TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Diplomarbeit

Die Berechnung des Embedded Value bei stochastischer Risikodiskontrate

ausgeführt am
Institut für Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. habil. Uwe Schmock

durch
Marianne Priebernig
Liechtensteinstraße 143–145/7
1090 Wien

Datum   Unterschrift

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben.

Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Wien, Dezember 2008

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei meinen Arbeitskollegen in der Sparkassen Versicherung Aktiengesellschaft Wien bedanken, die mein Interesse an diesem Thema erweckt haben und mir mit Rat zur Seite standen. Weiterer Dank gebührt Herrn Professor Uwe Schmock vom Institut für Wirtschaftsmathematik an der Technischen Universität Wien für seine tatkräftige Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit. Ferner möchte ich mich auch bei meiner Familie bedanken, und dabei insbesondere bei meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht haben und immer hinter mir stehen. Meinen Freunden möchte ich für ihre vielseitige Unterstützung und fortwährende Ermutigung danken.

Kurzfassung

Ich schrieb diese Diplomarbeit unter der Beaufsichtigung von Herrn Professor Uwe Schmock im Sommersemester 2008 und im Wintersemester 2008/2009. Die Arbeit behandelt die Berechnung des Embedded Value bei Verwendung einer stochastischen Risikodiskontrate.

Das erste Kapitel beinhaltet die Definition des Embedded Value und der Komponenten, aus denen sich dieser zusammensetzt. Ferner wird eine Erklärung zu der Wahl der aktuariellen und ökonomischen Annahmen, die für die Berechnung des Embedded Value benötigt werden, gegeben und es werden explizite Methoden zur Bestimmung der wesentlichsten Annahmen vorgestellt. Auch wird der Value Added beschrieben, das heißt die Veränderung des Embedded Value von einem Jahr auf das nächste, und in diesem Zusammenhang der Value of New Business.

Im zweiten Kapitel werden stochastische Zinsmodelle, die zur Bestimmung der Risikodiskontrate verwendet werden können, vorgestellt. Zunächst wird die Technik der Preisbewertung ohne Arbitragemöglichkeiten in einem verallgemeinerten Black-Scholes-Modell beschrieben und der arbitragefreie Preis einer Kaufsoption im Black-Scholes-Modell berechnet. Ferner wird eine alternative Ermittlung von arbitragefreien Preisen in vollständigen Modellen gezeigt und in diesem Zusammenhang replizierende Portfolios erläutert. Nach einer kurzen Beschreibung von Anleihen und diversen Zinssätzen wird dann die Ermittlung der arbitragefreien Preise von Nullkuponanleihen in verschiedenen Zinsmodellen erklärt.

Das dritte Kapitel behandelt die Weiterentwicklung des Embedded Value. Es werden die Merkmale des European Embedded Value und des Market Consistent Embedded Value beschrieben. Ferner werden die drei Embedded-Value-Ansätze miteinander verglichen.

Im vierten Kapitel werden der European Embedded Value beziehungsweise der Market Consistent Embedded Value, der Value of New Business und die einzelnen Komponenten der genannten Werte zwischen verschiedenen Gesellschaften verglichen.

Die für die Ausführungen im zweiten Kapitel benötigte stochastische Analysis findet sich im Anhang.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einleitung

Embedded Values stellen in der Lebens- und Krankenversicherung den internationalen Standard zur Bewertung von Versicherungsunternehmen und zur Messung der Performance dieser Sparte dar. Deshalb ist diese Größe sowohl für Investoren als auch für die Unternehmensleitung von großem Interesse. Neben der Messung des Unternehmenswertes eignet sich der Embedded Value auch zur Festlegung der Entlohnung des Managements und des Verkaufs. Deshalb gibt es heute vermehrt Gesellschaften, die den Bonus des Managements an den Embedded Value koppeln.

Die Veröffentlichung von Embedded Values erhöht über die Veröffentlichung von IAS[1] / IFRS[2] Konzernergebnissen hinaus die Transparenz. Durch Embedded Values werden Lebens- und Krankenversicherer international vergleichbar. Die lokalen Anforderungen an Solvabilität und Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer werden so in eine einzige Kennzahl integriert. Viele internationale Versicherungsgruppen veröffentlichen mittlerweile Embedded Values im Wesentlichen aufgrund der Nachfrage der Analysten. Eine ausschließliche Veröffentlichung des Embedded Value ohne eine Analyse der Veränderung dieses Wertes bringt jedoch wenig Aufschluss über die Wertschöpfung im Unternehmen.

Die ersten Gesellschaften starteten Ende der neunziger Jahre mit Berechnungen von Embedded Values. Zunächst gab es nur interne Berechnungen, dann erste Veröffentlichungen der AMB Generali Holding AG im Jahr 1999, der Allianz SE im Jahr 2000 und der Münchener Rück/ERGO Versicherungsgruppe im Jahr 2001. Die wesentlichen Unterschiede zu früheren Ertragswertberechnungen sind der Aktionärsfokus, die Kapitalbindungskosten und die Annahme, dass die Risikodiskontrate nicht gleich dem Ertragszins ist.

1.2 Definition

In diesem Kapitel 1.2 werden die Komponenten, aus denen sich der Embedded Value zusammensetzt, definiert. Die Ausführungen im gesamten Kapitel 1 sind dem Vortrag *Embedded Value – European Embedded Value – Market Consistent Embedded Value*

[1] International Accounting Standards
[2] International Financial Reporting Standards

von Laszlo Hrabovszki und Ute Kerres [9], dem Buch *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung* von Michael Koller [10] und dem Vortrag *Embedded Value Workshop* von Towers Perrin/Tillinghast [13] entnommen.

Definition 1.1 *Im Folgenden bezeichnet man mit*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} && \textit{die Menge der natürlichen Zahlen inklusive } 0,\\
&\mathbb{N}^* = && \{x \in \mathbb{N};\, x > 0\},\\
&\mathbb{R} && \textit{die Menge der reellen Zahlen,}\\
&\mathbb{R}_+ = && \{x \in \mathbb{R};\, x \geq 0\},\\
&\mathbb{R}_+^* = && \{x \in \mathbb{R};\, x > 0\}.
\end{aligned}$$

Definition 1.2 *Im Folgenden sei $T^* \in \mathbb{R}_+^*$ ein Endzeitpunkt.*

1.2.1 Formale Darstellung des Embedded Value

Definition 1.3 *Der **Embedded Value** (**EV**) zum 31.12. des betrachteten Geschäftsjahres setzt sich folgendermaßen zusammen:*

$$EV = ANAV + PVFP - CoC,$$

wobei
***ANAV** der **Adjusted Net Asset Value** des betrachteten Geschäftsjahres ist, das heißt sich aus dem bilanziellen Eigenkapital und gegebenenfalls den anteiligen Bewertungsreserven des betrachteten Geschäftsjahres zusammensetzt,*
***PVFP** der **Present Value of Future Profits** zum 31.12. des betrachteten Geschäftsjahres ist, das heißt der Barwert der zukünftigen Jahresüberschüsse aus dem Versicherungsbestand zum 31.12. des betrachteten Geschäftsjahres, und*
***CoC** das **Cost of Capital** zum 31.12. des betrachteten Geschäftsjahres ist, das heißt der Barwert der zukünftigen Kapitalbindungskosten zum 31.12. des betrachteten Geschäftsjahres.*

Bewertungsreserven (Stille Reserven), die dem Unterschiedsbetrag zwischen Kapitalanlagen zu Markt- und Buchwerten entsprechen, werden entweder bei der Berechnung des Present Value of Future Profits berücksichtigt oder anteilig (Aktionärsanteil) dem Adjusted Net Asset Value hinzugerechnet. Beim Market Consistent Embedded Value (Kapitel 3.2) werden die Bewertungsreserven anteilig dem Present Value of Future Profits und dem Adjusted Net Asset Value hinzugerechnet.

1.2.2 Ermittlung des Present Value of Future Profits

Die statutarische Gewinn- und Verlustrechnung und die Bilanz wird für einen vorgegebenen Projektionszeitraum projiziert. Der Projektionszeitraum beträgt gewöhnlich 40 Jahre. Eigentlich würde dieser der maximalen Dauer der Polizzen entsprechen. Da sich jedoch der Embedded Value bei einer Projektion der Gewinn- und Verlustrechnung und der Bilanz für diesen Zeitraum im Verhältnis zu einer Projektion von 40 Jahren nicht viel ändert, wird die kürzere Dauer genommen. Der Grund, dass sich der Wert nicht viel ändert, ist die immer höher werdende Abzinsung bei annähernd gleich bleibenden Jahresergebnissen. Zukünftiges Neugeschäft und Zinserträge auf das Eigenkapital werden bei der Projektion nicht berücksichtigt.

Die Tatsache, dass sich der Embedded Value an ausschüttungsfähigen Gewinnen orientiert, spielt eine wesentliche Rolle. Der Rohüberschuss wird abgeleitet und auf den Jahresüberschuss und die Zuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung (RfB) aufgeteilt. Die Rückstellung für Beitragsrückerstattung ist eine versicherungstechnische Rückstellung und dient der Beteiligung der Versicherungsnehmer am Überschuss eines Versicherungsunternehmens. Sie ist insbesondere in der Lebens- und der (privaten) Krankenversicherung von Bedeutung. Soweit die für die Überschussbeteiligung der Versicherungsnehmer bestimmten Beträge nicht unmittelbar zu Lasten des Geschäftsjahres zugeteilt werden (Direktgutschrift), sind sie der Rückstellung für Beitragsrückerstattung zuzuführen. Umgekehrt werden der Rückstellung für Beitragsrückerstattung Mittel entnommen, die den Versicherungsnehmern gut gebracht werden.

Definition 1.4 *Sei ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *gegeben. Ferner sei* $t = 0$ *das betrachtete Geschäftsjahr und* $w \in \mathbb{N}^*$ *der Projektionszeitraum in Jahren, wobei* $w \leq T^*$ *ist. Bezeichne der* $\mathbb{R}^*_+$*-wertige stochastische Prozess* $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ *die Risikodiskontrate (wie man die Risikodiskontrate bestimmen kann, wird in Kapitel* 1.3 *erläutert) und seien* $J\ddot{U}_1, \ldots, J\ddot{U}_w \in \mathbb{R}$ *die projizierten, zukünftigen Jahresüberschusse in den Geschäftsjahren* $1, \ldots, w$*. Dann wird der* ***Present Value of Future Profits*** *zum* 31.12. *des betrachteten Geschäftsjahres* $t = 0$ *durch*

$$PVFP = \sum_{t=1}^{w} J\ddot{U}_t (1 + r(t))^{-t}$$

definiert.

1.2.3 Ermittlung des Cost of Capital

Ein Versicherungsunternehmen benötigt Eigenkapital auf Grund von Solvabilitätsanforderungen und internen Risikoüberlegungen. Mögliche Ansätze zur Bestimmung des benötigten Eigenkapitals sind Solvabilitätsvorschriften, Bewertungsmodelle von Ratingagenturen (zum Beispiel Standard & Poor's) oder interne Risikomodelle. Risikotheoretisch korrekt und damit am besten für die Unternehmenssteuerung geeignet, sind interne Risikomodelle, da diese das unternehmensindividuelle Risikoprofil am besten beschreiben.

Der Aktionär muss Kapital bereitstellen. Hierauf kann eine Rendite in Höhe der Nettoverzinsung realisiert werden. Wenn das benötigte Eigenkapital im Versicherungsunternehmen verbleibt, unterliegen die entsprechenden Kapitalerträge dem Mechanismus der Überschussverteilung (Zuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung) und gegebenenfalls der Steuerbelastung. Im Projektionsverlauf erfolgt unter Umständen eine zusätzliche Bindung, mit auslaufendem Bestand eine Freisetzung von gebundenem Eigenkapital. Der aus Aktionärssicht verbleibende Finanzfluss wird mit einer Risikodiskontrate diskontiert, die über der Nettoverzinsung liegt. Die Bindung des Kapitals des Aktionärs ist somit mit einem Zinsverlust verbunden.

Definition 1.5 *Sei ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *gegeben. Ferner sei* $t = 0$ *das betrachtete Geschäftsjahr und* $w \in \mathbb{N}^*$ *der Projektionszeitraum in Jahren, wobei* $w \leq T^*$ *ist. Bezeichne der* $\mathbb{R}_+^*$*-wertige stochastische Prozess* $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ *die Risikodiskontrate (wie man die Risikodiskontrate bestimmen kann, wird in Kapitel* 1.3 *erläutert) und sei* $i \in \mathbb{R}_+^*$ *der Kapitalertragssatz nach Abzug der Steuer. Sei* EK_0 *das benötigte Eigenkapital im betrachteten Geschäftsjahr* $t = 0$ *und seien ferner* $EK_1, \ldots, EK_{w-1} \in \mathbb{R}$ *die projizierten, zukünftigen benötigten Eigenkapitalien in den Geschäftsjahren* $1, \ldots, w-1$*. Die* ***Kapitalbindungskosten*** *im Geschäftsjahr* $t = 0, \ldots, w-1$ *bezeichnet man mit* K_t*. Diese werden auf das benötigte Eigenkapital berechnet und sind definiert als der Zinsverlust, der sich für den Aktionär auf das benötigte Eigenkapital ergibt, das heißt*

$$K_t = (r(t) - i)EK_t, \quad t = 0, \ldots, w-1.$$

Dann wird das ***Cost of Capital*** *zum* 31.12. *des betrachteten Geschäftsjahres* $t = 0$ *durch*

$$CoC = \sum_{t=1}^{w} K_{t-1}(1 + r(t))^{-t}$$

definiert.

1.3 Annahmen für den Embedded Value

Für die Berechnung des Embedded Value müssen aktuarielle und ökonomische Annahmen getroffen werden. Diese Annahmen sollten auf historischen Daten basieren, die zukünftigen Erwartungen der Gesellschaft widerspiegeln und realistisch sein. Ferner sollten sie keine Sicherheitsmargen enthalten, unter der Prämisse der Unternehmensfortführung hergeleitet sein und keine Einmaleffekte enthalten.

Annahmen für die Kapitalerträge und die Gewinnbeteiligung:

Die Erwartung des Zinsniveaus basiert auf den Werten des aktuellen Kapitalmarktes. Das optimale Verfahren, um Annahmen für die Kapitalerträge zu treffen, wäre Folgendes: Man projiziert den Auslauf der existierenden Anleihen, macht Neuanlagen zu dann gültigen Konditionen und löst die stillen Reserven auf. Die Gewinnbeteiligung sollte konsistent zu den Kapitalerträgen sein. Die Kapitalertragsannahmen sind für die Berechnung des Embedded Value wesentlich, da die verwendete Rendite substantiell die Höhe des Rohüberschusses und damit auch die ausgeschütteten Erträge beeinflusst. Wesentlich ist auch die Ausschüttungsquote, da der Bestandswert sich proportional zu dieser verhält und ein wichtiges Instrument des Managements zur Steuerung der Ausschüttung an die Aktionäre ist.

Annahmen für die Rückversicherung:

Das optimale Verfahren wäre signifikante Verträge, wie Verträge mit Finanzierungsanteil oder Risikobasisverträge, explizit zu modellieren. Alternativ können Rückversicherungskosten auch in % der Beiträge oder der Versicherungssumme angenommen werden.

Annahmen für die Solvenz:

Die Minimumanforderung der Europäischen Union für die Solvenz (4%/1% Reserven + 3‰ des riskierten Kapitals) beinhaltet keine adäquate Berücksichtigung von Kapitalmarktrisiken. Das optimale Verfahren wäre, das benötigte Kapital zum Beispiel als 175% der Anforderung der Europäischen Union plus 20% Crash Reserve für stille Reserven zu definieren oder ein risikobasiertes Kapital zu nehmen.

Risikodiskontrate:

Für die Bestimmung der Risikodiskontrate gibt es verschiedene Betrachtungsweisen, die nachstehend erläutert werden. Bei der klassischen Betrachtungsweise geht es darum, den Wert einer Versicherungsgesellschaft festzulegen. Man stellt sich auf den Standpunkt des Investors, der von dieser Anlage einen risikogerechten Ertrag erhalten will. Dementsprechend definiert man die Risikodiskontrate, die im Prinzip dem Ertrag einer ähnlich risikoreichen Anlage entspricht. Als Anhaltspunkt kann die Rendite der Aktien des entsprechenden Segments gewählt werden. Daraus wird deutlich, dass dieser virtuelle Zins von den wirtschaftlichen Gegebenheiten abhängt.

Wenn man den erwarteten Wert der Versicherungsgesellschaft sowie das Risiko der Versicherungsgesellschaft berechnen will, ist es nötig, ein stochastisches Zinsmodell für die Bestimmung der Risikodiskontrate zu wählen. Solche Zinsmodelle werden in Kapitel 2 vorgestellt.

Es sei noch erwähnt, dass eine Veränderung der Risikodiskontrate den Embedded Value wesentlich beeinflussen kann (je höher die Risikodiskontrate, desto niedriger der Embedded Value).

Neben diesen Annahmen müssen auch noch **Annahmen 2. Ordnung** getroffen werden. Die in den Geschäftsplänen festgelegten Sterbetafeln und Kostensätze heißen Annahmen 1. Ordnung. Diese enthalten aufgrund des Prinzips der Vorsicht Sicherheitszuschläge. Damit die Jahresergebnisse des Versicherungsbestandes jedoch realistisch abgebildet werden, müssen die Rechnungsgrundlagen wirklichkeitsnah sein. Man spricht von Annahmen 2. Ordnung. Ferner zählen die Annahmen für den Storno zu dieser Art von Annahmen.

Annahmen für die Sterblichkeit:

Das optimale Verfahren wäre, die Annahmen für die Sterblichkeit bezüglich einer gesellschaftsindividuellen Sterbetafel oder einem Datenpool zu treffen. Alternativ kann die Sterbewahrscheinlichkeit auch in % der Sterbetafel angenommen werden oder es können Erfahrungen auf dem Markt verwendet werden. Ferner sollten separate Analysen für Raucher und Nichtraucher durchgeführt werden.

Annahmen für den Storno:

Die Stornowahrscheinlichkeit sollte getrennt nach Produkt, nach Laufzeit, nach Beitragszahlungsweise und nach Versicherungsjahr der Polizzen ermittelt werden. Die Verrentungswahrscheinlichkeit ist ebenfalls im Zusammenhang mit der Stornowahrscheinlichkeit zu betrachten. Es sei erwähnt, dass die Stornowahrscheinlichkeit großen Einfluss auf die Profitabilität haben kann.

Annahmen für die Kosten:

Die Annahmen sollten getrennt für Abschlusskosten, Verwaltungskosten, Schadenregulierungskosten und Kapitalanlagekosten getroffen werden. Das optimale Verfahren wäre, die Kosten bezüglich einer Analyse der Prozesskostenrechnung zu ermitteln und pro Polizze anzugeben. Alternativ können Kosten in % der Beiträge oder der Versicherungssumme berechnet werden.

Folgende Risiken sollten bei der Wahl der Annahmen beachtet werden:

Kapitalanlagerisiko:

Je niedriger das Zinsniveau ist, desto höher ist der Wert der gegenüber den Versicherungsnehmern abgegebenen garantierten Verzinsung und desto weniger Ertrag bleibt für den Aktionär. Bei steigenden Zinsen ergibt sich ein Abschreibungsbedarf auf einen Teil der festverzinslichen Wertpapiere, der jedoch durch geeignete Maßnahmen vermieden werden kann. Wenn der garantierte Zins nicht erwirtschaftet wird, muss unter Umständen der Aktionär einspringen.

Sterblichkeit (insbesondere Langlebigkeit):

Es ist eine jährliche Verbesserung der Sterblichkeit zu beobachten, die zu größeren Gewinnen bei traditionellen Kapital- und Risikoversicherungen führt. Bei Rentenversicherungen wirkt sich jede Sterblichkeitsverbesserung negativ auf die Erträge des Aktionärs aus. Da gerade aufgeschobene Rentenversicherungen eine teilweise sehr lange Laufzeit haben, können Sterblichkeitsverbesserungen große Auswirkungen haben.

Stornorisiko:

Rückkaufswerte werden von vielen Lebensversicherern garantiert. Bei schlechter Marktlage kann dies unter Umständen zu einem Verlust führen. Stornoabschläge, die abhängig vom Marktwert der Kapitalanlagen sind, werden immer diskutiert.

Kostenrisiko:

Gerade beim fondsgebundenen Geschäft ergibt sich ein erhebliches Kostenrisiko, da die Kosten mehr oder weniger fix, die Einnahmen jedoch im Wesentlichen an das Fondsguthaben geknüpft und somit variabel sind.

Nun werden explizite Methoden zur Bestimmung der Annahmen 2. Ordnung, die für die Berechnung des Embedded Value eines Lebensversicherungsunternehmens benötigt werden, vorgestellt.

1.3.1 Sterblichkeit

Zuerst teilt man den Versicherungsbestand des Lebensversicherungsunternehmens in folgende Kategorien ein:

- Gemischte Lebensversicherungen,
- Erlebensfallversicherungen,
- Risikoversicherungen,
- Rentenversicherungen,
- Fonds- und indexgebundene Lebensversicherungen,
- Lebensversicherungen mit prämienbegünstigter Zukunftsvorsorge.

Die Berechnung der **Sterbewahrscheinlichkeit** erfolgt getrennt für die einzelnen Kategorien. Ferner werden das Geschlecht und das Alter der versicherten Personen berücksichtigt. Die Kennzahlen für die Berechnung sind die Anzahl aller versicherten Personen und die Anzahl der versicherten Personen, die verstorben sind.

Definition 1.6 *Bezeichne*

$a \in \mathbb{N}$	*das Alter der versicherten Personen,*
g	*das Geschlecht der versicherten Personen, das heißt männlich oder weiblich,*
$d_{a,g} \in \mathbb{N}$	*die deterministische Anzahl aller versicherten Personen mit Alter a und Geschlecht g, die im betrachteten Geschäftsjahr verstorben sind,*
$x_{a,g} \in \mathbb{N}$	*die deterministische Anzahl aller versicherten Personen mit Alter a und Geschlecht g im betrachteten Geschäftsjahr und*
$y_{a,g} \in \mathbb{N}$	*die deterministische Anzahl aller versicherten Personen mit Alter a und Geschlecht g im Geschäftsjahr vor dem betrachteten Geschäftsjahr.*

Dann wird die Sterbewahrscheinlichkeit $q_{0,g} \in [0,1]$ einer versicherten Person mit Alter 0 und Geschlecht g durch

$$q_{0,g} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } x_{0,g} = 0, \\ \dfrac{d_{0,g}}{x_{0,g}} & \textit{sonst} \end{cases}$$

und die Sterbewahrscheinlichkeit $q_{a,g} \in [0,1]$ einer versicherten Person mit Alter $a \in \mathbb{N}^*$ und Geschlecht g durch

$$q_{a,g} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } x_{a,g} = 0, \\ \dfrac{d_{a,g}}{x_{a,g}} & \textit{falls } y_{a-1,g} = 0,\ x_{a,g}, \neq 0, \\ \dfrac{d_{a,g}}{\left(\frac{y_{a-1,g}+x_{a,g}}{2}\right)} & \textit{sonst} \end{cases}$$

definiert.

Wenn der historische Bestand zu klein ist, liefert diese Vorgehensweise ungenaue Ergebnisse. Eine alternative Methode wäre dann die Sterbewahrscheinlichkeit in % des jeweiligen Sterbetafelwertes anzugeben.

1.3.2 Storno

Die **Stornowahrscheinlichkeit** setzt sich aus folgenden Wahrscheinlichkeiten zusammen:

- Wahrscheinlichkeit für Rückkauf der Polizze,
- Wahrscheinlichkeit für Storno ohne Leistung der Polizze,
- Wahrscheinlichkeit für Prämienfreistellung der Polizze.

Ferner teilt man den Versicherungsbestand des Lebensversicherungsunternehmens in folgende Kategorien ein:

- Klassische Lebensversicherungen (Gemischte Lebensversicherungen, Erlebensfallversicherungen, Rentenversicherungen) mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Klassische Lebensversicherungen (Gemischte Lebensversicherungen, Erlebensfallversicherungen, Rentenversicherungen) mit einmaliger Prämienzahlungsweise,
- Risikoversicherungen mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Risikoversicherungen mit einmaliger Prämienzahlungsweise,
- Fonds- und indexgebundene Lebensversicherungen mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Fonds- und indexgebundene Lebensversicherungen mit einmaliger Prämienzahlungsweise,
- Lebensversicherungen mit prämienbegünstigter Zukunftsvorsorge mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Lebensversicherungen mit prämienbegünstigter Zukunftsvorsorge mit einmaliger Prämienzahlungsweise.

Die Berechnung der Stornowahrscheinlichkeit erfolgt getrennt für die einzelnen Kategorien. Ferner werden die Versicherungsjahre, in denen sich die Polizzen befinden, berücksichtigt. Die Kennzahl für die Berechnung ist die jährliche Tarifprämie.

Definition 1.7 *Bezeichne*

$n \in \mathbb{N}^*$ *das Versicherungsjahr der Polizzen,*

i *den Grund des Stornos der Polizzen, das heißt*

- *Rückkauf,*
- *Storno ohne Leistung,*
- *Prämienfreistellung,*

$r_{n,i} \in \mathbb{R}_+$ *die deterministische, jährliche Tarifprämie aller Polizzen im Versicherungsjahr n, die im betrachteten Geschäftsjahr aus dem Grund i storniert werden,*

$p_n \in \mathbb{R}_+$ *die deterministische, jährliche Tarifprämie aller Polizzen im Versicherungs-*

	jahr n zum 31.12. des betrachteten Geschäftsjahres und
$t_n \in \mathbb{R}_+$	*die deterministische, jährliche Tarifprämie aller Polizzen im Versicherungsjahr n zum 31.12. des Geschäftsjahres vor dem betrachteten Geschäftsjahr.*

Dann wird die Stornowahrscheinlichkeit $s_n \in [0,1]$ einer Polizze im Versicherungsjahr $n \in \mathbb{N}^*$ durch

$$s_n = \sum_i s_{n,i}$$

definiert, wobei die Wahrscheinlichkeit $s_{1,i} \in [0,1]$ für Storno aus dem Grund i einer Polizze im 1. Versicherungsjahr durch

$$s_{1,i} = \begin{cases} 0 & \text{falls } p_1 = 0, \\ \dfrac{r_{1,i}}{p_1} & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Wahrscheinlichkeit $s_{n,i} \in [0,1]$ für Storno aus dem Grund i einer Polizze im Versicherungsjahr $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ durch

$$s_{n,i} = \begin{cases} 0 & \text{falls } t_{n-1} = 0, \\ \dfrac{r_{n,i}}{t_{n-1}} & \text{falls } t_{n-1} \neq 0,\ p_n = 0, \\ \dfrac{r_{n,i}}{\left(\frac{t_{n-1}+p_n}{2}\right)} & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird.

1.3.3 Kosten

Die Kosten werden in Abschlusskosten (ohne Provisionen), Verwaltungskosten und Schadenregulierungskosten eingeteilt und als absolute Werte pro Polizze kalkuliert.

Abschlusskosten

Man teilt den Versicherungsbestand des Lebensversicherungsunternehmens in folgende Kategorien ein:

- Klassische Lebensversicherungen (Gemischte Lebensversicherungen, Erlebensfallversicherungen, Rentenversicherungen) mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Klassische Lebensversicherungen (Gemischte Lebensversicherungen, Erlebensfallversicherungen, Rentenversicherungen) mit einmaliger Prämienzahlungsweise,
- Risikoversicherungen mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Risikoversicherungen mit einmaliger Prämienzahlungsweise,
- Fonds- und indexgebundene Lebensversicherungen mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Fonds- und indexgebundene Lebensversicherungen mit einmaliger Prämienzahlungsweise,

- Lebensversicherungen mit prämienbegünstigter Zukunftsvorsorge mit laufender Prämienzahlungsweise,

- Lebensversicherungen mit prämienbegünstigter Zukunftsvorsorge mit einmaliger Prämienzahlungsweise.

Die **Abschlusskosten** werden getrennt für die einzelnen Kategorien ermittelt. Die Kennzahlen für die Berechnung sind die Anzahl der Neugeschäftspolizzen und die tatsächliche Höhe der Abschlusskosten.

Definition 1.8 *Bezeichne*

i	*die Art der Neugeschäftspolizze, das heißt* - *klassisch mit laufender Prämienzahlungsweise,* - *klassisch mit einmaliger Prämienzahlungsweise,* - *Risiko mit laufender Prämienzahlungsweise,* - *Risiko mit einmaliger Prämienzahlungsweise,* - *fonds- und indexgebunden mit laufender Prämienzahlungsweise,* - *fonds- und indexgebunden mit einmaliger Prämienzahlungsweise,* - *prämienbegünstigte Zukunftsvorsorge mit laufender Prämienzahlungsweise,* - *prämienbegünstigte Zukunftsvorsorge mit einmaliger Prämienzahlungsweise,*
$w_i \in [0,1]$	*ein deterministisches Gewicht für Neugeschäftspolizzen der Art i,*
$n_i \in \mathbb{N}$	*die deterministische Anzahl aller Neugeschäftspolizzen der Art i im betrachteten Geschäftsjahr und*
$a \in \mathbb{R}_+$	*die deterministischen, tatsächlichen Abschlusskosten im betrachteten Geschäftsjahr.*

Sei $x = \sum_i n_i w_i$. Dann werden die Abschlusskosten $a_i \in \mathbb{R}_+$ einer Neugeschäftspolizze der Art i durch

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \dfrac{w_i a}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Die Höhe des Gewichts w_i für Neugeschäftspolizzen der Art i wählt man abhängig von der Höhe des Abschlussaufwandes der einzelnen Polizzenarten.

Verwaltungskosten

Man teilt den Versicherungsbestand des Lebensversicherungsunternehmens in folgende Kategorien ein:

- Klassische Lebensversicherungen (Gemischte Lebensversicherungen, Erlebensfallversicherungen, Rentenversicherungen) mit laufender Prämienzahlungsweise,

- Klassische Lebensversicherungen (Gemischte Lebensversicherungen, Erlebensfallversicherungen, Rentenversicherungen) mit einmaliger Prämienzahlungsweise,
- Risikoversicherungen mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Risikoversicherungen mit einmaliger Prämienzahlungsweise,
- Fonds- und indexgebundene Lebensversicherungen mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Fonds- und indexgebundene Lebensversicherungen mit einmaliger Prämienzahlungsweise,
- Lebensversicherungen mit prämienbegünstigter Zukunftsvorsorge mit laufender Prämienzahlungsweise,
- Lebensversicherungen mit prämienbegünstigter Zukunftsvorsorge mit einmaliger Prämienzahlungsweise.

Die **Verwaltungskosten** werden getrennt für die einzelnen Kategorien ermittelt. Die Kennzahlen für die Berechnung sind die Anzahl der Polizzen und die tatsächliche Höhe der Verwaltungskosten.

Definition 1.9 *Bezeichne*

i *die Art der Polizze, das heißt*

- *klassisch mit laufender Prämienzahlungsweise,*
- *klassisch mit einmaliger Prämienzahlungsweise,*
- *Risiko mit laufender Prämienzahlungsweise,*
- *Risiko mit einmaliger Prämienzahlungsweise,*
- *fonds- und indexgebunden mit laufender Prämienzahlungsweise,*
- *fonds- und indexgebunden mit einmaliger Prämienzahlungsweise,*
- *prämienbegünstigte Zukunftsvorsorge mit laufender Prämienzahlungsweise,*
- *prämienbegünstigte Zukunftsvorsorge mit einmaliger Prämienzahlungsweise,*

$w_i \in [0,1]$ *ein deterministisches Gewicht für Polizzen der Art* i*,*

$n_i \in \mathbb{N}$ *die deterministische Anzahl aller Polizzen der Art* i *im betrachteten Geschäftsjahr und*

$v \in \mathbb{R}_+$ *die deterministischen, tatsächlichen Verwaltungskosten im betrachteten Geschäftsjahr.*

Sei $x = \sum_i n_i w_i$*. Dann werden die Verwaltungskosten* $v_i \in \mathbb{R}_+$ *einer Polizze der Art* i *durch*

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \dfrac{w_i v}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Die Höhe des Gewichts w_i *für Polizzen der Art* i *wählt man abhängig von der Höhe des Verwaltungsaufwands der einzelnen Polizzenarten.*

Schadenregulierungskosten

Man teilt den Versicherungsbestand des Lebensversicherungsunternehmens in folgende Kategorien ein:

- Klassische Lebensversicherungen (Gemischte Lebensversicherungen, Erlebensfallversicherungen, Rentenversicherungen),
- Risikoversicherungen,
- Fonds- und indexgebundene Lebensversicherungen,
- Lebensversicherungen mit prämienbegünstigter Zukunftsvorsorge.

Ferner muss man nach den Gründen der Schadenregulierung unterscheiden:

- Tod,
- Rückkauf,
- Ablauf.

Die **Schadenregulierungskosten** werden getrennt für die einzelnen Kategorien und die einzelnen Schadenregulierungsgründe ermittelt. Die Kennzahlen für die Berechnung sind die Anzahl der Polizzen, die reguliert werden, und die tatsächliche Höhe der Schadenregulierungskosten.

Definition 1.10 *Bezeichne*

i *die Art der Polizze, das heißt*
- *klassisch mit Regulierungsgrund Tod,*
- *klassisch mit Regulierungsgrund Rückkauf,*
- *klassisch mit Regulierungsgrund Ablauf,*
- *Risiko mit Regulierungsgrund Tod,*
- *fonds- und indexgebunden mit Regulierungsgrund Tod,*
- *fonds- und indexgebunden mit Regulierungsgrund Rückkauf,*
- *fonds- und indexgebunden mit Regulierungsgrund Ablauf,*
- *prämienbegünstigte Zukunftsvorsorge mit Regulierungsgrund Tod,*
- *prämienbegünstigte Zukunftsvorsorge mit Regulierungsgrund Rückkauf,*
- *prämienbegünstigte Zukunftsvorsorge mit Regulierungsgrund Ablauf,*

$w_i \in [0,1]$ *ein deterministisches Gewicht für Polizzen der Art i,*

$n_i \in \mathbb{N}$ *die deterministische Anzahl aller Polizzen der Art i im betrachteten Geschäftsjahr und*

$s \in \mathbb{R}_+$ *die deterministischen, tatsächlichen Schadenregulierungskosten im betrachteten Geschäftsjahr.*

Sei $x = \sum_i n_i w_i$. Dann werden die Schadenregulierungskosten $s_i \in \mathbb{R}_+$ einer Polizze der Art i durch

$$s_i = \begin{cases} 0 & \textit{falls } x = 0, \\ \dfrac{w_i s}{x} & \textit{sonst} \end{cases}$$

definiert. Die Höhe des Gewichts w_i für Polizzen der Art i wählt man abhängig von der Höhe des Schadenregulierungsaufwands der einzelnen Polizzenarten.

