

DIPLOMARBEIT

Numerische Untersuchung des Nachlaufs einer angeströmten horizontalen Platte bei gemischter Konvektion

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Mag.rer.nat. Dr.techn. Herbert Steinrück
E322

Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Bernhard Kotesovec
e0225098
A-1130 Wien Pallenbergstraße 35

Wien, im Jänner 2008

Inhaltsverzeichnis

I. Problemstellung	1
1. Problemstellung	1
1.1. Selbstinduzierte Nachlaufneigung	2
1.2. Externes Hindernis	3
2. Grenzschichtgleichungen für die Nachlaufströmung	4
II. Selbstinduzierte Nachlaufneigung	7
3. Potentialströmung	7
4. Diskretisierung	8
4.1. Netz	9
4.2. Differentialgleichungssystem	10
4.3. Numerische Berechnung der auftretenden Integrale	13
5. Iteratives Verfahren	15
5.1. Lösungsstrategie	15
5.2. Konvergenzverhalten	16
6. Beschleunigtes Verfahren	18
6.1. Lösungsstrategie	18
6.2. Algorithmische Umsetzung	19
6.3. Verhalten des Algorithmus	22
7. Ergebnisse	24
7.1. Potentialströmung	24
7.2. Nachlaufströmung	26

III. Nachlaufneigung durch Hindernis	31
8. Potentialströmung	31
8.1. Lösungsstrategie	35
9. Ergebnisse	37
9.1. Potentialströmung	37
9.2. Nachlaufströmung	39
10. Zusammenfassung	41
Anhang	42
Abbildungsverzeichnis	42
Symbolverzeichnis	43
Literaturverzeichnis	45

Teil I.

Problemstellung

1. Problemstellung

Eine dünne, ebene Platte (siehe Abbildung 1) der Länge \tilde{L} sei unter einem kleinen Winkel ϕ von einer parallelen Strömung konstanter Geschwindigkeit \tilde{U}_∞ und Temperatur \tilde{T}_∞ angeströmt. Die Platte habe konstante Temperatur \tilde{T}_P und sei horizontal angebracht, wodurch die Erdbeschleunigung \tilde{g} normal zur Platte wirkt.

In der folgenden Arbeit werden laminare Strömungen mit großer Reynoldszahl

$$Re = \frac{\tilde{L}\tilde{U}_\infty}{\tilde{\nu}} \quad (1)$$

untersucht, wobei $\tilde{\nu}$ die kinematische Viskosität des Fluids bezeichnet.

Der Einfluss des Auftriebs kann durch den Auftriebsparameter

$$K = Gr \cdot Re^{-5/2} \quad (2)$$

charakterisiert werden, welcher unter Verwendung der Reynoldszahl (1) sowie der Grashofzahl

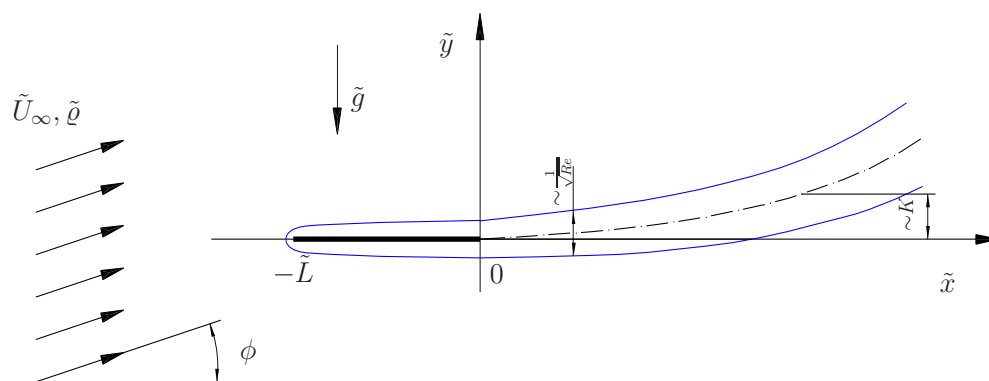


Abbildung 1: Nachlauf einer beheizten Platte bei gemischter Konvektion

$$Gr = \frac{\tilde{g} \cdot \tilde{\beta} \cdot (\tilde{T}_P - \tilde{T}_\infty) \cdot \tilde{L}^3}{\tilde{\nu}^2} \quad (3)$$

definiert ist. Dabei bezeichnet $\tilde{\beta}$ den isothermen Ausdehnungskoeffizient des strömenden Mediums. Im Weiteren werden die beiden reskalierten, dimensionslosen Parameter

$$\kappa = K \cdot Re^{1/4} \quad (4)$$

und

$$\lambda = \phi \cdot K \cdot Re^{1/2} \quad (5)$$

verwendet (vergleiche [SS05]). Der reduzierte Auftriebsparameter κ ist ein Maß für die hydrostatische Druckdifferenz zwischen der Unter- und der Oberseite des Nachlaufs, während λ den Einfluss des Auftriebs auf den Selben charakterisiert.

Wie in Abschnitt 2 beschrieben, kann das Strömungsfeld durch drei unabhängige dimensionslose Parameter Pr , κ und λ festgelegt werden. Wobei die Prandtlzahl Pr unter Verwendung der Dichte $\tilde{\varrho}$, der isobaren Wärmekapazität \tilde{c}_p sowie der Wärmeleitfähigkeit \tilde{k} durch

$$Pr = \frac{\tilde{\varrho} \cdot \tilde{c}_p \cdot \tilde{\nu}}{\tilde{k}} \quad (6)$$

definiert ist.

1.1. Selbstinduzierte Nachlaufneigung

Aufgrund der vorliegenden, großen Reynoldszahlen ist es möglich, die Strömung in eine wandnahe, viskose Grenzschichtströmung und eine reibungsfreie Außenströmung, eine Potentialströmung, zu unterteilen. Dabei gibt die Potentialströmung die Lage des Nachlaufs vor und die Grenzschicht dient zur Erfüllung der Haftbedingung an der Platte und zur Berechnung der Nachlaufdelle. Allerdings wirkt die Temperaturverteilung der Nachlaufdelle bei der selbstinduzierten Problemstellung auf die Potentialströmung zurück, wodurch die Lage der Nachlaufdelle von deren Temperaturprofil abhängt.

Zur Lösung der systembeschreibenden Gleichungen aus Abschnitt 2 kann, bei vorgegebenen Parametern, ein iteratives, numerisches Verfahren eingesetzt werden, in dem abwechselnd die Nachlaufströmung beziehungsweise

die Potentialströmung berechnet wird (siehe Kapitel 5). Wird bei konstanter Prandtlzahl $Pr = 0.71$ (Luft) und vorgegebenem $\lambda = 1$ der verbleibende freie Parameter κ variiert, zeigt sich, dass für $\kappa > 0.914$ mit diesem Verfahren keine Konvergenz erreicht werden kann (siehe [SS05]).

Allerdings sind Parameterkombinationen mit gleicher Größenordnung von λ und κ von besonderem Interesse, da in diesem Fall Singularitäten des Strömungsfeldes auftreten. In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten des iterativen, numerischen Verfahrens untersucht um andere Lösungsverfahren zu entwickeln, welche zu einer näheren Beschreibung der auftretenden Singularitäten beitragen sollen.

1.2. Externes Hindernis

Die numerischen Ergebnisse, welche aus der selbstinduzierten Problemstellung ermittelt werden, geben Anlass zur Vermutung, dass ein kritischer Parameterwert $\kappa = \kappa_c(\lambda)$ existiert, sodass an einer Stelle ($x_c > 0$) die horizontale Geschwindigkeitskomponente $\bar{u}_w(x, 0)$ an der Mittellinie des Nachlaufs verschwindet. Aufgrund numerischer Schwierigkeiten ist es nicht möglich diesen kritischen Wert hinreichend genau zu nähern. Die minimal erzielbare "Mittengeschwindigkeit" beträgt $\bar{u}_w(x_c, 0) = 0.410 \dots$

Um das Verhalten bei verschwindender "Mittengeschwindigkeit" $\bar{u}_w(x, 0)$ dennoch untersuchen zu können, wird eine vereinfachte Problemstellung betrachtet. Dazu wird angenommen, dass die Neigung des Nachlaufs nicht durch dessen Temperaturverteilung selbst induziert wird, sondern durch ein zusätzliches Hindernis extern vorgegeben ist. Die Parameter κ und λ werden hier so gewählt, dass in führender Ordnung die Nachlaufneigung ausschließlich vom Hindernis bestimmt wird. Dieses Hindernis sei jedoch so gewählt, dass wiederum eine Stelle existiert, an der die "Mittengeschwindigkeit" verschwindet.

Durch die fehlende Rückwirkung der Grenzschichtgleichungen auf die Potentialströmung ist dieses Problem mit dem in dieser Arbeit vorgestellten iterativen, numerischen Verfahren lösbar. So können, bei geeignet vorgegebener Neigung der Nachlaufdelle, aus den Lösungen der Grenzschichtgleichungen Rückschlüsse auf die Singularitäten des selbstinduzierten Problems gezogen werden.

2. Grenzschichtgleichungen für die Nachlaufströmung

Zur mathematischen Beschreibung wird ein zweidimensionales Strömungsfeld betrachtet (siehe Abbildung 1). Der Ursprung des Koordinatensystems wird an der Hinterkante der Platte festgelegt und sämtliche Längen werden mit Hilfe der Plattenlänge \tilde{L} dimensionslos gemacht. Alle auftretenden Geschwindigkeiten werden auf die Geschwindigkeit \tilde{U}_∞ der aufgebrachten Parallelströmung bezogen und alle Temperaturen mit der Differenz zwischen Platten- und Umgebungstemperatur ($\tilde{T}_P - \tilde{T}_\infty$) dimensionslos dargestellt

$$x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}}, \quad u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}_\infty}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}_\infty}, \quad \theta = \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_P - \tilde{T}_\infty}, \quad (7)$$

wobei im Folgenden u für die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der x -Koordinate und v für die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der y -Koordinate verwendet wird. Im Fall großer Reynoldszahlen kann die Strömung im Nachlauf analog zur Platte in eine äußere Potentialströmung und eine Grenzschichtströmung unterteilt werden (siehe [SG00] und [S00]). Dabei wird entlang der Körperkontur sowie entlang der Mittellinie $y = y_w(x)$ des Nachlaufs eine mit der Wurzel der Reynoldszahl skalierte vertikale Grenzschichtkoordinate

$$\bar{y} = (y - y_w(x)) \cdot \sqrt{\text{Re}} \quad (8)$$

eingeführt und alle auftretenden Größen entsprechend skaliert (siehe [SS05]). Es ist zu beachten, dass der Verlauf der Grenzschichtmittellinie nur entlang der Platte vorgegeben ist und im Nachlauf erst durch die äußere Potentialströmung bestimmt wird. Der Verlauf der Nachlaufmittellinie wird auf den Anströmwinkel bezogen

$$\bar{y}_w(x) = \frac{y_w(x)}{\phi}. \quad (9)$$

Die vertikale Geschwindigkeitskomponente

$$\bar{v}_w(x, \bar{y}) = (v - u(x, y_w(x)) \cdot K \cdot \bar{y}'_w) \cdot \sqrt{\text{Re}} \quad (10)$$

wird relativ zur vertikalen Geschwindigkeit der Mittellinie betrachtet und ebenfalls mit der Wurzel der Reynoldszahl skaliert. Die horizontale Ge-

schwindigkeitskomponente

$$\bar{u}_w(x, \bar{y}) = u(x, y), \quad (11)$$

sowie die Temperatur

$$\bar{\theta}_w(x, \bar{y}) = \theta(x, y) \quad (12)$$

bleiben unverändert und der Druck

$$\bar{p}_w(x, \bar{y}) = \frac{p(x, y)}{K} \quad (13)$$

wird mit dem Auftriebsparameter K aus (2) skaliert. Wobei \bar{y}'_w in (10) die skalierte Steigung der Mittellinie bezeichnet. Weiters wird, um das Verhalten stromab, darzustellen eine neue Variable

$$\eta = \bar{y} \cdot (x + 1)^{-2/5} \quad (14)$$

eingeführt und damit eine skalierte Stromfunktion

$$F(x, \eta) = (x + 1)^{-3/5} \Psi \quad (15)$$

sowie eine Temperaturfunktion

$$D(x, \eta) = (x + 1)^{3/5} \bar{\theta}_w \quad (16)$$

definiert. Wobei

$$\Psi_{\bar{y}} = u, \quad \Psi_x = -v \quad (17)$$

die unskalierte Stromfunktion für die Geschwindigkeiten u und v darstellt.

Aus der Boussinesq Approximation der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung, der Kontinuitätsgleichung sowie der Erhaltungsgleichung für die Energie ergibt sich unter Verwendung der bereits in (4) und (5) definierten Parametern κ und λ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_{\eta\eta\eta} + \frac{3}{5}F_{\eta\eta}F - \frac{1}{5}(F_{\eta})^2 + \lambda \cdot \bar{y}'_w(x) \cdot D &= (x + 1)(F_{\eta}F_{\eta x} - F_{\eta\eta}F_x), \\ \frac{1}{\text{Pr}}D_{\eta\eta} + \frac{3}{5}(F \cdot D)_{\eta} &= (x + 1)(F_{\eta}D_x - D_{\eta}F_x) \end{aligned} \quad (18)$$

für die Nachlaufströmung (Herleitung siehe [SS05]). Die zugehörigen Randbedingungen für $x > 0$ lauten

$$\begin{aligned} F(x, 0) = F_{\eta\eta}(x, 0) = D_{\eta}(x, 0) = D(x, \infty) &= 0, \\ F_{\eta}(x, \infty) &= \frac{1}{(x + 1)^{1/5}}, \\ F(0, \eta) = F_B(\eta), \quad D(0, \eta) &= D_B(\eta). \end{aligned} \quad (19)$$

Dabei stellen die Indizes x und η die entsprechenden partiellen Ableitungen dar. F_B ist Lösung der Blasiusgleichung

$$\begin{aligned} 2F_{B\eta\eta\eta} + F_B \cdot F_{B\eta\eta} &= 0, & F_B(0) = F'_B(0) &= 0, & F'_B(\infty) &= 1, \\ \frac{2}{\text{Pr}} D_{B\eta\eta} + F_B \cdot D_{B\eta} &= 0, & D_B(0) &= 1, & D_B(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

und D_B jene der entsprechenden Ähnlichkeitsgleichung für das Temperaturprofil einer erzwungenen Konvektionsgrenzschichtströmung. Diese Lösungen werden an der Hinterkante der Platte als Randbedingung der Nachlaufströmung vorgegeben.

