

Diploma Thesis

# Investigation of the effect of the longitudinal distribution of train axle loads on railway bridge vibrations in the case of resonance

submitted in satisfaction of the requirements for the degree of  
Diplom-Ingenieur  
of the TU Wien, Faculty of Civil Engineering

---

Diplomarbeit

## Untersuchung zur Auswirkung der longitudinalen Verteilung von Zugachslasten auf Eisenbahnbrückenschwingungen im Resonanzfall

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades einer  
Diplom-Ingenieurin  
eingereicht an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen

von

**Barbara Hattinger, BSc**

Matr.Nr.: 01326322

unter der Anleitung von

Univ.Prof.Dipl.-Ing. Dr.techn. **Josef Fink**

Dipl.-Ing. **Lara Bettinelli, BSc BSc**

Institut für Tragkonstruktionen  
Forschungsbereich Stahlbau  
Technische Universität Wien  
Karlsplatz 13/212, 1040 Wien, Österreich

Wien, im Dezember 2022

---



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich bei der Erstellung meiner Diplomarbeit und während des gesamten Studiums begleitet haben.

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink bedanken, der mir die Möglichkeit gegeben hat, mein Studium mit dieser interessanten und anspruchsvollen Arbeit abzuschließen.

Mein besonderer Dank gilt Frau Dipl.-Ing. Lara Bettinelli für ihre tatkräftige Unterstützung bei dieser Arbeit. Sie stand mir stets mit außerordentlich hilfreichen Anregungen und Vorschlägen und mit viel Geduld zur Seite.

Außerdem möchte ich mich bei den Kolleginnen und Kollegen bedanken, die mich während meiner herausfordernden, aber auch lehrreichen und schönen Studienzeit begleitet haben und zu guten Freundinnen und Freunden geworden sind.

Abschließend danke ich noch herzlich meiner Familie und meinem Freund für die immerzu liebevolle und bedingungslose Unterstützung.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Kurzfassung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Dynamik von Eisenbahnbrücken, dabei werden Resonanzfälle betrachtet, bei welchen es zu beträchtlichen Schwingungsamplituden des Tragwerks kommen kann.

Im Fokus steht der Einfluss der longitudinalen Verteilung von Zugachslasten auf die dynamische Tragwerksantwort von Eisenbahnbrücken bei Zugüberfahrten. Dabei ist die Verteilung von Zugachslasten auf mehrere anteilige Kräfte im Abstand der Schwellen eine Möglichkeit zur vereinfachten Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts.

Diese Möglichkeit der Modellierung der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts hat den großen Vorteil gegenüber Simulationsprogrammen, welche die Eigenschaften des Schotterbetts durch Feder- und Dämpfermodelle abbilden, dass einfachere und recheneffizientere Tragwerksmodelle zur Anwendung kommen.

Im Zuge der Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit werden anhand von mehreren numerischen Analysen unterschiedliche Lastverteilungsvarianten auf drei oder fünf Achslasten betrachtet.

Die für die Simulation herangezogenen Hochgeschwindigkeitszüge werden als bewegte Einzellasten und als detailliertes Mehrkörpersystem, welches die Interaktion zwischen Fahrzeug und Brückentragwerk berücksichtigt, modelliert.

Eingangs wird anhand einer Vorstudie an einem ausgewählten Brückentragwerk untersucht, ob die Lastverteilung bei den Berechnungen mit dem Einzellastmodell und mit dem Mehrkörpersystem des Zugs unterschiedlichen Einfluss auf die dynamische Tragwerksantwort der Brücke hat.

Anschließend werden bei einer breit aufgestellten Parameterstudie relevante Brückeneigenschaften ermittelt, durch welche sich eine rechnerische Berücksichtigung der Lastverteilung, im besonderen Maße auf die Beschleunigungs- und Durchbiegungsspitzen, welche im Resonanzfall auftreten, auswirkt. Des Weiteren wird ein Überblick über die erzielbaren Reduktionen der Brückenbeschleunigungen im Resonanzfall bei Berücksichtigung einer Verteilung der Achslasten auf drei bzw. fünf Einzelkräfte im Vergleich zu Berechnungen ohne Lastverteilung beim Zugmodell der bewegten Einzellasten gegeben. Als Fazit dieser Parameterstudie kann man festhalten, dass die Beschleunigungsreduktionen am stärksten von der Überfahrtsgeschwindigkeit der Züge beeinflusst werden, sowie, dass die maßgebenden Schwingungsamplituden aufgrund der überfahrenden regelmäßigen Kräfte im Abstand einer Wagenlänge über Puffer entstehen.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Abstract

This thesis focuses on bridge dynamics. In particular it examines resonance cases, in which considerable vibration amplitudes of the supporting structure can occur.

