TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

Über die Bewertung geometrischer Asiatischer Optionen im Binomial-, Black-Scholes und in Lévyprozess-Modellen

ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Yihong KANG

0326087, E873

1050 Wien, Brandmayergasse 18/6

28. April 2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung/Überblick **3**

I. Allgemeine Finanzmathematik und das Black-Scholes-Modell **5**

1. Portfoliodynamik **6**
1.1. Einführung 6
1.2. Selbstfinanzierende Portfolios 9

2. Arbitragefreie Bewertung **12**
2.1. Einführung 12
2.2. Contingent-Claims und Arbitrage 13
2.3. Die Black-Scholes-Gleichung 16
2.4. Risikoneutrale Bewertung 18
2.5. Die Black-Scholes-Formel 20
2.6. Volatilität 21
2.6.1. Historische Volatilität 21
2.6.2. Implizierte Volatilität 22

3. Black-Scholes vom Martingal-Standpunkt **23**
3.1. Arbitragefreiheit 23
3.2. Bewertung 25
3.3. Vollständigkeit 25

4. Numeraire-Wechsel **29**
4.1. Einführung und Allgemeinheiten 29
4.2. Girsanov-Transformation für Numeraire-Wechsel 31

II. Finanzmarkt mit dem CRR-Binomialmodell **34**

5. Finanzmarkt mit dem CRR-Binomialmodell **35**
5.1. Beschreibung des Modells 35
5.2. Portfolios und Arbitrage-Überlegungen 37
5.3. Bepreisung von Contingent-Claims 38

III. Asiatische Optionen 42

6. Asiatische Optionen 43

6.1. Arithmetische Asiatische Optionen . . . 44

6.1.1. Call mit diskretem Monitoring . . . 44

6.1.2. Call mit stetigem Monitoring . . . 45

6.2. Geometrische Asiatische Optionen . . . 46

6.2.1. Call mit diskretem Monitoring . . . 46

6.2.2. Call mit stetigem Monitoring . . . 51

7. Binomialmodelle mit einer Zustandsvariablen für geometrische Asiatische Optionen 52

7.1. Binomialmodelle für Europäischen Typ mit stetiger Mittelbildung . . . 53

7.1.1. Floating Strike Optionen . . . 53

7.1.2. Fixed Strike Optionen . . . 55

7.1.3. Numerische Simulation . . . 56

7.2. Erweiterung zum Amerikanischen Typ . . . 58

8. Äquivalenz von Asiatischen Optionen 60

8.1. Grundmodell . . . 60

8.2. Äquivalenz von Asiatischen Optionen . . . 62

A. Anhang 65

Einleitung/Überblick

Die Arbeit hat drei Teile:

- Teil I ist eine Einführung in allgemeine Finanzmathematik, speziell das Black-Scholes-Modell. Das wird in Teil III, Kapitel 7.2 auf geometrische Asiatische Optionen angewendet.

- In Teil II wird das CRR-Binomialmodell vorgestellt, das wird in Teil III Kapitel 8.1 auf Asiatische Optionen erweitert.

- In Teil III wird zuerst ein Überblick über Asiatische Optionen (arithmetisch und geometrisch) gegeben, dann werden explizite Formeln für geometrische Optionen im Black-Scholes-Modell und effiziente Implementierung für Binomialmodell geliefert. Die Arbeit schließt mit einer Übersetzung aus der Arbeit von Zang und Yang (2008) über Äquivalenz von Asiatischen Optionen.

Teil I.

Allgemeine Finanzmathematik und das Black-Scholes-Modell

Kapitel 1.

Portfoliodynamik

1.1. Einführung

Dieses Kapitel orientiert sich an Björk (2004) Kapitel 6, S.80-87.
Wir betrachten einen Finanzmarkt, der aus verschiedenen Assets wie z.B. Aktien, Anleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten, oder diversen Finanzderivaten besteht. In diesem Kapitel wird die Dynamik (der Wert) eines sog. selbstfinanzierenden Portfolios analysiert. Wir beginnen mit der Untersuchung eines Modells in diskreter Zeit, dann lassen wir die Länge des Zeitintervalls gegen 0 gehen und erhalten somit das entsprechende Modell in stetiger Zeit.
Nun betrachten wir also ein Marktmodell, wobei die Zeit in Perioden der Länge Δt geteilt wird, und man nur zu den Zeitpunkten $n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots$ handeln kann. Eine bestimmte Periode $[t, t+\Delta t)$ (wobei $t = n\Delta t$ für ein n) wird ,,Periode t" genannt. In der Folge nehmen wir der sprachlichen Einfachheit halber an, dass alle Assets Aktien sind.

Definition 1.1.

$$\begin{aligned}
N &= \text{Anzahl der verschiedenen Arten von Aktien.}\\
h_i(t) &= \text{Anzahl der Aktien } i \text{ im Zeitraum } [t, t+\Delta t).\\
h(t) &= \text{das Portfolio } [h_1(t), \dots, h_N(t)] \text{ in } [t, t+\Delta t).\\
c(t) &= \text{Konsumverbrauch pro Zeiteinheit in } [t, t+\Delta t).\\
S_i(t) &= \text{Preis einer Aktie } i \text{ in } [t, t+\Delta t).\\
V(t) &= \text{der Wert vom Portfolio } h \text{ zur Zeit } t.
\end{aligned}$$

Die Informationen und Entscheidungen sind wie folgt strukturiert:

- Zur Zeit t, d.h. am Anfang der Periode t nehmen wir das alte Portfolio $h(t-\Delta t) = \{h_i(t-\Delta t), i = 1, \dots, N\}$ von der vorigen Periode $t - \Delta t$.

- Zur Zeit t können wir den Preisvektor $S(t) = (S_1(t), \ldots, S_N(t))$ beobachten.
- Zur Zeit t, nachdem wir $S(t)$ beobachtet haben, wählen wir ein neues Portfolio $h(t)$ für die Periode t. Gleichzeitig wählen wir auch die Konsumrate $c(t)$ für die Periode t. Es wird angenommen, dass $h(t)$ und $c(t)$ konstant über die Periode t sind.

Bemerkung 1.1.1. Wir betrachten nur Assets ohne Dividenden.

Wir werden uns nur mit den sog. selbstfinanzierenden Portfolio-Konsum Paaren (h, c) beschäftigen, d.h. während des Handels wird kein Geld in das Portfolio hineingepumpt oder herausgenommen (außer c). Mit anderen Worten, sowohl das neue Portfolio als auch der Konsum muss allein durch den Verkauf von Assets, die bereits im Portfolio sind, finanziert werden.
Unser Vermögen $V(t)$ am Anfang der Periode t ist gleich dem Wert des alten Portfolios $h(t - \Delta t)$. Also

$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t - \Delta t) S_i(t) = h(t - \Delta t) S(t), \tag{1.1}$$

hier haben wir die Notation

$$xy = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

fürs innere Produkt in $\mathbf{R}^N$ verwendet. Gleichung (1.1) sagt, dass am Anfang der Periode t unser Vermögen gleich was wir bekommen, wenn wir unser altes Portfolio zu den heutigen Preisen verkaufen. Wir können jetzt den Erlös aus dem Verkauf für zwei Zwecke verwenden:

- Reinvestieren in ein neues Portfolio $h(t)$.
- Konsumieren zur Rate $c(t)$ über die Periode t.

Die Kosten vom neuen Portfolio $h(t)$, das zu den heutigen Preisen gekauft wird, sind gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{N} h_i(t) S_i(t) = h(t) S(t),$$

während die Kosten für die Konsumrate $c(t)$ durch $c(t)\Delta t$ gegeben sind. Die Budgetgleichung für die Periode t lautet also

$$h(t - \Delta t) S(t) = h(t) S(t) + c(t) \Delta t. \tag{1.2}$$

Wenn wir die Notation

$$\Delta X(t) = X(t) - X(t - \Delta t),$$

für einen beliebigen Prozess X einführen, dann sieht die Budgetgleichung (1.2) folgendermaßen aus

$$S(t)\Delta h(t) + c(t)\Delta t = 0. \tag{1.3}$$

Um die Budgetgleichung in stetiger Zeit zu erhalten, lassen wir $\Delta t \to 0$ in Gleichung (1.3)

$$S(t)\mathrm{d}h(t) + c(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Das Verfahren ist jedoch nicht richtig aus folgenden Gründen:

- Alle stochastischen Differentiale sind im Itô-Sinne zu interpretieren.
- Das Itô-Integral $\int g(t)dW(t)$ ist als Grenzwert der folgenden Summe

  $$\sum g(t_n)[W(t_{n+1}) - W(t_n)]$$

  definiert, wobei die W-Inkremente Vorwärtsdifferenzen sind.
- In Gleichung (1.3) haben wir Rückwärtsdifferenz h.

Um Itô-Differentiale zu bekommen, müssen wir also Gleichung (1.3) umformen. Wir addieren und subtrahieren den Term $S(t-\Delta t)\Delta h(t)$ auf der linken Seite, dann lautet die Budgetgleichung

$$S(t-\Delta t)\Delta h(t) + \Delta S(t)\Delta h(t) + c(t)\Delta t = 0. \tag{1.4}$$

Jetzt lassen wir $\Delta t \to 0$ in der Budgetgleichung (1.4), dies ergibt

$$S(t)\mathrm{d}h(t) + \mathrm{d}h(t)\mathrm{d}S(t) + c(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{1.5}$$

Grenzübergang $\Delta t \to 0$ in Gleichung (1.1) liefert uns

$$V(t) = h(t)S(t), \tag{1.6}$$

das Itô-Differential von diesem Ausdruck ist

$$\mathrm{d}V(t) = h(t)\mathrm{d}S(t) + S(t)\mathrm{d}h(t) + \mathrm{d}S(t)\mathrm{d}h(t). \tag{1.7}$$

Gleichung (1.7) ist die allgemeine Gleichung für die Dynamik eines beliebigen Portfolios, und Gleichung (1.5) ist die Budgetgleichung, die für alle selbstfinanzierenden Portflios gilt. Einsetzen von (1.5) in (1.7) liefert uns das gewünschte ergebnis, nämlich die Dynamik eines selbstfinanzierenden Portfolios.

$$\mathrm{d}V(t) = h(t)\mathrm{d}S(t) - c(t)\mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

Ohne Konsum sieht die Dynamik wie folgt aus:

$$\mathrm{d}V(t) = h(t)\mathrm{d}S(t). \tag{1.9}$$

1.2. Selbstfinanzierende Portfolios

Der vorige Abschnitt dient als Motivation, jetzt geben wir eine mathematische Definition von den zentralen Konzepten an.

Definition 1.2. Gegeben ist ein N-dimensionaler Preis Prozess $\{S(t); t \geq 0\}$.

1. Ein **Portfoliostrategie** (oft auch kurz Portfolio genannt) ist ein $\mathcal{F}_t^S$-adaptierter N-dimensionaler Prozess $\{h(t); t \geq 0\}$.

2. Das Portfolio h heißt **Markovsch**, wenn
$$h(t) = h(t, S(t)),$$
für eine Funktion h: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$.

3. Der entsprechende **Wertprozess** V^h ist gegeben durch
$$V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) S_i(t). \tag{1.10}$$

4. Ein **Konsumprozess** ist ein $\mathcal{F}_t^S$-adaptierter N-dimensionaler Prozess $\{c(t); t \geq 0\}$.

5. Ein Portfolio-Konsum Paar (h, c) heißt **selbstfinanzierend**, wenn der Wertprozess V^h die folgende Bedingung erfüllt
$$\mathrm{d}V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) \mathrm{d}S_i(t) - c(t)\mathrm{d}t, \tag{1.11}$$
d.h. wenn
$$\mathrm{d}V^h(t) = h(t)\mathrm{d}S(t) - c(t)\mathrm{d}t,$$

Bemerkung 1.2.1. Im Allgemeinen kann das Portfolio $h(t)$ von der ganzen Trajektorie $\{S(u); u \geq t\}$ abhängen. In der Folge betrachten wir fast ausschließlich Markovsche Portfolios, d.h. Portfolios, deren Wert zur Zeit t nur vom heutigen Datum t und heutigen Preisvektor $S(t)$ abhängig ist.

In der Praxis ist oft das relative Portfolio nützlich, d.h. statt der absoluten Anzahl von einer bestimmten Aktie, berechnen wir den relativen Anteil der Aktie am gesamten Portfolio.

Definition 1.3. Für ein gegebenes Portfolio h ist das entsprechende **relative Portfolio** gegeben durch

$$u_i(t) = \frac{h_i(t)S_i(t)}{V^h(t)}, \; i = 1, \dots, N, \tag{1.12}$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1.$$

Die Bedingung für selbstfinanzierende Portfolios kann auch durch Terme vom relativen Portfolio gegeben werden.

Lemma 1.4. *Ein Portfolio-Konsum Paar (h, c) ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$\mathrm{d}V^h(t) = V^h(t) \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \frac{\mathrm{d}S_i(t)}{S_i(t)} - c(t)\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

Das folgende Lemma besagt, wenn ein Prozess wie der Wertprozess eines selbstfinanzierenden Portfolios aussieht, dann ist er tatsächlich ein solcher Prozess.

Lemma 1.5. *Sei c ein Konsumprozess und angenommen, dass es ein Skalarprozess Z und ein Vektorprozess $q = (q_1, \dots, q_N)$ gibt, sodass*

$$\mathrm{d}Z(t) = Z(t) \sum_{i=1}^{N} q_i(t) \frac{\mathrm{d}S_i(t)}{S_i(t)} - c(t)\mathrm{d}t, \tag{1.14}$$

$$\sum_{i=1}^{N} q_i(t) = 1. \tag{1.15}$$

Nun definiere ein Portfolio h mit

$$h_i(t) = \frac{q_i(t)Z_i(t)}{S_i(t)}. \tag{1.16}$$

Dann ist der Wertprozess V^h gegeben durch $V^h = Z$, das Paar (h, c) ist selbstfinanzierend und das zugehörige relative Portfolio ist gegeben durch $u = q$.

Beweis. Nach Definition ist der Wertprozess gegeben durch $V^h(t) = h(t)S(t)$, aus Gleichung (1.15) und (1.16) folgt

$$V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t)S_i(t) = \sum_{i=1}^{N} q_i(t)Z(t) = Z(t) \sum_{i=1}^{N} q_i(t) = Z(t). \tag{1.17}$$

Durch Einsetzen von (1.17) in (1.16) sehen wir, dass das zu h zugehörige relative Portfolio u durch $u = q$ gegeben ist. Durch Einsetzen von (1.17) und (1.16) in (1.14) erhalten wir

$$\mathrm{d}V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t)\mathrm{d}S_i(t) - c(t)\mathrm{d}t,$$

dies zeigt, dass (h, c) selbstfinanzierend ist. $\square$

Kapitel 2.

Arbitragefreie Bewertung

2.1. Einführung

Dieses Kapitel orientiert sich an Björk (2004) Kapitel 7, S.88-110. In diesem Kapitel untersuchen wir die arbitragefreie Bewertung von Contingent-Claims. Wir betrachten einen Finanzmarkt bestehend aus nur zwei Assets: eine risikofreie Anlage mit Preisprozess B und eine Aktie mit Preisprozess S.

Definition 2.1. Der Preisprozess B ist der Preis **einer risikofreien** Anlage, wenn

$$\mathrm{d}B(t) = r(t)B(t)\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

wobei r ein adaptierter Prozess ist.

Eine risikofreie Anlage hat also keinen $\mathrm{d}W$-Term. Wir können die B-Dynamik auch als

$$\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} = r(t)B(t)$$

schreiben, der B-Prozess ist daher gegeben durch

$$B(t) = B(0)\exp\int_0^t r(s)\mathrm{d}s.$$

Eine risikofreie Anlage entspricht einem Bankkonto mit dem **Zinssatz** r. Wenn r konstant ist, können wir B als eine Anleihe interpretieren.
Wir gehen davon aus, dass der Aktienpreis S durch

$$\mathrm{d}S(t) = S(t)\alpha(t, S(t))\mathrm{d}t + S(t)\sigma(t, S(t))\mathrm{d}\overline{W}(t) \tag{2.2}$$

gegeben ist, wobei $\overline{W}$ ein Wiener-Prozess, α und σ deterministische Funktionen sind. Die Funktion σ ist die **Volatilität** von S und α die **lokale mittlere Rendite** von S.

Bemerkung 2.1.1. Die Rendite von B ist formal gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}B(t)}{B(t)\cdot \mathrm{d}t} = r(t),$$

sie ist **lokal deterministisch** im Sinne, dass wir zur Zeit t komplette Kenntnis von der Rendite haben, indem wir die aktuelle Rendite $r(t)$ beobachten. Die Rendite von der Aktie S ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)\cdot \mathrm{d}t} = \alpha(t,S(t)) + \sigma(t,S(t))\frac{\mathrm{d}\overline{W}(t)}{\mathrm{d}t},$$

diese ist nicht beobachtbar zur Zeit t. $\alpha(t,S(t))$ und $\sigma(t,S(t))$ sind beobachtbar zur Zeit t, aber das ,,weiße Rauschen" $\frac{\mathrm{d}\overline{W}(t)}{\mathrm{d}t}$ ist zufällig. Die Aktie hat also eine **stochastische Rendite**.

Der wichtigste Spezialfall vom obigen Modell ist, wenn r, α und σ deterministische Konstanten sind. Das ist das **Black-Scholes-Modell**.

Definition 2.2. Das **Black-Scholes-Modell** besteht aus zwei Assets mit Dynamik gegeben durch

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{d}S(t) = \alpha S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}\overline{W}(t), \tag{2.4}$$

wobei r, α und σ deterministische Konstanten sind.