Einzig die Steigung der Nachlaufmittellinie \bar{y}'_w in Gleichungssystem (18) ist noch unbekannt und wird durch die Außenströmung festgelegt. Diese Außenströmung ist eine Potentialströmung und wird für die beiden betrachteten Aufgabenstellungen in den Kapiteln 3 und 8 behandelt.

Teil II.

Selbstinduzierte Nachlaufneigung

3. Potentialströmung

Beim selbstinduzierten Problem wird die Nachlaufneigung in führender Ordnung von der Temperaturverteilung des Nachlaufs bestimmt. Die Temperaturverteilung in der Grenzschichtströmung bestimmt die vertikale Druckdifferenz über den Nachlauf, welche in der Außenströmung einem Drucksprung entspricht. Zur Modellierung des Drucksprungs im Rahmen der Potentialtheorie wird eine Wirbelbelegung

$$\gamma_w(x) = \bar{p}_w(x, \infty) - \bar{p}_w(x, -\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_w d\bar{y} \quad (21)$$

entlang der positiven x -Achse eingesetzt (siehe Abbildung 2). Um die Tangentialbedingung an der Platte zu erfüllen, ist es außerdem nötig die Platte mit einer Wirbelbelegung $\gamma_p(x)$ zu versehen, welche aus der Wirbelbelegung des Nachlaufs $\gamma_w(x)$ bestimmt werden kann. Mit dem Ansatz

$$u - iv \sim 1 - i \cdot \phi \sqrt{\frac{z}{z+1}} + K(u_1 - iv_1) \quad (22)$$

wird neben der Anströmung unter dem Winkel ϕ auch eine Geschwindigkeitsstörung in erster Ordnung des Auftriebsparameters berücksichtigt. Hier

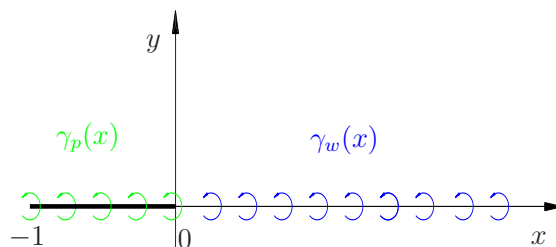


Abbildung 2: Modellierung durch Wirbelbelegungen

wird, wie bei Potentialströmungen üblich [S78], das Geschwindigkeitsfeld als komplexwertige Funktion der komplexen Ortsvariable $z = x + iy$ aufgefasst. Die Funktion

$$-i \cdot \phi \sqrt{\frac{z}{z+1}} \quad (23)$$

entspricht dabei der Störung des Geschwindigkeitsfelds durch den Anstellwinkel ϕ . Das Geschwindigkeitsfeld (u_1, v_1) steht für die durch den thermischen Auftrieb verursachten Geschwindigkeitsstörung der Potentialströmung. Mit Hilfe dieses Ansatzes kann die vertikale Geschwindigkeitskomponente

$$v_1(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \oint_0^\infty \frac{\gamma_w(\xi)}{x-\xi} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi}} d\xi \quad (24)$$

an der Nachlaufmittellinie und somit deren Steigung

$$\bar{y}'_w(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\kappa^2}{\lambda} v_1(x) \quad (25)$$

bestimmt werden (siehe [SS05] sowie [S78]). Hier und im Folgenden ist bei Polstellen des Integranden im Integrationsintervall das Integral durch den Cauchyschen Hauptwert zu ersetzen.

Zur Bestimmung des Strömungs- und Temperaturfeldes ist das Gleichungssystem (18) mit den zugehörigen Randbedingungen (19) sowie den Gleichungen (25) und (24) zu lösen. Da eine analytische Lösung des nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungssystems, insbesondere aufgrund der singulären Integralgleichung, nicht möglich ist, sind numerische Lösungsverfahren anzuwenden.

4. Diskretisierung

Da es numerisch nicht möglich ist das Gleichungssystem (18) auf einem unendlich ausgedehnten Integrationsgebiet zu lösen, ist eine Beschränkung auf ein endliches Gebiet erforderlich. Dabei ist es notwendig das Integrationsgebiet so groß zu wählen, dass in vertikaler Richtung die Temperatur- sowie Geschwindigkeitsstörungen der Grenzschicht abgeklungen sind und in horizontaler Richtung die Druckdifferenz über den Nachlauf und somit dessen Wirbelbelegung verschwindet. Dies ist nötig, da über die vertikale

Geschwindigkeitsstörung v_1 aus (24) eine Rückwirkung der gesamten Wirbelbelegung auf die Grenzschicht erfolgt. Da aufgrund analytischer Untersuchungen (siehe [SS05]) ein sehr langsames Einstellen des asymptotischen Zustandes erwartet wird (proportional $x^{-1/5}$), ist das Integrationsgebiet in horizontaler Richtung weit auszudehnen.

4.1. Netz

Zur numerischen Behandlung ist es nötig die kontinuierlichen Raumkoordinaten x und η innerhalb des Integrationsgebiets in diskrete Gitterpunktkoordinaten einzuteilen. Die x -Gradienten der Lösungen nehmen mit der Entfernung zur Plattenhinterkante stark ab und so ist es zweckmäßig ein Netz zu wählen, bei dem die horizontale Schrittweite mit zunehmenden Abstand zur Hinterkante anwächst. Dies ermöglicht, trotz vertretbarer Problemgröße, hohe Auflösungen im Bereich großer Gradienten.

Des Weiteren ist darauf zu achten, dass die horizontale Erstreckung der ersten Zelle Δx_0 nicht zu klein gewählt wird, da an der Hinterkante Singularitäten auftreten, welche die Gültigkeit der betrachteten Gleichungen einschränken (siehe [SS07]).

Da die Lösungen für Geschwindigkeits- sowie Temperaturverteilung der Grenzschicht symmetrisch um die Mittellinie verlaufen wird im folgenden ausschließlich der obere Teil ($\eta > 0$) der Grenzschicht betrachtet. Sämtlich Ergebnisse der unteren Seite ($\eta < 0$) können durch Spiegelung der für die Oberseite gewonnenen Ergebnisse ermittelt werden.

Diesen Überlegungen folgend, wurden die Knotenpunktkoordinaten des Netzes zu

$$\begin{aligned} x_n &= \Delta x_0 \frac{f^n - 1}{f - 1} && \text{für } n = 0, \dots, N_x - 1 \text{ und} \\ \eta_m &= m \cdot \Delta \eta && \text{für } m = 0, \dots, N_\eta - 1 \end{aligned} \quad (26)$$

festgelegt. Dabei bezeichnet f den Streckungsfaktor je horizontaler Schrittweite, das Paar (x_n, η_m) die Koordinaten der Knotenpunkte und N_x beziehungsweise N_η die Anzahl der Knotenpunkte in x - beziehungsweise η -Richtung. Alle numerischen Berechnungen dieser Arbeit werden mit einem Gitter durchgeführt, welches durch

Δx_0	$\Delta \eta$	f	N_x	N_η	N
10^{-7}	$\frac{15}{449} = 3.34.. \cdot 10^{-2}$	1.01	4500	450	$2.025 \cdot 10^6$

charakterisiert ist. $N = N_x \cdot N_\eta$ gibt dabei die Gesamtzahl der Knotenpunkte an.

Dieses Gitter wird gewählt, da die Gitterabhängigkeit für die getesteten Parameterwerte $\kappa = 0.9$, $\lambda = 1$ und $Pr = 0.71$ ausreichend klein ist. Nahe den kritischen Parameterwerten für singuläre Lösungen (siehe Teil III) ist aufgrund der großen Gradienten eine deutliche Abhängigkeit von der Schrittweite in x -Richtung zu erkennen. In diesem Bereich sind allerdings weniger die zahlmäßigen Ergebnisse als das grundsätzliche Verhalten der Lösung von Belang.

4.2. Differentialgleichungssystem

Zur numerischen Behandlung ist das nichtlineare Differentialgleichungssystem (18) und dessen Randbedingungen (19) durch ein algebraisches Gleichungssystem für die Werte von Stromfunktion $F(x_n, \eta_m)$ und Temperaturfunktion $D(x_n, \eta_m)$ an den Gitterpunkten (siehe Abschnitt 4) zu nähern. Um den ähnlichen Aufbau der beiden Gleichungen auszunutzen, wird anstelle der Temperaturfunktion D eine Funktion $G = G(x, \eta)$ definiert, deren partielle Ableitung nach η

$$\frac{\partial G(x, \eta)}{\partial \eta} = D(x, \eta) \quad (27)$$

der Temperaturfunktion entspricht. Da die Funktion $G(x, \eta)$ mit dieser Definition nicht eindeutig bestimmt ist, wird $G(x, 0) = 0$ gesetzt. Diese Festlegung ist sinnvoll, da das bei der Berechnung der Wirbelbelegung in Gleichung (21) auftretende uneigentliche Integral einfacher bestimmt werden kann (siehe Kapitel 4.3).

Das zu diskretisierende Differentialgleichungssystem wird unter Verwendung von (27) zu

$$\begin{aligned} F_{\eta\eta\eta} + \frac{3}{5}F_{\eta\eta}F - \frac{1}{5}(F_\eta)^2 + \lambda \cdot \bar{y}'_w(x) \cdot G_\eta &= (x+1)(F_\eta F_{\eta x} - F_{\eta\eta} F_x), \\ \frac{1}{Pr}G_{\eta\eta\eta} + \frac{3}{5}FG_{\eta\eta} + \frac{3}{5}F_\eta G_\eta &= (x+1)(F_\eta D_{x\eta} - D_{\eta\eta} F_x). \end{aligned} \quad (28)$$

Die zugehörigen Randbedingungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} F(x, 0) = F_{\eta\eta}(x, 0) = 0, & & F_\eta(x, \infty) = \frac{1}{(x+1)^{1/5}}, \\ G(x, 0) = G_{\eta\eta}(x, 0) = G_\eta(x, \infty) = 0, & & \\ F(0, \eta) = F_B(\eta), & & G(0, \eta) = G_B(\eta), \end{aligned} \quad (29)$$

wobei $G_B(\eta)$ der nach Definition (27) transformierten Blasiusgleichung (20)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\text{Pr}} \cdot G_{B\eta\eta\eta} + F_B \cdot G_{B\eta\eta} &= 0, \\ G_{B\eta}(0) = 1, \quad G_B(0) = 0, \quad G_{B\eta}(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

entspricht.

Alle auftretenden partiellen Ableitungen in Richtung der x -Koordinate werden für $n = 1 \dots Nx - 1$ und $m = 0 \dots N_\eta - 2$, wie in Abschnitt 5.1 begründet, mit Rückwärtsdifferenzenquotienten erster Ordnung

$$F_x \left(x_n, \eta_m + \frac{\Delta\eta}{2} \right) \approx \frac{F_n^m + F_n^{m+1} - F_{n-1}^m - F_{n-1}^{m+1}}{2(x_n - x_{n-1})} \quad (31)$$

diskretisiert. Die partiellen Ableitungen in Richtung der η -Koordinate werden durch symmetrische Differenzenquotienten 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \text{für } n = 0 \dots Nx - 1 \text{ und } m = 1 \dots n \dots N_\eta - 2 \text{ durch} \\ F \left(x_n, \eta_m + \frac{\Delta\eta}{2} \right) &\approx \frac{F_n^m + F_n^{m-1}}{2}, \\ F_\eta \left(x_n, \eta_m + \frac{\Delta\eta}{2} \right) &\approx \frac{F_n^m - F_n^{m-1}}{\Delta\eta}, \end{aligned} \quad (32)$$

sowie für $n = 0 \dots Nx - 1$ und $m = 1 \dots n \dots N_\eta - 3$ durch

$$\begin{aligned} F_{\eta\eta} \left(x_n, \eta_m + \frac{\Delta\eta}{2} \right) &\approx \frac{F_n^{m+2} - F_n^{m+1} - F_n^m + F_n^{m-1}}{2\Delta\eta^2}, \\ F_{\eta\eta\eta} \left(x_n, \eta_m + \frac{\Delta\eta}{2} \right) &\approx \frac{F_n^{m+2} - 3F_n^{m+1} + 3F_n^m - F_n^{m-1}}{\Delta\eta^3} \end{aligned} \quad (33)$$

beschrieben. Zur kompakteren Schreibweise ist hier und im Folgenden von der Abkürzung $F_m^n = F(x_n, \eta_m)$ Gebrauch gemacht. Zur Diskretisierung der Funktion $G(x, \eta)$ werden die gleichen Differenzenquotienten wie für die skalierte Stromfunktion $F(x, \eta)$ eingesetzt.

Durch dieses Diskretisierungsverfahren entsteht ein System aus $2N_x N_\eta$, größtenteils nichtlinearen, Gleichungen (34)-(38) für die Werte von F und G an den Gitterpunkten. Die Randbedingungen und $\eta = 0$ sowie $\eta = \infty$ werden dabei für $x > 0$ durch einseitige Differenzenquotienten zweiter Ordnung für $n = 1 \dots N_x$

$$\begin{aligned}
0 &= F_0^n, \\
0 &= 2F_0^n - 5F_1^n + 4F_2^n - F_3^n, \\
0 &= \frac{3}{2}F_{N_\eta-1}^n - 2F_{N_\eta-2}^n + \frac{1}{2}F_{N_\eta-3}^n - (x_n + 1)^{-1/5}, \\
0 &= G_0^n, \\
0 &= 2G_0^n - 5G_1^n + 4G_2^n - G_3^n, \\
0 &= \frac{3}{2}G_{N_\eta-1}^n - 2G_{N_\eta-2}^n + \frac{1}{2}G_{N_\eta-3}^n
\end{aligned} \tag{34}$$

dargestellt ($6N_x - 6$ Gleichungen). Für $m = 1 \dots N_\eta - 3, n = 1 \dots N_x$ wird die erste Gleichung des Gleichungssystems (28) zu

$$\begin{aligned}
0 &= [F_{m+2}^n - 3F_{m+1}^n + 3F_m^n - F_{m+1}^n] + \dots \\
&+ \frac{3\Delta\eta}{20} [F_{m+2}^n - F_{m+1}^n - F_m^n + F_{m-1}^n] [F_{m+1}^n + F_m^n] - \\
&- \frac{\Delta\eta}{5} [F_{m+1}^n - F_m^n]^2 + \lambda \bar{y}'_w(x_n) \Delta\eta^2 [D_{m+1}^n - D_m^n] - \\
&- \frac{\Delta\eta(x_n + 1)}{x_n - x_{n-1}} \left\{ [F_{m+1}^n - F_m^n] [F_{m+1}^n - F_m^n - F_{m+1}^{n-1} + F_m^{n-1}] + \right. \\
&\left. + \frac{1}{4} [F_{m+1}^n + F_m^n - F_{m+1}^{n-1} - F_m^{n-1}] [F_{m+2}^n - F_{m+1}^n - F_m^n + F_{m-1}^n] \right\}
\end{aligned} \tag{35}$$

diskretisiert ($(N_\eta - 3)(N_x - 1)$ Gleichungen). Die zweite Gleichung aus Gleichungssystem 28 wird durch die $(N_\eta - 3)(N_x - 1)$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\text{Pr}} [G_{m+2}^n - 3G_{m+1}^n + 3G_m^n - G_{m+1}^n] + \\
&+ \frac{3\Delta\eta}{5} [G_{m+1}^n - G_m^n] [F_{m+1}^n - F_m^n] + \\
&+ \frac{3\Delta\eta}{20} [F_{m+1}^n + F_m^n] [G_{m+2}^n - G_{m+1}^n - G_m^n + G_{m-1}^n] - \\
&- \frac{\Delta\eta(x_n + 1)}{x_n - x_{n-1}} \left\{ [F_{m+1}^n - F_m^n] [G_{m+1}^n - G_m^n - G_{m+1}^{n-1} + G_m^{n-1}] - \right. \\
&\left. - \frac{1}{4} [G_{m+2}^n - G_{m+1}^n - G_m^n + G_{m-1}^n] [F_{m+1}^n + F_m^n - F_{m+1}^{n-1} - F_m^{n-1}] \right\}
\end{aligned} \tag{36}$$

für $m = 1 \dots N_\eta - 3, n = 1 \dots N_x$ dargestellt.

