



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN



DIPLOMARBEIT

Berechnung der Kapazitätsbeläge von Freileitungen

Ausgeführt am

Institut für Energiesysteme und Elektrische Antriebe
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ. Prof. Dr. Wolfgang GAWLIK

und

Dipl.-Ing. Dr.techn. Benedikt SCHWARZ

durch

Andreas KLEINL

Matrikelnummer: 1028947

Wien, 13. April 2020

(Andreas Kleinl)

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	5
2	Einleitung	7
3	Theorie	10
3.1	Elektrische Felder und Kapazitäten	10
3.2	Mehrleitersysteme	14
3.3	Reale Freileitungen	21
4	Hocheffiziente Numerische Auswertung	24
4.1	Numerische Berechnung	27
4.2	Randwert Methode	28
4.3	Lösen Linearer Systeme	31
4.4	Solvertypen	32
4.4.1	GMRES	32
4.4.2	BiCGSTAB	33
4.4.3	Fast Multipole Methode	33
4.5	KEMField	39
4.5.1	Parameter	39
4.6	Praktische Umsetzung	42
4.7	Verifikation mit analytischen Modellen	44
5	Grenzen bestehender Näherungsmethoden	52
5.1	Berechnungsverfahren nach Muckenhuber	52
5.2	Ödinger	57
5.3	Schwarz	60
5.4	Vergleich mit Näherungsmethoden ohne Masteinfluss	62
5.4.1	Variation über Durchhang	63
5.4.2	Variation über Leitungslänge	65
5.4.3	Variation über Aufhängehöhe	67

6	Real Beispiel Leitung 179/5 und 179/6	69
6.1	Messung	69
6.2	Messergebnisse	73
6.2.1	Berechnete Messwerte für System 179/5 und 179/6	74
6.3	Simulation	78
6.3.1	Simulation ohne Mast	78
6.3.2	Simulation inklusive Mast	79
6.4	Berechnungsvergleich 179/56	82
6.5	Conclusio und Ausblick	84

Diese Arbeit wurde von Schwarz Energietechnik und Geoinformatik im Rahmen des Projektes: "Leiterkennwerte" unterstützt.

Ich nehme zur Kenntnis, dass ich zur Drucklegung meiner Arbeit unter der Bezeichnung

Diplomarbeit

nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen, sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachterinnen/Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

6. April 2020

(Andreas Kleinl)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Menschen bedanken die mir diese Arbeit ermöglicht haben. Zuerst gilt mein Dank Professor Gawlik, der sich dazu bereit erklärt hat mir das Vertrauen zu schenken um mich diesem Thema zu widmen. Einer der wohl wichtigsten Menschen die zum erfolgreichen Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben ist mein Betreuer Univ. Assistent Dr. Benedikt Schwarz, vielen Dank für deine vielen aufschlussreichen Gespräche, Hilfestellungen und Expertisen. Als nächstes möchte ich ein großes Danke an die Firma Schwarz Energietechnik- und Geoinformatik aussprechen die mir wichtige Informationen und Daten zur Verfügung gestellt hat und ohne derer diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Hier sei besonders DI Franz Schwarz erwähnt der für mich immer ein offenes Ohr hatte. Weiters möchte ich mich bei der EnergieAG, Wolfgang Leitner und seinem Team bedanken die mir eine Messung ermöglichten. In diesem Zusammenhang sei auch DI Christian Raunig, APG erwähnt der mir mit seiner Fachexpertise zur Seite stand.

Da dies nun ein vorläufiges Ende meines Studiums ist, will ich unbedingt auch jenen Menschen danken die mich entlang meiner Studienzeit unterstützt und aufgebaut haben. Meinen Eltern und Großeltern die es mir finanziell ermöglichten diesen Weg zu gehen und mich stets unterstützen. Bei meiner Freundin Christina die immer die richtigen Worte fand und mir in den schwierigsten Situationen beistand und es immer wieder schaffte mich aufzubauen. Meiner Schwester die für mich immer aufmunternde Worte fand. Und abschließend möchte ich mich noch bei meinen Vorgesetzten Professor Reider und Professor Unterrainer bedanken, die mir die Freiheit und Unterstützung gaben mein Studium und meine Interessen in der nun vorhanden Form zu erlangen. Danke.

1 Abstract

Energysystems and the distribution of energy are two of the key factors to realise the energy revolution and solve our problem with CO₂ emission. It gives us the possibility to provide power where it is needed and to produce it where we can use renewables like sun and wind. This work focuses on the part of energy transportation, in detail the calculation of high voltage transmission lines and their capacities. The main goal of this thesis is to find a high efficient numerical method for calculating a more precise result for capacities and electric fields. First an introduction of the analytic system models, which are used by most of the distribution system operators in Austria, is given. The next chapters are dealing with the theoretical idea of the simulation model. The boundary element method in combination with the fast multipole method are used. An efficient program, called KEMField, from the microelectronics field was adapted in C++ and many improvements were done to use it for our simulation model. Furthermore, a python interface was written to prepare the geometric data and analyse the results. In order to verify the used method an amount of simulations have been done and compared with analytically solvable examples. This simulation model, which has been adjusted constantly during the process of this thesis, has the big advantage of less input data compared to other models for field calculations. In detail, that means only a rough geometric model and potential values are necessary to calculate the loads on transmission lines. In the last chapter the simulation and established approximative models are compared to measurement results of an 110kV transmission line was taken and compared. The data of geographic information systems were used to generate the environment including details like vegetation and irregularities in the terrain. A major point was also the capacity influence of the overhead line tower and the verification of the used correction factors. In conclusion, an outlook is given by an overview of further steps and new opportunities by using high performance computational models.

Zusammenfassung

Energiesysteme und die Verteilung von Energie sind zwei der wichtigsten Punkte um die Energiewende zu ermöglichen und das Problem des CO₂ Ausstoßes zu

lösen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit den Verbrauch und die Erzeugung an verschiedenen Orten zu realisieren und erneuerbare Energieträger dort einzusetzen, wo sie am effizientesten sind. Diese Arbeit legt ihren Fokus auf die Stromverteilung und beschäftigt sich mit der Berechnung von Hochspannungsfreileitungen und deren Kapazitäten. Das Hauptziel liegt in der Suche und Entwicklung einer hoch effizienten numerischen Methode zur Berechnung eines exakteren Ergebnisses der Kapazitäten. Zu Beginn wird daher eine Einführung über die Herleitung der Kapazitätsberechnung gegeben, um anschließend die in Österreich bewährten Näherungsmodelle vorzustellen. Das nächste Kapitel behandelt den theoretischen Background des Simulationsmodells. Die Boundary Element Methode, welche mit der Fast Multipole Methode verknüpft wird, kommt dabei zum Einsatz. Ein effizientes Programm, namens KEMField, wurde aus dem Feld der Mikroelektronik adaptiert und in C++ zu einem Simulationsprogramm für unser Freileitungsmodell ergänzt. Des Weiteren wurde ein komfortables Python Interface programmiert um detailgenaue GIS Daten der Leitungssysteme sowie umliegendes Gelände und Bewuchs zu berücksichtigen. Die Datenaufbereitung, Auswertung und Visualisierung sind ein weiterer Bestandteil des Pythoninterfaces. Um eine Verifikation der verwendeten Methode zu gewährleisten wurden sämtliche Simulationen mit analytisch lösbaren Beispielen verglichen. Dadurch wurde die Simulation kontinuierlich, auch hinsichtlich ihrer Performance, verbessert. Im Vergleich zu anderen Feldsimulationen besitzt diese Methode den großen Vorteil, dass für die erfolgreiche Berechnung nur wenige Eingabedaten nötig sind. Damit ist gemeint, dass schon ein grobes geometrisches Model und Potentialwerte ausreichen um Ladungen einer Freileitung zu ermitteln. Im letzten Kapitel werden die Simulation und die Näherungsmethoden anhand eines 110kV vermessenen Leitungssystems verglichen. Dabei wurden die geographischen Daten verwendet um auch das Umfeld, wie Bewuchs und Unebenheiten des Geländes, mit einfließen zu lassen. Zudem war ein wichtiger Punkt die Untersuchung des Masteinflusses und die bisher dazu eingesetzten Korrekturfaktoren. Abschließend wurde noch ein Ausblick auf die nächsten Schritte und neuen Möglichkeiten durch die Verwendung dieses Hochleistungsberechnungsmodell gegeben.

2 Einleitung

Der elektrische Strom ist in unserer Gesellschaft nicht mehr weg zu denken. In nahezu jeder Lebenssituation unterstützt er uns um Tätigkeiten zu erleichtern oder überhaupt zu ermöglichen. Er ist praktisch ein ständiger Wegbegleiter: Sei es am Morgen, wenn der Wecker läutet, über die Zubereitung des Frühstücks, die heiße Dusche welche ohne Pumpen und Steuereinheiten nicht funktionieren würde; Am Weg zur Arbeit oder Freizeitaktivität mit Bahn oder vielleicht schon einem Elektrofahrzeug; Das Mail oder die Nachricht, welche durch PC oder Mobiltelefon versendet werden soll oder die Bezahlung in Geschäften, Restaurants oder jegliche anderen Bankgeschäfte. Man könnte hier vermutlich eine endlos lange Liste anführen, aber was damit aufgezeigt werden soll ist, dass selbst in den kleinsten routinemäßigen Tagesabläufen der elektrische Strom einen zentralen Platz eingenommen hat. Daher ist es auch nicht verwunderlich, dass im Falle eines Wegfalls ebenjenes große Angst sowie Ausnahmezustände der Bevölkerung befürchtet werden.

Was hat nun dieser Strom mit der hier vorliegenden Arbeit zu tun?

Sie beschäftigt sich mit Freileitungen, welche den Strom überallhin verteilen und uns somit den Zugang und die Nutzung gewähren. Dadurch wird die Realisierung von unterschiedlichen Erzeugungs- und Verbrauchsorten ermöglicht. Gerade in Zeiten von globaler Klimaerwärmung durch zu hohen CO₂ Ausstoß ist es wichtig, mittels erneuerbaren Energieträgern wie Wind, Sonne und Wasser diese Energiequellen an optimaler Stelle auszunutzen. Dieser erhöhte Bedarf an CO₂ neutralem Strom stellt jedoch auch das gesamte Stromnetz vor neuerliche Herausforderungen, da es bei der Stromgewinnung durch erneuerbare Energien beispielsweise aufgrund von wetterbedingten Einflüssen zu schwer vorhersehbaren Schwankungen kommt (Stichwort Wind und Sonneneinstrahlung). Insbesondere die Netzstabilität, sprich das Gleichgewicht von Erzeugung und Verbrauch in Form der Netzfrequenz von 50Hz, wird dadurch schwieriger zu gewährleisten. Dafür werden immer höhere Obergrenzen der Spannungsbänder und exaktere Leitungskennwerte nötig um kritische Situation und eine balancierte Auslastung zu erreichen.

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit einer dieser Obergrenzen und in weiterer Folge deren Optimierung. Dabei handelt es sich um die Berechnung der Null-,Mit- und Gegenkapazitäten. In den bisherigen Berechnungsprogrammen wurden lediglich idealisierte Annahmen für die Berechnung dieser Kapazitäten herangezogen. Es wurde jedoch meist auf die Inbezugnahme von äußeren Einflüssen verzichtet.

Diese Arbeit soll daher Parameter wie alpines Gelände oder etwa den Einfluss der unterschiedlichsten Masten, sowie den starken Bewuchs in Wäldern analysieren. Die Werte sollen mittels numerischen Methodem simuliert und ausgewertet werden. Anschließend werden diese mit den bisherigen Näherungsmodellen verglichen und deren Abweichungen aufgezeigt. Dazu wurde auch ein 110kV Freileitungssystem vermessen und anschließend mit den berechneten bzw. simulierten Werten verglichen.

Im Zuge dieser Arbeit wurde eine vollständige Simulation basierend auf der Boundary Element Methode entwickelt, um diese Ergebnisse auch nach zu rechnen und anschließend zu verifizieren. Der Rechenintensive Simulationsteil wurde aus Effizienz und Performancegründen von einem C++ Code adaptiert, während das gesamte Interface sowie Datenauswertung mittels Python umgesetzt wurde. Um Parameter wie Gelände und Bewuchs sowie Leitungssysteme detailgenau zu implementieren standen GIS Daten der Energieversorger EnergieAG und der Firma Schwarz Energietechnik & Geoinformatik zur Verfügung.

Der Ablauf dieser Arbeit gliedert sich in folgende Punkte: Zu Beginn werden die bisherigen mathematischen Grundlagen vorgestellt und ein Überblick bezüglich der Freileitungssysteme präsentiert. Es soll darin die Ladungsberechnung und die damit verbundenen Kapazitätsauswertung erläutert werden. Im darauf folgenden Kapitel wird die numerische Auswertung in Form von diversen Solvertypen und das dahinterstehende mathematische Konstrukt behandelt. Der fünfte Abschnitt widmet sich den bisherigen Näherungsmethoden und zeigt deren Grenzen auf. Um die dementsprechende Tragweite der Abweichungen darzustellen wird in Kapitel 6 das reale Beispiel der 110kV Leitung Steinkogel-Pfandl analysiert. Darin sollen verschiedenste Parameter und deren Einflüsse untersucht werden. Abgeschlossen wird die Masterarbeit durch eine Conclusio, welche auch einen Ausblick auf zu-

künftige Einsatzgebiete und Möglichkeiten geben soll.

3 Theorie

Die verwendeten Berechnungen beruhen auf den Gesetzen der Elektrostatik. Aufgrund der Frequenz von 50Hz kann auf hochfrequente Phänomene verzichtet werden. Daher ist der Satz vom elektrischen Hüllenfluss in der vorliegenden Form gültig und stellt einen gewissen Grundstein für die folgenden Berechnungen dar.

$$\Psi(\partial V) = Q(V) \quad (1)$$

Dieser besagt, dass der elektrische Fluss Ψ entlang des geschlossenen Volumens ∂V identisch der eingeschlossenen Ladung Q im selbigen Volumen V ist. Dieses Fundament ermöglicht uns das elektrische Feld und im weiteren den unendlich ausgedehnten Linienleiter zu bestimmen.

3.1 Elektrische Felder und Kapazitäten

Um nun auf das Potential und dem daraus folgenden elektrischen Feld zu schließen wird die Verknüpfungsbeziehung verwendet.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} \quad (2)$$

$$\epsilon_0 = 8.85432 \cdot 10^{-9} \frac{As}{Vm} \dots \text{Dielektrizitätskonstante}$$

$$\epsilon_r = 1 \dots \text{Dielektrikum in Luft}$$

Hierbei repräsentiert \vec{D} die elektrische Flussdichte, ϵ_r ist umgebungsabhängig. In unserem Fall der Freileitung ist dies Luft, daher $\epsilon_r = 1$. Nun können wir über das Integral der Fläche A die Flächensumme der elektrischen Flußdichte unseres elektrischen Flusses $\Psi(\partial V)$ bestimmen.

$$\Psi(\partial V) = \int_A \vec{D} dA \quad (3)$$

Betrachtet man nun für ein Teilstück der Oberfläche ΔA einer Punktladung Q siehe Abbildung 1, so erhält man

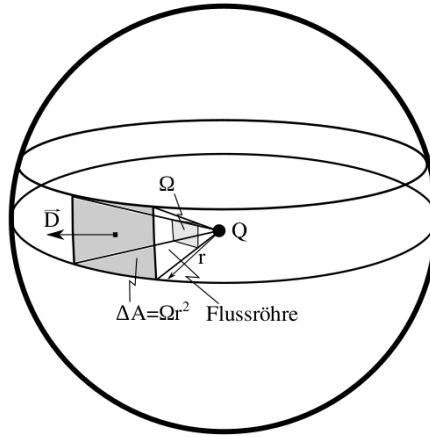


Abbildung 1: Bereich der Flußverteilung um eine Punktladung, dargestellt durch eine einzelne Flussröhre.

für die Flussdichte \vec{D} und Q durch einsetzen in Gleichung 1:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \quad (4)$$

Nachdem \vec{D} und \vec{E} direkt proportional zueinander sind, resultiert über die Permittivitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, ($\epsilon_{rLuft} = 1$) das elektrische Feld:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \quad (5)$$

Die elektrische Feldstärke \vec{E} kann auch im elektrostatischen Fall über die Potentialdifferenz definiert werden, welche daraus das dazugehörige elektrische Potential liefert:

$$\vec{E} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \vec{e}_n \quad (6)$$

$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r}$$

Dieses Ergebnis werden wir uns nun mit dem Überlagerungsprinzip zunutze machen um gespiegelte Ladungen zu berechnen.

Um das elektrische Feld eines Linienleiters oder eine Ansammlung von Ladungen zu berechnen, benötigen wir das sogenannte Überlagerungsprinzip oder

auch Superpositionsprinzip genannt:

$$\vec{E}_{\Sigma}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) \quad (7)$$

Das gesamte elektrische Feld $\vec{E}_{\Sigma}(P)$ im Punkt P setzt sich aus der Überlagerung des Feldes $\vec{E}_1(P)$ und $\vec{E}_2(P)$ zusammen, vorausgesetzt die Ladungsverteilung ändert sich nicht, was durch die Linearität des Dielektrikums ϵ_r gewährleistet ist.

Spiegelmethode

Um das Potential oder das elektrische Feld in einem beliebigen Punkt einer positiven Ladung über einer ideal leitfähigen Oberfläche zu bestimmen wird die Spiegelungsmethode verwendet. Dabei wird eine gespiegelte gleichgroße negative Ladung angeordnet, Abbildung 2.

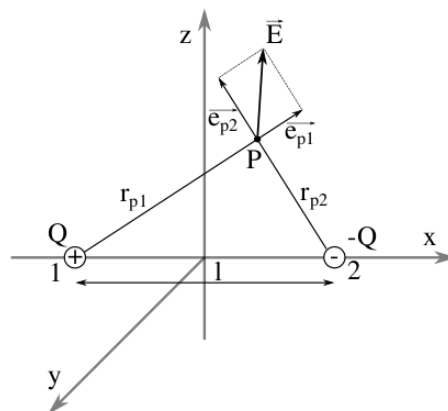


Abbildung 2: Spiegelladung wobei hier die y,z Ebene die ideal leitfähige Oberfläche repräsentiert.

Wie schon vorhin erwähnt lässt sich mittels Superpositionsprinzip und den Abstände r_{p1} , r_{p2} das Potential sowie das elektrische Feld bestimmen, \vec{e}_{p1} und \vec{e}_{p2} repräsentieren dabei die Richtungsvektoren von Punkt P zu den Ladung 1,2

und besitzen den Betrag 1.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \left(\frac{\vec{e}_{P1}}{r_{P1}^2} - \frac{\vec{e}_{P2}}{r_{P2}^2} \right) \quad (8)$$

$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \left(\frac{1}{r_{P1}} - \frac{1}{r_{P2}} \right)$$

Wenn wir im nächsten Schritt einen Leiter mit der Linienladungsdichte $\tau = \frac{Q}{s}$ betrachten, so können wir durch die Summation über alle einzelnen kleinen Linienteile auf das Potential φ und elektrische Feld \vec{E} im gewünschten Punkt schließen.

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \int_C \frac{\vec{e}_{Pk} \tau(Q)}{r_{Pq}^2} ds \quad (9)$$

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \int_C \frac{\tau(Q)}{r_{Pk}} ds$$

Durch geschickte geometrische Annahmen erhält man über einen gleichförmig elektrisch geladenen, dünnen Stab, das für uns wichtige Ergebnis eines unendlich ausgedehnten Linienleiters [1].

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \frac{\vec{e}_\rho}{\rho} \quad (10)$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$$

ρ repräsentiert hier den Abstand zum gesuchten Punkt, ρ_0 steht für eine beliebig wählbare feste Länge, da die Wahl des Bezugsortes für das Potential physikalisch nicht relevant ist. Die Gleichung 10 ist nun die Grundlage um unsere maxwellschen Potentialkoeffizienten P zu ermitteln.

$$P_{vv} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{2h_v}{R_v} \quad (11)$$

$$P_{v\mu} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{D_{v\mu}}{d_{v\mu}}$$

h_v ...Höhe des Leiters

R_v ...Radius des Leiters

$d_{v\mu}$...Abstand Leiter v zu Leiter μ

$D_{v\mu}$...Abstand Spiegelleiter v zu Leiter μ

Diese maxwellschen Potentialkoeffizienten stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit der Spannung und der Ladung [2], hier gilt:

$$U = P \cdot Q \quad (12)$$

3.2 Mehrleitersysteme

Da ein System meist aus den drei Phasen besteht und sich auf Freileitungsmasten durchaus mehrere Systeme befinden können, ist ein Formalismus nötig um alle abhängigen Kapazitäten zu berücksichtigen. Die Verwendung von Matrizen ist daher zielführend. Wir beginnen mit der maxwellschen Potentialkoeffizienten-Matrix, welche bereits im vorigen Abschnitt erwähnt wurde. Diese Koeffizienten sind von der Geometrie und Anordnung der Leiter abhängig (siehe Gleichung 11). Die Indexierung erfolgt über den Laufindex v und μ , wobei n die gesamt Anzahl der Leiter repräsentiert.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & \ddots & P_{2\mu} & \vdots \\ \vdots & P_{v\mu} & \ddots & P_{vn} \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn-1} & P_{nn} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Die einzelnen Koeffizienten der Matrix \mathbf{P} erhalten wir über die Abstände $D_{v\mu}$ und $d_{v\mu}$ der Spiegeleranzanordnung.

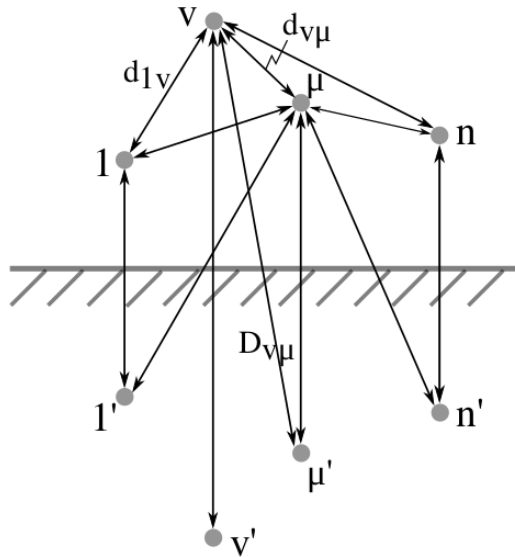


Abbildung 3: Ersatzanordnung der gespiegelten Leiter ' und deren Diagonalabstände $D_{v\mu}$, wobei nicht alle vorhandenen Abstände eingezeichnet wurden.