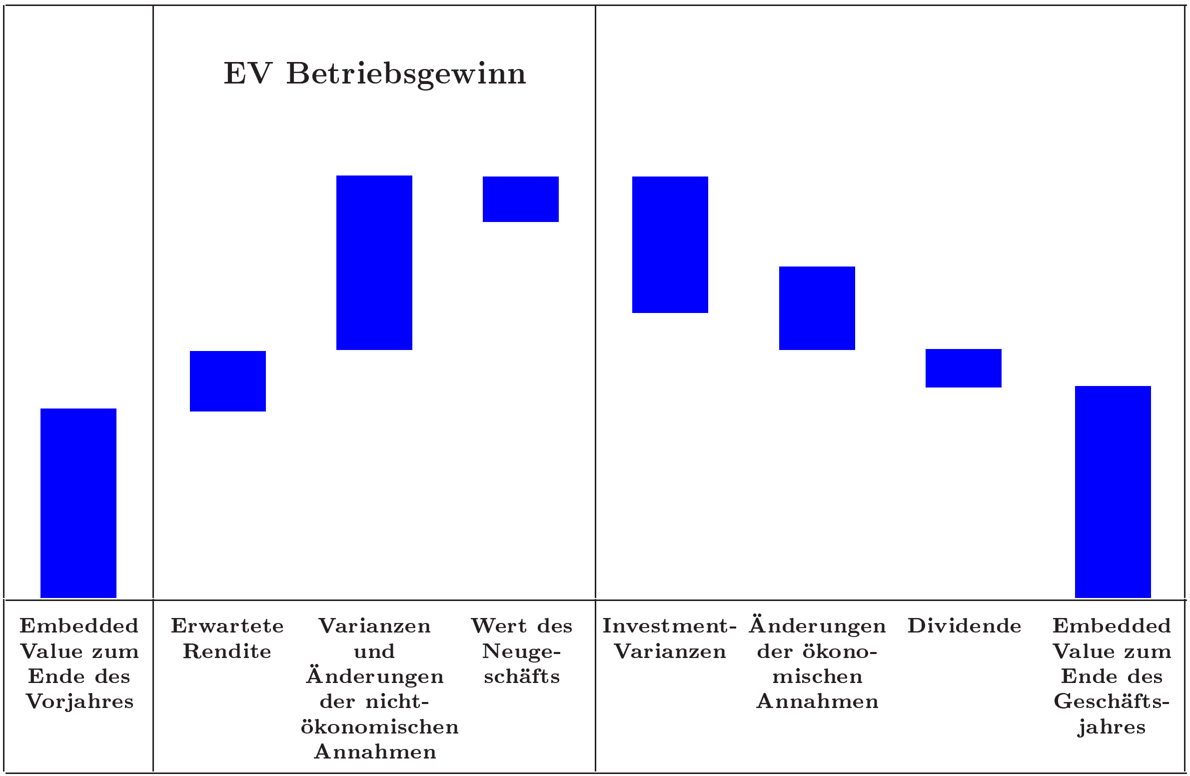
1.4 Value Added oder Embedded-Value-Gewinn

Der **Value Added** beschreibt die Veränderung des Embedded Value von einem Jahr auf das nächste. Er beschreibt den tatsächlich aus Aktionärssicht erwirtschafteten Gewinn, der, neben dem bilanziellen Jahresüberschuss, ebenfalls Veränderungen beim Present Value of Future Profits berücksichtigt. Die Analyse des Value Added erlaubt die Offenlegung der Gewinnquellen.

Eine wesentliche Quelle des Embedded-Value-Gewinns ist der im betrachteten Geschäftsjahr generierte **Value of New Business (VNB)**, das heißt der Neugeschäftswert. Dieser ist der Barwert zukünftiger Jahresüberschüsse, die aus den Beständen des aktuellen Neugeschäftsjahrganges generiert werden können. Die Rechnungsgrundlagen und Annahmen für die Berechnung des Value of New Business entsprechen denen, die für die Berechnung des Embedded Value verwendet werden.

Value Added Analyse:

(1)		Embedded Value zum Ende des Vorjahres
(2)	+	Auswirkungen von Modelländerungen
(3)	=	Embedded Value zum Ende des Vorjahres mit neuem Modell
(4)	+	Veränderung durch die planmäßige Fortschreibung des Embedded Value (Roll forward)
(5)	=	Erwarteter Embedded Value zum Ende des Geschäftsjahres
(6)	+	Abweichungen vom planmäßigen Verlauf während des Geschäftsjahres unterteilt nach wesentlichen Ergebnisquellen wie Kapitalerträge, Risiko, Kosten und Zuweisungsquote
(7)	+	Wert des Neuzugangs des Geschäftsjahres mit den Annahmen des Vorjahres
(8)	=	Embedded Value zum Ende des Geschäftsjahres mit den Annahmen des Vorjahres
(9)	+	Neue Modellannahmen in der Zukunft unterteilt nach wesentlichen Ergebnisquellen wie Kapitalerträge, Risiko, Kosten und Zuweisungsquote
(10)	=	Embedded Value zum Ende des Geschäftsjahres


EV Betriebsgewinn
Embedded Value zum Ende des Vorjahres
Erwartete Rendite
Varianzen und Änderungen der nicht-ökonomischen Annahmen
Wert des Neugeschäfts
Investment-Varianzen
Änderungen der ökonomischen Annahmen
Dividende
Embedded Value zum Ende des Geschäftsjahres

Kapitel 2

Stochastische Zinsmodelle

In diesem Kapitel 2 werden stochastische Zinsmodelle, die zur Bestimmung der Risikodiskontrate des Embedded Value verwendet werden können, vorgestellt. Die dafür benötigten mathematischen Grundlagen finden sich in Anhang A und sind Voraussetzung für die nachstehenden Ausführungen. Diese sind dem Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] und dem Buch *Interest Rate Models* von Andrew J.G. Cairns [6] entnommen.

2.1 Arbitragefreie Bewertung

2.1.1 Selbstfinanzierende Portfolios

Man betrachtet einen Finanzmarkt, der aus diversen Kapitalanlagen besteht. Im gesamten Kapitel 2.1.1 arbeitet man auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$ und man nimmt die Preisdynamik der Kapitalanlagen als gegeben an. Ferner bezeichnet man im Folgenden alle risikobehafteten Kapitalanlagen als Aktien[1], da dies sprachlich einfacher zu handhaben ist. Dies soll jedoch nicht implizit bedeuten, dass die Kapitalanlagen nicht-negativ sind. Das Hauptziel von diesem Kapitel 2.1.1 ist, die Dynamik des Wertes eines selbstfinanzierenden Portfolios herzuleiten.

Definition 2.1 *Sei $N \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \ldots, N$ und $t \in [0, T^*]$. Bezeichne*

N	*die Anzahl der unterschiedlichen Aktienarten,*
$h_i(t)$	*die $\mathbb{R}$-wertige, stochastische Anzahl der Anteile der Aktienart i, die zum Zeitpunkt t gehalten werden,*
$c(t)$	*den $\mathbb{R}$-wertigen, stochastischen Geldbetrag, der zum Zeitpunkt t für Konsum ausgegeben wird und*
$S_i(t)$	*den $\mathbb{R}$-wertigen, stochastischen Preis eines Anteils der Aktienart i zum Zeitpunkt t.*

Sei nun ein N-dimensionaler Preisprozess $S = \{S(t) = (S_1(t), \ldots, S_N(t));\ t \in [0, T^*]\}$ gegeben, wobei $S_1, \ldots, S_N$ Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen der Gestalt (A.13) sind. Bezeichne $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ die jeweiligen Diffusionen.

[1] engl. *stocks*

1. *Ein N-dimensionaler, $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess $h = \{h(t) = (h_1(t), \ldots, h_N(t)); t \in [0, T^*]\}$ mit $h_i\sigma_i \in \mathcal{L}^2$ für alle $i = 1, \ldots, N$ heißt* ***Portfoliostrategie*** *oder oft einfach nur* ***Portfolio****.*

2. *Das Portfolio h heißt* ***Markow-Portfolio****, wenn es die Form*
$$h(t) = h(t, S(t))$$
für eine Funktion $h : [0, T^*] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ hat.

3. *Der eindimensionale Wertprozess $V^h = (V^h(t))_{t=0}^{T^*}$ des Portfolios h ist durch*
$$V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) S_i(t), \quad t \in [0, T^*],$$
gegeben, wobei $V^h(t)$ der Wert des Portfolios h zum Zeitpunkt t ist.

4. *Ein eindimensionaler, $\mathbb{F}$-adaptierter, pfadweise integrierbarer Prozess $c = \{c(t); t \in [0, T^*]\}$ heißt* ***Konsumprozess****.*

5. *Das Portfolio-Konsum Paar (h, c) ist* ***selbstfinanzierend****, wenn*
$$dV^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t)\, dS_i(t) - c(t)\, dt, \quad t \in [0, T^*],$$
das heißt
$$dV^h(t) = h(t)\, dS(t) - c(t)\, dt, \quad t \in [0, T^*],$$
gilt.

Bemerkung 2.2 Gewöhnlich hängt das Portfolio zum Zeitpunkt $t \in [0, T^*]$, $h(t)$, von der gesamten vergangenen Preistrajektorie $\{S(u); 0 \leq u \leq t\}$ ab. Künftig werden jedoch ausschließlich Markow-Portfolios behandelt, das heißt Portfolios, deren Wert zum Zeitpunkt $t \in [0, T^*]$ nur von diesem Zeitpunkt und den Wert $S(t)$ des Preisvektors zu diesem Zeitpunkt abhängt.

Für rechnerische Zwecke ist es oft günstiger, ein Portfolio mit relativen als mit absoluten Begriffen zu beschreiben. Das heißt, anstatt die absolute Anzahl der Anteile einer bestimmten Aktie anzugeben, spezifiziert man den relativen Teil des gesamten Portfoliowertes, der in die Aktie investiert wird. Formal definiert man ein relatives Portfolio folgendermaßen:

Definition 2.3 *Sei $S = \{S(t) = (S_1(t), \ldots, S_N(t)); t \in [0, T^*]\}$ der Preisprozess aus Definition 2.1. Für ein gegebenes Portfolio $h = \{h(t) = (h_1(t), \ldots, h_N(t)); t \in [0, T^*]\}$ ist das entsprechende* ***relative Portfolio*** *$u = \{u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t)); t \in [0, T^*]\}$ durch*
$$u_i(t) = \frac{h_i(t) S_i(t)}{V^h(t)}, \quad i = 1, \ldots, N, \ t \in [0, T^*],$$

gegeben, wobei $V^h(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T^*]$ sein muss. Für das relative Portfolio gilt stets

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1, \quad t \in [0, T^*].$$

Somit gilt folgendes Lemma:

Lemma 2.4 *Sei $S = \{S(t) = (S_1(t), \ldots, S_N(t));\ t \in [0, T^*]\}$ der Preisprozess aus Definition 2.1 und sei ein Portfolio-Konsum Paar (h, c) mit $h = \{h(t) = (h_1(t), \ldots, h_N(t));\ t \in [0, T^*]\}$ und $c = \{c(t);\ t \in [0, T^*]\}$ gegeben. Ferner sei $V^h(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T^*]$, $S_i(t) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, N$ und alle $t \in [0, T^*]$ und $u = \{u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t));\ t \in [0, T^*]\}$ das entsprechende relative Portfolio. Es folgt, dass das Portfolio-Konsum Paar (h, c) dann und nur dann selbstfinanzierend ist, wenn der Wertprozess V^h die Bedingung*

$$dV^h(t) = V^h(t) \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} - c(t)\, dt, \quad t \in [0, T^*], \tag{2.1}$$

erfüllt.

Beweis Das Lemma 2.4 folgt aus den Definitionen 2.1 und 2.3. □

Zukünftig wird man das nachstehende Lemma benötigen, welches annähernd Folgendes besagt: Wenn ein Prozess aussieht, als wäre er der Wertprozess eines selbstfinanzierenden Portfolios, dann ist er auch einer.

Lemma 2.5 *Sei $S = \{S(t) = (S_1(t), \ldots, S_N(t));\ t \in [0, T^*]\}$ der Preisprozess aus Definition 2.1, wobei $S_i(t) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, N$ und alle $t \in [0, T^*]$ ist und $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ wieder die jeweiligen Diffusionen bezeichnen. Ferner seien ein Konsumprozess $c = \{c(t);\ t \in [0, T^*]\}$, ein $\mathbb{R} \backslash \{0\}$-wertiger Prozess $Z = \{Z(t);\ t \in [0, T^*]\}$ und ein $\mathbb{R}^N$-wertiger, $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess $q = \{q(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t));\ t \in [0, T^*]\}$ mit $\frac{Z q_i \sigma_i}{S_i} \in \mathcal{L}^2$ für alle $i = 1, \ldots, N$ gegeben, sodass*

$$dZ(t) = Z(t) \sum_{i=1}^{N} q_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} - c(t)\, dt, \quad t \in [0, T^*], \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} q_i(t) = 1, \quad t \in [0, T^*], \tag{2.3}$$

ist. Nun definiert man ein Portfolio $h = \{h(t) = (h_1(t), \ldots, h_N(t));\ t \in [0, T^*]\}$ durch

$$h_i(t) = \frac{q_i(t) Z(t)}{S_i(t)}, \quad i = 1, \ldots, N,\ t \in [0, T^*]. \tag{2.4}$$

Dann ist der Wertprozess V^h des Portfolios h durch $V^h = Z$ gegeben, das Portfolio-Konsum Paar (h, c) ist selbstfinanzierend und das entsprechende relative Portfolio $u = \{u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t));\ t \in [0, T^*]\}$ ist durch $u = q$ gegeben.

Beweis Laut Definition 2.1 ist der Wertprozess V^h durch

$$V^h(t) = h(t)S(t), \quad t \in [0, T^*],$$

gegeben. Aus (2.3) und (2.4) folgt

$$V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t)S_i(t) = \sum_{i=1}^{N} q_i(t)Z(t) = Z(t)\sum_{i=1}^{N} q_i(t) = Z(t), \quad t \in [0, T^*]. \tag{2.5}$$

Wenn man nun (2.5) in (2.4) einsetzt, sieht man, dass für das Portfolio h das entsprechende relative Portfolio $u = \{u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t)); t \in [0, T^*]\}$ durch $u = q$ gegeben ist. Benützt man diese Tatsache und setzt (2.5) in (2.2) ein, folgt

$$dV^h(t) = V^h(t)\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} - c(t)\,dt, \quad t \in [0, T^*]. \tag{2.6}$$

(2.6) zeigt nun, dass das Portfolio-Konsum Paar (h, c) laut Lemma 2.4 selbstfinanzierend ist. □

2.1.2 Derivate und Arbitragefreiheit

In diesem Kapitel 2.1.2 wird ein spezieller Fall des allgemeinen Modells untersucht, welches in Kapitel 2.1.1 beschrieben wird. Im gesamten Kapitel 2.1.2 arbeitet man auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$. Nun betrachtet man einen Finanzmarkt, der nur aus zwei Kapitalanlagen besteht: einer risikofreien Kapitalanlage mit eindimensionalem Preisprozess $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ und einer Aktie mit eindimensionalem Preisprozess $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$. Eine risikofreie Kapitalanlage wird folgendermaßen definiert:

Definition 2.6 *Der $\mathbb{R}_+^*$-wertige Prozess $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ ist der Preis einer **risikofreien Kapitalanlage**, wenn er die Dynamik*

$$\begin{aligned} dB(t) &= r(t)B(t)\,dt, \quad t \in [0, T^*], \\ B(0) &= b_0, \quad b_0 \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned} \tag{2.7}$$

hat, wobei $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ ein stetiger, $\mathbb{R}$-wertiger, $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess ist.

Eine risikofreie Kapitalanlage wird also dadurch definiert, dass seine Preisdynamik keinen Wiener Prozess enthält. (2.7) kann man auch als

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)B(t), \quad t \in [0, T^*],$$

darstellen. Der Prozess B ist somit durch

$$B(t) = B(0) \cdot \exp\left\{\int_0^t r(s)\,ds\right\}, \quad t \in [0, T^*],$$

gegeben. Eine risikofreie Kapitalanlage kann man daher als ein Bankkonto mit Momentanzinssatz r interpretieren.

Man nimmt nun an, dass die Dynamik des eindimensionalen Preisprozesses $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$ der Aktie unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P durch

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha(t, S(t))S(t)\,dt + \sigma(t, S(t))S(t)\,d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T^*], \\ S(0) &= s_0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

gegeben ist, wobei $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene deterministische Funktionen sind und $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ ein eindimensionaler Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass S die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.8) ist. α heißt **lokale Durchschnittsrendite** von S, σ heißt **Volatilität** von S.

Bemerkung 2.7 Die Rendite der risikofreien Kapitalanlage ist formal durch

$$\frac{dB(t)}{B(t)\,dt} = r(t), \quad t \in [0, T^*], \tag{2.9}$$

gegeben. (2.9) ist lokal deterministisch in dem Sinne, dass zum Zeitpunkt t der Ertrag durch die Beobachtung des Momentanzinssatzes $r(t)$ bekannt ist. Im Vergleich dazu ist die Rendite der Aktie formal durch

$$\frac{dS(t)}{S(t)\,dt} = \alpha(t, S(t)) + \sigma(t, S(t))\frac{d\bar{W}(t)}{dt}, \quad t \in [0, T^*], \tag{2.10}$$

gegeben, wobei $S(t)$ für alle $t \in [0, T^*]$ ungleich 0 sein muss. Diese Rendite ist zum Zeitpunkt t nicht beobachtbar: (2.10) besteht aus $\alpha(t, S(t))$ und $\sigma(t, S(t))$, die beide zum Zeitpunkt t beobachtbar sind, und einem „weißen Rauschen“ $\frac{d\bar{W}(t)}{dt}$, welches zufällig ist. Im Gegensatz zu der risikofreien Kapitalanlage hat die Aktie daher eine stochastische Rendite.

Der wichtigste Spezialfall des oben definierten Modells ist das Black-Scholes-Modell. Dieses ist von Fischer Black und Myron Scholes im Jahr 1973 erstmals nach zweimaliger Ablehnung durch renommierte Zeitschriften veröffentlicht worden. Robert C. Merton war auch an der Ausarbeitung des Berechnungsmodells beteiligt, publizierte aber einen separaten Artikel. Daher müsste das Preisberechnungsmodell für die Finanzwirtschaft eigentlich auch seinen Namen tragen, was sich aber nie durchsetzte. Jedoch wurde im Jahr 1997 Herr Merton gemeinsam mit Herrn Scholes für die Entwicklung dieses Modells mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften geehrt, da Herr Black im Jahr 1995 verstarb. Die Einmaligkeit und Originalität des Black-Scholes-Modells von den Herren Black, Scholes und Merton ist heute umstritten. Denn bereits 1908 hatte der Mathematiker Vinzenz Bronzin ein weitgehend identisches Modell entwickelt. Obwohl die Urheberschaft inzwischen umstritten ist, heißt es weiterhin Black-Scholes-Modell, da der Begriff sich eingebürgert hat.[2]

[2] aus Black-Scholes-Modell [5]

Definition 2.8 *Das **Black-Scholes-Modell** besteht aus einer risikofreien Kapitalanlage mit Preisprozess $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ und einer Aktie mit Preisprozess $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$. In diesem Modell ist die Dynamik von B durch*

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)\,dt, \quad t \in [0, T^*], \\ B(0) &= b_0, \quad b_0 \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

und die Dynamik von S unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P durch

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha S(t)\,dt + \sigma S(t)\,d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T^*], \\ S(0) &= s_0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

gegeben, wobei der Momentanzinssatz $r \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}$ deterministische Konstanten sind und $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ ein eindimensionaler Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass S die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.11) ist.

Sei nun das Modell eines Finanzmarkts gegeben, welches aus einer risikofreien Kapitalanlage mit Preisdynamik (2.7) und einer Aktie mit Preisdynamik (2.8) besteht. Eine europäische Kaufsoption[3] wird folgendermaßen definiert:

Definition 2.9 *Eine **europäische Kaufsoption** mit **Ausübungspreis** $K \in \mathbb{R}$ und **Ausübungszeitpunkt** $T \in [0, T^*]$ der **zugrunde liegenden Aktie** mit Preisprozess $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein Vertrag, der folgendermaßen definiert wird:*

1. *Der Besitzer der Option hat zum Zeitpunkt T das Recht, einen Anteil der zugrunde liegenden Aktie zum Preis K vom Verkäufer der Option zu kaufen.*

2. *Der Besitzer der Option ist keineswegs verpflichtet den Anteil der zugrunde liegenden Aktie zu kaufen.*

3. *Das Recht, den Anteil der zugrunde liegenden Aktie zum Preis K zu kaufen, kann nur zum Zeitpunkt T ausgeübt werden.*

*Eine **europäische Verkaufsoption**[4] ist ein Vertrag, der dem Besitzer auf dieselbe Weise das Recht gibt, einen Anteil der zugrunde liegenden Kapitalanlage zu einem vorbestimmten Ausübungspreis zu verkaufen. Bei einer **amerikanischen Kaufsoption** kann das Recht, einen Anteil der zugrunde liegenden Kapitalanlage zu kaufen, zu jedem Zeitpunkt bis zum Ausübungszeitpunkt ausgeübt werden.*
Es sei erwähnt, dass der Ausübungspreis K und der Ausübungszeitpunkt T zu dem Zeitpunkt bestimmt werden, an dem man die Option erwirbt. Dieser Zeitpunkt wird künftig $t = 0$ sein.

Die Gemeinsamkeit dieser Verträge besteht darin, dass sie alle bezüglich der zugrunde liegenden Kapitalanlage definiert werden. Deshalb nennt man sie **Derivate**[5].

[3] engl. *call option*
[4] engl. *put option*
[5] engl. *contingent claims*

Definition 2.10 *Man betrachtet einen Finanzmarkt mit einer Aktie, deren eindimensionaler Preisprozess gleich* $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$ *ist. Ein* ***Derivat*** *mit Ausübungszeitpunkt* $T \in [0, T^*]$ *ist eine* $\mathbb{R}$*-wertige,* $\mathcal{F}_T$*-messbare Zufallsgröße* $\mathcal{X}$*. Ein Derivat der Form* $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ *heißt* ***einfaches Derivat****, wobei man die Funktion* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***Vertragsfunktion***[6] *nennt.*

Ein Derivat kann man als einen Vertrag interpretieren, der festlegt, dass sein Besitzer zum Ausübungszeitpunkt T den Betrag $\mathcal{X}$ erhält, der positiv, negativ oder null sein kann. Die Forderung, dass $\mathcal{X}$ eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsgröße ist, bedeutet, dass es zum Zeitpunkt T möglich ist den Geldbetrag, der ausbezahlt wird, zu bestimmen. Die europäische Kaufsoption ist also ein einfaches Derivat mit einer Vertragsfunktion, die durch

$$\Phi(x) = \max\{x - K, 0\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gegeben ist. Es ist offensichtlich, dass ein Derivat eine finanzielle Kapitalanlage ist, die auf dem Finanzmarkt einen Preis erzielt. Wie viel sie auf dem Markt wert ist, hängt natürlich unter anderem von der Zeit $t \in [0, T]$ und dem Preis $S(t)$ der zugrunde liegenden Aktie ab. Das Hauptproblem ist nun, für das Derivat einen „fairen“ Preis zu ermitteln. Man verwendet die Bezeichnung $(\Pi(t; \mathcal{X}))_{t=0}^{T}$ für den $\mathbb{R}$-wertigen Preisprozess des Derivats $\mathcal{X}$. Im Fall eines einfachen Derivats bezeichnet man den Preisprozess meistens mit $(\Pi(t; \Phi))_{t=0}^{T}$. $\mathcal{X}$ beziehungsweise Φ lässt man in der Bezeichnung öfters weg. Die Bestimmung des Preises zum Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ ist einfach. Im Falle einer europäischen Kaufsoption gilt Folgendes:

1. Wenn $S(T) \geq K$ ist, wird die Option ausgeübt, um Anteile der zugrunde liegenden Aktie zum Betrag K zu kaufen. Dann werden die Anteile sofort zum Preis $S(T)$ verkauft, was einen Nettogewinn von $S(T) - K$ ergibt.

2. Wenn $S(T) \leq K$ ist, hat die Option Wert 0.

Der einzige vernünftige Preis $\Pi(T)$ der Option zum Ausübungszeitpunkt T ist daher

$$\Pi(T) = \max\{S(T) - K, 0\}.$$

Für ein allgemeines Derivat $\mathcal{X}$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ gilt also

$$\Pi(T; \mathcal{X}) = \mathcal{X}$$

und für ein einfaches Derivat mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ gilt

$$\Pi(T; \Phi) = \Phi(S(T)).$$

Für die Ermittlung des Preises zu einem Zeitpunkt $t \in [0, T)$ trifft man die Annahme, dass der Finanzmarkt arbitragefrei ist. Dieser Begriff wird folgendermaßen definiert:

Definition 2.11 *Eine* ***Arbitragemöglichkeit*** *auf einem Finanzmarkt ist ein selbstfinanzierendes Portfolio* h*, sodass für seinen Wertprozess* V^h

$$V^h(0) = 0,$$

[6]engl. *contract function*

$$P\left(V^h(T) \geq 0\right) = 1,$$
$$P\left(V^h(T) > 0\right) > 0$$

für einen fixen Zeitpunkt $T \in (0, T^*]$ gilt. Der Finanzmarkt ist ***arbitragefrei****, wenn es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.*

Eine Arbitragemöglichkeit ist somit äquivalent zu der Möglichkeit, dass risikolos mit positiver Wahrscheinlichkeit aus Nichts ein positiver Geldbetrag gemacht werden kann.

Nun macht man folgende Annahme:

Annahme 2.12 *Der Preisprozess $(\Pi(t;\mathcal{X}))_{t=0}^T$ eines Derivats $\mathcal{X}$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ ist derartig gestaltet, dass es auf dem Finanzmarkt, der aus $(B, S, (\Pi(t;\mathcal{X}))_{t=0}^T)$ besteht, keine Arbitragemöglichkeiten gibt.*

Die folgende Proposition zeigt, wie man eine Arbitragemöglichkeit erkennen kann.

Proposition 2.13 *Sei ein selbstfinanzierendes Portfolio h gegeben, sodass für seinen Wertprozess V^h*

$$dV^h(t) = V^h(t)k(t)\,dt, \quad t \in [0, T^*],$$

gilt, wobei $k = (k(t))_{t=0}^{T^*}$ ein stetiger, $\mathbb{R}$-wertiger, $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess ist. Bezeichne $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ den Momentanzinssatz. Dann muss f.s. für alle $t \in [0, T^*]$ $V^h(t)k(t) = V^h(t)r(t)$ gelten, sonst ist h eine Arbitragemöglichkeit.

Beweisskizze Der Beweis erfolgt für konstante k und r.
Sei $k > r$. Dann wird zum Zinssatz r von der Bank Geld geliehen. Dieses Geld wird sofort in die Portfoliostrategie h investiert, wo es zum Zinssatz k mit $k > r$ wächst. Der Nettoaufwand zum Zeitpunkt $t = 0$ ist somit null, wohingegen das Vermögen zu jedem Zeitpunkt $t \in (0, T^*]$ positiv ist. Das heißt es gibt eine Arbitragemöglichkeit.
Wenn $k < r$ ist, wird das Portfolio h leer verkauft, das Geld auf die Bank gegeben und wieder gibt es eine Arbitragemöglichkeit.
Den Beweis für nichtkonstante r und k führt man auf die gleiche Weise. □

Wenn ein Portfolio also einen Wertprozess besitzt, dessen Dynamik keinen Wiener Prozess enthält, das heißt ein lokal risikofreies Portfolio ist, muss die Rendite des Portfolios mit dem Momentanzinssatz übereinstimmen, damit es keine Arbitragemöglichkeiten gibt. Anders formuliert ist die Existenz eines Portfolios h äquivalent zu der Existenz eines Bankkontos mit k als Momentanzinssatz. Man kann dann die Proposition 2.13 umformulieren, indem man sagt, dass es auf einem arbitragefreien Finanzmarkt nur einen Momentanzinssatz geben kann.

Um wieder zu der Ermittlung des Preises $\Pi(t;\mathcal{X})$ eines Derivats $\mathcal{X}$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ zu einem Zeitpunkt $t \in [0, T)$ zurückzukommen, sollte erwähnt werden, dass $\mathcal{X}$ gänzlich bezüglich der zugrunde liegenden Aktie definiert ist. Man legt den Preis des Derivats $\mathcal{X}$ daher bezüglich des Preises der zugrunde liegenden Aktie fest.

Nun macht man folgende Zusatzannahme an den Finanzmarkt:

Annahme 2.14

1. *Das fragliche Derivat* $\mathcal{X}$ *mit Ausübungszeitpunkt* $T \in [0, T^*]$ *kann auf einem Finanzmarkt ge- und verkauft werden.*

2. *Der Finanzmarkt ist arbitragefrei.*

3. *Der Preisprozess* $(\Pi(t; \mathcal{X}))_{t=0}^{T}$ *des Derivats* $\mathcal{X}$ *hat die Form*

$$\Pi(t; \mathcal{X}) = F(t, S(t)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

wobei $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+^*)$ *eine* $\mathbb{R}$*-wertige Funktion und* $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$ *der eindimensionale Preisprozess der zugrunde liegenden Aktie ist.*

2.1.3 Die Black-Scholes-Gleichung

In diesem Kapitel 2.1.3 wird nun in einem konkreten Modell bestimmt, welche Form die Funktion F aus der Annahme 2.14 hat, wenn der Finanzmarkt arbitragefrei ist. Im gesamten Kapitel 2.1.3 arbeitet man auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$.

Satz 2.15 (Black-Scholes-Gleichung) *Man betrachtet ein verallgemeinertes Black-Scholes-Modell, welches aus einer risikofreien Kapitalanlage mit Preisprozess* $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ *und einer Aktie mit Preisprozess* $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$ *besteht. In diesem Modell ist die Dynamik von* B *durch*

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)\, dt, \quad t \in [0, T^*], \\ B(0) &= b_0, \quad b_0 \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

und die Dynamik von S *unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß* P *durch*

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha(t, S(t))S(t)\, dt + \sigma(t, S(t))S(t)\, d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T^*], \\ S(0) &= s_0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

gegeben, wobei der Momentanzinssatz $r \in \mathbb{R}$ *eine deterministische Konstante ist,* $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegebene deterministische Funktionen sind und* $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ *ein eindimensionaler Wiener Prozess bezüglich* $\mathbb{F}$ *ist. Die Bedingungen der Proposition A.35 seien erfüllt, sodass* S *die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung* (2.12) *ist. Ferner sei* S *positiv und reellwertig und* $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ *ein einfaches Derivat mit Ausübungszeitpunkt* $T \in [0, T^*]$*, welches auf dem Finanzmarkt gehandelt wird. Der Preisprozess* $(\Pi(t))_{t=0}^{T} = (\Pi(t; \Phi))_{t=0}^{T}$ *von* $\mathcal{X}$ *sei durch*

$$\Pi(t) = F(t, S(t)), \quad t \in [0, T], \tag{2.13}$$

gegeben, wobei $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+^*)$ *eine* $\mathbb{R}$*-wertige Funktion ist. Ferner sei* $S(t) \frac{\partial F(t, S(t))}{\partial s} \neq F(t, S(t))$ *für alle* $t \in [0, T]$*. Dann ist die einzige Preisfunktion* F *der Form* (2.13)*, die keine Arbitragemöglichkeiten zulässt, die Lösung des folgenden Grenzwertproblems im Bereich* $[0, T] \times \mathbb{R}_+^*$*, wobei die Indizes der Funktion* F *die entsprechenden partiellen Ableitungen kennzeichnen:*

$$\begin{aligned} F_t(t, s) + rsF_s(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, s)s^2 F_{ss}(t, s) - rF(t, s) &= 0, \\ F(T, s) &= \Phi(s). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Beweis Zunächst wird die Preisdynamik des einfachen Derivats $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ berechnet: Die Anwendung der Itô-Formel (A.10) auf (2.13) beziehungsweise (2.12) ergibt

$$d\Pi(t) = \alpha_\pi(t)\Pi(t)\,dt + \sigma_\pi(t)\Pi(t)\,d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T],$$

wobei die Prozesse α_π und σ_π durch

$$\begin{aligned} \alpha_\pi(t) = & \frac{F_t(t, S(t)) + \alpha(t, S(t))S(t)F_s(t, S(t))}{F(t, S(t))} \\ & + \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(t, S(t))S^2(t)F_{ss}(t, S(t))}{F(t, S(t))}, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\sigma_\pi(t) = \frac{\sigma(t, S(t))S(t)F_s(t, S(t))}{F(t, S(t))}, \quad t \in [0, T], \tag{2.16}$$

gegeben sind. Die Indizes der Funktion F in den Gleichungen (2.15) und (2.16) kennzeichnen die entsprechenden partiellen Ableitungen. Nun gestaltet man ein selbstfinanzierendes Portfolio, welches aus der zugrunde liegenden Aktie und dem einfachen Derivat besteht. Sei $(u_s = (u_s(t))_{t=0}^T, u_\pi = (u_\pi(t))_{t=0}^T)$ das entsprechende relative Portfolio. Die Anwendung der Gleichung (2.1) auf dieses Portfolio ergibt die Dynamik seines Wertes V,

$$\begin{aligned} dV(t) = & V(t)\left\{u_s(t)\left(\alpha(t, S(t))\,dt + \sigma(t, S(t))\,d\bar{W}(t)\right) + u_\pi(t)\left(\alpha_\pi(t)\,dt + \sigma_\pi(t)\,d\bar{W}(t)\right)\right\} \\ = & V(t)(u_s(t)\alpha(t, S(t)) + u_\pi(t)\alpha_\pi(t))\,dt \\ & + V(t)(u_s(t)\sigma(t, S(t)) + u_\pi(t)\sigma_\pi(t))\,d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2.17}$$

wobei man annimmt, dass $V(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$ ist. Es sei erwähnt, dass beide Ausdrücke in den Klammern der Gleichung (2.17) linear sind. Ferner muss das relative Portfolio die Bedingung

$$u_s(t) + u_\pi(t) = 1$$

für alle $t \in [0, T]$ erfüllen. Daher definiert man dieses durch das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u_s(t) + u_\pi(t) &= 1, \\ u_s(t)\sigma(t, S(t)) + u_\pi(t)\sigma_\pi(t) &= 0, \end{aligned}\right. \quad t \in [0, T]. \tag{2.18}$$

Aufgrund dieser Definition verschwindet der $d\bar{W}$-Term in (2.17) und es folgt

$$dV(t) = V(t)(u_s(t)\alpha(t, S(t)) + u_\pi(t)\alpha_\pi(t))\,dt, \quad t \in [0, T].$$

Also hat man ein lokal risikofreies Portfolio erhalten. Wegen der Bedingung, dass der Finanzmarkt arbitragefrei sein muss, gilt (Proposition 2.13)

$$u_s(t)\alpha(t, S(t)) + u_\pi(t)\alpha_\pi(t) = r, \quad t \in [0, T]. \tag{2.19}$$

Das Gleichungssystem (2.18) hat die Lösungen

$$u_s(t) = \frac{\sigma_\pi(t)}{\sigma_\pi(t) - \sigma(t, S(t))}, \quad t \in [0, T], \tag{2.20}$$

$$u_\pi(t) = -\frac{\sigma(t,S(t))}{\sigma_\pi(t)-\sigma(t,S(t))}, \quad t \in [0,T]. \tag{2.21}$$

(2.16) setzt man nun in (2.20) und (2.21) ein und es folgt

$$u_s(t) = \frac{S(t)F_s(t,S(t))}{S(t)F_s(t,S(t))-F(t,S(t))}, \quad t \in [0,T], \tag{2.22}$$

$$u_\pi(t) = \frac{F(t,S(t))}{S(t)F_s(t,S(t))-F(t,S(t))}, \quad t \in [0,T]. \tag{2.23}$$

Wenn man (2.15), (2.22) und (2.23) in die Bedingung (2.19) einsetzt, ergibt sich nach einigen Rechnungen die Relation

$$F_t(t,S(t))+rS(t)F_s(t,S(t))+\frac{1}{2}\sigma^2(t,S(t))S^2(t)F_{ss}(t,S(t))-rF(t,S(t))=0, \quad t \in [0,T].$$

Diese und die Bedingung

$$\Pi(T) = \Phi(S(T))$$

aus Kapitel 2.1.2 müssen mit Wahrscheinlichkeit 1 für jedes fixe $t \in [0,T]$ gelten. Ferner kann man zeigen, dass unter Vorraussetzung einiger schwacher Annahmen, die in diesem Modell erfüllt sind, die Verteilung von $S(t)$ für jedes fixe $t \in (0,T]$ Träger auf der ganzen positiven, reellen Linie besitzt. Daher muss F folgende partielle Differentialgleichung im Bereich $[0,T] \times \mathbb{R}_+^*$ erfüllen:

$$\begin{aligned} F_t(t,s)+rsF_s(t,s)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,s)s^2F_{ss}(t,s)-rF(t,s)&=0,\\ F(T,s)&=\Phi(s). \end{aligned}$$

□

Es sei erwähnt, dass die Gleichung (2.14) nicht die lokale Durchschnittsrendite α der zugrunde liegenden Aktie enthält. Insbesondere bedeutet dies, dass die lokale Rendite keine Rolle spielt, wenn der Preis eines Derivats ermittelt wird. Der einzige wichtige Parameter ist die Volatilität σ. Daher hat ein Derivat mit einer fixen Volatilität für jede Rendite denselben Preis. Dieses Phänomen ist eng verknüpft mit der Tatsache, dass der Preis eines Derivats bezüglich des Preises der zugrunde liegenden Aktie festgelegt wird.