Diese Gleichungen können von der Hinterkante ausgehend für jedes x_n numerisch gelöst werden. Dabei sind für die Hinterkante der Platte ($n = 0$) die diskretisierten Blasiusgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 8[F_{m+2}^0 - 3F_{m+1}^0 + 3F_m^0 - F_{m+1}^0] + \\ &\quad + \Delta\eta[F_{m+1}^0 + F_m^0][F_{m+2}^0 - F_{m+1}^0 - F_m^0 + F_{m-1}^0], \\ 0 &= \frac{8}{\text{Pr}}[G_{m+2}^0 - 3G_{m+1}^0 + 3G_m^0 - G_{m+1}^0] + \\ &\quad + \Delta\eta[F_{m+1}^0 + F_m^0][G_{m+2}^0 - G_{m+1}^0 - G_m^0 + G_{m-1}^0] \end{aligned} \quad (37)$$

für $m = 1 \dots N_\eta - 3$ mit den entsprechenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= F_0^0, \\ 0 &= -\frac{3}{2}F_0^0 + 2F_1^0 - \frac{1}{2}F_2^0, \\ 0 &= \frac{3}{2}F_{N_\eta-1}^0 - 2F_{N_\eta-2}^0 + \frac{1}{2}F_{N_\eta-3}^0 - \Delta\eta, \\ 0 &= G_0^0, \\ 0 &= -\frac{3}{2}G_0^0 + 2G_1^0 - \frac{1}{2}G_2^0 - \Delta\eta, \\ 0 &= \frac{3}{2}G_{N_\eta-1}^0 - 2G_{N_\eta-2}^0 + \frac{1}{2}G_{N_\eta-3}^0 \end{aligned} \quad (38)$$

zu lösen ($2N_\eta$ Gleichungen).

Da bei vorgegebener Steigung der Grenzschichtmittellinie \bar{y}'_w die Funktionswerte an einem Gitterpunkt ausschließlich von Funktionswerten benachbarter Gitterpunkte abhängen, ist die Jakobimatrix des Gleichungssystems spärlich besetzt. Dies kann durch den Einsatz spezieller Gleichungslöser genutzt werden, um sowohl die Rechenzeit als auch den Speicherbedarf zu senken. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit der nichtlineare Gleichungslöser "SPARSOL" (siehe [S07]) verwendet.

4.3. Numerische Berechnung der auftretenden Integrale

Wie in Kapitel 5.1 beschrieben, sind in jedem Iterationsschritt ein uneigentliches Integral für die Wirbelbelegung γ_w sowie ein singuläres, uneigentliches Integral für die vertikale Geschwindigkeitsstörung zu errechnen. Durch die

in Kapitel 4.2 durchgeführte Transformation ist die Bestimmung der Wirbelbelegung in jedem Punkt $(x_n, 0)$ jedoch ohne Integration direkt aus dem Randwert $G(x_n, \infty)$ möglich. Dieser Randwert wird im diskreten Fall

$$\gamma_w(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_w d\bar{y} = 2 \int_0^{\infty} \bar{\theta}_w d\bar{y} = 2 \int_0^{\infty} \frac{G_\eta}{(x_n + 1)^{1/5}} d\bar{\eta} \approx 2 \frac{G(x_n, \eta_{N_\eta-1})}{(x_n + 1)^{1/5}} \quad (39)$$

durch den Wert von $G(x, \eta_{N_\eta-1})$ angenähert.

Deutlich aufwändiger gestaltet sich die numerische Behandlung des singulären, uneigentlichen Integrals in (24) zur Berechnung der vertikalen Geschwindigkeitsstörung $v_1(x_n)$. Das unendlich ausgedehnte Integrationsintervall wird gemäß Kapitel 4.1 beschränkt, in $N_x - 2$ endliche Intervalle $I_j(n)$ mit $j = 0, \dots, N_x - 3$ unterteilt und auf diesen ausgewertet. Die Intervalle

$$I_j(n) = \begin{cases} [x_j, x_{j+1}] & \text{für } 0 \leq j < n - 1 \\ [x_j, x_{j+2}] & \text{für } j = n - 1 \\ [x_{j+1}, x_{j+2}] & \text{für } j \geq n \end{cases} \quad \text{für } j = 0, \dots, N_x - 3 \quad (40)$$

beschreiben mit einer Ausnahme den Abschnitt zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten. Diese Ausnahme ist nötig, da sonst divergente, uneigentlichen Integrale auftreten, deren Grenzen mit den Polstellen des Integranden zusammenfallen. Um das Integral innerhalb dieser Intervalle analytisch auswerten zu können, wird ein Teil des Integranden in

$$v_1(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \cdot \sum_{j=0}^{N_x-3} \oint_{I_j} \frac{A_j(n) + B_j(n)\xi}{(x-\xi)\sqrt{\xi}} d\xi \quad (41)$$

linear approximiert (siehe auch [SS05]). Dadurch sind $A_j(n)$ und $B_j(n)$ auf jedem Teilintervall $[a_j, b_j] = I_j(n)$ durch

$$B_j = \frac{\gamma_w(b_j)\sqrt{b_j+1} - \gamma_w(a_j)\sqrt{a_j+1}}{b_j - a_j}, \quad (42)$$

$$A_j = \gamma_w(a_j)\sqrt{a_j+1} - a_j \cdot B_j$$

gegeben. Das Integral in (41) kann analytisch zu

$$\oint_{I_j} \frac{A_j(n) + B_j(n)\xi}{(x - \xi)\sqrt{\xi}} d\xi = -2(\sqrt{b_j} - \sqrt{a_j})B_j - \begin{cases} \frac{A+Bx_n}{\sqrt{x_n}} \ln \left(\frac{(\sqrt{b_j} - \sqrt{x_n})(\sqrt{a_j} + \sqrt{x_n})}{(\sqrt{x_n} - \sqrt{a_j})(\sqrt{b_j} + \sqrt{x_n})} \right) & x_n \in I_j, \\ \frac{A+Bx_n}{\sqrt{x_n}} \ln \left(\frac{(\sqrt{b_j} - \sqrt{x_n})(\sqrt{a_j} + \sqrt{x_n})}{(\sqrt{a_j} - \sqrt{x_n})(\sqrt{b_j} + \sqrt{x_n})} \right) & x_n \notin I_j \end{cases} \quad (43)$$

bestimmt werden, um die vertikale Geschwindigkeit zu errechnen.

5. Iteratives Verfahren

5.1. Lösungsstrategie

Grundsätzlich sind die Grenzschichtgleichungen parabolischen Types, woraus folgt, dass Störungen nur stromab wirksam werden. Dies ermöglicht eine schrittweise, numerische Lösungsstrategie, bei der von der bekannten Randbedingung an der Hinterkante ausgehend in jedem der N_x Schritte ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem in η gelöst wird. Dazu werden die partiellen Ableitungen in x -Richtung aus (18) mit einem Rückwärtsdifferenzenquotienten erster Ordnung approximiert (siehe Kapitel 4).

Da allerdings die vertikale Geschwindigkeitsstörung v_1 im zu lösenden Gleichungssystem (28) von der Wirbelbelegung des Nachlaufs und somit vom gesamten Temperaturfeld abhängt, ist ein solches Lösungsverfahren nur für $\kappa = 0$ möglich.

Um Lösungen für $\kappa > 0$ zu erhalten, wird beim iterativen Verfahren eine Geschwindigkeitsstörung $v_1^{(0)}(x)$ als Startwert vorgegeben und damit die Steigung der Nachlaufmittellinie $\bar{y}'_w(x)$ für den entsprechenden Wert von κ nach (25) errechnet. Mit dieser Steigung ist nun das Differentialgleichungssystem (28) wie oben beschrieben numerisch zu lösen, woraus man mit Hilfe von (24) und (25) eine neue Geschwindigkeitsverteilung $v_1^{(1)}(x)$ erhält. Dieses iterative Verfahren wird so lange durchgeführt, bis die Änderung der Geschwindigkeitsstörung beziehungsweise der Wirbelbelegung $\gamma_w(x)$ in einem Iterationsschritt kleiner als eine vorgeschriebene Schranke ist. Als Maß für diese Änderung wird in der vorliegenden Arbeit sowohl die Differenz der

Maximumsnorm als auch die der L_1 -Norm der Wirbelbelegung mit den in (44) angegebenen Schranken verwendet

$$\begin{aligned} \|\gamma_w^{(j+1)}(x)\|_\infty - \|\gamma_w^{(j)}(x)\|_\infty &\leq \varepsilon_\infty = 10^{-6}, \\ \|\gamma_w^{(j+1)}(x)\|_1 - \|\gamma_w^{(j)}(x)\|_1 &\leq \varepsilon_1 = 10^{-4}. \end{aligned} \quad (44)$$

Es ist zweckmäßig mit dem Lösen des Gleichungssystems für $\kappa = 0$ zu beginnen und die daraus ermittelte vertikale Geschwindigkeitsstörung $v_{1(0)}(x)$ als Startwert zur Lösung eines Gleichungssystems mit $\kappa > 0$ heranzuziehen. Indem man die Geschwindigkeitsstörung $v_1(x)$ des bereits gelösten Gleichungssystems als Startwert für die Lösung eines Gleichungssystems mit größerem reduzierten Auftriebsparameter κ vorgibt, kann man schrittweise, von $\kappa = 0$ ausgehend, Lösungen für verschiedene Werte des Parameters bestimmen.

5.2. Konvergenzverhalten

Mit dem in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Verfahren können Lösungen des Gleichungssystems (18) mit den zugehörigen Randbedingungen (19) bestimmt werden. In Abbildung 3 ist zur Darstellung des Konvergenzverhaltens die L_2 -Norm der vertikalen Geschwindigkeitsstörung $\|v_1(x)\|_2$ über den Iterationsschritten aufgetragen. Zur Verdeutlichung der auftretenden Konvergenzprobleme werden die entsprechenden Gleichungssysteme für die Parameter $\kappa = 0.914$ und $\kappa = 0.9156$ verwendet. Man erkennt, dass sich nach einem kurzen Vorlauf ein oszillatorisches Verhalten mit gleich bleibender Periode P einstellt. Aus Abbildung 3 ist ebenfalls ersichtlich, dass dieses Lösungsverfahren nicht für alle Werte von κ konvergiert. Mit zunehmenden Werten des reduzierten Auftriebsparameters ist eine immer langsamere Konvergenz zu beobachten bis das Verfahren schließlich divergiert. Dabei oszilliert die Wirbelbelegung der einzelnen Iterationsschritte mit exponentiell zunehmender Amplitude um die gesuchte Lösung. Es hat sich gezeigt, dass der Grenzparameter für welchen die Amplitude der Oszillation weder ab- noch zunimmt $\kappa_k \approx 0.9155$ beträgt. Die Amplitude zu Beginn der Oszillation ist von der Abweichung zwischen Startwert und Lösung abhängig und nimmt bei Annäherung an den kritischen Parameter κ_k stark zu. Dieser Effekt schränkt die mögliche Änderung des Parameters κ deut-

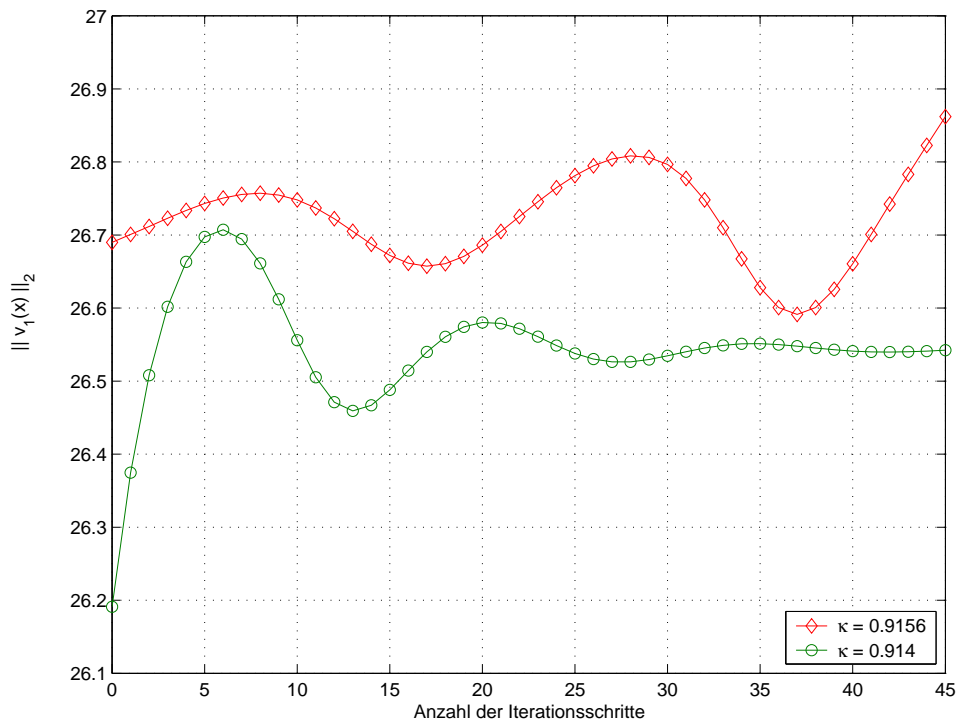


Abbildung 3: Konvergenz des iterativen Lösungsverfahrens
 L_2 -Norm der vertikalen Geschwindigkeitsstörung ist über den
 Iterationsschritten dargestellt.

Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa \in \{0.914, 0.9156\}$

lich ein, da bei zu großem Überschwingen das nichtlineare Gleichungssystem der diskretisierten Differentialgleichungen nicht mehr gelöst werden kann. Außerdem steigt der Rechenaufwand durch die verlangsamte Konvergenz deutlich an, sodass eine iterative Berechnung für Werte $\kappa > 0.914$ auch für kleine Änderungen von κ kaum praktikabel ist.

Aufgrund der beschriebenen Einschränkungen der iterativen Vorgehensweise ist für weitere Berechnungen das in Kapitel 6 beschriebene Verfahren anzuwenden.

6. Beschleunigtes Verfahren

6.1. Lösungsstrategie

Aufgrund des in Kapitel 5.2 erläuterten Konvergenzverhaltens des iterativen Verfahrens wurde ein weiteres Verfahren zur Lösung von Gleichungssystem (28) entwickelt. Ziel dieses Verfahrens ist es den oszillierenden Anteil der Iteration in einem Schritt zu eliminieren. Formal kann das iterative Verfahren als Fixpunktiteration

$$\gamma_w^{(j+1)} = \Gamma(\gamma_w^{(j)}) \quad (45)$$

eines Operators Γ mit der gesuchten Lösung $\gamma_w^* = \Gamma\gamma_w^*$ angeschrieben werden. Dieser Iterationsoperator wird durch

$$\Gamma(\gamma_w^{(j)}) = \Gamma_1\gamma_w^{(j)} + \Gamma_2(\gamma_w^{(j)}) \quad (46)$$

in einen linearen Γ_1 und in einen nichtlinearen Anteil Γ_2 aufgespalten. Definiert man die Abweichung von der Lösung zu $\Delta\gamma_j = \gamma_w^{(j)} - \gamma_w^*$ und vernachlässigt für hinreichend kleine Werte von $\Delta\gamma_j(x)$ die nichtlinearen Anteile folgt

$$\Delta\gamma_{j+1} \approx \Gamma_1\Delta\gamma_j. \quad (47)$$

Aus dem in Kapitel 5.2 beschriebenen Konvergenzverhalten ist zu schließen, dass der lineare Anteil Γ_1 ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\mu = |\mu|e^{i\varphi}$ mit

$$\Gamma_1\Delta\gamma_A = \mu\Delta\gamma_A = |\mu|e^{i\varphi}\Delta\gamma_A \quad (48)$$

besitzt, welche für Parameterwerte von $\kappa > 0.9155$ aufklingen. Folglich oszilliert die Lösung der Fixpunktiteration in einem 2-dimensionalen Unterraum des Raumes der möglichen Lösungen. Ziel ist es nun mit geschätzten Eigenvektoren $(\Delta\gamma_A, \Delta\gamma_A^c)$ diesen gesamten Unterraum zu eliminieren. Dazu werden die beiden reellen Basisvektoren

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_a &= \Delta\gamma_A + \Delta\gamma_A^c \text{ und} \\ \Delta\gamma_b &= i(\Delta\gamma_A - \Delta\gamma_A^c) \end{aligned} \quad (49)$$

definiert. Dabei steht das hochgestellte c für die komplexe Konjunktion. Da das oszillierende Verhalten in einem durch die Basisvektoren $\Delta\gamma_a$ und $\Delta\gamma_b$

aufgespannten Unterraum stattfindet, kann jeder Iterationsschritt in guter Näherung als Linearkombination

$$\gamma_w^{(j+1)} = \Gamma(\gamma_w^{(j)}) \approx \gamma_w^{(j)} + \alpha \Delta\gamma_a + \beta \Delta\gamma_b \quad (50)$$

dieser Basisvektoren dargestellt werden. Um eine Lösung des Fixpunktproblems zu erhalten, muss nun bei bekannten Basisvektoren $\Delta\gamma_a$ und $\Delta\gamma_b$ das Minimierungsproblem

$$J(\alpha^*, \beta^*) = \min_{\alpha, \beta} \| \gamma_w^{(j)} + \alpha \Delta\gamma_a + \beta \Delta\gamma_b - \Gamma(\gamma_w^{(j)}) \|_2 \quad (51)$$

im $\alpha \times \beta$ -Raum gelöst werden. Ist das Minimum (α^*, β^*) gefunden, kann der gesuchte Fixpunkt durch die Linearkombination

$$\gamma_w^* \approx \gamma_w^{(j)} + \alpha^* \Delta\gamma_a + \beta^* \Delta\gamma_b \quad (52)$$

genähert werden. Die Genauigkeit dieser Näherung ist von der Güte der Schätzung der Basisvektoren abhängig und wird durch den Wert von $J(\alpha^*, \beta^*)$ beschrieben.

6.2. Algorithmische Umsetzung

Um die Genauigkeit der in Kapitel 6.1 entwickelten Lösungsstrategie zu erhöhen, werden zwei Paare von Basisvektoren $(\Delta\gamma_{a1}, \Delta\gamma_{b1})$ sowie $(\Delta\gamma_{a2}, \Delta\gamma_{b2})$ geschätzt und die Minimierung (51) für beide Basenpaare hintereinander ausgeführt. Zur programmiertechnischen Umsetzung wird folgender Algorithmus eingesetzt (zur besseren Verdeutlichung siehe auch Abbildung 5):

1. Berechnung von j_1 Iterationsschritten, um den in Kapitel 5.2 beschriebenen oszillatorischen Zustand zu erreichen. Dies ist wie in Abbildung 5 ersichtlich schon nach wenigen Schritten erreicht ($j_1 \approx P/2$).
 $\Rightarrow \gamma_w^{(j_1)}$
2. Schätzung zweier Paare von Basisvektoren $\Delta\gamma_{a1}, \Delta\gamma_{b1}$ sowie $\Delta\gamma_{a2}, \Delta\gamma_{b2}$. Dazu sind, wie in Kapitel 6.2.1 beschrieben, mehrere Iterationsschritte j_2 nötig.
 $\Rightarrow \gamma_w^{(j_1+j_2)}$

3. Berechnung der Faktoren α_1^* und β_1^* durch Minimierung der Funktion $J(\alpha, \beta)$ aus (51) unter Verwendung von $\Delta\gamma_{a1}$ und $\Delta\gamma_{b1}$.
 $\Rightarrow \alpha_1^*, \beta_1^*$
4. Nähern der Lösung für die Wirbelbelegung in einem Schritt $\gamma_{w1}^* = \gamma_w^{(j_1+j_2)} + \alpha_1^* \Delta\gamma_{a1} + \beta_1^* \Delta\gamma_{b1}$.
 $\Rightarrow \gamma_{w1}^*$
5. Berechnung der Faktoren α_2^* und β_2^* durch Minimierung der Funktion $J(\alpha, \beta)$ aus (51) unter Verwendung von $\Delta\gamma_{a2}$, $\Delta\gamma_{b2}$ und der im vorhergehenden Schritt ermittelten Wirbelbelegung γ_{w1}^* anstelle von $\gamma_w^{(j)}$.
 $\Rightarrow \alpha_2^*, \beta_2^*$
6. Nähern der Lösung für die Wirbelbelegung in einem Schritt $\gamma_{w2}^* = \gamma_{w1}^* + \alpha_2^* \Delta\gamma_{a2} + \beta_2^* \Delta\gamma_{b2}$.
 $\Rightarrow \gamma_{w2}^*$

Ist die Genauigkeit nach Ausführung dieses Algorithmus noch nicht ausreichend, wird der gesamte Vorgang erneut durchgeführt, wobei die zuvor ermittelte Wirbelbelegung γ_{w2}^* als Startwert herangezogen wird.

Zur Kontrolle, ob tatsächlich eine gute Näherung der Lösung vorliegt, kann neben dem Wert von $J(\alpha^*, \beta^*)$ auch noch das Verhalten einiger weiterer Iterationsschritte mit Startwert γ_{w2}^* herangezogen werden. Oszilliert das iterative Verfahren mit kleiner Anfangsamplitude weicht die gefundene Lösung nur gering von der tatsächlichen Lösung ab.

6.2.1. Schätzung der Basisvektoren

Nachdem sich oszillatorisches Verhalten eingestellt hat, werden die linear unabhängigen Basisvektoren geschätzt. Dafür sind weitere j_2 Schritte der Oszillation zu errechnen und es ist zu Beginn (j_1), in der Mitte ($j_1 + \lfloor j_2/2 \rfloor$) sowie am Ende ($j_1 + j_2$) dieses Abschnitts die Wirbelbelegungen $\gamma_w(x)$ zu speichern. Die Basisvektoren für die Änderung der Wirbelbelegung werden nun durch

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{a1} &= \gamma_w^{(j_2)} - \gamma_w^{(j_2+j_1)} \text{ und} \\ \Delta\gamma_{b1} &= \gamma_w^{(j_2)} - 2\gamma_w^{(j_1+\lfloor j_2/2 \rfloor)} + \gamma_w^{(j_1)} \end{aligned} \quad (53)$$

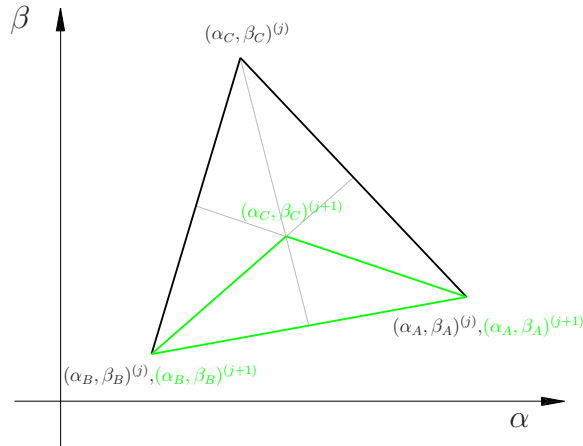


Abbildung 4: Zweidimensionaler "SIMPLEX"-Algorithmus

Zur Verdeutlichung der Arbeitsweise sind die Dreiecke zweier aufeinander folgender Iterationsschritte dargestellt.

$$J(\alpha_C, \beta_C)^{(j)} > J(\alpha_A, \beta_A)^{(j)} \wedge J(\alpha_C, \beta_C)^{(j)} > J(\alpha_B, \beta_B)^{(j)}$$

geschätzt. Werden zwei Basen geschätzt, ist noch ein zusätzlicher Iterationsschritt nötig. Zur Schätzung der zweiten Basis werden die Wirbelbelegungen um einen Schritt versetzt ausgewertet, wodurch sich die geringfügig andere Basis

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{a2} &= \gamma_w^{(j_2+1)} - \gamma_w^{(j_2+j_1+1)}, \\ \Delta\gamma_{b2} &= \gamma_w^{(j_2+1)} - 2\gamma_w^{(j_1+\lfloor j_2/2 \rfloor + 1)} + \gamma_w^{(j_1+1)} \end{aligned} \quad (54)$$

ergibt. Insgesamt sind daher $j_2 + 1$ Iterationsschritte durchzuführen, wobei j_2 nicht kleiner als 2 gewählt werden darf.

Vor dem Start der rechenaufwändigen Minimierung ist es sinnvoll die Güte der Basen zu überprüfen und wenn nötig neue Schätzungen vorzunehmen.

6.2.2. Minimierung

Da Versuche der analytischen Minimierung von $J(\alpha, \beta)$ durch Approximation mit einer quadratischen Form nicht den gewünschten Erfolg brachten, wird die Minimierung numerisch durchgeführt. Zu diesem Zwecke wird der "SIMPLEX"-Algorithmus (e04ccc) der kommerziell verfügbaren "NAG C Library Mark 8" verwendet (siehe [NAG]).

Dieser iterativ arbeitende Algorithmus dient zum Auffinden lokaler Ex-

tremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Da die im vorhergehenden Kapitel ermittelten Basisvektoren im Allgemeinen von unterschiedlicher Größenordnung sind, ist es sinnvoll diese zu skalieren. Dadurch ist zu erwarten, dass die beide Koordinaten des Minimums (α^*, β^*) von ähnlicher Größenordnung sind, wodurch die Konvergenz des verwendeten "SIMPLEX"-Algorithmus verbessert wird.

Im hier vorliegenden 2-dimensionalen Fall werden, von einem vorgegebenen Startwert $(\alpha = 0, \beta = 0)$ ausgehend, 2 weitere Eckpunkte eines Dreiecks im $\alpha \times \beta$ -Raum automatisch generiert. Zur näheren Beschreibung sei an dieser Stelle auf die Dokumentation der "NAG C Library Mark 8" [NAG] verwiesen. In jedem darauf folgenden Iterationsschritt des Algorithmus wird jener Eckpunkt des Dreiecks mit dem größten Funktionswert $J(\alpha, \beta)$ ermittelt. Ein neues Dreieck wird generiert, indem dieser Eckpunkt unter Beibehaltung der anderen beiden Eckpunkte in den Schwerpunkt des ursprünglichen Dreiecks verlegt wird (siehe Abbildung 4). Existiert ein Minimum innerhalb des ersten Dreiecks, nähern sich durch oftmaliges wiederholen dieser Vorgehensweise die Eckpunkte der Dreiecke immer weiter an das gesuchte Minimum an. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn der Betrag der paarweisen Differenz der Eckpunkte kleiner als eine vorgegebene Schranke ist. Der kleinste Funktionswert an den Eckpunkten des letzten Dreiecks wird als Näherung für das Minimum $J(\alpha^*, \beta^*)$ verwendet.

6.3. Verhalten des Algorithmus

Mit dem in Kapitel 6.2 beschriebenen Verfahren erreicht man zumeist bereits nach einem Durchlauf ausreichende Genauigkeit. In Abbildung 5 sind die einzelnen Schritte des Verfahrens anhand eines Beispiels dargestellt. Da es zur bestmöglichen Schätzung der Basisvektoren nötig ist eine gesamte Periode zu errechnen, sind Startwerte zu verwenden, die bereits nahe an der gesuchten Lösung liegen. Ansonsten würde die Oszillation bei Werten des Parameters $\kappa > \kappa_k$ innerhalb dieser Periode unzulässig weit aufklingen und die Rechnung abbrechen. Dadurch wird die Schrittweite, mit der der reduzierte Auftriebsparameter κ verändert wird, deutlich eingeschränkt. Die Oszillationen klingen mit steigendem Parameter κ stärker auf und daher ist auch dieses Verfahren nicht uneingeschränkt einsetzbar.

