellmomentes M_z , der durch die Schubspannung in Längsrichtung τ_x entsteht, aufgrund dessen annähernd symmetrischer Verteilung um den Reduktionspunkt vernachlässigt werden. Von der allgemeinen Formulierung zur Bestimmung des Rückstellmomentes (3.18) verbleibt also

$$M_z = \int_A \tau_y x \, dA \quad (3.31)$$

Damit besitzt das Rückstellmoment M_z ähnliche Abhängigkeiten wie die, durch die Schubspannung τ_y repräsentierte Seitenkraft F_y . Analog zur Seitenkraft kann auch das Rückstellmoment für kleine Sturz- und Schräglaufwinkel näherungsweise über

$$M_z = -c_{M\alpha}\alpha F_z + c_{M\gamma}\gamma F_z \quad (3.32)$$

mit

$$c_{M\alpha} = \left. \frac{1}{F_z} \frac{dM_z}{d\alpha} \right|_{\alpha=0, \gamma=0} \quad (3.33)$$

$$c_{M\gamma} = \left. \frac{1}{F_z} \frac{dM_z}{d\gamma} \right|_{\alpha=0, \gamma=0} \quad (3.34)$$

linear beschrieben werden.

3.2.3 Das lineare Reifenmodell

Die im Abschnitt 3.2.2 aufgezeigten mathematischen Formulierungen der auftretenden Reifenkräfte und -momente dienen als Grundlage für das lineare Reifenmodell. Daher sollen die dabei bestimmten linearen Gleichungen nochmals zusammenfassend angegeben werden:

$$F_x = c_\kappa \kappa F_z \quad \text{für} \quad -0.1 \leq \kappa \leq 0.1 \quad (3.35)$$

$$F_y = c_\alpha \alpha F_z + c_\gamma \gamma F_z \quad (3.36)$$

$$M_z = -c_{M\alpha} \alpha F_z + c_{M\gamma} \gamma F_z \quad (3.37)$$

mit

$$F_z = c_{Reifen} \delta_z + k_{Reifen} \dot{\delta}_z \quad (3.38)$$

Dabei ist dezidiert darauf hinzuweisen, dass aufgrund der diesem Reifenmodell zugrunde liegenden Linearisierungen nur für relativ kleine Schräglauf- und Sturzwinkel sinnvolle Simulationsergebnisse zu erwarten sind.

Das transiente Reifenverhalten

Die bisherigen Formulierungen für die Reifenkräfte und -momente gelten ausschließlich für den stationär rollenden Reifen. Zuzufolge der Nachgiebigkeit der Reifenkarkasse und der begrenzten Länge des Berührgebietes zwischen Reifen und Fahrbahn, zeigt der Aufbau der Reifenkräfte und -momente eine zeitliche Verzögerung bei der Änderung der Betriebsbedingungen (Sturzwinkel, Schräglaufwinkel oder Längsschlupf) des Reifens, [11].

Die Modellierung dieses transienten Reifenverhaltens erfolgt analog zu [31]. Dabei werden transiente kinematische Kenngrößen (Längsschlupf κ' , Schräglaufwinkel α' und Sturzwinkel γ') eingeführt, die die angesprochene zeitliche Verzögerung zu den entsprechenden stationären kinematischen Kenngrößen beinhalten. Gemäß [31] lässt sich dieser Zeitverzug jeweils durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung beschreiben, dessen Zeitkonstante über das Verhältnis einer charakteristischen Länge - der so genannten Einlauflänge σ - zur Längsgeschwindigkeit V_{cx}^* des fiktiven Punktes C^* definiert ist. Es gilt also:

$$\frac{\sigma_\kappa}{V_{cx}^*} \dot{\kappa}' + \kappa' = \kappa \quad (3.39)$$

$$\frac{\sigma_\alpha}{V_{cx}^*} \dot{\alpha}' + \alpha' = \alpha \quad (3.40)$$

$$\frac{\sigma_\gamma}{V_{cx}^*} \dot{\gamma}' + \gamma' = \gamma \quad (3.41)$$

Setzt man nun diese transienten kinematischen Kenngrößen gemäß (3.39) - (3.41) anstelle der stationären Größen in die Gleichungen (3.35) - (3.37) ein, so erhält man zur Beschreibung der Reifenkräfte und -momente endgültig:

$$F_x = c_\kappa \kappa' F_z \quad \text{für} \quad -0.1 \leq \kappa \leq 0.1 \quad (3.42)$$

$$F_y = c_\alpha \alpha' F_z + c_\gamma \gamma' F_z \quad (3.43)$$

$$M_z = -c_{M\alpha} \alpha' F_z + c_{M\gamma} \gamma' F_z \quad (3.44)$$

Die Normalkraft F_z kann dagegen weiterhin stationär beschrieben, und gemäß (3.38) bestimmt werden.

Parameter des Reifenmodells

Da bei Fahrrädern relativ geringe Seitenkräfte auftreten, erweist sich die experimentelle Bestimmung entsprechender Reifenparameter mit Hilfe herkömmlicher Reifenprüfstände als äußerst schwierig. Der Modellierungsansatz eines linearen Reifenmodells, der mit einer minimalen Anzahl an vorerst unbekanntem Reifenparametern auskommt, erscheint daher durchaus sinnvoll. So finden etwa auch in [6], [11], [32] oder [36] lineare Reifenmodelle Verwendung. Dabei wird bezüglich der verwendeten Reifenparameter häufig auf Roland [37] verwiesen, der für eine Vielzahl unterschiedlicher Fahrradreifen entsprechende Messungen durchführte.

Die in der vorliegende Arbeit verwendeten Parameterwerte des Reifenmodells für das Vorder- bzw. Hinterrad sind in Tabelle 3.4 angegeben, und orientieren sich ebenfalls an [37] bzw. [32]. Dabei wurden die zur Modellierung der zeitlichen Verzögerung des Kräfteaufbaues maßgeblichen Einlaufängen gemäß [31] mit der halben Länge des Reifenlatsches gleichgesetzt, und zu $0.03m$ abgeschätzt.

	Vorderrad		Hinterrad	
c_{Reifen}	125077	N/m	125077	N/m
k_{Reifen}	10.9	Ns/m	10.9	Ns/m
c_{κ}	8	N/N	8	N/N
c_{α}	25.05	rad^{-1}	25.05	rad^{-1}
c_{γ}	1	rad^{-1}	1	rad^{-1}
$c_{M\alpha}$	0.014 c_{α}	m/rad	0.02 c_{α}	m/rad
$c_{M\gamma}$	0.014 c_{γ}	m/rad	0.02 c_{γ}	m/rad
σ_{κ}	0.03	m	0.03	m
σ_{α}	0.03	m	0.03	m
σ_{γ}	0.03	m	0.03	m

Tabelle 3.4: Reifenmodell-Parameter

3.3 Der Fahrer als Regler

An den menschlichen Fahrer, als intelligenter Systembestandteil des Fahrrades, werden bei der Fahrt mit dem Fahrrad eine Reihe von Aufgaben gestellt.

Neben der Trajektorien- und Fahrgeschwindigkeitswahl zur Spurführung ist auch die Stabilisierung des Fahrrades bei der Durchführung eines gezielten Fahrmanövers entscheidend. Zur Abbildung des menschlichen Fahrverhaltens beim Fahrradfahren bedarf es sehr komplexer Fahrermodelle, welche Modellansätze für alle relevanten Eigenschaften und Fähigkeiten des Fahrers¹ beinhalten. Für die in der vorliegenden Arbeit untersuchten fahrdynamischen Analysen ist jedoch das (individuelle) Fahrverhalten des Fahrers von geringerem Interesse. Die Modellierung des Fahrers wird in erster Linie für Fahrmanöver benötigt, die ohne die stabilisierende Wirkung des regelnden (aktiven) Fahrereingriffes nicht möglich sind. Daher wird an den Fahrer lediglich der Anspruch erhoben, dass er das Fahrrad in den entsprechenden Fahrmanövern stabilisiert, und die Vorgabe einer Fahrgeschwindigkeit ermöglicht.

In der Folge wird auf die Modellierung der Stabilisierungsaufgabe des Fahrers sowie auf die Regelung der Fahrgeschwindigkeit detailliert eingegangen.

3.3.1 Die Stabilisierungsaufgabe des Fahrers

Die aufrechte Fahrt mit einem Fahrrad scheint - wie wir alle aus unseren praktischen Erfahrungen wissen - ohne den regelnden Eingriff des Fahrers nicht möglich. Wie die Analyse des Stabilitätsverhaltens des Fahrrades (Kapitel 4) zeigt, ist der aufgerichtete Zustand der Geradeausfahrt ohne aktivem Fahrereingriff über weite Bereiche der üblichen Fahrgeschwindigkeiten instabil. Um auch für diese Geschwindigkeitsbereiche querdynamische Untersuchungen zu ermöglichen, ist es also notwendig, den stabilisierenden Eingriff des aktiven Fahrers zu modellieren.

¹Modellierungsanforderungen an Fahrermodelle beinhalten gemäß [38] etwa die Abbildung

- allgemeiner menschlicher Fähigkeiten und Eigenschaften, wie (visuelle, vestibuläre, taktile sowie auditive) Informationsaufnahme, -wahrnehmung und -verarbeitung, neuromuskuläre Dynamik mit Beschränkungen, Reaktionszeiten, Vorausschau, Prädiktion/Antizipation, Adaptation/Lernfähigkeit, die Fähigkeit zu Planen (Trajektorien- und Geschwindigkeitswahl),
- fahrerspezifischer Eigenschaften wie Erfahrung, Alter, Risikobereitschaft, etc. sowie
- situationsbedingter Eigenschaften wie Konzentration, Müdigkeit, Stress, Emotionen, etc.

Im Wesentlichen hat der Fahrer zweierlei Möglichkeiten um auf das System Fahrrad stabilisierend einzuwirken: zum Einen über das Lenkmoment M_δ um die Lenkachse, und zum Anderen über ein durch die Rumpfmuskulatur und die Neigung des Oberkörpers (Drehfreiheitsgrad φ_F) aufgebrachtes Rollmoment M_{φ_F} . Die aufgerichtete Position des Fahrrades kann - wie beispielsweise die freihändige Fahrt zeigt - ausschließlich mit Hilfe der Aufbringung von Rollmomenten gehalten werden. Im Allgemeinen dient dem Fahrer jedoch, wie etwa von Sharp [6] in Übereinstimmung mit Whipple [14] festgestellt, hauptsächlich das Lenkmoment als Stellgröße: „As Whipple surmised, the rider’s main control input is the steering torque. While in principle one can steer through leaning (by applying a roll moment to the rear frame), the resulting response is too sluggish to be practical in an emergency situation.“ Demgemäß wird folgend analog [25] der regelnde Eingriff des Fahrers nur über die Stellgröße des Lenkmomentes M_δ modelliert.

Der Fahrer hat je nach Erfahrung eine mehr oder weniger stark vereinfachte Modellvorstellung seines Fahrrades im Kopf. Aufgrund des dynamischen Verhaltens dieser Modellvorstellung, das dem Fahrer intuitiv vertraut ist, versucht er nun stabilisierend auf das System einzuwirken. In der vorliegenden Arbeit wird als vereinfachte Modellvorstellung das *Benchmark-Model* gemäß [9] verwendet.

Vereinfachte Modellvorstellung des Fahrers

Auf eine detaillierte Beschreibung dieses Fahrradmodells (Abbildung 3.13) wird auf [9] verwiesen. Hier soll nur ein kurzer Überblick verschafft werden:

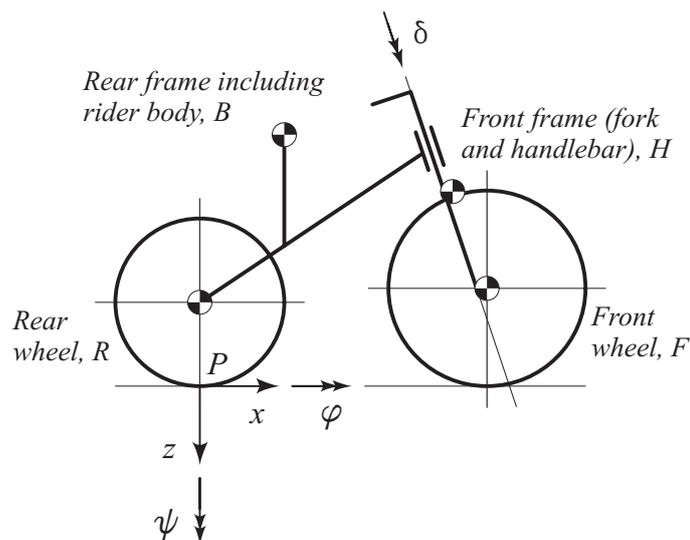


Abbildung 3.13: Vereinfachte Modellvorstellung des Fahrers: *Benchmark-Model*, 3.13

Das Modell besteht aus vier mit idealen Drehgelenken verbundenen Starrkörpern: dem Hinterreifen, dem hinteren Rahmen samt dem damit starr verbundenen Fahrer, dem als vorderer Rahmen bezeichneten Körper bestehend aus Lenker und Gabel, sowie dem Vorderreifen. Zur Modellierung des Kontaktes zwischen Reifen und Fahrbahn wird vereinfachend von unendlich dünnen Reifen (vgl. Abbildung 3.5) ausgegangen. Dabei wird eine schlupffreie Bewegung vorausgesetzt, also die Modellierung des Aufbaues von Reifenkraften durch nicht-holonome Bindungen ersetzt. Weiters wird in diesem Modell der Drehfreiheitsgrad des Fahrers gegenüber dem Rahmen, der Federungsfreiheitsgrad der Federgabel, sowie die Modellierung der Rahmenflexibilität vernachlässigt.

Dieses häufig als Referenz dienende Modell besitzt sieben Freiheitsgrade. Die vier nicht-holonomen Zwänge (ein longitudinaler und ein lateraler für jeden Reifenkontakt) ermöglichen eine Beschreibung des Systems über die nun reduzierte Anzahl von $7 - 4 = 3$ Freiheitsgraden der Geschwindigkeit. Schwab [25] verwendet dafür etwa die Rollwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des hinteren Rahmens, die Lenkwinkelgeschwindigkeit $\dot{\delta}$ und die Longitudinalgeschwindigkeit v , welche als das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit Θ_H des Hinterreifens gegenüber dem hinteren Rahmen und dem Reifenradius definiert ist.

Zufolge der Entkopplung der Quer- von der Longitudinaldynamik des Fahrradmodells in aufgerichteter Position (Geradeausfahrt), kann das Systemverhalten bei konstanter Fahrgeschwindigkeit v gemäß [9] über folgenden Satz linearisierter Bewegungsgleichungen, welcher ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung darstellt, beschrieben werden:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + v\bar{\mathbf{C}}_1\dot{\mathbf{q}} + [g\bar{\mathbf{K}}_0 + v^2\bar{\mathbf{K}}_2]\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (3.45)$$

Dabei werden die Freiheitsgrade in einem Vektor $\mathbf{q} = [\varphi, \delta]^T$ zusammengefasst, und das Lenkmoment M_δ ist im externen Kraftvektor $\mathbf{f} = [0, M_\delta]^T$ enthalten. Weiters ist $\bar{\mathbf{M}}$ die symmetrische Massenmatrix und $\bar{\mathbf{C}} = v\bar{\mathbf{C}}_1$ die in der Geschwindigkeit v lineare Dämpfungsmatrix, welche gyroskopische Momente beinhaltet. Die Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}$ besteht aus zwei Teilen: einem geschwindigkeitsunabhängigen Anteil $g\bar{\mathbf{K}}_0$, der proportional zur Fallbeschleunigung g ist, und einem in der Longitudinalgeschwindigkeit v quadratischen Teil $v^2\bar{\mathbf{K}}_2$, der gyroskopische und zentrifugale Effekte beschreibt. Die Indizes der Matrizen korrespondieren zu deren jeweiligem Exponenten des Multiplikators v .

Die Gleichungen zur Bestimmung der jeweils konstanten Einträge der Matrizen $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{C}}_1$, $\bar{\mathbf{K}}_0$ und $\bar{\mathbf{K}}_2$ werden im Appendix hergeleitet und angegeben. Für die Parameter der Ausgangskonfiguration (vgl. Abschnitt 3.1.2) ergeben sich damit:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}} &= \begin{pmatrix} 132.947 & 2.485 \\ 2.485 & 0.241 \end{pmatrix} \text{kgm}^2 & \bar{\mathbf{C}}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 37.936 \\ -0.397 & 1.502 \end{pmatrix} \text{kgm} \\ \bar{\mathbf{K}}_0 &= \begin{pmatrix} -109.126 & -2.534 \\ -2.534 & -0.825 \end{pmatrix} \text{kgm} & \bar{\mathbf{K}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 94.867 \\ 0 & 2.292 \end{pmatrix} \text{kg}\end{aligned}\tag{3.46}$$

Zur Modellierung des regelnden Fahrereingriffes wird der Satz linearisierter Bewegungsgleichungen (3.45) mit Hilfe des Zustandsvektors $\mathbf{x} = [\varphi, \delta, \dot{\varphi}, \dot{\delta}]^T$ und des Stellgrößenvektors $u = M_\delta$ in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung übergeführt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u\tag{3.47}$$

Dabei ergeben sich die Systemmatrix \mathbf{A} und der Stellgrößenvektor \mathbf{B} zu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{M}}^{-1}(-\bar{\mathbf{K}}) & \bar{\mathbf{M}}^{-1}(-\bar{\mathbf{C}}) \end{pmatrix}\tag{3.48}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\mathbf{M}}^{-1}(1, 2) \\ \bar{\mathbf{M}}^{-1}(2, 2) \end{pmatrix}\tag{3.49}$$

Modellierung des regelnden Fahrereingriffes

Wie bereits eingangs erwähnt, handelt es sich bei der in dieser Arbeit verwendeten Modellierung des Fahrereingriffes nicht um ein Fahrermodell im eigentlichen Sinne, sondern vielmehr um einen das Fahrrad stabilisierenden Lenkungsregler. Selbstverständlich ist jedoch auch bei der Modellierung als Lenkungsregler darauf zu achten, dass das zur Stabilisierung aufgebrauchte Lenkmoment das Leistungsvermögen des realen Fahrers hinsichtlich maximaler Amplitude und Frequenz nicht überschreitet.

Gemäß [25] ist es dem Fahrer nur möglich den Rollwinkel φ und die Rollwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ intuitiv zu erfassen, und zur Bestimmung des zur Stabilisierung notwendigen Lenkmomentes heranzuziehen. Die Modellierung des Fahrereingriffes kann daher nur über eine unvollständige Zustandsvektorrückführung, einer so genannten Ausgangsvektorrückführung, erfolgen. Den Aufbau des zugehörigen Regelkreises zeigt Abbildung 3.14. Dabei werden skalare Größen mit einfachen, und Vektorgrößen mit doppelten Verbindungslinien bzw. -pfeilen gekennzeichnet.

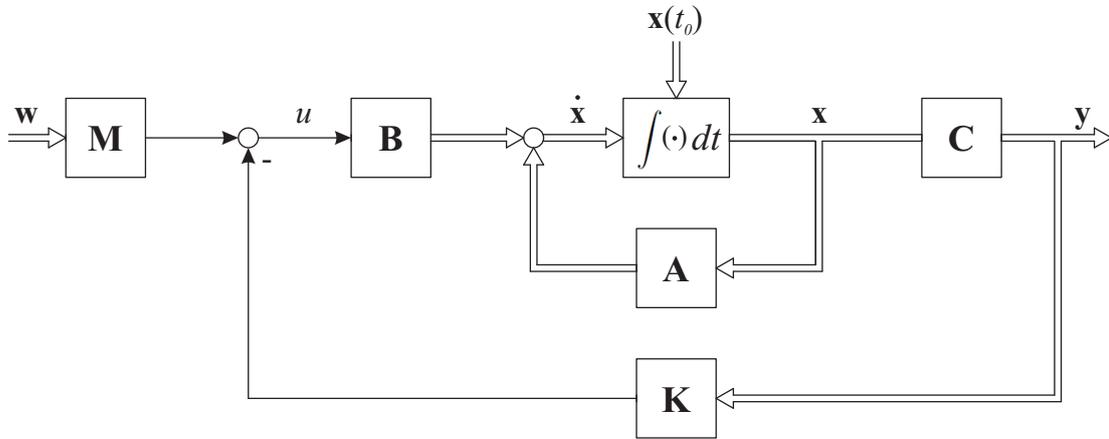


Abbildung 3.14: Regelkreis der Ausgangsvektorrückführung

Die Regelstrecke wird durch die bereits eingeführte Systemgleichung (3.47) über den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\varphi, \delta, \dot{\varphi}, \dot{\delta}]^T$ und die Stellgröße $u = M_\delta$ beschrieben. Der mit Hilfe der Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.50)$$

definierte Ausgangsvektor \mathbf{y} soll nun die vom Fahrer erfassbaren, und zur Stellgrößenermittlung rückgeführten Größen φ und $\dot{\varphi}$ beinhalten. Damit folgt die Ausgangsmatrix \mathbf{C} zu

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

und der vom Fahrer erfassbare Ausgangsvektor \mathbf{y} entspricht:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \delta \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Mit Hilfe des Führungsgrößenvektors $\mathbf{w} = [\varphi_{soll}, \dot{\varphi}_{soll}]^T$, der die Sollwerte der vom Fahrer erfassbaren Größen enthält, definiert der Fahrer den angestrebten stationären Zustand. Für das Erreichen eines derartigen Stationärzustandes ist jedoch stets die Sollrollwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{soll}$ zu Null vorzugeben, weshalb der Sollrollwinkel φ_{soll} als alleinige Führungsgröße (Reglereingang) verstanden werden kann. In der Folge wird daher anstelle des Führungsgrößenvektors \mathbf{w} ausschließlich die skalare Führungsgröße $w = \varphi_{soll}$ verwendet.

Gemäß Abbildung 3.14 ermittelt nun der Fahrer die Stellgröße u , mit der er aktiv auf das System eingreift, anhand des folgenden Regelgesetzes:

$$u = Mw - \mathbf{K}\mathbf{y} \quad (3.53)$$

Dabei stellen die Einträge des Rückführverstärkungsvektors $\mathbf{K} = [K_\varphi, K_{\dot{\varphi}}]$ sowie der Vorfilter M die den realen Fahrer beschreibenden Regelparameter dar.

Substituiert man nun das Regelgesetz (3.53) und die Ausgangsgleichung (3.50) in die Systemgleichung des offenen Systems (3.47), so erhält man die Systemgleichung des geschlossenen Regelkreises:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}Mw \quad (3.54)$$

Aus der daraus folgenden Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$ ist der unmittelbare Einfluss des Rückführverstärkungsvektors \mathbf{K} auf die Systemdynamik des geschlossenen Regelkreises ersichtlich. Dagegen wird mit Hilfe des Vorfilters M erreicht, dass der Rollwinkel φ des Ausgangsvektors \mathbf{y} im stationären Zustand mit der Führungsgröße $w = \varphi_{soll}$ übereinstimmt. Aufgrund der starken Geschwindigkeitsabhängigkeit des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke, werden selbstverständlich auch die Einträge des Rückführverstärkungsvektors \mathbf{K} sowie der Vorfilter M von der Longitudinalgeschwindigkeit v abhängen. Im Folgenden gilt es diese Regelparameter derart zu bestimmen, dass der damit entworfene Regler den regelnden Eingriff des menschlichen Fahrers charakterisiert.

