

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN**

Vienna University of Technology

## **D I P L O M A R B E I T**

### **ENTWURF UND SIMULATION EINES FAHRERMODELLS ZUM LENKEN UND STABILISIEREN VON FAHRRÄDERN**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

**Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl**

Institut für Mechanik und Mechatronik, E 325

eingereicht an der Technischen Universität Wien

**Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften**

von

**Martin Haudum**

Matrikelnummer: 0525995

Herrnschlag 3

4170 St.Stefan am Walde

Wien, März 2012

.....  
Martin Haudum

# Vorwort

Diese Arbeit entstand am Institut für Mechanik und Mechatronik der Technischen Universität Wien in der Arbeitsgruppe Fahrzeugdynamik aus dem Forschungsschwerpunkt Fahrermodellierung in Kombination mit Fahrrad-Dynamik.

Mein besonderer Dank gilt **Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl**, einerseits für die Möglichkeit diese Arbeit am Institut zu erstellen und andererseits für die hervorragende Betreuung während der gesamten Zeit. Seine zahlreichen Ideen und Anregungen, sowie sein immer offenes Ohr für jegliche Art von Problemen haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ebenso möchte ich mich bei **Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann** bedanken, welcher mir durch die zur Verfügungstellung der Matlab-Routinen für die Strecken- und Normalabstandsberechnung einiges an Programmieraufwand ersparte, sowie für die Unterstützung und Hilfestellung bei zahlreichen Problemen.

Des weiteren möchte ich mich bei allen Instituts MitarbeiterInnen und den MitstreiterInnen im „Diplomanden-Kammerl“ für die Hilfsbereitschaft und die Kollegialität bedanken. Besonders erwähnt seien dabei Christoph Ott und Wolfgang Müller, welche sich ebenfalls in ihren Diplomarbeiten mit dem Fahrrad beschäftigten und mir durch ihre Arbeiten eine sehr gute Basis legten.

Ein Dank gebührt natürlich auch allen Freunden und Studienkollegen, welche die Studienzeit zu einem schönen und unvergesslichen Lebensabschnitt machten. Namentlich bedanken möchte ich mich hier bei meinen Bildungswegkollegen Dominik Piermayr und Rainhard Prieschl für die gute Freundschaft, sowie dem seelischen und fachlichen Beistand in allen Lebenslagen.

An dieser Stelle möchte ich mich auch noch besonders bei meiner Familie, insbesondere bei meinen Eltern bedanken, welche mir, durch ihre stetige Förderung dieses Studium erst ermöglichten, sowie bei meiner Freundin Sabine für ihre große Geduld und Unterstützung.

# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Fahrermodellen für Lenk- und Stabilisationsaufgaben bei Fahrrädern. Das Interesse an solchen Modellen liegt einerseits in der Notwendigkeit eines Reglers zur Nachbildung des Menschen bei Fahrsimulationen und andererseits an der grundlegenden Frage – *Wie fährt man eigentlich Fahrrad?*

Zur Modellierung des Fahrradfahrers wird ein aus mehreren Ebenen bestehendes Modell verwendet. Aufgrund des sich über weite Geschwindigkeitsbereiche erstreckende instabile Verhalten des Fahrrads muss das Modell eine Stabilisationsebene enthalten. Das Fahrermodell besteht darüber hinaus aus einer antizipatorischen Steuerungsebene und einer vorausschauenden kompensatorischen Regelungsebene.

Im Zuge des Entwurfs wird zuerst auf die allgemeinen Eigenschaften der Regelstrecke, des Fahrrads, eingegangen. Dies beinhaltet unter anderem eine Gegenüberstellung der Fahreingriffe: Lenk- und Oberkörperrollmoment. Es zeigt sich dabei, dass das Lenkmoment, auch vom regelungstechnischen Standpunkt aus gesehen, der vorteilhaftere Fahreingriff ist. Im weiteren wird detailliert auf die Fahrermodellierung eingegangen und dabei auch einige der fahrradspezifischen Probleme bei der Fahrermodellierung erörtert. Zum Abschluss wird das entworfene Fahrradfahrermodell noch anhand eines Matlab/Simulink Modells getestet.

# Abstract

The present study deals with rider models for steering and stabilizing bicycles. The interest in such models is based on the necessity of closed-loop bicycle dynamics simulations, as well as the elementary question – *How to ride a bicycle?*

For modeling the bicycle rider a multi-level model approach is used. The rider model consists of an anticipatory feed forward control-level, a predictive compensatory closed-loop control-level and a closed-loop stability controller due to the unstable behavior of the bicycle over a large velocity range.

First, the general characteristics of the controlled system, the bicycle, are analysed. This also involves a comparison of the application of a steering torque and an upper body lean torque by the rider to control the bicycle. It turns out, that the steering torque is, also from a control point of view, the more advantageous driving intervention. Then, the rider model and specific modeling problems are considered in more detail. Finally, the rider model is tested by a Matlab/Simulink model.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Zielsetzung . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	2
1.3	Literaturüberblick . . . . .	3
1.4	Grundkonzept des Fahrermodells . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Regelungstechnische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Beschreibung des dynamischen Systems . . . . .	7
2.1.1	Beschreibung mittels Übertragungsfunktion . . . . .	7
2.1.2	Beschreibung mittels Zustandsvariablen . . . . .	9
2.2	Regelkreis . . . . .	13
2.2.1	Standard Regelkreis . . . . .	13
2.2.2	Anforderungen an den Regelkreis . . . . .	14
2.2.3	Stabilität . . . . .	15
2.3	Reglerentwurf . . . . .	18
2.4	Nichtphasenminimumsysteme . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Die Regelstrecke</b>	<b>21</b>
3.1	Modellbeschreibung . . . . .	21
3.1.1	Fahrradmodell inklusive Reifenmodell . . . . .	24
3.1.2	Benchmark Modell . . . . .	32
3.1.3	Erweitertes Benchmark Modell . . . . .	38
3.2	Fahrradparameter . . . . .	40
3.3	Stabilitätsverhalten . . . . .	42
3.4	Steuerbarkeit . . . . .	45
3.5	Allgemeine Eigenschaften der Regelstrecke . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Fahrermodellierung</b>	<b>52</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	52

4.2	Fahrradfahrermodell . . . . .	53
4.2.1	Stabilisierer . . . . .	54
4.2.2	Antizipatorische Steuerung . . . . .	60
4.2.3	Vorausschauende Regelung . . . . .	64
4.3	Anmerkungen . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Simulation</b>	<b>71</b>
5.1	Allgemein . . . . .	71
5.2	Streckenbeschreibung . . . . .	72
5.2.1	Teststrecke . . . . .	72
5.3	Voraussichtlicher Normalabstand . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>75</b>
6.1	Simulationsergebnisse . . . . .	75
6.1.1	Modellvergleich anhand der antizipatorischen Steuerungsebene . . . . .	82
6.2	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Conclusio und Ausblick</b>	<b>85</b>
7.1	Conclusio . . . . .	85
7.2	Ausblick . . . . .	86
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>89</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>90</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>
	<b>Anhang A</b>	<b>A</b>
	<b>Anhang B</b>	<b>C</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Anfänge des Fahrrads liegen im frühen 19. Jahrhundert bei Karl von Drais. Seit der Vorstellung des ersten „Laufrads“ 1817, welches später auch „Draisine“ genannt wurde [1], entwickelte sich das Fahrrad von einem Luxussymbol der wohlhabenden Gesellschaftsschichten zu einem Transportmittel und Sportgerät der Massen.

Heutzutage wird das Fahrrad vor allem als klimafreundliche und gesunde Option der Mobilität in den Vordergrund gerückt. So versucht z. B. die Stadt Wien den Radverkehr von derzeit ca. fünf Prozent des Verkehrsaufkommens auf zehn Prozent zu steigern, [2]. Durch das klimafreundliche und gesunde Image, sowie die gezielte Förderung der Infrastruktur und Bewusstseinsbildung ergeben sich große Chancen für den Radverkehr und zugleich auch für die Fahrradhersteller.

### 1.1 Motivation und Zielsetzung

Etwa 14 % der Österreicher gaben an, das Fahrrad so gut wie täglich [3] zu benutzen. Beinahe jeder kann Fahrradfahren<sup>1</sup>, jedoch nur wenige verstehen die Technik dahinter.

In ihrer Arbeit [7] brachten Cheng et al. es mit dem Zitat auf den Punkt: „*Many people can ride bicycles, but only a few understand how they work.*“. Das Fahrrad selbst stellt auf den ersten Blick ein sehr einfaches mechanisches System dar, welches dem Fahrer praktisch nur beim Erlernen Probleme macht. Nach der nicht immer einfachen Hürde des Erlernens geht das Fahrradfahren in eine automatisierte Fertigkeit über, sprich die meisten Menschen können ohne nachzudenken Fahrradfahren.

Durch diese praktischen Erfahrungen wird man zur Annahme verleitet, dass das Fahrradfahren bzw. das dynamische System Fahrrad auch vom fahrzeugdynamischen Standpunkt

---

<sup>1</sup>Bei einer Telefonumfrage des Instituts für Stadt- und Regionalforschung (ISR) gaben zwei Prozent der Befragten an, nie Radfahren gelernt zu haben, [3].

aus gesehen einfach und unproblematisch ist. Bei einer etwas näheren Betrachtung wird jedoch rasch klar, dass die dynamischen Zusammenhänge alles andere als trivial sind. Des weiteren wird ersichtlich, dass sich die tatsächlichen Lenkbewegungen von den intuitiv wahrgenommenen unterscheiden, vgl. Abschnitt 3.5. Somit stellt das Fahrrad ein durchaus interessantes Fahrzeug in Bezug auf dessen Fahrzeugdynamik dar. Das Interesse liegt dabei aber nicht nur am Fahrrad selbst, sondern auch am Verhalten des Fahrers. Dieses Interesse am Fahrer begründet sich einerseits an der Notwendigkeit eines Fahrreglers für Fahrzeugsimulationen, welche die Eingriffe des Menschen in numerischen Simulationen möglichst gut nachbilden sollen. Andererseits liegt das Interesse aber auch an der zentralen Frage – *Wie fährt man Fahrrad?*, also in der Frage nach dem tieferen Verständnis des einfach erscheinenden Fahrradfahrens.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein auf mehreren Ebenen basierendes Fahrermodell für Fahrräder zu entwerfen, auszulegen und in Matlab/Simulink zu implementieren und mittels Simulationen zu testen. Dabei soll der Zwei-Ebenen-Modellansatz von Donges [4], welcher aus einer antizipatorischen Steuerungsebene und einer kompensatorischen Regelungsebene besteht, als zu erweiternder Ansatz dienen.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Im folgenden Abschnitt wird ein kurzer Überblick über wichtige Publikationen zum Thema Fahrrad, sowie passende Fahrermodelle bzw. Fahrregler gegeben. Danach wird zum besseren Verständnis der Arbeit das Grundkonzept des Fahrermodells vorgestellt. Im anschließenden Kapitel erfolgt ein kurzer Überblick über notwendige regelungstechnische Grundlagen. Darauf aufbauend wird die Regelstrecke des Fahrreglers behandelt. Unter anderem wird auf die verschiedenen Fahrradmodelle, die Stabilität sowie deren Steuerbarkeit eingegangen. Nach der Analyse der Regelstrecke kann nun das eigentliche Fahrermodell betrachtet werden. Dabei wird der Fahrer allgemein, und darauf basierend das verwendete Modell, behandelt. Damit sind die wichtigsten Komponenten für eine Simulation eines Fahrmanövers vorhanden. Das folgende Kapitel befasst sich überblicksmäßig mit dem dafür notwendigen Simulationsmodell und der Simulation in Matlab/Simulink. Die Simulationsergebnisse sowie deren Diskussion erfolgen im Anschluss. Die Arbeit schließt mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick auf offene Problemstellungen und Verbesserungspotentiale.

### 1.3 Literaturüberblick

Der folgende Literaturüberblick erhebt keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit – sondern soll im Gegenteil nur die wichtigsten Publikationen mit Bedeutung für die Arbeit anführen. Es werden hauptsächlich Arbeiten zur Fahrstabilität und Querdynamik, sowie Arbeiten zur Fahrermodellierung bzw. zum Lenkungsregler von Fahrrädern betrachtet, welche nachfolgend zum größten Teil in chronologischer Reihenfolge angeführt werden. Einen ausführlichen und detaillierten Literaturüberblick zur Querdynamik kann [5] oder [6] entnommen werden. Weiters gibt Popov in [8] einen gründlichen Literaturüberblick über die Fahrermodellierung bei Motorrädern, welche aufgrund des ähnlichen dynamischen Verhaltens auch bei Fahrrädern von Interesse ist, bzw. Arbeiten zu Fahrradfahrermodellierungen beinhalten.

Historisch gesehen rückte das Fahrrad bereits früh nach seiner Erfindung ins Interesse der Wissenschaft. Eine der ersten Arbeiten war von William Rankine [9] und behandelt unter anderem bereits das notwendige Lenkverhalten zum Befahren einer Kurve beim Fahrradfahren: Zum Einleiten einer Kurve ist ein kurzzeitiges Lenken entgegen der gewünschten Kurvenrichtung notwendig (vgl. Abschnitt 3.5).

Arbeiten bezüglich der Stabilität von Fahrrädern wurden im Jahre 1899 von Bourlet [10] und Carvallo [11] sowie Whipple [12] veröffentlicht. Dabei sei die Arbeit von Francis Whipple besonders erwähnt, da er erstmals die nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Fahrrads angibt. Sein Fahrradmodell besitzt bereits die Möglichkeit, ein Lenkmoment vom Fahrer über eine Lenkungs-drehfeder zu berücksichtigen. Des weiteren wird sein Fahrradmodell, welches in der Literatur als „*Basic-Bicycle-*“ oder „*Whipple-Model*“ zu finden ist, noch heute als Vorlage für einfache Fahrradmodelle verwendet.

Ein weiterer Autor, welcher sich mit dem Thema der Stabilität beschäftigte ist Robin Sharp. Er veröffentlichte 1971 mit [13] eine Arbeit über das Stabilitätsverhalten von Motorrädern. Dabei untersucht er unter anderem den Einfluss der Modellierung des Reifen-Fahrbahn-Kontakts und trug mit seiner Arbeit wesentlich zum Verständnis des Stabilitätsverhaltens von Zweirädern bei.

Zum Thema Fahrermodellierung bei Zweirädern leistete David Weir mit seiner Doktorarbeit [14] 1972 einen bedeutenden Beitrag. Er untersucht in seiner Arbeit unter anderem verschiedene Möglichkeiten zur Regelung (Stabilisieren und Lenken) von Motorrädern, durch den Fahrer. Genauergesagt untersucht er verschiedene mögliche Fahrereingriffe (Stellgrößen) in Kombination mit verschiedenen zu regelnden Größen (Motorrad-Zustände wie Lenk- oder Rollwinkel). Dabei konnte er zeigen, dass für den einschleifigen Regelkreis der Rollwinkel als Regelgröße und das Lenkmoment als Fahrereingriff (Stellgröße) eine sehr gute Kombination zum Stabilisieren des Motorrads darstellen. Weir orientiert sich

bei der Reglerübertragungsfunktion des Menschens am „Crossover-Model“ von McRuer [15], welches seine Ursprünge in Arbeiten zum menschlichen Verhalten von Flugzeugpiloten hat.

In der jüngsten Vergangenheit entstand eine weitere Vielzahl an interessanten Veröffentlichungen. Schwab et al. bzw. Meijaard et al. verhalfen mit [16] und [6] dem „*Whipple-Model*“ zur Renaissance, indem sie eine überarbeitete Version als „*Benchmark-Model*“ veröffentlichten, welches von zahlreichen Autoren verwendet wird. In [6] wird unter anderem detailliert auf die Herleitung der Bewegungsgleichungen und deren Überprüfung eingegangen. Eine weitere umfassende Arbeit zum Thema Fahrrad publizierten Åström et al. mit [17]. Neben der Stabilität beschäftigten sie sich auch mit dem grundlegenden Phänomen von Zweirädern. Beispielsweise werden die Effekte des Oberkörperrollens (Oberkörperrollmoment), das Lenkverhalten sowie die Problematik bei Fahrrädern mit Hinterradlenkung behandelt. Des Weiteren beschäftigten sie sich mit dem Erlernen des Fahrradfahrens und untermauerten ihre Ergebnisse auch mit Versuchen.

Eine ähnlich umfassende Arbeit veröffentlichten Limebeer und Sharp mit [1], in welcher sie sich hauptsächlich mit der Stabilität, dem Lenkverhalten und einfachen Stabilisationsreglern beschäftigen.

Robin Sharp publizierte außerdem im Jahr 2006 in [18] eine Stabilisations- und Kursregelung auf Basis einer Mehrpunktvorausschau in Kombination mit einer Regelung nach dem Optimalitätsprinzip für Fahrräder. Dabei verwendet er als Fahrradmodell das Benchmark Modell und als Fahrereingriff das Lenkmoment. In [19] erweitert er seinen Regler um die Möglichkeit eines Fahrereingriffs über das Oberkörperrollmoment, wofür er das Benchmark Modell um einen zusätzlichen Oberkörper-Freiheitsgrad ergänzen musste. Dabei zeigt sich unter anderem, dass vor allem im unteren Geschwindigkeitsbereich, zur Regelung des Fahrrads über das Oberkörperrollmoment, wesentlich höhere Reglerverstärkungen notwendig sind. Außerdem beschäftigte sich Sharp in dieser Arbeit mit der Besonderheit des Benchmark Modells, dass die Determinante der Steifigkeitsmatrix bei einer bestimmten Geschwindigkeit Null wird, was sich stark auf das stationäre Verhalten des Benchmark Modells auswirkt. Siehe dazu Abschnitt 3.5.

Eine weitere Arbeit, [20], über die Regelung von Fahrrädern stammt von Schwab et al., worin verschiedene Möglichkeiten der Stabilisation verglichen werden. Genauer gesagt vergleichen Schwab et al. die Stabilisation durch einen Linear-Quadratic-Regulator (LQR) mit einem einfachen intuitiven Regelgesetz. Dabei wird einerseits das Benchmark Modell (Fahrereingriff – Lenkmoment) und andererseits ein erweitertes Benchmark Modell (zusätzlicher Fahrereingriff – Oberkörperrollmoment) verwendet. Es zeigt sich, dass es grundsätzlich möglich ist, beide Modelle mit den intuitiven Regelgesetzen einfach zu stabilisieren. Des Weiteren stellen sich bei der Stabilisation mittels LQR unrealistische Verstärkungen

und Eigenfrequenzen heraus.

Moore, Kooijman und Schwab beschäftigten sich in den letzten Jahren verstärkt mit den Bewegungen des Menschen beim Fahrradfahren. In [21] und [22] identifizieren sie mit jeweils unterschiedlichen Verfahren die maßgeblichen (dominanten) Bewegungen beim Fahrradfahren, näheres dazu Kapitel 3. In [23] beschäftigt sich diese Arbeitsgruppe weiters mit der Stabilität von Fahrradmodellen, welche passive Fahrermodelle (mit Modellierung der Oberkörper- bzw. Armbewegungen infolge des Lenkens) beinhalten. Weiters wird in dieser Arbeit auch auf regelungstechnischer Ebene (Modale Steuerbarkeitsbewertung) gezeigt, dass sich das Lenkmoment besser zum Beeinflussen des Fahrrads eignet, als das Oberkörperrollmoment.

Im Jahr 2011 veröffentlichten Hubbard et al. noch eine Arbeit, [24], über Fahrradfahrermodellierung auf Basis eines mehrschleifigen Regelkreises. Hubbard et al. berücksichtigen dabei unter anderem auch die neuromuskuläre Übertragungsfunktion des Menschen. Als Rückführgrößen zur Stabilisation (Regelung des Rollwinkels) geben sie den Lenkwinkel, die Rollwinkelgeschwindigkeit sowie den Rollwinkel selbst an und führen weiters zur Positionsregelung des Fahrrads den Gierwinkel und die laterale Position zurück. Ein detaillierterer Einblick in diese Arbeit ist in [25] zu finden.

## 1.4 Grundkonzept des Fahrermodells

Entsprechend den Aufgaben des Fahrradfahrers wird der Gesamtregelkreis „Mensch-Fahrrad“ in eine Längs-, Quer- und Stabilisationsregelung unterteilt, wobei die Längsregelung, welche der Regelung der Fahrgeschwindigkeit entspricht, in dieser Arbeit außer Acht gelassen wird. Diese Vereinfachung ist zulässig, da sie weitgehend unabhängig von der Quer- und Stabilisationsregelung ist.

Die Querregelung orientiert sich, wie bereits erwähnt, am Zwei-Ebenen-Modell von Donges [4], wobei das Lenkmoment als einziger Fahrereingriff gewählt wird (kein aktives Neigen des Oberkörpers). Es wird davon ausgegangen, dass der Fahrer infolge einer vorausliegenden Krümmungsänderung (Kursänderung) aus seiner Erfahrung heraus einen entsprechenden Rollwinkel  $\varphi_{\text{Steuerung}}$  des Fahrrads einzustellen wünscht, siehe Abbildung 1.1. Da dabei der Informationsfluss nur in eine Richtung geht, wird von einer antizipatorischen- oder vorausschauenden Steuerung gesprochen. Eine solche Steuerung erhält aber keine Informationen über die tatsächliche Lage des Fahrrads bezüglich der gewünschten Sollspur, wodurch Störungen und Unzulänglichkeiten der Steuerung nicht ausgeglichen werden können. Dadurch wird zusätzlich zur antizipatorischen Steuerungsebene eine zweite regelnde Ebene

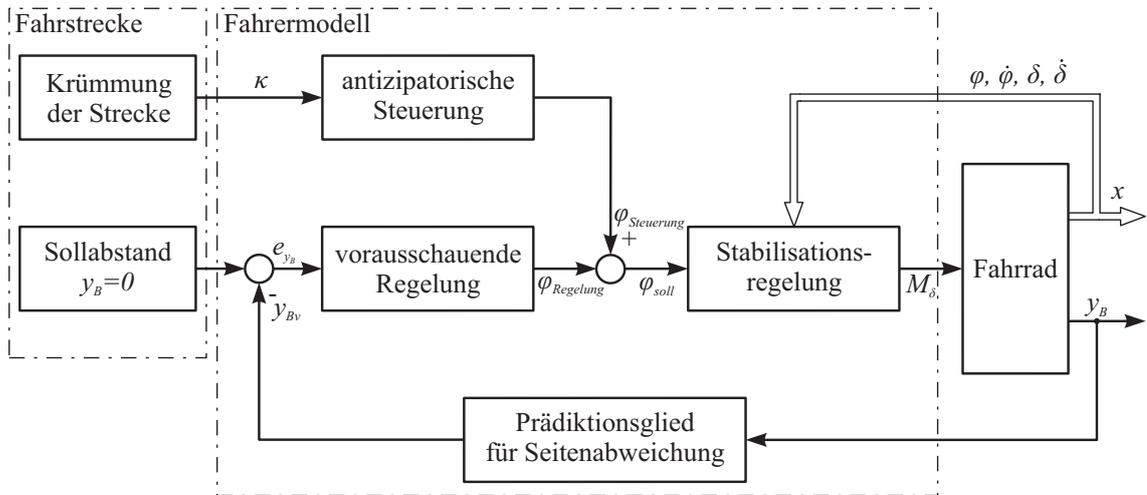


Abbildung 1.1: Konzept des Fahrradfahrermodells

notwendig, wobei Donges eine vorausschauende Regelung dafür vorschlägt. Hier wird angenommen, dass sich der Fahrer infolge einer voraussichtlichen (zukünftigen) Abweichung des Fahrrads von der Sollspur den Rollwinkel des Fahrrads um den Betrag  $\varphi_{\text{Regelung}}$  korrigieren möchte.

Beim Fahrrad kommt für den Fahrer und somit auch für das Fahrermodell noch die Besonderheit hinzu, dass es beim Fahren über einen weiten Geschwindigkeitsbereich instabil ist, vgl. Abschnitt 3.3. Deswegen benötigt vor allem die antizipatorische Steuerung einen Stabilisationsregler, um unabhängig von der vorausschauenden Regelung funktionsfähig zu sein. Mit diesem, im späteren auch nur Stabilisierer genannt, wird der vom Fahrer gewünschte Rollwinkel  $\varphi_{\text{soll}}$  des Fahrrads stabilisiert (geregelt) und in ein Lenkmoment  $M_\delta$  (Fahreingriff) umgewandelt.

Das beschriebene Konzept des Fahrradfahrermodells wird in Kapitel 4 genauer behandelt. Weiters wird darauf hingewiesen, dass in der nachfolgenden Arbeit mit der Bezeichnung *Fahrradmodell* das Modell des Fahrrads selbst inklusive des Fahrerkörper gemeint ist.

# Kapitel 2

## Regelungstechnische Grundlagen

Fahren, insbesondere das Fahrradfahren stellt ein regelungstechnisches Problem dar. Auf die zur Analyse und zum Entwurf des Fahrermodells notwendigen regelungstechnischen Grundlagen wird im folgenden Kapitel kurz eingegangen. Für eine ausführlichere Betrachtung wird auf die Lehrbücher [26], [27], [28] und [29] verwiesen, welche auch zugleich als Grundlage dieser Kurzzusammenfassung dienen.

### 2.1 Beschreibung des dynamischen Systems

Zur ingenieurmäßigen Behandlung von regelungstechnischen Problemen ist es notwendig, das dynamische System in mathematischer Form zu beschreiben. Bei diesem als Modellbildung bezeichneten Schritt wird die Realität in Form eines mathematischen Modells mittels Gleichungen (meistens Differentialgleichungen) abgebildet. Diese Gleichungen sind im Allgemeinen nichtlinear, wobei eine Linearisierung um den Arbeitspunkt in vielen Fällen zulässig ist. Eine solche Linearisierung hat mehrere Vorteile, unter anderem können dadurch leistungsfähige Methoden zur Analyse und Auslegung angewendet werden, [28]. Nachfolgend wird deshalb von einer Linearisierung um den Arbeitspunkt ausgegangen.

#### 2.1.1 Beschreibung mittels Übertragungsfunktion

Das Verhalten eines dynamischen Modells kann mittels Übertragungsfunktionen beschrieben werden. Der dabei notwendige Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich erfolgt mit Hilfe der Laplace-Transformation, welche im folgenden kurz erklärt wird.

## Laplace-Transformation

Durch die Laplace-Transformation werden Differentialgleichungen in einfachere algebraische Gleichungen übergeführt. Mathematisch gehört sie zur Gruppe der Integraltransformationen, welche eine Funktion  $x(t)$  vom Originalbereich (Zeitbereich) in den Bildbereich (Frequenzbereich)  $X(s)$  überführt. Die dabei entstehenden algebraischen Gleichungen vereinfachen zahlreiche Problemstellungen, wie das Lösen von Differentialgleichungssystemen. Die Definition der Laplace-Transformation ergibt sich mit der komplexen Laplace-Variable  $s = \delta + i\omega$  zu:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s), \quad (2.1)$$

wobei für  $t < 0$  die Funktion  $x(t)$  identisch gleich Null sein soll. Bezüglich der Frage der Konvergenz des uneigentlichen Integrals wird auf die Literatur [29] verwiesen. Die Rück- bzw. die inverse Laplace-Transformation  $\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$  stellt den Übergang zwischen Bildbereich und Originalbereich dar. Bei der praktischen Anwendung werden nicht die Definitionsgleichungen, sondern Korrespondenztabelle mit den zugehörigen Rechenregeln verwendet, [26]. Aus diesem Grund wird auf eine Angabe der Definitionsgleichung für die Rücktransformation verzichtet.

## Übertragungsfunktion

Die Differentialgleichung

$$b_n y^{(n)}(t) + \dots + b_2 \ddot{y}(t) + b_1 \dot{y}(t) + b_0 y(t) = a_0 u(t) + a_1 \dot{u}(t) + a_2 \ddot{u}(t) + \dots + a_m u^{(m)}(t) \quad (2.2)$$

beschreibt den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße des dynamischen Systems. Die dazugehörige Übertragungsfunktion ist definiert als

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_m s^m + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_2 s^2 + a_1 s + b_0} \quad (2.3)$$

und ergibt sich durch Anwendung der Laplace-Transformation bei verschwindenden Anfangsbedingungen aus Gleichung (2.2), [26]. In Blockschaltbildern wird die Übertragungsfunktion mittels Übertragungsglied, siehe Abbildung 2.1, dargestellt.

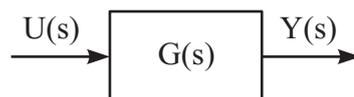


Abbildung 2.1: Übertragungsglied

### 2.1.2 Beschreibung mittels Zustandsvariablen

Der Zustandsraum stellt eine Möglichkeit zur Beschreibung dynamischer Systeme im Zeitbereich dar. Zur Darstellung werden alle systembeschreibenden Differentialgleichungen (z.B. Gleichung (2.2)) in einem System von Differentialgleichungen 1. Ordnung übergeführt. Ein lineares zeitinvariantes „Multiple-Input Multiple-Output System“ (MIMO-System) lässt sich somit durch die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.4)$$

und der Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.5)$$

beschreiben. Darin repräsentiert  $\mathbf{x}$  den Zustandsvektor der Dimension  $(n \times 1)$ ,  $\mathbf{u}$  den Eingangsvektor mit der Dimension  $(r \times 1)$ ,  $\mathbf{y}$  den Ausgangsvektor mit der Dimension  $(m \times 1)$ ,  $\mathbf{A}$  die Systemmatrix der Dimension  $(n \times n)$ ,  $\mathbf{B}$  die Eingangsmatrix der Dimension  $(n \times r)$ ,  $\mathbf{C}$  die Ausgangsmatrix der Dimension  $(m \times n)$  und  $\mathbf{D}$  die Durchgangsmatrix der Dimension  $(m \times r)$ .

Ein „Single-Input Single-Output System“ (SISO-System) stellt einen Spezialfall des hier angegebenen MIMO-Systems mit  $r$  Eingängen und  $m$  Ausgängen dar. Bei einem SISO-System ( $r = 1$ ,  $m = 1$ ) werden aus den Ein- und Ausgangsvektoren Skalare, sowie aus den Matrizen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$ , Vektoren entsprechender Dimension (welche meistens mit Kleinbuchstaben bezeichnet werden), [27], [29].

In Abbildung 2.2 ist ein geschlossener Regelkreis einer Zustandsregelung mit Zustandsvektorrückführung als Blockschaltbild dargestellt, wobei die Zustandsgleichung (2.4) und die Ausgangsgleichung (2.5) für den Spezialfall eines SISO-System, im rechten als Zustandsraum bezeichneten Teil, ersichtlich sind.

#### Steuerbarkeit

Die Steuerbarkeit gibt Aufschluss darüber, ob man mittels des Eingangs  $\mathbf{u}(t)$  einen gewünschten Zustand des Systems erreichen kann. Lunze [29] gibt dazu folgende Definition an:

*„Ein System (2.4) heißt vollständig steuerbar, wenn es in endlicher Zeit  $t_e$  von jedem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße  $\mathbf{u}[0, t_e]$  in einem beliebig vorgegebenen Endzustand  $\mathbf{x}(t_e)$  übergeführt werden kann.“*

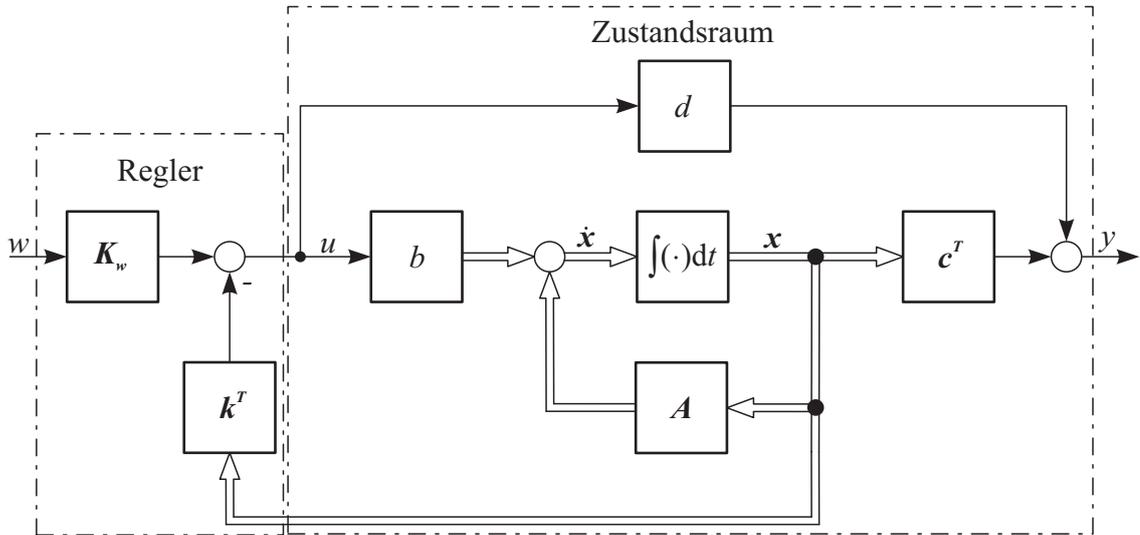


Abbildung 2.2: Blockschaltbild eines Zustandsraummodells

Zur Überprüfung der Steuerbarkeit stehen mehrere Kriterien [29] zur Verfügung. Ein einfaches und oft angewendetes Kriterium ist das von Kalman [30]. Es besagt, dass ein System (2.4) genau dann vollständig zustandssteuerbar ist, wenn die  $(n, n \cdot m)$ -Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.6)$$

den Rang  $n$ , also vollen Rang, besitzt. Bei nur einer Eingangsgröße ( $m = 1$ ) geht die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_S$  in eine quadratische Matrix über. Das System ist ebenfalls vollständig zustandssteuerbar, wenn  $\mathbf{Q}_S$  vollen Rang besitzt bzw. die Determinante ungleich Null ist.

Falls das System nicht vollständig zustandssteuerbar ist, können die nicht steuerbaren Eigenmodes über die zugehörigen Links-Eigenvektoren<sup>1</sup>  $\mathbf{l}_i^*$  bestimmt werden. Der zum nichtsteuerbaren Eigenwert  $\lambda_i$  gehörende Links-Eigenvektor  $\mathbf{l}_i^*$  spannt den Nullraum der transponierten Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_S$  auf  $\mathbf{l}_i^* \in \text{null}(\mathbf{Q}_S^T)$ , [23].

Will man jedoch bei einem Mehrgrößensystem wie (2.4) den Einfluss einzelner Eingangsgrößen z. B. auf die Steuerbarkeit der Eigenmodes getrennt untersuchen, ist eine Aufspaltung der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  in einzelne Eingangsvektoren  $\mathbf{b}_j$  notwendig, wobei die Eingangsvektoren  $\mathbf{b}_j$  den Spalten der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  entsprechen. Infolge einer solchen Aufspaltung ergibt sich für ein System mit zwei Eingangsgrößen die Systemgleichung zu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u_1 + \mathbf{b}_2 u_2. \quad (2.7)$$

<sup>1</sup>Der Links-Eigenvektor  $\mathbf{l}_i^*$ , welcher zum Eigenwert  $\lambda_i$  gehört, berechnet sich aus der Gleichung  $\mathbf{A}^T \mathbf{l}_i^{*T} = \lambda_i \mathbf{l}_i^{*T}$ , näheres dazu siehe Anhang A.

Betrachtet man nun jeweils nur einen Eingangsvektor  $b_j$  der Gleichung (2.7), können die Zustandssteuerbarkeit sowie die nicht steuerbaren Eigenmodes mittels der bereits erwähnten Kriterien für jede betrachtete Eingangsgröße  $u_j$  getrennt angegeben werden.

### Bewertung der Steuerbarkeit

Die bisher gezeigten Steuerbarkeitskriterien geben nur Aufschluss darüber, ob ein System vollständig zustandssteuerbar ist, oder nicht, bzw. nur welche der Eigenmodes nicht steuerbar sind. In vielen Fällen ist es aber auch von Interesse, wie gut das System zustandssteuerbar ist bzw. welche der Eingangsgrößen besser geeignet ist, um das System zu beeinflussen. Diese Fragestellungen können z. B. mittels dem Bewertungsmaß für die modale Steuerbarkeit von Hamdan und Nayfeh [34] beantwortet werden. Vor der Erörterung dieses Bewertungsmaßes wird zuerst auf den Aufbau der allgemeinen zeitlichen Lösung des Zustandsraumproblems ((2.4), (2.5)) eingegangen. Diese ergibt sich mittels Exponentialansatz unter der Annahme  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$  zu:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \quad (2.8)$$

Mit Hilfe der Identität <sup>2</sup>

$$e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i e^{\lambda_i(t-\tau)} \mathbf{l}_i^* \quad (2.9)$$

für die Matrizenexponentialfunktion [35], der Annahme, dass die Durchgangsmatrix  $\mathbf{D}$  identisch gleich Null ist und dass nur eine Eingangsgröße  $u_j$  betrachtet wird, lässt sich Gleichung (2.8) wie folgt anschreiben:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \int_0^{t_e} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i e^{\lambda_i(t-\tau)} \mathbf{l}_i^* \mathbf{b}_j u_j(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

In Gleichung (2.10) ist nun einerseits der Aufbau der allgemeinen Lösung aus den einzelnen Eigenschwingungsformen  $\mathbf{r}_i e^{\lambda_i(t-\tau)}$  (vgl. Abschnitt 2.2.3) gut erkennbar, andererseits wird ersichtlich, dass die Eingangsgröße  $u_j$  die Eigenschwingungsform über den Term  $\mathbf{l}_i^* \mathbf{b}_j$  beeinflusst. Mittels dieses Terms lassen sich nun auch Aussagen darüber treffen, wie „gut“ ein System durch den Eingang  $j$  beeinflusst werden kann.

