

# DIPLOMARBEIT

## Studien zur Anti-Resonanz bei parametererregten Mehrfreiheitsgrad-Drehschwingern

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs  
unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Horst Ecker  
Institut für Mechanik und Mechatronik  
Abteilung Technische Dynamik

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
**Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften**

von

Till Jochen Kniffka  
1027794  
Gablenzgasse 42, Top 12-13  
1160 Wien

Wien, 27. September 2012

*Beatus ille, qui procul negotiis.*

*Gewidmet den Menschen, die mir stets die Last von den Schultern nehmen, mich aufrichten, mir den Rücken stärken und freihalten.*

*Für Susanne und Lena.*

## Danksagung

Ich möchte allem voran Prof. Dr. Horst Ecker zunächst dafür danken, dass er mich in das interessante Thema parametererregter Systeme einführte und mir die Möglichkeit gab, auf diesem Gebiet meine Diplomarbeit zu verfassen. Meinen besonderen Dank hat darüber hinaus sein überdurchschnittlicher Einsatz und seine Hilfe verdient, insbesondere bei der Durchführung und Fertigstellung dieser Arbeit und meiner Publikation im Rahmen der ICNPAA 2012.

Ich möchte auch Prof. Dr. Alois Steindl für seine Hilfe zu Beginn der Durchführung dieser Arbeit und Dipl. Ing. Erwin Quintus für seine hilfreichen Antworten danken.

## Kurzfassung

Bei mechanischen Systemen, bei denen Parameter periodisch von der Zeit abhängig sind, spricht man von parametererregten Systemen. Sind diese Abhängigkeiten der Parameter zeitperiodisch, so kann es hierbei abhängig von der Frequenz  $\Omega$  der Parametererregung zu negativen oder auch positiven Effekten auf die Stabilität des Systems kommen. Eine Steigerung der Stabilität (*Parameterantiresonanz*) tritt u. U. dann auf, wenn  $\Omega$  gleich der Differenz zweier Eigenfrequenzen des Systems ist. Die Stabilisierung tritt deswegen ein, weil periodisch Energie in höhere Schwingungsmoden transferiert wird, in denen die modalen Dämpfungen größer sind. Die im System enthaltene Energie kann dort schneller dissipiert werden.

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, solche parametererregte Mehrfreiheitsgrad-Drehschwinger-Systeme unter Erregung in Anti-Resonanz zu untersuchen. Im Besonderen wird die Frequenz des angesprochenen Energietransfers in der Anti-Resonanz analytisch bestimmt und ihre Abhängigkeit von Parametern sowie ihr Einfluss auf das Verhalten des Systems diskutiert. Die gemachten Ergebnisse werden numerisch durch Simulationen beispielhaft überprüft. Es werden auch Parameterstudien durchgeführt und alle analytisch gefundenen Zusammenhänge numerisch validiert.

Dazu wird im ersten Teil der Arbeit ein Zweifreiheitsgrad-System untersucht. In einem weiteren Teil der Arbeit wird dann gezeigt, dass die am Zweifreiheitsgrad-System gemachten Ergebnisse auf Mehrfreiheitsgrad-Systeme übertragbar sind.

**Schlagwörter:** Parametererregte Schwingungen, Parameterantiresonanz, Stabilität, Tondl-Effekt, quasimodaler Energietransfer

## Abstract

This Master Thesis deals with parametrically excited systems, which means some of the system parameters are varied over time. Because this variation is periodic, these systems are called time-periodic. Depending on the frequency  $\Omega$  of this time-periodic variation of the parameters, one can observe positive and negative effects on the stability of the system. An increase of the stability (*parameter anti-resonance*) can possibly be seen for values of  $\Omega$  which are equal to a difference of two natural frequencies of the system. The reason for this increase of the stability can be explained by a periodic transfer of energy from the lower to the higher mode.

The goal of this Master Thesis is to study such time-periodic, parametrically excited systems in anti-resonance. A special focus is put on calculating the frequency of the mentioned energy transfer and on a discussion of its dependence on parameters and its influence on the behaviour of the system. The obtained results are numerically verified by simulations of exemplary systems. Parameter studies and validations of all analytically achieved findings are carried out, too. A two degree of freedom system is studied first. It is then shown that all results for this simple system can be applied to multi degree of freedom systems.

**Key words:** parametrically excited vibrations, parametric anti-resonance, stability, Tondl effect, quasimodal energy transfer

# Inhaltsverzeichnis

Danksagung	III
Kurzfassung	IV
Abstract	V
Formelverzeichnis	VII
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>2 Modellbildung</b>	<b>4</b>
2.1 Mechanisches Modell . . . . .	4
2.2 Berechnung der Eigenfrequenzen . . . . .	6
2.3 Quasimodale Reduktion . . . . .	8
2.4 Normierung der Bewegungsgleichungen . . . . .	10
2.5 Einführung eines numerischen Modells . . . . .	11
<b>3 Stabilität linearer, zeitabhängiger Differentialgleichungssysteme</b>	<b>13</b>
<b>4 Effekte bei Parametererregung</b>	<b>16</b>
<b>II Die Frequenz des quasimodalen Energietransfers am 2-FHG-System</b>	<b>24</b>
<b>5 Mittelungsmethode für zeitabhängige Steifigkeit <math>k_{01}(t)</math></b>	<b>25</b>
5.1 Parametererregung ohne Frequenzabweichung . . . . .	29
5.2 Parametererregung mit geringer Frequenzabweichung . . . . .	32
<b>6 Mittelungsmethode für zeitabhängiges Massenträgheitsmoment <math>I_1(t)</math></b>	<b>34</b>
6.1 Parametererregung ohne Frequenzabweichung . . . . .	36
6.2 Parametererregung mit geringer Frequenzabweichung . . . . .	40
<b>7 Numerische Validierung und Parameterstudie</b>	<b>42</b>
7.1 Parametererregung durch zeitvariante Steifigkeit $k_{01}(t)$ . . . . .	42

---

7.1.1	Parametererregung ohne Frequenzabweichung . . . . .	42
7.1.2	Parametererregung mit geringer Frequenzabweichung . . . . .	48
7.2	Parametererregung durch zeitvariantes Massenträgheitsmoment $I_1(t)$ . . .	49
7.2.1	Parametererregung ohne Frequenzabweichung . . . . .	49
7.2.2	Parametererregung mit geringer Frequenzabweichung . . . . .	55
 <b>III Die Frequenzen der quasimodalen Energietransfers am n-FHG-System</b>		<b>57</b>
<b>8</b>	<b>Ungedämpfte n-FHG-Systeme</b>	<b>58</b>
8.1	Frequenzen bei zeitabhängiger Steifigkeit $k_{01}(t)$ . . . . .	59
8.2	Frequenzen bei zeitabhängigem Massenträgheitsmoment $I_1(t)$ . . . . .	60
<b>9</b>	<b>Gedämpfte Mehrfreiheitsgrad-Systeme</b>	<b>62</b>
<b>10</b>	<b>Numerische Validierung für ein 4-FHG-System</b>	<b>65</b>
10.1	Parametererregung durch zeitvariante Steifigkeit $k_{01}(t)$ . . . . .	66
10.2	Parametererregung durch zeitvariantes Massenträgheitsmoment $I_1(t)$ . . .	67
10.3	Gedämpftes System unter zeitvarianter Steifigkeit $k_{01}(t)$ . . . . .	68
<b>11</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>73</b>
<b>Anhang</b>		<b>76</b>
<b>A</b>	<b>Identitäten von Produkten trigonometrischer Funktionen</b>	<b>76</b>
<b>B</b>	<b>Hilbert-Transformation</b>	<b>77</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>79</b>

## Formelverzeichnis

Selten benutzte Formelzeichen und Begriffe sowie abweichende Bedeutungen werden ausschließlich im Text erläutert. Vektorielle Größen werden im Allgemeinen durch fette Kleinbuchstaben, matrizielle Größen durch fette Großbuchstaben gekennzeichnet. Die Elemente einer als Vektor oder Matrix im Fettdruck definierten Größe treten im Text auch als skalare Größen auf und werden im Formelverzeichnis nicht redundant aufgeführt.

### Allgemeine Konventionen

$o$	Skalar
$\boldsymbol{o}$	Vektor
$\boldsymbol{O}$	Matrix

### Notationen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\approx$	ungefähr
$i$	$\sqrt{-1}$ , imaginäre Einheit
$\Re\{ \}$	Realteil einer komplexen Zahl
$\Im\{ \}$	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\mathbf{1}$	Einheitsmatrix entsprechender Größe
$\boldsymbol{O}^T$	Transponierte von $\boldsymbol{O}$
$\boldsymbol{O}^{-1}$	Inverse von $\boldsymbol{O}$
$\boldsymbol{O}_0$	konstanter Anteil einer zeitabhängigen Matrix $\boldsymbol{O}(t)$
$\boldsymbol{O}_{\text{PE}}$	periodischer Anteil einer zeitabhängigen Matrix $\boldsymbol{O}(t)$
$(\dot{\phantom{a}})$	Ableitung nach der Zeit $t$
$(\phantom{a})'$	Ableitung nach der Eigenzeit $\tau$
$(\bar{\phantom{a}})$	$\frac{1}{T} \int (\phantom{a}) dt$ , Mittelung über eine Periode



## Symbole

$c_{ij}$	Dämpfungskonstante eines Drehdämpfers zwischen Körper $i$ und Körper $j$
$k_{ij}$	Steifigkeit einer Drehfeder zwischen Körper $i$ und Körper $j$
$u_i$	quasimodale Verdrehung des Körpers $i$
$t$	Zeit
$x_i$	Kosinusamplitude der quasimodalen Verdrehung $u_i$ des Körpers $i$
$y_i$	Sinusamplitude der quasimodalen Verdrehung $u_i$ des Körpers $i$
$I_i$	Massenträgheitsmoment des Körpers $i$
$\gamma_i$	Verdrehung des Körpers $i$
$\delta$	Proportionalitätsfaktor zwischen Dämpfungskonstanten und Steifigkeiten
$\varepsilon$	Amplitude der Parametererregung
$\varepsilon_1$	auf den konstanten Teil des Massenträgheitsmoments bezogene Amplitude der Parametererregung
$\varepsilon_2$	auf den konstanten Teil der Steifigkeit bezogene Amplitude der Parametererregung
$\zeta_i$	quasimodale Dämpfung der $i$ -ten Quasimode
$\eta_i$	$\frac{\omega_i}{\Omega_0}$ , auf $\Omega_0$ bezogene Eigenfrequenz $\omega_i$
$\lambda$	komplexer Eigenwert
$\mu$	$\frac{\delta}{\varepsilon}$ , relativer Proportionalitätsfaktor
$q_n$	$\text{eig}(\mathbf{R})$ , Floquetmultiplikator der $n$ -ten Fundamentallösung
$\sigma$	Frequenzabweichung der Parametererregungsfrequenz $\Omega$
$\tau$	Eigenzeit
$\omega_i$	Eigenkreisfrequenz der $i$ -ten Quasimode
$\omega_{\text{Trans}}$	Kreisfrequenz des quasimodalen Energietransfers
$\omega_{\text{Trans,D}}$	Kreisfrequenz des quasimodalen Energietransfers bei gedämpften Systemen
$\Omega$	Kreisfrequenz der Parametererregung
$\varphi$	Eigenvektor
$\mathbf{A}$	Systemmatrix

---

$C$	Dämpfungsmatrix
$J$	Jakobimatrix
$K$	Steifigkeitssmatrix
$M$	Massenmatrix
$R$	Monodromiematrix
$Z$	modale Dämpfungsmatrix des nicht parametererregten Systems
$\Lambda$	Spektralmatrix
$\Phi$	Modalmatrix des nicht parametererregten Systems
$\hat{\Phi}$	Parametererregungsverteilungsmatrix

# 1 Einleitung

Seit der ersten Veröffentlichung zum Thema Anti-Resonanz bei parametererregten Systemen von TONDL [13] im Jahr 1998, die seine bis zu einem Jahrzehnt älteren Ergebnisse zu diesem Thema bündelte, wurden viele Eigenschaften dieses Phänomens auf theoretische aber auch experimentelle Weise u.a. von ECKER [4], ABADI [1] und DOHNAL [3] eingehend untersucht. Allmählich kommt es auch zu ersten Anwendungen dieser Erkenntnisse als Konzept der Stabilisierung von instabilen Systemen. So konnte beispielsweise 2012 die Effektivität der Parametererregung hinsichtlich der Stabilität an mechanischen Filtern für elektrische Signale im Bereich der Mikro-Elektro-Mechanischen Systeme [15], [9] gezeigt werden.

Dabei blieb der eigentliche physikalische Mechanismus der Parameterantiresonanz jedoch weitgehend unbeachtet. ECKER ET PUMHÖSSL [6] zeigten erst 2012 an einem ungedämpften System in aller Deutlichkeit, dass Parameterantiresonanz darauf beruht, dass die Energie von der ersten Schwingungsmode des Systems in höhere übertragen wird. Dieser Energietransfer erfolgt periodisch mit einer Frequenz, welche sehr viel kleiner ist, als die Eigenfrequenzen eines solchen Systems.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, das Phänomen von Parameterantiresonanzen an Mehrfreiheitsgrad-Drehschwingern näher zu untersuchen und vor allem die Frequenz des zuvor erwähnten Energietransfers zu studieren.

Die Arbeit ist dazu in drei Teile gegliedert: In Teil I wird dazu in Kapitel 2 zunächst ein Zweifreiheitsgrad-System modelliert. In Kapitel 3 wird erläutert, wie die Stabilität eines solchen Systems numerisch untersucht werden kann. Die in Kapitel 3 dargestellte Methode wird in Kapitel 4 auf das in Kapitel 2 präsentierte System angewendet um das allgemeine Verhalten eines solchen parametererregten Systems beispielhaft zu erläutern.

In Teil II wird das in Kapitel 2 eingeführte Zweifreiheitsgrad-System hinsichtlich der Frequenz des Energietransfers zwischen den beiden Schwingungsmoden untersucht, zunächst bei Parametererregung durch die Variation der Steifigkeit einer Drehfeder (Kapitel 5), dann bei Parametererregung durch die Variation des Massenträgheitsmoments eines Körpers des Systems (Kapitel 6). Die gefundenen Ergebnisse werden anschließend in Kapitel 7 durch Untersuchungen an einem System mit konkretem Parametersatz numerisch validiert. Es werden auch Parameterstudien vorgenommen.

In Teil III wird zu Beginn gezeigt, dass die in Teil II gefundenen Ergebnisse auf Systeme mit beliebig vielen gekoppelten Drehschwingern übertragen werden können. Es wird in Kapitel 8 beschrieben, wie die Frequenzen zwischen den einzelnen Schwingungsmoden zu berechnen ist. Es werden dann in Kapitel 9 gedämpfte Mehrfreiheitsgrad-Systeme diskutiert. Die Ergebnisse aus beiden Kapiteln werden in Kapitel 10 für einen konkreten Parametersatz numerisch untersucht und numerische und analytische Ergebnisse verglichen.

Im abschließenden Kapitel 11 werden alle in dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse resümiert und ihre Bedeutung auch in Hinsicht auf mögliche Anwendungen diskutiert.

**Teil I**

**Grundlagen**

## 2 Modellbildung

### 2.1 Mechanisches Modell

Wird ein mechanisches System parametererregt, so ist Parameterresonanz zwar schon bei einem Einfreiheitsgrad-, Parameterantiresonanz aber erst ab einem Zwei-Freiheitsgrad-System beobachtbar. Bevor später auf ein Mehrfreiheitsgrad-System übergegangen wird, soll in diesem Teil der Arbeit des einfacheren Verständnisses wegen mit einer minimal möglichen Zahl von Freiheitsgraden - also zwei - gearbeitet werden.

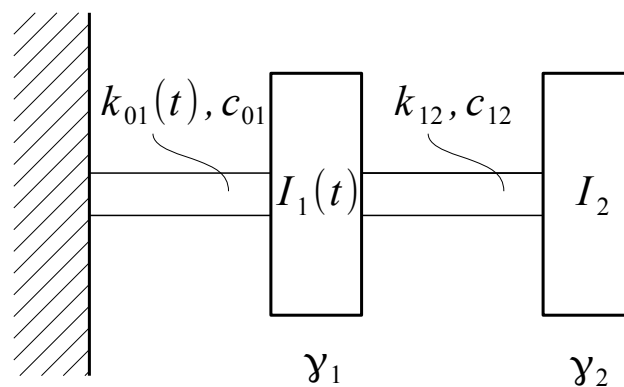


Abbildung 2.1: Betrachtetes Zwei-Freiheitsgrad-System

Betrachtet wird ein lineares Zwei-Freiheitsgrad-Drehschwinger-System (siehe **Bild 2.1**) mit den Körpern 1 und 2 (Massenträgheitsmomente  $I_1(t)$  und  $I_2$ ). Körper 1 ist hierbei mit dem Inertialsystem über eine Drehfeder mit der Steifigkeit  $k_{01}(t)$  und einen viskosen Drehdämpfer mit der Dämpfungskonstanten  $c_{01}$  verbunden. Mit dem Körper 2 ist Körper 1 über eine Drehfeder mit der Steifigkeit  $k_{12}$  und einen viskosen Drehdämpfer mit der Dämpfungskonstanten  $c_{12}$  gekoppelt.  $I_1(t)$  und  $k_{01}(t)$  sollen zeitvariant sein von der Form  $I_1(t) = I_1 (1 + \varepsilon_1 \cos(\Omega t + \psi^*))$  und  $k_{01}(t) = k_{01} (1 + \varepsilon_2 \cos(\Omega t))$ . Alle übrigen Größen sind zeitunabhängig. Es wurde zwar gezeigt [3], dass auch die Variation einer Dämpfungskonstanten über der Zeit positive Effekte hinsichtlich der Stabilität des Systems bewirken kann. Der Effekt ist allerdings nicht so groß, wie bei der Variation konservativer Parameter des Systems.

Die Verdrehung des Körpers 1 gegenüber dem Inertialsystem ist  $\gamma_1$ , die des Körpers 2 ist  $\gamma_2$ .

Die Bewegungsgleichungen des Systems ergeben sich zu

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{K}(t) \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\dot{(\ )}$  eine Ableitung bezüglich der Zeit  $t$ .

Die zeitabhängige Massenmatrix  $\mathbf{M}(t)$  kann zerlegt werden in

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_{\text{PE}}(t) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \cos(\Omega t + \psi^*) \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

die zeitunabhängige Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  ergibt sich zu

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{01} + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

und die zeitabhängige Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}(t)$  zu

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{\text{PE}}(t) = \begin{pmatrix} k_{01} + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{pmatrix} + \varepsilon_2 \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} k_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

wobei für  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  gelten soll:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$ .

Damit lässt sich Gl. (2.1) umschreiben zu

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\gamma} + \mathbf{C} \dot{\gamma} + \mathbf{K}_0 \gamma = -\mathbf{M}_{\text{PE}}(t) \ddot{\gamma} - \mathbf{K}_{\text{PE}}(t) \gamma. \quad (2.5)$$

## 2.2 Berechnung der Eigenfrequenzen

Zum weiteren Vorgehen ist es sinnvoll, die Bewegungsgleichungen quasimodal zu reduzieren. Dazu ist es zunächst notwendig, die Eigenkreisfrequenzen zu bestimmen.

Für das System ohne Parametererregung ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\gamma} + \mathbf{C} \dot{\gamma} + \mathbf{K}_0 \gamma = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Gl. (2.6) lässt sich auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung erweitern:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{K}_0 & -\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$



Mit dem Ansatz  $[\gamma \ \dot{\gamma}]^T = \hat{\gamma} e^{\lambda t}$  folgt daraus das Eigenwertproblem

$$(A - \lambda \mathbf{1})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Die Eigenwerte  $\lambda_i = \mu_i \pm i\omega_i$  sind paarweise konjugiert komplex und die Imaginärteile  $\omega_i$  die Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Systems. Die vier komplexen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  haben jeweils zwei konjugiert komplexe Einträge  $\varphi_{ij} \pm i\chi_{ij}$ , deren Realteile  $\varphi_{ij}$  die Eigenformen des gedämpften System darstellen.

Ist  $C = \mathbf{0}$ , so vereinfacht sich das Eigenwertproblem: Die Eigenwerte  $\lambda_i$  sind rein imaginär und die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  rein reell. Das Eigenwertproblem lässt sich dann schreiben als

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}_0)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

wobei gilt  $\boldsymbol{\varphi}_i = [\varphi_{i1} \ \varphi_{i2}]^T$ .

Die Eigenkreisfrequenzen ergeben sich dann zu

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{I_1 k_{12} + I_2 (k_{01} + k_{12})}{2 I_1 I_2}} \pm \sqrt{\left(\frac{I_1 k_{12} + I_2 (k_{01} + k_{12})}{2 I_1 I_2}\right)^2 + \frac{k_{01} k_{12}}{I_1 I_2}} \quad (2.11)$$

und die Eigenvektoren zu

$$\boldsymbol{\varphi}_i^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_{12}}{k_{12} - I_2 \omega_i^2} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

wobei eine Normierung  $\varphi_{i1}^* = 1$  gewählt wurde.

## 2.3 Quasimodale Reduktion

Werden die Eigenvektoren  $\varphi_i^*$  bezüglich dem zeitunabhängigen Teil  $M_0$  der Massenmatrix normiert, so dass gilt

$$\varphi_i^T M_0 \varphi_i = 1. \quad (2.13)$$

So erhält man mit Gl. (2.12) und Gl. (2.2) die normierten Eigenvektoren zu

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \frac{\omega_i^2 I_2 - k_{12}}{\sqrt{\omega_i^4 I_1 I_2^2 + (k_{12}^2 - 2k_{12}\omega_i^2 I_1) I_2 + k_{12}^2 I_1}} \\ -\frac{k_{12}}{\sqrt{\omega_i^4 I_1 I_2^2 + (k_{12}^2 - 2k_{12}\omega_i^2 I_1) I_2 + k_{12}^2 I_1}} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Eigenvektoren  $\varphi_i$  können dann zur Modalmatrix  $\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2]$  zusammengefasst werden.

Die Verdrehungen  $\gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2]^T$  gegenüber dem Inertialsystem werden mit  $\gamma = \Phi u$  auf die quasimodalen Verdrehungen  $u$  transformiert. Bei einem linearen, zeitunabhängigen System wie Gl. (2.6) würde das dazu führen, dass die Gleichungen entkoppelt würden. Die Transformation hätte auch eine modale Reduktion zur Folge, d. h., die Verdrehungen  $u$  wären die modalen Verdrehungen des Systems. Das ist beim vorliegenden System nicht der Fall.

Die Gleichungen werden nicht entkoppelt, weil die Transformation zwar zu einer Entkopplung der Gleichungen bezüglich der linken Seite (zeitinvariante Terme), aber gleichzeitig zu einer Kopplung bezüglich der rechten Seite (zeitvariante Terme) führt. Außerdem kann nicht länger von einer Transformation auf modale Verdrehungen gesprochen werden, weil das Eigenwertproblem, was zu diesen Moden führt, nur für lineare, zeitunabhängige Gleichungssysteme gilt. Da die Zustandsgrößen, auf die transformiert wird, für die hier betrachteten Fälle ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$ ) hinsichtlich ihrer Eigenschaften, nicht aber mathematisch mit den modalen Verdrehungen übereinstimmen, so soll hier von *quasimodalen* Verdrehungen die Rede sein. Nach einer solchen quasimodalen Transformation lässt sich

Gl. (2.5) schreiben als

$$\Phi^T M_0 \Phi \ddot{u} + \Phi^T C \Phi \dot{u} + \Phi^T K_0 \Phi u = \Phi^T M_{PE} \Phi \ddot{u} + \Phi^T K_{PE} \Phi u. \quad (2.15)$$

Wegen Gl. (2.13) gilt

$$\ddot{u} + \mathbf{Z}\dot{u} + \Lambda u = \begin{pmatrix} -\varphi_{11}^2 & -\varphi_{11} \varphi_{21} \\ -\varphi_{11} \varphi_{21} & -\varphi_{21}^2 \end{pmatrix} (I_1 \varepsilon_1 \cos(\Omega t + \psi^*) \ddot{u} + k_{01} \varepsilon_2 \cos(\Omega t) u). \quad (2.16)$$

Es lässt sich außerdem zeigen (siehe bspw. [12]), dass die Spektralmatrix  $\Lambda$  eine Diagonalmatrix mit den Quadraten der Eigenkreisfrequenzen als Einträge ist:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Die Eigenkreisfrequenzen sollen so benannt werden, dass gilt  $\omega_1 < \omega_2$ .

Im Fall von Proportionaldämpfung, d. h., wenn die Dämpfungsmatrix  $C$  sich durch Linearkombination von dem zeitunabhängigen Teil  $M_0$  der Massenmatrix und dem zeitunabhängigen Teil  $K_0$  der Steifigkeitsmatrix bilden lässt, gilt zudem (siehe z.B. [12])

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2\zeta_1 \omega_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2 \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Im folgenden soll für die Dämpfungsmatrix  $C$  gelten

$$C = \delta K_0 \quad (2.19)$$

mit  $\delta \ll 1$ .