Zur Ermittlung des Rückführverstärkungsvektors \mathbf{K} eines Regelkreises mit Ausgangsvektorrückführung werden etwa in [39] eine Reihe unterschiedlicher Entwurfsverfahren vorgestellt. Da bei einer derartigen unvollständigen Rückführung im Vergleich zu einer in der Regelungstechnik häufig angewendeten vollständigen Zustandsvektorrückführung mit wesentlich geringeren Systeminformationen ausgekommen werden muss, ist dessen Reglerentwurf schwieriger und nicht eindeutig. Daher stützen sich einige der angesprochenen Entwurfsmethoden für Ausgangsvektorrückführungen auf den (eindeutigen) Entwurf einer vollständigen Zustandsvektorrückführung mit entsprechender Systemdynamik, welche danach durch eine Ausgangsvektorrückführung approximiert wird. In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Bestimmung des Rückführverstärkungsvektors \mathbf{K} über den Entwurf einer Ausgangsvektorrückführung durch die Approximation des Stellgrößenvektors einer vollständigen Zustandsvektorrückführung, [39].

Zunächst wird also ein Regler mit vollständiger Zustandsvektorrückführung mit der gewünschten Systemdynamik entworfen. Das dabei zugrunde liegende Regelgesetz lautet:

$$u = Mw - \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (3.55)$$

Wobei der entsprechende Verstärkungsvektor $\mathbf{R} = [R_\varphi, R_\delta, R_{\dot{\varphi}}, R_{\dot{\delta}}]^T$ durch Vorgabe der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises („Spiegelung“ der instabilen Eigenwerte des offenen Regelkreises unter Berücksichtigung einer absoluten Stabilitätsgüte von $k = 1$) eindeutig bestimmt ist, und in der Folge als bekannt vorausgesetzt werden kann. Ein Vergleich der Regelgesetze (3.53) und (3.55) zeigt, dass die vollständige Zustandsvektorrückführung als Spezialfall der Ausgangsvektorrückführung aufgefasst werden kann. Setzt man nämlich die Ausgangsmatrix \mathbf{C} gleich der Einheitsmatrix \mathbf{I} , so wird gemäß der Ausgangsgleichung (3.50) der rückgeführte Ausgangsvektor \mathbf{y} gleich dem Zustandsvektor \mathbf{x} , und es liegt eine vollständige Zustandsvektorrückführung vor. In diesem Fall ist $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ zu setzen.

Ziel des genannten Entwurfsverfahrens (detaillierte Herleitung siehe [39]) ist es nun, die Stellgröße der Ausgangsvektorrückführung möglichst genau durch jene der vollständigen Zustandsvektorrückführung zu approximieren, und damit ein äquivalentes dynamisches Verhalten beider Regelkreise zu erzielen. Der dabei unweigerlich auftretende Approximationsfehler besteht aus zwei Anteilen: dem dynamischen Fehler, der für $t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, und dem stationären Fehler. Ersterer ist stets von Null verschieden, weshalb man versucht, ihn im zeitlichen Mittel zu minimieren. Dazu bedient man sich einem so genannten Gütemaß, sowie einer Gewichtungsmatrix zu dessen gezielter Beeinflussung. Der stationäre Fehler lässt sich über die Bedingung

$$(\mathbf{K}\mathbf{C} - \mathbf{R})\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

mit $\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}$ zu Null machen. Eine möglichst gute Approximation der Stellgröße führt also zur mathematischen Aufgabenstellung eines Extremalproblems mit Nebenbedingung. Bei dessen Lösung muss wiederum die Matrix \mathbf{S} aus der Ljapunow-Gleichung

$$(\mathbf{A}_R + \alpha\mathbf{I})\mathbf{S} + \mathbf{S}(\mathbf{A}_R + \alpha\mathbf{I})^T = -\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}_0\mathbf{B}^T\mathbf{A}_R^{-T} \quad (3.57)$$

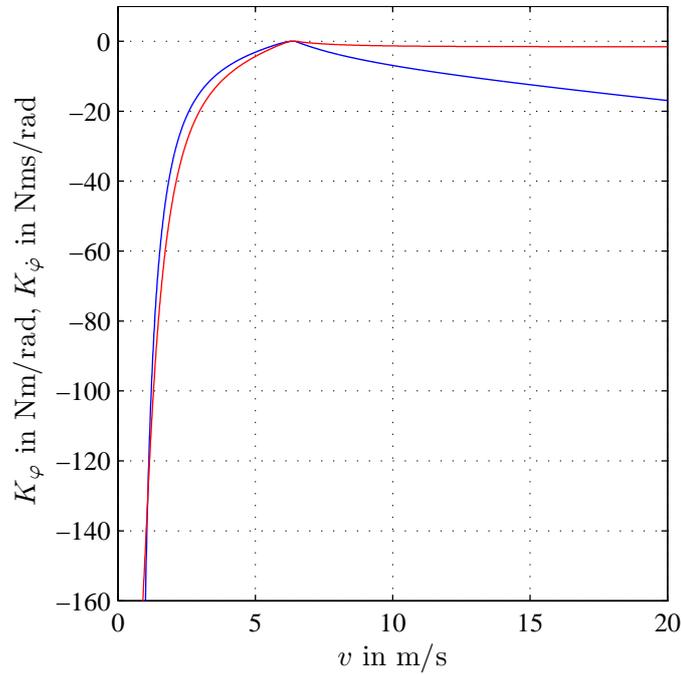
bestimmt werden. Dabei handelt es sich bei der Matrix \mathbf{G}_0 und dem Faktor α um Parameter der angesprochenen Gewichtungsmatrix. Schließlich folgt der gesuchte Rückführverstärkungsvektor \mathbf{K} aus

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} [\mathbf{G}_1 + (\mathbf{H}_R - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{H}_K)(\mathbf{H}_K^T\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{H}_K)^{-1}\mathbf{H}_K^T] \mathbf{G}_2^{-1} \quad (3.58)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{S}\mathbf{C}^T & , & & \mathbf{G}_2 &= \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{H}_R &= \mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B} & , & & \mathbf{H}_K &= \mathbf{C}\mathbf{A}_R^{-1}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aufgrund der bereits erwähnten starken Geschwindigkeitsabhängigkeit des Rückführverstärkungsvektors \mathbf{K} werden dessen, gemäß (3.58) ermittelten Einträge K_φ und $K_{\dot{\varphi}}$ in Abbildung 3.15 über der Longitudinalgeschwindigkeit v aufgetragen.

Abbildung 3.15: Rückführverstärkungen K_φ (blau) und $K_{\dot{\varphi}}$ (rot)

Zur Bestimmung des Vorfilters M wird die Laplace-Transformierte der Systemgleichung des geschlossenen Regelkreises (3.54) unter der Annahme der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{0}$ betrachtet:

$$s\mathbf{X}(s) = (\mathbf{A} - \mathbf{BKC})\mathbf{X}(s) + \mathbf{BMW}(s) \quad (3.60)$$

Damit folgt mit der Ausgangsgleichung (3.50):

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC})^{-1}\mathbf{BMW}(s) \quad (3.61)$$

Für (3.61) kann auch

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{F}(s)MW(s) \quad (3.62)$$

geschrieben werden, wobei der Vektor $\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BKC})^{-1}\mathbf{B} = [F_1(s), F_2(s)]^T$ den Führungs-Übertragungsvektor der Ausgangsvektorrückführung ohne Vorfilter beschreibt.

Für den stationären Zustand $t \rightarrow \infty$, gekennzeichnet durch den Index ∞ , erhält man unter Anwendung des Endwertsatzes der Laplace-Transformation

$$\mathbf{y}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{Y}(s) \quad , \quad w_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) \quad (3.63)$$

für den Grenzübergang von Gleichung (3.62)

$$\mathbf{y}_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{F}(s) \cdot Mw_\infty = \mathbf{F}(0)Mw_\infty \quad (3.64)$$

Erhebt man nun die eingangs angeführte Forderung, dass im stationären Zustand der Rollwinkel φ des Ausgangsvektors \mathbf{y}_∞ mit der Führungsgröße $w_\infty = \varphi_{soll}$ übereinstimmt, so stellt die erste Gleichung des Gleichungssystems (3.64) bereits eine Bestimmungsgleichung für den Vorfilter M dar:

$$M = F_1(0)^{-1} \quad (3.65)$$

Mit $F_2(0) \equiv 0$ wird unmittelbar die Bedingung, dass im stationären Zustand auch die Rollwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Ausgangsvektors \mathbf{y}_∞ identisch Null sein muss, erfüllt. In Abbildung 3.16 werden die nach (3.65) ermittelten Werte für den Vorfilter über der Longitudinalgeschwindigkeit v dargestellt.

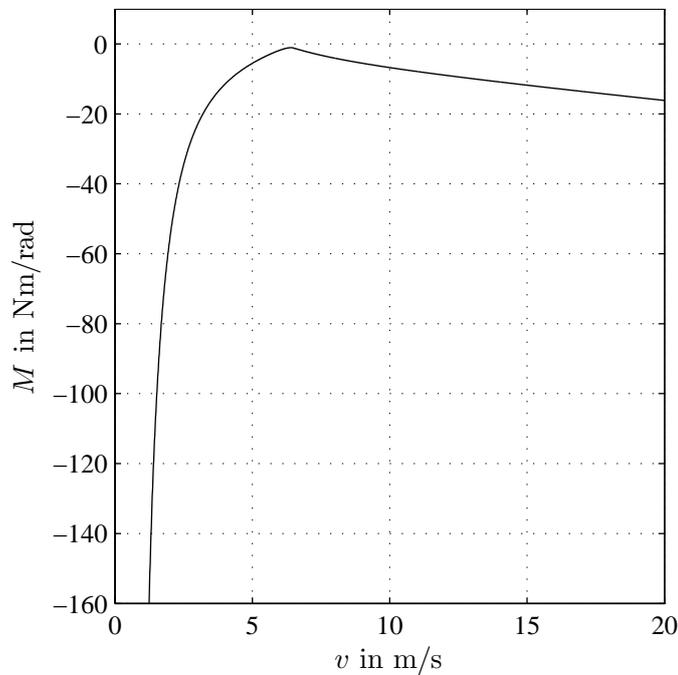


Abbildung 3.16: Vorfilter M

Aus den Abbildungen 3.15 und 3.16 ist ersichtlich, dass die Regelparameter K_φ , $K_{\dot{\varphi}}$ und M grundsätzlich ähnliche Verläufe besitzen. So ist etwa jeweils ein Knick auszumachen, welcher gemäß [6] auf die, für die betreffende Fahrgeschwindigkeit auftretende Singularität der Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}} = g\bar{\mathbf{K}}_0 + v^2\bar{\mathbf{K}}_2$ des zugrunde liegenden Fahrradmodells zurückzuführen ist. Weiters zeigt sich, dass der Fahrer für geringere Fahrgeschwindigkeiten enorm auf das System eingreifen muss, um das Fahrrad stabilisieren zu können. Dies deckt sich mit den praktischen Erfahrungen, wonach sich das Balancieren des Fahrrades unter Schrittgeschwindigkeit (etwa 1 m/s) als äußerst schwierig erweist.

3.3.2 Fahrgeschwindigkeitsregelung

Zur Regelung der longitudinalen Fahrgeschwindigkeit v wurde ein sehr einfach durchzuführender Reglerentwurf, basierend auf empirischen Einstellregeln, vorgenommen. Dabei werden ausgehend von der gemessenen Sprungantwort der Regelstrecke die Regelparameter der zuvor festgelegten Reglerstruktur bestimmt, [40].

Im vorliegenden Fall der Fahrgeschwindigkeitsregelung wird vorab ein Regler mit einer Kombination aus Proportional- und Integralanteil (PI-Regler) gewählt:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau = K_P \left[e(t) + \frac{1}{T_n} \int_0^t e(\tau) d\tau \right] \quad (3.66)$$

Aus der Reglergleichung (3.66) - die den Zusammenhang zwischen Stellgröße $u(t)$ und Regeldifferenz $e(t)$ angibt - sind unmittelbar die beiden zu bestimmenden Regelparameter ersichtlich: die Reglerverstärkung K_P , sowie die Nachstellzeit T_n .

Als Stellgröße $u(t)$ zur Regelung der Fahrgeschwindigkeit v dient dem Fahrer das Antriebsmoment $M_A(t)$, welches zwischen Rahmen und Hinterreifen aufgebracht wird. Die gemessene Antwort der Regelstrecke auf einen zum Zeitpunkt $t = 1\text{ s}$ aufgetragenen Einheitssprung ($\Delta u = \Delta M_A = 1\text{ Nm}$) bei $v = 15\text{ m/s}$ zeigt Abbildung 3.17:

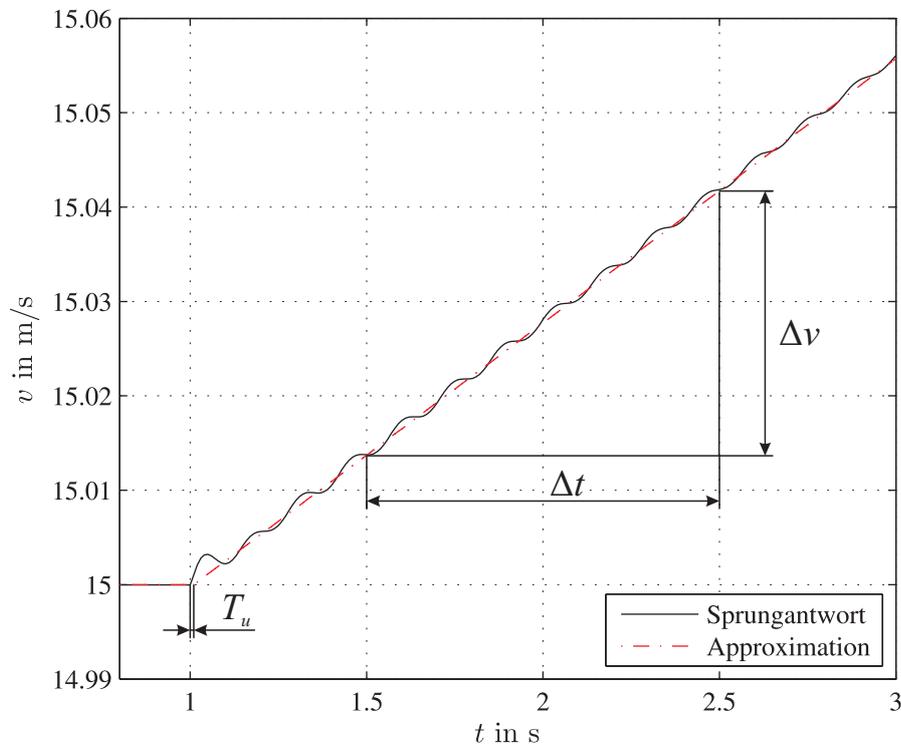


Abbildung 3.17: Antriebsmomentsprungantwort des Fahrrad-Modells

Gemäß den Einstellregeln nach Chien-Hrones-Reswick [40] wurden in Abbildung 3.17 Asymptoten in die Streckensprungantwort eingetragen, und die Verzugszeit $T_u \approx 0.01s$ sowie die Zeit $\Delta t = 1s$ und der Wert $\Delta v \approx 0.028m/s$ abgelesen, um die Integrationszeitkonstante T_i aus

$$T_i = \frac{\Delta u \Delta t}{\Delta v} \approx 35.7s \quad (3.67)$$

zu berechnen. Damit können schließlich die Regelverstärkung K_P und die Nachstellzeit T_n nach [40] folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$K_P \approx 0.4 \frac{T_i}{T_u} \approx 1428 \quad (3.68)$$

$$T_n \approx 5T_u \approx 0.05s \quad (3.69)$$

Da sich die Regelverstärkung K_P und die Nachstellzeit T_n als weitgehend unabhängig von der Fahrgeschwindigkeit v erwiesen, konnte die Fahrgeschwindigkeitsregelung mit den für $v = 15m/s$ aus (3.68) und (3.69) ermittelten Regelparametern im gesamten relevanten Geschwindigkeitsbereich durchgeführt werden.

Das im Modell implementierte Regelgesetz (3.66) lautet schließlich mit der Regelabweichung $e(t) = v(t) - v_{soll}(t)$ endgültig:

$$M_A(t) = 1428 \left[(v(t) - v_{soll}(t)) + \frac{1}{0.05s} \int_0^t (v(\tau) - v_{soll}(\tau)) d\tau \right] \quad (3.70)$$

Kapitel 4

Das Stabilitätsverhalten des Fahrrades

Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten dynamischer Systeme liefern häufig entscheidende Aufschlüsse über das generelle Systemverhalten. Daher sind Stabilitätsanalysen beim Studium des dynamischen Verhaltens eines Systems von besonderem Interesse. So hängt etwa, wie bereits in der Einleitung festgestellt wurde, das querdynamische Verhalten des Fahrrades, zufolge des bei der aufrechten Fahrt zu findenden Kompromisses zwischen Stabilisierung und Manövrierung, stark von dessen Stabilitätsverhalten ab.

In der vorliegenden Arbeit wird das Stabilitätsproblem im Sinne Ljapunows behandelt. Dabei ist das Verhalten einer speziellen Lösung des gegebenen Systems, deren Ausgangszustand zufolge unvermeidbarer äußerer Einflüsse von einem interessierenden Zustand abweicht, von Interesse. Derartige Stabilitätsuntersuchungen von dynamischen Systemen gehen also prinzipiell von einem *ungestörten Zustand* (z.B.: einer Ruhelage) aus, dessen Stabilität untersucht werden soll, [41]. Anhand der Reaktion des Systems auf eine aufgebrachte Störung, durch die der ungestörte in den *gestörten Zustand* übergeht, können dann Aussagen über das Stabilitätsverhalten getroffen werden.

Im vorliegenden Kapitel soll nun detailliert das Stabilitätsverhalten des Fahrrades bei der ungestörten Geradeausfahrt, sowie bei der ungestörten stationären Kurvenfahrt untersucht werden. Zunächst bedarf es dazu jedoch einer mathematischen Aufbereitung des Stabilitätsbegriffes, und der Angabe einer Methode zur Analyse des Stabilitätsverhaltens.

4.1 Stabilitätsdefinitionen

Die Bewegung eines dynamischen Systems bestehend aus starren Körpern lässt sich stets über gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben. Wird nun ein autonomes System¹ vorausgesetzt, so liefert deren Überführung in Systemgleichungen 1. Ordnung ein, durch den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ charakterisiertes (homogenes) Differentialgleichungssystem der Form:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

Der ungestörte Zustand $\mathbf{x}_0(t)$, dessen Stabilitätsverhalten untersucht werden soll, stellt eine spezielle (partikuläre) Lösung der Systemgleichungen (4.1) dar:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \quad (4.2)$$

Gemäß [42] können damit die folgenden Stabilitätsdefinitionen angegeben werden:

4.1.1 Stabilität im Sinne Ljapunows

Der ungestörte Zustand $\mathbf{x}_0(t)$ heißt *stabil (im Sinne Ljapunows, oder kurz Ljapunow-stabil)*, wenn man für jede beliebige gestörte Lösung $\mathbf{x}_s(t)$ von (4.1) ein $\epsilon > 0$ vorgeben kann, so dass es ein $\delta(\epsilon) > 0$ gibt mit

$$|\mathbf{x}_0(t_0) - \mathbf{x}_s(t_0)| < \epsilon \Rightarrow |\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_s(t)| < \delta(\epsilon) \quad (4.3)$$

für $t \in [t_0, \infty)$.

4.1.2 Asymptotische Stabilität

Der ungestörte Zustand $\mathbf{x}_0(t)$ sei Ljapunow-stabil. Dann heißt $\mathbf{x}_0(t)$ *asymptotisch stabil*, wenn man für jede andere Lösung $\mathbf{x}_s(t)$ von (4.1) ein $\epsilon > 0$ vorgeben kann, so dass

$$|\mathbf{x}_0(t_0) - \mathbf{x}_s(t_0)| < \epsilon \Rightarrow |\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_s(t)| \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

für $t \in [t_0, \infty)$.

Dabei ist anzumerken, dass die Erfüllung der Bedingung (4.4) allein (Attraktivität) nicht hinreichend für Stabilität ist, [41]!

¹Tritt in den Bewegungsgleichungen eines Systems die Zeit t explizit auf, so heißt dieses *rheonom* (oder *nichtautonom*), andernfalls *skleronom* (oder *autonom*), [29].

Eine anschauliche Darstellung dieser Definitionen kann mit Hilfe von Integralkurven gegeben werden, [41]. Wird etwa ein zweidimensionaler Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ und ein ungestörter Zustand $\mathbf{x}_0(t) \equiv \mathbf{0}$ angenommen, so lassen sich die Integralkurven unterschiedlicher gestörter Bewegungen, gemäß Abbildung 4.1 dreidimensional darstellen.

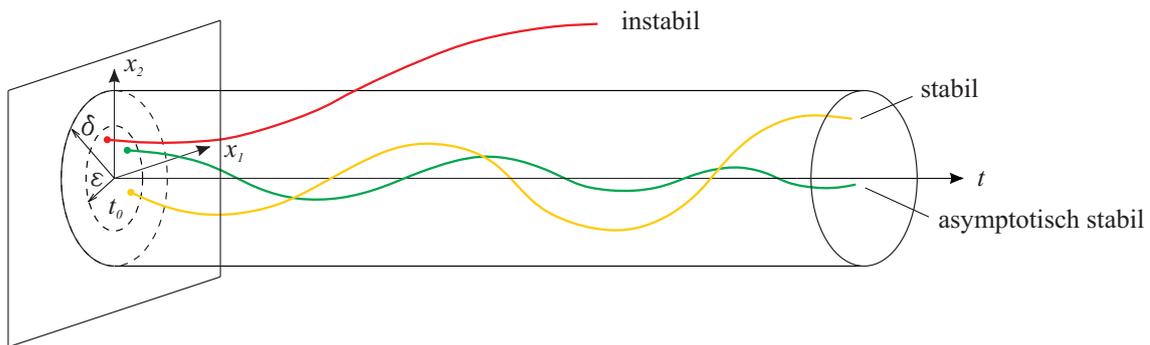


Abbildung 4.1: Anschauliche Darstellung der Stabilitätsdefinitionen: Integralkurven, [41]

Liegt nun Stabilität im Sinne Ljapunows vor (gelbe Integralkurve), so entfernt sich die gestörte Bewegung für alle Zeiten nicht weiter als $\delta(\epsilon)$ vom ungestörten Zustand, falls nur der gestörte Zustand zum Zeitpunkt t_0 hinreichend nahe am ungestörten Zustand liegt. Ist zusätzlich die Attraktivitätsbedingung (4.4) für asymptotische Stabilität (grüne Integralkurve) erfüllt, so geht die gestörte Bewegung nach hinreichend langer Zeit in den ungestörten Zustand über.

4.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Um die Stabilität eines ungestörten Zustandes \mathbf{x}_0 in dessen unmittelbarer Nähe zu untersuchen, ist häufig eine lineare Stabilitätsanalyse ausreichend, [43]. Dabei werden die im Allgemeinen nichtlinearen Systemgleichungen (4.1) bezüglich des zu untersuchenden ungestörten Zustandes \mathbf{x}_0 linearisiert, und basierend auf den Integralkurven des erhaltenen linearen Systems Stabilitätsaussagen getroffen.