Die maxwellsche Potentialkoeffizientenmatrix wird durch die Erdseile ergänzt, da auch sie einen Einfluss auf die Kapazitäten der einzelnen Leiter besitzen. Dabei werden die Erdseil-Koeffizienten am Ende der Matrix hinzugefügt. Die vorliegende Matrix besitzt zwei Erdseile T und S.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} & P_{1S} & P_{1T} \\ P_{21} & \ddots & P_{2\mu} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & P_{v\mu} & \ddots & P_{vn} & P_{vS} & P_{vT} \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn-1} & P_{nn} & P_{nS} & P_{nT} \\ P_{S1} & \cdots & P_{S\mu} & P_{Sn-1} & P_{SS} & P_{ST} \\ P_{T1} & \cdots & P_{T\mu} & P_{Tn-1} & P_{TS} & P_{TT} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Sollte sich in dem Mastbild nur ein Erdseil befinden, so wird diese Matrix um die letzte Zeile und Spalte reduziert.

Teilkapazitäten

Da wir im vorhergehenden Abschnitt die Potentialkoeffizienten ermittelt haben,

jedoch für die Leitungsauswertung die Teilkapazitäten relevant sind, wird nun gezeigt wie diese berechnet werden. Prinzipiell repräsentieren Teilkapazitäten alle vorkommenden Kapazitäten. Darunter verstehen wir die Koppelkapazitäten zwischen den einzelnen Leitungen aller Systeme, sowie die jeweiligen Eigenkapazitäten, welche sich durch die gespiegelten Leiter errechnen. Die einzelnen Teilkapazitäten können durch die Kehrwertbildung oder im Falle einer bereits vollständigen Potentialkoeffizientenmatrix \mathbf{P} durch deren Invertierung berechnet werden [2].

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}$$

$$c_{v\mu} = -K_{v\mu}$$

$$c_{vv} = K_{vv} + \sum_{\mu=1} K_{v\mu}$$
(15)

c...Teilkapazitäten

K...Kapazitätskoeffizienten

\mathbf{K} ...Kapazitätskoeffizientenmatrix

\mathbf{P} ...Potentialkoeffizientenmatrix

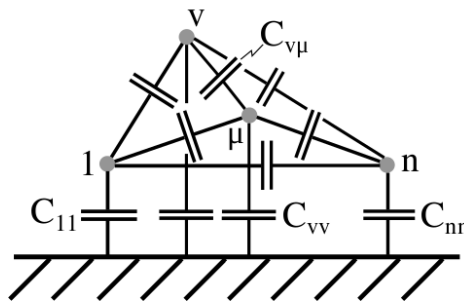


Abbildung 4: Ersatzschaltung der Teilkapazitäten.

Über die Gleichung 16 erkennt man den Zusammenhang von Spannung, maximalen Potentialkoeffizienten und Ladung. Durch die vorhin erwähnte Inver-

tierung des maxwellschen Potentialkoeffizienten zum Kapazitätskoeffizienten besteht hier auch die Möglichkeit Ladungen zu bestimmen 17.

$$\mathbf{U} = \mathbf{PQ} \quad (16)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KU} \quad (17)$$

Nullkapazitäten

Bei den Nullkapazitäten handelt es sich um jene Kapazitäten welche aus den symmetrischen Kapazitäten, siehe Gleichung 29, ermittelt werden können. Sie repräsentieren die Kapazitäten zwischen den Leitern und den auf Erdpotential liegenden Objekten. Bevor man die Gleichung 29 erhält benötigt man jedoch eine reduzierte Form bei dieser muss eine Erdseilkorrektur berücksichtigt werden, dadurch wird diese Matrix in eine überführbare Form $\tilde{\mathbf{P}}_{red}$ adaptiert. Im Falle von zwei Systemen handelt es sich dabei um eine 6x6 Matrix. Diese Form von 6x6 kommt daher zustande das wir ein drei Phasensystem besitzen und jede Phasespannung und Strom 120° zu einander Phasen verschoben sind. Diese in einander überzuführen gelingt mittels Symmetrierungsmatrix, siehe Gleichung 23 und 24. Weiters muss beachtet werden das je nach Anzahl der Erdseile und Drehstromsysteme sich der Korrekturfaktor M verändert, er berechnet sich aus der Potentialkoeffizientenmatrix \mathbf{P} (siehe Gleichung 95 Seite 56) wie folgt:

Bei einem Drehstromsystem mit 2 Erdseilen und verdrehten Leitungen:

$$P_{1\bar{S}} = \frac{P_{1S} + P_{2S} + P_{3S}}{3} \quad (18)$$

$$M = \frac{2P_{1\bar{S}}^2}{P_{SS} + P_{ST}}$$

2 Drehstromsysteme mit 1 Erdseil bei verdrehten Leitungen:

$$M = \frac{P_{1\bar{S}}^2}{P_{SS}} \quad (19)$$

2 Drehstromsysteme mit 1 Erdseil bei unverdrillten Leitungen:

$$M_{v\mu} = \frac{P_{vS}P_{\mu S}}{P_{SS}} \quad (20)$$

2 Drehstromsystem mit 2 Erdseil bei unverdrillten Leitungen:

$$M_{v\mu} = \frac{P_{vS}(P_{\mu S}P_{TT} - P_{\mu T}P_{ST}) + P_{vT}(P_{\mu T}P_{SS} - P_{\mu S}P_{ST})}{P_{SS}P_{TT} - P_{ST}^2} \quad (21)$$

Um nun die symmetrische Potentialkoeffizientenmatrix zu bestimmen müssen wir unsere reduzierte Potentialkoeffizienten Matrix $\tilde{\mathbf{P}}_{red}$ symmetrieren. Dies erfolgt mit den Symmetrierungs-Matrizen \mathbf{S} und \mathbf{T} .

$$a = e^{\frac{j2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^2 = e^{\frac{j4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (22)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Je nach Anzahl der Drehstromsysteme baut sich die Multiplikation mittels Symmetrierungsmatrizen anders auf.

Im weiteren Schritt wird die Erdseilkorrektur \mathbf{M} von \mathbf{P} abgezogen um die reduzierte Potentialkoeffizientenmatrix $\tilde{\mathbf{P}}_{red}$ zu erhalten. Mit dieser reduzierten Matrix lässt sich nun durch Invertierung, wie in Gleichung 15, die Kapazitätskoeffizientenmatrix \mathbf{K} und deren einzelnen Teilkapazitäten, sowie die symmetrische Potentialkoeffizientenmatrix \mathbf{P}^S berechnen.

1 Drehstromsystem bei unverdrillten Leitungen:

$$\mathbf{P}^S = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{P}}_{red} \mathbf{T} \quad (25)$$

2 Drehstromsysteme bei unverdrillten Leitungen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{aa}^S & \mathbf{P}_{ab}^S \\ \mathbf{P}_{ba}^S & \mathbf{P}_{bb}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{red} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Wir erhalten dadurch die symmetrische Potentialkoeffizienten Matrix \mathbf{P}^S welche nun die Koeffizienten für Null-, Mit- und Gegenkapazität beinhaltet.

1 Drehstromsystem bei unverdrillten Leitungen:

$$\mathbf{P}^S = \begin{bmatrix} P_{aa}^{00} & P_{aa}^{01} & P_{aa}^{02} \\ P_{aa}^{10} & P_{aa}^{11} & P_{aa}^{12} \\ P_{aa}^{20} & P_{aa}^{21} & P_{aa}^{22} \end{bmatrix} \quad (27)$$

2 Drehstromsysteme bei unverdrillten Leitungen:

$$\mathbf{P}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{aa}^S & \mathbf{P}_{ab}^S \\ \mathbf{P}_{ba}^S & \mathbf{P}_{bb}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa}^{00} & P_{aa}^{01} & P_{aa}^{02} & P_{ab}^{00} & P_{ab}^{01} & P_{ab}^{02} \\ P_{aa}^{10} & P_{aa}^{11} & P_{aa}^{12} & P_{ab}^{10} & P_{ab}^{11} & P_{ab}^{12} \\ P_{aa}^{20} & P_{aa}^{21} & P_{aa}^{22} & P_{ab}^{20} & P_{ab}^{21} & P_{ab}^{22} \\ P_{ba}^{00} & P_{ba}^{01} & P_{ba}^{02} & P_{bb}^{00} & P_{bb}^{01} & P_{bb}^{02} \\ P_{ba}^{10} & P_{ba}^{11} & P_{ba}^{12} & P_{bb}^{10} & P_{bb}^{11} & P_{bb}^{12} \\ P_{ba}^{20} & P_{ba}^{21} & P_{ba}^{22} & P_{bb}^{20} & P_{bb}^{21} & P_{bb}^{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Durch Invertierung der symmetrischen Potentialkoeffizientenmatrix \mathbf{P}^S erhält man die symmetrische Kapazitätskoeffizientenmatrix \mathbf{K}^S :

$$\mathbf{K}^S = (\mathbf{P}^S)^{-1} \quad (29)$$

Um nun die Nullkapazität zu erhalten benötigen wir die Potentialkoeffizienten $P_{aa}^{00}, P_{bb}^{00}, P_{ba}^{00}, P_{ab}^{00}$. Hieraus lassen sich für 2 Systeme folgende Fälle berechnen:

1. Nullkapazität einer Einfachleitung, 2. System wird erdfrei angenommen und verhält sich als wäre es nicht vorhanden:

$$\bar{C}^0 = \frac{1}{P_{aa}^{00}} \quad (30)$$

2. Nullkapazität der Einfachleitung, 2. System geerdet:

$$\bar{C}_{\perp}^0 = \frac{P_{aa}^{00}}{(P_{aa}^{00})^2 - (P_{ab}^{00})^2} \quad (31)$$

3. Nullkapazität der Doppelleitung, beide Systeme in Betrieb:

$$\bar{C}^0 = \frac{2}{P_{aa}^{00} + P_{ab}^{00}} \quad (32)$$

4. Nullkapazität zwischen beiden Systemen:

$$C_{ab}^0 = \frac{1}{2(P_{aa}^{00} - P_{ab}^{00})} \quad (33)$$

Mitkapazitäten

Die Mitkapazitäten repräsentieren die Kapazitäten des Mitsystems, dabei handelt es sich um den symmetrischen Idealbetrieb einer Leitung, es liegen keine Fehler vor. Aus der Matrix \mathbf{P}^S , siehe auch Gleichung 120, werden nun die Mitkoeffizienten $P_{aa}^{11}, P_{bb}^{11}, P_{ba}^{11}, P_{ab}^{11}$ verwendet.

1. Mitkapazität einer Einfachleitung, 2. System wird erdfrei angenommen und verhält sich als wäre es nicht vorhanden:

$$\bar{C}^1 = \frac{1}{P_{aa}^{11}} \quad (34)$$

2. Mitkapazität der Einfachleitung, 2. System geerdet:

$$\bar{C}_{\perp}^1 = \frac{P_{aa}^{11}}{(P_{aa}^{11})^2 - |P_{ab}^{11}|^2} \quad (35)$$

3. Mitkapazität der Doppelleitung, beide Systeme in Betrieb:

$$\bar{C}^1 = \frac{2}{P_{aa}^{11} + P_{ab}^{11}} \quad (36)$$

3.3 Reale Freileitungen

In diesem Abschnitt werden verschiedenste Masttypen und Leitungstypen vorgestellt. Dabei sollen deren Vor- und Nachteile aufgezeigt werden.

Masttypen

Wir unterscheiden grundsätzlich zwischen Holzmastleitungen, Betonmastleitungen und Stahlgittermastleitungen. Holzmast- und Betonmastleitungen werden hauptsächlich auf mittlerer Spannungsebene eingesetzt, wohingegen Stahlgittermastleitungen bei Hoch- und Höchstspannung zum Einsatz kommen. In der folgenden Abbildung sind mögliche Masttypen gezeigt, die zwei Stahlgittermasten (h,i) unterscheiden sich eindeutig von den anderen. Es handelt sich hierbei um Masten der Spannungshöhen 110kV-750kV wie sie vermehrt in Russland und Kanada zum Einsatz kommen [3].

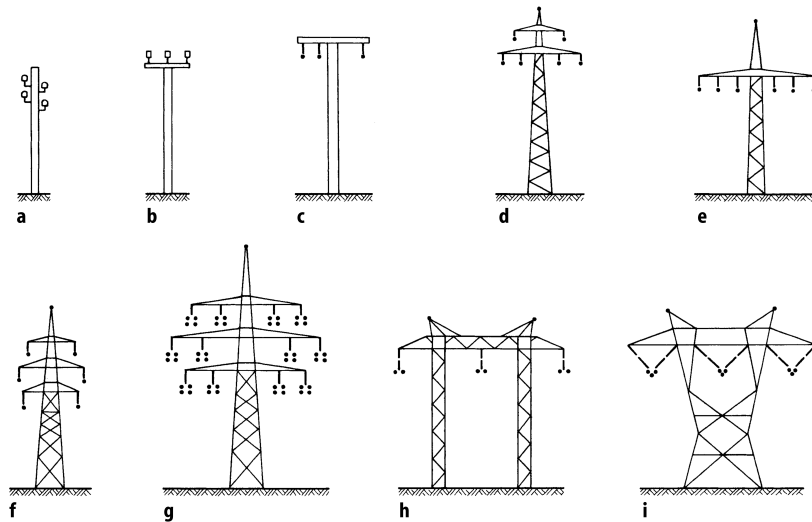


Abbildung 5: a) Niederspannungsholzmast Leiter und Neutralleiter, b) Mittelspannungsleitung, c) Betonmastleitung, d) Donaumastbild 110kV-380kV, e) Einebenenmast 110kV u 220kV, f) Tonnemastbild, g) Tonnemastbild mit 4er Bündel für 4 Stromkreise, 380kV, h) Portalmast Einfachleitung 110kV-750kV, i) Y-Mast 110kV-750kV [3]

Stahlgittermast

Der Stahlgittermast wird sowohl in Verteilnetzen als auch im Übertragungsnetz eingesetzt. Ein wesentlicher Punkt bei diesem Masttyp ist der Einsatzbereich. Da hier metallische Leiter mit entsprechender Länge vorliegen, darf das Eigengewicht der Seile nicht vernachlässigt werden, da es die Dimensionierung des Masten bestimmt. Aufgrund dieses Leitergewichts wird der Durchhang eines Spannungsfeldes (Mast zu Mast) mittels Kettenlinie 37 berechnet [4]. Hier kann in erster Näherung die Parabelgleichung verwendet werden.

Kettenlinie

Wie schon zuvor erwähnt ist der Durchhang der einzelnen Leitungen über die Kettenlinie oder in Näherung als Parabel zu berechnen. Die Berechnung der Kettenlinie soll im Folgenden gezeigt werden. Die Gleichung 37 liefert die entsprechende Höhe h an der Stelle x . Für die vollständige Auswertung müssen jedoch noch die Integrationskonstanten bestimmt werden.

$$h(x) = \frac{F_{SH}}{q} \cosh\left(\frac{q}{F_{SH}}x + C_1\right) + C_2 \quad (37)$$

F_{SH} ...horizontale Seilkraft

q ...Eigengewicht/Länge

C_1, C_2 ...Integrationskonstanten

Über eine gegebene Länge L , das Eigengewicht q , sowie den Aufhängepunkten x_B und y_B , können durch Einsetzen der Randbedingungen die Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmt werden.

$$\left[2 \frac{F_{SH}}{q} \sinh\left(\frac{q x_B}{2 F_{SH}}\right)\right]^2 + y_B^2 - L^2 = 0 \quad (38)$$

Diese Gleichung muss nun nach F_{SH} numerisch gelöst werden.

$$\begin{aligned} C_1 &= \operatorname{arctanh}\left(\frac{y_B}{L}\right) - \frac{q}{2 F_{SH}} x_B \\ C_2 &= \frac{-F_{SH}}{q} \cosh(C_1) \end{aligned} \quad (39)$$

F_{SH} einsetzen in C_1 und C_2

Um nun die vollständige Gleichung des Kettenlinienleiters zu erhalten müssen die Integrationskoeffizienten in die Gleichung 37 eingesetzt werden. Für eine detailliertere Ausführung sei hier an folgende Literatur verwiesen [4]. Weiters sei noch erwähnt das sich der Durchhang aufgrund der Betriebstemperatur und auch den äußeren Umständen wie Wind, Sonneneinstrahlung und Umgebungstemperatur verändert. Dabei hat die Temperatur einen wesentlichen Einfluss auf die Ausdehnung der Leitung, welche in weiterer Folge quadratisch in die Berechnung der horizontalen Seilkraft F_{SH} eingeht und letztlich $h(x)$ beeinflusst.

Parabel

Als vereinfachte Methode analytisch lösbare Näherungsmethode dient die Parabelgleichung [3]:

$$\begin{aligned}h(x) &= f_{max} - \frac{q}{2F_{SH}} x^2 \\f_{max} &= \frac{q}{8F_{SH}} x^2\end{aligned}\tag{40}$$

f_{max} maximaler Durchhang des Seils

Diese Berechnung ist für die Auswertung des Durchhangs der Seile ausreichend und liefert rasch und einfach ein Ergebnis.

4 Hocheffiziente Numerische Auswertung

Die numerische Auswertung verfolgt einen ganz anderen Ansatz um die Kapazitäten zu berechnen. In diesem Abschnitt soll dieser Ansatz grob skizziert und die Wahl dieser Methode erläutert werden. Die Maxwell-Beziehungen sind allgemein bekannt können jedoch in bekannten Literaturen ausführlich erkundet werden [5]. Ansonsten lehnt sich der folgende Abschnitt an die wissenschaftliche Arbeit von John Patrick Barrett [6].

Maxwell Gleichungen

Die Grundlage des Elektromagnetismus liegt in den Maxwell Gleichungen. Sie ermöglichen uns die konsistente Beschreibung aller elektromagnetischen Phänomene, daher sind sie auch unser Ausgangspunkt.

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (41)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (42)$$

$$\nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (43)$$

$$\nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (44)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (45)$$

B...magnetische Flussdichte E...eletrisches Feld

ρ ...Raumladungsdichte

J...Stromdichte

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

Aufgrund der vorliegenden Situation einer Netzfrequenz von 50Hz wird die Elektrostatik verwendet. Es handelt sich dabei um eine so niedrige Frequenz, das

wir von zeitlich konstanten Feldern ausgehen können. Betrachten wir das Induktionsgesetz in der lokalen Form 43 können wir durch diese zeitliche Unabhängigkeit dies zur Gleichung 46 vereinfachen. Selbiges Prozedere ermöglicht uns den Ampere Maxwell Satz 45

$$\nabla \times E = 0 \quad (46)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (47)$$

Wäre für uns die Ladungsdichte ρ bekannt könnte die Lösung des elektrischen Feldes über das Coulombsche Gesetz berechnet werden:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')(r - r')}{|r - r'|^3} d^3 r' \quad (48)$$

Da ρ uns jedoch unbekannt muss dies erst ermittelt werden. In unserer Umgebung befinden wir uns in einem Luft leeren Raum, wodurch das Dielektrikum für Luft $\epsilon_r = 1$ angenommen werden kann, dabei handelt es sich um ein linear homogen isotropes Dielektrikum. Dies ermöglicht uns nun aus den beiden Gleichungen 49

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_1 \cdot E &= \rho \\ E &= -\nabla\Phi \end{aligned} \quad (49)$$

wobei Φ das Skalarpotential repräsentiert, die Herleitung der bekannten Poisson Gleichung:

$$\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (50)$$

Befindet man sich im ladungsfreien Raum $\rho = 0$ resultiert daraus die Laplace Gleichung:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (51)$$

Hier treffen wir die Annahme das unsere Ladungsverteilung an Oberflächen gebunden und der Raum dazwischen ladungsfrei ist.

Randbedingungen

Um die Laplacegleichung zu lösen benötigen wir einige Randbedingungen und bestimmte Startwerte. Zuerst nehmen wir einen dreidimensionalen Raum Ω im \mathbb{R}^3 und führen den Rand dieses Raumes mit $\Gamma = \partial\Omega$ ein. Dabei ist es wichtig das wir ein Skalarpotential $\Phi(r)$ im \mathbb{R}^3 finden welches sich einerseits auf den eindimensionalen Raum \mathbb{R} abbilden lässt und andererseits die Laplace Gleichung $\nabla^2\Phi(r) = 0$ erfüllt. Diese Bedingung muss für alle Punkte in diesem Raum Ω erfüllt sein.

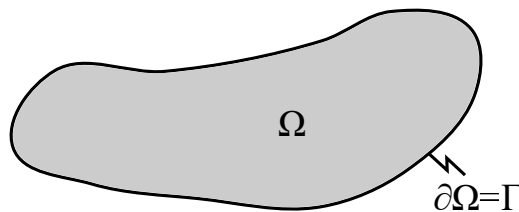


Abbildung 6: Das Volumen Ω wird durch den Rand Γ beschränkt.

In unserem Fall sind die beiden Randbedingungen Neumann und Dirichlet essenziell. Dabei beschreibt die Dirichlet Randbedingungen das wir alle metallischen Oberflächen als ideale Leiter annehmen. Wir definieren dies wie folgt:

$$\Phi(r) = D(r), \quad \forall r \in \Gamma \quad (52)$$

Die obere Gleichung gibt vor dass das Potential Φ mit allen Oberflächenteilen Γ übereinstimmen muss.

Auch ein Mix der beiden Randbedingungen ist zur Berechnung dieser Laplace Gleichung möglich. Weiters stehen noch andere Randbedingungen zur Verfügung wie jene des Robin Typs wo eine Linearkombination aus Neumann und Dirichlet zum Einsatz kommt oder die Randbedingung des Cauchy Typs.

Wir werden jedoch nur die Randbedingung von Dirichlet verwenden da diese existiert und zudem auch eindeutig sind [6].