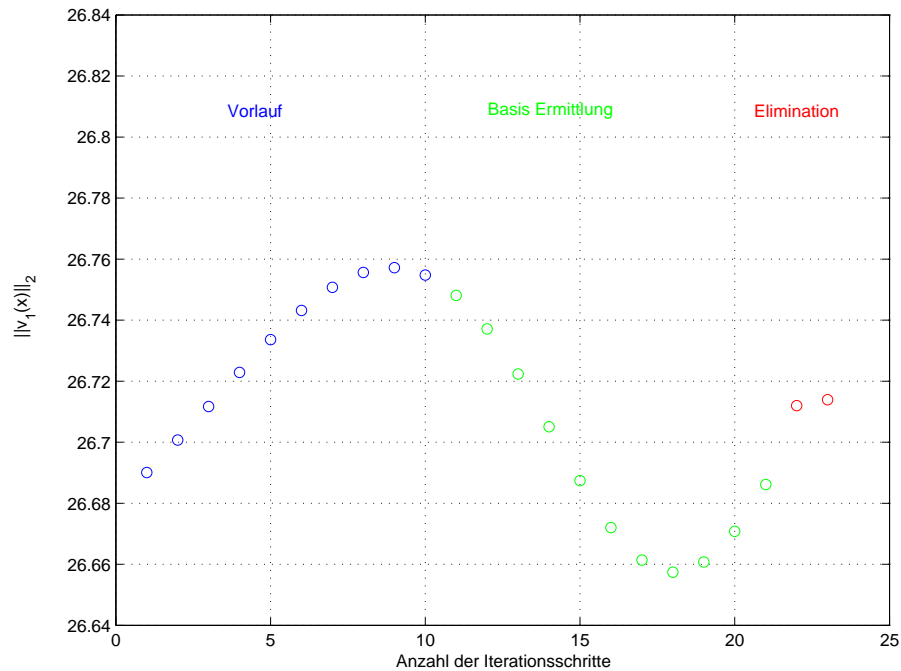


Abbildung 5: Elimination des oszillierenden Unterraums

L_2 -Norm der Wirbelbelegung ist über den Iterationsschritten dargestellt. Dabei wird auch die Elimination des Unterraums als Iterationsschritt betrachtet.

$$(\kappa = 0.9156)$$

Auch wenn es aus den oben beschriebenen Gründen nicht möglich ist eine gesamte Periode zu berechnen, kann eine weniger gute Schätzung der Basisvektoren $(\Delta\gamma_{a1}, \Delta\gamma_{b1})$ vorgenommen werden, indem die Werte der in (53) benötigten Wirbelbelegungen aus unmittelbar aufeinander folgenden Iterationsschritten verwendet werden. In diesem Fall nimmt allerdings auch die Genauigkeit der ermittelten Lösung deutlich ab, sodass ein mehrmaliges Ausführen des Algorithmus nötig wird.

7. Ergebnisse

Mit Hilfe der in Kapitel 5 und 6 beschriebenen Verfahren wird das Gleichungssystem (28) für folgende Parameter gelöst:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ Pr &= 0.71 \text{ (entspricht der Prandtlzahl von Luft)} \\ \kappa &\in \{0, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.85, 0.9, 0.909, 0.91, 0.911, 0.912, 0.913, \\ &\quad 0.914, 0.915, 0.9156, 0.9158, 0.916, 0.91605, 0.9161, 0.91615, \\ &\quad 0.9162, 0.91625, 0.9163\} \end{aligned} \quad (55)$$

Dabei wird für Werte von $\kappa \leq 0.914$ das iterative Verfahren aus Kapitel 5 eingesetzt. Alle weiteren Lösungen sind mit Hilfe des beschleunigten Verfahrens ermittelt, welches in Kapitel 6 erläutert ist.

7.1. Potentialströmung

In Abbildung 6 ist die Wirbelbelegung $\gamma_w(x)$ im Nachlauf der Platte dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die Wirbelbelegung nahe der Plattenhinterkante ($x < 0.01$) nicht von dem Wert des reduzierten Auftriebparameters κ abhängt. Dies ist dadurch begründet, dass die Druckdifferenz und somit die Wirbelbelegung $\gamma_w(x)$ an der Hinterkante ausschließlich von der symmetrischen Lösung D_B der zur Blasiusgleichung gehörigen Energiegleichung (21) abhängt. Weiters ist zu erkennen, dass die Wirbelbelegung bei großem Abstand zur Hinterkante ($x > 10^{10}$), wie gefordert, unabhängig von dem reduzierten Auftriebsparameter gegen Null strebt. Im Bereich $x \in [0.01, 1000]$ zeigt sich ein deutlicher Einfluss des Auftriebs auf die Wirbelbelegung. Dabei ist zu erkennen, dass mit steigendem Wert von κ die Wirbelbelegung deutlich sensibler auf Parameteränderungen reagiert.

Die Wirbelbelegung beeinflusst ihrerseits die Lage der Nachlaufdelle über die in Abbildung 7 dargestellte vertikale Geschwindigkeitsstörung $v_1(x)$. Ausgehend von der Hinterkante ($x = 0$), an der keine vertikale Geschwindigkeit vorliegt, wächst $v_1(x)$ bis zu einem Maximum an der Stelle $x \sim O(10^{-2})$ an um anschließend stark abzufallen. Nach Erreichen eines Minimums bei $x \sim O(1)$ wächst die Geschwindigkeitsstörung wieder stark an um weit

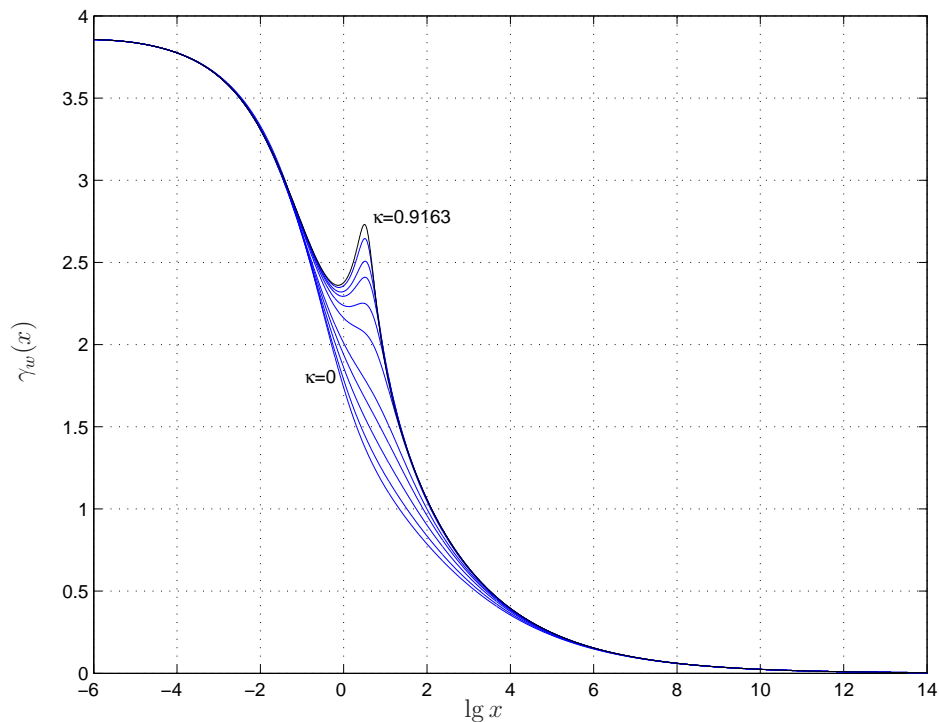


Abbildung 6: Wirbelbelegung im Nachlauf

Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa \in \{0.0; 0.5; 0.7; 0.8; 0.85; 0.9; 0.91; 0.914; 0.915; 0.916; 0.9163\}$

stromab, wie erwartet, gegen Null zu konvergieren. Dabei wird mit zunehmendem κ die Lage des Minimums in Richtung Hinterkante verschoben. Sowohl der Wert, als auch die Lage des Minimums reagieren mit steigendem Wert von κ deutlich sensibler auf Parameteränderungen. Auch der Anstieg nach Erreichen des Minimums verläuft mit größeren Werten von κ immer steiler.

In Abbildung 8 ist die mit dem Anströmwinkel ϕ skalierte Steigung der Grenzschichtmittellinie $\bar{y}'_w(x)$ im Nachlauf dargestellt. Für $\kappa = 0$ zeigt sich der erwartete Verlauf für eine angestellte Platte ohne Auswirkungen des Auftriebs. Aufgrund der Abströmbedingungen an der Plattenhinterkante ist die Steigung $\bar{y}'_w(0) = 0$. Für großen Abstand zur Plattenhinterkante verschwindet der Einfluss dieser Bedingung und die Steigung \bar{y}'_w nähert sich dem Anströmwinkel ϕ .

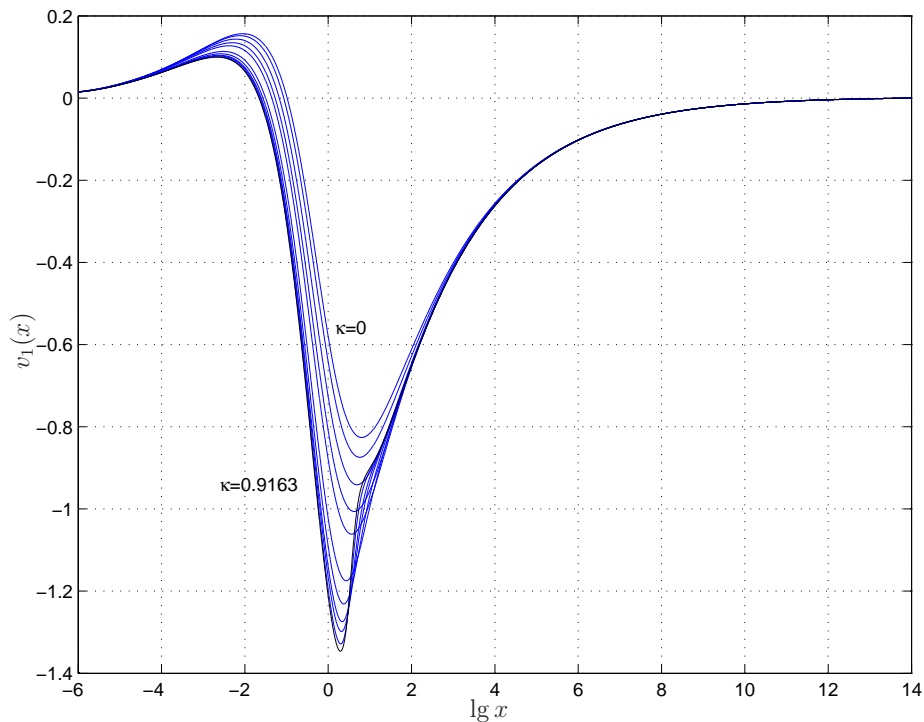


Abbildung 7: Vertikale Geschwindigkeit der Nachlaufdelle

Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa \in \{0.0; 0.5; 0.7; 0.8; 0.85; 0.9; 0.91; 0.914; 0.915; 0.916; 0.9163\}$

Der Einfluss des Auftriebs ($\kappa > 0$) führt nahe der Hinterkante zu einem steileren Verlauf der Nachlaufdelle, jedoch ab einer Entfernung von $x \approx 0.1$ zu einem flacheren Verlauf derselben. Bei steigenden Werten des Parameters κ ist ein Bereich mit negativer Steigung zu erkennen, was eine vorübergehende Abwärtsneigung des Nachlaufs bedeutet.

7.2. Nachlaufströmung

In Abbildung 9(a) ist die horizontale Geschwindigkeitskomponente $\bar{u}_w(x, 0)$ an der Mittellinie der Nachlaufdelle im doppelt logarithmischen Maßstab dargestellt. Wie erwartet, verschwindet diese aufgrund der aufgetragenen Randbedingung an der Plattenhinterkante. Während diese Störung ohne Auftriebseffekte ($\lambda = 0$) mit zunehmendem Abstand zur Plattenhinterkante abnimmt, ist im vorliegenden Fall ein unbeschränktes Anwachsen der

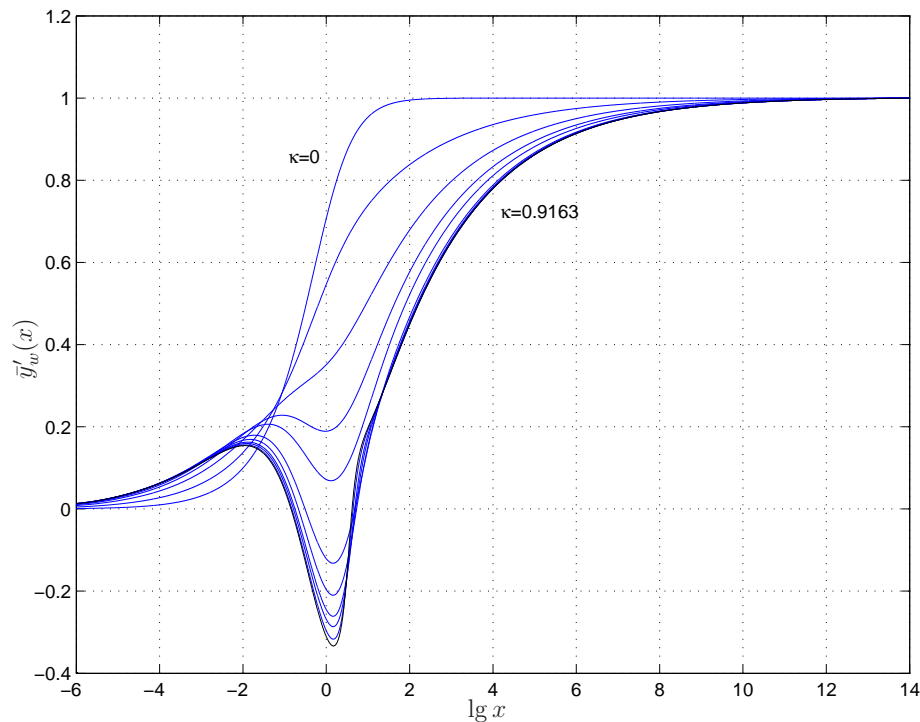
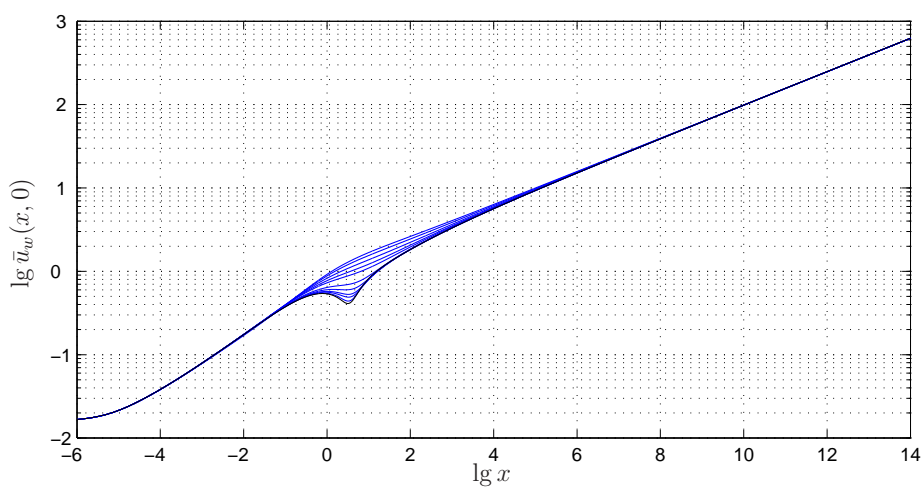