In der Mehrkörpersystem-Software SIMPACK wird für lineare Stabilitätsuntersuchungen die *Methode der Eigenwertanalyse* angeboten. In der Folge sollen die grundlegenden Überlegungen, auf die diese Methode der Stabilitätsuntersuchung aufbaut, aufgezeigt werden:

Die angesprochene Linearisierung der nichtlinearen Systemgleichungen (4.1) liefert ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4.5)$$

wobei die Systemmatrix \mathbf{A} mit der Dimension $(n \times n)$ durch

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (4.6)$$

bestimmt ist. Gemäß [41] kann die allgemeine Lösung $\mathbf{x}(t)$ von (4.5) aus einem Fundamentalsystem von n unabhängigen Lösungsvektoren $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ mit dem Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}_j(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_j \quad (4.7)$$

bzw. nach längerer Umformung durch

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \left[\mathbf{v}_j + t(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{v}_j + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{m-1} \mathbf{v}_j \right] \quad (4.8)$$

angegeben werden. Dabei sind die Konstanten c_j aus der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{t_0}$ zu bestimmen. Aus (4.8) ist unmittelbar die Bedeutung der Eigenwerte $\lambda_j = \alpha_j \pm i\omega_j$ der Systemmatrix \mathbf{A} für das Stabilitätsverhalten der Lösung $\mathbf{x}(t)$ ersichtlich. Die folgenden Stabilitätsaussagen der linearen Stabilitätsanalyse nach [41] sind daher leicht nachzuvollziehen:

1. Haben *alle* n Eigenwerte λ_j der Systemmatrix \mathbf{A} *negative Realteile*, so ist das System *asymptotisch stabil*.
2. Hat auch *nur einer* der Eigenwerte einen *positiven Realteil*, so ist das System *instabil*.

Für das Stabilitätsverhalten eines ungestörten Zustandes \mathbf{x}_0 in dessen unmittelbarer Nähe sind also die Realteile α_j der Eigenwerte λ_j der durch die Linearisierung erhaltenen Systemmatrix \mathbf{A} entscheidend.

Über die Bestimmung des zum Eigenwert λ_j zugehörigen Eigenvektors oder Eigenmodes \mathbf{v}_j lässt sich eine dem Eigenwert entsprechende, assoziierte Bewegung ermitteln. Die Bewegung des Gesamtsystems, wie etwa die des Fahrrades kann dann als Überlagerung der auftretenden Eigenmodes mit den entsprechenden Dämpfungen und Frequenzen verstanden werden. Das Lehr'sche Dämpfungsmaß eines konjugiert komplexen Eigenwertpaares errechnet sich aus $D_j = -\alpha_j / \sqrt{\alpha_j^2 + \omega_j^2}$, die entsprechende Frequenz eines

Eigenmodes in Hertz aus $f_j = \omega_j/2\pi$. Reelle Eigenwerte beschreiben nicht-oszillierende Bewegungen mit Dämpfungswerten $D_j = \pm 1$.

Grundsätzlich ist dabei der Betrag eines Eigenvektors nicht eindeutig definiert, weshalb häufig $\|\mathbf{v}_j\| = 1$ angegeben wird. Besitzt ein Eigenwert eine Vielfachheit m , so sind für ein und denselben Eigenwert m linear unabhängige Eigenmodes auffindbar. Für ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar sind auch die Eigenvektoren konjugiert komplex.

4.3 Stabilität der Geradeausfahrt

In diesem Abschnitt soll das Stabilitätsverhalten des Fahrrades für den ungestörten Zustand der unbeschleunigten Geradeausfahrt untersucht werden. Dabei ist ausschließlich die Auto- oder Selbststabilität des Fahrrades von Interesse, weshalb für die folgenden Untersuchungen der aktive Fahrereingriff unberücksichtigt bleibt, also von einem passiven Fahrer ausgegangen wird.

Nachdem zunächst auf das grundsätzliche Stabilitätsverhalten anhand des Fahrrades in Ausgangskonfiguration eingegangen wird, sollen wesentliche, das Stabilitätsverhalten von Fahrrädern bestimmende Einflussgrößen diskutiert werden.

4.3.1 Grundsätzliches Stabilitätsverhalten - auftretende Modes

Ausgangspunkt der folgenden Stabilitätsbetrachtung bildet das in Kapitel 3 vorgestellte Fahrrad-Modell mit den angegebenen Parameterwerten der Ausgangskonfiguration. Abbildung 4.2 zeigt die, das Stabilitätsverhalten beschreibende Wurzelortskurve des Fahrrades für den ungestörten Zustand der Geradeausfahrt. Dabei werden die jeweiligen Imaginärteile der Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} über den entsprechenden Realteilen dargestellt, wobei die (longitudinale) Fahrgeschwindigkeit v als freier (variierter) Parameter dient. Während die in Abbildung 4.2 dargestellten blauen Kreise die jeweiligen Systemeigenwerte bei der Fahrgeschwindigkeit von $v = 0.1m/s$ kennzeichnen, repräsentieren die roten Quadrate jene bei $v = 20m/s$.

Wie erwartet zeigt sich, ohne bereits auf die Bedeutung der einzelnen Eigenmodes einzugehen, dass das Stabilitätsverhalten von Fahrrädern sehr stark von der jeweiligen Fahrgeschwindigkeit v abhängig ist. Daher bietet sich - wie in der einschlägigen Literatur üblich - eine recht übersichtliche Darstellung der Systemeigenwerte gemäß Abbildung 4.3 an. Dabei werden die Real- und Imaginärteile der entsprechenden Eigenwerte jeweils über der Longitudinalgeschwindigkeit v aufgetragen.

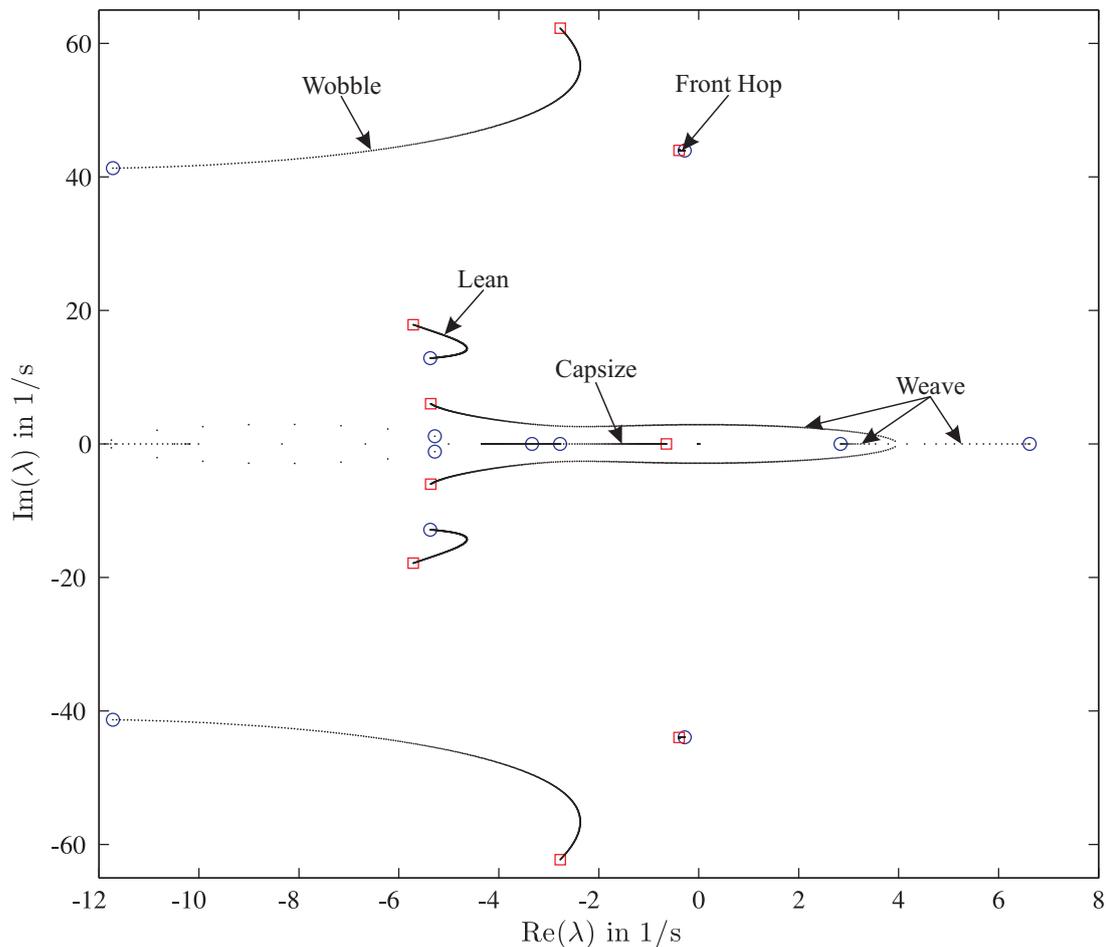


Abbildung 4.2: Wurzelortskurve der Geradeausfahrt, Ausgangskonfiguration

Wie bereits in der Literaturstudie erwähnt, lässt sich das Stabilitätsverhalten von Fahrrädern im Wesentlichen durch drei potentiell instabile Eigenmodes beschreiben: *Capsize*, *Weave* und *Wobble*. In der Folge soll auf diese, sowie auf einige weitere in den Abbildungen 4.2 und 4.3 auftretende eher unbedeutende Eigenmodes kurz eingegangen werden:

Capsize (Kentern)

Capsize ist ein nicht-oszillierender (reeller) Eigenmode, der durch die Rollbewegung (Kentern) des Fahrrades ähnlich einem inversen Pendel charakterisiert wird. Wie Abbildung 4.3 zeigt, liegt der zugehörige Eigenwert über dem gesamten Geschwindigkeitsbereich im stabilen (negativen) Bereich, wobei sich für höhere Geschwindigkeiten eine Annäherung an die Stabilitätsgrenze (Nulllinie) abzeichnet.

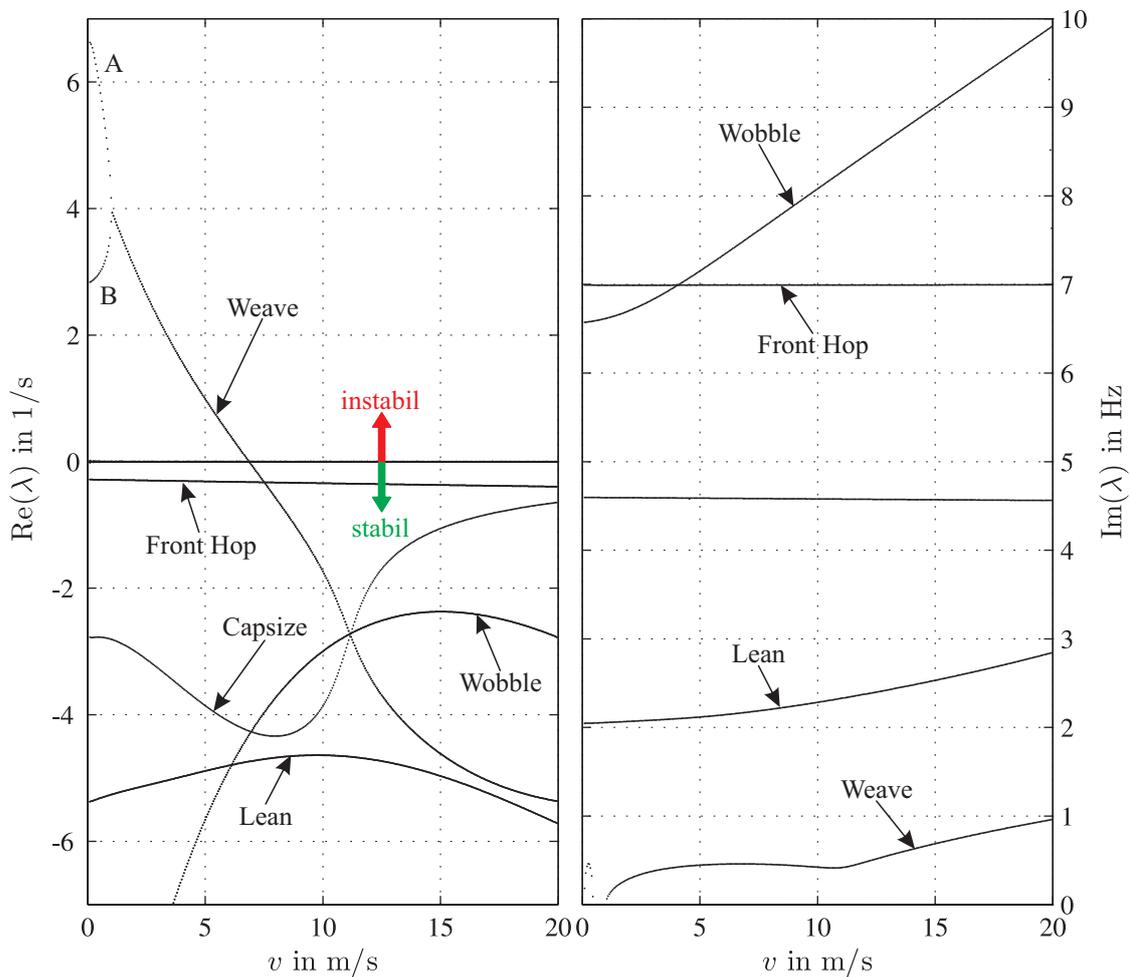


Abbildung 4.3: Stabilitätskarte der Geradeausfahrt, Ausgangskonfiguration

Weave (Pendeln)

Der Weave-Mode beginnt bei geringen Fahrgeschwindigkeiten mit zwei reellen, positiven Eigenwerten (vgl. Abbildung 4.2). Die zugehörigen Eigenwert-Äste sind in Abbildung 4.3 durch *A* und *B* gekennzeichnet, und werden etwa in [27] als „Steering Capsize“ bzw. „Body Capsize“ bezeichnet. Die mit dem *A*-Mode (Steering Capsize) assoziierte, schneller divergierende Bewegung ist wesentlich von der Lenkbewegung dominiert. Der zum *B*-Mode (Body Capsize) korrespondierende Eigenvektor beschreibt ein Kentern des Fahrrades ähnlich dem Capsize-Mode, bei gleichzeitigem Einlenken der Vorderradbaugruppe in die Gegenrichtung. Durch dieses Gegenlenken wandert der Kontaktpunkt des Vorderreifens in die Richtung der Rollbewegung, was zu einer im Vergleich zum Capsize-Mode langsameren Kenterbewegung des Fahrrades führt, [27].

Mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit nähern sich die beiden reellen Eigenwerte an, bevor sie sich schließlich bei zirka $1m/s$ zu einem oszillierenden Mode vereinen. Von dieser Oszillation sind sowohl die Gier- als auch die Rollbewegung betroffen, wobei letztere dominiert, [32]. Anschaulich kann diese Bewegung als Schwänzeln des Fahrradhinterteils, überlagert mit einer Rollbewegung des Fahrrades verstanden werden. Dieser, aufgrund der charakteristischen Bewegung auch als Pendeln [36] bezeichnete Eigenmode ist zwar gemäß Abbildung 4.3 bis zu einer Geschwindigkeit von $6.9m/s$ instabil, kann jedoch aufgrund der geringen auftretenden Schwingungsfrequenzen von weniger als einem Hertz (vgl. rechtes Diagramm aus Abbildung 4.3) relativ leicht vom Fahrer stabilisiert werden. Da alle übrigen auftretenden Eigenformen über dem gesamten Geschwindigkeitsbereich ein stabiles Verhalten zeigen, kennzeichnet der Übergang des Weave-Modes in den stabilen Bereich gleichzeitig den Beginn des *autostabilen Geschwindigkeitsbereiches*, indem sich das Fahrrad selbst stabilisiert.

Wobble (Flattern)

Der Wobble-Mode beschreibt schließlich eine Schwingung der Vorderradbaugruppe um die Lenkachse, weshalb er häufig als Lenkungsflattern oder schlicht Flattern bezeichnet wird. Diese Schwingungsform gehört zur allgemeineren Klasse des so genannten *Wheel Shimmy*, [31]. Damit werden ganz allgemein Reifenflatterbewegungen bezeichnet, wie sie etwa auch bei den Rollen von Einkaufswagen oder bei Flugzeugfahrwerken beobachtet werden können.

Die beim Lenkungsflattern auftretenden Schwingungsfrequenzen von 6.5 bis $10Hz$ (vgl. Abbildung 4.3) liegen über dem vom durchschnittlichen menschlichen Fahrer ausgleichbaren Frequenzspektrum. Daher handelt es sich bei dieser Flatterbewegung um eine für den Fahrer unkomfortable bis gefährliche Eigenschwingungsform. Ein plötzlich auftretender instabiler Wobble-Mode überfordert häufig den Fahrer in seiner Stabilisierungsaufgabe, was zu kritischen Fahrsituationen oder auch Stürzen führen kann. Daher sind konstruktive Stabilisierungsmaßnahmen, die einen innerhalb des üblichen Geschwindigkeitsbereiches stabilen Wobble-Mode (ähnlich Abbildung 4.3) ermöglichen, von besonderem Interesse.

Weitere Eigenmodes

Das Fahrrad-Modell besitzt natürlich entsprechend der Größe der Systemmatrix \mathbf{A} einige weitere Eigenmodes, welche üblicherweise für den gesamten Geschwindigkeitsbereich

(weit) unter der Stabilitätsgrenze liegen, und daher für die Stabilitätsuntersuchung von geringerer Bedeutung sind.

Davon sind in den Abbildung 4.2 und 4.3 etwa der *Lean-Mode* [31] oder der *Front-Hop-Mode* [6] ersichtlich. Ersterer beschreibt die Rollbewegung des Fahreroberkörpers, und tritt weitgehend unabhängig von der Fahrgeschwindigkeit mit ausreichender Dämpfung auf. Der Front-Hop-Mode stellt einen in der Fahrrad-Symmetrieebene verbleibenden Eigenmode (In-Plane Mode) dar, und ist dementsprechend für Untersuchungen bezüglich der Vertikaldynamik des Fahrrades von Interesse. Die zugehörige Bewegung wird durch die Federbewegung der Vorderradaufhängung, und dem damit verbundenen Nicken des Fahrrades charakterisiert.

4.3.2 Einflüsse auf das Stabilitätsverhalten

Nachdem nun das Stabilitätsverhalten des Fahrrades in Ausgangskonfiguration anhand der charakteristischen Eigenmodes erläutert wurde, ist selbstverständlich von Interesse, auf welche Effekte die beobachtete Selbststabilisierung innerhalb des autostabilen Bereiches zurückzuführen ist, und wie das Stabilitätsverhalten beeinflusst werden kann. So wird etwa in [11] oder [32] eine ganze Reihe unterschiedlicher Parametereinflüsse wie beispielsweise

- *Einflüsse des Reifens:*
Reifenmasse und -trägheitsmomente, Reifenradius, Reifenmodellparameter
- *Einflüsse des Fahrrades:*
Massen und Trägheitsmomente der Teilkörper, Nachgiebigkeit des Rahmens, Lenkgeometrie, Radstand
- *Fahrereinflüsse:*
Fahrermasse und -trägheitsmomente, Anspannung der Rumpfmuskulatur, Sitzposition

untersucht. Damit kann die Relevanz einzelner Parameter für das Stabilitätsverhalten des Fahrrades aufgezeigt werden.

Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit sollen sich nun auf einige der wesentlichsten Parameter beschränken. Als Referenz dient dabei stets das in den folgenden Diagrammen schwarz dargestellte Stabilitätsverhalten des Fahrrades in Ausgangskonfiguration gemäß Abbildung 4.3.

Der gyroskopische Effekt

Die Kreiselwirkung des Reifens - besser bekannt als gyroskopischer Effekt - ist einer der in der Literatur (aber auch unter Laien) meist diskutierten, die Stabilisierung des Fahrrades betreffenden Aspekte, [6]. Während es durchaus nachvollziehbar ist, dass Nichtfachkundige mit Problemen beim Verständnis dieser Kreiselwirkung kämpfen, ist es doch verwunderlich, dass auch in der fachspezifischen Literatur inkonsistente Schlussfolgerungen zur Wichtigkeit des gyroskopischen Effektes zu finden sind.

Experimentelle Versuche stellen einen guten Ausgangspunkt dar, um sich der Wirkung des gyroskopischen Effektes auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades bewusst zu werden. So wurden etwa von Jones [44] in den 1970er Jahren Test-Fahrräder entwickelt, dessen gyroskopischer Einfluss durch zusätzliche gegendrehende Reifen eliminiert wurde. Dabei wurde festgestellt, dass derartige Fahrräder keinen autostabilen Bereich aufzuweisen scheinen, da sich die freihändige Fahrt als äußerst schwierig erwies. Dennoch wurde etwa in [24] angemerkt, dass derartige Test-Fahrräder ohne weiteres für den Fahrer stabilisierbar, also gyroskopische Momente nicht zwingend notwendig für die aufrechte Fahrt sind. Auch Jones [44] bemerkte bezüglich des von ihm entwickelten Test-Fahrrades: „...*It's 'feel' was a bit strange, a fact I attributed to the increased moment of inertia about the front forks, but it did not tax my (average) riding skill even at low speed...*“

Eine der ersten theoretischen Arbeiten über die Bedeutung des gyroskopischen Effektes für die Stabilisierung des Fahrrades wurde von Klein und Sommerfeld [15] publiziert. Darin kamen sie zu dem Schluss, dass nur die Kreiselwirkung der rotierenden Räder die Selbststabilisierung des betrachteten Fahrrades im autostabilen Geschwindigkeitsbereich ermöglicht. Klein und Sommerfeld erklärten sich diese stabilisierende Wirkung mit einem dadurch verbundenen Eigenlenkverhalten, wonach das Vorderrad bei einer Neigung in die Richtung des Rollens (Kenterns) lenkt. Dabei beschrieben sie die Zentrifugalkraft als eigentliche stabilisierende Kraft, während der Kreiselwirkung lediglich die Rolle der Auslösung zufällt. Diesbezüglich merkten sie an: „*Die stabilisierende Wirkung der Rotation beruht darauf, daß das Rad, wenn es sich seitlich geneigt hat, durch die Kreiselwirkung wesentlich des Vorderrades gezwungen wird, auszubiegen, und dadurch die Centrifugalkraft in Thätigkeit tritt, die das Rad wieder aufrichtet.*“

Die beschriebene Erkenntnis, dass ein Fahrrad ohne der Kreiselwirkung der Reifen, also ohne gyroskopischen Effekt, kein selbststabilisierendes Verhalten aufweist, lässt sich auch anhand des in dieser Arbeit verwendeten MKS-Fahrradmodells zeigen. Aus Abbildung 4.4 ist ersichtlich, dass der Weave-Mode des Fahrrades ohne gyroskopischen Effekt (rot) im gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich instabil bleibt. Dies

lässt nun in Analogie zu Klein und Sommerfeld die Schlussfolgerung zu, dass diese gyroskopischen Momente essentiell für die Stabilisierung des Fahrrades sind.