The focus of this thesis is the influence of the longitudinal distribution of train axle loads on the dynamic structural response of railway bridges during train crossings. The division of train axle loads into proportional forces with the distance of the sleepers is one option of considering the load-distributing effect of the ballast bed in a simplified manner.

This way of modelling the load-distributing effect of the ballast bed presents a major advantage: In contrast to existing simulation programs, which represent the properties of the ballast bed using spring and damper models, it employs easier and more computationally efficient structural models.

In this investigation, various load distribution variants over three or five axle loads are considered on the basis of several numerical analyses.

The high-speed trains used for the simulation are modelled as a series of moving axle loads and as a detailed multi-body system taking the interaction between the vehicle and the bridge structure into account.

First, the preliminary study of a selected bridge structure is used to investigate whether the effect of load distribution in calculations with the single-load model differs from calculations with the multi-body system the dynamic structural response of the bridge.

Subsequently, relevant bridge properties are determined in a comprehensive parameter study, in order to assess their effect on the acceleration peaks if load distribution is taken into account in the calculation. Finally, the achievable reductions in bridge vibrations in the resonance case in calculations with and without load distribution are compared. In conclusion, it can be stated that acceleration reduction is influenced the most by the trains' crossing speed. Furthermore, the findings of this thesis show that the decisive oscillation amplitudes occur in consequence of moving constant forces in intervals of a vehicle length over buffers.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>10</b>
1.1	Methoden der Modellbildung . . . . .	10
1.2	Zielsetzung . . . . .	11
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Mechanische Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1	Schwingung von Einfeldbrücken . . . . .	13
2.1.1	Transversalschwingung . . . . .	13
2.1.2	Bewegungsgleichung des Bernoulli-Euler-Balkens . . . . .	14
2.1.3	Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen . . . . .	14
2.1.4	Diskretisierung . . . . .	16
2.1.5	Angewandte Dämpfungsmodelle . . . . .	18
2.2	Fahrzeugmodelle . . . . .	19
2.2.1	MLM - Moving Load Model . . . . .	19
2.2.2	DIM - Detailed Interaction Model . . . . .	22
2.2.3	Numerische Auswertung . . . . .	26
2.3	Modell für Tragwerk und Oberbau . . . . .	27
2.4	Einflussparameter . . . . .	29
2.4.1	Brückenparameter . . . . .	30
2.4.2	Zugkonfigurationen . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Vorstudie</b>	<b>37</b>
3.1	Berechnungen mit dem MLM . . . . .	38
3.1.1	Varianten der Lastmodelle des Zugs . . . . .	39
3.1.2	Vergleich der maximalen Beschleunigungen und Verschiebungen des Tragwerks . . . . .	39
3.2	Berechnungen mit dem DIM . . . . .	43
3.2.1	Varianten der Lastmodelle des Zugs . . . . .	43
3.2.2	Vergleich der maximalen Beschleunigungen und Verschiebungen des Tragwerks . . . . .	44
3.2.3	Ausgewählte Zeitverläufe . . . . .	50
3.3	Vergleich MLM - DIM . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Parameterstudie</b>	<b>54</b>
4.1	Modellparameter . . . . .	54
4.1.1	Brückenparameter . . . . .	54
4.1.2	Zugparameter . . . . .	55



4.2	Berechnung und Datenverarbeitung . . . . .	55
4.3	Ergebnisse - relative Reduktion in Abhängigkeit von Tragwerksparametern	57
4.3.1	Gegenüberstellung der Beschleunigungsspitzen unterschiedlicher Tragwerke, berechnet mittels MLM-1 und MLM-3 . . . . .	57
4.3.2	Gegenüberstellung der Beschleunigungsspitzen unterschiedlicher Tragwerke, berechnet mittels MLM-1 und MLM-5 . . . . .	77
4.3.3	Gegenüberstellung der Verschiebungsspitzen unterschiedlicher Tragwerke, berechnet mittels MLM-1 und MLM-3 . . . . .	79
4.3.4	Gegenüberstellung der Verschiebungsspitzen unterschiedlicher Tragwerke, berechnet mittels MLM-1 und MLM-5 . . . . .	82
4.3.5	Schlussfolgerungen aller vier Gegenüberstellungen . . . . .	83
4.4	Ergebnisse - relative Beschleunigungsreduktion in Abhängigkeit von $\lambda$ . . .	85
4.4.1	Spannweitenabhängige Betrachtung . . . . .	86
4.4.2	Regressionsfunktionen . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Schlussfolgerungen und Ausblick</b>	<b>96</b>
	<b>Anhang A</b>	<b>100</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Um eine gesicherte internationale Mobilität zu gewähren wird darauf gesetzt, dass der Schienenverkehr sicher zwischen den Eisenbahnnetzen verschiedenen europäischer Staaten verkehren kann. Mit Betriebsgeschwindigkeiten über 200 km/h verkehren dabei Hochgeschwindigkeitszüge auf immer mehr Strecken. Diese Entwicklung hat großen Einfluss auf den Erhalt und Neubau von Eisenbahnbrücken.