Hamdan und Nayfeh definieren in [34] ihr Bewertungsmaß für die Modale Steuerbarkeit als den Winkel  $\beta_{ij}$ , welcher vom Links-Eigenvektor  $\mathbf{l}_i^*$  und vom Eingangsvektor  $\mathbf{b}_j$  eingeschlossen wird und sich über das Skalarprodukt mit

$$\cos(\beta_{ij}) = \frac{|\mathbf{l}_i^* \mathbf{b}_j|}{\|\mathbf{l}_i^*\| \|\mathbf{b}_j\|} \quad (2.11)$$

<sup>2</sup> $\lambda_i$  entspricht dem  $i$ -ten Eigenwert der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{r}_i$ , bzw.  $\mathbf{l}_i^*$  dem zugehörigen Rechts-Eigenvektor bzw. Links-Eigenvektor, näheres siehe wiederum Anhang A.

berechnet. Aus Gleichung (2.11) ist zudem ersichtlich, dass durch die Definition des Bewertungsmaßes als Winkel der Einfluss der Skalierung der Vektoren eliminiert wird.

Für die Anwendung des allgemein formulierten Bewertungsmaßes auf eine Zustandsraumdarstellung<sup>3</sup>

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{b}_j \end{bmatrix}}_{b_j} u_j, \quad (2.12)$$

welche auf dynamischen Systemen zweiter Ordnung wie z. B.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = \bar{b}_j u_j \quad (2.13)$$

basieren, sind noch Anpassungen notwendig, um eine sinnvolle Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten. Bei der Darstellung (2.12) ist der Eingangsvektor  $b_j$  infolge der Transformation auf ein System erster Ordnung zur Hälfte mit Nullen besetzt. Folglich haben auch die zugehörigen Komponenten  $l_{iI}^*$  des Links-Eigenvektors ( $l_i^* = [l_{iI}^*, l_{iII}^*]$ ) keinen Einfluss auf das Skalarprodukt. Der Teilvektor  $l_{iI}^*$  hat demnach auch keinen Einfluss auf die Lösung des Systems, sehr wohl aber auf den Winkel  $\beta_{ij}$ . Deshalb ist es sinnvoll, bei der Berechnung des Bewertungsmaßes für dynamische Systeme zweiter Ordnung, aus der Darstellung (2.12), nur die Komponente  $l_{iII}^*$  und die im Skalarprodukt korrespondierenden Elemente des Vektors  $b_j$ , zu verwenden.

Des weiteren lässt sich das Bewertungsmaß von Hamdan und Nayfe [34] auch direkt auf das dynamische System zweiter Ordnung (2.13) anwenden, wobei sich der für das Bewertungsmaß relevante Term der Lösung zu  $\bar{l}_i \bar{b}_j$  ergibt. Dabei steht  $\bar{l}_i$  für den Links-Eigenvektor, welcher direkt aus dem System zweiter Ordnung berechnet wird, vgl. Anhang A. Dieses Skalarprodukt ist mit dem aus der allgemeinen Lösung (2.10) des Zustandsraumproblems (2.12) ident, da der Zusammenhang

$$\bar{l}_i \bar{b}_j = \underbrace{\left[ \dots \quad \bar{l}_i \right]}_{l_i^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{b}_j \end{bmatrix}}_{b_j} \quad (2.14)$$

gilt. Siehe dazu auch Anhang A. Wie aus der Gleichung (2.14) ersichtlich, ist der für das Bewertungsmaß relevante Term der allgemeinen Lösung unabhängig von der Matrix  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix}$  (Massenmatrix des erweiterten Systems). Dennoch würde bei der Anwendung des Bewertungsmaßes auf die Zustandsraumgleichung (2.12) diese Matrix ins Bewertungsmaß über die Norm im Nenner der Gleichung (2.11) eingehen. Um nun unabhängig von

<sup>3</sup> $\mathbf{I}$  stellt die Einheitsmatrix und  $\mathbf{0}$  die Nullmatrix der entsprechenden Größe dar.

der Darstellung, (2.12) oder (2.13), identische Bewertungsmaße zu erhalten, werden auch bei der Zustandsraumdarstellung von dynamischen Systemen zweiter Ordnung (2.13) die Vektoren  $\bar{\mathbf{l}}_i$  und  $\bar{\mathbf{b}}_j$  verwendet. Der Links-Eigenvektor  $\bar{\mathbf{l}}_i$  kann für die Zustandsraumdarstellung 2.12 aus den im Anhang A angegebenen Zusammenhängen ermittelt werden. Der Winkel  $\beta_{ij}$  ergibt sich somit zu

$$\cos(\beta_{ij}) = \frac{|\bar{\mathbf{l}}_i \bar{\mathbf{b}}_j|}{\|\bar{\mathbf{l}}_i\| \|\bar{\mathbf{b}}_j\|}. \quad (2.15)$$

$\beta_{ij}$  gibt nun Aufschluss über die „Güte“ der Steuerbarkeit. Je näher sich der Winkel  $\beta_{ij}$  den  $90^\circ$  annähert, desto schlechter ist der  $i$ -te Eigenschwingungsvorgang des Systems vom  $j$ -ten Eingang zu beeinflussen. Erreicht  $\beta_{ij}$   $90^\circ$ , ist der Eigenschwingungsvorgang nicht mehr beeinflussbar, da in diesem Fall das Skalarprodukt Null ist. Der betrachtete Eingang hat somit keinen Einfluss auf die Lösung und das System ist folglich auch nicht vollständig zustandssteuerbar, [34] , [23].

## 2.2 Regelkreis

### 2.2.1 Standard Regelkreis

Das Blockschaltbild eines Eingrößenregelkreises ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Dabei repräsentiert  $G_R(s)$  die Übertragungsfunktion des Reglers,  $G_{SZ}(s)$  die Störübertragungsfunktion und  $G_S(s)$  die Übertragungsfunktion der Regelstrecke. Diese beinhaltet laut DIN 19226 [37] den aufgabenmäßig zu beeinflussenden Teil des Systems. Es sei vollständigshalber angemerkt, dass sich der hier verwendete Begriff „Regler“ nicht mit dem in der DIN 19226 deckt, da laut Norm die Subtraktionsstelle  $E(s) = Y(s) - E(s)$  auch zum Regler gezählt werden müsste.

Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ist definiert als  $G_o(s) = G_R(s) G_S(s)$ , mittels dieser ergibt sich die Führungsübertragungsfunktion zu

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}. \quad (2.16)$$

Diese repräsentiert das Verhalten der Regelgröße  $Y(s)$  in Abhängigkeit von der Führungsgröße  $W(s)$  für den Fall eines geschlossenen Regelkreises und einer Störgröße identisch gleich Null ( $Z(s) = 0$ ). Die Störübertragungsfunktion

$$G_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G_{SZ}(s) G_S(s)}{1 + G_o(s)} \quad (2.17)$$

beschreibt das Verhalten des geschlossenen Regelkreises bei einer Änderung der Störgröße  $Z(s)$ , wenn  $W(s) = 0$  gilt.

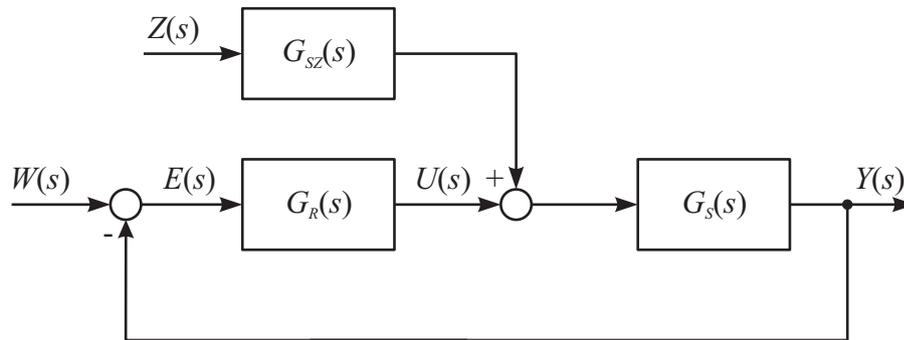


Abbildung 2.3: Blockschaltbild eines Eingrößenregelkreises

## 2.2.2 Anforderungen an den Regelkreis

An einen Regelkreis werden je nach Aufgabenstellung verschiedenste Anforderungen gestellt. Unter anderem sind dies Anforderungen an die stationäre Genauigkeit, die Dynamik sowie die Empfindlichkeit auf Variationen der Regelstrecke. Unabhängig davon muss die Stabilität des geschlossenen Regelkreises in allen Fällen gewährleistet sein. Im nachfolgenden wird wiederum nur auf die, für diese Arbeit relevanten Anforderungen eingegangen.

### Statische Anforderungen

Die stationäre Abweichung der Regelgröße  $Y(s)$  von ihrem Sollwert  $W(s)$ , sprich der Regelfehler, muss genügend klein sein. Zur Überprüfung dieser Anforderung werden Testfunktionen verwendet, wobei nachfolgend nur die sprungförmige Änderung betrachtet wird.

Die Übertragungsfunktion für den Regelfehler infolge einer Führungsgrößenänderung berechnet sich für den Regelkreis in Abbildung 2.3 folgendermaßen:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} W(s). \quad (2.18)$$

Daraus ergibt sich der stationäre Regelfehler für eine sprungförmige Änderung des Sollwertes (Führungsgröße), welche dem Einheitsprung ( $W(s) = 1/s$ ) entspricht zu:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_o(s)} \frac{1}{s}. \quad (2.19)$$

Für das System in Abbildung 2.3 folgt, dass für  $t \rightarrow \infty$  der stationäre Regelfehler gegen Null strebt, falls die offene Übertragungsfunktion globales Integrales-Verhalten<sup>4</sup> (I-Verhalten) besitzt.

<sup>4</sup>I-Verhalten liegt vor, wenn im Nenner der Übertragungsfunktion  $s$  herausgehoben werden kann, ohne Möglichkeit der Kürzung mit dem Zähler.

Weiters berechnet sich die stationäre Regelabweichung des betrachteten Regelkreises (Abbildung 2.3) für eine Störung, welche dem Einheitssprung ( $Z(s) = 1/s$ ) entspricht folgendermaßen:

$$e(\infty) = -y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} -sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_s(s) G_{sz}(s) 1}{1 + G_o(s)} \frac{1}{s}. \quad (2.20)$$

Aus der Gleichung (2.20) folgt, dass unabhängig von der Streckenübertragungsfunktion  $G_S(s)$  der Regler  $G_R(s)$  globales I-Verhalten aufweisen muss, um zu gewährleisten, dass der stationäre Einfluss einer sprungförmigen Störung verschwindet. Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass für den betrachteten Fall globales I-Verhalten von ausschließlich der Strecke ( $G_S(s)$ ) nicht ausreichend ist, um die letztere Forderung zu erfüllen. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Störung auf die Stellgröße  $U(s)$  und nicht auf die Regelgröße  $Y(s)$  wirkt.

### Dynamische Anforderungen

Die dynamischen Anforderungen des Führungsverhaltens beschreiben unter anderem das Verhalten der Regelgröße nach einer Änderung der Führungsgröße. In Abbildung 2.4 ist die Sprungantwort<sup>5</sup> des geschlossenen Regelkreises dargestellt. Folgende Größen, welche in der Sprungantwort ersichtlich sind, können unter anderem zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Regelkreises verwendet werden:

- maximale Überschwingweite  $e_m$
- Anregelzeit  $T_{an}$
- $T_{max}$ -Zeit
- Ausregelzeit  $T_r$ , welche für das Toleranzband  $2\Delta$  angegeben wird

### 2.2.3 Stabilität

In der Regelungstechnik treten mehrere Stabilitätsbegriffe auf, wobei die Zustandsstabilität und die Eingangs-Ausgangs-Stabilität (E/A-Stabilität) die wichtigsten darstellen. Diese beiden Stabilitätsbegriffe unterscheiden sich in der zugrundeliegenden Betrachtungsweise. Bei der Zustandsstabilität, oder auch Stabilität im Sinne von Ljapunov, betrachtet man das System in Hinblick auf das Verhalten gegenüber einer Störung der Anfangsbedingungen (Anfangsstörungen). Hingegen untersucht man bei der Eingangs-Ausgangs-Stabilität (E/A-Stabilität), welche auch als Bounded Input Bounded Output Stabilität (BIBO-Stabilität) bezeichnet wird, das Verhalten eines Systems infolge einer Eingangsgröße, [29], [31].

<sup>5</sup>Zeitlicher Verlauf des Ausgangs infolge eines sprungförmigen Eingangs.

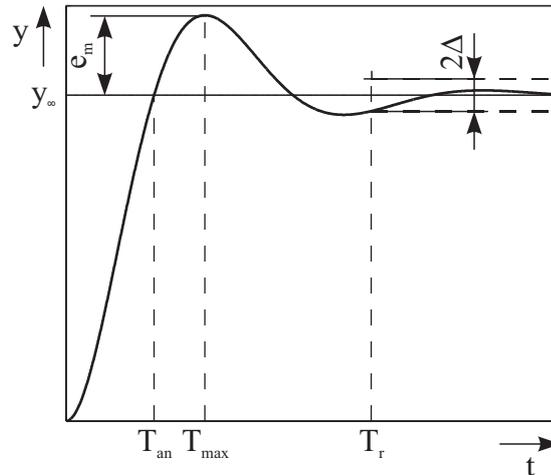


Abbildung 2.4: Sprunganwort für dynamische Spezifikationen

### Stabilität im Sinne von Ljapunows

Die partikuläre Lösung  $\mathbf{x}_0(t)$  eines dynamischen Systems 1. Ordnung ist stabil im Sinne von Ljapunow, wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\eta(\epsilon)$  existiert, sodass für jede beliebig gestörte Lösung  $\mathbf{x}(t)$ , welche

$$\|\mathbf{x}_0(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \eta(\epsilon) \quad (2.21)$$

erfüllt,

$$\|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad (2.22)$$

für alle  $t > t_0$  gilt. Von asymptotischer Stabilität im Sinne von Ljapunow spricht man, wenn zusätzlich noch gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0. \quad (2.23)$$

Für ein lineares bzw. linearisiertes System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.24)$$

lassen sich folgende Stabilitätsaussagen zeigen:

- Das System (2.24) ist asymptotisch stabil im Sinne von Ljapunow, wenn für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$  gilt,  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ . Die Anzahl der Eigenwerte des Systems entspricht der Anzahl der Spalten oder Reihen der quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$ .
- Das System (2.24) ist instabil, wenn eine oder mehrere Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  positive Realteile besitzen.
- Treten Eigenwerte mit verschwindenden Realteilen auf, ist eine weitere Untersuchung des Problems notwendig, siehe dazu [31].

Die obigen Stabilitätsaussagen werden ersichtlich, wenn man sich die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (2.24) ansieht, [31], [29], [32].

### **E/A-Stabilität**

Das System ((2.4), (2.5)) wird als E/A-stabil bezeichnet, falls bei verschwindenden Anfangsbedingungen  $x(t_0) = 0$  und einem beliebigen beschränkten Eingangssignal  $|u(t)| < u_{\max}$  (für alle  $t > 0$ ) der Ausgang beschränkt bleibt ( $y(t) < y_{\max}$  für alle  $t > 0$ ).

Zur Überprüfung der E/A-Stabilität können mehrere Kriterien [29] verwendet werden. Ein sehr nützliches besagt folgendes:

Besitzen sämtliche Pole der Übertragungsfunktion  $G(s)$  eines Systems ((2.4), (2.5)) einen negativen Realteil ( $\operatorname{Re}(s_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n$ ), ist das System E/A-stabil.

Des weiteren lässt sich zeigen, dass ein System E/A-stabil ist, wenn asymptotische Stabilität im Sinne von Ljapunov vorliegt. Die Umkehrung dieser Aussage ist jedoch nicht zulässig, [29].

Zur Überprüfung der Stabilität wurden auch zahlreiche Kriterien entwickelt, die ohne Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms auskommen. Im Frequenzbereich stellt das Nyquist-Kriterium in allgemeiner und vereinfachter Form ein solches Kriterium dar, welches auch zur Reglerauslegung verwendet werden kann.

Im Zuge von Stabilitätsuntersuchungen wird oft von stabilen bzw. instabilen Eigenmodes (Eigenschwingungsformen) oder nur Modes gesprochen. Unter einem Eigenmode eines dynamischen Systems (2.24) versteht man den zum Eigenvektor  $\mathbf{v}_i$  gehörenden Lösungsvektor  $\mathbf{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$  des Systems, wobei der Eigenwert  $\lambda_i$  Aufschluss über die Stabilität des dazugehörigen Eigenmodes gibt. Aus der Linearkombination der Eigenmodes  $\mathbf{x}_i(t)$  ergibt sich die allgemeine Lösung des Systems. Die Eigenmodes besitzen, je nach Eigenwert, eine entsprechende Frequenz  $f_i$  und Dämpfung  $D_i$ . Bei einem oszillierenden Eigenmode (konjugiert komplexer Eigenwert  $\lambda_i = \alpha_i + i\omega_i$ ) ergibt sich das Lehr'sche Dämpfungsmaß zu

$$D_i = \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2}}, \quad (2.25)$$

und die Frequenz in Hertz

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}. \quad (2.26)$$

Bei einem nicht-oszillierenden Eigenmode (reeler Eigenwert) ist die Frequenz 0 Hz und das Dämpfungsmaß  $D_i = \pm 1$ , [32].

## 2.3 Reglerentwurf

Beim Reglerentwurf wird versucht, die Übertragungsfunktion des Reglers  $G_R(s)$  bzw. das Reglergesetz so zu gestalten, dass das Verhalten des geschlossenen Regelkreises den vorher beschriebenen Anforderungen entspricht. Aus den zahlreichen Entwurfsverfahren für Regler wird nachfolgend das Wurzelortskurvenverfahren und die Auslegung eines Führungsreglers durch Zustandsvektorrückführung behandelt. Im Frequenzbereich besteht z. B. noch die Möglichkeit der Reglerauslegung mittels der Frequenzkennlinie, welche auf dem vereinfachten Nyquist-Kriterium basiert. Für die in dieser Arbeit auftretenden Problemstellungen sind aber die Voraussetzungen (offener Regelkreis besitzt keine instabilen Pole und maximal ein Pol im Ursprung, [26]) für die Anwendung des vereinfachten Nyquist-Kriterium nicht immer erfüllt und infolge dessen wird es nicht behandelt.

### Wurzelortskurven

Der geometrische Ort aller Pole des geschlossenen Regelkreises, welcher den Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $G_0(s) + 1 = 0$ , in Abhängigkeit eines Verstärkungsparameters  $K$  entspricht, ist die Wurzelortskurve. Da die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises Aufschluss über die Dynamik und Stabilität gibt, können die Wurzelortskurve und ihre Konstruktionsvorschriften als nützliches Werkzeug zur Reglerauslegung verwendet werden. Leistungsfähige Programmpakete wie die „Control System Toolbox“ von Matlab, zum Erstellen der Wurzelortskurve, erleichtern die Reglerauslegung sehr. Bezüglich der Regeln und Konstruktionsvorschriften zum Erstellen der Wurzelortskurve wird auf die Literatur [26] verwiesen.

### Zustandsraum

Beim Reglerentwurf im Zustandsraum muss bezüglich der Art des Reglers unterschieden werden. Ein Führungsregler durch Zustandsvektorrückführung ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Dieser ist unter anderem dadurch charakterisiert, dass zur Berechnung der Stellgröße  $u$  der gesamte Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  verwendet wird. Im Unterschied dazu wird bei einer Führungsregelung mittels Ausgangsvektorrückführung, wie der Name schon sagt, nur der Ausgangsvektor  $\mathbf{y}$  zur Bildung der Stellgröße verwendet. Auf die Ausgangsvektorrückführung und weitere Zustandsregelungstypen wird in dieser Arbeit nicht näher eingegangen.

Zur Berechnung des sogenannten Rückführvektors  $\mathbf{k}^T$  und der Vorverstärkung  $K_w$  existieren wiederum zahlreiche Verfahren, wobei in dieser Arbeit nur die grundlegende Auslegung mittels Polvorgabe [26] behandelt wird. Mit dem Regelgesetz,

$$u = K_w w - \mathbf{k}^T \mathbf{x}, \quad (2.27)$$

dargestellt in Abbildung 2.2, kann die Zustandsgleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}K_w w \quad (2.28)$$

berechnet werden. Aus Gleichung (2.28) wird ersichtlich, dass die Pole des geschlossenen Regelkreises (Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$ ) über die  $n$  freien Parameter des Rückführvektor  $\mathbf{k}^T$  frei gewählt werden können. Folglich wird durch die Wahl der Pole des geschlossenen Regelkreises der Rückführvektor  $\mathbf{k}^T$  eindeutig definiert, falls das System (2.4) vollständig zustandssteuerbar ist. Die Vorverstärkung  $K_w$  wird so bestimmt, dass nach einer sprungförmigen Führungsgrößenänderung und  $z = 0$  der stationäre Regelfehler gegen Null strebt (stationäre Anforderung des Regelkreises). Im stationären Fall ( $\dot{\mathbf{x}} = 0$ ) ist folglich  $y = w$  und die Vorverstärkung berechnet sich wie folgt:

$$K_w = \left[ (\mathbf{c}^T - d\mathbf{k}^T) (\mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \right]^{-1}. \quad (2.29)$$

## 2.4 Nichtphasenminimumsysteme

Bei Phasenminimum-Systemen besteht ein eindeutiger Zusammenhang<sup>6</sup> zwischen dem Amplitudengang und dem Phasengang. Für solche Systeme kann aus Kenntnis des Amplitudenganges der Phasengang gezeichnet werden. Im Unterschied dazu weisen Nichtphasenminimumsysteme eine größere Phasenverschiebung auf als dies vom Amplitudengang zu erwarten wäre. Bei der Übertragungsfunktion mit der Darstellung

$$G(s) = \frac{K}{s^n} \frac{1 + \dots}{1 + \dots}, \quad (2.30)$$

führen Pole und/oder Nullstellen mit positivem Realteil zu Nichtphasenminimumverhalten [36]. Des weiteren haben Totzeitglieder (nicht rationales Übertragungsglied) Nichtphasenminimumverhalten, wobei ein reines Totzeitglied zu einer zeitlichen Verzögerung des Eingangssignals führt. Die Pole mit positiven Realteilen führen wie vorher beschrieben zu instabilem Verhalten der Übertragungsfunktion. Die Nullstellen mit positivem Realteil haben aber auch grundlegende Auswirkungen auf das Systemverhalten, welche im Anschluss beschrieben werden, [33]. Bei Systemen, welche eine ungerade Anzahl von Nullstellen mit positivem Realteil besitzen, führt eine Änderung des Eingangs zunächst zu einer Veränderung der Ausgangsgrößen, die entgegengesetzt der beabsichtigten Wirkung ist. Diese Aussage gilt jedoch nur für Systeme, bei welchen der Zählergrad der Übertragungsfunktion kleiner ist als der Nennergrad. Dieser Sachverhalt ist mit der Sprungantwort des

<sup>6</sup>Ein Änderung von  $x \cdot 20\text{dB/Dekade}$  im Amplitudengang entspricht einer Phasenverschiebung von  $x \cdot 90^\circ$  bei der asymptotisch angenäherten Frequenzkennlinie.

Systems  $G(s) = (1 - s)/(1 + 2s + s^2)$  in Abbildung 2.5 dargestellt und wird auch als Allpassverhalten<sup>7</sup> bezeichnet.

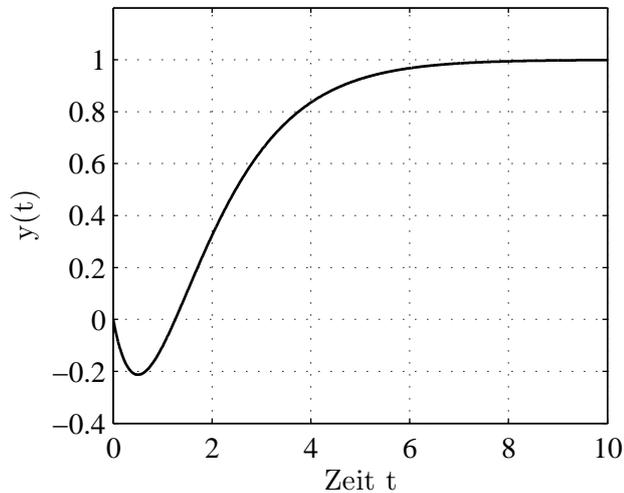


Abbildung 2.5: Sprunganwort eines Nichtphasenminimumsystems

Bezüglich Nichtphasenminimumsystemen infolge von positiven Nullstellen in regelungstechnischen Aufgaben schreiben Hoagg und Bernstein in [33]: „*From a control-theoretic point of view, a nonminimumphase zero in the loop transfer function  $L$  is arguably the worst feature a system can possess.*“. Im Laufe der Arbeit werden einige konkrete negative Auswirkungen eines klassischen Nichtphasenminimumsystems am Beispiel Fahrrad gezeigt.

<sup>7</sup>Als Allpass wird eine Übertragungsfunktion bezeichnet, wenn ihr Betrag über den gesamten Frequenzbereich identisch gleich 1 ist und zu jeder Nullstellen ein zur Imaginärachse symmetrischer Pol existiert und umgekehrt. Beim typischen Allpassverhalten schlägt die Sprungantwort des betrachteten Systems zunächst entgegen der Richtung ihres endgültigen Verlaufs aus, [29].

# Kapitel 3

## Die Regelstrecke

Bei der Regelungsaufgabe „Fahren“ umfasst die Regelstrecke (vgl. Abschnitt 2.2.1) das gesamte Fahrzeug. Für den vorliegenden Fall des Fahrradfahrens entspricht das Fahrrad inklusive Fahrerkörper der Regelstrecke, welche nachfolgend genauer behandelt wird. Zuerst wird auf die Modellierung des Fahrrads allgemein eingegangen, anschließend auf die verwendeten Fahrradmodelle und deren Parameter. Dabei soll ein besonderes Augenmerk auf die Wahl der Stellgrößen gelegt werden, sprich auf die Eingriffe, welche der Fahrradfahrer aufbringen kann, um das System zu beeinflussen (Fahrereingriffe). Dazu wird unter anderem eine modale Steuerbarkeitsanalyse durchgeführt. Zum Abschluss werden das Stabilitätsverhalten sowie allgemeine Eigenschaften der Regelstrecke behandelt.

### 3.1 Modellbeschreibung

Die Komplexität des mathematischen Modells ist abhängig von der jeweiligen Detaillierungstiefe. Diese sollte an das jeweils zu lösende Problem angepasst sein. Åström [17] schreibt darüber: *„When modelling a physical object, it is important to keep the purpose of the model in mind“*.

Die Modelle in dieser Arbeit sollten geeignet sein, Fahrmanöver mit großem Kurvenradius  $\rho$  bzw. kleiner Krümmung  $\kappa$  zu beschreiben. Durch diese Beschränkung auf Manöver mit großen Kurvenradien kann davon ausgegangen werden, dass nur kleine Roll- und Lenkwinkel auftreten, womit eine Linearisierung um die Geradeausfahrt als sinnvoll erscheint, und auch durchgeführt wird. Diese Annahme wird durch andere Arbeiten [18], [24] unterstützt, welche sich ebenfalls mit der Stabilisation und Kursverfolgung bei Fahrrädern beschäftigen.

Des Weiteren müssen Annahmen und Vereinfachungen getroffen werden, da ein detailliertes Modell eines Fahrrads zu aufwendig und komplex werden würde. Unter anderem muss die

Wahl der zu modellierenden Fahrradkomponenten, die Betrachtung der Elastizitäten der Komponenten, die Modellierung des Fahrbahn-Reifenkontaktes, oder die Frage nach der Komplexität der Modellierung des Fahrers (des Fahrerkörpers) betrachtet werden, [17]. Die nachfolgenden Annahmen [32] sind für alle Modelle dieser Arbeit gültig:

- alle Körper werden als ideal starr angesehen
- alle Gelenke zwischen den Körpern sind reibungsfrei und besitzen kein Lagerspiel
- Fahrwiderstände (Roll- und Luftwiderstand) werden vernachlässigt
- unbeschleunigtes, schlupffreies Rollen in Fahrzeuginnenrichtung
- keine Berücksichtigung der Nickbewegungen des Fahrrads infolge von Lenk- oder Rollbewegungen
- die Fahrbahn ist horizontal und eben

Wie am Anfang dieses Abschnitts bereits erwähnt, sollte die Detaillierungstiefe an die jeweilige Problemstellung angepasst werden, um die Komplexität des Modells in Grenzen zu halten. Aufgrund der unterschiedlichen Problemstellungen, wie z. B. Auslegen oder Testen des Fahrermodells, werden folglich verschiedene Fahrradmodelle verwendet. Diese unterscheiden sich in der Fahrerkörpermodellierung und in der Modellierung des Fahrbahn-Reifen-Kontaktes. Beim Fahrradmodell inklusive Reifenmodell, welches das komplexeste Modell dieser Arbeit darstellt, wird der Reifen als Krafterzeuger berücksichtigt. Es wird zur abschließenden Simulation und zum Test des Fahrermodells verwendet. Zum Unterschied wird beim Benchmark Modell der Kontakt zwischen Fahrrad und Fahrbahn mittels nicht holonomen Bindungen modelliert. Das dadurch einfachere Modell wird für die spätere Auslegung des Fahrermodells verwendet. Genaueres dazu liefert die nachfolgende Modellbeschreibung und Kapitel 4.

Die Modellierung des Fahrerkörpers hat bedeutenden Einfluss auf die Fähigkeit des Modells, die menschlichen Fahreingriffe auf das Fahrrad abzubilden. Der menschliche Körper ist ein komplexes biomechanisches System und besitzt eine Vielzahl an Freiheitsgraden. Es ist daher notwendig, die relevanten Bewegungen beim Fahrradfahren zu identifizieren und zu modellieren.

Schwab et al. haben sich mit dieser Thematik in mehreren Arbeiten ([21], [22]) beschäftigt. Zur Identifikation der relevanten Bewegungen wurden mehrerer Versuche durchgeführt. In den ersten Versuchen erfolgte die Identifikation mittels visueller Beobachtung des Fahrers und Messung der Fahrradbewegungen. Die Experimente zur Bewegungserfassung erfolgten in verschiedenen Fahrsituationen, sprich bei Fahrten im normalen Straßenverkehr und

auf einem großen Laufband mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Diese Experimente zeigen, dass die Kontrolle der lateralen Bewegungen des Fahrrads hauptsächlich durch Lenkbewegungen erfolgt, ohne signifikanten Bewegungen des Oberkörpers. Die Stabilisation des Fahrrads basiert in erster Linie auf Lenkbewegungen, wobei für den Fall des Tretens bei kleinen Geschwindigkeiten noch zusätzliche Kniebewegungen zur Stabilisation beitragen. In einem weiteren Schritt wurden die Bewegungen mittels einer Bewegungserfassungstechnologie ermittelt, welche auf einem optischen Triangulationsverfahren basieren. Dabei wurden die Ergebnisse der ersten Versuche bestätigt. Zusätzlich konnten eine Reihe von Bewegungen genau identifiziert werden. Dabei lag der Schwerpunkt auf den Tretbewegungen und den damit verknüpften Oberkörper- und Kniebewegungen zur Stabilisation. Für eine genauere Beschreibung der Experimente und Ergebnisse wird auf die beiden Arbeiten [21] und [22] verwiesen.

Im Folgenden wird auf die Annahmen bezüglich der Modellierung des Fahrerkörpers eingegangen. Eine leicht zu identifizierende Bewegung beim Fahrradfahren stellt die Tretbewegung dar. Jedoch sind infolge der Annahme einer horizontalen Fahrbahn, der Vernachlässigung der Fahrwiderstände und des unbeschleunigten Rollens in Fahrzeuglängsrichtung, Antriebskräfte ausgeschlossen und somit auch keine Tretbewegungen notwendig. Infolge dessen werden diese und die damit verknüpften Oberkörper- und Kniebewegungen zum Stabilisieren nicht modelliert. Die Beine werden somit für das Modell als starr angesehen und sind fix mit dem Rahmen verbunden.

Die vorher beschriebenen Versuche [21], [22] zeigten bereits, dass die Oberkörperbewegungen vor allem für die hier betrachteten Regelungsaufgaben von untergeordneter Bedeutung sind. Trotzdem wird die Rolle des Oberkörpers, vor allem die aktive Lateralflexion, welche einer seitlichen Neigebewegung des Oberkörpers entspricht und ein inneres Rollmoment erzeugt, beim Fahrradfahren vielfach diskutiert. Aus diesem Grund wird in Abschnitt 3.4 mittels einer modalen Steuerbarkeitsanalyse gezeigt, dass die Oberkörperbewegungen ungeeignet als Fahrereingriff sind. Die Oberkörperbewegung kann infolge dessen bei der Fahrermodellierung vernachlässigt werden, jedoch beinhalten das Fahrradmodell inklusive Reifenmodell und das erweiterte Benchmark Modell Freiheitsgrade zur Abbildung der Lateralflexion.

Somit verbleibt als einzige relevante Bewegung hinsichtlich des Fahrermodells die Lenkbewegung, deren exakte Modellierung eine schwierige Aufgabe darstellt, da dafür die relevanten Freiheitsgrade der Oberkörper- und Armstruktur abgebildet werden müssen. Zusätzlich müssten, abhängig von der jeweiligen Lenkaufgabe, die Steifigkeiten und Dämpfungen der Gelenke angepasst werden. Aufgrund dieser Problematiken wird im Rahmen der Arbeit auf diese exakte Modellierung verzichtet. Die Annahme wird wiederum durch andere

Arbeiten [18], [24] gestützt. Für die Modellierung wird somit der Schwerpunkt und die Massenverteilung der Arme und des Oberkörpers auch während den Lenkbewegungen als konstant angesehen.

Im Folgenden wird auf die drei verwendeten Modelle detailliert eingegangen, sowie die Bewegungsgleichungen und die dazugehörigen Parameter angegeben. Die nachfolgenden Fahrradmodelle inklusive Parameter stammen, falls nicht anders angegeben aus Arbeiten von Ott [32] und Plöchl et al. [41].

### 3.1.1 Fahrradmodell inklusive Reifenmodell

Das dargestellte Fahrradmodell, Abbildung 3.1, besteht allgemein aus fünf Körper, dem Rahmen inklusive Beine des Fahrers, dem Oberkörper, der vorderen Baugruppe (Lenker und Gabel) und den beiden Rädern. Die Räder können bei einer Betrachtung des Rahmens bzw. der vorderen Baugruppe im Sinne eines „Gyrostats“ zu diesen gezählt werden. Dabei stellen die Räder die „Rotoren“ der „Gyrostaten“ dar, [43]. Der Rahmen, inklusive Hinterrad und Beine des Fahrers, wird mit dem Index  $m$  für „mainframe“, der Oberkörper mit dem Index  $r$  für „rider“ und die vordere Baugruppe mit dem Index  $H$  für „handlebar“ bezeichnet. Abbildung 3.2 zeigt das Fahrrad in Kurvenfahrt bei einem Rollwinkel  $\varphi$  des Rahmens und einem Lenkwinkel  $\delta$  des Lenkers bzw. der Vordergabel. Die Lenkachse, welche die Drehachse für den Lenkwinkel darstellt, wird mit dem Lenkachsenwinkel  $\epsilon$  und dem Nachlauf  $t_c$ , wie in Abbildung 3.1 ersichtlich, festgelegt. Bei diesem Modell wird Punkt  $A$  als Referenzpunkt verwendet, welcher sich durch die Projektion des Rahmenschwerpunktes auf die Linie  $\overline{DB}$  (Schnittlinie der Fahrrad-Symmetrieebene mit der Fahrbahn) ergibt. Dieser bewegt sich in Längsrichtung mit der konstanten Geschwindigkeit  $u$  und in Querrichtung mit der Geschwindigkeit  $v$ . Weiters rotiert die Schnittlinie  $\overline{DB}$  mit der Gierrate  $r$ . Das Lenkmoment  $M_\delta$  stellt die vom Fahrer aufgebrauchte Größe dar und ist somit die Eingangsgöße des Systems. Zudem besitzt das Modell auch die Möglichkeit, das Oberkörperrollmoment  $M_{\varphi_r}$  zu berücksichtigen. Dieses Moment ist nur aus Gründen der Vollständigkeit hier angeführt und wird in Hinblick auf das Fahrermodell nicht benötigt. Dabei stellt das Rollmoment  $M_{\varphi_r}$  das innere Moment zwischen dem Rahmen  $m$  und dem Oberkörper  $r$ , welcher sich um die Achse  $\varphi_r$  neigen kann, dar. Bezüglich des Freiheitsgrades  $\varphi_r$  ist noch ein Drehdämpfer- und Drehfederelement angeordnet, die das passive Verhalten des Körpers berücksichtigen sollen, [41].