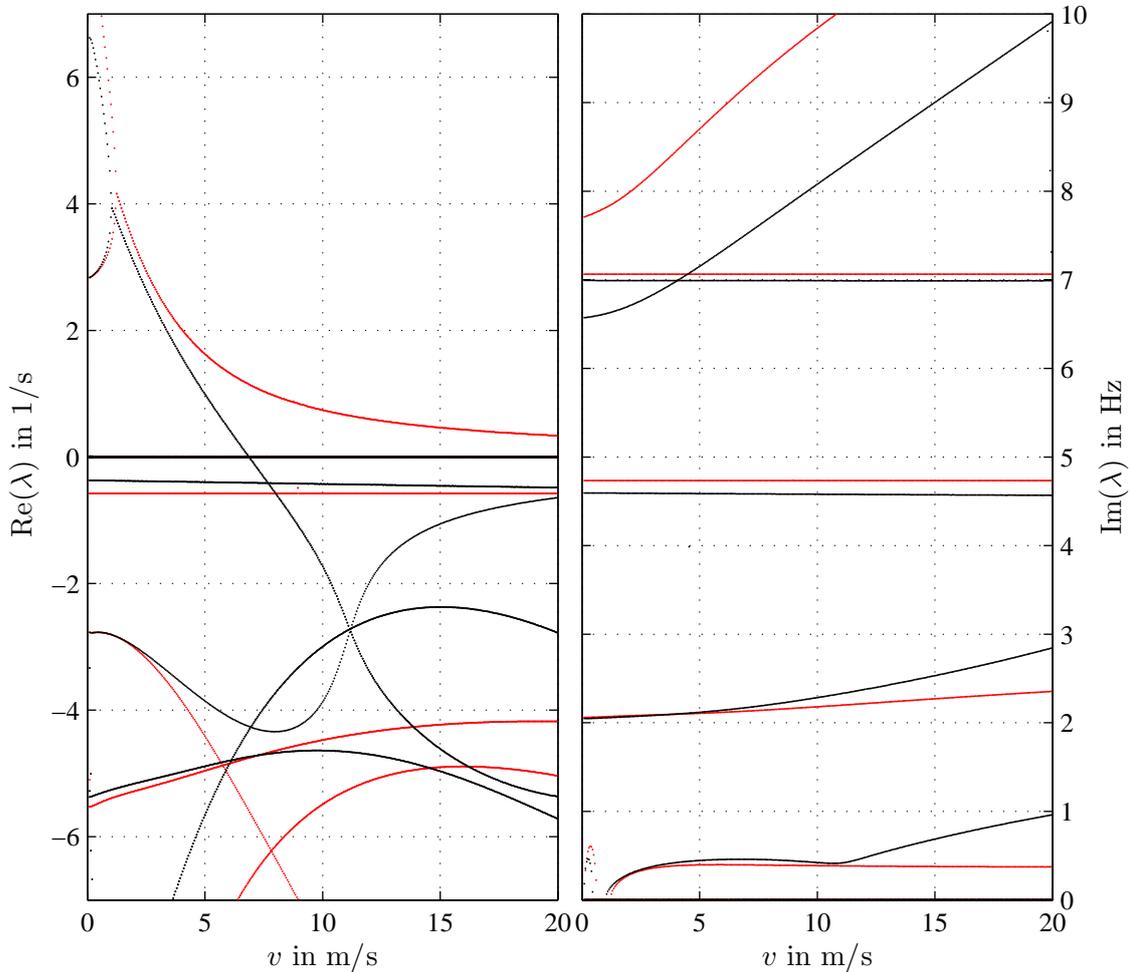


Abbildung 4.4: Vergleich mit/ohne gyroskopischem Effekt

In neueren Publikationen wird dagegen zunehmend die Wichtigkeit dieses Effektes relativiert. Sharp [6] hält etwa fest: „*While this moment does indeed stabilize the free-steering bicycle over a range of speeds, this effect is of only minor importance because the rider can easily replace the stabilizing influence of the front wheel’s gyroscopic precession with low-bandwidth rider control action.*“. Auch Schwab schlussfolgert in [45], dass der Einfluss des gyroskopischen Effektes auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades lange Zeit überschätzt wurde, und konstatiert weiters: „*However, mathematicians who took this principle to heart were wrong.*“ Vor allem die bei Fahrradreifen geringen auftretenden Winkelgeschwindigkeiten und Massenträgheitsmomente rufen berechtig-

te Zweifel an der zentralen Rolle des gyroskopischen Effektes hervor. In [46] heißt es diesbezüglich: „...if one wanted to strengthen the gyroscopic effects, one should provide the wheels with heavy rims and tires instead of making them as light as possible. It can nevertheless be shown that these weak effects contribute their share to the stability of the system.“

Der angesprochene Anteil, den der gyroskopische Effekt zur Stabilisierung der Geradeausfahrt beiträgt, ist gut aus Abbildung 4.5 ersichtlich. Dabei wurde ausgehend vom Fahrrad in Ausgangskonfiguration das polare Massenträgheitsmoment beider Reifen und damit der Beitrag der gyroskopischen Momente um $\pm 20\%$ (rot bzw. blau) variiert. Ein höheres polares Massenträgheitsmoment zeigt demnach eine stabilisierende Wirkung auf das Fahrrad und führt zu einer Vergrößerung des autostabilen Bereiches.

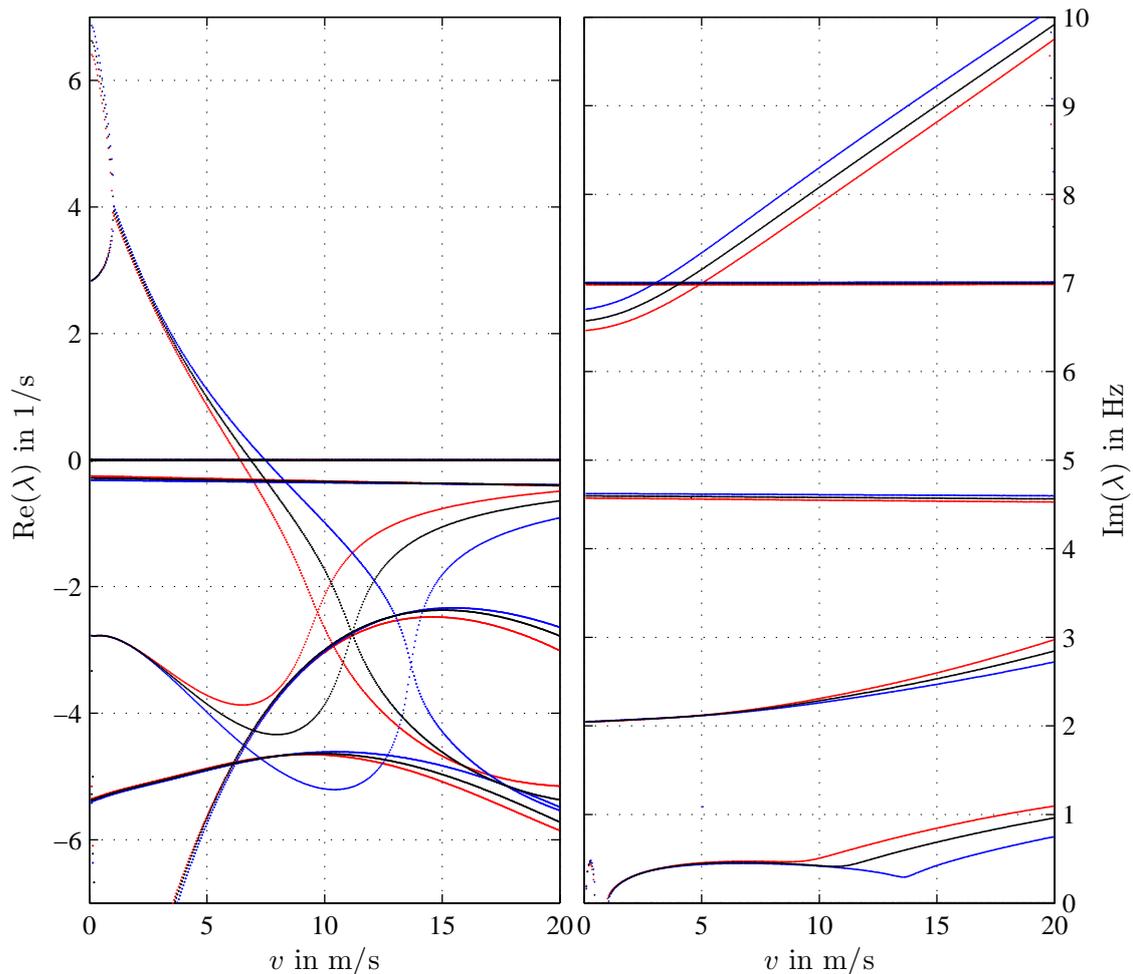


Abbildung 4.5: Variation des polaren Massenträgheitsmomentes der Reifen

Die Lenkgeometrie

Die Lenkgeometrie, charakterisiert durch den Nachlaufwinkel ε , den (konstruktiv festgelegten) Nachlaufversatz c und den vom Aufstandspunkt abhängigen mechanischen Nachlauf t (vgl. Abbildung 3.4), ist für das Stabilitätsverhalten des Fahrrades von größter Bedeutung.

Die bei üblichen Fahrrädern verwendete Lenkgeometrie verursacht ähnlich dem gyrokopischen Effekt ein stabilisierendes Eigenlenkverhalten in die Richtung des Rollens (Fallens). Dieses in der Literatur [25] als „*Steer into the Fall*“ bezeichnete Eigenlenkverhalten resultiert im Wesentlichen aus der Überlagerung dreier Effekte [32], die je nach Auslegung der Lenkgeometrie mehr oder weniger in den Vordergrund rücken:

1. Zum Einen bedingt der, aufgrund des Nachlaufversatzes c üblicherweise vor der Lenkachse befindliche Schwerpunkt der lenkbaren Fahrradkomponenten ein Einlenken des Fahrrades in die Richtung des Rollens.
2. Weiters ruft die Normalkraft im Aufstandspunkt des Vorderreifens zufolge des üblicherweise positiven mechanischen Nachlaufes t (lt. Abbildung 3.4) ein ebenfalls in die Richtung der Neigung weisendes Lenkmoment hervor.
3. Zum Anderen resultiert aus der bei auftretendem Sturz oder Schräglauf übertragenen Seitenkraft ein Moment, das den beiden obigen Effekten entgegen wirkt.

Das durch diese Effekte erzielte Eigenlenkverhalten herkömmlicher Fahrräder kann anhand eines einfachen Versuches veranschaulicht werden: Neigt man ein am Sattel festgehaltenes Fahrrad nach links bzw. rechts, so führt das Fahrrad einen Lenkeinschlag in die jeweilige Richtung der Kippbewegung aus (Steer into the Fall).

In der Folge soll anhand des vorgestellten MKS-Modells gezeigt werden, wie stark sich vermeintlich geringe Änderungen der Lenkgeometrie, unter der Voraussetzung eines konstant gehaltenen Radstandes l , auf die Stabilität des Fahrrades auswirken.

Zunächst soll der Einfluss des Nachlaufwinkels ε auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades untersucht werden. Abbildung 4.6 stellt die Verläufe der charakteristischen Eigenmodes der Ausgangskonfiguration ($\varepsilon = 19^\circ$), jenen bei einer Variation des Nachlaufwinkels um $\pm 3^\circ$ (rot bzw. blau) gegenüber. Dabei verändert sich der mechanische Nachlauf ausgehend von $t = 0.0717m$, bei festgehaltenem Nachlaufversatz c und Radstand l auf $t = 0.0885m$ für $\varepsilon = 22^\circ$ bzw. auf $t = 0.0545m$ für $\varepsilon = 16^\circ$.

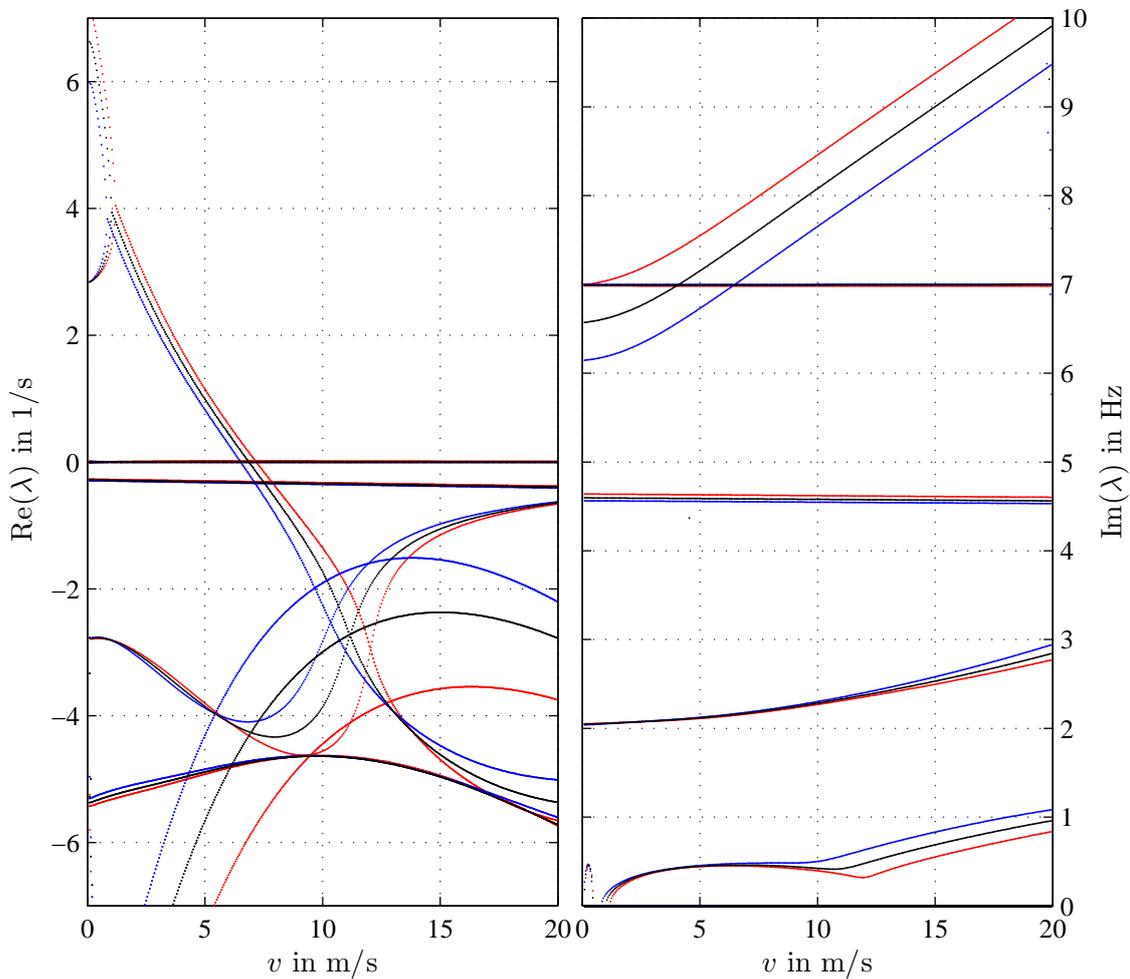


Abbildung 4.6: Variation des Nachlaufwinkels

Es zeigt sich also, dass eine steilere Lenkachse (geringerer Lenkkopfwinkel ε) einerseits zu einer Destabilisierung des Wobble- und Capsize-Modes, andererseits aber infolge einer geringfügigen Stabilisierung des Weave-Modes zu einer Vergrößerung des auto-stabilen Bereiches führt.

Auf analoge Weise wird nun der Einfluss des Nachlaufversatzes c betrachtet. In Abbildung 4.7 wird wieder das Stabilitätsverhalten der Ausgangskonfiguration ($c = 0.04m$) mit jenem bei einer Variation des Nachlaufversatzes um $\pm 0.02m$ (rot bzw. blau) verglichen. Auch daraus resultiert bei konstantem Nachlaufwinkel ε und Radstand l eine Veränderung des mechanischen Nachlaufes t . Für den größeren Nachlaufversatz $c = 0.06m$ ergibt sich $t = 0.0517m$, für $c = 0.02m$ folgt $t = 0.0917m$.

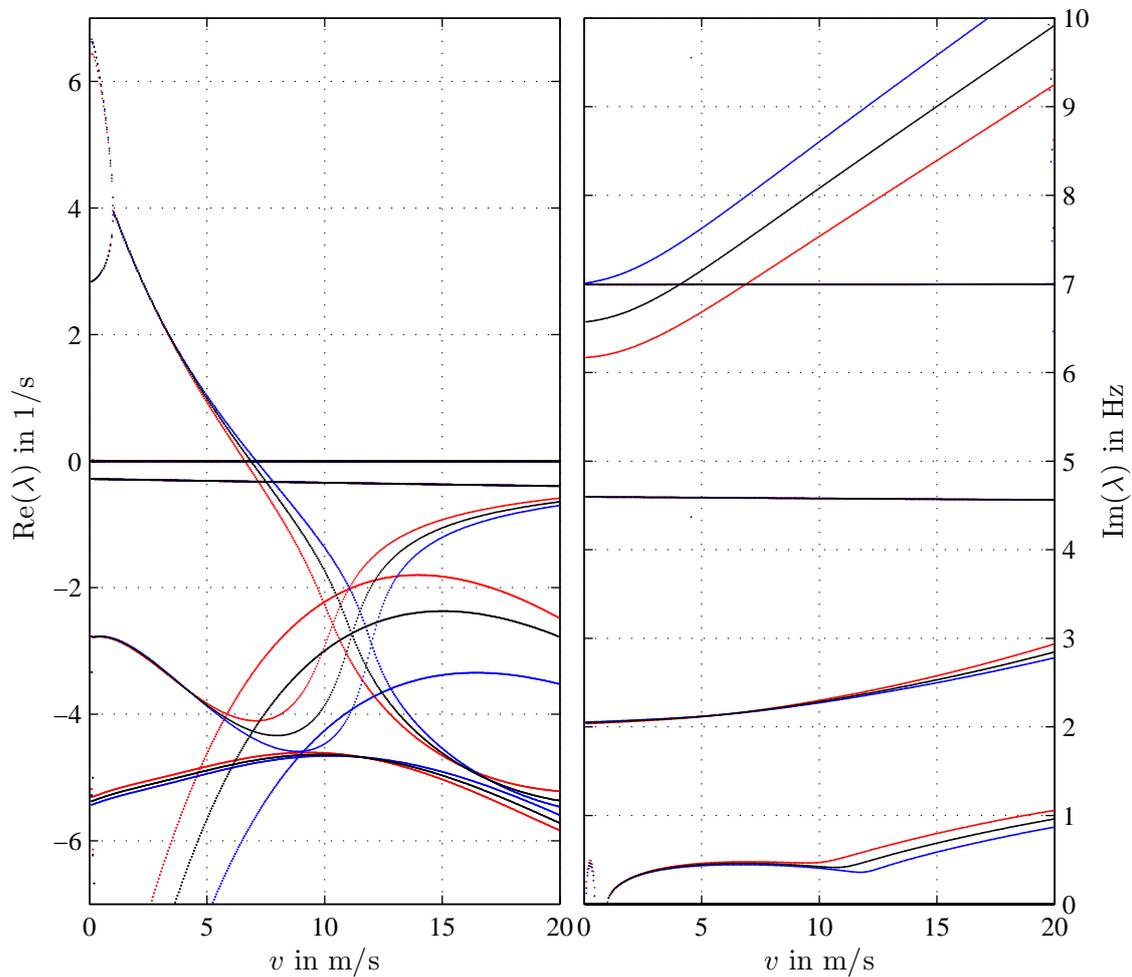


Abbildung 4.7: Variation des Nachlaufversatzes

Für den erhöhten Nachlaufversatz (rot) zeigen sich also ähnliche Verläufe der charakteristischen Eigenmodes wie für einen flacheren Nachlaufwinkel. Ein Vergleich der dabei jeweils auftretenden Werte des mechanischen Nachlaufes lässt die Schlussfolgerung zu, dass vor allem der mechanische Nachlauf t einen entscheidenden Einfluss auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades in unbeschleunigter Geradeausfahrt hat.

Diese Erkenntnis deckt sich prinzipiell mit Aussagen von [24] oder [32]. Auch Jones [44] erkannte bei seinem Versuch ein nicht fahrbares Fahrrad zu konstruieren, dass der mechanische Nachlauf einen ganz wesentlichen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten hat. Erst ein Test-Fahrrad mit negativem Nachlauf (Aufstandspunkt des Vorderrades vor dem Durchstoßpunkt der Lenkachse) zeigte ein „äußerst kniffliges“ Fahrverhalten, und war nur mit entsprechendem Aufwand zu stabilisieren.

Die Nachgiebigkeit des Rahmens

Wie bereits in der Literaturstudie angedeutet, spielt auch die Rahmennachgiebigkeit des Fahrrades eine wesentliche Rolle für dessen Stabilitätsverhalten. Neben der empfindlichen Destabilisierung des Wobble-Modes, die die Modellierung dieser strukturellen Nachgiebigkeit mit sich bringt, wird davon gemäß [6] mitunter auch die Dämpfung des Weave-Modes bei höheren Fahrgeschwindigkeiten beeinflusst. Eine starre Modellierung des Rahmens versteift daher das Modell, wodurch nicht unwesentliche Informationen über das Stabilitätsverhalten des Fahrrades vorenthalten werden.

Die auftretenden Rahmensteifigkeiten und -dämpfungen herkömmlicher Fahrräder variieren je nach Typ relativ stark. Vor allem bei Damenfahrrädern werden von den Rahmenherstellern, aufgrund der fehlenden Mittelstrebe, wesentlich geringere Steifigkeitswerte erzielt. Die Auswirkungen variierender Steifigkeits- und Dämpfungswerte auf das Stabilitätsverhalten des betrachteten Fahrrades zeigt Abbildung 4.8. Dabei wurden ausgehend von den entsprechenden Werten der Ausgangskonfiguration Variationen um $\pm 20\%$ (rot bzw. blau) betrachtet. Daraus ist unmittelbar die sehr deutliche Destabilisierung des Wobble-Modes bei einer Verringerung der Rahmensteifigkeit und -dämpfung (blau) ersichtlich. Die übrigen Eigenmodes zeigen sich dagegen kaum verändert.

Wird nun etwa der Rahmen einer Fahrradkonstruktion mit relativ steilem Nachlaufwinkel ε nicht ausreichend steif ausgebildet, so kann es in einem weiten Geschwindigkeitsbereich zum instabilen Lenkungsflattern und damit zur Überforderung des Fahrers kommen.

Konklusion

Die soeben diskutierten Einflüsse zeigen alle eine nicht unwesentliche Wirkung auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades, weshalb deren Abstimmung zur Erzielung eines gewünschten Fahrverhaltens beachtet werden muss.

Einige Publikationen lehnen sich bezüglich deren Bedeutung allerdings gemäß Schwab [47] zu weit aus dem Fenster, und behaupten, dass der gyroskopische Effekt oder ein positiver mechanischer Nachlauf notwendig für die Autostabilität des Fahrrades seien. Zur Widerlegung dieser „Folklore“ untersuchte er in [47] ein Gegenbeispiel und stellt fest: „...*this bicycle with zero trail and zero gyroscopic effect shows asymptotically stable uncontrolled motion for the broad forward speed range of $2.815 \leq v \leq \infty$ m/s.*“ Diese Erkenntnis bekräftigt wiederum die Aussage Sharp’s [11], wonach vermeintlich einfache Fragen zur Stabilität des Fahrrades nicht generell („*straightforward*“) beantwortet werden können.