2.1.4 Risikoneutrale Bewertung

In diesem Kapitel 2.1.4 wird eine explizite Formel für die Funktion F aus dem Satz 2.15 gegeben. Im gesamten Kapitel 2.1.4 arbeitet man auf einem messbaren Raum $(\Omega,\mathcal{F})$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$. Sei ferner P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf diesem Raum und der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ vollständig. Man betrachtet ein verallgemeinertes Black-Scholes-Modell, welches aus einer risikofreien Kapitalanlage mit Preisprozess $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ und einer Aktie mit Preisprozess $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$ besteht. In diesem Modell ist die Dynamik von B durch

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)\,dt, \quad t \in [0,T^*],\\ B(0) &= b_0, \quad b_0 \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned} \tag{2.24}$$

und die Dynamik von S unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P durch

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha(t, S(t))S(t)\,dt + \sigma(t, S(t))S(t)\,d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T^*], \\ S(0) &= s_0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

gegeben, wobei der Momentanzinssatz $r \in \mathbb{R}$ eine deterministische Konstante ist, $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene deterministische Funktionen sind und $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ ein eindimensionaler Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass S die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.25) ist.

Nun definiert man einen Prozess $a = (a(t))_{t=0}^{T^*}$ durch

$$a(t) = \frac{\alpha(t, S(t)) - r}{\sigma(t, S(t))}, \quad t \in [0, T^*],$$

und einen Prozess $Z = (Z(t))_{t=0}^{T^*}$ durch

$$Z(t) = \exp\left\{ -\int_0^t a(s)\,d\bar{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t a(s)^2\,ds \right\}, \quad t \in [0, T^*].$$

Man nimmt an, dass a die Novikov Bedingung (A.20) erfüllt. Ferner definiert man auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Maß Q durch

$$\frac{dQ}{dP} = Z(T^*).$$

Dann ist Q laut dem Satz von Girsanov A.42 ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß und der Prozess $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$, der durch

$$W(t) = \bar{W}(t) + \int_0^t a(s)\,ds, \quad t \in [0, T^*],$$

gegeben ist, ein Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ unter Q. Unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist die Dynamik des Preisprozesses S somit durch

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)\,dt + \sigma(t, S(t))S(t)\,dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ S(0) &= s_0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gegeben. Um die zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q zu unterscheiden, trifft man nun folgende Annahmen:

Annahme 2.16

1. E *bezeichnet den Erwartungswert, der unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß* P *genommen wird, und* E^Q *bezeichnet den Erwartungswert, der unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß* Q *genommen wird.*

2. $\bar{W}$ *bezeichnet einen* P*-Wiener Prozess (das heißt einen Wiener Prozess unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß* P*) und* W *bezeichnet einen* Q*-Wiener Prozess (das heißt einen Wiener Prozess unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß* Q*).*

Satz 2.17 (Risikoneutrale Bewertung) *Man betrachtet ein verallgemeinertes Black-Scholes-Modell mit der in* (2.24) *definierten Preisdynamik der risikofreien Kapitalanlage und der in* (2.25) *unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P definierten Preisdynamik der Aktie. Sei S positiv und reellwertig und $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ ein einfaches Derivat mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$, welches auf dem Finanzmarkt gehandelt wird. Ferner sei der Preisprozess $(\Pi(t;\Phi))_{t=0}^{T}$ von $\mathcal{X}$ durch*

$$\Pi(t;\Phi) = F(t, S(t)), \quad t \in [0,T], \tag{2.26}$$

gegeben, wobei $F \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}_+^*)$ eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion ist. Sei $S(t)\frac{\partial F(t,S(t))}{\partial s} \neq F(t, S(t))$ für alle $t \in [0,T]$ und sei der Prozess

$$\left(\sigma(u, S_{t,s}(u))S_{t,s}(u)\frac{\partial F(u, S_{t,s}(u))}{\partial s}\right)_{u=0}^{T}$$

in $\mathcal{L}^2$ (siehe Definition A.16), wobei der Prozess $S_{t,s} = (S_{t,s}(t))_{t=0}^{T}$ durch (2.27) *definiert wird. Dann ist die einzige Preisfunktion F der Form* (2.26)*, die keine Arbitragemöglichkeiten zulässt, durch*

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)}\,\mathrm{E}^Q[\Phi(S_{t,s}(T))], \quad (t,s) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*,$$

gegeben, wobei die Q-Dynamik von $S_{t,s}$ (die Dynamik von $S_{t,s}$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q) im Intervall $[t,T]$ durch

$$\begin{aligned} dS_{t,s}(u) &= rS_{t,s}(u)\,du + \sigma(u, S_{t,s}(u))S_{t,s}(u)\,dW(u), \\ S_{t,s}(t) &= s, \end{aligned} \qquad 0 \le t \le u \le T,\ s \in \mathbb{R}_+^*, \tag{2.27}$$

gegeben ist. $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ und die Indizes in $S_{t,s}$ heben hervor, dass der Anfangswert zum Zeitpunkt t gleich s ist.

Beweis Laut Satz 2.15 ist die Funktion F die Lösung der Preisgleichung (2.14). Diese wiederum ist äquivalent zum Grenzwertproblem der Feynman-Kač-Formel (siehe Proposition A.40). Laut Proposition A.40 folgt somit

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)}\,\mathrm{E}^Q[\Phi(S_{t,s}(T))], \quad (t,s) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*,$$

wobei die Q-Dynamik von $S_{t,s}$ im Intervall $[t,T]$ durch

$$\begin{aligned} dS_{t,s}(u) &= rS_{t,s}(u)\,du + \sigma(u, S_{t,s}(u))S_{t,s}(u)\,dW(u), \\ S_{t,s}(t) &= s, \end{aligned} \qquad 0 \le t \le u \le T,\ s \in \mathbb{R}_+^*,$$

gegeben ist. □

Für die Berechnung des Erwartungswertes wird nicht das Wahrscheinlichkeitsmaß P, sondern das Maß Q genommen. Dieses heißt **risikoabhängiges Maß** oder auch **Martingalmaß**. Der Grund für diesen Namen ist, dass der diskontierte Prozess $\frac{S(t)}{B(t)}$ für alle $t \in [0, T^*]$ ein Martingal unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist. Diese Eigenschaft wird in der folgenden Proposition behandelt.

Proposition 2.18 *Im Black-Scholes-Modell hat der Preisprozess* $(\Pi(t))_{t=0}^{T^*}$ *jeder gehandelten Kapitalanlage, sei es die zugrunde liegende Aktie oder das Derivat, die Eigenschaft, dass der diskontierte Preisprozess*

$$Z(t) = \frac{\Pi(t)}{B(t)}, \quad t \in [0, T^*],$$

ein Martingal unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q *ist.*

Beweis Erläuterungen zum Beweis der Proposition 2.18 finden sich im Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] im Kapitel 6.4 auf der Seite 87. □

2.1.5 Die Black-Scholes-Formel

In diesem Kapitel 2.1.5 wird der arbitragefreie Preis einer europäischen Kaufsoption im Black-Scholes-Modell ermittelt. Im gesamten Kapitel 2.1.5 arbeitet man auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$. Sei ferner P ein Wahrscheinlichkeitsmaß und Q ein Martingalmaß auf diesem Raum und seien die Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ vollständig.

Proposition 2.19 (Black-Scholes-Formel) *Man betrachtet das Black-Scholes-Modell, welches aus einer risikofreien Kapitalanlage mit Preisprozess* $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ *und einer Aktie mit Preisprozess* $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$ *besteht. In diesem Modell ist die Dynamik von* B *durch*

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)\,dt, \quad t \in [0, T^*], \\ B(0) &= b_0, \quad b_0 \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

und die Dynamik von S *unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß* P *durch*

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha S(t)\,dt + \sigma S(t)\,d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T^*], \\ S(0) &= s_0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

gegeben, wobei der Momentanzinssatz $r \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *und* $\sigma \in \mathbb{R}$ *deterministische Konstanten sind und* $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ *ein eindimensionaler* P*-Wiener Prozess bezüglich* $\mathbb{F}$ *ist. Die Bedingungen der Proposition A.35 seien erfüllt, sodass* S *die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.28) ist. Sei* S *positiv und reellwertig. Ferner betrachtet man eine europäische Kaufsoption mit Ausübungspreis* $K \in \mathbb{R}$ *und Ausübungszeitpunkt* $T \in [0, T^*]$*, die auf dem Finanzmarkt gehandelt wird und deren zugrunde liegende Kapitalanlage die oben definierte Aktie mit Preisprozess* S *ist. Der Preisprozess* $(\Pi(t))_{t=0}^{T}$ *dieser europäischen Kaufsoption sei durch*

$$\Pi(t) = F(t, S(t)), \quad t \in [0, T], \tag{2.29}$$

gegeben, wobei $F \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}_+^*)$ *eine* $\mathbb{R}$*-wertige Funktion ist. Ferner sei* $S(t)\frac{\partial F(t,S(t))}{\partial s} \neq F(t, S(t))$ *für alle* $t \in [0, T]$ *und sei der Prozess*

$$\left(\sigma S_{t,s}(u) \frac{\partial F(u, S_{t,s}(u))}{\partial s} \right)_{u=0}^{T}$$

in $\mathcal{L}^2$ *(siehe Definition A.16), wobei die Q-Dynamik des Prozesses* $S_{t,s} = (S_{t,s}(t))_{t=0}^{T}$ *im Intervall* $[t, T]$ *durch*

$$\begin{aligned} dS_{t,s}(u) &= rS_{t,s}(u)\,du + \sigma S_{t,s}(u)\,dW(u), \\ S_{t,s}(t) &= s, \end{aligned} \qquad 0 \le t \le u \le T,\ s \in \mathbb{R}_+^*,$$

gegeben ist und $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich* $\mathbb{F}$ *ist. Dann ist die einzige Preisfunktion* F *der Form (2.29), die keine Arbitragemöglichkeiten zulässt, durch*

$$\begin{aligned} F(t,s) &= s \cdot \mathcal{N}[d_1(t,s)] - e^{-r(T-t)} K \cdot \mathcal{N}[d_2(t,s)], \quad (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^*, \\ F(T,s) &= \max\{s-K, 0\}, \quad s \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

gegeben. $\mathcal{N}$ *ist die kumulative Verteilungsfunktion der* $\mathcal{N}[0,1]$*-Verteilung, das heißt*

$$\mathcal{N}[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.30}$$

und

$$\begin{aligned} d_1(t,s) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right), \\ d_2(t,s) &= d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned} \qquad (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^*.$$

Beweis Die europäische Kaufsoption ist ein einfaches Derivat $\Phi(S(T))$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ und die einzige Preisfunktion F der Form (2.29), die keine Arbitragemöglichkeiten zulässt, ist somit laut Satz 2.17 durch

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)}\, \mathrm{E}^Q[\Phi(S_{t,s}(T))], \quad (t,s) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*, \tag{2.31}$$

gegeben, wobei die Q-Dynamik von $S_{t,s}$ im Intervall $[t,T]$ durch

$$\begin{aligned} dS_{t,s}(u) &= rS_{t,s}(u)\,du + \sigma S_{t,s}(u)\,dW(u), \\ S_{t,s}(t) &= s, \end{aligned} \qquad 0 \le t \le u \le T,\ s \in \mathbb{R}_+^*, \tag{2.32}$$

gegeben ist. Die stochastische Differentialgleichung (2.32) ist eine geometrische Brown'sche Bewegung und laut Proposition A.38 kann man $S_{t,s}(T)$ daher als

$$S_{t,s}(T) = s \cdot \exp\left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t)) \right\}, \quad t \in [0,T],\ s \in \mathbb{R}_+^*,$$

darstellen. Somit ist $S_{t,s}(T) = se^Y$, wobei Y eine stochastische Variable mit Verteilung

$$\mathcal{N}\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t) \right], \quad t \in [0,T],$$

ist. Diese Ergebnisse setzt man in die Preisgleichung (2.31) ein und es folgt

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(se^y) f(y)\, dy, \quad (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^*, \tag{2.33}$$

$$F(T,s)=\Phi(s),\quad s\in\mathbb{R}_+^*,$$

wobei f die Dichtefunktion der stochastischen Variablen Y ist, das heißt

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right),\quad y\in\mathbb{R},\ t\in[0,T).$$

$S_{t,s}(T)$ kann man auch als

$$S_{t,s}(T)=s\cdot\exp\left\{\tilde{r}(T-t)+\sigma Z\sqrt{T-t}\right\}$$

darstellen, wobei $s\in\mathbb{R}_+^*$, $\tilde{r}=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)$, $t\in[0,T]$, und Z eine standardnormalverteilte Variable ist. Die Vertragsfunktion Φ einer europäischen Kaufsoption hat die Form $\Phi(x)=\max\{x-K,0\}$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Das Integral in (2.33) wird daher zu

$$\int_{-\infty}^{\infty}\max\left\{s\cdot\exp\left\{\tilde{r}(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}\right\}-K,0\right\}\varphi(z)\,dz,\quad (t,s)\in[0,T)\times\mathbb{R}_+^*,\quad (2.34)$$

wobei φ die Dichte der $\mathcal{N}[0,1]$-Verteilung ist, das heißt

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\},\quad z\in\mathbb{R}.$$

Der Integrand im Integral (2.34) verschwindet, wenn

$$s\cdot\exp\left\{\tilde{r}(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}\right\}\leq K$$

ist, das heißt, wenn $z\leq z_0$ ist, wobei z_0 durch

$$z_0=\frac{\ln\left(\frac{K}{s}\right)-\tilde{r}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad (t,s)\in[0,T)\times\mathbb{R}_+^*,$$

definiert wird. (2.34) kann man daher als

$$\int_{z_0}^{\infty}\left(s\cdot\exp\left\{\tilde{r}(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}\right\}-K\right)\varphi(z)\,dz=$$

$$\underbrace{\int_{z_0}^{\infty}\left(s\cdot\exp\left\{\tilde{r}(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}\right\}\right)\varphi(z)\,dz}_{A}-\underbrace{\int_{z_0}^{\infty}K\varphi(z)\,dz}_{B},\quad (t,s)\in[0,T)\times\mathbb{R}_+^*,$$

darstellen. Es gilt

$$B=K\cdot P(z\geq z_0),$$

und da die $\mathcal{N}[0,1]$-Verteilung symmetrisch ist, folgt

$$B=K\cdot P(z\leq -z_0).$$

Die Anwendung der kumulativen Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}[0,1]$-Verteilung (2.30) auf B ergibt

$$B = K \cdot \mathcal{N}[-z_0].$$

Das Integral A berechnet man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{se^{\tilde{r}(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} \exp\left\{\sigma z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}z^2\right\} dz \\ &= \frac{se^{\tilde{r}(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\} dz \\ &= \frac{se^{r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right\} dz, \quad (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

A beinhaltet die Dichte einer $\mathcal{N}\left[\sigma\sqrt{T-t}, 1\right]$-Verteilung. Somit gilt

$$A = se^{r(T-t)} \cdot P(Z' \geq z_0), \quad (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^*,$$

wobei Z' $\mathcal{N}\left[\sigma\sqrt{T-t}, 1\right]$-verteilt ist. Wenn Z' zu einer $\mathcal{N}[0,1]$-Variablen normalisiert und Symmetrie angewendet wird, folgt

$$A = se^{r(T-t)} \cdot \mathcal{N}\left[-z_0 + \sigma\sqrt{T-t}\right], \quad (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^*.$$

Zusammenfassend gilt also

$$\begin{aligned} F(t,s) &= s \cdot \mathcal{N}\left[-z_0 + \sigma\sqrt{T-t}\right] - e^{-r(T-t)}K \cdot \mathcal{N}[-z_0] \\ &= s \cdot \mathcal{N}[d_1(t,s)] - e^{-r(T-t)}K \cdot \mathcal{N}[d_2(t,s)], \quad (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} d_1(t,s) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right), \\ d_2(t,s) &= d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned}\right. \quad (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^*,$$

ist. □

2.2 Vollständigkeit und Hedging

In Kapitel 2.1 musste für die Ermittlung des arbitragefreien Preises eines einfachen Derivats angenommen werden, dass dieses tatsächlich auf dem Finanzmarkt gehandelt wird und a priori einen Preis besitzt. In diesem Kapitel 2.2 geht man jedoch für die Ermittlung eines arbitragefreien Preises von einem etwas anderen Standpunkt aus, der zwei Vorteile mit sich bringt: Man muss nicht mehr annehmen, dass das Derivat tatsächlich auf den Finanzmarkt gehandelt wird, und es wird ein eindeutiger Preis für dieses ermittelt.

Im gesamten Kapitel 2.2 arbeitet man auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$. Zunächst betrachtet man einen Finanzmarkt mit einem N-dimensionalen Preisprozess $S = \{S(t) = (S_1(t), \ldots, S_N(t)); t \in [0, T^*]\}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Dieser Prozess S ist wie üblich der Preisprozess der exogen gegebenen, zugrunde liegenden Kapitalanlagen und es soll der Preis eines Derivats $\mathcal{X}$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ ermittelt werden. Dafür nimmt man an, dass alle zugrunde liegenden Kapitalanlagen auf dem Finanzmarkt gehandelt werden. Es wird jedoch nicht angenommen, dass ein a priori Finanzmarkt oder Preisprozess für das Derivat existiert. Ferner sei der zugrunde liegende Finanzmarkt arbitragefrei.

Definition 2.20 *Ein Derivat $\mathcal{X}$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ kann* ***repliziert*** *oder* ***gehedgt*** *werden, wenn ein selbstfinanzierendes Portfolio h existiert, sodass*

$$V^h(T) = \mathcal{X} \quad P\text{-f.s.}$$

ist. In diesem Fall ist h ein ***Hedge*** *gegen $\mathcal{X}$. Alternativ nennt man h ein* ***replizierendes Portfolio*** *oder* ***Hedgeportfolio****. Der Finanzmarkt ist* ***vollständig****, wenn jedes Derivat repliziert werden kann.*

Man betrachtet nun ein fixes Derivat $\mathcal{X}$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ und nimmt an, dass dieses durch ein selbstfinanzierendes Portfolio h repliziert werden kann. Dann wird folgendes Gedankenexperiment durchgeführt:

1. Sei $t \in [0, T]$ ein fixer Zeitpunkt.
2. Man nimmt an, das man zum Zeitpunkt t den Geldbetrag $V^h(t)$ besitzt.
3. Dieses Geld verwendet man, um das Portfolio $h(t)$ zu kaufen. Wenn nun die Portfoliostrategie im Zeitintervall $[t, T]$ verfolgt wird, kostet das nichts, da h selbstfinanzierend ist. Zum Zeitpunkt T hat das Portfolio dann den Wert $V^h(T)$.
4. Laut Definition 2.20 ist der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt T P-f.s. gleich $\mathcal{X}$, ungeachtet der stochastischen Preisbewegungen im Intervall $[t, T]$.
5. Aus rein finanzieller Sicht ist das Halten eines Portfolios h also äquivalent zum Halten eines Derivats $\mathcal{X}$.
6. Der „korrekte" Preis $\Pi(t; \mathcal{X})$ von $\mathcal{X}$ zum Zeitpunkt t ist daher P-f.s. gleich $V^h(t)$.
7. Der eindimensionale Preisprozess $(\Pi(t, \mathcal{X}))_{t=0}^{T}$ des replizierbaren Derivats $\mathcal{X}$ ist somit P-f.s. durch
$$\Pi(t, \mathcal{X}) = V^h(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.35}$$
gegeben.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Form (2.35) des Preisprozesses $(\Pi(t, \mathcal{X}))_{t=0}^{T}$ etwas mit Arbitragefreiheit zu tun hat.

Proposition 2.21

1. *Angenommen ein Derivat $\mathcal{X}$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ kann durch ein selbstfinanzierendes Portfolio h repliziert werden. Dann ist der einzige Preisprozess $(\Pi(t, \mathcal{X}))_{t=0}^{T}$ von $\mathcal{X}$, der keine Arbitragemöglichkeiten zulässt, durch*
$$\Pi(t; \mathcal{X}) = V^h(t), \quad t \in [0, T],$$
gegeben.

2. *Wenn ein Derivat $\mathcal{X}$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ sowohl durch ein selbstfinanzierendes Portfolio g als auch durch ein selbstfinanzierendes Portfolio h repliziert werden kann, ist $V^g(t) = V^h(t)$ für alle $t \in [0, T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1.*

Beweis Der Beweis der Proposition 2.21 wird im Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] im Kapitel 7.1 auf der Seite 100 erläutert. □

Der folgende Satz behandelt die Vollständigkeit in einem verallgemeinerten Black-Scholes-Modell.

Satz 2.22 *Man betrachtet ein verallgemeinertes Black-Scholes-Modell, welches aus einer risikofreien Kapitalanlage mit Preisprozess $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ und einer Aktie mit Preisprozess $S = (S(t))_{t=0}^{T^*}$ besteht. In diesem Modell ist die Dynamik von B durch*

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)\,dt, \quad t \in [0, T^*], \\ B(0) &= b_0, \quad b_0 \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

und die Dynamik von S unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P durch

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha(t, S(t))S(t)\,dt + \sigma(t, S(t))S(t)\,d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T^*], \\ S(0) &= s_0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

gegeben, wobei der Momentanzinssatz $r \in \mathbb{R}$ eine deterministische Konstante ist, $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene deterministische Funktionen sind und $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ ein eindimensionaler P-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass S die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.36) ist. Wenn $\sigma(t, s) \in \mathbb{R}_+^*$ für alle $(t, s) \in [0, T^*] \times \mathbb{R}$ ist, kann jedes Derivat mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$, welches bezüglich der von $S(T)$ erzeugten σ-Algebra messbar ist, repliziert werden.

Beweis Erläuterungen zum Beweis der Proposition 2.22 finden sich im Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] im Kapitel 7.2 auf der Seite 100. □

In der folgenden Heuristik wird erläutert, unter welchen Voraussetzungen ein bestimmtes Modell vollständig und/oder arbitragefrei ist.

Heuristik 2.23 *Sei $M \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zugrunde liegenden Kapitalanlagen im betrachteten Modell, ohne die risikofreie Kapitalanlage, und sei $R \in \mathbb{N}$ die Anzahl der „zufälligen Quellen“. Hier wird keine genaue Definition einer „zufälligen Quelle“ gegeben, aber das typische Beispiel ist ein Wiener Prozess. Es gelten dann folgende Relationen:*

1. *Das Modell ist dann und nur dann arbitragefrei, wenn $M \leq R$ ist.*

2. *Das Modell ist dann und nur dann vollständig, wenn $M \geq R$ ist.*

3. *Das Modell ist dann und nur dann vollständig und arbitragefrei, wenn $M = R$ ist.*

Erläuterung: Vorweg sei erwähnt, dass Vollständigkeit und Arbitragefreiheit entgegengesetzt arbeiten. Man betrachtet ein Modell mit $M \in \mathbb{N}$ zugrunde liegenden Kapitalanlagen und einer risikofreien Kapitalanlage, das heißt das Modell besitzt $M + 1$ Kapitalanlagen. Man nimmt an, dass die Preisprozesse der zugrunde liegenden Kapitalanlagen $R \in \mathbb{N}$ „zufällige Quellen“ beinhalten. Sei diese Anzahl R fix. Dann ist jede zugrunde liegende Kapitalanlage, die dem Modell hinzugefügt wird, ohne dass R erhöht wird, eine potentielle Arbitragemöglichkeit. Damit ein Modell also arbitragefrei ist, muss die Anzahl M der zugrunde liegenden Kapitalanlagen im Vergleich zu der Anzahl R der „zufälligen Quellen“ klein sein. Andererseits liefert jede zugrunde liegende Kapitalanlage, die dem Modell hinzugefügt wird, ohne dass R erhöht wird, eine neue Möglichkeit, ein gegebenes Derivat zu replizieren. Das heißt, ein vollständiges Modell verlangt, dass die Anzahl M der zugrunde liegenden Kapitalanlagen im Vergleich zu der Anzahl R der „zufälligen Quellen“ groß ist.

2.3 Anleihen und Zinssätze

In diesem Kapitel 2.3 werden Nullkuponanleihen[7], diverse Zinssätze, Kuponanleihen[8], Zinsswaps[9] und Renditen[10] vorgestellt. Im gesamten Kapitel 2.3 arbeitet man auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$.

2.3.1 Nullkuponanleihen

Definition 2.24 *Eine* ***Nullkuponanleihe*** *mit* ***Fälligkeitszeitpunkt*** $T \in [0, T^*]$ *ist ein Vertrag, der seinem Besitzer zum Zeitpunkt T eine einmalige Zahlung von 1 garantiert. Diese Zahlung heißt* ***Nennwert*** *oder* ***Nominalwert****. Den Preis so einer Anleihe zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ bezeichnet man mit $p(t, T)$.*

Die Definition, dass der Nennwert gleich 1 ist, trifft man, da dies rechnerisch einfacher zu handhaben ist.

Annahme 2.25 *Man nimmt Folgendes an, um einen hinreichend geregelten Anleihenmarkt zu garantieren:*

1. *Es existiert ein Finanzmarkt für Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkt T für jedes $T \in [0, T^*]$.*

2. *Die Abbildung $[t, T^*] \ni T \mapsto p(t, T)$ ist für jedes fixe $t \in [0, T^*]$ differenzierbar.*

[7]engl. *zero coupon bonds*
[8]engl. *coupon bonds*
[9]engl. *interest rate swaps*
[10]engl. *yields*

3. *Die Relationen* $p(t,T) > 0$ *und* $p(T,T) = 1$ *gelten für alle* $t,\ T$ *mit* $0 \leq t \leq T \leq T^*$.

Die Relationen $p(t,T) > 0$ und $p(T,T) = 1$ sind notwendig, um Arbitragemöglichkeiten zu vermeiden. $p(t,T)$ ist also stochastisch mit zwei Variablen t und T. Es gilt:

1. $p(t,T)$ ist für ein fixes $t \in [0,T^*]$ eine Funktion von $T \in [t,T^*]$. Diese liefert Preise für Nullkuponanleihen mit allen möglichen Fälligkeitszeitpunkten zu einem fixen Zeitpunkt t. Der Graph dieser Funktion heißt „die Preiskurve einer Anleihe zum Zeitpunkt t" oder „die Zinsstruktur[11] zum Zeitpunkt t". Gewöhnlich ist der Graph sehr glatt, das heißt die Abbildung $[t,T^*] \ni T \mapsto p(t,T)$ ist für jedes fixe $t \in [0,T^*]$ differenzierbar. Diese Eigenschaft ist eigentlich Teil der Annahme 2.25.

2. $(p(t,T))_{t=0}^{T}$ ist für einen fixen Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0,T^*]$ ein stochastischer Prozess. Dieser Prozess liefert die Preise der Nullkuponanleihe mit fixem Fälligkeitszeitpunkt T zu verschiedenen Zeitpunkten. Die Trajektorien sind gewöhnlich sehr irregulär.

2.3.2 Zinssätze

Gegeben der Anleihenmarkt aus Kapitel 2.3.1 werden nun diverse Zinssätze definiert. Folgendes Konstruktionsprinzip soll für die Festlegung der Zinssätze in der nachstehenden Definition 2.26 als Motivation dienen: Sei t ein fixer Ausgangszeitpunkt und seien $S,\ T$ zwei weitere fixe Zeitpunkte mit $0 \leq t < S < T \leq T^*$. Der direkte Weg ist einen Vertrag zum Zeitpunkt t abzuschließen, der eine Investition von 1 zum Zeitpunkt S erlaubt und im Intervall $[S,T]$ eine $\mathcal{F}_t$-messbare **Rendite** einbringt, die zum Zeitpunkt t folgendermaßen bestimmt wird:

1. Zum Zeitpunkt t verkauft man eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt S und Preis $p(t,S)$. Dies bringt einen Geldbetrag von $p(t,S)$ ein.

2. Mit diesem Ertrag kauft man genau $\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$ Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkt T und Preis $p(t,T)$. Somit ist die Nettoinvestition zum Zeitpunkt t gleich null.

3. Zum Zeitpunkt S ist die Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt S fällig. Man muss also 1 zahlen.

4. Zum Zeitpunkt T sind die Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkt T fällig. Dies bringt einen Geldbetrag von 1 pro Stück ein, also einen Ertrag von $\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$.

5. Ausgehend von einem Vertrag zum Zeitpunkt t liefert eine Investition von 1 zum Zeitpunkt S daher einen Geldbetrag von $\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$ zum Zeitpunkt T.

6. Zum Zeitpunkt t hat man somit einen Vertrag abgeschlossen, der einen risikolosen Zinssatz im zukünftigen Intervall $[S,T]$ garantiert. So ein Zinssatz heißt **Terminzinssatz**[12].

[11] engl. *term structure*
[12] engl. *forward rate*

Man verwendet zwei (von vielen möglichen) Methoden, um Terminzinssätze zu notieren: einfache Zinssätze und Zinsintensitäten. Einfache Zinsen werden am Ende des Bezugszeitraums bezahlt, während eine Verzinsung mit einer Zinsintensität eine laufende Ausschüttung garantiert, die durch den Zinseszinseffekt zu einem exponentiellen Wachstum führt. Sei $0 \leq t \leq S < T \leq T^*$. Der **einfache Terminzinssatz** oder **LIBOR[13]-Terminzinssatz** $L(t; S, T)$ ist die Lösung der Gleichung

$$1 + (T - S)L(t; S, T) = \frac{p(t, S)}{p(t, T)}$$

und die **Terminzinsintensität**[14] $R(t; S, T)$ löst die Gleichung

$$e^{R(t;S,T)(T-S)} = \frac{p(t, S)}{p(t, T)}$$

wobei $p(t, S)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt S zum Zeitpunkt t und $p(t, T)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T zum Zeitpunkt t ist. Die einfache Zinssatznotation wird auf dem Finanzmarkt verwendet, wohingegen die konforme Zinssatznotation in theoretischen Zusammenhängen benützt wird. Sie sind natürlich sinngemäß äquivalent. Formal werden die Zinssätze folgendermaßen definiert:

Definition 2.26 *Sei der Anleihenmarkt aus Kapitel* 2.3.1 *gegeben und seien t, S, T fixe Zeitpunkte mit $0 \leq t \leq S < T \leq T^*$. $p(t, S)$ ist der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt S zum Zeitpunkt t, $p(t, T)$ ist der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T zum Zeitpunkt t und $p(T, S)$ ist der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt S zum Zeitpunkt T.*

1. *Der **einfache Terminzinssatz** oder **LIBOR-Terminzinssatz** für $[S, T]$, der zum Zeitpunkt t vertraglich abgeschlossen wird, wird durch*

   $$L(t; S, T) = -\frac{p(t, T) - p(t, S)}{(T - S)p(t, T)}$$

   definiert.

2. *Der **einfache Kassazinssatz**[15] oder **LIBOR-Kassazinssatz** für $[S, T]$ wird durch*

   $$L(S, T) = -\frac{p(S, T) - 1}{(T - S)p(S, T)}$$

   definiert.

3. *Die **Terminzinsintensität** für $[S, T]$, die zum Zeitpunkt t vertraglich abgeschlossen wird, wird durch*

   $$R(t; S, T) = -\frac{\ln p(t, T) - \ln p(t, S)}{(T - S)}$$

   definiert.

[13] *London Interbank Offered Rate*
[14] engl. *continuously compounded forward rate*
[15] engl. *spot rate*

4. *Die **Kassazinsintensität**[16] für $[S, T]$ wird durch*

$$R(S,T) = -\frac{\ln p(S,T)}{(T-S)}$$

definiert.

Seien t, T fixe Zeitpunkte mit $0 \le t \le T \le T^*$.