2.2. Contingent-Claims und Arbitrage

Wir nehmen einen Finanzmarkt gegeben durch Gleichung (2.1)-(2.2) als Modell, und kommen zur Bewertung von Finanzderivaten. Zuerst betrachten wir die wichtigste Derivate - die europäische Option.

Definition 2.3. Eine **europäische Call Option** mit **Ausübungspreis** (oder Strike Preis) K und **Laufzeit** (Ausübungsdatum) T auf einen **Basiswert** (Underlying, Underlying Asset) S ist ein Kontrakt, der folgende Eigenschaften erfüllt.

- Der Optionsinhaber hat das Recht, aber nicht die Pflicht, zur Zeit T den Basiswert zum Preis K zu kaufen.

- Das Recht kann nur am Ende der Laufzeit T ausgeübt werden.

Der Ausübungspreis K und die Laufzeit T werden beim Abschließen des Optionsvertrags (normalerweise t=0) bestimmt. Eine **europäische Put Option** ist eine Option, die dem Inhaber das Recht gibt, den Basiswert zu einem bestimmten Preis zu **verkaufen**. Bei **amerikanischen Optionen** kann das Optionsrecht im Gegensatz zu europäischen Optionen während der gesamten Laufzeit ausgeübt werden. Alle diese Kontrakte basieren auf den Basiswert S, deshalb werden sie **derivative Instrumente** oder **Contingent-Claims** genannt. Nun geben wir eine formale Definition eines Contingent-Claims an.

Definition 2.4. Betrachte einen Finanzmarkt mit Vektorpreisprozess S. Ein **Contingent-Claim** mit **Laufzeit** T, auch T-Claim genannt, ist eine Zufallsvariable $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_T^S$. Ein Contingent-Claim $\mathcal{X}$ ist ein **einfaches** Claim, wenn es von der folgenden Form ist:

$$\mathcal{X} = \Phi(S(T)).$$

Die Funktion Φ ist die **Vertragsfunktion**.

Die Interpretation dieser Definition ist, dass ein Contingent-Claim ein Vertrag ist, der vorsieht, dass der Inhaber zur Zeit T $\mathcal{X}$ Euro erhält. Die Anforderung $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_T^S$ bedeutet, dass es möglich ist, zur Zeit T die Auszahlung zu bestimmen. Die europäische Call Option ist ein einfaches Contingent-Claim, die Vertragsfunktion ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \max[x - K, 0].$$

Der Preis der Option hängt von der Zeit t und dem Kurs $S(t)$ des Basiswertes ab. Unser Hauptproblem ist, einen „fairen" Preis für das Claim zu bestimmen. Wir bezeichnen den Preis mit $\Pi(t; \mathcal{X})$, manchmal $\Pi(t; \Phi)$ für einfache Claims.
Die Situation für T ist einfach, wir haben die Beziehung

$$\Pi(T; \mathcal{X}) = \mathcal{X}, \tag{2.5}$$

und im Falle eines einfachen Claims

$$\Pi(T; \mathcal{X}) = \Phi(S(T)). \tag{2.6}$$

Für $t < T$ ist der richtige Preis für ein Claim $\mathcal{X}$ gar nicht offensichtlich. Unter ein paar Annahmen gibt es eine Formel (die Black-Scholes Formel), welche den Preis einer Option eindeutig bestimmt. Die Hauptannahme ist, dass der Markt **frei von Arbitrage Möglichkeiten** ist.

Definition 2.5. Eine **Arbitrage** Möglichkeit auf einem Finanzmarkt ist ein selbstfinanzierendes Portfolio, sodass

$$V^h(0) = 0, \tag{2.7}$$

$$P(V^h(T) \geq 0) = 1, \tag{2.8}$$

$$P(V^h(T) > 0) > 0. \tag{2.9}$$

Ein Markt ist **arbitragefrei**, wenn es keine Arbitrage Möglichkeiten gibt.

Eine Arbitrage Möglichkeit ist also die Möglichkeit, einen risikolosen Gewinn zu machen. Wir interpretieren eine Arbitrage Möglichkeit als schwere Fehlbewertung auf dem Markt.

Annahme 2.2.1. Wir nehmen an, dass der Preisprozess $\Pi(t)$ ist, sodass es keine Arbitrage Möglichkeiten auf dem Markt bestehend aus $(B(t), S(t), \Pi(t))$ gibt.

Proposition 2.6. *Angenommen es existiert ein selbstfinanzierendes Portfolio h, sodass der Wertprozess V^h die Dynamik*

$$\mathrm{d}V^h(t) = k(t)V^h(t)\mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

hat, wobei k ein adaptierter Prozess ist. Dann muss $k(t) = r(t)$ für alle t gelten, sonst existiert eine Arbitrage Möglichkeit.

Beweis. Wir nehmen einfachheitshalber an, dass k und r konstant sind und $k > r$. Dann können wir Geld von der Bank ausleihen mit dem Zinsatz r. Das Geld wird sofort in das Portfolio h investiert, wobei es mit der Rate k wachsen wird mit $k > r$. Die Nettoinvestition bei $t = 0$ ist also null, während der Wert für $t > 0$ positiv wird. In anderen Worten haben wir ein Arbitrage. Wenn $r > k$, verkaufen wir das Portfolio h leer und investieren das Geld in die Bank, und wieder haben wir ein Arbitrage. Die Fälle mit nicht-konstanten und nicht-deterministischen r und k funktionieren auf gleiche Weise. $\square$

Der Hauptpunkt der obigen Proposition ist, wenn ein Portfolio einen Wertprozess hat, dessen Dynamik keinen Wiener-Prozess enthält, d.h. ein **lokal risikoloser Portfolio**, dann muss die Rendite des Portfolios gleich dem Zinsatz sein. Wir können das Portfolio h auch als eine Bank mit dem Zinsatz k interpretieren. In diesem Fall können wir sagen, dass auf einem arbitragefreien Markt nur ein Zinssatz existieren kann.
Nun kommen wir zurück zur Frage, wie der Preisprozess $\Pi(t; \mathcal{X})$ für ein Contingent-Claim verhalten kann. Da das Claim ganz in Bezug auf den Basiswert definiert ist, können wir es auch in Bezug auf den Preis des Claims bewerten, wenn es keine Arbitrage Möglichkeiten gibt. Der Preis der Derivate sollte also **konsistent** zum Preisprozess des Basiswertes sein.
Es scheint sinnvoll anzunehmen, dass der Preis $\Pi(t; \mathcal{X})$ zur Zeit t durch Erwartungen vom zukünftigen Aktienkurs $S(T)$ bestimmt wird. Da S ein Markovprozess ist, basieren solche Erwartungen auf den aktuellen Wert des Preisprozesses (statt auf die ganze Trajektorie auf $[0, t]$). Daher machen wir die folgende Annahme.

Annahme 2.2.2. Wir nehmen an

1. Das Derivat kann gekauft und verkauft werden auf einem Markt.

2. Der Markt ist arbitragefrei.

3. Der Preisprozess für die Derivate ist von der Form

$$\Pi(t; \mathcal{X}) = F(t, S(t)), \tag{2.11}$$

wobei F eine glatte Funktion ist.

Unsere Aufgabe ist zu bestimmen, wie F aussieht, wenn der Markt bestehend aus $S(t)$, $B(t)$ und $\Pi(t; \mathcal{X})$ arbitragefrei ist. Schematisch gehen wir in folgender Weise vor:

1. Betrachte α, σ, Φ, F und r als gegeben.

2. Die Resultate vom Abschnitt 1.2 verwenden, um die Dynamik vom Wert eines selbstfinanzierenden Portfolios basierend auf die Derivate und den Basiswert zu beschreiben.

3. Es stellt sich heraus, dass wir durch eine geschickte Wahl ein selbstfinanzierendes Portfolio bilden können, dessen Wertprozess ein stochastisches Differential ohne Wiener-Prozess hat. Es ist also von der Form (2.10).

4. Wegen Arbitragefreiheit gilt $k = r$.

5. Aus der Bedingung $k = r$ folgt eine partielle Differentialgleichung mit F als die unbekannte Funktion. Also muss F diese Differentialgleichung lösen.

6. Die Gleichung hat eine eindeutige Lösung, die uns eine eindeutige Preisformel für die Derivate liefert, welche konsistent mit Arbitragefreiheit ist.

2.3. Die Black-Scholes-Gleichung

In diesem Abschnitt führen wir das im letzten Abschnitt angegebene Schema durch. Wir nehmen an, dass der a priori gegebene Markt bestehend aus zwei Assets durch

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{d}S(t) = S(t)\alpha(t, S(t))\mathrm{d}t + S(t)\sigma(t, S(t))\mathrm{d}\overline{W}t, \tag{2.13}$$

gegeben ist, wobei der Zinssatz r eine deterministische Konstante ist. Wir betrachten einen einfachen Contingent-Claim $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ und nehmen an, dass dieses Claim auf einem Markt gehandelt werden kann, und dessen Preisprozess $\Pi(t) = \Pi(t; \Phi)$ die Form

$$\Pi(t) = F(t, S(t)), \tag{2.14}$$

hat für eine glatte Funktion F. Wir wollen herausfinden wie F aussehen soll, sodass der Markt $[S(t), B(t), \Pi(t)]$ arbitragefrei ist.

Wir beginnen mit der Berechnug der Preisdynamik des Derivates, und die Itô-Formel angewandt auf (2.14) und (2.13) liefert

$$\mathrm{d}\Pi(t) = \alpha_\pi(t)\mathrm{d}t + \sigma_\pi(t)\Pi(t)\mathrm{d}\overline{W}(t), \tag{2.15}$$

wobei die Prozesse $\alpha_\pi(t)$ und $\sigma_\pi(t)$ als

$$\alpha_\pi(t) = \frac{F_t + \alpha S F_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss}}{F}, \tag{2.16}$$

$$\sigma_\pi(t) = \frac{\sigma S F_s}{F} \tag{2.17}$$

definiert sind. Nun bilden wir ein Portfolio mit zwei Assets: der Basiswert und das Derivat. Wir bezeichnen das relative Portfolio mit (u_s, u_π) und verwenden die Gleichung (1.13), dann erhalten wir die Folgende Dynamik für den Wert V des Portfolios.

$$\mathrm{d}V = V u_s[\alpha \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}\overline{W}] + u_\pi[\alpha_\pi \mathrm{d}t + \sigma_\pi \mathrm{d}\overline{W}] \tag{2.18}$$

Wir sammeln jetzt dt- und d$\overline{W}$-Terme und erhalten

$$\mathrm{d}V = V[u_s\alpha + u_\pi\alpha_\pi]\mathrm{d}t + V[u_s\sigma + u_\pi\sigma_\pi]\mathrm{d}\overline{W}. \tag{2.19}$$

Die einzige Beschränkung des relativen Portfolios ist

$$u_s + u_\pi = 1,$$

für alle t. Wir definieren also das relative Portfolio durch das lineare Gleichungssystem

$$u_s + u_\pi = 1, \tag{2.20}$$

$$u_s\sigma + u_\pi\sigma_\pi = 0. \tag{2.21}$$

Durch diese Definition verschwindet der d$\overline{W}$-Term in der V-Dynamik (2.19), es bleibt

$$\mathrm{d}V = V[u_s\alpha + u_\pi\alpha_\pi]\mathrm{d}t. \tag{2.22}$$

Damit haben wir ein lokal risikoloses Portfolio erhalten. Wegen der Arbitragefreiheit folgt aus Proposition 2.6 die folgende Beziehung

$$u_s\alpha + u_\pi\alpha_\pi = r \tag{2.23}$$

Das Gleichungssystem (2.20)-(2.21) hat die folgende Lösung

$$u_s = \frac{\sigma_\pi}{\sigma_\pi - \sigma}, \tag{2.24}$$

$$u_\pi = \frac{-\sigma}{\sigma_\pi - \sigma}, \tag{2.25}$$

welche mit (2.17) Folgendes liefert,

$$u_s(t) = \frac{S(t)F_s(t,S(t))}{S(t)F_s(t,S(t)) - F(t,S(t))}, \tag{2.26}$$

$$u_\pi = \frac{-F(t,S(t))}{S(t)F_s(t,S(t)) - F(t,S(t))}. \tag{2.27}$$

Jetzt setzen wir (2.16), (2.26) und (2.27) in die Bedingung für Arbitragefreiheit (2.23) ein. Somit erhalten wir die Gleichung

$$F_t(t,S(t)) + rS(t)F_s(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,S(t))S^2(t)F_{ss}(t,S(t)) - rF(t,S(t)) = 0.$$

Darüber hinaus haben wir vom letzten Abschnitt die Beziehung

$$\Pi(T) = \Phi(S(T)).$$

Diese beiden Gleichungen gelten mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle fixe t. Außerdem hat die Verteilung für jedes fixe $t > 0$ Träger auf den ganzen positiven reellen Zahlen. Also kann $S(t)$ jeden Wert annehmen, deshalb erfüllt F die folgende (deterministische) PDG.

$$\begin{aligned} F_t(t,s) + rsF_s(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,s)s^2F_{ss}(t,s) - rF(t,s) &= 0, \\ F(T,s) &= \Phi(s). \end{aligned}$$

Wir fassen die Ergebisse zusammen und damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 2.7 (Black-Scholes-Gleichung). *Angenommen, dass der Markt durch (2.12)-(2.13) gegeben ist und wir ein einfacher Contingent-Claim von der Form $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ bewerten wollen. Dann ist die einzige Preisfunktion von der Form (2.14), die konsistent mit der Arbitragefreiheit ist, wenn F die Lösung des folgenden Randwertproblems auf $[0,T] \times \mathbf{R}_+$ ist.*

$$F_t(t,s) + rsF_s(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,s)s^2F_{ss}(t,s) - rF(t,s) = 0, \tag{2.28}$$

$$F(T,s) = \Phi(s). \tag{2.29}$$

2.4. Risikoneutrale Bewertung

Wir betrachten wieder einen Markt gegeben durch die Gleichungen

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t, \tag{2.30}$$

$$\mathrm{d}S(t) = S(t)\alpha(t,S(t))\mathrm{d}t + S(t)\sigma(t,S(t))\mathrm{d}\overline{W}t, \tag{2.31}$$

und ein Kontingent-Claim von der Form $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$. Der arbitragefreie Preis ist gegeben durch $\Pi(t;\Phi) = F(t, S(t))$, wobei die Funktion F die Lösung der Gleichungen (2.28)-(2.29) ist. Wir können diese Gleichung mit Hilfe der Feynman-Kač stochastischen Repräsentationsformel (siehe Anhang A.1) lösen. Die Lösung ist gegeben durch

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} E_{t,s}[\Phi(X(T))], \tag{2.32}$$

wobei X durch die Dynamik

$$\mathrm{d}X(u) = rX(u)\mathrm{d}u + X(u)\sigma(u, X(u))\mathrm{d}W(u), \tag{2.33}$$
$$X(t) = s, \tag{2.34}$$

definiert ist und W ein Wiener-Prozess ist. Die SDG (2.33) hat die gleiche Form wie der Preisprozess S. Der einzige Unterschied ist, dass während S die Rendite α hat, hat X den Zinssatz r als Rendite.
Der X-Prozess ist nur ein technisches Werkzeug, wir können ihn nennen wie wir wollen. Wegen der Ähnlichkeit von X und S soll er lieber S heißen statt X. Wir bezeichnen das Wahrscheinlichkeitsmaß für das wirkliche Modell (2.30)-(2.31) mit P. Die P-Dynamik vom S-Prozess ist also (2.31). Wir definieren jetzt ein anderes Wahrscheinlichkeitsmaß Q, unter dem der Prozess S eine andere Verteilung hat, also die folgende Q-Dynamik

$$\mathrm{d}S(t) = rS(t)\mathrm{d}t + S(t)\sigma(t, S(t))\mathrm{d}W(t), \tag{2.35}$$

wobei W ein Q-Wiener-Prozess ist. Mit dieser Notation haben wir den folgenden Satz für die Bewertung der Derivate.

Satz 2.8 (Risikoneutrale Bewertung)**.** *Der arbitragefreier Preis vom Claim $\Phi(S(T))$ ist gegeben durch $\Pi(t;\Phi) = F(t, S(t))$, wobei F durch die folgende Formel gegeben ist*

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}[\Phi(S(T))], \tag{2.36}$$

hier ist die Q-Dynamik von S definiert in (2.35).

Die wirtschaftliche Interpretation vom diesem Satz ist, dass der Preis des Derivates, gegeben heutiges Datum t und heutiger Aktienkurs, durch den Erwatungswert der endgültigen Auszahlung $E^Q_{t,s}[\Phi(S(T))]$ berechnet wird, und dieser Erwartungwert wird mit dem Diskontierungsfaktor $e^{-r(T-t)}$ diskontiert. Wir berechnen hier den Erwartungswert nicht unter dem ursprünglichen Maß P, sondern unter Q. Das Maß Q heißt **Martingalmaß**. Der Grund für den Namen ist, dass unter Q der normierte Preisprozess $S(t)/B(t)$ ein Martingal ist.

Proposition 2.9 (Die Martingaleigenschaft)**.** *Der Preisprozess $\Pi(t)$ für alle gehandelten Assets, sei es die Derivate oder der Basiswert, hat Im Black-Scholes-Modell die Eigenschaft, dass*

$$Z(t) = \frac{\Pi(t)}{B(t)}$$

ein Martingal unter dem Maß Q ist.