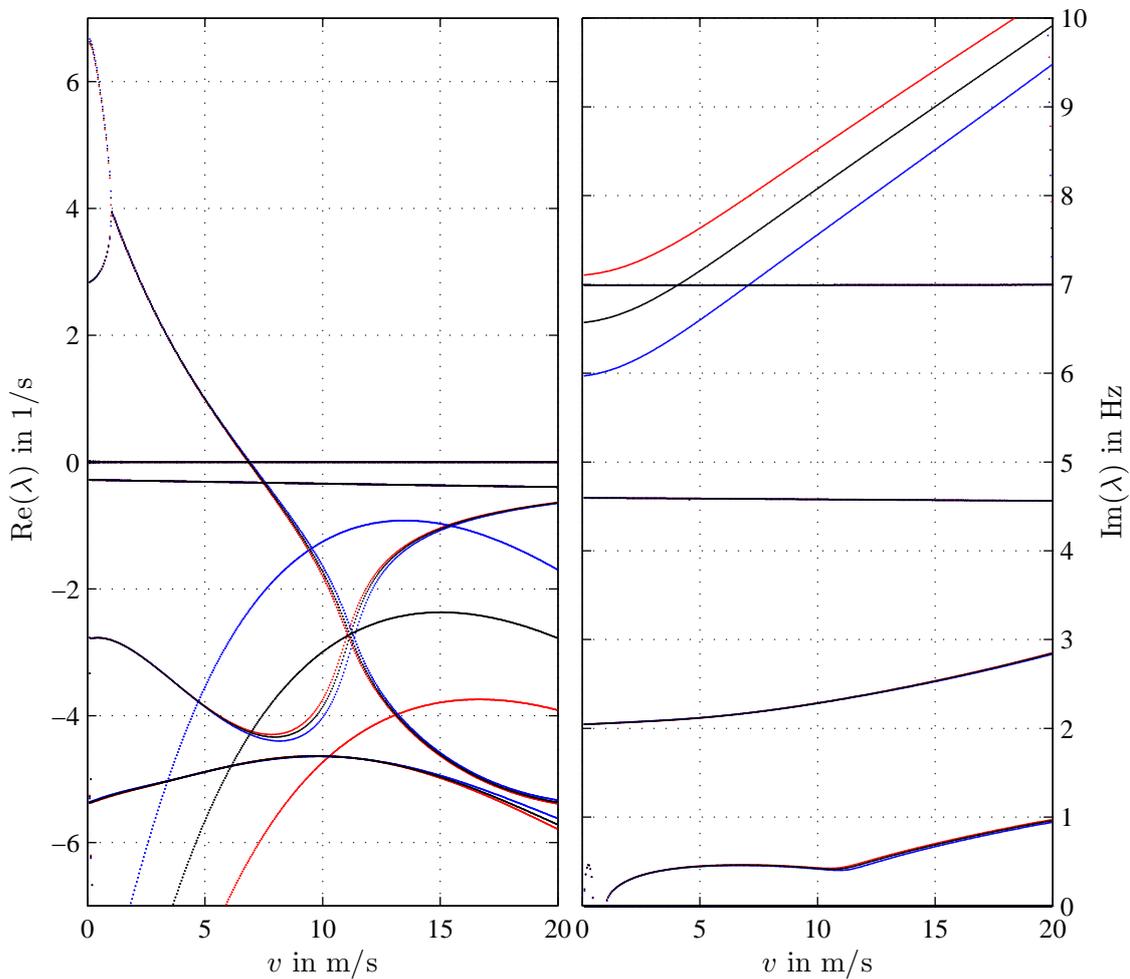


Abbildung 4.8: Variation der Rahmensteifigkeit und -dämpfung

4.4 Stabilität der stationären Kurvenfahrt

Nachdem die Stabilität der unbeschleunigten Geradeausfahrt ausreichend untersucht wurde, befassen wir uns nun mit jener der stationären Kurvenfahrt. Als ungestörter Zustand dient in der Folge also eine, bei vorgegebener Fahrgeschwindigkeit v eindeutig durch den stationären Rollwinkel φ definierte Kurvenfahrt. Dabei ist wieder nur die Autostabilität des Fahrrades von Interesse, weshalb der Fahrer als passiv angenommen wird.

Gemäß Abbildung 4.3 besitzt das betrachtete Fahrrad in Ausgangskonfiguration einen bei rund 7 m/s beginnenden autostabilen Geschwindigkeitsbereich. Daher ist das Erreichen einer stationären Kurvenfahrt ohne Fahrereingriff erst ab dieser kritischen, durch den Nulldurchgang des Weave-Modes charakterisierten Geschwindigkeit zu erwarten.

Folglich ist der Fahrgeschwindigkeitsbereich der weiteren Stabilitätsanalyse eingegrenzt. Aufgrund des verwendeten linearen Reifenmodells (vgl. Abschnitt 3.2) muss beachtet werden, dass mit zunehmendem Rollwinkel ein immer größer werdender, durch die Linearisierung der Reifenkräfte auftretender Modellierungsfehler entsteht. Daher wird versucht, mit Hilfe sich auf Kurvenfahrten mit relativ geringen stationären Rollwinkeln beschränkender Stabilitätsuntersuchungen, das tendenzielle Stabilitätsverhalten des Fahrrades bei der stationären Kurvenfahrt aufzuzeigen.

In Abbildung 4.3 wird etwa das Stabilitätsverhalten des Fahrrades bei der Geradeausfahrt, jenem bei der stationären Kurvenfahrt mit einem Rollwinkel von $\varphi = 10^\circ$ (rot) gegenübergestellt. Daraus ist ersichtlich, dass sich sowohl der Weave- als auch der Wobble-Mode geringfügig stabilisieren, während das Fahrrad im Capsize-Mode praktisch über den gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich labiler wird.

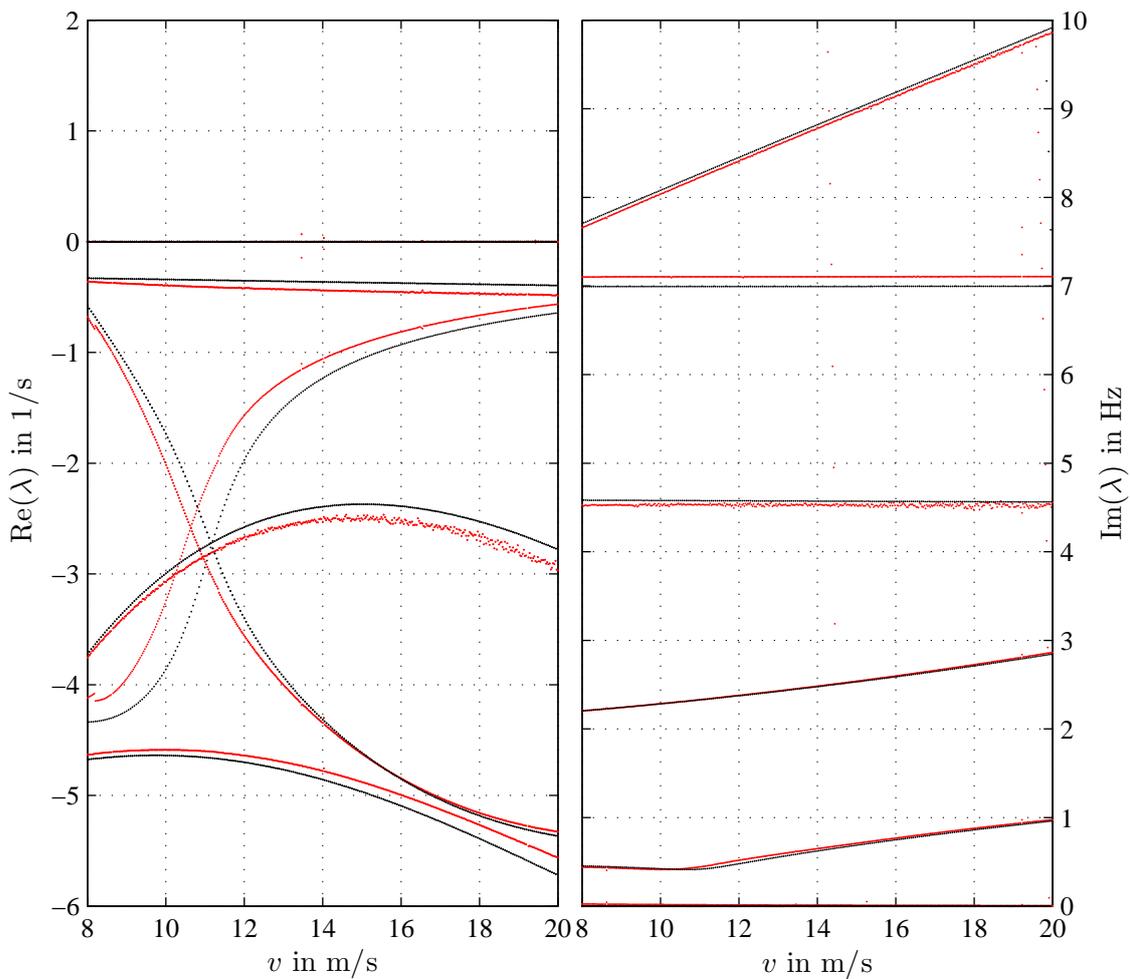


Abbildung 4.9: Vergleich Geradeausfahrt vs. stationäre Kurvenfahrt

Diese tendenziellen Verschiebungen im Stabilitätsverhalten der stationären Kurvenfahrt zeigen sich auch in Abbildung 4.10. Dabei wurden die entsprechenden Eigenmodes für eine Fahrgeschwindigkeit von $v = 10\text{m/s}$ über dem (jeweils) stationären Rollwinkel φ aufgetragen.

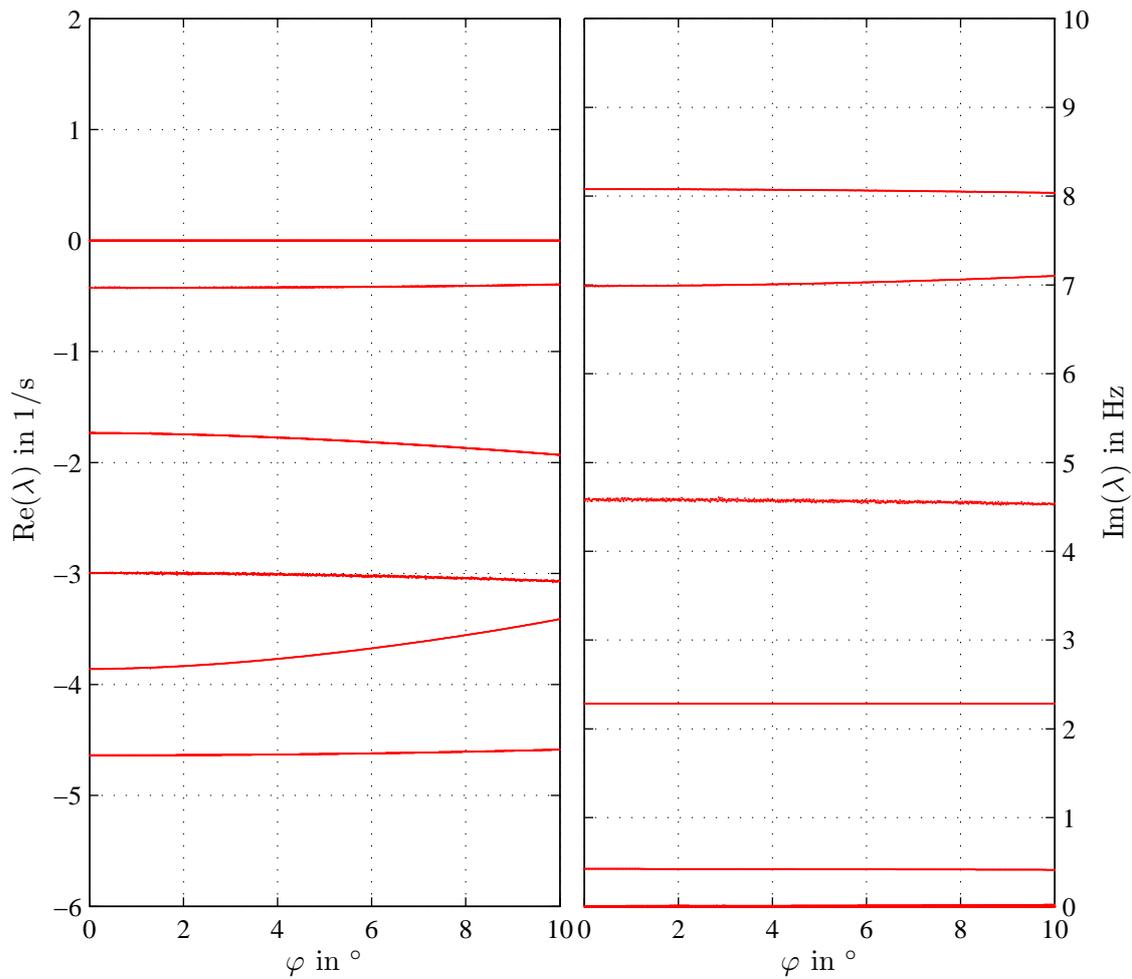


Abbildung 4.10: Stabilität der stationären Kurvenfahrt über dem Rollwinkel

Analog zu den Ergebnissen aus [27] oder [48] ist die wesentliche Erkenntnis derartiger Stabilitätsuntersuchungen, dass mit zunehmendem Rollwinkel die Destabilisierung des Capsize-Modes dominiert. Dies deckt sich mit den praktischen Erfahrungen, wonach ein nur hinreichend groß gewählter Rollwinkel (enger Kurvenradius) bei der Kurvenfahrt zur Capsize-Instabilität des Fahrrades (zum Kentern) führt.

Kapitel 5

Die Querdynamik des Fahrrades

Erst das soeben behandelte Stabilitätsverhalten des Fahrrades ermöglicht nun eine substantielle Interpretation entsprechender querdynamischer Analysen. Analog zu den Stabilitätsbetrachtungen der stationären Kurvenfahrt beschränken sich die folgend betrachteten querdynamischen Untersuchungen, aufgrund des verwendeten linearen Reifenmodells, auf Fahrmanöver mit maximalen Rollwinkeln von etwa $\varphi = 10^\circ$.

Dabei soll zunächst auf die stationäre Kurvenfahrt des Fahrrades, für die in Abschnitt 4.4 bereits Stabilitätsaussagen getroffen wurden, eingegangen, und damit auf das Handling-Verhalten des Fahrrades nach [31] geschlossen werden. Danach wird die instationäre Kurvenfahrt (Kurveneinfahrt) untersucht, und der dabei zufolge der Fahreroberkörperneigung erzielbare Lenkeffekt diskutiert. Der letzte Abschnitt befasst sich mit dem Übertragungsverhalten des Fahrrades.

5.1 Die stationäre Kurvenfahrt

Lenkt man ein Fahrrad bei konstant gehaltener Longitudinalgeschwindigkeit v zufolge der Vorgabe eines Lenkmomentes M_δ in eine Kurve ein, so stellt sich nach dem Abklingen entsprechender, durch das Einlenken verursachter Einschwingvorgänge (vgl. Abschnitt 5.2) ein Stationärzustand ein. Dieser sinngemäß als stationäre Kurvenfahrt bezeichnete Zustand (Index 0) kann durch einen konstanten Kurvenradius ρ sowie durch konstante (stationäre) fahrdynamische Größen (Querbeschleunigung $a_{y,0}$, Rollwinkel φ_0 , sowie Schräglaufwinkeln $\alpha_{V,0}$ und $\alpha_{H,0}$) charakterisiert werden.

Zur Darstellung des sich jeweils bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten v und Lenkmomenten M_δ einstellenden Stationärzustandes finden in der Literatur (etwa in [31] oder [48]) so genannte Handling-Diagramme Anwendung. Daraus können die jeweiligen, eine entsprechende stationäre Kurvenfahrt charakterisierenden Größen direkt abgelesen werden. Im Handling-Diagramm des MKS-Fahrradmodells (Abbildung 5.1) wurden die entsprechenden Größen etwa für die Longitudinalgeschwindigkeiten von $v = 3\text{m/s}$ (Volllinien), $v = 5\text{m/s}$ (Strichlinien) und $v = 10\text{m/s}$ (Strichpunktlinien) über der normalisierten Querbeschleunigung $a_{y,0}/g$ aufgetragen.

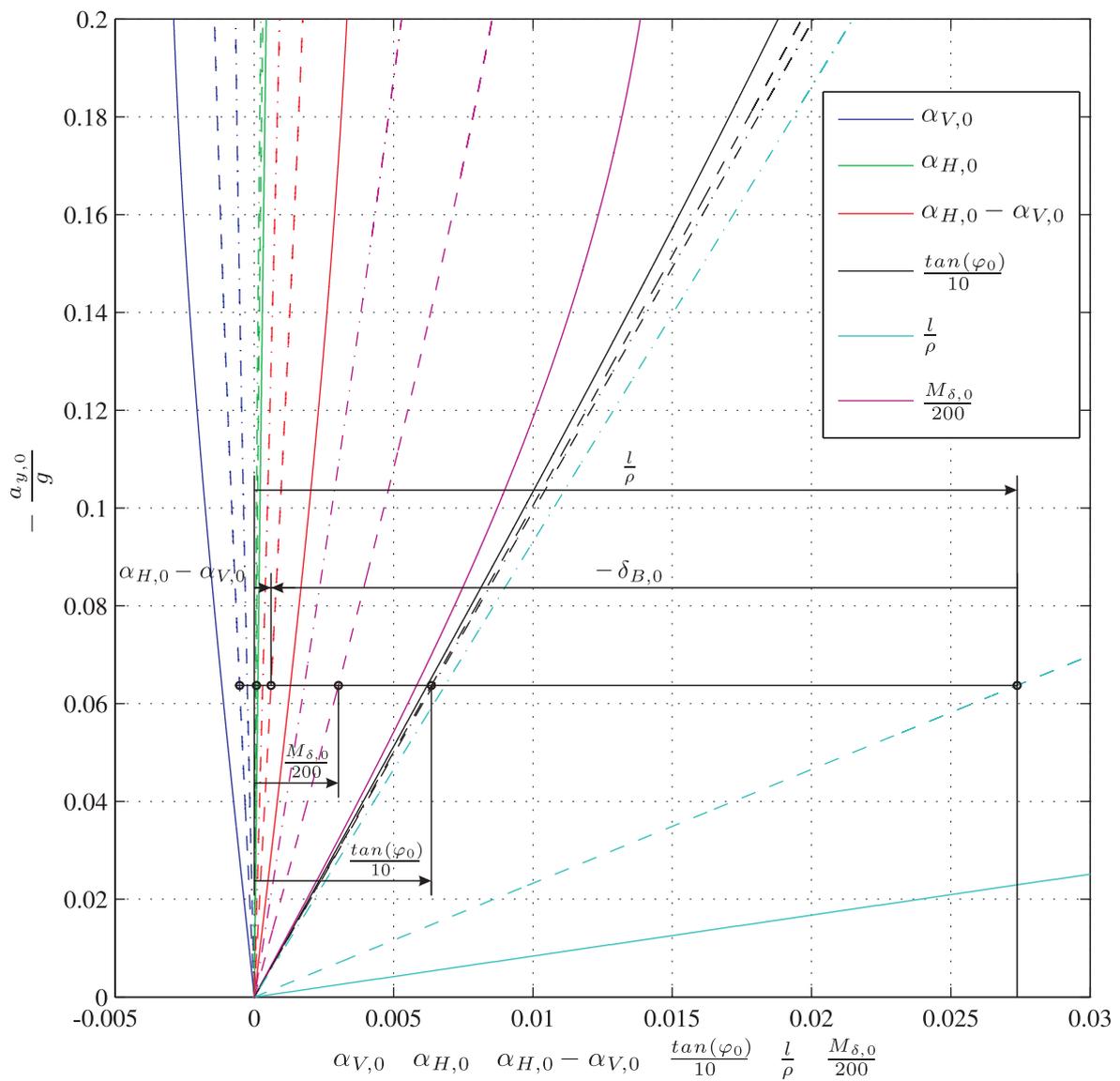


Abbildung 5.1: Handling-Diagramm des Fahrradmodells

In Abbildung 5.1 ist zur leichteren Interpretation des eine Fülle an Informationen beinhaltenden Handling-Diagramms beispielhaft die stationäre Kurvenfahrt einer Rechtskurve mit Radius $\rho = 40m$ bei einer Fahrgeschwindigkeit von $v = 5m/s$ eingetragen. Mit dem sich für die untersuchte stationäre Kurvenfahrt ergebenden Verhältnis aus Radstand l zu Kurvenradius ρ und der vorgegebenen Longitudinalgeschwindigkeit v folgt aus Abbildung 5.1 unmittelbar die dabei auftretende stationäre Querbeschleunigung im Referenzpunkt A zu $a_{y,0} = -0.625m/s^2$. Damit kann wiederum der sich einstellende stationäre Rollwinkel $\varphi_0 = 0.0635rad = 3.64^\circ$, das notwendige stationäre Lenkmoment $M_{\delta_0} = 0.512Nm$ sowie die jeweiligen stationären Schräglaufwinkeln $\alpha_{V,0} = -0.000527rad = -0.03^\circ$ und $\alpha_{H,0} = 0.0000713rad = 0.004^\circ$ des Vorder- bzw. Hinterreifens, jeweils unter Beachtung der vorgegebenen Fahrgeschwindigkeit v (Strichlinien) abgelesen werden. Des Weiteren erlaubt die vereinfachte (approximierte) Relation $-\delta_{B,0} = l/\rho + \alpha_{V,0} - \alpha_{H,0}$ gemäß [31] eine näherungsweise Bestimmung des stationären Bodenlenkwinkels¹ (vgl. Abbildung 5.1) zu $\delta_{B,0} = -0.0268rad = -1.53^\circ$. Aus den abgelesenen Werten des beschriebenen Beispiels fällt auf, dass das Durchfahren einer stationären Rechtskurve (positiver Rollwinkel, negativer Bodenlenkwinkel nach rechts) ein positives Lenkmoment (nach links) erfordert. Dies ist auf den bereits in der Literaturstudie angesprochenen Effekt des „Gegenlenkens“ (*Countersteering*) zurückzuführen, welcher detailliert bei der Analyse der instationären Kurveneinfahrt (Abschnitt 5.2) diskutiert wird.

Wie der Name des Handling-Diagramms vermuten lässt, können damit nicht nur Zustände der stationären Kurvenfahrt abgelesen, sondern auch Rückschlüsse über das Handling-Verhalten des Fahrrades gewonnen werden, [31]. Maßgeblich dafür zeigt sich der Verlauf der so genannten Handling-Kurve, die jener der Schräglaufwinkeldifferenz $\alpha_{H,0} - \alpha_{V,0}$ (in Abbildung 5.1 rot dargestellt) entspricht. So liegt gemäß [31] ein untersteuerndes Fahrverhalten vor, wenn die Handling-Kurve im betrachteten Punkt des Handling-Diagramms eine negative Steigung aufweist. Besitzt diese dagegen, wie im gesamten betrachteten Querbeschleunigungsbereich des MKS-Fahrradmodells, eine positive erste Ableitung, so wird in [31] von einem übersteuernden Handling-Verhalten gesprochen.