Die ursprünglichen 5 Körper (getrennte Betrachtung der Räder) besitzen ohne Einschränkungen 30 Freiheitsgrade (je Körper 3 rotatorische und 3 translatorische). Je Drehgelenk

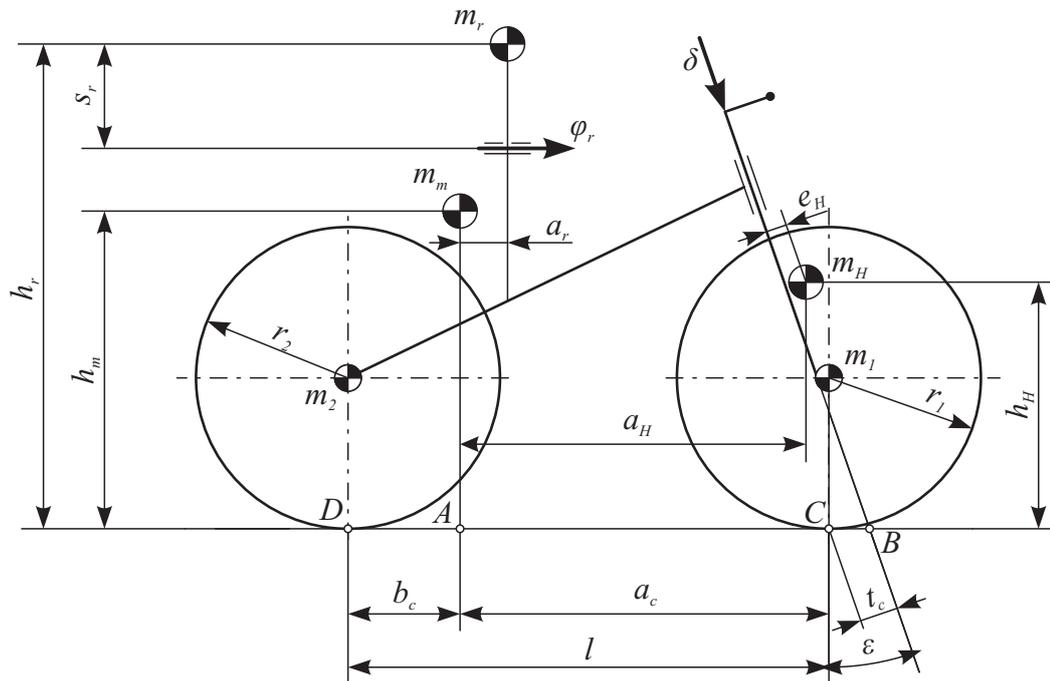


Abbildung 3.1: Fahrradmodell inklusive geometrischen Größen in aufrechter Position

werden dem System 5 Freiheitsgrade entzogen. Das heißt, durch die Drehgelenke des Lenkers und des Oberkörpers, sowie die der Vorder- bzw. Hinterräder werden 20 Freiheitsgrade gesperrt. Weiters entzieht die Annahme des schlupffreien Rollens dem System 2 Freiheitsgrade und der Bodenkontakt, sowie die Vernachlässigung der Nickbewegung, nochmals 2. Somit besitzt das Fahrradmodell inklusive Reifenmodell 6 Freiheitsgrade. Bei den nachfolgenden Bewegungsgleichungen werden folgende Freiheitsgrade verwendet: Lenkwinkel  $\delta$ , Neigefreiheitsgrad des Oberkörpers  $\varphi_r$ , Rollwinkel  $\varphi$ , Gierrate  $r$ , Geschwindigkeit des Punkts  $A$  in Querrichtung  $v$  und die Radwinkelgeschwindigkeit  $\theta_2$ . Das ursprüngliche Fahrradmodell aus der Arbeit von Ott [32] besitzt gegenüber dem in Abbildung 3.1 dargestellten noch einen zusätzlichen Freiheitsgrad  $\bar{\beta}$ , mittels dem der Wobble-Mode auch abgebildet werden kann und auf welchen im Abschnitt 3.3 näher eingegangen wird. Da der  $\bar{\beta}$  Freiheitsgrad die Dynamik des Fahrrads eigentlich nur hinsichtlich des Wobble-Modes verändert und der Wobble-Mode für den Fahrer in den meisten Fällen kein Problem darstellt, wird zur Vereinfachung des Modells auf die Modellierung des  $\bar{\beta}$  Freiheitsgrads verzichtet.

### Reifenmodell

Bei dem in diesem Abschnitt betrachteten Fahrradmodell erfolgt die Modellierung der Reifenkräfte und -momente mit einer vereinfachten Version des linearen Motorradreifenmodells von Pacejka [44]. Dabei treten folgende, in Abbildung 3.3 dargestellten, Kräfte und

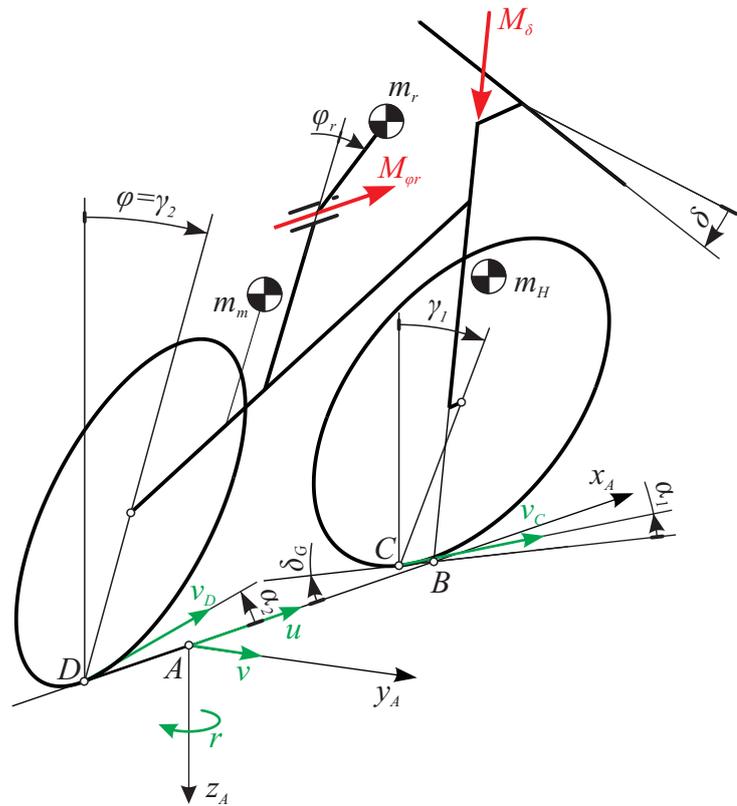


Abbildung 3.2: Fahrradmodell inklusive Winkelangabe in isometrischer Ansicht

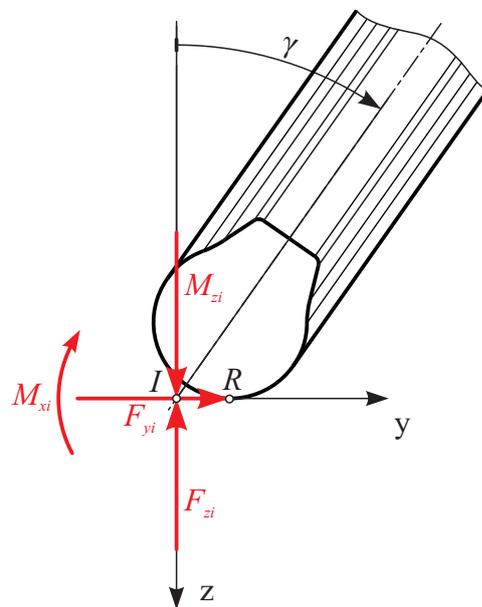


Abbildung 3.3: Schnitt durch den Fahrradreifen mit angreifenden Kräften und Momenten

Momente beim Reifen-Fahrbahn-Kontakt auf: die Aufstandskraft  $F_{zi}$ , die Seitenkraft  $F_{yi}$ , das Reifenrückstellmoment  $M_{zi}$  und ein Kippmoment  $M_{xi}$ , auch „Overturning Couple“

genannt. Zum Berechnen der Kräfte und Momente benötigt man die jeweiligen Schräglaufwinkel  $\alpha_{1,2}$  und Sturzwinkel  $\gamma_{1,2}$ , welche in Abbildung 3.2 dargestellt sind. Die für die Berechnung der Schräglaufwinkel notwendigen Größen, der Bodenlenkwinkel  $\delta_G$  und die Geschwindigkeiten in den Punkten  $C$  und  $D$ , werden im Anschluss an die Bewegungsgleichungen behandelt. Der Schräglaufwinkel  $\alpha_1$  berechnet sich für das Vorderrad mit Hilfe des Bodenlenkwinkels  $\delta_G$  und der Geschwindigkeit im Punkt  $C$  folgendermaßen:

$$\alpha_1 = \delta_G - \arctan\left(\frac{v_{C|A,y}}{v_{C|A,x}}\right). \quad (3.1)$$

Weiters folgt für den Schräglaufwinkel  $\alpha_2$  am Hinterrad:

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{v_{D|A,y}}{v_{D|A,x}}\right). \quad (3.2)$$

Die beiden Sturzwinkel können aus den geometrischen Zusammenhängen (Abbildung 3.2) abgeleitet werden und ergeben sich zu:

$$\gamma_1 = \text{asin}(\cos \varphi \sin \epsilon \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta), \quad (3.3)$$

$$\gamma_2 = \varphi. \quad (3.4)$$

Die Aufstandskräfte des Vorder- und Hinterrades berechnen sich für die getroffenen Annahmen des unbeschleunigten, schlupffreien Rollens und der Vernachlässigung der Fahrwiderstände aus dem statischen Gleichgewicht, unter Vernachlässigung der Positionsänderung der Aufstandspunkte  $C$  und  $D$ , infolge der Roll- und Lenkbewegung. Die Seitenkräfte  $F_{yi}$  und das Rückstellmoment  $M_{zi}$  werden durch den Schräglauf- und Sturzwinkel erzeugt. Zum Beschreiben des dynamischen Verhaltens der Reifenkräfte und (-momente) werden der transiente Schräglaufwinkel  $\alpha'_i$  und der transiente Sturzwinkel  $\gamma'_i$  verwendet. Diese lassen sich mittels der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\sigma_{\alpha i}}{u} \dot{\alpha}'_i + \alpha'_i = \alpha_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\sigma_{\gamma i}}{u} \dot{\gamma}'_i + \gamma'_i = \gamma_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (3.6)$$

berechnen, wobei  $\sigma_{\alpha i}$  und  $\sigma_{\gamma i}$  die jeweilige Einlaufänge des betrachteten Reifens repräsentiert. Mit diesen Differentialgleichungen wird das Einlaufverhalten, sprich der Auf- und Abbau der Reifenkräfte und -momente infolge einer Schräglauf- und Sturzwinkeländerung, beschrieben.

Für das betrachtete lineare Reifenmodell wird die Seitenkraft wie folgt eingeführt:

$$F_{yi} = c_{F\alpha i} \alpha'_i + c_{F\gamma i} \gamma'_i. \quad (3.7)$$

Das Reifenrückstellmoment  $M_{zi}$  definiert sich für den betrachteten Fall (keine Längskräfte) wie folgt:

$$M_{zi} = -c_{M\alpha i}\alpha'_i + c_{M\gamma i}\gamma'_i. \quad (3.8)$$

Der Bezugspunkt des linearen Reifenmodells in den Bewegungsgleichungen ist der fiktive Kontaktpunkt  $I$ , jedoch unterscheidet sich dieser infolge eines Sturzwinkels vom realen Kontaktpunkt  $R$ , vgl. Abbildung 3.3. Folglich muss die Normalkraft  $F_{zi}$  vom Punkt  $R$  in den Punkt  $I$  reduziert werden. Das dabei auftretende Moment wird als Kippmoment (Overturning Couple) bezeichnet und berechnet näherungsweise sich wie folgt:

$$M_{xi} \approx -c_{Mx\gamma i}\gamma_i. \quad (3.9)$$

Für das Kippmoment wird angenommen, dass es verzögerungsfrei auf die Änderung des Sturzwinkels reagiert, [41].

### Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen sind in Form eines gekoppelten Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung angegeben. Die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen führen zu einer Entkopplung der Vorwärtsbewegung von den Roll- und Lenkbewegungen, [42]. Die entkoppelte Bewegungsgleichung der Radwinkelgeschwindigkeit ergibt sich für den Fall des unbeschleunigten, schlupffreien Rollens zu

$$\ddot{\theta}_2 = 0. \quad (3.10)$$

Daraus folgt, dass sich das Fahrrad mit einer konstanten Vorwärtsgeschwindigkeit  $u$  bewegt. Die Geschwindigkeit  $u$  ist somit unabhängig und geht als Parameter in die anderen Bewegungsgleichungen ein. Es wird darauf hingewiesen, dass in dieser Arbeit die Vorwärtsgeschwindigkeit  $u$  als konstanter Parameter angesehen wird und folglich auch nicht zu linearisieren ist.

Die in den Bewegungsgleichungen auftretenden geometrischen Größen sind in Abbildung 3.1 ersichtlich, wobei die Schwerpunkthöhen  $h_i$  durch  $z_i = -h_i$  ersetzt werden damit sie konsistent mit dem Referenzkoordinatensystem im Punkt A sind.

Die Größen  $I_{ixx|i}$ ,  $I_{iyy|i}$ ,  $I_{izz|i}$  stehen für die Trägheitsmomente,  $I_{ixz|i}$  für die Deviationsmomente des Körpers  $i$ , jeweils dargestellt im Koordinatensystem  $i$ . Eine genauere Beschreibung diesbezüglich findet sich in [43]. Um die Bewegungsgleichungen in einer einfachen und übersichtlichen Form angeben zu können, werden einige zusammengefasste Größen eingeführt. Aufgrund der Ähnlichkeit der Fahrradmodelle sind einige dieser Größen in allen drei Modellen zu finden, welche folglich nur einmal angeführt werden. Als erstes folgen Größen für das Gesamtsystem  $T$ :

Masse und Schwerpunktsabstände des Gesamtsystems  $T$ :

$$m_T = m_m + m_r + m_H \quad (3.11)$$

$$a_T = \frac{m_H a_H + m_r a_r}{m_T} \quad (3.12)$$

$$z_T = \frac{m_H z_H + m_m z_m + m_r z_r}{m_T} \quad (3.13)$$

Massenträgheits- und Deviationsmomente des Gesamtsystems  $T$  angegeben für das Koordinatensystem im Punkt A:

$$I_{Txx|A} = I_{mxx|m} + m_m z_m^2 + (I_{Hxx|H}) \cos^2 \epsilon + (I_{Hzz|H}) \sin^2 \epsilon + 2 (I_{Hxz|H}) \cos \epsilon \sin \epsilon + m_H z_H^2 + I_{rzz|r} + m_r z_r^2 \quad (3.14)$$

$$I_{Tzz|A} = I_{mzz|m} + m_m a_m^2 + (I_{Hxx|H}) \sin^2 \epsilon + (I_{Hzz|H}) \cos^2 \epsilon + 2 (I_{Hxz|H}) \cos \epsilon \sin \epsilon + m_H a_H^2 + I_{rzz|r} + m_r a_r^2 \quad (3.15)$$

$$I_{Txz|A} = -I_{mzx|m} - (I_{Hxx|H} - I_{Hzz|H}) \cos \epsilon \sin \epsilon + I_{Hxz|H} (1 - 2 \cos^2 \epsilon) - m_H a_H z_H - I_{rxz|r} - m_r a_r z_r \quad (3.16)$$

Weiters wird noch für die vordere Baugruppe ein zusätzliches Massenträgheitsmoment um die Lenkachse  $\delta$  und zwei Deviationsmomente um den Schnittpunkt der Lenkachse  $\delta$  mit der  $x_A$ -Achse sowie der  $z_A$ -Achse benötigt und angegeben:

$$I_{H\delta\delta} = I_{Hzz|H} + m_H e_H^2 \quad (3.17)$$

$$I_{H\delta x_A} = I_{Hzz|H} \sin \epsilon - I_{Hxz|H} \cos \epsilon - m_H e_H z_H \quad (3.18)$$

$$I_{H\delta z_A} = I_{Hzz|H} \cos \epsilon + I_{Hxz|H} \sin \epsilon + m_H e_H z_H \quad (3.19)$$

Ebenso wird für den Fahreroberkörper ein zusätzliches Massenträgheitsmoment um die  $\varphi_r$ -Achse und zwei Deviationsmomente um den Schnittpunkt der  $\varphi_r$ -Achse mit der  $x_A$ -Achse und der  $z_A$ -Achse verwendet:

$$I_{r\varphi\varphi} = I_{rxx|r} + m_r s_r^2 \quad (3.20)$$

$$I_{r\varphi_r x_A} = I_{r\varphi_r x_D} - m_r s_r z_r \quad (3.21)$$

$$I_{r\varphi_r z_A} = -I_{rxz|r} + m_r s_r a_r \quad (3.22)$$

Das jeweilige Massenträgheitsmoment des Vorder- bzw. des Hinterrades, bezogen auf dessen Radius sowie deren Summe, ergeben die gyroscopischen Koeffizienten:

$$G_1 = \frac{I_{1yy1|1}}{r_1}, \quad G_2 = \frac{I_{2yy2|1}}{r_2}, \quad G_T = G_1 + G_2. \quad (3.23)$$

Die Größe  $S_\delta$  stellt das statische Moment um die Lenkachse  $\delta$  dar:

$$S_\delta = m_T \frac{a_T + b_c}{l} t_c + m_H e_H. \quad (3.24)$$

Nachfolgend werden die bezüglich der aufrechten Geradeausfahrt linearisierten Bewegungsgleichungen angegeben. Dabei repräsentieren die  $\Delta$ -Größen einheitlich die Abweichung von der Nominalbewegung (aufrechte Geradeausfahrt). Die Bewegungsgleichungen wurden von Angrosch [43] bzw. Ott [32] mittels eines Mehrkörperformalismus für die Kinematik und des d-Alembert's Prinzips hergeleitet und für die Geradeausfahrt linearisiert. Ausführliche Beschreibung bezüglich der Linearisierung und des Mehrkörperformalismus siehe [32], [43] und [38].

$v$  :

$$m_T (\Delta \dot{v} + u \Delta r) + m_T a_T \Delta \dot{r} - m_T z_T \Delta \ddot{\varphi} + m_r s_r \Delta \ddot{\varphi}_r + m_H e_H \Delta \ddot{\delta} + F_{y1} + F_{y2} \quad (3.25)$$

$r$  :

$$m_T a_T (\Delta \dot{v} + u \Delta r) + I_{Tzz|A} \Delta \dot{r} + I_{Txx|A} \Delta \ddot{\varphi} - G_T u \Delta \dot{\varphi} + I_{r\varphi_r z_A} \Delta \ddot{\varphi}_r + I_{H\delta z_A} \Delta \ddot{\delta} - G_1 \sin \epsilon u \Delta \dot{\delta} = a_c F_{y1} - b_c F_{y2} + M_{z1} + M_{z2} \quad (3.26)$$

$\varphi$  :

$$- m_T z_T (\Delta \dot{v} + u \Delta r) + G_T u \Delta r + I_{Txx|A} \Delta \dot{r} + I_{Txx|A} \Delta \ddot{\varphi} + m_T z_T g \Delta \varphi + I_{r\varphi_r x_A} \Delta \ddot{\varphi}_r - m_r s_r g \Delta \varphi_r + I_{H\delta x_A} \Delta \ddot{\delta} + G_1 \cos \epsilon u \Delta \dot{\delta} - S_\delta g \Delta \delta = M_{x1} + M_{x2} \quad (3.27)$$

$\varphi_r$  :

$$m_r s_r (\Delta \dot{v} + u \Delta r) + I_{r\varphi_r z_A} \dot{r} + I_{r\varphi_r x_A} \Delta \ddot{\varphi} - m_r s_r g \Delta \varphi + I_{r\varphi_r \varphi_r} \Delta \ddot{\varphi}_r + k_{\varphi_r} \Delta \dot{\varphi}_r + (c_{\varphi_r} - m_r s_r g) \Delta \varphi_r - k_\delta \sin \epsilon \Delta \dot{\delta} - c_\delta \sin \epsilon \Delta \delta = \Delta M_{\varphi_r} - \Delta M_\delta \sin \epsilon \quad (3.28)$$

$\delta$  :

$$m_H e_H (\Delta \dot{v} + u \Delta r) + G_1 \sin \epsilon u \Delta r + I_{H\delta z_A} \Delta \dot{r} + I_{H\delta x_A} \Delta \ddot{\varphi} - G_1 \cos \epsilon u \Delta \dot{\varphi} - S_\delta g \Delta \varphi + I_{H\delta \delta} \Delta \ddot{\delta} + k_\delta \Delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \epsilon g) \Delta \delta - t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \epsilon + M_{z1} \cos \epsilon + \Delta M_\delta \quad (3.29)$$

In Matrixschreibweise ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu:

$$\mathbf{M}_t \dot{\mathbf{x}}_t + (\mathbf{C}_0 t + u \mathbf{C}_1 t + \mathbf{K}_0 t + u \mathbf{K}_1 t + \mathbf{K}_{\text{tyret}}) \mathbf{x}_t = \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t, \quad (3.30)$$

wobei  $\mathbf{M}_t$  die Massenmatrix,  $\mathbf{C}_{0t}$  und  $\mathbf{C}_{1t}$  die Dämpfungsmatrizen,  $\mathbf{K}_{0t}$ ,  $\mathbf{K}_{1t}$  und  $\mathbf{K}_{\text{tyre}t}$  die Steifigkeitsmatrizen angeben. Die Matrizen  $\mathbf{K}_{0t}$  und  $\mathbf{K}_{\text{tyre}t}$  könnten grundsätzlich zusammengefasst werden, jedoch werden aus Gründen der Übersichtlichkeit die Steifigkeiten des Reifenmodells gesondert in der Matrix  $\mathbf{K}_{\text{tyre}t}$  angegeben. Die inneren Momente, welche die Eingangsgrößen darstellen, werden mit  $\mathbf{u}_t = [\Delta M_{\varphi_r}, \Delta M_{\delta}]^T$  zusammengefasst. Die zugehörige Eingangsmatrix stellt  $\mathbf{B}_t$  dar. Die Matrizen  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_{0t}$ ,  $\mathbf{C}_{1t}$ ,  $\mathbf{K}_{0t}$ ,  $\mathbf{K}_{1t}$ ,  $\mathbf{K}_{\text{tyre}t}$  und  $\mathbf{B}_t$  können dem Anhang A entnommen werden. Der Vektor

$$\mathbf{x}_t = [\Delta\varphi, \Delta\varphi_R, \Delta\delta, \Delta v, \Delta r, \Delta\dot{\varphi}, \Delta\dot{\varphi}_R, \Delta\dot{\delta}, \Delta\alpha'_1, \Delta\gamma'_1, \Delta\alpha'_2, \Delta\gamma'_2]^T \quad (3.31)$$

repräsentiert den Zustandsvektor der in Gleichung (3.32) angegebenen Zustandsraumdarstellung. Bei den anderen Fahrradmodellen treten ähnliche Gleichungsstrukturen auf, weshalb zur eindeutigen Unterscheidung der Matrizen der Index  $t$  für „tyre-model“ hinzugefügt wird.

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}_t^* \mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t^* \mathbf{u}_t \quad (3.32)$$

Die darin auftretende Systemmatrix  $\mathbf{A}_t^*$  berechnet sich mit

$$\mathbf{K}_{\text{help}t} = \mathbf{C}_{0t} + u\mathbf{C}_{1t} + \mathbf{K}_{0t} + u\mathbf{K}_{1t} + \mathbf{K}_{\text{tyre}t} \quad (3.33)$$

wie folgt:

$$\mathbf{A}_t^* = -\mathbf{M}_t^{-1} \mathbf{K}_{\text{help}t}. \quad (3.34)$$

Weiters ergibt sich die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_t^*$  zu:

$$\mathbf{B}_t^* = \mathbf{M}_t^{-1} \mathbf{B}_t. \quad (3.35)$$

### Kinematische Zusammenhänge

Im Folgenden wird noch auf einige kinematische Zusammenhänge, welche in den Bewegungsgleichungen bzw. bei der Fahrsimulation benötigt werden, eingegangen. Für die Berechnung des Schräglaufwinkels  $\alpha_1$  wird der Bodenlenkwinkel  $\delta_G$  benötigt. Dieser wird zwischen der Schnittlinie von Vorderreifensymmetrieebene/Fahrbahn und der Schnittlinie  $\overline{DB}$  eingeschlossen, vgl. Abbildung 3.4. Er berechnet sich für den um die Geradeausfahrt linearisierten Fall mit

$$\Delta\delta_G = \cos \epsilon \Delta\delta. \quad (3.36)$$

In der Simulation wird weiters der Schwimmwinkel  $\beta_A$  benötigt. Dieser Winkel liegt zwischen dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_A$  und der Linie  $\overline{BD}$  und berechnet sich aus der konstanten Längsgeschwindigkeit  $u$  und der Geschwindigkeit in Querrichtung  $v$  im Punkt  $A$  wie folgt:

$$\beta_A = \text{atan} \left( \frac{v_{A|A,y}}{v_{A|A,x}} \right) = \text{atan} \left( \frac{v}{u} \right) \quad (3.37)$$

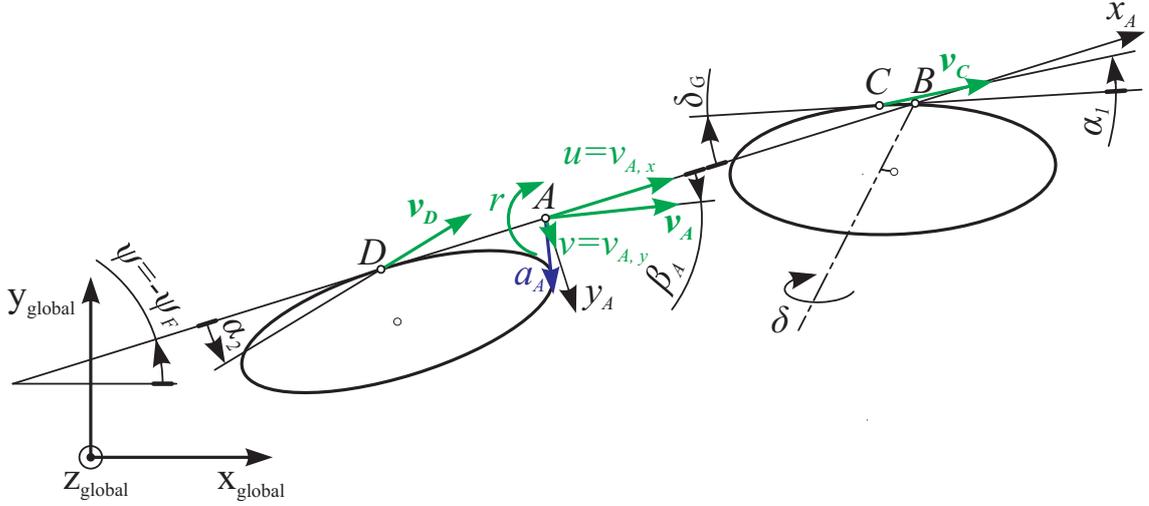


Abbildung 3.4: Kinematische Größen des Fahrradmodells inklusive Reifenmodell in Draufsicht

Des Weiteren berechnen sich die Quergeschwindigkeiten der Aufstandspunkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  für den linearisierten Fall nach [32] folgendermaßen:

$$v_{B|A,y} \approx \Delta v + \left( l + \frac{t_c}{\cos \epsilon} \right) \Delta r \quad (3.38)$$

$$v_{C|A,y} \approx \Delta v + a_c \Delta r - t_c \Delta \dot{\delta} \quad (3.39)$$

$$v_{D|A,y} \approx \Delta v - b_c \Delta r \quad (3.40)$$

Im Zuge der Arbeit werden hinsichtlich der positiven Zählrichtung sich unterscheidende Gierwinkel verwendet ( $\psi = -\psi_F$ ). Der Gierwinkel  $\psi_F$  ist den von Ott [32] übernommenen Fahrradmodellen zugeordnet, es gilt folglich  $\Delta r = \Delta \dot{\psi}_F$ . Der Gierwinkel  $\psi$  sowie das Koordinatensystem „global“ orientieren sich an der bereits bestehenden Fahrbahnbeschreibung (vgl. Kapitel 5).

Die Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ , dargestellt im Koordinatensystem „global“, ergeben sich folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{i|global} &= u \cos \psi + v_{i|A,y} \sin \psi \\ \dot{y}_{i|global} &= u \sin \psi - v_{i|A,y} \cos \psi \end{aligned} \right\} i = \{A, B, C, D\} \quad (3.41)$$

### 3.1.2 Benchmark Modell

Das Benchmark Modell stellt das einfachste Modell dieser Arbeit dar und wird unter anderem zur Auslegung des Fahrermodells verwendet. Wie bereits im *Literaturüberblick* erwähnt, führte es Schwab et al. in [6] als eine angepasste Neuformulierung von Whipples Modell aus dem Jahre 1899 ein. Das Fahrradmodell besteht grundsätzlich aus 4 Körpern:

Vorderrad, Hinterrad, Rahmen, sowie der vorderen Baugruppe, welche mit idealen Drehgelenken verbunden sind. Im Unterschied zum vorherigen Modell ist beim Benchmark Modell der gesamte Fahrerkörper mit dem Rahmen starr verbunden. Der Fahrerkörper besitzt keinen zusätzlichen Freiheitsgrad, wodurch er als starr mit dem Hauptrahmen verbunden modelliert wird. Für den Reifen-Fahrbahnkontakt werden holonome<sup>1</sup> Bindungen in vertikaler Richtung und nichtholonome<sup>2</sup> Bindungen in Längs- und Querrichtung angenommen. Bei der Kontaktmodellierung durch nichtholonome Bindungen („knife-edge Bindungen“), besitzt der Reifen keinen Querschlupf bzw. Schräglauf. [6]

Bei dynamischen Systemen mit nichtholonomen Bindungen ist die Anzahl der Freiheitsgrade der Lage unterschiedlich von jenen der Geschwindigkeit, [38]. Zur Erklärung dieses Sachverhalts wird nachfolgend der Aspekt der Freiheitsgrade kurz behandelt. Die 4 Körper des Modells haben ohne kinematische Bindungen 24 Freiheitsgrade.

Dabei sperrt wiederum jedes der 3 Drehgelenke zwischen den 4 Körpern je 5 Freiheitsgrade. Des Weiteren wird pro Rad ein Freiheitsgrad für die holonome, vertikale Kontaktbedingung entzogen. Die nichtholonomen Rollbedingungen beeinflussen die Freiheitsgrade der Lage nicht, womit 7 Freiheitsgrade der Lage übrig bleiben. Jedoch reduzieren die nichtholonomen Bindungen die Anzahl der Freiheitsgrade der Geschwindigkeit auf 3, welche zum Beispiel die Lenkrate  $\dot{\delta}$ , die Rollrate  $\dot{\varphi}$  und die Winkelgeschwindigkeit des Hinterrades  $\dot{\theta}_2$  sein können, [6].

Die Beeinflussung des Fahrrads durch den Fahrer erfolgt bei diesem Modell ausschließlich über das Lenken, sprich über das Lenkmoment  $M_\delta$ . Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass Schwab bei seinem Benchmark Modell ein zusätzliches Moment  $M_\varphi$  zur Beeinflussung des Fahrrads angibt, welches dem Namen entsprechend in Richtung des Freiheitsgrades  $\varphi$  wirkt. Dieses Moment stützt sich aber nicht am Fahrrad, sondern am Inertialsystem (Fahrbahn) ab, vergleichbar einer Person, welche neben dem Fahrrad her läuft und dieses durch eine seitliche Kraft beispielsweise am Sattel beeinflusst. Bezüglich des Systems Fahrrad entspricht dieses Moment einem äußeren Moment, welches der Fahrer nicht beeinflussen kann und infolge dessen in dieser Arbeit keine Berücksichtigung findet.

### Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen werden wiederum in gleicher Art und Weise angegeben. Unter den getroffenen Annahmen verhält sich auch dieses Modell längsdynamisch gleich wie das

<sup>1</sup>Als holonom werden jene Bindungen bezeichnet, welche keine verallgemeinerten Geschwindigkeiten enthalten, [38].

<sup>2</sup>Als nicht holonom bezeichnet man jene Bindungen, welche verallgemeinerte Geschwindigkeiten enthalten und nicht durch Integration auf holonome Bindungen zurückgeführt werden können, [38].

Fahrradmodell inklusive Reifenmodell. Grundsätzlich stimmen die geometrischen Parameter (Abbildung 3.1), sowie Massen- und Trägheitsparameter der beiden Modelle überein. Jedoch wird darauf hingewiesen, dass bei diesem Modell der Oberkörper des Fahrers keinen Freiheitsgrad gegenüber dem Rahmen besitzt, dieser jedoch wie beim vorherigen Modell als eigenständige Masse  $r$  in die Gleichungen eingeht. Zur Vereinfachung der Bewegungsgleichungen und in Anlehnung an das Benchmark Modell von Schwab wird der Bezugspunkt vom Punkt  $A$  in den Punkt  $D$  verschoben. Infolgedessen werden die Abstände  $a_i$  durch  $x_i = b_c + a_i$  ersetzt. Aufgrund dieser Änderung müssen auch einige der zusammengefassten Größen geändert werden. Nachfolgend wird nur auf die geänderten Größen eingegangen:

Beim Gesamtsystem  $T$  ändert sich der Schwerpunktsabstand in  $x$ -Richtung, sowie der Bezugspunkt des Trägheits- und Deviationsmomente wie oben beschrieben zu:

$$x_T = b_c + a_T = \frac{m_m x_m + m_H x_H + m_r x_r}{m_T} \quad (3.42)$$

$$I_{Txx|D} = I_{Txx|A} \quad (3.43)$$

$$I_{Tzz|D} = I_{mzz|m} + m_m x_m^2 + (I_{Hxx|H}) \sin^2 \epsilon + (I_{Hzz|H}) \cos^2 \epsilon + 2(I_{Hxz|H}) \cos \epsilon \sin \epsilon + m_H x_H^2 + I_{rzz|r} + m_r x_r^2 \quad (3.44)$$

$$I_{Txz|D} = -I_{mxz|m} - m_m x_m z_m - (I_{Hxx|H} - I_{Hzz|H}) \cos \epsilon \sin \epsilon + I_{Hxz|H} (1 - 2 \cos^2 \epsilon) - m_H x_H z_H - I_{rxz|r} - m_r x_r z_r \quad (3.45)$$

Des Weiteren werden abgeänderte Deviationsmomente der vorderen Baugruppe  $H$  benötigt:

$$I_{H\delta x_D} = I_{H\delta x_A} \quad (3.46)$$

$$I_{H\delta z_D} = I_{fzz|H} \cos \epsilon + I_{Hxz|H} \sin \epsilon + m_H x_H e_H \quad (3.47)$$

Außerdem werden zur weiteren Vereinfachung noch folgende zusätzliche Hilfsgrößen eingeführt:

$$\mu = \frac{t_c}{l} \quad (3.48)$$

$$\zeta = \frac{\cos \epsilon}{l} \quad (3.49)$$

Mit diesen Größen können nun wiederum die linearisierten Bewegungsgleichungen angegeben werden:

$\varphi$ :

$$\begin{aligned} & I_{Txx|D} \Delta \ddot{\varphi} + m_T z_T g \Delta \varphi + [I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txz|D}] \Delta \ddot{\delta} + \\ & [G_1 \cos \epsilon + \mu (-m_T z_T + G_T) + \zeta I_{Txx|D}] u \Delta \dot{\delta} + \\ & [-S_\delta g + \zeta (-m_T z_T + G_T) u^2] \Delta \delta = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

$\delta$  :

$$\begin{aligned} & \left[ I_{H\delta x_D} + \mu I_{T_{xz}|D} \right] \Delta\ddot{\varphi} - [G_1 \cos \epsilon + \mu G_T] u \Delta\dot{\varphi} - S_\delta g \Delta\varphi + \\ & \left[ I_{H\delta\delta} + \mu \left( 2I_{H\delta z_D} + \mu I_{T_{zz}|D} \right) \right] \Delta\ddot{\delta} + [k_\delta + [\zeta I_{H\delta z_D} + \mu (S_\delta + \zeta I_{T_{zz}|D})] u] \Delta\dot{\delta} \\ & \left[ c_\delta - S_\delta \sin \epsilon g + \zeta (S_\delta + G_1 \sin \epsilon) u^2 \right] \Delta\delta = \Delta M_\delta \end{aligned} \quad (3.51)$$

Durch das Zusammenfassen der Größen  $\Delta\varphi$  und  $\Delta\delta$  zum Vektor  $\mathbf{q}_b = [\Delta\varphi, \Delta\delta]^T$  und der Verwendung eines Momentenvektors  $\mathbf{f}_b = [0, \Delta M_\delta]^T$  ergibt sich aus den Gleichungen (3.50) und (3.51) die Matrixschreibweise, welche in der Literatur bevorzugt anzutreffen ist:

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{q}}_b + (\mathbf{C}_{0b} + u \mathbf{C}_{1b}) \dot{\mathbf{q}}_b + (\mathbf{K}_{0b} + u^2 \mathbf{K}_{2b}) \mathbf{q}_b = \mathbf{f}_b. \quad (3.52)$$

Darin entspricht  $\mathbf{M}_b$  wieder der Massenmatrix,  $\mathbf{C}_{0b}$  und  $\mathbf{C}_{1b}$  den Dämpfungsmatrizen, sowie  $\mathbf{K}_{0b}$  und  $\mathbf{K}_{2b}$  den Steifigkeitsmatrizen, welche wiederum im Anhang A angegeben sind. Da diese Matrixschreibweise für die weiteren regelungstechnischen Analysen und Auslegungen ungeeignet ist, werden die Gleichungen (3.52) auch bei diesem Modell in die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_b^* \mathbf{x}_b + \mathbf{b}_b^* u_b \quad (3.53)$$

übergeführt. Die Steuergröße  $u_b$  entspricht dem Lenkmoment  $\Delta M_\delta$  und  $\mathbf{x} = [\Delta\varphi, \Delta\delta, \Delta\dot{\varphi}, \Delta\dot{\delta}]^T$  dem Zustandsvektor. Die Systemmatrix  $\mathbf{A}_b^*$  und die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_b^*$  ergeben sich zu

$$\mathbf{A}_b^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_b^{-1} \mathbf{K}_b^* & -\mathbf{M}_b^{-1} \mathbf{C}_b^* \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

und

$$\mathbf{b}_b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{M}_b^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Darin steht  $\mathbf{C}_b^* = \mathbf{C}_{0b} + u \mathbf{C}_{1b}$  für die gesamte Dämpfungsmatrix und  $\mathbf{K}_b^* = \mathbf{K}_{0b} + u^2 \mathbf{K}_{2b}$  für die gesamte Steifigkeitsmatrix.

### Kinematische Zusammenhänge

Zur einfacheren Beschreibung der Bewegung des Benchmark Modells werden zusätzlich die Gierwinkelgeschwindigkeit  $\Delta r = \Delta\dot{\psi}_F$ , die Krümmung  $\Delta\kappa$  sowie die Geschwindigkeitskomponenten der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  angegeben. Die kinematischen Zusammenhänge sind in Abbildung 3.5 dargestellt.