Die modalen Dämpfungen  $\zeta_i$  ergeben sich dadurch zu

$$\zeta_i = \frac{\delta \omega_i}{2}. \quad (2.20)$$

## 2.4 Normierung der Bewegungsgleichungen

Zur Reduktion der Anzahl der Parameter können die modalen Bewegungsgleichungen Gl. (2.16) auf eine Eigenzeit  $\tau = \Omega t$  definiert über die Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  normiert werden. Dabei gilt  $\frac{d}{dt} = \Omega \frac{d}{d\tau}$ . Gl. (2.16) wird damit zu

$$\mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} \delta \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & \delta \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} \mathbf{u}' + \begin{pmatrix} \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\varphi_{11}^2 & -\varphi_{11} \varphi_{21} \\ -\varphi_{11} \varphi_{21} & -\varphi_{21}^2 \end{pmatrix} (m_{\text{PE}}(\tau) \mathbf{u}'' + k_{\text{PE}}(\tau) \mathbf{u}). \quad (2.21)$$

Hierbei stellt  $(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}$  eine Ableitung nach der Eigenzeit  $\tau$  dar. Wegen  $\omega_1 < \omega_2$  gilt dabei:

$$\frac{\omega_1}{\Omega} = \eta_1 < \eta_2 = \frac{\omega_2}{\Omega}.$$

Die Parametererregung  $m_{\text{PE}}$  durch den zeitvarianten Anteil der Massenmatrix  $\mathbf{M}(t)$  ergibt sich zu

$$m_{\text{PE}} = \frac{I_1 \varepsilon_1}{\Omega^2} \cos(\tau + \psi) \quad (2.22)$$

und die Parametererregung  $k_{\text{PE}}$  durch den zeitvarianten Anteil der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}(t)$  zu

$$k_{\text{PE}} = \frac{k_{01} \varepsilon_2}{\Omega^2} \cos(\tau). \quad (2.23)$$

Für das weitere Vorgehen ist es zudem notwendig mit  $\mathbf{q} = [u'_1 \ u'_2 \ u''_1 \ u''_2]^T$  auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überzugehen:

$$\left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{11}^2 & \varphi_{11} \varphi_{21} \\ 0 & 0 & \varphi_{11} \varphi_{21} & \varphi_{21}^2 \end{pmatrix} m_{\text{PE}} \right) \mathbf{q}' = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\omega_1^2}{\Omega^2} & 0 & -\delta \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega_2^2}{\Omega^2} & 0 & -\delta \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_{11}^2 & -\varphi_{11} \varphi_{21} & 0 & 0 \\ -\varphi_{11} \varphi_{21} & -\varphi_{21}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} k_{\text{PE}} \right) \mathbf{q}. \quad (2.24)$$

## 2.5 Einführung eines numerischen Modells

In Kapitel 5, Kapitel 6, Kapitel 8 und Kapitel 9 werden analytisch Näherungslösungen von Gl. (2.24) bzw. Gl. (2.21) berechnet. Um die mit dieser Näherung gemachten Fehler durch Simulationen abschätzen zu können, ist es notwendig ein numerisches Modell aufzustellen. Des Weiteren soll das numerische Modell benutzt werden um das generelle Verhalten des System zu untersuchen und darzustellen. Außerdem ist ein solches Modell dort von Vorteil, wo analytische Vorgehensweisen an ihre Grenzen stoßen, um wenigstens noch über numerische Methoden das Verhalten des Systems untersuchen zu können. Die entsprechenden Werte der Parameter sind in **Tabelle 2.1** gelistet. Alle Parameter sind einheitenlos und haben bis auf die Dämpfungskonstanten und die Amplituden der Parametererregung den Betrag 1. Der Parametersatz hat keinen konkreten Bezug zu einem mechanischen oder elektro-mechanischen System.

Die in **Tabelle 2.1** angegebenen Werte führen auf die ungedämpften und gedämpften Eigenkreisfrequenzen und Parameterantiresonanzfrequenzen nach **Tabelle 2.2**.

**Tabelle 2.1:** Parametersatz des numerischen Modells

Parameter	Wert
Massenträgheitsmomente	$I_1 = I_2 = 1$
Steifigkeiten	$k_{01} = k_{12} = 1$
Dämpfungen	$c_{01} = c_{12} = 0.025$
Amplituden der Parametererregung	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$

**Tabelle 2.2:** Aus dem Parametersatz abgeleitete Größen des numerischen Modells

Größe	Wert
ungedämpfte Eigenkreisfrequenzen	$\omega_1 = 0.618034, \omega_2 = 1.618034$
gedämpfte Eigenkreisfrequenzen	$\omega_{D,1} = 0.618036, \omega_{D,2} = 1.617724$
1. Parameterantiresonanzfrequenz	$\Omega_0 = \omega_2 - \omega_1 = 1$
quasimodale Dämpfungen	$\zeta_1 = 7.725 \cdot 10^{-3}, \zeta_2 = 20.225 \cdot 10^{-3}$

### 3 Stabilität linearer, zeitabhängiger Differentialgleichungssysteme

Die Stabilität linearer, zeitabhängiger Differentialgleichungssysteme kann nicht, wie es bei linearen, zeitunabhängigen Systemen der Fall ist, über die Berechnung der Eigenwerte der Jakobimatrix erfolgen, weil die Jakobimatrix in diesem Fall per Definition zeitabhängig ist, was damit auch für ihre Eigenwerte gilt. Analytisch kann die Stabilität solcher Systeme beispielsweise über die Tondl-Floquet Methode, die Methode der Harmonischen Balance, die Method of Multiple Scales, oder wie in Teil II und III mit der Mittelungsmethode nach Krylov-Bugoljobov bestimmt werden. Numerisch hingegen kann die Stabilität solcher Systeme mit der Floquet-Methode (siehe bspw. [10], [14]) oder der Hill-Methode bewertet werden. Erstere findet in dieser Arbeit Anwendung und soll deswegen im folgenden kurz erläutert werden.

In Kapitel 2 konnten die Bewegungsgleichungen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung der Gestalt

$$\mathbf{q}' = \mathbf{f}(\mathbf{q}(\tau), \Omega, \tau) \quad (3.1)$$

gebracht werden, wobei  $\Omega$  ein beliebiger aber fester Parameter ist, der später variiert werden soll. Man kann nun annehmen, dass die Lösung  $\mathbf{q}(\tau)$  von der Gestalt

$$\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_0(\tau) + \Delta\mathbf{q}(\tau) \quad (3.2)$$

ist. Dabei ist  $\mathbf{q}_0(\tau)$  der periodische Anteil der Lösung mit konstanter Amplitude und

$\Delta q(\tau)$  eine zusätzliche Störung. Die gesamte Lösung  $q(\tau)$  ist dann und nur dann stabil, wenn die folgende Bedingung gilt

$$q(\tau + T) \leq q(\tau), \quad (3.3)$$

d. h., wenn die Lösung nach einer Periode  $T$  des periodischen Anteils der Lösung mit konstanter Amplitude nicht größer ist als zuvor. Diese Bedingung ist äquivalent zur Bedingung

$$\Delta q(\tau + T) \leq \Delta q(\tau). \quad (3.4)$$

Setzt man Gl. (3.2) in Gl. (3.1) ein, entwickelt man den Ausdruck für  $q = q_0 + \Delta q$  in eine Taylorreihe um  $q_0$  und vernachlässigt man dabei nichtlineare Terme der Störung  $\Delta q$ , so erhält man schließlich

$$\Delta q' = J \Delta q(\tau), \quad (3.5)$$

wobei die Jakobimatrix  $J(q(\tau), \Omega, \tau) = \frac{\partial f}{\partial q}$  im Fall eines linearen Systems gleich der Systemmatrix  $A(\tau, \Omega)$  ist ( $q' = A(\tau, \Omega)q(\tau)$ ). Ein Satz von Fundamentallösungen  $\Delta Q(\tau + T)$  der Störung  $\Delta q$  nach einer Periode  $T$  lässt sich schreiben als

$$\Delta Q(\tau + T) = R \Delta Q(\tau). \quad (3.6)$$

Dabei ist  $Q(\tau)$  ein Satz von Fundamentallösungen zu Beginn der Periode  $T$ . Die Monodromiematrix  $R$ , die beide Sätze von Fundamentallösungen zu einander in Beziehung setzt, kann im Fall linearer Differentialgleichungssysteme durch  $N$ -fache Integration der Systemmatrix  $A$  mit  $N$  von einander unabhängigen Anfangsbedingungen gebildet



werden.  $N$  ist hierbei die Anzahl von Gleichungen des Differentialgleichungssystems  $\mathbf{q}' = \mathbf{A}(\tau, \Omega)\mathbf{q}(\tau)$ .

Vergleicht man Gl. (3.6) und Gl. (3.4), so sieht man, dass für eine stabile Lösung  $\mathbf{q}$  für die Beträge aller Eigenwerte  $\varrho_n$  der Monodromiematrix  $\mathbf{R}$  gelten muss

$$|\varrho_n| = |\text{eig}(\mathbf{R})| \leq 1. \quad (3.7)$$

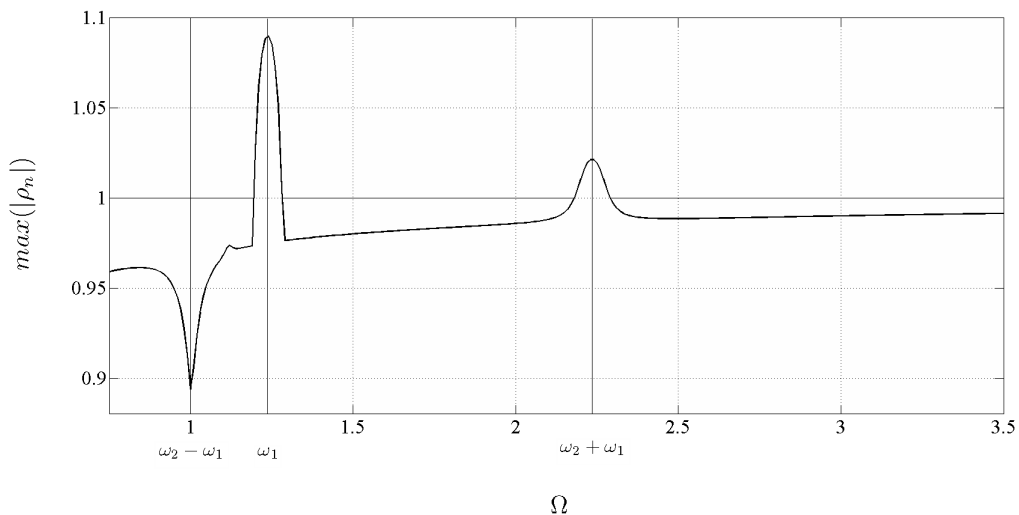
Die Eigenwerte  $\varrho_n$  der Monodromiematrix  $\mathbf{R}$  werden nach dem französischen Mathematiker GASTON FLOQUET (1847-1920) Floquet-Multiplikatoren genannt.

Für Systeme linearer, zeitabhängiger, gewöhnlicher Differentialgleichungen mit dissipativen Termen, wie im hier dargestellten Fall, wird der Ausdruck  $\Delta\mathbf{Q}(\tau + T) = \mathbf{R}\Delta\mathbf{Q}(\tau)$  gleichbedeutend mit  $\mathbf{Q}(\tau + T) = \mathbf{R}\mathbf{Q}(\tau)$ . Wegen der Linearität der Differentialgleichungen existiert nur eine Lösung. Diese ist wegen der im System enthaltenen Dämpfung und nicht vorhandener, von den Zustandsgrößen unabhängigen Kräfte für  $\tau \rightarrow 0$  Null.

## 4 Effekte bei Parametererregung

In diesem Kapitel sollen Effekte, wie sie an parametererregten System auftreten, beispielhaft an dem in Kapitel 2 vorgestellten Zwei-Freiheitsgrad-System unter Parametererregung durch periodische Variation der Steifigkeit  $k_{01}(t)$  gezeigt werden. Die Massenträgheitsmomente bleiben konstant über der Zeit.

Berechnet man, wie in Kapitel 3 beschrieben, die Floquetmultiplikatoren in Abhängigkeit der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  (siehe **Bild 4.1**), so kann die Stabilität des Systems beurteilt werden.



**Abbildung 4.1:** Wert des betragsmäßig größten Floquetmultiplikators in Abhängigkeit von der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$

Der größte Floquetmultiplikator wird in zwei Bereichen der Parametererregungsfrequenz betragsmäßig größer als 1. Diese Wertebereiche der Parametererregungsfrequenzen liegen in der Nähe von  $\Omega = 2\omega_1$  und  $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ . Die Amplituden der Lösungen für

$q(\tau)$  wachsen im Bereich dieser Frequenzen abhängig von den Anfangsbedingungen exponentiell über der Zeit an. Das System ist in der Nähe dieser Stellen der Parametererregungsfrequenz deswegen instabil.

Diese Instabilitäten sind allgemein unter dem Begriff Parameterresonanzen bekannt. Die Verwendung des Begriffs Resonanz anstelle von Instabilität ist historisch begründet. Mit Resonanzen haben diese Instabilitäten allerdings nur gemein, dass sie auf ein endliches Intervall der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  begrenzt und zudem im Allgemeinen schmal sind und damit durch Steigerung von  $\Omega$  überfahren werden können. In Zwei-Freiheitsgrad-Systemen treten primäre Parameterresonanzen auf, wenn für die Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  gilt

$$\Omega_{\text{PR},i,k} = \frac{2\omega_i}{k}, \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

und Parameterkombinationsresonanzen, wenn  $\Omega$  die Werte

$$\Omega_{\text{PRK},i,k} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

annimmt [4], [5]. Dabei sind  $\omega_i$  die Eigenkreisfrequenzen des Systems. Die Instabilität bei  $\Omega = 2\omega_1$  ist eine solche primäre Parameterresonanz und jene bei  $\Omega = \omega_1 + \omega_2$  eine Parameterkombinationsresonanz. Es lässt sich numerisch [9] und analytisch [2] zeigen, dass für  $\Omega_{\text{PR},i,k}$  und gerade Werte für  $k$  eine Periodenverdopplung eintritt, d.h. dass das System mit halber Frequenz der Parametererregung schwingt.

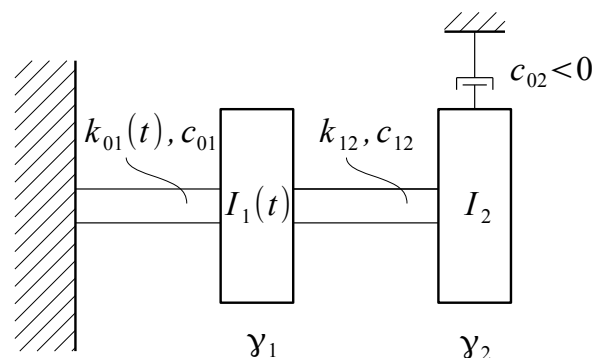
Dass keine Parameterresonanzen für höhere Werte von  $k$  auftreten, bzw. überhaupt keine primäre Parameterresonanz  $\Omega_{\text{PR},2,k} = \frac{2\omega_2}{k}$  in Abhängigkeit der zweiten Eigenkreisfrequenz  $\omega_2$ , hat den Grund, dass das System gedämpft ist. Parameterresonanzen für beliebige Werte von  $k$  treten nur bei ungedämpften Systemen auf. Sie werden mit steigendem  $k$  schmaler und verschwinden mit steigender Dämpfung.

Eine lokales Minimum und somit eine signifikante lokale Steigerung der Stabilität tritt beim betrachteten System bei einer Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  auf. Dieses Phänomen, dass das System an Stellen

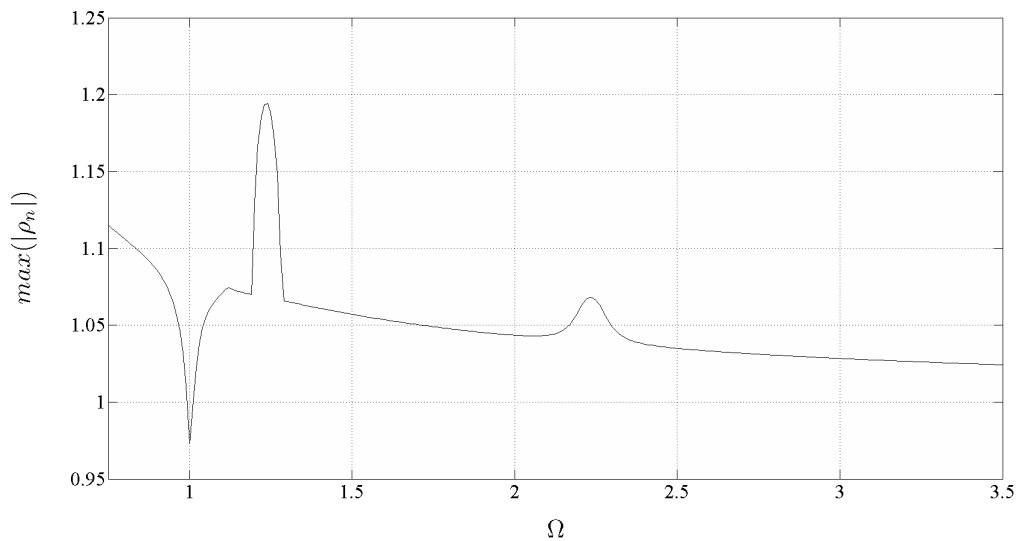
$$\Omega_{\text{PAR},k} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{k}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.3)$$

einen deutlichen Zuwachs an Stabilität erfährt, ist als „Parameterantiresonanz“ bekannt und wurde zuerst von TONDL [13] beschrieben. Dieses Verhalten ist besonders deswegen von Bedeutung, weil es auch erhalten bleibt, wenn das System beispielsweise durch das Hinzufügen einer negativen Dämpfung, für  $\Omega = 0$  instabil wird.

Modifiziert man das in Kapitel 2 dargestellte System dergestalt, dass Körper 2 mittels eines Drehdämpfers mit negativer Dämpfungskonstante  $c_{02} = -0.05$  gegen das Inertialsystem gefesselt wird (siehe **Bild 4.2**) so ergibt sich der in **Bild 4.3** dargestellte Verlauf des Betrags des maximalen Floquetmultiplikators  $\max(|\varrho_n|)$  in Abhängigkeit von der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$ : Das System ist dann überhaupt nur noch in einem kleinen Bereich um  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  stabil.



**Abbildung 4.2:** Systemerweiterung durch einen Selbsterregungsmechanismus in Form eines Drehdämpfers mit negativer Dämpfungskonstanten  $c_{02}$



**Abbildung 4.3:** Wert des betragsmäßig größten Floquetmultiplikators in Abhängigkeit der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  beim modifizierten System nach **Bild 4.2**

Solch eine negative Dämpfungskonstante ist die einfachste Art Selbsterregung zu modellieren. Selbsterregung tritt bei Drehschwingungssystemen in der Praxis in vielerlei Form auf. Eine besonders häufige Art der Selbsterregung ist jene durch Stick-Slip-Effekte. Derartige Probleme treten bei Walzanlagen, beispielsweise in der Stahl- oder Papierproduktion oder auch bei Zentrifugen auf. Sie stellen bei der Auslegung der Dämpfer immer wieder eine Herausforderung dar. Deswegen ist gerade für solche Systeme eine möglichst gute Ausnutzung der im System vorhandenen Dämpfung und ein zusätzlicher Dämpfungseffekt, wie er durch Parametererregung mit Parameterantiresonanzfrequenz geschieht, wichtig.

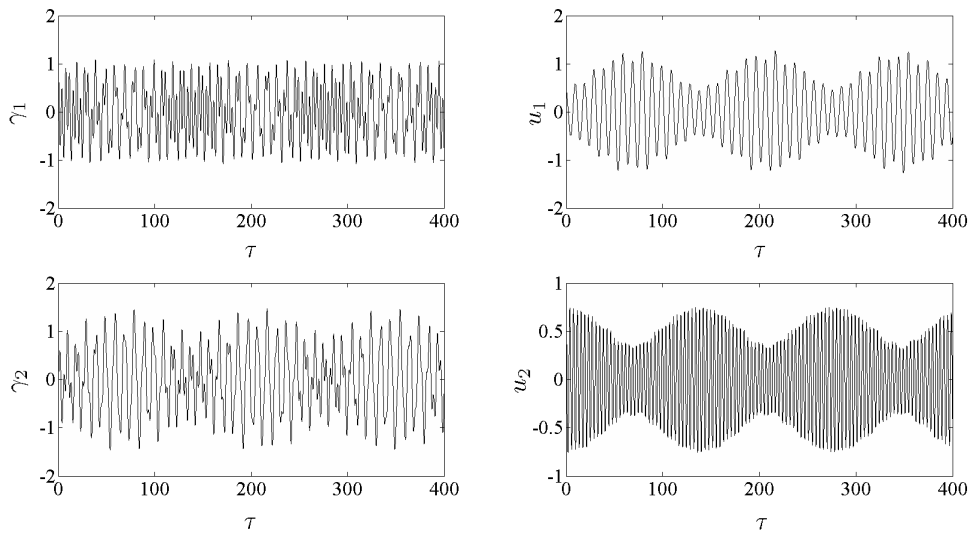
Das Phänomen der Parameterantiresonanz wurde in den letzten beiden Jahrzehnten häufiger untersucht und diskutiert. Der physikalische Mechanismus, der diesem Phänomen zu Grunde liegt, wurde allerdings wenig behandelt. Erst ECKER ET PUMHÖSSL [6] konnten zeigen, dass der Stabilitätsgewinn in der Parameterantiresonanz darin begründet liegt, dass ein Energietransfer zwischen den Schwingungsmoden stattfindet.

Unterliegt das in Kapitel 2 beschriebene, aber ungedämpfte Zwei-Freiheitsgrad-System ( $c_{01} = c_{02} = 0$ ) einer Parametererregung mit Parameterantiresonanzfrequenz so

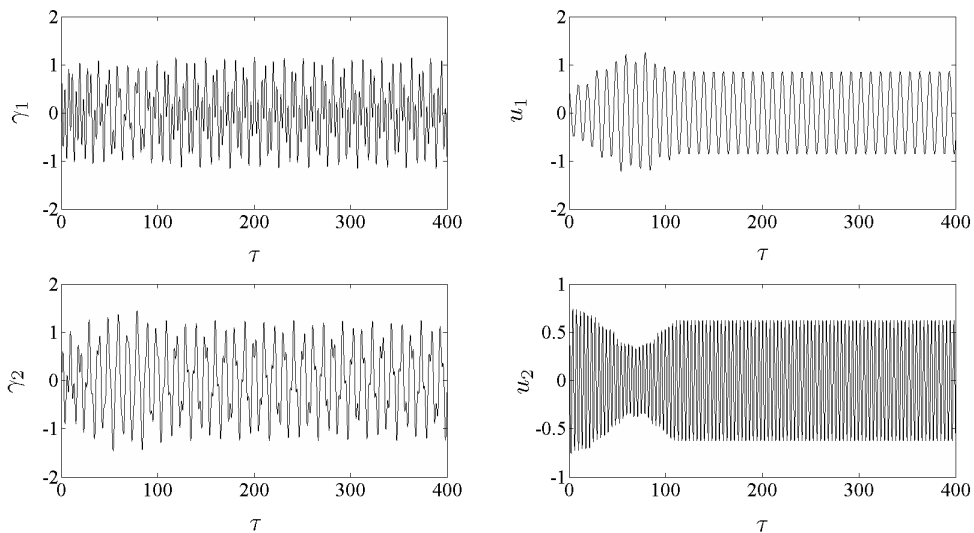
wird periodisch Energie von der einen zur anderen quasimodalen Schwingungsform („Quasimode“) übertragen (siehe **Bild 4.4**). Bricht man die Parametererregung zu einem gewissen Zeitpunkt ab, so bleiben die in der ersten und zweiten Quasimode gespeicherten Energien konstant über der Zeit (siehe **Bild 4.5**).

Betrachtet man das System nun mit Dämpfungskoeffizienten  $c_{01} = c_{02} = 0.025$  und bringt keine Parametererregung in das System ein, so erkennt man, dass die Energie der zweiten Quasimode  $\frac{\zeta_2 \omega_2}{\zeta_1 \omega_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = 6.85$  mal schneller dissipiert wird als die der ersten Quasimode (siehe **Bild 4.6**). Unterliegt das System nun Parametererregung, so wird periodisch Energie aus der ersten Quasimode in die zweite Quasimode transferiert (siehe **Bild 4.7**). Da die quasimodale Dämpfung in der zweiten Quasimode größer ist, wird die gesamte im System enthaltene Energie nun wesentlich schneller dissipiert. Bricht man die Parametererregung zu einem bestimmten Zeitpunkt ab, so wird ab diesem Zeitpunkt keine Energie mehr von der ersten in die zweite Quasimode transferiert. Die zu diesem Zeitpunkt in der zweiten Quasimode gespeicherte Energie klingt rasch ab und die gesamte Energie des Systems ab diesem Zeitpunkt wesentlich langsamer als zuvor (siehe **Bild 4.8**).