5. *Der **sofortige Terminzinssatz** mit Fälligkeitszeitpunkt T, der zum Zeitpunkt t vertraglich abgeschlossen wird, wird durch*

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln p(t,T)}{\partial T} = -\frac{\partial p(t,T)}{\partial T}\frac{1}{p(t,T)}$$

definiert, wobei $p(t,T)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T zum Zeitpunkt t ist.

6. *Der **Momentanzinssatz**[17] zum Zeitpunkt t wird durch*

$$r(t) = f(t,t)$$

definiert.

Es sei erwähnt, dass Kassazinssätze Terminzinssätze sind, bei denen der Zeitpunkt der Vertragschließung mit dem Beginn des Intervalls übereinstimmt, in welchem der Zinssatz gültig ist, das heißt $t = S$. Der sofortige Terminzinssatz ist die Grenze der Terminzinsintensität, wenn $S \nearrow T$. Man kann ihn als risikolosen, zum Zeitpunkt t vertraglich abgeschlossenen Zinssatz über dem Infinitesimalintervall $[T, T+dT]$ interpretieren. Der einfache Terminzinssatz $L(t; S, T)$ und der einfache Kassazinssatz $L(S,T)$ müssen für alle t, S, T mit $0 \le t \le S < T \le T^*$ größer als $-\frac{1}{T-S}$ sein, da laut Annahme 2.25 $p(t,S) > 0$, $p(t,T) > 0$ und $p(S,T) > 0$ gilt.

Nun wird der Geldwertprozess definiert.

Definition 2.27 *Der eindimensionale **Geldwertprozess** $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ wird durch*

$$B(t) = \exp\left\{\int_0^t r(s)\,ds\right\}, \quad t \in [0, T^*],$$

definiert, das heißt er hat die Dynamik

$$\begin{aligned} dB(t) &= r(t)B(t)\,dt, \quad t \in [0,T^*], \\ B(0) &= 1, \end{aligned}$$

wobei der stetige, eindimensionale stochastische Prozess $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ der Momentanzinssatz ist.

[16]engl. *continuously compounded spot rate*
[17]engl. *short rate*

Den Geldwertprozesses kann man wie in Kapitel 2.1.2 als ein Bankkonto mit Momentanzinssatz r interpretieren.

Die folgenden Formeln sind eine unmittelbare Konsequenz der Definition 2.26.

Lemma 2.28 *Sei der Anleihenmarkt aus Kapitel* 2.3.1 *gegeben und sei* $0 \leq t \leq S \leq T \leq T^*$. $p(t,S)$ *ist der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt* S *zum Zeitpunkt* t, $p(t,T)$ *ist der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt* T *zum Zeitpunkt* t *und der stetige, eindimensionale stochastische Prozess* $f = (f(t,T))_{0 \leq t \leq T \leq T^*}$ *ist der sofortige Terminzinssatz. Dann gilt*

$$p(t,T) = p(t,S) \cdot \exp\left\{ -\int_S^T f(t,u)\,du \right\}$$

und insbesondere

$$p(t,T) = \exp\left\{ -\int_t^T f(t,u)\,du \right\}.$$

Man kann auf folgende Arten ein Modell für den Anleihenmarkt konstruieren:

1. Man kann die Dynamik des Momentanzinssatzes spezifizieren und dann mithilfe von arbitragefreien Methoden versuchen, Anleihenpreise zu ermitteln.

2. Man kann direkt die Preisdynamiken von allen möglichen Anleihen spezifizieren.

3. Man kann die Dynamiken von allen möglichen Terminzinssätzen spezifizieren und dann das Lemma 2.28 anwenden, um Anleihenpreise zu erhalten.

In den Kapiteln 2.4 und 2.5 wird die Methode 1 angewendet, um Preise für Nullkuponanleihen zu ermitteln.

2.3.3 Kuponanleihen

Auf den meisten Anleihenmärkten gibt es nur eine relativ kleine Anzahl von aktiv gehandelten Nullkuponanleihen. Die Laufzeiten von Nullkuponanleihen sind generell kurz (gewöhnlich zwischen einem halben und zwei Jahren), wohingegen die meisten Anleihen mit einer längeren Laufzeit Kuponzahlungen beinhalten. Es werden nun zwei Arten von Kuponanleihen (fixe Kuponanleihen[18] und variabel verzinsliche Anleihen[19]) vorgestellt und ihre Preise bezüglich der Preise von Nullkuponanleihen ermittelt. Sei also der Anleihenmarkt aus Kapitel 2.3.1 gegeben.

[18]engl. *fixed coupon bonds*
[19]engl. *floating rate bonds*

Fixe Kuponanleihen

Die einfachste Kuponanleihe ist die **fixe Kuponanleihe**. Diese Anleihe liefert seinem Besitzer an bestimmten Zeitpunkten vorbestimmte Zahlungen, die man **Kupons** nennt. Formal wird sie folgendermaßen definiert: Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und seien Zeitpunkte $T_0, \ldots, T_n$ mit $0 \leq T_0 < \ldots < T_n \leq T^*$ fixiert. Ferner seien ein Nennwert $K \in \mathbb{R}$ und deterministische Kupons $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gegeben. T_0 ist der Ausgabezeitpunkt der fixen Kuponanleihe und zu den Zeitpunkten T_i, $i = 1, \ldots, n$, erhält sein Besitzer die entsprechenden Kupons c_i, $i = 1, \ldots, n$. Zum Zeitpunkt T_n erhält dieser zusätzlich den Nennwert K.

Diese fixe Kuponanleihe kann durch ein Portfolio aus Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkten T_i, $i = 1, \ldots, n$, repliziert werden. Genauer gesagt werden c_i Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkt T_i für $i = 1, \ldots, n-1$ und $K + c_n$ Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkt T_n gehalten. Der Preis $p(t)$ dieser fixen Kuponanleihe zu einem Zeitpunkt $t \in [T_{i-1}, T_i)$ ist daher für alle $i = 1, \ldots, n$ gleich

$$p(t) = Kp(t, T_n) + \sum_{j=i}^{n} c_j p(t, T_j),$$

wobei $p(t, T_j)$ der Preis der Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_j zum Zeitpunkt t ist.

Die Kupons werden sehr oft bezüglich ihrer Erträge bestimmt. Diese sind gewöhnlich nominale Sätze, die in der jeweiligen Periode $[T_{i-1}, T_i]$, $i = 1, \ldots, n$, auf den Nennwert K angewendet werden. Wenn die Erträge der Kupons also gleich $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ (in der Praxis stets $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_+$) sind, folgt

$$c_i = r_i(T_i - T_{i-1})K, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Für eine standardisierte fixe Kuponanleihe sind die Zeitintervalle äquidistant, das heißt

$$T_i = T_0 + i\delta, \quad i = 1, \ldots, n,$$

für ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, und die Kuponsätze r_i, $i = 1, \ldots, n$, gleich einem gemeinsamen Kuponsatz $r \in \mathbb{R}$ (in der Praxis stets $r \in \mathbb{R}_+$). Der Preis $p(t)$ so einer fixen Kuponanleihe zu einem Zeitpunkt $t \in [T_{i-1}, T_i)$ ist daher für alle $i = 1, \ldots, n$ gleich

$$p(t) = K \left(p(t, T_n) + r\delta \sum_{j=i}^{n} p(t, T_j) \right).$$

Variabel Verzinsliche Anleihen

Es gibt diverse Kuponanleihen, für welche der Wert des Kupons zum Ausgabezeitpunkt der Anleihe nicht fix ist, sondern für jede Kuponperiode neu festgelegt wird. Häufig hängt die Bestimmung des Kuponwertes von einem finanziellen Richtwert wie dem Marktzinssatz ab. Es gibt jedoch auch Anleihen für die der Kupon bezüglich eines nichtfinanziellen Index festgesetzt wird. Der Zahlungsstrom der **variabel verzinslichen Anleihe** entspricht also dem der fixen Kuponanleihe, wobei die Kupons variabel sind. Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und seien wieder Zeitpunkte $T_0, \ldots, T_n$ mit $0 \leq T_0 < \ldots < T_n \leq T^*$ fixiert. Ferner seien ein Nennwert $K \in \mathbb{R}$ und variable Kupons $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gegeben. T_0 ist der Ausgabezeitpunkt der variabel verzinslichen Kuponanleihe und zu den Zeitpunkten T_i, $i = 1, \ldots, n$, erhält sein Besitzer die entsprechenden Kupons c_i, $i = 1, \ldots, n$. Zum Zeitpunkt T_n erhält dieser zusätzlich den Nennwert K.

Als ein Beispiel wird eine der einfachsten variabel verzinslichen Anleihen behandelt, für welche die Kuponsätze den einfachen Kassazinssätzen $L(T_{i-1}, T_i)$, $i = 1, \ldots, n$, entsprechen. Somit gilt für die Kupons

$$c_i = L(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})K, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.37}$$

Es sei erwähnt, dass $L(T_{i-1}, T_i)$ bereits zum Zeitpunkt T_{i-1} bestimmt wird, c_i jedoch bis zum Zeitpunkt T_i nicht verfügbar ist. Nun wird der Wert dieser Anleihe zu einem Zeitpunkt $t \in [0, T_0]$ im Falle von äquidistanten Zeitintervallen

$$T_i - T_{i-1} = \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ermittelt. Ohne Verlust der Allgemeinheit sei $K = 1$. Wenn die Definition des einfachen Kassazinssatzes (Definition 2.26) in (2.37) eingesetzt wird, folgt

$$c_i = \delta \frac{1 - p(T_{i-1}, T_i)}{\delta p(T_{i-1}, T_i)} = \frac{1}{p(T_{i-1}, T_i)} - 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei $p(T_{i-1}, T_i)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_i zum Zeitpunkt T_{i-1} ist. Seien nun zwei Zeitpunkte T_{i-1} und T_i für ein $i = 1, \ldots, n$ fix. Der Wert des Terms -1, der zum Zeitpunkt T_i ausbezahlt wird, ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T_0]$ natürlich gleich

$$-p(t, T_i),$$

wobei $p(t, T_i)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_i zum Zeitpunkt t ist. Nun bleibt noch den Wert des Terms $\frac{1}{p(T_{i-1}, T_i)}$, der zum Zeitpunkt T_i ausbezahlt wird, zum Zeitpunkt $t \in [0, T_0]$ zu bestimmen. Dies wird folgendermaßen gemacht:

1. Zum Zeitpunkt $t \in [0, T_0]$ kauft man eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_{i-1} und Preis $p(t, T_{i-1})$. Das kostet also $p(t, T_{i-1})$.

2. Zum Zeitpunkt T_{i-1} erhält man den Betrag 1.

3. Diesen Betrag investiert man in $\frac{1}{p(T_{i-1}, T_i)}$ Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkt T_i und Preis $p(T_{i-1}, T_i)$.

4. Zum Zeitpunkt T_i werden diese Anleihen fällig, wobei jede Nennwert 1 hat. Das heißt zum Zeitpunkt T_i erhält man den Betrag

$$\frac{1}{p(T_{i-1}, T_i)}.$$

Diese Argumente zeigen, dass es möglich ist den Term $\frac{1}{p(T_{i-1},T_i)}$ durch eine selbstfinanzierende Anleihenstrategie mit Anfangskosten $p(t,T_{i-1})$ zu replizieren. Der Wert des Terms $\frac{1}{p(T_{i-1},T_i)}$, der zum Zeitpunkt T_i ausbezahlt wird, ist zum Zeitpunkt $t \in [0,T_0]$ somit gleich $p(t,T_{i-1})$. Es folgt daher, dass der Wert des Kupons c_i, der zum Zeitpunkt T_i ausbezahlt wird, zum Zeitpunkt $t \in [0,T_0]$ gleich

$$p(t,T_{i-1}) - p(t,T_i)$$

ist. Der Wert des Nennwertes $K = 1$ zum Zeitpunkt $t \in [0,T_0]$ ist gleich dem Preis $p(t,T_n)$ einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_n zum Zeitpunkt t. Der Preis einer variabel verzinsliche Anleihe mit Nennwert $K = 1$ und Kuponsätzen, die den einfachen Kassazinssätzen entsprechen, ist zum Zeitpunkt $t \in [0,T_0]$ daher gleich

$$p(t) = p(t,T_n) + \sum_{i=1}^{n}(p(t,T_{i-1}) - p(t,T_i)) = p(t,T_0).$$

Er entspricht also den Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_0 zum Zeitpunkt t. Insbesondere gilt zum Zeitpunkt $t = T_0$, dass $p(T_0) = 1$ ist.

2.3.4 Zinsswaps

Bei einem **Zinsswap** wird ein Zahlungsstrom eines fixen Zinssatzes, dem **Swapsatz**, mit einem Zahlungsstrom eines variablen Zinssatzes (gewöhnlich ein LIBOR-Satz) ausgetauscht. Es gibt viele Versionen von Zinsswaps und hier wird der **„forward swap settled in arrears“**[20] beschrieben. Dazu seien ein Nennwert $K \in \mathbb{R}$, ein Swapsatz $R \in \mathbb{R}$ und Zeitpunkte $T_0, \ldots, T_n \in [0,T^*]$ mit $T_i = T_0 + i\delta$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ gegeben. Zahlung erfolgt zu den Zeitpunkten T_i, $i = 1, \ldots, n$ (nicht zum Zeitpunkt T_0). Seien nun zwei Zeitpunkte T_{i-1} und T_i für ein $i = 1, \ldots, n$ fix. Wenn man einen fixen Zinssatz gegen einen variablen Zinssatz, der in diesem Fall der einfache Kassazinssatz $L(T_{i-1},T_i)$ ist, austauscht, erhält man zum Zeitpunkt T_i den Betrag

$$\delta L(T_{i-1},T_i)K = c_i K,$$

wobei c_i der i-te Kupon der variabel verzinslichen Anleihe mit Nennwert 1 und Kuponsätzen, die den einfachen Kassazinssätzen entsprechen, ist. Zum Zeitpunkt T_i bezahlt man ferner den Betrag

$$\delta RK.$$

Der Nettogeldfluss zum Zeitpunkt T_i ist daher gleich

$$\delta(L(T_{i-1},T_i) - R)K.$$

Mit Anwendung der Resultate für variabel verzinsliche Anleihen aus Kapitel 2.3.3 ist der Wert dieses Geldflusses zum Zeitpunkt $t \in [0,T_0]$ also gleich

$$Kp(t,T_{i-1}) - (1+\delta R)Kp(t,T_i),$$

[20] *Terminzinstausch, der im Nachhinein gezahlt wird*

wobei $p(t, T_{i-1})$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_{i-1} zum Zeitpunkt t und $p(t, T_i)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_i zum Zeitpunkt t ist. Der Gesamtpreis $\Pi(t)$ des „forward swap settled in arrears" zum Zeitpunkt $t \in [0, T_0]$ ist daher gleich

$$\Pi(t) = K \sum_{i=1}^{n} (p(t, T_{i-1}) - (1 + \delta R) p(t, T_i))$$

und dieser kann vereinfacht werden, um die folgende Proposition zu erhalten.

Proposition 2.29 *Der Preis des oben definierten „forward swap settled in arrears" zum Zeitpunkt $t \in [0, T_0]$ ist gleich*

$$\Pi(t) = K p(t, T_0) - K \sum_{i=1}^{n} d_i p(t, T_i),$$

wobei

$$\begin{aligned} d_i &= \delta R, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ d_n &= 1 + \delta R \end{aligned}$$

und $p(t, T_i)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_i zum Zeitpunkt t ist.

Der Swapsatz R muss so bestimmt werden, dass der Wert des Zinsswaps zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses gleich null ist. Somit gilt folgende Proposition:

Proposition 2.30 *Wenn der oben definierte „forward swap settled in arrears" zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgegeben wird, ist der Swapsatz R gleich*

$$R = \frac{p(0, T_0) - p(0, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^{n} p(0, T_i)},$$

wobei $p(0, T_i)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T_i zum Zeitpunkt 0 ist. Im Fall $T_0 = 0$ gilt

$$R = \frac{1 - p(0, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^{n} p(0, T_i)}.$$

2.3.5 Rendite

Man betrachtet eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ und Preisprozess $p = (p(t, T))_{t=0}^{T}$. Nun wird der **interne Zinsfuß**[21] y der Nullkuponanleihe ermittelt, das heißt der Abzinsungsfaktor, bei dessen Verwendung die diskontierten künftigen Zahlungen dem heutigen Preis entsprechen. Es muss also die Gleichung

$$p(t, T) = e^{-y(T-t)} \times 1, \quad t \in [0, T),$$

gelöst werden, wobei der Faktor 1 der Nennwert der Nullkuponanleihe ist. Dies führt zu folgender Definition:

[21] engl. *internal rate of return*

Definition 2.31 *Die* ***Nullkuponrendite***[22] $y : [0,T) \times [0,T^*] \to \mathbb{R}_+^*$ *ist durch*

$$y(t,T) = -\frac{\ln p(t,T)}{T-t}$$

gegeben, wobei $p(t,T)$ der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T zum Zeitpunkt t ist. Für ein fixes $t \in [0,T^*]$ heißt die Funktion $(t,T^*] \ni T \mapsto y(t,T)$ ***Zinsstrukturkurve***[23].

Es sei erwähnt, dass die Nullkuponrendite $y(t,T)$ nichts anderes als die Kassazinsintensität im Intervall $[t,T]$ ist.

2.4 Modelle für Momentanzinssätze

2.4.1 Einführung

Man sucht ein Modell für eine arbitragefreie Familie von Preisprozessen $\{p(\cdot,T); T \in [0,T^*]\}$ von Nullkuponanleihen, wobei man im gesamten Kapitel 2.4 auf einem messbaren Raum $(\Omega,\mathcal{F})$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$ arbeitet. Sei ferner P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf diesem Raum und der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F})$ vollständig.

Da der Preis $p(t,T)$ zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$, zumindest intuitiv, in irgendeinem Sinne vom Verhalten des Momentanzinssatzes im Intervall $[t,T]$ abhängen soll, muss man zuerst eine a priori Spezifizierung der Dynamik des Momentanzinssatzes geben. Der Momentanzinssatz $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ wird also unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P als die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(t,r(t))\,dt + \sigma(t,r(t))\,d\bar{W}(t), \quad t \in [0,T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

modelliert. $\alpha : [0,T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0,T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind deterministische Funktionen und $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein eindimensionaler P-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass r die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.38) ist. α heißt **lokale Durchschnittsrendite** von S und σ **Volatilität** von S. Der Momentanzinssatz r ist als einziger a priori gegeben, also ist die einzige exogen gegebene Kapitalanlage der eindimensionale Geldwertprozess $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$, dessen Dynamik durch

$$\begin{aligned} dB(t) &= r(t)B(t)\,dt, \quad t \in [0,T^*], \\ B(0) &= 1 \end{aligned} \tag{2.39}$$

definiert wird. Wie üblich interpretiert man diese Kapitalanlage als ein Bankkonto mit Momentanzinssatz r. Die Dynamik von B kann man als die Dynamik des Wertes eines Bankkontos sehen. Zusammenfassend gilt folgende Annahme:

[22] engl. *zero coupon yield*
[23] engl. *yield curve*

Annahme 2.32 *Es existiert eine exogen gegebene lokal risikofreie Kapitalanlage. Der Preisprozess* $B = (B(t))_{t=0}^{T^*}$ *dieser Kapitalanlage hat eine Dynamik, die durch* (2.39) *gegeben ist, wobei die* P*-Dynamik des Momentanzinssatzes* $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ *durch* (2.38) *gegeben ist.*

Um die Existenz eines hinreichend großen Anleihenmarktes zu garantieren, gilt folgende Annahme:

Annahme 2.33 *Man nimmt an, dass ein Finanzmarkt für Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkt* T *für jedes* $T \in [0, T^*]$ *existiert.*

Somit nimmt man an, dass der Finanzmarkt alle möglichen Anleihen und eine risikofreie Kapitalanlage enthält. Folglich ist er ein Finanzmarkt, der eine unendliche Zahl von Kapitalanlagen enthält, wobei die risikofreie Kapitalanlage als einzige exogen gegeben ist. In diesem Modell betrachtet man diese daher als die zugrunde liegende Kapitalanlage, wohingegen alle Anleihen als Derivate des „zugrunde liegenden“ Momentanzinssatzes r betrachtet werden. Das Hauptziel ist, die Beziehung zu ermitteln, die auf einem arbitragefreien Finanzmarkt zwischen den Preisprozessen von Anleihen mit unterschiedlichen Fälligkeitszeitpunkten besteht. In einem zweiten Schritt werden arbitragefreie Preise für andere Derivate, denen der Momentanzinssatz zugrunde liegt, ermittelt. Beispiele für solche Derivate sind Anleihenoptionen oder Zinsswaps.

Da Anleihen als Derivate des zugrunde liegenden Momentanzinssatzes r betrachtet werden, stellt sich die Frage, ob Anleihenpreise nur von der P-Dynamik von r, die durch (2.38) gegeben ist, sowie der Bedingung, dass der Anleihenmarkt arbitragefrei sein soll, bestimmt werden. Die Antwort ist nein. Als Argument für diese Antwort wendet man als erstes die Heuristik 2.23 auf den Anleihenmarkt an. In der gegenwärtigen Situation ist die Anzahl M der exogen gegebenen, gehandelten Kapitalanlagen, ohne der risikofreien Kapitalanlage, gleich null. Die Anzahl R der „zufälligen Quellen“ ist andererseits gleich eins, da es einen Wiener Prozess gibt. Laut der Heuristik 2.23 ist der exogen gegeben Anleihenmarkt daher arbitragefrei, aber nicht vollständig. Das Fehlen der Vollständigkeit ist klar: Da die einzige exogen gegebene Kapitalanlage die risikofreie Kapitalanlage ist, gibt es keine Möglichkeit Derivate zu replizieren.

Als zweites Argument wird der Preis einer bestimmten Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ mit Anwendung der Technik aus Kapitel 2.1.3 ermittelt. Man nimmt nun an, dass der Preis dieser Anleihe für alle $t \in [0, T]$ die Form $F(t, r(t))$ hat, wobei $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}_+^*$-wertige Funktion ist. Nun wird ein risikofreies Portfolio gestaltet, welches auf der Nullkuponanleihe und der zugrunde liegenden Kapitalanlage basiert. Die Rendite dieses risikofreien Portfolios muss dann laut Proposition 2.13 gleich dem Momentanzinssatz r sein. Diese Bedingung ergibt einige Gleichungen für die Bestimmung der Funktion F. Im Black-Scholes-Modell war die zugrunde liegende Kapitalanlage die Aktie mit einem Preisprozess S, der auf dem ersten Blick dem Momentanzinssatz r im gegenwärtigen Modell entspricht. Der Hauptunterschied zwischen dem Black-Scholes-Modell und dem gegenwärtigen Modell besteht jedoch darin, dass der Momentanzinssatz r nicht der Preis einer gehandelten Kapitalanlage ist. Das heißt es gibt auf dem Anleihenmarkt keine Kapitalanlage, dessen Preisprozess durch r gegeben ist.

Zusammenfassend gilt also: Der Preis einer Anleihe wird nicht gänzlich durch die Spezifizierung (2.38) der Dynamik des Momentanzinssatzes r und der Bedingung, dass der Anleihenmarkt arbitragefrei sein soll, bestimmt. Der Grund dafür ist, dass der Preis eines Derivats immer bezüglich des Preises der zugrunde liegenden Kapitalanlage festgelegt werden muss, wenn man Arbitragemöglichkeiten vermeiden will. Im gegenwärtigen Anleihenmarkt gibt es jedoch nicht genügend zugrunde liegende Kapitalanlagen.

Für die Bestimmung des Preises verwendet man nun folgende Idee:

Idee 2.34

1. Um Arbitragemöglichkeiten auf dem Anleihenmarkt zu vermeiden, müssen Preise von Anleihen mit unterschiedlichen Fälligkeitszeitpunkten bestimmte interne Übereinstimmungsrelationen erfüllen.

2. Wenn der Preis einer bestimmten Anleihe, die als „Richtwert“ dient, gegeben ist, werden die Preise aller anderen Anleihen nur bezüglich des Preises dieser Anleihe und der Dynamik des Momentanzinssatzes r ermittelt.

Die Idee 2.34 stimmt mit der Heuristik 2.23 überein: Der a priori gegebene Finanzmarkt besteht aus einer Anleihe, die als „Richtwert“ dient, und einer risikofreien Kapitalanlage. Deshalb gilt $M = R = 1$, was Vollständigkeit garantiert.

2.4.2 Die Zinsstrukturgleichung

In diesem Kapitel 2.4.2 wird die Idee 2.34 formal ausgeführt. Dafür nimmt man Folgendes an:

Annahme 2.35 *Man nimmt an, dass ein arbitragefreier Finanzmarkt für Nullkuponanleihen mit Fälligkeitszeitpunkt T für jedes $T \in [0, T^*]$ existiert. Ferner nimmt man an, dass der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T für jedes $T \in [0, T^*]$ die Form*

$$p(t, T) = F^T(t, r(t)), \quad t \in [0, T], \tag{2.40}$$

hat, wobei $F^T \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}^*_+$-wertige Funktion ist und die P-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(t, r(t))\, dt + \sigma(t, r(t))\, d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

gegeben ist. $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind deterministische Funktionen und $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein eindimensionaler P-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass r die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.41) ist. T betrachtet man als Parameter.

Es wird nun F^T auf einem arbitragefreien Anleihenmarkt ermittelt. Wie im Fall von Derivaten, dessen zugrunde liegende Kapitalanlagen Aktien sind, gibt es eine Grenzbedingung: Der Nennwert einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ ist 1. Daher ist diese Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt T 1 wert und es gilt die Relation

$$F^T(T, r) = 1 \quad \forall\ (T, r) \in [0, T^*] \times \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

Es sei erwähnt, dass der Buchstabe r in der Gleichung (2.42) eine reelle Variable kennzeichnet, während r gleichzeitig als Bezeichnung für den stochastischen Prozess des Momentanzinssatzes verwendet wird. Damit man mit der allgemeinen Beschriftung übereinstimmt, sollte man den stochastischen Prozess eigentlich durch einen Großbuchstaben R und die Realisierung von R durch den Kleinbuchstaben r kennzeichnen. Die Verwendung von r als Bezeichnung für den stochastischen Prozess des Momentanzinssatzes ist aber so fixiert, dass sie nicht geändert werden kann. Man verwendet r also weiterhin als Bezeichnung für den Prozess und als Bezeichnung für die Realisierung des Prozesses. Dies ist etwas salopp, es sollte aber aus dem Kontext heraus klar sein, welche Bedeutung r hat.

Proposition 2.36 *Sei der Anleihenmarkt arbitragefrei, die P-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch* (2.41) *gegeben und F^T die in* (2.40) *definierte Preisfunktion einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$. Dann existiert ein eindimensionaler Prozess λ, sodass für alle $T \in [0, T^*]$ und alle $t \in [0, T]$*

$$\frac{\alpha_T(t) - r(t)}{\sigma_T(t)} = \lambda(t) \tag{2.43}$$

ist, wobei α_T und σ_T für alle $T \in [0, T^*]$ und alle $t \in [0, T]$ durch

$$\alpha_T(t) = \frac{F_t^T(t, r(t)) + \alpha(t, r(t))F_r^T(t, r(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r(t))F_{rr}^T(t, r(t))}{F^T(t, r(t))}, \tag{2.44}$$

$$\sigma_T(t) = \frac{\sigma(t, r(t))F_r^T(t, r(t))}{F^T(t, r(t))} \tag{2.45}$$

gegeben sind. Die Indizes der Funktion F in den Gleichungen (2.44) *und* (2.45) *kennzeichnen die entsprechenden partiellen Ableitungen.*

Beweis Für den Beweis gestaltet man ein selbstfinanzierendes Portfolio, welches aus Anleihen mit unterschiedlichen Fälligkeitszeitpunkten besteht. Seien $T, S \in [0, T^*]$ zwei fixe Fälligkeitszeitpunkte. Mit Anwendung der Itô-Formel (A.10) auf (2.40) erhält man folgende Dynamik des Preises der Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt T, wobei die Gleichung entsprechend für die Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt S ist:

$$dF^T(t, r(t)) = \alpha_T(t)F^T(t, r(t))\, dt + \sigma_T(t)F^T(t, r(t))\, d\bar{W}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.46}$$

Die P-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ ist durch (2.41) gegeben und

$$\begin{aligned} \alpha_T(t) = {} & \frac{F_t^T(t, r(t)) + \alpha(t, r(t))F_r^T(t, r(t))}{F^T(t, r(t))} \\ & + \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(t, r(t))F_{rr}^T(t, r(t))}{F^T(t, r(t))}, \end{aligned} \qquad t \in [0, T], \tag{2.47}$$

$$\sigma_T(t) = \frac{\sigma(t, r(t))F_r^T(t, r(t))}{F^T(t, r(t))}, \quad t \in [0, T], \tag{2.48}$$

wobei die Indizes der Funktion F in den Gleichungen (2.47) und (2.48) die entsprechenden partiellen Ableitungen kennzeichnen. Sei $(u_T = (u_T(t))_{t=0}^T, u_S = (u_S(t))_{t=0}^S,)$

das entsprechende relative Portfolio. Die Anwendung der Gleichung (2.1) auf dieses Portfolio ergibt die Dynamik seines Wertes V,

$$dV(t) = V(t)\left(u_T(t)\frac{dF^T(t,r(t))}{F^T(t,r(t))} + u_S(t)\frac{dF^S(t,r(t))}{F^S(t,r(t))}\right), \quad t \in [0, \max\{T,S\}], \quad (2.49)$$

wobei man annimmt, dass $V(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, \max\{T,S\}]$ ist. Wenn man (2.46) und die entsprechende Gleichung für die Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt S in (2.49) einsetzt, folgt

$$\begin{aligned} dV(t) = {} & V(t)(u_T(t)\alpha_T(t) + u_S(t)\alpha_S(t))\, dt \\ & + V(t)(u_T(t)\sigma_T(t) + u_S(t)\sigma_S(t))\, d\bar{W}(t), \quad t \in [0, \max\{T,S\}]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Genau wie in Kapitel 2.1.3 definiert man nun das relative Portfolio durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_T(t) + u_S(t) &= 1, \\ u_T(t)\sigma_T(t) + u_S(t)\sigma_S(t) &= 0, \end{aligned} \quad t \in [0, \max\{T,S\}]. \quad (2.51)$$

Aufgrund dieser Definition verschwindet der $d\bar{W}$-Term in (2.50) und es folgt

$$dV(t) = V(t)(u_T(t)\alpha_T(t) + u_S(t)\alpha_S(t)t)\, dt, \quad t \in [0, \max\{T,S\}]. \quad (2.52)$$

Das Gleichungssystem (2.51) hat die Lösungen

$$u_T(t) = -\frac{\sigma_S(t)}{\sigma_T(t) - \sigma_S(t)}, \quad t \in [0, \max\{T,S\}],$$

$$u_S(t) = \frac{\sigma_T(t)}{\sigma_T(t) - \sigma_S(t)}, \quad t \in [0, \max\{T,S\}].$$

Diese Lösungen setzt man in (2.52) ein und es folgt

$$dV(t) = V(t)\left(\frac{\alpha_S(t)\sigma_T(t) - \alpha_T(t)\sigma_S(t)}{\sigma_T(t) - \sigma_S(t)}\right) dt, \quad t \in [0, \max\{T,S\}].$$

Die Annahme, dass der Anleihenmarkt arbitragefrei ist, impliziert laut Proposition 2.13, dass das Portfolio eine Rendite haben muss, die gleich dem Momentanzinssatz ist. Somit gilt die Bedingung

$$\frac{\alpha_S(t)\sigma_T(t) - \alpha_T(t)\sigma_S(t)}{\sigma_T(t) - \sigma_S(t)} = r(t)$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\alpha_T(t) - r(t)}{\sigma_T(t)} = \frac{\alpha_S(t) - r(t)}{\sigma_S(t)} \quad (2.53)$$

für alle $t \in [0, \max\{T,S\}]$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Auf der linken Seite von (2.53) gibt es einen stochastischen Prozess, der nicht von T anhängt, wohingegen es auf der rechten Seite einen stochastischen Prozess gibt, der nicht von S abhängt. Der gemeinsame Quotient hängt somit weder von T noch von S ab. Daher kann man den eindimensionalen Prozess λ für alle $T \in [0, T^*]$ und alle $t \in [0, T]$ durch

$$\frac{\alpha_T(t) - r(t)}{\sigma_T(t)} = \lambda(t)$$

definieren. □

Der Zähler der Gleichung (2.43) enthält den Term $\alpha_T(t) - r(t)$. Laut (2.46) ist α_T die lokale Rendite einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$, wohingegen r die Rendite der risikofreien Kapitalanlage ist. Die Differenz $\alpha_T - r$ ist daher die **Risikoprämie** der Nullkuponanleihe. Diese misst das Übermaß der Rendite der riskanten Nullkuponanleihe über der risikolosen Rendite, die der Anleihenmarkt verlangt, um Arbitragemöglichkeiten zu vermeiden. Der Nenner der Gleichung (2.43) enthält den Term $\sigma_T(t)$, das heißt die lokale Volatilität. λ kann man somit als „Risikoprämie pro Volatilität" sehen. Der Prozess λ ist bekannt als **Risikomarktpreis** und die Proposition 2.36 kann man nun mit folgenden Worten umschreiben:

Auf einem arbitragefreien Anleihenmarkt haben alle Anleihen, ungeachtet ihres Fälligkeitszeitpunktes, denselben Risikomarktpreis.

In der folgenden Proposition wird nun bestimmt welche Form die Funktion F^T hat.