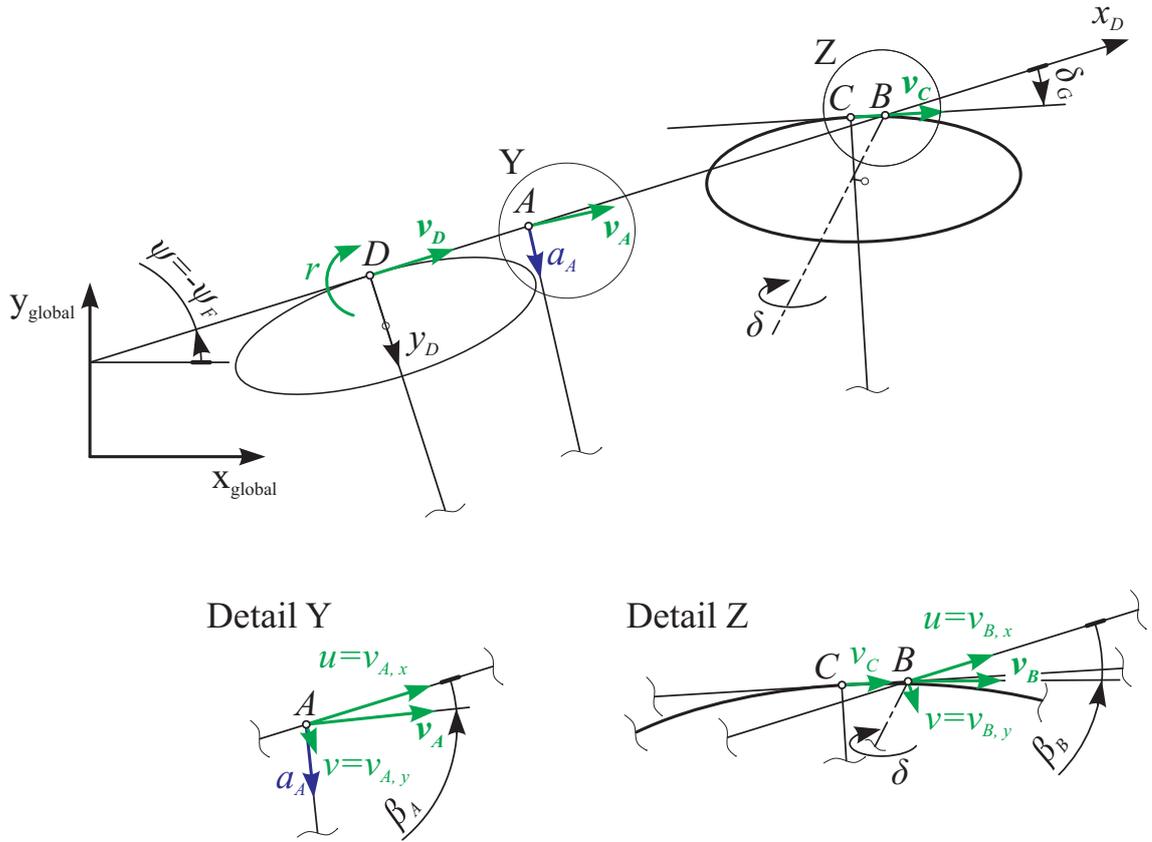


Abbildung 3.5: Draufsicht auf das Benchmark Modell

Die Gierwinkelgeschwindigkeit ergibt sich laut Meijaard et al.[6] zu:

$$\Delta r = \Delta \dot{\psi}_F = \frac{u \Delta \delta}{l} \cos \epsilon + \frac{c \Delta \dot{\delta}}{l} \cos \epsilon, \quad (3.56)$$

mit den Größen  $\mu$  und  $\zeta$  aus (3.49) vereinfacht sich Gleichung (3.56) zu:

$$\Delta r = \Delta \dot{\psi}_F = u \zeta \Delta \delta + \mu \Delta \dot{\delta}. \quad (3.57)$$

Des weiteren wird die Krümmung  $\kappa$  respektive der Krümmungsradius  $\rho$  benötigt. Für die Krümmung  $\kappa$  gilt allgemein der Zusammenhang

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{d\bar{s}}, \quad (3.58)$$

wobei  $\alpha$  für den Winkel der Kurventangente und  $\bar{s}$  für die Bogenlänge der Wegstrecke<sup>3</sup> steht. Die Krümmung wird in dieser Arbeit allgemein für eine in Fahrtrichtung gesehene Linkskurve als positiv definiert. Sie ist abhängig vom jeweils betrachteten Punkt und wird exemplarisch für den Punkt  $B$  hergeleitet und angegeben.

<sup>3</sup>Üblicherweise wird für die Bogenlänge der Wegstrecke das Symbol  $s$  verwendet, um aber eine Verwechslung mit der Laplace-Transformation zu vermeiden wird stattdessen  $\bar{s}$  verwendet.

Der Zusammenhang zwischen Krümmung  $\kappa_B$  und der Änderung des Winkels des Geschwindigkeitsvektors im Punkt  $B$ , kann wie folgt angeschrieben werden:

$$\kappa_B = -\frac{d(\psi_F + \beta_B)}{d\bar{s}} = -\frac{1}{|\mathbf{v}_B|} (\dot{\psi}_F + \dot{\beta}_B). \quad (3.59)$$

Der Schwimmwinkel  $\beta_B$  ergibt sich für das Benchmark Modell mit der Näherung  $\bar{l} = l + t_c / \cos \epsilon$  zu

$$\beta_B = \tan \frac{\bar{l} \dot{\psi}_F}{u}. \quad (3.60)$$

Aus den bisherigen Gleichungen kann somit ein bezüglich der aufrechten Geradeausfahrt linearisierter Zusammenhang zwischen der Krümmung  $\Delta\kappa$  und der Gierrate  $\Delta r$  sowie der Gierbeschleunigung  $\Delta\ddot{\psi}_F$  angegeben werden. Dabei entspricht im linearisierten Fall die Geschwindigkeit  $v_B \approx u$  und somit gilt:

$$\Delta\kappa_B = -\frac{1}{u} \left( \Delta\dot{\psi}_F + \frac{\bar{l}\Delta\ddot{\psi}_F}{u} \right). \quad (3.61)$$

Daraus folgt mit (3.57)

$$\Delta\kappa_B = - \left( \zeta \Delta\delta + \left( \frac{\mu}{u} + \frac{\bar{l}\zeta}{u} \right) \Delta\dot{\delta} + \frac{\bar{l}\mu}{u^2} \Delta\ddot{\delta} \right). \quad (3.62)$$

Mit  $a_1 = -\zeta$ ,  $b_1 = -\left(\frac{\mu}{u} + \frac{\bar{l}\zeta}{u}\right)$  und  $c_1 = -\frac{\bar{l}\mu}{u^2}$  vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\Delta\kappa = a_1 \Delta\delta + b_1 \Delta\dot{\delta} + c_1 \Delta\ddot{\delta}. \quad (3.63)$$

Das Minus in den Gleichungen (3.59), (3.61) und (3.62) resultiert aus der Vorzeichendefinition der Krümmung und den verwendeten Winkeldefinitionen (positive Richtung).

Des weiteren werden noch für die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  Geschwindigkeitskomponenten in  $x_{global}$ - und  $y_{global}$ -Richtung angegeben. Die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Schnittlinie  $\overline{DB}$  (Richtung  $x_A$ -Achse) entspricht für alle drei Punkte der Geschwindigkeit  $u$ . Die Geschwindigkeitskomponente in Querrichtung (Richtung  $y_D$ -Achse) ist unterschiedlich und entspricht im Punkt  $A$

$$v_{A|D,y} = b_c \dot{\psi}_F, \quad (3.64)$$

im Punkt  $B$

$$v_{B|D,y} = \bar{l} \dot{\psi}_F, \quad (3.65)$$

im Punkt  $C$

$$v_{C|D,y} = l \dot{\psi}_F - t_c \dot{\delta}, \quad (3.66)$$

und im Punkt  $D$

$$v_{D|D,y} = 0. \quad (3.67)$$

Somit können die Geschwindigkeitskomponenten für die  $x$ - und  $y$ -Richtung, dargestellt im Koordinatensystem „global“, wie folgt angegeben werden

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{i|global} &= u \cos(\psi) + v_{i|D,y} \sin(\psi) \\ \dot{y}_{i|global} &= u \sin(\psi) - v_{i|D,y} \cos(\psi) \end{aligned} \right\} i = \{A, B, C, D\}. \quad (3.68)$$

### 3.1.3 Erweitertes Benchmark Modell

Um mathematisch zu zeigen, dass die Lateralflexion des Oberkörpers ungeeignet zum Regeln bzw. Steuern des Fahrrads ist, wird ein Modell mit einem Drehfreiheitsgrad des Oberkörpers  $\varphi_r$  benötigt. Dieser ist bereits im Fahrradmodell inklusive Reifenmodell enthalten. Da aber für die nachfolgende Analyse ein einfacheres Fahrradmodell (ohne Reifenmodell) von Vorteil ist, wird eine Erweiterung des Benchmark Modells um den Drehfreiheitsgrad  $\varphi_r$  durchgeführt. Die Annahmen und zusätzlichen Hilfsgrößen sind identisch mit jenen des Benchmark Modells. Es werden nur noch die zwei speziellen Deviationsmomente des Fahrerobers  $r$  benötigt:

$$I_{r\varphi_r x_D} = I_{r\varphi_r x_A} \quad (3.69)$$

$$I_{r\varphi_r z_D} = -I_{rxz|r} + m_r s_r x_r. \quad (3.70)$$

Es folgen die drei linearisierten Bewegungsgleichungen des erweiterten Benchmark Modells:

$\Delta\varphi$  :

$$\begin{aligned} &I_{Txx|D} \Delta\ddot{\varphi} + m_T z_T g \Delta\varphi + I_{r\varphi_r x_D} \Delta\ddot{\varphi}_r - m_r s_r g \Delta\varphi_r + \\ &\left[ I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txx|D} \right] \Delta\ddot{\delta} + \left[ G_1 \cos \epsilon + \mu (-m_T z_T + G_T) + \zeta I_{Txx|D} \right] u \Delta\dot{\delta} + \\ &\left[ -S_\delta g + \zeta (-m_T z_T + G_T) u^2 \right] \Delta\delta = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

$\Delta\varphi_r$  :

$$\begin{aligned} &I_{r\varphi_r x_D} \Delta\ddot{\varphi} - m_r s_r g \Delta\varphi + I_{r\varphi_r \varphi_r} \Delta\ddot{\varphi}_r + k_{\varphi_r} \Delta\dot{\varphi}_r + (c_{\varphi_r} - m_r s_r g) \Delta\varphi_r \\ &\mu I_{r\varphi_r z_D} \Delta\ddot{\delta} + [-k_\delta \sin \epsilon + (\mu m_r s_r + \zeta I_{r\varphi_r z_D}) u] \Delta\dot{\delta} + \\ &\left[ -c_\delta \sin \epsilon + \zeta m_r s_r u^2 \right] \Delta\delta = \Delta M_{\varphi_r} - \Delta M_\delta \sin \epsilon \end{aligned} \quad (3.72)$$

$\Delta\delta$  :

$$\begin{aligned} &\left[ I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txx|D} \right] \Delta\ddot{\varphi} - [G_1 \cos \epsilon + \mu G_T] u \Delta\dot{\varphi} - S_\delta g \Delta\varphi + \mu I_{r\varphi_r z_D} \Delta\ddot{\varphi}_r \\ &\left[ I_{H\delta\delta} + \mu (2I_{H\delta z_D} + \mu I_{Tzz|D}) \right] \Delta\ddot{\delta} + [k_\delta + [\zeta I_{H\delta z_D} + \mu (S_\delta + \zeta I_{Tzz|D})] u] \Delta\dot{\delta} \\ &\left[ c_\delta - S_\delta \sin \epsilon g + \zeta (S_\delta + G_1 \sin \epsilon) u^2 \right] \Delta\delta = \Delta M_\delta \end{aligned} \quad (3.73)$$

In Matrizen-Form ergeben sich die Bewegungsgleichungen mit dem Vektor  $\mathbf{q}_e = [\Delta\varphi, \Delta\varphi_r, \Delta\delta]^T$  und dem Momentenvektor  $\mathbf{f}_e$  zu

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + [\mathbf{C}_{0e} + u\mathbf{C}_{1e}] \dot{\mathbf{q}}_e + [\mathbf{K}_{0e} + u^2 \mathbf{K}_{2e}] \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e. \quad (3.74)$$

Dabei entsprechen die Matrizen sinngemäß jenen des Benchmark Modells (Index  $e$  für erweitertes Benchmark Modell). Eine Ausnahme stellt der Momentenvektor  $\mathbf{f}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e$  dar, welcher sich aus dem Produkt der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_e$  und dem Eingangsvektor  $\mathbf{u}_e = [\Delta M_{\varphi_r}, \Delta M_{\delta}]^T$  zusammensetzt. Die Matrizen sind auch für dieses Modell im Anhang A zu finden. Die Zustandsraumgleichung ergibt sich mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_e = [\Delta\varphi, \Delta\varphi_r, \Delta\delta, \Delta\dot{\varphi}, \Delta\dot{\varphi}_r, \Delta\dot{\delta}]^T$  zu

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_e^* \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_e^* \mathbf{u}_e. \quad (3.75)$$

Die Systemmatrix  $\mathbf{A}_e^*$  ergibt sich zu

$$\mathbf{A}_e^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_e^{-1} \mathbf{K}_e^* & -\mathbf{M}_e^{-1} \mathbf{C}_e^* \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

und die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_e^*$  zu

$$\mathbf{B}_e^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{M}_e^{-1} \mathbf{B}_e \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Darin steht  $\mathbf{C}_e^* = \mathbf{C}_{0e} + u\mathbf{C}_{1e}$  für die gesamte Dämpfungsmatrix und  $\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_{0e} + u^2 \mathbf{K}_{2e}$  für die gesamte Steifigkeitsmatrix. Da dieses Modell nur für die Steuerbarkeitsanalyse Anwendung findet, wird auf eine Angabe der kinematischen Zusammenhänge verzichtet.

### 3.2 Fahrradparameter

Die für die numerischen Analysen und Simulationen notwendigen Geometrie- und Massenparameter sind nachfolgend angegeben. Sie beziehen sich auf das Test-Trekkingrad, welches unter anderem in [32] und [41] verwendet wurde.

Tabelle 3.1: Massen- und Trägheitsparameter des Test-Trekkingrades laut Ott [32]

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Radstand	$l$	1,095	m
Nachlaufwinkel	$\epsilon$	19	°
Nachlauf	$t_c$	0,0692	m
Lage Gelenk $\varphi_r$	$s_r$	0,339	m
<b>Räder</b>			
Abrollradius	$r_1 = r_2$	0,3355	m
Masse	$m_1 = m_2$	3,3355	kg
Trägheitstensor ( $i \in \{1, 2\}$ )	$\begin{bmatrix} I_{ixx i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iyy i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{izz i} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0633 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1266 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0633 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>
<b>Vordere Baugruppe</b>			
Masse	$m_H$	5,9788	kg
Schwerpunktlage x	$a_H$	0,6522	m
Schwerpunktlage z	$z_H$	-0,6331	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{Hxx H} & 0 & I_{Hxz H} \\ 0 & I_{Hyy H} & 0 \\ I_{Hxz H} & 0 & I_{Hzz H} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6327 & 0 & -0,0229 \\ 0 & - & 0 \\ -0,0229 & 0 & 0,1295 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>
<b>Rahmen</b>			
Masse	$m_m$	43,1059	kg
Schwerpunktlage x	$b_c$	0,3321	m
Schwerpunktlage z	$z_c$	-0,6905	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{mxx m} & 0 & I_{mzx m} \\ 0 & I_{myy m} & 0 \\ I_{mzx m} & 0 & I_{mzz m} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,6257 & 0 & -0,77 \\ 0 & - & 0 \\ -0,77 & 0 & 2,4248 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>

Weiter auf der nächsten Seite

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
<b>Fahreroberkörper</b>			
Masse	$m_r$	55,37	kg
Schwerpunktlage x	$x_r$	-0,0322	m
Schwerpunktlage z	$z_r$	-1,355	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{rxx r} & 0 & I_{rxz r} \\ 0 & I_{ryy r} & 0 \\ I_{rxz r} & 0 & I_{rzz r} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,0704 & 0 & 0,331 \\ 0 & - & 0 \\ 0,331 & 0 & 2,048 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>

Tabelle 3.2: Ergänzende Fahrradparameter laut Ott [32]

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
<b>Dämpfungen &amp; Steifigkeiten</b>			
Dämpfung Füße - Fahreroberkörper	$c_{\varphi_r}$	34	Nms/rad
Steifigkeit Füße - Fahreroberkörper	$k_{\varphi_r}$	760	Nm/rad
Dämpfung Lenker - Fahreroberkörper	$c_{\delta}$	0	Nms/rad
Steifigkeit Lenker - Fahreroberkörper	$k_{\delta}$	0	Nm/rad
<b>Reifenparameter für den Vorderreifen</b>			
Sturzwinkelsteifigkeit <sup>4</sup>	$c_{F\gamma_1}$	$kF_{z1}$	N/rad
Schräglaufwinkelsteifigkeit	$c_{F\alpha_1}$	$0,35F_{z1}$	N/°
Rückstellmoment Sturz	$c_{M\gamma_1}$	$0,014c_{F\gamma_1}$	Nm/rad
Rückstellmoment Schräglaufwinkel	$c_{M\alpha_1}$	$0,014c_{F\alpha_1}$	Nm/rad
Kippmomentensteifigkeit Sturz	$c_{Mx_1}$	$0,01F_{z1}$	Nm/rad
Relaxationslänge	$\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\gamma_1}$	0,03	m
<b>Reifenparameter für den Hinterreifen</b>			
Sturzwinkelsteifigkeit <sup>4</sup>	$c_{F\gamma_2}$	$kF_{z2}$	N/rad
Schräglaufwinkelsteifigkeit	$c_{F\alpha_2}$	$0,35F_{z2}$	N/°
Rückstellmoment Sturz	$c_{M\gamma_2}$	$0,02c_{F\gamma_2}$	Nm/rad
Rückstellmoment Schräglaufwinkel	$c_{M\alpha_2}$	$0,02c_{F\alpha_2}$	Nm/rad
Kippmomentensteifigkeit Sturz	$c_{Mx_2}$	$0,01F_{z2}$	Nm/rad
Relaxationslänge	$\sigma_{\alpha_2} = \sigma_{\gamma_2}$	0,03	m

<sup>4</sup> $k = 11/\text{rad}$

### 3.3 Stabilitätsverhalten

Nach der Modellbeschreibung und der Angabe der Parameter für die numerischen Auswertungen kann nun die Frage der Stabilität der Regelstrecke, also dem Fahrrad samt Fahrerkörper, erörtert werden. Die Stabilitätsuntersuchung erfolgt für die vorher beschriebenen linearen Fahrradmodelle anhand der Eigenwerte  $\lambda_i$ , Abschnitt 2.2.3, welche aus den jeweiligen Systemmatrizen der drei Modelle ( $\mathbf{A}_t^*$ ,  $\mathbf{A}^*$  und  $\mathbf{A}_e^*$ ) berechnet werden. Nach der Größe der Systemmatrix (abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade) besitzt das Fahrradmodell inklusive Reifenmodell 12, das Benchmark Modell 4 und das erweiterte Benchmark Modell 6 Eigenwerte. Für die Stabilitätsuntersuchung und die Dynamik sind hauptsächlich jene Eigenmodes von Bedeutung, welche den Eigenwerten mit positivem oder schwach negativem Realteil zugeordnet sind, da die anderen Eigenmodes, bedingt durch die starke Dämpfung, rasch abklingen. Folglich sind beim Fahrrad die mit **Weave(-Mode)**, **Capsize(-Mode)** und **Wobble(-Mode)** bezeichneten Eigenmodes hauptsächlich von Bedeutung. Weiters seien noch der Castor-Mode sowie der Lean-Mode erwähnt. Der Wobble-Mode tritt bei den in dieser Arbeit verwendeten Modellen nicht auf und wird nur aus Gründen der Vollständigkeit angeführt. Die zum Weave-, Capsize-, und Lean-Mode zugeordneten Eigenwerte sind in den nachfolgenden Stabilitätsdiagrammen bzw. -karten dargestellt und in Abbildung 3.6 auch bezeichnet. Aufgrund der starken Geschwindigkeitsabhängigkeit der Systemmatrizen und folglich auch der Eigenwerte, werden diese, wie in der Literatur üblich, über der Geschwindigkeit  $u$  aufgetragen. Der betrachtete Geschwindigkeitsbereich erstreckt sich von 0.1 m/s bis 20 m/s und deckt die alltäglichen Fahrgeschwindigkeiten beim Fahrradfahren ab. Der verwendete Geschwindigkeitsbereich beginnt nicht bei Null, weil beim Fahrradmodell inklusive Reifenmodell das Reifenmodell für die Krafterzeugung eine Längsgeschwindigkeit voraussetzt.

#### **Weave (Pendeln)**

Der Weave-Mode beschreibt einerseits im unteren Geschwindigkeitsbereich (bis ca. 1 m/s) zwei nicht oszillierende Eigenmodes, welche zwei reellen Eigenwerten zugeordnet sind, andererseits einen oszillierenden Eigenmode, der zwei konjugiert komplexen Eigenwerten zugeordnet ist, vgl. Abbildung 3.6. Die nicht oszillierenden Eigenmodes charakterisieren ein Umfallen des Fahrrads, ähnlich der Bewegung eines inversen Pendels, [43]. Der oszillierende Eigenmode beschreibt eine Roll- und Gierbewegung des Fahrrads, wobei das Rollen dominiert. Dies entspricht anschaulich einer „schwänzeln“ Bewegung des hinteren Fahrradteils, welche durch eine Rollbewegung überlagert wird, [46].

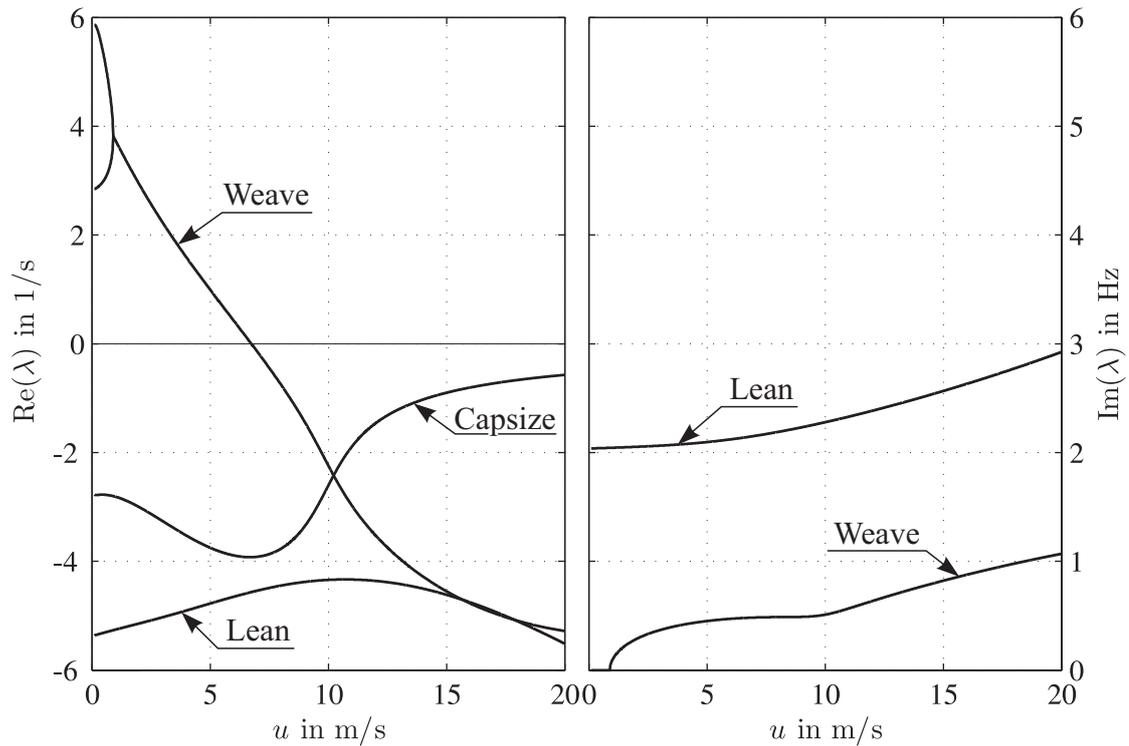


Abbildung 3.6: Stabilitätskarte des Fahrradmodelles inklusive Reifenmodell

### Capsize („Umfallen“)

Als Capsize wird der nicht-oszillierende und somit reelle Eigenmode des Fahrrads bezeichnet, welcher auch in Abbildung 3.6 ersichtlich ist und durch eine Rollbewegung charakterisiert ist. Bei einem instabilen Capsize kippt das Fahrrad um, vergleichbar dem Kentern (Capesize) eines Schiffes, [45]. Im Allgemeinen ist er im betrachteten Geschwindigkeitsbereich stabil, kann jedoch, abhängig von der Modellierung des Fahrbahn-Reifen-Kontaktes, mit zunehmender Geschwindigkeit instabil werden, [40].

### Wobble (Flattern)

Als Wobble wird eine schwingende Bewegung des Vorderradsystems um die Lenkachse bezeichnet. Im Deutschen auch als Lenkungsflattern oder nur Flattern bezeichnet. Zur Abbildung dieses charakteristischen Eigenmodes wird ein zusätzlicher Freiheitsgrad in der Vorderbaugruppe eingeführt. Beispielsweise verwendet [43] einen Drehfreiheitsgrad, durch welchen sich Gabel und Vorderrad um eine Längsachse in der Symmetrieebene des Rades nahe des Lenkkopflagers neigen können. Die Stabilität des Wobble-Modus hängt stark von den Fahrradparametern, also der konstruktiven Auslegung ab, [32].

### Lean

Der noch unbehandelte Lean-Mode, [44] kann dem Oberkörperfreiheitsgrad  $\varphi_r$  zugeordnet werden und tritt somit auch nur bei Modellen, welche diesen beinhalten, auf (Fahrradmodell inklusive Reifenmodell und erweitertes Benchmark Modell). Er stellt eine schwingende Rollbewegung des Fahreroberkörpers gegenüber dem Rahmen bzw. Fahrerbeinen dar. Die Stabilität des Lean-Modus hängt stark von der Drehfedersteifigkeit und Drehdämpferkonstante ab, welche im Zuge der Modellierung des Oberkörperfreiheitsgrads verwendet werden. Für die in dieser Arbeit verwendeten Parameter und Modelle ist er, falls vorhanden, stabil.

Aus Gründen der Vollständigkeit sei noch der Castor-Mode erwähnt, der den letzten der drei Eigenmodes des Benchmark Modells darstellt. Er wird durch Lenkbewegungen charakterisiert, bei welchen der vordere Aufstandspunkt einer Trajektorie vollführt, ähnlich der eines drehbaren Einkaufswagenrads, [6].

In der Abbildung 3.7 sind zum Vergleich die Eigenwerte (Weave, Capsize, Lean) der drei verwendeten Fahrradmodelle dargestellt. Der auffälligste Unterschied ist, wie bereits erörtert, das Fehlen des Lean-Modus beim Benchmark Modell. Dies ist jedoch von untergeordneter Bedeutung, da er stabil ist. Bedeutender ist der Unterschied beim Capsize-Mode, bei dem das grundlegende Stabilitätsverhalten vom Fahrradmodell abhängig ist. Bei den Modellen mit nicht holonomen Reifenbindungen (Benchmark und erweitertes Benchmark) wird er im betrachteten Geschwindigkeitsbereich instabil. Im Gegensatz dazu bleibt er bei dem Fahrradmodell inklusive Reifenmodell stabil. Die Geschwindigkeit bei welcher der Capsize-Mode instabil wird, sprich der zugehörige Eigenwert Null ist, wird in der Literatur [6] als Capsize-Geschwindigkeit bezeichnet.

Der Geschwindigkeitsbereich in dem alle Eigenmodes des Fahrrads stabil sind, also alle Eigenwerte negative Realteile besitzen, wird als auto- oder selbststabiler Bereich bezeichnet. Wie in Abbildung 3.7 ersichtlich wird, hängt der autostabile Bereich stark vom jeweiligen Fahrradmodell ab. Beim Benchmark Modell liegt dieser zwischen dem stabil werdenden Weave-Mode bei 5.4 m/s und dem instabil werdenden Capsize-Mode bei 9 m/s. Hingegen ist das Fahrradmodell inklusive Reifenmodell ab dem Nulldurchgang des Weave-Modus bei 6.7 m/s autostabil. In diesen Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass Modelle ohne Reifenmodell nur für kleine Geschwindigkeiten geeignet sind, [6]. Das Hinzufügen des Drehfreiheitsgrades beim erweiterten Benchmark Modell verändert den autostabilen Bereich gegenüber dem Benchmark Modell nur minimal (im hundertstel Bereich), vgl. Abbildung 3.7.

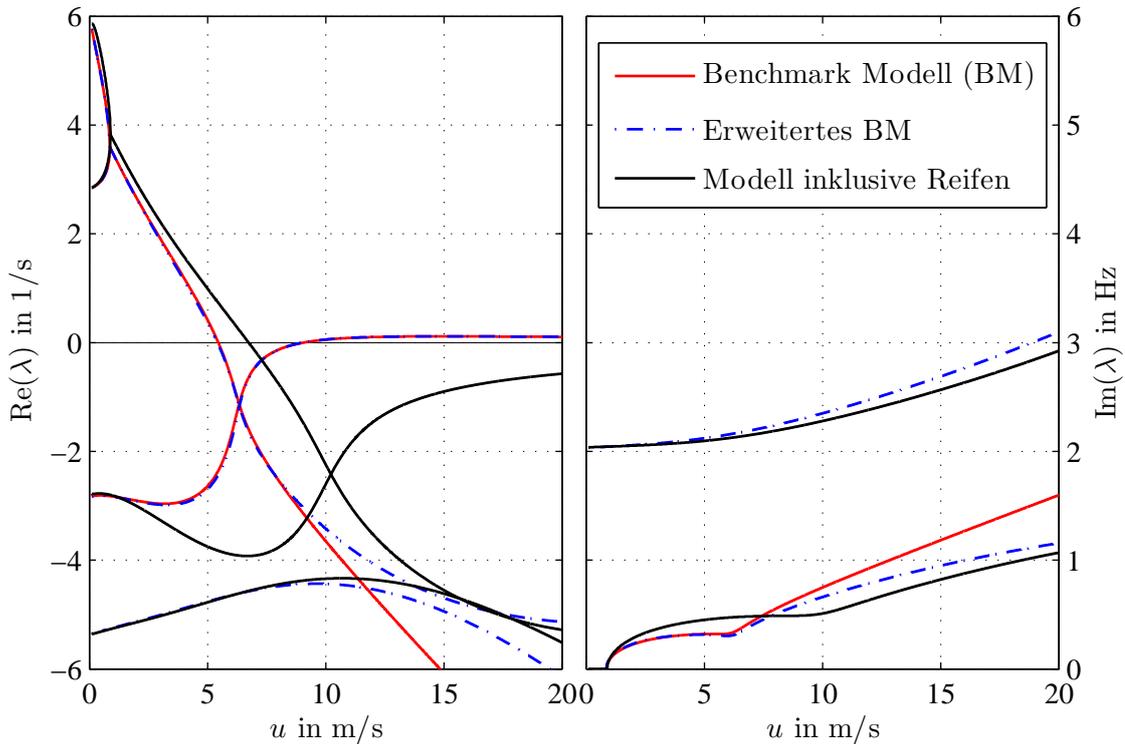


Abbildung 3.7: Stabilitätsvergleich der unterschiedlichen Fahrradmodelle

### 3.4 Steuerbarkeit

Für die Modellierung der regelungstechnischen Aufgabe „Fahrradfahren“ ist es natürlich auch von Interesse bei welchen Geschwindigkeiten das System Fahrrad nicht vollständig zustandssteuerbar ist und welche der Eigenmodes folglich nicht beeinflusst werden können. Nachfolgend werden die Geschwindigkeiten<sup>5</sup>, bei denen das System nicht vollständig zustandssteuerbar ist, sowie die dazugehörigen nicht steuerbaren Eigenmodes der Modelle (Benchmark und erweitertes Benchmark) in den Tabellen 3.3 und 3.4 angegeben, abhängig von den möglichen Systemeingangsgrößen. Die Berechnung erfolgt wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben. Zuerst werden die nicht vollständig steuerbaren Geschwindigkeiten über die Determinante der Steuerbarkeitsmatrix  $Q_S$  ermittelt, danach über die Links-Eigenvektoren die zugehörigen, nicht steuerbaren Eigenmodes. Die nicht vollständig steuerbaren Geschwindigkeiten für die Eingangsgröße Lenkmoment sind beinahe identisch, da bis auf den zusätzlichen Oberkörperfreiheitsgrad des erweiterten Benchmark Modells beide Modelle übereinstimmen. Die zu den nicht steuerbaren Eigenmodes gehörenden Eigenvektoren können aufgrund der unterschiedlichen Anzahl von Freiheitsgraden der Modelle nur relativ zwischen der  $\varphi$ - und  $\delta$ -Komponenten verglichen werden.

<sup>5</sup>Es werden nur die praktisch möglichen Geschwindigkeiten angegeben.

Tabelle 3.3: Steuerbarkeitsanalyse des Benchmark Modells: nicht vollständig steuerbare Geschwindigkeiten  $v_{u n}$  inklusive der zugehörigen, nicht steuerbaren Eigenvektoren und -modes

$v_{u n}$	$\lambda_{v_{u n}}$	$[\varphi; \delta]_{v_{u n}}^T$	Eigenmode
Regelung übers Lenkmoment $M_\delta$ :			
0, 0453	2, 8418	$[0, 24847; 0, 22011]^T$	Weave
1, 1877	-2, 8448	$[0, 30057; 0, 14086]^T$	Capsize

Tabelle 3.4: Steuerbarkeitsanalyse des erweiterten Benchmark Modells: nicht vollständig steuerbare Geschwindigkeiten  $v_{u n}$  inklusive der zugehörigen, nicht steuerbaren Eigenvektoren und -modes

$v_{u n}$	$\lambda_{v_{u n}}$	$[\varphi; \varphi_r; \delta]_{v_{u n}}^T$	Eigenmode
Regelung übers Lenkmoment $M_\delta$ :			
0, 0459	2, 8455	$[0, 2452; 0, 0141; -0, 22278]^T$	Weave
1, 1905	-2, 8469	$[0, 2968; -0, 0239; -0, 1454]^T$	Capsize
Regelung übers Rollmomentmoment $M_{\varphi_r}$ :			
0, 1798	5.597	$[-0, 0054; 0, 0005; 0, 1758]^T$	Capsize

Das Benchmark Modell ist nur bei kleinen Geschwindigkeiten nicht vollständig zustandssteuerbar. Dabei ist der nicht steuerbare Eigenmode der größeren Geschwindigkeit, welche eventuell für Simulationen schon relevant sein könnte, stabil und somit relativ unproblematisch. Das erweiterte Benchmark Modell ist mit den beiden Eingangsgrößen Lenk- und Rollmoment über den gesamten relevanten Geschwindigkeitsbereich vollständig zustandssteuerbar, da die nicht steuerbaren Geschwindigkeiten für den Eingang Lenkmoment nicht mit denen des Eingangs Rollmoment zusammenfallen. Dies deckt sich auch mit den Ergebnissen von Schwab et al. [23] für etwas aufwendigere Fahrradmodelle (aufwendigerer passiver Fahrer).

Des weiteren lässt sich mit dem Bewertungsmaß der modalen Steuerbarkeit, vgl. Abschnitt 2.1.2 zeigen, dass das Lenkmoment  $M_\delta$  besser zum Regeln und Steuern des Fahrrads geeignet ist als das Oberkörperrollmoment  $M_{\varphi_r}$ . Schwab et al. zeigt auch dies für ein etwas aufwendigeres Fahrradmodell in [23]. In Abbildung 3.8 sind die Winkel  $\beta_{iM_\delta}$  (Eingang Lenkmoment) als Bewertungsmaß der modalen Steuerbarkeit dargestellt und in Abbildung 3.9 die Winkel  $\beta_{iM_{\varphi_r}}$  (Eingang Oberkörperrollmoment). Für den Eingang Lenkmoment weisen alle Eigenmodes Bewertungswinkel  $\beta_{iM_\delta}$  nahe  $0^\circ$  auf und sind somit über das Lenkmoment gut beeinflussbar. Eine Ausnahme stellt der Capsize-Mode im Bereich der nicht vollständig zustandssteuerbaren Geschwindigkeit dar, welche in Abbildung 3.8 deutlich erkennbar ist.