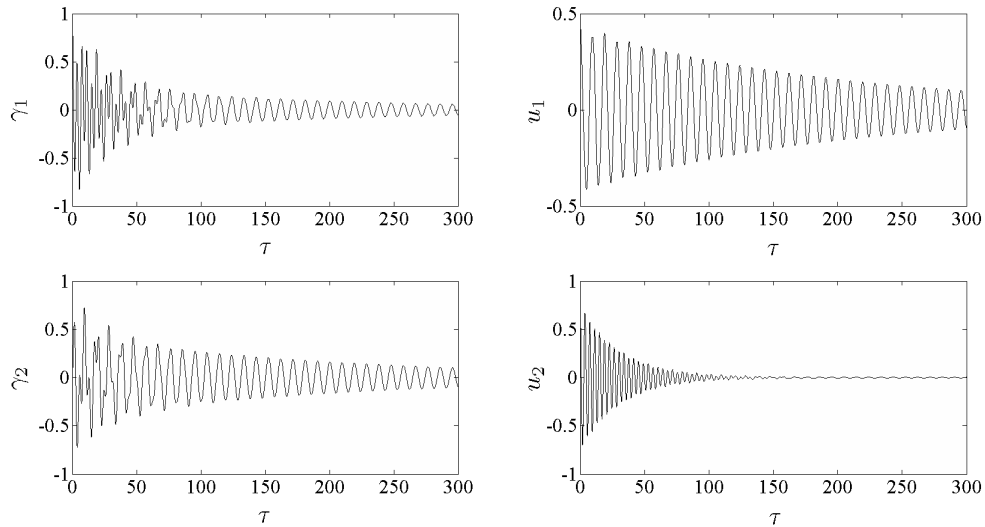
Die Frequenz dieses Energietransfers ist wesentlich langsamer, als die erste oder zweite Eigenkreisfrequenz des Systems. Diese Frequenz zu bestimmen, soll Ziel der folgenden Kapitel sein.



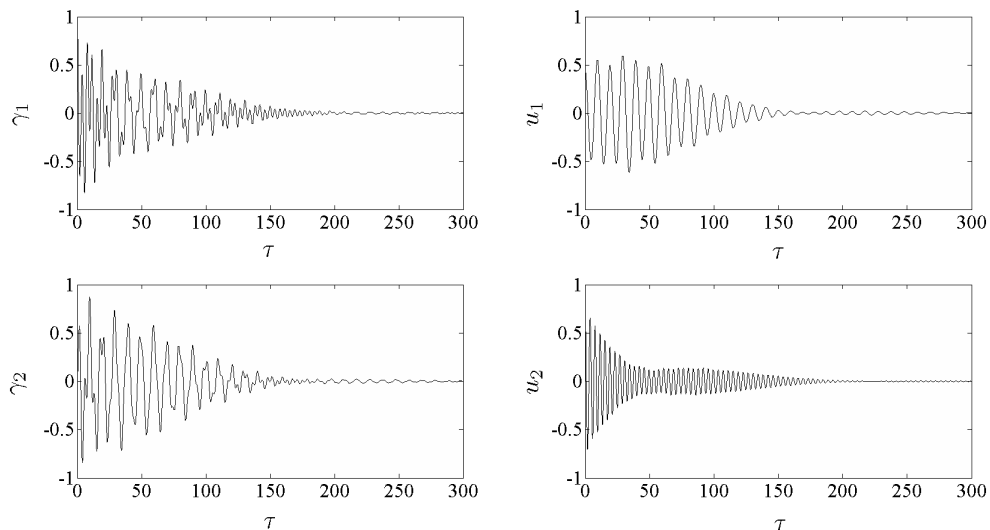
**Abbildung 4.4:** Simulation der Verdrehungen  $\gamma_{1/2}$  bzw. quasimodale Verdrehungen  $u_{1/2}$  des ungedämpften Systems mit Parametererregung mit  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  über der Eigenzeit  $\tau$  mit den Anfangsbedingungen  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$



**Abbildung 4.5:** Simulation der Verdrehungen  $\gamma_{1/2}$  bzw. quasimodale Verdrehungen  $u_{1/2}$  des ungedämpften Systems mit abschnittsweiser ( $0 \leq \tau \leq 100$ ) Parametererregung mit  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  über der Eigenzeit  $\tau$  mit den Anfangsbedingungen  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$

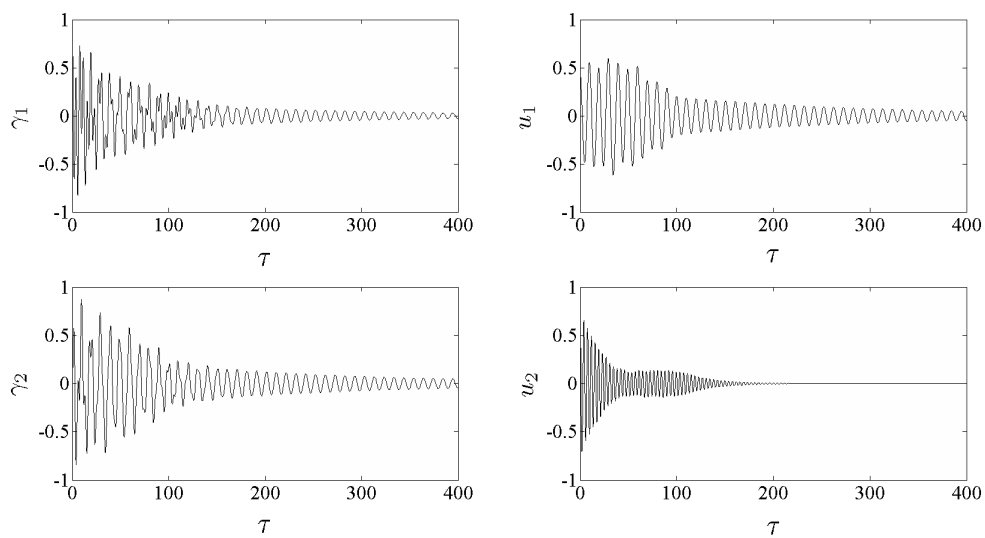


**Abbildung 4.6:** Simulation der Verdrehungen  $\gamma_{1/2}$  bzw. quasimodale Verdrehungen  $u_{1/2}$  des gedämpften Systems ohne Parametererregung über der Eigenzeit  $\tau$  mit den Anfangsbedingungen  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$



**Abbildung 4.7:** Simulation der Verdrehungen  $\gamma_{1/2}$  bzw. quasimodale Verdrehungen  $u_{1/2}$  des gedämpften Systems mit Parametererregung mit  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  über der Eigenzeit  $\tau$  mit den Anfangsbedingungen  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$





**Abbildung 4.8:** Simulation der Verdrehungen  $\gamma_{1/2}$  bzw. quasimodale Verdrehungen  $u_{1/2}$  des gedämpften Systems mit abschnittsweiser ( $0 \leq \tau \leq 100$ ) Parametererregung mit  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  über der Eigenzeit  $\tau$  mit den Anfangsbedingungen  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$

## **Teil II**

# **Die Frequenz des quasimodalen Energietransfers am 2-FHG-System**

## 5 Mittelungsmethode für zeitabhängige Steifigkeit $k_{01}(t)$

Um die Frequenz des modalen Energietransfers zu berechnen, werden Näherungslösung der Differentialgleichung Gl. (2.24) für verschiedene Arten der Parametererregung gesucht.

Im folgenden soll nur die Steifigkeit  $k_{01}$  harmonisch über der Zeit variiert werden. Das Massenträgheitsmoment  $I_1$  soll konstant über der Zeit sein. Das System soll weiterhin ungedämpft sein. Wenn dabei  $k_{01}\varepsilon_2 = \varepsilon \ll 1$  gelten soll, wird Gl. (2.21) zu

$$\mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} \mathbf{u} = - \begin{pmatrix} \varphi_{11}^2 & \varphi_{11} \varphi_{21} \\ \varphi_{11} \varphi_{21} & \varphi_{21}^2 \end{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \cos(\tau) \mathbf{u}. \quad (5.1)$$

Die Frequenz der Parametererregung darf um kleine Werte  $\varepsilon\sigma$  von  $\Omega_0$  abweichen.

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon\sigma + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.2)$$

Es soll eine Näherung erster Ordnung durchgeführt, d. h., Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt. Deswegen gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} &= \frac{1}{\Omega_0 + \varepsilon\sigma + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \frac{\Omega_0 - \varepsilon\sigma}{\Omega_0^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \\ \Rightarrow \frac{1}{\Omega^2} &= \frac{\Omega_0^2 - 2\Omega_0\varepsilon\sigma}{\Omega_0^4} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \frac{1}{\Omega_0^2} - \frac{2\varepsilon\sigma}{\Omega_0^3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Gl. (5.1) lässt sich daher umschreiben zu

$$\mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} \eta_1^2 & 0 \\ 0 & \eta_2^2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} \left( - \begin{pmatrix} \varphi_{11}^2 & \varphi_{11} \varphi_{21} \\ \varphi_{11} \varphi_{21} & \varphi_{21}^2 \end{pmatrix} \cos(\tau) + \begin{pmatrix} 2\eta_1 \omega_1 \sigma & 0 \\ 0 & 2\eta_2 \omega_2 \sigma \end{pmatrix} \right) \mathbf{u} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.4)$$

Es werden die Gleichungen nun dergestalt transformiert, dass die Transformation von  $u$  die Lösung der nicht parametererregten Gleichungen ist (siehe [3]). Für diese gilt  $\varepsilon = 0$ . Das führt zu dem Ansatz:

$$u_i = x_i \cos(\eta_i \tau) + y_i \sin(\eta_i \tau), \quad (5.5)$$

$$u_i' = -x_i \eta_i \sin(\eta_i \tau) + y_i \eta_i \cos(\eta_i \tau). \quad (5.6)$$

Die Ableitung von Gl. (5.5) nach der Eigenzeit  $\tau$  ergibt aber gerade

$$u_i' = x_i' \cos(\eta_i \tau) - x_i \eta_i \sin(\eta_i \tau) + y_i' \sin(\eta_i \tau) + y_i \eta_i \cos(\eta_i \tau). \quad (5.7)$$

Konsistenz von  $u_i'$  (Gl. (5.6)=Gl. (5.7)) ist daher nur gegeben, wenn gilt

$$x_i' \cos(\eta_i \tau) + y_i' \sin(\eta_i \tau) = 0. \quad (5.8)$$

Die Ableitung von Gl. (5.6) nach der Eigenzeit liefert

$$u_i'' = -x_i' \eta_i \sin(\eta_i \tau) - x_i \eta_i^2 \cos(\eta_i \tau) + y_i' \eta_i \cos(\eta_i \tau) - y_i \eta_i^2 \sin(\eta_i \tau). \quad (5.9)$$

Da sich einige Terme aufheben, erhält man durch Einsetzen in Gl. (5.4)

$$-x'_i \eta_i \sin(\eta_i \tau) + y'_i \eta_i \cos(\eta_i \tau) = -\frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} F_i(x_1, y_1, x_2, y_2), \quad (5.10)$$

wobei sich die Einträge  $F_i$  der vektoriellen Funktion  $F$  mit den Abkürzungen  $\cos(\eta_{i,j} \tau) = c_{i,j}$ ,  $\sin(\eta_{i,j} \tau) = s_{i,j}$  darstellen lassen als

$$F_i = \sum_j \widehat{\Phi}_{ij} (x_j c_j + y_j s_j) \cos(\tau) - 2 \omega_i \eta_i \sigma (x_i c_i + y_i s_i). \quad (5.11)$$

Dabei sind  $\widehat{\Phi}_{ij}$  die Einträge der Parametererregungsverteilungsmatrix (PE-Verteilungsmatrix)  $\widehat{\Phi}$

$$\widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}^2 & \varphi_{11} \varphi_{21} \\ \varphi_{11} \varphi_{21} & \varphi_{21}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Stellt man Gl. (5.8) nach  $x_i$  bzw.  $y_i$  um und setzt in Gl. (5.10) ein, so lässt sich mit Hilfe von  $\sin^2(\eta_i \tau) + \cos^2(\eta_i \tau) = 1$  die linke Seite umformen zu

$$\begin{aligned} -x'_i \eta_i \sin(\eta_i \tau) + x'_i \frac{-\cos(\eta_i \tau)}{\sin(\eta_i \tau)} \eta_i \cos(\eta_i \tau) &= -\frac{\eta_i x'_i}{\sin(\eta_i \tau)}, \\ -y'_i \frac{-\sin(\eta_i \tau)}{\cos(\eta_i \tau)} \eta_i \sin(\eta_i \tau) + y'_i \eta_i \cos(\eta_i \tau) &= \frac{\eta_i y'_i}{\cos(\eta_i \tau)}, \end{aligned}$$

so dass sich schließlich mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2]^T$  die jeweils  $i$ -te Gleichung des Gleichungssystems (5.4) umformen lässt in zwei Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2 \eta_i} F_i(\mathbf{x}, \tau) s_i = \varepsilon F_i^s(\mathbf{x}, \tau), \\ y'_i &= -\frac{\varepsilon}{\Omega_0^2 \eta_i} F_i(\mathbf{x}, \tau) c_i = \varepsilon F_i^c(\mathbf{x}, \tau) \end{aligned} \quad (5.13)$$

mit  $i = 1, 2$ . Die rechten Seiten der Gleichungen können in eine endliche Summe der Form

$$F_i^{s,c}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{k=1}^N F_{i,k}^{s,c}(\mathbf{x}, \tau) \quad (5.14)$$

zerlegt werden, wobei jeder Summand  $F_{i,k}^{s,c}(\mathbf{x}, \tau)$  periodisch in  $T_k$  ist. Wie im einzelnen bei den jeweiligen Produkten von harmonischen Funktionen zu verfahren ist, um sie in Summen zu wandeln, ist in Anhang A beschrieben.

Die gemittelte zeitliche Änderung der Kosinus- bzw. Sinusamplitude  $\bar{x}_i'$  bzw.  $\bar{y}_i$  der quasimodalen Verdrehung  $u_i$  ist

$$\begin{aligned} \bar{x}_i' &= \bar{x}_i' = \frac{\eta_i}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\eta_i}} \sum_{k=1}^N F_{i,k}^s(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \\ \bar{y}_i' &= \bar{y}_i' = \frac{\eta_i}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\eta_i}} \sum_{k=1}^N F_{i,k}^c(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Der so entstehende Fehler  $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$  ist dabei von der Ordnung  $\varepsilon$ . Ist  $T_k \neq \frac{2\pi}{\eta_i}$ , so ist das Integral über den jeweiligen Term  $F_{i,k}^{s,c}(\mathbf{x}, \tau)$  konstant. Nur wenn für die Periode des jeweiligen Terms  $F_{i,k}^{s,c}(\mathbf{x}, \tau)$  gilt  $T_k = \frac{2\pi}{\eta_i}$ , dann ergibt das Integral über diesen Term  $F_{i,k}^{s,c}(\mathbf{x}, \tau)$  einen resonanten Term in  $\bar{\mathbf{x}}'$ . Ist  $\eta_2 - \eta_1 = 1$  ( $\omega_2 - \omega_1 = \Omega_0$ ) werden einige Terme resonant und man erhält aus Gl. (5.15)

$$\begin{aligned} \bar{x}_i' &= \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2 \eta_i} \left( \frac{\hat{\Phi}_{ij}}{4} \bar{y}_j - \omega_i \eta_i \sigma \bar{y}_i \right), \\ \bar{y}_i' &= \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2 \eta_i} \left( -\frac{\hat{\Phi}_{ij}}{4} \bar{x}_j + \omega_i \eta_i \sigma \bar{x}_i \right) \end{aligned}$$

und in Matrixnotation (wie auch in [1], [3] gezeigt)

$$\bar{\mathbf{x}}' = \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 \sigma & 0 & \frac{\Omega_0}{4\omega_1} \varphi_{11} \varphi_{21} \\ \omega_1 \sigma & 0 & -\frac{\Omega_0}{4\omega_1} \varphi_{11} \varphi_{21} & 0 \\ 0 & \frac{\Omega_0}{4\omega_2} \varphi_{11} \varphi_{21} & 0 & -\omega_2 \sigma \\ -\frac{\Omega_0}{4\omega_2} \varphi_{11} \varphi_{21} & 0 & \omega_2 \sigma & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{k(t)} \bar{\mathbf{x}}. \quad (5.16)$$

Schließlich liefert die charakteristische Gleichung des Eigenwertproblems

$$\det(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{A}_{k(t)}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.17)$$

die Eigenwerte  $\lambda_i$  deren Imaginärteile die gesuchten Frequenzen des Energietransfers von der einen in die andere Quasimode sind.

## 5.1 Parametererregung ohne Frequenzabweichung

Für den Fall der Parametererregung ohne Frequenzabweichung ist  $\Omega = \Omega_0$ , d.h.  $\sigma = 0$  und  $\mathbf{A}_{k(t)}$  wird zu

$$\mathbf{A}_{k(t), \sigma=0} = \frac{\varepsilon \varphi_{11} \varphi_{21}}{4\Omega_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\omega_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Die charakteristische Gleichung Gl. (5.17) des Eigenwertproblems ist dann

$$\lambda^4 + \lambda^2 \left( \frac{\varepsilon \varphi_{11} \varphi_{21}}{4\Omega_0} \right)^2 \frac{2}{\omega_1 \omega_2} + \left( \frac{\varepsilon \varphi_{11} \varphi_{21}}{4\Omega_0} \right)^4 \frac{1}{\omega_1^2 \omega_2^2} = 0 \quad (5.19)$$

und deren Lösung der doppelte, rein imaginäre, konjugiert komplexe Eigenwert

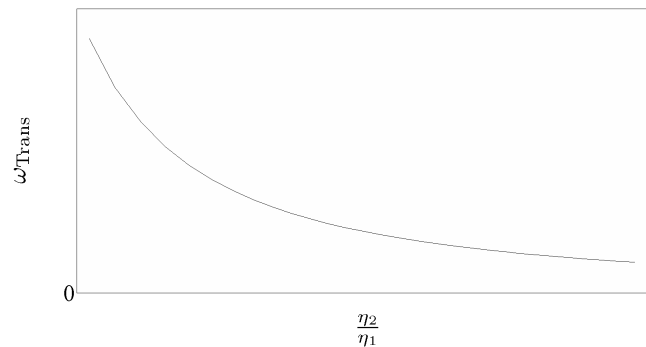
$$\lambda = 0 \pm i \frac{\varepsilon \varphi_{11} \varphi_{21}}{4\Omega_0 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}. \quad (5.20)$$

Der Imaginärteil  $\omega_{\text{Trans}}$  des Eigenwertes  $\lambda$  ist dabei die gesuchte Frequenz des quasimodalen Energietransfers

$$\omega_{\text{Trans}} = \frac{\varepsilon \varphi_{11} \varphi_{21}}{4\Omega_0 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}. \quad (5.21)$$

Man beachte, dass  $\omega_{\text{Trans}} = \omega_{\text{Trans}}(\varphi_{11}, \varphi_{21}, \omega_1, \omega_2)$  mit Gl. (2.14) und Gl. (2.11) eine geschlossene analytische Funktion darstellt. Für sonst feste Parameter des Systems und im Bereich kleiner Werte für  $\varepsilon$  ist  $\omega_{\text{Trans}}$  also linear abhängig von  $\varepsilon$ .

Wird die Amplitude  $\frac{\varepsilon}{\Omega_0^2}$  der Parametererregung auf konstanten Wert gehalten, d. h., wird  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon = \varepsilon_0 \Omega_0^2$  angepasst, so ergibt sich  $\omega_{\text{Trans}} = \omega_{\text{Trans}}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$  als Funktion des Verhältnisses  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  der Eigenkreisfrequenzen bzw. der normierten Eigenkreisfrequenzen  $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ . Die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers fällt monoton mit steigendem Verhältnis der normierten Eigenkreisfrequenzen  $\frac{\eta_2}{\eta_1}$  und verläuft asymptotisch gegen Null (siehe **Bild 5.1**).



**Abbildung 5.1:** Die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  in Abhängigkeit des Verhältnisses  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  der Eigenkreisfrequenzen bzw. der normierten Eigenkreisfrequenzen  $\frac{\eta_2}{\eta_1}$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung Gl. (5.18) lautet

$$\bar{x}_i = A_i^* \cos(\omega_{\text{Trans},1} \tau) + B_i^* \sin(\omega_{\text{Trans},1} \tau) + C_i^* \cos(\omega_{\text{Trans},2} \tau) + D_i^* \sin(\omega_{\text{Trans},2} \tau). \quad (5.22)$$



Durch die Vielfachheit 2 des Eigenwertes, d.h. weil  $\omega_{\text{Trans},1} = \omega_{\text{Trans},2} = \omega_{\text{Trans}}$  gilt, lassen sich die Gl. (5.22) schreiben als:

$$\bar{x}_i = A_i \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau) + B_i \sin(\omega_{\text{Trans}} \tau). \quad (5.23)$$

Durch die Kopplung der Gleichungen des Differentialgleichungssystems sind die Lösungen auch gekoppelt. Die Parameter  $A_i$  und  $B_i$  sind von einander abhängig. Durch Einsetzen in Gl. (5.18) lassen sich diese gegenseitig ausdrücken, so dass man für die genäherte Lösung  $\bar{x}$  schreiben kann

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= A_1 \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau) + B_1 \sin(\omega_{\text{Trans}} \tau), \\ \bar{y}_1 &= A_2 \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau) + B_2 \sin(\omega_{\text{Trans}} \tau), \\ \bar{x}_2 &= \frac{4\omega_{\text{Trans}} \Omega_0 \omega_1}{\varepsilon \varphi_{11} \varphi_{21}} [-B_2 \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau) + A_2 \sin(\omega_{\text{Trans}} \tau)], \\ \bar{y}_2 &= \frac{4\omega_{\text{Trans}} \Omega_0 \omega_1}{\varepsilon \varphi_{11} \varphi_{21}} [B_1 \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau) - A_1 \sin(\omega_{\text{Trans}} \tau)]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dabei können die verbleibenden Parameter  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  und  $B_2$  über die Anfangsbedingungen  $\bar{x}(\tau = 0) = \bar{x}_0$  bestimmt werden. Die Anfangsbedingungen  $\bar{x}_0$  erhält man mit Gl. (5.5) und Gl. (5.6) aus den Anfangsbedingungen  $\bar{u}(\tau = 0) = \bar{u}_0$  für die quasimodalen Verdrehungen:

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_2} \end{pmatrix} \bar{u}_0. \quad (5.25)$$

Die gesamte genäherte Lösung  $\bar{u}$  für den zeitlichen Verlauf der quasimodalen Verdrehungen kann dann durch Einsetzen geschrieben werden als

$$\bar{u}_i = \bar{x}_i \cos(\eta_i \tau) + \bar{y}_i \sin(\eta_i \tau). \quad (5.26)$$

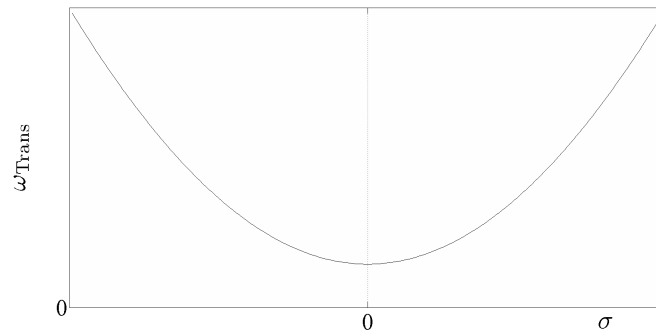
Zudem kann über die Näherungslösung  $\bar{u}$  für den zeitlichen Verlauf  $u$  der quasimodalen Verdrehungen auch die Energiedifferenz  $\Delta E_{\text{ges}}$  zwischen der Energie  $E_{\text{ges},0}$  des Systems im Ausgangszustand und der Energie  $E_{\text{ges,Trans}} = E_{\text{ges},0} + \Delta E_{\text{ges}}$  zum Zeitpunkt, wenn alle Energie in die zweite Quasimode transferiert wurde, abgeschätzt werden.