Proposition 2.37 (Zinsstrukturgleichung) *Sei der Anleihenmarkt arbitragefrei und die P-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch* (2.41) *gegeben. Ferner sei $\lambda(t)$ der Risikomarktpreis zum Zeitpunkt $t \in [0, T^*]$ und der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ durch $p(t, T) = F^T(t, r(t))$ gegeben, wobei $F^T \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}_+^*$-wertige Funktion ist. Dann löst F^T folgendes Grenzwertproblem im Bereich $[0, T] \times \mathbb{R}$, wobei die Indizes der Funktion F die entsprechenden partiellen Ableitungen kennzeichnen:*

$$\begin{aligned} F_t^T(t, r) + (\alpha(t, r) - \lambda(t)\sigma(t, r))F_r^T(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T(t, r) - rF^T(t, r) = 0, \\ F^T(T, r) = 1. \end{aligned} \tag{2.54}$$

(2.54) *nennt man **Zinsstrukturgleichung**.*

Beweis Für den Beweis der Proposition 2.37 wendet man die Proposition 2.36 auf eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$: Man setzt die Formel (2.44) für α_T und die Formel (2.45) für σ_T in (2.43) ein und es folgt

$$\begin{aligned} &F_t^T(t, r(t)) + \{\alpha(t, r(t)) - \lambda(t)\sigma(t, r(t))\}F_r^T(t, r(t)) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(t, r(t))F_{rr}^T(t, r(t)) - r(t)F^T(t, r(t)) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

wobei die Indizes der Funktion F die entsprechenden partiellen Ableitungen kennzeichnen. Der Momentanzinssatz $r(t)$ kann für jedes $t \in [0, T^*]$ jeden positiven, reellen Wert annehmen und laut (2.42) gilt die Relation

$$F^T(T, r) = 1 \quad \forall\ (T, r) \in [0, T^*] \times \mathbb{R}.$$

Somit folgt, dass F^T folgende Gleichung im Bereich $[0, T] \times \mathbb{R}$ erfüllen muss:

$$\begin{aligned} F_t^T(t, r) + (\alpha(t, r) - \lambda(t)\sigma(t, r))F_r^T(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T(t, r) - rF^T(t, r) = 0, \\ F^T(T, r) = 1. \end{aligned}$$

$\square$

Die Zinsstrukturgleichung steht in enger Beziehung zu der Black-Scholes-Gleichung 2.15. Sie ist jedoch aufgrund des Risikomarktpreises λ komplizierter. Aus (2.43), (2.44) und (2.45) folgt, dass λ für alle $(t,r) \in [0,T^*] \times \mathbb{R}$ die Form $\lambda = \lambda(t,r)$ hat. Die Zinsstrukturgleichung ist daher eine standardisierte partielle Differentialgleichung. Das Problem ist, dass λ nicht innerhalb des Modells bestimmt wird. Um also die Zinsstrukturgleichung lösen zu können, muss λ exogen angegeben werden, genau wie α und σ.

Sei nun die P-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch (2.41) gegeben und $\lambda(t)$ der Risikomarktpreis zum Zeitpunkt $t \in [0,T^*]$. Man definiert wie in Kapitel 2.1.4 einen Prozess $a = (a(t))_{t=0}^{T^*}$ durch

$$a(t) = \lambda(t), \quad t \in [0,T^*],$$

und einen Prozess $Z = (Z(t))_{t=0}^{T^*}$ durch

$$Z(t) = \exp\left\{ -\int_0^t a(s)\, d\bar{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t a(s)^2\, ds \right\}, \quad t \in [0,T^*].$$

Man nimmt an, dass a die Novikov Bedingung (A.20) erfüllt. Ferner definiert man auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Maß Q durch

$$\frac{dQ}{dP} = Z(T^*).$$

Dann ist Q laut dem Satz von Girsanov A.42 ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß und der Prozess $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$, der durch

$$W(t) = \bar{W}(t) + \int_0^t a(s)\, ds, \quad t \in [0,T^*],$$

gegeben ist, ein Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ unter Q. Unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist die Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ somit durch

$$\begin{aligned} dr(t) &= \{\alpha(t,r(t)) - \lambda(t)\sigma(t,r(t))\}\, dt + \sigma(t,r(t))\, dW(t), \quad t \in [0,T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gegeben.

Proposition 2.38 (Risikoneutrale Bewertung) *Sei der Anleihenmarkt arbitragefrei und die P-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch (2.41) gegeben. Ferner sei $\lambda(t)$ der Risikomarktpreis zum Zeitpunkt $t \in [0,T^*]$ und der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0,T^*]$ zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ durch $p(t,T) = F^T(t,r(t))$ gegeben, wobei $F^T \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}_+^*$-wertige Funktion ist. Der Prozess*

$$\left(\sigma(s, r_{t,r}(s))\frac{\partial F^T(s, r_{t,r}(s))}{\partial r}\right)_{s=0}^T$$

sei in $\mathcal{L}^2$ *(siehe Definition A.16), wobei der Prozess* $r_{t,r} = (r_{t,r}(t))_{t=0}^T$ *durch* (2.56) *definiert wird. Dann kann man die Funktion* F^T *als*

$$F^T(t,r) = \mathrm{E}^Q\left[\exp\left\{-\int_t^T r_{t,r}(s)\,ds\right\}\right], \quad (t,r) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \tag{2.55}$$

darstellen, wobei Q*-Dynamik von* $r_{t,r}$ *im Intervall* $[t,T]$ *durch*

$$\begin{aligned} dr_{t,r}(s) &= \{\alpha(s, r_{t,r}(s)) - \lambda(s)\sigma(s, r_{t,r}(s))\}\,ds \\ &\quad + \sigma(s, r_{t,r}(s))\,dW(s), \qquad 0 \leq t \leq s \leq T,\ r \in \mathbb{R}, \\ r_{t,r}(t) &= r, \end{aligned} \tag{2.56}$$

gegeben ist. $\alpha : [0,T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\sigma : [0,T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind die Funktionen aus* (2.41), $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *ist ein eindimensionaler* Q*-Wiener Prozess bezüglich* $\mathbb{F}$ *und die Indizes in* $r_{t,r}$ *heben hervor, dass der Anfangswert zum Zeitpunkt* t *gleich* r *ist.*

Beweis Der Beweis der Proposition 2.38 wird im Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] im Kapitel 16.2 auf der Seite 249 erläutert. □

(2.55) kann man auch als

$$F^T(t,r) = \mathrm{E}^Q\left[\exp\left\{-\int_t^T r_{t,r}(s)\,ds\right\} \times 1\right], \quad (t,r) \in [0,T] \times \mathbb{R},$$

darstellen. Der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0,T^*]$ ist somit der Erwartungswert seines diskontierten Nennwertes. Anstelle des zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes P nimmt man wie üblich das Martingalmaß Q. Es sei erwähnt, dass die Martingalmaße je nach Wahl des Risikomarktpreises λ unterschiedlich sind.

Der Hauptunterschied zwischen dem gegenwärtigen und dem Black-Scholes-Modell besteht darin, dass das Martingalmaß im Black-Scholes-Modell eindeutig bestimmt wird, da dieses vollständig ist (diese Tatsache wird hier nicht bewiesen). Im gegenwärtigen Modell ist der exogen gegebene Anleihenmarkt nicht vollständig. Anleihenpreise werden somit nicht eindeutig durch die gegebene P-Dynamik des Momentanzinssatzes r bestimmt. Die Tatsache, dass es unterschiedliche Wahlmöglichkeiten für den Risikomarktpreis λ gibt, bedeutet, dass es unterschiedliche Anleihenmärkte gibt, die alle mit den gegebenen Dynamiken von r konsistent sind. Welcher Preisprozess der Anleihen am aktuellen Markt realisiert wird, hängt von der Beziehung zwischen Angebot und Nachfrage der Anleihen auf diesem Markt ab. Diese Faktoren werden zum Beispiel von der Risikoaversion der handelnden Personen auf dem Anleihenmarkt bestimmt. Insbesondere bedeutet dies, dass eine *ad hoc* Wahl von λ (zum Beispiel $\lambda = 0$) implizit eine Annahme ist, welche die gesamte Risikoaversion auf dem Anleihenmarkt betrifft. Umgekehrt hat der Anleihenmarkt λ indirekt durch die Gleichung (2.43) spezifiziert, wenn er die Dynamik des Preisprozesses einer Nullkuponanleihe mit zum Beispiel Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0,T^*]$ bestimmt. Dadurch werden also alle anderen Anleihenpreise durch die Zinsstrukturgleichung festgelegt. Das heißt alle Anleihenpreise werden bezüglich der Basisnullkuponanleihe mit Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ und bezüglich des Momentanzinssatzes bestimmt. Wieder gilt, dass der Preis eines Derivats immer bezüglich eines a priori gegebenen Preisprozesses festgelegt werden muss, wenn man Arbitragemöglichkeiten vermeiden will.

Die oben behandelten Nullkuponanleihen sind deterministische Derivate. Für allgemeinere Arten von Derivaten, denen der Momentanzinssatz $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ zugrunde liegt, gilt mit Anwendung der gleichen Argumente wie oben die folgende Proposition.

Proposition 2.39 (Allgemeine Zinsstrukturgleichung) *Sei der Finanzmarkt arbitragefrei und $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$ ein Derivat mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ und Vertragsfunktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei die P-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch (2.41) gegeben ist. Ferner sei $\lambda(t)$ der Risikomarktpreis zum Zeitpunkt $t \in [0, T^*]$ und der eindimensionale Preisprozess $(\Pi(t; \Phi))_{t=0}^{T}$ des Derivats $\Phi(r(T))$ durch*

$$\Pi(t; \Phi) = F^T(t, r(t)), \quad t \in [0, T],$$

gegeben, wobei $F^T \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion ist. Dann löst F^T folgendes Grenzwertproblem im Bereich $[0, T] \times \mathbb{R}$, wobei die Indizes der Funktion F die entsprechenden partiellen Ableitungen kennzeichnen:

$$\begin{aligned} F_t^T(t, r) + (\alpha(t, r) - \lambda(t)\sigma(t, r))F_r^T(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)F_{rr}^T(t, r) - rF^T(t, r) = 0, \\ F^T(T, r) = \Phi(r). \end{aligned}$$

Ferner sei der Prozess

$$\left(\sigma(s, r_{t,r}(s))\frac{\partial F^T(s, r_{t,r}(s))}{\partial r}\right)_{s=0}^{T}$$

in $\mathcal{L}^2$ (siehe Definition A.16), wobei der Prozess $r_{t,r} = (r_{t,r}(t))_{t=0}^{T}$ durch (2.57) definiert wird. Dann kann man die Funktion F^T als

$$F^T(t, r) = \mathrm{E}^Q\left[\exp\left\{-\int_t^T r_{t,r}(s)\, ds\right\} \times \Phi(r_{t,r}(T))\right], \quad (t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R},$$

darstellen, wobei die Q-Dynamik von $r_{t,r}$ im Intervall $[t, T]$ durch

$$\begin{aligned} dr_{t,r}(s) &= \{\alpha(s, r_{t,r}(s)) - \lambda(s)\sigma(s, r_{t,r}(s))\}\, ds \\ &\quad + \sigma(s, r_{t,r}(s))\, dW(s), \qquad 0 \le t \le s \le T,\ r \in \mathbb{R}, \\ r_{t,r}(t) &= r, \end{aligned} \tag{2.57}$$

gegeben ist. $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die Funktionen aus (2.41), $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ und die Indizes in $r_{t,r}$ heben hervor, dass der Anfangswert zum Zeitpunkt t gleich r ist.

Beweis Der Beweis der Proposition 2.39 ist äquivalent zum Beweis der Proposition 2.37 und zum Beweis der Proposition 2.38. □

2.5 Martingalmodelle für Momentanzinssätze

2.5.1 Q-Dynamik

Im gesamten Kapitel 2.5 arbeitet man auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$. Sei ferner P ein Wahrscheinlichkeitsmaß und Q ein Martingalmaß auf diesem Raum und seien die Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ vollständig. Man betrachtet ein Zinsmodell, bei dem die P-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(t, r(t))\, dt + \sigma(t, r(t))\, d\bar{W}, \quad t \in [0, T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.58}$$

gegeben ist. $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind deterministische Funktionen und $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein eindimensionaler P-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass r die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.58) ist. Wie in Kapitel 2.4 behandelt, wird die Zinsstruktur (das heißt die Familie der Anleihenpreisprozesse) sowie der Preis von jedem anderen Derivat der Form $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ auf einem arbitragefreien Finanzmarkt gänzlich durch die allgemeine Zinsstrukturgleichung im Bereich $[0, T] \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_t^T(t, r) + (\alpha(t, r) - \lambda(t)\sigma(t, r))F_r^T(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)F_{rr}^T(t, r) - rF^T(t, r) = 0, \\ F^T(T, r) = \Phi(r), \end{aligned}$$

bestimmt, wobei $F^T \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion ist, $\lambda(t)$ der Risikomarktpreis zum Zeitpunkt $t \in [0, T^*]$ ist und im Falle der Zinsstruktur natürlich $\Phi(r) = 1$ gilt. Angenommen σ sei a priori gegeben. Dann folgt, dass es irrelevant ist wie α und λ spezifiziert werden. Der Term, der, abgesehen von σ, die Zinsstruktur (und die Preise aller anderen Derivate, denen der Momentanzinssatz r zugrunde liegt) wirklich bestimmt, ist $\alpha - \lambda\sigma$, welcher der Driftterm des Momentanzinssatzes r unter dem Martingalmaß Q ist. Somit gilt folgendes Resultat:

Resultat 2.40 *Die Zinsstruktur sowie die Preise von allen anderen Derivaten, denen der Momentanzinssatz $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ zugrunde liegt, werden gänzlich durch die Spezifizierung der Dynamik von r unter dem Martingalmaß Q bestimmt.*

Anstatt α und λ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P zu spezifizieren, wird die Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ von nun an direkt unter dem Martingalmaß Q bestimmt. Diese Methode nennt man **Martingalmodellierung** und die übliche Annahme wird sein, dass die Q-Dynamik von r durch

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(t, r(t))\, dt + \sigma(t, r(t))\, dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.59}$$

gegeben ist. $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind deterministische Funktionen und $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$. Ferner existiert eine eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.59), welche zum Beispiel sichergestellt werden kann, wenn die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt sind. Von nun an kennzeichnet der Buchstabe α immer den Driftterm des Momentanzinssatzes unter dem Martingalmaß Q.

Nun werden einige Modelle vorgestellt, mit denen man die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ spezifizieren kann, wobei $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Wenn ein Parameter zeitabhängig ist, wird dies explizit angegeben. Andernfalls sind alle Parameter konstant. Ferner seien für alle Modelle (außer dem Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modell und dem Hull-White Modell (erweitertes CIR Modell)) die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass r die eindeutige Lösung der jeweiligen stochastischen Differentialgleichung ist. Für das Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modell und das Hull-White Modell (erweitertes CIR Modell) wird angenommen, dass r die eindeutige Lösung der jeweiligen stochastischen Differentialgleichung ist.

Vasiček Modell:

$$\begin{aligned} dr(t) &= (b - ar(t))\,dt + \sigma\,dW(t), \quad t \in [0, T^*],\ b, a, \sigma \in \mathbb{R}_+^*, \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ho-Lee Modell:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \Theta(t)\,dt + \sigma\,dW(t), \quad t \in [0, T^*],\ \Theta(t), \sigma \in \mathbb{R}, \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modell:

$$\begin{aligned} dr(t) &= a(b - r(t))\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t), \quad t \in [0, T^*],\ a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \sigma \in \mathbb{R}, \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Hull-White Modell (erweitertes Vasiček Modell):

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\Theta(t) - a(t)r(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t), \quad t \in [0, T^*],\ \Theta(t), \sigma(t) \in \mathbb{R},\ a(t) \in \mathbb{R}_+^*, \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Hull-White Modell (erweitertes CIR Modell):

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\Theta(t) - a(t)r(t))\,dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}\,dW(t), \quad t \in [0, T^*],\ \Theta(t), \sigma(t) \in \mathbb{R},\ a(t) \in \mathbb{R}_+^*, \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Dothan Modell:

$$\begin{aligned} dr(t) &= ar(t)\,dt + \sigma r(t)\,dW(t), \quad t \in [0, T^*],\ a, \sigma \in \mathbb{R}, \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Black-Derman-Toy Modell:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \Theta(t)r(t)\,dt + \sigma(t)r(t)\,dW(t), \quad t \in [0, T^*],\ \Theta(t), \sigma(t) \in \mathbb{R}, \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.5.2 Invertierung der Zinsstrukturkurve

Es stellt sich nun die Frage, wie die verschiedenen Modellparameter der in Kapitel 2.5.1 dargestellten Martingalmodelle bestimmt werden sollen. Es ist möglich zu zeigen, dass der Diffusionsterm der gleiche unter P und Q ist. Somit ist es grundsätzlich möglich, die Q-Diffusionsparameter mittels der P-Daten zu ermitteln. Für die Ermittlung des Driftterms sei erwähnt, dass der Finanzmarkt das Martingalmaß bestimmt. Man muss daher Preisinformationen vom Finanzmarkt verwenden, um Informationen über die Q-Driftparameter zu erhalten. Die übliche Methode ist die der **Invertierung der Zinsstrukturkurve**, die folgendermaßen definiert wird:

1. Es muss ein bestimmtes Modell, welches einen oder mehrere Parameter hat, gewählt werden. Den ganzen Parametervektor bezeichnet man mit $\mu \in \mathbb{R}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Parameter ist. Die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ ist somit durch
$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(t, r(t); \mu)\, dt + \sigma(t, r(t); \mu)\, dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.60}$$
gegeben. $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind deterministische Funktionen und $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$. Ferner existiert eine eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.60), welche zum Beispiel sichergestellt werden kann, wenn die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt sind.

2. Man muss die Zinsstrukturgleichung im Bereich $[0, T] \times \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} F_t^T(t, r) + \alpha(t, r; \mu) F_r^T(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r; \mu) F_{rr}^T(t, r) - r F^T(t, r) = 0, \\ F^T(T, r) = 1, \end{aligned}$$
für jeden Fälligkeitszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ lösen, wobei $F^T \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}_+^*$-wertige Funktion ist. Auf diese Art und Weise wird die theoretische Zinsstruktur durch
$$p(t, T; \mu) = F^T(t, r(t); \mu), \quad 0 \le t \le T \le T^*,$$
berechnet. Es sei erwähnt, dass die Form der Zinsstruktur von der Wahl des Parametervektors abhängt und dass diese Wahl noch nicht getroffen worden ist.

3. Man nimmt Preisdaten vom Anleihenmarkt: Insbesondere wird heute, das heißt zum Zeitpunkt $t = 0$, $p(0, T)$ für alle $T \in [0, T^*]$ beobachtet. Diese empirische Zinsstruktur bezeichnet man mit $\{p^*(0, T);\, T \in [0, T^*]\}$.

4. Den Vektor μ wählt man nun so, dass sich die theoretische Zinsstruktur $\{p(0, T; \mu);\, T \in [0, T^*]\}$ an die empirische Zinsstruktur $\{p^*(0, T);\, T \in [0, T^*]\}$ so gut wie möglich anpasst. Dies ergibt den geschätzten Parametervektor μ^*.

5. μ^* setzt man in α und σ ein und bezeichnet diese nun mit α^* und σ^*. Es ist somit bestimmt worden, mit welchem Martingalmaß gearbeitet wird.

6. Nun können Preise von Derivaten, denen der Momentanzinssatz r zugrunde liegt, ermittelt werden. Als Beispiel sei ein Derivat $\mathcal{X} = \Gamma(r(T))$ mit Ausübungszeitpunkt $T \in [0, T^*]$ gegeben. Der eindimensionale Preisprozess $(\Pi(t;\Gamma))_{t=0}^{T}$ dieses Derivats ist durch
$$\Pi(t;\Gamma) = G^T(t, r(t)), \quad t \in [0, T],$$
gegeben, wobei die $\mathbb{R}$-wertige Funktion $G^T \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ die Zinsstrukturgleichung im Bereich $[0,T] \times \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} G_t^T(t,r) + \alpha^*(t,r)G_r^T(t,r) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,r))^2 G_{rr}^T(t,r) - rG^T(t,r) = 0, \\ G^T(T,r) = \Gamma(r), \end{aligned}$$
löst.

Wenn man diese Methode ohne vernünftige Zeitgrenzen durchführt, ist es natürlich besonders wichtig, dass die involvierten partiellen Differentialgleichungen leicht zu lösen sind.

Einige von den in Kapitel 2.5.1 dargestellten Martingalmodellen erweisen sich als analytisch leichter zu handhaben als die anderen und dies führt zu der Definition der affinen Zinsstruktur.

2.5.3 Affine Zinsstruktur

Definition und Existenz

Definition 2.41 *Man betrachtet ein Modell, in welchem die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes* $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ *durch*
$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(t, r(t))\, dt + \sigma(t, r(t))\, dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.61}$$
gegeben ist. $\alpha : [0,T^*]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\sigma : [0,T^*]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind deterministische Funktionen und* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *ist ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich* $\mathbb{F}$. *Ferner existiert eine eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung* (2.61), *welche zum Beispiel sichergestellt werden kann, wenn die Bedingungen der Proposition* A.35 *erfüllt sind. Man sagt, dass dieses Modell eine* ***affine Zinsstruktur*** *besitzt, wenn die Zinsstruktur* $\{p(t,T);\, 0 \le t \le T \le T^*\}$ *für alle* $T \in [0,T^*]$ *und alle* $t \in [0,T]$ *die Form*
$$p(t,T) = F^T(t, r(t))$$
hat, wobei die $\mathbb{R}_+^*$*-wertige Funktion* $F^T \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ *für alle* $T \in [0,T^*]$ *durch*
$$F^T(t,r) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)r\}, \quad (t,r) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \tag{2.62}$$
gegeben ist. $A : [0,T] \times [0,T^*] \to \mathbb{R}$ *und* $B : [0,T] \times [0,T^*] \to \mathbb{R}$ *sind deterministische Funktionen.*

A und B sind Funktionen mit zwei nichtnegativen, reellen Variablen t und T. Es ist jedoch leichter, A und B als Funktionen von t und T als Parameter zu sehen.

Die Existenz einer affinen Zinsstruktur ist aus analytischer und rechnerischer Sicht sehr angenehm. Es ist daher von beträchtlichem Interesse, so eine Struktur zu finden. Insbesondere stellt sich folgende Frage: Für welche α und σ in der Q-Dynamik des Momentanzinssatzes r ergibt sich eine affine Zinsstruktur?

Proposition 2.42 *Man betrachtet ein Modell, in welchem die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch*

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(t, r(t))\,dt + \sigma(t, r(t))\,dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.63}$$

gegeben ist. $\alpha : [0, T^*]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, T^*]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind deterministische Funktionen und $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ist ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$. Ferner existiert eine eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.63), welche zum Beispiel sichergestellt werden kann, wenn die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt sind. α und σ seien durch

$$\begin{aligned} \alpha(t, r) &= \beta(t)r + \gamma(t), \\ \sigma(t, r) &= \sqrt{\max\{\delta(t)r + \epsilon(t), 0\}}, \end{aligned} \quad (t, r) \in [0, T^*] \times \mathbb{R},$$

gegeben, wobei $\beta : [0, T^*] \to \mathbb{R}$, $\gamma : [0, T^*] \to \mathbb{R}$, $\delta : [0, T^*] \to \mathbb{R}$ und $\epsilon : [0, T^*] \to \mathbb{R}$ deterministische Funktionen sind. Dann erlaubt dieses Modell eine affine Zinsstruktur der Form (2.62), wobei die Funktionen $A : [0, T] \times [0, T^*] \to \mathbb{R}$ und $B : [0, T] \times [0, T^*] \to \mathbb{R}$ folgendes Gleichungssystem im Bereich $[0, T] \times [0, T^*]$ lösen:

$$\begin{aligned} B_t(t, T) + \beta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t, T) &= -1, \\ B(T, T) &= 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned} A_t(t, T) &= \gamma(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\epsilon(t)B^2(t, T), \\ A(T, T) &= 0. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Der Index in $B_t(t, T)$ und $A_t(t, T)$ kennzeichnet die partielle Ableitung nach t.

Beweis Der Beweis der Proposition 2.42 wird im Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] im Kapitel 17.3.1 auf den Seiten 256 und 257 erläutert. □

Da die Gleichung (2.64) nur die Funktion B enthält, löst man diese zuerst. Die Lösung B setzt man dann in (2.65) ein und diese Gleichung wird integriert, um A zu erhalten.

Es stellt sich nun die Frage, ob es nur für affine α und σ^2 eine affine Zinsstruktur gibt. Generell ist das nicht der Fall. Wenn jedoch gefordert wird, dass α und σ^2 zeitabhängig sind, ist die Affinität von α und σ^2 eine notwendige Bedingung für die Existenz einer affinen Zinsstruktur. Von den in Kapitel 2.5.1 dargestellten Martingalmodellen besitzen alle außer dem Dothan Modell und dem Black-Derman-Toy Modell eine affine Zinsstruktur.

Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Diskussion

Es gibt gute wahrscheinlichkeitstheoretische Gründe, warum einige von den in Kapitel 2.5.1 dargestellten Martingalmodellen leichter zu handhaben sind als die anderen. Im Vasiček Modell, im Ho-Lee Modell und im Hull-White Modell (erweitertes Vasiček Modell) wird für die Darstellung des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ eine lineare stochastische Differentialgleichung verwendet. Solche stochastische Differentialgleichungen sind leicht zu lösen und man kann zeigen, dass r normalverteilt ist. Anleihenpreise zum Zeitpunkt $t = 0$ sind durch Ausdrücke wie

$$p(0,T) = \mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,ds\right\}\right], \quad T \in [0,T^*],$$

gegeben, und die Eigenschaft, dass r normalverteilt ist, wird vom Integral $\int_0^T r(s)\,ds$ übernommen. Die Ermittlung von Anleihenpreisen in einem Modell mit einem normalverteilten Momentanzinssatz läuft also auf das Problem hinaus, den Erwartungswert einer lognormalverteilten stochastischen Variable zu berechnen. Diese rein wahrscheinlichkeitstheoretische Methode kann tatsächlich für alle linearen Modelle, die in Kapitel 2.5.1 dargestellt werden, ausgeführt werden. Von einem rechnerischen Standpunkt aus gesehen ist es jedoch einfacher das Gleichungssystem (2.64)–(2.65) zu lösen.

Im Gegensatz zu den linearen Modellen betrachtet man nun das Dothan Modell. Dieses Modell für den Momentanzinssatz r ist dasselbe wie das Black-Scholes-Modell für den Preisprozess einer zugrunde liegenden Aktie. Man könnte daher leicht glauben, dass dieses Modell rechnerisch sehr einfach zu handhaben ist. Dies ist jedoch aus folgenden Gründen nicht der Fall: Im Dothan Modell ist der Momentanzinssatz r lognormalverteilt. Also muss die Verteilung eines Integrals $\int_0^T r(s)\,ds$, $T \in [0,T^*]$, von lognormalverteilten stochastischen Variablen bestimmt werden, um Anleihenpreise zu ermitteln. Das Integral von lognormalverteilten Variablen ist jedoch nicht so einfach zu berechnen. Ferner hat das Modell die Eigenschaft, dass der Erwartungswert des Geldkontos unendlich ist. Für dieses sowie für das CIR Modell und für das Hull-White Modell (erweitertes CIR Modell) nimmt man das Quadrat der Lösung einer linearen stochastischen Differentialgleichung und berechnet mithilfe von diesem die Anleihenpreise.

Aus rein rechnerischer Sicht spricht also viel für die Verwendung einer linearen stochastischen Differentialgleichung, um den Momentanzinssatz r zu beschreiben. Allerdings stößt man bei diesen Modellen auf das Problem, dass r normalverteilt ist und daher negativ werden kann. Von einem ökonomischen Standpunkt aus gesehen ist dies natürlich unvernünftig. Im Dothan Modell ist der Momentanzinssatz r jedoch lognormalverteilt und daher immer positiv. Auch im CIR Modell ist der Momentanzinssatz r immer positiv.

2.5.4 Einige Standardmodelle

In diesem Kapitel 2.5.4 wird die Theorie der affinen Zinsstruktur angewendet, um die bekanntesten affinen Modelle zu studieren.

Das Vasiček Modell

Proposition 2.43 (Vasiček Zinsstruktur) *Man betrachtet das Vasiček Modell, in welchem die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch*

$$\begin{aligned} dr(t) &= (b - ar(t))\,dt + \sigma\,dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

gegeben ist, wobei $b, a, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$ sind und $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass r die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.66) ist. Die Anleihenpreise sind in diesem Modell für alle $T \in [0, T^*]$ und alle $t \in [0, T]$ durch

$$p(t,T) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)r(t)\}$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a}(T-t)\right), \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*], \\ A(t,T) &= \frac{\left(ab - \frac{\sigma^2}{2}\right)(B(t,T) - T + t)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(t,T)}{4a}, \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*], \end{aligned}$$

ist.

Beweis Angesichts der affinen Form des Driftterms und des Diffusionsterms in der Q-Dynamik (2.66) des Momentanzinssatzes r kann man die Proposition 2.42 anwenden. Die Anleihenpreise sind daher für alle $T \in [0, T^*]$ und alle $t \in [0, T]$ durch

$$p(t,T) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)r(t)\}$$

gegeben, wobei die Funktionen A und B folgendes Gleichungssystem im Bereich $[0,T] \times [0,T^*]$ lösen:

$$\begin{aligned} B_t(t,T) - aB(t,T) &= -1, \\ B(T,T) &= 0. \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned} A_t(t,T) &= bB(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T), \\ A(T,T) &= 0. \end{aligned} \tag{2.68}$$

(2.67) ist für jedes fixe $T \in [0, T^*]$ eine einfache lineare Differentialgleichung in $t \in [0,T]$ und hat die Lösung

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right), \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*]. \tag{2.69}$$

Wenn man (2.69) in die Gleichung (2.68) einsetzt und diese dann nach t integriert, folgt

$$A(t,T) = -\,b\int_t^T B(s,T)\,ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2(s,T)\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{b}{a}\int_t^T \left(1-e^{-a(T-s)}\right) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T \left(1-2e^{-a(T-s)}+e^{-2a(T-s)}\right) ds \\
&= -\frac{b}{a}\left((T-t)-\left(\frac{1}{a}e^{-a(T-s)}\Big|_t^T\right)\right) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left((T-t)-2\left(\frac{1}{a}e^{-a(T-s)}\Big|_t^T\right)+\left(\frac{1}{2a}e^{-2a(T-s)}\Big|_t^T\right)\right) \\
&= -\frac{b}{a}\left((T-t)-\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\right) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left((T-t)-\frac{2}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)+\frac{1}{2a}\left(1-e^{-2a(T-t)}\right)\right) \\
&= -\frac{b}{a}\left((T-t)-B(t,T)\right) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left((T-t)-B(t,T)-\frac{1}{2a}\left(2-2e^{-a(T-t)}-1+e^{-2a(T-t)}\right)\right) \\
&= -\frac{b}{a}\left((T-t)-B(t,T)\right)+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left((T-t)-B(t,T)-\frac{a}{2a^2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right) \\
&= -\frac{b}{a}\left((T-t)-B(t,T)\right)+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left((T-t)-B(t,T)-\frac{a}{2}B^2(t,T)\right) \\
&= \frac{-ab((T-t)-B(t,T))+\frac{\sigma^2}{2}((T-t)-B(t,T))}{a^2}-\frac{\sigma^2B^2(t,T)}{4a} \\
&= \frac{ab(B(t,T)-T+t)-\frac{\sigma^2}{2}(B(t,T)-T+t))}{a^2}-\frac{\sigma^2B^2(t,T)}{4a} \\
&= \frac{\left(ab-\frac{\sigma^2}{2}\right)(B(t,T)-T+t)}{a^2}-\frac{\sigma^2B^2(t,T)}{4a}, \quad (t,T)\in[0,T]\times[0,T^*].
\end{aligned}
$$

□

Das Ho-Lee Modell

Proposition 2.44 (Ho-Lee Zinsstruktur) *Man betrachtet das Ho-Lee Modell, in welchem die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes* $r=(r(t))_{t=0}^{T^*}$ *durch*

$$
\begin{aligned}
dr(t) &= \Theta(t)\,dt+\sigma\,dW(t), \quad t\in[0,T^*], \\
r(0) &= r_0, \quad r_0\in\mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

gegeben ist, wobei $\sigma\in\mathbb{R}$ *ist,* $W=(W(t))_{t=0}^{T^*}$ *ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich* $\mathbb{F}$ *ist und man die Funktion* $\Theta:[0,T^*]\to\mathbb{R}$ *so wählt, dass sich die theoretische Zinsstruktur* $\{p(0,T);\,T\in[0,T^*]\}$ *zum Zeitpunkt* $t=0$ *an die empirische Zinsstruktur* $\{p^*(0,T);\,T\in[0,T^*]\}$ *anpasst. Die Anleihenpreise sind in diesem Modell für alle* $T\in[0,T^*]$ *und alle* $t\in[0,T]$ *durch*

$$
p(t,T)=\frac{p^*(0,T)}{p^*(0,t)}\exp\left\{(T-t)f^*(0,t)-\frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2-(T-t)r(t)\right\}
$$

gegeben, wobei $f^*(0,t)$ *den empirischen sofortigen Terminzinssatz kennzeichnet.*

Beweis Angesichts der affinen Form des Driftterms und des Diffusionsterms in der Q-Dynamik (2.70) des Momentanzinssatzes r kann man die Proposition 2.42 anwenden. Die Anleihenpreise sind daher für alle $T \in [0, T^*]$ und alle $t \in [0, T]$ durch

$$p(t, T) = \exp\{A(t, T) - B(t, T)r(t)\} \tag{2.71}$$

gegeben, wobei die Funktionen A und B folgendes Gleichungssystem im Bereich $[0, T] \times [0, T^*]$ lösen:

$$\begin{aligned} B_t(t, T) &= -1, \\ B(T, T) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_t(t, T) &= \Theta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t, T), \\ A(T, T) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Systems sind durch

$$B(t, T) = T - t, \quad (t, T) \in [0, T] \times [0, T^*], \tag{2.72}$$

$$A(t, T) = \int_t^T \Theta(s)(s - T)\, ds + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{(T - t)^3}{3}, \quad (t, T) \in [0, T] \times [0, T^*], \tag{2.73}$$

gegeben. Die Funktion Θ muss man nun so wählen, dass sich die theoretischen Zinsstruktur $\{p(0, T); T \in [0, T^*]\}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ an die beobachtete Zinsstruktur $\{p^*(0, T); T \in [0, T^*]\}$ anpasst. Man muss also ein Θ finden, sodass $p(0, T) = p^*(0, T)$ für alle $T \in [0, T^*]$ ist. Für alle $T \in [0, T^*]$ ist $p(0, T) = \exp\{A(0, T) - B(0, T)r(0)\}$ und $p^*(0, T) = \exp\left\{-\int_0^T f^*(0, s)\, ds\right\}$ (siehe Lemma 2.28). Somit muss

$$\int_0^T \Theta(s)(s - T)\, ds + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{T^3}{3} - Tr(0) = -\int_0^T f^*(0, s)\, ds, \quad T \in [0, T^*], \tag{2.74}$$

erfüllt sein, wobei $f^*(0, t)$ den empirischen sofortigen Terminzinssatz kennzeichnet. Wenn (2.74) zweimal partiell nach T abgeleitet wird, folgt

$$\begin{aligned} -\Theta(T) + \sigma^2 T &= -\frac{\partial f^*(0, T)}{\partial T}, \quad T \in [0, T^*], \\ \Leftrightarrow \Theta(T) &= \frac{\partial f^*(0, T)}{\partial T} + \sigma^2 T, \quad T \in [0, T^*]. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Setzt man (2.75) in (2.73) ein, gilt

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \int_t^T \left(\frac{\partial f^*(0, s)}{\partial s} + \sigma^2 s\right)(s - T)\, ds + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{(T - t)^3}{3} \\ &= \int_t^T s \frac{\partial f^*(0, s)}{\partial s}\, ds - T \int_t^T \frac{\partial f^*(0, s)}{\partial s}\, ds + \int_t^T \sigma^2(s^2 - sT)\, ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\sigma^2}{6}(T^3-3T^2t+3Tt^2-t^3)\\
&=\int_t^T\left(-f^*(0,s)+f^*(0,s)+s\frac{\partial f^*(0,s)}{\partial s}\right)ds-T(f^*(0,T)-f^*(0,t))\\
&\quad+\sigma^2\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}T\bigg|_t^T\right)+\frac{\sigma^2}{6}(T^3-3T^2t+3Tt^2-t^3)\\
&=-\int_t^T f^*(0,s)\,ds+\int_t^T\frac{d(sf^*(0,s))}{ds}\,ds-T(f^*(0,T)-f^*(0,t))\\
&\quad+\frac{\sigma^2}{6}\left(2T^3-2t^3-3T^3+3Tt^2+T^3-3T^2t+3Tt^2-t^3\right)\\
&=-\int_t^T f^*(0,s)\,ds+Tf^*(0,T)-tf^*(0,t)-T(f^*(0,T)-f^*(0,t))\\
&\quad-\frac{\sigma^2}{6}\left(3t^3-6Tt^2+3T^2t\right)\\
&=-\left(\int_0^T f^*(0,s)\,ds-\int_0^t f^*(0,s)\,ds\right)+(T-t)f^*(0,t)-\frac{\sigma^2}{2}t\left(T^2-2Tt+t^2\right)\\
&=-\int_0^T f^*(0,s)\,ds+\int_0^t f^*(0,s)\,ds\\
&\quad+(T-t)f^*(0,t)-\frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2,\quad (t,T)\in[0,T]\times[0,T^*].
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

Als nächstes setzt man (2.72) und (2.76) in die Preisgleichung (2.71) ein und es folgt für alle $T\in[0,T^*]$ und alle $t\in[0,T]$

$$
\begin{aligned}
p(t,T)&=\frac{\exp\left\{-\int_0^T f^*(0,s)\,ds\right\}}{\exp\left\{-\int_0^t f^*(0,s)\,ds\right\}}\exp\left\{(T-t)f^*(0,t)-\frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2-(T-t)r(t)\right\}\\
&=\frac{p^*(0,T)}{p^*(0,t)}\exp\left\{(T-t)f^*(0,t)-\frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2-(T-t)r(t)\right\}.
\end{aligned}
$$

□

Das CIR Modell

Proposition 2.45 (CIR Zinsstruktur) *Man betrachtet das CIR Modell, in welchem die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes* $r=(r(t))_{t=0}^{T^*}$ *durch*

$$
\begin{aligned}
dr(t)&=a(b-r(t))\,dt+\sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t),\quad t\in[0,T^*],\\
r(0)&=r_0,\quad r_0\in\mathbb{R}_+,
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

gegeben ist, wobei $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ sind, $\sigma \in \mathbb{R}$ ist und $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Ferner sei r die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.77)*. Die Anleihenpreise sind in diesem Modell für alle $T \in [0, T^*]$ und alle $t \in [0, T]$ durch*

$$p(t, T) = A_0(T - t) \cdot \exp\{-B(T - t)r(t)\}$$

gegeben, wobei

$$B(x) = \frac{2(e^{\gamma x} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma x} - 1) + 2\gamma}, \quad x \in [0, T],\ T \in [0, T^*],$$

$$A_0(x) = \left(\frac{2\gamma \cdot \exp\left\{(\gamma + a)(\frac{x}{2})\right\}}{(\gamma + a)(e^{\gamma x} - 1) + 2\gamma}\right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}, \quad x \in [0, T],\ T \in [0, T^*],$$

und

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

ist.