Insbesondere das dynamische Verhalten der Brückentragwerke bei Zugüberfahrten mit sehr hohen Geschwindigkeiten wird oft das maßgebende Kriterium für die Bemessung solcher Bauwerke in Bezug auf die Gebrauchstauglichkeit. Dabei ist es möglich, dass die Beanspruchung, die auf das Tragwerk wirkt, zufolge der Schwingung im Resonanzfall um ein Vielfaches größer ist als die statischen Einwirkungen.

Eine besondere Rolle spielt dabei die vertikale Beschleunigung des Tragwerks. Hohe Beschleunigungswerte können zu Schotterbettdestabilisierung führen oder den Fahrkomfort der Passagiere beeinträchtigen. Daher ist der Grenzwert für Neubauten von Brücken im Eurocode 0 [4] mit  $3,5 \text{ m/s}^2$  angegeben und laut ÖNORM B 4008-2 [11] ist die maximale Beschleunigung von  $6,0 \text{ m/s}^2$  bei Bestandsbrücken mit gutem Erhaltungszustand zulässig. Um sichere und wirtschaftliche Vorhersagen über die Schwingung des Tragwerks treffen zu können, ist es wichtig, die Interaktion von Brücke und Zug genau zu beurteilen. Dieser Themenbereich ist sowohl in der Planung von Neubauten, in der Beurteilung von Bestandsbrücken wichtig.

### 1.1 Methoden der Modellbildung

Laut Eurocode 1 [5] ist die vereinfachte Berücksichtigung des dynamischen Verhaltens der Brücke über den dynamischen Beiwert, welcher mit den statischen Lastfällen multipliziert wird, für den Hochgeschwindigkeitsverkehr nicht zulässig. Anstelle dessen soll eine genauere Untersuchung der dynamischen Tragwerksantwort auf Verkehrsbelastungen erstellt werden. Für den überfahrenden Zug schreibt der Eurocode 1 als Lastmodell das HSLM vor. Dies ist ein Lastmodell, das auf Forschungsarbeiten des European Rail Research Institute (ERRI) [13] basiert. Dabei wird der überfahrende Zug im Sinne des Moving Load Models (MLM), als eine Folge von konstanten Achslasten idealisiert. Bei diesem sind im Anhang A des nationalen Anwendungsdokuments [10] außerdem die Zugkonfigurationen der Betriebszüge festgelegt.

Eine weitere Modellbildung des überfahrenden Zugs stellt das vollständige Interaktionsmo-

dell dar, welches die Interaktion zwischen Fahrzeug und Brückentragwerk berücksichtigt. Dank zusätzlichen Eingangsparametern ist das Detailed Interaction Model (DIM), so wie es in [13] bezeichnet wird, in der Lage, das dynamische Verhalten des Tragwerk realitätsnaher abzubilden und im Vergleich zum MLM realitätsnähere Beschleunigungswerte zu errechnen. Jedoch ist das DIM rechenintensiver und die notwendigen Eingangsparameter sind meist nicht öffentlich zugänglich.

Inwieweit diese detailliertere Untersuchung im Sinne der Wirtschaftlichkeit notwendig ist, ist oft Gegenstand von wissenschaftlichen Arbeiten und gewinnt immer mehr an Bedeutung. Nicht nur seitens des Zugs ist eine Modellierungstiefe möglich, auch beim Brückenüberbau, der sich aus Tragkonstruktion und Oberbau zusammensetzt.

Bei der Brückenmodellierung wird das dynamische Gesamtsystem oft vereinfacht als schubstarrer Bernoulli-Euler-Balken dargestellt. Dem Balken werden dabei die Massen von Tragkonstruktion und Oberbau, bestehend aus Schienen, Schwellen und Schotterbett, zugeordnet und die Dämpfungsmechanismen der Tragkonstruktion sowie die gegenseitigen Kopplungen der einzelnen Komponenten des Brückenüberbaus werden in ein einziges Dämpfungsmaß zusammengefasst. Mit aufwendigeren Berechnungsmodellen ist es möglich, die dynamische Interaktion von Schiene, Schwelle und Schotter nachzubilden. Dafür werden genaue Kenntnisse unter anderem über Schottersteifigkeit und -dämpfung benötigt. Umfangreiche Untersuchungen, wie sie beispielsweise von Stollwitzer [14] oder von Kirchhofer und Fink [7] durchgeführt wurden, beschäftigen sich mit den Dämpfungseigenschaften von Brücken mit Schotteroberbau. Die Komplexität solcher Mehrkörpermodelle der Brücke kann variieren, so wie diese unter anderem in [5], [8] und [13] beschrieben sind.