## 5.2 Parametererregung mit geringer Frequenzabweichung

Betrachtet man den allgemeinen Satz von Gleichungen Gl. (5.16) für die Näherung der Amplituden der quasimodalen Verdrehungen, so wird schnell klar, dass die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Systemmatrix  $A_{k(t)}$  in analytischer Darstellung sehr umfangreich werden. Die charakteristische Gleichung des zugehörigen Eigenwertproblems ist zu lang um hier angegeben zu werden. Ihre Lösung sind die zwei rein imaginären konjugiert komplexen Eigenwerte

$$\lambda_i = \pm \omega_{\text{Trans},1/2} = \pm \frac{\varepsilon \sqrt{\pm \frac{(4\omega_2 + 4\omega_1)\sigma \sqrt{(4\omega_1^2\omega_2^4 - 8\omega_1^3\omega_2^3 + 4\omega_1^4\omega_2^2)\sigma^2 + \omega_1\omega_2\Omega_0^2\varphi_{11}^2\varphi_{21}^2} + (-8\omega_1\omega_2^3 - 8\omega_1^3\omega_2)\sigma^2 - \Omega_0^2\varphi_{11}^2\varphi_{21}^2}}{\omega_1\omega_2}}{4\Omega_0^2}}{4\Omega_0^2}. \quad (5.27)$$

Für sonst feste Parameter lässt sich damit die Abhängigkeit der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers in Abhängigkeit kleiner normierter Frequenzabweichungen  $\sigma = \frac{\Omega - \Omega_0}{\varepsilon}$  der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  um  $\Omega_0$  untersuchen. Mit betragsmäßig wachsendem  $\sigma$  wächst auch  $\omega_{\text{Trans}}$  symmetrisch um  $\sigma = 0$  parabelförmig an (siehe **Bild 5.2**).



**Abbildung 5.2:** Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers in Abhängigkeit kleiner Frequenzabweichungen  $\sigma$  der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$

## 6 Mittelungsmethode für zeitabhängiges Massenträgheitsmoment $I_1(t)$

Im folgenden soll nun das Massenträgheitsmoment  $I_1(t)$  harmonisch über der Zeit variiert werden. Die Steifigkeit  $k_{01}$  hingegen soll konstant über der Zeit sein. Das System soll weiterhin ungedämpft sein. Wenn dabei  $I_1 \varepsilon_1 = \varepsilon \ll 1$  gelten soll, dann wird Gl. (2.21) zu

$$\mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\varphi_{11}^2 & -\varphi_{11} \varphi_{21} \\ -\varphi_{11} \varphi_{21} & -\varphi_{21}^2 \end{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \cos(\tau) \mathbf{u}'' . \quad (6.1)$$

Da die Phasenverschiebung  $\psi$  bezüglich der Phase der Kosinusfunktion des zeitabhängigen Anteils der Steifigkeit  $k_{01}$  angegeben werden soll, dieser hier aber nicht auftritt, so erscheint auch  $\psi$  nicht in den obigen Gleichungen.

Analog zu Kapitel 5 wird nun die Parameteranregungsfrequenz  $\Omega$  um kleine Werte  $\varepsilon\sigma$  variiert und eine Näherung erster Ordnung durchgeführt, wodurch sich Gl. (6.1) umformen lässt zu

$$\mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} \eta_1^2 & 0 \\ 0 & \eta_2^2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} \left( \begin{pmatrix} -\varphi_{11}^2 & -\varphi_{11} \varphi_{21} \\ -\varphi_{11} \varphi_{21} & -\varphi_{21}^2 \end{pmatrix} \cos(\tau) \mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} 2\eta_1 \omega_1 \sigma & 0 \\ 0 & 2\eta_2 \omega_2 \sigma \end{pmatrix} \mathbf{u} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \quad (6.2)$$

Die Gleichungen werden nun dergestalt transformiert, dass die Transformation von  $\mathbf{u}$  die Lösung der ungestörten Gleichungen ist. Analog zu Kapitel 5 ergibt sich daraus

$$-x'_i \eta_i \sin(\eta_i \tau) + y'_i \eta_i \cos(\eta_i \tau) = -\frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} F_i(x_1, y_1, x_2, y_2), \quad (6.3)$$

wobei sich die Einträge  $F_i$  der vektoriellen Funktion  $F$  hier ergeben zu

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{j=1}^2 \widehat{\Phi}_{ij} (-x'_j \eta_j s_j - x_j \eta_j^2 c_j + y'_j \eta_j c_j - y_j \eta_j^2 s_j) \cos(\tau) \\ &\quad - 2 \omega_i \eta_i \sigma (x_i c_i + y_i s_i) \\ &= \sum_{j=1}^2 \widehat{\Phi}_{ij} ((-x_j \eta_j^2 + y'_j \eta_j) c_j + (-y_j \eta_j^2 - x'_j \eta_j) s_j) \cos(\tau) \\ &\quad - 2 \omega_i \eta_i \sigma (x_i c_i + y_i s_i). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Damit folgen analog zu Kapitel 5 die gemittelten zeitlichen Änderungen der Kosinus- bzw. Sinusamplituden  $\bar{x}'_i$  bzw.  $\bar{y}'_i$  der quasimodalen Verdrehungen  $u_i$  zu

$$\begin{aligned} \bar{x}'_i &= \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2 \eta_i} \left( \frac{\widehat{\Phi}_{ij}}{4} (-\bar{y}'_j \eta_j^2 - \bar{x}'_j \eta_j) - \omega_i \eta_i \sigma \bar{y}_i \right), \\ \bar{y}'_i &= \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2 \eta_i} \left( -\frac{\widehat{\Phi}_{ij}}{4} (-\bar{x}'_j \eta_j^2 + \bar{y}'_j \eta_j) + \omega_i \eta_i \sigma \bar{x}_i \right) \end{aligned}$$

und in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\varepsilon\omega_2\varphi_{11}\varphi_{21}}{4\omega_1\Omega_0^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\varepsilon\omega_2\varphi_{11}\varphi_{21}}{4\omega_1\Omega_0^2} \\ \frac{\varepsilon\omega_1\varphi_{11}\varphi_{21}}{4\omega_2\Omega_0^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon\omega_1\varphi_{11}\varphi_{21}}{4\omega_2\Omega_0^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}' = \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1\sigma & 0 & -\frac{\omega_2^2\varphi_{11}\varphi_{21}}{4\Omega_0\omega_1} \\ \omega_1\sigma & 0 & \frac{\omega_2^2\varphi_{11}\varphi_{21}}{4\Omega_0\omega_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega_1^2\varphi_{11}\varphi_{21}}{4\Omega_0\omega_2} & 0 & -\omega_2\sigma \\ \frac{\omega_1^2\varphi_{11}\varphi_{21}}{4\Omega_0\omega_2} & 0 & \omega_2\sigma & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}. \quad (6.5)$$

## 6.1 Parametererregung ohne Frequenzabweichung

Durch Multiplikation mit der Inversen der linken Seite von Gl. (6.5) und dem Setzen von  $\sigma = 0$  lässt sich das Differentialgleichungssystem

$$\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}_{I(t),\sigma=0} \bar{\mathbf{x}} \quad (6.6)$$

erzeugen, wobei die Matrix  $\mathbf{A}_{I(t),\sigma=0}$  von der Form

$$\mathbf{A}_{I(t),\sigma=0} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & b \\ a & 0 & -b & 0 \\ 0 & c & 0 & -d \\ -c & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

ist, mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  als Abkürzungen für die Ausdrücke

$$a = \frac{\varepsilon^2 \omega_1 \varphi_{11}^2 \varphi_{21}^2}{\varepsilon^2 \Omega_0 \varphi_{11}^2 \varphi_{21}^2 - 16 \Omega_0^5}, \quad (6.8)$$

$$b = \frac{4\varepsilon\omega_2\Omega_0\varphi_{11}\varphi_{21}}{\varepsilon^2\varphi_{11}^2\varphi_{21}^2 - 16\Omega_0^4}, \quad (6.9)$$

$$c = \frac{4\varepsilon\omega_1\Omega_0\varphi_{11}\varphi_{21}}{\varepsilon^2\varphi_{11}^2\varphi_{21}^2 - 16\Omega_0^4}, \quad (6.10)$$

$$d = \frac{\varepsilon^2\omega_2\varphi_{11}^2\varphi_{21}^2}{\varepsilon^2\Omega_0\varphi_{11}^2\varphi_{21}^2 - 16\Omega_0^5}. \quad (6.11)$$

Analog zum Vorgehen in Kapitel 5 bei der Berechnung der Frequenz des quasimodalen Energietransfers bei zeitvarianter Steifigkeit  $k_{01}$  kann nun die charakteristische Gleichung

$$\det(\lambda\mathbf{1} - \mathbf{A}_{I(t),\sigma=0}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.12)$$

gebildet werden, deren Lösung nach Streichen von Termen höherer Ordnung in  $\varepsilon$  die Form

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\varepsilon\varphi_{11}\varphi_{21} \sqrt{8\varepsilon(\omega_1 + \omega_2)\varphi_{11}\varphi_{21}\sqrt{\omega_1\omega_2}\Omega_0^2 - 32\omega_1\omega_2\Omega_0^4}}{2^{9/2}\Omega_0^5}, \quad (6.13)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{\varepsilon\varphi_{11}\varphi_{21} \sqrt{-8\varepsilon(\omega_1 + \omega_2)\varphi_{11}\varphi_{21}\sqrt{\omega_1\omega_2}\Omega_0^2 - 32\omega_1\omega_2\Omega_0^4}}{2^{9/2}\Omega_0^5} \quad (6.14)$$

annimmt. Da gilt, dass  $32\omega_1\omega_2\Omega_0^4 > 8\varepsilon(\omega_1 + \omega_2)\varphi_{11}\varphi_{21}\sqrt{\omega_1\omega_2}\Omega_0^2$ , sind die Eigenwerte  $\lambda$  rein imaginär und jeweils konjugiert komplex. Die beiden Frequenzen des quasimodalen Energietransfers bei zeitvariantem Massenträgheitsmoment  $I_1$  lassen sich in erster Näherung also schreiben als

$$\omega_{\text{Trans},1} = \frac{\varepsilon\varphi_{11}\varphi_{21} \sqrt{-8\varepsilon(\omega_1 + \omega_2)\varphi_{11}\varphi_{21}\sqrt{\omega_1\omega_2}\Omega_0^2 + 32\omega_1\omega_2\Omega_0^4}}{2^{9/2}\Omega_0^5}, \quad (6.15)$$

$$\omega_{\text{Trans},2} = \frac{\varepsilon \varphi_{11} \varphi_{21} \sqrt{8\varepsilon (\omega_1 + \omega_2) \varphi_{11} \varphi_{21} \sqrt{\omega_1 \omega_2} \Omega_0^2 + 32\omega_1 \omega_2 \Omega_0^4}}{2^{9/2} \Omega_0^5}. \quad (6.16)$$

Für kleine Werte von  $\varepsilon$  sind ähnlich wie in Kapitel 5 auch hier die Frequenzen in erster Näherung linear abhängig von  $\varepsilon$ . Die allgemeine Lösung von Gl. (6.5) kann man analog zu Abschnitt 5.1 schreiben als

$$\bar{x}_i = A_i \cos(\omega_{\text{Trans},1} \tau) + B_i \sin(\omega_{\text{Trans},1} \tau) + C_i \cos(\omega_{\text{Trans},2} \tau) + D_i \sin(\omega_{\text{Trans},2} \tau). \quad (6.17)$$

Allerdings gelingt es im Gegensatz zu der Lösung aus Abschnitt 5.1 nicht, sie weiter zu vereinfachen, weil  $\omega_{\text{Trans},1} \neq \omega_{\text{Trans},2}$  gilt. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (6.6) kann über Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, dass in vier Untergleichungssysteme zerlegt werden kann. Deren Lösung sind die Parameter  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  und  $D_i$  in Abhängigkeit von vier über die Anfangsbedingungen zu bestimmende Parameter. Dabei ergeben sich die Anfangsbedingungen  $\bar{x}_0$  analog zu Abschnitt 5.1 mit Gl. (5.5) und Gl. (5.6) aus den Anfangsbedingungen  $\bar{u}(\tau = 0) = \bar{u}_0$  für die quasimodalen Verdrehungen:

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_2} \end{pmatrix} \bar{u}_0. \quad (6.18)$$

Die Parameter  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  und  $D_i$  in Abhängigkeit der Parameter  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  und  $D_1$  können **Tabelle 6.1** entnommen werden mit den Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  nach Gl. (6.8) - Gl. (6.11).



**Tabelle 6.1:** Parameter  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  und  $D_i$  der Lösung Gl. (6.17) der Differentialgleichung Gl. (6.6) in Abhängigkeit der über die Anfangsbedingungen zu bestimmen den Parameter  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  und  $D_1$

Parameter	Abhängigkeit	Betrag
$A_2$	$B_1$	$B_1 \cdot \frac{-b\omega_{\text{Trans},1}^2 - abd + b^2c}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},1}}$
$B_2$	$A_1$	$A_1 \cdot \frac{b\omega_{\text{Trans},1}^2 + abd - b^2c}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},1}}$
$C_2$	$D_1$	$D_1 \cdot \frac{-b\omega_{\text{Trans},2}^2 - abd + b^2c}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},2}}$
$D_2$	$C_1$	$C_1 \cdot \frac{+b\omega_{\text{Trans},2}^2 + abd - b^2c}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},2}}$
$A_3$	$A_1$	$A_1 \cdot \frac{-\omega_{\text{Trans},1}^3 + bc\omega_{\text{Trans},1} + a^2\omega_{\text{Trans},1}}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},1}}$
$B_3$	$B_1$	$B_1 \cdot \frac{-\omega_{\text{Trans},1}^3 + bc\omega_{\text{Trans},1} + a^2\omega_{\text{Trans},1}}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},1}}$
$C_3$	$C_1$	$C_1 \cdot \frac{-\omega_{\text{Trans},2}^3 + bc\omega_{\text{Trans},2} + a^2\omega_{\text{Trans},2}}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},2}}$
$D_3$	$D_1$	$D_1 \cdot \frac{-\omega_{\text{Trans},2}^3 + bc\omega_{\text{Trans},2} + a^2\omega_{\text{Trans},2}}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},2}}$
$A_4$	$B_1$	$B_1 \cdot \frac{d\omega_{\text{Trans},1}^2 - a^2d + abc}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},1}}$
$B_4$	$A_1$	$A_1 \cdot \frac{-d\omega_{\text{Trans},1}^2 + a^2d - abc}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},1}}$
$C_4$	$D_1$	$D_1 \cdot \frac{d\omega_{\text{Trans},2}^2 - a^2d + abc}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},2}}$
$D_4$	$C_1$	$C_1 \cdot \frac{-d\omega_{\text{Trans},2}^2 + a^2d - abc}{(bd+ab)\omega_{\text{Trans},2}}$

Die Näherung  $\bar{\mathbf{u}}$  Lösung der quasimodalen Verdrehungen  $\mathbf{u}$  erhält man durch Einsetzen der Lösung  $\bar{\mathbf{x}}$  in Gl. (5.5) analog zu Abschnitt 5.1 mit

$$\bar{u}_i = \bar{x}_i \cos(\eta_i \tau) + \bar{y}_i \sin(\eta_i \tau). \quad (6.19)$$

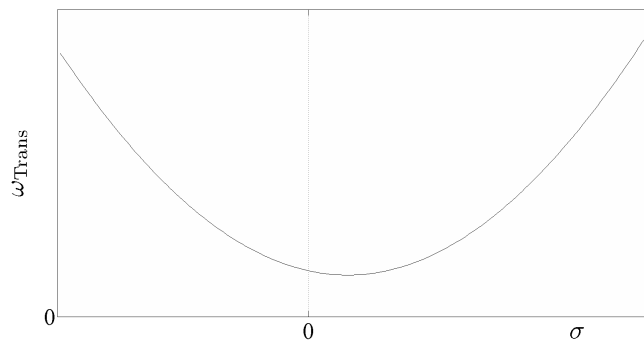
Im Gegensatz zur Lösung des durch die zeitvariante Steifigkeit parametererregten Systems hängen nicht nur die, die Amplitude und Form des schnellen Lösungsanteils bestimmende, Parameter, sondern auch die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des Energietransfers von den Anfangsbedingungen ab. Je nach Wahl der Anfangsbedingungen kann die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des Energietransfers weitgehend beliebige Werte im Intervall  $[\omega_{\text{Trans},1}; \omega_{\text{Trans},2}]$  annehmen.

Wie schon bei der Näherung der Lösung der Schwingung der modalen Verdrehungen bei Parametererregung mit zeitvarianter Steifigkeit  $k_{01}$  kann über die Näherungslösung für  $\bar{\mathbf{u}}$  für den zeitlichen Verlauf der quasimodalen Verdrehungen auch die Energiedifferenz  $\Delta E_{\text{ges}}$  zwischen der Energie  $E_{\text{ges},0}$  des Systems im Ausgangszustand und der Energie  $E_{\text{ges,Trans}} = E_{\text{ges},0} + \Delta E_{\text{ges}}$  zum Zeitpunkt, wenn alle Energie in die zweite Quasimode transferiert wurde, abgeschätzt werden.

## 6.2 Parametererregung mit geringer Frequenzabweichung

Wie für den Fall der Parametererregung mit zeitabhängiger Steifigkeit  $k_{01}$  kann auch für den Fall der Parametererregung mit zeitabhängigem Massenträgheitsmoment  $I_1$  das Eigenwertproblem für das Differentialgleichungssystem  $\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}_{I(t),\sigma \neq 0} \bar{\mathbf{x}}$  für die quasimodalen Verdrehungen bei geringer Frequenzabweichung von  $\Omega_0$  gelöst werden. Allerdings ist im Gegensatz zur Parametererregung mit zeitabhängiger Steifigkeit  $k_{01}$  nicht nur die charakteristische Gleichung, sondern auch deren Lösungen zu umfangreich um hier dargestellt zu werden. Dennoch

kann die Abhängigkeit der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers von kleinen Abweichungen  $\sigma$  der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  von  $\Omega_0$  analytisch untersucht werden (siehe **Bild 6.1**). Als Frequenz des quasimodalen Energietransfers wird hier  $\omega_{\text{Trans}} = \frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},1}}{2}$  gesetzt. Die Frequenz gilt für alle Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}_0 = [a, 0]^T$ ,  $\mathbf{u}'_0 = [0, 0]^T$  mit  $a > 0$ , also für Anfangsbedingungen, bei denen die gesamte Energie in der ersten Quasimode gespeichert ist. Wie auch bei Parametererregung mit zeitabhängiger Steifigkeit zeigt  $\omega_{\text{Trans}}$  parabelförmige Abhängigkeit von  $\sigma$ . Allerdings ist dieser Zusammenhang nicht symmetrisch bezüglich  $\sigma = 0$ , sondern bezüglich eines Werts  $\sigma_{\omega_{\text{Trans},\min}} > 0$ . Das heißt das Minimum von  $\omega_{\text{Trans}}$  liegt nicht bei der Parametererregung mit  $\Omega_0$ , sondern bei einer um  $\sigma_{\omega_{\text{Trans},\min}}$  verschobenen Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon\sigma_{\omega_{\text{Trans},\min}}$ .



**Abbildung 6.1:** Frequenz  $\omega_{\text{Trans}} = \frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},1}}{2}$  des quasimodalen Energietransfers in in Abhängigkeit kleiner Abweichungen  $\sigma$  der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  von  $\Omega_0$

## 7 Numerische Validierung und Parameterstudie

Mit dem in Abschnitt 2.5 erstellten numerischen Modell sollen die in Kapitel 5 und Kapitel 6 erarbeiteten Ergebnisse beispielhaft numerisch untersucht werden. Es soll auch eine exemplarische Beurteilung der Güte der gemachten Näherungen erfolgen. Parameter sollen variiert und die Einflüsse dieser Variationen diskutiert werden.

### 7.1 Parametererregung durch zeitvariante Steifigkeit $k_{01}(t)$

#### 7.1.1 Parametererregung ohne Frequenzabweichung

Zunächst soll das numerische Modell unter Parametererregung ohne Frequenzabweichung betrachtet werden. Die Parametererregung hat also die Gestalt  $k_{\text{PE}} = \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \cos(\tau)$  mit  $\Omega = \Omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ . Für den gewählten Satz von Parametern (siehe Abschnitt 2.5) ergibt sich nach Gl. (5.21) die Kreisfrequenz des quasimodalen Energietransfers zu  $\omega_{\text{Trans}} = 0.0224$ . Werden die Anfangsbedingungen mit  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  gewählt, so ergibt sich  $\mathbf{x}_0$  ebenfalls zu  $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Damit ergeben sich die Parameter  $A_i$  und  $B_i$  zu  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$  und  $B_2 = 0$ . Die Näherung  $\bar{\mathbf{u}}$  (siehe **Bild 7.1**, ff.) für die quasimodalen Verdrehungen  $\mathbf{u}$  des Systems lässt sich also schreiben als

$$\bar{u}_1 = 1 \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau) \cos(\omega_1 \tau) = \cos(0.0224 \tau) \cos(0.618 \tau) \quad (7.1)$$

und

$$\bar{u}_2 = -\frac{4\omega_{\text{Trans}}\Omega_0\omega_1}{\varepsilon\varphi_{11}\varphi_{21}} \sin(\omega_{\text{Trans}}\tau) \sin(\omega_2\tau) = -0.6180 \sin(0.0224\tau) \sin(1.618\tau). \quad (7.2)$$

Wie bereits in Kapitel 5 angesprochen, kann mit Hilfe der Kenntnis der Näherungslösung  $\bar{\mathbf{u}}$  der quasimodalen Verdrehungen die Differenz  $\Delta E_{\text{ges}}$  der Energie  $E_{\text{ges},0}$  des Systems im Ausgangszustand und der Energie  $E_{\text{ges,Trans}} = E_{\text{ges},0} + \Delta E_{\text{ges}}$  des Systems zu dem Zeitpunkt, an dem alle Energie in die zweite Quasimode transferiert wurde, näherungsweise berechnet werden. Für die gewählten Anfangsbedingungen gelingt dies recht einfach: Für die Beträge der Eigenvektoren gilt  $|\varphi_1| = |\varphi_2|$ . Deswegen hat die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}(\varphi_1)$  in Abhängigkeit des ersten Eigenvektors einen geringeren Betrag als die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}(\varphi_2)$  des zweiten Eigenvektors. Die Amplitude  $-A_1 \frac{4\omega_{\text{Trans}}\Omega_0\omega_1}{\varepsilon\varphi_{11}\varphi_{21}}$  der Hüllkurve der zweiten modalen Verdrehung  $u_2$  ist also um einen Faktor  $a = \sqrt{\frac{E_{\text{ges},0} + \Delta E_{\text{ges}}}{E_{\text{ges},0}} \cdot \frac{E_{\text{pot}}(\varphi_1)}{E_{\text{pot}}(\varphi_2)}}$  geringer als die Amplitude  $A_1$  der Hüllkurve der ersten modalen Verdrehung  $u_1$ . Es gilt also

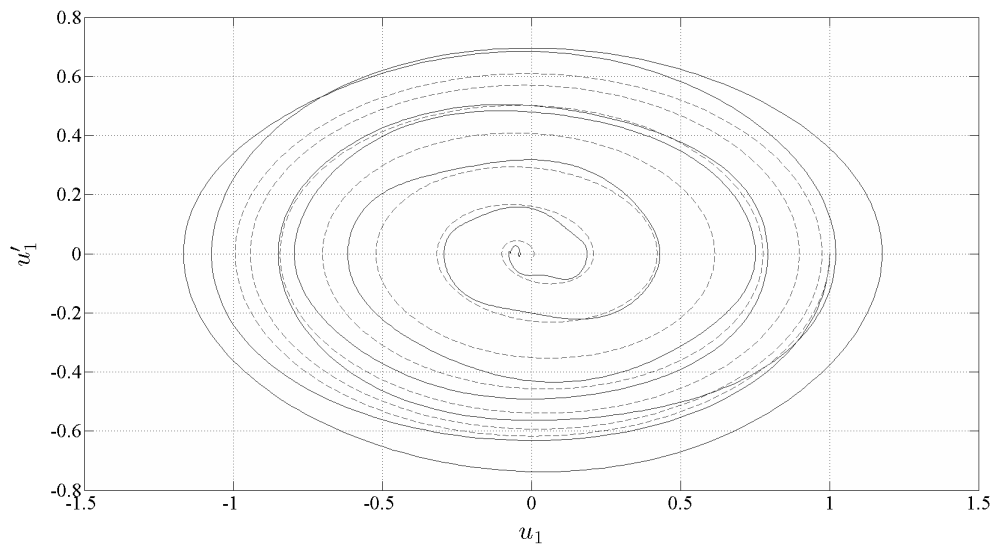
$$\begin{aligned} \frac{4\omega_{\text{Trans}}\Omega_0\omega_1}{\varepsilon\varphi_{11}\varphi_{21}} &= \sqrt{\frac{E_{\text{ges},0} + \Delta E_{\text{ges}}}{E_{\text{ges},0}} \frac{E_{\text{pot}}(\varphi_1)}{E_{\text{pot}}(\varphi_2)}} \\ \Rightarrow \Delta E_{\text{ges}} &= \left( \left( \frac{4\omega_{\text{Trans}}\Omega_0\omega_1}{\varepsilon\varphi_{11}\varphi_{21}} \right)^2 \frac{E_{\text{pot}}(\varphi_2)}{E_{\text{pot}}(\varphi_1)} - 1 \right) E_{\text{ges},0}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Im betrachteten Fall ergibt sich die Energie  $E_{\text{ges},0} = E_{\text{pot},0}$  des Systems zum Anfangszeitpunkt zu  $E_{\text{ges},0} = 0.191$  und die Energiedifferenz zwischen erster und zweiter Quasimode zu  $\Delta E_{\text{ges}} = 0.309$ . Die numerisch ermittelte Energiedifferenz (siehe **Bild 7.5**) liegt bei  $\Delta E_{\text{ges,num}} = 0.441$ . Die analytisch ermittelte Energiedifferenz weicht also um  $-29.9\%$  von der numerisch ermittelten ab.