2.5. Die Black-Scholes-Formel

In diesem Abschnitt spezialisieren wir das Modell vom vorigen Abschnitt auf das Black-Scholes-Modell,

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\mathrm{d}t, \tag{2.37}$$

$$\mathrm{d}S(t) = \alpha S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}\overline{W}(t), \tag{2.38}$$

wobei α und σ konstant sind. Wir wissen vom letzten Abschnitt, dass der arbitragefreier Preis eines einfachen Claims $\Phi(S(T))$ durch

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}[\Phi(S(T))] \tag{2.39}$$

gegeben ist, hier ist die Q-Dynamik von S gegeben durch

$$\mathrm{d}S(u) = rS(u)\mathrm{d}u + \sigma S(u)\mathrm{d}W(u), \tag{2.40}$$

$$S(t) = s. \tag{2.41}$$

S ist eine geometrische Brownsche Bewegung. Wir können $S(T)$ explizit schreiben als

$$S(T) = s\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\right\}. \tag{2.42}$$

Daraus folgt die Preisformel

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(se^Z) f(z)\mathrm{d}z, \tag{2.43}$$

wobei Z eine Zufallsvariable mit der Verteilung

$$N\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right],$$

und f die zugehörige Dichte ist. Die Formel (2.42) muss im Allgemeinen numerisch ausgewertet werden. Es gibt aber auch ein paar Sonderfälle, wo wir analytisch auswerten können. Der bekannteste Fall ist die europäische Option, wobei $\Phi(x) = \max[x - K, 0]$. In diesem Fall erhalten wir

$$E^Q_{t,s}[\max[se^Z - K, 0]] = 0 \cdot Q(se^Z \leq K) + \int_{\ln(\frac{K}{s})}^{\infty} (se^Z - K) f(z)\mathrm{d}z. \tag{2.44}$$

Nach einigen Berechnungen erhalten wir das folgende wichtige Resultat, die **Black-Scholes-Formel**.

Proposition 2.10. *Der Preis einer europäischen Call Option mit Ausübungspreis K und Laufzeit T ist gegeben durch die Formel $\Pi(t) = F(t, S(t))$, wobei*

$$F(t,s) = sN[\mathrm{d}_1(t,s)] - e^{-r(T-t)} K N[\mathrm{d}_2(t,s)]. \tag{2.45}$$

Hier ist N die Verteilungsfunktion für $N[0,1]$ und

$$d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}, \tag{2.46}$$

$$d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{2.47}$$

2.6. Volatilität

Die Eingabedaten der Black-Scholes-Formel sind s, r, T, t und σ, wobei s, r, T und t direkt beobachtet werden können. Es bleibt die Volatilität σ übrig. Es gibt zwei grundlegende Ansätze um die Volatilität σ zu schätzen, nämlich ,,historische Volatilität" und ,,implizierte Volatilität".

2.6.1. Historische Volatilität

Da die Volatilität in Realität nicht konstant bleibt, soll man historische Daten aus einem Zeitraum verwenden, der genauso lang wie die Laufzeit ist. Angenommen, dass wir das Standard Black-Scholes-Modell unter dem Maß P haben. Wir beobachten den Aktienkurs S zu $n+1$ diskreten äquidistanten Zeitpunkten $t_0, t_1, \ldots, t_n$, und Δt bezeichnet die Intervalllänge, d.h. $\Delta t = t_i - t_{i-1}$. Wir beobachten also $S(t_0), \ldots, S(t_n)$, und S ist lognormalverteilt. Deshalb definieren wir $\xi_1, \ldots, \xi_n$ als

$$\xi_i = \ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_i - t_{i-1}) + \sigma(W(t_i) - W(t_{i-1})).$$

Wir sehen, dass $\xi_1, \ldots, \xi_n$ unabhängige, normalverteilte Zufallsvariable sind mit

$$\begin{aligned} E[\xi_i] &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \\ \mathrm{Var}[\xi_i] &= \sigma^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Daher ist ein Schätzer von σ gegeben durch

$$\sigma^* = \frac{S_\xi}{\sqrt{\Delta t}},$$

hier ist die Stichprobenvarianz S_ξ^2 gegeben durch

$$S_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2, \tag{2.48}$$

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i. \tag{2.49}$$

Die Standardabweichung D von dem Schätzer σ^* ist $D(\sigma^*) \approx \frac{\sigma^*}{\sqrt{2n}}$.

2.6.2. Implizierte Volatilität

Ein Argument gegen die historische Volatilität ist, dass die Volatilität in Realität nicht konstant ist, sondern sich im Laufe der Zeit ändert. Mit historischer Volatilität erhalten wir nur eine Schätzung für die vergangene Volatilität. Wenn wir eine Option im Einklang mit anderen bereits vom Markt bewerteten Assets bewerten wollen, dann sollen wir die Markterwartung der Volatilität verwenden.
Wir nehmen eine ,,Benchmark"-Option mit gleicher Laufzeit und auf den selben Basiswert wie die Option, die wir bewerten wollen. Wir bezeichnen den Preis der Benchmark-Option mit p, den Ausübungspreis mit K, heutigen Kurs des Basiswertes mit s, die Black-Scholes-Formel für europäische Calls mit $c(s,t,T,r,\sigma,K)$, dann lösen wir die folgende Gleichung für σ

$$p = c(s,t,T,r,\sigma,K). \tag{2.50}$$

Wir versuchen also den Wert von σ zu finden, welcher der Markt implizit für die Bewertung der Benchmark-Option verwendet hat. Dieser Wert von σ heißt **implizierte Volatilität**.

Kapitel 3.

Black-Scholes vom Martingal-Standpunkt

Dieses Kapitel orientiert sich an Björk (2004) Kapitel 12, S.169-174. In diesem Kapitel untersuchen wir das Standard Black-Scholes-Modell vom Martingal-Standpunkt aus. Wir wählen einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P, \underline{\mathcal{F}})$ mit einem P-Wiener-Prozess $\overline{W}$, wobei $\underline{\mathcal{F}}$ die von $\overline{W}$ erzeugte Filtration ist, d.h. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$. Auf diesem Raum definieren wir das Modell mit

$$\mathrm{d}S_t = \alpha S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}\overline{W}_t, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{d}B_t = r B_t \mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

3.1. Arbitragefreiheit

Wir wollen jetzt sehen, ob das Modell arbitragefrei auf einem endlichen Intervall $[0, T]$ ist. Dafür verwenden wir das First Fundamental Theorem (siehe Anhang A.4), das besagt, dass das Modell genau dann arbitragefrei ist, wenn es ein Martingalmaß Q gibt. Wir verwenden dann das Girsanov Theorem (siehe Anhang A.9) um einen Girsanov-Kern h zu finden, sodass das induzierte Maß Q ein Martingalmaß ist. Wir definieren den Likelihood-Prozess L mit

$$\mathrm{d}L_t = h_t L_t \mathrm{d}\overline{X}_t,$$

und $\mathrm{d}Q = L_T \mathrm{d}P$ auf $\mathcal{F}_T$. Vom Girsanov Theorem wissen wir

$$\mathrm{d}\overline{W}_t = h_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t,$$

wobei W ein Q-Wiener-Prozess ist. Durch Einsetzen des obigen Ausdrucks in die Aktienkursdynamik erhalten wir die folgende Q-Dynamik von S

$$\mathrm{d}S_T = S_t\{\alpha + \sigma h_t\}\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

Um Q ein Martingalmaß zu sein, muss die Rendite unter Q gleich dem Zinssatz sein (siehe Anhang A.5). Der Prozess h löst daher die folgende Gleichung

$$\alpha + \sigma h_t = r. \tag{3.3}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$h_t = -\frac{\alpha - r}{\sigma},$$

der Prozess h ist und zwar deterministisch und konstant.
Darüber hinaus hat h eine wichtige wirtschaftliche Interpretation: im Quotient

$$\frac{\alpha - r}{\sigma},$$

der Zähler $\alpha - r$ ist ,,Risikoprämie" der Aktie, im Nenner steht die Volatiliät der Aktie, damit wird der obige Quotient als ,,Risikoprämie pro Einheit Volatilität" oder ,,Risikoprämie pro Einheit Risiko" interpretiert. Es wird in der Literatur ,,Marktpreis vom Risiko" genannt.

Lemma 3.1. *Der Girsanov-Kern h ist gegeben durch*

$$h = -\lambda,$$

der Marktpreis des Risikos λ ist definiert als

$$\lambda = \frac{\alpha - r}{\sigma}.$$

Wir haben also die Exitenz eines Martingalmaßes bewiesen, und daraus folgt nach dem First Fundamental Theorem das folgende wichtige Resultat für das Black-Scholes-Modell.

Satz 3.2. *Das Black-Scholes-Modell ist arbitragefrei.*

Statt des Standard Black-Scholes-Modells hätten wir auch ein allgemeineres Modell

$$\mathrm{d}S_t = \alpha_t S_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}\overline{W}_t, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{d}B_t = r_t B_t \mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

betrachten können, wobei α, σ und r beliebige adaptierte (entsprechend integrierbare) Prozesse sein können mit $\sigma_t \neq 0$ P-f.s. und für alle t. Die Analyse von diesem komplizierteren Modell erfolgt analog mit dem einzigen Unterschied, dass der Girsanov-Kern h ein stochastischer Prozess durch die folgende Formel gegeben ist

$$h_t = -\frac{\alpha_t - r_t}{\sigma_t}. \tag{3.6}$$

Solange h die Novikov-Bedingung (siehe Anhang A.10) erfüllt, ist dieses Marktmodell arbitragefrei.

Bemerkung 3.1.1. Der Grund für die Bedingung $\sigma_t \neq 0$ ist, dass sonst der Quotient in (3.6) nicht definiert ist. Wir können die Gleichung

$$\alpha_t + h_t\sigma_t = r_t$$

lösen, solang die Bedingung

$$\sigma_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_t = r_t$$

gilt. Die Interpretation dieser Bedingung ist, wenn $\sigma_t = 0$, dann ist die Aktie lokal risikolos mit Dynamik $\mathrm{d}S_t = S_t\alpha_t\mathrm{d}t$, um Arbitrage mit dem Bankkonto B zu vermeiden muss $\alpha_t = r_t$ sein.

3.2. Bewertung

Wir betrachten das Standard Black-Scholes-Modell und einen T-Claim X. Aus Proposition A.7 folgt die allgemeine risikoneutrale Preisformel

$$\Pi(t; X) = e^{-r(T-t)}E^Q[X \mid \mathcal{F}_t], \tag{3.7}$$

die Q-Dynamik von S ist wie immer gegeben durch

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t.$$

Für ein allgemeines Claim können wir nichts mehr machen, aber für einen einfachen Claim $X = \Phi(S_T)$ können wir die Kolmogorov Rückwärtsgleichung (Proposition A.2) für Erwartungswert aufschreiben und den Preis mit $\Pi(t; X) = F(t, S_t)$ ausdrücken, wobei die Preisfunktion F die Black-Scholes-Gleichung (vgl. Kapitel 2.3) löst.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + rs\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - rF = 0, \\ F(T, s) = \Phi(s). \end{cases} \tag{3.8}$$

Die risikoneutrale Preisformel (3.7) gilt für alle Claims, die Black-Scholes-Gleichung (3.8) gilt nur für einfache Claims.

3.3. Vollständigkeit

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Vollständigkeit des Black-Scholes-Modells. Wir verwenden dafür das Second Fundamental Theorem (siehe Anhang A.6), das besagt, dass der Markt genau dann vollständig ist, wenn das Martingalmaß eindeutig ist. Wir haben im letzen Abschnitt gezeigt, dass es ein Martingalmaß existiert. Es bleibt noch die Frage, ob das das einzige Martingalmaß ist.

Nach Satz A.11 ist jede absolut stetige Maßtransformation durch eine Girsanov-Transformation bestimmt, und da die Gleichung (3.3) eine eindeutige Lösung hat, ist das Martingalmaß tatsächlich eindeutig. Das Argument gilt auch für das allgemeinere Modell (3.4)-(3.5), damit haben wir das folgende Resultat bewiesen.

Satz 3.3. *Das Black-Scholes-Modell (3.1)-(3.2) ist vollständig. Das gilt auch für das allgemeinere Modell (3.4)-(3.5).*

Wir können die Vollständigkeit des Black-Scholes-Modells auch auf eine konstruktive Weise ohne das Second Fundamental Theorem beweisen. Ein Markt ist definiert als vollständig, wenn jedes Contingent-Claim repliziert werden kann. Wir zeigen nun die Vollständigkeit des Black-Scholes-Modells, indem wir mit Hilfe vom Martigaldarstellungssatz A.8 ein replizierendes Portfolio für jedes Claim finden.
Wir verwenden die Technik in Lemma A.3 und bezüglich der Notation identifizieren wir die Numeraire S_0 mit dem Bankkonto B, und S_1 mit dem Aktienkurs S. Dann definieren wir die normierten Prozesse Z_0 und Z_1 als

$$Z_0(t) = \frac{B(t)}{B(t)}, \quad Z_1(t) = \frac{S(t)}{B(t)}.$$

Sei Q das (eindeutige) Martingalmaß, und betrachte ein beliebiges T-Claim X mit

$$E^Q\left[\frac{X}{B(T)}\right] < \infty.$$

Wir definieren dann das Q-Martingal M als

$$M(t) = E^Q\left[\frac{X}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right], \tag{3.9}$$

und aus Lemma A.3 folgt, dass das Modell vollständig ist, wenn wir einen Prozess $h_1(t)$ finden können mit

$$\mathrm{d}M(t) = h_1(t)\mathrm{d}Z_1(t). \tag{3.10}$$

Um die Exitenz eines solchen Prozesses h_1 zu beweisen verwenden wir den Martingaldarstellungssatz A.8 (unter Q), der besagt, dass es einen Prozess $g(t)$ existiert, sodass

$$\mathrm{d}M(t) = g(t)\mathrm{d}W(t), \tag{3.11}$$

wobei W der Q-Wiener-Prozess wie früher definiert ist. Um (3.11) und (3.10) in Verbindung zu bringen verwenden wir die Itô-Formel und die Tatsache, dass Q ein Martingalmaß ist für die Numeraire B. Daraus folgt die Q-Dynamik von Z_1:

$$\mathrm{d}Z_1(t) = Z_1(t)\sigma\mathrm{d}W(t). \tag{3.12}$$

Wir haben also

$$\mathrm{d}W(t) = \frac{1}{Z_1(t)\sigma}\mathrm{d}Z_1(t),$$

und setzen diese in (3.11) ein, dann sehen wir, dass wir tatsächlich (3.10) haben mit h_1 definiert als

$$h_1(t) = \frac{g(t)}{\sigma Z_1(t)}.$$

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen.

Satz 3.4. *Im Black-Scholes-Modell (sowohl standard als auch erweitert) kann jedes T-Claim X mit*

$$E^Q\left[\frac{X}{B(T)}\right] < \infty$$

repliziert werden. Das replizierende Portfolio ist gegeben durch

$$h_1(t) = \frac{g(t)}{\sigma Z_1(t)}, \tag{3.13}$$

$$h_0(t) = M(t) - h_1(t)Z_1(t), \tag{3.14}$$

wobei M in (3.9) und g in (3.11) definiert ist.

Für ein allgemeines Claim ist es fast unmöglich, das Hedgingportfolio explizit zu bestimmen. Für ein einfaches Claim $X = \Phi(S_T)$ ist die Situation jedoch anders. In diesem Fall haben wir

$$M(t) = E^Q[e^{-rT}\Phi(S(T))|\mathcal{F}_t],$$

und wegen der Kolmogorov Rückwärtsgleichung (Proposition A.2) (oder Feynman-Kač Darstellung (Proposition A.1)) haben wir $M(t) = f(t, S(t))$, hier löst f das Randwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,s) + rs\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) = 0, \\ f(T,s) = e^{-rT}\Phi(s). \end{cases}$$

Aus Itô-Formel folgt

$$\mathrm{d}M(t) = \sigma S(t)\frac{\partial f}{\partial s}(t, S(t))\mathrm{d}W(t),$$

mit der obigen Notation haben wir

$$g(t) = \sigma S(t)\frac{\partial f}{\partial s}(t, S(t)),$$

das liefert uns das replizierende Portfolio h als

$$h_0(t) = f(t, S(t)) - S(t)\frac{\partial f}{\partial s}(t, S(t)),$$

$$h_1(t) = B(t)\frac{\partial f}{\partial s}(t, S(t)).$$

Hier ist $f(t, S(t)) = V^Z(t)$, d.h. f ist der Wert des normierten Hedgingportfolios. Aber es ist besser, alles in unnormierten Wertprozessen $V(t)$ auszudrücken. Deshalb definieren wir $F(t, s)$ mit $F(t, s) = e^{rt}f(t, s)$.

Proposition 3.5. *Betrachte ein Black-Scholes-Modell und ein einfaches T-Claim $X = \Phi(S(T))$. Dann kann X vom folgenden Portfolio repliziert werden.*

$$\begin{cases} h_0(t) = \frac{F(t,S(t)) - S(t)\frac{\partial F}{\partial s}(t,S(t))}{B(t)}, \\ h_1(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(t,S(t)), \end{cases} \tag{3.15}$$

hier löst F die Black-Scholes-Gleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + rs\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - rF = 0, \\ \hfill F(T,s) = \Phi(s). \end{cases} \tag{3.16}$$

Darüber hinaus ist der Wertprozess für das replizierende Portfolio gegeben durch

$$V(t) = F(t, S(t)).$$

Kapitel 4.