¹Der Bodenlenkwinkel δ_B stellt den Winkel zwischen x-Achse des Referenzkoordinatensystems und der Schnittlinie aus Vorderradsymmetrie- und Fahrbahnebene dar.

5.2 Die instationäre Kurvenfahrt

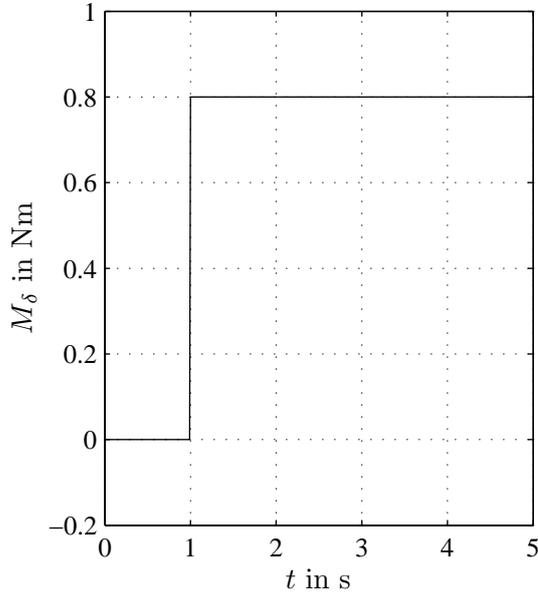
Die ersten Einschätzungen über das Lenkverhalten eines Fahrrades bei der (instationären) Einfahrt in eine Kurve gehen auf das 19. Jahrhundert zurück. Archibald Sharp [49] formulierte dieses 1896 etwa folgendermaßen: „...to avoid an object it is often necessary to steer for a small fraction of a second towards it, then steer away from it; this is probably the most difficult operation the beginner has to master...“

Derart historische, eher auf intuitiven Eindrücken basierende Darstellungen sollen in der Folge mit Hilfe dynamischer Analysen am MKS-Fahrradmodell präzisiert werden. Dabei muss zwischen dem Lenkverhalten des Fahrrades innerhalb bzw. außerhalb des autostabilen Geschwindigkeitsbereiches unterschieden werden, weshalb nachfolgend für jeden der beiden Fälle die instationäre Kurvenfahrt exemplarisch für eine bestimmte Longitudinalgeschwindigkeit v untersucht wird. Danach wird auf den Lenkeffekt zufolge eines durch die Fahreroberkörperneigung aufgebrauchten Rollmomentes M_{φ_F} kurz eingegangen.

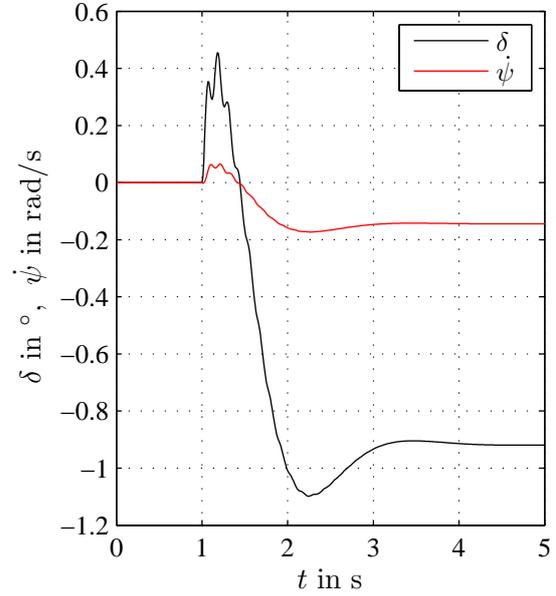
5.2.1 Autostabiler Geschwindigkeitsbereich

Gemäß Abschnitt 4.4 stabilisiert sich das Fahrrad für Fahrgeschwindigkeiten innerhalb des autostabilen Geschwindigkeitsbereiches auch bei Kurvenfahrten mit Rollwinkeln bis zu $\varphi = 10^\circ$ selbstständig. Daher ist im betreffenden Geschwindigkeitsbereich kein regelnder Fahrereingriff zur Erreichung einer stationären Kurvenfahrt notwendig, und die Kurvenfahrt wird durch einen einfachen Lenkmomentsprung eingeleitet.

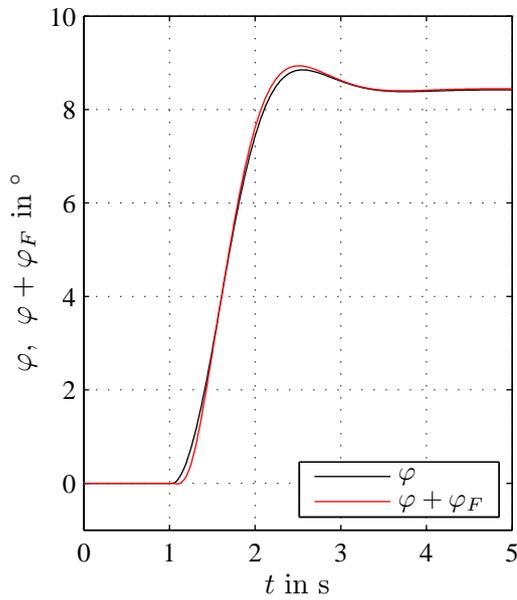
Die dynamische Systemantwort des Fahrradmodells auf einen derartigen Lenkmomentsprung von $M_\delta = 0.8Nm$ im Gegenuhrzeigersinn (von oben betrachtet) bei einer Longitudinalgeschwindigkeit von $v = 10m/s$ ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Dabei zeigen sich äußerst interessante Ergebnisse. Zuzufolge des positiven Lenkmomentsprunges nach links entsteht zunächst auch ein positiver Lenkwinkel δ sowie eine positive Gierwinkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ (nach links). Auch der Ursprung des Referenzkoordinatensystems A bewegt sich gemäß Abbildung 5.2(d) vorerst nach links. Nach etwa $1.4s$ wechseln jedoch sowohl der Lenkwinkel, also auch die Gierrate ihre Vorzeichen, während sich der Referenzpunkt A erst nach ungefähr $2s$ nach rechts bewegt. Aus Abbildung 5.2(c) ist zu sehen, dass sich das Fahrrad währenddessen - unmittelbar dem Lenkmomentsprung folgend - nach rechts neigt, also eine Rechtskurve einleitet. Das beschriebene inverse, so genannte Nichtphasenminimum-Verhalten ist gemäß [24] typisch für Systeme mit einer positiven Nullstelle (*nonminimum-phase zero*) in den entsprechenden Übertragungs-



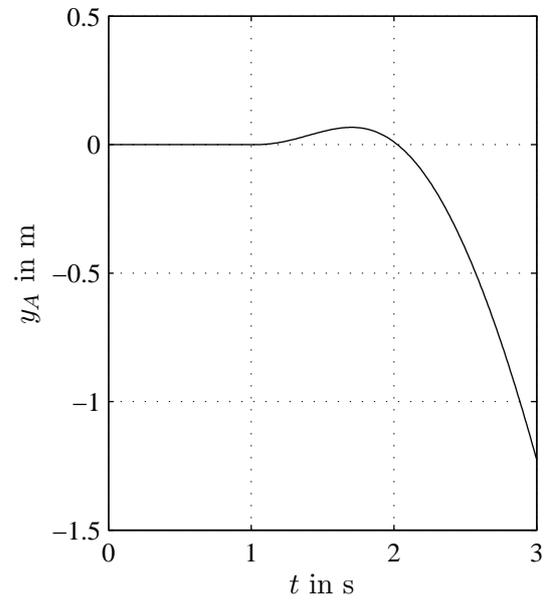
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 5.2: Instationäre Kurvenfahrt, autostabiler Geschwindigkeitsbereich:
 (a) Lenkmoment M_δ , (b) Lenkwinkel δ und Gierwinkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$, (c) Rollwinkel φ und Gesamtrollwinkel des Fahreroberkörpers $\varphi + \varphi_F$, (d) y-Komponente der Fahrtrajektorie y_A .

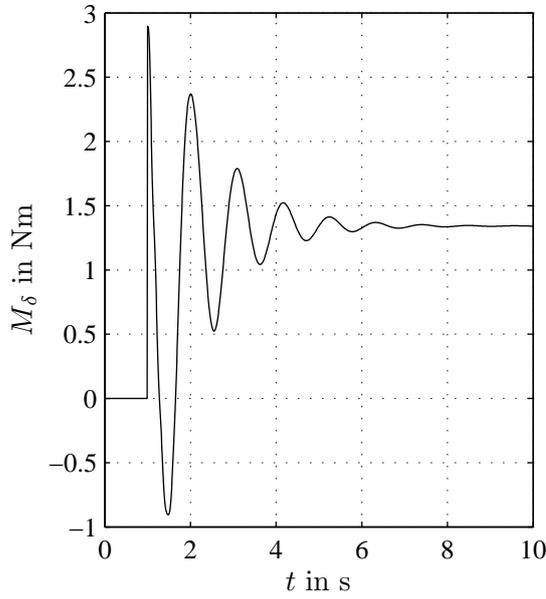
funktionen, und deckt sich mit der Einschätzung Archibald Sharp's. Auf diesbezügliche Details wird etwa auf [50] verwiesen. Die in der Systemantwort auftretende dominierende Oszillation besitzt eine Frequenz von zirka $0.42Hz$ und kann mit dem Weave-Mode des Fahrrades (vgl. Abbildung 4.3) assoziiert werden. In den Verläufen des Lenkwinkels und der Gierrate ist zusätzlich eine überlagerte höherfrequente Schwingung zu erkennen, die dem Wobble-Mode zugeordnet werden kann.

Offensichtlich muss also der Fahrer ein Lenkmoment nach links aufbringen, um eine Rollbewegung des Fahrrades nach rechts, und damit das Einleiten einer Rechtskurve zu erreichen. Diese Eigenschaft des Fahrrades, sich anscheinend in die „falsche“ Richtung zu neigen, wird wie erwähnt in der Literatur häufig als *Countersteering* bezeichnet. Die meisten Fahrradfahrer führen intuitiv genau dieses Countersteering zur Einleitung einer Kurvenfahrt aus. Um diesen Effekt auch bewusst wahrzunehmen, reicht ein einfacher Versuch aus: Nimmt man bei einer zügigen Fahrt mit dem Fahrrad die linke Hand vom Lenker, und drückt mit der offenen Handfläche der rechten Hand gegen die Lenkstange, so kann aufgrund der offenen rechten Hand nur ein Lenkmoment nach links aufgebracht werden, weshalb das Fahrrad nach rechts abbiegen wird.

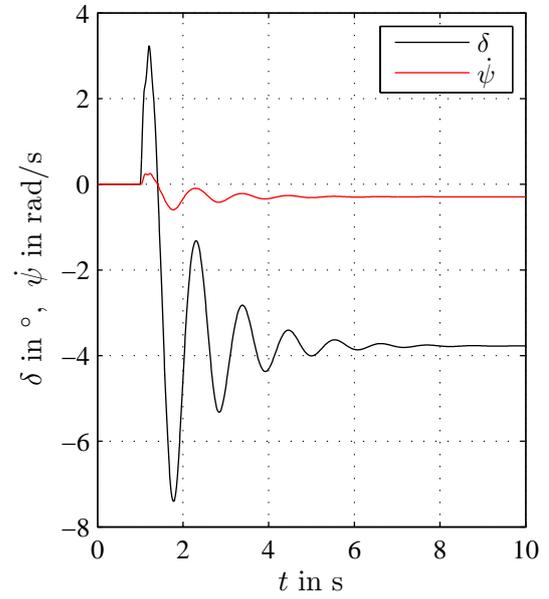
5.2.2 Instabiler Geschwindigkeitsbereich

Unterhalb des autostabilen Geschwindigkeitsbereiches ist der regelnde (aktive) Fahrereingriff notwendig, um das Fahrrad in der Kurve zu stabilisieren. Abbildung 5.3 zeigt die Simulationsergebnisse einer instationären Kurveneinfahrt bei einer Longitudinalgeschwindigkeit von $v = 5m/s$, also im instabilen Bereich. Dabei wurde der Sollrollwinkel φ_{Soll} derart vorgegeben, dass er näherungsweise mit dem stationären Rollwinkel der vorhergehenden Untersuchung (Abbildung 5.2) übereinstimmt.

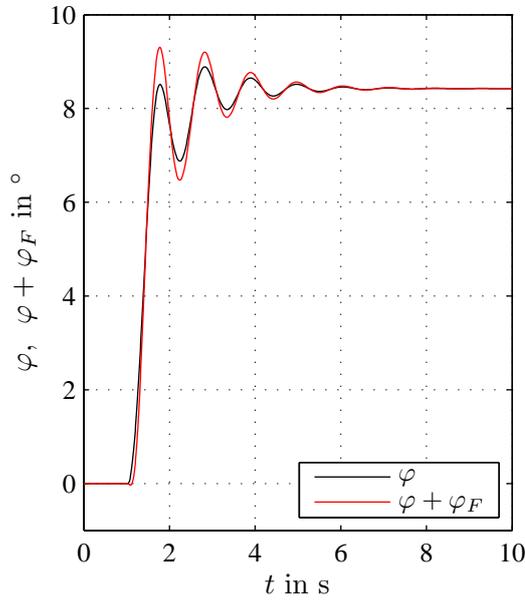
Gemäß Abbildung 5.3(a) erfordert die Stabilisierung der beim offenen Regelkreis (passiver Fahrer) auftretenden Weave-Instabilität (vgl. Abbildung 4.3) eine dem Lenkmomentsprung überlagerte Oszillation. Das zur Stabilisierung aufgebrauchte Lenkmoment überschreitet dabei weder betragsmäßig, noch hinsichtlich des Frequenzspektrums das Leistungsvermögen eines realen Fahrers. Die auftretende Oszillation kann dem, zufolge des regelnden Fahrereingriffes stabilisierten bzw. hinreichend gedämpften Weave-Mode des geschlossenen Regelkreises zugeordnet werden. Auch in den Verläufen des Lenkwinkels δ , der Gierrate $\dot{\psi}$ und des Rollwinkels φ (vgl. Abbildungen 5.3(b) und (c)) ist dieser sehr schwach gedämpfte Mode ersichtlich. Aufgrund der geringen Dämpfung dieses Eigenmodes bedarf es zum Erreichen einer stationären Kurvenfahrt auch einer entsprechend langen Anregelzeit. Die Lateralbewegung des Referenzpunktes y_A



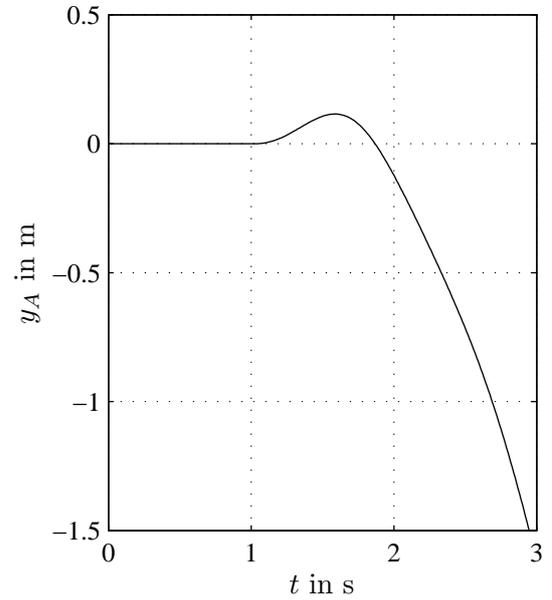
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 5.3: Instationäre Kurvenfahrt, instabiler Geschwindigkeitsbereich:

(a) Lenkmoment M_δ , (b) Lenkwinkel δ und Gierwinkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$, (c) Rollwinkel φ und Gesamtrollwinkel des Fahreroberkörpers $\varphi + \varphi_F$, (d) y-Komponente der Fahrtrajektorie y_A .

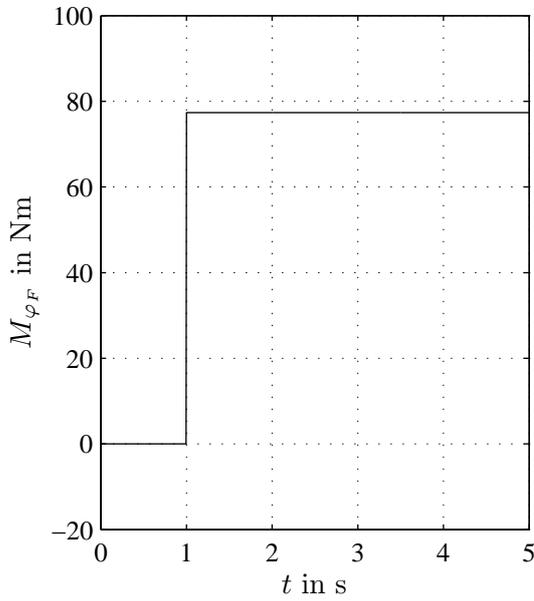
ist gemäß Abbildungen 5.3(d) im Wesentlichen vergleichbar mit jener im autostabilen Geschwindigkeitsbereich.

Das zur Ausführung einer stationären Kurvenfahrt mit einem Rollwinkel von $\varphi_0 = 8.42^\circ$ aufzubringende stationäre Lenkmoment von $M_{\delta,0} = 1.34Nm$ zeigt sich gegenüber jenem im autostabilen Geschwindigkeitsbereich bei $v = 10m/s$ um rund 70% erhöht. Diese Ergebnisse sind auch unmittelbar aus dem Handling-Diagramm (Abbildung 5.1) ablesbar.

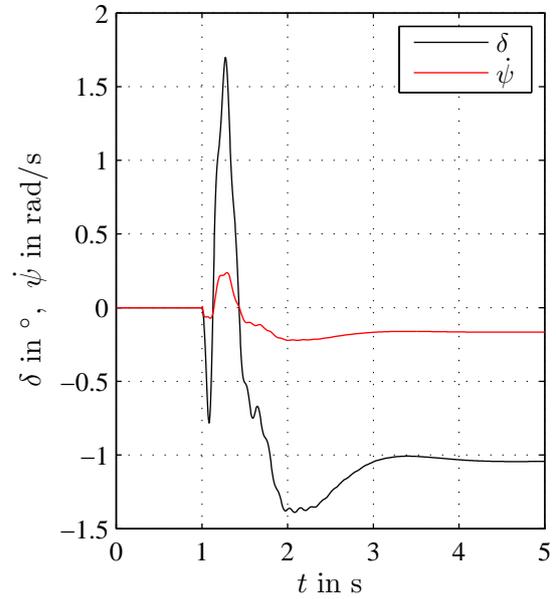
5.2.3 Lenkeffekt zufolge Fahreroberkörperneigung

Eine alternative Möglichkeit zur Einleitung einer Kurvenfahrt stellt die Aufbringung eines Rollmomentes M_{φ_F} über die Rumpfmuskulatur, und die damit verbundene Neigung des Fahreroberkörpers φ_F dar. Der dadurch erzielbare Lenkeffekt wird analog zu [31] durch die Aufbringung eines Rollmomentsprunges untersucht.

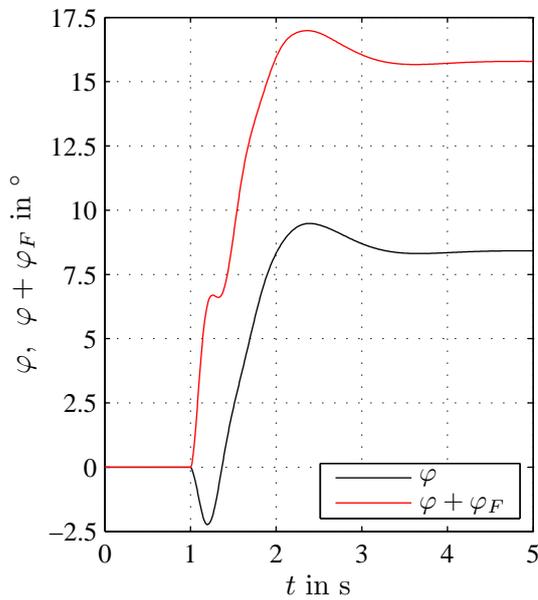
In Abbildung 5.4 ist die dynamische Systemantwort auf einen positiven Rollmomentsprung (Oberkörperneigung nach rechts) dargestellt. Um das entsprechende Systemverhalten mit jenem zufolge eines Lenkmomentsprunges (Abbildung 5.2) vergleichen zu können, wurde auch hier die Fahrgeschwindigkeit zu $v = 10m/s$ vorgegeben, und ein stationärer Rollwinkel von $\varphi_0 = 8.42^\circ$ betrachtet. Gemäß Abbildung 5.4(a) ist dazu ein Rollmoment von $M_{\varphi_F} = 77.4Nm$, also etwa das Hundertfache des benötigten Lenkmomentes erforderlich. Aus Abbildung 5.4(c) ist ersichtlich, dass zufolge des positiven Rollmomentsprunges zunächst ein negativer Rollwinkel φ hervorgerufen wird, was auf das (innere) in Gegenrichtung wirkende Rollmoment (Reaktionsmoment) zurückzuführen ist. Der Rollwinkel baut sich also erst nach einer kurzen Phase in die „richtige“ Richtung (nach rechts) auf, während der Gesamrollwinkel des Fahreroberkörpers $\varphi + \varphi_F$ unmittelbar nach dem Sprung positiv wird. Gemäß Abbildung 5.4(b) nehmen infolge dieses sprungförmigen Reaktionsmomentes zunächst auch der Lenkwinkel δ , und damit die Gierrate $\dot{\psi}$ negative Werte an. Die danach ersichtlichen Peaks und Vorzeichenwechsel treten gemäß [31] zufolge des Eigenlenkverhaltens des Fahrrades (*Steer into the Fall*) auf. Die stationäre Kurvenfahrt wird nach überlagerten Oszillationen, korrespondierend zu Weave-, Wobble- sowie Lean-Mode erreicht. Abbildung 5.4(d) zeigt, dass sich auch der Referenzpunkt A in der ersten Phase (kaum merklich) nach rechts bewegt. Nachdem er anschließend zufolge des Lenkwinkel- bzw. Gierratenverlaufes das Vorzeichen wechselt, bewegt sich das Fahrrad erst nach zirka 2.1s (etwa 0.1s später als beim Lenkmomentsprung) endgültig nach rechts. Das beschriebene dynamische Systemverhalten tritt typischerweise bei Nichtphasenminimum-Systemen mit zwei positiven Nullstellen in den entsprechenden Übertragungsfunktionen auf, [50].



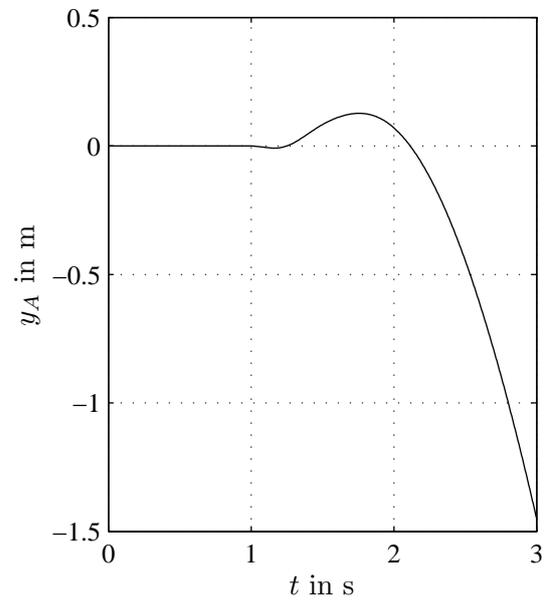
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 5.4: Instationäre Kurvenfahrt, Lenkeffekt zufolge Fahreroberkörperneigung: (a) Rollmoment M_{φ_F} , (b) Lenkwinkel δ und Gierwinkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$, (c) Rollwinkel φ und Gesamtrollwinkel des Fahreroberkörpers $\varphi + \varphi_F$, (d) y-Komponente der Fahrtrajektorie y_A .