Daraus ergibt sich, dass auch die analytisch berechnete Amplitude der Hüllkurve der zweiten quasimodalen Verdrehung von der numerischen berechneten verschieden

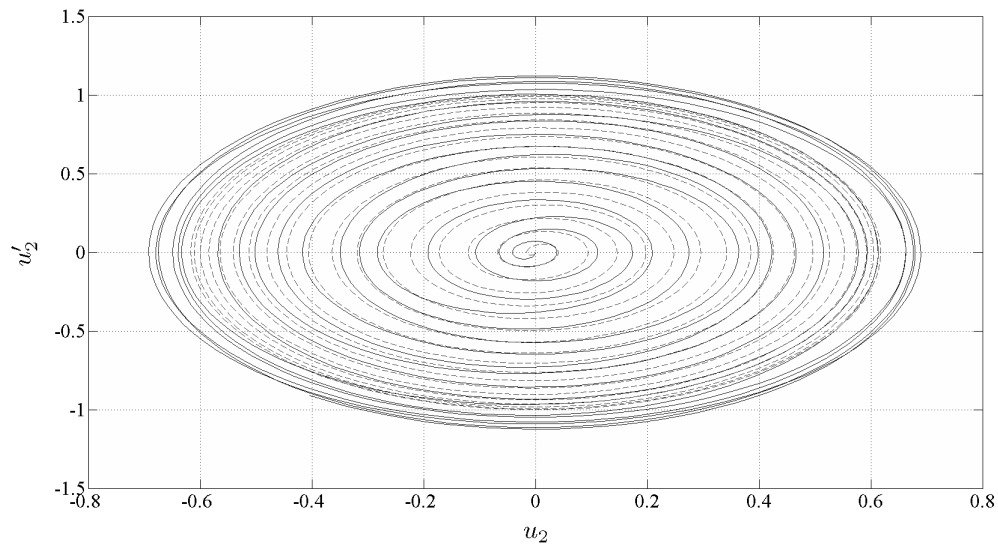
ist: Der Betrag  $a = \sqrt{\frac{E_{\text{ges},0} + \Delta E_{\text{ges}}}{E_{\text{ges},0}} \frac{E_{\text{pot}}(\varphi_1)}{E_{\text{pot}}(\varphi_2)}} = 0.6180$  der analytisch ermittelten Amplitude weicht um  $-11.5\%$  von dem Betrag  $a_{\text{num}} = 0.694$  der numerisch ermittelten ab (**Bild 7.3** und **Bild 7.4**).

Wie ebenfalls **Bild 7.3** und **Bild 7.4** entnommen werden kann, weicht hingegen die numerische Kreisfrequenz des quasimodalen Energietransfers nur geringfügig von der analytisch berechneten ab. Die relative Abweichung der analytisch bestimmten Kreisfrequenz zur numerisch bestimmten beträgt  $-1.36\%$ .

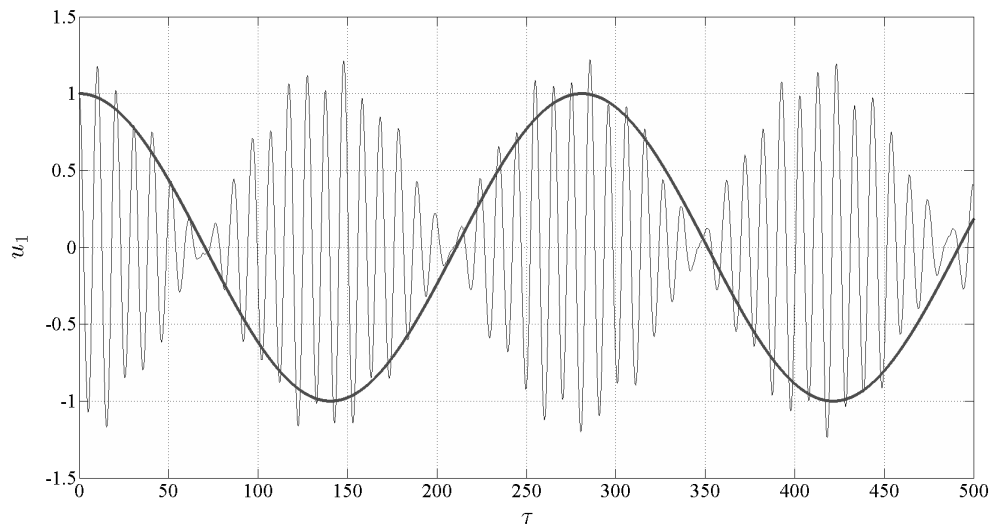


**Abbildung 7.1:** Erste quasimodale Verdrehung: Näherung  $\bar{u}'_1(\bar{u}_1)$  (gestrichelt) und Simulationsergebnis  $u'_{1,\text{num}}(u_{1,\text{num}})$  (durchgezogen) für die Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  über den Zeitraum  $\tau = [0 \ \frac{\pi}{2\omega_{\text{Trans}}}]^T$

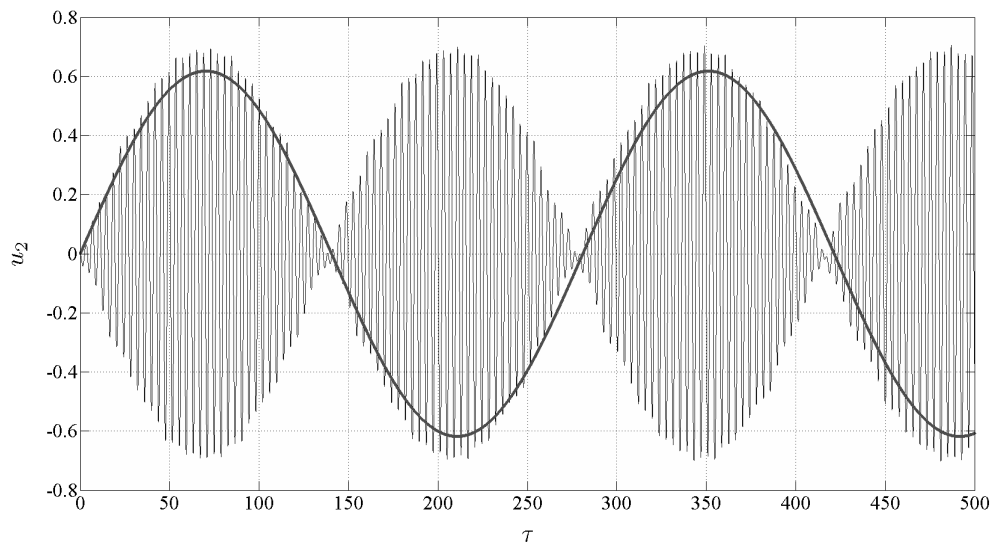
Für den gewählten Parametersatz kann der Zusammenhang zwischen der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des Energietransfers und  $\varepsilon$  numerisch überprüft werden. Dazu werden für verschiedene Werte von  $\varepsilon$  die Bewegungsgleichungen des Systems über eine ausreichend lange Zeit simuliert. Durch Hilbert-Transformation des Ergebnisses dieser Simulation kann schließlich die Hüllkurve dieser quasimodalen Verdrehungen  $\mathbf{u}$  bestimmt werden (siehe Anhang B). Die Frequenz der Hüllkurve kann dann mit der schnellen Fouriertransformation ermittelt werden. Die Iteration über einen Bereich von  $\varepsilon$  führt zu einem numerischen Zusammenhang zwischen der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers und  $\varepsilon$ .



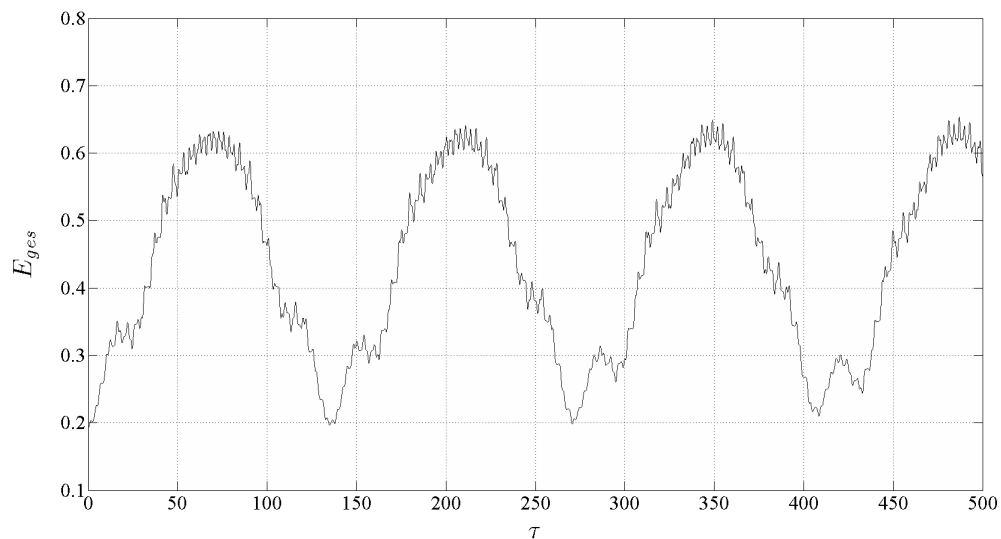
**Abbildung 7.2:** Zweite quasimodale Verdrehung: Näherung  $\bar{u}'_2(\bar{u}_2)$  (gestrichelt) und Simulationsergebnis  $u'_{2,num}(u_{2,num})$  (durchgezogen) für die Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  über den Zeitraum  $\tau = [0 \ \frac{\pi}{2\omega_{\text{Trans}}}]^T$



**Abbildung 7.3:** Ergebnis für die erste quasimodale Verdrehung  $u_1$  der Simulation des Systems mit  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  und die zugehörige Hüllkurve  $A_1 \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau)$



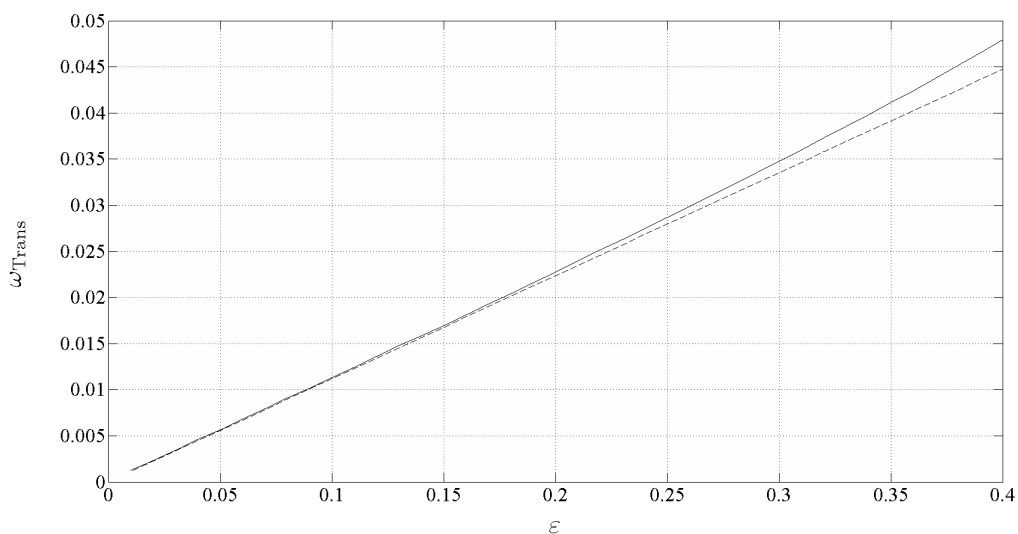
**Abbildung 7.4:** Ergebnis für die zweite quasimodale Verdrehung  $u_2$  der Simulation des Systems mit  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  und die zugehörige Hüllkurve  $a A_1 \sin(\omega_{\text{Trans}} \tau)$



**Abbildung 7.5:** Gesamtenergie  $E_{\text{ges}}$  für die Simulation des Systems mit  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

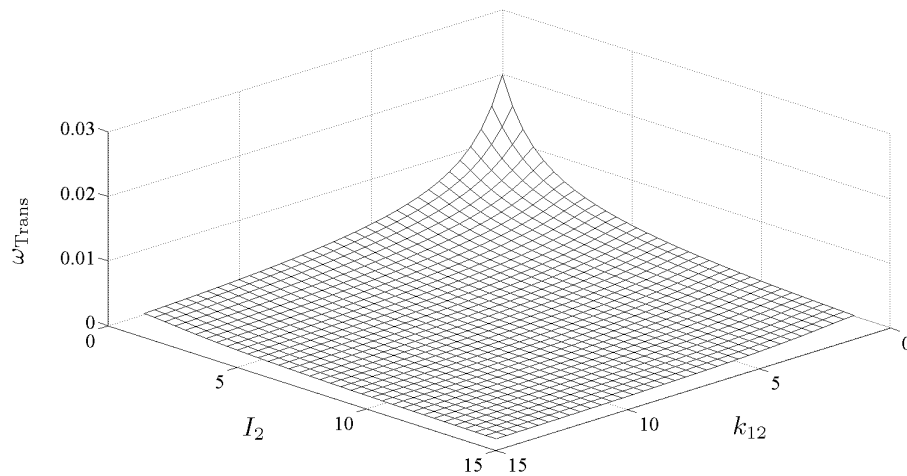


Der Vergleich von numerischem und analytischem Zusammenhang zwischen  $\omega_{\text{Trans}}$  und  $\varepsilon$  bestätigt die lineare Abhängigkeit der Frequenz des Energietransfers von  $\varepsilon$  (siehe **Bild 7.6**) für kleine Werte von  $\varepsilon$ . Für das im Parametersatz gewählte  $\varepsilon = 0.2$  ergibt sich die zuvor erwähnte Abweichung, für  $\varepsilon = 0.4$  eine Abweichung von ca. 7%. Die analytische Lösung unterschätzt den Einfluss von  $\varepsilon$  auf  $\omega_{\text{Trans}}$  für größer werdende Werte von  $\varepsilon$  zunehmend.



**Abbildung 7.6:** Numerische (durchgezogene) und analytische (gestrichelte) Lösung für den Zusammenhang zwischen der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers und der Amplitude  $\varepsilon$  der Parametererregung

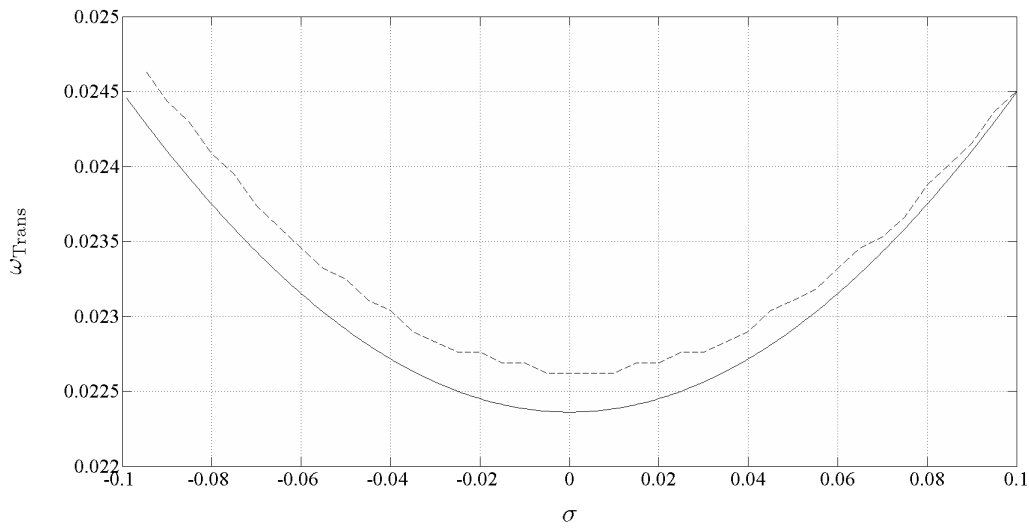
Im Zuge von Parameterstudien kann die Abhängigkeit der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers von den Parametern  $I_2$  und  $k_{12}$  durchgeführt werden (siehe **Bild 7.7**). Eine Variation der Parameter  $I_1$  und  $k_{01}$  ist nicht sinnvoll, weil damit auch Einfluss auf die Amplitude der Parametererregung genommen wird. Es lässt sich aber jeder Satz von Parametern so skalieren, dass er auf  $k_{01} = I_1 = 1$  und beliebige Werte für  $k_{12}$ ,  $I_2$  abgebildet werden kann. Wie in Kapitel 5 ausgeführt, ist die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers eine Funktion des Verhältnisses der Eigenfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sowie von  $\varepsilon$ . Die Darstellung von  $\omega_{\text{Trans}}$  in Abhängigkeit von  $I_2$  und  $k_{12}$  ist aber deutlich anschaulicher und für das Verständnis des Verhaltens von  $\omega_{\text{Trans}}$  zweckdienlich. Wie aus **Bild 7.7** ersichtlich fällt die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers monoton mit zunehmendem  $I_2$  und  $k_{12}$  und verläuft asymptotisch gegen Null.



**Abbildung 7.7:** Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers in Abhängigkeit der Parameter  $I_2$  und  $k_{12}$

### 7.1.2 Parametererregung mit geringer Frequenzabweichung

Mit dem numerischen Parametersatz lässt sich die in Abschnitt 5.2 gefundene Abhängigkeit der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers von der Größe  $\sigma$  der Störung der Parametererregung  $\Omega$  bezüglich  $\Omega_0$  überprüfen. Die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  wird dazu wie zuvor über Zeitsimulation, schnelle Fourier-Transformation und Hilbert-Transformation bestimmt (siehe Anhang B). Das Ergebnis kann **Bild 7.8** entnommen werden. Zum Vergleich ist die analytische Lösung nach Abschnitt 5.2 ebenfalls dargestellt. Die numerisch berechnete Lösung ist geringfügig um  $2 \cdot 10^{-3}$  gegen  $\sigma = 0$  verschoben. Sie weist auch geringfügig größere Werte als die numerische Lösung auf. Es kann dennoch im Rahmen der numerischen Genauigkeit gesagt werden, dass beide Lösungen weitgehend übereinstimmen. Wie bereits in Kapitel 5 gezeigt wurde, haben schon kleine Abweichungen der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  von  $\Omega_0$  signifikante Auswirkungen auf die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers. Nimmt  $\sigma$  Werte von nur 0.08 an, was bei dem gewählten Parametersatz einer Änderung der der Frequenz  $\Omega$  um 1.6% entspricht, so ändert sich  $\omega_{\text{Trans}}$  bereits um 4.9%.



**Abbildung 7.8:** Analytische Lösung (durchgezogen) und numerische Lösung (gestrichelt) für die Abhängigkeit der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers von der Abweichung  $\sigma$  der Parametererregung  $\Omega$  von  $\Omega_0$

## 7.2 Parametererregung durch zeitvariantes Massenträgheitsmoment $I_1(t)$

### 7.2.1 Parametererregung ohne Frequenzabweichung

Zunächst soll das numerische Modell unter Parametererregung ohne Frequenzabweichung betrachtet werden. Die Parametererregung hat also die Gestalt  $m_{\text{PE}} = \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \cos(\tau)$  mit  $\Omega = \Omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ . Für den gewählten Satz von Parameter (siehe Abschnitt 2.5) ergeben sich nach Gl. (6.15) und Gl. (6.16) die Kreisfrequenzen des quasimodalen Energietransfers zu  $\omega_{\text{Trans},1} = 0.0218$  und  $\omega_{\text{Trans},2} = 0.0229$ . Werden die Anfangsbedingungen mit  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  gewählt, so ergeben sich die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0$  ebenfalls zu  $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Durch Lösen eines linearen Gleichungssystems lassen sich die Parameter  $A_1, B_1, C_1, D_1$  bestimmen zu

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0.488081 \\
B_1 &= 0 \\
C_1 &= 0.511919 \\
D_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

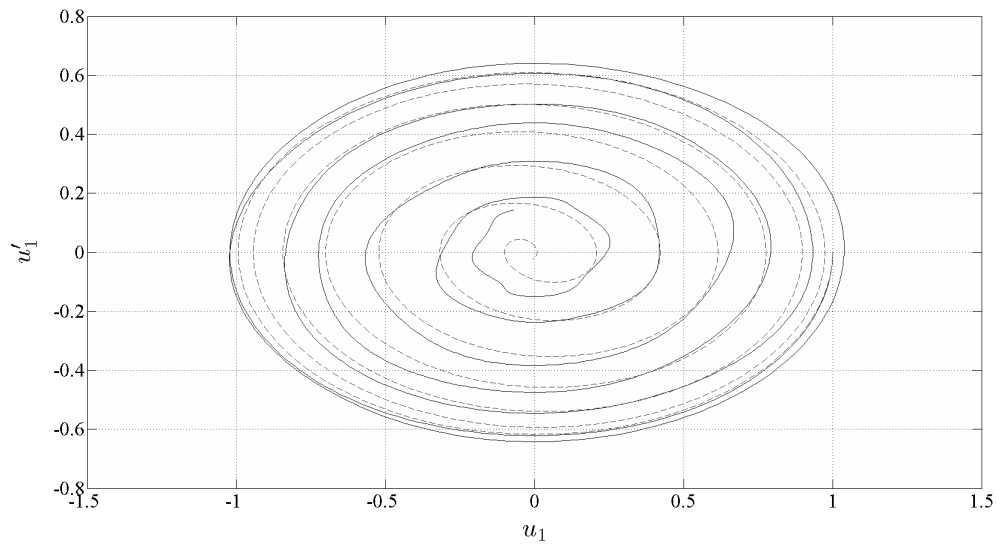
Da der Betrag  $|C_1|$  vom Betrag  $|A_1|$  mit  $|\frac{C_1}{A_1}| < 0.5\%$  nur geringfügig abweicht und die Summe der Parameter  $B_2$  und  $D_2$  lediglich  $B_2 + D_2 = 0.0112 \ll 1$  ist, kann man die Näherungslösung  $\bar{u}$  (siehe **Bild 7.9**, ff.) der quasimodalen Verdrehungen  $u$  mit Gl. (6.19) und den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen (siehe Anhang A) schreiben als:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= 1 \cos\left(\frac{|\omega_{\text{Trans},1} - \omega_{\text{Trans},2}|}{2} \tau\right) \cos\left(\frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},2}}{2} \tau\right) \cos(\omega_1 \tau) \\
\bar{u}_2 &= 0.617996 \cos\left(\frac{|\omega_{\text{Trans},1} - \omega_{\text{Trans},2}|}{2} \tau\right) \sin\left(\frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},2}}{2} \tau\right) \sin(\omega_2 \tau)
\end{aligned} \tag{7.5}$$

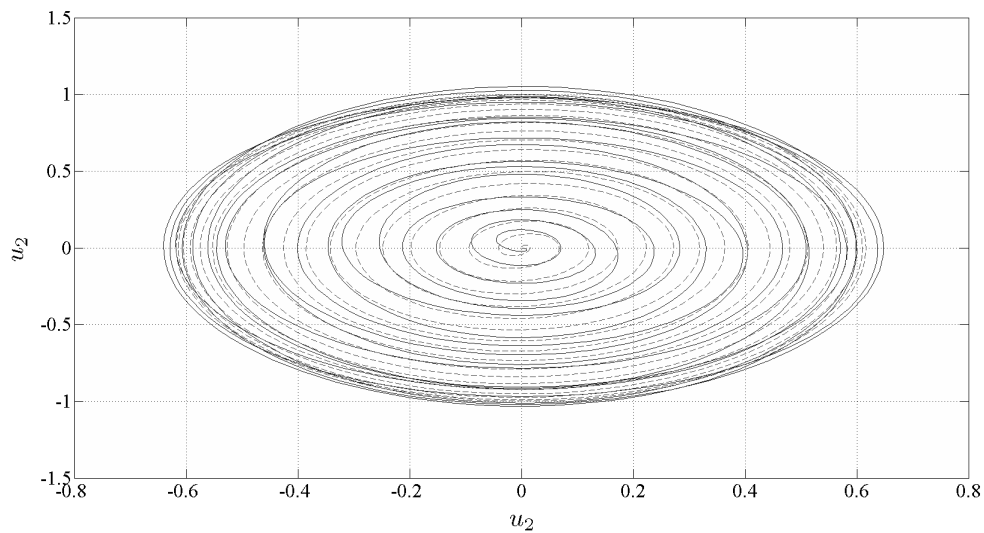
Man beachte, dass die Harmonischen  $\cos(\omega_1 \tau)$  und  $\sin(\omega_2 \tau)$  einer doppelten Amplitudenmodulation unterliegen. Zusätzlich zur gemessen an den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  langsamen Amplitudenmodulation mit  $\frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},2}}{2}$  tritt eine noch wesentlich langsamere (hier etwa vierzig mal langsamere) Amplitudenmodulation mit  $\frac{|\omega_{\text{Trans},1} - \omega_{\text{Trans},2}|}{2}$  auf.