Numeraire-Wechsel

4.1. Einführung und Allgemeinheiten

Dieses Kapitel orientiert sich an Björk (2004) Kapitel 24, S.348-355.
Wir beginnen zuerst mit den Rahmenbedingungen.

Annahme 4.1.1. Wir betrachten ein arbitragefreies Marktmodell mit Assetpreise $S_0, S_1, \ldots, S_n$, wobei S_0 strikt positiv ist.

Oft nehmen wir an, dass alle Preise von einem Wiener-Prozess getrieben sind.

Bedingung 4.1.1. Unter P sieht die S-Dynamik folgendermaßen aus

$$\mathrm{d}S_i(t) = \alpha_i(t)S_i(t)\mathrm{d}t + S_i(t)\sigma_i(t)\mathrm{d}\overline{W}(t), \quad i = 0, \ldots, n,$$

wobei die Koeffizienten adaptierte Prozesse sind und W ein multidimensionaler Standard P-Wiener-Prozess ist.

Bemerkung 4.1.1. Wir nehmen nicht unbedingt die Existenz eines Zinsatzes und Bankkontos an. Wenn sie existieren, werden sie wie immer mit r und B bezeichnet.

Lemma 4.1 (Invarianzlemma). *Sei β ein strikt positiver Itô-Prozess, und definiere den normierten Prozess Z mit Numeraire β mit $Z = S/\beta$. Dann ist h genau dann S-selbstfinanzierend, wenn es Z-selbstfinanzierend ist, d.h.*

$$\mathrm{d}V^S(t;h) = h(t)\mathrm{d}S(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}V^Z(t;h) = h(t)\mathrm{d}Z(t) \tag{4.1}$$

Beweis. Folgt direkt aus der Itô-Formel. □

Ein solcher Prozess β heißt manchmal ,,Deflatorprozess". Wir haben angenommen, dass S und β Itô-Prozesse sind. Das Invarianzlemma gilt auch allgemeiner für Semimartingale.

Aus mathematischer Sicht sind die meisten Resultate bezüglich Numeraire-Wechsel Spezialfälle des First Fundamental Theorems (Satz A.4) und der zugehörigen Preisformeln (Proposition A.7).
Wir haben bisher immer das Bankkonto B als Numeraire genommen. In vielen Situationen kann der Rechenaufwand für die Bestimmung der arbitragefreien Preise durch einen geschickten Numeraire-Wechsel stark reduziert werden. Ein typisches Beispiel für so eine Situation ist die Bewertung für Derivate, die auf mehreren Basiswerte definiert sind. Angenommen, dass zwei Assetpreise S_1 und S_2 gegeben sind und der zu bewertende Kontrakt von der Form $X = \Phi(S_1(T), S_2(T))$ ist, wobei Φ eine gegebene **linear homogene** Funktion ist. Wir bezeichnen das risikoneutrale Martingalmaß mit Q^0, ohne Numeraire-Wechsel sieht der Preis wie folgt aus:

$$\Pi(t; X) = E^0[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}\Phi(S_1(T), S_2(T)) \mid \mathcal{F}_t],$$

wobei E^0 der Erwartungswert unter Q^0 ist. Man muss hier also ein dreifaches Integral berechnen. Wenn wir stattdessen S_1 als Numeraire nehmen mit Martingalmaß Q_1, dann haben wir

$$\Pi(t; X) = S_1(t)E^1[\varphi(Z_2(T))|\mathcal{F}_t], \tag{4.2}$$

wobei $\varphi(z) = \Phi(1, z)$ und $Z_2(t) = S_2(t)/S_1(t)$. In dieser Formel ist der Faktor $S_1(t)$ der Preis vom Asset S_1 zur Zeit t, der direkt beobachtet werden kann. Daher reduziert sich der Rechenaufwand zu einem Einzelintegral. Außerdem ist der Zinssatz in der Z-Ökonomie null.

Beispiel 4.2. Angenommen, dass wir zwei Aktien S_1 und S_2 haben, mit Preisprozessen von der folgenden Form unter dem Maß P:

$$\mathrm{d}S_1(t) = \alpha_1(t)S_1(t)\mathrm{d}t + S_1(t)\sigma_1(t)\mathrm{d}\overline{W}(t), \tag{4.3}$$

$$\mathrm{d}S_2(t) = \alpha_2(t)S_2(t)\mathrm{d}t + S_2(t)\sigma_2(t)\mathrm{d}\overline{W}(t). \tag{4.4}$$

Hier sind $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{R}^2$ deterministisch, und $\overline{W}$ ist ein zwei dimensionaler Standard-Wiener-Prozess unter P. Wir setzen außerdem die Arbitragefreiheit voraus.
Das zu bewertende T-Claim ist eine **Exchange-Option**, welche dem Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht gibt, zur Zeit T ein S_2 gegen ein S_1 zu tauschen. Das heißt, das Claim ist gegeben durch $\mathcal{Y} = \max[S_2(T) - S_1(T), 0]$, und wir haben da eine linear homogene Vertragsfunktion. Deshalb nehmen wir eine von beiden Aktien, also S_1 als Numeraire. Wegen Proposition A.7 und Homogenität ist der Preis gegeben durch

$$\Pi(t; \mathcal{Y}) = S_1(t)E^1[\max[Z_2(T) - 1, 0]|\mathcal{F}_t],$$

mit $Z_2(t) = S_2(t)/S_1(t)$ und E^1 bezeichnet die Erwartung unter Q^1. Wir bewerten hier also eine europäische Option auf $Z_2(T)$ mit Ausübungspreis $K = 1$ und null Zinssatz.
Wir berechnen jetzt die Q_1-Dynamik von Z_2. Aus Itô-Formel folgt die P-Dynamik von Z_2

$$\mathrm{d}Z_2(t) = Z_2(t)(\ldots)\mathrm{d}t + Z_2(t)\{\sigma_2 - \sigma_1\}\mathrm{d}\overline{W}(t),$$

wir kümmern uns dabei nicht um die genaue Form von den dt-Termen, weil Z_2 ein Martingal unter Q^1 ist. Da sich die Volatilitätsterme unter einer Girsanov-Transformation nicht ändern, erhalten wir somit die Q_1-Dynamik

$$dZ_2(t) = Z_2(t)\{\sigma_2 - \sigma_1\}dW^1(t), \tag{4.5}$$

wobei W^1 Q^1-Wiener ist. Wir können dies so schreiben

$$dZ_2(t) = Z_2(t)\sigma dW(t),$$

wobei W ein Skalarer Q^1-Wiener-Prozess ist und

$$\sigma = \| \sigma_2 - \sigma_1 \| .$$

Aus Black-Scholes-Formel mit null Zinssatz, Ausübungspreis 1 und Volatilität σ folgt die Preisformel für die Exchange-Option

$$\Pi(t; X) = S_1(t)\{Z_2(t)N[d_1] - N[d_2]\} \tag{4.6}$$
$$= S_2(t)N[d_1] - S_1(t)N[d_2], \tag{4.7}$$

wobei

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln(\frac{S_2(t)}{S_1(t)}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Wenn wir statt eines zwei-dimensionalen Standard-Wiener-Prozesses skalare P-Wiener-Prozesse $\overline{W}_1$ und $\overline{W}_2$ nehmen, mit lokaler Korrelation ρ, σ_1 und σ_2 sind dann skalare Konstanten. In diesem Fall ist die Volatilität σ in der obigen Formel gegeben durch

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

4.2. Girsanov-Transformation für Numeraire-Wechsel

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie man einen Numeraire in einen anderen wechselt. Angenommen, dass wir von S_0 in S_1 wechseln wollen. Ein unmittelbares Problem ist die entsprechende Girsanov-Transformation zu finden, die uns von Q^0 zu Q^1 bringt, wobei Q^0 und Q^1 die entsprechenden Martingalmaße sind.
Wegen Proposition A.7 gilt für ein T-Claim X folgendes

$$\Pi(0; X) = S_0(0)E^0\left[\frac{X}{S_0(T)}\right], \tag{4.8}$$

$$\Pi(0; X) = S_1(0)E^1\left[\frac{X}{S_1(T)}\right]. \tag{4.9}$$

Wir bezeichnen die Radon-Nikodym-Ableitung mit $L_0^1(T)$,

$$L_0^1(T) = \frac{\mathrm{d}Q^1}{\mathrm{d}Q^0}, \quad \text{auf } \mathcal{F}_T, \tag{4.10}$$

wir können nun (4.9) so schreiben

$$\Pi(0;X) = S_1(0)E^0\left[\frac{X}{S_1(T)} \cdot L_0^1(T)\right], \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow \quad S_0(0)E^0\left[\frac{X}{S_0(T)}\right] = S_1(0)E^0\left[\frac{X}{S_1(T)} \cdot L_0^1(T)\right], \tag{4.12}$$

daraus folgt

$$\frac{S_0(0)}{S_0(T)} = \frac{S_1(0)}{S_1(T)} \cdot L_0^1(T),$$

so erhalten wir

$$L_0^1(T) = \frac{S_0(0)}{S_1(0)} \cdot \frac{S_1(T)}{S_0(T)}.$$

Der Kandidat für den induzierten Likelihood-Prozess ist natürlich gegeben durch

$$L_0^1(T) = \frac{S_0(0)}{S_1(0)} \cdot \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \quad 0 \le t \le T.$$

Proposition 4.3. *Sei Q_0 ein Martingalmaß für die Numeraire S_0 (auf $\mathcal{F}_T$) und S_1 ein positiver Preisprozess, sodass $S_1(t)/S_0(t)$ ein echtes Q^0-Martingal (nicht nur lokal) ist. Definiere Q^1 auf $\mathcal{F}_T$ mit dem Likelihood-Prozess*

$$L_0^1(T) = \frac{S_0(0)}{S_1(0)} \cdot \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \quad 0 \le t \le T. \tag{4.13}$$

Dann ist Q^1 ein Martingalmaß für S_1.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für jeden (ausreichend integrierbaren) arbitragefreien Preisprozess Π, der normierter Prozess $\Pi(t)/S_1(t)$ ein Q_1-Martingal ist. Wenn Π ein arbitragefreier Preisprozess ist, ist Π/S_0 ein Q_0-Martingal und für $s \le t$ haben wir Folgendes:

$$\begin{aligned} E^1\left[\frac{\Pi(t)}{S_1(t)}|\mathcal{F}_s\right] &= \frac{E^0\left[L_0^1\frac{\Pi(t)}{S_1(t)}|\mathcal{F}_s\right]}{L_0^1(s)} = \frac{E^0\left[\frac{S_0(0)}{S_1(0)}\cdot\frac{S_1(t)}{S_0(t)}\cdot\frac{\Pi(t)}{S_1(t)}|\mathcal{F}_s\right]}{L_0^1(s)} \\ &= \frac{\frac{S_0(0)}{S_1(0)}E^0\left[\frac{\Pi(t)}{S_0(t)}|\mathcal{F}_s\right]}{L_0^1(s)} = \frac{\frac{S_0(0)}{S_1(0)}\cdot\frac{\Pi(s)}{S_0(s)}}{L_0^1(s)} = \frac{\Pi(s)}{S_1(s)}. \end{aligned}$$

□

Da wir den Likelihood-Prozess bestimmt haben, können wir den Girsanov-Kern bestimmen.

Proposition 4.4. *Wir setzen die Arbitragefreiheit und die Bedingung (4.1.1) voraus, und bezeichnen den Q^0-Wiener-Prozess mit W^0. Dann ist die Q^0-Dynamik vom Likelihoodprozess L_0^1 gegeben durch*

$$\mathrm{d}L_0^1(t) = L_0^1(t)\{\sigma_1(t) - \sigma_0(t)\}\mathrm{d}W^0(t). \tag{4.14}$$

Daher ist der Girsanov-Kern φ_0^1 für den Wechsel von Q^0 in Q^1 gegeben durch die Volatilitätsdifferenz

$$\varphi_0^1(t) = \sigma_1(t) - \sigma_0(t). \tag{4.15}$$

Beweis. Itô-Formel auf (4.13) anwenden. □

Teil II.

Finanzmarkt mit dem CRR-Binomialmodell

Kapitel 5.

Finanzmarkt mit dem CRR-Binomialmodell

5.1. Beschreibung des Modells

Dieses Kapitel orientiert sich an Björk (2004) Kapitel 2, S.5-25.
Das **CRR (Cox-Ross-Rubinstein)-Binomialmodell** ist ein diskretes Modell für die Modellierung von Wertpapier- und Aktienkursentwicklung zur Bewertung von Optionen. Das Modell läuft von $t = 0$ bis $t = T$ und es gibt zwei Assets: ein Bond und eine Aktie (Stock).

Definition 5.1. (Assets im CRR-Binomialmodell)

1. Bond (risikolos): $B_0 = 1$, $B_t = (1 + R)B_{t-1}$ mit $R \in \mathbf{R}$.

2. Aktie: $S_0 = s > 0$ (konstant) und für $t = 0, \dots, T - 1$:

$$S_{t+1} = S_t \cdot Z_t,$$

   wobei $Z_0, \dots, Z_{T-1}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit

$$\mathbb{P}(Z_t = u) = p_u$$
$$\mathbb{P}(Z_t = d) = p_d$$

   mit Konstanten $0 < d < u$ und $p_u + p_d = 1$.

Zu den Zeitpunkten $0, 1, \dots, T-1$ teilen sich alle Pfade in je zwei Klassen auf, die einen, die nun nach oben springen, während die anderen nach unten springen. Die Reihenfolge, in der die up- und down-Bewegungen vor sich gehen, ist für den Wert des Prozesses irrelevant. Es entsteht ein Gitter („Binomial lattice" oder „Recombining binobial tree") mit $T+1$ verschiedenen Endwerten zum Zeitpunkt T. Ein Pfad kann nun beschrieben werden durch einen modifizierten Bernoulli-Prozess („T-facher Münzwurf"): $\{X_t, t = 0, \ldots, T-1\}$ ist ein stochastischer Prozess, wobei die $X_1, \ldots, X_T$ unabhängige Bernoulli-Zufallsvariablen auf $\{0,1\}$ mit $\mathbb{P}(X_t = 1) = \mathbb{P}(Z_t = u) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_t = d) = p_u = p$, $\forall t = 0, \ldots, T-1$. Wir definieren dann den Zählprozess $N_t(\omega) = X_1(\omega) + \ldots + X_t(\omega)$ mit $\omega = (x_1, \ldots, x_T)$, der die Anzahl der Sprünge nach oben zählt. Insbesondere charakterisiert er auch den Wert des Pfades zum Zeitpunkt t und damit die Position im Gitter, unabhängig vom Verlauf des Pfades bis zum entsprechenden Punkt. Es gilt:

$$E[N_t] = \sum_{i=1}^{t} E[X_i] = tp \quad Var(N_t) \overset{unabh.}{=} \sum_{i=1}^{t} Var(X_i) = tp(1-p)$$

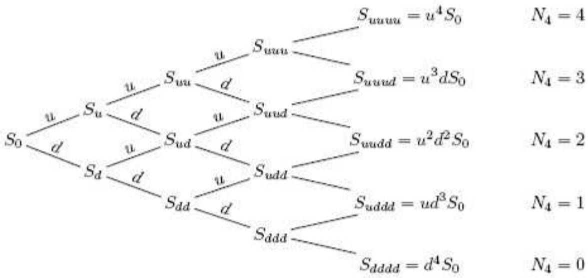
Man sieht, dass N_t binomialverteilt ist. Damit haben wir das folgenden Lemma bewiesen.

Lemma 5.2. *Die Verteilung von N_t, die auch die Verteilung der Werte S_t des Assets zu t beschreibt, ist die* ***Binomialverteilung****:*

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_t = S_0 u^n d^{t-n}) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, \quad n = 0, 1, \ldots, t$$

Für Arbitrage-Überlegungen und Bewertung von Contingent-Claims machen wir folgende Annahmen:

- Leerverkäufe und gebrochene Anteile sind zulässig.
- Es gibt kein Bid-ask-Spread, d.h. keine Differenz zwischen Geld- und Briefkurs, also der Kaufpreis ist gleich dem Verkaufspreis.
- Es fallen keine Transaktionskosten und Steuern an.



- Der Markt ist complett liquid, d.h. es ist immer möglich unbegrenzte Mengen zu kaufen oder verkaufen. Insbesondere kann man unbegrenzte Kredite bei der Bank aufnehmen (für Leerverkäufe von Bonds).

5.2. Portfolios und Arbitrage-Überlegungen

Wir definieren nun eine Portfolio-Strategie.

Definition 5.3. Eine Portfolio-Strategie ist ein stochastischer Prozess

$$\{h_t = (x_t, y_t); t = 1, \dots, T\}$$

sodass h_t eine Funktion von $S_0, S_1, \dots, S_{t-1}$ ist. Der entsprechende Wertprozess ist definiert als

$$V_t^h = x_t(1+R) + y_t S_t.$$

Wir interpretieren x_t als Geldbetrag, den wir zur Zeit $t-1$ in die Bank investieren und bis zur Zeit t behalten, y_t als Anzahl der Aktien, die wir zur Zeit $t-1$ kaufen und bis zur Zeit t behalten. Das Portfolio, das wir zur Zeit t kaufen, kann vom gesamten Verlauf des Aktienkurses abhängen. Wir können jedoch nicht in die Zukunft schauen.
Die Portfolios, die uns interessieren, sind die selbstfinanzierenden Portfolios.

Definition 5.4. Eine Portfolio-Strategie h ist **selbstfinanzierend**, wenn die folgende Bedingung für alle $t = 0, \dots, T-1$ gilt

$$x_t(1+R) + y_t S_t = x_{t+1} + y_{t+1} S_t.$$

Nun können wir Arbitrage definieren.