In den Mehrkörpermodellen kommt es durch die elastische Bettung des Gleisrostes und in weiterer Folge durch die lastverteilende Wirkung des Oberbaus häufig zu kleineren Ergebnissen der Brückenbeschleunigung, was eine wirtschaftlichere Planung von Zugbetrieb und Instandhaltungsmaßnahmen ermöglicht. Es ist möglich, diesen lastverteilenden Einfluss auch in dem einfacheren Balkenmodell durch eine Verteilung der einwirkenden Kräfte zu simulieren. Der Vorteil dieses Modells ist die Recheneffizienz und die leichte Implementierbarkeit in bereits bestehende Simulationsmodelle.

## 1.2 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Auswirkungen der Lastverteilung durch die Berücksichtigung des Schotterbetts auf die maximalen Beschleunigungen und Durchbiegungen des Brückentragwerks zu analysieren. Dabei werden dynamischen Berechnungen an einem breiten Parameterfeld unterschiedlicher Brückentragwerke durchgeführt. Diese Berechnungen werden mit dem MLM und dem DIM durchgeführt, wobei unterschiedliche Lastverteilungsvarianten zur Anwendung kommen. Bei den Tragwerken handelt es sich um einachsige gespannte Balkenbrücken mit Spannweiten von 4 bis 35 m. Zwei unterschiedliche Hochgeschwindigkeitszüge werden für die Berechnungen herangezogen: der österreichische Railjet und der deutsche ICE4.

So soll die vorliegende Arbeit die Thematik der Lastverteilung beleuchten und ihre Auswir-

kungen auf die Beschleunigungsspitzen im Resonanzfall untersuchen.

Zusammenfassend können folgende Kernfragen formuliert werden:

- Welche Auswirkungen hat die Verteilung der Achslasten durch die Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts auf die Spitzenbeschleunigungen in Tragwerksmitte abhängig von den untersuchten Brückenparametern und der angeregten Resonanzgeschwindigkeit?
- Sind Gesetzmäßigkeiten bei Berechnungen mit unterschiedlichen Lastverteilungsvarianten zu erkennen?
- Verhält sich die Lastverteilung des Zugs bei Berechnungen mit und ohne Fahrzeug-Brücken-Interaktion gleich? Im Rahmen dieser Arbeit wird diese Fragestellung an einem ausgewählten Tragwerk untersucht.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn werden die mechanischen Grundlagen für den zur Schwingung angeregten Bernoulli-Euler-Balken erläutert, anschließend wird genauer auf die Fahrzeugmodelle eingegangen und die Lastverteilungsvarianten definiert. Anschließend werden die brücken- und zugseitigen Einflussparameter beschrieben. Die Beantwortung der Kernfragen erfolgt im 3. und 4. Kapitel. In der Vorstudie (in Kapitel 3) werden eingangs an einem ausgewählten Tragwerk Berechnungen mit den beiden Lastmodellen und jeweils unterschiedlichen Lastverteilungsvarianten durchgeführt und anschließend die maximalen Beschleunigungen und Durchbiegungen des Tragwerks miteinander verglichen. Anhand der Hauptstudie (in Kapitel 4) wird eine Vielzahl von unterschiedlichen Tragwerken untersucht und es werden kritische Brückenparameter identifiziert, bei denen der Einfluss der Lastverteilung auf die Spitzenbeschleunigungen besonders groß ist. Aufgrund der großen Anzahl von Tragwerken werden die dynamischen Berechnungen mit dem MLM durchgeführt.

# Kapitel 2

## Mechanische Grundlagen

### 2.1 Schwingung von Einfeldbrücken

In dieser Arbeit wird die Tragstruktur der Eisenbahnbrücke als gelenkig gelagerter Einfeldträger modelliert. Dabei werden dem Einfeldträger die Eigenschaften des Bernoulli-Euler-Balkens und der linearen Elastizitätstheorie zugesprochen, folglich der linearen Stabtheorie. Daraus resultiert die Annahme von kleinen Verschiebungen der Stabachse im Vergleich zu den Querschnittsabmessungen, wodurch die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System zulässig ist. Der gleichförmige Balken hat über die gesamte Spannweite  $L$  konstante Material- und Querschnittseigenschaften, dementsprechend sind die Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und die Massenbelegung  $\mu$  über die Spannweite  $L$  unverändert. Da in der vorliegenden Arbeit jegliche Übergangskonstruktionen zwischen dem Tragwerk und dem anstehenden Gelände vernachlässigt werden, wird die Lagerung rein gelenkig und ohne dämpfende Wirkung modelliert. Durch die mathematische Beschreibung dieses Systems entstehen partielle Differentialgleichungen, welche nach der Methode von Ritz und Garlerkin diskretisiert werden, wodurch gewöhnliche Differentialgleichungen entstehen.