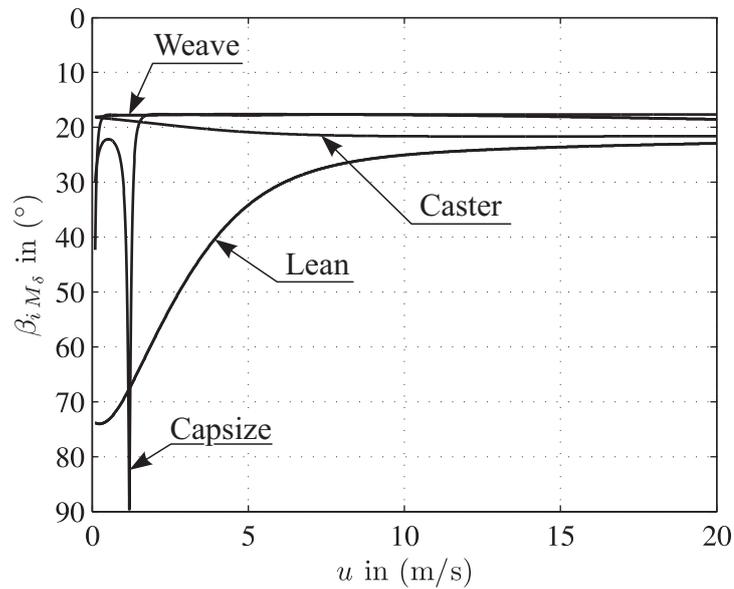


Abbildung 3.8: Bewertungsmaß der modalen Steuerbarkeit für die Eingangsgröße  $M_\delta$  in Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $u$

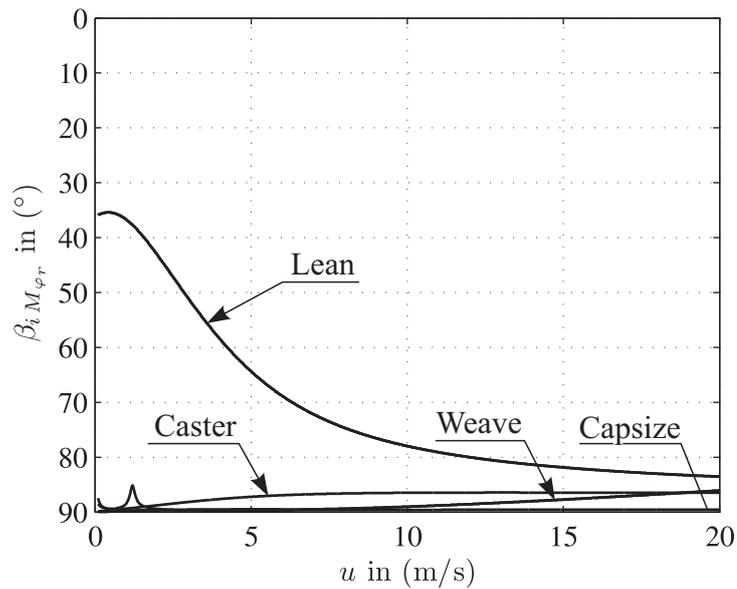


Abbildung 3.9: Bewertungsmaß der modalen Steuerbarkeit für die Eingangsgröße  $M_\varphi$  in Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $u$

Im Gegensatz dazu sind die Bewertungswinkel  $\beta_{iM_{\varphi_r}}$  für den Eingang Oberkörperrollmoment nahe bei  $90^\circ$ , wodurch gezeigt wird, dass das Rollmoment zur Beeinflussung der einzelnen Modes nicht geeignet ist. Diese Analyse mit dem Bewertungsmaß der modalen Steuerbarkeit bestätigt die Nichtberücksichtigung des Oberkörperrollmoments beim Fahrermodell.

### 3.5 Allgemeine Eigenschaften der Regelstrecke

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, erfolgt der Entwurf und die Auslegung des Fahrermodells mit dem Benchmark Modell. In diesem Abschnitt werden unter anderem die Übertragungsfunktionen und Sprungantworten dieses Modells betrachtet.

#### Übertragungsfunktionen

Zur Transformation der Bewegungsgleichung (3.52) in den Frequenzbereich bzw. zur Ermittlung der Übertragungsfunktionen wird ähnlich wie in [1] vorgegangen. Dabei wird die Laplace-Transformation auf die linke Seite der matrizenförmigen Bewegungsgleichung (3.52) angewendet und das matrizenwertige Polynom

$$\mathbf{P}(s, u) = \mathbf{M}_b s^2 + (\mathbf{C}_0 b + \mathbf{C}_1 b u) s + (\mathbf{K}_0 b + \mathbf{K}_2 b u^2) \quad (3.78)$$

eingeführt. Mittels dieses Polynoms lassen sich die Bewegungsgleichungen in den Frequenzbereich zu der einfachen und übersichtlichen Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s, u) \\ \mathbf{P}_{21}(s, u) & \mathbf{P}_{22}(s, u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi(s) \\ \Delta\delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta M_\delta(s) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

überführen. Dabei entsprechen die Nullstellen der Gleichung

$$\det(\mathbf{P}(s, u)) = 0 \quad (3.80)$$

den Polen der Übertragungsfunktionen, bzw. den Eigenwerten der Systemmatrix  $\mathbf{A}_b$ .

Die Gleichungen (3.81) und (3.82) geben die Übertragungsfunktionen zwischen der Eingangsgröße Lenkmoment  $\Delta M_\delta(s)$  und dem Rollwinkel  $\Delta\varphi(s)$  bzw. dem Lenkwinkel  $\Delta\delta(s)$  an. Außerdem gibt die Gleichung (3.83) den Zusammenhang zwischen dem Lenkwinkel  $\Delta\delta$  und dem Rollwinkel  $\Delta\varphi$  in Form einer Übertragungsfunktion an.

*Lenkmoment zu Lenkwinkel:*

$$G_{\delta M_\delta}(s, u) = \frac{\Delta\delta(s)}{\Delta M_\delta(s)} = \frac{\mathbf{P}_{11}(s)}{\det(\mathbf{P}(s, u))} \quad (3.81)$$

*Lenkmoment zu Rollwinkel:*

$$G_{\varphi M_\delta}(s, u) = \frac{\Delta\varphi(s)}{\Delta M_\delta(s)} = -\frac{\mathbf{P}_{12}(s, u)}{\det(\mathbf{P}(s, u))} \quad (3.82)$$

*Lenkwinkel zu Rollwinkel:*

$$G_{\varphi\delta}(s, u) = \frac{\Delta\varphi(s)}{\Delta\delta(s)} = -\frac{\mathbf{P}_{12}(s, u)}{\mathbf{P}_{11}(s)} \quad (3.83)$$

Für die Angabe der allgemeinen Übertragungsfunktionen wird diese kompakte Form gewählt, da auf eine Angabe in der zu bevorzugenden Pole-Nullstellen-Darstellung aus Gründen der Übersichtlichkeit (Nenner Polynom vierten Grades) verzichtet wurde. Die Pole-Nullstellen-Darstellung hätte die Vorteile, dass die Stabilität oder auch das Nichtphasenminimumverhalten direkt aus den Polen bzw. Nullstellen ersichtlich wäre.

### Numerische Analyse

Wie aus der numerisch berechneten Pol-Nullstellen-Darstellung der Übertragungsfunktionen (3.85) bis (3.86) zu erkennen ist, besitzt das dynamische System Fahrrad positive Nullstellen. Die numerische Auswertung erfolgt dabei für die Parameter aus Abschnitt 3.2 und bei einer Geschwindigkeit von 7 m/s, welche im autostabilen Bereich liegt.

$$G_{\delta M_\delta}(s) = 4,7607 \frac{(s - 2,842)(s + 2,842)}{(s + 23,58)(s + 0,4586)(s^2 + 3,661s + 10,76)} \quad (3.84)$$

$$G_{\varphi M_\delta}(s) = -0,0878 \frac{(s + 87,63)(s + 21,59)}{(s + 23,58)(s + 0,4586)(s^2 + 3,661s + 10,76)} \quad (3.85)$$

$$G_{\varphi\delta}(s) = -0,0184 \frac{(s + 87,63)(s + 21,59)}{(s - 2,842)(s + 2,842)} \quad (3.86)$$

Die stabile Übertragungsfunktion  $G_{\delta M_\delta}(s)$  besitzt eine positive Nullstelle bei  $s = 2,842$  und besitzt infolge dessen Nichtphasenminimumverhalten (vgl. Abschnitt 2.4). Diese positive Nullstelle und das damit verbundene Systemverhalten ist, wie aus dem Polynom  $\mathbf{P}_{11}(s)$  zu erkennen, unabhängig von der Geschwindigkeit. Im Unterschied dazu besitzt die Übertragungsfunktion  $G_{\varphi M_\delta}(s)$  nur Nullstellen in der linken Halbebene und somit Phasenminimumverhalten mit identischen Polen. Es wird darauf hingewiesen, dass die Übertragungsfunktion  $G_{\varphi\delta}(s)$ , welche den Zusammenhang zwischen Lenkwinkel und Rollwinkel ausdrückt, auch im autostabilen Geschwindigkeitsbereich instabil ist. Die Übertragungsfunktion  $G_{\varphi\delta}(s)$  stellt in Bezug auf das betrachtete System Fahrrad, mit dem Eingang Lenkmoment  $\Delta M_\delta$ , eine „innere Übertragungsfunktion“ dar. Wie aus den Gleichungen (3.84) bis (3.86) ersichtlich, „kürzt“ sich beim Aufbau der Übertragungsfunktion  $G_{\varphi M_\delta}(s)$  über  $G_{\varphi M_\delta}(s) = G_{\varphi\delta}(s) G_{\delta M_\delta}(s)$  der instabile Pol von  $G_{\varphi\delta}(s)$  weg. Dies zeigt auch den direkten Zusammenhang zwischen diesem instabilen Pol und dem Nichtphasenminimumverhalten (Allpassverhalten) von  $G_{\delta M_\delta}(s)$ . Der instabile Pol von (3.86) ist somit in Bezug auf die Stabilität unproblematisch für das betrachtete Systemverhalten, außer es wirkt eine Störung direkt auf den Lenkwinkel (Eingang von  $G_{\varphi\delta}(s)$ ), da diese zum Aufklingen von  $\Delta\varphi$  führt (Fahrrad kippt um), [29].

Das klassische Phänomen eines Nichtphasenminimumsystems, das Allpassverhalten, ist für die Übertragungsfunktion  $G_{\delta M_\delta}(s)$ , (3.86) in Abbildung 3.10a dargestellt. Es wird ersichtlich, dass bei diesem Modell das Fahrrad auf einen positiven Lenkmomentsprung (in

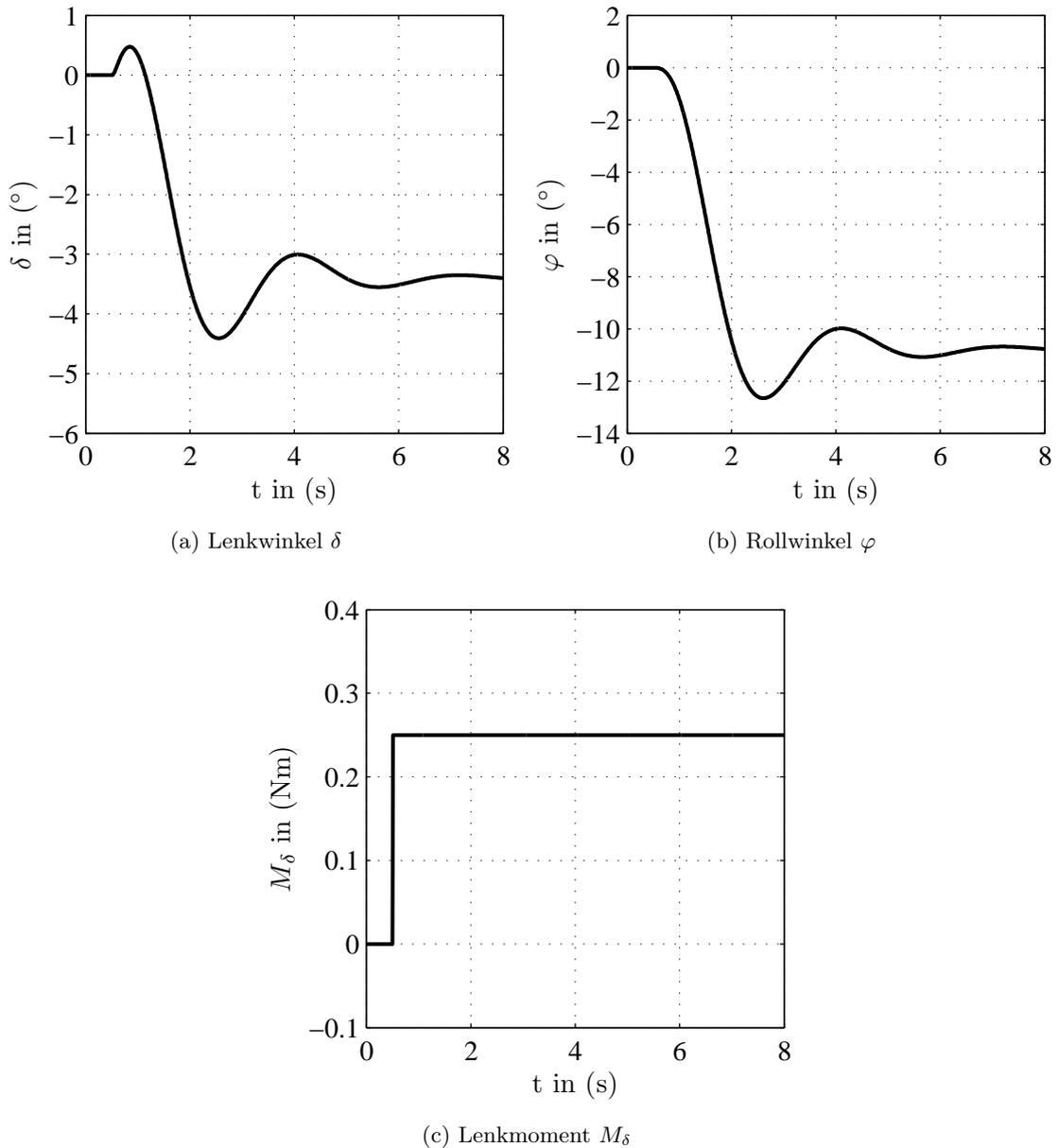


Abbildung 3.10: Lenkmomentsprung im autostabilen Bereich, Benchmark Modell

Uhrzeigerrichtung) zuerst mit einer Zunahme des Lenkwinkels  $\delta$  reagiert, welcher aber nach kurzer Zeit das Vorzeichen wechselt, siehe dazu auch [40]. In Abbildung 3.10b ist weiters zu erkennen, dass der Rollwinkel dieses Nichtphasenminimumverhalten nicht aufweist, was auch aus der Übertragungsfunktion (3.85) geschlossen werden kann. Somit stellt sich infolge eines positiven Lenkmomentsprungs ein stationär negativer Roll- und Lenkwinkel ein. Das stationäre Verhalten (stationärer Zusammenhang Lenkmoment/Lenkwinkel bzw. Lenkmoment/Rollwinkel) eines Fahrradmodells hängt sehr stark von der Modellierung sowie der betrachteten Geschwindigkeit ab. Um dies zu verdeutlichen, ist in Abbildung 3.11

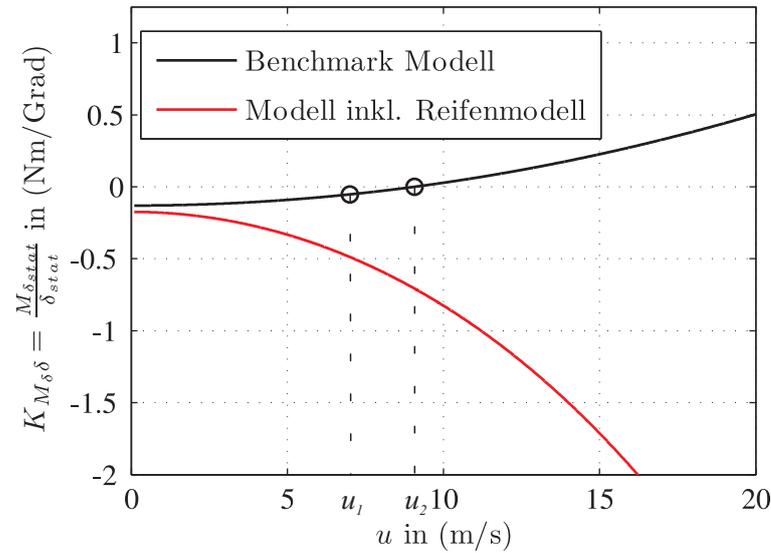


Abbildung 3.11: Stationäre Zusammenhänge zwischen Lenkmoment und Lenkwinkel

die stationäre Verstärkung der Übertragungsfunktion  $G_{M_\delta}(s) = 1/G_{\delta M_\delta}(s)$  dargestellt. Darin ist die Geschwindigkeit, welche für die numerische Auswertung in diesem Abschnitt verwendet wird, mit  $u_1$  bezeichnet.

Beim Benchmark Modell ist bis zur Geschwindigkeit  $u_2$ , welche dem Null-Durchgang des Capsize-Mode in der Stabilitätskarte (vgl. Abbildung 3.7), also der Capsize-Geschwindigkeit entspricht, ein negatives Lenkmoment für einen positiven Lenkwinkel erforderlich. Oberhalb dieser Geschwindigkeit stimmen beim Benchmark Modell die Vorzeichen von Lenkmoment und Lenkwinkel überein. Bei der Geschwindigkeit  $u_2$  wird die Determinante der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_b^*$  zu Null und folglich besitzt das Gleichungssystem für den stationären Zustand  $[0, \Delta M_\delta]^T = \mathbf{K}_b^* \mathbf{q}_b$  nur die Trivillösung  $\Delta M_\delta = 0 \text{ Nm}$ . Folglich ist beim Benchmark Modell im stationären Fall bei dieser Geschwindigkeit kein Lenkmoment für beliebige Lenkwinkel und demzufolge Krümmungen notwendig. Im Gegensatz dazu ist beim Fahrradmodell inklusive Reifenmodell im betrachteten Geschwindigkeitsbereich immer ein negatives Lenkmoment für einen positiven Lenkwinkel notwendig. Dieses Phänomen wird in der Literatur normalerweise als „Countersteering“ bezeichnet.

# Kapitel 4

## Fahrermodellierung

Am Beginn dieses Kapitels erfolgt eine allgemeine Betrachtung bezüglich Fahrermodelle. Danach schließt eine detaillierte Beschreibung des entworfenen Fahrermodells an, wobei einerseits auf die zugrundeliegenden Ideen und andererseits auf die einzelnen Komponenten und Ebenen des Modells eingegangen wird. Neben dem verwendeten Fahrermodell werden dabei auch immer wieder andere – nicht immer zielführende – Ideen und Konzepte betrachtet.

### 4.1 Allgemeines

Im Allgemeinen sollten Fahrermodelle das menschliche (Fahr-) Verhalten abbilden. Dafür werden an das Modell eine Vielzahl von Anforderungen gestellt, die wichtigsten sind laut Plöchl [47]:

- allgemeine menschliche Eigenschaften und Fähigkeiten, wie die visuelle, vestibuläre, taktile und auditive Informationsaufnahme, -wahrnehmung und -verarbeitung, Reaktionszeit sowie neuromuskuläre Dynamik mit Beschränkungen, Vorausschau, Prädiktion/Antizipation, Adaption/Lernfähigkeit, Fähigkeiten zum Planen z. B. Trajektorien- und Geschwindigkeitsplanung
- Eigenschaften, welche dem spezifischen Fahrer zugeordnet werden, wie Alter, Erfahrung, Risikobereitschaft, etc.
- Eigenschaften, welche situationsbedingt sind, wie Stress, Müdigkeit, Konzentration, Emotion, etc.

Es ist offensichtlich, dass diese Vielzahl an Anforderungen nur schwierig von Fahrermodellen erfüllt werden können. Deshalb wird zur Abgrenzung eines Fahrermodells von einem schlichten Regler vorausgesetzt, dass zumindest einige der obigen Anforderungen erfüllt

werden. Im Laufe der Jahre wurden zahlreiche Fahrermodelle, vor allem für Kraftfahrzeuge und Flugzeuge entwickelt, welche sich hauptsächlich durch unterschiedliche methodische Zugänge und unterschiedliche Interessenschwerpunkte unterscheiden, [47]. Eine detailliertere und allgemeine Betrachtung von Fahrermodellen kann [47] entnommen werden.

## 4.2 Fahrradfahrermodell

Das hier vorgestellte Fahrermodell basiert auf der grundsätzlichen Annahme, dass sich der Mensch beim Erlernen des Fahrradfahrens eine mehr oder weniger stark vereinfachte Vorstellung des Fahrradverhaltens merkt. Dem Fahrer ist jedoch nur ein Bruchteil dieser eingepprägten Informationen bewusst. Als Beispiel dafür sei das sogenannte „Countersteering“ beim Fahrradfahren genannt, vgl. Abschnitt 3.5. Jedoch ermöglichen diese eingepprägten Vorstellungen dem Fahrer intuitiv und adäquat auf verschiedenste Fahrsituationen zu reagieren. Vom technischen Standpunkt aus kann diese vereinfachte Vorstellung des Fahrradverhaltens durch ein einfaches Fahrradmodell, welches in dieser Arbeit dem Benchmark Modell entspricht, abgebildet werden.

Des weitern wird davon ausgegangen, dass sich dieses interne Fahrradmodell dem jeweiligen zu fahrenden „realen“ Fahrrad anpasst. Dies deckt sich auch mit der praktischen Erfahrung, wonach man beim Wechsel zwischen zwei sehr unterschiedlichen Fahrrädern, wie Rennrad/Custom-Bicycle, eine Eingewöhnungsphase benötigt, um sich an das Fahrrad zu gewöhnen. Bei dem Fahrermodell wird diese Anpassung nicht direkt modelliert, sie wird nur insofern berücksichtigt, indem die Auslegung des Fahrermodells anhand eines Benchmark Modells erfolgt, welches dem jeweiligen „realen“ Fahrrad angepasst ist.

Nach dieser kurzen Darstellung der grundsätzlichen Idee des Fahrermodells müssen noch zusätzliche Annahmen behandelt werden, die bisher stillschweigend vorausgesetzt wurden. Aus der Vorstellung des Grundkonzepts in der Einleitung (Abschnitt 1.4) und der Modellbeschreibung des Fahrrads (Abschnitt 3.1) wird ersichtlich, dass für den Fahrereingriff (Steuer-/Stellgröße) das Lenkmoment  $M_\delta$  verwendet wird. Grundsätzlich wäre, wie bei Kraftfahrzeugen auch, der Lenkwinkel  $\delta$  als Steuer- bzw. Stellgröße möglich, dies würde aber entscheidende Nachteile mit sich bringen. Der wohl größte Nachteil ist der notwendige, komplexe Verlauf des Lenkwinkels (vgl. Abbildung 3.10a) zum Befahren einer Kurve. Außerdem zeigt Weir in [14]<sup>1</sup>, dass der Lenkwinkel  $\delta$  auch vom regelungstechnischen Standpunkt aus als Systemeingangsgröße ungeeignet ist, was die Annahme des Lenkmoments als Steuer- bzw. Stellgröße bestätigt.

---

<sup>1</sup>Arbeit bezieht sich auf Motorräder.

Abbildung 4.1 zeigt eine detaillierte Darstellung des Fahrermodells in Form eines Blockdiagramms. Gegenüber der Darstellung des Fahrermodellkonzeptes in der *Einleitung* (Abbildung 1.1) wurden die verbalen Beschreibungen der einzelnen Blöcke durch Verstärkungen und Übertragungsfunktionen ersetzt und die einzelnen Rückführschleifen des Stabilisierers getrennt eingezeichnet. Der Block „Fahrrad“ von Abbildung 1.1 wird z. B. durch die fünf Übertragungsfunktionen  $G_{\varphi M_\delta}(s)$ ,  $G_{\dot{\varphi} M_\delta}(s)$ ,  $G_{\delta M_\delta}(s)$ ,  $G_{\dot{\delta} M_\delta}(s)$  und  $G_{y_B M_\delta}(s)$  ersetzt, welche die Dynamik des Fahrrads beschreiben.

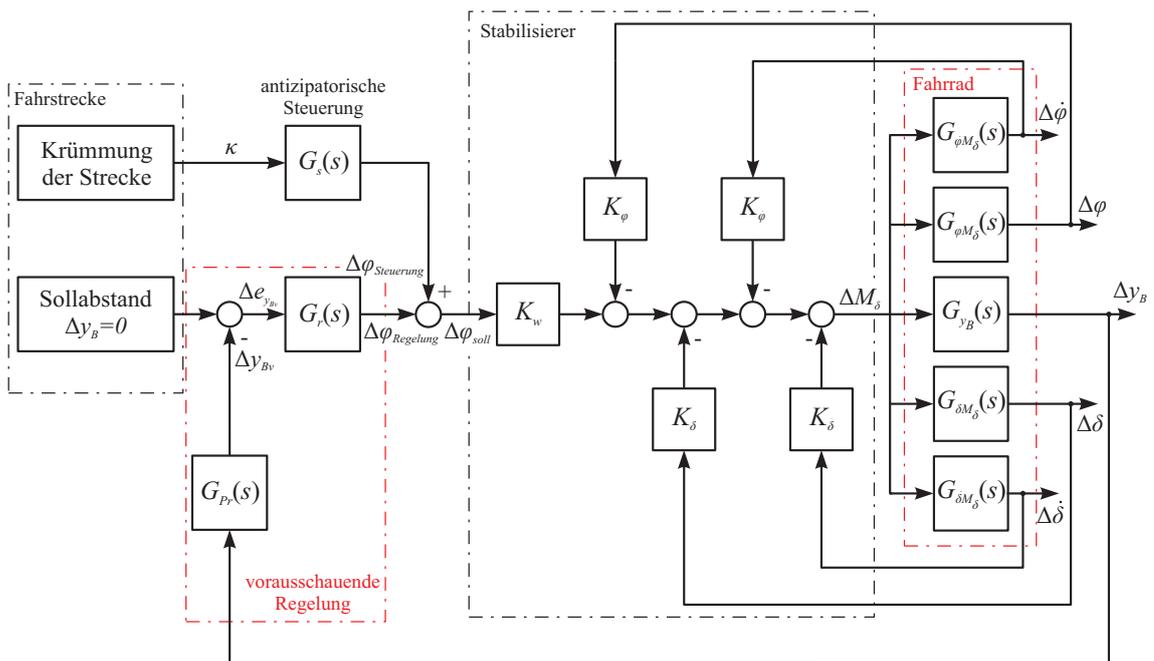


Abbildung 4.1: Blockschaltbild des Fahrermodells

Die noch immer ausstehenden Begründungen und Erklärungen zur Struktur des Fahrermodells erfolgen in der anschließenden getrennten Betrachtung der jeweiligen Komponenten bzw. Ebenen.

### 4.2.1 Stabilisierer

Die Aufgabe des Stabilisierers – das Fahrrad beim Fahren vor dem Umkippen zu bewahren – wird technisch als Regelung eines zum jeweiligen Kurvenradius bzw. zur jeweiligen Kurvenkrümmung passenden Rollwinkels  $\Delta \varphi$  realisiert. Der Sollwert  $\Delta \varphi_{soll}$  für die Regelung wird aus dem Rollwinkel  $\Delta \varphi_{Steuerung}$  der antizipatorischen Steuerung und der Rollwinkelkorrektur  $\Delta \varphi_{Regelung}$  der vorausschauenden Regelung gebildet.

Die Notwendigkeit einer Sollwertbildung für den Stabilisierer begründet die kaskadenförmige Anordnung von Stabilisierer und vorausschauender Regelung. Eine strikt getrennte

Anordnung von Stabilisierer, antizipatorischer Steuerung und vorausschauender Regelung, mit jeweils einem Anteil des Lenkmoments als Ausgang, würde zum Fehlen eines Sollwerts für die Stabilisationsebene führen. Zur Bildung dieses fehlenden Sollwerts wären dann komplexe und wiederum verschachtelte Strukturen notwendig, weshalb eine solche Anordnung nicht zielführend erscheint. Ein weiterer Vorteil der gewählten kaskadenförmigen Anordnung ist, dass auch bei der Capsize-Geschwindigkeit die antizipatorische Steuerungsebene wirksam bleibt. Dies wird in Abschnitt 4.2.2 noch genauer behandelt.

Die klassische Reaktionszeit, welche Mitschke [49] mit  $0,2\text{ s}$  in Bezug auf Kraftfahrzeuge angibt, kann prinzipiell der vorausschauenden Regelung (Kursregelung) zugeschrieben werden. Infolge der kaskadenförmigen Reglerstruktur gestaltet sich jedoch die Modellierung der menschlichen Reaktionszeit [15], [49] schwierig und wird hier nicht weiter berücksichtigt. In Hinblick auf die vorausschauende Regelung wird durch den inneren Stabilisationsregelkreis eine Art „Verzugszeit“ abgebildet, da der Rollwinkels  $\Delta\varphi$  dem Sollrollwinkel  $\Delta\varphi_{\text{soll}}$  zeitverzögert folgt. Damit wird näherungsweise auch die neuromuskuläre Dynamik beim Aufbau eines Lenkmoments berücksichtigt.

Grundsätzlich gibt es zahlreiche regelungstechnische Möglichkeiten zur Realisierung des Stabilisationsreglers. Nachfolgend werden drei dieser Möglichkeiten näher behandelt. Die Übertragungsfunktion  $G_{\varphi M_\delta}(s)$  stellt dabei für alle drei Möglichkeiten die Regelstrecke dar.

### Intuitiver Regler

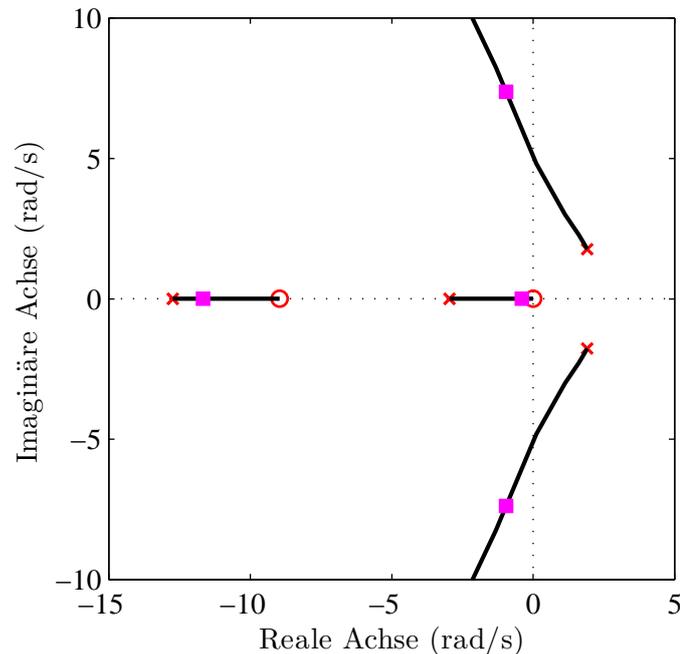
Schwab et al. gehen in [20] davon aus, dass man das instabile Verhalten eines Fahrrads stabilisieren kann, indem man in die Richtung der unerwünschten Rollbewegung lenkt. Dabei ist der grundsätzliche Gedanke identisch mit dem stabilisierenden Eigenlenkverhalten von Fahrrädern. Näheres dazu kann [43] entnommen werden. In [20] werden die folgenden beiden Regelgesetze eines reinen Stabilisierers (Sollwert ist identisch gleich Null) angegeben:

$$\Delta M_\delta = -K_v (u_{\max} - u) \Delta \dot{\varphi} \quad u < u_{\max}, \quad (4.1)$$

$$\Delta M_\delta = -K_c (u - u_{\max}) \Delta \varphi \quad u \geq u_{\max}. \quad (4.2)$$

$u_{\max}$  entspricht dabei einer Geschwindigkeit im autostabilen Bereich des Fahrrads. Wie bereits erwähnt handelt es sich vor allem im Fall  $u < u_{\max}$  um einen reinen Stabilisierer, da es mit dem Regelgesetz (4.1) nicht möglich ist, einen Rollwinkel ungleich Null zu regeln. Folglich scheidet dieser Regler für das Fahrermodell aus.

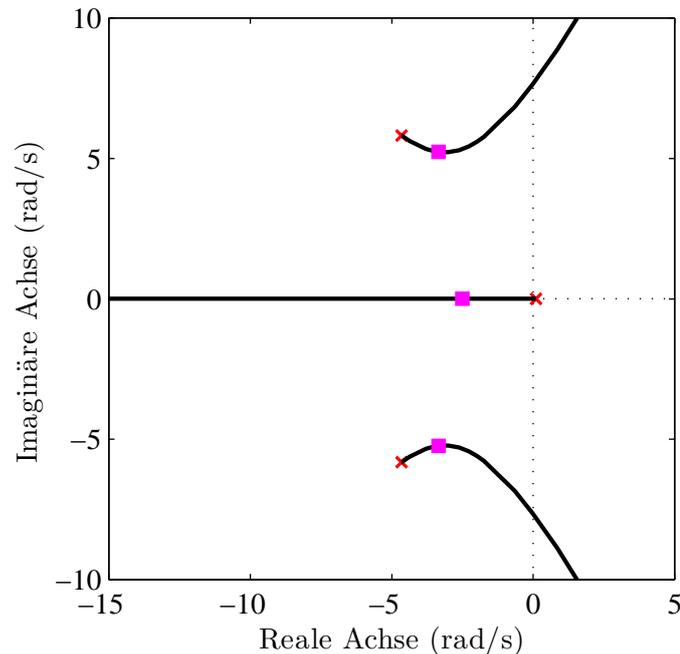
In Abbildung 4.2 ist die Wurzelortskurve für die Geschwindigkeit  $u = 3\text{ m/s} < u_{\max}$  des Regelgesetzes (4.1) dargestellt. Dabei entspricht  $-K_v (u_{\max} - u)$  dem variierten Parameter

Abbildung 4.2: Wurzelortskurve des „Intuitive controllers“ bei 3 m/s (Rückführung  $\dot{\varphi}$ )

(Reglerverstärkung) der Wurzelortskurve. Die roten Kreuze in Abbildung 4.2 entsprechen den Polen und die roten Kreise den Nullstellen der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises. Weiters symbolisieren die rosa Quadrate die Pole des geschlossenen Regelkreises bei einer Reglerverstärkung von  $-K_v(u_{\max} - u) = -24 \text{ Nms/rad}$ . Wie aus Gleichung (4.1) ersichtlich ist, wird bei dieser Fahrgeschwindigkeit die Rollwinkelgeschwindigkeit zurückgeführt, was auch der Grund für die Nullstelle im Ursprung der Wurzelortskurve ist.

Die Wurzelortskurve für den Fall  $u = 12 \text{ m/s} \geq u_{\max}$  (Regelgesetz (4.2)) ist in Abbildung 4.3 dargestellt. In diesem Diagramm entsprechen die rosa Quadrate den Polen der geschlossenen Übertragungsfunktion bei einer Reglerverstärkung von  $-K_c(u - u_{\max}) = -9 \text{ Nm/rad}$ . Die markanten Unterschiede in den Wurzelortskurven resultieren aus den stark unterschiedlichen Geschwindigkeiten und somit unterschiedlichen Polen des offenen Regelkreises (Stabilitätsverhalten). Zusätzlich erhält man Unterschiede in den Wurzelortskurven aus den unterschiedlichen Rückführgrößen (siehe Regelgesetz). Somit besitzt der offene Regelkreis im zweiten Fall infolge der Rückführung des Rollwinkels kein globales D-Verhalten, also keine Nullstelle der Übertragungsfunktion im Ursprung.

Aus den dargestellten Wurzelortskurven (Abbildung 4.2 und 4.3) zeigt sich, dass eine reine Stabilisation des Fahrrads mit diesen einfachen Regelgesetzen grundsätzlich „leicht“ zu realisieren ist. Der zweite Fall, also Regelgesetz (4.2), könnte zudem auch noch einfach an die geforderte Aufgabenstellung für das Fahrermodell angepasst werden. Dazu müsste  $\Delta\varphi$

Abbildung 4.3: Wurzelortskurve des „Intuitive controllers“ bei 12 m/s (Rückführung  $\varphi$ )

in (4.2) durch  $\Delta\varphi_{\text{soll}} - \Delta\varphi$  ersetzt werden. Trotzdem wäre ein Regler mit einem derartigen Regelgesetz für die Verwendung im Fahrermodell ungeeignet. Dies begründet sich unter anderem darin, dass dieser Stabilisationsregler (innerer Regelkreis), wie aus der Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises (Abbildung 4.3) ersichtlich, relativ „langsam“ ist und folglich nicht wesentlich schneller sein kann, als der vorausschauende Regler (äußerer Regelkreis = Kursregelung). Daraus kann wiederum auf eine starke gegenseitige Beeinflussung der beiden Regelkreise geschlossen werden, welche auch über die Lage der Pole des geschlossenen Stabilisationsregelkreises erklärbar ist. Diese Pole sind zugleich auch Pole der offenen Übertragungsfunktion der vorausschauenden Regelung (vgl. Abschnitt 4.2.3) und bestimmen bedingt durch ihre Lage auch maßgeblich die Dynamik der Regelstrecke der vorausschauenden Regelung. Infolge dessen wäre es auch schwierig, mit dem betrachteten Regelgesetz die vorausschauende Regelung stabil und mit einer ausreichenden Dynamik auszulegen, vgl. Abschnitt 4.2.3.

### Lead-Glied Regler

Ein naheliegender Ansatz für den Stabilisationsregler wäre, die Übertragungsfunktion (4.3) eines linearen Reglers für den Menschen von McRuer [15] zu verwenden.

$$G_R(s) = K_P \frac{1 + T_L s}{1 + T_I s} e^{-s\tau} \quad (4.3)$$

Durch die erwähnte Vernachlässigung der Totzeit (Reaktionszeit)  $\tau$ , ergibt sich aus (4.3)

die Reglerübertragungsfunktion des Stabilisierers zu

$$G_{\text{Stabilisation\_Lead}}(s) = K_P \frac{1 + T_L s}{1 + T_I s}, \quad (4.4)$$

welche der Übertragungsfunktion eines „Lead-Gliedes“ entspricht. Im Zuge der Auslegung des Fahrermodells zeigt sich, insbesondere bei der überlagerten vorausschauenden Regelung, dass auch dieser Regler als Stabilisierer im Fahrermodell ungeeignet ist.

Die Problematik bei diesem Regler liegt wiederum in der Dynamik, also in der Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises. Die Situation ist somit ähnlich wie beim vorher beschriebenen (angepassten) intuitiven Regler. Abhängig von den jeweiligen Parametern des „Lead-Glieds“ kommt es zu einem mehr oder weniger starken Überschwingen, wodurch sich die nachfolgende Auslegung der vorausschauenden Regelung erschwert. Weiters ergeben sich auch hier (in Abhängigkeit der Reglerparameter) in der Nähe der Imaginärachse liegende Pole, die zu den bereits beschriebenen Problemen führen. Um zu einer akzeptablen Dynamik zu gelangen, wären bei diesem Regler unrealistisch große Stellgrößen notwendig, weshalb auch dieser Ansatz ungeeignet als Stabilisationsregler ist.