4.1 Numerische Berechnung

Da es unmöglich ist komplexe Geometrien analytisch zu lösen, kommen numerische Verfahren zum Einsatz. Hierbei gibt es zwei unterschiedliche Methoden, einerseits die Finite Differenz Methode (= FDM) und die Randelement Methode (Boundary Element Methode = BEM). Beide werden für das Lösen der Laplace Gleichung verwendet. Bei der FDM wäre es möglich das Skalarpotential Φ direkt zu berechnen was für unsere Vorhaben schon ausreichen würde, jedoch ist das Problem bei dieser Methode die Volumendiskretisierung. Betrachten wir nun ein Spannungsfeld mit 6 Leitungsseilen und einem Erdseil. Dieses besitzt eine Länge von 300m, möchte man die Ladungsverteilung oder etwa das elektrische Feld berechnen so muss man diese Leitung in eine Simulationsbox mit den Maßen von 400x150x100m setzen. Als Auflösung dieser Box wählen wir $0.5 \frac{1}{m}$, daraus resultiert eine Anzahl an 120 Mio. Simulationspunkten. Es braucht jedoch noch eine fein detaillierte Ummantelung jedes einzelnen Linienleiter, da sich dort unser elektrisches Spitzenfeld aufbaut. Bei einem Leitungsdurchmesser von 20mm, einer gesuchten Feldinformation bis zu 1m Umfangradius mit diagonalen Auflösung von 1cm und einer Längenauflösung von 25cm, addieren sich für 7 Leiterseile noch weitere 13.44 Mio. Punkte. Dies ergibt in Summe 133.44 Mio. Punkte, es benötigt jeder Punkt den Wert des Skalarpotentials und seine exakten Koordinaten in unserem Fall x,y,z. In Summe müssen also überschlagsmäßig 533.76 Mio. Werte gespeichert werden. Speichern wir nun alle Werte mit einem 64bit Float Datentyp, so wären dies $4.27008 \cdot 10^{12}$ Bytes und umgerechnet 4.2 Terabytes. Da all diese Werte in Kopplung zueinander stehen müssen mit dieser Datenmenge auch noch einige mathematische Operation durchgeführt werden, spätestens mit dieser Aufgabe wären selbst leistungsfähige Simulationsrechner überfordert.

Die BEM hingegen, ermöglicht uns die gesamte Volumsdiskretisierung zu vermeiden. Dabei wird an den Grenzen ein Gitternetz verwendet, welches die Reduzierung der Dimension und in weiterer Folge des Speicherbedarfs mit sich bringt. Zusätzlich liefert uns diese Methode die Möglichkeit Quellenladungen und somit die Ladungen in den einzelnen Phasen exakt zu bestimmen. Aus diesen Ladungen können dann mit beliebiger Genauigkeit die weiteren elektrischen Größen bestimmt werden.

4.2 Randwert Methode

Die Randwert Methode oder auch Boundary Element Methode ermöglicht uns wie schon oben erwähnt eine effiziente Berechnung der Freileitung. Um nun aus dieser Methode einen Computeralgorithmus zu erhalten müssen die partiellen differential Gleichungen in Randintegral Gleichungen umgewandelt werden. Dafür werden wir die Laplace Gleichung 51 mit einer nicht genauer definierten Funktion $G(r,r')$ multiplizieren und über den Bereich Ω integrieren.

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \Phi(r') G(r, r') d\Omega = 0 \quad (53)$$

Über die Gaußtransformation und die zweite Greensche Identität erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 G) \Phi d\Omega = \oint_{\Gamma} [(\vec{n} \cdot \nabla \Phi) G - (\vec{n} \cdot \nabla G) \Phi] d\Gamma \quad (54)$$

Diese Gleichung ist auch als Greensche Funktion bekannt und kann über die Beziehung,

$$\nabla^2 G(r, r') = -\delta(r - r') \quad (55)$$

gelöst werden. Setzt man Gleichung 53 in die Gleichung 54 ermöglicht dies die Separierung des Skalarpotential Φ . Dabei repräsentiert δ die Dirac-Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - r') dr = 1 \quad (56)$$

Die Lösung der Greenschen Funktion stellt sich dann wie folgt dar:

$$\int_{\Gamma} \nabla^2 G(r, r') \Phi(r') d\Omega = \int_{\Omega} -\delta(r - r') \Phi(r') d\Omega = -\Phi(r) \quad (57)$$

Woraus weiters die direkte Berechnung der Randelementmethode für das Skalarpotential ermöglicht wird.

$$\Phi(r) = \oint_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \nabla G(r, r')) \Phi(r') d\Gamma - \oint_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \nabla \Phi(r')) G(r, r') d\Gamma \quad (58)$$

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi|r - r'|} \quad (59)$$

Setzt man nun die Lösung der Greenschen Funktion 59 in die Gleichung 58 ein und wendet zudem die Definitionen für einen Dipol p und der Flächenladungsdichte σ an,

$$\begin{aligned} \frac{p(r')}{\epsilon_0} &= \Phi(r') \vec{n} \\ \frac{\sigma(r')}{\epsilon_0} &= -\vec{n} \cdot \nabla \Phi(r') \end{aligned} \quad (60)$$

resultiert daraus:

$$\varphi = \sigma \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Gamma} \frac{1}{|r - r'|} d\Gamma = \sigma \cdot P_{ij} \quad (61)$$

Dieser Ausdruck entspricht dem Potential und beinhaltet den maxwellschen Potentialkoeffizienten P_{ij} . Mit diesem Ausdruck haben wir es geschafft das Potential über den Rand Γ des Volumens Ω zu berechnen. In den nächsten Abschnitten werden wir über die Fast Multipole Methode und Iterativen Solvern die Ladungsdichte ermitteln. Da die Potentialkoeffizienten in direktem Zusammenhang mit der Kapazität stehen $C = P^{-1}$ ermöglicht das Wissen von σ der Ladungsdichte und dem vorgegebenen φ Potential über die Beziehung,

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{\sigma}{\Phi} \quad (62)$$

die numerische Berechnung der Kapazität C .

Diskretisierung

Durch die nun vorliegende Gleichung 61 können wir theoretisch das Potential berechnen. Aufgrund der komplexen Geometrien und der unbekanntes Ladungsdichte benötigen wir jedoch die Randbedingung von Dirichlet, Neumann und eine Linearisierung der Geometrie. Je geringer der Fehler desto höher muss die Diskretisierung des Randes Γ sein. Der Rand wird daher in mehrere Punkte unterteilt aus denen die Teilstücke genähert werden. Die von uns verwendete Methode beruht dabei auf der Kollokation der kleinsten Quadrate.

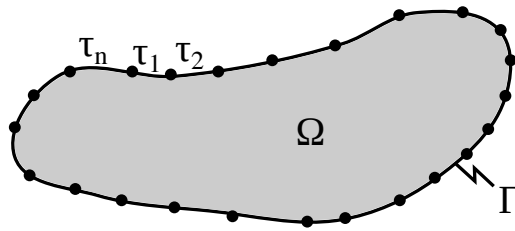


Abbildung 7: Zerlegung des Randes Γ in einzelne approximierte Teilstücke τ_n .

Dieses Gitter welches am Rand entsteht skaliert sich durch die Festlegung der Lösungsabweichung.

Dirichlet und Neumann Bedingungen

Durch die Anwendung des Einzelschicht Ansatzes für die Dirichlet und Neumann Randbedingung erhalten wir eine Form des Matrix Systems von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit folgende Koeffizienten:

$$P_{ij} = \int_{u_j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0|y_j - r'|} du_j \text{ bei } y_j \in D \quad (63)$$

Der Vektor \mathbf{x} repräsentiert die unbekanntes Ladungen welche durch iterative Lösungsverfahren ermittelt wird. Die Matrix \mathbf{A} wird durch die Potentialkoeffizienten P_{ij} aufgebaut.

u_j ...Teilstücke des diskretisierten Randes Γ

y_j ...Mittelpunkt des Teilstücks u_j

δ_j ...Kronecker-Delta: 1 wenn $i=j$, 0 wenn $i \neq j$

D...Dirichlet Oberfläche, N...Neumann Oberfläche

Der Vektor \mathbf{b} wird über die untenstehende Bedingung repräsentiert, in unserem Fall ist dies das Potential:

$$b_i = \begin{cases} V(y_i) \text{ bei } y_i \in D \\ 0 \text{ bei } y_i \in N \end{cases} \quad (64)$$

V_{y_i} ...Grenzwert der Dirichlet Oberfläche

Für die Herleitung dieses Zusammenhangs, sei an dieser Stelle an folgende Literatur verwiesen: [6]. Wir erhalten ein lineares dicht besetztes Gleichungssystem, welches durch die Matrixform über Iterative Berechnungsmethoden gelöst werden kann. Es sei noch angemerkt das jedes betrachtete Element des Gitters in Kopplung mit allen anderen Elementen steht. Weiters handelt es sich bei \mathbf{A} um eine lineare und nicht Symmetrische Matrix ($A_{ij} \neq A_{ji}$).

4.3 Lösen Linearer Systeme

Wir besitzen nun ein lineares Modell von Gleichungen die in der Form $\mathbf{Pq}=\boldsymbol{\varphi}$ vorliegen. Um nun den Vektor \mathbf{q} zu ermitteln gibt es zwei grundlegende Methoden. Einerseits die direkte wo wir durch bilden der Inversen von \mathbf{P} und Multiplikation mit $\boldsymbol{\varphi}$, \mathbf{q} erhalten:

$$\mathbf{q} = \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varphi} \quad (65)$$

oder andererseits durch die schon angekündigten iterativen Verfahren. Das Problem der direkten Methode ist die Größe der Matrix \mathbf{P} . Mit dem im Abschnitt 4.1 erklärten Rechen- und Speicherbedarf ist es nicht zielführend eine direkte Methode wie zum Beispiel das Gaußsche Eliminationsverfahren zu verwenden. Es benötigt daher einen anderen Ansatz um dieses Problem zu lösen.

Iterative Methode

Dieser Ansatz kann durch iterative Methoden erfolgen deren Funktionsweise beruht darauf, dass man die Abweichung der gewünschten Lösung berechnet und diese Information dann für die nächste Berechnung verwendet um im folgenden Schritt ein genaueres Ergebnis zu erhalten. Dies wird so oft wiederholt bis die vorgegebene Fehlertoleranz Res erreicht ist. In Pseudocodesprache würde man dies für $\mathbf{Pq}=\boldsymbol{\varphi}$ wie Algorithmus 1 formulieren.

Da wir ein Gleichungssystem mit mehr als einer Million Unbekannten haben, müssen wir uns eines iterativen Prozesses namens Matrix-Frei bedienen. Der Vorteil dieser Methode ist das hierbei die Matrix \mathbf{P} nicht gespeichert werden muss um mit ihr zu arbeiten. Es wird in jedem Schritt nur das Matrix-Vektor Produkt gebildet und das Ergebnis mit dem vorgegebenen Wert verglichen.

Algorithm 1 Grundprinzip Iterativer Solver

- 1: **Input:** Matrix \mathbf{P} , Potential φ , Anfangswert der Ladung q_0 .
 - 2: Berechne die Abweichung der Ladungen \mathbf{q} vom erwarteten φ
 - 3: **while** $\varphi_i \geq Res$ **do**
 - 4: Nächste Lösungsnaherung mit q_{i+1} unter Verwendung von φ_i
 - 5: Matrix-Vektor Produkt mit Matrix-Free Methode
 - 6: Berechne Abweichung zu φ_{i+1}
 - 7: **Output:** Das Näherungsergebnis \mathbf{q} mit der Fehlerabweichung von $\varphi \leq Res$.
-

4.4 Solvertypen

4.4.1 GMRES

Das für uns wichtige Lösungsverfahren für den Krylov-Unterraum heißt Generalized Minimal Residual Method (=GMRES) [7]. Es garantiert die Konvergenz für eine Vielzahl von Anwendungen, auch für ein nicht singuläres System von N Dimensionen konvergiert der GMRES-Solver innerhalb von N Iterationen [8]. Wir erhalten dadurch eine streng monoton fallende Folge, was dazu führen kann das im schlechtesten Fall dies zu N Iterationen führt. Glücklicherweise konvergieren jedoch viele Systeme bereits nach k Schritten, wobei $k \ll N$ gilt.

Der große Nachteil des GMRES Solvers ist der benötigte Speicherbedarf. Dieser wächst mit jeder weiteren Iteration mit dem Faktor $\mathcal{O}(kN)$, was bei Systemen die langsam konvergieren zu einem beträchtlichen Speicherplatzbedarf führt. Um diesem Problem entgegen zu wirken, kann der Algorithmus neugestartet werden und die bisherigen Krylov Unterräume werden verworfen. Anschließend beginnt man wieder mit der besten bisherigen Näherung von \mathbf{q} , bezeichnet wird diese Form des Algorithmus mit GMRES(n) [7]. Dieser Eingriff in den Algorithmus garantiert jedoch keine Konvergenz nach N -Schritten und kann dadurch auch weitaus mehr Zeit beanspruchen. Alternativ gibt es auch Algorithmen mit einem fixen Speicherbedarf, einer davon wird im nächsten Teil vorgestellt.

4.4.2 BiCGSTAB

Der Biconjugate Gradient Stabilized (=BiCGSTAB) Algorithmus verwendet das Verfahren von Lanczos Biorthogonalisierung mit einigen Korrekturen der numerischen Stabilität. Der große Vorteil dieses Solvers gegenüber dem GMRES-Algorithmus ist der geringe und fix definierte Speicherplatzbedarf. Der große Nachteil liegt jedoch in der begrenzten Konvergenz des Verfahrens, was in unserem Fall sehr essenziell ist. Daher wird dieser Solver nicht weiter ausgeführt, Informationen und weitere Details sind aber unter [9] zu finden.

4.4.3 Fast Multipole Methode

Bei der vorher erwähnten Berechnungsmethode Matrix-Free, wird das Matrix-Vektor Produkt von $\mathbf{P} \mathbf{q}$ gebildet. Anstelle der vollständigen Matrix-Vektor Multiplikation wird lediglich $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}(\mathbf{q})$ ausgewertet. Die einzelnen Potentialkoeffizienten $P_{i,j}$ müssen in diesem Fall nie berechnet werden. Dies erfordert eine möglichst rasche und effiziente Methode, zur Bereitstellung der Ladungen q . Dies wird durch die Fast Multipole Methode ermöglicht. Diese Ladungen q werden über das Coulomb Potenzial bestimmt, dieses langreichweitige Potenzial entwickelt sich mit $\frac{1}{r}$, wir können daher auf weit entfernte Ladungsteile nicht verzichten. Die Skalierung aller auftretenden Teilchenwechselwirkungen liegt daher bei $O(N^2)$ [10].

Der große Vorteil dieser Berechnungsmethode ist der reduzierte Rechenaufwand des Fernfeldes. Dies ermöglicht uns eine Verringerung der Schritte von den bisherigen $O(N^2)$ auf $O(N)$. Die Fast Multipole Methode (FMM) wurde erstmals im Jahr 1988 von Leslie Greengard [11] vorgestellt. Die Grundidee der FMM liegt darin das ein sogenannter Cluster nahe beieinander liegender Ladungen zusammengefasst wird. Dies wird dadurch Möglich das bei distanzierter Betrachtung der Ladungen sich diese wie eine gewichtete Punktladung verhalten. Es sei hier ein kurzer Ausflug in die Dipol- und Multipoltheorie erlaubt, welches sich an folgender Literatur orientiert [1].

Dipole, Punktladungen, Multipole

Zu Beginn sei das elektrische Moment \vec{p} definiert.

$$\vec{p} = \vec{l} Q \tag{66}$$

\vec{l} ...Abstand zwischen einer positiven und negativen Ladung Q

Wenn wir nun zwei unterschiedlich Ladungen mit sehr geringem Abstand l betrachten so sprechen wir von einem elektrischen Dipol, welcher mit dem Faktor $\frac{1}{r^2}$ abklingt. Betrachtet man dieses ungleichnamige Ladungspaar aus einer gewissen Entfernung, spricht man von einer Punktladung welche durch das elektrische Moment \vec{p} repräsentiert wird. In der folgenden Abbildung 8 erkennen wir nun eine Ansammlung von mehreren Ladungen. Wir wollen dabei das Potential φ im Punkt P bestimmen.

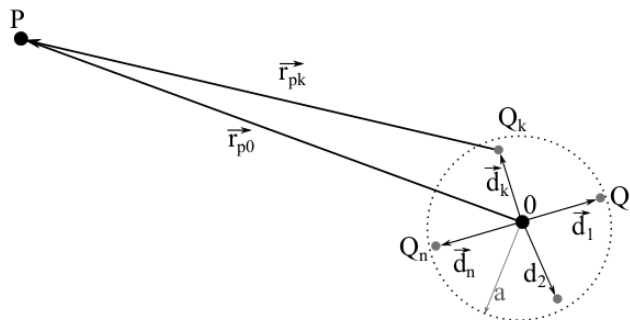


Abbildung 8: Ansammlung von Punktladungen in einer Kugel mit Radius a und Ursprung 0 .

Wenn wir nun den reziproken Wert des Abstandes r_{PK} erhalten wollen, müssen wir folgende Reihenentwicklung anwenden:

$$\frac{1}{r_{PK}} = \frac{1}{r_{P0}} \left[1 + \frac{d_k}{r_{P0}} + \left(\frac{a}{r_{P0}} \right)^2 + \dots \right] \tag{67}$$

Setzen wir nun diesen Term in Gleichung 9 ein, erhalten wir für das Potential im Punkt P:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_{P0}} \sum_{k=1} Q_k + \frac{1}{r_{P0}^2} \sum_{k=1} d_k Q_k + \dots \right] \tag{68}$$

In der Gleichung sei durch die "... " angedeutet das sich hier die Reihenentwicklung theoretisch noch fortsetzen würde, da diese Terme jedoch sehr klein sind werden sie nicht mehr berücksichtigt. Der nächste Schritt summiert die Einzelladungen zu einer Gesamtladung Q auf und führt das elektrische Moment $p = \sum d_k Q_k$ ein.

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r_{P0}} + \frac{p_{P0}}{r_{P0}^2} + \dots \right] \quad (69)$$

Anhand dieses Ergebnisses sieht man das mit zunehmenden Abstand des Punktes P der Einfluss des elektrischen Moments (Ladungsmoment erster und höhere Ordnung) mit zunehmend höheren Potenzen des reziproken Abstandes und somit des Nahfelds schwindet. Sollte man sich jedoch der Punktansammlung nähern bemerkt man ein Dipolfeld und bei weiterer Annäherung ein Quadrupolfeld, usw. Es sei aber Angemerkt das in unserem Fall das Dipolfeld überwiegt, welches für die Nahfeldberechnung dient. Die obere Gleichung 69 repräsentiert daher den Anfang einer Multipolentwicklung.

Multipolentwicklung und Vorbereitung der FMM

Zum einfacheren Verständnis werden zwei Ladungen im Abstand $a(a, \alpha, \beta)$ und $r(r, \theta, \varphi)$ betrachtet. Dabei gilt $a < r$ sowie Kugelkoordinaten mit folgender Zuordnung: α, θ Polradwinkel, β, φ Azimutwinkel. Da wir an deren Nah- und Fernfeldanteilen interessiert sind lautet deren Entwicklung für $\frac{1}{|r-a|}$:

$$\frac{1}{|r-a|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_{lm}(\cos \alpha) P_{lm}(\cos \theta) e^{-Im(\beta-\varphi)} \quad (70)$$

P_{lm} ...Legendre-Polynome

ganzahlige l und m mit $0 \leq m \leq l$ für eine nichtsinguläre Lösung

Um nun die Gleichung in Nah- und Fernfeldanteile auf zu splitten, wird für das Nahfeld die Multipolentwicklung und für das Fernfeld die Taylorentwicklung verwendet [10].

- Nahfeldanteil: $\omega_{lm} = qO_{lm}$

- Fernfeld: $\mu_{lm} = qM_{lm}$

$$\frac{1}{|r-a|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l O_{lm}(a)M_{lm}(r) \quad (71)$$

Im nächsten Schritt kommt es zu einer Unterteilung des Rechengebiets. Dabei werden ausgehend von einer sogenannten "Mutterbox" alle Teilchen umschlossen. Im nächsten Schritt wird diese Box in jeder Koordinatenachse halbiert, man befindet sich nun in der zweiten Ebene des Berechnungsverfahrens. Anschließend wird jede Box wieder halbiert und somit der Rechenbereich verfeinert, bei all diesen unterteilten Boxen handelt es sich um die "Kindboxen", dies soll in Abbildung 9 dargestellt sein. Der Abbruch der Verfeinerung ist dann erreicht wenn die Ebene l, mit 8^{l-1} Kindboxen erreicht ist. Dabei definiert sich die Ebene l über die kleinste gewünschte Energieabweichung und das Minimum der Rechenzeit für diesen Fehler.

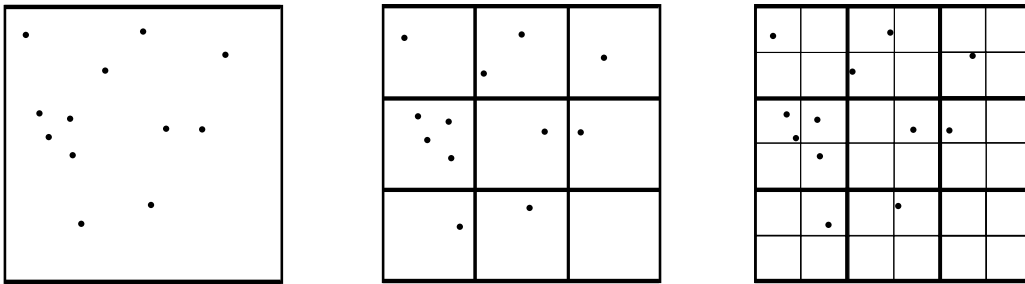


Abbildung 9: Unterteilung der Mutterbox in die Kindboxen bis zur Ebene 1.

Ist das Verfahren in die einzelnen Boxen gegliedert kann mit der Berechnung begonnen werden. Dafür werden drei Operatoren verwendet:

Operator A

Dieser Operator sorgt für die Translation der Multipolentwicklung in einen anderen Entwicklungspunkt. Dabei werden alle Multipolmomente p_{lm} bezogen auf deren Boxzentren berechnet. Dies ist nötig, da diese Momente zur Bestimmung des Fernfeldes benötigt werden. Dabei werden die Multipolmomente in die Zentren, der in höheren Ebenen, liegenden Mutterboxen verschoben. Dadurch wird

deren Aufsummierung ermöglicht und eine Reduzierung der Komplexität durchgeführt. Die Mutterboxen sind zuvor noch ladungsfrei. Mathematisch wird dies durch den Operator A realisiert:

$$p_{lm}(a+b) = \sum_{j=0}^l \sum_{k=-j}^j A_{jk}^{lm}(b) p_{jk}(a) \quad (72)$$

$a...$ Zentrum der Kindbox

$a+b...$ Zentrum der Mutterbox

Dabei repräsentiert:

$$A_{jk}^{lm}(b) = O_{l-j,m-k}(b) = b^{l-j} \frac{1}{(l-j+m-k)!} P_{l-j,m-k}(\cos \alpha) e^{-Im\beta} \quad (73)$$

Operator B

Mittels Operator B wird die vorhergehende Multipolentwicklung in eine Taylorentwicklung umgeformt. Dabei werden die Multipolmomente von Box 1 in Taylorkoeffizienten von Box 2 umgeformt und können von der Empfängerbox aufsummiert werden. Dieser Vorgang gilt nur für nicht beieinander liegende Boxen.