Beweis Der Beweis der Proposition 2.45 wird im Artikel „A Theory of the Term Structure of Interest Rates“ von John Cox, Jonathan Ingersoll und Stephen Ross im Journal *Econometrica* [8] auf den Seiten 385 bis 408 erläutert. □

Das Hull-White Modell (erweitertes Vasiček Modell)

In diesem Kapitel wird eine vereinfachte Version des Hull-White Modells (erweitertes Vasiček Modell) studiert. Die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ ist durch

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\Theta(t) - ar(t))\,dt + \sigma\,dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ r(0) &= r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.78}$$

gegeben, wobei $\Theta : [0, T^*] \to \mathbb{R}$ eine deterministische Zeitfunktion, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\sigma \in \mathbb{R}$ und $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ ein eindimensionaler Q-Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Ferner seien die Bedingungen der Proposition A.35 erfüllt, sodass r die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.78) ist. In diesem Modell werden a und σ üblicherweise so gewählt, dass man eine angenehme Volatilitätsstruktur erhält, während Θ so gewählt wird, dass sich die theoretische Zinsstruktur $\{p(0, T);\, T \in [0, T^*]\}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ an die beobachtete Zinsstruktur $\{p^*(0, T);\, T \in [0, T^*]\}$ anpasst.

Lemma 2.46 *Man betrachtet die vereinfachte Version des Hull-White Modells* (*erweitertes Vasiček Modell*)*, in welcher die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ durch* (2.78) *gegeben ist. Überdies fixiert man eine beliebige empirische Zinsstruktur $\{p^*(0, T);\, T \in [0, T^*]\}$, die nur die Bedingung hat, dass die Abbildung $T \mapsto p^*(0, T)$ für alle $T \in [0, T^*]$ zweimal nach T differenzierbar ist. $f^*(0, T)$ kennzeichnet den empirischen sofortigen Terminzinssatz. Die Funktion Θ wird so gewählt, dass*

$$\Theta(T) = f_T^*(0, T) + \dot{g}(T) + a(f^*(0, T) + g(T)), \quad T \in [0, T^*], \tag{2.79}$$

ist, wobei die Funktion $g : [0, T^*] \to \mathbb{R}_+$ durch

$$g(T) = \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-aT}\right)^2 \tag{2.80}$$

definiert wird und der Index in $f_T^*(0,T)$ die partielle Ableitung nach T kennzeichnet. Dann wird eine Zinsstruktur $\{p(0,T);\, T \in [0,T^*]\}$ erzeugt, sodass $p(0,T) = p^*(0,T)$ für alle $T \in [0,T^*]$ ist.

Beweis Angesichts der affinen Form des Driftterms und des Diffusionsterms in der Q-Dynamik (2.78) des Momentanzinssatzes r kann man die Proposition 2.42 anwenden. Die Anleihenpreise sind daher für alle $T \in [0,T^*]$ und alle $t \in [0,T]$ durch

$$p(t,T) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)r(t)\}$$

gegeben, wobei die Funktionen A und B folgendes Gleichungssystem im Bereich $[0,T] \times [0,T^*]$ lösen:

$$\begin{aligned} B_t(t,T) - aB(t,T) &= -1, \\ B(T,T) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_t(t,T) &= \Theta(t)B(t,T) - \frac{\sigma^2}{2}B^2(t,T), \\ A(T,T) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Systems sind durch

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right), \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*], \\ A(t,T) &= \int_t^T \left(-\Theta(s)B(s,T) + \frac{\sigma^2}{2}B^2(s,T)\right) ds, \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*], \end{aligned} \tag{2.81}$$

gegeben. Die partiellen Ableitungen von $B(t,T)$ und $A(t,T)$ nach T sind im Bereich $[0,T] \times [0,T^*]$ durch

$$\begin{aligned} B_T(t,T) &= e^{-a(T-t)} \qquad (2.82) \\ A_T(t,T) &= \frac{\partial}{\partial T}\int_t^T \left(-\Theta(s)\frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-s)}\right) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-a(T-s)}\right)^2\right) ds \\ &= \int_t^T \frac{\partial}{\partial T}\left(-\Theta(s)\frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-s)}\right)\right) ds + \int_t^T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-a(T-s)}\right)^2\right) ds \\ &= -\int_t^T \Theta(s)e^{-a(T-s)}\, ds + \frac{\sigma^2}{a}\int_t^T \left(e^{-a(T-s)} - e^{-2a(T-s)}\right) ds \end{aligned}$$

$$= - \int_t^T \Theta(s) e^{-a(T-s)}\, ds + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2 \tag{2.83}$$

gegeben. Laut Annahme ist die Funktion Θ durch

$$\Theta(T) = f_T^*(0,T) + \dot{g}(T) + a(f^*(0,T) + g(T)), \quad T \in [0, T^*], \tag{2.84}$$

gegeben, wobei $f^*(0,T)$ den empirischen sofortigen Terminzinssatz kennzeichnet und die Funktion g durch

$$g(T) = \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-aT}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2} B^2(0,T) \tag{2.85}$$

definiert ist. Nun wird eine Funktion $x : [0, T^*] \to \mathbb{R}$ durch

$$x(T) = f^*(0,T) + g(T) \tag{2.86}$$

definiert, das heißt für alle $T \in [0, T^*]$ ist $\dot{x}(T) = f_T^*(0,T) + \dot{g}(T)$. Dann kann man (2.84) auch als

$$\Theta(T) = \dot{x}(T) + ax(T), \quad T \in [0, T^*],$$

darstellen. Somit ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(T) &= \Theta(T) - ax(T), \quad T \in [0, T^*], \\ x(0) &= f^*(0,0) = r(0). \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$x(T) = \int_0^T \Theta(s) e^{-a(T-s)}\, ds + e^{-aT} r(0), \quad T \in [0, T^*]. \tag{2.87}$$

Man setzt nun (2.85) und (2.87) in (2.86) ein und somit gilt

$$\begin{aligned} f^*(0,T) &= x(T) - g(T) \\ &= \int_0^T \Theta(s) e^{-a(T-s)}\, ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-aT}\right)^2 + e^{-aT} r(0), \quad T \in [0, T^*]. \end{aligned} \tag{2.88}$$

(2.88) enthält die partielle Ableitung von $A(0,T)$ nach T (2.83) und die partielle Ableitung von $B(0,T)$ nach T (2.82). Es folgt also

$$f^*(0,T) = -A_T(0,T) + B_T(0,T) r(0), \quad T \in [0, T^*].$$

Somit gilt für alle $T \in [0, T^*]$

$$\begin{aligned} p^*(0,T) &= \exp\left\{ - \int_0^T f^*(0,s)\, ds \right\} = \exp\left\{ \int_0^T \left(A_s(0,s) - B_s(0,s) r(0)\right)\, ds \right\} \\ &= \exp\left\{A(0,T) - B(0,T) r(0)\right\} = p(0,T). \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.47 (Hull-White Zinsstruktur) *Man betrachtet die vereinfachte Version des Hull-White Modells (erweitertes Vasiček Modell), in welcher die Q-Dynamik des Momentanzinssatzes* $r = (r(t))_{t=0}^{T^*}$ *durch* (2.78) *gegeben ist. Wenn die Zinsstrukturkurve invertiert wird, indem* Θ *entsprechend der Gleichung* (2.79) *und* $g : [0, T^*] \to \mathbb{R}_+$ *entsprechend der Gleichung* (2.80) *gewählt wird, sind die Anleihenpreise für alle* $T \in [0, T^*]$ *und alle* $t \in [0, T]$ *durch*

$$p(t,T) = \frac{p(0,T)}{p(0,t)} \exp\left\{ f^*(0,t)B(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T)(1-e^{-2at}) - B(t,T)r(t) \right\}$$

gegeben, wobei

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right), \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*],$$

ist und $f^*(0,t)$ *den empirischen sofortigen Terminzinssatz kennzeichnet.*

Beweis Für den Beweis der Proposition 2.47 verwendet man das Lemma 2.46 und den Beweis des Lemmas 2.46. Zuerst setzt man die Gleichung (2.79) für Θ in die Gleichung (2.81) für $A(t,T)$ ein und integriert diese. Das Resultat dieser Integration setzt man dann in die Preisgleichung

$$p(t,T) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)r(t)\}, \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*], \tag{2.89}$$

ein. Es gilt also

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= \int_t^T \left(-\Theta(s)B(s,T) + \frac{\sigma^2}{2}B^2(s,T) \right) ds \\
&= \int_t^T \left(-\left\{ f_s^*(0,s) + \dot{g}(s) + a(f^*(0,s) + g(s)) \right\} B(s,T) + \frac{\sigma^2}{2}B^2(s,T) \right) ds \\
&= \underbrace{- \int_t^T \left(f_s^*(0,s) + af^*(0,s) \right) B(s,T)\, ds}_{I_1} \\
&\quad \underbrace{- \int_t^T \left((\dot{g}(s) + ag(s))B(s,T) - \frac{\sigma^2}{2}B^2(s,T) \right) ds,}_{I_2} \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*],
\end{aligned}$$

wobei $f^*(0,s)$ den empirischen sofortigen Terminzinssatz kennzeichnet und

$$\begin{aligned}
B(s,T) &= \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-s)}\right), \quad (s,T) \in [0,T] \times [0,T^*], \\
g(s) &= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-as}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2}B^2(0,s), \quad s \in [0,T^*], \\
\dot{g}(s) &= \frac{\sigma^2}{a}\left(e^{-as} - e^{-2as}\right), \quad s \in [0,T^*],
\end{aligned}$$

ist. I_1 und I_2 werden einzeln integriert. Es folgt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_t^T \left(f_s^*(0,s) + af^*(0,s)\right) B(s,T)\,ds \\
&= \int_t^T \left(\frac{\partial(f^*(0,s)B(s,T))}{\partial s} - f^*(0,s)\frac{\partial B(s,T)}{\partial s} + af^*(0,s)B(s,T)\right) ds \\
&= \int_t^T \left(\frac{\partial(f^*(0,s)B(s,T))}{\partial s} + f^*(0,s)e^{-a(T-s)} + f^*(0,s)\left(1-e^{-a(T-s)}\right)\right) ds \\
&= f^*(0,T)B(T,T) - f^*(0,t)B(t,T) + \int_t^T f^*(0,s)\,ds \\
&= -f^*(0,t)B(t,T) + \int_t^T f^*(0,s)\,ds, \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*],
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_t^T (\dot g(s) + ag(s))B(s,T)\,ds - \int_t^T \frac{\sigma^2}{2}B^2(s,T)\,ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T \left(\left(1-e^{-a(T-s)}\right)\left(2e^{-as} - 2e^{-2as} + \left(1-e^{-as}\right)^2\right) - \left(1-e^{-a(T-s)}\right)^2\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T \left(\left(1-e^{-a(T-s)}\right)\left(2e^{-as} - 2e^{-2as} + 1 - 2e^{-as} + e^{-2as}\right) - \left(1-e^{-a(T-s)}\right)^2\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T \left(1-e^{-a(T-s)}\right)\left(1 - e^{-2as} - 1 + e^{-a(T-s)}\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T \left(-e^{-2as} + e^{-a(T-s)} + e^{-a(T+s)} - e^{-2a(T-s)}\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(\frac{1}{2a}e^{-2as} + \frac{1}{a}e^{-a(T-s)} - \frac{1}{a}e^{-a(T+s)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-s)}\Big|_t^T\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{4a}\cdot\frac{1}{a^2}\left(e^{-2as} + 2e^{-a(T-s)} - 2e^{-a(T+s)} - e^{-2a(T-s)}\Big|_t^T\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{4a}\cdot\frac{1}{a^2}\left(e^{-2aT} + 1 - 2e^{-2aT} - e^{-2at} - 2e^{-a(T-t)} + 2e^{-a(T+t)} + e^{-2a(T-t)}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{4a}\cdot\frac{1}{a^2}\left(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} - e^{-2at} + 2e^{-a(T+t)} - e^{-2aT}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{4a}\cdot\frac{1}{a^2}\left(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} - e^{-2at} + 2e^{-a(T-t)-2at} - e^{-2a(T-t)-2at}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{4a} \cdot \frac{1}{a^2} \left(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}\right) \left(1 - e^{-2at}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{4a} \cdot \frac{1}{a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2 \left(1 - e^{-2at}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)(1 - e^{-2at}), \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*].
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= -\, I_1 - I_2 \\
&= f^*(0,t)B(t,T) - \int_t^T f^*(0,s)\, ds \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)(1 - e^{-2at}), \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*].
\end{aligned} \tag{2.90}
$$

(2.90) setzt man nun in die Preisgleichung (2.89) ein und es folgt für alle $T \in [0,T^*]$ und alle $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
p(t,T) &= \exp\left\{ - \int_t^T f^*(0,s)\, ds \right\} \\
&\quad \times \exp\left\{ f^*(0,t)B(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)(1 - e^{-2at}) - B(t,T)r(t) \right\} \\
&= \exp\left\{ - \int_0^T f^*(0,s)\, ds + \int_0^t f^*(0,s)\, ds \right\} \\
&\quad \times \exp\left\{ f^*(0,t)B(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)(1 - e^{-2at}) - B(t,T)r(t) \right\} \\
&= \frac{\exp\left\{ - \int_0^T f^*(0,s)\, ds \right\}}{\exp\left\{ - \int_0^t f^*(0,s)\, ds \right\}} \\
&\quad \times \exp\left\{ f^*(0,t)B(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)(1 - e^{-2at}) - B(t,T)r(t) \right\} \\
&= \frac{p^*(0,T)}{p^*(0,t)} \exp\left\{ f^*(0,t)B(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)(1 - e^{-2at}) - B(t,T)r(t) \right\},
\end{aligned}
$$

wobei $\{p^*(0,T); T \in [0,T^*]\}$ die empirische Zinsstruktur ist. Laut Lemma 2.46 ist $p(0,T) = p^*(0,T)$ für alle $T \in [0,T^*]$. Somit folgt für alle $T \in [0,T^*]$ und alle $t \in [0,T]$

$$
p(t,T) = \frac{p(0,T)}{p(0,t)} \exp\left\{ f^*(0,t)B(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)(1 - e^{-2at}) - B(t,T)r(t) \right\},
$$

wobei

$$
B(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right), \quad (t,T) \in [0,T] \times [0,T^*],
$$

ist. □

Kapitel 3

Weiterentwicklung des Embedded Value

Die Ausführungen des gesamten Kapitels 3 sind dem Vortrag *Embedded Value – European Embedded Value – Market Consistent Embedded Value* von Laszlo Hrabovszki und Ute Kerres [9] und dem Vortrag *Embedded Value Workshop* von Towers Perrin/Tillinghast [13] entnommen.

Traditioneller Embedded Value (EV), European Embedded Value (EEV) und Market Consistent Embedded Value (MCEV):

Die Hauptkritikpunkte am Traditionellen Embedded Value sind die unzureichende Berücksichtigung von Optionen und Garantien, die Kapitalisierung der Prämien für das Kredit- und Marktrisiko und die geringe Einheitlichkeit von Annahmen und Methodik. Ferner ist der Embedded Value stark abhängig von ungewissen Planungsprämissen und manipulierbar. Um diesen Mängeln zu begegnen, wurden vom 2002 gegründeten CFO Forum (Chief Financial Officer Forum) als Reaktion auf Analystenkritik und als Abwehrmaßnahme gegen Fair-Value-Überlegungen der „International Accounting Standards Board" 12 European-Embedded-Value-Prinzipien festgelegt. Diese wurden am 05.05.2004 verabschiedet und bis Jahresende 2005 umgesetzt.

Das CFO Forum besteht aus den Finanzvorständen der europäischen Versicherungskonzerne AEGON N.V., Allianz SE, Assicurazioni Generali S.P.A., AXA SA, Aviva plc, BNP Paribas Assurance, CNP Assurances, Fortis B.V., Hannover Rückversicherung AG, IF P&C Insurance, ING Groep N.V., Legal & General Group plc, Mapfre S.A., Münchener Rück, Old Mutual plc, Prudential Assurance Company plc, Scottish Widows Group, The Standard Life Assurance Company, Swiss Reinsurance Company und Zurich Financial Services Group.[1]

Der entscheidende Punkt beim Market Consistent Embedded Value ist, dass zwingend marktkonsistente Kapitalmarktszenarien verlangt werden.

[1] aus CFO Forum [7]

3.1 European Embedded Value

3.1.1 European-Embedded-Value-Prinzipien

Im Folgenden werden die 12 vom CFO Forum festgelegten **European-Embedded-Value-Prinzipien** beschrieben.

Prinzipien 1–3: Einführung, erfasstes Geschäft, Definition des Embedded Value

1. Der Embedded Value ist ein Maß für den konsolidierten Wert des betrachteten Versicherungsgeschäfts für die Aktionäre.

2. Das mit dem Embedded Value erfasste Geschäft soll klar identifiziert und beschrieben werden.

3. Der Embedded Value ist der Barwert der Aktionärserträge aus den Kapitalanlagen des zugrunde liegenden Bestandes unter ausreichender Berücksichtigung der eingeschlossenen Risiken. Er besteht aus folgenden Komponenten:
   - freie Mittel, die dem betrachteten Geschäft zuzuordnen sind,
   - erforderliches Kapital abzüglich Kapitalbindungskosten,
   - Wert des zukünftigen Finanzflusses für die Aktionäre.

   Der Wert des künftigen Neugeschäfts ist ausgeschlossen.

Prinzipien 4–6: freie Mittel, erforderliches Kapital, Present Value In Force

4. Die freien Mittel sind der Marktwert (zum Berechnungszeitpunkt) allen Kapitals und Überschusses, die dem betrachteten Geschäft zugeordnet sind, jedoch nicht zur Deckung der Verbindlichkeiten benötigt werden.

5. Das erforderliche Kapital soll alle Werte enthalten, die nicht zur Deckung der Verbindlichkeiten benötigt werden und deren Verteilung auf die Eigentümer beschränkt ist. Dabei sollen Kapitalbindungskosten in Ansatz gebracht werden.

6. Der Wert des zukünftigen Finanzflusses ist der Barwert der künftigen Ausschüttungen an die Aktionäre, der sich aus einer Projektion der Kapitalanlagen ergibt (Present Value In Force). Dieser Wert wird durch den Time Value of Options and Guarantees, das heißt durch den Zeitwert der Optionen und Garantien, (wie in Prinzip 7 definiert) reduziert.

Prinzipien 7–9: Optionen und Garantien, Neugeschäft, Annahmen für die Projektion

7. Der potentielle Einfluss aller finanziellen Optionen und Garantien auf den zukünftigen Finanzfluss für die Aktionäre muss berücksichtigt werden. Der Ansatz muss den Time Value of Options and Guarantees enthalten, der auf stochastischen Techniken basiert, die konsistent mit der Methodik und den Annahmen des Embedded Value sind.

8. Neugeschäft entsteht durch den Verkauf neuer Verträge in der Bewertungsperiode. Der Wert des Neugeschäfts schließt den Wert künftiger Erneuerungen und erwarteter künftiger Vertragsänderungen dieser Neuverträge ein. Der Embedded Value soll nur den vorhandenen Bestand berücksichtigen und künftiges Neugeschäft ausschließen.

9. Die Schätzung geeigneter (nicht-ökonomischer) Annahmen soll vergangene, derzeitige und zukünftige Entwicklungen und alle relevanten Daten berücksichtigen. Zukünftige Änderungen sind zu berücksichtigen, wenn sie vernünftigerweise erwartet werden müssen. Es soll ein „active review" der Annahmen stattfinden.

Prinzipien 10–12: ökonomische Annahmen, überschussberechtigtes Geschäft, Veröffentlichung

10. Ökonomische Annahmen müssen untereinander und auch mit den beobachtbaren Marktdaten konsistent sein. Glättung von Markt- oder Bilanzwerten, unrealisierten Gewinnen oder Kapitalerträgen ist nicht zugelassen.

11. Bei dem Versicherungsgeschäft mit Gewinnbeteiligung sind Annahmen über künftige Gewinnanteilsätze und die Verteilung des Überschusses auf die Versicherungsnehmer und die Aktionäre zu treffen. Diese Annahmen sollen zu den übrigen Annahmen, der Unternehmenspraxis und den Marktgegebenheiten konsistent sein.

12. Resultate des Embedded Value sollen auf konsolidierter Basis für Geschäftssegmente, die mit der Rechnungslegung konsistent sind, veröffentlicht werden.

3.1.2 Merkmale des gewinnberechtigten Geschäfts

Die Überschussbeteiligung und die Aktionärserträge werden durch Puffer (auf Unternehmensebene, nicht auf Produktebene) sowohl auf Aktiv- als auch auf Passivseite geglättet. Dabei bestehen die Freiheiten des Versicherungsunternehmers vor allem aus der Auswahl der Kapitalanlagestrategie und dem Timing der Überschussbeteiligung. Empirisch lassen sich nicht – wie in der Finanztheorie unterstellt – immer streng rational handelnde Marktteilnehmer finden, da die Versicherungsnehmer die Optionen und Garantien nicht rational ausüben und auch das Management nicht immer rational agiert. Eine Lebensversicherung ist ein komplexes strukturiertes Produkt für das in der Regel keine replizierenden Portfolios am Kapitalmarkt verfügbar sind. Daher ist die Bewertung mittels stochastischer Szenarien erforderlich.

3.1.3 Herausforderungen beim Umgang mit Optionen und Garantien

Der Wert der Optionen für den einzelnen Versicherungsnehmer entspricht nicht den Kosten der Optionen für den Aktionär. Die Optionen werden innerhalb des Bestands ausgeübt und können zunächst durch Anpassung der zukünftigen Überschussbeteiligung kompensiert werden. Der Aktionär ist, wie an allen Geschäftsergebnissen, an den Options- und Garantiekosten nur mit einem kleinen Anteil beteiligt. Nur ein negativer Rohüberschuss, der nicht mehr von anderen Versicherungsnehmermitteln ausgeglichen werden kann, geht vollständig zu Lasten des Aktionärs.

Besonders wichtige Optionen und Garantien sind die Garantie eines Rechnungszinses, die Option zum Rückkauf, insbesondere zu garantierten Werten, garantierte Rentenumwandlungsfaktoren und die Option auf dynamische Anpassung mit den Rechnungsgrundlagen bei Abschluss. Die wesentlichen Gestaltungsrechte der Versicherungsnehmer sind der Storno, insbesondere bei garantierten Rückkaufswerten, und das Kapitalwahlrecht bei Rentenversicherungen sowie das Rentenwahlrecht bei Kapitalversicherungen.

3.1.4 Bestimmung des Time Value of Options and Guarantees (TVOG)

Der Time Value of Options and Guarantees wird in der Regel mit stochastischen Techniken ermittelt, die mit Methodik und Annahmen des Embedded Value konsistent sind. Die verwendete Technik sollte eine zu den übrigen Annahmen konsistente, stochastische Variation der künftigen ökonomischen Verhältnisse beinhalten. Der Einfluss des Managements auf die Auswirkung von Optionen und Garantien kann in die Bewertung einbezogen werden. Dann muss aber auch eine entsprechende Reaktion der Versicherungsnehmer berücksichtigt werden.

Bisher hat man lediglich eine deterministische Projektion durchgeführt, was der Betrachtung eines einzelnen Szenarios entspricht. Nun betrachtet man eine Vielzahl von verschiedenen Szenarien (in der Regel rund 1000).

Definition 3.1 *Der **Time Value of Options and Guarantees** ist der Unterschied aus dem deterministischen Present Value of Future Profits, der für „best estimate“ Annahmen (= mittlere der $x000$ Szenarien) berechnet wird, und aus dem Mittelwert des Present Value of Future Profits, der für $x000$ Szenarien berechnet wird.*

Beispiel 3.2 (illustrativ) Beispiel für eine Periode: Garantie= 4%, Mindestgewinnbeteiligung von 90% des Rohüberschusses, drei mögliche, gleichverteilte Ausgänge

			Versicherungsnehmer	**Aktionär**
	$\nearrow$	1060	1058	2
1000	$\longrightarrow$	1040	1040	0
	$\searrow$	1020	1040	−20

$$\begin{aligned} &\text{TVOG} \\ &:= \text{PVFP des mittleren Szenarios} - \text{Mittelwert des PVFP über die} \\ &\quad\ \text{stochastischen Szenarien} \\ &= 0 - \frac{1}{3}(2 + 0 - 20) = 6. \end{aligned}$$

Hier wird für den Present Value of Future Profits die Diskontierung für ein Jahr vernachlässigt.

3.1.5 Managementregeln

Da im Gegensatz zu den deterministischen Annahmen die Kapitalmarktszenarien stark schwanken und jeweils unterschiedliche Reaktionen des Managements darauf erfordern, sind statische Annahmen zum Management- und Kundenverhalten nicht ausreichend, sondern werden im Modell durch dynamische Regeln ersetzt. Diese dynamischen Entscheidungsregeln müssen die Aspekte der Unternehmenssteuerung möglichst weitgehend umfassen. Sie werden allerdings angesichts der Grenzen des stochastischen Modells meist auf folgende wesentliche Zielgrößen beschränkt:

- Solvabilität,
- freie Mittel (zum Beispiel freie Rückstellung für Beitragsrückerstattung, Bewertungsreserven),
- Rohüberschuss und Jahresüberschuss.

Diese Zielgrößen können vom Management durch Entscheidungen über die Nettoverzinsung, die Überschussbeteiligung, die Ausschüttungsquote und die Aktienquote beeinflusst werden. Die Managementregeln sollen die Zielsetzung des Unternehmens widerspiegeln. Diese kann zum Beispiel umsatz- und wettbewerbsorientiert oder mehr sicherheitsorientiert sein. Die Managementregeln im Unternehmensmodell sollten mit der Geschäftsleitung abgestimmt sein.

3.1.6 Effekt von Puffern

Die Berücksichtigung von Managementregeln kann bewirken, dass die Volatilität für den Versicherer zu einem positiven Beitrag führt. Insbesondere Puffer wie Bewertungsreserven und freie Rückstellung für Beitragsrückerstattung haben hierbei einen „Chamäleoncharakter“. In positiven Szenarien gehören sie zum größten Teil den Versicherungsnehmern, in negativen Fällen können sie zur Vermeidung von Aktionärseinschüssen genutzt werden.

Beispiel 3.3 (illustrativ) wie Beispiel 3.2, jedoch mit Startpuffern

			Delta RfB	**Versicherungsnehmer**	**Aktionär**
	$\nearrow$	1060	$+8$	1050	2
1000	$\longrightarrow$	1040	0	1040	0
	$\searrow$	1020	-20	1040	0

$$
\begin{aligned}
&\text{TVOG} \\
&:= \text{PVFP des mittleren Szenarios} - \text{Mittelwert des PVFP über die} \\
&\quad\ \text{stochastischen Szenarien} \\
&= 0 - \frac{1}{3}(2+0+0) = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Auch hier wird für den Present Value of Future Profits die Diskontierung für ein Jahr vernachlässigt.

Neugeschäft mit geringerem Gesamtzins (= Garantiezins + Gewinnbeteiligung) reduziert langfristig das Risiko für den Gesamtbestand. Kurzfristig kann der Verbrauch vorhandener Puffer jedoch das Risiko erhöhen. Das heißt die Auswirkung auf den Gesamtwert ist stark abhängig von den verfügbaren Puffern.

3.1.7 Bestimmung des European Embedded Value

Es gibt 3 Methoden den European Embedded Value zu bestimmen:

1. direkt: EEV = EV von x000 Simulationen auf zig000 Modellpunkten

   Dies ist die sauberste Lösung, jedoch technisch aufgrund der langen Rechenzeit sehr aufwendig.

2. EEV = deterministischer EV − TVOG

   Der Time Value of Options and Guarantees wird aus x000 Simulationen auf wenigen Modellpunkten ermittelt (der Bestand wird verdichtet).
   Bei der Berechnung des deterministischen EV auf zig000 Modellpunkten werden die Bestandsbesonderheiten wie bisher erfasst, wohingegen bei der Berechnung des deterministischen EV auf wenigen Modellpunkten die Bestandsbesonderheiten verloren gehen können.

3. direkt: EEV = EV von x000 Simulationen auf wenigen Modellpunkten.

   Diese Methode erfordert einen sorgfältigen Test der Bestandsverdichtung.

3.1.8 Szenarioauswahl

Es gibt zwei mögliche Szenarien: **realitätsnahe Szenarien** und **marktkonsistente Szenarien**. Bei den realitätsnahen Szenarien ist die Optionsbewertung so kalibriert, dass eine Einschätzung des Managements über die zukünftige Entwicklung des Kapitalmarkts reflektiert wird. Bei den marktkonsistenten Szenarien ist die Optionsbewertung so kalibriert, dass mittels der Szenarien am Markt erhältliche Optionen bewertet werden können. Im Falle von marktkonsistenten Szenarien spricht man vom Market Consistent Embedded Value.

3.2 Market Consistent Embedded Value

Es hat sich die Frage gestellt, warum marktkonsistente Bewertungen auch im Lebensversicherungsbereich Anwendung finden sollten. Ein Grund ist, dass Lebensversicherungsprodukte extrem options- und garantiereich sind. Bisher wurden diese Optionen und Garantien jedoch selten quantitativ analysiert. Ferner haben sich im Versicherungsbereich im Vorgriff auf Solvency II bereits verschiedene Aufsichtsmodelle auf marktorientierte Bewertungen umgestellt, zum Beispiel „Swiss Solvency Test“ in der Schweiz, „Twin Peaks“ und „Institute of Chartered Accountants of Scotland“ im Vereinigten Königreich und „Financieel Toetsingskader“ in den Niederlanden. Ein anderer Grund ist, dass schon für das Geschäftsjahr 2005 gemäß den European-Embedded-Value-Prinzipien des CFO Forum eine Bewertung der Optionen und Garantien erforderlich wurde. Und nicht zuletzt sollten marktkonsistente Bewertungen im Lebensversicherungsbereich Anwendung finden, da es sonst zu Arbitragemöglichkeiten zwischen verschiedenen Finanzdienstleistern kommt.

3.2.1 Kennzeichen des Market Consistent Embedded Value

Der Market Consistent Embedded Value versucht Kapitalmarktrisiken innerhalb der Berechnungen vernünftig zu berücksichtigen. Der Ansatz liefert eine objektive Methode zur Bestimmung von Risikodiskontsätzen sowohl auf Unternehmens- als auch Produktebene. Ferner wird eine kapitalmarktkonforme Bewertung von Optionen und Garantien sichergestellt und Kapitalbindungskosten entsprechend der Gesellschaftsstruktur des Lebensversicherers berücksichtigt. Es werden daher neue Erkenntnisse für das Management der Gesellschaft hinsichtlich der Risiken des Geschäfts und möglicher Steuerungsmechanismen zur Ertragsoptimierung geboten.

3.2.2 Marktkonsistente Bewertungs- und Rechentechniken

Bewertung von einfachen Strategien:

Verkauf von Anleihen:	80	5% $\longrightarrow$	84
Kauf von Aktien:	100	7% $\longrightarrow$	107
Nettoposition:	−20		−23

Bewertung von einfachen Strategien – mehrfache Diskontraten:

Verkauf von Anleihen:	80	5% $\longleftrightarrow$ 5%	84
Kauf von Aktien:	100	7% $\longleftrightarrow$ 7%	107
Nettoposition:	−20		−23

Welche Risikodiskontrate ist angemessen?