### Zustandsregler

Bei einer vollständigen Zustandsvektorrückführung kann die Dynamik des geschlossenen Regelkreises über die Wahl der Pole (vom geschlossenen Regelkreis) frei festgelegt werden. Folglich erscheint es sinnvoll für den Stabilisierer eine vollständige Zustandsvektorrückführung zu verwenden, da bei den beiden vorher vorgestellten Regelungsstrategien keine zufriedenstellende Dynamik erreicht werden kann. Die Auslegung erfolgt für das Benchmark Modell, was gleichzeitig bedeutet, dass bei der vollständigen Zustandsvektorrückführung der Rollwinkel  $\Delta\varphi$ , die Rollwinkelgeschwindigkeit  $\Delta\dot{\varphi}$ , der Lenkwinkel  $\Delta\delta$  und die Lenkwinkelgeschwindigkeit  $\Delta\dot{\delta}$  zur Regelung verwendet werden. Durch die Verwendung dieser 4 Größen wird auch gleichzeitig angenommen, dass der Mensch diese Größen im Zuge der Stabilisationsaufgabe bewusst wahrnehmen kann. Aus den praktischen Erfahrungen beim Fahrradfahren scheint diese Annahme gerechtfertigt.

Für das Fahrermodell selbst kann der Stabilisierer als weitere Kaskadenregelung, vgl. Abbildung 4.1, interpretiert werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Sollrollwinkel  $\Delta\varphi_{\text{soll}}$  über die Verstärkung  $K_w$  in ein Lenkmoment umgewandelt wird, welches im Anschluss daran über die einzelnen Rückführschleifen (inklusive Verstärkungen) korrigiert wird. Der betrachtete kaskadenförmige Stabilisierer ist aber identisch mit der vollständigen Zustandsvektorrückführung beim Benchmark Modell, wobei  $K_w$  der Vorverstärkung entspricht, sowie  $K_\varphi$ ,  $K_{\dot{\varphi}}$ ,  $K_\delta$  und  $K_{\dot{\delta}}$  den jeweiligen Einträgen des Rückführvektors  $\mathbf{k}^T$

entsprechen. Die Auslegung der Zustandsvektorrückführung erfolgt anhand eines Reglerentwurfs durch Polvorgabe, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Bei einem derartigen Reglerentwurf liegt die Schwierigkeit in der Festlegung (Wahl) der Pole des geschlossenen Regelkreises, da diese im Zuge des Entwurfs grundsätzlich frei gewählt werden können. Die Wahl der Pole wird nur insofern eingeschränkt, dass sie einerseits in der linken Halbebene liegen müssen, um die Stabilität zu gewährleisten und andererseits, dass sie einen physikalisch realisierbaren, geschlossenen Regelkreis (z. B. Stellgrößenbeschränkung) zur Folge haben. Zum Erreichen letzteres ist es oft von Vorteil, sich an den Polen des offenen Regelkreises zu orientieren und nur die Pole zu verschieben, welche zu weit rechts liegen. Eine starke Linksverschiebung der Pole kann zu großen Stellimpulsen und Anfangspendeln führen, [29]. Praktisch wird dies unter anderem beim Castor-Mode berücksichtigt, indem der entsprechende Pol der offenen Übertragungsfunktion unverändert als Pol des geschlossenen Regelkreises übernommen wird. Die restlichen drei Pole des geschlossenen Regelkreises werden unter Berücksichtigung der Funktionalität und Realitätstreue gewählt, wobei hauptsächlich auf die Funktionalität der überlagerten vorausschauenden Regelung geachtet werden muss (vgl. Abschnitt 4.2.3).

In der Tabelle 4.1 sind zusammenfassend für drei repräsentative Geschwindigkeiten (unterhalb, innerhalb und oberhalb des autostabilen Bereichs) alle Pole des offenen Regelkreises, sowie die gewählten Pole des geschlossenen Regelkreises angeführt. Weiters ist jeweils die berechnete Vorverstärkung  $K_w$  sowie der berechnete Rückführvektor  $\mathbf{k}$  angegeben, welche auch die Fahrerparameter des Stabilisierers darstellen. Bei Betrachtung der Rückführvektoren fällt unter anderem auf, dass die Verstärkung, welche dem Rollwinkel zugeordnet ist (erstes Element von  $\mathbf{k}$ ), betragsmäßig am größten ist. Daraus und infolge der ähnlichen Größenordnungen von  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\dot{\varphi}$ ,  $\Delta\delta$  und  $\Delta\dot{\delta}$  lässt sich schließen, dass der Rollwinkel stark gewichtet ins Reglergesetz mit  $K_\varphi\varphi$  eingeht. Aufgrund der Aufgabe des Stabilisierers den Rollwinkel zu regeln, ist dies auch zu erwarten. Beim Betrachten des vierten Elements von  $\mathbf{k}$  wird weiters deutlich, dass der Einfluss der Lenkwinkelgeschwindigkeit  $\Delta\dot{\delta}$  nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Bei der Auslegung der vorausschauenden Regelung wird die Stellgrößenübertragungsfunktion des Stabilisierers, sprich die Übertragungsfunktion zwischen  $\Delta\varphi_{\text{soll}}(s)$  und  $\Delta M_\delta(s)$ , bei geschlossenem Regelkreis benötigt. Diese berechnet sich mit dem Zustandsraummodell wie folgt:

$$G_{M_\delta\varphi_{\text{soll}} \text{ stabi}}(s) = \frac{\Delta M_\delta(s)}{\Delta\varphi_{\text{soll}}(s)} = \frac{K_w}{1 + \mathbf{k}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_b^*)^{-1} \mathbf{b}_b^*}. \quad (4.5)$$

Grundsätzlich wäre natürlich auch eine Ableitung aus dem äquivalenten, mehrschleifigen Stabilisierer (Abbildung 4.1) durch geeignete Blockschaltdalgebra möglich.

Tabelle 4.1: Numerische Werte des Stabilisierers bei Zustandsvektorrückführung

Geschwindigkeit u in (m/s)	Pole des offenen Regelkreises $\mathbf{p}_{\text{offen}}$	Gewählte Pole $\mathbf{p}_{\text{gewählt}}$	Vorver- stärkung $K_w$	Rück- führvektor $\mathbf{k}$
3	$\begin{bmatrix} -2,96 \\ 1,91 + 1,77i \\ 1,91 - 1,77i \\ -12,74 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,5 \\ -6,5 + 3,532i \\ -6,5 - 3,532i \\ -12,74 \end{bmatrix}$	-128,75	$\begin{bmatrix} -166,72 \\ 36,06 \\ -46,51 \\ 3,21 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} -0,46 \\ -1,83 + 2,72i \\ -0,46 - 2,72i \\ -23,57 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,5 \\ -6,5 + 5,44i \\ -6,5 - 5,44i \\ -23,58 \end{bmatrix}$	-56,11	$\begin{bmatrix} -69,79 \\ 62,12 \\ -17,53 \\ 2,7 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 0,1 \\ -4,65 + 5,82i \\ -4,65 - 5,82i \\ -38,28 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,5 \\ -6,5 + 11,65i \\ -6,5 - 11,65i \\ -38,28 \end{bmatrix}$	-76,48	$\begin{bmatrix} -81,92 \\ 63,7 \\ -14,62 \\ 1,68 \end{bmatrix}$

### 4.2.2 Antizipatorische Steuerung

Diese Ebene versucht die antizipatorischen Lenkreaktionen des Fahrers auf eine vorausliegende Kursänderung abzubilden. Ein naheliegender Ansatz dazu wäre es, das steuernde Lenkverhalten des Fahrradfahrers an einen „idealen Fahrer“ anzupassen, wie es z. B. Mitschke [49] für Kraftfahrzeuge beschreibt. Genauer gesagt wird die Steuerungsdifferentialgleichung<sup>2</sup> an die Differentialgleichung des „idealen Fahrers“ angepasst (Anpassung der Konstanten und Faktoren der DGL). Dabei lenkt der „ideale Fahrer“ bei Mitschke [49] sein Fahrzeug so, dass ein bestimmter, vor dem Fahrzeug liegender, fahrzeugfester Punkt einem Kurs genau folgt, [49]. Die Methode des „idealen Fahrers“ wird hier in vereinfachter Form übernommen.

Der Zusammenhang zwischen dem Verlauf der Krümmung  $\Delta\kappa_P$  des vor dem Fahrrad liegenden Punktes  $P$  (vgl. Abbildung 4.4) und den Verläufen der Lenkwinkelgrößen ( $\Delta\delta$ ,  $\Delta\dot{\delta}$ ,  $\Delta\ddot{\delta}$ ) ergibt sich zu

$$\Delta\kappa_P = -\zeta\Delta\delta - \left(\frac{\mu}{u} + \frac{\bar{l} + l_P}{u}\zeta\right)\Delta\dot{\delta} - \frac{\bar{l} + l_P}{u}\frac{\mu}{u}\Delta\ddot{\delta}. \quad (4.6)$$

Die Herleitung erfolgt dabei analog zur Krümmung  $\Delta\kappa_B$  wie im Abschnitt 3.1.2 beschrieben. Beim Fahrermodell für Fahrräder (Abbildung 1.1) wird aber ein Rollwinkelverlauf

<sup>2</sup>Struktur wird aus Versuchen ermittelt.

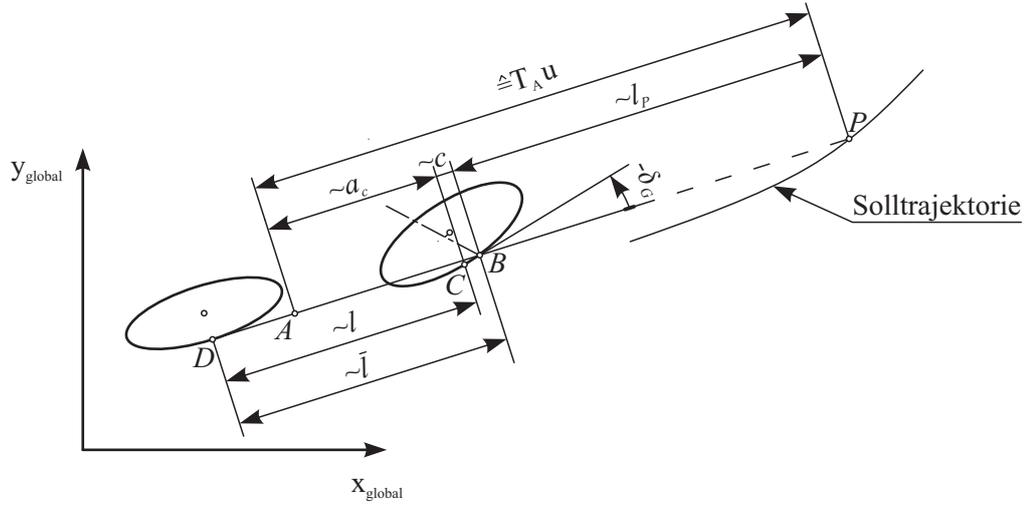


Abbildung 4.4: Skizze für Vorausschau bei antizipatorischer Steuerung

als Ausgang der Steuerungsebene benötigt, weshalb nachfolgend der Zusammenhang zwischen Rollwinkel und Krümmung im Punkt  $P$  angegeben wird. Unter Zuhilfenahme der Laplace-Transformation und der Übertragungsfunktion  $G_{\varphi\delta}(s)$ , Gleichung (3.83), ergibt sich der Zusammenhang in Form einer Übertragungsfunktion zu:

$$G_{\varphi\kappa_P}(s) = \frac{\Delta\delta(s)}{\Delta\kappa_P(s)} \frac{\Delta\varphi(s)}{\Delta\delta(s)} = G_{\delta\kappa_P}(s) G_{\varphi\delta}(s) = \frac{-1}{\zeta + \left(\frac{\mu}{u} + \frac{\bar{l}+l_P}{u}\zeta\right)s + \frac{\bar{l}+l_P}{u}\frac{\mu}{u}s^2} \frac{-[\mathbf{M}_{b12}s^2 + (\mathbf{C}_{0b12} + \mathbf{C}_{1b12}u)s + (\mathbf{K}_{0,b12} + \mathbf{K}_{2b12}u^2)]}{\mathbf{M}_{b11}s^2 + (\mathbf{C}_{0b11} + \mathbf{C}_{1b11}u)s + (\mathbf{K}_{0,b11} + \mathbf{K}_{2b11}u^2)}. \quad (4.7)$$

Wie bereits in Abschnitt 3.4 festgestellt, ist  $G_{\varphi\delta}(s)$  über den gesamten Geschwindigkeitsbereich instabil, womit auch die Übertragungsfunktion des „idealen Fahrradfahrers“  $G_{\varphi\kappa_P}(s)$  über den gesamten Geschwindigkeitsbereich instabil ist.

Durch die Instabilität der Übertragungsfunktion bzw. der Differentialgleichungen des „idealen Fahrradfahrers“ wäre zuerst eine Stabilisierung notwendig, um auch bei Fahrrädern zur Auslegung der Steuerungsebene ähnlich wie bei Kraftfahrzeugen vorzugehen. Eine solche Vorgehensweise würde jedoch zu sehr komplexen Gleichungsstrukturen bei der Bestimmung der Steuerungsparameter führen und wird deshalb nicht weiter verfolgt. Für die antizipatorische Steuerungsebene wird in dieser Arbeit ein einfacherer Ansatz als bei der Anpassung einer Steuerungsdifferentialgleichung an den „idealen Fahrer“ gewählt: Dabei wird davon ausgegangen, dass der Fahrradfahrer aus seinem Erfahrungsschatz heraus einer vorausliegenden Krümmung, der Solltrajektorie, den dafür notwendigen stationären Rollwinkel zuordnen kann. Dieser stationäre Rollwinkel stellt den Ausgang der Steuerungsebene dar. Er wird beim Fahrermodell mit Hilfe des vorgeschalteten Stabilisierungsreglers

stabil gehalten und in ein Lenkmoment umgewandelt, welches den Systemeingang der Regelstrecke (Fahrradmodell) darstellt.

Der notwendige Zusammenhang zwischen der vorausgeschauten Krümmung, der Solltrajektorie und dem dafür notwendigen stationären Rollwinkel wird aus der Gleichung (4.7) des „idealen Fahrradfahrers“ und der Bedingung<sup>3</sup>  $s = 0$  bestimmt. Dieser Zusammenhang wird durch den geschwindigkeitsabhängigen Verstärkungsfaktor  $K_{\varphi\kappa_P}(u) = \frac{\Delta\varphi_{stat}(u)}{\Delta\kappa_{Pstat}}$  ausgedrückt und ist in Abbildung 4.5 über der Geschwindigkeit dargestellt. Infolge der getroffenen Annahmen, vor allem aufgrund der Linearisierung der Gleichungen um die Geradeausfahrt, geht die Vorausschaulänge  $uT_A$  nicht in diesen stationären Zusammenhang ein.

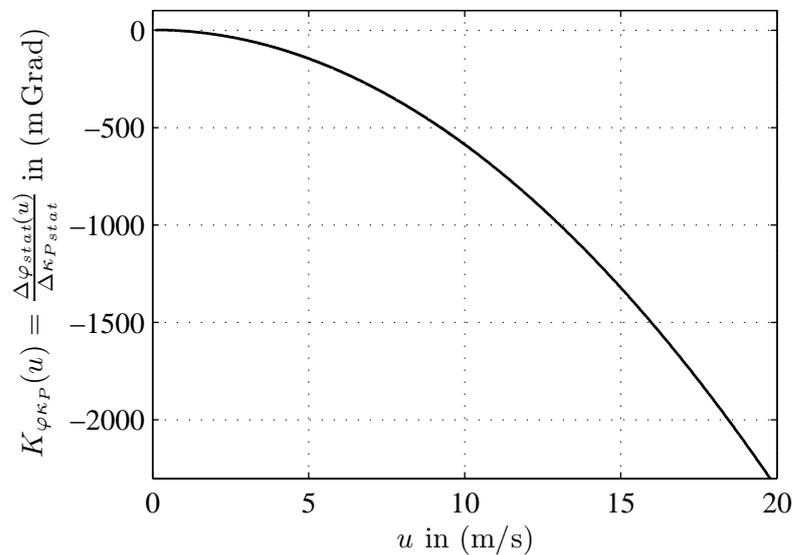


Abbildung 4.5: Stationärer Zusammenhang zwischen Krümmung und Rollwinkel

Die Bahnkrümmung  $\Delta\kappa_P(t)$  des vor dem Fahrrad liegenden Punktes  $P$  wird unter der Annahme, dass sich das Fahrrad näherungsweise auf der Solltrajektorie bewegt, durch die Krümmung der Solltrajektorie  $\kappa$  zum Zeitpunkt  $t + T_A$  ersetzt. Dies entspricht einer Vorausschau entlang der Solltrajektorie um die Bogenlänge  $uT_A$ , wenn man davon ausgeht, dass die Position des Fahrers ungefähr identisch ist mit dem Punkt A (Projektion des Rahmenschwerpunkts auf die Linie  $\overline{DB}$ ). Somit ergibt sich die Gleichung der antizipatorischen Steuerungsebene zu:

$$\Delta\varphi_{\text{Steuerung}}(t) = K_{\varphi\kappa_P}\kappa(t + T_A). \quad (4.8)$$

Die Geschwindigkeit  $u$  wird wiederum als konstanter Parameter angesehen. Die Antizipationszeit  $T_A$  selbst ist von zahlreichen Faktoren seitens des Fahrers und seitens des

<sup>3</sup>Bedingung zur Berechnung der stationären Verstärkung von Übertragungsfunktionen.

Fahrrads abhängig. Im Zuge dieser Arbeit wird jedoch nur der Einfluss des Fahrrads inklusive der Geschwindigkeit berücksichtigt. Die analytische Abschätzung der notwendigen Antizipationszeit unter den vorher getroffenen Annahmen stellt allgemein, aber besonders für Fahrräder eine schwierige Aufgabe dar. Dies liegt vor allem an dem über weite Geschwindigkeitsbereiche vorliegenden instabilen Verhalten des Fahrrads.

Durch die Notwendigkeit, das Fahrrad zur Bestimmung der Antizipationszeit zu stabilisieren, wird wie folgt vorgegangen: Die Antizipationszeit  $T_A$  wird so gewählt, dass nur durch die Steuerungsebene in Kombination mit dem Stabilisierer eine möglichst „gute“ Übereinstimmung zwischen Soll- und Isttrajektorie entsteht. Praktisch werden dafür mehrere Simulationen<sup>4</sup> mit unterschiedlichen  $T_A$ -Werten durchgeführt, und jene Antizipationszeit gewählt, welche zu einer qualitativ „guten“ Übereinstimmung zwischen der entstehenden Isttrajektorie und der Solltrajektorie führt. Bei der Bewertung der Übereinstimmung wird auf die Zuhilfenahme von Bewertungskriterien verzichtet, da dieses Verfahren nur eine Abschätzung der Antizipationszeit darstellen kann. Nach der Abschätzung der Antizipationszeit sind im Zuge der Auslegung der vorausschauenden Regelung teilweise noch geringfügige Anpassungen notwendig, um das reale Fahrverhalten besser abbilden zu können. In Abbildung 4.6 ist ein solcher Vergleich für drei verschiedene Antizipationszeiten bei einer Geschwindigkeit von  $u = 7 \text{ m/s}$  dargestellt. Dabei entspricht  $T_A = 0,4 \text{ m/s}$  der bereits leicht (im Zehntelsekunden Bereich) angepassten Antizipationszeit. In allen Abbildungen von Trajektorien repräsentiert einheitlich das rot dargestellte Kreuz den Startpunkt. Die letztendlich gewählten Antizipationszeiten sowie die entsprechenden Vorausschaulängen sind in Tabelle 4.2 aufgelistet.

Tabelle 4.2: Antizipationszeiten

<b>Geschwindigkeit</b>	<b>Antizipationszeit</b>	<b>Vorausschaulänge</b>
$u$ in (m/s)	$T_A$ in (s)	$l_A = uT_A$ in (m)
3	0,6	1,8
7	0,4	3,2
12	0,3	3,6

Des weiteren wird darauf hingewiesen, dass grundsätzlich auch das Lenkmoment als Ausgang der Steuerungsebene möglich wäre. Dies würde aber bedeuten, dass die antizipatorische Steuerungsebene parallel zum Stabilisierer angeordnet werden müsste. Neben den bereits beschriebenen Problemen bezüglich der Sollwertbildung würde dieser Ansatz auch dazu führen, dass im Bereich der Geschwindigkeit, bei welcher der Capesize-Mode instabil

<sup>4</sup>Dabei wird als Regelstrecke das Benchmark Modell verwendet, wie auch bei der restlichen Auslegung.

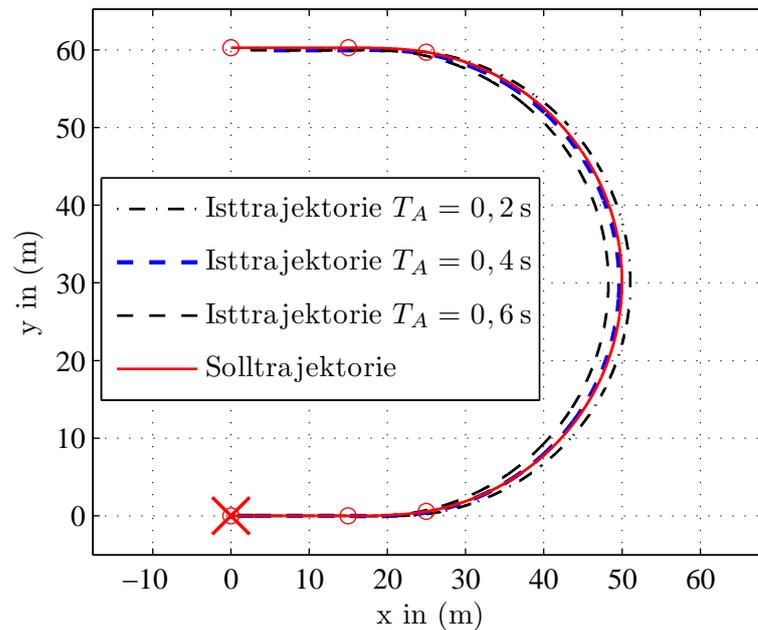


Abbildung 4.6: Soll- und Isttrajektorien Vergleich der Steuerung zur Bestimmung der Antizipationszeit, Simulation mit Benchmark Modell bei  $u = 7 \text{ m/s}$

wird<sup>5</sup>, die Steuerungsebene praktisch wirkungslos wäre. Dies ergibt sich aus der stationären Verstärkung zwischen Krümmung bzw. Lenkwinkel und Lenkmoment des Benchmark Modells, welche bei dieser Geschwindigkeit Null ist, siehe dazu Abschnitt 3.5.

### 4.2.3 Vorausschauende Regelung

Beim Fahrermodell allgemein und speziell bei der Ebene der vorausschauenden Regelung wird davon ausgegangen, dass der Mensch beim Fahrradfahren versucht der Solltrajektorie möglichst exakt mit dem Vorderrad zu folgen. Diese Annahme deckt sich auch mit praktischen Erfahrungen, wenn man beispielsweise Straßenbahnschienen ausweichen will. Dabei versucht der Fahrer „nur“ den Abstand bzw. genauergesagt den voraussichtlichen, zukünftigen Abstand des Vorderrades zu den Schienen zu halten bzw. zu vergrößern und verliert infolge dessen die Position des „restlichen“ Fahrrads in Bezug auf die Schienen mehr oder weniger aus den Augen. Die Position des Vorderrades wird bei dem Fahrermodell zur Vereinfachung mit dem Punkt  $B$  beschrieben. Folglich ist die Aufgabe der vorausschauenden Regelung, den Normalabstand zwischen der voraussichtlichen zukünftigen Fahrradposition (Vorderradposition), repräsentiert durch den Punkt  $B$ , und der Solltrajektorie auszuregeln.

<sup>5</sup>Im Abschnitt 3.5 wird diese Geschwindigkeit mit  $u_2$  bezeichnet.

Es wird davon ausgegangen, dass der Fahrer die zukünftige Position des Punktes  $B$  abschätzen kann, und folglich auf den Abstand zwischen der zukünftigen Position und der Solltrajektorie reagiert. Der voraussichtliche Normalabstand  $y_{Bv}(t)$  entspricht dem Normalabstand  $y_B(t + T_P)$ . Die Position des Punktes  $B$  wird folglich um die Zeitspanne  $T_P$  (Prädiktionszeit) vorausgeschätzt. Für diese Vorausschau gibt es grundsätzlich mehrere Möglichkeiten. Für die regelungstechnische Analyse wird der Abstand  $y_{Bv}(t)$ , in Anlehnung an [49], durch eine Taylorreihenentwicklung zweiter Ordnung von  $y_B(t + T_P)$  aus dem aktuellen Normalabstand  $y_B(t)$  extrapoliert. Diese Extrapolation wird mit der Übertragungsfunktion

$$G_{Pr}(s) = \frac{y_{Bv}(s)}{y_B(s)} = 1 + T_P s + \frac{T_P^2}{2} s^2, \quad (4.9)$$

des Prädiktionsgliedes beschrieben. Eine weitere Annahme ist, dass der Fahrer sowohl bei der antizipatorischen Steuerung, als auch bei der vorausschauenden Regelung von seiner Position aus um die selbe Strecke vorausschaut. Dadurch kann die Prädiktionszeit aus der Antizipationszeit wie folgt bestimmt werden:

$$T_P = T_A - \frac{a_c + \frac{t_c}{\cos \epsilon}}{u}. \quad (4.10)$$

Neben dem „Prädiktionsglied“  $G_{Pr}(s)$  wird, wie in Abbildung 4.1 ersichtlich ist, auch noch die Übertragungsfunktion  $G_{y_B}(s)$  benötigt. Diese beschreibt den Zusammenhang zwischen Lenkmoment  $\Delta M_\delta(t)$  und dem Normalabstand  $\Delta y_B(t)$  und kann als Produkt folgender Übertragungsfunktionen angeschrieben werden:

$$G_{y_B}(s) = \frac{\Delta y_B(s)}{\Delta M_\delta} = \frac{\Delta y_B(s)}{\Delta \psi_F(s)} \frac{\Delta \psi_F(s)}{\Delta M_\delta(s)} = G_{y_B \psi_F}(s) G_{\psi_F M_\delta}(s). \quad (4.11)$$

Ausgehend von einer Linearisierung um die Geradeausfahrt kann für den Reglerentwurf der Abstand  $\Delta y_B$  mit Hilfe der Seitenbeschleunigung  $\Delta a_B \approx \Delta \ddot{y}_B$  des Punktes  $B$  abgeschätzt werden. Die Seitenbeschleunigung ergibt sich aus dem Krümmungsradius  $\Delta \rho_B$  zu

$$\Delta a_B \approx \Delta \ddot{y}_B = \frac{u^2}{\Delta \rho_B} = u^2 \Delta \kappa_B, \quad (4.12)$$

wobei infolge der Linearisierung  $u$  näherungsweise mit  $v_B$  gleichgesetzt werden kann.

Infolge der vorher definierten Vorzeichenkonvention der Krümmung ist es sinnvoll, den Abstand  $\Delta y_B$  für einen von der Solltrajektorie nach links (in Fahrtrichtung gesehen) abweichenden Punkt  $B$  als positiv zu definieren. Aus der Differentialgleichung (3.61), welche den Zusammenhang zwischen Krümmung und Gierwinkel beschreibt, und der Gleichung (4.12) ergibt sich wiederum mit Hilfe der Laplace-Transformation die Übertragungsfunktion

$$G_{y_B \psi_F}(s) = \frac{y_B(s)}{\psi_F(s)} = - \left( \bar{l} + \frac{u}{s} \right). \quad (4.13)$$

Um die Übertragungsfunktion  $G_{y_B}(s)$  zu erhalten, wird zusätzlich zu Gleichung (4.13) noch die in (4.11) eingeführte Übertragungsfunktion  $G_{\psi_F M_\delta}(s)$  zwischen dem Lenkmoment  $\Delta M_\delta$  und dem Gierwinkel  $\Delta\psi_F$  benötigt. Diese ergibt sich aus der Laplace-Transformation von (3.57) und der Übertragungsfunktion  $G_{\delta M_\delta}(s)$  unter Beachtung der positiven Winkelzählrichtungen zu

$$G_{\psi_F M_\delta}(s) = \frac{\psi_F(s)}{M_\delta(s)} = \frac{\zeta u + \mu s}{s} G_{\delta M_\delta}(s). \quad (4.14)$$

Somit folgt für die Fahrradübertragungsfunktion

$$G_{y_B}(s) = \frac{\Delta y_B(s)}{\Delta M_\delta(s)} = -\left(\bar{l} + \frac{u}{s}\right) \frac{\zeta u + \mu s}{s} G_{\delta M_\delta}(s). \quad (4.15)$$

In Abbildung 4.7 ist zur weiteren Auslegung der vorausschauenden Regelung ein vereinfachtes Blockschaltbild des Fahrermodells (Abbildung 4.1) dargestellt. Dabei wird zum einen die antizipatorische Steuerungsebene außer Acht gelassen, da diese aus regelungstechnischer Sicht „nur“ eine Störung darstellt, zum anderen wird der mehrschleifige Stabilisierer durch die Stellgrößen-Übertragungsfunktion  $G_{M_\delta \varphi_{\text{soll}} \text{stabi}}$  ersetzt, da ein Vernachlässigen des inneren Regelkreises wie bei klassischen Kaskadenregelungen [29] allein schon wegen der notwendigen „Umwandlung“ von Sollrollwinkel zu Lenkmoment nicht möglich ist. In diesem Zusammenhang wird auch darauf hingewiesen, dass bei Außerachtlassung der Steuerungsebene der Zusammenhang  $\Delta\varphi_{\text{soll}} = \Delta\varphi_{\text{Regelung}}$  gilt.

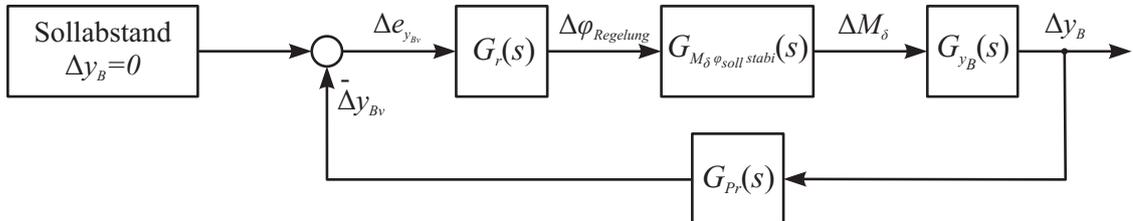


Abbildung 4.7: Blockschaltbild zur Auslegung der vorausschauenden Regelung

Für die Reglerübertragungsfunktion  $G_r(s)$  der vorausschauenden Regelung wird ein „Lead-Glied“ verwendet:

$$G_r(s) = K_{\text{Kurs}} \frac{1 + T_v \text{Kurs} s}{1 + T_n \text{Kurs} s}. \quad (4.16)$$

Dabei orientiert sich diese Reglerübertragungsfunktion am linearen Regler für den Menschen von McRuer [15].

Auf eine Berücksichtigung der Totzeit (Reaktionszeit) wird verzichtet, vgl. Abschnitt 4.2.1. Die Auslegung des Verstärkungsfaktors  $K_{\text{Kurs}}$  sowie der Zeitkonstanten  $T_v \text{Kurs}$  und  $T_n \text{Kurs}$  erfolgt mit Hilfe des Wurzelortskurvenverfahrens. Hierfür werden mehrere Wurzelkurven (unterschiedliche Zeitkonstanten) mit variiertem Parameter  $K_{\text{Kurs}}$  konstruiert. Praktisch

wird dazu die „Control System Toolbox“ von Matlab verwendet. Die Reglerparameter sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst und werden so gewählt, dass die vorausschauende Regelung ein möglichst reales Fahrverhalten abbilden kann. Dazu sind zusätzlich geringfügige Anpassungen der Antizipationszeiten  $T_A$  (Zusammenhang mit der Prädiktionszeit  $T_P$ ) notwendig. Nachfolgend sind für die drei exemplarischen Geschwindigkeiten (3, 7, 12 m/s) Ausschnitte der Wurzelortskurven in den Abbildungen 4.8 bis 4.10 dargestellt. Die rosa Quadrate repräsentieren darin die Pole des geschlossenen Regelkreises für die entsprechenden Reglerparameter aus Tabelle 4.3. Der Pol (Kreuz) und die Nullstelle (Kreis) der Reglerübertragungsfunktion  $G_r(s)$  sind zur Differenzierung von den Polen und Nullstellen der Strecke grün und dick markiert. Die restlichen Pole und Nullstellen (Regelstrecke) aus den Wurzelortskurven sind mit Buchstaben gekennzeichnet, welche in Tabelle 4.4 erläutert werden.

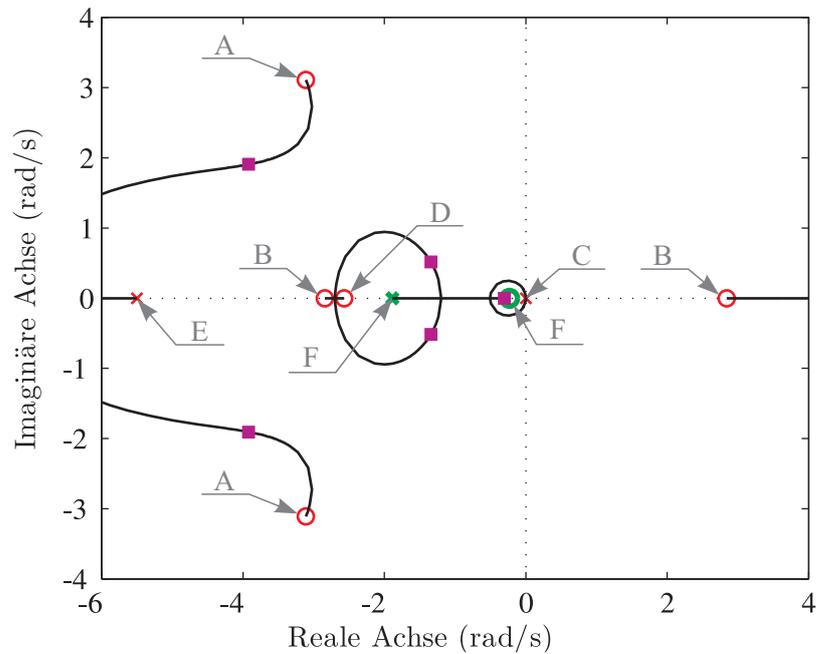


Abbildung 4.8: Wurzelortskurve der vorausschauenden Regelung bei 3 m/s

Tabelle 4.3: Numerische Parameter von der Reglerübertragungsfunktion der vorausschauenden Regelung

Geschwindigkeit	Verstärkung	Vorstellzeit	Nachstellzeit
$u$ in (m)	$K_{\text{Kurs}}$	$T_v$ Kurs	$T_n$ Kurs
3	-0,028	4,3	0,53
7	-0,05	2,9	0,43
12	-0,054	2	0,6

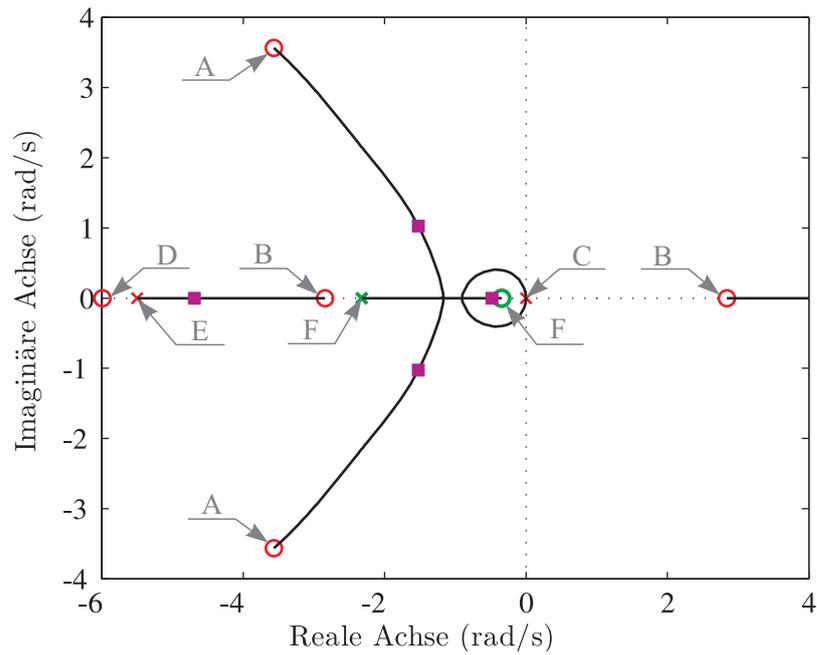


Abbildung 4.9: Wurzelortskurve der vorausschauenden Regelung bei 7 m/s

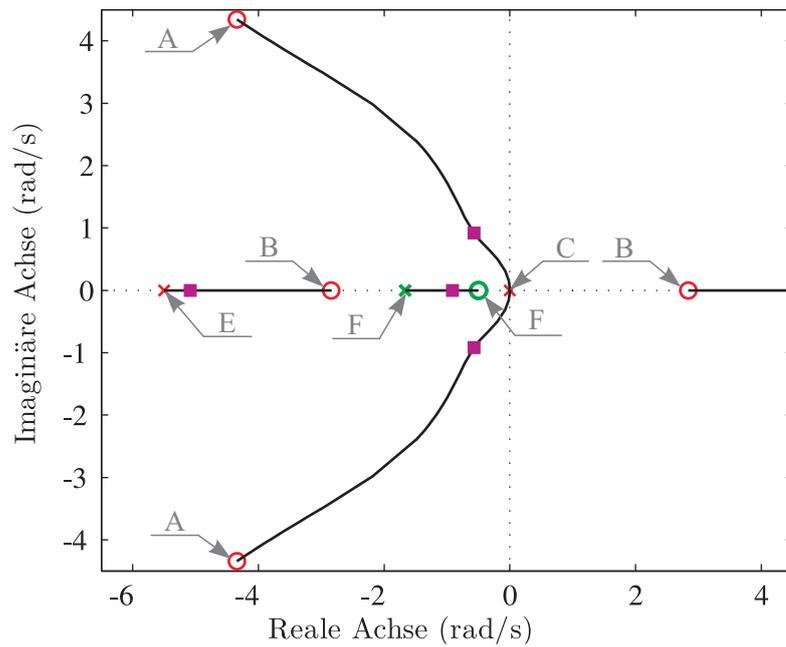


Abbildung 4.10: Wurzelortskurve der vorausschauenden Regelung bei 12 m/s

Aus den Wurzelortskurven wird die allgemeine Problematik bei der Auslegung der vorausschauenden Regelung deutlich. Die Lage der Pole C sowie die der Nullstellen A und B variiert über den gesamten Geschwindigkeitsbereich nur leicht bzw. gar nicht. Durch deren Nähe zur Imaginärachse wird die Auslegung des Reglers maßgeblich bestimmt bzw.