Definition 5.5. Eine **Arbitrage**-Möglichkeit ist ein selbstfinanzierendes Portfolio h mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} V_0^h &= 0, \\ P(V_T^h \geq 0) &= 1, \\ P(V_T^h > 0) &> 0. \end{aligned}$$

Wir haben sofort die folgende notwendige Bedingung für die Arbitragefreiheit.

Lemma 5.6. *Aus der Arbitragefreiheit ergibt sich:*

$$d < (1+R) < u. \tag{5.1}$$

Beweis. Angenommen (5.1) gilt nicht, dann ist eine Arbitrage-Möglichkeit zu zeigen. Wenn $(1+R) > u$, dann wählen wir das Portfolio $h = (s, -1)$, d.h. wir verkaufen die Aktie leer und investieren das Geld ins Bond. Für dieses Portfolio gilt $V_0^h = 0$ und $V_T^h = s(1+R)^T - s \cdot \prod_{i=0}^{T-1} Z_i \geq s((1+R)^T - u^T) > 0$, es ist also eine Arbitrage-Möglichkeit. Für $(1+R) < d$ geht es analog mit dem Portfolio $h = (-s, 1)$. □

Bedingung (5.1) ist auch eine hinreichende Bedingung für Arbitragefreiheit, wir werden dies später zeigen.
Wenn ein Martingalmaß Q existiert, dann gilt für $t = 0, \ldots, T-1$

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{1+R} E^Q[S_{t+1} | S_t = s] \\ \Leftrightarrow s &= \frac{1}{1+R}(q_u su + \underbrace{q_d}_{=1-q_u} \cdot sd) \end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichung löst, erhält man das folgende Resultat.

Proposition 5.7. *Die Martingalwahrscheinlichkeiten sind gegeben durch*

$$\begin{cases} q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d}, \\ q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d}. \end{cases}$$

Wenn Bedingung (5.1) gilt, dann $q_u \in]0, 1[$, d.h. es existiert ein Martingalmaß. Daraus folgt die Arbitragefreiheit. Da in diesem Fall das Martingalmaß eindeutig ist, ist das Modell vollständig. Damit haben wir das folgende Resultat gezeigt.

Proposition 5.8. *Die Bedingung*

$$d < (1+R) < u$$

ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Arbitragefreiheit. In diesem Fall ist das Modell vollständig, d.h. jedes Contigent-Claim kann repliziert werden von einem selbstfinanzierenden Portfolio.

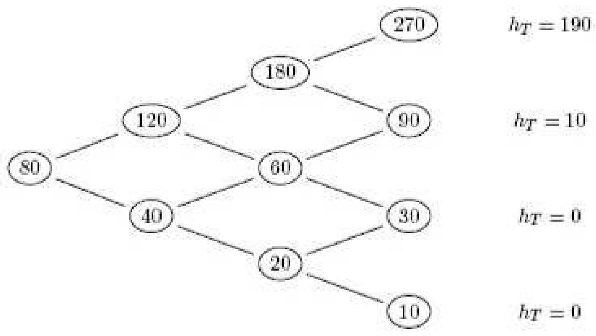
5.3. Bepreisung von Contingent-Claims

Wir betrachten hier nur einfache Claims von der Form $X = \Phi(S_T)$, deren Wert nur vom Endwert S_T des Aktienkurses abhängt.

Beispiel 5.9. Sei $T = 3$, $S_0 = 80$, $u = 1,5$, $d = 0,5$, $p_u = 0,6$, $p_d = 0,4$ und $R = 0$. Betrachte eine europäische Call-Option mit Ausübungszeitpunkt $T = 3$ und Ausübungspreis $K = 80$. Der Payoff ist also

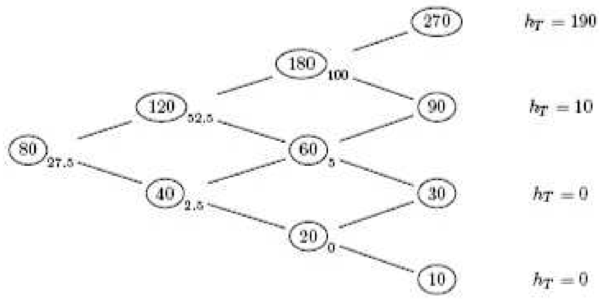
$$h_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+.$$

Der Binomialbaum für den Kursverlauf S_t der Aktie sieht folgendermaßen aus:



Die Bestimmung des Preises $\Pi(t)$ zu Zeitpunkten $t < T$ erfolgt durch Rückwärtsinduktion aus $\Pi(T|S_T) = h_T$ mittels risikoneutralen Maßes Q, $q_u = q_d = \frac{1}{2}$:

$$\text{z.B. } \Pi(t = 2|S_2 = 180) = \frac{1}{2} \cdot 190 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 100$$

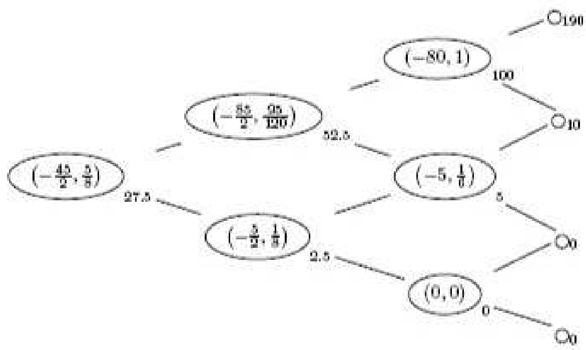


Damit ergibt sich die Preisstruktur der Option als replizierendes Portfolio durch Vorwärtsinduktion:

Beginne bei $t = 0$. Gesucht ist (x_1, y_1), sodass

$$\begin{aligned} x_1 + 80y_1 &= 27,5 \text{ (Preis zu } t = 0) \\ x_1 + 120y_1 &= 52,5 \text{ (Preis zu } t = 1\text{, up)} \\ x_1 + 40y_1 &= 2,5 \text{ (Preis zu } t = 1\text{, down)} \end{aligned}$$

Dieses redundante Gleichungssystem von drei Gleichungen für (x_1, y_1) besitzt die eindeutige Lösung $x_1 = 22,5$, $y_1 = 0,625$. Der Preis (rechte Seite des GS) wurde genau so bestimmt, dass diese Gleichungen eine Lösung besitzen.
Analog kann nun zu jedem Zeitpunkt $t - 1$ das Portfolio (x_t, y_t) ausgehend von der momentanen Position im Gitter bestimmt werden:



Nun geben wir einen allgemeinen Binomial-Algorithmus an.

Proposition 5.10 (Binomial-Algorithmus)**.** *Betrachte ein T-Claim $X = \Phi(S_T)$. Dieser kann durch ein selbstfinanzierendes Portfolio repliziert werden. Bezeichne $V_t(k)$ den Wert am Knoten $(t, N_t = k)$, wobei $N_t = k$ die Anzahl der Sprünge nach oben ist. Dann kann $V_t(k)$ rekursiv bestimmt werden*

$$\begin{cases} V_t(k) = \frac{1}{1+R}\{q_u V_{t+1}(k+1) + q_d V_{t+1}(k)\}, \\ V_T(k) = \Phi(su^k d^{T-k}). \end{cases}$$

mit den Martingalwahrscheinlichkeiten q_u und q_d:

$$\begin{cases} q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d}, \\ q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d}. \end{cases}$$

Das replizierende Portfolio ist gegeben durch

$$\begin{cases} x_t(k) = \frac{1}{1+R} \cdot \frac{uV_t(k) - dV_t(k+1)}{u-d}, \\ y_t(k) = \frac{1}{S_{t-1}} \cdot \frac{V_t(k+1) - V_t(k)}{u-d}. \end{cases}$$

Insbesondere ist der arbitragefreie Preis des Claims zu $t = 0$ gegeben durch $V_0(0)$.

Da N_t binomialverteilt ist, haben wir die folgende risikoneutrale Bewertungsformel.

Proposition 5.11. *Der arbitragefreie Preis eines T-Claims X zu $t = 0$ ist gegeben durch*

$$\Pi(0; X) = \frac{1}{(1+R)^T} \cdot E^Q[X],$$

mit dem Martingalmaß Q, oder explizit

$$\Pi(0; X) = \frac{1}{(1+R)^T} \cdot \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} \Phi(su^k d^{T-k}).$$

Teil III.

Asiatische Optionen

Kapitel 6.

Asiatische Optionen

Eine **Asiatische Option** ist eine besondere Form einer exotischen Option, die dem Käufer einer solchen Option beim späteren Verkauf am Ausübungstag einen Durchschnittswert über vergangene Aktienkurse des Underlyings auszahlt. Bezüglich der Ausübungsart können Asiatische Optionen sowohl vom amerikanischen als auch vom europäischen Typ her sein. (Wikipedia)
Eine Asiatische Option ist eine pfadabhängige Option, weil die Auszahlung nicht nur vom Schlusskurs des Underlyings abhängt, sondern auch vom Durchschnittswert der Kurse in der gesamten Laufzeit $[0, T]$. Es kann der stetige Durchschnitt in einem bestimmten Zeitraum, oder der diskrete Durchschnitt einiger Punkte sein; das **arithmetische Mittel** oder das **geometrische Mittel**. Zu jeder Art der Durchschnittsbildung gibt es zwei Formen von Asiatischen Optionen: **Fixed Strike** (**Average Rate**) und **Floating Strike Asian Options** (**Average Strike**) vgl. Clewlow und Strickland (1997). Der Unterschied ist, das Payoff von der Ersteren ist Mittelwert statt Schlusswert im Payoff der Europäischen Option; das Payoff von der Letzteren ist Mittelwert statt Ausübungspreis im Payoff der Europäischen Option. Im Vergleich zur Europäischen Option hat Asiatische Option den Vorteil, dass Manipulation der Preise vermieden wird, deswegen ist Asiatische Option sehr beliebt bei Investoren. Zang und Yang (2008)

Anwendung der Average Rate Options (ARO):
Es gibt verschiedene Gründe, warum die AROs populär geworden sind. Erstens, die Preisschwankungen in Zukunft, den ein Unternehmen ausgesetzt ist, lassen sich manchmal als Durchschnitt der Preise darstellen. Die jährlichen Gesamtkosten eines Unternehmens hängen z.B. von den Preisen der Rohstoffe ab, die in der Produktion verwendet werden über das kommende Jahr. Es ist unwahrscheinlich, dass man die Kosten und den Zeitpunkt von jedem Einkauf weiß. Man kann aber wahrscheinlich die Kosten gleichmäßig verteit (oder je nach Saison) über das Jahr schätzen. Die Gesamtkosten hängen also vom Mittelwert (oder gewichteten Mittel) der Preise der Rohstoffe über das Jahr ab. Eine ARO auf den Preis kompensiert die Differenz zwischen dem Durchnitt der Preise und Preise des einzelnen Einkaufs. Zweitens, die Durchschnittsbildung reduziert die

Sensibilität der Option gegen die Kursentwicklung des Underlyings am Ausübungstag. Abnormale Kursschwankungen am Ausübungstag können zur Verzerrung der Auszahlung führen. Um solche Effekte zu vermeiden, sind manche Optionsverträge in der Art von ARO, wobei die Durchschnittsperiode die letzten 10 Werktage ist. Der dritte Grund für AROs ist, dass der Rechnungswesen den Mittelwert des Wechselkurses über einen Rechnungszeitraum für Fremdwährungen benötigt. Eine ARO ist wieder eine gute Wahl um die negativen Effekte des Währungsmarktes zu reduzieren. Außerdem ist eine ARO im Allgemeinen immer günstiger als ein Strip von europäischen Optionen. Clewlow und Strickland (1997)

Anwendung der Average Strike Options (ASO):
Die ASO, obwohl weniger populär, hat aber auch einige Anwendungsmöglichkeiten. Angenommen eine Institution will eine einjährige Anleihe ausgeben, deren Auszahlung verbunden mit Optionen (Puts oder Calls) auf einem Marktkursindex ist. Man könnte vorher angeben, dass sie Auszahlung durch den Schlusskurs in 7 Tagen bestimmt wird. Wenn die Institution die Auswirkungen der Marktbedingungen an diesem besonderen Tag vermeiden möchte, könnte man als Alternative den Durchschnitt des Schlusskurses von den folgenden zwei Wochen nehmen. Diese Alternative ist dann verbunden mit einer ASO. Eine zweite Anwendung von der ASO ist, wenn ein Ziel erreicht werden soll, das auf den Durchschnittskurs der kommenden Periode basiert. Aber Hedges für diese Periode müssen im Voraus bestimmt werden. Wenn die Hedges relativ zum Schlusskurs der Periode sind, dann gibt es ein Missverhältnis zwischen dem Ziel und den Hedgingmitteln. Da zahlt eine ASO diese Differenz und löst das Problem. Ein ähnlicher Grund für die Anwendung der ASO ist, wenn ein Unternehmen regelmäßig inländische Währung in Fremdwährungen wechseln muss. Hier kompensiert eine ASO auf den Wechselkurs die Differenz zwischen dem Durchschnittskurs und den Kursen des einzelnen Wechsels. Clewlow und Strickland (1997)

6.1. Arithmetische Asiatische Optionen

6.1.1. Call mit diskretem Monitoring

Sei ein Basiswert mit dem Kurs $S(t), t \geq 0$ gegeben. Eine **diskrete arithmetische asiatische Call-Option** auf den Basiswert mit einer Laufzeit $T > 0$ ist ein Kontrakt, der den Käufer der Option das Recht gibt, sich zum Zeitpunkt T vom Verkäufer einen bestimmten Betrag auszahlen zu lassen. Bei Fixed Strike (Average Rate) Asian Options ist dieser Betrag die Differenz aus arithmetischem Mittelwert $\Sigma(0,T)$ des Kurses zu bestimmten Zeitpunkten im Zeitraum $[0,T]$ und vereinbartem Basispreis K

$$(\Sigma(0,T) - K)^+, \tag{6.1}$$

bei Floating Strike (Average Strike) Asian Options sieht die Auszahlung folgendermaßen aus:

$$(\theta S(T) - \Sigma(0,T))^+, \tag{6.2}$$

wobei $\theta \in \mathbf{R}^+$, $x^+ = \max(x,0)$. $\Sigma(0,T)$ ist dabei definiert als

$$\Sigma(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) \tag{6.3}$$

mit $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$.
Eine **arithmetische asiatische Put-Option** funktioniert analog, nur ist hier der Auszahlungsbetrag $(K - \Sigma(0,T))^+$ bzw. $(\Sigma(0,T) - \theta S(T))^+$.

6.1.2. Call mit stetigem Monitoring

Sei ein Basiswert mit dem Kurs $S(t), t \geq 0$ gegeben. Eine **stetige arithmetische asiatische Call-Option** auf den Basiswert mit einer Laufzeit $T > 0$ ist ein Kontrakt, der den Käufer der Option das Recht gibt, sich zum Zeitpunkt T vom Verkäufer einen bestimmten Betrag auszahlen zu lassen. Bei Fixed Strike (Average Rate) Asian Options ist dieser Betrag die Differenz aus arithmetischem Mittelwert $\Sigma(0,T)$ des Kurses zu bestimmten Zeitpunkten im Zeitraum $[0,T]$ und vereinbartem Basispreis K

$$(\Sigma(0,T) - K)^+, \tag{6.4}$$

bei Floating Strike (Average Strike) Asian Options sieht die Auszahlung folgendermaßen aus:

$$(\theta S(T) - \Sigma(0,T))^+, \tag{6.5}$$

wobei $\theta \in \mathbf{R}^+$, $x^+ = \max(x,0)$. $\Sigma(0,T)$ ist dabei definiert als

$$\Sigma(0,T) = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt \tag{6.6}$$

Eine **arithmetische asiatische Put-Option** funktioniert analog, nur ist hier der Auszahlungsbetrag $(K - \Sigma(0,T))^+$ bzw. $(\Sigma(0,T) - \theta S(T))^+$.

6.2. Geometrische Asiatische Optionen

6.2.1. Call mit diskretem Monitoring

Sei ein Basiswert mit dem Kurs $S(t), t \geq 0$ gegeben. Eine **diskrete geometrische asiatische Call-Option** auf den Basiswert mit einer Laufzeit $T > 0$ ist ein Kontrakt, der den Käufer der Option das Recht gibt, sich zum Zeitpunkt T vom Verkäufer einen bestimmten Betrag auszahlen zu lassen. Bei Fixed Strike (Average Rate) Asian Options ist dieser Betrag die Differenz aus geometrischem Mittelwert $G(0,T)$ des Kurses zu bestimmten Zeitpunkten im Zeitraum $[0,T]$ und vereinbartem Basispreis K

$$(G(0,T) - K)^+, \tag{6.7}$$

bei Floating Strike (Average Strike) Asian Options sieht die Auszahlung folgendermaßen aus:

$$(\theta S(T) - G(0,T))^+, \tag{6.8}$$

wobei $\theta \in \mathbf{R}^+$, $x^+ = \max(x,0)$. $G(0,T)$ ist dabei definiert als

$$G(0,T) = \sqrt[n]{S(t_1) \cdot S(t_2) \cdot \ldots \cdot S(t_n)} = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln S(t_i)} \tag{6.9}$$

mit $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$.

Es gibt analytische Preisformeln für geometrische asiatische Optionen, wenn der Kurs S lognormalverteilt ist.