Verkauf von Anleihen:	80	5% $\longrightarrow$	84
Kauf von Aktien:	100	7% $\longrightarrow$	107
Nettoposition:	−20	$\longleftarrow$???	−23

Für den Embedded Value kann man nach der Risikodiskontrate auflösen:

Verkauf von Anleihen:	80	5% $\longrightarrow$	84
Kauf von Aktien:	100	7% $\longrightarrow$	107
Nettoposition:	−20	$\longleftarrow$ 15%	−23

Das gleiche Ergebnis erhält man auch durch Anpassung der erwarteten Kapitalerträge:

Verkauf von Anleihen:	80	5% $\longrightarrow$	84
Kauf von Aktien:	100	5% $\longrightarrow$	105
Nettoposition:	−20	$\longleftarrow$ 5%	−21

Bewertungskonzepte:

Man kann drei theoretische Bewertungskonzepte unterscheiden:

1. *Ansatz des replizierenden Portfolios:* Es wird ein Portfolio konstruiert, welches zum Fälligkeitszeitraum bei jeder Kapitalmarktentwicklung genau die Zahlungsströme der Option repliziert. Das Prinzip der Arbitragefreiheit besagt, dass das replizierende Portfolio und die Option den gleichen Preis haben müssen.

2. *Risikoneutrale Bewertung:* Der Preis der Option entspricht dem diskontierten Erwartungswert der Auszahlungen unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß. Diskontiert wird mit dem risikofreien Zins. Dieser Ansatz wird in der Regel bei stochastischen Modellen herangezogen, wobei die erwartete Rendite aller Anlagenklassen dem risikofreien Zins entspricht.

3. *State price deflators:* Hier wird mit subjektiven, realitätsnahen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen gearbeitet, doch müssen zustandsabhängige, risikoadjustierte Diskontfaktoren angesetzt werden, deren Herleitung in der Regel nicht trivial ist. Die risikoadjustierten Diskontfaktoren heißen „state price deflators".

Alle Ansätze liefern den gleichen Preis.

Rechentechniken:

Die Rechentechniken lassen sich in drei Kategorien gliedern:

1. *Geschlossene Formeln:* Diese werden auf einfache Optionen angewendet, deren Kosten nicht durch das Managementverhalten beeinflusst werden: zum Beispiel auf das Kapitalwahlrecht bei der Ferien- und Reiseversicherung oder auf die garantierte Mindesttodesfallleistung.

2. *Deterministische Verfahren:* Diese werden auf Verpflichtungen ohne optionalen Charakter angewendet: zum Beispiel auf das Risikogeschäft oder die fondsgebundene Lebensversicherung.

3. *Stochastische Simulationen:* Diese werden auf Optionen komplexer Natur angewendet, wobei das Verhalten vom Management und den Versicherungsnehmern die Kosten beeinflusst: zum Beispiel auf das traditionelle gewinnberechtigte Geschäft.

Für alle Rechentechniken wird gefordert, dass das Kapitalmarktmodell arbitragefrei ist und dass relevante Marktpreise reproduziert werden können.

3.3 Vergleich der Embedded-Value-Ansätze

In diesem Kapitel 3.3 werden der Traditionelle Embedded Value, der European Embedded Value und der Market Consistent Embedded Value in folgenden Attributen miteinander verglichen: Ableitung der Zahlungsströme, Verhalten des Managements, Kapitalhinterlegung, Optionen und Garantien, Verhalten der Versicherungsnehmer, Diskontierung.

Ableitung der Zahlungsströme:

Für die Berechnung des Traditionellen Embedded Value verwendet man eine deterministische Projektion. Ferner berücksichtigt man geschlossene Fonds.

Beim European Embedded Value erfolgt zusätzlich zur deterministischen Projektion eine stochastische Simulation (vor allem für die Ermittlung des Time Value of Options and Guarantees). Man verwendet geschlossene und offene Fonds.

Für die Berechnung des Market Consistent Embedded Value verwendet man eine stochastische Simulation. Wie beim European Embedded Value berücksichtigt man geschlossene und offene Fonds.

Verhalten des Managements:

Für den Traditionellen Embedded Value nimmt man an, dass sich das Management statisch verhält.

Beim European Embedded Value nimmt man neben einem statischen Verhalten des Managements ein dynamisches Verhalten bezüglich der Ermittlung des Time Value of Options and Guarantees an.

Die Berechnung des Market Consistent Embedded Value fordert nur dynamische Annahmen in Bezug auf das Verhalten des Managements.

Kapitalhinterlegung:

Die Höhe des Eigenkapitals ermittelt man beim Traditionellen Embedded Value bezüglich der Solvabilitätsvorschriften. Ferner muss man eine Überschussverteilung der Kapitalerträge (Zuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung) berücksichtigen.

Beim European Embedded Value berücksichtigt man für die Ermittlung des Eigenkapitals Ratinganforderungen. Wie beim Traditionellen Embedded Value muss man eine Überschussverteilung der Kapitalerträge (Zuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung) berücksichtigen.

Für die Berechnung des Market Consistent Embedded Value verwendet man als Eigenkapital das ökonomische Kapital. Dieses Kapital wird definiert als ein Betrag, der ausreichen würde, um das Gesamtrisiko eines Unternehmens (das heißt das Aggregat aus Marktpreis-, Adressenausfall- und operationellen Risiken) abzudecken. Es ist nicht identisch mit dem bilanziellen Eigenkapital.

Beim Traditionellen Embedded Value, beim European Embedded Value und beim Market Consistent Embedded Value weist man den Zinsverlust auf das benötigte Eigenkapital als Cost of Capital aus.

Optionen und Garantien:

Bei der Berechnung des Traditionellen Embedded Value berücksichtigt man keine Optionen und Garantien. Auch hat das Asset-Liability-Management-Risiko keinen Einfluss.

Beim European Embedded Value ermittelt man den Time Value of Options and Guarantees. Die Risiken dieser Optionen und Garantien unterschätzt man jedoch angesichts des marktinkonsistenten Bewertungsansatzes. Das Asset-Liability-Management-Risiko wird berücksichtigt.

Der Market Consistent Embedded Value verlangt eine marktkonsistente und arbitragefreie Bewertung der Optionen und Garantien. Wie beim European Embedded Value berücksichtigt man das Asset-Liability-Management-Risiko.

Verhalten der Versicherungsnehmer:

Für die Berechnung des Traditionellen Embedded Value verwendet man deterministische Annahmen. Diese ermittelt man durch Extrapolation der Vergangenheit.

Sowohl beim European Embedded Value, als auch beim Market Consistent Embedded Value ist eine Modellierung rationaler Versicherungsnehmer möglich.

Kapitel 4

Marktüberblick zum Embedded Value

In diesem Kapitel 4 wird der European Embedded Value beziehungsweise der Market Consistent Embedded Value zum 31.12.2007 und der Value of New Business des Geschäftsjahres 2007 zwischen folgenden Gesellschaften verglichen:

Allianz SE (Allianz): Die nachstehenden Werte zeigen Ergebnisse des Lebengeschäfts in Deutschland.
AMB Generali Holding AG (AMB): Die nachstehenden Werte zeigen Ergebnisse des Leben- und Krankengeschäfts in Deutschland.
AXA S.A. (AXA): Die nachstehenden Werte zeigen Ergebnisse des Leben- und Krankengeschäfts in Deutschland. Das Ergebnis der Winterthur Versicherungen wird mit einbezogen.
Münchener Rück Versicherungsgruppe (MR): Die nachstehenden Werte zeigen Ergebnisse des Lebengeschäfts in Deutschland.
UNIQA Versicherungen AG (UNIQA): Die nachstehenden Werte zeigen Ergebnisse des Leben- und Krankengeschäfts in Österreich.
Vienna Insurance Group (VIG): Die nachstehenden Werte zeigen Ergebnisse des Leben- und Krankengeschäfts in Österreich und Deutschland.

Die Daten für die Vergleiche stammen aus folgenden Berichten: *Allianz European Embedded Value Report 2007* [1], *AMB Generali Full Year 2007 Results* [2], *2007 Additional Information about Life & Savings European Embedded Value* [3],*European Embedded Value 2007* [11], *UNIQA Group Embedded Value 2007* [14] und *Group Embedded Value Results 2007* [15].

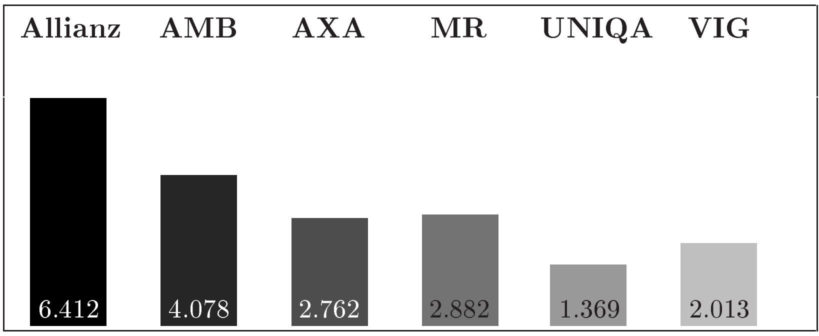
4.1 Vergleich European Embedded Value / Market Consistent Embedded Value zum 31.12.2007

AMB Generali Holding AG hat zum 31.12.2007 einen **Market Consistent Embedded Value** veröffentlicht, die restlichen oben genannten Gesellschaften haben zum 31.12.2007 **European Embedded Values** veröffentlicht. Im Folgenden werden diese und ihre Zusammensetzung verglichen.

Tabelle 4.1: Zusammensetzung des EEV / MCEV zum 31.12.2007 (in m EUR)

	Allianz	**AMB**	**AXA**	**MR**	**UNIQA**	**VIG**
ANAV	1.460	1.064	633	1.012	609	735
PVFP	5.842	3.679	2.452	2.594	863	1.385
−TVOG	−546	−111	−98	−138	−23	−32
−CoC	−345	−554	−225	−586	−79	−76
EEV/MCEV	**6.412**	**4.078**	**2.762**	**2.882**	**1.369**	**2.013**

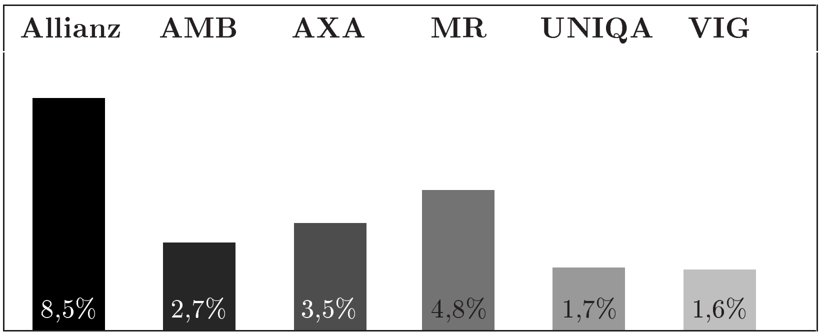
Abbildung 4.1: EEV / MCEV zum 31.12.2007 (in m EUR)



Die Allianz SE hat im Vergleich das höchste Ergebnis erzielt. Die Ergebnisse der österreichischen Gesellschaften liegen deutlich hinter den Ergebnissen der deutschen Gesellschaften. Der European Embedded Value der Vienna Insurance Group ist höher als der European Embedded Value der UNIQA Versicherungen AG. Dazu sei erwähnt, dass die Werte der UNIQA Versicherungen AG nur Ergebnisse des Österreichgeschäfts, die Werte der Vienna Insurance Group jedoch Ergebnisse des Österreich- und Deutschlandgeschäfts zeigen.

Im Folgenden wird der **Time Value of Options and Guarantees** zum 31.12.2007 in Prozent des **European Embedded Value** zum 31.12.2007 beziehungsweise in Prozent des **Market Consistent Embedded Value** zum 31.12.2007 für die oben genannten Gesellschaften verglichen.

Abbildung 4.2: TVOG zum 31.12.2007 in % EEV / MCEV zum 31.12.2007



Die Ergebnisse des Time Value of Options and Guarantees für die UNIQA Versicherungen AG und die Vienna Insurance Group erscheinen relativ zu niedrig im Vergleich zu den deutschen Gesellschaften. Der Time Value of Options and Guarantees in Prozent des European Embedded Value beziehungsweise in Prozent des Market Consistent Embedded Value der deutschen Gesellschaften variiert sehr stark, wobei die Allianz SE den höchsten Wert hat. Der Time Value of Options and Guarantees in Prozent des European Embedded Value der beiden österreichischen Gesellschaften zeigt ein homogenes Bild.

4.2 Vergleich Value of New Business 2007

Definition 4.1

1. ***PVNBP*** *bezeichnet den* ***Present Value of New Business Premium****, das heißt den Barwert der zukünftigen Neugeschäftsprämien die aus den Beständen des aktuellen Neugeschäftsjahrganges generiert werden können.*

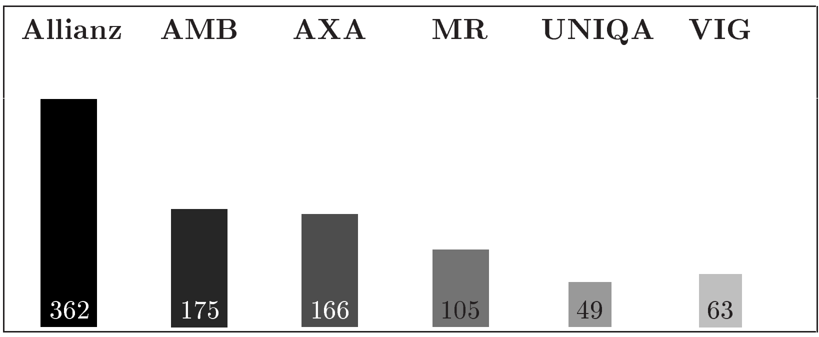
2. ***APE*** *bezeichnet den* ***Annual Premium Equivalent****. Diesen definiert man als die laufenden Neugeschäftsprämien plus* 10% *der Einmalprämien des betrachteten Geschäftsjahres.*

Im Folgenden werden der **Value of New Business**, der **Present Value of New Business Premium** und der **Annual Premium Equivalent** des Jahres 2007 für die oben genannten Gesellschaften verglichen.

Tabelle 4.2: VNB, PVNBP, APE 2007 (in m EUR)

	Allianz	**AMB**	**AXA**	**MR**	**UNIQA**	**VIG**
VNB	**362**	**175**	**166**	**105**	**49**	**63**
PVNBP	9.188	8.390	4.587	3.739	1.519	1.906
VNB in % PVNBP	3,9%	2,1%	3,6%	2,8%	3,2%	3,3%
APE	881	978	457	458	187	205
VNB in % APE	41,2%	17,9%	36,2%	22,9%	26,2%	30,7%

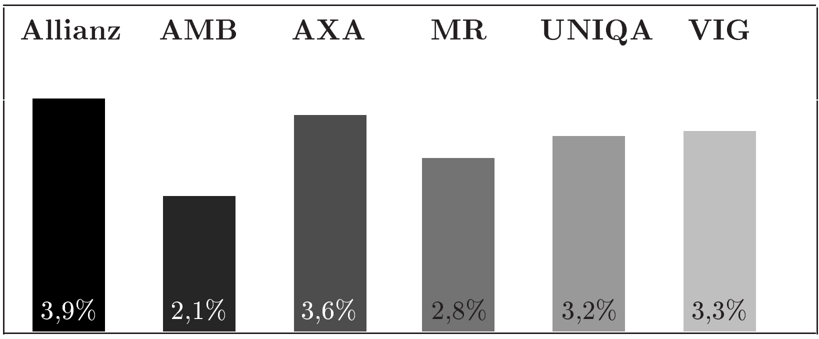
Abbildung 4.3: VNB 2007 (in m EUR)



Auch hier liegen die Ergebnisse der österreichischen Gesellschaften deutlich hinter den Ergebnissen der deutschen Gesellschaften. Die Allianz SE hat im Vergleich wieder das höchste Ergebnis erzielt. Erneut variieren die Werte der deutschen Gesellschaften sehr stark. Ferner sei erwähnt, dass der Present Value of New Business Premium der AMB Generali Holding fast doppelt so hoch ist wie der Present Value of New Business Premium der AXA S.A., obwohl der Value of New Business der beiden Gesellschaften annähernd gleich ist. Das gleiche gilt für den Annual Premium Equivalent. Es ist auch zu beobachten, dass der Present Value of New Business Premium der AMB Generali Holding fast so hoch ist wie der Present Value of New Business Premium der Allianz SE, obwohl die Allianz SE einen mehr als doppelt so hohen Value of New Business hat. Der Annual Premium Equivalent der AMB Generali Holding ist sogar höher als der Annual Premium Equivalent der Allianz SE. Die Werte der Vienna Insurance Group sind auch hier wieder höher als die Werte der UNIQA Versicherungen AG.

Im Folgenden wird der **Value of New Business** des Jahres 2007 in Prozent des **Present Value of New Business Premium** des Jahres 2007 für die oben genannten Gesellschaften verglichen.

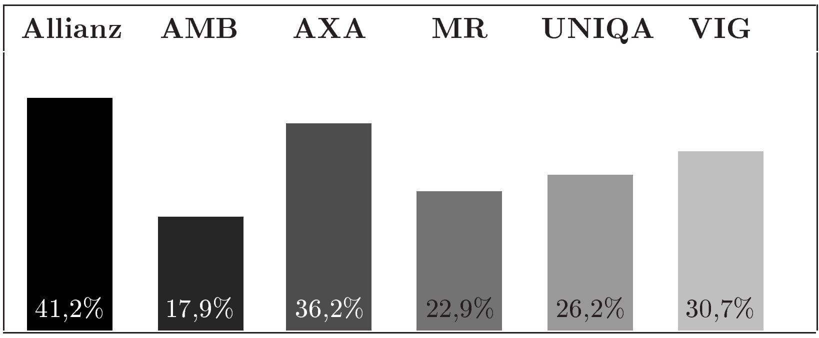
Abbildung 4.4: VNB in % PVNBP 2007



Die Allianz SE weist wieder den höchsten Wert auf. Im Gegensatz zu den österreichischen Gesellschaften, deren Neugeschäftsmargen fast gleich sind, zeigen die Margen der deutschen Gesellschaften kein einheitliches Bild.

Im Folgenden wird der **Value of New Business** des Jahres 2007 in Prozent des **Annual Premium Equivalent** des Jahres 2007 für die oben genannten Gesellschaften verglichen.

Abbildung 4.5: VNB in % APE 2007



Hier variieren die Sätze stark von ungefähr 18% bis fast 42%. Im Vergleich zu den vorigen Ergebnissen ist hier auch der Unterschied der Sätze der österreichischen Gesellschaften wesentlich größer.

Anhang A

Stochastische Analysis

Dieses Kapitel gibt einen Einblick in die mathematischen Grundlagen, die man für die Gestaltung von stochastischen Zinsmodellen benötigt. Nach einer kurzen Einführung in die Maßtheorie und der Definition von stochastischen Prozessen werden Itô-Integrale, Itô-Prozesse, stochastische Differentialgleichungen und der Satz von Girsanov behandelt. Die Ausführungen sind dem Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] und dem Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] entnommen. Die meisten Beweise werden nicht geführt, sind jedoch in der jeweils angegebenen Literatur zu finden. Ferner wird teilweise nur der eindimensionale Fall behandelt, die Ausführungen in höheren Dimensionen sind ebenfalls der angegebenen Literatur zu entnehmen.

A.1 Einführung in die Maßtheorie

Definition A.1 (Potenzmenge) *Sei Ω eine beliebige Menge. Die Menge aller Teilmengen von Ω heißt* ***Potenzmenge*** *und man bezeichnet sie mit $\mathcal{P}(\Omega)$.*

Definition A.2 (σ-Algebra) *Eine* ***σ-Algebra*** *$\mathcal{F}$ über einer Menge Ω ist eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von Ω mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$, *wobei* $F^C = \Omega \backslash F$ *das Komplement von* F *in* Ω *ist.*
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow A := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Das Paar $(\Omega, \mathcal{F})$ nennt man einen ***messbaren Raum****. Die Teilmengen $F \in \mathcal{F}$ heißen* ***$\mathcal{F}$-messbare Mengen****.*

Annahme A.3 *Man nimmt an, dass σ-Algebren alle Mengen mit Maß 0, das heißt alle Nullmengen, enthalten.*

Nun wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem messbaren Raum definiert.

Definition A.4 (Wahrscheinlichkeitsmaß) *Ein* ***Wahrscheinlichkeitsmaß*** *P auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ ist eine Funktion $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $P(\emptyset) = 0, \; P(\Omega) = 1$.

2. *Wenn* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *und* $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *disjunkt sind (das heißt* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für alle* $i,\ j$ *mit* $i \neq j$*), folgt*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *nennt man einen* ***Wahrscheinlichkeitsraum****. Man nennt es einen* ***vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum****, wenn* $\mathcal{F}$ *alle Teilmengen* G *von* Ω *mit* P*-äußerem Maß* 0*, das heißt mit*

$$P^*(G) := \inf\{P(F);\ F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0$$

enthält. Jeder Wahrscheinlichkeitsraum kann vollständig gemacht werden, indem man zu $\mathcal{F}$ *alle Mengen mit äußerem Maß* 0 *hinzufügt und* P *entsprechend erweitert.*
Die Teilmengen $F \in \mathcal{F}$ *heißen* ***Ereignisse*** *und man verwendet die Interpretation*

$$P(F) = \text{„die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis } F \text{ eintritt“}.$$

Wenn insbesondere $P(F) = 1$ *ist, sagt man, dass „das Ereignis* F *mit Wahrscheinlichkeit 1 oder fast sicher (f.s.) eintritt“.*

In den folgenden Definitionen werden Borelmengen behandelt.

Definition A.5 *Sei* $\mathcal{U}$ *eine Familie von Teilmengen einer Menge* Ω*. Dann gibt es eine kleinste* σ*-Algebra* $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$*, die* $\mathcal{U}$ *enthält, nämlich*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \bigcap\{\mathcal{H};\ \mathcal{H} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra von } \Omega, \mathcal{U} \subset \mathcal{H}\}.$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ *nennt man die* σ*-Algebra, die von* $\mathcal{U}$ *erzeugt wird. Wenn* $\mathcal{U}$ *zum Beispiel die Familie aller offenen Teilmengen eines topologischen Raumes* Ω *(zum Beispiel* $\Omega = \mathbb{R}^n$*) ist, nennt man* $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ *die* ***Borel-σ-Algebra*** *von* Ω *und die Elemente* $B \in \mathcal{B}$ *nennt man* ***Borelmengen****.* $\mathcal{B}$ *enthält alle offenen Mengen, alle geschlossenen Mengen, alle abzählbaren Vereinigungen von geschlossenen Mengen, alle abzählbaren Durchschnitte solcher abzählbaren Vereinigungen und so weiter.*

Definition A.6 *Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *gegeben. Eine Funktion* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ist* ***$\mathcal{F}$-messbar****, wenn für alle offenen Mengen* $U \in \mathbb{R}^n$ *(oder äquivalent für alle Borelmengen* $U \subset \mathbb{R}^n$*)*

$$Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega;\ Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

ist.

Definition A.7 *Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *gegeben. Für eine Funktion* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ist die* σ*-Algebra* $\mathcal{H}_X$*, die von* X *erzeugt wird, die kleinste* σ*-Algebra über der Menge* Ω*, die alle Mengen*

$$X^{-1}(U), \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

enthält. Ferner gilt

$$\mathcal{H}_X = \left\{X^{-1}(B);\ B \in \mathcal{B}\right\}, \tag{A.1}$$

wobei $\mathcal{B}$ *die Borel-*σ*-Algebra auf* $\mathbb{R}^n$ *ist. Es folgt, dass* X $\mathcal{H}_X$*-messbar ist und dass* $\mathcal{H}_X$ *die kleinste* σ*-Algebra mit der Eigenschaft (A.1) ist.*

Lemma A.8 *Seien ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *und zwei Funktionen* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *und* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *gegeben. Dann ist* Y *dann und nur dann* $\mathcal{H}_X$*-messbar, wenn eine borelmessbare Funktion* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *existiert, sodass*

$$Y = g(X)$$

ist.

Nun werden Zufallsvariablen definiert.

Definition A.9 *Sei ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *gegeben. Eine* ***Zufallsvariable*** X *ist eine* $\mathcal{F}$*-messbare Funktion* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$*. Jede Zufallsvariable erzeugt auf* $\mathbb{R}^n$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß* μ_X*, welches durch*

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B},$$

definiert wird, wobei $\mathcal{B}$ *die Borel-*σ*-Algebra auf* $\mathbb{R}^n$ *ist.* μ_X *nennt man die* ***Verteilung*** *von* X*.*
Wenn $\int\limits_\Omega |X(\omega)|\, dP(\omega) < \infty$ *ist, nennt man*

$$\mathrm{E}[X] := \int\limits_\Omega |X(\omega)|\, dP(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x\, d\mu_X(x)$$

den ***Erwartungswert*** *von* X *bezüglich* P*.*
Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *borelmessbar und* $\int\limits_\Omega f(X(\omega))\, dP(\omega) < \infty$ *ist, gilt*

$$\mathrm{E}[f(X)] := \int\limits_\Omega f(X(\omega))\, dP(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu_X(x).$$

A.2 Stochastische Prozesse

Definition A.10 (Stochastischer Prozess) *Ein* ***stochastischer Prozess*** X *ist eine parametrisierte Familie* $(X_t)_{t\in T}$ *von Zufallsvariablen* X_t*, die auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *definiert werden und Werte in* $\mathbb{R}^n$ *annehmen. Die Menge* T *nennt man den Parameterraum des Prozesses* X*. Beliebte Wahlen dafür sind* $\mathbb{N}$ *oder* $\mathbb{Z}$ *beziehungsweise* $\mathbb{R}$ *oder* $[0, \infty)$*. Im ersten Fall spricht man von einem Prozess in diskreter Zeit, im anderen von einem Prozess in stetiger Zeit. Eine häufige Bezeichnung für einen stochastischen Prozess* X *ist* $X = \{X_t;\ t \in T\}$*. Für jedes fixe* $t \in T$ *ist*

$$\omega \mapsto X_t(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

eine Zufallsvariable. Andererseits kann man für jedes fixe $\omega \in \Omega$ die Funktion

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad t \in T,$$

*betrachten, die man **Pfad, Trajektorie** oder **Realisierung** von X_t nennt.*

Für die Intuition ist es nützlich, t als „Zeit" und jedes ω als einen individuellen „Versuch" zu betrachten. Mit dieser Interpretation repräsentiert $X_t(\omega)$ den Ausgang des Versuchs ω zum Zeitpunkt t. Sehr oft verwendet man die Bezeichnung $X(t,\omega)$ anstatt $X_t(\omega)$. Somit kann man den Prozess auch als eine Funktion von zwei Variablen

$$(t,\omega) \mapsto X(t,\omega)$$

von $T \times \Omega$ nach $\mathbb{R}^n$ betrachten. In der Folge wird diese Schreibweise verwendet, wobei man ω meistens weg lässt.

Definition A.11 *Seien $X = (X(t))_{t\in T}$ und $Y = (Y(t))_{t\in T}$ stochastische Prozesse auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann ist X eine **Version** von Y, wenn*

$$P(\{\omega;\, X(t,\omega) = Y(t,\omega)\}) = 1 \quad \forall\, t \in T$$

ist.

Definition A.12 (Filtrierung) *Sei ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben. Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ von σ-Algebren $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ heißt **Filtrierung**, wenn $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $s,t \in T$ mit $s < t$ ist.*
*Sei $X = (X(t))_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathcal{F}_t^X$ für jedes fixe $t \in T$ die σ-Algebra, die von den Zufallsvariablen $X(s)$ mit $s \in T$ und $s \leq t$ erzeugt wird. Dann nennt man $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in T}$ die **natürliche Filtrierung** von X.*
*Sei $Y = (Y(t))_{t\in T}$ ein weiterer stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Man nennt Y **adaptiert** an die Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, wenn die Zufallsvariable $Y(t)$ für jedes $t \in T$ bezüglich $\mathcal{F}_t$ messbar ist. In diesem Fall nennt man Y einen $\mathbb{F}$-adaptierten stochastischen Prozess.*

Anschaulich interpretiert ist $\mathcal{F}_t$ die Menge aller Ereignisse, über deren Eintreten man zum Zeitpunkt $t \in T$ Bescheid weiß.

Definition A.13 *Für den Rest des Anhangs A führt man einen Endzeitpunkt $T^* \in \mathbb{R}_+^*$ ein.*

Spezielle Eigenschaften der stochastischen Prozesse haben zu folgenden Namen geführt:

Definition A.14 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$ und ein stochastischer Prozess $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ gegeben.*

1. *Man nennt X einen **Gauß-Prozess**, wenn die $\mathbb{R}^{nk}$-wertige Zufallsvariable $Z = (X(t_1), \ldots, X(t_k))$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und alle $t_1, \ldots, t_k$ mit $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq T^*$ eine multivariate Normalverteilung besitzt.*

2. *Man nennt X einen **Markow-Prozess**, wenn für alle s, t mit $0 \leq s < t \leq T^*$*

$$\mathrm{E}[f(X(t))|\mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[f(X(t))|\sigma(X(s))]$$

   gilt, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion ist und $\sigma(X(s))$ die von $X(s)$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet.

Ein Beispiel für einen Prozess, der sowohl Gauß- als auch Markow-Prozess ist, ist der Wiener Prozess.

Definition A.15 (Wiener Prozess) *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$ gegeben. Ein **Wiener Prozess** $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ bezüglich $\mathbb{F}$ ist ein stochastischer Prozess mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$W(0) = 0$.*
2. *W ist bezüglich $\mathbb{F}$ adaptiert.*
3. *W hat unabhängige Inkremente, das heißt für alle $s, t \in [0, T^*]$ mit $s < t$ ist $W(t) - W(s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$.*
4. *$W(t) - W(s)$ ist für alle $s, t \in [0, T^*]$ mit $s < t$ normalverteilt mit Erwartungswert $\mathrm{E}[W(t) - W(s)] = 0$ und Varianz $\mathrm{Var}(W(t) - W(s)) = t - s :\ (W(t) - W(s)) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.*
5. *W hat stetige Trajektorien.*

A.3 Itô-Integrale

Für die Konstruktion eines Itô-Integrals seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$, ein eindimensionaler stochastischer Prozess $g = (g(t))_{t=0}^{T^*}$ und ein eindimensionaler Wiener Prozess $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ bezüglich $\mathbb{F}$ gegeben. Im gesamten Kapitel A.3 gilt für die Grenzen des Intervalls $[a, b]$, dass $0 \leq a < b \leq T^*$ ist.

Um die Existenz eines Itô-Integrals zu garantieren, muss man an g zunächst einige Integrationsbedingungen stellen.

Definition A.16

1. *$\mathcal{L}^2[a, b]$ ist die Klasse der Funktionen*

$$g(t, \omega) : [0, T^*] \times \Omega \to \mathbb{R},$$

   wobei jedes g folgende Bedingungen erfüllt:

   (i) g ist $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-messbar, wobei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $[0, T^*]$ ist.

   (ii) $\int_a^b \mathrm{E}\left[g^2(t)\right]\, dt < \infty$.

(*iii*) *g ist progressiv messbar, das heißt die Einschränkung von g auf $[0,t]\times\Omega$ ist $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-messbar für alle $t\in[0,T^*]$.*

2. $\mathcal{L}^2$ ist die Klasse der Funktionen

$$g(t,\omega):[0,T^*]\times\Omega\to\mathbb{R},$$

wobei jedes $g\in\mathcal{L}^2[0,t]$ für alle $t\in(0,T^*]$ ist.

Ein Itô-Integral $\int_a^b g(t)\,dW(t)$ für einen stochastischen Prozess $g\in\mathcal{L}^2[a,b]$ definiert man nun in zwei Schritten:

1. Man betrachtet einen **einfachen stochastischen Prozess** $g\in\mathcal{L}^2[a,b]$. Das heißt es existieren deterministische Zeitpunkte $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\le T^*$, $n\in\mathbb{N}^*$, sodass g in jedem Unterintervall konstant ist. Mit anderen Worten, es gilt $g(t)=g(t_k)$ für alle $t\in[t_k,t_{k+1})$ und alle $k=0,\ldots,n-1$. Dann wird das **Itô-Integral** durch

$$\int_a^b g(t)\,dW(t)=\sum_{k=0}^{n-1}g(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)] \tag{A.2}$$

definiert.

Bemerkung A.17 Für die Definition des Itô-Integrals verwendet man die „Vorwärtsinkremente“ des Wiener Prozesses. Speziell wird der Prozess g im Term $g(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)]$ der Gleichung (A.2) am linken Ende t_k des Intervalls $[t_k,t_{k+1})$, über welchen man das W-Inkrement nimmt, ausgewertet.

2. Für die Definition des Itô-Integrals eines **allgemeinen stochastischen Prozesses** $g\in\mathcal{L}^2[a,b]$, der nicht einfach ist, benötigt man das folgende Lemma und die nachstehende Proposition.

Lemma A.18 *Für einen einfachen stochastischen Prozess $f=(f(t))_{t=0}^{T^*}$, der beschränkt ist, gilt*

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_a^b f(t)\,dW(t)\right)^2\right]=\mathrm{E}\left[\int_a^b f(t)^2\,dt\right]. \tag{A.3}$$

Beweis Der Beweis des Lemmas A.18 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Kapitel III auf der Seite 23 erläutert. □

Proposition A.19

(*i*) *Sei $g\in\mathcal{L}^2[a,b]$ beschränkt und $g(\cdot,\omega)$ für alle $\omega\in\Omega$ stetig. Dann existierten einfache stochastische Prozesse $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass*

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b (g(t)-g_n(t))^2\,dt\right]\to 0 \text{ für } n\to\infty.$$

(*ii*) *Sei $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$ beschränkt. Dann existierten beschränkte einfache stochastische Prozesse $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $g_n(\cdot,\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist und*

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b (g(t) - g_n(t))^2 \, dt\right] \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

(*iii*) *Sei $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$. Dann existierten beschränkte einfache stochastische Prozesse $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $g_n \in \mathcal{L}^2[a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und*

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b (g(t) - g_n(t))^2 \, dt\right] \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis Der Beweis der Proposition A.19 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Kapitel III auf den Seiten 24 und 25 erläutert. □

Da der stochastische Prozess $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$ ist, kann man nun laut Proposition A.19 einfache stochastische Prozesse $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen, sodass $g_n \in \mathcal{L}^2[a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b (g(t) - g_n(t))^2 \, dt\right] \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Dann definiert man das **Itô-Integral** durch

$$\int_a^b g(t)\, dW(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(t)\, dW(t) \quad \text{in } L^2(P).$$

Der Grenzwert existiert, da $(\int_a^b g_n(t)\, dW(t))_{n\in\mathbb{N}}$ laut (A.3) eine Cauchy-Folge in $L^2(P)$ ist.