Es zeigt sich also, dass zur Einleitung einer Rechtskurve ein Rollmoment M_{φ_F} nach rechts aufzubringen ist, und die sich einstellende Fahreroberkörperneigung φ_F das System im (stationären) Gleichgewicht hält.

Die jeweiligen Simulationsergebnisse (Abbildung 5.2 bzw. 5.4) der instationären Kurveneinfahrt zufolge Lenk- bzw. Rollmomentsprüngen ließen nun für das jeweils zugrunde liegende Fahrmanöver (Fahrgeschwindigkeit $v = 10\text{m/s}$ und stationären Rollwinkel $\varphi_0 = 8.42^\circ$) den Schluss zu, dass das Fahrrad näherungsweise identisch auf die beiden Fahrereingriffe anspricht. Um eine generellere Vorstellung vom querdynamischen Ansprechverhalten (der Manövrierbarkeit) des Fahrrades bei Lenk- bzw. Rollmomentvorgaben zu erhalten, werden folgend die Abweichungen der entsprechenden Übertragungsfunktionen analysiert.

5.3 Das Übertragungsverhalten des Fahrrades

Mit Hilfe von Untersuchungen zum Übertragungsverhalten des Fahrrades mit passivem Fahrer (offener Regelkreis) kann auf dessen Manövrierbarkeit¹, und damit wiederum auf die Anforderungen an den Fahrer bei der Durchführung eines Fahrmanövers geschlossen werden, [51]. Die Beurteilung des Übertragungsverhaltens erfolgt dabei über entsprechende, das Systemverhalten charakterisierende Übertragungsfunktionen. Derartige Funktionen beschreiben, basierend auf entsprechenden Differentialgleichungen, das dynamische Verhalten einer Ausgangsgröße zufolge eines vorgegebenen Eingangssignals. Zur Einschätzung der Fahreranforderungen bei der Manövrierung mittels Lenkmomentvorgaben werden etwa die Übertragungsfunktionen

- H_{φ, M_δ} zwischen Rollwinkel φ und Lenkmoment M_δ ,
- $H_{\dot{\psi}, M_\delta}$ zwischen Gierwinkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ und Lenkmoment M_δ und
- H_{δ, M_δ} zwischen Lenkwinkel δ und Lenkmoment M_δ

von Interesse sein.

Bevor in der Folge das unterschiedliche Übertragungsverhalten des Fahrrades bei der Lenk- bzw. Rollmomentvorgabe diskutiert werden kann, muss zunächst auf die Bestimmung der entsprechenden Übertragungsfunktionen über Slalomfahrmanöver eingegangen werden.

¹In der Literatur auch als *Handling-Quality* oder schlicht *Handling* bezeichnet.

5.3.1 Das Slalomfahrmanöver

Während für hinreichend einfache Fahrradmodelle (*Benchmark-Model*) die obigen charakteristischen Übertragungsfunktionen analytisch ([6], [24] oder [51]) ermittelt werden können, wäre für das in dieser Arbeit verwendete Mehrkörpersystemmodell deren symbolische Bestimmung mit einem ganz erheblichen Rechenaufwand verbunden. Alternativ dazu können gemäß [51] die jeweiligen Übertragungsfunktionen mit Hilfe entsprechender Slalomfahrmanöver unterschiedlicher Frequenzen charakterisiert, und in Bode-Diagrammen dargestellt werden.

In Abbildung 5.5 ist etwa das dynamische Systemverhalten bei einem Slalomfahrmanöver zufolge einer sinusförmigen Lenkmomentvorgabe M_δ mit einer Frequenz von $f_{M_\delta} = 0.1Hz$ dargestellt:

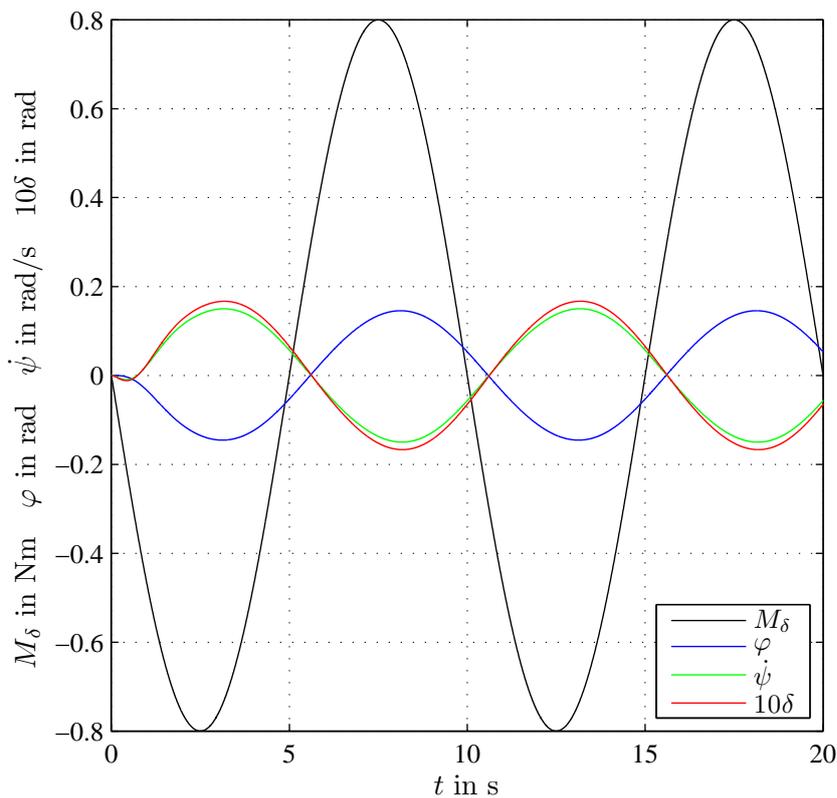


Abbildung 5.5: Slalomfahrmanöver

Dabei zeigt sich, dass nach einer kurzen Einschwingphase auch der Rollwinkel φ , die Gierrate $\dot{\psi}$ und der Lenkwinkel δ harmonische Verläufe annehmen. In diesem „eingeschwungenen Zustand“ können nun die Amplitudenverhältnisse und Phasenverschie-

bungen der jeweiligen Übertragungsfunktionen für die vorgegebene Frequenz bestimmt, und damit je ein Punkt in den entsprechenden Bode-Diagrammen konstruiert werden. Wiederholt man nun diese Vorgehensweise für unterschiedliche Frequenzen f_{M_δ} , so können die Übertragungsfunktionen H_{φ, M_δ} , $H_{\dot{\psi}, M_\delta}$ und H_{δ, M_δ} vollständig über deren Bode-Diagramme beschrieben werden.

5.3.2 Übertragungsfunktionen

In Abbildung 5.6 sind die Bode-Diagramme der jeweiligen Übertragungsfunktionen H_{φ, M_δ} , $H_{\dot{\psi}, M_\delta}$ und H_{δ, M_δ} für eine Fahrgeschwindigkeit von $v = 10m/s$ dargestellt. Der dabei betrachtete Frequenzbereich orientiert sich an den gemäß [17] für den durchschnittlichen Fahrer aufbringbaren Lenkmomentfrequenzen.

Analog zu den Beobachtungen bei der instationären Kurveneinfahrt (Abschnitt 5.2) ist aus dem Amplitudenverhältnis von H_{φ, M_δ} zu erkennen, dass ein positives Lenkmoment M_δ (nach links) stets einen positiven Rollwinkel φ (Neigung nach rechts) bewirkt. Die Gierwinkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ und der Lenkwinkel δ nehmen dabei jeweils negative Werte an, weshalb auch die entsprechenden Übertragungsfunktionen negativ sind. Die Amplitudenverhältnisse zeigen ein mehr oder weniger stark ausgeprägtes Maximum bei etwa $0.5Hz$, welches dem Weave-Eigenmode (vgl. Abbildung 4.3) zugeordnet werden kann. Bei dieser Frequenz muss also für ein entsprechendes Fahrmanöver ein relativ geringes Lenkmoment aufgebracht werden, was gemäß [51] vom Fahrer als „besseres“ Handling-Verhalten empfunden wird. Ab dieser Frequenz nimmt das Amplitudenverhältnis aller Übertragungsfunktionen relativ stark (logarithmischer Maßstab) ab, bis das Fahrrad schließlich bei höheren Frequenzen ($f_{M_\delta} > 10Hz$) praktisch nicht mehr auf die Lenkmomentvorgabe reagiert (Verhalten analog Tiefpassfilter). Entsprechende Fahrmanöver erfordern also mit zunehmender Frequenz immer größere Lenkmomente.

Aus den prinzipiell sehr großen Phasenverschiebungen der Übertragungsfunktionen ist das bereits angesprochene Nichtphasenminimum-Verhalten des Fahrrades, das auf positive Nullstellen in den Übertragungsfunktionen hindeutet, zu sehen. Mit steigender Frequenz nimmt dieser Phasenverzug beträchtlich zu, was zu immer höheren Anforderungen an den Fahrer führt. Des Weiteren fällt die Korrelation zwischen Lenkwinkel δ und Gierrate $\dot{\psi}$, die sich auch schon in Abschnitt 5.2 zeigte, auf.

Vergleichend zeigt Abbildung 5.7 die Bode-Diagramme der Übertragungsfunktionen $H_{\varphi, M_{\varphi_F}}$, $H_{\dot{\psi}, M_{\varphi_F}}$ und $H_{\delta, M_{\varphi_F}}$ bei der Rollmomentvorgabe - ebenfalls für die Fahrgeschwindigkeit von $v = 10m/s$ und den zuvor betrachteten Frequenzbereich.

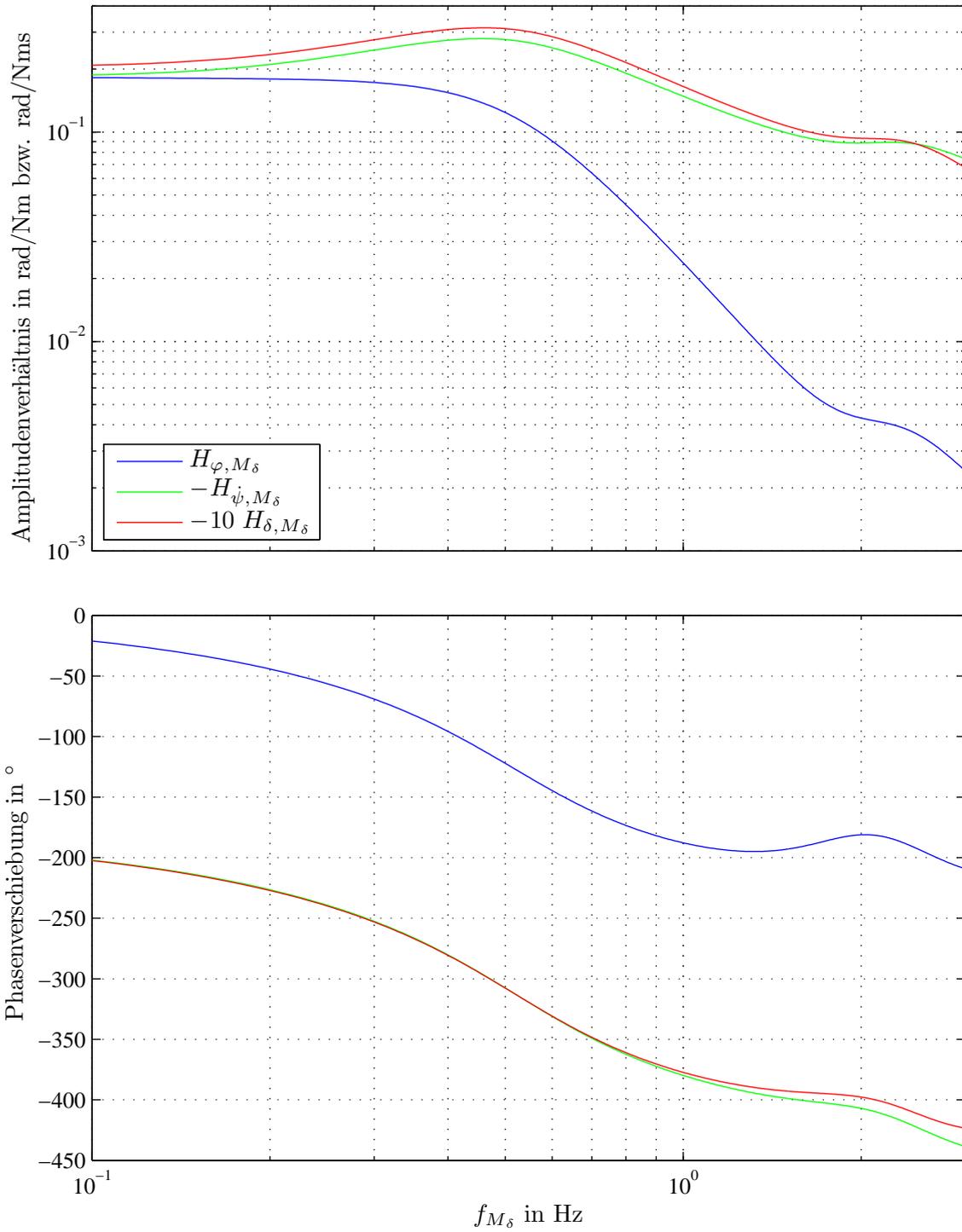


Abbildung 5.6: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktionen bei Lenkmomentvorgabe

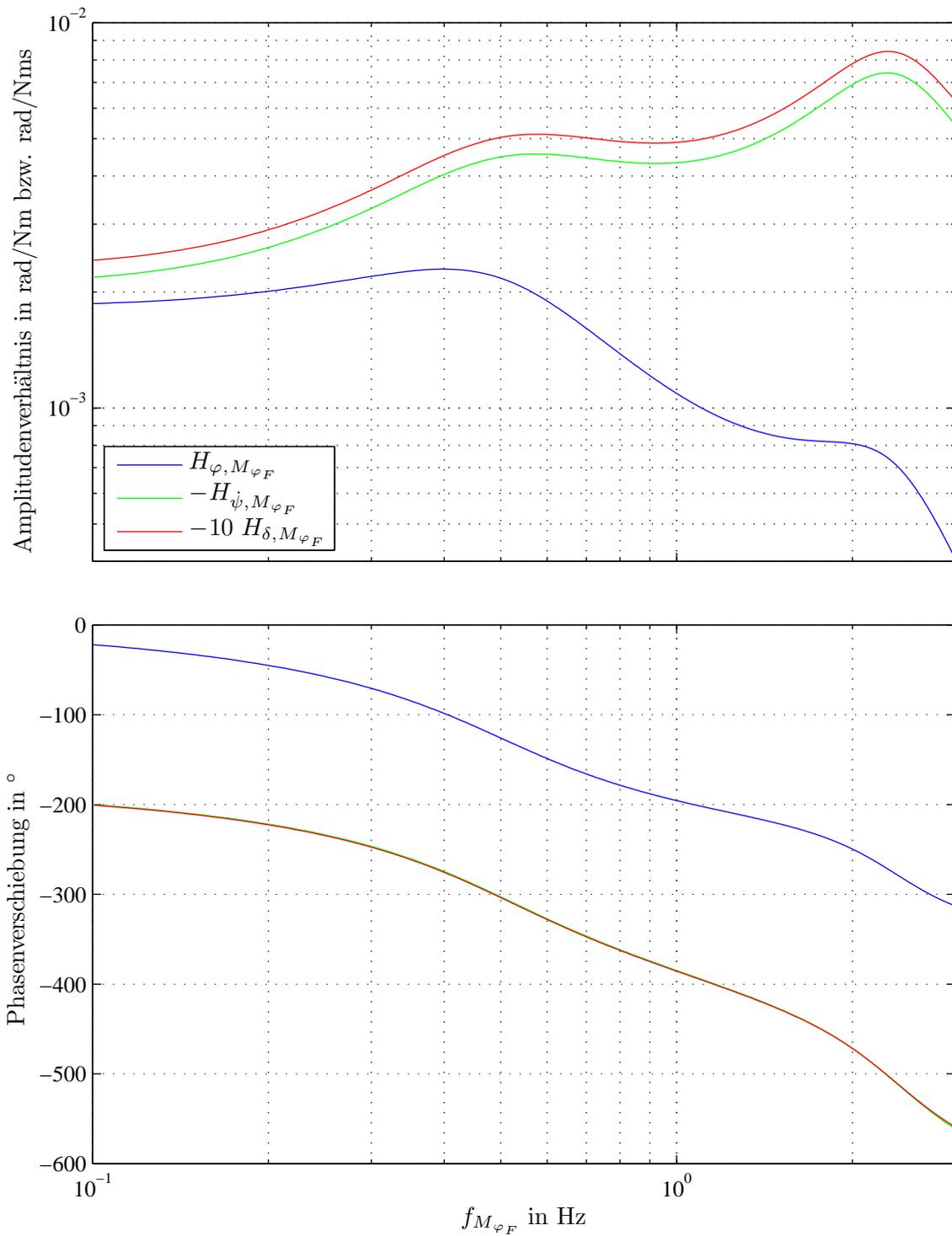


Abbildung 5.7: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktionen bei Rollmomentvorgabe

Aus den Amplitudenverhältnissen der Übertragungsfunktionen sind wieder die bei der instationären Kurveneinfahrt festgestellten Vorzeichenabhängigkeiten ersichtlich. Der bei einer Frequenz von etwa 2.5Hz auftretenden Peak kann wiederum mit dem Lean-Mode (vgl. Abbildung 4.3) des Fahrrades assoziiert werden. Im Vergleich zu den Werten bei Lenkmomentvorgabe zeigen sich die jeweiligen Amplitudenverhältnisse um einen Faktor von rund 10^{-2} verringert. Die Durchführung entsprechender Fahrmanöver erfordert also ganz erheblich höhere Rollmomente, sodass die alternative Aufbringung wesentlich geringerer Lenkmomente für den Fahrer einfacher bzw. angenehmer erscheint, [18].

Auch aus den Phasenverschiebungen der entsprechenden Übertragungsfunktionen ist, vor allem mit steigender Frequenz, ein im Vergleich zu Abbildung 5.6 zunehmend erhöhter Phasenverzug feststellbar.

Zusammenfassend zeigt sich also, dass das Fahrrad generell aufgrund des beschriebenen Nichtphasenminimum-Verhaltens stark verzögert auf entsprechende Fahrereingriffe reagiert und damit hohe Ansprüche an den Fahrer als Regelsystem stellt. Wie aus dem unmittelbaren Vergleich der beiden unterschiedlichen Fahrereingriffe hervorgeht, bedarf die Einleitung eines Fahrmanövers bei der Rollmomentvorgabe einerseits ganz wesentlich größerer Momente, und andererseits aufgrund des höheren Phasenverzuges insbesondere bei höheren Frequenzen einer frühzeitigeren Fahrerreaktion. Daher gewinnt - zumal klarerweise den vom realen Fahrer aufbringbaren Rollmomenten Grenzen gesetzt sind - vor allem bei Fahrmanövern mit entsprechend hohen Frequenzen oder großen Rollwinkeln φ (engen Kurvenradien ρ) der Fahrereingriff über das Lenkmoment an Bedeutung. Diese Erkenntnis deckt sich etwa mit jener aus [52] bzw. mit den bereits in Abschnitt 3.3.1 angeführten Anmerkungen von Whipple [14] und Sharp [6].

Kapitel 6

Zusammenfassung

Wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit war es, ein Fahrradmodell - basierend auf den Erkenntnissen aus 140 Jahren Forschungsarbeit - aufzubauen, um mit Hilfe entsprechender Simulationen ein besseres Verständnis für das durchaus komplexe querdynamische Verhalten des Fahrrades zu erlangen. Wie erwartet konnte dabei das Stabilitätsverhalten des Fahrrades als ein ganz wesentlicher Aspekt der Querdynamik identifiziert werden.

Wie aus der Literaturstudie hervorging, zeigte sich neben der Einbeziehung der Rahmennachgiebigkeit vor allem die detaillierte Modellierung der Reifenkräfte (inklusive der Berücksichtigung der Relaxationseigenschaft des Reifens und eines kreisförmigen Reifenquerschnitts) als entscheidend, um ein entsprechendes, die Realität ausreichend wiedergebendes Modell zu erhalten.

Ein derartiges Fahrrad-Modell wurde schließlich in der Mehrkörpersystem-Software SIMPACK aufgebaut, und entsprechende Parameterwerte (Geometriedaten, Massen und Trägheitsmomente) eines Trekking-Fahrrades der Firma KTM-Fahrrad GmbH ermittelt. Dabei wurde zur Modellierung der Reifenkräfte in Analogie zu einigen einschlägigen Publikationen ein lineares Reifenmodell, aufgrund dessen minimaler Anzahl an bestimmender Reifenparameter, verwendet.

Um mit dem erarbeiteten Mehrkörpersystem-Modell auch außerhalb des autostabilen Geschwindigkeitsbereiches querdynamische Analysen zu ermöglichen, war es notwendig, den regelnden (stabilisierenden) Eingriff des Fahrers zu modellieren. Dazu wurde basierend auf der vereinfachten Fahrer-Modellvorstellung (*Benchmark-Model*) ein den Fahrer repräsentierender Lenkungsregler entworfen und im MKS-Fahrradmodell implementiert. Des Weiteren wurde zur Regelung der longitudinalen Fahrgeschwindigkeit v ein Regler, der auf empirischen Einstellregeln beruht, ausgelegt.

Schließlich konnte mit Hilfe der im Programmsystem SIMPACK angebotenen Methode der Eigenwertanalyse das Stabilitätsverhalten des Fahrradmodells untersucht und diskutiert werden.

Aus der Stabilitätskarte für den ungestörten Zustand der unbeschleunigten Geradeausfahrt wurde die starke Fahrgeschwindigkeitsabhängigkeit der charakteristischen Eigenmodes (Capsize-, Weave- und Wobble-Mode) ersichtlich. Dabei konnte eine selbstständige Stabilisierung des Fahrrades (autostabiler Bereich) ab einer Fahrgeschwindigkeit von rund 7m/s festgestellt werden. Aus einer Vielzahl der für das Stabilitätsverhalten eines Fahrrades relevanten Parameter wurden schließlich einige der wesentlichsten (gyroskopischer Effekt, Lenkgeometrie und Rahmennachgiebigkeit) diskutiert, und deren Beitrag zur Stabilisierung des Fahrrades erörtert.

Die Stabilitätsanalyse der stationären Kurvenfahrt zeigte daraufhin, dass sich im Vergleich zur Geradeausfahrt sowohl der Weave- als auch der Wobble-Mode geringfügig stabilisieren, während das Fahrrad im Capsize-Mode praktisch über den gesamten autostabilen Geschwindigkeitsbereich labiler wird.