So wie in Abschnitt 7.1 kann auch hier die Energiedifferenz zwischen erster und zweiter Quasimode ermittelt werden. Diese Differenz ist der Betrag an Arbeit, der durch die Parametererregung am System zu leisten ist, um die Schwingung von der ersten in die zweite Quasimode zu transferieren. Es gilt

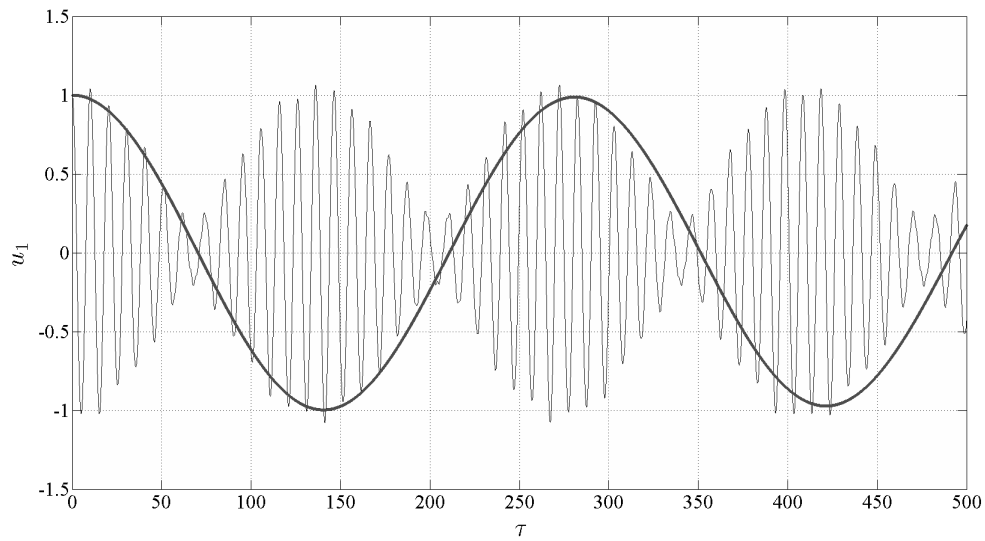
$$\begin{aligned}
B_4 + D_4 &= \sqrt{\frac{E_{\text{ges},0} + \Delta E_{\text{ges}}}{E_{\text{ges},0}} \cdot \frac{E_{\text{pot}}(\varphi_1)}{E_{\text{pot}}(\varphi_2)}} \\
\Rightarrow \Delta E_{\text{ges}} &= \left( (B_4 + D_4)^2 \frac{E_{\text{pot}}(\varphi_2)}{E_{\text{pot}}(\varphi_1)} - 1 \right) \cdot E_{\text{ges},0}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$



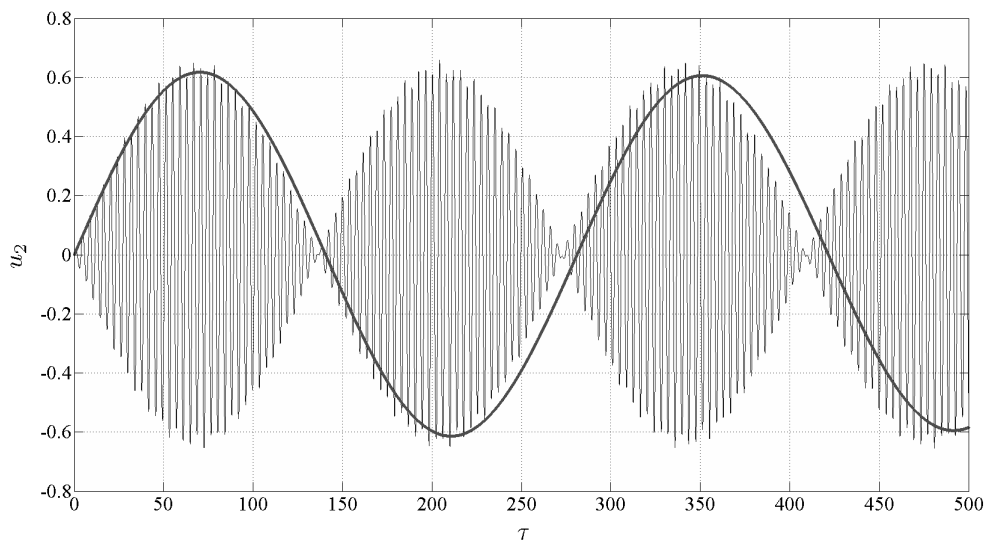
**Abbildung 7.9:** Erste quasimodale Verdrehung: Näherung  $\bar{u}'_1(\bar{u}_1)$  (gestrichelt) und Simulationsergebnis  $u'_{1,num}(u_{1,num})$  (durchgezogen) für die Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  über den Zeitraum  $\tau = [0 \ \frac{\pi}{2\omega_{\text{Trans}}}]^T$



**Abbildung 7.10:** Zweite quasimodale Verdrehung: Näherung  $\bar{u}'_2(\bar{u}_2)$  (gestrichelt) und Simulationsergebnis  $u'_{2,num}(u_{2,num})$  (durchgezogen) für die Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  über den Zeitraum  $\tau = [0 \ \frac{\pi}{2\omega_{\text{Trans}}}]^T$



**Abbildung 7.11:** Ergebnis für die quasimodale Verdrehung  $u_1$  bei Simulation des Systems mit  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  und die zugehörige Hüllkurve  $1 \cdot \cos\left(\frac{\omega_{\text{Trans},2} - \omega_{\text{Trans},1}}{2} \tau\right)$

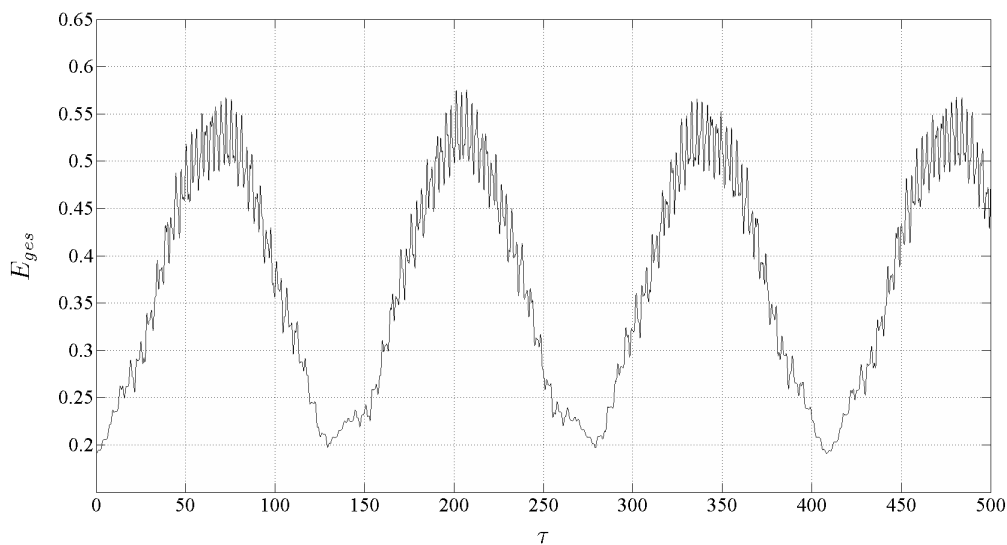


**Abbildung 7.12:** Ergebnis für die quasimodale Verdrehung  $u_2$  bei Simulation des Systems mit  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  und die zugehörige Hüllkurve  $0.6180 \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\text{Trans},2} - \omega_{\text{Trans},1}}{2} \tau\right)$

Wie in Abschnitt 7.1 ergibt sich hierbei die Energie  $E_{\text{ges},0} = E_{\text{pot},0}$  des Systems zum Anfangszeitpunkt zu  $E_{\text{ges},0} = 0.1910$ . Damit nimmt die Energiedifferenz zwischen erster und zweiter Quasimode den Betrag  $\Delta E_{\text{ges}} = 0.309$  an. Da die analytisch ermittelten Amplituden der zweiten quasimodalen Verschiebung bei Parametererregung durch zeitvariable Steifigkeit und zeitvariantes Massenträgheitsmoment gleich sind, ist auch die berechnete analytische Energiedifferenz  $\Delta E_{\text{ges}}$  gleich. Die numerischen Werte der Energiedifferenzen unterscheiden sich aber, so dass bei zeitvariantem Massenträgheitsmoment eine größere Übereinstimmung zwischen numerisch berechneter Energiedifferenz  $\Delta E_{\text{ges,num}} = 0.376$  und der analytisch genäherten besteht. Die relative Abweichung der analytisch genäherten zur numerisch berechneten Lösung beträgt  $-17.82\%$ .

Die Abweichung zwischen den Amplituden der Hüllkurven der Näherungslösung und der numerisch berechneten Lösung ist verschwindend gering.

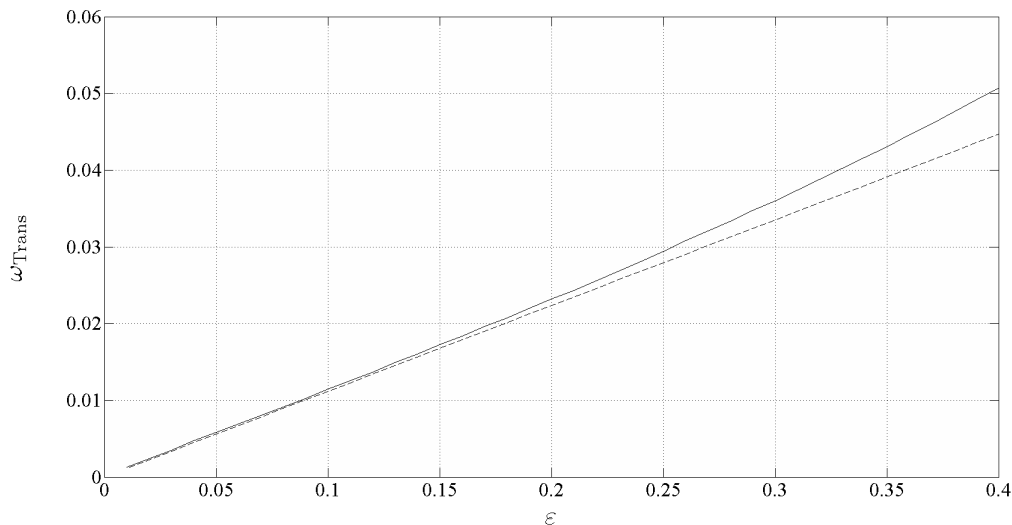
Wie **Bild 7.11** und **Bild 7.12** entnommen werden kann, wird die numerisch berechnete Kreisfrequenz des quasimodalen Energietransfers etwas unterschätzt. Die relative Abweichung der analytisch genäherten Kreisfrequenz  $\omega_{\text{Trans}} = \frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},2}}{2} = 0.022354$  zur numerisch bestimmten  $\omega_{\text{Trans,num}} = 0.023015$  beträgt  $-2.9\%$ .



**Abbildung 7.13:** Gesamtenergie  $E_{\text{ges}}$  für die Simulation des Systems mit  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Auch für die Parametererregung über ein zeitabhängiges Massenträgheitsmoment kann wie in Abschnitt 7.1 eine Validierung des in Kapitel 6 gefundenen Zusammenhangs zwischen der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des Energietransfers und  $\varepsilon$  geschehen.

Dies geschieht hier exemplarisch für  $\omega_{\text{Trans}} = \frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},2}}{2}$ . Allerdings gilt der hier gefundene Zusammenhang immer, solange sich  $\omega_{\text{Trans}}$  als Linearkombination von  $\omega_{\text{Trans},1}$  und  $\omega_{\text{Trans},2}$  darstellen lässt. Der Vergleich von numerischem und analytischem Zusammenhang zwischen  $\omega_{\text{Trans}}$  und  $\varepsilon$  bestätigt die näherungsweise lineare Abhängigkeit der Frequenz des Energietransfers von  $\varepsilon$  für kleine Werte von  $\varepsilon$  (siehe **Bild 7.14**). Für den im Parametersatz gewählten Wert  $\varepsilon = 0.2$  ergibt sich die zuvor erwähnte Abweichung von 2.9%. Für  $\varepsilon = 0.4$  beträgt die Abweichung ca. 14%. Die analytische Lösung unterschätzt den Einfluss von  $\varepsilon$  auf  $\omega_{\text{Trans}}$  für größer werdende Werte von  $\varepsilon$  zunehmend und zwar stärker als in Abschnitt 7.1 bei Parametererregung über eine zeitabhängige Steifigkeit.

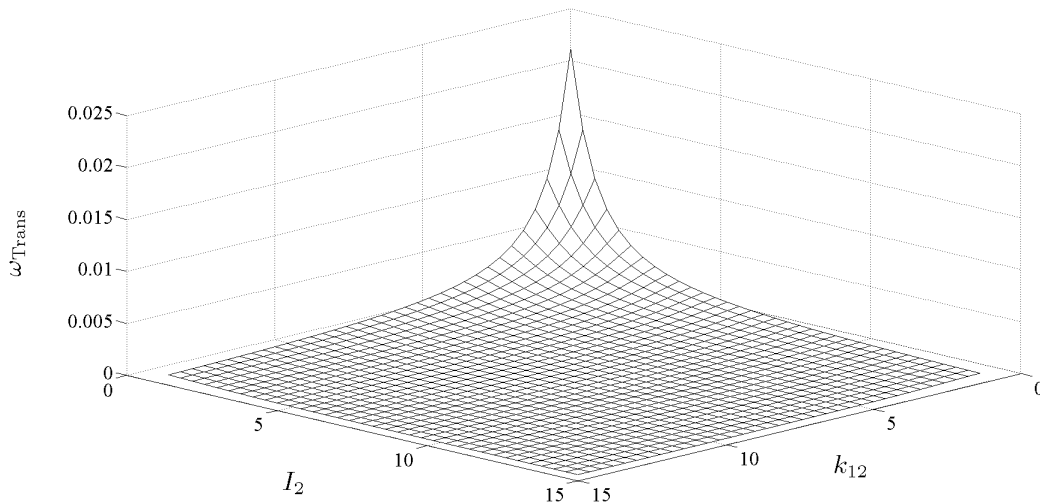


**Abbildung 7.14:** Numerischer (durchgezogener Graph) und analytischer (gestrichelter Graph) Zusammenhang zwischen der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers und der Amplitude  $\varepsilon$  der Parametererregung

Wie in Abschnitt 7.1 kann auch für die Parametererregung mit zeitabhängigem Massenträgheitsmoment  $I_1(t)$  auf Grundlage der gefundenen Ergebnisse eine Parameterstudie für die Abhängigkeit der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}} = \frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},2}}{2}$  des quasimodalen Energietransfers von den Parametern  $I_2$  und  $k_{12}$  durchgeführt werden (siehe **Bild 7.15**). Die



Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  fällt monoton mit zunehmendem  $I_2$  und  $k_{12}$  asymptotisch gegen Null. Es ergibt sich also der selbe qualitative Zusammenhang zwischen  $\omega_{\text{Trans}}$  und  $I_2, k_{12}$  wie in Abschnitt 7.1.



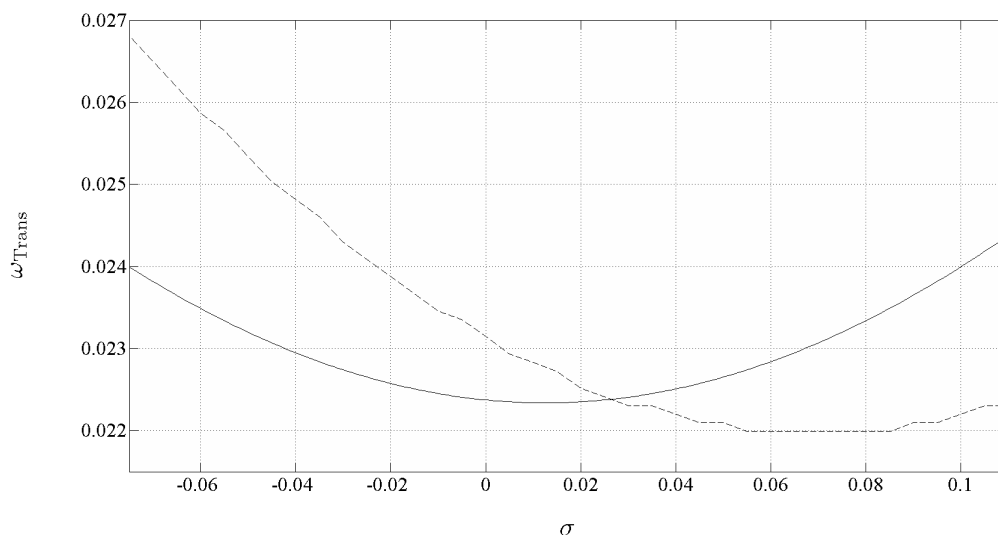
**Abbildung 7.15:** Frequenz  $\omega_{\text{Trans}} = \frac{\omega_{\text{Trans},1} + \omega_{\text{Trans},2}}{2}$  des quasimodalen Energietransfers in Abhängigkeit der Parameter  $I_2$  und  $k_{12}$

### 7.2.2 Parametererregung mit geringer Frequenzabweichung

Es soll der in Abschnitt 6.2 gefundene Zusammenhang zwischen der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers und kleinen Abweichungen  $\sigma$  der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  von  $\Omega_0$  überprüft werden. Dazu wird  $\omega_{\text{Trans}}$  analog zu Abschnitt 7.1.2 numerisch bestimmt und über  $\sigma$  iteriert. Das Ergebnis dieser numerischen Untersuchung ist zusammen mit der analytischen für den untersuchten Parametersatz in **Bild 7.16** dargestellt. Während das Minimum der analytischen Funktion  $\omega_{\text{Trans,an}}(\sigma)$  mit  $\sigma_{\omega_{\text{Trans,min,an}}} = 0.012$  nur gering gegen Null verschoben ist, liegt das Minimum des numerisch gefundenen Zusammenhangs mit  $\sigma_{\omega_{\text{Trans,min,num}}} = 0.07$  deutlich im positiven Bereich. Auch liegt das Minimum hier mit  $\omega_{\text{Trans,min,num}} = 0.0219$  um 1.8% niedriger als bei der analytischen Lösung. Der Zusammenhang zwischen der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers

und kleinen Störungen  $\sigma$  der Parametererregungsfrequenz wird mit der Näherung also nur qualitativ richtig erfasst. Schon für sehr kleine Störungen  $\sigma = [-0.05 \quad +0.05]$  ergibt sich eine Differenz zwischen numerischer und analytischer Lösung von bis zu 10%. Um den Zusammenhang zwischen  $\omega_{\text{Trans}}$  und  $\sigma$  für den vorliegenden Satz von Parametern besser nähern zu können, wäre die Berücksichtigung zumindest von Termen zweiter Ordnung in  $\varepsilon$  notwendig. Nimmt  $\varepsilon$  einen kleineren Wert an als den hier verwendeten von  $\varepsilon = 0.2$ , so ist eine bessere Übereinstimmung von numerischer und analytischer Lösung zu erwarten.

Generell kann gesagt werden, dass kleine Abweichungen der Parametererregungsfrequenz  $\Omega$  von  $\Omega_0$  signifikante Auswirkungen auf die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers haben.



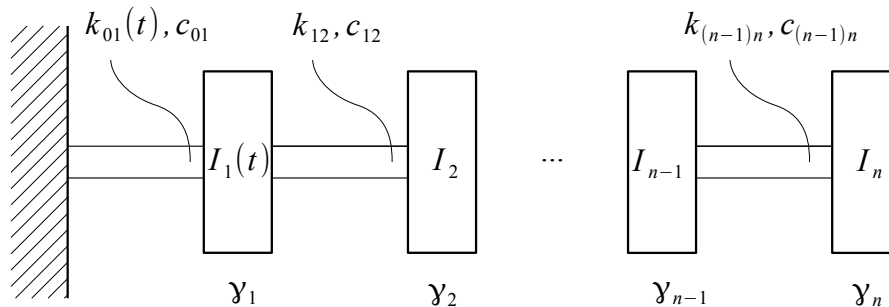
**Abbildung 7.16:** Analytische Lösung (durchgezogen) und numerische Lösung (gestrichelt) für die Abhängigkeit der Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers von der Abweichung  $\sigma$  der Parametererregung  $\Omega$  von  $\Omega_0$

## **Teil III**

# **Die Frequenzen der quasimodalen Energietransfers am n-FHG-System**

## 8 Ungedämpfte n-FHG-Systeme

Das in Kapitel 2 gezeigte 2-Freiheitsgrad-System kann leicht auf  $n$  Freiheitsgrade erweitert werden (siehe **Bild 8.1**).



**Abbildung 8.1:** Auf  $n$  Freiheitsgrade erweitertes System

Für solche Mehr-Freiheitsgrad-Systeme kann gezeigt werden (siehe Kapitel 10 (4-FHG-System) und [7] (3-FHG-System)), dass bei einer Parametererregung mit Parametererregungsfrequenz  $\Omega = |\omega_l - \omega_m|$  nur ein Energietransfer zwischen  $l$ -ter und  $m$ -ter Quasimode und umgekehrt stattfindet. Die Schwingungen der übrigen Quasimoden bleiben von der Parametererregung unbeeinflusst. Die Anordnung der Körper muss dabei nicht zwingend in der Art, wie in **Bild 8.1** gezeigt sein. Sie ist vielmehr beliebig. Beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen sind lediglich die in Abschnitt 8.1 und Abschnitt 8.2 aufgeführten Kriterien zu erfüllen.

Für ein solches  $n$ -dimensionales Problem wird die symmetrische PE-Verteilungsmatrix  $\widehat{\Phi}$  (siehe Gl. (5.12)) zu

$$\widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{11} & \varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{11} & \varphi_{n1} \\ \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{21} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{21} & \varphi_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ \varphi_{11} & \varphi_{n1} & \varphi_{21} & \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{n1} & \varphi_{n1} \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Dabei ist  $\varphi_{l1}$  jeweils der erste Eintrag des  $l$ -ten normierten Eigenvektors entsprechend Kapitel 2.

## 8.1 Frequenzen bei zeitabhängiger Steifigkeit $k_{01}(t)$

Unter der Voraussetzung, dass die Lösungen aller Quasimoden bis auf die  $l$ -te und  $m$ -te nicht durch die Parametererregung mit  $\Omega = |\omega_l - \omega_m|$  beeinflusst werden, kann für die Schwingung in der  $l$ -ten und  $m$ -ten Quasimode das durch Parametererregung mit der zeitabhängigen Steifigkeit  $k_{01}(t)$  gekoppelte Differentialgleichungssystem in Analogie zu Gl. (5.1) angegeben werden:

$$\mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} \frac{\omega_l^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_m^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} \mathbf{u} = - \begin{pmatrix} \varphi_{l1}^2 & \varphi_{l1} \varphi_{m1} \\ \varphi_{l1} \varphi_{m1} & \varphi_{m1}^2 \end{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \cos(\tau) \mathbf{u}. \quad (8.2)$$

Die Differentialgleichungen aller anderen Quasimoden sind von diesen beiden entkoppelt. Man beachte, dass die Form der Differentialgleichung unabhängig von der Anordnung der Körper des Modells, d.h. unabhängig von Massen-, Dämpfungs-, und Steifigkeitsmatrix ist. Es gibt lediglich drei Voraussetzungen: Es darf nur eine Steifigkeit über der Zeit harmonisch variiert werden. Diese Steifigkeit muss eine Drehfeder charakterisieren, die nur einen Körper gegen das Inertialsystem fesselt, d.h. die Steifigkeit darf nur an einer Stelle der Steifigkeitsmatrix stehen. Weiterhin müssen die Gleichungen so sortiert

werden, dass die Parametererregung in der ersten Zeile steht, d.h. die variierte Steifigkeit darf nur im ersten Eintrag der Steifigkeitsmatrix stehen.