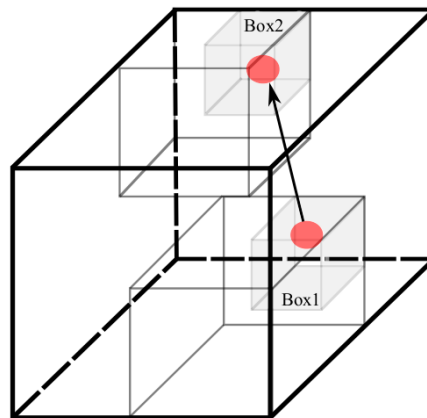


Abbildung 10: Transformation der Multipolentwicklung Box 1 zu Taylorkoeffizienten in Box 2.

$$\mu_{lm}(a-b) = (-1)^l \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j B_{jk}^{lm}(b) p_{jk}(a) \quad (74)$$

Dabei hat B_{jk}^{lm} folgende Form:

$$B_{jk}^{lm}(b) = \frac{1}{b^{l+j}} (l+j-(m+k))! P_{l+j, m+k}(\cos \theta) e^{+Im\varphi} \quad (75)$$

Operator C

Dies ist der letzte Schritt zur Vorbereitung der unterschiedlichen Boxen. Dabei werden die berechneten Taylorkoeffizienten wieder zurück in die Zentren der Kindboxen verschoben. Dadurch besitzen alle Boxen auf unterster Ebene alle Informationen um das Fernfeld zu bestimmen.

$$\mu_{lm}(r-b) = \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=-j}^j C_{jk}^{lm}(b) \mu_{jk}(r) \quad (76)$$

$$C_{jk}^{lm}(b) = O_{l-j, k-m}(b) = b^{l-j} \frac{1}{(l-j+(k-m))!} P_{l-j, k-m}(\cos \alpha) e^{-Im\beta} \quad (77)$$

Zuletzt werden nun die einzelnen Nah- und Fernfelder berechnet. Für das Nahfeld werden dabei die unmittelbaren Nachbarn und die betrachtete Box selbst berücksichtigt. Dabei skaliert sich die Komplexität mit $O(N^2)$.

Das Fernfeld setzt sich aus allen anderen Boxen zusammen welche bei der Nahfeldberechnung nicht mit einbezogen wurden. Dies hat nun den großen Vorteil das aufgrund der aufsummierten und zentrierten Ladungen die Komplexität mit $O(N)$ wächst und eine wesentlich effizientere Berechnung ermöglicht. Zuletzt werden beide separaten Berechnungen zusammengeführt. Die folgende Abbildung 11 soll dies nochmals verdeutlichen:

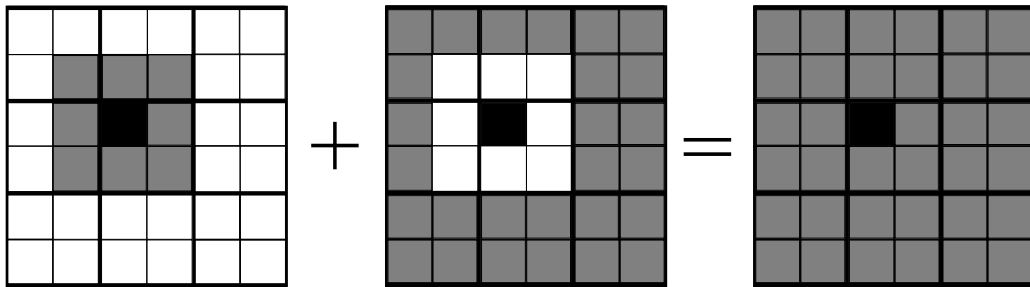


Abbildung 11: Getrennte Berechnung des Nah- und Fernfeldes anschließende Zusammenführung.

4.5 KEMField

Dieser Abschnitt soll die Leistungsfähigkeit des verwendeten Berechnungssoftware KEMField [12] zeigen. Zu Beginn wird die theoretische Leistungsfähigkeit des Solvers analysiert, während im folgenden Teil deren praktische Umsetzung im Fokus steht. Der verwendete Algorithmus wurde in seiner Basis von T.J. Corona [13] in C++ programmiert. Dieser obliegt dem Objekt Orientierten Programmdesign und der Template Meta-Programmierung. Dies ermöglicht eine flexible Handhabung des Programmcodes, was jedoch bei Templates durchaus eine Herausforderung darstellen kann. Weiters besitzt der verwendete Algorithmus die Möglichkeit der Parallelisierung, was durch den Einsatz des Message Passing Interface kurz MPI ermöglicht wird. Die dabei eingesetzte Bibliothek stammt aus dem OpenMPI Framework. Auch die Auslagerung der Berechnungen auf eine Grafikkarte GPU wurde angedacht und mittels OpenCL implementiert. All diese zusätzlichen Features sind per Pakete nach installierbar, wurden jedoch in diesem Zusammenhang noch nicht verwendet, da im ersten Schritt eine Optimierung des Rechenverfahrens nicht an höchster Priorität stand.

4.5.1 Parameter

Die Performance des Algorithmus sehr stark von den gewählten Solver Parametern abhängig ist. Werden diese kurz erläutert um bei der jeweiligen Simulati-

onsaufgabe zu wissen, welche Einstellungen angepasst werden müssen um das gewünschte Ergebnis und die nötige Lösungseffizienz zu erhalten. Dabei sei angemerkt das Einstellungsparameter für eine bestimmte Aufgabe sehr unterschiedlich sein können und ein starker Einfluss der Geometrie berücksichtigt werden muss. Für deren Wahl gibt es leider kein allgemein Rezept und bisherige Literaturen [6] empfehlen ein sogenanntes "Trial and Error" Verfahren um passende Parameter zu finden. Nichts desto trotz ist es wichtig die Einstellungswerte zu verstehen um sie auch dementsprechend einzusetzen.

Obergrenze Die Obergrenze, oder "maximum degree" wie sie in den Solvereinstellungen heißt, kontrolliert die Anzahl der Koeffizienten der berechneten Multipole und der Taylorentwicklung. Dies beeinflusst den benötigten Speicherbedarf.

Räumliche Aufteilung "Spatial Division" ist für die Unteraufteilung der einzelnen Boxen, sowie deren Unterboxen bis zur untersten Ebene zuständig. Hier kann es hilfreich sein wenn die erste Ebene eine andere Aufteilung als deren Untergliederungen besitzt. Dafür muss der Parameter "Top Spatial Division" eine andere Gewichtung als der "Spatial Division" Parameter aufweisen.

Zeromask Dies ist der wichtigste Parameter, da er die Anzahl der Nachbarboxen bezüglich der Nahfeldberechnung festlegt. Für den Fall Zeromask $z=1$ einer drei Dimensionalen Box, welche wir in unserer Simulation immer haben, besitzt diese 26 Nachbarn. Als Nachbarn werden alle Boxen gezählt die mit der jeweiligen Box in Berührung kommen, sprich alle Flächen, Kanten sowie Ecken. Bei der Wahl von $z=2$ erhöht sich die Anzahl der Nachbarn da deren inneren Boxen wieder Nachbarboxen besitzen. Es resultiert eine Anzahl von 124 Boxen. Mathematisch entwickelt sich dieser Wert mit $(2z + 1)^D - 1$, wobei D die Dimension des Simulationsbereiches ist. Die folgende Abbildung 12 soll dies nochmals verdeutlichen.

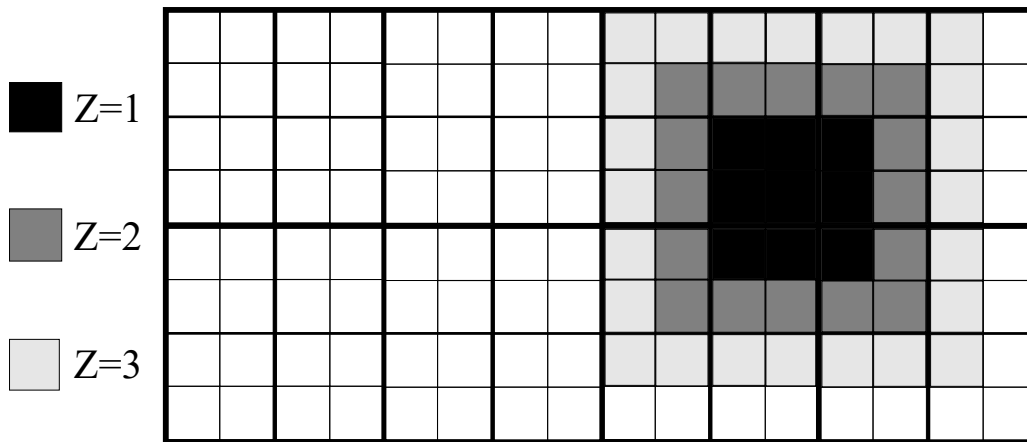


Abbildung 12: Je nach Wahl der Zeromask werden die Nachbarboxen mitberücksichtigt, wobei diese Abbildung nur eine zwei Dimensionale Ansicht zeigt.

Des weiteren hat dieser Parameter einen hohen Einfluss auf die Genauigkeit der Simulation, jedoch erkaufte man sich dadurch einen erhöhten Speicherbedarf und Rechenbedarf durch die größere Evaluierung des Nahfelds.

Maximale Box Ebene In der Simulation wird dieser Parameter mit "maximum tree level" bezeichnet, da Entwickler sich die Unterteilung der Boxen in Baumstrukturen vorstellten. Dieser Parameter ist nicht unbedingt notwendig, hilft jedoch im Falle von unbegrenzter Unterteilung der Boxen diese zu limitieren. Dadurch kann die zu Verfügung stehende Speichergröße begrenzt werden.

4.6 Praktische Umsetzung

Da die Theorie des Solvers nun erklärt ist wollen wir hier die programmtechnische Umsetzung einer Leitungsberechnung zeigen. Zunächst wird durch das vorliegende geometrisch Gebilde die Ladungsverteilung ermittelt. Wir setzen dafür alle Elemente auf das Potential Null, beim Leiter 1 wird das Potential auf 1 gesetzt, siehe Abbildung 13.

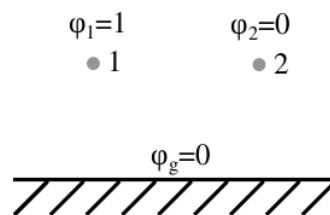


Abbildung 13: Zweileiter Anordnung einer Freileitung.

Wir erhalten anschließend die Ladungen Q_1 und Q_2 der beiden Leiter und setzen diese in die Gleichung:

$$Q = \varphi \cdot C \quad (78)$$

Nachdem wir unser Potential $\varphi = 1$ gesetzt haben entspricht die Ladung am Leiter 1, $C_{12} = Q_2$ der Koppelkapazität, die Kapazität C_{10} ermittelt sich über die Differenz der Ladungen von Leiter 1 und Leiter 2, Q_2 :

$$C_{12} = \frac{Q_2}{\varphi_1} \quad (79)$$

$$C_{10} = Q_1 - Q_2$$

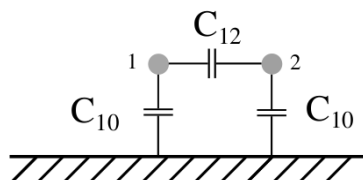


Abbildung 14: Kapazitätsanordnung der Leitungen.

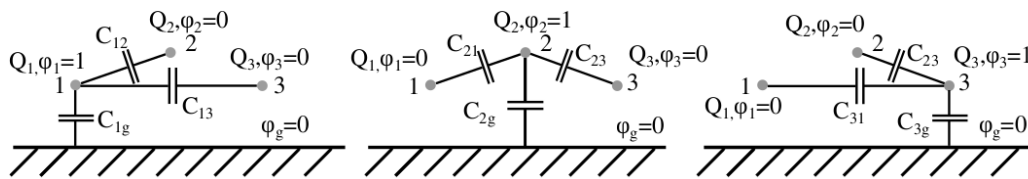


Abbildung 15: Kapazitätsanordnung einer drei Leiter Anordnung.

Für unsere Simulation gehen wir wie folgt vor: Jeder einzelne Leiter wird einmal mit dem Potential $\varphi = 1$ belegt während die Anderen $\varphi = 0$ besitzen und somit auf dem gleichen Potential wie Erde gelegt werden siehe Abbildung 15. Die daraus erhaltenen Ladungsverteilungen entsprechen dann direkt den Werten der Kapazitätskoeffizienten $K_{v\mu}$, wobei noch durch den Längenparameter l dividiert werden muss um einen längenbezogenen Wert zu erhalten, der für die weitere Berechnung benötigt wird.

$$K_{v\mu} = \frac{Q_{v\mu}}{l} \quad (80)$$

Aus diesen Koeffizienten $K_{v\mu}$ baut sich dann unsere Kapazitätskoeffizientenmatrix \mathbf{K} auf, anhand derer die Berechnung von Null- Mit- und Gegenkapazität ermöglicht werden, siehe dazu Kapitel 5.2.

4.7 Verifikation mit analytischen Modellen

Da wir uns der Simulierten Modelle sicher sein müssen, ist eine Verifikation mit Vergleichsbeispielen von großer Bedeutung. Dafür wurden Beispiele gewählt welche analytisch lösbar sind und unserem Simulationsmodell der Freileitung nahekommen.

Linienleiter

Im ersten Beispiel soll ein unendlich ausgedehnter Linienleiter betrachtet werden. Dabei wird dieser in einer bestimmten Höhe H , mit einem Durchmesser $d = 0.02\text{m}$ über eine unendlich ausgedehnte Ebene angenommen, siehe Abbildung 16. Es soll die Ladung im Leiter bei einem Potential von $\varphi = 15\text{kV}$ berechnet werden.

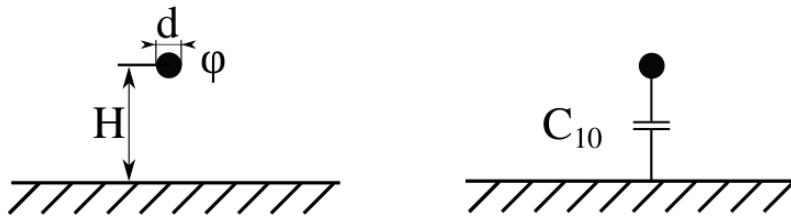


Abbildung 16: Schematische Skizze für den unendlich ausgedehnten Linienleiter mit Erdpotential 0.

Für die Simulation wurden folgende Parameter gewählt:

- Leiterlänge 500m bei einer Leitungsauflösung von $1\frac{1}{\text{m}}$
- Gittergröße 600m x 150m Gitterauflösung von $0.2\frac{1}{\text{m}}$
- Leiterdurchmesser $d=20\text{mm}=0.02\text{m}$
- Potential $\varphi = 15\text{kV}$

Diese Werte entsprechen jene eines Spannungsfeldes, der Durchmesser von 20 mm wurde bewusst gewählt, da auch der anschließende Durchmesser des Leitungsseils in dieser Größendimension liegt. Da es sich beim Potential nur um einen konstanten Faktor handelt und keinen Einfluss auf die Geometrie hat, ist dieser Wert für unsere Simulation nicht ausschlaggebend.

Analytische Lösung:

Die Gleichung 81 ist die analytische Lösung der längenbezogenen Kapazität $C'_{10} = C'(H)$, Abbildung 16.

$$C'(H) = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{\log \frac{4H}{d}} \quad (81)$$
$$Q'(H) = \varphi \cdot C'(H)$$

Der Parameter H wird variiert um die unterschiedlichen Höhen an Aufhängepunkten zu simulieren. In Tabelle 1 repräsentiert $C_{10\text{Sim}}$ das numerische und C_{10} das analytische Ergebnis des Einzellinienleiters.

Für den numerischen Solver wurden folgende Parameter gewählt:

- Solvertyp: GMRES
- Preconditioner: Unabhängiger Implizierter Krylov
- Residuumtoleranz: 10^{-5}
- Solver Strategie: Aggressive
- Zeromask: 2
- Top Level Division: 15
- Degree: 6
- Maximum Tree Level: 10

Diese Parameter wurden in allen folgenden Simulationen verwendet, da sie sich durch mehrere Testsimulationen mit gespiegelten Leitern als die effizienteste herauskristallisierten.

H [m]	20m	25m	30m	35m	40m
C_{10} [pF/m]	6.707519	6.53178	6.394897	6.28355	6.19019
C_{10Sim} [pF/m]	6.74847	6.57608	6.441918	6.33296	6.25492

Tabelle 1: Auswertung analytisch und simulierte Ergebnisse des Einzellinienleiters

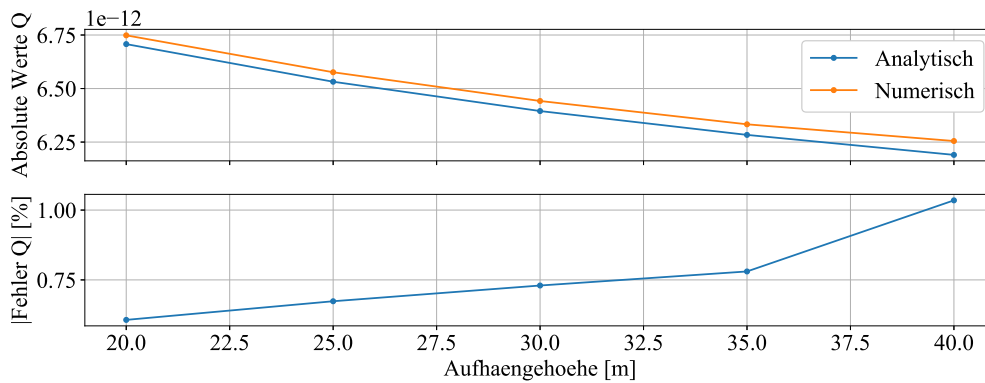


Abbildung 17: Auswertung und Vergleich der Simulation mit den Analytischen Ergebnissen, erster Plot zeigt den absolut Wert Vergleich, zweiter Plot den absoluten Fehler.

Abbildung 17 zeigt die prozentuelle Abweichung zwischen analytischen und numerischen Modell. Auffallend ist dabei das die Abweichung bei zunehmender Höhe größer wird. Ein möglicher Grund könnte die Krümmung der elektrischen Feldlinien zwischen Boden und Linienleiter sein, die mit größerer Höhe geradliniger werden. Zusätzlich ist auch die zunehmende Streuung ein möglicher Einflussfaktor.

Doppellinienleiter

In diesem analytisch lösbaeren Beispiel, soll die Simulation auch die Kopplung eines benachbarten Linienleiters berücksichtigen. Auch in diesem Beispiel soll der Höhenparameter variiert werden da er mathematisch den größten Einfluss auf die

Berechnung hat. Es werden wieder Werte angenommen, welche sich Größenordnungen von Freileitungen nähern sollen:

- Leiterlänge 1000m bei einer Leitungsauflösung von $1 \frac{1}{m}$
- Gittergröße 1100m x 150m Gitterauflösung von $0.2 \frac{1}{m}$
- Leitungsabstand $D=10m$
- Leiterdurchmesser $d=20mm=0.02m$
- Potential $\varphi = 15kV$

Die Wahl einer 1000 m langen Leitung entspricht nicht dem Durchschnitt eines Spannungsfeldes, kann aber sehr wohl im Bereich von Flusskreuzungen oder Talüberspannungen vorkommen. Der Grund für diese Leitungslänge liegt nicht nur darin solche eine Überspannung abzudecken, sondern auch an den zu untersuchenden Feldstreuungen.

Die Abbildung 18 zeigt die Doppellinienleiter Ersatzanordnung wobei auch die vorhandenen Eigenkapazität C_{10} und Koppelkapazität C_{12} eingezeichnet wurden.

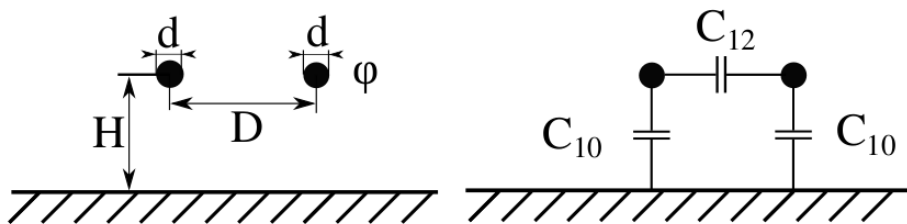


Abbildung 18: Schematische Skizze für den unendlich ausgedehnten Doppellinienleiter mit Erdpotential 0.

Die Abbildung 19 zeigt eine Visualisierung der Simulationsdaten, welche zur erfolgreichen Berechnung der Ladungen und Felder benötigt werden. Dabei ist die zu sehende Ebene mit Dreiecken aufgebaut um zukünftige Geländehöhen zu berücksichtigen. Die Linienleiter werden in diesem Fall aus 1 m langen Linienstücken zusammengesetzt. Damit kann gewährleistet werden, dass anschließende Durchgangssimulationen in beliebig feiner Auflösung realisierbar sind.

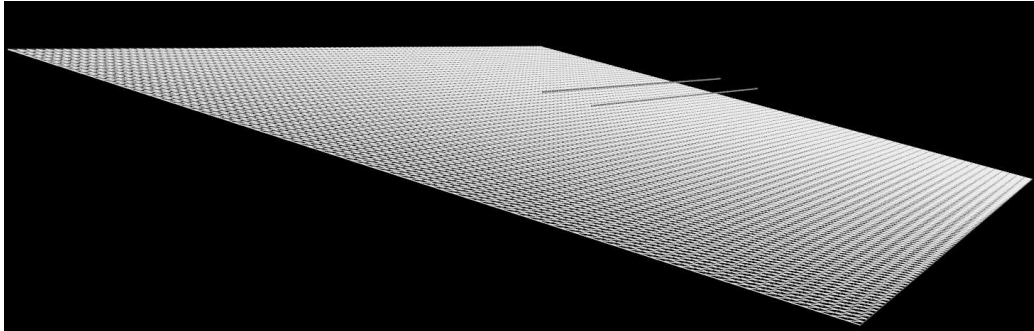


Abbildung 19: Simulationsgeometrie für den Doppellinienleiter mit Erdpotential 0.