Anschließend wurde das dynamische Systemverhalten bei der Kurveneinfahrt bis zum Erreichen einer stationären Kurvenfahrt untersucht. Dabei konnte ein prinzipiell inverses querdynamisches Verhalten des Fahrrades (Nichtphasenminimum-Verhalten) beobachtet werden. Wie aus den entsprechenden Analysen hervorging, kann eine Kurvenfahrt einerseits durch ein Lenkmoment entgegen der vorgesehenen Richtungsänderung (Countersteering) und andererseits durch die Neigung des Fahreroberkörpers in die Kurvenrichtung eingeleitet werden.

Aus den abschließend über Slalomfahrmanöver charakterisierten Übertragungsfunktionen zeigte sich, dass das Fahrrad generell stark verzögert auf entsprechende Fahrereingriffe reagiert (große Phasenverschiebungen aufgrund des Nichtphasenminimum-Systemverhaltens) und damit hohe Ansprüche an den Fahrer stellt. Ein Vergleich der Übertragungsfunktionen bei Lenk- und Rollmomentvorgabe ließ schließlich die Schlussfolgerung zu, dass insbesondere bei Fahrmanövern mit entsprechend hohen Frequenzen oder großen Rollwinkeln φ der Fahrereingriff über das Lenkmoment an Bedeutung gewinnt.

Appendix

In diesem Appendix werden die Koeffizienten der Bewegungsgleichung (3.45) in Analogie zu [9] definiert. Es sei daher vorweg darauf hingewiesen, dass die Bezeichnungen der Benchmark-Modellparameter nach [9] eingeführt werden, und keine Korrelation zu den Modellparametern des SIMPACK-Modells (vgl. Kapitel 3) besteht.

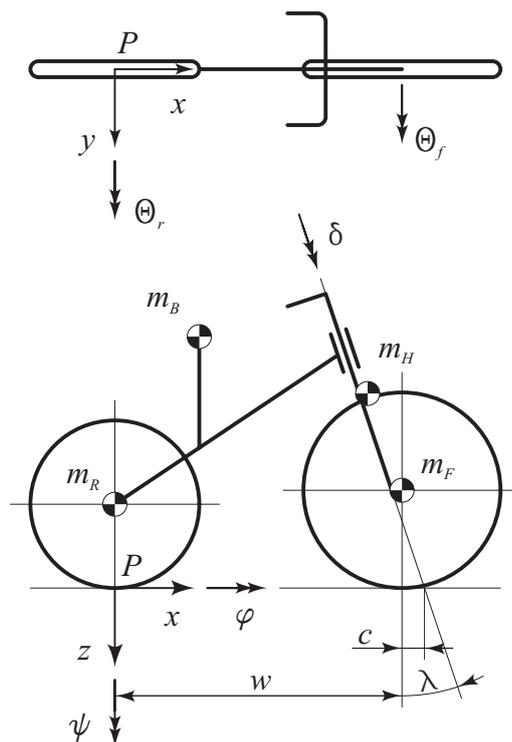


Abbildung A.1: *Benchmark-Model*: Aufbau und Parameter, [9]

Das *Benchmark-Model* (vgl. Abbildung A.1) besitzt im Allgemeinen 25 Konstruktionsparameter, sowie die beiden allgemeinen Parameter der Fahrgeschwindigkeit v und der Fallbeschleunigung g . Diese Konstruktionsparameter beschreiben einerseits Para-

meterwerte der Fahrradgeometrie wie den Radstand w , den Nachlauf¹ c sowie den Nachlaufwinkel λ , und andererseits die Massen, Massenträgheitsmomente und die relativ zum hinteren Aufstandspunkt P gemessenen Massenmittelpunktskoordinaten der einzelnen Teilkörper. Dabei ist darauf zu achten, dass das globale Koordinatensystem (P, x, y, z) mit positiver z -Achse nach unten festgelegt wurde, weshalb sich für die jeweiligen z -Koordinaten der Massenmittelpunkte negative Werte ergeben.

In der Folge werden nach [9] die Indizes R für das Hinterrad (*Rear wheel*), B für den hinteren Rahmen (*rear frame including rider Body*), H für den vorderen Rahmen (*front frame including forks and Handlebar*), F für das Vorderrad (*Front wheel*), T für das Gesamtsystem (*Total system*) und A für die vordere Baugruppe (*front Assembly*), welche die vorderen Rahmen und das Vorderrad enthält, verwendet.

Die Masse des Gesamtsystems m_T samt der korrespondierenden Lage des Massenmittelpunktes folgen unmittelbar aus:

$$m_T = m_R + m_B + m_H + m_F \quad (\text{A.1})$$

$$x_T = \frac{x_B m_B + x_H m_H + w m_F}{m_T} \quad (\text{A.2})$$

$$z_T = \frac{-r_R m_R + z_B m_B + z_H m_H - r_F m_F}{m_T} \quad (\text{A.3})$$

Weiters ergeben sich die Trägheitsmomente des Gesamtsystems bezüglich des globalen Koordinatensystems (P, x, y, z) zu:

$$I_{Txx} = I_{Rxx} + I_{Bxx} + I_{Hxx} + I_{Fxx} + m_R r_R^2 + m_B z_B^2 + m_H z_H^2 + m_F r_F^2 \quad (\text{A.4})$$

$$I_{Tzz} = I_{Rzz} + I_{Bzz} + I_{Hzz} + I_{Fzz} + m_B x_B^2 + m_H x_H^2 + m_F w^2 \quad (\text{A.5})$$

$$I_{Tzx} = I_{Bzx} + I_{Hxz} - m_B x_B z_B - m_H x_H z_H + m_F w r_F \quad (\text{A.6})$$

Auf ähnliche Weise werden die Massen- und Trägheitseigenschaften für die vordere Baugruppe A definiert. Dessen Masse m_A und Massenmittelpunktskoordinaten (x_A, z_A) sind:

$$m_A = m_H + m_F \quad (\text{A.7})$$

$$x_A = \frac{x_H m_H + w m_F}{m_A} \quad (\text{A.8})$$

$$z_A = \frac{z_H m_H - r_F m_F}{m_A} \quad (\text{A.9})$$

¹In [9] findet die alternative Definition des Nachlaufes, als am Boden gemessene Strecke zwischen vorderen Radaufstandspunkt und Durchstoßpunkt der gedanklich verlängerten Lenkachse, Anwendung.

Die Trägheitsmomente der vorderen Baugruppe bezüglich dessen Massenmittelpunkt und den globalen Achsen ergeben sich zu:

$$I_{Axx} = I_{Hxx} + I_{Fxx} + m_H(z_H - z_A)^2 + m_F(r_F + z_A)^2 \quad (\text{A.10})$$

$$I_{Azz} = I_{Hzz} + I_{Fzz} + m_H(x_H - x_A)^2 + m_F(w - x_A)^2 \quad (\text{A.11})$$

$$I_{Axx} = I_{Hxx} - m_H(x_H - x_A)(z_H - z_A) + m_F(w - x_A)(r_F + z_A) \quad (\text{A.12})$$

Für die folgenden Berechnungen muss nun der Parameter u_A , der den Normalabstand des Massenmittelpunktes der vorderen Baugruppe von der Lenkachse beschreibt, eingeführt werden:

$$u_A = (x_A - w - c) \cos \lambda - z_A \sin \lambda \quad (\text{A.13})$$

Damit können folgende Massenträgheitseigenschaften der vorderen Baugruppe A bezugnehmend zur Lenkachse (λ) ermittelt werden:

$$I_{A\lambda\lambda} = m_A u_A^2 + I_{Axx} \sin^2 \lambda + 2I_{Axx} \sin \lambda \cos \lambda + I_{Azz} \cos^2 \lambda \quad (\text{A.14})$$

$$I_{A\lambda x} = -m_A u_A z_A + I_{Axx} \sin \lambda + I_{Axx} \cos \lambda \quad (\text{A.15})$$

$$I_{A\lambda z} = m_A u_A x_A + I_{Axx} \sin \lambda + I_{Azz} \cos \lambda \quad (\text{A.16})$$

Für den mechanischen Nachlauf ($c \cos \lambda$) dividiert durch den Radstand w wird die Hilfsvariable μ eingeführt:

$$\mu = \frac{c}{w} \cos \lambda \quad (\text{A.17})$$

Weiters bilden die jeweiligen Verhältnisse aus dem Trägheitsmoment des Vorder- bzw. Hinterrades um die y -Achse und dem entsprechenden Reifenradius, zusammen mit deren Summe die gyrokopischen Koeffizienten:

$$S_R = \frac{I_{Ryy}}{r_R}, \quad S_F = \frac{I_{Fyy}}{r_F}, \quad S_T = S_R + S_F \quad (\text{A.18})$$

Der häufig auftretende Term des statischen Momentes wird wie folgt definiert:

$$S_A = m_A u_A + \mu m_T x_T \quad (\text{A.19})$$

Mit diesen Größen können schließlich die Koeffizienten der linearisierten Bewegungsgleichung gemäß (3.45)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \bar{M}_{\varphi\varphi} & \bar{M}_{\varphi\delta} \\ \bar{M}_{\delta\varphi} & \bar{M}_{\delta\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \bar{C}_{1\varphi\varphi} & \bar{C}_{1\varphi\delta} \\ \bar{C}_{1\delta\varphi} & \bar{C}_{1\delta\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + \\ & + \left[g \begin{pmatrix} \bar{K}_{0\varphi\varphi} & \bar{K}_{0\varphi\delta} \\ \bar{K}_{0\delta\varphi} & \bar{K}_{0\delta\delta} \end{pmatrix} + v^2 \begin{pmatrix} \bar{K}_{2\varphi\varphi} & \bar{K}_{2\varphi\delta} \\ \bar{K}_{2\delta\varphi} & \bar{K}_{2\delta\delta} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_\delta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

in kompakter Form angegeben werden. Jene der Massenmatrix $\bar{\mathbf{M}}$ sind:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\varphi\varphi} &= I_{Txx} \quad , \quad \bar{M}_{\varphi\delta} = I_{A\lambda x} + \mu I_{Txz} \\ \bar{M}_{\delta\varphi} &= \bar{M}_{\varphi\delta} \quad , \quad \bar{M}_{\delta\delta} = I_{A\lambda\lambda} + 2\mu I_{A\lambda z} + \mu^2 I_{Tzz}\end{aligned}\tag{A.21}$$

Die Einträge der Dämpfungsmatrix $\bar{\mathbf{C}} = v\bar{\mathbf{C}}_1$ ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{1\varphi\varphi} &= 0 \quad , \quad \bar{C}_{1\varphi\delta} = \mu S_T + S_F \cos \lambda + (I_{Txx}/w) \cos \lambda - \mu m_T z_T \\ \bar{C}_{1\delta\varphi} &= -\mu S_T - S_F \cos \lambda \quad , \quad \bar{C}_{1\delta\delta} = (I_{A\lambda z}/w) \cos \lambda + \mu [S_A + (I_{Tzz}/w) \cos \lambda]\end{aligned}\tag{A.22}$$

Schlussendlich bilden die Koeffizienten des zur Fallbeschleunigung g proportionalen Steifigkeitsanteils $\bar{\mathbf{K}}_0$

$$\begin{aligned}\bar{K}_{0\varphi\varphi} &= m_T z_T \quad , \quad \bar{K}_{0\varphi\delta} = -S_A \\ \bar{K}_{0\delta\varphi} &= \bar{K}_{0\varphi\delta} \quad , \quad \bar{K}_{0\delta\delta} = -S_A \sin \lambda\end{aligned}\tag{A.23}$$

und jene des geschwindigkeitsabhängigen Steifigkeitsanteils $\bar{\mathbf{K}}_2$ (proportional v^2)

$$\begin{aligned}\bar{K}_{2\varphi\varphi} &= 0 \quad , \quad \bar{K}_{2\varphi\delta} = [(S_T - m_T z_T)/w] \cos \lambda \\ \bar{K}_{2\delta\varphi} &= 0 \quad , \quad \bar{K}_{2\delta\delta} = [(S_A + S_F \sin \lambda)/w] \cos \lambda\end{aligned}\tag{A.24}$$

die Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}} = g\bar{\mathbf{K}}_0 + v^2\bar{\mathbf{K}}_2$.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Fahrradmodell: schematischer Aufbau, Körperbezeichnungen	19
3.2	Fahrradmodell: topologischer Aufbau	20
3.3	Fahrradmodell: Rollwinkel φ und Gierwinkel ψ	21
3.4	Fahrradmodell: Geometrie	23
3.5	Konventionen für unendlich dünnen Reifen gemäß SAE	28
3.6	Adaptierte Konventionen am MKS-Reifenmodell	29
3.7	Schlupfpunkt S	30
3.8	Lage des Schlupfpunktes S im MKS-Modell	32
3.9	Kraftübertragung im Reifenlatsch	33
3.10	Reifenkräfte und -momente für Reduktionspunkt S	35
3.11	Kraftschlussdiagramm für den Bremsbereich	37
3.12	Abhängigkeiten der normalisierten Seitenkraft	38
3.13	Vereinfachte Modellvorstellung des Fahrers: <i>Benchmark-Model</i> , 3.13 . .	43
3.14	Regelkreis der Ausgangsvektorrückführung	46
3.15	Rückführverstärkungen K_φ und $K_{\dot{\varphi}}$	49
3.16	Vorfilter M	50
3.17	Antriebsmomentsprungantwort des Fahrrad-Modells	51
4.1	Anschauliche Darstellung der Stabilitätsdefinitionen: Integralkurven . .	55
4.2	Wurzelortskurve der Geradeausfahrt, Ausgangskonfiguration	58

<i>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</i>	94
4.3 Stabilitätskarte der Geradeausfahrt, Ausgangskonfiguration	59
4.4 Vergleich mit/ohne gyroskopischem Effekt	63
4.5 Variation des polaren Massenträgheitsmomentes der Reifen	64
4.6 Variation des Nachlaufwinkels	66
4.7 Variation des Nachlaufversatzes	67
4.8 Variation der Rahmensteifigkeit und -dämpfung	69
4.9 Vergleich Geradeausfahrt vs. stationäre Kurvenfahrt	70
4.10 Stabilität der stationären Kurvenfahrt über dem Rollwinkel	71
5.1 Handling-Diagramm des Fahrradmodells	73
5.2 Instationäre Kurvenfahrt im autostabilen Geschwindigkeitsbereich . . .	76
5.3 Instationäre Kurvenfahrt im instabilen Geschwindigkeitsbereich	78
5.4 Instationäre Kurvenfahrt, Lenkeffekt zufolge Fahreroberkörperneigung .	80
5.5 Slalomfahrmanöver	82
5.6 Übertragungsfunktionen bei Lenkmomentvorgabe	84
5.7 Übertragungsfunktionen bei Rollmomentvorgabe	85
A.1 <i>Benchmark-Model</i> : Aufbau und Parameter	89

Tabellenverzeichnis

3.1	Parameterwerte: Geometrie	24
3.2	Parameterwerte: Massen und Trägheitsmomente	25
3.3	Parameterwerte: Steifigkeiten und Dämpfungen	26
3.4	Reifenmodell-Parameter	41

Literaturverzeichnis

- [1] Roney M. J., *Bicycles Pedaling Into the Spotlight*, Earth Policy Institute, 2008. (<http://www.earth-policy.org/indicators/C48>, Stand vom 21. Dezember 2010)
- [2] Larsen J., *Bicycle Production Breaks 100 Million*, Earth Policy Institute, 2002. (http://www.earth-policy.org/indicators/C48/bicycles_2002, Stand vom 21. Dezember 2010)
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Fahrrad>, Stand vom 29. November 2010.
- [4] Dodge P., *Faszination Fahrrad*, Delius Klasing Verlag, Bielefeld, 2007.
- [5] Pilz B., *FAHR!RAD - Von der Draisine zur Hightech-Maschine*, Technisches Museum Wien, 2002.
- [6] Limebeer D. J. N., Sharp R. S., *Bicycles, Motorcycles, and Models*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 26, No. 5, pp. 34-61, 2006.
- [7] <http://www.bikehouse-plauen.de/fahrrad-history.htm>, Stand vom 29. November 2010.
- [8] Sharp R. S., *The Lateral Dynamics of Motorcycles and Bicycles*, Vehicle System Dynamics, Vol. 14, No. 4-6, pp. 265-283, 1985.
- [9] Meijaard J. P., Papadopoulos J. M., Ruina A., Schwab A. L., *Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review*, Proceedings of the Royal Society A, Vol. 463, pp. 1955-1982, 2007.
- [10] Rankine W. J. M., *On the dynamical principles of the motion of velocipedes*, The Engineer, Vol. 28, p. 79, 129, 153, 175; Vol. 29, p. 2, 1969 (1970).
- [11] Sharp R. S., *On the Stability and Control of the Bicycle*, Applied Mechanics Review, Vol. 61, No. 060803, pp. 1-24, 2008.

- [12] Bourlet C., *Étude Théoretique sur la Bicyclette*, Bulletin de la Societe Mathématique de France, Vol. 27, pp. 47-67 / 76-96, 1899.
- [13] Carvallo M. E., *Théorie du Mouvement du Monocycle et de la Bicyclette*, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [14] Whipple F. J. W., *The stability of the motion of a bicycle*, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 30, pp. 312-348, 1899.
- [15] Klein F., Sommerfeld A., *Über die Theorie des Kreisels, Heft IV: Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie*, Teubner, Leipzig, 1910.
- [16] Kondo M., Nagaoka A., Yoshimura F., *Theoretical study on the running stability of the two-wheelers*, Trans. S.A.E. Japan, Vol. 17, No. 1, pp. 8-18, 1963.
- [17] Sharp R. S., *The stability and control of motorcycles*, Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 13, No. 5, pp. 316-329, 1971.
- [18] Weir D. H., *Motorcycle Handling Dynamics and Rider Control and the Effect of Design Configuration on Response and Performance*, Doctoral Dissertation, University of California, Los Angeles, 1972.
- [19] Sharp R. S., Alstead C. J., *The Influence of Structural Flexibilities on the Straight-running Stability of Motorcycles*, Vehicle System Dynamics, Vol. 9, No. 6, pp. 327-357, 1980.
- [20] Koenen C., *The dynamic behaviour of a motorcycle when running straight ahead and when cornering*, Doctoral Dissertation, Delft University, 1983.
- [21] Koenen C., Pacejka H. B., *Vibrational modes of motorcylces in curves*, Proc. of Int. Motorcycle Safety Conf. (Washington D.C.), Motorcylces Safety Foundation, Vol. 2, pp. 501-543, 1980.
- [22] Schwab A. L., Meijaard J. P., Papadopoulos J. M., *Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrolled bicycle*, Proceedings of the 2nd Asian Conference of Multibody Dynamics, pp. 1-9, August 2004.
- [23] Kooijman J. D. G., Schwab A. L., Meijaard J. P., *Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle*, Multibody System Dynamics, Vol. 19, No. 1-2, pp. 115-132, 2008.

- [24] Åström K. J., Klein R. E., Lennartsson A., *Bicycle Dynamics and Control*, IEEE Control Systems Magazine, pp. 26-47, August 2005.
- [25] Schwab A. L., Kooijman J. D. G., Meijaard J. P., *Some recent developments in bicycle dynamics and control*, Fourth European Conference on Structural Control, St. Petersburg, 2008.
- [26] Cossalter V., Lot R., *A Motorcycle Multi-Body Model for Real Time Simulations Based on the Natural Coordinates Approach*, Vehicle System Dynamics, Vol. 37, No. 6, pp. 423-447, 2002.
- [27] Cossalter V., *Motorcycle Dynamics*, Second Edition, 2006.
- [28] Roddeck W., *Einführung in die Mechatronik*, 3. Auflage, Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2006.
- [29] Lugner P., Mack W., Plöchl M., Springer H., *Skriptum zur Vorlesung „Grundlagen der Mehrkörpersystemdynamik“*, Studienjahr 2007/2008.
- [30] Mrazek T., *Verwendung des Simulationsprogramms SIMPACK zur Erstellung von Fahrzeugmodellen*, Diplomarbeit TU Wien, Jänner 1997.
- [31] Pacejka H. B., *Tyre and Vehicle Dynamics*, Second Edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
- [32] Angrosch B., *Fahrradstabilität unter besonderer Berücksichtigung des Lenkungsflatters*, Diplomarbeit TU Wien, Jänner 2010.
- [33] Sharp R. S., Limebeer D. J. N., *On steering wobble oscillations of motorcycles*, Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 218, No. 12, pp. 1449-1456, 2004.
- [34] Lugner P., Plöchl M., *Skriptum zur Vorlesung „Grundlagen der Fahrzeugdynamik“*, Studienjahr 2008/2009.
- [35] Sharp R. S., *Motorcycle Steering Control by Road Preview*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 129, No. 4, pp. 373-381, 2007.
- [36] Skrna R., *Untersuchungen zur Stabilität des Fahrrades bei der Geradeausfahrt*, Diplomarbeit TU Wien, September 1989.
- [37] Roland R. D., *Computer Simulation of Bicycle Dynamics*, Proceedings of the ASME Symposium Mechanics and Sport, pp. 35-83, 1973.

- [38] Edelmann J., *Fahrermodelle in der Fahrdynamiksimulation*, Dissertation TU Wien, 2007.
- [39] Föllinger O., Dörrscheidt F., Klittich M., *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*, Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 7. Auflage, 1992.
- [40] Jörgl H. P., *Repetitorium Regelungstechnik*, R. Oldenbourg Verlag Wien München, Band 1, 1993.
- [41] Mack W., Plöchl M., *Skriptum zur Vorlesung „Stabilitätsprobleme bewegter Systeme“*, Studienjahr 2006/2007.
- [42] Plaschko P., Brod K., *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und Chaotische Systeme*, Vieweg-Verlag Braunschweig/Wiesbaden, 1995.
- [43] Greiner W., *Theoretische Physik: Klassische Mechanik II*, 8. Auflage, Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2008.
- [44] Jones D. E. H., *The stability of the bicycle*, Physics Today, Vol. 23, No. 4, pp. 34-40, 1970.
- [45] Van Dijk T., *Bicycles made to measure*, Delft Outlook 3, pp. 7-10, 2007.
- [46] Sommerfeld A., *Mechanics*, New York: Academic, 1952.
- [47] Schwab A. L., Meijaard J. P., Kooijman J. D. G., *Some recent developments in bicycle dynamics*, 12th IFToMM World Congress, Besançon, 18-21 June 2007.
- [48] Edelmann J., Plöchl M., Lugner P., *A steer-by-wire control strategy for a tilting three-wheeled vehicle*, Proceedings of IAVSD, Stockholm, 2009.
- [49] Sharp A., *Bicycles and Tricycles: An Elementary Treatise on Their Design and Konstruktion*, White Plains, NY: Longman, 1896. (Reprint: *Bicycles and Tricycles: An Classic Treatise on Their Design and Konstruktion*, Mineola, NY: Dover, 1977.)
- [50] Hoagg J. B., Bernstein D. S., *Nonminimum-phase zeros: Much to do about nothing*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 27, No. 3, pp. 45-57, 2007.
- [51] Biral F., Bortoluzzi D., Cossalter V., Lio M., *Experimental Study of Motorcycle Transfer Functions for Evaluating Handling*, Vehicle System Dynamics, Vol. 39, No. 1, pp. 1-25, 2003.
- [52] Schwab A. L., Kooijman J. D. G., *Controllability of a bicycle*, 5th Asian Conference on Multibody Dynamics, Kyoto, 23-26 August 2010.