Proposition 6.1. *Sei S eine geometrische Brownsche Bewegung (lognormalverteilt) gegeben durch*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S(t) &= rS(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t), \\ S(0) &= s. \end{aligned}$$

Dann $\ln G(0,T) \cong N(\mu_G, \sigma_G^2)$ *mit*

$$\mu_G = \ln s + \frac{1}{n}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sum_{i=1}^{n} t_i, \tag{6.10}$$

$$\sigma_G^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + 2\sum_{i=1}^{n-i}(n-i)t_i\right). \tag{6.11}$$

Für äquidistante Zeitpunkte $t_i, i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\mu_G = \ln s + \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_1 + T) = \ln s + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left[t_1 + \frac{h}{2}(n-1)\right], \tag{6.12}$$

$$\sigma_G^2 = \sigma^2 \frac{t_1(1+4n) + T(2n-1)}{6n} = \sigma^2\left(t_1 + \frac{h(n-1)(2n-1)}{6n}\right), \tag{6.13}$$

mit Intervalllänge $h = (T - t_1)/(n-1)$.
Der Preis einer ARO Call-Option sieht folgendermaßen aus:

$$e^{-rT} E^Q[\max(G(0,T) - K, 0)] = e^{\mu_G + \frac{1}{2}\sigma_G^2 - rT}\Phi(x_1) - e^{-rT} K \Phi(x_2), \tag{6.14}$$

und der Preis einer ARO Put-Option:

$$e^{-rT} E^Q[\max(K - G(0,T), 0)] = e^{-rT} K \Phi(-x_2) - e^{\mu_G + \frac{1}{2}\sigma_G^2 - rT}\Phi(-x_1), \tag{6.15}$$

wobei $\Phi(.)$ *die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung ist,* $x_1 = \frac{\mu_G - \ln K + \sigma_G^2}{\sigma_G}$ *und* $x_2 = x_1 - \sigma_G$.

Beweis. Aus Gleichung (2.42) folgt

$$\ln S(t_i) = \ln s + \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t_i + \sigma W(t_i)\right] \tag{6.16}$$

$$\Rightarrow \quad \ln G(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln S(t_i) = \ln s + \frac{1}{n}\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sum_{i=1}^{n} t_i + \sigma \sum_{i=1}^{n} W(t_i)\right] \tag{6.17}$$

Man sieht nun, dass $\ln G(0,T) \cong N(\mu_G, \sigma_G^2)$ mit

$$\begin{aligned}
\mu_G &= \ln s + \frac{1}{n}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sum_{i=1}^{n} t_i, \\
\sigma_G^2 &= \frac{\sigma^2}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} W(t_i)\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} Var(W(t_i)) + \sum_{i \neq j} Cov(W(t_i), W(t_j))\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i \neq j} t_i \wedge t_j\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} t_i\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)t_i\right).
\end{aligned}$$

Für äquidistante Zeitpunkte $t_i, i = 1, \ldots, n$ mit $h = (T - t_1)/(n-1)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\mu_G &= \ln s + \frac{1}{n}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sum_{i=1}^{n} t_i \\
&= \ln s + \frac{1}{n}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n(t_1+T)}{2} \\
&= \ln s + \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_1+T) \\
&= \ln s + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left[t_1 + \frac{h}{2}(n-1)\right], \\
\sigma_G^2 &= \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)t_i\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(t_1+(i-1)h\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}(t_1 n - t_1 i + h(ni - n + i - i^2))\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2}\left\{\frac{n(t_1+T)}{2} + 2\left[t_1 n(n-1) - t_1\frac{n(n-1)}{2} + \frac{T-t_1}{n-1}\left(\frac{n^2(n-1)}{2} - n(n-1) + \right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)\right]\right\} \\
&= \sigma^2\frac{t_1(1+4n) + T(2n-1)}{6n} \\
&= \sigma^2\left(t_1 + \frac{h(n-1)(2n-1)}{6n}\right).
\end{aligned}
$$

Dann ist $G(0,t)$ lognormalverteilt mit Dichte

$$
f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma_G}\exp\left(-\frac{(\ln x - \mu_G)^2}{2\sigma_G^2}\right) \tag{6.18}
$$

Nach Satz 2.8 ist der risikoneutrale Preis einer Call-Option gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&e^{-rT}E^Q[\max(G(0,T)-K,0)] = e^{-rT}\int_K^\infty (x-K)f(x)\mathrm{d}x\\
=&e^{-rT}\int_K^\infty (x-K)\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma_G}\exp\left(-\frac{(\ln x-\mu_G)^2}{2\sigma_G^2}\right)\mathrm{d}x\\
\overset{\ln x=y}{=}&e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_G}\left(\int_{\ln K}^\infty \exp\left(-\frac{(y-\mu_G)^2}{2\sigma_G^2}\right)\cdot e^y\mathrm{d}y - K\cdot\int_{\ln K}^\infty \exp\left(-\frac{(y-\mu_G)^2}{2\sigma_G^2}\right)\mathrm{d}y\right)\\
=&e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_G}\left(\int_{\ln K}^\infty \exp\left(\mu_G+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\cdot\exp\left(-\frac{(y-(\mu_G+\sigma_G^2))^2}{2\sigma_G^2}\right)\mathrm{d}y-\right.\\
&\left.-K\cdot\int_{\ln K}^\infty \exp\left(-\frac{(y-\mu_G)^2}{2\sigma_G^2}\right)\mathrm{d}y\right)\\
=&e^{\mu_G+\sigma_G^2-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_G}\int_{-\infty}^{-\ln K}\exp\left(-\frac{(y+(\mu_G+\sigma_G^2))^2}{2\sigma_G^2}\right)\mathrm{d}y-\\
&-e^{-rT}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_G}\int_{-\infty}^{-\ln K}\exp\left(-\frac{(y+\mu_G)^2}{2\sigma_G^2}\right)\mathrm{d}y\\
=&e^{\mu_G+\frac{1}{2}\sigma_G^2-rT}\Phi(x_1)-e^{-rT}K\Phi(x_2)
\end{aligned}
$$

mit $x_1=\frac{\mu_G-\ln K+\sigma_G^2}{\sigma_G}$ und $x_2=\frac{\mu_G-\ln K}{\sigma_G}=x_1-\sigma_G$.
Die Rechnung für die Put-Option geht analog mit der Auszahlung $(K-G(0,T))^+$. □

Proposition 6.2. *Sei S eine geometrische Brownsche Bewegung (lognormalverteilt) gegeben durch*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S(t) &= rS(t)\mathrm{d}t+\sigma S(t)\mathrm{d}W(t),\\
S(0) &= s.
\end{aligned}
$$

Dann sieht der Preis einer ASO Call-Option folgendermaßen aus:

$$
s\left(\Phi(-x_2)-e^{\mu_G+\frac{1}{2}\sigma_G^2}\Phi(-x_1)\right), \tag{6.19}
$$

und der Preis einer ASO Put-Option:

$$
s\left(e^{\mu_G+\frac{1}{2}\sigma_G^2}\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\right), \tag{6.20}
$$

wobei $\Phi(.)$ die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung ist, $x_1=\frac{\mu_G-\ln K+\sigma_G^2}{\sigma_G}$ und $x_2=x_1-\sigma_G$ mit $\mu_G=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i-T\right)$ und $\sigma_G^2=\sigma^2\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n t_i+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)t_i\right)+T+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i\right]$.

Beweis. Der Preis einer ASO Call-Option ist gegeben durch

$$E^0\left[\frac{(S(T)-G(T))^+}{B(T)}\right] = E^0\left[\frac{S(T)}{B(T)}\left(1-\frac{G(T)}{S(T)}\right)^+\right], \tag{6.21}$$

dabei bezeichnet E^0 den Erwartungswert unter dem Martingalmaß mit Numeraire $B(t) = e^{rT}$.
Wir berechnen nun den Preis durch einen Numeraire-Wechsel mit Numeraire S. Der Erwartungswert unter dem Martingalmaß mit Numeraire S wird mit E^1 bezeichnet. Wegen Proposition 4.3 gilt

$$\frac{\mathrm{d}Q^1}{\mathrm{d}Q^0} = L_0^1(T) = \frac{B(0)}{S(0)}\cdot\frac{S(T)}{B(T)}. \tag{6.22}$$

Dann sieht der Preis wie folgt aus

$$\begin{aligned}
E^0\left[\frac{S(T)}{B(T)}(1-\frac{G(T)}{S(T)})^+\right] &= \frac{S(0)}{B(0)}E^0\left[\frac{S(T)}{B(T)}\cdot\frac{B(0)}{S(0)}(1-\frac{G(T)}{S(T)})^+\right]\\
=&\frac{S(0)}{B(0)}E^0\left[\frac{\mathrm{d}Q^1}{\mathrm{d}Q^0}(1-\frac{G(T)}{S(T)})^+\right]\\
=&\frac{S(0)}{B(0)}E^1\left[(1-\frac{G(T)}{S(T)})^+\right]\\
=&sE^1\left[(1-\frac{G(T)}{S(T)})^+\right],
\end{aligned}$$

also wie eine ARO Put-Option mit $K=1$.
Durch Einsetzen von $G(t)/S(t)$ in (2.42) erhalten wir

$$\frac{G(T)}{S(T)} = \exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i - T\right) + \sigma\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W(t_i)-W(T)\right)\right]. \tag{6.23}$$

Daher ist $G(t)/S(t)$ lognormalverteilt mit

$$\begin{aligned}
\mu_G =& \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i - T\right),\\
\sigma_G^2 =& \sigma^2 Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W(t_i)-W(T)\right)\\
=&\sigma^2\left(Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W(t_i)\right)+Var(W(T))+Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W(t_i),W(T)\right)\right)\\
=&\sigma^2\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)t_i\right)+T+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Cov(W(t_i),W(T))\right]\\
=&\sigma^2\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)t_i\right)+T+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\right].
\end{aligned}$$

Mit (6.15) erhalten wir dann das Resultat.
Analog kann man eine ASO Put-Option in eine ARO Call-Option mit $K = 1$ bringen. $\square$

6.2.2. Call mit stetigem Monitoring

Sei ein Basiswert mit dem Kurs $S(t), t \geq 0$ gegeben. Eine **stetige geometrische asiatische Call-Option** auf den Basiswert mit einer Laufzeit $T > 0$ ist ein Kontrakt, der den Käufer der Option das Recht gibt, sich zum Zeitpunkt T vom Verkäufer einen bestimmten Betrag auszahlen zu lassen. Bei Fixed Strike (Average Rate) Asian Options ist dieser Betrag die Differenz aus geometrischem Mittelwert $G(0,T)$ des Kurses zu bestimmten Zeitpunkten im Zeitraum $[0,T]$ und vereinbartem Basispreis K

$$(G(0,T) - K)^+, \tag{6.24}$$

bei Floating Strike (Average Strike) Asian Options sieht die Auszahlung folgendermaßen aus:

$$(\theta S(T) - G(0,T))^+, \tag{6.25}$$

wobei $\theta \in \mathbf{R}^+$, $x^+ = \max(x,0)$. $G(0,T)$ ist dabei definiert als

$$G(0,T) = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S(t)\mathrm{d}t\right) \tag{6.26}$$

Die analytischen Preisformeln funktionieren genauso wie im diskreten Fall für $n \to \infty$.

Eine **geometrische asiatische Put-Option** funktioniert analog, nur ist hier der Auszahlungsbetrag $(K - G(0,T))^+$ bzw. $(G(0,T) - \theta S(T))^+$.

Kapitel 7.

Binomialmodelle mit einer Zustandsvariablen für geometrische Asiatische Optionen

Das Binomialmodell wurde zuerst von Cox et al (1979) vorgeschlagen, um Optionen zu bewerten. Hull and White (1993) und Ritchken et al (1993) erweitern das Modell mit Interpolationstechnik zur Bewertung der asiatischen Optionen. Barraquand and Pudet (1996) macht einen ähnlichen Gitter-Algorithmus namens forward shooting grid method. Cho and Lee (1997) präsentiert ein Gittermodell mit allen Pfaden, um geometrische asiatische Optionen zu bewerten.
Das Binomialmodell für pfadabhängige Optionen hat im Allgemeinen zwei Zustandsvariable, weil eine zusätzliche pfadabhängige Variable benötigt wird. Es gibt jedoch Binomialmodelle mit einer Zustandsvariablen für einige spezielle Fälle, z.B. Babbs (1992) und Cheuk and Vorst (1997) für Lookback Options. Solche Modelle vereinfachen die Berechnung deutlich.
Ein wichtiger Grund, warum Babbs (1992) und Cheuk and Vorst (1997) Binomialmodelle mit einer Zustandsvariablen konstruieren können, ist dass die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen mit einigen Transformationen zu einem eindimensionalen zeitabhängigen Problem reduziert werden können. Da ähnliche Transformationen auch bei asiatischen Optionen angewandt werden können, ist es möglich, Binomialmodelle mit einer Zustandsvariablen für asiatische Optionen zu konstruieren.

Dieses Kapitel basiert auf Dai (2003) und beschäftigt sich mit der Konstruktion des Binomialmodells mit einer Zustandsvariablen für geometrische asiatische Optionen. Es gibt analytische Formeln für Optionen vom europäischen Typ (siehe z.B. Wilmott et al 1993, Kwok 1998 oder Hull 2000), jedoch keine geschlossenen Formeln für Optionen vom amerikanischen Typ. Wir entwickeln hier Binomialmodelle sowohl für europäischen als auch für amerikanischen Typ.

7.1. Binomialmodelle für Europäischen Typ mit stetiger Mittelbildung

Sei T die Laufzeit der Option, r der Zinssatz, q die stetige Dividendenrate und σ die Volatilität. Wenn N die Anzahl der diskreten Zeitpunkte ist, dann haben wir Zeitpunkte $n\Delta t$, $n = 0, 1, \ldots, N$ mit $\Delta t = T/N$. Sei $V^n(S_n, I_n)$ der Optionspreis zum Zeitpunkt $n\Delta t$ mit dem Kurs des Underlyings S_n und geometrischen Mittel $e^{\frac{I_n}{n+1}}$, wobei $I_n = \sum_{i=0}^{n} \ln S_i$. Angenommen, S_n wird entweder $S_n u$ für eine Aufwärtsbewegung mit Wahrscheinlichkeit p oder $S_n d$ für eine Abwärtsbewegung mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ zum Zeitpunkt $(n+1)\Delta t$. Hier

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}.$$

Daraus folgt, dass I_n entweder I_{n+1}^u oder I_{n+1}^d wird, wobei

$$\begin{aligned} I_{n+1}^u &= I_n + \ln(S_n u) = I_n + \ln S_n + \sigma\sqrt{\Delta t} \\ I_{n+1}^d &= I_n + \ln(S_n d) = I_n + \ln S_n - \sigma\sqrt{\Delta t}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Aus den Cox, Ross und Rubinstein Arbitrage-Argumenten folgt:

$$V^n(S_n, I_n) = \frac{1}{\rho}\left[pV^{n+1}(S_n u, I_{n+1}^u) + (1-p)V^{n+1}(S_n d, I_{n+1}^d)\right], \tag{7.2}$$

wobei $\rho = e^{r\Delta t}$.

7.1.1. Floating Strike Optionen

Wir betrachten zuerst die Floating Strike Optionen, das Payoff ist gegeben durch

$$V^N(S_N, I_N) = \left(S_N - e^{\frac{I_N}{N+1}}\right)^+.$$

Angenommen können wir schreiben

$$V^n(S_n, I_n) = S_n W^n(y_n), \tag{7.3}$$

wobei

$$y_n = I_n - (n+1)\ln S_n. \tag{7.4}$$

Die Umformungen (7.3), (7.4) sind äqivalent zu *change of numeraire*, nämlich mit dem Underlying als Numeraire für ein Martingalmaß statt des Bankkontos. Aus (7.1) folgt

$$\begin{aligned} &I_{n+1}^u - (n+2)\ln(S_n u) \\ &= I_n + \ln S_n + \sigma\sqrt{\Delta t} - (n+2)\ln S_n - (n+2)\sigma\sqrt{\Delta t} \\ &= I_n - (n+1)\ln S_n - (n+1)\sigma\sqrt{\Delta t} \\ &= y_n - (n+1)\sigma\sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

Dann können wir umschreiben

$$V^{n+1}(S_n u, I_{n+1}^u) = S_n u W^{n+1}(y_n - (n+1)\sigma\sqrt{\Delta t}), \tag{7.5}$$

und analog

$$V^{n+1}(S_n d, I_{n+1}^d) = S_n d W^{n+1}(y_n + (n+1)\sigma\sqrt{\Delta t}). \tag{7.6}$$

Aus (7.2)-(7.6) folgt

$$W^n(y_n) = \frac{1}{\rho}[puW^{n+1}(y_n - (n+1)\sigma\sqrt{\Delta t} + (1-p)dW^{n+1}(y_n + (n+1)\sigma\sqrt{\Delta t})]. \tag{7.7}$$

Bei Fälligkeit haben wir

$$W^N(y_N) = \left(1 - \frac{e^{\frac{I_N}{N+1}}}{S_N}\right)^+ = \left(1 - e^{\frac{y_N}{N+1}}\right)^+. \tag{7.8}$$

Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir

$$W^n(j) = W^n(j\sigma\sqrt{\Delta t}).$$

Es gilt $I_0 = \ln S_0$ und dann $y_0 = 0$. Um $V_0(S_0, \ln S_0) = S_0 W^0(0)$ zu berechnen, sollten wir die werte von W^n an den Knoten im folgenden Intervall ausrechnen

$$\begin{aligned}&\left(-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\sigma\sqrt{\Delta t}, \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\\ &= \left(-\frac{n(n+1)}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}, \frac{n(n+1)}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right).\end{aligned}$$

Aufgrund (7.7) und (7.8) können Optionspreise mit folgender Rückwärtsrekursion berechnet werden:

$$\begin{aligned}W^n(j) &= \frac{1}{\rho}\left[puW^{n+1}(j-n-1) + (1-p)dW^{n+1}(j+n+1)\right],\\ &\text{für} \quad 0 \le n \le N-1, j = -\frac{n(n+1)}{2}, -\frac{n(n+1)}{2}+2, \dots, \frac{n(n+1)}{2},\\ W^N(j) &= \left(1 - e^{\frac{j\sigma\sqrt{\Delta t}}{N+1}}\right)^+ = \left(1 - u^{\frac{j}{N+1}}\right)^+\\ &\text{für} \quad j = -\frac{N(N+1)}{2}, -\frac{N(N+1)}{2}+2, \dots, \frac{N(N+1)}{2}\end{aligned} \tag{7.9}$$

mit $V^0(S_0, \ln S_0) = S_0 W^0(0)$.