#### 2.1.1 Transversalschwingung

Um eine Transversalschwingung eines Biegebalkens zu beschreiben, wird im ebenen Fall die Annahme getroffen, dass die Schwingung ausschließlich in der Systemebene auftritt. Außerdem werden die Torsion und die Verschiebung in Längsrichtung vernachlässigt, wodurch als Unbekannte in der Ausgangsgleichung der Transversalschwingung nur noch die Durchbiegung der Balkenachse  $w$  in  $z$ -Richtung und der Querschnittsdrehwinkel  $\varphi$  übrig bleiben, vergleiche dazu Mang und Hofstetter [9]. Um die Verformungen und Formänderungen eines Balkens zu beschreiben, wird auf die Theorie der kleinen Deformationen zurückgegriffen. Diese besagt, dass Gleichgewichtsbedingungen am unverformten Ausgangssystem formuliert werden können, solange Stabachsenverschiebungen im Vergleich zu den Querschnittsabmessungen klein bleiben. Dadurch werden Quer- und Axialbeanspruchungen entkoppelt. Für den Balken wird ein ideal elastisches, homogenes und isotropes Materialverhalten angenommen, wodurch das Hooke'sche Gesetz uneingeschränkt zur Anwendung kommt. Um die Formänderung zu beschreiben, werden zunächst die Verzerrungsbeiträge betrachtet, die die Durchbiegung  $w$  bestimmen. Zum einen ist das die Biegekrümmung, eine Funktion aus dem Moment und der Biegesteifigkeit, und zum anderen die Schubgleitung,

eine Funktion aus der Querkraft und Schubsteifigkeit. Beim Bernoulli-Euler Balken wird die Schubsteifigkeit unendlich groß angenommen, entsprechend entfällt dieser Verzerrungsanteil. Bleiben Querschnittsverdrehungen, bei gleichbleibenden Querschnittsabmessungen klein, lassen sich Verschiebungen des Querschnitts in der Querschnittsebene durch die Verschiebung der Stabachse ausdrücken. Um nun einen Balken dynamisch zu beschreiben, wird unter der Anwendung des *D'Alembertschen Prinzips* die Bewegungsgleichung in Form einer Differentialgleichung formuliert. Das zuvor erwähnte Prinzip besagt, dass an einem infinitesimal kleinem Massenelement mit der Länge  $dx$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  ein dynamisches Gleichgewicht zwischen fiktiven Trägheitskräften herrscht.

### 2.1.2 Bewegungsgleichung des Bernoulli-Euler-Balkens

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung wird auf die Fachliteratur verwiesen. Diese kann beispielsweise Ziegler [18] und Clough [3] entnommen werden. In Gleichung (2.1) wird die Bewegungsgleichung des beidseitig gelenkig gelagerten schubstarrten Bernoulli-Euler-Balkens angegeben.

$$EA_{zz} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c_z \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = p_z(x, t) \quad (2.1)$$

Dabei sind die Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$ , die Massenbelegung  $\mu$  und die Dämpferkonstante  $c_z$  Eigenschaften des Balkens.  $w$  ist die vertikale Verschiebung des Balkens, die aufgrund der dynamischen Belastungsfunktion  $p_z$  erfolgt.

### 2.1.3 Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

Im Folgenden werden die Eigenformen und Eigenfrequenzen des ungedämpften Bernoulli-Euler-Balkens bestimmt. Ausgehend von der Gleichung (2.1), erhält man durch das Streichen des Last- und Dämpfungsterms die Bewegungsgleichung des ungedämpften, freischwingenden Balkens.

$$EA_{zz} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Um die homogene Lösung, welche die freie ungedämpfte Schwingung beschreibt, zu finden, wird vom Bernoulli'schen Separationsansatz Gebrauch gemacht, welcher das Produkt aus einer Zeit-  $q(t)$  und einer Ortsfunktion  $\phi(x)$  ist.

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (2.3)$$

Setzt man (2.3) in (2.2), erhält man:

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} \frac{1}{q(t)} + \frac{EA_{zz}}{\mu} \frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} \frac{1}{\phi(x)} = 0 \quad (2.4)$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, müssen der erste und der zweite Term konstant sein, dadurch kann man Gleichung (2.4) in zwei entkoppelte homogene gewöhnliche Differentialgleichungen

aufspalten. Gleichung (2.5) ist zeitabhängig und beschreibt die harmonische Bewegung, Gleichung (2.6) ist abhängig von der Ortsvariable  $\phi(x)$ .