Analytische Lösung:

Da zwei Leiter vorliegen, liegen nun auch die Koppelkapazität C_{12} vor.

$$\begin{aligned}
 C'_{12}(H) &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \log \sqrt{\left(\frac{2H}{D}\right)^2 + 1}}{\log \frac{4H}{d} \sqrt{\left(\frac{2H}{D}\right)^2 + 1} \log \frac{4H}{d} \div \sqrt{\left(\frac{2H}{D}\right)^2 + 1}} \\
 C'_{10}(H) &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{\log \frac{4H}{d} \sqrt{\left(\frac{2H}{D}\right)^2 + 1}}
 \end{aligned} \tag{82}$$

H[m]	20 m	25 m	30 m	35 m	40 m
C_{12} [pF/m]	1.18005	1.29674	1.3869	1.459438	1.51957
C_{10} [pF/m]	5.72901	5.48306	5.2958	5.146546	5.02352
C_{12Sim} [pF/m]	1.18005	1.29535	1.37544	1.45877	1.52155
C_{10Sim} [pF/m]	5.61746	5.49332	5.30274	5.15652	5.02841

Tabelle 2: Auswertung der analytischen und simulierten Ergebnisse eines Doppellinienleiter

In der Tabelle 2 sind die einzelnen Kapazitäten und Ladungen des unteren Plots 20 angeführt. C_{12} und C_{10} repräsentieren die analytischen Lösungen der längenbezogenen Teilkapazitäten die aus Gleichung 82 ermittelt wurden, wohingegen C_{12Sim} und C_{10Sim} die Lösungen der simulierten längenbezogenen Teilkapazitäten sind.

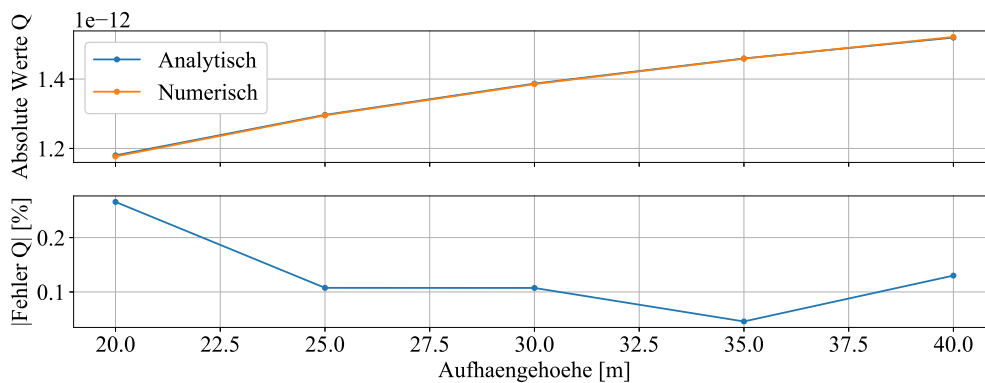


Abbildung 20: Auswertung und Vergleich der Simulation mit den analytischen Ergebnissen, erster Plot zeigt den absolut Wertvergleich, zweiter Plot die absoluten Fehler.

Um unterschiedlich lange Spannfelder zu verifizieren wurden weitere drei Berechnungen 21, 22, 23 durchgeführt, welche auf den folgenden zwei Seiten als Plot dargestellt sind. Bei diesen Spannfeldern muss die Bedingung $(\frac{R}{H})^2 \ll 1$ erfüllt sein um einen Vergleich mit dem unendlich ausgedehnten Linienleiter zu ermöglichen. Weiters muss auf Streufelder an den Enden der Leitungen Rück-

sicht genommen werden, dies wird durch die eine 10% bis 20% Subtraktion der Endstücke erreicht.

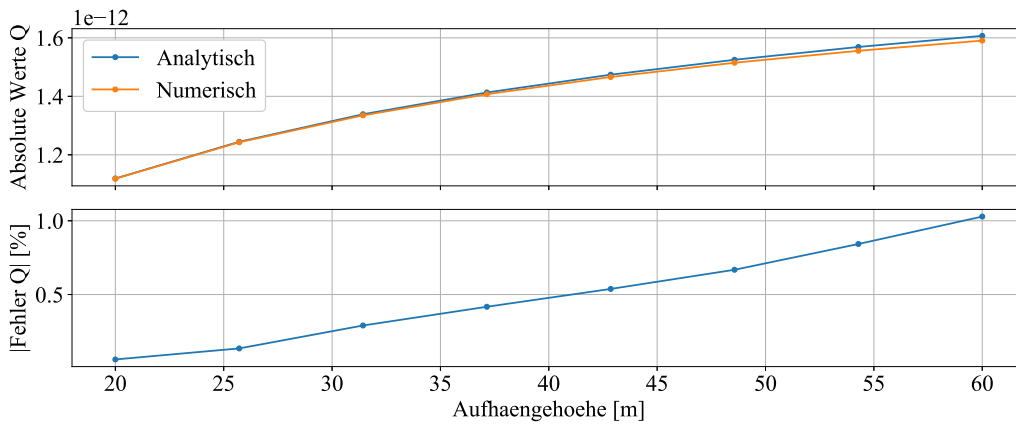


Abbildung 21: Spannfeldweite 350m, Gitterauflösung $2\frac{1}{m}$, Leitungsdurchmesser 16.1 mm.

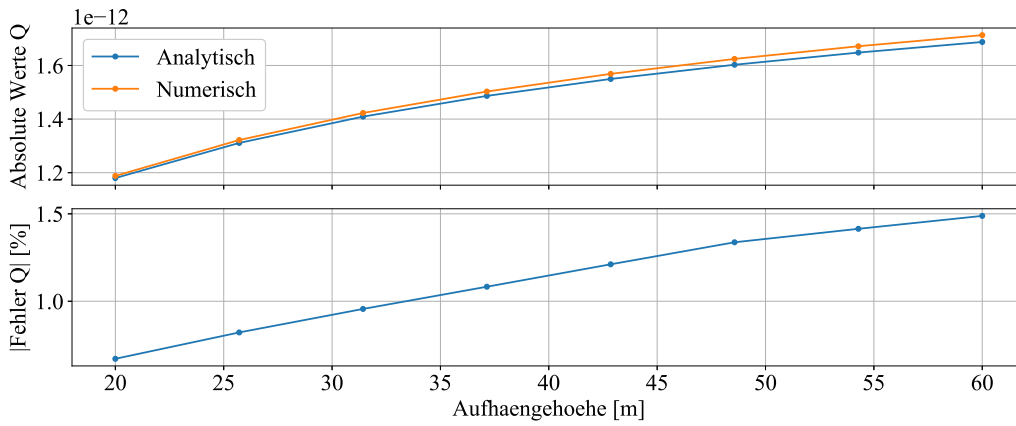


Abbildung 22: Spannfeldweite 500m, Gitterauflösung $5\frac{1}{m}$, Leitungsdurchmesser 20 mm.

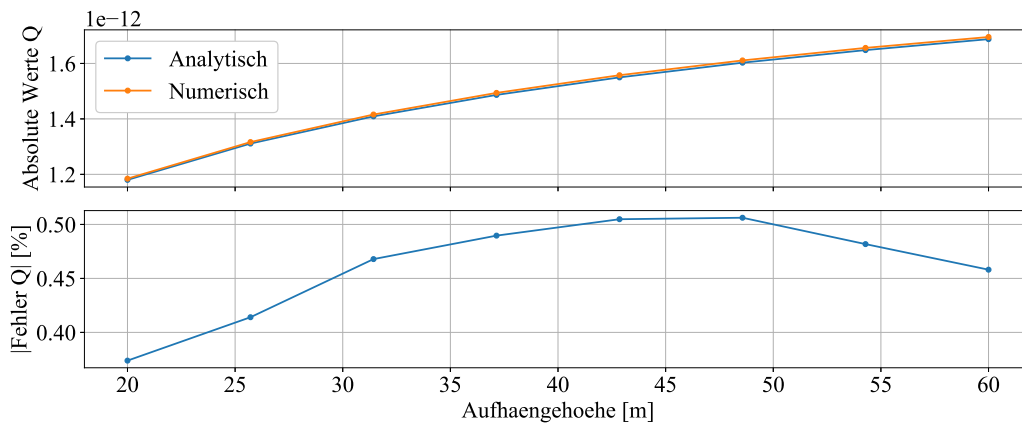


Abbildung 23: Spannfeldweite 750m, Gitterauflösung $5\frac{1}{m}$, Leitungsdurchmesser 20mm.

Die Spannfelder 21, 22, 23, 20 zeigen die Tendenz das bei zunehmender Länge der Leitung die Abweichung abnimmt. Ein möglicher Grund kann darin bestehen das sich das Feld bei den längeren Leitern homogener verteilt. Bei kürzeren Spannfelder könnte es trotz der Streureduktion an den Enden, zu einer Inhomogenität kommen und dadurch die größere Abweichung erklären.

5 Grenzen bestehender Näherungsmethoden

Da nun gezeigt wurde das sich die Simulation mit analytischen Ergebnissen deckt, wollen wir im nächsten Schritt die bisherigen Berechnungsverfahren analysieren. Dabei werden drei Methoden vorgestellt und deren Vor- und Nachteile betrachtet. Das erste Verfahren ist in der Österreichischen Energieübertragung weit verbreitet und wird nahezu von jedem Übertragungs- sowie Verteilnetzbetreiber verwendet. Dabei handelt es sich um das Verfahren von Universitäts Professor Richard Muckenhuber. Die folgenden Berechnungsmethoden sind alle sehr ähnlich und unterscheiden sich nur in wenigen Punkten. Das erste Verfahren wird daher vollständig ausformuliert wohin gegen bei den weiteren Berechnungen nur die Unterschiede detaillierter ausgeführt werden.

5.1 Berechnungsverfahren nach Muckenhuber

Dieses Verfahren beruht wie schon im Abschnitt der Theorie, Kapitel 3, eingehend erklärt auf dem Satz des elektrischen Hüllenflusses und ermittelt die Eigen-Potentialkoeffizienten über:

$$P_{vv} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{2h_v}{R_v} \quad (83)$$

h_v ...Höhen des Leiters vom Boden, Berechnung für Leiterseil 85

R_v ...Radius des Leiters

In Abbildung 24 werden die einzelnen Größen noch anschaulicher dargestellt.

Kopplungs-Potentialkoeffizient:

$$P_{v\mu} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{D_{v\mu}}{d_{v\mu}} \quad (84)$$

$D_{v\mu}$...Diagonalabstand vom gespiegelten Leiter v' zu Leiter μ

R_v ...Abstand vom Leiter v zu Leiter μ

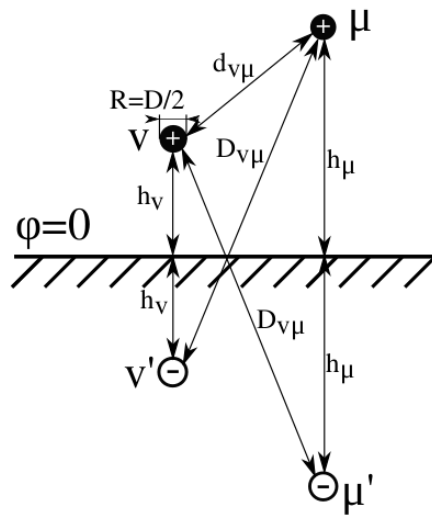


Abbildung 24: Anordnung der Leiter in gespiegelter Form zur Berechnung der Potentialkoeffizienten.

Im nächsten Schritt wird der Durchhang des Leiterseils berechnet. Bei diesem Berechnungsverfahren wird ein Korrekturfaktor $k_s = 0.7$ verwendet. Die Höhe h_v wird dabei so berechnet, das beim durchhängenden Leiter- aber auch Erdseil ein geradliniger Ersatzleiter angebracht wird der sich über die Höhe des Aufhängepunktes und maximalen Durchhanges bestimmt, siehe Abbildung 25. Der mathematische Zusammenhang lautet:

$$h_v = H_v - k_s \cdot s_{max} - i_l \quad (85)$$

$k_s = 0.7$...Korrekturfaktor des Seils s_{max} ...maximaler Seildurchhang

i_l ...Isolatorlänge H_v ...Aufhängepunkt des Isolators

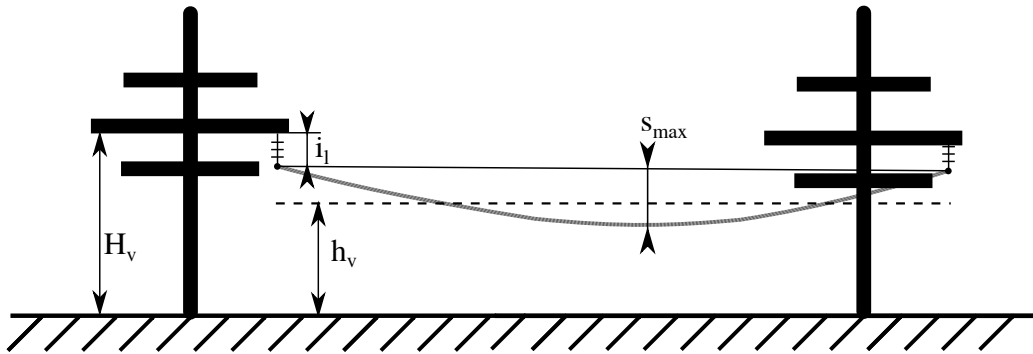


Abbildung 25: Seildurchhang einer Freileitung.

Da wir jene Seilkonfiguration abdecken wollen die am häufigsten verwendet wird gehen wir von einer verdrehten Leitung aus. Hier gilt gleiche Phasenseile, kein Erdseilwechsel bzw. im Falle mehrerer Erdseile sind diese identisch und keine Mastbild Änderung. Weiters betrachten wir die Potentialkoeffizientenmatrix 86. In dieser Ausführung werden zwei Erdseil S,T und zwei Leitungssysteme verwendet:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} & P_{1S} & P_{1T} \\ P_{21} & \ddots & P_{2\mu} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & P_{v\mu} & \ddots & P_{vn} & P_{vS} & P_{vT} \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn-1} & P_{nn} & P_{nS} & P_{nT} \\ P_{S1} & \cdots & P_{S\mu} & P_{Sn-1} & P_{SS} & P_{ST} \\ P_{T1} & \cdots & P_{T\mu} & P_{Tn-1} & P_{TS} & P_{TT} \end{pmatrix} \quad (86)$$

Nach Berechnung der einzelnen Potentialkoeffizienten kann über die allgemeine Formel 87 die reduzierte Potentialkoeffizientenmatrix $\tilde{\mathbf{P}}_{red}$ ermittelt werden.

$$\tilde{P}_{v\mu} = P_{v\mu} - \underbrace{\frac{P_{vS}(P_{\mu S}P_{TT} - P_{\mu T}P_{ST}) + P_{vT}(P_{\mu T}P_{SS} - P_{\mu S}P_{ST})}{P_{SS}P_{TT} - P_{ST}^2}}_M \quad (87)$$

Für die einzelnen Fälle ist der Erdseilkorrekturfaktor M , siehe Gleichungen 18, 19 und 21 detaillierter ausgeführt. Im nächsten Schritt wird diese reduzierte Matrix mit der Gleichung 27 symmetrisiert und dadurch zu \mathbf{P}^S .

$$\mathbf{P}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{aa}^S & \mathbf{P}_{ab}^S \\ \mathbf{P}_{ba}^S & \mathbf{P}_{bb}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa}^{00} & P_{aa}^{01} & P_{aa}^{02} & P_{ab}^{00} & P_{ab}^{01} & P_{ab}^{02} \\ P_{aa}^{10} & P_{aa}^{11} & P_{aa}^{12} & P_{ab}^{10} & P_{ab}^{11} & P_{ab}^{12} \\ P_{aa}^{20} & P_{aa}^{21} & P_{aa}^{22} & P_{ab}^{20} & P_{ab}^{21} & P_{ab}^{22} \\ P_{ba}^{00} & P_{ba}^{01} & P_{ba}^{02} & P_{bb}^{00} & P_{bb}^{01} & P_{bb}^{02} \\ P_{ba}^{10} & P_{ba}^{11} & P_{ba}^{12} & P_{bb}^{10} & P_{bb}^{11} & P_{bb}^{12} \\ P_{ba}^{20} & P_{ba}^{21} & P_{ba}^{22} & P_{bb}^{20} & P_{bb}^{21} & P_{bb}^{22} \end{bmatrix} \quad (88)$$

Im weiteren sind für die Berechnung all jene Größen des zweiten Systems mit ' ausgeführt. Alle mittleren Höhen werden über die Gleichung 85 ermittelt.

$$P_{\overline{11}} = P_{11} = P_{22} = P_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R} \quad (89)$$

$$h = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}$$

h_1, h_2, h_3 ...mittlere Höhen siehe Glg: 85 des einzelnen Leiterseile

R...Radius des Leiterseils

$$P_{\overline{12}} = \frac{P_{12} + P_{23} + P_{31}}{3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d} \quad (90)$$

$$d = \sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}}$$

$$D_{v\mu} = \sqrt{4h_v h_\mu + d_{v\mu}^2}$$

$$D = \sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}$$

d_{12}, d_{23}, d_{31} ...Abstände zwischen den einzelnen Leiter siehe $d_{v\mu}$ in Abbildung 24.

$D_{v\mu}$...Diagonalabstände der gespiegelten Ladungen

$$P_{\overline{12'}} = \frac{P_{12'} + P_{23'} + P_{31'}}{3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D'}{d'} \quad (91)$$

$$d' = \sqrt[3]{d_{12'} d_{23'} d_{31'}}$$

$$D' = \sqrt[3]{D_{12'} D_{23'} D_{31'}}$$

$$P_{11'} = \frac{P_{11'} + P_{22'} + P_{33'}}{3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D''}{d''}$$

$$d'' = \sqrt[3]{d_{11'}d_{22'}d_{33'}}$$

$$D'' = \sqrt[3]{D_{11'}D_{22'}D_{33'}}$$
(92)

$$P_{1'2} = \frac{P_{1'1} + P_{2'2} + P_{3'3}}{3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D'''}{d'''}$$

$$d''' = \sqrt[3]{d_{1'1}d_{2'2}d_{3'3}}$$

$$D''' = \sqrt[3]{D_{1'1}D_{2'2}D_{3'3}}$$
(93)

Zur Berechnung des Erdseils müssen die entsprechenden Korrekturfaktoren sowie der Erdseildurchhang berücksichtigt werden:

$$P_{SS} = P_{TT} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_s}{R_s}$$

$$h_s = H_s - k_s \cdot s_{max}$$
(94)

H_s ...Aufhängepunkt des Erdseils

R_s ...Radius des Erdseils

$$P_{1S} = \frac{P_{1S} + P_{2S} + P_{3S}}{3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_s}{d_s}$$

$$d_s = \sqrt[3]{d_{1s}d_{2s}d_{3s}}$$

$$D_s = \sqrt[3]{D_{1s}D_{2s}D_{3s}}$$
(95)

d_{1s}, d_{2s}, d_{3s} ...Abstand zwischen Erdseil und den jeweiligen Leiterseilen

D_{1s} ...Abstand zwischen gespiegeltem Leiter 1 und gespiegeltem Erdseil

Aus den berechneten Potentialkoeffizienten lassen sich nun die symmetrischen Werte bestimmen.

$$\begin{aligned}
 P_{aa}^{00} &= P_{11} + 2P_{12} - 3M \\
 P_{ab}^{00} &= P_{11'} + P_{1'2} + P_{12'} - 3M \\
 P_{aa}^{11} &= P_{11} - P_{12} \\
 P_{ab}^{11} &= P_{11'} + a^2 P_{12'} + aP_{1'2} \\
 P_{ba}^{11} &= P_{11'} + aP_{12'} + a^2 P_{1'2}
 \end{aligned} \tag{96}$$

Mit diesen Ergebnissen können nun die Nullkapazitäten wie in Abschnitt 3.2 und Mitkapazitäten in Abschnitt 3.2 ausgewertet werden.

Nennisolation [kV]	10...20	30	60	110	220	380	720
Zuschlag bei Erdkapazität [%]	6.5	6	5	4	3.5	3	2.5
Zuschlag bei Betriebskapazität [%]	3.2	3	2.5	2	1.7	1.5	1.2

Tabelle 3: Zuschlag der Kapazität bei entsprechender Nennisolation [2].

Abschließend sei bei dieser Methode noch eine Zuschlagstabelle 3 angeführt welche den Masteinfluss berücksichtigt. Wie die Tabelle zeigt beziehen sich die Korrekturfaktoren auf die Nennisolation und nicht explizit auf ein Mastbild. Wie oben gezeigt, lassen sich die Kapazitätswerte ausschließlich von geometrischen Größen ableiten, daher ist davon auszugehen das jede Spannungsebene ihren typischen Masten mit ähnlichen Abmessungen besitzt, andernfalls würden daraus Fehler in der Auswertung resultieren.

5.2 Ödinger

Die Berechnung nach Ödinger [3] beruht in weiten Teilen auf der vorhergehenden Methode, die mittlere Höhe wird dabei wie schon zuvor mit dem Faktor 0.7 berücksichtigt, wobei dafür die Formel:

$$h_v = H_v - \frac{2}{3} \cdot s_{max} \tag{97}$$

verwendet wird. Dabei geht die Methode von einer Drittelung des Durchhangs aus. Ödinger und Oswald berechnen aber trotzdem ihre mittleren Höhen mit dem Korrekturfaktor von 0.7.