7.1.2. Fixed Strike Optionen

Das Payoff bei Fälligkeit sieht wie folgt aus:

$$V^N(S_N, I_N) = \left(e^{\frac{I_N}{N+1}} - X\right)^+, \tag{7.10}$$

wobei X der Strikepreis ist. In diesem Fall lassen wir

$$V^n(S_n, I_n) = W^n(y_n), \quad y_n = I_n - (N-n)\ln S_n. \tag{7.11}$$

Sowie im vorigen Abschnitt erhält man aus (7.1), (7.2) und (7.10) Folgendes:

$$W^n(y_n) = \frac{1}{\rho}\left[puW^{n+1}(y_n + (N-n)\sigma\sqrt{\Delta t} + (1-p)dW^{n+1}(y_n - (N-n)\sigma\sqrt{\Delta t})\right]$$

und

$$W^N(y_N) = \left(e^{\frac{y_N}{N+1}} - X\right)^+.$$

Wir schreiben

$$W^n(j) = W^n(y_0 + j\sigma\sqrt{\Delta t}).$$

Hier $y_0 = I_0 + N\ln S_0 = (N+1)\ln S_0$. Um $V_0(S_0, \ln S_0) = W^0(y_0)$ zu berechnen, sollten wir die werte von W^n an den Knoten im folgenden Intervall ausrechnen

$$\begin{aligned}&\left(y_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(N-k)\sigma\sqrt{\Delta t}, y_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(N-k)\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\\ &= \left(y_0 - \frac{n(2N-n+1)}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}, y_0 + \frac{n(2N-n+1)}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right).\end{aligned}$$

Daher können Optionspreise mit folgender Rückwärtsrekursion berechnet werden:

$$\begin{aligned}W^n(j) &= \frac{1}{\rho}\left[pW^{j+N-n}(j-n-1) + (1-p)W^{n+1}(j-N+n)\right],\\ &\text{für} \quad 0 \le n \le N-1, j = -\frac{n(2N-n+1)}{2}, -\frac{n(2N-n+1)}{2} + 2, \dots, \frac{n(2N-n+1)}{2},\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}W^N(j) &= \left(e^{\frac{x_0 + j\sigma\sqrt{\Delta t}}{N+1}} - X\right)^+ = \left(S_0 u^{\frac{j}{N+1}} - X\right)^+\\ &\text{für} \quad j = -\frac{N(N+1)}{2}, -\frac{N(N+1)}{2} + 2, \dots, \frac{N(N+1)}{2}\end{aligned}$$

mit $V^0(S_0, \ln S_0) = W^0(y_0)$.

7.1.3. Numerische Simulation

In diesem Abschnitt werden Optionspreise in R berechnet.

Floating Strike Option:

```
aso<-function(S0,sigma,r,q,T,N){
#S0:=S(0) Kurs, sigma: Volatilität, r: Zinssatz
#q: stetige Dividendenrate, T: Laufzeit, N: Anzahl der Zeitpunkte
delt<-T/N
u<-exp(sigma*sqrt(delt))  #aufwärts
d<-1/u  #abwärts
p<-(exp((r-q)*delt)-d)/(u-d)  #Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs aufwärts geht

y<-function(n){  #Zustandsvariable y
  if (n==0) {return(0)}
  else return(y(n-1)+n*log(u)*c(rep(1,length(y(n-1))),rep(-1,length(y(n-1)))))
  }

rho<-exp(r*delt)
W<-function(n,j){  #Rekursionsformel (2.9), rel. Preis
  if (n==N) {return(max(1-u^(j/(N+1)),0))}
  else return(1/rho*(p*u*W(n+1,j-n-1)+(1-p)*d*W(n+1,j+n+1)))
  }
V<-S0*W(0,0)  #Preis bei t=0
print(V)

X<-0  #x-Achse
Y<-y(0) #y-Achse
k<-1
while(k<=N){
  X<-c(X,rep(k*delt,length(y(k))))  #x-Achse: Zeit
  Y<-c(Y,y(k))  #y-Achse: Zustandsvariable y
  k<-k+1
  }
plot(X,Y,xlim=c(-0.1*max(X),1.1*max(X)),ylim=1.1*c(min(Y),max(Y)),cex=0.6)
for (l in 0:(N-1)){
 for (m in 1:length(y(l))){
  segments(l*delt,y(l)[m],(l+1)*delt,y(l)[m]+(l+1)*log(u))
  segments(l*delt,y(l)[m],(l+1)*delt,y(l)[m]-(l+1)*log(u))   #Punkte verbinden
  }
 }
```

```
text(X,Y,round(Y,4),pos=2,cex=0.6)  #links y-Werte
for (i in 1:length(X)){
  w_i<-W(X[i]/delt,Y[i]/log(u))
  text(X[i],Y[i],round(w_i,4),pos=4,cex=0.6)  #rechts rel. Preise W
  }
}
```

Fixed Strike Option:

```
aro<-function(S0,sigma,r,q,T,N,X){
#S0:=S(0) Kurs, sigma: Volatilität, r: Zinssatz, q: stetige Dividendenrate
#T: Laufzeit, N: Anzahl der Zeitpunkte, X: Strike-Preis
delt<-T/N
u<-exp(sigma*sqrt(delt))  #aufwärts
d<-1/u  #abwärts
p<-(exp((r-q)*delt)-d)/(u-d)  #Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs aufwärts geht

y<-function(n){  #Zustandsvariable y
  if (n==0) {return((n+1)*log(S0))}
  else return(y(n-1)+(N-n+1)*log(u)*c(rep(1,length(y(n-1))),rep(-1,length(y(n-1)))))
  }

rho<-exp(r*delt)
W<-function(n,j){   #Rekursionsformel (2.12), Optionspreis
  if (n==N) {return(max(S0*u^(j/(N+1))-X,0))}
  else return(1/rho*(p*W(n+1,j+N-n)+(1-p)*W(n+1,j-N+n)))
  }
V<-W(0,0) #Preis bei t=0
print(V)

X0<-0  #x-Achse
Y<-y(0)  #y-Achse
k<-1
while(k<=N){
  X0<-c(X0,rep(k*delt,length(y(k))))  #x-Achse: Zeit
  Y<-c(Y,y(k))  #y-Achse: Zustandsvariable y
  k<-k+1
  }
plot(X0,Y,xlim=c(-0.1*max(X0),1.1*max(X0)),ylim=c(0.98*min(Y),1.02*max(Y)),cex=0.6)
for (l in 0:(N-1)){
 for (m in 1:length(y(l))){
  segments(l*delt,y(l)[m],(l+1)*delt,y(l)[m]+(N-l)*log(u))
  segments(l*delt,y(l)[m],(l+1)*delt,y(l)[m]-(N-l)*log(u))   #Punkte verbinden
```

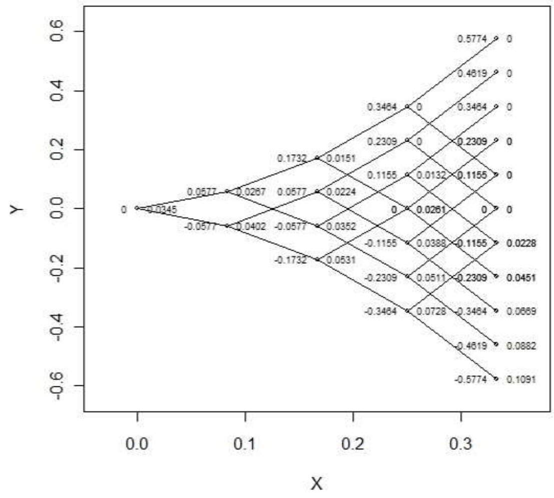


Abbildung 7.1.: Floating Strike Option mit $N = 4$

```
  }
 }
text(X0,Y,round(Y,4),pos=2,cex=0.6)   #links y-Werte
for (i in 1:length(X0)){
  w_i<-W(X0[i]/delt,(Y[i]-y(0))/log(u))
  text(X0[i],Y[i],round(w_i,4),pos=4,cex=0.6)   #rechts Optionspreise W
  }
}
```

Abbildung 7.1 zeigt eine Floating Strike Option mit $S_0 = 100, \sigma = 0,2, r = 0.09, q = 0, T = \frac{1}{3}$ und $N = 4$. Links von jedem Knoten steht der Wert der Zustandsvariable y_n, rechts der relative Optionspreis W^n. Der Preis dieser Option ist also $0,0345 \times 100 = 3,45$. Abbildung 7.2 zeigt eine Fixed Strike Option mit $S_0 = 100, \sigma = 0,2, r = 0.09, q = 0, T = \frac{1}{3}, X = 95$ und $N = 4$. Links von jedem Knoten steht der Wert der Zustandsvariable y_n, rechts der Optionspreis. Der Preis dieser Option ist also $6,6907$.

7.2. Erweiterung zum Amerikanischen Typ

Die Erweiterung des Modells, um Floating Strike Option vom amerikanischen Typ zu bewerten ist einfach. Wir können auf gleicher Art und Weise unter Berücksichtigung der

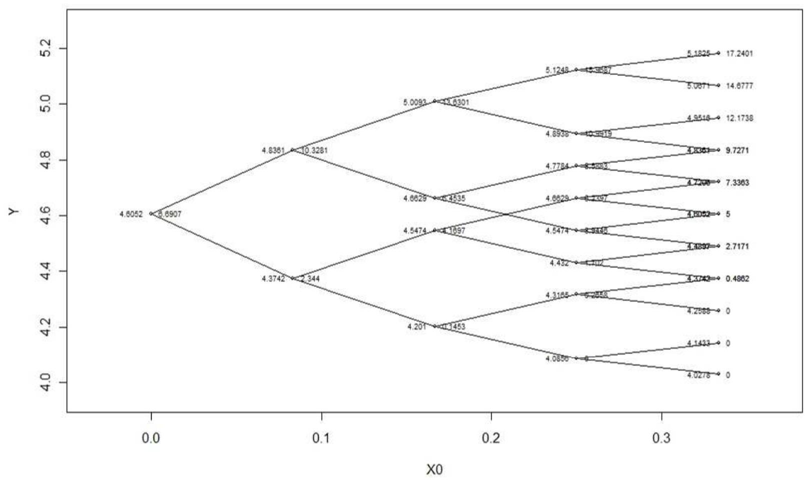


Abbildung 7.2.: Fixed Strike Option mit $N = 4$

frühzeitigen Ausübung berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} W^n(j) &= \max\left\{ \frac{1}{\rho} \left[puW^{n+1}(j-n-1) + (1-p)dW^{n+1}(j+n+1) \right], (1-u^{\frac{j}{n+1}})^+ \right\} \\ &\text{für} \quad 0 \leq n \leq N-1, j = -\frac{n(n+1)}{2}, -\frac{n(n+1)}{2}+2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \\ W^N(j) &= \left(1 - u^{\frac{j}{N+1}}\right)^+ \\ &\text{für} \quad j = -\frac{N(N+1)}{2}, -\frac{N(N+1)}{2}+2, \ldots, \frac{N(N+1)}{2} \end{aligned} \tag{7.13}$$

mit $V^0(S_0, \ln S_0) = S_0 W^0(0)$.
Leider kann das Binomialmodell mit einer Zustandsvariablen für Fixed Strike Option nicht erweitert werden, weil die Transformation (7.11) nicht für amerikanischen Typ wegen frühzeitiger Ausübung verwendet werden kann.

Kapitel 8.

Äquivalenz von Asiatischen Optionen

8.1. Grundmodell

Für den Assetpreis gilt

$$dS_t = S_{t^-}\left[\mu dt + \sigma dB_t + \int_{\mathbf{R}_0} K(x)\tilde{N}(dt,dx)\right],\ 0 \le t \le T, \tag{8.1}$$

wobei $(B_t, t \ge 0)$ eine Standard Brownsche Bewegung, $\tilde{N}(t,.)$ ein kompensiertes Poisson Zufallsmaß mit Lévy Maß $v(.)$, $(B_t, t \ge 0)$ und $(\tilde{N}(t,.), t \ge 0)$ unabhängig, $K(x)$ eine deterministische Funktion and $K(x) > -1$, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} - \{0\}$.

Der Preis des risikolosen Assets ist $A_t = e^{rt}$, hier ist $r \ge 0$ der risikolose Zinssatz.

Aus der Itô-Formel folgt, dass der diskontierte Assetpreis $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ folgendes erfüllt:

$$d\tilde{S}_t = e^{-rt}(-r)S_t dt + e^{-rt}dS_t = \tilde{S}_{t^-}\left[(\mu - r)dt + \sigma dB_t + \int_{\mathbf{R}_0} K(x)\tilde{N}(dt,dx)\right],$$

dann

$$\begin{aligned}
d\ln\tilde{S}_t = &\frac{1}{\tilde{S}_{t^-}}\tilde{S}_{t^-}[(\mu-r)dt+\sigma dB_t]-\frac{1}{2\tilde{S}_{t^-}^2}\tilde{S}_{t^-}^2\sigma^2 dt\\
&+\int_{\mathbf{R}_0}\ln(1+K(x))\tilde{N}(dt,dx)+\int_{\mathbf{R}_0}[\ln(1+K(x))-K(x)]v(dx)dt=\\
&\left\{\mu-r-\frac{1}{2}\sigma^2+\int_{\mathbf{R}_0}[\ln(1+K(x))-K(x)]v(dx)\right\}dt+\sigma dB_t+\\
&\int_{\mathbf{R}_0}\ln(1+K(x))\tilde{N}(dt,dx),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_t = S_0\exp&\left\{\int_0^t[\mu-r-\frac{1}{2}\sigma^2+\int_{\mathbf{R}_0}[\ln(1+K(x))-K(x)]v(dx)]du+\right.\\
&\left.\sigma dB_t+\int_{\mathbf{R}_0}\ln(1+K(x))\tilde{N}(t,dx)\right\}. \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

Satz 8.1. *Sei $F(t)$ eine quadratische integrierbare deterministische Funktion, $H(x)$ eine $L_2(\mathbf{R}_0,\mathscr{B}(\mathbf{R}_0),v)$ deterministische Funktion, $A\in\mathscr{B}(\mathbf{R}_0)$ und nach unten beschränkt, definiere*

$$Y_t=\int_0^t F(u)dB_u-\frac{1}{2}\int_0^t F^2(u)du+\int_A H(x)N(t,dx)-t\int_A(e^{H(x)}-1)v(dx),$$

$$v_Q(dx)=e^{H(x)}v(dx),\quad dQ=e^{Y_T}dP,$$

dann $Q\sim P$, und $(N(t,A),0\le t\le T)$ ist ein Poissonprozess unter Q mit Intensität $v_Q(A)$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
&E_Q(\exp(iuN(t,A)))=E\left(e^{Y_T+iuN(t,A)}\right)=E\left(e^{Y_t+iuN(t,A)}\right)=\\
&E\left\{\exp\left[\int_A H(x)N(t,\mathrm{d}x)-t\int_A(e^{H(x)}-1)\nu(\mathrm{d}x)+iu\int_A N(t,\mathrm{d}x)\right]\right\}=\\
&\exp\left(-t\int_A(e^{H(x)}-1)\nu(\mathrm{d}x)\right)E\left[\exp\left(iu\int_A\left(1+\frac{H(x)}{iu}\right)N(t,\mathrm{d}x)\right)\right]=\\
&\exp\left(-t\int_A(e^{H(x)}-1)\nu(\mathrm{d}x)\right)\exp\left(t\int_A\left[e^{iu(1+\frac{H(x)}{iu})}-1\right]\nu(\mathrm{d}x)\right)\\
&\exp\left(-t\int_A e^{H(x)}\nu(\mathrm{d}x)\right)\exp\left(t\int_A e^{iu+H(x)}\nu(\mathrm{d}x)\right)=\\
&\exp\left((e^iu-1)t\int_A e^{H(x)}\nu(\mathrm{d}x)\right)=\exp\left(tv_Q(A)(e^{iu}-1)\right).
\end{aligned}$$

Dabei ist das vierte Gleichzeichen gemäß Applebaum (2004) Theorem 2.3.8. Rechts steht die charakteristische Funktion eines Poissonprozesses mit Intensität $v_Q(A)$. □

Sei

$$W_t = B_t - \int_0^t F(u)du,$$

$$\tilde{N_Q}(t, \mathbf{R}_0) = \tilde{N}(t, \mathbf{R}_0) - t\int_{\mathbf{R}_0} e^{H(x)} v(dx) = N(t, \mathbf{R}_0) - tv_Q(\mathbf{R}_0),$$

dann folgt aus (8.2):

$$\begin{aligned}\tilde{S}_t =& S_0 \exp\left\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \int_{\mathbf{R_0}} \ln(1+K(x))\tilde{N_Q}(t, dx) - t\int_{\mathbf{R}_0} [\ln(1+K(x)) - K(x)]v_Q(dx)\right\} \cdot \\ & \exp\left\{(\mu - r)t + \sigma \int_0^t F(u)du + t\int_{\mathbf{R}_0} K(x)(e^{H(x)} - 1)v(dx)\right\}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

Aus dem Girsanov Theorem und Eigenschaften des exponentiellen Martingals folgt, dass der erste Faktor rechts in (8.3) ein exponentielles Martingal ist. Also, unter dem Maß Q ist $\tilde{S}_t$ genau dann ein Martingal für alle $t \geq 0$, wenn

$$\mu - r + \sigma F(t) + \int_{\mathbf{R}_0} K(x)(e^{H(x)} - 1)v(dx) = 0 \quad a.s. \quad Q \text{ or } P \tag{8.4}$$

Wähle $F(t)$ und $H(x)$, die die Bedingung (8.4) erfüllen, dann ist $(\tilde{S}_t, t \geq 0)$ ein Martingal unter Q, und

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \int_{\mathbf{R_0}} \ln(1+K(x))\tilde{N_Q}(t, dx) - t\int_{\mathbf{R}_0} [\ln(1+K(x)) - K(x)]v_Q(dx)\right\}. \tag{8.5}$$

8.2. Äquivalenz von Asiatischen Optionen

Aus (8.5) folgt:

$$\begin{aligned}S_t =& S_0 \exp\left\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + rt + \int_{\mathbf{R_0}} \ln(1+K(x))\tilde{N_Q}(t, dx) - t\int_{\mathbf{R}_0} [\ln(1+K(x)) - K(x)]v_Q(dx)\right\} \triangleq \\ & S_0 \exp\left\{bt + \sigma W_t + \int_{\mathbf{R_0}} \ln(1+K(x))\tilde{N_Q}(t, dx)\right\},\end{aligned}$$

wobei $b = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \int_{\mathbf{R_0}}(K(x) - \ln(1+K(x)))v_Q(dx)$.