Die wichtigsten Eigenschaften eines Itô-Integrals sind in der folgenden Proposition zusammengefasst.

Proposition A.20 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$, ein eindimensionaler stochastischer Prozess $g = (g(t))_{t=0}^{T^*} \in \mathcal{L}^2[a,b]$ und ein eindimensionaler Wiener Prozess $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ bezüglich $\mathbb{F}$ gegeben. Dann gelten folgende Relationen:*

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b g(t)\, dW(t)\right] = 0, \tag{A.4}$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_a^b g(t)\, dW(t)\right)^2\right] = \mathrm{E}\left[\int_a^b g^2(t)\, dt\right], \tag{A.5}$$

$$\int_a^b g(t)\,dW(t) \text{ ist } \mathcal{F}_b\text{-messbar.} \tag{A.6}$$

Beweis Der Beweis der Proposition A.20 wird im Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] im Kapitel 3.3 auf der Seite 32 erläutert. □

Bemerkung A.21 Es ist möglich ein Itô-Integral für einen stochastischen Prozess $g = (g(t))_{t=0}^{T^*}$ zu definieren, der nur die schwache Bedingung

$$P\left(\int_a^b g^2(t)\,dt < \infty\right) = 1$$

erfüllt. Für so ein allgemeines g gibt es keine Garantie, dass er die Eigenschaften (A.4) und (A.5) erfüllt. Die Eigenschaft (A.6) ist nach wie vor gültig.

Satz A.22 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, eine Filtrierung* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$*, ein eindimensionaler stochastischer Prozess* $g = (g(t))_{t=0}^{T^*} \in \mathcal{L}^2$ *und ein eindimensionaler Wiener Prozess* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *gegeben. Dann existiert eine* ***t-stetige Version*** *von*

$$\int_0^t g(s)\,dW(s), \quad t \in [0, T^*],$$

das heißt es existiert ein t-stetiger stochastischer Prozess $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, sodass*

$$P\left[X(t) = \int_0^t g(s)\,dW(s)\right] = 1 \quad \forall\, t \in [0, T^*]$$

ist.

Beweis Der Beweis des Satzes A.22 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Kapitel III auf den Seiten 29 und 30 erläutert. □

Annahme A.23 *Im restlichen Anhang sowie im Kapitel 2 ist mit der Bezeichnung* $\int_0^t g(s)\,dW(s)$ *immer eine t-stetige Version des Integrals gemeint, wobei* $g = (g(t))_{t=0}^{T^*}$ *irgendeinen stochastischen Prozess aus* $\mathcal{L}^2$ *und* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *irgendeinen Wiener Prozess bezeichnet.*

A.4 Martingale

Die Theorie der stochastischen Integration ist eng verknüpft mit der Martingaltheorie und die moderne Theorie der Finanzderivate basiert hauptsächlich auf dieser. Für die Definition eines Martingals benötigt man den bedingten Erwartungswert:

Definition A.24 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *und eine eindimensionale stochastische Zufallsvariable* Y*, für die* $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$ *gilt, gegeben. Ferner sei eine Filtrierung* $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$ *gegeben. Dann bezeichnet* $\mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t]$ *den* ***bedingten Erwartungswert*** *von* Y *gegeben* $\mathcal{F}_t$*. Dieser kann interpretiert werden als der „Erwartungswert von* Y *gegeben die Information, die zum Zeitpunkt* t *verfügbar ist“.* $\mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t]$ *ist eine Funktion von* Ω *nach* $\mathbb{R}$*, für die Folgendes gilt:*

1. $\mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t]$ *ist* $\mathcal{F}_t$*-messbar.*

2. $\int\limits_{F_t} \mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t]\, dP = \int\limits_{F_t} Y\, dP \quad \forall\ F_t \in \mathcal{F}_t.$

Wenn die Filtrierung zum Beispiel von einem einzelnen beobachteten stochastischen Prozess $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ erzeugt wird, hängt die Information, die zum Zeitpunkt $t \in [0, T^*]$ verfügbar ist, natürlich vom Verhalten von X im Intervall $[0, t]$ ab. Also ist der bedingte Erwartungswert in diesem Fall eine Funktion von allen vergangenen X-Werten $\{X(s) :\ 0 \leq s \leq t\}$.

Im Folgenden werden Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts erläutert.

Proposition A.25 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, eine* σ*-Algebra* $\mathcal{F}_t$ *für ein* $t \in [0, T^*]$ *und zwei eindimensionale stochastische Zufallsvariablen* Y *und* Z*, für die* $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$ *und* $\mathrm{E}[|Z|] < \infty$ *gilt, gegeben.*

1. *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt*
$$\mathrm{E}[aY + bZ|\mathcal{F}_t] = a\,\mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t] + b\,\mathrm{E}[Z|\mathcal{F}_t] \quad \textit{f.s.}$$

2. $\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t]] = \mathrm{E}[Y] \quad$ *f.s.*

3. *Wenn* Y *bezüglich* $\mathcal{F}_t$ *messbar ist, gilt*
$$\mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t] = Y \quad \textit{f.s.}$$

4. *Wenn* Y *von* $\mathcal{F}_t$ *unabhängig ist, gilt*
$$\mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[Y] \quad \textit{f.s.}$$

5. *Wenn* Z *bezüglich* $\mathcal{F}_t$ *messbar und* $\mathrm{E}[|Z \cdot Y|] < \infty$ *ist, gilt*
$$\mathrm{E}[Z \cdot Y|\mathcal{F}_t] = Z \cdot \mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t] \quad \textit{f.s.}$$

Beweis Der Beweis der Proposition A.25 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Anhang B auf der Seite 240 erläutert. □

Proposition A.26 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eine eindimensionale stochastische Zufallsvariable Y, für die $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$ gilt, und zwei σ-Algebren $\mathcal{F}_s$ und $\mathcal{F}_t$ mit $0 \leq s < t \leq T^*$ und $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ gegeben. Dann gilt*

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_s] \quad \textit{f.s.}$$

Beweis Der Beweis der Proposition A.26 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Anhang B auf der Seite 240 erläutert. □

Ein Martingal wird nun folgendermaßen definiert:

Definition A.27 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ein eindimensionaler stochastischer Prozess $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ und eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$ gegeben. Dann ist X ein* ***Martingal*** *bezüglich der Filtrierung $\mathbb{F}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *X ist adaptiert an die Filtrierung $\mathbb{F}$.*
2. *Für alle $t \in [0, T^*]$ gilt*
$$\mathrm{E}[|X(t)|] < \infty.$$
3. *Für alle $s,\ t$ mit $0 \leq s \leq t \leq T^*$ gilt die Relation*
$$\mathrm{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s) \quad \textit{f.s.}$$

Ein eindimensionaler stochastischer Prozess $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ heißt ***Supermartingal*** *bezüglich der Filtrierung $\mathbb{F}$, wenn er die Bedingungen 1 und 2 und die Ungleichung*

$$\mathrm{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] \leq X(s) \quad \textit{f.s.}$$

für alle $s,\ t$ mit $0 \leq s \leq t \leq T^*$ erfüllt.
Ein eindimensionaler stochastischer Prozess $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ heißt ***Submartingal*** *bezüglich der Filtrierung $\mathbb{F}$, wenn er die Bedingungen 1 und 2 und die Ungleichung*

$$\mathrm{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] \geq X(s) \quad \textit{f.s.}$$

für alle $s,\ t$ mit $0 \leq s \leq t \leq T^*$ erfüllt.

Die erste Bedingung besagt, dass der Wert $X(t)$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T^*]$ beobachtet werden kann. Die zweite Bedingung benötigt man nur technisch. Die wirklich wichtige Bedingung ist die Dritte, die Folgendes besagt: Der Erwartungswert eines zukünftigen Wertes von X gegeben die Information, die heute verfügbar ist, entspricht (ist kleiner/größer gleich) dem Wert von X, der heute beobachtet wird.

Proposition A.28 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, eine Filtrierung* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$*, ein eindimensionaler stochastischer Prozess* $g = (g(t))_{t=0}^{T^*} \in \mathcal{L}^2[a,b]$ *mit* $0 \leq a < b \leq T^*$ *und ein eindimensionaler Wiener Prozess* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *gegeben. Dann gilt*

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b g(t)\,dW(t) \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right] = 0 \quad \textit{f.s.}$$

Beweis Der Beweis der Proposition A.28 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Kapitel III auf der Seite 29 erläutert. □

Korollar A.29 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, eine Filtrierung* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$*, ein eindimensionaler stochastischer Prozess* $g = (g(t))_{t=0}^{T^*} \in \mathcal{L}^2$ *und ein eindimensionaler Wiener Prozess* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *gegeben. Dann ist der stochastische Prozess* $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$*, der durch*

$$X(t) = \int_0^t g(s)\,dW(s), \quad t \in [0, T^*],$$

definiert wird, ein Martingal bezüglich der Filtrierung $\mathbb{F}$.

Beweis Für den Beweis des Korollars A.29 fixiert man zwei Zeitpunkte s, t mit $0 \leq s < t \leq T^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X(t)\,|\mathcal{F}_s\right] &= \mathrm{E}\left[\int_0^t g(u)\,dW(u) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_0^s g(u)\,dW(u) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] + \mathrm{E}\left[\int_s^t g(u)\,dW(u) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \quad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

Das Integral im ersten Erwartungswert ist laut Proposition A.20 $\mathcal{F}_s$-messbar. Somit folgt laut Proposition A.25

$$\mathrm{E}\left[\int_0^s g(u)\,dW(u) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s g(u)\,dW(u) \quad \text{f.s.}$$

Ferner gilt laut Proposition A.28

$$\mathrm{E}\left[\int_s^t g(u)\,dW(u) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = 0 \quad \text{f.s.}$$

Also folgt

$$\mathrm{E}\left[X(t)\,|\mathcal{F}_s\right] = \int_0^s g(u)\,dW(u) + 0 = X(s) \quad \text{f.s.}$$

□

A.5 Itô-Prozess und Itô-Formel

Im gesamten Kapitel A.5 arbeitet man auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$. Zunächst definiert man ähnlich wie in Definition A.16 eine Klasse von Funktionen.

Definition A.30 *Seien ein eindimensionaler stochastischer Prozess* $g = (g(t))_{t=0}^{T^*}$ *und ein eindimensionaler Wiener Prozess* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *gegeben.* $\mathcal{M}^2$ *ist die Klasse der Funktionen*

$$g(t, \omega) : [0, T^*] \times \Omega \to \mathbb{R},$$

wobei jedes g *folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) g *ist* $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$*-messbar, wobei* $\mathcal{B}$ *die Borel-*σ*-Algebra auf* $[0, T^*]$ *ist.*

(ii) g *ist progressiv messbar, das heißt die Einschränkung von* g *auf* $[0, t] \times \Omega$ *ist* $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$*-messbar für alle* $t \in [0, T^*]$.

(iii) $P\left(\int_0^t g^2(s)\, ds < \infty \ \forall\, t \in [0, T^*]\right) = 1.$

Nun definiert man den Itô-Prozess.

Definition A.31 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, eine Filtrierung* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$*, eine reelle Zahl* x_0*, ein* $\mathbb{R}$*-wertiger,* $\mathbb{F}$*-adaptierter stochastischer Prozess* $\alpha = (\alpha(t))_{t=0}^{T^*}$ *mit*

$$P\left(\int_0^t |\alpha(s)|\, ds < \infty \ \forall\, t \in [0, T^*]\right) = 1,$$

ein eindimensionaler stochastischer Prozess $\sigma = (\sigma(t))_{t=0}^{T^*} \in \mathcal{M}^2$ *und ein eindimensionaler Wiener Prozess* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *gegeben. Dann nennt man einen stochastischen Prozess* $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ *einen* ***Itô-Prozess****, wenn er durch*

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW(s), \quad t \in [0, T^*], \tag{A.7}$$

definiert wird. (A.7) kann man auch folgendermaßen darstellen:

$$dX(t) = \alpha(t)\, dt + \sigma(t)\, dW(t), \quad t \in [0, T^*], \tag{A.8}$$
$$X(0) = x_0. \tag{A.9}$$

Man sagt X *besitzt ein* ***stochastisches Differential****, welches durch (A.8) gegeben ist, mit einer* ***Anfangsbedingung****, die durch (A.9) gegeben ist.* α *heißt* ***Drift*** *und* σ ***Diffusion****.*

Mit der Definition eines Itô-Prozesses kann man nun die Itô-Formel im eindimensionalen Fall erläutern.

Satz A.32 (Eindimensionale Itô-Formel) *Seien ein eindimensionaler Itô-Prozess* $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ *wie in Definition A.31 und eine* $\mathbb{R}$*-wertige Funktion* $f \in C^{1,2}([0,T^*] \times \mathbb{R})$ *(das heißt* f *ist nach der ersten Variable einmal und nach der zweiten Variable zweimal stetig differenzierbar) gegeben. Dann ist der stochastische Prozess* Y*, der durch*

$$Y(t) = f(t, X(t)), \quad t \in [0, T^*],$$

definiert wird, wieder ein Itô-Prozess mit stochastischem Differential

$$\begin{aligned} df(t,X(t)) &= \frac{\partial f(t,X(t))}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x}\,dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X(t))}{\partial x^2}\,(dX(t))^2 \\ &= \left(\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial t} + \alpha(t)\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 f(t,X(t))}{\partial x^2}\right)dt \\ &\quad + \sigma(t)\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x}\,dW(t), \quad t \in [0,T^*], \end{aligned} \tag{A.10}$$

wobei $(dX(t))^2 = (dX(t)) \cdot (dX(t))$ *entsprechend der Regeln*

$$\begin{aligned} dt \cdot dt &= 0, \\ dt \cdot dW(t) = dW(t) \cdot dt &= 0, \\ dW(t) \cdot dW(t) &= dt \end{aligned}$$

berechnet wird.

Beweis Der Beweis des Lemmas A.32 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Kapitel IV auf den Seiten 43 bis 45 erläutert. □

Mehrdimensionale Itô-Formel

Definition A.33 *Für den mehrdimensionalen Fall sei* $i = 1, \ldots, n$ *und* $j = 1, \ldots, m$ *für ein* $n \in \mathbb{N}^*$ *und ein* $m \in \mathbb{N}^*$*. Ferner seien* $\mathbb{R}$*-wertige,* $\mathbb{F}$*-adaptierte stochastische Prozesse* $\alpha_i = (\alpha_i(t))_{t=0}^{T^*}$ *mit*

$$P\left(\int_0^t |\alpha_i(s)|\,ds < \infty \ \forall\ t \in [0,T^*]\right) = 1,$$

eindimensionale stochastische Prozesse $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij}(t))_{t=0}^{T^*} \in \mathcal{M}^2$*, eindimensionale Wiener Prozesse* $W_j = (W_j(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *und reelle Zahlen* x_0^i *gegeben. Dann kann man folgende* n *Itô-Prozesse darstellen:*

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \alpha_1(t)\,dt + \sigma_{11}(t)\,dW_1(t) + \cdots + \sigma_{1m}(t)\,dW_m(t), \quad t \in [0,T^*], \\ X_1(0) &= x_0^1, \\ &\vdots \\ dX_n(t) &= \alpha_n(t)\,dt + \sigma_{n1}(t)\,dW_1(t) + \cdots + \sigma_{nm}(t)\,dW_m(t), \quad t \in [0,T^*], \\ X_n(0) &= x_0^n. \end{aligned} \tag{A.11}$$

In Matrixschreibweise kann man (A.11) als

$$\begin{aligned} dX(t) &= \alpha(t)\,dt + \sigma\,dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ X(0) &= x_0 \end{aligned}$$

darstellen, wobei

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, \ \alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}, \ \sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t) & \cdots & \sigma_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}(t) & \cdots & \sigma_{nm}(t) \end{pmatrix},$$

$$dW(t) = \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ \vdots \\ dW_m(t) \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T^*],$$

ist.

Satz A.34 (Mehrdimensionale Itô-Formel) *Seien ein n-dimensionaler Itô-Prozess $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ wie in Definition A.33 und eine $\mathbb{R}^p$-wertige Funktion $f = (f_1, \ldots, f_p) \in C^{1,2}([0,T^*] \times \mathbb{R}^n)$ gegeben. Dann ist der p-dimensionale stochastische Prozess $Y = (Y_1, \ldots, Y_p)$, der durch*

$$Y(t) = f(t, X(t)), \quad t \in [0, T^*],$$

definiert wird, wieder ein Itô-Prozess, dessen k-ter Komponent, Y_k, durch

$$\begin{aligned} dY_k = {} & \frac{\partial f_k(t, X(t))}{\partial t}\,dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(t, X(t))}{\partial x_i}\,dX_i(t) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_k(t, X(t))}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dX_i(t)\,dX_j(t), \quad t \in [0, T^*], \end{aligned} \tag{A.12}$$

gegeben ist, wobei $dX_i(t)\,dX_j(t)$ entsprechend der Regeln

$$\begin{aligned} dt \cdot dt &= 0, \\ dt \cdot dW_i(t) = dW_i(t) \cdot dt &= 0, \\ dW_i(t) \cdot dW_j(t) &= \delta_{ij}\,dt \end{aligned}$$

berechnet wird.

Beweis Der Beweis des Satzes A.34 ist äquivalent zum Beweis des Satzes A.32. □

A.6 Differentialgleichungen

A.6.1 Stochastische Differentialgleichungen

Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$, eine reelle Zahl x_0, eine Funktion $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine Funktion $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

und ein eindimensionaler Wiener Prozess $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ bezüglich $\mathbb{F}$ gegeben. Man möchte nun einen stochastischen Prozess $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ ermitteln, der die **stochastische Differentialgleichung**

$$\begin{aligned} dX(t) &= \alpha(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{A.13}$$

löst. Man möchte also einen stochastischen Prozess X finden, der die Integralgleichung

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha(s, X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,dW(s), \quad t \in [0, T^*],$$

erfüllt. α heißt wieder Drift und σ Diffusion.

Die folgende Proposition garantiert unter gewissen Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der stochastischen Differentialgleichung (A.13).

Proposition A.35 *Seien x_0, α und σ wie oben definiert. Angenommen es existiert eine Konstante $K \in \mathbb{R}$, sodass folgende Bedingungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0, T^*]$ erfüllt sind:*

$$\begin{aligned} |\alpha(t,x) - \alpha(t,y)| &\leq K|x-y|, \\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leq K|x-y|, \\ |\alpha(t,x)| + |\sigma(t,x)| &\leq K(1+|x|). \end{aligned}$$

Dann gibt es eine eindeutige Lösung $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ der stochastischen Differentialgleichung (A.13), die folgende Eigenschaften hat:

1. *X ist $\mathbb{F}$-adaptiert.*
2. *X hat stetige Trajektorien.*
3. *X ist ein Markow-Prozess.*
4. *Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\mathrm{E}\left[|X(t)|^2\right] \leq Ce^{Ct}(1+|x_0|^2), \quad t \in [0, T^*],$$

ist.

Beweis Der Beweis der Proposition A.35 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Kapitel V auf den Seiten 65 bis 68 erläutert. □

Zum Abschluss dieses Kapitels wird noch ein nützliches Lemma erläutert, dessen Beweis mithilfe von stochastischen Differentialgleichungen geführt wird.

Lemma A.36 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *eine Filtrierung* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$, *eine stetige, deterministische Zeitfunktion* $\sigma : [0, T^*] \to \mathbb{R}$ *und ein eindimensionaler Wiener Prozess* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *gegeben. Ferner sei der Prozess* $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ *durch*

$$X(t) = \int_0^t \sigma(s)\, dW(s), \quad t \in [0, T^*],$$

definiert. Dann ist $X(t)$ *für jedes fixe* $t \in [0, T^*]$ *normalverteilt mit Erwartungswert* 0 *und Varianz*

$$\mathrm{Var}(X(t)) = \int_0^t \sigma^2(s)\, ds.$$

Beweis Es ist also zu zeigen, dass die charakteristische Funktion von $X(t)$ für ein fixes $t \in [0, T^*]$ durch

$$\mathrm{E}\left[e^{iuX(t)}\right] = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\int_0^t \sigma^2(s)\, ds\right\}, \quad u \in \mathbb{R},$$

gegeben ist. Dafür definiert man den Prozess $Z = (Z(t))_{t=0}^{T^*}$ durch

$$Z(t) = e^{iuX(t)}, \quad t \in [0, T^*],\ u \in \mathbb{R}.$$

Die Anwendung der Itô-Formel (A.12) auf $Z(t)$ ergibt

$$dZ(t) = iue^{iuX(t)}\, dX(t) + \frac{1}{2} i^2 u^2 e^{iuX(t)}\, (dX(t))^2, \quad t \in [0, T^*],\ u \in \mathbb{R}.$$

Also löst Z die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dZ(t) &= -\frac{u^2}{2} Z(t)\sigma^2(t)\, dt + iuZ(t)\sigma(t)\, dW(t), \quad t \in [0, T^*],\ u \in \mathbb{R}, \\ Z(0) &= 1. \end{aligned} \tag{A.14}$$

In Integralform kann man (A.14) als

$$Z(t) = 1 - \frac{u^2}{2}\int_0^t Z(s)\sigma^2(s)\, ds + iu\int_0^t Z(s)\sigma(s)\, dW(s), \quad t \in [0, T^*],\ u \in \mathbb{R}, \tag{A.15}$$

darstellen, da die Terme unter dem Integral quadratisch integrierbar sind ($|Z(t)|$ ist für alle $t \in [0, T^*]$ durch 1 beschränkt). Man wendet den Erwartungswert auf (A.15) an und es folgt (mit Benützung der Eigenschaft (A.4))

$$\mathrm{E}[Z(t)] = 1 - \frac{u^2}{2}\int_0^t \mathrm{E}[Z(s)]\sigma^2(s)\, ds, \quad t \in [0, T^*],\ u \in \mathbb{R}.$$

Mit der Definition

$$m(t) = \mathrm{E}[Z(t)], \quad t \in [0, T^*],$$

gilt

$$m(t) = 1 - \frac{u^2}{2} \int_0^t m(s)\sigma^2(s)\, ds, \quad t \in [0, T^*],\ u \in \mathbb{R}. \tag{A.16}$$

Da $\mathrm{E}[Z(t)]$ für alle $t \in [0, T^*]$ stetig in t ist, ergibt die Integralgleichung (A.16) nach t abgeleitet die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= -\frac{u^2}{2} m(t)\sigma^2(t), \quad t \in [0, T^*],\ u \in \mathbb{R}, \\ m(0) &= 1, \end{aligned} \tag{A.17}$$

Die Lösung von (A.17) ist die charakteristische Funktion von $X(t)$ für ein fixes $t \in [0, T^*]$:

$$\mathrm{E}\left[e^{iuX(t)}\right] = \mathrm{E}[Z(t)] = m(t) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2} \int_0^t \sigma^2(s)\, ds\right\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

□

A.6.2 Geometrische Brown'sche Bewegung

In diesem Kapitel A.6.2 wird die geometrische Brown'sche Bewegung beschrieben. Sie findet vor allem in der Finanzmathematik Verwendung: Im Black-Scholes-Modell, dem einfachsten und am weitesten verbreiteten (zeitstetigen) finanzmathematischen Modell zur Bewertung von Optionen, wird die geometrische Brown'sche Bewegung als Näherung für den Preisprozess einer zugrunde liegenden Kapitalanlage (zum Beispiel einer Aktie) herangezogen.

Definition A.37 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$, eine reelle Zahl x_0, zwei Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}$ und ein eindimensionaler Wiener Prozess $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ bezüglich $\mathbb{F}$ gegeben. Dann wird die* ***geometrische Brown'sche Bewegung*** *$X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ durch*

$$\begin{aligned} dX(t) &= \alpha X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{A.18}$$

definiert.

Diese Gleichung kann in einer etwas saloppen Form auch als

$$\dot{X}(t) = (\alpha + \sigma \dot{W}(t))X(t), \quad t \in [0, T^*],$$

dargestellt werden, wobei man $\dot{W}$ „weißes Rauschen“ nennt, das heißt die Ableitung eines Wiener Prozesses nach der Zeit. Somit kann man die geometrische Brown'sche Bewegung als eine lineare Differentialgleichung mit einem stochastischen Koeffizient, der von einem „weißes Rauschen“ gesteuert wird, betrachten. Für kleine Werte von σ kommt die Trajektorie zumindest für kleine $t \in [0, T^*]$ ziemlich nahe an die Funktion $\mathrm{E}[X(t)] = e^{\alpha t}$ heran, wohingegen große Werte von σ große zufällige Abweichungen zur Folge haben.

Die nachstehende Proposition definiert die Lösung der geometrischen Brown'schen Bewegung.

Proposition A.38 *Sei die durch* (A.18) *definierte geometrische Brown'sche Bewegung* $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ *gegeben. Dann gilt Folgendes:*

1. *Die Gleichung* (A.18) *hat die Lösung*

$$X(t) = x_0 \cdot \exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t)\right\}, \quad t \in [0, T^*].$$

2. *Der Erwartungswert von $X(t)$ ist für alle $t \in [0, T^*]$ gleich*

$$\mathrm{E}[X(t)] = x_0 e^{\alpha t}.$$

Beweis Der Beweis der Proposition A.38 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Kapitel V auf den Seiten 60 und 61 erläutert. □

A.6.3 Lineare stochastische Differentialgleichungen

In diesem Kapitel A.6.3 wird die lineare stochastische Differentialgleichung behandelt. Diese Gleichung erscheint in diversen physikalischen Anwendungen und man benötigt sie auch in Verbindung mit der Zinstheorie.

Proposition A.39 *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *eine Filtrierung* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$, *eine reelle Zahl* x_0, *eine Konstante* $a \in \mathbb{R}$, *eine deterministische Funktion* $b : [0, T^*] \to \mathbb{R}$, *eine deterministische Funktion* $\sigma : [0, T^*] \to \mathbb{R}$ *und ein eindimensionaler Wiener Prozess* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *gegeben. Die Lösung* $X = (X(t))_{t=0}^{T^*}$ *der* ***linearen stochastischen Differentialgleichung***

$$\begin{aligned} X(t) &= (aX(t) + b(t))\, dt + \sigma X(t)\, dW(t), \quad t \in [0, T^*], \\ X(0) &= x_0 \end{aligned}$$

ist durch

$$X(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} b(s)\, ds + \int_0^t e^{a(t-s)} \sigma(s)\, dW(s), \quad t \in [0, T^*],$$

gegeben.

Beweis Der Beweis der Proposition A.39 wird im Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] im Kapitel 4.3 auf der Seite 57 erläutert. □

A.6.4 Feynman-Kač-Formel

In diesem Kapitel A.6.4 wird die Beziehung, die zwischen einer stochastischen Differentialgleichung und einer bestimmten parabolischen partiellen Differentialgleichung existiert, mithilfe der Feynman-Kač-Formel untersucht.

Proposition A.40 (Feynman-Kač-Formel) *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *eine Filtrierung* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$, *eine Funktion* $\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *eine Funktion* $\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *eine reelle Zahl* r, *eine Funktion* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und ein eindimensionaler Wiener Prozess* $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$ *bezüglich* $\mathbb{F}$ *gegeben. Ferner sei eine* $\mathbb{R}$*-wertige Funktion* $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ *gegeben, die das folgende Grenzwertproblem im Bereich* $[0, T] \times \mathbb{R}$ *für ein* $T \in [0, T^*]$ *löst:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \alpha(t,x)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} + rF(t,x) &= 0, \\ F(T,x) &= \Phi(x). \end{aligned}$$

Der Prozess

$$\left(\sigma(s, X_{t,x}(s))\frac{\partial F(s, X_{t,x}(s))}{\partial x}\right)_{s=0}^{T}$$

sei in $\mathcal{L}^2$, *wobei der stochastische Prozess* $X_{t,x} = (X_{t,x}(t))_{t=0}^{T^*}$ *im Intervall* $[t, T]$ *die stochastische Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} dX_{t,x}(s) &= \alpha(s, X_{t,x}(s))\,dt + \sigma(s, X_{t,x}(s))\,dW(s), \\ X_{t,x}(t) &= x, \end{aligned} \qquad 0 \le t \le s \le T,\ x \in \mathbb{R},$$

löst. Dann kann F *als*

$$F(t,x) = e^{r(T-t)}\,\mathrm{E}[\Phi(X_{t,x}(T))], \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R},$$

dargestellt werden, wobei die Indizes in $X_{t,x}$ *hervorheben, dass der Anfangswert zum Zeitpunkt* t *gleich* x *ist.*

Beweis Der Beweis der Proposition A.40 wird im Buch *Arbitrage Theory in Continous Time* von Thomas Björk [4] im Kapitel 4.5 auf der Seite 60 erläutert. □

A.7 Satz von Girsanov

In diesem Kapitel wird der Satz von Girsanov erläutert. In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird dieser Satz verwendet, um stochastische Prozesse zu verändern. Dies passiert mithilfe eines Maßwechsels von einem Wahrscheinlichkeitsmaß P zum äquivalenten Martingalmaß Q. Der Satz von Girsanov hat auch eine besondere Bedeutung in der Finanzmathematik, da unter dem äquivalenten Martingalmaß die diskontierten Preise einer zugrunde liegenden Kapitalanlage, zum Beispiel einer Aktie, Martingale sind. Zunächst wird eine Definition von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen gegeben.

Definition A.41 *Seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann ist P äquivalent zu Q und umgekehrt, wenn für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ folgende Äquivalenz gilt:*

$$P(A) > 0 \Longleftrightarrow Q(A) > 0.$$

Satz A.42 (Satz von Girsanov) *Seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T^*}$, ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess $a = (a(t))_{t=0}^{T^*} \in \mathcal{L}^2$ und ein eindimensionaler Wiener Prozess $\bar{W} = (\bar{W}(t))_{t=0}^{T^*}$ bezüglich $\mathbb{F}$ gegeben. Sei ferner ein Prozess $Z = (Z(t))_{t=0}^{T^*}$ durch*

$$Z(t) = \exp\left\{ -\int_0^t a(s)\, d\bar{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t a(s)^2\, ds \right\}, \quad t \in [0, T^*], \tag{A.19}$$

*gegeben und erfülle a die **Novikov Bedingung***

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^{T^*} a(s)^2\, ds \right\} \right] < \infty. \tag{A.20}$$

Dann ist das Maß Q, welches auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch

$$\frac{dQ}{dP} = Z(T^*) \tag{A.21}$$

definiert wird, ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß und der Prozess $W = (W(t))_{t=0}^{T^*}$, der durch

$$W(t) = \bar{W}(t) + \int_0^t a(s)\, ds, \quad t \in [0, T^*],$$

gegeben ist, ein Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{F}$ unter Q.

Beweis Der Beweis des Satzes von Girsanov A.42 wird im Buch *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* von Bernt Øksendal [12] im Kapitel VIII auf den Seiten 147 und 148 erläutert. $\square$

Bemerkung A.43

1. Die Novikov Bedingung (A.20) garantiert, dass der Prozess Z, der durch (A.19) gegeben ist, ein Martingal unter P ist.

2. Die Ableitung (A.21) nennt man **Radon-Nikodym-Ableitung**. Sie misst die relative Wahrscheinlichkeit eines unter den Wahrscheinlichkeitsmaßen P und Q gegebenen $\omega \in \Omega$ im Intervall $[0, T^*]$.

Abkürzungsverzeichnis

Allianz: Allianz SE

AMB: AMB Generali Holding

ANAV: Adjusted Net Asset Value

APE: Annual Premium Equivalent

AXA: AXA S.A.

CFO: Chief Financial Officer

CIR: Cox-Ingersoll-Ross

CoC: Cost of Capital

EEV: European Embedded Value

EV: Embedded Value

f.s.: fast sicher

IAS: International Accounting Standards

IFRS: International Financial Reporting Standards

MCEV: Market Consistent Embedded Value

MR: Münchener Rück Versicherungsgruppe

PVFP: Present Value of Future Profits

PVNBP: Present Value of New Business Premium

RfB: Rückstellung für Beitragsrückerstattung

TVOG: Time Value of Options and Guarantees

UNIQA: UNIQA Versicherungen AG

VIG: Vienna Insurance Group

VNB: Value of New Business

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Allianz SE. *Allianz European Embedded Value Report 2007.* http://www.allianz.com/de/allianz_gruppe/investor_relations/berichte_und_finanzdaten/european_embedded_value_report/allianz_eev_report_2007.pdf.

[2] AMB Generali Holding. *AMB Generali Full Year 2007 Results*, März 2008. http://www.amb.de/internet/amb/amb_inter.nsf/ContentByKey/RHEN-7CTPAV-DE-p/$FILE/IR_FullYearResults_2007.pdf.

[3] AXA S.A. *2007 Additional Information about Life & Savings European Embedded Value*, Februar 2008. http://www.axa.com/lib/axa/uploads/ra/2007/AXA_EEV_2007.pdf.

[4] Thomas Björk. *Arbitrage Theory in Continous Time.* Oxford University Press Inc., New York, 1998.

[5] Black-Scholes-Modell. http://www.black-scholes.ch/.

[6] Andrew J.G. Cairns. *Interest Rate Models.* Princeton University Press, New Jersey, 2004.

[7] CFO Forum. http://www.cfoforum.nl/membership.html.

[8] John Cox, Jonathan Ingersoll, Stephen Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica 53.* Econometric Society, 1985.

[9] Laszlo Hrabovszki und Ute Kerres / AMB Generali Holding. *Embedded Value – European Embedded Value – Market Consistent Embedded Value*, qx-Club Köln, Februar 2005. http://www.qx-club.info/vortrag_hrabovszki_kerres_01022005.pdf.

[10] Michael Koller. *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.

[11] Münchener Rück/ERGO Versicherungsgruppe. *European Embedded Value 2007: Supplementary Information regarding Life and Medical Embedded Value Results 2007*, März 2008. http://www.munichre.com/app_resources/pdf/ir/publications/presentations/2008_03_11_embedded_value_en.pdf.

[12] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* (4. Auflage) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[13] Towers Perrin/Tillinghast. *Embedded Value Workshop*, Wien, Februar 2007.

[14] UNIQA Versicherungen AG. *UNIQA Group Embedded Value 2007*, Mai 2008. http://www.uniqagroup.com/uniqagroup/cms/de/img/UNIQA_EEV2007_endg%20V2_tcm52-318766.pdf.

[15] Vienna Insurance Group. *Group Embedded Value Results 2007*, März 2008. http://www.wienerstaedtische.com/fileadmin/wst/Folder/InvestorRelations/Presentation/2007-08/080327_-_Group_Embedded_Value_Results_2007.pdf.

Stichwortverzeichnis

N

P

R

S

T

V

W

Z