Tabelle 4.4: Pol- und Nullstellenbezeichnungen für Wurzelortskurve

Symbol	Bezeichnung	Anmerkung
A	Nullstelle von $G_{Pr}(s)$	geringe Geschwindigkeitsabhängigkeit ( $T_P$ )
B	Nullstelle von $G_{\delta M_\delta}(s)$	Teil von $G_{y_B}(s)$
C	Pole von $G_{y_B}(s)$	Folge der doppelte Integration der Seitenbeschleunigung
D	Nullstelle von $G_{y_B}(s)$	geschwindigkeitsabhängig ( $u/\bar{l}$ ) gewählt bei der Auslegung des Stabilisierers; die
E	Pol des Stabilisierer	anderen 3 Pole (ein komplexes Polpaar und ein reeller Pol) sind nicht dargestellt
F	Pol bzw. Nullstelle von $G_r(s)$	festgelegt durch die Wahl der Zeitkonstanten $T_{v \text{ Kurs}}$ und $T_{n \text{ Kurs}}$ im Zuge der Auslegung

eingeschränkt. Das konjugiert komplexe Polpaar des geschlossenen Stabilisationsregelkreises liegt außerhalb des dargestellten Bereichs. Aus diesen Polen führt jeweils ein Ast der Wurzelortskurve in die positive Halbebene. Die entstehenden Pole des geschlossenen Kursregelkreises, welche den beiden Ästen zugeordnet sind, werden mit zunehmender Reglerverstärkung als erstes instabil und somit relevant für die Auslegung. Dennoch wäre eine Darstellung aufgrund ihrer Lage (Imaginärteil abhängig vom betrachteten Fall bei ca.  $\pm 17$  rad/s) nicht übersichtlich.

Aus den Wurzelortskurven ist auch ersichtlich, dass die Auslegung durch die starke Beeinflussung der Äste (viele Pole und Nullstellen auf engem Raum) deutlich erschwert wird, falls Pole des geschlossenen Stabilisationsregelkreises nahe der Imaginärachse liegen (z. B. „Lead-Glied“ Stabilisierer). Dazu sei noch erwähnt, dass die Äste der Wurzelortskurve für eine Verstärkung  $K_{\text{Kurs}} = 0$  in den Polen entspringen und für  $K_{\text{Kurs}} = \infty$  in den Nullstellen bzw. im Unendlichen enden, [27].

### 4.3 Anmerkungen

Der verwendete Stabilisationsregler stellt im Hinblick auf das Benchmark Modell durch die Rückführung von  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\dot{\varphi}$ ,  $\Delta\delta$  und  $\Delta\dot{\delta}$  eine vollständige Zustandsvektorrückführung dar. Bei der Verwendung anderer, komplexerer Modelle zur Auslegung würde die Rückführung der gleichen Größen einer Ausgangsvektorrückführung (bei passender Definition des Ausgangs) entsprechen.

Es soll im Anschluss noch die Problematik der getrennten Auslegung von Stabilisierer und vorausschauender Regelung diskutiert werden. Die grundsätzlich gewünschte, standardisierte und getrennte Auslegung der beiden Regler stellt sich infolge einer starken Abhängigkeit voneinander als schwierig heraus. Die Auslegung gleicht vielmehr einer schrittweisen „Optimierung“ der beiden Regler bei jeder Geschwindigkeit. Dazu sind jeweils manuelle Anpassungen der Reglerparameter mit anschließender Simulation notwendig. Bei den Simulationen zur Reglerauslegung darf aber die antizipatorische Steuerungsebene nicht außer Acht gelassen werden. Die Auslegung selbst wird noch durch die relativ große Anzahl an Fahrerparametern erschwert. Das System inklusive der Steuerungsebene besitzt 10 Parameter, wovon 9 frei wählbar sind.<sup>6</sup> Abhilfe bezüglich dieser Auslegungsproblematik würde z. B. ein „integratives“ Konzept bringen, bei welchem versucht wird, das System als Ganzes auszulegen.

---

<sup>6</sup>Die Vorverstärkung  $K_w$  der Stabilisationsebene ist unter der Voraussetzung, dass der Regelfehler für eine sprungförmige Sollwertänderung gegen Null geht, nicht frei wählbar.

# Kapitel 5

## Simulation

Numerische Simulationen der Fahrradfahrt werden zur Auslegung (Bestimmung der Antizipationszeit) sowie zur Überprüfung des Fahrermodells benötigt. Für die Simulationen zur Überprüfung des Fahrermodells wird, wie bereits beschrieben, ein gegenüber der Auslegung komplexeres Modell (Fahrradmodell inklusive Reifenmodell) verwendet. Weiters wird im Zuge dieser Simulationen auch eine andere Bestimmung des voraussichtlichen Normalabstands verwendet, da die Bestimmung über das Prädiktionsglied nur eine Näherung darstellt. Im Anschluss wird überblicksmäßig auf die Simulation selbst, die dafür notwendige Strecke, sowie auf die Bestimmung des voraussichtlichen Normalabstands eingegangen.

### 5.1 Allgemein

Die numerischen Simulationen erfolgen mit Matlab/Simulink. Dazu werden das Benchmark Modell und das Fahrradmodell inklusive Reifenmodell sowie das Fahrermodell (mit Ausnahme des Prädiktionsgliedes), Abbildung 4.1, im Zeitbereich in Simulink implementiert. Die Positionskoordinaten des Fahrrads bzw. der Strecke werden im Koordinatensystem „global“ beschrieben, wobei die Position des Fahrrads (Punkt  $B$ ) durch Integration der Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{x}_{B|global}$  und  $\dot{y}_{B|global}$  bestimmt wird. Die dabei notwendigen Geschwindigkeitskomponenten können für das Fahrradmodell inklusive Reifenmodell aus Gleichung (3.41) und für das Benchmark Modell aus Gleichung (3.68) entnommen werden.

## 5.2 Streckenbeschreibung

Die für die Simulation notwendige Solltrajektorie (Teststrecke) wird wie in den vorausgegangenen Arbeiten am Institut [50], [51] oder [52] zum Thema Fahrermodelle aus einzelnen Trassierungselementen zusammengesetzt. Zum Aufbau der Strecke werden Geraden-, Kreisbogen- und Klothoiden-Elemente verwendet. Die Klothoiden-Elemente stellen einen Übergangsbogen mit linearer Krümmungsänderung zwischen zwei Elementen unterschiedlicher Krümmungen dar. Die notwendigen Streckeninformationen werden vor der Simulation in Matlab erstellt und stehen diskret zur Verfügung.

### 5.2.1 Teststrecke

Für die Simulationen werden die nachfolgenden einfachen Teststrecken verwendet, wobei teilweise die Gerade am Kurvenausgang kürzer ist als dargestellt. Aufgrund der Linearisierungen der Fahrradmodelle um die Geradeausfahrt und der damit verbundenen Beschränkung auf kleine Rollwinkel, darf in Abhängigkeit der Geschwindigkeit die maximale Krümmung der Teststrecke nicht zu groß gewählt werden. In Abbildung 5.1a sind für die drei exemplarischen Geschwindigkeiten des Kapitels 4 (*Fahrermodellierung*) die verwendeten Teststrecken dargestellt. Die Kreise in dieser Abbildung markieren die Anfangs- und Endpunkte der einzelnen Trassierungselemente aus denen sich die Strecke zusammensetzt. In Abbildung 5.1b ist der Krümmungsverlauf über der Fahrstrecke  $\bar{s}$ , welche proportional zu der Fahrzeit  $t = \bar{s}/u$  ist, dargestellt. Es ist ersichtlich, dass abhängig von der Geschwindigkeit unterschiedliche maximale Krümmungen verwendet werden. Dies begründet sich in der vorher erwähnten Beschränkung aufgrund der Linearisation. Aus den Verläufen der Krümmung ist auch zu erkennen, dass mittels den Übergangsbögen sprunghafte Krümmungsänderungen vermieden werden.

Des weiteren wird für die antizipatorische Steuerungsebene die Krümmung  $\kappa(t + T_A)$  – entspricht  $\kappa[(t + T_A)u]$  – benötigt (vgl. Abschnitt 4.2.2). Diese wird im Zuge der Simulation durch eine schlichte Verschiebung um die Strecke  $uT_A$  des jeweiligen in der Abbildung 5.1 dargestellten Krümmungsverlaufs realisiert.

## 5.3 Voraussichtlicher Normalabstand

Der Fahrer reagiert bei der vorausschauenden Regelung auf einen voraussichtlichen Normalabstand des Fahrrads von der Solltrajektorie. Dieser wird im Zuge der Auslegung, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, mittels eines Prädikationsgliedes (Extrapolation) bestimmt.

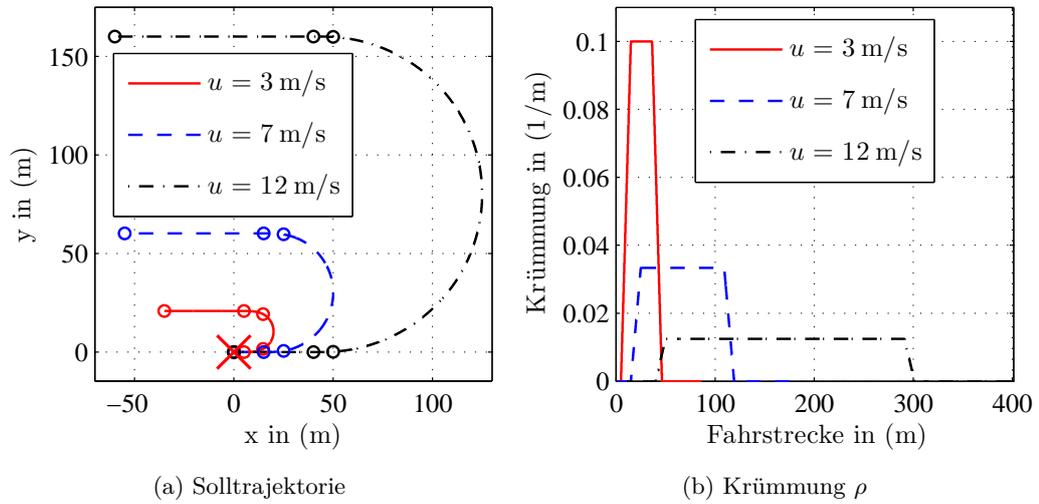


Abbildung 5.1: Teststrecke „Halbkreis“ mit Klothoidenübergängen bei Krümmungssprüngen

Bei der Anwendung des Fahrermodells, sprich der Simulation, wird anstelle dieser Vereinfachung eine exaktere, aber dadurch auch komplexere Bestimmung des voraussichtlichen Normalabstandes  $\Delta y_{Bv}$  verwendet. Dafür steht eine Vielzahl an Möglichkeiten zur Verfügung. Beispielsweise werden in Bezug auf Kraftfahrzeuge in [52] eine Vorausschau entlang der Fahrzeuglängsachse, entlang des Geschwindigkeitsvektors und entlang der momentanen Bahnkurve diskutiert. Bei Fahrrädern erscheint eine Vorausschau entlang der Linie  $\overline{DB}$  (entspricht der Vorausschau entlang der Fahrzeuglängsachse) am zielführendsten, siehe Abbildung 5.2. Der Punkt  $P$  repräsentiert die vom Fahrer geschätzte voraussichtliche Position des Punktes  $B$  und liegt um die Strecke  $l_P = u T_P$  vor diesem. Der voraussichtliche Normalabstand  $\Delta y_{Bv}$  wird aus dem Punkt  $P$  und der Solltrajektorie ermittelt. Bezüglich des genauen mathematischen Verfahrens zur Ermittlung des voraussichtlichen Normalabstandes wird auf [52] verwiesen. Wenn der Punkt  $Z$  (Abbildung 5.2) das Kursende erreicht, kann der Normalabstand  $\Delta y_{Bv}$  nicht mehr berechnet werden und die Simulation endet.

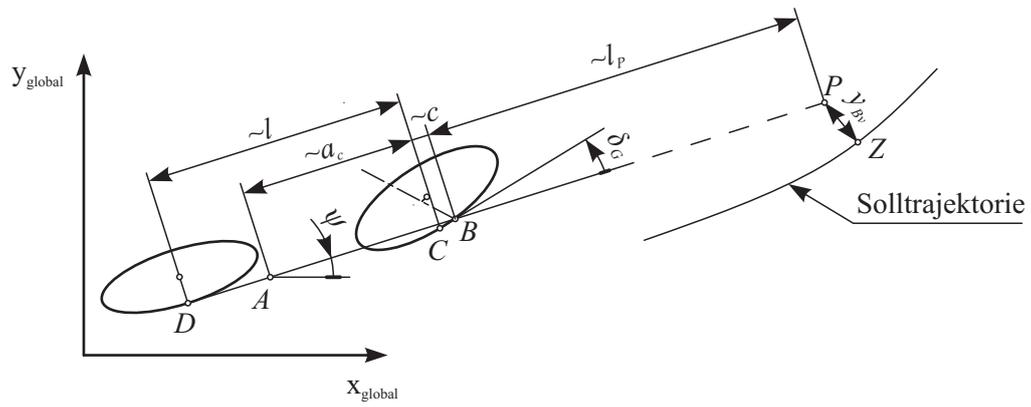


Abbildung 5.2: Abschätzung des voraussichtlichen Normalabstandes für die Vorausschau entlang der Fahr-  
radlängsachse

# Kapitel 6

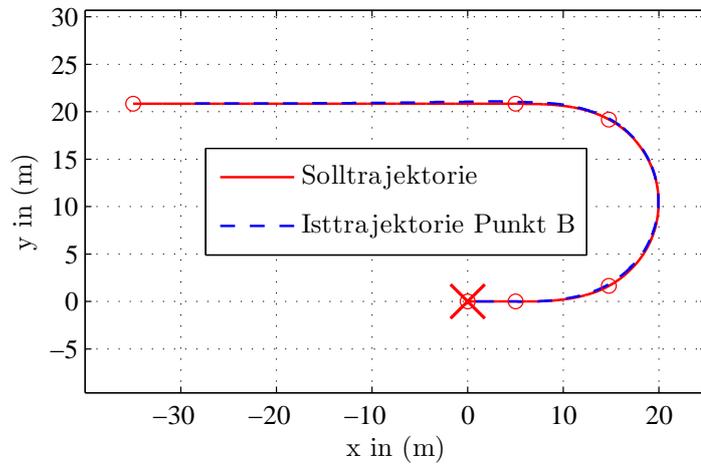
## Ergebnisse

### 6.1 Simulationsergebnisse

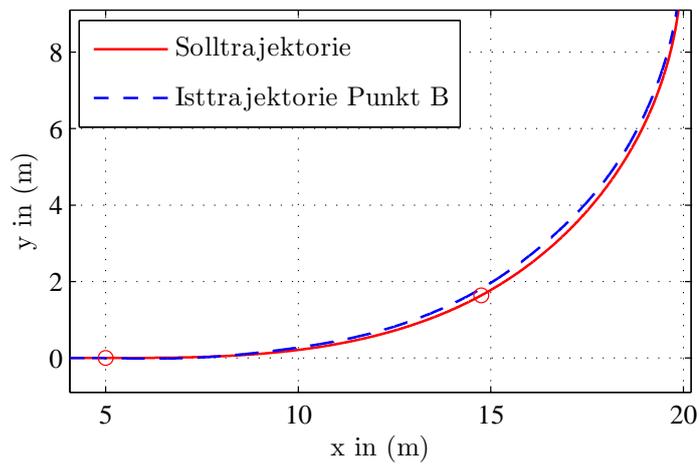
Nachfolgend werden die Simulationsergebnisse für eine Fahrt entlang der U-förmigen Teststrecke, siehe Abschnitt 5.2.1, dargestellt. Die Simulationen erfolgten bei den drei Geschwindigkeiten 3, 7 und 12 m/s, welche auch bei der Fahrermodellierung behandelt wurden.

Die dabei verwendeten Fahrerparameter können den Tabellen 4.1, 4.2 und 4.3 sowie der Abbildung 4.5 entnommen werden. Für jede der drei Geschwindigkeiten sind folgende Kurven dargestellt:

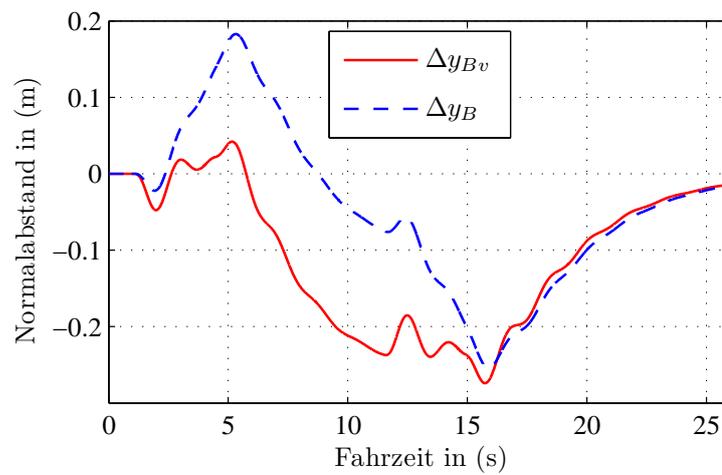
- Vergleich zwischen Soll- und Isttrajektorie des Punktes  $B$  (Abbildung 6.1a, 6.3a und 6.5a)
- Detail des Vergleichs zwischen Soll- und Isttrajektorie des Punktes  $B$ , Darstellung der Kurveneinfahrt (Abbildung 6.1a, 6.3b und 6.5b)
- Gegenüberstellung des voraussichtlichen Normalabstandes  $\Delta y_{Bv}$  und des tatsächlichen Normalabstandes  $\Delta y_B$  des Punktes  $B$  zur Solltrajektorie (Abbildung 6.1c, 6.3c und 6.5c)
- Rollwinkelverläufe: Der Verlauf des Rollwinkels aus der Steuerungsebene  $\Delta\varphi_{\text{Steuerung}}$ , der Verlauf der Rollwinkelkorrektur der vorausschauenden Regelung  $\Delta\varphi_{\text{Regelung}}$ , der Verlauf des Sollrollwinkels für den Stabilisierer  $\Delta\varphi_{\text{soll}}$ , sowie der Verlauf des tatsächlichen Rollwinkels  $\Delta\varphi$  (Abbildung 6.2a, 6.4a und 6.6a)
- Verlauf des notwendigen bzw. auftretenden Lenkmoments  $M_\delta$  (Abbildung 6.2b, 6.4b und 6.6b)
- Verlauf des auftretenden Lenkwinkels  $\Delta\delta$  (Abbildung 6.2c, 6.4c und 6.6c)



(a) Trajektorienverläufe

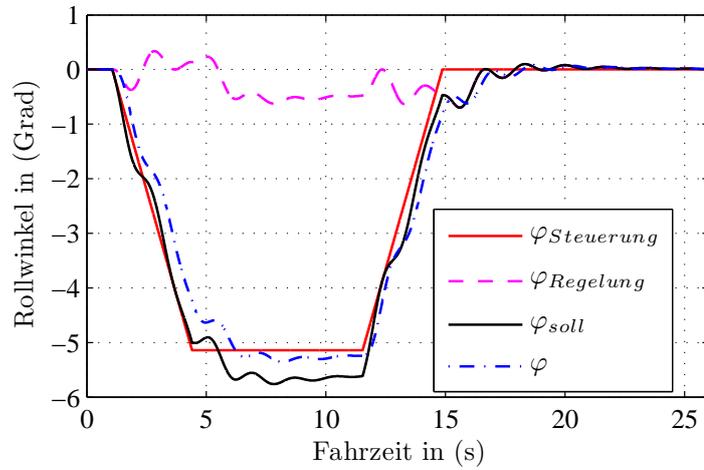


(b) Detail der Trajektorienverläufe

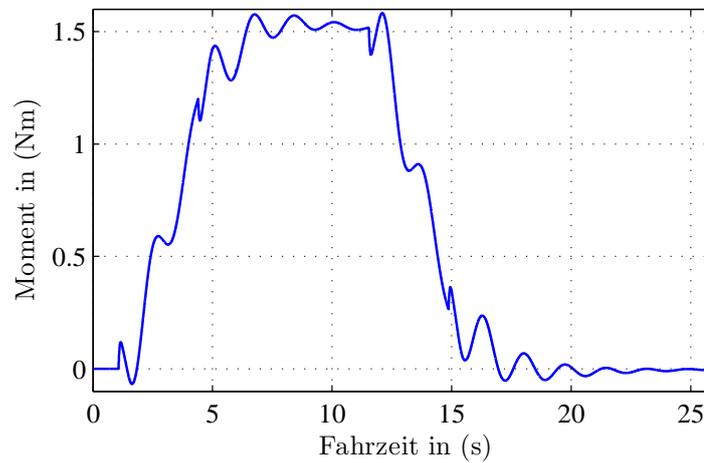


(c) Voraussichtlicher und tatsächlicher Normalabstände

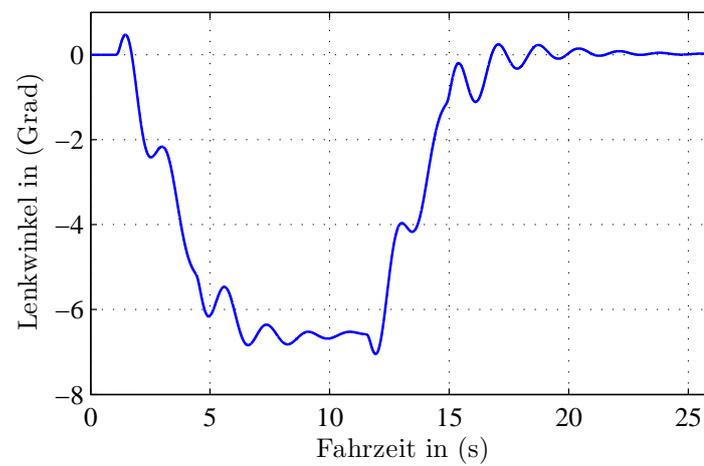
Abbildung 6.1: Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei  $u = 3 \text{ m/s}$  Teil 1



(a) Rollwinkelverläufe

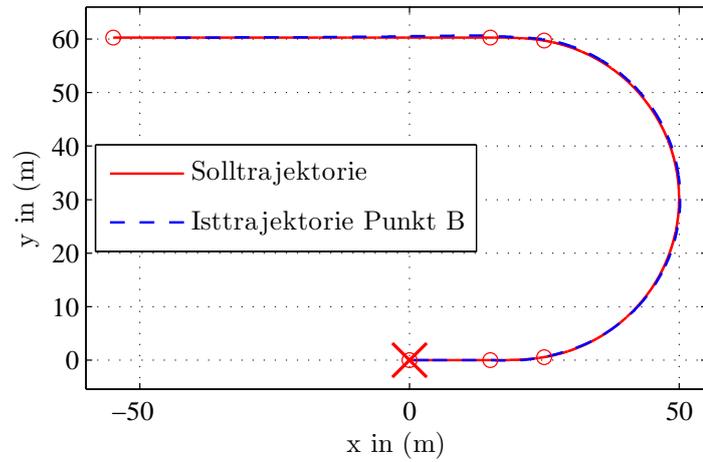


(b) Lenkmomentenverlauf (Stellgröße)

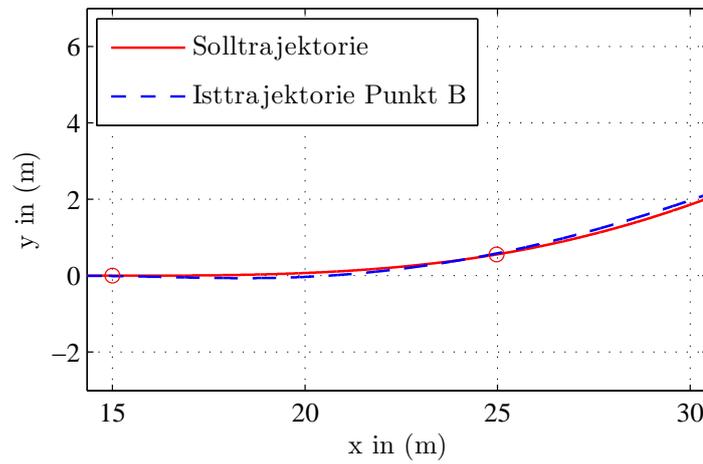


(c) Lenkwinkelverlauf

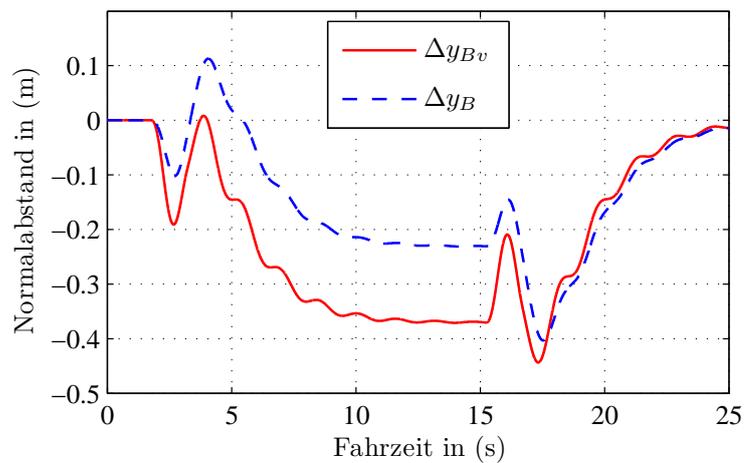
Abbildung 6.2: Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei  $u = 3 \text{ m/s}$  Teil 2



(a) Trajektorienverläufe

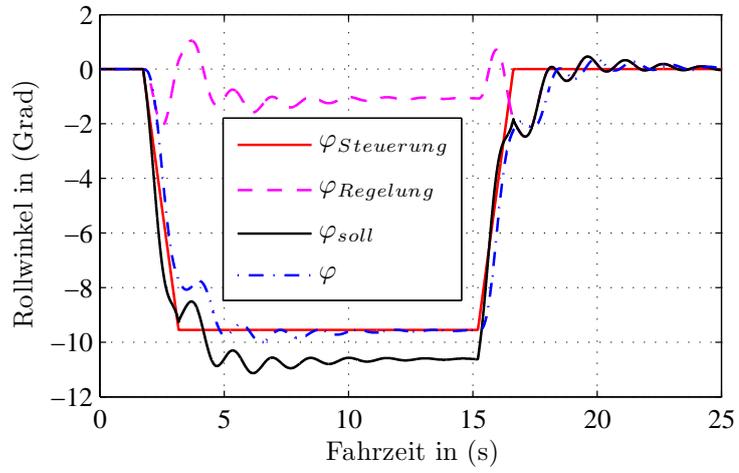


(b) Detail der Trajektorienverläufe

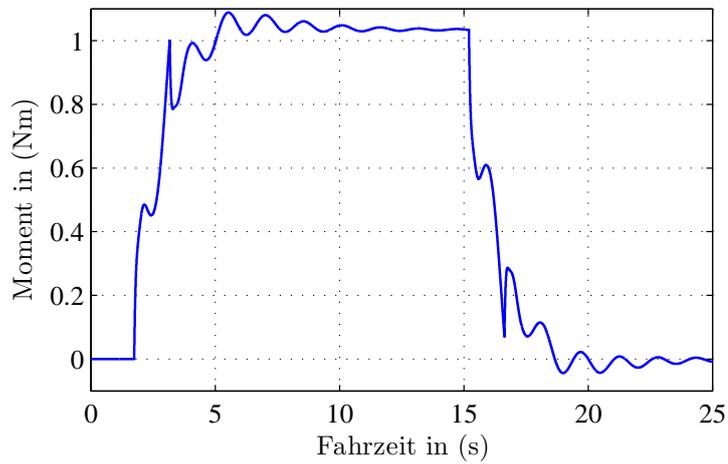


(c) Voraussichtlicher und tatsächlicher Normalabstände

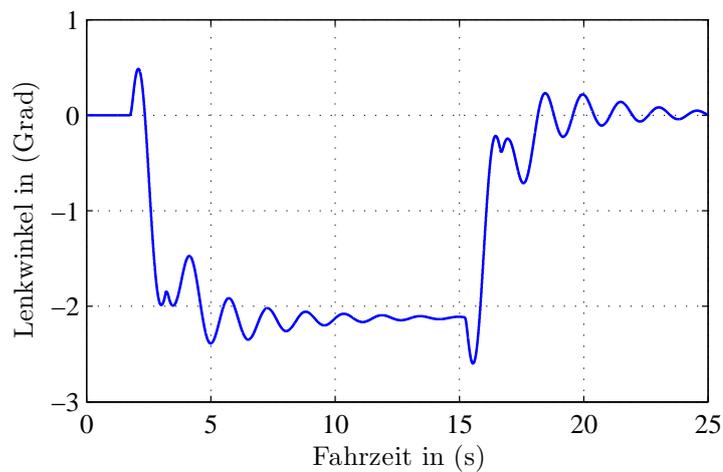
Abbildung 6.3: Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei  $u = 7$  m/s Teil 1



(a) Rollwinkelverläufe

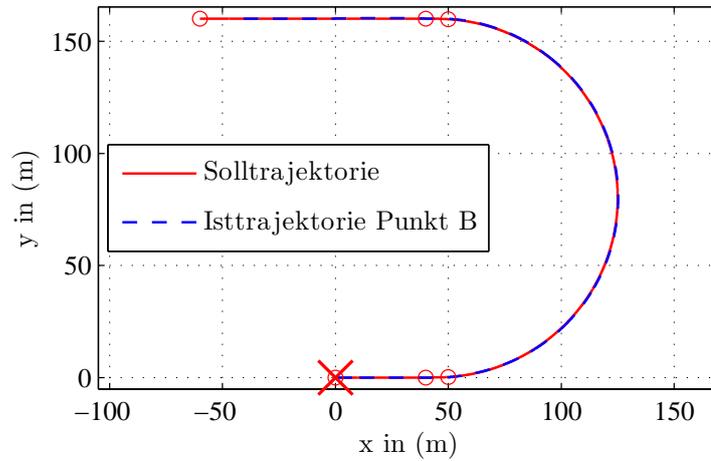


(b) Lenkmomentenverlauf (Stellgröße)

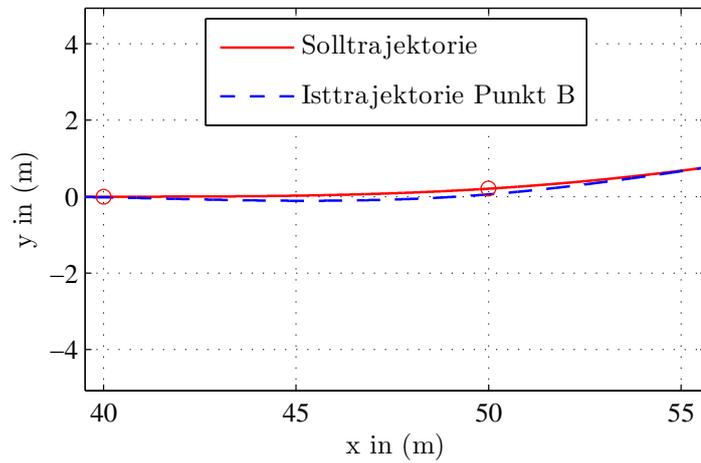


(c) Lenkwinkelverlauf

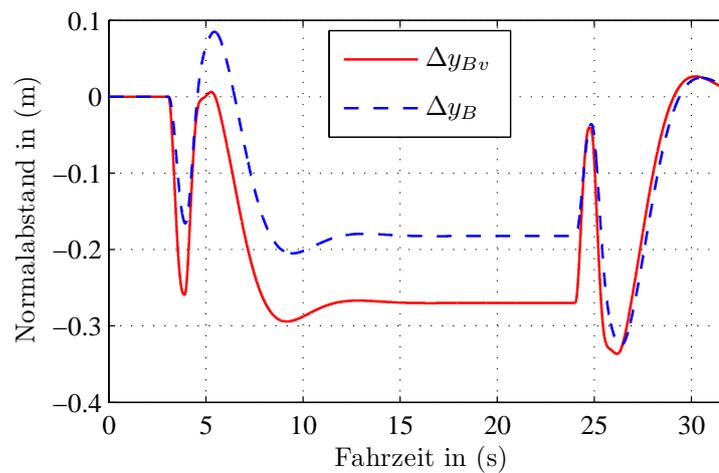
Abbildung 6.4: Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei  $u = 7 \text{ m/s}$  Teil 2



(a) Trajektorienverläufe

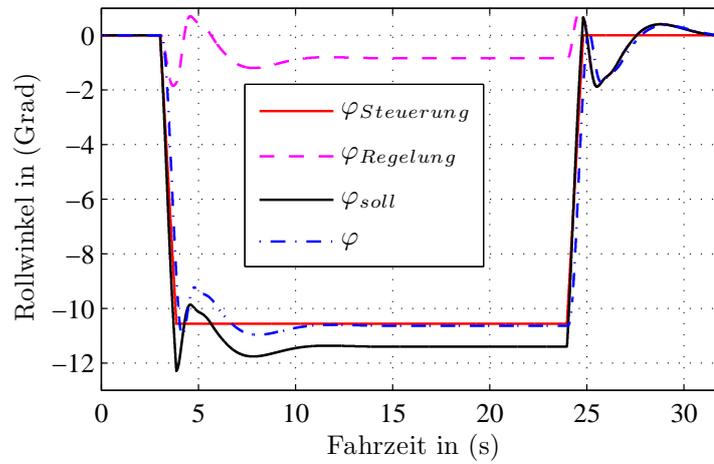


(b) Detail der Trajektorienverläufe

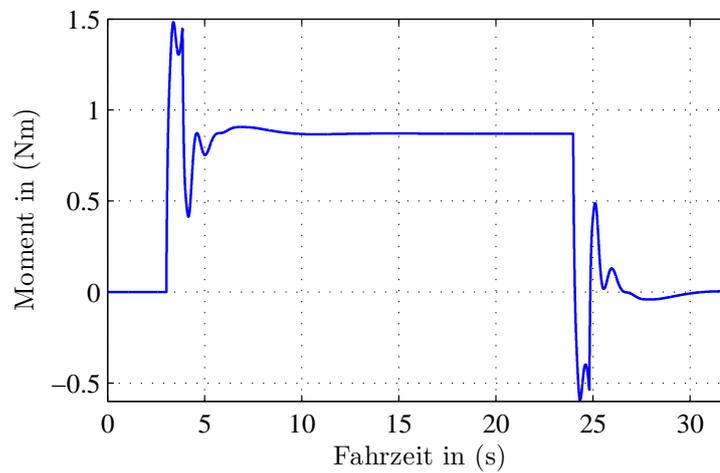


(c) Voraussichtlicher und tatsächlicher Normalabstände

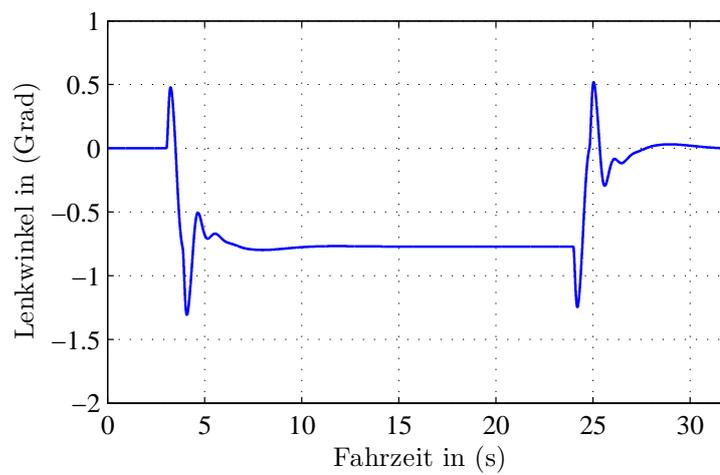
Abbildung 6.5: Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei  $u = 12 \text{ m/s}$  Teil 1



(a) Rollwinkelverläufe



(b) Lenkmomentenverlauf (Stellgröße)



(c) Lenkwinkelverlauf

Abbildung 6.6: Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei  $u = 12 \text{ m/s}$  Teil 2

### 6.1.1 Modellvergleich anhand der antizipatorischen Steuerungsebene

Zum Modellvergleich von Benchmark Modell und Fahrradmodell inklusive Reifenmodell sind zwei „Fahrten“ (Fahrsimulationen) bei 7 m/s entlang der Solltrajektorie, unter Außerachtlassung der vorausschauenden Regelung, dargestellt. Dabei zeigt Abbildung 6.7 die Trajektorien und die Rollwinkelverläufe der Fahrsimulation für das Benchmark Modell, Abbildung 6.8 die analogen Ergebnisse des Fahrradmodells inklusive Reifenmodell. Damit wird der unterschiedliche statische Zusammenhang zwischen Rollwinkel und Lenkmoment der beiden Modelle ersichtlich. Insbesondere bei dem Fahrradmodell inklusive Reifenmodell zeigt sich die Notwendigkeit der vorausschauenden Regelung. Durch die gute Übereinstimmung des Sollrollwinkels  $\Delta\varphi_{\text{soll}}$  und des Rollwinkels  $\Delta\varphi$  in Abbildung 6.7b zeigt sich auch, dass die Auslegung des Fahrermodells anhand des Benchmark Modells erfolgte.