Die Berechnung erfolgt dabei über den Weg der Kapazitätskoeffizienten. Ausgangspunkt sind die Potentialkoeffizienten [3], danach starten wir mit der reduzierten Potentialkoeffizientenmatrix $\tilde{\mathbf{P}}_{red}$, aus der wir über die Inverse unsere Teilkapazitätsmatrix 99 erhalten. Das Resultat der Mit- und Nullkapazitäten ist wieder equivalent zur Muckenhuber Methode:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{red} = \begin{pmatrix} P_{L1L1} & P_{L1L2} & P_{L1L3} & P_{L1L1'} & P_{L1L2'} & P_{L1L3'} \\ P_{L2L1} & P_{L2L2} & P_{L2L3} & P_{L2L1'} & P_{L2L2'} & P_{L2L3'} \\ P_{L3L1} & P_{L3L2} & P_{L3L3} & P_{L3L1'} & P_{L3L2'} & P_{L3L3'} \\ P_{L1'L1} & P_{L1'L2} & P_{L1'L3} & P_{L1'L1'} & P_{L1'L2'} & P_{L1'L3'} \\ P_{L2'L1} & P_{L2'L2} & P_{L2'L3} & P_{L2'L1'} & P_{L2'L2'} & P_{L2'L3'} \\ P_{L3'L1} & P_{L3'L2} & P_{L3'L3} & P_{L3'L1'} & P_{L3'L2'} & P_{L3'L3'} \end{pmatrix} \quad (98)$$

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{P}}_{red}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{L1L1} & c_{L1L2} & c_{L1L3} & c_{L1L1'} & c_{L1L2'} & c_{L1L3'} \\ c_{L2L1} & c_{L2L2} & c_{L2L3} & c_{L2L1'} & c_{L2L2'} & c_{L2L3'} \\ c_{L3L1} & c_{L3L2} & c_{L3L3} & c_{L3L1'} & c_{L3L2'} & c_{L3L3'} \\ c_{L1'L1} & c_{L1'L2} & c_{L1'L3} & c_{L1'L1'} & c_{L1'L2'} & c_{L1'L3'} \\ c_{L2'L1} & c_{L2'L2} & c_{L2'L3} & c_{L2'L1'} & c_{L2'L2'} & c_{L2'L3'} \\ c_{L3'L1} & c_{L3'L2} & c_{L3'L3} & c_{L3'L1'} & c_{L3'L2'} & c_{L3'L3'} \end{pmatrix} \quad (99)$$

Im symmetrischen Fall lässt sich nun die symmetrische Kapazitätsmatrix \mathbf{K}^S berechnen:

$$\mathbf{K}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^S & \mathbf{K}_{ab}^S \\ \mathbf{K}_{ba}^S & \mathbf{K}_{bb}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (100)$$

Wir erhalten in der Hauptdiagonale von \mathbf{K}^S die relevanten Koeffizienten für das Null-, Mit- und Gegensystem.

$$\mathbf{K}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^S & \mathbf{K}_{ab}^S \\ \mathbf{K}_{ba}^S & \mathbf{K}_{bb}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa}^{00} & K_{aa}^{01} & K_{aa}^{02} & K_{ab}^{00} & K_{ab}^{01} & K_{ab}^{02} \\ K_{aa}^{10} & K_{aa}^{11} & K_{aa}^{12} & K_{ab}^{10} & K_{ab}^{11} & K_{ab}^{12} \\ K_{aa}^{20} & K_{aa}^{21} & K_{aa}^{22} & K_{ab}^{20} & K_{ab}^{21} & K_{ab}^{22} \\ K_{ba}^{00} & K_{ba}^{01} & K_{ba}^{02} & K_{bb}^{00} & K_{bb}^{01} & K_{bb}^{02} \\ K_{ba}^{10} & K_{ba}^{11} & K_{ba}^{12} & K_{bb}^{10} & K_{bb}^{11} & K_{bb}^{12} \\ K_{ba}^{20} & K_{ba}^{21} & K_{ba}^{22} & K_{bb}^{20} & K_{bb}^{21} & K_{bb}^{22} \end{bmatrix} \quad (101)$$

Die Gleichungen der Null-, Mit- und Gegenkapazitäten ergeben sich wie folgt.

Nullkapazität:

1. Nullkapazität einer Einfachleitung, 2. System erdfrei:

$$\bar{C}^0 = K_{aa}^{00} \quad (102)$$

2. Nullkapazität der Einfachleitung, 2. System geerdet:

$$\bar{C}_{\perp}^0 = \frac{(K_{aa}^{00})^2 - (K_{ab}^{00})^2}{K_{aa}^{00}} \quad (103)$$

3. Nullkapazität der Doppelleitung, beide Systeme in Betrieb:

$$\bar{\bar{C}}^0 = 2 \cdot (K_{aa}^{00} + K_{ab}^{00}) \quad (104)$$

4. Nullkapazität zwischen beiden Systemen:

$$C_{ab}^0 = 2 \cdot (K_{aa}^{00} - K_{ab}^{00}) \quad (105)$$

Mitkapazität:

1. Mitkapazität einer Einfachleitung 2. System wird erdfrei angenommen und verhält sich so als wäre es nicht vorhanden:

$$\bar{C}^1 = K_{aa}^{11} \quad (106)$$

2. Mitkapazität der Einfachleitung 2. System geerdet:

$$\bar{C}_{\perp}^1 = \frac{(K_{aa}^{11})^2 - |K_{ab}^{11}|^2}{K_{aa}^{11}} \quad (107)$$

3. Mitkapazität der Doppelleitung, beide Systeme in Betrieb:

$$\bar{\bar{C}}^1 = 2 \cdot (K_{aa}^{11} + K_{ab}^{11}) \quad (108)$$

Nennisolation [kV]	110	220	380
Zuschlag bei Erdkapazität [%]	8-9	6	6

Tabelle 4: Korrekturfaktoren bezüglich des Masteinflusses [3].

Im Vergleich zu Muckenhuber wird hier nur das Nullsystem mit einem Korrekturfaktor beaufschlagt, der im Vergleich jedoch fast dem doppelten Wert entspricht. Auffallend ist das auch hier nur auf die Spannungsebenen und auf kein spezielles Mastbild Rücksicht genommen wird.

5.3 Schwarz

Die Berechnung der Firma DI Franz Schwarz, verfolgt einen anderen Weg bezüglich der Bestimmung von mittleren Höhen und des Durchhangs. Die nun vorgestellte Näherung beruht auf der Umsetzung wie sie im Programm FLSeil realisiert ist, in welchem die gesamten 3d Geometrie Daten zur Verfügung stehen. Der Leiter wird dabei in einzelne Leitungsstücke diskretisiert und in jedem dieser Stücke als unendlich ausgedehnter Linienleiter betrachtet. Anschließend werden diese Werte gemittelt. Die Abbildungen 26 und 27 sollen das verdeutlichen.

$$P_{vv} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{2h_v[i]}{R_L} \quad (109)$$

$$P_{v\mu} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{D_{v\mu}[i]}{d_{v\mu}[i]}$$

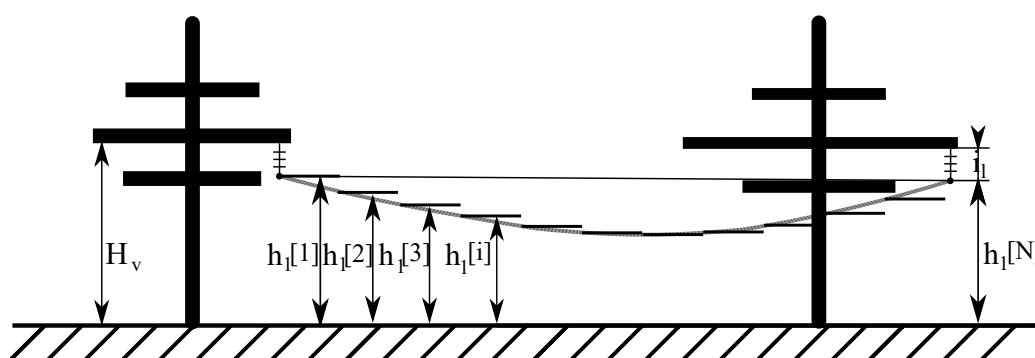


Abbildung 26: Diskretisierung des Leiterseils bezüglich des Durchhangs in n einzelne Stücke.

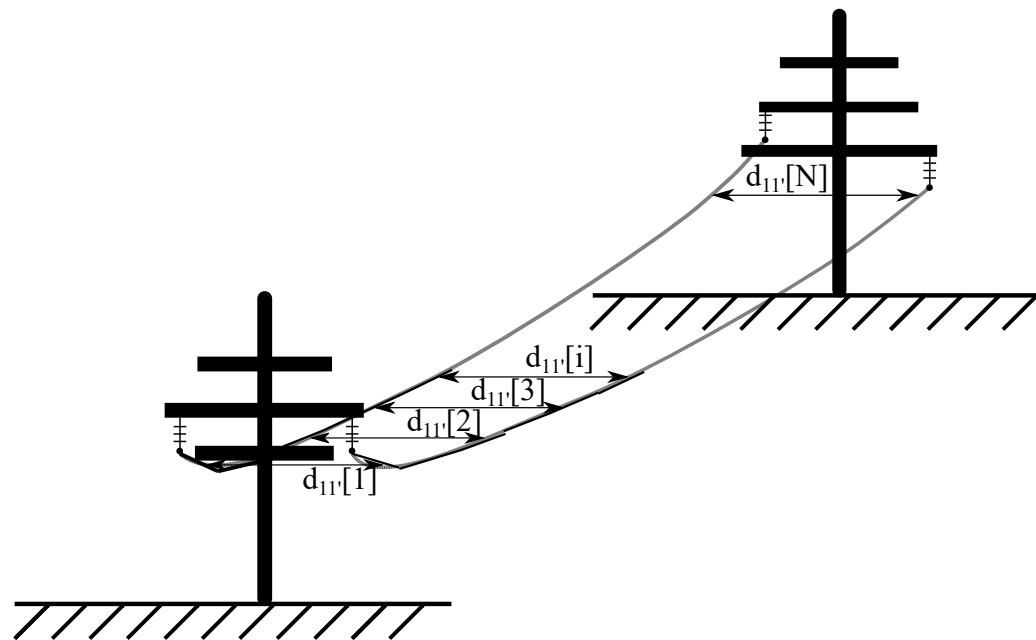


Abbildung 27: Diskretisierung des Leiterseils auch zu den benachbarten Leitern.

Natürlich wird auch der gespiegelte Leiter mit dem Diagonalabständen $D_{v\mu}$ diskretisiert. All diese einzelnen Teilstücke liefern weitaus genauere geometrische Daten welche direkten Einfluss auf die Genauigkeit der Berechnungen haben.

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt[3]{d_{12}d_{23}d_{31}} \\
 D &= \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}
 \end{aligned}
 \tag{110}$$

Der Vorgang für die Berechnung der weiteren Potentialkoeffizient inklusive jenes des Erdseils ist identisch, siehe Abschnitt 3.2 und 3.2.

Die Methode nach Schwarz verwendet keine Korrekturfaktoren bezüglich des Mastinflusses da durch die stetige Diskretisierung der Leitungen die geometrischen Einflüsse berücksichtigt werden sollen. Man ist dadurch auf keine Spannungsebene oder fest vorgegebenen Korrekturfaktoren gebunden, diese sollen sich durch die permanente Abtastung und Mittelung einstellen.

5.4 Vergleich mit Näherungsmethoden ohne Masteinfluss

Um nun diese einzelnen Methoden miteinander zu vergleichen, wurden einige Vergleichsrechnungen durchgeführt. Als Referenz dient das genäherte zwei Leiter Beispiel, welches bei Durchhang 0, dem eines unendlich ausgedehnten Linienleiters entspricht.

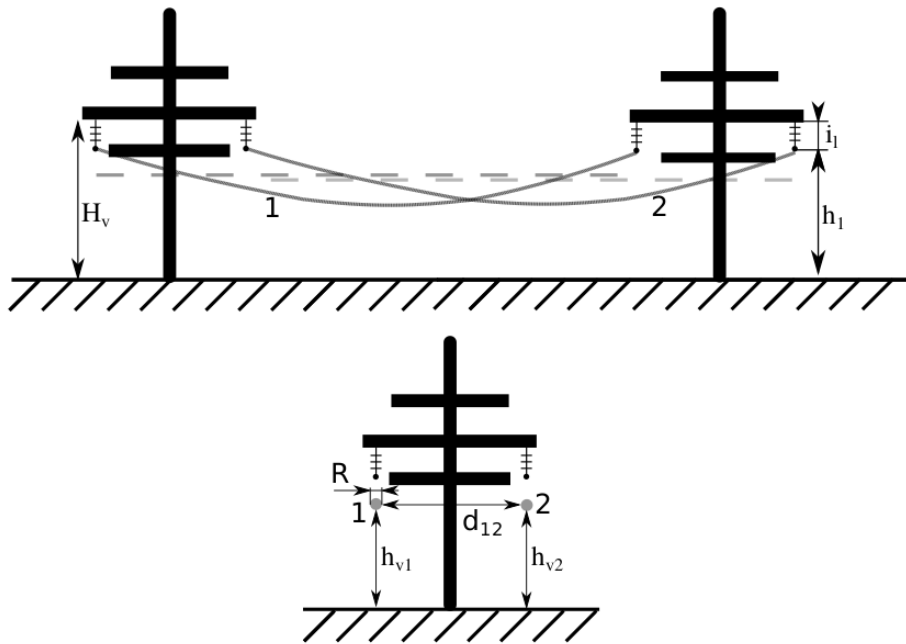


Abbildung 28: Zweileiter Anordnung einer Freileitung.

Für die Berechnung nehmen wir folgende Werte an:

- $h_v = h_{v1} = h_{v2} = 10 \text{ m}$ Höhe zwischen Boden und Leiter
- $d_{12} = 10 \text{ m}$ Abstand zwischen Leiter 1 und Leiter 2
- $R = 20 \text{ mm}$ Radius des Leiters

Im folgenden wird die analytische Lösung gezeigt welche uns als Referenz

dient.

$$\begin{aligned} C'_{12} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \log \sqrt{\left(\frac{2h_v}{d_{12}}\right)^2 + 1}}{\log \frac{4h_v}{2R} \sqrt{\left(\frac{2h_v}{d_{12}}\right)^2 + 1} \log \frac{4h_v}{2R} \sqrt{\left(\frac{2h_v}{d_{12}}\right)^2 + 1}} \\ C'_{10} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\log \frac{4h_v}{2R} \sqrt{\left(\frac{2h_v}{d_{12}}\right)^2 + 1}} \\ Q &= \varphi \cdot C \end{aligned} \tag{111}$$

Die Berechnungen nach Muckenhuber und Schwarz erfolgen wie in den oberen Abschnitten erläutert.

5.4.1 Variation über Durchhang

In diesen Abschnitten sollen die verschiedenen Parameter verändert werden um die Abweichungen zu den unterschiedlichen Berechnungsverfahren zu zeigen. Dabei wird zunächst über den Durchhang variiert.

- Gittergröße 500x145 m
- Gitterauflösung $1.6 \frac{1}{m}$
- Leitungslänge 400 m
- Leitungsauflösung $1 \frac{1}{m}$
- Aufhängehöhe 30 m

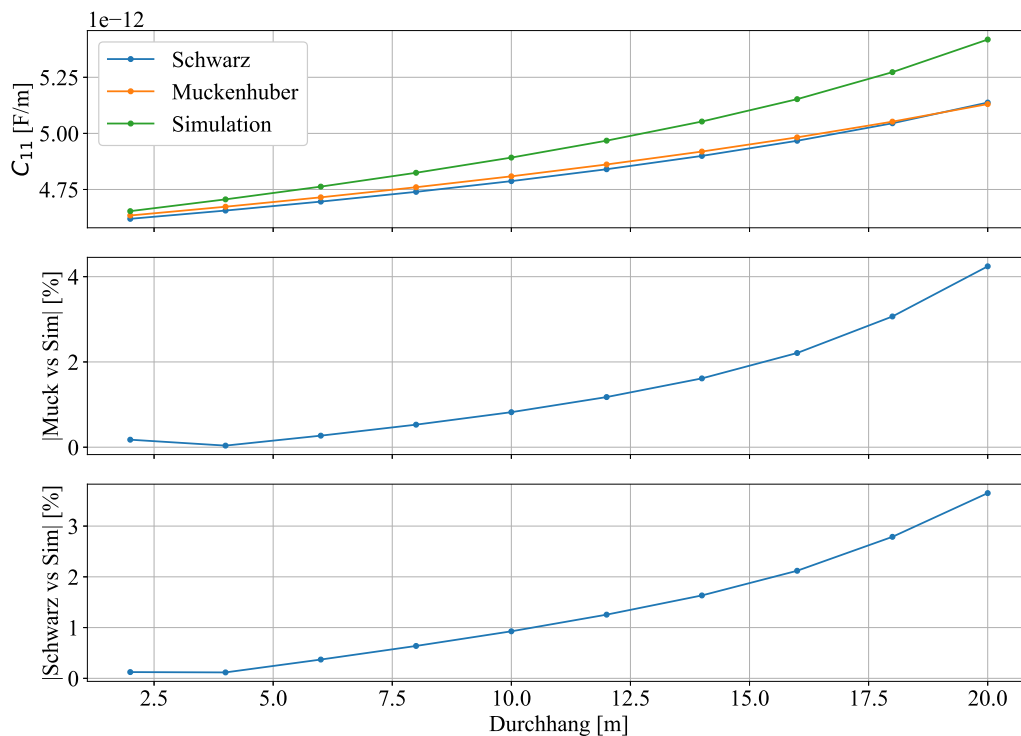


Abbildung 29: Simulation einer Doppelleitung durch Variation des Durchhangs.

Im ersten Plot der oberen Abbildung 29 ist zu erkennen, dass sich einerseits bei zunehmenden Durchhang die Simulation von den analytischen Werten entfernt, andererseits zeigt sich auch das Muckenhuber und Schwarz nahezu identische Werte besitzen, wobei Muckenhuber einen festen Faktor für den Durchhang verwendet hingegen die Schwarzmethode dies über eine Mittelung erreicht. Es zeigt sich auch das bei zuletzt berechneten Wert die Schwarzmethode sich der Simulation nähert während sich die Muckenhuber Berechnung entfernt. Der Grund für die grundsätzliche zunehmende Distanzierung zwischen Simulation und analytischen Methoden liegt in der Form der elektrischen Feldlinien. Die Simulation berücksichtigt deren Wölbung und auch die daraus resultierenden Streuungen, wohingegen die analytische Gleichung keinen Einfluss von Streufeldern mit einfließen lässt.

5.4.2 Variation über Leitungslänge

Wie der Titel schon vermuten lässt werden hier die Leitungen über eine Distanz von 250m bis 1000m verlängert und alle 150m neu berechnet.

- Gittergröße 1100x145m
- Gitterauflösung $1.6 \frac{1}{m}$
- Durchhang 18m
- Leitungsauflösung $0.2 \frac{1}{m}$
- Aufhängenhöhe 30m

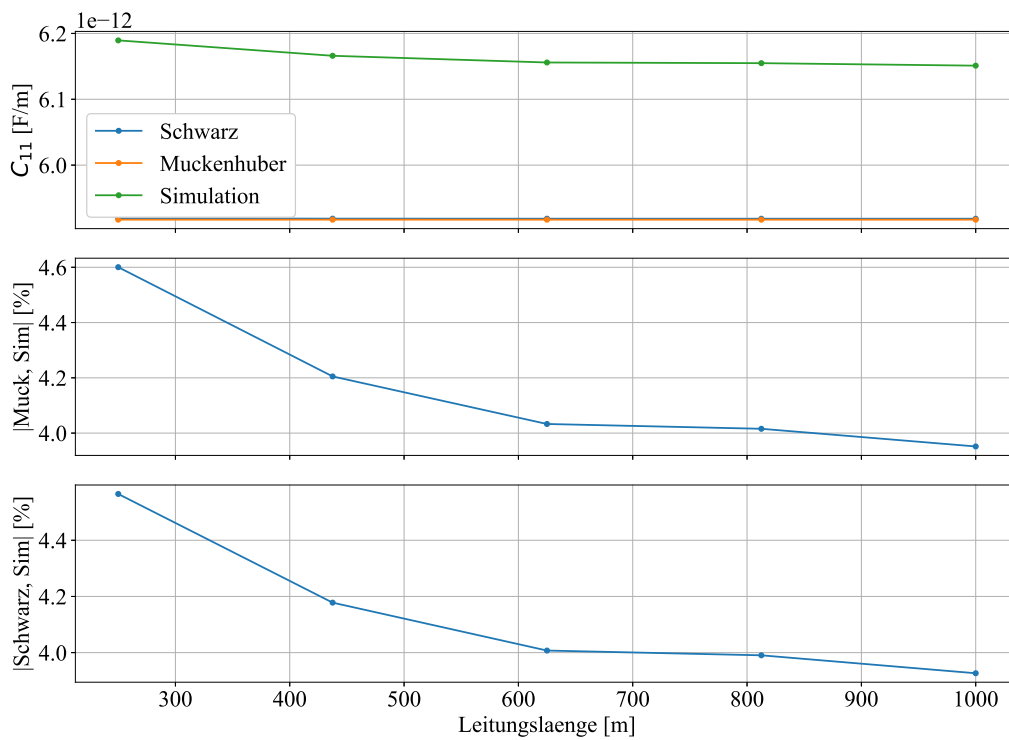


Abbildung 30: Simulation einer Doppelleitung durch Variation der Leitungslänge von 250m bis 1000m.

In diesem Plot 30 sind die Streueffekte und die homogene Verteilung zu sehen. Wie schon bei den analytischen Vergleichen des Doppellinienleiters, siehe Abschnitt 4.7, zeigt sich auch hier das bei einer kürzeren Leitung die Randeffekte an den Leitungsenden einen weitaus größeren Einfluss auf die Berechnung haben. Bei zunehmender Leitungslänge ist außerdem eine Reduzierung der Abweichungen zu erkennen. Desweiteren spielt die Wahl des Durchhanges von 18m eine große Rolle für die Berechnung nach Muckenhuber und Schwarz. Wie schon im vorigen Plot 29 zu sehen, ist die Abweichung ab einem Durchhang von 17.5m über 3% und durch das von uns vergrößerte Gitter in der Ebene noch um 1 erhöht. Das Näherungsverfahren nach Schwarz kann jedoch durch eine höhere Diskretisierung der Leitung ein noch genaueres Ergebnis liefern, da der Durchhang exakter berechnet wird.

5.4.3 Variation über Aufhängehöhe

In diesem Plot wird der Einfluss der Aufhängehöhe des Leitungsseiles simuliert und mit den analytischen Werten verglichen.