Abbildung 8: Skalierte Steigung der Mittellinie der Nachlaufdelle

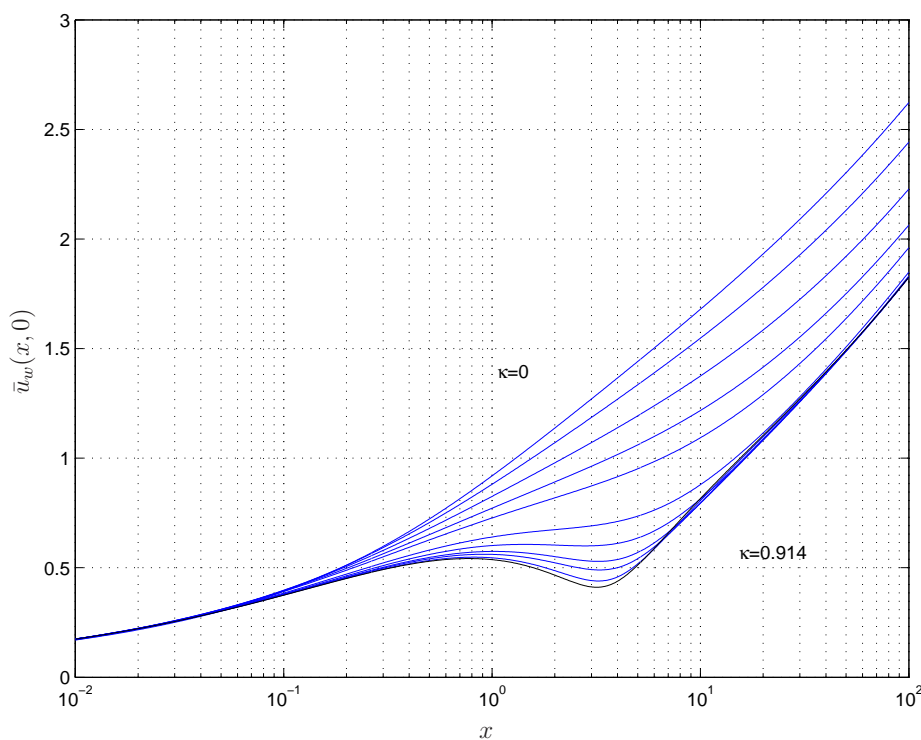
Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa \in \{0.0; 0.5; 0.7; 0.8; 0.85; 0.9; 0.91; 0.914; 0.915; 0.916; 0.9163\}$

Geschwindigkeit zu erkennen. Dies ist dadurch zu erklären, dass durch die Wirkung des Auftriebs das Impulsdefizit der Grenzschicht nicht konstant ist und das Fluid im Nachlauf immer weiter beschleunigt wird, sodass es zu einer Umkehr der Geschwindigkeitsstörung kommt. Diese Effekte sind in den Geschwindigkeitsverläufen der Grenzschicht (siehe Abbildung 10) deutlich zu erkennen.

Betrachtet man, wie in Abbildung 9(b) dargestellt, lediglich einen kleinen Ausschnitt nahe der Plattenhinterkante, ist ein deutlicher Einfluss des reduzierten Auftriebsparameters auf den Geschwindigkeitsverlauf zu erkennen. Während für sehr kleine Abstände von der Hinterkante ($x < 0.01$) der Parameter κ nur einen geringen Einfluss auf die dargestellte Geschwindigkeit ausübt, sind im Bereich $[0.1, 10^3]$ starke Unterschiede sichtbar. Wie auch bei der Wirbelbelegung $\gamma_w(x)$, ist zu beobachten, dass die Geschwin-



(a) Gesamter Nachlauf



(b) Detailansicht

Abbildung 9: Horizontale Geschwindigkeit an der Grenzschichtmittellinie

Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa \in \{0.0; 0.5; 0.7; 0.8; 0.85; 0.9; 0.91; 0.914; 0.915; 0.916; 0.9163\}$

digkeitskomponente $\bar{u}_w(x, 0)$ mit steigendem Wert von κ deutlich sensibler auf Parameteränderungen reagiert. Die in Abbildung 9(b) dargestellten Geschwindigkeitsverläufe legen die Vermutung nahe, dass eine Konstante κ_c existiert bei dem in einem bestimmten Punkt x_c die horizontale Geschwindigkeitskomponente verschwindet ($\bar{u}_w(x_c, 0) = 0$). Dies würde vermutlich zu einer Singularität, einem Versagen der Grenzschichtgleichungen, führen.

Zur Visualisierung der Vorgänge im Nachlauf sind im Folgenden die Geschwindigkeitsprofile $\bar{u}_w(\eta)$ sowie die Temperaturprofile $\bar{\theta}_w(\eta)$ der Nachlaufströmung dargestellt. Da diese symmetrisch zur Mittellinie der Nachlaufdelle verlaufen, ist es ausreichend sich auf die Darstellung des oberen Bereiches ($\eta > 0$) zu beschränken. Exemplarisch sind die Profile bei unterschiedlichen Entfernungen zur Hinterkante für zwei verschiedene Parameter ($\kappa = 0$, $\kappa = 0.9163$) dargestellt (siehe Abbildungen 10 und 11).

Die schwarz durchgezogenen Linien stellen die Blasiuslösung der Grenzschichtgleichungen dar. In Abbildung 10 ist deutlich die Umkehr der dimensionslosen Geschwindigkeit in der Nachlaufströmung zu erkennen. Wie auch aus den vorhergehenden Diagrammen ersichtlich, sind die Lösungen im Bereich $x \sim O(1)$ stark von dem reduzierten Auftriebsparameter κ abhängig. Außerdem ist zu erkennen, dass sowohl das Anwachsen der Geschwindigkeit als auch das Abklingen der Temperaturstörung für größere Werte von κ deutlich verzögert wird. Weiters kann abgelesen werden, dass sich das Geschwindigkeitsprofil des Nachlaufs für hohe Parameterwerte verbreitert.

In Abbildung 11 ist zu erkennen, dass sich das Temperaturprofil an der Stelle $x = O(1)$ deutlich verbreitert. Diese Verbreiterung führt, aufgrund des Zusammenhangs (21), zu dem lokalen Anwachsen der Wirbelbelegung, welches in Abbildung 6 dargestellt ist.

Teil III.

Nachlaufneigung durch Hindernis

8. Potentialströmung

Wie sich gezeigt hat, ist es mit den angewendeten, numerischen Verfahren nicht möglich das Differentialgleichungssystem (18) für Werte des reduzierten Auftriebsparameters $\kappa \approx \kappa_c$ zu lösen. Zu einer weiteren analytischen Behandlung der auftretenden Singularität ist es hilfreich das Verhalten der Lösung bei Annäherung an den kritischen Parameter zu kennen.

Um derartige Informationen zu erhalten, wird eine modifizierte Problemstellung untersucht, bei der die vertikale Komponente der Geschwindigkeit der Nachlaufmittellinie $v_1(x)$ nicht von der Temperaturverteilung des Nachlaufs, sondern durch ein vorgegebenes Hindernis festgelegt wird.

Zur Berechnung der Potentialströmung wird das Hindernis durch eine Wirbelbelegung $\gamma_h(x)$ für $x > 0$ beschrieben, welche in einem festen Abstand $y_0 > 0$ parallel zur Platte verläuft (siehe Abbildung 12). Die Wirbel-

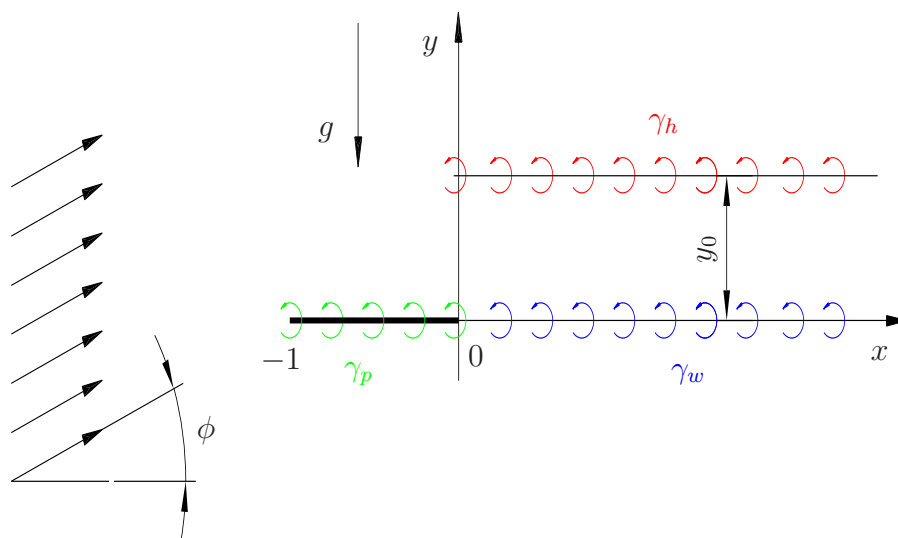


Abbildung 12: Hindernis im Nachlauf einer Platte

belegung erstreckt sich dabei parallel zur x -Achse über das gesamte Intervall $[0, \infty)$. Das Hindernis entspricht somit einer Platte mit verschwindend kleiner Dicke und geringem lokalen Neigungswinkel $\vartheta_h(x)$. Von den Wirbelbelegungen werden die Störstromfunktionen Ψ_p , Ψ_w und Ψ_h induziert, welche im Rahmen der Potentialtheorie mit der aufgetragenen Stromfunktion $y - \phi x$ zu einer Gesamtstromfunktion

$$\Psi(x, y) = y - \phi x + \Psi_p(x, y) + \Psi_w(x, y) + \Psi_h(x, y) \quad (56)$$

superponiert werden können. Die einzelnen Störstromfunktionen ergeben sich zu

$$\Psi_p(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 \gamma_p(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \quad (57)$$

$$\Psi_h(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \gamma_h(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - y_0)^2} d\xi, \quad (58)$$

$$\Psi_w(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \gamma_w(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (59)$$

In der Potentialströmung tritt in vertikaler Richtung eine unstetige Änderung des Druckes über den Nachlauf auf. Dieser Drucksprung entspricht nach (21) der Wirbelbelegung $\gamma_w(x)$ und kann mit Hilfe der linearisierten Bernoulligleichung in die Bedingung

$$u_1(x, 0-) - u_1(x, 0+) = \gamma_w(x) \text{ für } 0 \leq x \quad (60)$$

umgewandelt werden. Gibt man nun die Wirbelbelegung $\gamma_h(x)$ eines Hindernisses vor, ist die Wirbelbelegungen der Platte $\gamma_p(x)$ so festzulegen, dass entlang der Platte die Tangentialbedingung

$$v_1(x, 0) = 0 \text{ für } -1 \leq x \leq 0 \quad (61)$$

erfüllt ist (siehe [S78]). Dazu wird die Wirbelbelegung der Platte in den vom Nachlauf verursachten Anteil $\gamma_{pw}(x)$ und in den vom Hindernis verursachten Anteil $\gamma_{ph}(x)$ aufgespalten

$$\gamma_p(x) = \gamma_{pw}(x) + \gamma_{ph}(x). \quad (62)$$

Der vom Nachlauf verursachte Anteil $\gamma_w(x)$ entspricht der Lösung ohne Hindernis und ist in [SS05] zu

$$\gamma_{pw}(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \oint_0^\infty \frac{\gamma_w(\xi)}{x-\xi} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi}} d\xi \quad (63)$$

bestimmt. Der Anteil $\gamma_{ph}(x)$, welcher vom Hindernis verursacht wird, muss die von der Wirbelbelegung des Hindernisses $\gamma_h(x)$ auf der Platte induzierte Vertikalgeschwindigkeit $v_{1h}(x, 0) = -\Psi_{hx}$ kompensieren, um die Tangentialbedingung (61) zu erfüllen. Man erhält die Integralgleichung

$$\oint_{-1}^0 \frac{\gamma_{ph}(\xi)}{x-\xi} d\xi = - \int_0^\infty \gamma_h(\xi) \frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y_0^2} d\xi \quad (64)$$

mit der Lösung

$$\gamma_{ph}(x) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{-x}{x+1}} \oint_{-1}^0 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \gamma_h(\xi) \frac{(\delta-\xi)}{(\delta-\xi)^2 + y_0^2} d\xi \frac{1}{\delta-x} \sqrt{\frac{\delta+1}{-\delta}} d\delta \quad (65)$$

aus [S78]. Nach vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt sich

$$\gamma_{ph}(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{-x}{x+1}} \int_0^\infty \gamma_h(\xi) \oint_{-1}^0 \frac{(\delta-\xi)}{(\delta-\xi)^2 + y_0^2} \frac{1}{\delta-x} \sqrt{\frac{\delta+1}{-\delta}} d\delta d\xi. \quad (66)$$

wobei das innere Integral mit dem Residuensatz berechnet werden kann

$$\begin{aligned} & \oint_{-1}^0 \frac{(\delta-\xi)}{(\delta-\xi)^2 + y_0^2} \frac{1}{\delta-x} \sqrt{\frac{\delta+1}{-\delta}} d\delta = \\ & = 2\pi \sqrt{\frac{(\xi+1)^2 + y_0^2}{\xi^2 + y_0^2}} \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y_0}{\xi(\xi+1)}\right) + \arctan\left(\frac{y_0}{\xi-x}\right)\right)}{(\xi+x)^2 + y_0^2}. \end{aligned} \quad (67)$$

Damit ergibt sich die Wirbelbelegung der Platte zu

$$\begin{aligned} \gamma_p(x) = \gamma_{pw}(x) - \gamma_{ph}(x) = & -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \oint_0^\infty \frac{\gamma_w(\xi)}{x-\xi} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi}} d\xi - \\ & -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{-x}{x+1}} \int_0^\infty \gamma_h(\xi) \sqrt{\frac{(\xi+1)^2 + y_0^2}{\xi^2 + y_0^2}} \\ & \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y_0}{\xi(\xi+1)}\right) + \arctan\left(\frac{y_0}{\xi-x}\right)\right)}{(\xi+x)^2 + y_0^2} d\xi. \end{aligned} \quad (68)$$

Die vertikale Geschwindigkeitsstörung

$$v_1(x) = v_{1w}(x) + v_{1h}(x) \quad (69)$$

an der Mittellinie des Nachlaufs ($x > 0$) wird in den Anteil zufolge der Druckdifferenz über den Nachlauf $v_{1w}(x)$ und in jenen zufolge des Hindernisses $v_{1h}(x)$ aufgeteilt. Die von der Temperaturverteilung im Nachlauf ($x > 0$) verursachte Geschwindigkeit

$$v_{1w}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \oint_0^\infty \frac{\gamma_w(\xi)}{x-\xi} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi}} d\xi \quad (70)$$

entspricht jener des selbstinduzierten Problemstellung aus Kapitel 3.