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} \frac{1}{q(t)} = -\omega^2 \quad (2.5)$$

$$\frac{EA_{zz}}{\mu} \frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} \frac{1}{\phi(x)} = \omega^2 \quad (2.6)$$

Ausgehend von der entkoppelten ortsabhängigen Differentialgleichung (2.6), ist es möglich, die Eigenfunktionen für jede beliebige Lagerungsbedingung zu ermitteln. Mit dem Lösungsansatz

$$\phi(x) = e^{\lambda x} \quad (2.7)$$

kommt man, nach mehrmaligen Umformungen, auf die allgemeine Lösungsfunktion der ortsabhängigen Differentialgleichung (2.6) in reeller Schreibweise. Man bezeichnet diese als die Eigenfunktion des Balkens.

$$\phi(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x + A_3 \sinh \lambda x + A_4 \cosh \lambda x \quad (2.8)$$

mit

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EA_{zz}}} \quad (2.9)$$

Um die vier unbekanntenen Koeffizienten  $A_1, A_2, A_3, A_4$  aus der Eigenfunktion des Balkens (2.8) zu berechnen, benötigt man die Randbedingungen. Diese können in der Durchbiegung, der Verdrehung, dem Moment und der Querkraft ausgedrückt werden. Dabei bestehen folgende Beziehungen:

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (2.10)$$

$$\phi(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} q(t) \quad (2.11)$$

$$M(x, t) = -EA_{zz} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = -EA_{zz} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} q(t) \quad (2.12)$$

$$V(x, t) = -EA_{zz} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} = -EA_{zz} \frac{\partial^3 \phi(x)}{\partial x^3} q(t) \quad (2.13)$$

Im Fall des beidseitig gelenkig gelagerten Balkens werden sie im Folgenden aufgelistet:

$$w(x, t)|_{x=0} = 0 \quad w(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} M(x, t)|_{x=0} = 0 & \quad M(x, t)|_{x=L} = 0 \\ \rightarrow \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 & \quad \rightarrow \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es gibt die kinematischen (2.14) und die dynamischen Randbedingungen (2.15). Durch das Einsetzen der Randbedingungen in die Eigenfunktion des Balkens (2.8) kann man

ein homogenes lineares Gleichungssystem aufstellen. Unter Vernachlässigung der trivialen Lösung  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$  erhält man als eindeutige Lösung für die Durchbiegung des Balkens:

$$\sin(\lambda) = 0 \quad (2.16)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\lambda_j = j\pi \quad j = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.17)$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (2.9) und anschließendem Umformen erhält man die Eigenkreisfrequenz  $\omega_j$ :

$$\omega_j^2 = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \frac{EA_{zz}}{\mu} \quad (2.18)$$

und die Eigenfunktion, welche auf den Maximalwert '1' normiert ist:

$$\phi_j(x) = \sin\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) \quad (2.19)$$

#### 2.1.4 Diskretisierung

Durch die mathematische Beschreibung der Kontinuumsmechanik ergeben sich partielle Differentialgleichungen, die in der Mechanik durch verschiedene Methoden diskretisiert werden können, wodurch einfacher zu lösende, gewöhnliche Differentialgleichungen entstehen. Dabei ist das Ziel ein Ausgangssystem mit unendlich vielen Freiheitsgraden auf ein System mit einer endlichen Anzahl an Freiheitsgraden zu reduzieren. Zu den Methoden der Diskretisierung zählen unter anderem die Methode der Finiten Elemente und das Verfahren nach Ritz und Galerkin. Von letzterem wird in dieser Arbeit Gebrauch gemacht, um die Bewegungsgleichung des Bernoulli-Euler-Balkens zu diskretisieren. Im Folgenden wird es beschrieben.