- Gittergröße 500x100m
- Gitterauflösung $1.67 \frac{1}{m}$
- Durchhang 18 m
- Leitungsauflösung $1 \frac{1}{m}$

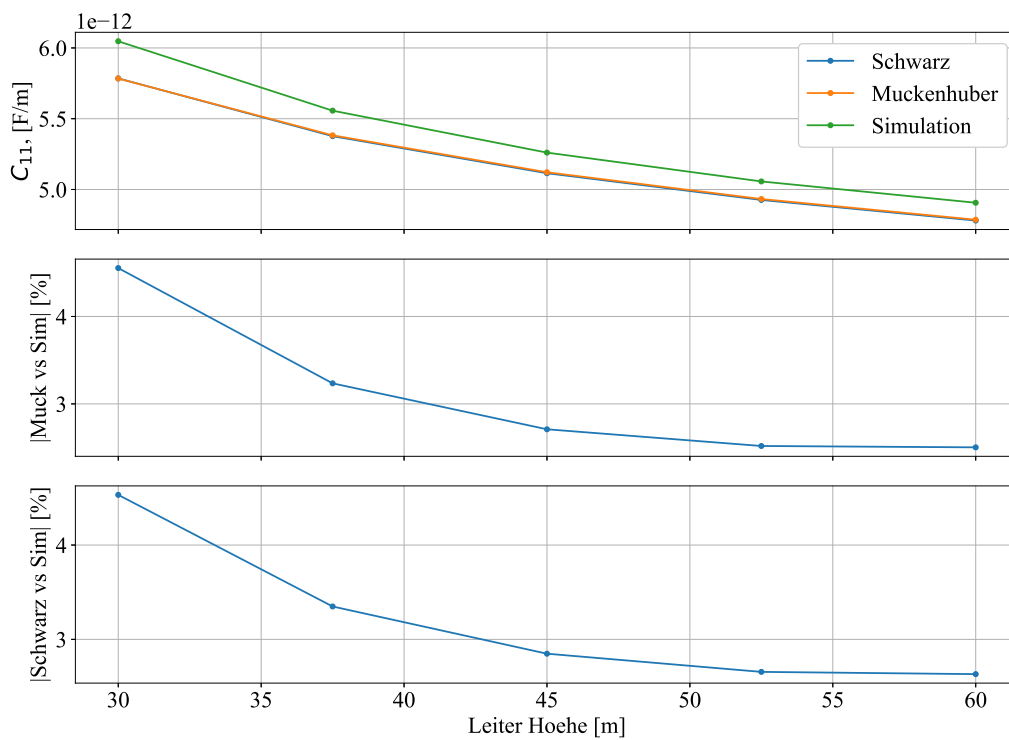


Abbildung 31: Simulation einer Doppelleitung durch Variation der Aufhängepunkte von 10m bis 36m.

Auch bei dieser Variation liegen die Methoden von Schwarz und Muckenhuber übereinander. Die Abweichung zwischen numerischer und Näherungsmethode nimmt mit ansteigender Höhe ab. Dies fügt sich hervorragend in die Überlegung der Feldlinienkonfiguration. Liegen die Leitungen dichter am Boden so

kommt es zu einer größeren Wölbung der Feldlinien und die Simulation liefert genauere Ergebnisse, da die Streuung mehr Einfluss hat. Durch den hohen Durchhang von 18m liegt der geringste Abstand zwischen Leiter und Boden bei 16m. Nimmt dieser Abstand zu, strecken sich auch die Feldlinien, Simulation und Analytische Auswertung nähern sich.

Zusammenfassung

Abschließend lässt sich die Aussage treffen, dass die Näherungsmethoden im Vergleich zur Simulation ab einem Durchhang von 10m um mindestens 1% abweichen. Dies erscheint in erster Betrachtung als wenig, jedoch entwickelt sich die Abweichung exponentiell und liegt bei einem Durchhang von 20m bereits bei über 4%. Diese Situation kann durchaus im Falle einer Fluss- oder Autobahnüberspannung vorhanden sein. Im Falle eines ebenen Geländes, geringen Durchhangs und identischen Aufhängehöhen kann aber nach diesen Auswertungen eine Näherungsmethode ausreichen. Eine weitere Erkenntnis, die durch diese Vergleiche gewonnen wird, ist die nahezu exakte Übereinstimmung der beiden Näherungsmethoden von Muckenhuber und Schwarz. Eine mögliche Interpretation liegt auch darin, dass bei zunehmendem Durchhang die Methode von Schwarz genauere Werte liefert als jene von Muckenhuber, wie der letzte Wert bei Durchhang 20m zeigt. Es lässt sich jeden Falls feststellen, dass der Korrekturfaktor 0.7 von Muckenhuber und auch Ödinger durch die Methode von Schwarz ersetzt werden kann, da hier kein konstanter Faktor verwendet wird, sondern eine permanente Abtastung des Höhenprofils und der Leitungen eine automatische Anpassung dieses Korrekturfaktors erreicht und dadurch eine Erhöhung der Abweichung verhindert.

6 Real Beispiel Leitung 179/5 und 179/6

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Messung des Leitungssystems 179/5,6. Dabei sollen die Abweichungen der Berechnungen und Simulation gegenüber den Messwerten präsentiert werden. Es wurde dafür eine Erdschluss- und Ladestrom Messung durchgeführt. In den folgenden Abschnitten werden deren Messaufbau, Ablauf, Messbedingungen und Ergebnisse erläutert.

Diese Messung wurde Ende November bei 5 °C und leichtem Regen durchgeführt. Dabei wurde das Umspannwerk (UW) Steinkogel als Messpunkt gewählt und das UW Pfandl als Gegenstelle verwendet.

6.1 Messung

Wie schon erwähnt handelt es sich um eine Erdschlussstrom. Diese Messung wurde in zwei verschiedenen Konfigurationen durchgeführt:

1. Ein System geerdet das andere System in Betrieb.
2. Beide Systeme in Betrieb.

Um einen Erdschlussstrom zu messen muss dieser auch vorhanden sein. Dafür wurde bei der ersten Variante das Leitungssystem 179/5 beidseitig geerdet, das heißt in beiden Umspannwerken wurde der Erdungstrenner gesetzt um Erdpotential auf 179/5 zu legen. Dann wurde am System 179/6 an jeder Phase ein Erdschluss erzeugt und der fließende Strom über Erde gemessen. Für die Auswertung wurde der Mittelwert gebildet:

$$\begin{aligned} I_{LS179/6} &= \frac{I_{LS1} + I_{LS2} + I_{LS3}}{3} \\ I_{LS179/5} &= \frac{I_{LS1} + I_{LS2} + I_{LS3}}{3} \end{aligned} \quad (112)$$

Selbiges Vorgehen erfolgt bei der Vermessung des System 179/5 nur das dabei das Leitungssystem 179/6 geerdet wird. Bei der Messvariante 2, beide Systeme in Betrieb, wird die Messabfolge wie in Variante 1 abgehandelt, nur das eben beide Systeme in Betrieb, sprich mit 110 bespannt, sind.

Die Berechnung der Nullkapazitäten erfolgt dann mit dem gemittelten Erdstrom I_{LS} über folgende Gleichung:

$$\bar{C}^0 = \frac{I_{LS}}{3 \cdot 2\pi f \cdot U_{LL}} \quad (113)$$

Um die Mitkapazitäten zu messen benötigt man den Ladestrom I_L . Der Ladestrom ist jener Strom der bei fehlerfreiem Betrieb der Leitung gemessen wird. Der Ladestrom wurde bei dieser Messung nur über eine Sekundärmessung ermittelt, siehe Abschnitt 6.1.

$$\bar{C}^1 = \frac{I_L}{2\pi f \cdot U_{LL}} \quad (114)$$

Messequipment

Bei den verwendeten Messgeräten handelte es sich um das CMC 356 der Firma OMICRON. Zur galvanischen Trennung und als Überspannungsschutz wurde ein Stromwandler vorgeschaltet. Ein Shunt Widerstand mit dem Messbereich von 3A und 300mV wurde als Übersetzung für das OMICRON CMC 356 verwendet.

Messaufbau Primärmessung

Für die primär Messung wurde ein isoliertes Netz erzeugt in dem zwei Dyn6 Trafos über eine Sammelschiene in Serie verschalten wurden. Dadurch wurde von einem 110kV Netz auf 30kV geregelt und über den zweiten Trafo wieder von 30kV auf 110kV transformiert. Dadurch konnte ein völlig isoliertes Netz erzeugt werden, das den Einfluss anderer Betriebsmittel verhinderte.

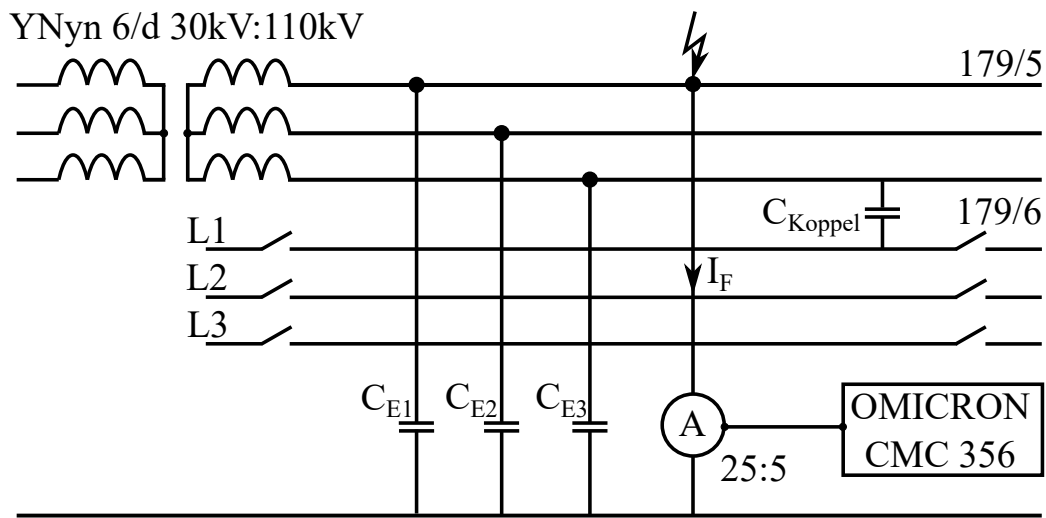


Abbildung 32: Messaufbau der Primärmessung mit isolierten Netz auf 110kV Netzspannung. Messung mittels Stromwandler Verhältnis 25:5.

Die Abbildung 32 zeigt die Anordnung der primär Messung, dabei soll die Kapazität C_{Koppel} die Koppelungskapazitäten zwischen allen Phasen andeuten. Beim eingezeichneten Symbol A, handelt es sich um einen Stromwandler welcher eine 25:5 Übersetzung ermöglicht, über das Messgerät OMICRON CMC 356 wird dieser übersetzte Strom dann ausgewertet. Der Erdschluss wird hier auf das System 179/5, hier in Phase 1 eingezeichnet, erzeugt. Bei der Messung wurde bei jeder Phase des System 179/5 und 179/6 eine Erdschlussmessung durchgeführt, um den vorher erwähnten Mittelwert, siehe Gleichung 112, zu bilden. Hierbei sei noch erwähnt das die Spannungen zwischen den Phasen U_{LL} über einen überwachenden Schaltschrank mittels Multimeter bei einer Übersetzung von 1:1000 abgelesen wurden.

Messaufbau Sekundärmessung

Zusätzlich zu der herkömmlichen Messmethode wurde auch eine indirekte oder sekundäre Messung versucht. Dabei ist der Spannungsausgang des OMICRON CMC 356 für die Speisung der Systeme 179/5 und 6 eingesetzt worden und die Binären und Analogen Eingänge zur Messung. Die Leitung wurde dann mit einer Spannung von 480V und 160V beaufschlagt. Ein Trafo mit einer Übersetzung von

1 zu 8 der Leitungen sorgte für die Spannungsübersetzung. Ein hoher Spannungswert ermöglicht eine hohe Auflösung der Erdströme. Diese wurde jedoch durch die Leistungsfähigkeit des CMC 356 begrenzt.

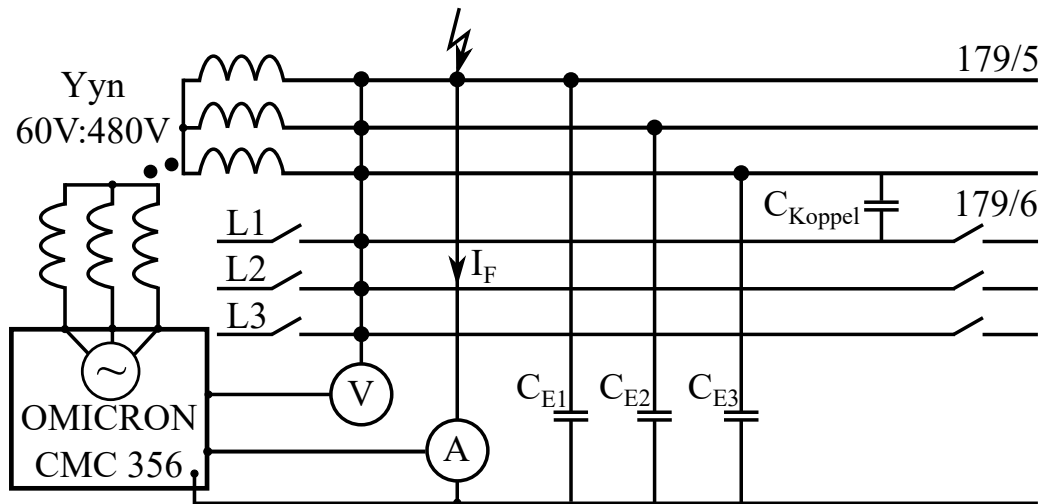


Abbildung 33: Messaufbau der Sekundärmessung, Einspeisung über Omicron CMC 356 auf 480V.

Dabei wurde versuchsweise der Erdschlussstrom für alle Phasen gemessen. Bei dieser Messung kam kein Stromwandler zum Einsatz da durch die angelegte Spannung von 480V auch der Erdschlussstrom gering war. Zusätzlich wurde noch der Ladestrom vermessen. Dafür müssen beide Leitungssysteme in Betrieb genommen und der Sternpunkt geerdet werden. Für die Erdschlussstrom Messung muss der Sternpunkt wieder enterdet sein. Die Spannungsmessung aller Phasen übernahm das OMICRON CMC 356.

6.2 Messergebnisse

Die Tabelle 5 repräsentiert die gemessenen Erdströme I_{ES} und den Ladestrom I_L . Bei der Primärmessung konnte aufgrund von fehlender Messausrüstung keine Ladestrommessung durchgeführt werden. In der Tabelle 6 sind die Nullkapazität \bar{C}^0 und die Mitkapazität \bar{C}^1 für beide Messkonfigurationen. Die Methoden von Muckenhuber und Schwarz, werden im Abschnitt Berechnete Messwerte 6.2.1 detailliert ausgeführt.

	beide Systeme in Betrieb		ein System in Betrieb, anderes geerdet	
	I_{ES} [A]	I_L [A]	I_{ES} [A]	I_L [A]
Primär	8.06	nicht gemessen	5.690	nicht gemessen
Sekundär	11.920	4.494	6.970	3.368

Tabelle 5: Vergleich des Erdschlussstroms I_{ES} und Ladestroms I_L zwischen Primärmessung und Sekundärmessung.

Über die Gleichungen 113 und 114 können aus den Strömen die Mit- und Nullkapazitäten berechnet werden siehe Tabelle 6.

	beide Systeme in Betrieb		ein System in Betrieb, anderes geerdet	
	\bar{C}^0 [nF]	\bar{C}^1 [nF]	\bar{C}^0 [nF]	\bar{C}^1 [nF]
Primär	134.66	nicht gemessen	95.06	nicht gemessen
Sekundär	199.15	262.31	168.81	132.56

Tabelle 6: Vergleich der Nullkapazität \bar{C}^0 und Mitkapazität \bar{C}^1 zwischen Primärmessung und Sekundärmessung.

Da die Sekundärwerte doch eine relativ große Abweichung gegenüber den bewährten Primärmessungsergebnissen aufweisen, sollte von einem weiteren Vergleich mit anderen Methoden abgesehen werden. Als Referenzwerte werden daher die Messergebnisse der Primärmessung herangezogen.

Der Ladestrom konnte nur über die Sekundärmessung ermittelt werden, da es hier Unstimmigkeiten mit den Nullkapazitätsmesswerten der Primärmessung gibt muss dieser Wert kritisch betrachtet werden.

6.2.1 Berechnete Messwerte für System 179/5 und 179/6

In diesem Abschnitt wird nun über die Methode von Muckenhuber die Leitung detailliert berechnet.

Leitungsparameter

Das Leitungssystem 179/5 und 179/6 verläuft in weitgehend Ebenen Terrain, es beinhaltet jedoch eine Hügelüberquerung, der Boden setzt sich aus einem Mix von Gestein und Erde zusammen, daher wurde ein Erdwiderstand von 100 m verwendet. Das Leitungsseil ist vom Typ 583/28 AY/AW 85/43-9.3, das Erdseil vom Typ ASLH-D(S)bb1+24 E9/125. Die Systeme werden mit einer Spannung 110kV betrieben, weitere Parameter sind:

- Leitungsseilradius $R_L = 16.1 \text{ mm}$ Erdseilradius $R_E = 14.3 \text{ mm}$
- Mittlerer Durchhang des Leiter und Erdseils = 8 m
- Isolatorlänge = 2 m
- Leitungslänge $l = 14.45 \text{ km}$
- Korrekturfaktor für Mast Erdkapazität $k_0 = 1.04$
- Korrekturfaktor für Mast Betriebskapazität $k_1 = 1.02$

Die Korrekturfaktoren wurden aus dem Skript von Muckenhuber entnommen, worauf man sich auf den Masteinfluss der Spannungsebene 110kV stützt [2]. Der maximale Betriebsstrom wurde mit 1069A dimensioniert.

Als Masttyp liegt ein Tonnenmast vor. Abbildung 34 zeigt die genauen Abstände zwischen Leiterseilen L1-L3 sowie Erdseil E.

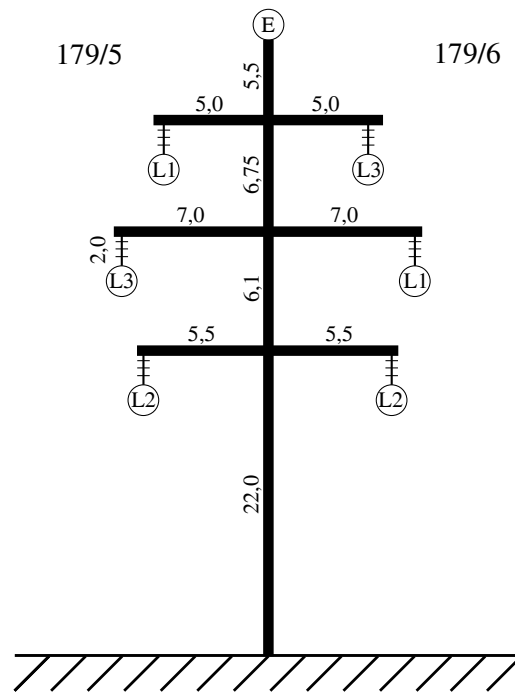


Abbildung 34: Mastbild Steinkogel-Pfandl.

Mit Abbildung 34 lässt sich durch das richtige einsetzen der Abstände in die Gleichungen 11 die Potentialkoeffizienten Matrix \mathbf{P} befüllen.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 14.608 & 2.112 & 3.442 & 2.290 & 1.709 & 3.077 & 3.472 \\ 2.112 & 13.462 & 3.084 & 1.7621 & 1.852 & 1.709 & 1.533 \\ 3.442 & 3.084 & 14.097 & 2.031 & 1.762 & 2.290 & 2.256 \\ 2.290 & 1.762 & 2.031 & 14.096 & 3.084 & 3.443 & 2.256 \\ 1.709 & 1.852 & 1.762 & 3.084 & 13.462 & 2.112 & 1.533 \\ 3.077 & 1.709 & 2.290 & 3.442 & 2.112 & 14.608 & 3.472 \\ 3.813 & 1.676 & 2.452 & 2.452 & 1.676 & 3.812 & 15.258 \end{pmatrix} \cdot 10^{10} \quad (115)$$

$$\tilde{P}_{v\mu red} = P_{v\mu} - \frac{P_{S\mu} \cdot P_{vS}}{P_{SS}} \quad (116)$$

Die Ermittlung der reduzierten Potentialkoeffizientenmatrix \tilde{P}_{red} kann über

Gleichung 116 oder auch Allgemeine über die Matrix \mathbf{M} Gleichung 117 erfolgen:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{red} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_{pq} \cdot \mathbf{P}_{qq}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{qp} \quad (117)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{red} = \begin{pmatrix} 13.818 & 1.763 & 2.929 & 1.777 & 1.361 & 2.287 \\ 1.764 & 13.308 & 2.857 & 1.535 & 1.698 & 1.361 \\ 2.929 & 2.857 & 13.763 & 1.697 & 1.535 & 1.777 \\ 1.777 & 1.535 & 1.697 & 13.763 & 2.857 & 2.929 \\ 1.361 & 1.698 & 1.535 & 2.857 & 13.308 & 1.764 \\ 2.287 & 1.361 & 1.777 & 2.929 & 1.764 & 13.818 \end{pmatrix} \cdot 10^{10} \quad (118)$$

Im nächsten Schritt wird mittels Gleichungen 23 und 24 die Symmetrierung der reduzierter Matrix durchgeführt:

$$\mathbf{P}^S = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{P}}_{red} \mathbf{T} \quad (119)$$

Daraus erhalten wir folgenden Matrixaufbau aus jener nur Diagonalelemente von Bedeutung sind:

$$\mathbf{P}^S = \begin{bmatrix} P_{aa}^{00} & P_{aa}^{01} & P_{aa}^{02} & P_{ab}^{00} & P_{ab}^{01} & P_{ab}^{02} \\ P_{aa}^{10} & P_{aa}^{11} & P_{aa}^{12} & P_{ab}^{10} & P_{ab}^{11} & P_{ab}^{12} \\ P_{aa}^{20} & P_{aa}^{21} & P_{aa}^{22} & P_{ab}^{20} & P_{ab}^{21} & P_{ab}^{22} \\ P_{ba}^{00} & P_{ba}^{01} & P_{ba}^{02} & P_{bb}^{00} & P_{bb}^{01} & P_{bb}^{02} \\ P_{ba}^{10} & P_{ba}^{11} & P_{ba}^{12} & P_{bb}^{10} & P_{bb}^{11} & P_{bb}^{12} \\ P_{ba}^{20} & P_{ba}^{21} & P_{ba}^{22} & P_{bb}^{20} & P_{bb}^{21} & P_{bb}^{22} \end{bmatrix} \quad (120)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}^0 &= P_{aa}^{00} = 18.664 \cdot 10^{10} + j0 = 18.664 \cdot 10^{10} \\
 P_g^0 &= P_{ab}^{00} = 5.009 \cdot 10^{10} - j7.629 \cdot 10^{-7} = 5.009 \cdot 10^{10} \\
 \bar{P}^1 &= P_{aa}^{11} = 11.113 \cdot 10^{10} + j7.629 \cdot 10^{-6} = 11.113 \cdot 10^{10} \\
 P_g^1 &= P_{ab}^{11} = 1.214 \cdot 10^9 + j2.713 \cdot 10^9 = 2.973 \cdot 10^9 e^{j1.15} \\
 P_g^{1*} &= P_{ba}^{11} = 1.214 \cdot 10^9 - j2.714 \cdot 10^9 = 2.973 \cdot 10^9 e^{-j1.15}
 \end{aligned} \quad (121)$$

Aus diesen Größen resultiert für die Nullkapazität bei zwei parallelgeschalte-

ten Drehstromsystemen:

$$\bar{C}^0 = \frac{2 \cdot l \cdot k_0}{\bar{P}^0 + P_g^0} = 126.96 \text{ nF} \quad (122)$$

Nullkapazität bei Betrieb eines Systems, das andere geerdet:

$$\bar{C}^0 = \frac{\bar{P}^0 \cdot l \cdot k_0}{(\bar{P}^0)^2 - (P_g^0)^2} = 86.77 \text{ nF} \quad (123)$$

Für die Mitkapazität erhalten wir im Falle zwei parallelgeschaltener Drehstromsysteme:

$$\bar{C}^1 = \frac{2 \cdot l \cdot k_1}{\bar{P}^1 + P_g^1} = 262.31 \text{ nF} \quad (124)$$

Mitkapazität bei Betrieb eines Systems, das andere geerdet:

$$\bar{C}^1 = \frac{\bar{P}^1 \cdot l \cdot k_0}{(\bar{P}^1)^2 - (P_g^1)^2} = 132.56 \text{ nF} \quad (125)$$

6.3 Simulation

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse präsentiert. Für die Simulation, wurde aufgrund der begrenzten Rechenkapazitäten, ein repräsentatives Spannungsfeld simuliert und anschließend zusammengeführt. Die Parameter wurden anhand der vorhergehenden Verifikation gewählt, siehe dazu Abschnitt 6.2.1.