Analog zu Kapitel 5 ergibt sich die Frequenz des quasimodalen Energietransfers für ungestörte Parametererregung ( $\sigma = 0$ ) zu

$$\omega_{\text{Trans}} = \frac{\varepsilon \varphi_{l1} \varphi_{m1}}{4\Omega_0 \sqrt{\omega_l \omega_m}}. \quad (8.3)$$

Die Amplitude der Schwingung der  $m$ -ten Quasimode ist dabei für  $m > l$  um den Faktor  $a$  größer als die der  $l$ -ten Quasimode:

$$a = \frac{4\omega_{\text{Trans}} \Omega \omega_l}{\varepsilon \varphi_{l1} \varphi_{m1}} < 1. \quad (8.4)$$

## 8.2 Frequenzen bei zeitabhängigem Massenträgheitsmoment $I_1(t)$

Die Unabhängigkeit der Schwingung der  $l$ -ten und  $m$ -ten Quasimode gilt auch für eine Parametererregung mit zeitabhängigem Massenträgheitsmoment  $I_1(t)$ . Das gekoppelte Differentialgleichungssystem kann für die Schwingung in der  $l$ -ten und  $m$ -ten Quasimode in Analogie zu Kapitel 6 angegeben werden mit

$$\mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} \frac{\omega_l^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_m^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} \mathbf{u} = - \begin{pmatrix} \varphi_{l1}^2 & \varphi_{l1} \varphi_{m1} \\ \varphi_{l1} \varphi_{m1} & \varphi_{m1}^2 \end{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \cos(\tau) \mathbf{u}''. \quad (8.5)$$

Analog zu Abschnitt 8.1 gilt auch hier, dass die Form der Differentialgleichung unabhängig von der Anordnung der Körper des Modells, d.h. unabhängig von Massen-, Dämpfungs-, und Steifigkeitsmatrix ist. Es gibt lediglich zwei Voraussetzungen: Es darf

nur ein Massenträgheitsmoment über der Zeit harmonisch variiert werden und die Gleichungen müssen so sortiert werden, dass die Parametererregung in der ersten Zeile steht, d.h., das variierte Massenträgheitsmoment muss als erster Eintrag in der Massenmatrix stehen.

Die Frequenzen des quasimodalen Energietransfers für ungestörte Parametererregung resultieren dann zu

$$\omega_{\text{Trans},1} = \frac{\varepsilon \varphi_{l1} \varphi_{m1} \sqrt{-8\varepsilon (\omega_l + \omega_m) \varphi_{l1} \varphi_{m1} \sqrt{\omega_l \omega_m} \Omega_0^2 + 32\omega_l \omega_m \Omega_0^4}}{2^{9/2} \Omega_0^5}, \quad (8.6)$$

$$\omega_{\text{Trans},2} = \frac{\varepsilon \varphi_{l1} \varphi_{m1} \sqrt{8\varepsilon (\omega_l + \omega_m) \varphi_{l1} \varphi_{m1} \sqrt{\omega_l \omega_m} \Omega_0^2 + 32\omega_l \omega_m \Omega_0^4}}{2^{9/2} \Omega_0^5}. \quad (8.7)$$

## 9 Gedämpfte Mehrfreiheitsgrad-Systeme

Analog zu Kapitel 8 können die Frequenzen der quasimodalen Energietransfers auch für gedämpfte und über eine zeitabhängige Steifigkeit  $k_{01}(t)$  (siehe **Bild 8.1**) parametererregte Mehrfreiheitsgrad-Systeme bestimmt werden. Wie in Kapitel 8 beschrieben, tritt nur eine Kopplung der quasimodal reduzierten Bewegungsgleichungen auf, deren Frequenzen die Parameterantiresonanzfrequenz bilden. Die beiden Gleichungen, welche die  $l$ -te und  $m$ -te Quasimode koppeln, sind

$$\mathbf{u}'' + \begin{pmatrix} 2\zeta_l \frac{\omega_l}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & 2\zeta_l \frac{\omega_m}{\Omega^2} \end{pmatrix} \mathbf{u}' + \begin{pmatrix} \frac{\omega_l^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_m^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} \mathbf{u} = - \begin{pmatrix} \varphi_{l1}^2 & \varphi_{l1} \varphi_{m1} \\ \varphi_{l1} \varphi_{m1} & \varphi_{m1}^2 \end{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \cos(\tau) \mathbf{u}. \quad (9.1)$$

Wie bereits in Kapitel 2 beschrieben, sollen die modalen Dämpfungen  $\zeta_i$  von der Form  $\zeta_i = \frac{\delta \omega_i}{2}$  sein, d. h., es soll Proportionaldämpfung vorliegen.

Im Unterschied zu Kapitel 5 werden die Einträge  $F_i$  der vektoriellen Funktion  $F$  allerdings zu (vergleiche [3])

$$F_i = \Omega_0 \mu \omega_i^2 (-x_i \eta_i s_i + y_i \eta_i c_i) + \sum_j \widehat{\Phi}_{ij} (x_j c_j + y_j s_j) \cos(\tau) - 2\omega_i \eta_i \sigma (x_i c_i + y_i s_i) \quad (9.2)$$

mit  $i = l \vee m$  und  $j = l \vee m$ . Der Parameter  $\mu = \frac{\delta}{\varepsilon}$  ist dabei das Verhältnis des Proportionalitätsfaktors  $\delta$  der Dämpfungen zu der Amplitude  $\varepsilon$  der Parametererregung.



Damit ergeben sich die Näherungslösungen für  $x_i$  und  $y_i$  zu

$$\bar{x}_i = \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} \left( -\frac{\mu \Omega_0}{2} \omega_i^2 \bar{x}_i + \frac{\Phi_{ij}^2}{4 \eta_i} \bar{y}_i - \omega_i \bar{y}_i \right), \quad (9.3)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} \left( -\frac{\mu \Omega_0}{2} \omega_i^2 \bar{y}_i - \frac{\Phi_{ij}^2}{4 \eta_i} \bar{x}_i + \omega_i \bar{x}_i \right), \quad (9.4)$$

beziehungsweise in Matrixnotation (vergleiche [1], [3]) zu

$$\bar{\mathbf{x}}' = \frac{\varepsilon}{\Omega_0^2} \begin{pmatrix} -\mu \frac{\omega_l^2 \Omega_0}{2} & -\omega_l \sigma & 0 & \frac{\Omega_0}{4\omega_l} \varphi_{l1} \varphi_{m1} \\ \omega_l \sigma & -\mu \frac{\omega_l^2 \Omega_0}{2} & -\frac{\Omega_0}{4\omega_l} \varphi_{l1} \varphi_{m1} & 0 \\ 0 & \frac{\Omega_0}{4\omega_m} \varphi_{l1} \varphi_{m1} & -\mu \frac{\omega_m^2 \Omega_0}{2} & -\omega_m \sigma \\ -\frac{\Omega_0}{4\omega_m} \varphi_{l1} \varphi_{m1} & 0 & \omega_m \sigma & -\mu \frac{\omega_m^2 \Omega_0}{2} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{k(t),D} \bar{\mathbf{x}}. \quad (9.5)$$

Wird nur die ungestörte Parametererregung mit  $\Omega = \Omega_0$  betrachtet, so ergeben sich die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}_{k(t),D}$  zu

$$\lambda = -\frac{\delta(\omega_l^2 + \omega_m^2)}{4 \Omega} \pm \varepsilon \frac{\sqrt{-\omega_l \omega_m \varphi_{l1}^2 \varphi_{m1}^2 + \mu^2(\omega_l^2 \omega_m^6 - 2 \omega_l^4 \omega_m^4 + \omega_l^6 \omega_m^6)}}{4\omega_l \omega_m \Omega_0}. \quad (9.6)$$

Ist  $\delta \ll \varepsilon \ll 1$  dann ist die Frequenz des quasimodalen Energietransfers

$$\omega_{\text{Trans},D} = \varepsilon \frac{\varphi_{l1} \varphi_{m1}}{4 \sqrt{\omega_l \omega_m} \Omega_0}, \quad (9.7)$$

dass heißt, es gilt

$$\omega_{\text{Trans},D} \approx \omega_{\text{Trans}}. \quad (9.8)$$

---

Die Frequenz des Energietransfers unterscheidet sich in erster Näherung also nicht von der für das ungedämpfte System bestimmten. Es gilt auch für den gedämpften Fall, dass die Frequenz des Energietransfers linear von  $\varepsilon$  abhängt.

Der Realteil  $\Re\{\lambda\}$  ist unter der gemachten Einschränkung  $\varepsilon \ll 1$  unabhängig von  $\varepsilon$ . Für kleine Werte von  $\varepsilon$  ist die Stabilität des Systems, bzw. die Abklingzeit der Schwingungen der Körper also unabhängig von der Amplitude der Parametererregung.

Für eine Parametererregung mit zeitabhängigem Massenträgheitsmoment  $I_1(t)$  ist für gedämpfte Systeme eine analytische Berechnung der Eigenwerte der Systemmatrix  $A_{I(t),D}$  der gekoppelten Bewegungsgleichungen der  $l$ -ten und  $m$ -ten Quasimode praktisch nicht möglich. Die Ausdrücke werden selbst für den Fall  $\sigma = 0$  zu lang, um noch ausgegeben zu werden. Für eine analytische Studie der Stabilität des Systems kann das Hurwitz-Kriterium angewendet werden [3]. Die Berechnung der Frequenz des quasimodalen Energietransfers ist für den gedämpften Fall analytisch de facto nicht möglich.

## 10 Numerische Validierung für ein 4-FHG-System

Die in Kapitel 8 bestimmten Frequenzen des Energietransfers und die Tatsache der Unabhängigkeit der durch die Parametererregung gekoppelten Quasimoden von allen anderen soll in diesem Kapitel an einem 4-Freiheitsgrad-System entsprechend **Bild 8.1** gezeigt werden. Die Parameter des System sind in **Tabelle 10.1** und **Tabelle 10.2** gelistet.

**Tabelle 10.1:** Parametersatz des numerischen Modells

Parameter	Wert
Massenträgheitsmomente	$I_i = 1$
Steifigkeiten	$k_{ij} = 1$
Dämpfungen	$c_{ij} = 0.025$
Amplituden der Parametererregung	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$

**Tabelle 10.2:** Aus dem Parametersatz abgeleitete Größen des numerischen Modells

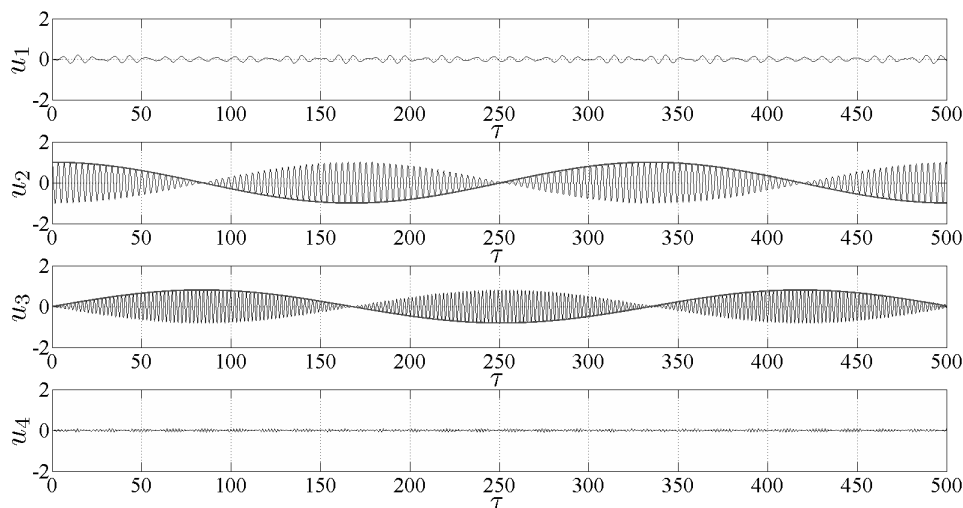
Größe	Wert
Eigenkreisfrequenzen ( $\omega_{D,i} = \omega_i$ )	$\omega_1 = 0.347, \omega_2 = 1, \omega_3 = 1.532, \omega_4 = 1.879$
quasimodale Dämpfungen	$\zeta_1 = 4.341 \cdot 10^{-3}, \zeta_2 = 12.499 \cdot 10^{-3},$ $\zeta_3 = 19.148 \cdot 10^{-3}, \zeta_4 = 23.486 \cdot 10^{-3}$

Bei Mehrfreiheitsgradsystemen kann es vorkommen, dass bestimmte Parameterantiresonanzfrequenzen nicht vorhanden sind, weil sie von Parameterresonanzfrequenzen überlagert werden. Dies ist insbesondere für kleine Parameterantiresonanzen häufig der Fall, weil sich für schwach gedämpfte Systeme im Bereich kleiner Frequenzen die Parameterresonanzen für höhere  $n$  häufen (siehe Kapitel 4).

## 10.1 Parametererregung durch zeitvariante Steifigkeit

$$k_{01}(t)$$

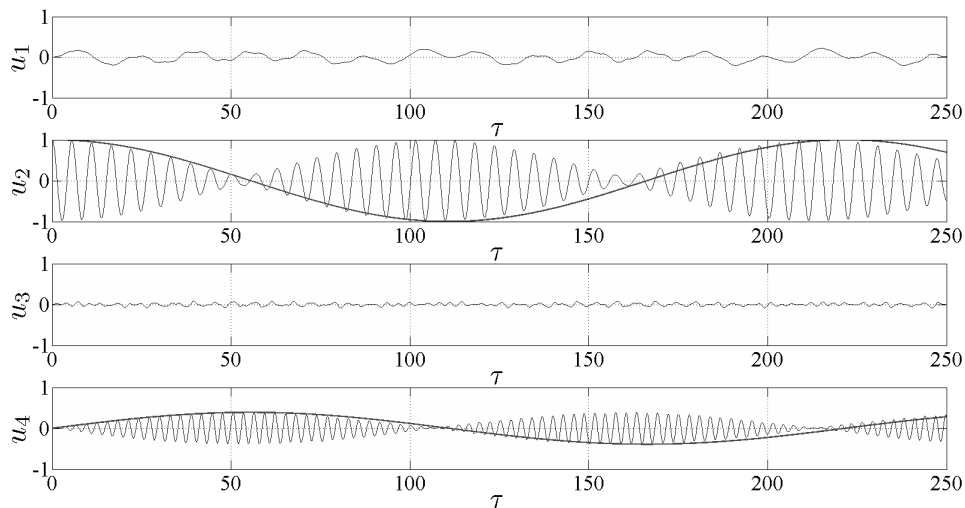
**Bild 10.1** zeigt die Zeitsimulation des 4-Freiheitsgrad-Systems unter Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_3 - \omega_2$  bei zeitabhängiger Steifigkeit  $k_{01}(t)$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{u} = [0, 1, 0, 0]^T$ . Die Hüllkurven  $u_{2,t=0} \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau)$  der zweiten quasimodalen Verdrehung und die Hüllkurve  $u_{2,t=0} \frac{4\omega_{\text{Trans}} \Omega \omega_2}{\varepsilon \varphi_{21} \varphi_{31}} \sin(\omega_{\text{Trans}} \tau)$  der dritten quasimodalen Verdrehung sind fett dargestellt. Die im System gespeicherte Energie wird offensichtlich nur von der zweiten in die dritte Quasimode und umgekehrt transferiert. Die Amplituden der Schwingungen der Verdrehungen der ersten und vierten Quasimode fallen vernachlässigbar klein aus.



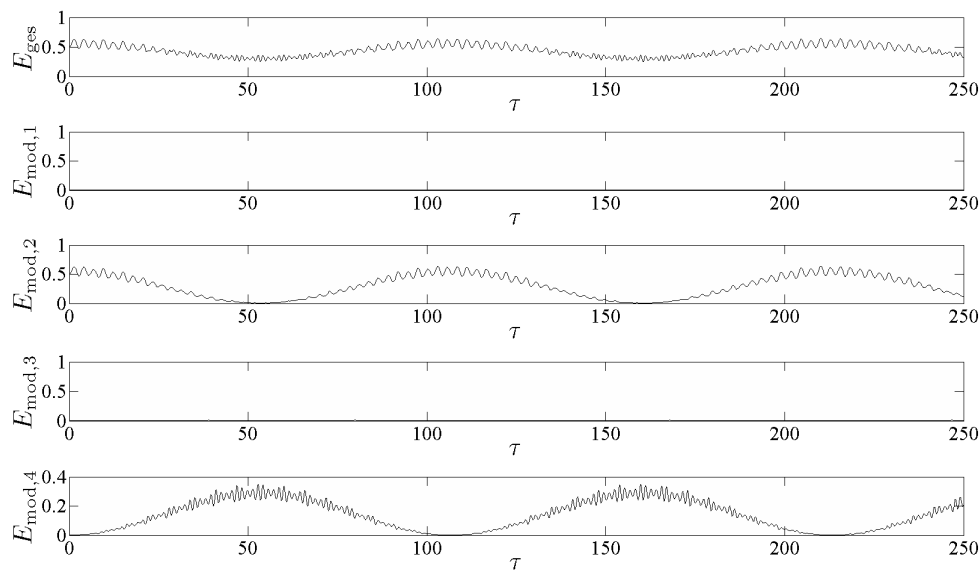
**Abbildung 10.1:** Zeitsimulation der quasimodalen Verdrehungen  $u_{1-4}$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{u} = [0, 1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  und die Hüllkurven  $u_{2,t=0} \cos(\omega_{\text{Trans}} \tau)$  bzw.  $u_{2,t=0} \frac{4\omega_{\text{Trans}} \Omega \omega_2}{\varepsilon \varphi_{21} \varphi_{31}} \sin(\omega_{\text{Trans}} \tau)$  bei Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_3 - \omega_2$

## 10.2 Parametererregung durch zeitvariantes Massenträgheitsmoment $I_1(t)$

**Bild 10.2** zeigt die Zeitsimulation des 4-Freiheitsgrad-Systems unter Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_4 - \omega_2$  bei zeitabhängigem Massenträgheitsmoment  $I_1(t)$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{u} = [0, 1, 0, 0]^T$ . Die Hüllkurven der zweiten und vierten quasimodalen Verdrehung sind fett dargestellt. Die im System gespeicherte Energie wird nur von der zweiten in die vierte Quasimode und umgekehrt transferiert. Die Amplitude der Schwingung der Verdrehung der dritten Quasimode fällt vernachlässigbar klein aus. Die Amplitude der Schwingung der Verdrehung der ersten Quasimode nimmt zwar relevante Beträge an, es ist aber keine signifikante Veränderung der in der ersten Quasimode gespeicherten Energie über der Zeit sichtbar (siehe **Bild 10.3**). Es wird offenbar ein vernachlässigbar geringer Teil der durch die Parametererregung ins System eingebrachten Energie in der ersten Quasimode gespeichert, aber keine Energie zwischen erster und zweiter Quasimode übertragen.



**Abbildung 10.2:** Zeitsimulation der quasimodalen Verdrehungen  $u_{1-4}$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{u} = [0, 1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  und die Hüllkurven mit Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  bei Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_4 - \omega_2$

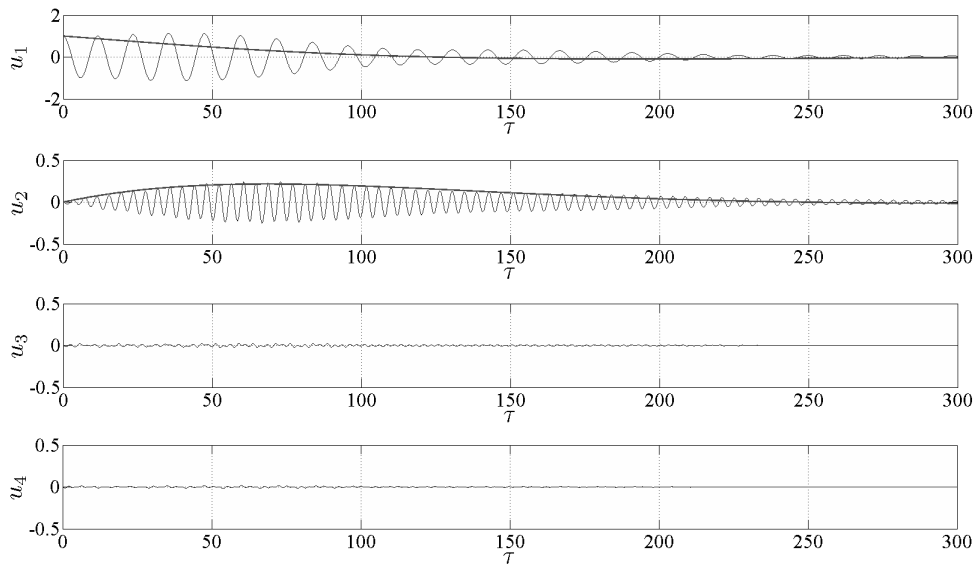


**Abbildung 10.3:** Gesamtenergie  $E_{\text{ges}}$  und in den einzelnen Quasimoden  $i = 1, 2, 3, 4$  gespeicherte Energie  $E_{\text{ges},i}$  aus der in **Bild 10.2** dargestellten Zeitsimulation des 4-FHG-Systems

### 10.3 Gedämpftes System unter zeitvarianter Steifigkeit $k_{01}(t)$

Wie in **Bild 10.4** zu sehen ist, bildet die in Kapitel 9 analytisch bestimmte Lösung den tatsächlichen Verlauf der Schwingungen der quasimodalen Verdrehungen unter Umständen nicht genau ab. Dieses Verhalten scheint auch dadurch begünstigt zu werden, dass eine Modulation der quasimodalen Verdrehungen im betrachteten Fall kaum noch sichtbar ist.

Berechnet man die Floquetmultiplikatoren, kann man im Rahmen einer Stabilitätsanalyse (siehe Kapitel 3) den Wert des betragsmäßig größten Floquetmultiplikators  $\varrho_n$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  auftragen (siehe **Bild 10.5**). Im Bereich sehr kleiner Werte ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) der Amplitude  $\varepsilon$  der Parametererregung ist  $\max(|\varrho_n|) = f(\varepsilon)$ , d. h. die Stabilität des Systems, konstant. Der in Kapitel 9 gefundene Zusammenhang, dass für  $\varepsilon \ll 1$  der die Stabilität bestimmende Wert  $\Re\{\lambda\}$  unabhängig von  $\varepsilon$  ist, kann also für den vorliegenden Fall bestätigt werden.



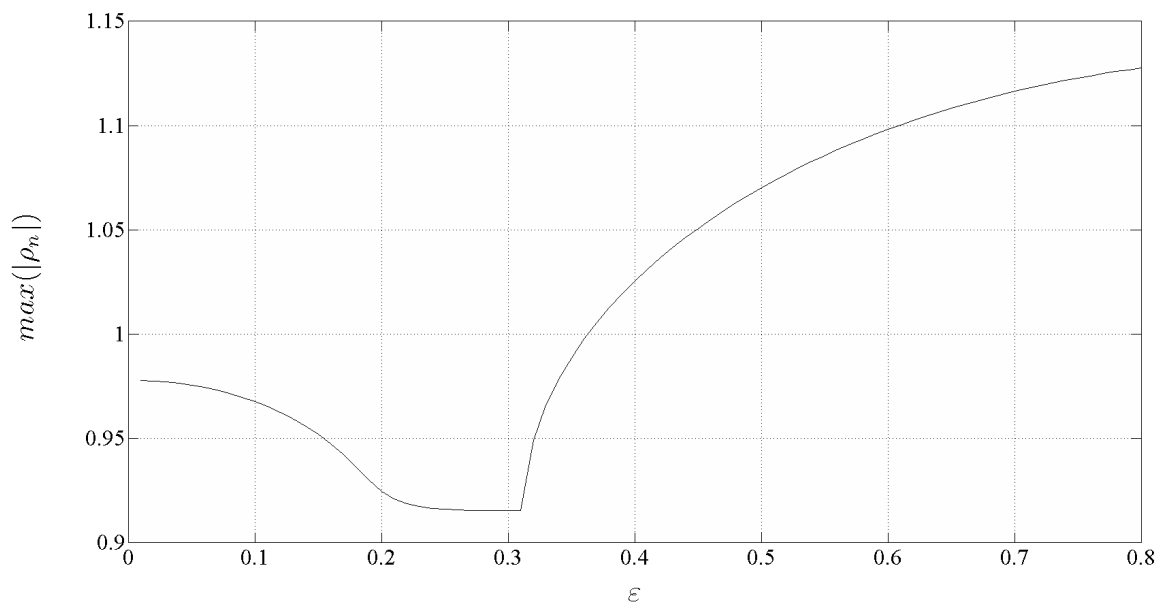
**Abbildung 10.4:** Zeitsimulation der quasimodalen Verdrehungen  $u_{1-4}$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{u} = [0, 1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  und die analytischen Hüllkurven bei Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$

Für größere Werte von  $\varepsilon$  beginnt  $\max(|\varrho_n|)$  progressiv zu fallen, was einer raschen Zunahme der Stabilität des Systems entspricht. Ab  $\varepsilon_s = 0.18$  tritt dann eine Sättigung von  $\max(|\varrho_n|)$  ein. Bei einem bestimmten Wert  $\varepsilon_c = 0.31$  gibt es eine Unstetigkeit im Verlauf von  $\max(|\varrho_n|)$ . Dieser beginnt mit großer Steigung monoton zu wachsen, wird größer 1 und nähert sich schließlich asymptotisch einem deutlich über 1 liegenden Wert.