Notation:

$$\begin{aligned}V_{flc}(\theta S_T, \Sigma, r, b, \sigma, v, K(x), T_1, T) &= E[e^{-rt}(\theta S_t - \Sigma S_{T_i})]^+,\\ V_{flp}(\theta S_T, \Sigma, r, b, \sigma, v, K(x), T_1, T) &= E[e^{-rt}(\Sigma S_{T_i} - \theta S_t)]^+,\\ V_{fxp}(K, \Sigma, r, b, \sigma, v, K(x), T_1, T) &= E[e^{-rt}(K - \Sigma S_{T_i})]^+,\\ V_{fxc}(K, \Sigma, r, b, \sigma, v, K(x), T_1, T) &= E[e^{-rt}(\Sigma S_{T_i} - K)]^+,\end{aligned}$$

Hier bezeichnet E den Erwartungswert unter Q.

Satz 8.2.

$$\begin{aligned}V_{flc}(\theta S_t, \Sigma, r, b, \sigma, v, K(x), T_1, T) &= e^{rT} V_{fxp}(\theta S_0, \Sigma, r, b^*, \sigma, v^*, h(x), 0, T - T_1),\\ V_{flp}(\theta S_t, \Sigma, r, b, \sigma, v, K(x), T_1, T) &= e^{rT} V_{fxc}(\theta S_0, \Sigma, r, b^*, \sigma, v^*, h(x), 0, T - T_1),\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}b^* &= -\left[r + \frac{1}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbf{R_0}} (h(x) - \ln(1 + h(x)))v_Q^*(dx)\right],\\ v^*(dx) &= (1 + K(x))v(dx),\\ h(x) &= -\frac{K(x)}{1 + K(x)}.\end{aligned}$$

Beweis. Da $\left(\frac{\tilde{S}_t}{S_0}, t \geq 0\right)$ ein exponentielles Martingal unter dem Maß Q ist, und $E_Q\left(\frac{\tilde{S}_t}{S_0}\right) = 1$, sei $\frac{dQ^*}{dQ} = \frac{\tilde{S}_t}{S_0}$, dann $Q^* \sim Q$. Sei

$$\begin{aligned}W_t^* &= W_t - \sigma t,\\ \tilde{N_{Q^*}}(t, A) &= \ldots = N_Q(t, A) - tv_{Q^*}(A),\end{aligned}$$

wobei $v_{Q^*}(A) = \int_A (1 + K(x))v_Q(dx), \forall A \in \mathscr{B}(\mathbf{R_0})$.
Aus dem Girsanov Theorem and Satz 8.1 folgt, dass W_t^* eine Standard Brownsche Bewegung unter Q^* ist. $\tilde{N_{Q^*}}(t, A) = N_Q(t, A) - tv_{Q^*}(A)$ ist ein Poisson prozess mit Intensität $v_{Q^*}(A)$, W_t^* und $N_{Q^*}(t, A)$ sind unabhängig. Dann

$$\begin{aligned}S_t =& S_0 \exp\left\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + rt + \int_{\mathbf{R_0}} \ln(1 + K(x))\tilde{N}_Q(t, dx)\right.\\ &\left. -t\int_{\mathbf{R}_0} [\ln(1 + K(x)) - K(x)]v_Q(dx)\right\} =\\ & S_0 \exp\left\{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t^* + \int_{\mathbf{R_0}} \ln(1 + K(x))\tilde{N_Q}(t, dx) +\right.\\ & \left. t\int_{\mathbf{R}_0} \left[\ln(1 + K(x)) - \frac{K(x)}{1 + K(x)}\right] v_{Q^*}(dx)\right\}.\end{aligned}$$

Sei $-\ln(1+K(x) = \ln(1+h(x))$, dann gilt $h(x) > -1$ wegen $K(x) > -1$. Sei $S_t^* = \frac{S_0 S_t}{S_T}$, dann

$$S_t^* = \ldots \stackrel{d}{=} S_0 \exp\left[b^*(T-t) - \sigma W_{T-t}^* + \int_{\mathbf{R_0}} \ln(1+h(x))\tilde{N}_{Q^*}(T-t,dx)\right].$$

Hier bezeichnet $\stackrel{d}{=}$ gleiche Verteilung,

$$\begin{aligned} b^* = &-\left[r + \frac{1}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbf{R_0}} \left[\ln(1+K(x)) - \frac{K(x)}{1+K(x)}\right] v_Q^*(dx)\right] = \\ &-\left[r + \frac{1}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbf{R_0}} (h(x) - \ln(1+h(x)))v_Q^*(dx)\right]. \end{aligned}$$

Da $-W_t^* \stackrel{d}{=} W_t^*$, gilt

$$S_t^* \stackrel{d}{=} S_0 \exp\left[b^*(T-t) + \sigma W_{T-t}^* + \int_{\mathbf{R_0}} \ln(1+h(x))\tilde{N}_{Q^*}(T-t,dx)\right].$$

Unter dem Maß Q^* ist $(W_t^*, t \geq 0)$ eine Standard Brownsche Bewegung, $(N_{Q^*}(t,\mathbf{R}_0), t \geq 0)$ ist ein Poissonprozess mit Intensität $v_{Q^*}(\mathbf{R}_0)$.

$$V_{flc}(\theta S_t, \Sigma, r, b, \sigma, v, K(x), T_1, T) = \ldots = e^{rT} V_{fxp}(\theta S_0, \Sigma, r, b^*, \sigma, v^*, h(x), 0, T-T_1),$$

Hier ist E der Erwartungswert unter Q, E^* unter Q^*. Wir können analog die zweite Gleichung beweisen. □

Bemerkung 8.2.1. Dieses Kapitel basiert auf Zang und Yang (2008). Wenn $K(x) = e^x - 1$, dann ist das Modell (8.1) das Gleiche wie das exponentielle Lévy Prozess Modell von Eberlein und Papapantoleon (2005). Daher erweitert dieses Kapitel die Resultate von Eberlein und Papapantoleon (2005).

Anhang A.

Anhang

Proposition A.1 (Feynman-Kač). *Björk (2004) S.70 Proposition 5.6*
Angenommen, dass F eine Lösung vom folgenden Randwertproblem ist

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0,$$
$$F(T,x) = \Phi(x),$$

und der Prozess $\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(t,X_s) \in \mathcal{L}^2$, wobei X unten definiert wird. Dann hat F die Darstellung

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}E_{t,x}[\Phi(X_T)],$$

wobei X die folgende SDG erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_s &= \mu(s,X_s)\mathrm{d}s + \sigma(s,X_s)\mathrm{d}W_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Proposition A.2 (Kolmogorov Rückwärtsgleichung). *Björk (2004) S.73 Lemma 5.10*
Sei X eine Lösung der Gleichung

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t,X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,X_t)\mathrm{d}W_t,$$

mit dem infinitesimalen Generator $\mathcal{A}$ definiert als

$$(\mathcal{A}f)(s,y) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(s,y)\frac{\partial f}{\partial y_i}(s,y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}C_{ij}(s,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(s,y),$$

wobei $C(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^*(t,x)$. Dann sind die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(s,y;t,B) = P(X_t \in B|X(s) = y)$ gegeben als die Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s} + \mathcal{A}P\right)(s,y;t,B) = 0, \quad (s,y) \in (0,t) \times \mathbf{R}^n,$$
$$P(t,y;t,B) = I_B(y).$$

Lemma A.3. *Björk (2004) S.145 Lemma 10.15*
Betrachte einen gegebenen T-Claim X. Fixiere ein Martingalmaß Q und angenommen, dass der normierte Claim $X/S_0(T)$ integrierbar ist. Wenn das Q-Martingal M, definiert als

$$M(t) = E^Q\left[\frac{X}{S_0(T)}|\mathcal{F}_t\right], \tag{A.1}$$

die folgende Integraldarstellung zulässt

$$M(t) = x + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t h_i(s)\mathrm{d}Z_i(s), \tag{A.2}$$

dann kann X gehedgt werden in der S-Ökonomie. Das Hedgingportfolio $(h_0, h_1, \ldots, h_N)$ ist gegeben durch A.2 für $(h_1, \ldots, h_N)$ und $h_0(t) = M(t) - \sum_{i=1}^{N} h_i(t)Z_i(t)$.

Satz A.4 (First Fundamental Theorem). *Björk (2004) S.150 Theorem 10.22*
*Das Marktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein **Martingalmaß** gibt, d.h. ein Maß $Q \sim P$, unter dem die Prozesse*

$$\frac{S_0(t)}{S_0(t)}, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \cdots, \frac{S_N(t)}{S_0(t)}$$

(lokale) Martingale sind.

Proposition A.5. *Björk (2004) S.150 Proposition 10.23*
Wenn die Numeraire S_0 das Bankkonto ist, d.h.

$$S_0(t) = e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s},$$

wobei r (möglicherweise stochastisch) der Zinssatz ist, und wenn wir annehmen, dass alle Prozesse Wiener Prozesse sind, dann ist ein Maß $Q \sim P$ genau dann ein Martingalmaß, wenn alle Assets den Zinssatz als ihre lokale Rendite haben, d.h. wenn die Q-Dynamik von der Form

$$\mathrm{d}S_i(t) = S_i(t)r(t)\mathrm{d}t + S_i(t)\sigma_i(t)\mathrm{d}W^Q(t),$$

ist, wobei W^Q ein (mehrdimensionaler) Q-Wiener Prozess ist.

Satz A.6 (Second Fundamental Theorem). *Björk (2004) S.151 Theorem 10.24*
Ein arbitragefreies Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn das Martingalmaß eindeutig ist.

Proposition A.7. *Björk (2004) S.151 Theorem 10.25*

1. *Um Arbitrage zu vermeiden muss X mit der folgenden Formel bewertet werden*

$$\Pi(t; X) = S_0(t)E^Q\left[\frac{X}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right],$$

wobei Q ein Martingalmaß für $[S_0, S_1, \cdots, S_N]$ ist, mit S_0 als Numeraire.

2. *Wir können das Bankkonto $B(t)$ als Numeraire nehmen. Dann hat B die Dynamik*

$$\mathrm{d}B(t) = r(t)B(t)\mathrm{d}t,$$

wobei r der (möglicherweise stochastisch) Zinssatzprozess ist. In diesem Fall reduziert sich die Formel oben auf

$$\Pi(t;X) = E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} X \mid \mathcal{F}_t\right].$$

3. *Im Allgemeinen führen verschiedene Q zu verschiedenen Preisprozessen für einen Claim X. Wenn X jedoch replizierbar ist, dann produzieren alle Q den selben Preisprozess, welcher durch*

$$\Pi(t;X) = V(t;h)$$

gegeben ist, wobei h das Hedging-Portfolio ist. Verschiedene Hedging-Portfolios produzieren den selben Preisprozess.

4. *Für jeden replizierbaren Claim X gilt*

$$V(t;h) = E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} X \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Satz A.8 (**Martingaldarstellungssatz**). *Björk (2004) S.157 Theorem 11.2*
Sei W ein d-dimensionaler Wiener-Prozess, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$, $t \in [0,T]$, und M ein $\mathcal{F}_t$-adaptiertes Martingal. Dann existiert ein eindeutig bestimmter $\mathcal{F}_t$-adaptierter Prozess $h_1, \cdots, h_d$, sodass M die folgende Darstellung hat:

$$M(t) = M(0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t h_i(s)\mathrm{d}W_i(s), \quad t \in [0,T].$$

Wenn das Martingal M quadratisch integrierbar ist, dann sind $h_1, \cdots, h_d$ in $\mathcal{H}^2$.

Satz A.9 (**Girsanov Theorem**). *Björk (2004) S.160 Theorem 11.3*
Sei W^P ein d-dimensionaler Standard P-Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P, \underline{\mathcal{F}})$ und φ ein d-dimensionaler adaptierter Spaltenvektorprozess. Wähle ein fixes T und definiere den Prozess L auf $[0,T]$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L_t &= \varphi_t^* L_t \mathrm{d}W_t^P, \\ L_0 &= 1, \end{aligned}$$

d.h.

$$L_t = e^{\int_0^t \varphi_s^* \mathrm{d}W_s^P - \frac{1}{2}\int_0^t \|\varphi_s\|^2 \mathrm{d}s}.$$

Angenommen, dass

$$E^P[L_T] = 1,$$

und definiere das neue Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathcal{F}_T$ durch

$$L_T = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}, \quad \text{auf } \mathcal{F}_T.$$

Dann

$$\mathrm{d}W_t^P = \varphi_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t^Q,$$

wobei W^Q ein Q-Wiener-Prozess ist.
Der Prozess φ wird oft ***Girsanov Kern*** *der Maßtransformation genannt.*

Lemma A.10 (**Novikov-Bedingung**). *Björk (2004) S.163 Theorem 11.5*
Wenn für den Girsanov-Kern φ Folgendes gilt,

$$E^P\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \|\varphi_t\|^2 \mathrm{d}t}\right] < \infty$$

dann ist L ein Martingal und $E^P[L_T] = 1$.

Satz A.11 (**Die Umkehrung vom Girsanov Theorem**). *Björk (2004) S.164 Theorem 11.6*
Sei W^P ein d-dimensionaler Standard-P-Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P, \underline{\mathcal{F}})$ und $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{W_P}, \forall t$.
Angenommen, dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit $Q \ll P$ auf $\mathcal{F}_T$ existiert. Dann existiert ein adaptierter Prozess φ, sodass der Likelihood-Prozess L die folgende Dynamik hat

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L_t &= L_t \varphi_t^* \mathrm{d}W_t^P, \\ L_0 &= 1. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[Albrecher und Predota 2004] ALBRECHER, Hansjörg ; PREDOTA, Martin: On Asian option pricing for NIG Lévy processes. In: *Journal of Computional and Applied Mathematics* 172 (2004), S. 153–168

[Applebaum 2004] APPLEBAUM, David: *Lévy Process and Stochastic Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

[Björk 2004] BJÖRK, Tomas: *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Second Edition. Oxford University Press, 2004

[Clewlow und Strickland 1997] CLEWLOW, Les ; STRICKLAND, Chris: *Exotic Options: The State of the Art*. International Thomson Publishing Company, 1997

[Cont und Tankov 2004] CONT, Rama ; TANKOV, Peter: *Financial Modelling With Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004

[Dai 2003] DAI, Min: One-state variable binomial models for European-/American-style geometric Asian Options. In: *Quantitative Finance* 3 (2003), S. 288–295

[Eberlein und Papapantoleon 2005] EBERLEIN, Ernst ; PAPAPANTOLEON, Antonis: Equivalence of floating and fixed strike Asian and lookback Option. In: *Stochasic Process and Their Applications* 115 (2005), S. 31–40

[Gerber und Shiu 1994] GERBER, Hans U. ; SHIU, Elias S.: Option Pricing by Esscher transforms. In: *Transactions of Society of Actuaries* 46 (1994), S. 99–140

[Kallsen 2001] KALLSEN, Jan: Lévy-Prozesse anschaulich erklärt. (2001). – TU München

[Kwok 1998] KWOK, Yue-Kuen: *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer Finance, 1998

[Papapantoleon 2008] PAPAPANTOLEON, Antonis: An Introduction to Lévy Processes with Applications in Finance. (2008). – TU Wien

[Zang und Yang 2008] ZANG, Aiqin ; YANG, Jilong: Equivalence of Asian Options in Lévy Model. In: *Journal of Nanjing Normal University (Natural Science Edition)* 31 (2008), S. 37–40