6.3.1 Simulation ohne Mast

Durch die Firma Geoinformatik Energietechnik Schwarz konnten Geo Informations System Daten (GIS) konnte ein Spannungsfeld und deren Bodenbeschaffenheit rekonstruiert werden. Dieses Spannungsfeld setzt sich aus einer Dreiecksebene zusammen welche eine Auflösung von $5 \frac{1}{m}$ besitzt, sowie einzelnen zusammengesetzten Linienstücken mit 1 m Länge. Um die Randstreuungen möglichst gering zu halten wurden die davor und dahinter liegenden Leitungsseile hinzugefügt. Diese fließen auch in die Simulation ein, werden aber bei der Auswertung entfernt. Die Abbildung 35 zeigt die simulierte Geometrie, hier wird der Mast- und Bewuchseinfluss noch nicht berücksichtigt.

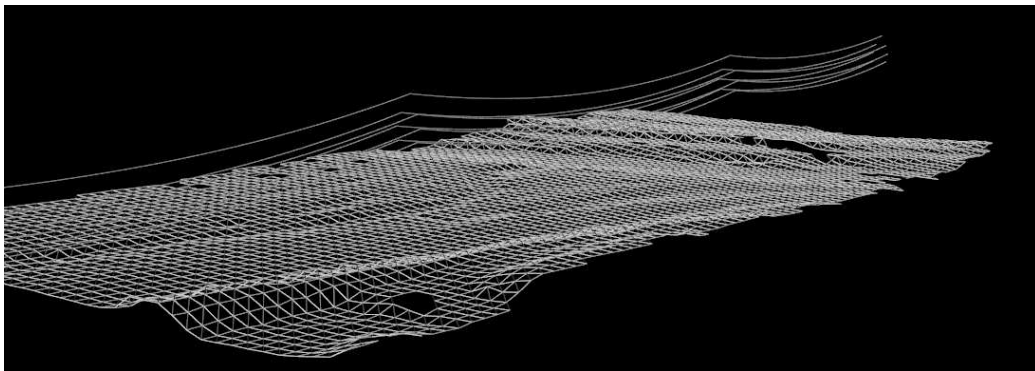


Abbildung 35: Spannungsfeld 6-7 der Leitung 179/56 ohne Mast.

Aus der Simulation erhalten wir die Kapazitätskoeffizientenmatrix wie schon

in Abschnitt 5.4 beschrieben.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8.27 & -1.04 & -1.63 & -0.63 & -0.697 & -0.469 & -0.318 \\ -1.04 & 8.27 & -0.636 & -1.63 & -0.475 & -0.697 & -0.319 \\ -1.63 & -0.635 & 8.42 & -0.613 & -1.59 & -0.674 & -0.535 \\ -0.629 & -1.63 & -0.613 & 8.42 & -0.68 & -1.59 & -0.538 \\ -0.695 & -0.473 & -1.59 & -0.679 & 8.3 & -1.21 & -1.14 \\ -0.467 & -0.695 & -0.673 & -1.59 & -1.2 & 8.3 & -1.15 \\ -0.314 & -0.315 & -0.533 & -0.536 & -1.14 & -1.14 & 6.92 \end{pmatrix} \cdot 10^{-12} \quad (126)$$

Aus dieser können wir die Null- und Mitkapazitäten ermitteln, siehe Abschnitt 5.2 und 5.2.

beide Systeme in Betrieb		ein System in Betrieb, anderes geerdet	
$\bar{C}^0 [nF]$	$\bar{C}^1 [nF]$	$\bar{C}^0 [nF]$	$\bar{C}^1 [nF]$
104.16	280.2	88.07	134.15

Tabelle 7: Null- \bar{C}^0 und Mitkapazität \bar{C}^1 zwischen des Leitungssystems 179/56 ohne Masteinfluss.

6.3.2 Simulation inklusive Mast

Hier wurde der Mast in die Simulation mit einbezogen, Abbildung 36 visualisiert die Daten der geladenen Geometrie. Der Aufbau des Tonnenmasten setzt sich aus einzelnen Linienelementen mit einem 4cm starken Durchmesser zusammen und konnte abermals aus GIS-Daten geladen werden.

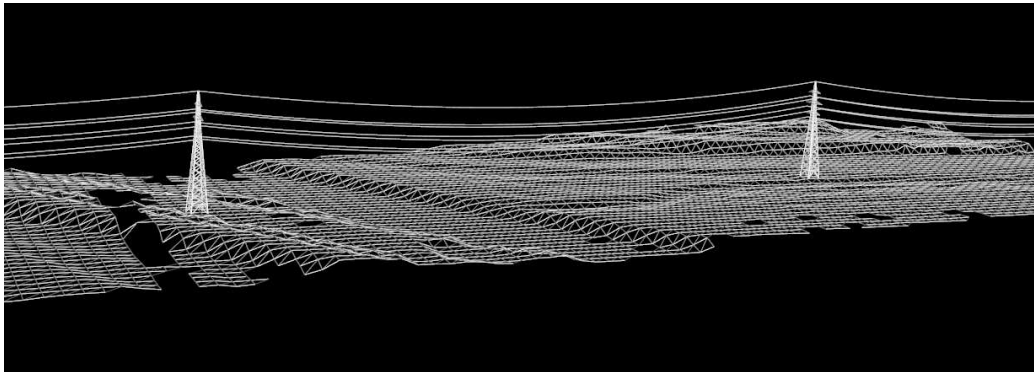


Abbildung 36: Spannfeld 6-7 der Leitung 179/56 mit Mast.

Wir erhalten wieder die Kapazitätskoeffizientenmatrix und berechnen wie schon zuvor die Null- und Mitkapazitäten.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8.327 & -0.9921 & -1.593 & -0.6003 & -0.6703 & -0.4451 & -0.3021 \\ -0.992 & 8.33 & -0.6058 & -1.591 & -0.4506 & -0.6698 & -0.3031 \\ -1.592 & -0.605 & 8.46 & -0.5869 & -1.55 & -0.6458 & -0.5153 \\ -0.5993 & -1.59 & -0.5868 & 8.461 & -0.6515 & -1.551 & -0.5179 \\ -0.668 & -0.4487 & -1.548 & -0.6506 & 8.36 & -1.163 & -1.1 \\ -0.443 & -0.6676 & -0.6446 & -1.548 & -1.163 & 8.359 & -1.109 \\ -0.2982 & -0.2994 & -0.5126 & -0.5154 & -1.099 & -1.107 & 6.988 \end{pmatrix} \cdot 10^{-12} \quad (127)$$

beide Systeme in Betrieb		ein System in Betrieb, anderes geerdet	
$\bar{C}^0 [nF]$	$\bar{C}^1 [nF]$	$\bar{C}^0 [nF]$	$\bar{C}^1 [nF]$
109.16	286	89.87	136.99

Tabelle 8: Null- \bar{C}^0 und Mitkapazität \bar{C}^1 zwischen des Leitungssystems 179/56 inklusive Masteinfluss.

Die Abweichung zwischen dem Nullkapazitäten des parallel betriebenen Systems liegen bei 4.58 %, jene der Mitkapazitäten bei 2.02 %. Wird ein System geerdet so sind die Unterschiede geringer, das Nullsystem besitzt hier eine 2 % Abweichung, die Mitkapazitäten 2.02 %. Aus diesem Ergebnis lässt sich ein unterschied-

licher Einfluss der Korrekturfaktoren nicht von der Hand weisen. Im Falle der parallel betriebenen Leitungen passen die von Muckenhuber angenommenen Korrekturfaktoren gut, ist jedoch ein System geerdet stimmen diese nicht mehr. Bei genauerer Überlegung muss das auch so sein, da durch die Erdung des zweiten Systems die Koppelkapazitäten eine gänzlich neue Konfiguration herbei führen. Der Einfluss die Erdkapazitäten des Bodens wird durch diese Situation dominanter, da das geerdete System parallel zum betriebenen System verläuft. Der Mast verliert dadurch an Einfluss und müsste deshalb mit einem geringeren Faktor berücksichtigt werden. Die Korrekturfaktoren von Ödinger erweisen sich hier als falsch, da die Annahme von 8% Beaufschlagung bei Nullkapazitäten zu groß ist und auf eine Erhöhung der Mitkapazität gänzlich verzichtet wurde.

6.4 Berechnungsvergleich 179/56

Nachdem nun alle Auswertung erfolgt sind sollen diese im Folgenden gegenübergestellt werden. Die erste Tabelle 9 repräsentiert alle Werte für den Zustand, dass das Leitungssystem 179/5 und 179/6 eingeschalten sind. Die Tabelle 10 hingegen zeigt den Vergleich bei Erdung eines Systems.

	\bar{C}^1 [nF]	\bar{C}^0 [nF]	U_{LL} [kV]	I_{ES} [A]	I_L [A]
APG Muckenhuber	262.31	126.96	110.00	7.599	5.234
Ödinger	257.06	131.63	110.00	7.879	5.129
Messung	225.23	134.66	110.00	8.060	4.494
Simulation ohne Mast, ohne Bewuchs SP6-7	280.2	104	110.00	6.474	5.696
Simulation mit Mast, ohne Bewuchs SP6-7	286	109.16	110.00	6.781	5.706
Schwarz SP6-7	268.74	107.11	110.00	6.411	5.362
Schwarz	269.231	113.29	110.00	6.781	5.372

Tabelle 9: Vergleichstabelle der einzelnen Methoden, wenn beide Systeme in Betrieb sind.

	\bar{C}^1 [nF]	\bar{C}^0 [nF]	U_{LL} [kV]	I_{ES} [A]	I_L [A]
APG Muckenhuber	132.56	86.77	110.00	5.194	2.645
Ödinger	129.91	89.96	110.00	5.385	2.592
Messung	168.81	95.06	110.00	5.690	3.368
Simulation ohne Mast, ohne Bewuchs SP6-7	134.15	88.07	110.00	5.271	2.677
Simulation mit Mast, ohne Bewuchs SP6-7	136.99	89.87	110.00	5.379	2.733
Schwarz SP6-7	140.17	85.29	110.00	5.105	2.797
Schwarz	140.14	86.672	110.00	5.188	2.796

Tabelle 10: Vergleichstabelle der einzelnen Methoden, wenn ein System in Betrieb ist und das andere geerdet wird.

Die Berechnungen von Schwarz wurden dabei mit dem Programm FLSeil der Firma Schwarz durchgeführt.

Interpretation

In den Tabellen 9 und 10 werden nun alle bisherigen Berechnungen und Simulationen aufgelistet. Dabei steht die Abkürzung SP für das Spannungsfeld welches simuliert wurde. Aufgrund der begrenzten Rechenkapazität konnten nur einzelne Spannungsfelder simuliert und diese anschließend auf die 14.45km lange Leitung hochskaliert werden. Die präsentierten Ergebnisse liegen dabei bis auf wenige Ausnahmen in einem akzeptablen Wertebereich. Bei genauerer Betrachtung der Tabellen fällt auf, dass die Werte beim geerdeten System eine geringere Abweichung gegenüber jenen des parallel Betriebs der Leitungen aufweisen. Dies legt die Vermutung nahe, dass es bei der Auswertung von Leitungen mit parallel betriebenen Systemen zu größeren Störeinflüssen benachbarter Objekte kommt und dadurch mehr Kopplungskapazitäten auf das System einwirken. Bei einer zusätzlichen Messung in leerlaufenden Betrieb beider Systeme konnte dies anhand von Spannungsschwankungen im Bereich von 200 – 300 V auch festgestellt werden. Diese eingekoppelten Felder und der nicht berücksichtigte Bewuchs könnten die Abweichung zwischen Simulation und Messung erklären. Um hier eine konkrete Aussage treffen zu können Bedarf es einer weiteren Messung, wo dieses schwankende Feld detailliert erfasst wird und in den gemessenen Werten miteinbezogen wird.

Bei der Methode von Muckenhuber und Ödinger wurde mit konstanten Werten von Höhen und Durchhängen gerechnet, die Werte von Schwarz und jene der Simulation berücksichtigen jedoch das vorhandene Terrain und den angepassten Durchhang, dies ist bei den anderen Methoden nicht möglich. Beim Vergleich zeigt sich, dass die Werte von Schwarz und der Simulation eine wesentlich geringere Differenz aufweisen als jene zu Muckenhuber. Dies geht insbesondere aus den geringen Abweichungen der Nullkapazitäten hervor.

Um eine Empfehlung bezüglich der Korrekturfaktoren abzugeben Bedarf es meiner Meinung nach weiterer Untersuchungen mit unterschiedlichsten Masttypen. Aus dem derzeitigen Ergebnis ist aber abzuleiten, das bei der Konfiguration wie dem parallel Betrieben Systemen und einem Tonnenmastbild die Korrekturfaktoren von Muckenhuber zu stimmen scheinen, siehe dazu Abschnitt 6.3.2. Bei einem geerdeten System und dem anderen in Betrieb trifft dies jedoch nicht mehr zu.

6.5 Conclusio und Ausblick

Das Ziel dieser Diplomarbeit war die Kapazitäten von Freileitungen numerisch zu berechnen. Dabei war die Intension, das dadurch bestehende Korrekturfaktoren aus unterschiedlichen Literaturen jegliche mathematische Begründung fehlte und hier Licht ins Dunkle zu bringen. Mittels intensiver Recherche konnte eine Methode gefunden werden die solch eine Simulation realisieren konnte. Diese Boundary Element Methode wurde anschließend durch das bestehendes Programm KEM-Field adaptiert und in C++ für diese Aufgabe angepasst. Die Entwicklung eines komfortablen Interfaces wurde in Python umgesetzt. Die darauffolgenden Verifikationsrechnungen haben die Richtigkeit und Qualität der Anwendung gezeigt und somit den ersten Teil dieser Arbeit erfüllt. Um nun die Korrekturfaktoren zu überprüfen wurden 3D-Daten eines bestehenden Leitungssystems verwendet, um die Qualität der Simulationsergebnisse auf einem möglichst exakten Level zu erhalten. Ein erfolgreiches validieren sämtlicher Faktoren sowie Verbesserungsvorschläge waren dadurch möglich. Diese Arbeit hat also gezeigt das in der heutigen Zeit durch die Möglichkeit der numerischen Mathematik und der leistungsfähigen Computerhardware die Überprüfung und Korrektur von bisherigen Faktoren sowie Umwelteinflüssen durchaus präzisiert und optimiert werden kann. Auch wenn in der Energietechnik im Allgemeinen eher ein konservatives Denken, was nicht zuletzt aufgrund der entsprechenden Sicherheitsaspekte wichtig ist, vorherrscht, sollte man sich durchaus Gedanken über neuartige und effizientere Methoden machen. Insbesondere ein fächerübergreifendes Forschen, wie es bei der vorliegenden Diplomarbeit betrieben wurde, macht Sinn, um Erkenntnisse aus anderen Fachgebieten gewinnen und nutzen zu können. Als Beispiel sei die verwendete numerische Simulation genannt, welche ursprünglich in der Mikroelektronik und Teilchenphysik eingesetzt wird.

Abschließend lässt sich sagen das diese Simulation in ihrer Performance noch eher in den Kinderschuhen steckt. Die Möglichkeiten von Parallelisierung, Stichwort MPI, oder die Auslagerung großer Matrix-Vektor Multiplikation auf eine Grafikkarte, Stichwort OpenCL, wurden noch nicht umgesetzt. Außerdem ist eine effizienz Steigerung durch die Ergänzung des Portable, Extensible Toolkit for

Scientific Computation, kurz PETsC zu erwarten. Die Boundary Element Methode steht meiner Meinung nach erst am Beginn ihrer Einsatzmöglichkeiten in der Energietechnik. Durch die Ermittlung der Ladungen wird uns nicht nur ein essenzieller Wert zur Berechnung der Kapazitäten geliefert, sondern auch das elektrische und magnetische Feld können daraus abgeleitet werden, wie die Abbildung 37 des elektrischen Feldes zeigt. Diese Simulation gibt außerdem die Gelegenheit durchaus komplexe Geometrien, wie eine parallel geführte Bahnstromleitung oder ein kreuzendes Spannfeld, detailliert zu untersuchen. Aber auch der Bewuchs, welcher durch die Informationen von Light Detection and Ranging Daten (Lidar) eingespielt werden könnte, würde das Warten und Treffen von Entscheidungen bei Wald geführten Freileitungen erleichtern. Diese Auswahl stellt vermutlich nur einen geringen Teil der möglichen Einsatzgebiete dar, man darf also gespannt sein in welchen Bereichen diese Simulationstechnik ihren Einzug finden wird.

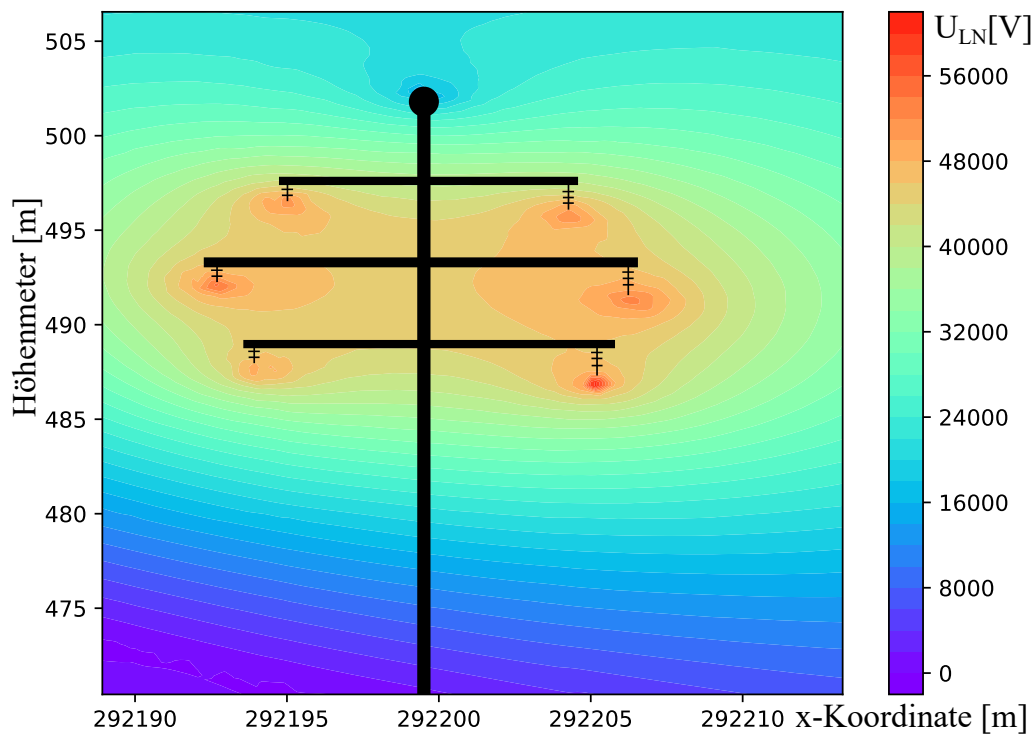


Abbildung 37: Elektrische Feldsimulation des Leitungssystems 179/56.

Literatur

- [1] Adalbert Prechtl. Vorlesungen die Grundlagen der Elektrotechnik. 1:228–249, 1994.
- [2] Richard Muckenhuber. Elektrische Anlagen. 1 Teil 2:3.1.25–3.2.20, 1978.
- [3] Dietrich Oeding and Bernd R Oswald. Elektrische Kraftwerke und Netze. 6:295–303, 2011.
- [4] Jürgen Dankert and Helga Dankert. Technische Mechanik. 6:157–166, 2013.
- [5] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [6] John Patrick Barrett. A spatially resolved study of the katrin main spectrometer using a novel fast multipole method. pages 58–91, 2016.
- [7] Youcef Saad and Martin H Schultz. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, 7(3):856–869, 1986.
- [8] Jörg Liesen and Petr Tichý. Convergence analysis of Krylov subspace methods. *GAMM-Mitteilungen*, 27(2):153–173, 2004.
- [9] Henk A Van der Vorst. Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, 13(2):631–644, 1992.
- [10] Alexander Rüttgers. Fehlerabschätzungen in der Fast Multipole Method bei Systemen mit periodischen Randbedingungen. *Beiträge zum Wissenschaftlichen Rechnen Ergebnisse des Gaststudentenprogramms 2007 des John von Neumann-Instituts für Computing*, page 107, 2007.
- [11] Rick Beatson and Leslie Greengard. A short course on fast multipole methods. *Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs*, 1:1–37, 1997.
- [12] Thomas Corona. KATRIN-Experiment, KEMField. <https://github.com/KATRIN-Experiment/Kassiopeia/tree/master/KEMField>. Online: 2020-04-14.

- [13] Thomas Corona. Methodology and application of high performance electrostatic field simulation in the katrin experiment. pages 38–49, 2014.