Es ist also keineswegs so, dass große  $\varepsilon$  und entsprechend hoher Energieaufwand bei der Parametererregung zwangsweise entsprechend große Wirkung hinsichtlich der Stabilität des Systems entfalten. Dass im gezeigten Fall bei  $\varepsilon_c$  eine Unstetigkeit auftritt und  $\max(|\varrho_n|)$  für größere Werte von  $\varepsilon$  über 1 steigt, hängt mit dem gewählten Parametersatz zusammen: Die Parameterantiresonanzfrequenz  $\omega_2 - \omega_1$  liegt sehr nahe bei  $2\omega_1$  (siehe **Bild 10.6**). Da mit  $\varepsilon$  nicht nur die Breite der Parameterantiresonanzen sondern auch die der Parameterresonanzen steigt, berühren sich bei  $\varepsilon_c$  beide Bereiche: die beiden Effekte beginnen, sich gegenseitig auszulöschen, bis die Resonanz schließlich überwiegt.

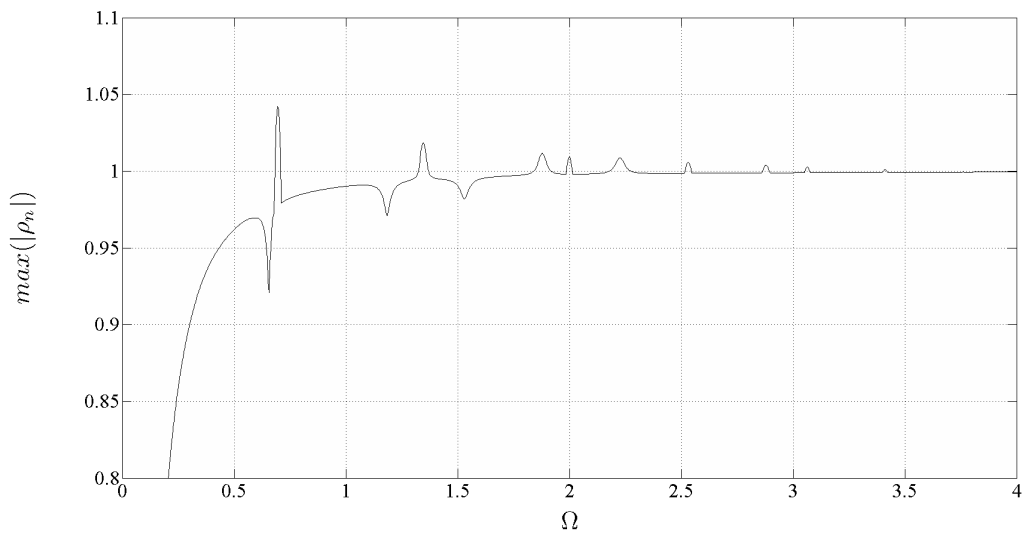
Zuvor aber tritt bei  $\varepsilon_s$  die bereits erwähnte Sättigung der Stabilität ein. Dafür kann es verschiedene Gründe geben. Möglicher Weise liegt dieser asymptotischen Näherung an einen konstanten Wert die Tatsache zu Grunde, dass  $\omega_{\text{Trans}}$  zwar mit  $\varepsilon$  steigt, ab einer be-

stimmten Frequenz aber mehr Energie in die höhere Quasimode übertragen wird, als in einer Viertelperiode des Energietransfers dissipiert werden kann. Diese Energie wird anschließend wieder in die höhere Mode transferiert. Vielleicht ergibt sich daher aus höherem  $\varepsilon$  kein Stabilitätsgewinn mehr. Unter Umständen wiegen auch Anteile der, durch die Parametererregung pro Zeiteinheit ins System eingebrachten, Energie die in gleicher Zeit dissipierte Energie auf. Erhöht man beispielsweise im vorliegenden Fall  $\varepsilon = 0.2$  auf  $0.3$ , so sinkt  $\max(|\rho_n|)$  um ungefähr 1%. Die Abklingzeiten sind in beiden Fällen vergleichbar (siehe **Bild 10.8** und **Bild 10.9**). Allein die maximale Energie des Systems steigt bei der Erhöhung auf  $\varepsilon = 0.3$  aber um 75%. Der gesamte Energieaufwand der Parametererregung steigt noch wesentlich stärker.

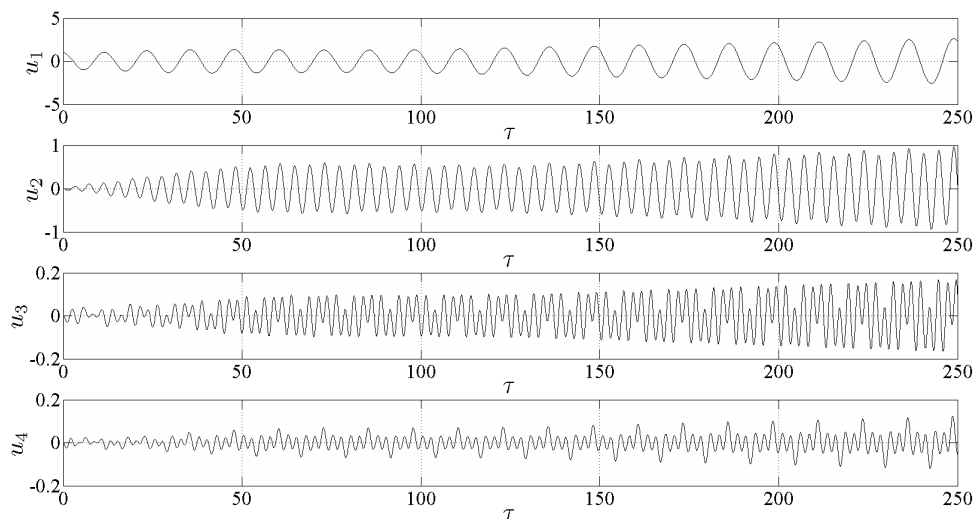


**Abbildung 10.5:** Wert des betragsmäßig größten Floquetmultiplikators  $\rho_n$  in Abhängigkeit von der Amplitude  $\varepsilon$  der Parametererregung

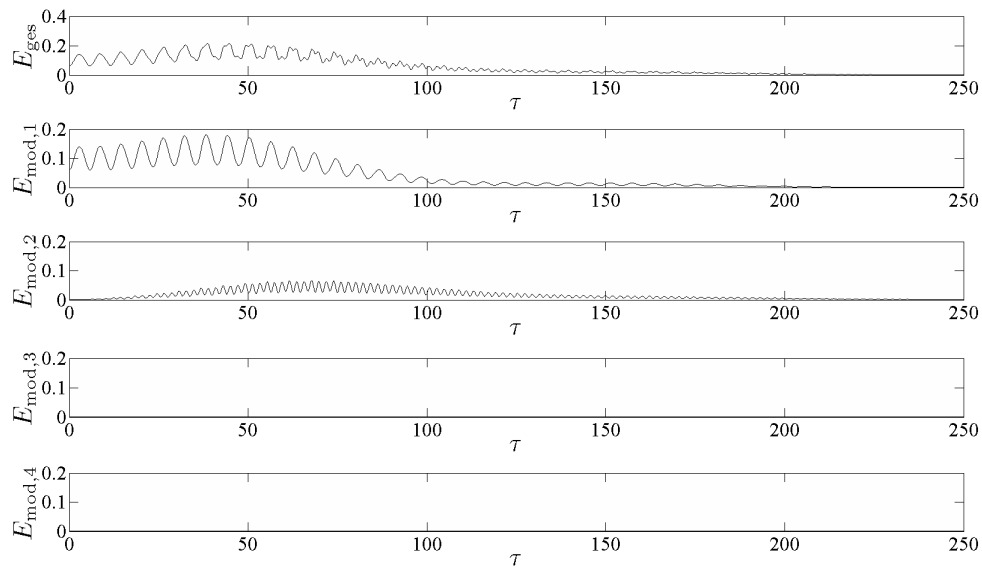




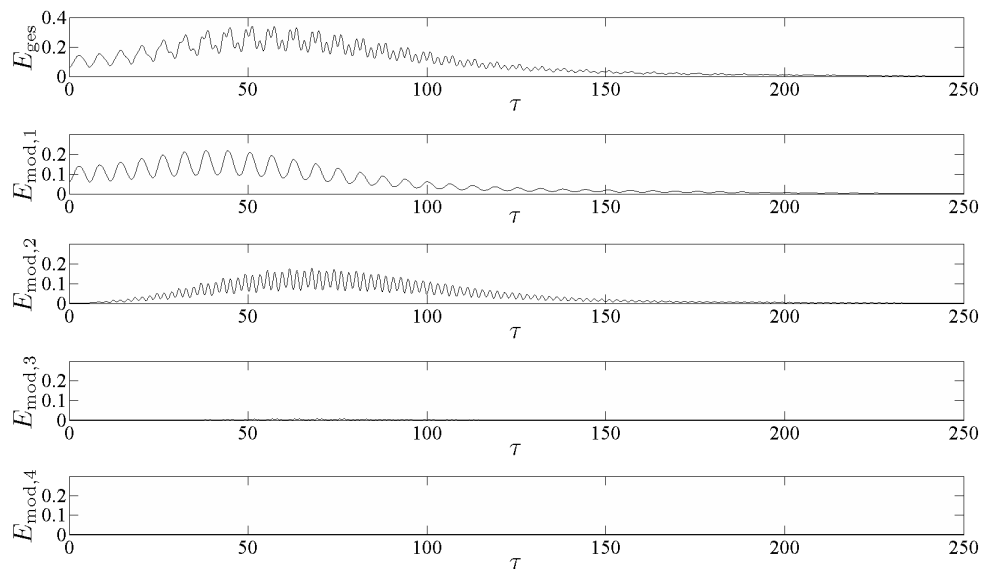
**Abbildung 10.6:** Wert des betragsmäßig größten Floquetmultiplikators  $\varrho_n$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $\Omega$  der Parametererregung bei  $\varepsilon = 0.2$



**Abbildung 10.7:** Zeitsimulation der quasimodalen Verdrehungen  $u_{1-4}$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{u} = [0, 1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  bei Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ ,  $\varepsilon = 0.4$



**Abbildung 10.8:** Gesamtenergie  $E_{\text{ges}}$  und in den einzelnen Quasimoden  $i = 1, 2, 3, 4$  gespeicherte Energie  $E_{\text{ges},i}$  aus einer Zeitsimulation des mit Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  erregten 4-FHG-Systems mit  $\varepsilon = 0.2$



**Abbildung 10.9:** Gesamtenergie  $E_{\text{ges}}$  und in den einzelnen Quasimoden  $i = 1, 2, 3, 4$  gespeicherte Energie  $E_{\text{ges},i}$  aus einer Zeitsimulation des mit Parametererregungsfrequenz  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  erregten 4-FHG-Systems mit  $\varepsilon = 0.3$

## 11 Fazit und Ausblick

Die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers konnte in Kapitel 5 und Kapitel 6 für einen Zweifreiheitsgrad-Drehschwinger nach Kapitel 2 mit beliebigem Parametersatz analytisch bestimmt werden. Die Restriktion hierbei war, dass für die Amplitude der Parametererregung gilt,  $\varepsilon \ll 1$ . Dabei ließ sich feststellen, dass diese Frequenz für sonst feste Parameter im Fall der Parametererregung über eine zeitabhängige Steifigkeit linear von der Amplitude  $\varepsilon$  der Parametererregung abhängt. Es konnte für ein solches System weiter gezeigt werden, dass  $\omega_{\text{Trans}}$  mit steigendem Verhältnis der Eigenfrequenzen des Zweifreiheitsgrad-Systems asymptotisch gegen Null geht. Des Weiteren wurde ersichtlich, dass wenn die Frequenz  $\Omega$  der Parametererregung geringfügig von  $\Omega_0$  mit  $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \sigma$  abweicht,  $\omega_{\text{Trans}}$  symmetrisch um  $\sigma = 0$  parabelförmig wächst. Für den Fall der Parametererregung über ein zeitabhängiges Massenträgheitsmoment ergab die Lösung des Differentialgleichungssystems des langsamen Teils der Schwingungen zwei geringfügig voneinander abweichende Frequenzen  $\omega_{\text{Trans},1}$  und  $\omega_{\text{Trans},2}$ . Die Frequenz der Energieübertragung hängt hier also von der Gewichtung der beiden Frequenzen und damit von den Anfangsbedingungen ab. Es wurde ebenfalls gezeigt, dass die Frequenz des Energietransfers  $\omega_{\text{Trans}} = f(\omega_{\text{Trans},1}(\varepsilon), \omega_{\text{Trans},2}(\varepsilon))$  linear von  $\varepsilon$  abhängt, solange sich  $\omega_{\text{Trans}}$  als Linearkombination von  $\omega_{\text{Trans},1}$  und  $\omega_{\text{Trans},2}$  bilden lässt. Auch für den Fall der Parametererregung über ein zeitabhängiges Massenträgheitsmoment wurden geringe Frequenzabweichungen der Parametererregung von der Parameterantiresonanzfrequenz  $\Omega_0$  untersucht und die Auswirkung auf  $\omega_{\text{Trans}}$  für eine bestimmte Klasse von Anfangswerten studiert. Hier zeigte sich auch eine parabelförmige Abhängigkeit der Frequenz des quasimodalen Energietransfers, allerdings ohne die Symmetrie bezüglich  $\sigma = 0$ .

Sämtliche in Kapitel 5 und Kapitel 6 gefundene analytische Ergebnisse konnten in Kapitel 7 numerisch validiert werden. Es wurde sowohl für die Parametererregung mit zeitabhängiger Steifigkeit, als auch für die mit zeitabhängigem Massenträgheitsmoment gezeigt, dass die Frequenz  $\omega_{\text{Trans}}$  des quasimodalen Energietransfers für kleine Werte von  $\varepsilon$  linear mit  $\varepsilon$  steigt. Für größere Werte steigt  $\omega_{\text{Trans}}$  überproportional mit  $\varepsilon$ . Es wurde für beide betrachtete Arten der Parametererregung die Schwingung der quasimodalen Verdrehungen für einen gewählten Parametersatz genähert und mit numerischen Simulationsergebnissen verglichen. Unterschiede in beiden Lösungen wurden sichtbar, blieben aber im Hinblick auf die Näherung gering. Bei Betrachtung kleiner Abweichungen der Frequenz  $\Omega$  der Parametererregung von  $\Omega_0$  um  $\sigma\varepsilon$  zeigte der Vergleich des numerischen und des analytischen Zusammenhangs zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon$  bei zeitabhängiger Steifigkeit geringere Abweichungen als bei zeitabhängigem Massenträgheitsmoment. Die Unterschiede lassen sich möglicherweise durch zu starke Verletzung der Restriktion  $\varepsilon \ll 1$  mit dem gewählten  $\varepsilon = 0.2$  erklären.

In Teil III konnte aufgrund der Entkopplung der parametererregten von allen übrigen Quasimoden die Ergebnisse des Zweifreiheitsgrad-Systems auf ein Mehrfreiheitsgrad-System aus beliebig vielen gekoppelten Drehschwingern übertragen werden. Die Anordnung der Körper ist dabei beliebig, solange die Parametererregung nur an einem Körper angreift. An die Bewegungsgleichungen wurde dann lediglich die Anforderung gestellt, dass sie so sortiert werden, dass der über der Zeit harmonisch variierte Term jeweils im ersten Eintrag der entsprechenden Matrizen steht. Die Frequenz des quasimodalen Energietransfers konnte sowohl für Parametererregung über zeitabhängige Steifigkeit als auch über zeitabhängiges Massenträgheitsmoment für beliebige Parameterantiresonanzen, d.h. für Kopplung zweier beliebiger Quasimoden analytisch berechnet werden.

Es konnte dann in Kapitel 9 auch die Frequenz  $\omega_{\text{Trans,D}}$  des Energietransfers für ein Mehrfreiheitsgrad-System mit Dämpfung für den Fall der Parametererregung über eine zeitabhängige Steifigkeit bestimmt werden. Hier zeigte sich, dass die Frequenzen für den gedämpften Fall näherungsweise die gleichen Werte annehmen, wie im ungedämpften, d.h., dass gilt  $\omega_{\text{Trans,D}} \approx \omega_{\text{Trans}}$ .

---

Die gefundenen Lösungen wurden für einen speziellen Parametersatz in Kapitel 10 numerisch validiert. Dabei ließ sich über Berechnung der Floquetmultiplikatoren bei Variation von  $\varepsilon$  zeigen, dass die Stabilität des Systems für  $\varepsilon \ll 1$  tatsächlich konstant ist und für große  $\varepsilon$  auch gegen einen konstanten Wert strebt.

Viele reale Systeme des Maschinenbaus lassen sich über ein Mehrfreiheitsgrad-Modell wie in Kapitel 8 abbilden. Dazu zählen Antriebsstränge aller Art, zum Beispiel bei Walzanlagen in verschiedensten Bereichen. Die Parametervariation kann hierbei als Steuerung auf den Motor aufgebracht werden. Beispielsweise kann hierfür eine bereits bestehende Regelung des Motors genutzt werden und die Verstärkungen der zurückgeführten Zustandsgrößen periodisch variiert werden [6]. Alle Ergebnisse dieser Arbeit können dann beim Verständnis des Verhaltens des Systems helfen.

Obwohl wesentliche Fragen zum physikalische Mechanismus der Parameterantiresonanz durch die Arbeit beantwortet werden, bleiben einige Fragen offen. Die Möglichkeit einer analytischen Berechnung einer optimalen Amplitude  $\varepsilon$  der Parametererregung bezüglich der maximaler Stabilität oder gar eines Kosten/Nutzen-Verhältnisses kann mit der Restriktion  $\varepsilon \ll 1$  beispielsweise nicht erfolgen. Die Frage nach einer wirtschaftlich sinnvollen Amplitude der Parametererregung ist aber bei der Dimensionierung eines realen Systems von zentraler Bedeutung. Wenn diese Frage analytisch nicht geklärt werden kann, dann ist es sinnvoll zumindest numerische Studien für größere  $\varepsilon$  durchzuführen - auch um die in Kapitel 10 gemachten Interpretationen des Verlaufs für  $\max(|\rho|)$  zu überprüfen. Von Interesse wäre auch der physikalisch-experimentelle Nachweis der hier gezeigten Ergebnisse. Zudem sollten Systeme untersucht werden, bei denen Steifigkeit und Massenträgheitsmoment gleichzeitig oder auch Parameter der Elemente zwischen den Körpern variiert werden.

## Anhang

### A Identitäten von Produkten trigonometrischer Funktionen

Aus den Additionstheoremen (siehe bspw. [11]) können folgende Zusammenhänge gebildet werden:

Produkte von Funktionen mit gleichem Argument

$$\sin^2(\omega_i \tau) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega_i \tau))$$

$$\sin(\omega_i \tau) \cos(\omega_i \tau) = \frac{1}{2} \cos(2\omega_i \tau)$$

$$\cos^2(\omega_i \tau) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega_i \tau))$$

Produkte von Funktionen mit unterschiedlichem Argument

$$\begin{aligned}\sin(\omega_i) \sin(\omega_j) &= \frac{1}{2} [\cos((\omega_i - \omega_j) \tau) - \cos((\omega_i + \omega_j) \tau)] \\ &= \cos\left(\frac{|\omega_i - \omega_j|}{2} \tau\right) \sin\left(\frac{\omega_i - \omega_j}{2} \tau\right)\end{aligned}$$

$$\sin(\omega_i) \cos(\omega_j) = \frac{1}{2} [(\sin((\omega_i - \omega_j) \tau) + \sin((\omega_i + \omega_j) \tau))]$$

$$\begin{aligned}\cos(\omega_i) \cos(\omega_j) &= \frac{1}{2} [(\cos((\omega_i - \omega_j) \tau) + \cos((\omega_i + \omega_j) \tau))] \\ &= \cos\left(\frac{|\omega_i - \omega_j|}{2} \tau\right) \cos\left(\frac{\omega_i - \omega_j}{2} \tau\right)\end{aligned}$$

## B Hilbert-Transformation

Die Hilbert-Transformierte  $\mathcal{H}\{x(t)\}$  eines reell- oder komplexwertigen Zeitsignals  $x(t)$  ist definiert [8] als

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t^*)}{t - t^*} dt^*.$$

Eine wesentliche Eigenschaft der Hilbert-Transformation ist die Filterung. Ist  $x(t)$  das Produkt zweier Zeitsignale  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ , so gilt

$$\mathcal{H}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{H}\{x_1(t)\} * x_2(t) = x_1(t) * \mathcal{H}\{x_2(t)\},$$

mit  $*$  als Faltungsoperator. Sind  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  harmonisch, so lässt sich durch geeignete Wahl eines Beobachtungszeitpunktes  $t_0$  das Signal  $x(t)$  immer darstellen als

$$x(t) = x_1(t)x_2(t) = A_1c_1A_2c_2.$$

mit den Abkürzungen  $A_1c_1 = A_1 \cos(\Omega_1 t + \psi)$  und  $A_2c_2 = A_2 \cos(\Omega_2 t)$ . Weil die Hilbert-Transformierte von  $\cos(\alpha)$  die harmonische Funktion  $\sin(\alpha)$  ist, lässt sich das Teilsignal  $x_1$  des Zeitsignal  $x(t)$  berechnen über

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathcal{H}\{x(t)\}^2 + x(t)^2} \\ &= \sqrt{(x_1(t) * \mathcal{H}\{x_2(t)\})^2 + x(t)^2} \\ &= \sqrt{(A_1c_1 * A_2s_2)^2 + A_1^2c_1^2A_2^2c_2^2} \\ &= \sqrt{A_1^2c_1^2} \\ &= x_1(t). \end{aligned}$$



## Literaturverzeichnis

- [1] ABADI: *Nonlinear Dynamics of Self-excitation in Autoparametric Systems*. Dissertation, Utrecht University, Utrecht, 2003
- [2] CARTMELL, M.: *Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations*. London : Chapman and Hall, 1990
- [3] DOHNAL, F.: *Damping of Mechanical Vibrations by Parametric Excitation*. Saarbrücken : Südwestdeutscher Verlag für Hochschulschriften, 2009
- [4] ECKER, H.: *Suppression of Self-excited Vibrations in Mechanical Systems by Parametric Stiffness Excitation*. Wien : ARGESIM, 2005
- [5] ECKER, H.: *Parametric Excitation in Engineering Systems*. In : Proceedings of COBEM, Gramado, RS, Brasilien, 2009
- [6] ECKER, H. ; PUMHÖSSL, T.: *Vibration Suppression and Energy Transfer by Parametric Excitation in Drive Systems*. In : Proceedings IMechE Part C, J Mechanical Engineering Science 226(8), 2012
- [7] ECKER, H. ; PUMHÖSSL, T.: *Energy Transfer in Time-periodic Systems near Parametric Anti-resonances*. In : Proceedings 1st EUROMECH Colloquium 532 on Time-periodic Systems, Darmstadt, 2012
- [8] GIROD, B. ; RABENSTEIN, R. ; STENGER, A. K. E.: *Einführung in die Systemtheorie: Signale und Systeme in der Elektrotechnik und Informationstechnik*. 4. Auflage. Wiesbaden : Teuber Verlag, 2007

- 
- [9] KNIFFKA, T. ; WELTE, J. ; ECKER, H.: *Stability Analysis of a Time-periodic 2-dof MEMS Structure*. In : Proceedings ICNPAA 2012 9th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, im Druck, Wien, 2012
- [10] NAYFEH, A. H. ; BALACHANDRAN, B.: *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*. Wiley Series in Nonlinear Science, 1995
- [11] PALAND, E.-G.: *Technisches Taschenbuch*. 7., veränderter Nachdruck. Herzogenaurach : Schaeffler KG, 2002
- [12] SILVA, C. W.: *Vibration: fundamentals and practice*. New York : CRC Press, 2000
- [13] TONDL, A.: *To the Problem of Quenching Self-excited Vibrations*. Acta Technica CSAV 43, 1998
- [14] VERHULST, F.: *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. 2. Auflage. Berlin : Springer, 2000
- [15] WELTE, J.: *Parametric Excitation in Microelectromechanical Systems (MEMS)*. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, Wien, 2012