##### Verfahren nach Ritz und Galerkin

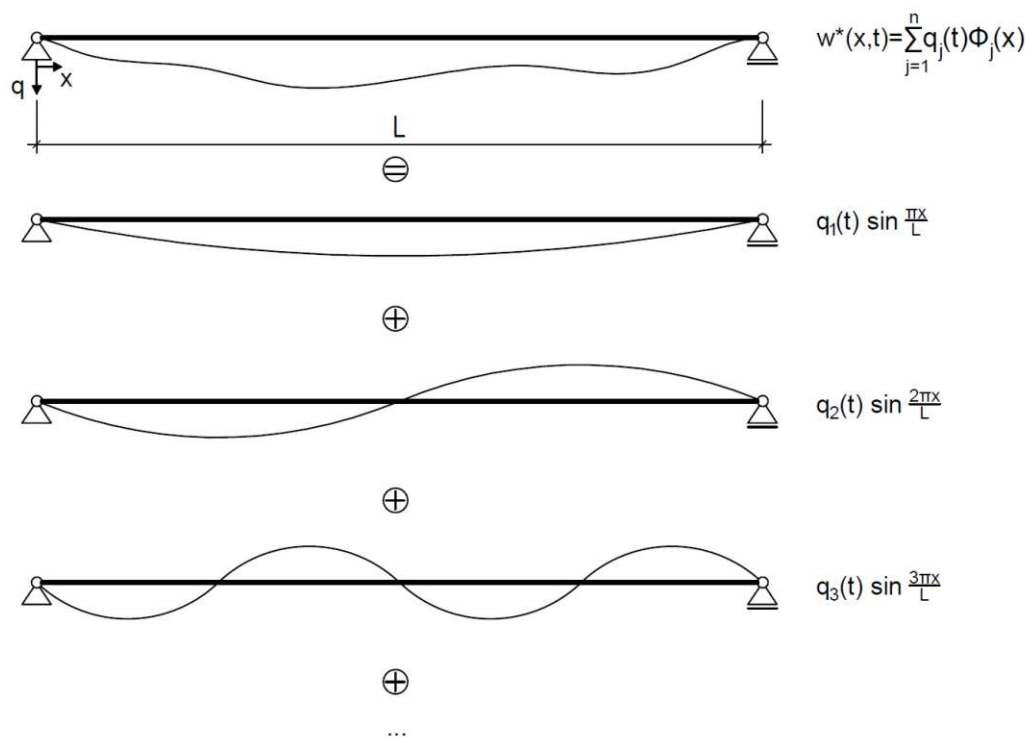
Dieses Verfahren setzt voraus, dass man die zeit- und ortsabhängige Verformungsfigur  $w(x, t)$  des Einfeldträgers aus der Summe gewichteter Ansatzfunktionen  $\phi_j(x)$  berechnet, vergleiche Ziegler [18]. Der Ritz'sche Näherungsansatz lautet:

$$w^*(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \phi_j(x) \quad (2.20)$$

Als Ansatzfunktionen müssen stetige Funktionen gewählt werden, welche den Randbedingungen des Tragwerkmodells entsprechen. Vorteilhaft sind orthogonale Ansatzfunktionen, welche folgende Bedingungen erfüllen:

$$\int_0^1 \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, m \neq n \quad (2.21)$$





**Abb. 2.1:** Ritz'sche Ansatzfunktionen für den gelenkig gelagerten Einfeldbalken

Grundsätzlich möglich sind beliebige stetige Funktionen, welche die geforderten Randbedingungen erfüllen. Vorteilhaft für die folgenden Berechnungen sind jedoch orthogonale Ansatzfunktionen, wie beispielsweise die trigonometrischen Eigenfunktionen der freien Schwingung des gewählten mechanischen Systems. Diese sind in der Abbildung 2.1 zu sehen. Werden die exakten Eigenfunktionen gewählt, spricht man von der Modalanalyse. Die generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$  beschreiben die Amplitude der entsprechenden Schwingungsformen.

### Numerische Lösung der Bewegungsgleichung des Bernoulli-Euler-Balkens

Ausgegangen wird von der Bewegungsgleichung des schubstarren, beidseitig gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler-Balkens* (2.1). Nun setzt man den *Ritz'schen Näherungsansatz* (2.20) ein, multipliziert mit dem Spaltenvektor aller berücksichtigten Eigenformen  $\phi_k$  und integriert über die Balkenlänge  $L$ .

$$\int_L \sum_{j=1}^n \left[ \mu \frac{\partial^2 q_j(t)}{\partial t^2} \phi_j(x) + c_z \frac{\partial q_j(t)}{\partial t} \phi_j(x) + EA_{zz} q_j(t) \frac{\partial^4 \phi_j(x)}{\partial x^4} \right] \phi_k(x) dx = \int_L p_z(x,t) \phi_k(x) dx \quad (2.22)$$

$$\phi_k(x) = \sin \left( \frac{\lambda_k}{L} x \right) \quad (2.23)$$

$$\lambda_k = k\pi \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

Dabei ist  $n$  die Anzahl der berücksichtigten Eigenformen.