Zur Ermittlung der von der Wirbelbelegung des Hindernisses induzierten Vertikalgeschwindigkeit der Nachlaufmittellinie sind die zugehörigen Stromfunktionen partiell abzuleiten. Dabei wird von der Wirbelbelegung der Platte $\gamma_p(x)$ ausschließlich der vom Hindernis verursachte Anteil $\gamma_{ph}(x)$ verwendet

$$v_{1h}(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^0 \frac{\gamma_{ph}(\xi)}{x-\xi} d\xi + \int_0^\infty \frac{\gamma_h(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y_0^2} d\xi \right]. \quad (71)$$

Da die in (71) und (70) vorkommenden Wirbelbelegungen bereits festgelegt sind, kann die vertikale Geschwindigkeitskomponente $v_1(x)$ an der Mittellinie errechnet werden.

Aus dieser Geschwindigkeitsstörung wird nun die Steigung des Nachlaufs

$$\bar{y}'_w(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\kappa^2}{\lambda} v_{1w} + \frac{\zeta^2}{\lambda} v_{1h} \quad (72)$$

bestimmt. Dabei wird die Geschwindigkeitsstörung v_{1w} aufgrund des Nachlaufs wie bereits in (25) mit dem Quadrat des reduzierten Auftriebsparameters κ berücksichtigt. Den Einfluss des Hindernisses auf die Nachlaufneigung gibt der neue Parameter ζ an.

Der Zusammenhang zwischen der Stromfunktion Ψ und dem lokalen Neigungswinkel $\vartheta_h(x)$ des Hindernisses kann durch die Tangentialbedingung ermittelt werden, welche besagt, dass die Oberfläche des Körpers nicht durchströmt werden kann. Für die Oberseite des Hindernisses wird die Tangentialbedingung unter Verwendung der Stromfunktion zu

$$-\Psi_x(x, y_0+) = \vartheta_h(x). \quad (73)$$

Differenziert man (56) partiell nach x und setzt in (73) ein, ergibt sich der Zusammenhang

$$v_h(x) = \phi + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^0 \frac{\gamma_p(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y_0^2} d\xi + \oint_0^\infty \frac{\gamma_h(\xi)}{(x-\xi)} d\xi + \int_0^\infty \frac{\gamma_w(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y_0^2} d\xi \right]. \quad (74)$$

Da bei verschwindender Dicke die lokalen Neigungswinkel an Unter- und Oberseite identisch sind, ist die Form des Hindernisses durch (74) festgelegt.

8.1. Lösungsstrategie

Um die Rückwirkung der Temperaturverteilung im Nachlauf auf die Potentialströmung zu unterdrücken, wird der reduzierte Auftriebsparameter κ im Folgenden gleich Null gesetzt und somit ausschließlich der Einfluss des Hindernisses berücksichtigt. Durch diese Vorgehensweise können die Grenzschichtgleichungen im Nachlauf mit dem in Kapitel 5 vorgestellten Verfahren in einem Iterationsschritt bestimmt werden.

Um Rückschlüsse auf das Verhalten des selbstinduzierten Problems im kritischen Fall $\kappa = \kappa_c$ ziehen zu können, ist das Hindernis so vorzugeben, dass die horizontale Geschwindigkeitskomponente $\bar{u}_w(x, 0)$ an einer Stelle ($x_c > 0$) der Nachlaufmittellinie verschwindet. Aus diesem Grund werden mittels linearer Extrapolation direkt die Vertikalgeschwindigkeitskomponenten

$$v_{1h}(x) = v_{1(\kappa_2)} + \frac{v_{1(\kappa_2)}(x) - v_{1(\kappa_1)}(x)}{\kappa_2 - \kappa_1} (\zeta - \kappa_1) \quad (75)$$

vorgegeben. Dazu werden die beiden im Teil II für die Parameterwerte κ_1 und κ_2 errechneten Geschwindigkeitsverläufe $v_{1(\kappa_2)}(x)$ und $v_{1(\kappa_1)}(x)$ sowie der Parameter ζ herangezogen. Ein entsprechendes Hindernis kann mittels Lösung von (65), (71) sowie (74) bestimmt werden.

Das Gleichungssystem (28) kann mit den zugehörigen Randbedingungen (29) in einem Iterationsschritt, des in Kapitel 5 beschriebenen Verfahrens, gelöst werden. Die Lösung kann als Näherung der Lösung des selbstinduzierten Problems mit $\kappa = \zeta$ angesehen werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass der wachsende Einfluss des reduzierten Auftriebsparameters κ , aufgrund der linearen Approximation, deutlich unterschätzt wird.

Damit kann nun eine Grenzlösung für $\zeta = \zeta_c$ errechnet werden, bei der die horizontale Geschwindigkeitskomponente $\bar{u}_w(x, 0)$ an einer Stelle des Nachlaufs verschwindet. Dafür wird der Parameter ζ so lange um einen konstanten Betrag $\Delta\zeta$ erhöht und die zugehörige Lösung berechnet, bis der Gleichungslöser abbricht. Anschließend wird die Schrittweite $\Delta\zeta$ auf ein Zehntel vermindert und der Vorgang wiederholt. Auf diese Weise ist es möglich die Grenzlösung anzunähern.

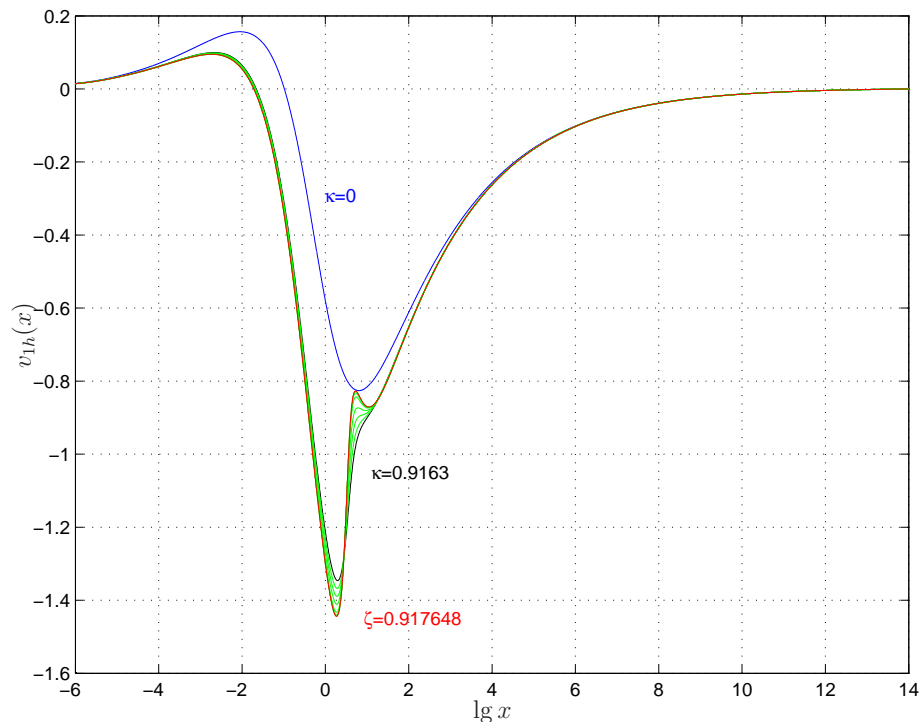


Abbildung 13: Vertikale Geschwindigkeit der Nachlaufzelle
 Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa \in \{0.0; 0.9163\}$,
 $\zeta \in \{0.9166; 0.9169; 0.9172; 0.9175; 0.9176; 0.91764; 0.917648\}$

9. Ergebnisse

9.1. Potentialströmung

Im Folgenden sind Lösungen für $\lambda = 1$ und $Pr = 0.71$ dargestellt. Ausgehend von den zuvor ermittelten Lösungen für $\kappa_1 = 0.9162$ und $\kappa_2 = 0.9163$ sowie dem Parameter $\zeta = 0.0163$ wird Letzterer zu Beginn der Rechnung in jedem Schritt um $\Delta\zeta = 0.0001$ erhöht.

Die nach (75) extrapolierten Verläufe von $v_{1h}(x)$ sind in Abbildung 13 dargestellt. Per Konstruktion ändern sich alle dargestellten Geschwindigkeitsverläufe mit zunehmendem ζ linear und nicht wie in Abbildung 7. Dadurch ist der kritische Parameter ζ_c jedenfalls größer als κ_c . Daraus lässt sich schließen, dass der kritische Parameter κ_c im Intervall $(0.9163, 0.917648)$ liegt.

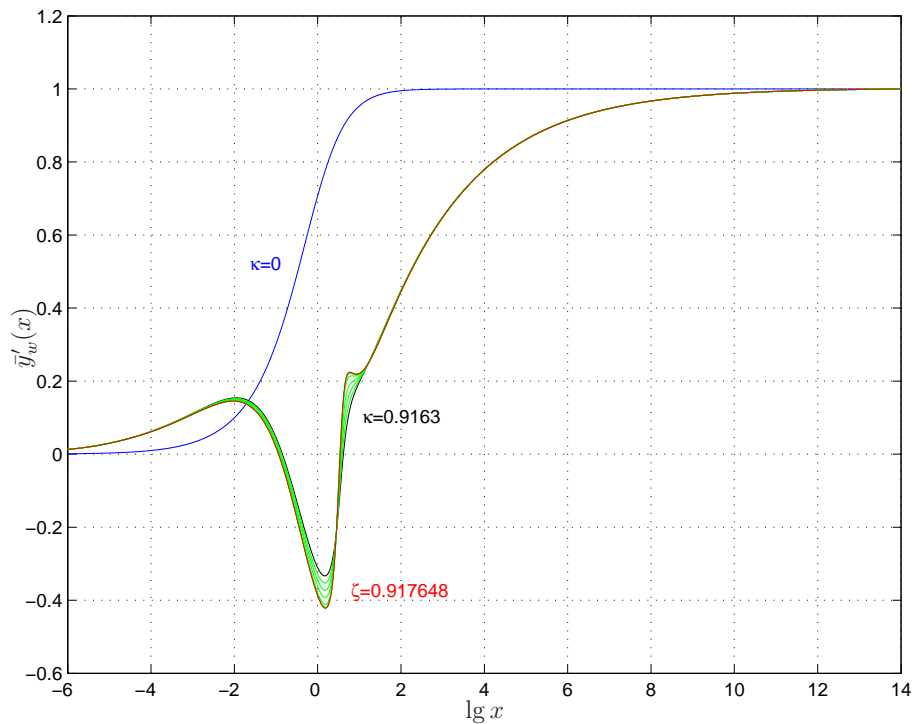


Abbildung 14: Skalierte Steigung der Mittellinie der Nachlaufdehle
 Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa \in \{0.0; 0.9163\}$,
 $\zeta \in \{0.9166; 0.9169; 0.9172; 0.9175; 0.9176; 0.91764; 0.917648\}$

Aus diesen Verläufen der Geschwindigkeit $v_1(x)$ werden mit Hilfe von (72) die in Abbildung 14 dargestellten, skalierten Steigungen \bar{y}'_w ermittelt. Das mit steigendem Parameter ζ immer schnellere Anwachsen der Steigung nach Erreichen des Minimums ist auch hier deutlich zu erkennen.

In Abbildung 15 sind die Wirbelbelegungen $\gamma_w(x)$ dargestellt, welche durch Lösen des Differentialgleichungssystems (28) mit Hilfe von (21) ermittelt werden. Man erkennt deutlich das massive Anwachsen der Wirbelbelegung in einem Abstand von $x_c \approx 3.34$ zur Hinterkante. Dies resultiert aus einem Verbreitern der Temperaturverteilung im Nachlauf und stellt den einzigen wesentlichen Unterschied im Verlauf der Wirbelbelegung dar. Aufgrund des mit steigendem Parameter ζ massiv zunehmenden Maximums der Wirbelbelegung ist nicht zu erwarten, dass dieses beschränkt bleibt. Somit kann von einer Singularität ausgegangen werden.