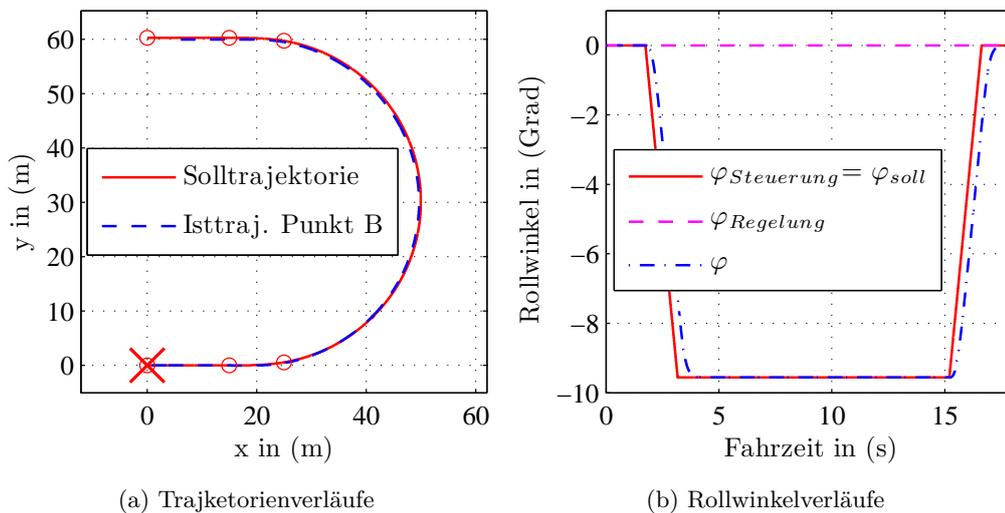


Abbildung 6.7: Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur ohne vorausschauende Regelungsebene bei  $u = 7$  m/s, für Benchmark Modell

## 6.2 Diskussion der Ergebnisse

Da im Rahmen dieser Arbeit keine Messfahrten durchgeführt wurden, ist die Beurteilung der Ergebnisse schwierig. Die Ergebnisse können folglich nur auf Basis der persönlichen Erfahrungen beim Fahrradfahren, der Literatur und der Plausibilität beurteilt werden.

Aus den Normalabständen der Geschwindigkeiten 7 und 12 m/s (Abbildung 6.3c und 6.5c) wird ersichtlich, dass bei der stationären Kurvenfahrt der voraussichtliche und tatsächliche Normalabstand nicht gegen Null geht. Beim voraussichtlichen Normalabstand kann

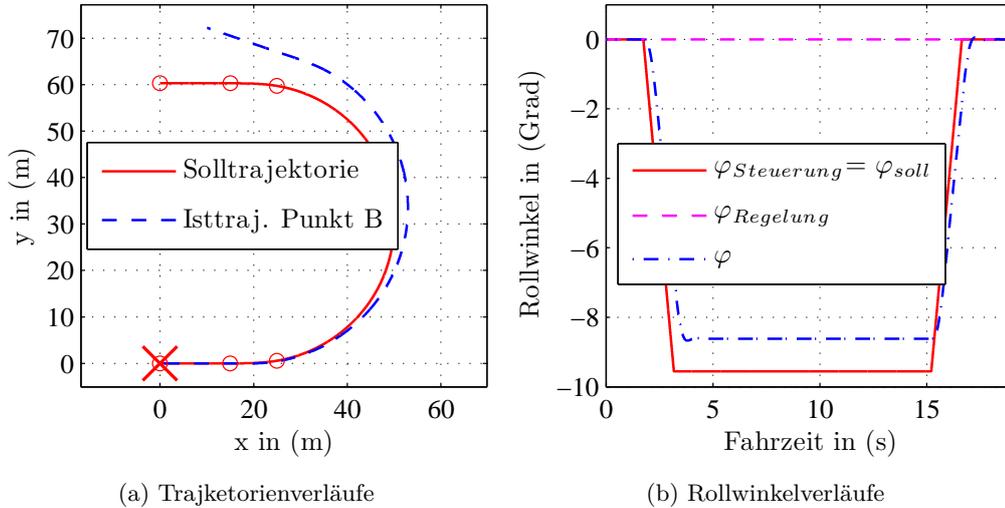


Abbildung 6.8: Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur ohne vorausschauende Regelungsebene bei  $u = 7 \text{ m/s}$ , für Fahrradmodell inklusive Reifenmodell

dies auf das nicht vorhandene globale I-Verhalten der Reglerübertragungsfunktion der vorausschauenden Regelung zurückgeführt werden. Der tatsächliche Normalabstand würde auch aufgrund der gewählten Vorausschau entlang der Linie  $\overline{DB}$  nicht Null werden.

Des Weiteren zeigt sich in Abbildung 6.1c, dass es bei  $3 \text{ m/s}$  zu relativ großen tatsächlichen Normalabständen kommt. Die Ursache dafür wird primär den Fahrerparametern zugeschrieben (erwähnte Schwierigkeiten infolge der getrennten Auslegung).

Aus den Rollwinkelverläufen (Abbildung 6.2a, 6.4a und 6.6a) ist ersichtlich, dass das Fahrrad zeitverzögert auf den Sollrollwinkel  $\Delta\varphi_{\text{soll}}$  reagiert.

Die „kantigen“ Übergänge (Unstetigkeitsstellen in den Ableitungen) des Rollwinkelverlaufs der Steuerungsebene  $\Delta\varphi_{\text{Steuerung}}$  bewirken jene des Sollrollwinkelverlaufs  $\Delta\varphi_{\text{soll}}$ . Diese sind auf die Proportionalität des Ausgangs der Steuerungsebene  $\Delta\varphi_{\text{Steuerung}}$  zur voraussichtlichen Krümmung  $\kappa(t + T_A)$  und folglich auch auf den Krümmungsverlauf (Abbildung 5.1b) zurückzuführen.

Die sprunghaften („kantigen“) Übergänge des Sollrollwinkelverlaufs bewirken ihrerseits Spitzen in den Lenkmomentenverläufen (Abbildung 6.2c, 6.4c und 6.6c). Dieser Zusammenhang lässt sich anhand des Reglergesetzes (2.27) des Stabilisierers erklären. Eine Berücksichtigung der neuromuskulären Dynamik würde unter anderem die Spitzen abrunden.

Bei den Lenkwinkelverläufen (Abbildungen 6.2c, 6.4c und 6.6c) fällt auf, dass beim Befahren der Kurve und nach dem Kurvenausgang mit einer Geschwindigkeit von  $3 \text{ m/s}$  und  $7 \text{ m/s}$

ähnliche Schwingungen (in Frequenz und Amplitude) auftreten, wobei die Frequenz bei ca. 0,6 Hz liegt, was für Lenkbewegungen eine realistische Frequenz [49] darstellt. Im Gegensatz dazu sind bei 12 m/s, abgesehen von Lenkbewegungen beim Ein- und Ausfahren der Kurve, keine Lenkwinkelschwingungen ersichtlich. Letzteres deckt sich mit der aus praktischen Erfahrungen gewonnenen Annahme, dass bei hohen Geschwindigkeiten weniger Lenkbewegungen auftreten.

Weiters ist bei der Kurveneinfahrt aus den Lenkwinkelverläufen das Nichtphasenminimumverhalten (Allpassverhalten) des Fahrrads durch das kurzzeitige Ausschlagen des Lenkwinkels in die „falsche“ Richtung (entgegen des stationären Wertes in der Kurve) deutlich zu erkennen. Zudem ist aus den Lenkwinkel-, Lenkmomenten- und Rollwinkelverläufen das sogenannte „Countersteering“ ersichtlich, sprich dass zum Befahren einer Linkskurve (stationärer negativer Lenkwinkel und Rollwinkel) ein Moment entgegen der Kurvenrichtung (positives Lenkmoment nach rechts) notwendig ist.

Der Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur gestaltet sich schwierig, da ein Großteil der Arbeit nur Simulationsergebnisse beinhaltet und nur in wenigen Arbeiten auch Messdaten bezüglich Trajektorienverlauf, Lenkmoment oder Lenkwinkel zu finden sind. Messungen vom Lenkmoment für verschiedene Fahrsituationen haben Cheng et al. [7] durchgeführt. Der direkte Vergleich der Ergebnisse ist allerdings aufgrund der unterschiedlichen Fahrmanöver und Geschwindigkeiten schwierig. Ein näherungsweise Vergleich der Amplituden und Frequenzen ist jedoch möglich. Er zeigt das Auftreten ähnlicher Frequenzen der Lenkbewegungen. Dennoch fällt auf, dass es bei Cheng et al. [7] im Zuge des Kurveneinleitens zu teilweise deutlich größeren Amplituden des Lenkmoments kommt. Ein zahlenmäßiger Vergleich erscheint aber aufgrund des experimentell unterschiedlichen Studiendesigns nicht sinnvoll.

Der im vorherigen Abschnitt beschriebene unterschiedliche statische Zusammenhang zwischen Rollwinkel/Lenkmoment beim Benchmark Modell und Fahrradmodell inklusive Reifenmodell ist auf das Fehlen einer konkreten Anpassung des Fahrermodells an das jeweilige bei der Simulation verwendete Fahrradmodell zurückzuführen<sup>1</sup>. Dies wirkt sich, wie in Abbildung 6.8 ersichtlich, beim Fahrradmodell inklusive Reifenmodell auf die antizipatorische Steuerungsebene aus, deren Qualität leicht durch eine Anpassung der Verstärkungen verbessert werden könnte.

---

<sup>1</sup>Die Anpassung erfolgt nur über das bei der Auslegung verwendete Benchmark Modell, vgl. Abschnitt 4.2.

# Kapitel 7

## Conclusio und Ausblick

### 7.1 Conclusio

Ziel dieser Arbeit war der Entwurf und die Auslegung eines Fahrermodells zum Lenken (Nachfahren einer Trajektorie) und Stabilisieren von Fahrrädern, welches auf einem aus mehreren Ebenen bestehenden Modell basiert. Ein derartiges Fahrermodell ist einerseits als menschenähnlicher Lenkungsregler für Fahrsimulationen von Fahrrädern von Nutzen und trägt andererseits zum Verständnis des Fahrradfahrens bei.

Für das Fahrermodell wird grundsätzlich davon ausgegangen, dass sich der Mensch beim Erlernen des Fahrradfahrens ein stark vereinfachtes Modell des Fahrrads und dessen Fahr-dynamik einprägt und später mit Hilfe dieser Vorstellung intuitiv und adäquat reagieren kann. Infolge dieser Annahme wurde zur Auslegung des Fahrermodells das einfache Benchmark Modell aus der Literatur und zum Testen ein komplexeres Fahrradmodell inklusive Reifenmodell verwendet.

Das Fahrermodell selbst besteht aus einer antizipatorischen Steuerungsebene, einer vorausschauenden kompensatorischen Regelungsebene, sowie einem Stabilisationsregler. Letzterer ist aufgrund des sich über weite Geschwindigkeitsbereiche erstreckenden, instabilen Verhaltens des Fahrrads notwendig. Der Stabilisationsregler, welcher aus regelungstechnischer Sicht einem Zustandsregler (des Benchmark Modells) entspricht, regelt den Rollwinkel auf einem Sollwert und stabilisiert damit das Fahrrad. Dieser Sollwert setzt sich aus dem Ausgang der antizipatorischen Steuerungsebene und der Rollwinkelkorrektur der vorausschauenden Regelung zusammen. Die Steuerungsebene selbst bildet die Reaktion des Fahrers auf eine vorausliegende Krümmungsänderung ab. Die vorausschauende Regelung versucht den voraussichtlichen Normalabstand zwischen Solltrajektorie und der voraussichtlichen Fahrradposition auszuregeln.

Im Zuge des Entwurfs und der Auslegung des Fahrermodells wurden zuerst die Eigenschaften der Regelstrecke (Fahrrad) betrachtet, wobei ein Schwerpunkt auf den unterschiedlichen Möglichkeiten des Fahrereingriffs lag. Aus einer Literaturrecherche und modalen Steuerbarkeitsanalyse folgt, dass das Lenkmoment Vorteile gegenüber dem Oberkörperrollmoment als Fahrereingriff hat. Aufbauend auf diesen Betrachtungen wurde das vorher vorgestellte Fahrermodell entworfen und ausgelegt. Die Auslegung erfolgt dabei getrennt für die jeweiligen Komponenten (Stabilisierer, antizipatorische Steuerung und vorausschauende Regelung) und für konkrete Geschwindigkeiten. Anschließend wurde das entworfene Fahrermodell anhand einer Simulation mittels Matlab/Simulink getestet. Dabei zeigte sich, dass mit dem Fahrermodell plausibel eine vorgegebene Trajektorie nachgefahren werden kann und instabile Eigenmodes (Weave bzw. Capesize) im nicht autostabilen Geschwindigkeitsbereich ebenso stabilisiert werden können.

## 7.2 Ausblick

Das vorgestellte Fahrermodell besitzt noch Optimierungspotential hinsichtlich der möglichst genauen Abbildung des realen menschlichen Verhaltens. Für derartige Optimierungen ist es unabdingbar, das menschliche Verhalten beim Fahrradfahren messtechnisch zu erfassen. Dabei wäre es unter anderem sinnvoll, die Antizipationszeit (Vorausschaulänge) sowie die Lenkmomentverläufe und Isttrajektorien in verschiedenen Fahrsituationen zu bestimmen. Eine sehr einfache und kostengünstige Möglichkeit zur Bestimmung der Isttrajektorie wäre es, das Vorderrad mit Wasser zu benetzen und die entstehende „Spur“ am Boden, beispielsweise mit Hilfe von Fotos, aufzuzeichnen. Weiters wären Messungen bezüglich der neuromuskulären Dynamik und/oder Reaktionszeit beim Fahrradfahren notwendig, um dieses ins Fahrermodell integrieren zu können.

Beim Fahrermodell selbst liegt das Optimierungspotential hauptsächlich in der Modellierung der neuromuskulären Dynamik und/oder der Reaktionszeit, sowie in der Auslegung des Fahrermodells. Für die Auslegung der einzelnen Ebenen des Fahrermodells wäre ein standardisiertes und automatisiertes Auslegungsverfahren evt. in Kombination mit einem integrativen (ganzheitlichen) Ansatz sinnvoll. Zudem sollte im Zuge der Auslegung verstärkt auf das menschliche Verhalten beim Regeln Rücksicht genommen werden. Von Interesse wären zudem Untersuchungen hinsichtlich des Einflusses der Modellierung des Fahrerkörpers, speziell der Arme, entweder als passive Elemente zur Berücksichtigung der Trägheit oder als aktive Elemente zur Krafterzeugung. Letztere sind vor allem von Interesse, da sich beim Fahren die Steifigkeit und Dämpfung der Armstruktur infolge der unterschiedlichen Anspannungszustände (Tonus) der Muskulatur ändert.

Eine ganz andere Möglichkeit der Erweiterung des Fahrermodells würde die Ergänzung um eine Längsdynamikregelung (evt. inklusive Tretbewegungen) darstellen, womit das Modell des Fahrradfahrers komplettiert würde.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Konzept des Fahrradfahrermodells . . . . .	6
2.1	Übertragungsglied . . . . .	8
2.2	Blockschaltbild eines Zustandsraummodells . . . . .	10
2.3	Blockschaltbild eines Eingrößenregelkreises . . . . .	14
2.4	Sprunganwort für dynamische Spezifikationen . . . . .	16
2.5	Sprunganwort eines Nichtphasenminimumsystems . . . . .	20
3.1	Fahrradmodell inklusive geometrischen Größen in aufrechter Position . . . . .	25
3.2	Fahrradmodell inklusive Winkelangabe in isometrischer Ansicht . . . . .	26
3.3	Schnitt durch den Fahrradreifen mit angreifenden Kräften und Momenten . . . . .	26
3.4	Kinematische Größen des Fahrradmodells inklusive Reifenmodell in Draufsicht . . . . .	32
3.5	Draufsicht auf das Benchmark Modell . . . . .	36
3.6	Stabilitätskarte des Fahrradmodelles inklusive Reifenmodell . . . . .	43
3.7	Stabilitätsvergleich der unterschiedlichen Fahrradmodelle . . . . .	45
3.8	Bewertungsmaß der modalen Steuerbarkeit für die Eingangsgröße $M_\delta$ in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $u$ . . . . .	47
3.9	Bewertungsmaß der modalen Steuerbarkeit für die Eingangsgröße $M_\varphi$ in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $u$ . . . . .	47
3.10	Lenkmomentsprung im autostabilen Bereich, Benchmark Modell . . . . .	50
3.11	Stationäre Zusammenhänge zwischen Lenkmoment und Lenkwinkel . . . . .	51
4.1	Blockschaltbild des Fahrermodells . . . . .	54
4.2	Wurzelortskurve des „Intuitive controllers“ bei 3 m/s (Rückführung $\dot{\varphi}$ ) . . . . .	56
4.3	Wurzelortskurve des „Intuitive controllers“ bei 12 m/s (Rückführung $\varphi$ ) . . . . .	57
4.4	Skizze für Vorausschau bei antizipatorischer Steuerung . . . . .	61
4.5	Stationärer Zusammenhang zwischen Krümmung und Rollwinkel . . . . .	62
4.6	Soll- und Isttrajektorien Vergleich der Steuerung zur Bestimmung der An- tizipationszeit, Simulation mit Benchmark Modell bei $u = 7$ m/s . . . . .	64
4.7	Blockschaltbild zur Auslegung der vorausschauenden Regelung . . . . .	66
4.8	Wurzelortskurve der vorausschauenden Regelung bei 3 m/s . . . . .	67

4.9	Wurzelortskurve der vorausschauenden Regelung bei 7 m/s . . . . .	68
4.10	Wurzelortskurve der vorausschauenden Regelung bei 12 m/s . . . . .	68
5.1	Teststrecke „Halbkreis“ mit Klothoidenübergängen bei Krümmungssprüngen	73
5.2	Abschätzung des voraussichtlichen Normalabstandes für die Vorausschau entlang der Fahrradlängsachse . . . . .	74
6.1	Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei $u = 3$ m/s Teil 1 . .	76
6.2	Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei $u = 3$ m/s Teil 2 . .	77
6.3	Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei $u = 7$ m/s Teil 1 . .	78
6.4	Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei $u = 7$ m/s Teil 2 . .	79
6.5	Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei $u = 12$ m/s Teil 1 .	80
6.6	Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur bei $u = 12$ m/s Teil 2 .	81
6.7	Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur ohne vorausschauende Regelungsebene bei $u = 7$ m/s, für Benchmark Modell . . . . .	82
6.8	Simulationsergebnisse für halbkreisförmige Sollspur ohne vorausschauende Regelungsebene bei $u = 7$ m/s, für Fahrradmodell inklusive Reifenmodell . .	83

# Tabellenverzeichnis

3.1	Massen- und Trägheitsparameter des Test-Trekkingrades laut Ott [32] . . .	40
3.2	Ergänzende Fahrradparameter laut Ott [32] . . . . .	41
3.3	Steuerbarkeitsanalyse des Benchmark Modells: nicht vollständig steuerbare Geschwindigkeiten $v_{un}$ inklusive der zugehörigen, nicht steuerbaren Eigen- vektoren und -modes . . . . .	46
3.4	Steuerbarkeitsanalyse des erweiterten Benchmark Modells: nicht vollständig steuerbare Geschwindigkeiten $v_{un}$ inklusive der zugehörigen, nicht steuer- baren Eigenvektoren und -modes . . . . .	46
4.1	Numerische Werte des Stabilisierers bei Zustandsvektorrückführung . . . . .	60
4.2	Antizipationszeiten . . . . .	63
4.3	Numerische Parameter von der Reglerübertragungsfunktion der vorausschau- enden Regelung . . . . .	67
4.4	Pol- und Nullstellenbezeichnungen für Wurzelortskurve . . . . .	69

## Literaturverzeichnis

- [1] Limebeer D.J.N., Sharp R. S.: *Bicycles, Motorcycles, and Models*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 26, Nr. 5, Seite 34-61, 2006.
- [2] <http://www.wien.gv.at/verkehr/radfahren/>, Stand vom 07. November 2011.
- [3] Bundesministerium für Verkehr, Innovation und Technologie, Radetzkystraße 2, 1030 Wien *Radverkehr in Zahlen*, Daten, Fakten und Stimmungen, 1. Auflage, Ueberreuter Print GmbH, Wien, 2010.
- [4] Donges E.: *A two-level model of driver steering behaviour*, Human factors Vol. 20, Nr. 6, S. 691-707, 1978.
- [5] Sharp R. S.: *The Lateral Dynamics of Motorcycles and Bicycles*, Vehicle System Dynamics, Vol. 14, No. 4-6, S. 265-283, 1985.
- [6] Meijaard J. P., Papadopoulos J. M., Ruina A. und Schwab A. L.: *Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review*, Proceedings of the Royal Society A: 463(2084):1955-1982, 2007.
- [7] Cheng K., Bothman D., Åström K. J.: *Bicycle Torque Sensor Experiment*, Mechanical & Environmental Engineering, University of California, Santa Barbara, 2003.
- [8] Popov A. A., Rowell S., Meijaard J. P.: *A review on motorcycle and rider modelling for steering control*, Vehicle System Dynamics, Vol. 48, Nr.6, S. 775-792, 2007.
- [9] Rankine W. J. M.: *On the dynamical principles of the motion of velocipedes*, The Engineer, Vol. 28, S. 79, 129, 153, 175 & Vol. 29, S. 2, 1969 & 1970.
- [10] Bourlet C.: *Étude Théoretique sur la Bicyclette*, Bulletin de la Societe Mathematique de France, Vol. 27, S. 47-67 & 76-96, 1899.
- [11] Carvallo M. E.: *Théorie du Mouvement du Monocycle et de la Bicyclette*, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [12] Whipple F. J. W.: *The stability of the motion of a bicycle*, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 30, S. 312 - 348, 1899.

- [13] Sharp R. S.: *The stability and control of motorcycles*, Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 13, No. 5, S. 316-329, 1971.
- [14] Weir D. H.: *Motorcycle Handling Dynamics and Rider Control and the Effect of Design Configuration on Response and Performance*, Dissertation University of California, Los Angeles, 1972.
- [15] McRuer D., Graham B., Krendel E. S., Reisner W.: *Human pilot dynamics in compensatory systems*, Air Force Flight Dynamics Laboratory Technical Report: AFFDL-TR-65-15, 1965.
- [16] Schwab A. L., Meijaard J. P., Papadopoulos J. M.: *Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrolled bicycle*, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Asian Conference of Multibody Dynamics, S. 1-9, August 2004.
- [17] Åström K. J., Klein R. E., Lennartsson A.: *Bicycle Dynamics and Control*, IEEE Control Systems Magazine, S. 26-47, August 2005.
- [18] Sharp R. s.: *Optimal stabilization and pathfollowing controls for a bicycle*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Volume 221, Number 4, S. 415-427, 2007.
- [19] Sharp R. S.: *On the Stability and Control of the Bicycle*, Applied Mechanics Review, Vol.61/060803, 2008.
- [20] Schwab A. L., Kooijman J. D. G., Meijaard J. P.: *Some recent developments in bicycle dynamics and control*, In Proceedings of the Fourth European Conference on Structural Control (4ECSC), Sep. 8-12, 2008, St. Petersburg, Russia, Institute of Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, S. 695-702, 2008.
- [21] Kooijman J. D. G., Schwab A. L., Moore J. K.: *Some observations on human control of a bicycle*, Proceedings of the ASME 2009 IDET/CIE in San Diego, 2009.
- [22] Kooijman J. D. G., Schwab A. L., Moore J. K.: *Rider motion identification during normal bicycling by means of principal component analysis*, Multibody dynamics 2009, ECCOMAS thematic conference in Warsaw 2009.
- [23] Schwab A., Meijaard J., Kooijman J.: *Lateral dynamics of a bicycle with passive rider model: stability and controllability*, Vehicle System Dynamics, iFirst, S. 1-16, 2011.
- [24] Hubbard M., Hess R., Moore K. J., Peterson L. D.: *Human Control of Bicycle Dynamics with Experimental Validation and Implications for Bike Handling and Design*, NSF Engineering Research and Innovation Conference Atlanta, Georgia, 2011.

- [25] <http://biosport.ucdavis.edu/research-projects/bicycle/human-operator-control>, Stand vom 27. Februar 2012.
- [26] Jörgel H.P.: *Repetitorium Regelungstechnik*, Band 1, 2. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, Wien, München, 1995.
- [27] Jörgel H.P.: *Repetitorium Regelungstechnik*, Band 2, R. Oldenbourg Verlag, Wien, München, 1994.
- [28] Föllinger O., Dörrscheidt F., Klittich M.: *Regelungstechnik*, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung, 10. Auflage, Hüthig Verlag, Heidelberg, 2008.
- [29] Lunze J.: *Regelungstechnik 1*, Systemtheoretische Grundlagen Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen, 8. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [30] Kalman R. E.: *On the General Theory of Control Systems*, Proc. 1th Int. Congress on Automatic Control, Moskau 1960.
- [31] Mack W., Plöchl M.: *Vorlesungsskriptum zur Vorlesung "Stabilitätsprobleme bewegter Systeme"*, Studienjahr 2006/2007.
- [32] Ott C.: *Untersuchung des Wobble-Modes bei Fahrrädern - Theorie und Fahrversuch*, Diplomarbeit TU Wien 2011.
- [33] Hoagg J. B., Bernstein D. S.: *Nonminimum-Phase Zeros - much to do about nothing - classical control revisited - Part II*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 27, Nr. 3, S. 45-57, 2007.
- [34] Hamdan A. M. A., Nayfeh A. H.: *Measures of modal controllability and observability for first- and second- order linear systems*, Journal Of Dynamic Systems Measurement, And Control Vol. 97, Nr. 4, S. 444-445, 1975.
- [35] Kühnel W.: *Matrizen und Lie-Gruppen*, Eine geometrische Einführung, 1. Auflage, Vieweg+Tauber Verlag, Wiesbaden, 2011.
- [36] Unbehauen H.: *Regelungstechnik I*, Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme, 14. Auflage, Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2007.
- [37] DIN 19226 Teil 4: *Regelungstechnik und Steuerungstechnik, Begriffe für Regelungs- und Steuerungssysteme*, Ausgabedatum Februar 1994.
- [38] Lugner P., Mack W., Plöchl M., Springer H.: *Vorlesungsskriptum zur Vorlesung "Grundlagen der Mehrkörperdynamik"*, Studienjahr 2008.

- [39] Lugner P., Plöchl M., *Vorlesungsskriptum zur Vorlesung "Grundlagen der Fahrzeugdynamik"*, Studienjahr 2008/2009.
- [40] Müller W.: *Modellbildung und querdynamische Untersuchungen eines Fahrrades*, Diplomarbeit TU Wien 2011.
- [41] Plöchl M., Edelmann J., Angrosch B., Ott Chr.: *On the wobble mode of a bicycle*, Vehicle System Dynamics, Vol. 50, No. 3, S. 415-429, 2012.
- [42] Kooijman J. D. G., Meijaard J. P., Schwab A. L.: *Some recent developments in bicycle dynamics* 12th IFToMM World Congress, Besancon, June 2007.
- [43] Angrosch B.: *Fahrradstabilität unter besonderer Berücksichtigung des Lenkungsflatterns*, Diplomarbeit TU Wien 2010.
- [44] Pacejka H. B. : *Tyre and vehicle dynamics*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.
- [45] Schwab A. L., Meijaard J. P. und Papadopoulos J. M.: *Benchmark Results on the Linearized Equations of Motion of an Uncontrolled Bicycle*, Proceedings of ACMD 2004 in Seoul, 2004.
- [46] Skrna R.: *Untersuchung zur Stabilität des Fahrrades bei der Geradeausfahrt*, Diplomarbeit TU Wien 1989.
- [47] Plöchl M. , Edelmann J.: *Driver models in automobile dynamics application*, Vehicle System Dynamics, Vol. 45, No. 7-8, S. 699-741, 2007.
- [48] Hess A. R.: *Simplified approach for modelling pilot pursuit control behaviour in multi-loop flight control tasks* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, Vol. 220, No. 2 ,S. 85-102, 2006.
- [49] Mitschke M., Wallentowitz H.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [50] Minixhofer C.: *Einbau eines Fahrerreglers in ein nichtlineares 4-Rad PKW-Modell*, Diplomarbeit TU Wien 1994.
- [51] Rauscher A.: *Entwurf und Simulation eines Fahrerreglers für Kurvenfahrt auf ebener Strecke*, Diplomarbeit TU Wien 2002.
- [52] Edelmann J.: *PKW-Fahrermodell für höherer Querbeschleunigungen*, Diplomarbeit TU Wien 2004.
- [53] Zurmühl R., Falk S.: *Matrizen und ihre Anwendungen 1: Grundlagen*, 6. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

- [54] Gasch R., Knothe K.: *Strukturdynamik*, Diskrete Systeme, Band 1, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo 1987.

# Anhang A

## Eigenwertproblem bei fahzeugdynamischen Problemstellungen

Das Eigenwertproblem bzw. die Lösung davon tritt oft bei der Beschreibung und Behandlung von dynamischen bzw. fahzeugdynamischen Problemstellungen auf. Aus diesem Grund wird ein kurzer Überblick über das Eigenwertproblem gegeben, wobei auch auf die oft nicht behandelten Links-Eigenvektoren eingegangen wird.

Die Dynamik von Fahrzeugen wird meistens mit Bewegungsgleichungen der Form,

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f \quad (\text{A.1})$$

beschrieben, dabei stellt  $M$  die Massenmatrix,  $C$  die Dämpfungsmatrix,  $K$  die Steifigkeitsmatrix,  $f$  den Kraft- bzw. Momentenvektor und  $q$  den Vektor der Freiheitsgrade dar. Oftmals werden äquivalente Formen wie z. B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{B}u \\ 0 \\ f \end{bmatrix}}_{\bar{B}u} \quad (\text{A.2})$$

oder die Zustandsraumdarstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}}_{B_1^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}}_{B_1^{-1}}^{-1} \bar{B}u \quad (\text{A.3})$$

verwendet.  $I$  stellt die Einheitsmatrix und  $0$  die Nullmatrix der entsprechenden Größe dar. Der Term  $B_1^{-1}A_1$  entspricht der Systemmatrix  $A$  und Term  $B_1^{-1}\bar{B}$  der Eingangsmatrix  $B$ , wodurch sich aus (A.3) die übliche Zustandsraumdarstellung

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{A.4})$$

ergibt.

Durch Nullsetzen der Kraft- bzw. Momentenvektoren  $\mathbf{f}$  gehen die Differentialgleichungssysteme (A.1), (A.2) und (A.4) in ihre homogene Form über. Passende Exponentialansätze führen über die Eigenwertprobleme zu den Lösungen der homogenen Differentialgleichungssysteme. Aus dem Gleichungssystem (A.1) erhält man mit dem Lösungsansatz  $\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{r}}e^{\lambda t}$  das quadratische Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{C} + \lambda^2\mathbf{M}\right) \bar{\mathbf{r}} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Für das Differentialgleichungssystem der Form (A.2) ergibt sich mit Hilfe des Lösungsansatzes  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}e^{\lambda t}$  das allgemeine Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{B}_1\right) \mathbf{r} = 0, \quad (\text{A.6})$$

und für die Zustandsraumdarstellung (A.3) ergibt sich mit dem gleichen Ansatz das spezielle Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) \mathbf{r} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Zur numerischen Lösung dieser Eigenwertprobleme stehen Programmpakete wie z. B. Matlab (Befehle: *polyeig* und *eig*) zu Verfügung. Diese drei Eigenwertprobleme besitzen dieselben Eigenwerte bzw. Eigenkreisfrequenzen und für die Eigenvektoren gilt  $\mathbf{r}^T = [\bar{\mathbf{r}}^T, \lambda\bar{\mathbf{r}}^T]$ .

Bisher wurde der Eigenvektor  $\bar{\mathbf{r}}$  bzw.  $\mathbf{r}$  von rechts multipliziert, weshalb man auch von Rechts-Eigenvektoren spricht. Folglich werden Vektoren (Zeilenvektoren), welche von links in den entsprechenden Gleichungen multipliziert werden, als Links-Eigenvektoren bezeichnet. Diese Links-Eigenvektoren sind im Gegensatz zu den Rechts-Eigenvektoren, welche z. B. die Lösung des Differentialgleichungssystem charakterisieren, hauptsächlich ein nützliches mathematisches Konstrukt. Im folgenden werden die korrespondierenden „Links-Probleme“ der Eigenwertprobleme (A.5), (A.6) und (A.7) angeschrieben.

$$\bar{\mathbf{l}}\left(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{C} + \lambda^2\mathbf{M}\right) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{l}\left(\mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{B}_1\right) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{l}^*\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Die transponierten „Links-Probleme“ entsprechen „Rechts-Problemen“, welche folglich mit den Lösungsverfahren der „Rechts-Probleme“ gelöst werden können. Es wird besonders darauf hingewiesen, dass die Links-Eigenvektoren  $\bar{\mathbf{l}}$ ,  $\mathbf{l}$  und  $\mathbf{l}^*$  nicht identisch sind, sondern folgende Zusammenhänge [53] gelten: Der Links-Eigenvektor  $\bar{\mathbf{l}}$  ist nur den Komponenten  $l_{II}$  proportional, wobei  $\mathbf{l} = [l_I, l_{II}]$  ist. Folglich ist auch  $l_I$  nicht proportional zu  $l_{II}$  und weiters gilt nach [53] für  $\mathbf{l}^*$  der Zusammenhang  $\mathbf{l}^* = \mathbf{l}\mathbf{B}$ .

Der interessierte Leser wird vom mathematischen Zugang her auf [53], sowie für den dynamischen Zugang auf [54] verwiesen.

# Anhang B

## Systemmatrizen für Fahrradmodell inklusive Reifenmodell

Eingangsmatrix:

$$\mathbf{B}_t^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \epsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Massenmatrix:

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_T & m_T a_T & -m_T z_T & m_r s_r & m_H e_H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_T a_T & I_{Tzz|A} & I_{Txz|A} & I_{r\varphi_r z_A} & I_{H\delta z_A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_T z_T & I_{Txz|A} & I_{Txx|A} & I_{r\varphi_r x_A} & I_{H\delta x_A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_r s_r & I_{r\varphi_r z_A} & I_{r\varphi_r x_A} & I_{r\varphi_r \varphi_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_H e_H & I_{H\delta z_A} & I_{H\delta x_A} & 0 & I_{H\delta\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\gamma_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Dämpfungsmatrizen:

$$\mathbf{C}_{0t} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\varphi_r} & -k_{\delta} \sin \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & a_c & 0 & 0 & -t_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -b_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{C}_{1t} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m_T a_T & -G_T & 0 & -G_1 \sin \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -m_T z_T + G_T & 0 & 0 & G_1 \cos \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m_r s_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m_H e_H + G_1 \sin \epsilon & -G_1 \cos \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$



$\mathbf{K}_{\text{tyret}} =$ 

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{F\alpha_1} & -c_{F\gamma_1} & -c_{F\alpha_2} & -c_{F\gamma_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_c c_{F\alpha_1} + c_{M\alpha_1} & -a_c c_{F\gamma_1} - c_{M\gamma_1} & b_c c_{F\alpha_2} + c_{M\alpha_2} & b_c c_{F\gamma_2} - c_{M\gamma_2} \\
c_{Mx1} + c_{Mx2} & 0 & c_{Mx1} \sin \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_{Mx1} \sin \epsilon & 0 & c_{Mx1} \sin^2 \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_c c_{F\alpha_1} + c_{M\alpha_1} \cos \epsilon & t_c c_{F\gamma_1} - c_{M\gamma_1} \cos \epsilon & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

## Systemmatrizen für Benchmark Modell

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} I_{Txx|D} & I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txz|D} \\ I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txz|D} & I_{H\delta\delta} + \mu (2I_{H\delta z_D} + \mu I_{Tzz|D}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{C}_{0b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_\delta \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{C}_{1b} = \begin{bmatrix} 0 & G_1 \cos \epsilon + \mu (-m_T z_T + G_T) + \zeta I_{Txz|D} \\ -(G_1 \cos \epsilon + \mu G_T) & \zeta I_{H\delta z_D} + \mu (S_\delta + \zeta I_{Tzz|D}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{K}_{0b} = \begin{bmatrix} m_T z_T g & -S_\delta g \\ -S_\delta g & c_\delta - S_\delta g \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{K}_{2b} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta (-m_T z_T + G_T) \\ 0 & \zeta (S_\delta + G_1 \sin \epsilon) \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

## Systemmatrizen für Erweitertes Benchmark Modell

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} I_{Txx|D} & I_{r\varphi_r x_D} & I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txz|D} \\ I_{r\varphi_r x_D} & I_{r\varphi_r \varphi_r} & \mu I_{r\varphi_r z_D} \\ I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txz|D} & \mu I_{r\varphi_r z_D} & I_{H\delta\delta} + \mu (2I_{H\delta z_D} + \mu I_{Tzz|D}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{C}_{0e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\varphi_r} & -k_\delta \sin \epsilon \\ 0 & 0 & k_\delta \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{C}_{1e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_1 \cos \epsilon + \mu (-m_T z_T + G_T) + \zeta I_{Txz|D} \\ 0 & 0 & \mu m_r s_r + \zeta I_{r\varphi_r z_D} \\ -(G_1 \cos \epsilon + \mu G_T) & 0 & \zeta I_{H\delta z_D} + \mu (S_\delta + \zeta I_{Tzz|D}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{K}_{0e} = \begin{bmatrix} m_T z_T g & -m_r s_r g & -S_\delta g \\ -m_r s_r g & c_{\varphi_r} - m_r s_r g & -c_\delta \sin \epsilon \\ -S_\delta g & 0 & c_\delta - S_\delta g \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{K}_{2e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta (-m_T z_T + G_T) \\ 0 & 0 & \zeta m_r s_r \\ 0 & 0 & \zeta (S_\delta + G_1 \sin \epsilon) \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{B}_e^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \epsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$