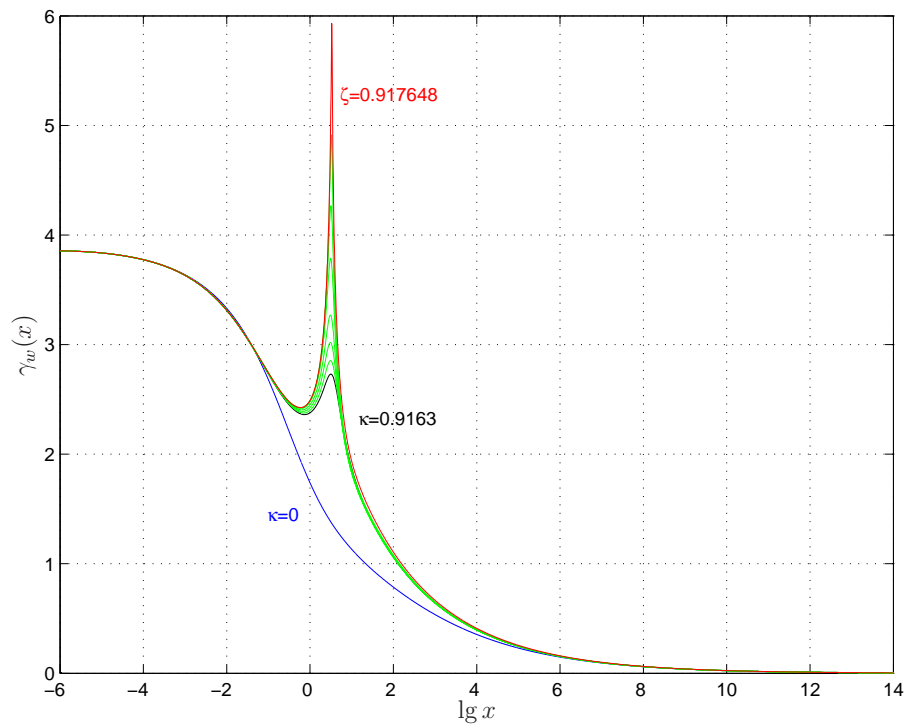


Abbildung 15: Wirbelbelegung im Nachlauf
 Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa \in \{0.0; 0.9163\}$,
 $\zeta \in \{0.9166; 0.9169; 0.9172; 0.9175; 0.9176; 0.91764; 0.917648\}$

9.2. Nachlaufströmung

In Abbildung 16 sind die zugehörigen Verläufe der horizontal Geschwindigkeit in der Mitte der Nachlaufdelle $\bar{u}_w(x, 0)$ dargestellt. Es ist gut zu sehen, dass diese im Grenzfall $\zeta = \zeta_c = 0.917648$ in der Entfernung von $x_c \approx 3.34$ auf Null absinkt und anschließend wieder ansteigt. Die Geschwindigkeit $\bar{u}_w(x, 0)$ sinkt dabei lokal linear mit einer Steigung von $\approx -1/5$ ab um nach Erreichen des Punktes x_c linear mit Steigung $\approx 1/3$ anzusteigen.

Die in Abbildung 17 dargestellten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile stammen aus der Nähe des kritischen Punktes x_c . Dabei ist deutlich zu erkennen, dass die Breite der Profile an diesem Punkt stark zunehmen und bei der Temperaturverteilung außerdem eine deutliche Abflachung auftritt. Dieses breite Temperaturprofil ist für die Singularität in der Wirbelbelegung verantwortlich, welche die hydrostatische Druckdifferenz repräsentiert.

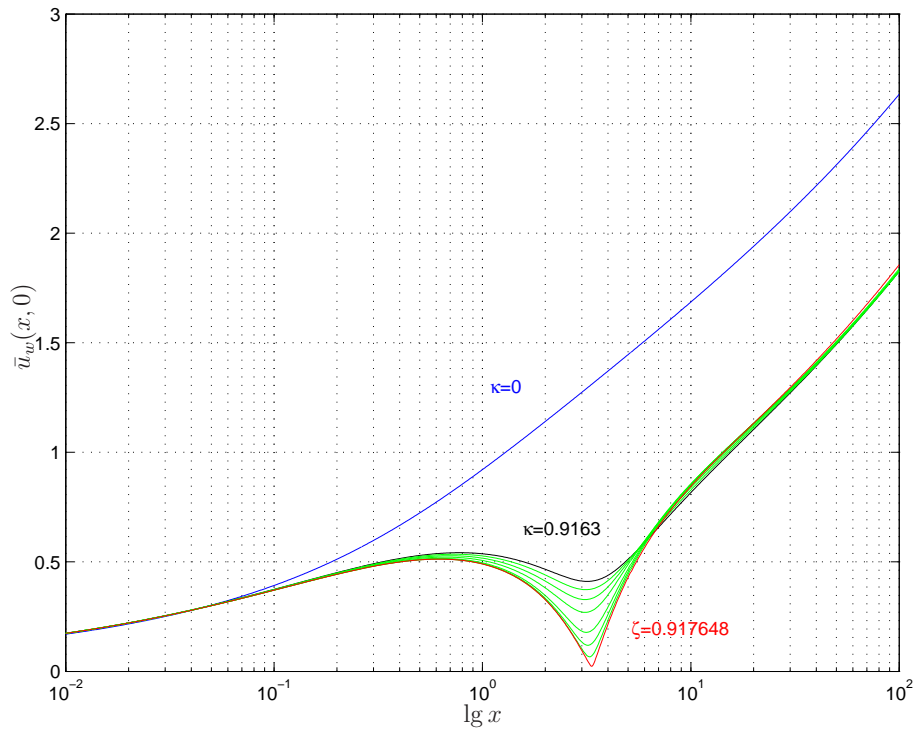


Abbildung 16: Horizontale Geschwindigkeit an der Grenzschichtmittellinie
 Parameter: $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$, $\kappa = 0.0; 0.9163$,
 $\zeta = 0.9166; 0.9169; 0.9172; 0.9175; 0.9176; 0.91764; 0.917648; 0.91764808$

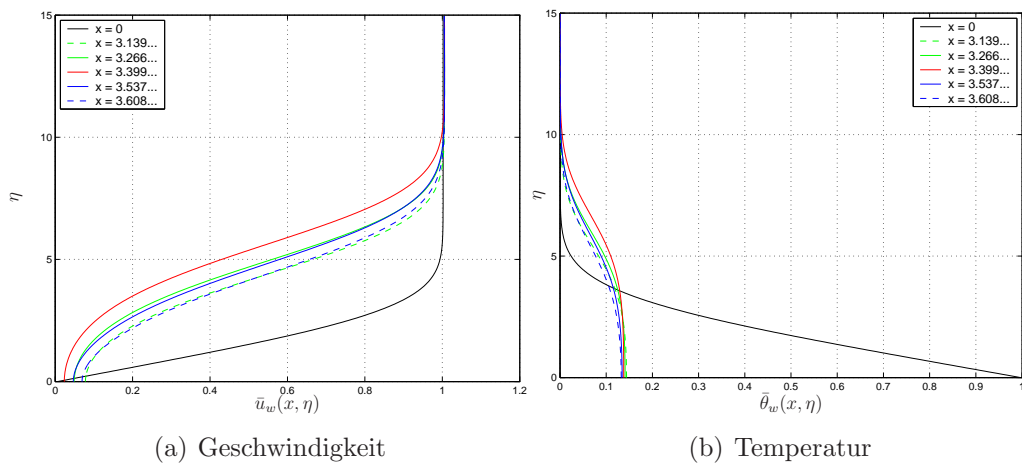


Abbildung 17: Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht
 $\zeta = 0.917648$, $\lambda = 1$, $Pr = 0.71$

10. Zusammenfassung

Beim selbstinduzierten Problem ist ein numerisches Lösen mit den zur Verfügung stehenden Verfahren nicht für alle Parameterkombinationen möglich. Aufgrund des Verlaufs der Wirbelbelegung γ_w bei hohen Werten von κ ist eine Singularität im Nachlauf zu vermuten. Bei vorgegebenen Parametern λ und Pr wird das Auftreten dieser Singularität durch den Parameter κ bestimmt und es existiert ein Grenzfall $\kappa = \kappa_c$, bei dem die Geschwindigkeit an einem Punkt x_c der Mittellinie der Nachlaufdecke verschwindet. Mit den zur Verfügung stehenden Verfahren können die Gleichungen auf numerischem Wege nicht hinreichend nahe an diesem kritischen Parameter gelöst werden, um das lokale Verhalten um den Punkt x_c im Grenzfall exakt zu charakterisieren.

Wird die Nachlaufneigung mit Hilfe eines vorgeschriebenen Hindernisses so vorgegeben, dass die Geschwindigkeit $\bar{u}_w(x, 0)$ an einem Punkt $x_c \approx 3.34$ der Mittellinie der Grenzschicht verschwindet, zeigt sich, dass die Wirbelbelegung in einem Abstand x_c von der Hinterkante tatsächlich singulär wird. Dies resultiert aus der starken Verbreiterung des Temperaturprofils im Nachlauf.

Im Weiteren sind analytische Untersuchungen nötig, in welchen das lokale Verhalten durch asymptotische Methoden bestimmt wird. Grundlagen zum Ansatz der dafür benötigten Entwicklungen können die in Kapitel 9 dargestellten Ergebnisse liefern. Vermutlich ist es nötig, im Zuge einer angepassten asymptotischen Entwicklung, zusätzliche Gebiete mit lokal unterschiedlichen Skalierungen um den kritischen Punkt x_c zu entwickeln.

Anhang

Abbildungsverzeichnis

1.	Nachlauf einer beheizten Platte bei gemischter Konvektion .	1
2.	Modellierung durch Wirbelbelegungen	7
3.	Konvergenz des iterativen Lösungsverfahrens	17
4.	Zweidimensionaler "SIMPLEX"-Algorithmus	21
5.	Elimination des oszillierenden Unterraums	23
6.	Wirbelbelegung im Nachlauf	25
7.	Vertikale Geschwindigkeit der Nachlauf-delle	26
8.	Skalierte Steigung der Mittellinie der Nachlauf-delle	27
9.	Horizontale Geschwindigkeit an der Grenzschichtmittellinie .	28
10.	Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht	30
11.	Temperaturprofile der Grenzschicht	30
12.	Hindernis im Nachlauf einer Platte	31
13.	Vertikale Geschwindigkeit der Nachlauf-delle	37
14.	Skalierte Steigung der Mittellinie der Nachlauf-delle	38
15.	Wirbelbelegung im Nachlauf	39
16.	Horizontale Geschwindigkeit an der Grenzschichtmittellinie .	40
17.	Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht .	40

Symbolverzeichnis

Griechische Buchstaben

Γ	Iterationsoperator des beschleunigt Verfahrens
Ψ	Stromfunktion
Ω	Integrationsweg
α, β	Faktoren der Linearkombination
β	Isothermer Ausdehnungskoeffizient
γ	Wirbelbelegung
$\Delta\gamma_A$	Eigenvektor zu den Eigenwerten μ des beschl. Verfahrens
$\Delta\gamma_a, \Delta\gamma_b$	Basisvektoren der oszillierenden Lösung
δ, ξ	Integrationsvariablen
ε	Schranken für numerische Konvergenz
ζ	Parameter zur Charakterisierung des Hindernisses
η	Skalierte Koordinate der Nachlaufströmung
$\Delta\eta$	Konstanter Abstand der Knotenpunkte in η -Richtung
θ	Dimensionslose Temperatur
ϑ	Lokaler Neigungswinkel
κ	Reduzierter Auftriebsparameter
λ	Dimensionsloser Parameter zur Charakterisierung der Wirkung des Auftriebs auf den Nachlauf
μ	Eigenwerte des linearen Anteils des Iterationsoperators
ν	Kinematische Viskosität des Fluids
ρ	Dichte des Fluids
ϕ	Anströmwinkel
φ	Argument einer komplexen Größe

Lateinische Buchstaben

A_j, B_j	Auf einem Intervall I_j konstante Werte zur Linearisierung
D	Skalierte Temperaturfunktion
F	Skalierte Stromfunktion
G	Gradient der Temperaturfunktion in η -Richtung
Gr	Grashofzahl
I	Intervall
J	Minimierungsfunktion zur Eigenraumelimination
K	Auftriebsparameter
L	Länge der Platte
N_η, N_x	Anzahl der Knotenpunkte in η - und x -Richtung
N	Gesamtzahl der Knotenpunkte

P	Periode einer Oszillation
Pr	Prandtlzahl
Re	Reynoldszahl
T	Temperatur
U	Geschwindigkeit
a, b	Intervallgrenzen
c_p	Isobare Wärmekapazität des Fluids
f	Faktor zur horizontalen Gitterstreckung
g	Erdbeschleunigung
k	Wärmeleitfähigkeit des Fluids
p	Druck
u, v	horizontale und vertikale Geschwindigkeitskomponente
u_1, v_1	Störgeschwindigkeitskomponenten erster Ordnung
x, y	Koordinaten
Δx_0	Horizontale Erstreckung der ersten Zelle des Integrationsgebiets
y_0	Vertikaler Abstand des Hindernisses
z	Komplexer Ortsvektor

Indizes

η	Partielle Ableitung in η -Richtung
B	Kennzeichnet die Randbedingungen an der Plattenhinterkante
c	Kritische Werte hinsichtlich des Verschwindens der "Mittengeschwindigkeit"
h	Die so gekennzeichneten Größen beziehen sich auf das Hindernis
k	Kritischer Wert hinsichtlich der Konvergenz
m, n	Nummer des Knotenpunktes in η - bzw. x -Richtung
p	Die so gekennzeichneten Größen beziehen sich auf die Platte
w	Die so gekennzeichneten Größen beziehen sich auf den Nachlauf
x	Partielle Ableitung in x -Richtung
∞	Kennzeichnet Größen der ungestörten Strömung

Weitere Zeichen

*	Kennzeichnet den Fixpunkt des Iterationsoperators
\sim	Kennzeichnet einheitenbehaftete Größen
-	Kennzeichnet Größen der Grenzschichtskalierung
(j)	Kennzeichnet den j -ten Iterationsschritt
'	Ableitung

Literatur

- [NAG] *NAG C Library Manual, Mark 8*
Printed and produced by NAG, December 2005, ISBN: 978-1-85206-206-4
- [S00] I. J. Sobey, *Introduction to Interactive Boundary Layer Theorie*
Oxford University press, Oxford 2000, ISBN: 0-19-850675-9
- [S05] W. Schneider, *Lift, trust and heat transfer due to mixed convection flow past a horizontal plate of finite length*
J. Fluid Mech. 529, 2005, 51 - 69
- [S07] B. Scheichl *SPARSOL: C-Programm zur Lösung großer nichtlinearer, spärlich besetzter, algebraischer Gleichungssysteme*
TU Wien 2007
Eingereicht zur Evaluierung bei NAG Ltd. UK, zwecks Implementierung in der Fortran Library Mark 23
- [S78] W. Schneider, *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1978, ISBN: 3-528-03573-0
- [SG00] H. Schlichting, K. Gersten, *Boundary-layer theory*
Springer, Berlin 2000, ISBN: 9783540662709
- [SW85] W. Schneider, M.G. Wasel, *Breakdown of the boundary-layer approximation for mixed convection above a horizontal plate*
Int. J. Heat Mass Transfer 28, 1985, 2307 - 2313
- [SS05] Lj. Savić, H. Steinrück, *Mixed convection flow past a horizontal plate*
Theoret. Appl. Mech., Vol.32, No.1, pp. 1-19, Belgrade 2005
- [SS07] Lj. Savić, H. Steinrück, *The trailing-edge problem for mixed-convection flow past a horizontal plate*
J. of Fluid Mech., 588, 2007 , 309 - 330