Unter Voraussetzung bekannter Ansatzfunktionen  $\phi_j(x)$  erlaubt der *Ritz'sche Näherungsansatz* die Bewegungsgleichung anstatt mit Hilfe einer *zeit- und ortsabhängigen* Verschiebungsfunktion  $w(x, t)$  mit ausschließlich *zeitabhängigen* generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$  auszudrücken. Unter Verwendung der im Folgenden beschriebenen Definitionen erhält man die Bewegungsgleichung in Matrixschreibweise.

$$\mathbf{M}^b \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} + \mathbf{Z}^b \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{K}^b \mathbf{q} = \mathbf{p}_z \quad (2.25)$$

Unter der Bedingung, dass  $\phi_j$  und  $\phi_k$  orthogonale Spaltenvektoren sind, ergeben sich die folgenden Matrizen.

Generalisierte Steifigkeitsmatrix der Brücke

$$\mathbf{M}^b = \mu \int_L \phi_j(x) \phi_k(x) dx \quad (2.26)$$

Generalisierte Massenmatrix der Brücke

$$\mathbf{K}^b = EA_{zz} \int_L \frac{\partial^4 \phi_j(x)}{\partial x^4} \phi_k(x) dx \quad (2.27)$$

Generalisierte Dämpfungsmatrix der Brücke

$$\mathbf{Z}^b = c_z \int_L \frac{\partial^4 \phi_j(x)}{\partial x^4} \phi_k(x) dx \quad (2.28)$$

Vektor der generalisierten Lagekoordinate

$$\mathbf{q} = \int_L q_i(t) \phi_k(x) dx \quad (2.29)$$

Vektor des generalisierten Belastungsterms

$$\mathbf{p}_z = \int_L p_z(x, t) \phi_k(x) dx \quad (2.30)$$

Weil die neu formulierte Bewegungsgleichung nur aus Diagonalmatrizen und Spaltenvektoren besteht, sind alle Zeilen des Gleichungssystem voneinander unabhängige Differentialgleichungen. Dadurch können die Komponenten des generalisierten Lagekoordinatenvektors  $\mathbf{q}$  berechnet werden. Durch Einsetzen in den *Ritz'schen Ansatz* (2.20) ist die gesuchte Verschiebungsfunktion  $w(x, t)$  bekannt.

### 2.1.5 Angewandte Dämpfungsmodelle

Nach Ablauf einer gewissen Zeit wird sich jedes schwingende System in der Realität wieder in eine Ruhelage einfinden. Grund dafür ist die Energiedissipation. Dabei wird potentielle

und kinematische Energie in Wärme umgewandelt. Dieser Vorgang ist irreversibel, also nicht rückgängig zu machen. Um diesen Mechanismus in Form einer Dämpfung eines dynamischen Systems mathematisch abzubilden, gibt es verschiedene, vereinfachende Ansätze. Betrachtet man eingangs das einfache mechanische System des Einmassenschwingers so sind die Dämpfungskraft und die Schwinggeschwindigkeit linear über die Dämpfungskonstante  $c$  miteinander verknüpft. Dabei fließt das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\zeta$  über die Dämpfungskonstante in das viskose Dämpfungsmodell ein.

Das *Lehr'sche Dämpfungsmaß* [2, S. 48] oder auch Dämpfungsgrad, wird folgendermaßen definiert:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (2.31)$$

Dabei bezeichnet  $m$  die Masse und  $k$  die Federsteifigkeit des Einmassenschwingers. In der Gleichung (2.31) ist zu sehen, dass die Dämpfungskonstante  $c$  und das Dämpfungsmaß  $\zeta$  linear verbunden sind.

Betrachtet man als nächstes die Brücke als Ganzes, muss man feststellen, dass es nicht möglich ist, das Dämpfungsmaß bei Brücken mathematisch exakt zu erfassen. Jedoch können empirische Werte bei Bestandsbrücken messtechnisch in Erfahrung gebracht werden und darauf aufbauende Erwartungswerte für zukünftige Projekte angenommen werden.

Die im vorangegangenen Kapitel zur Modalanalyse erwähnte generalisierte Dämpfungsmatrix, wird mit Hilfe der Rayleigh-Methode [3] ermittelt. Diese setzt sich anteilmäßig aus der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  zusammen.

$$\mathbf{Z} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (2.32)$$

Um die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  zu ermitteln, werden zunächst zwei Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  und  $\omega_j$  gewählt. Dabei bieten sich die ersten beiden Eigenformen an. Der zur  $j$ -ten Eigenkreisfrequenz zugehörige Dämpfungsgrad  $\zeta_j$  lässt sich folgendermaßen ermitteln:

$$\zeta_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \quad (2.33)$$

Die Berechnung des  $i$ -ten Dämpfungsgrades erfolgt analog. Anschließend wird die Annahme getroffen, dass die Dämpfungsgrade für die besagten Eigenkreisfrequenzen gleich groß sind. Nach mehrmaligen Umformen erhält man:

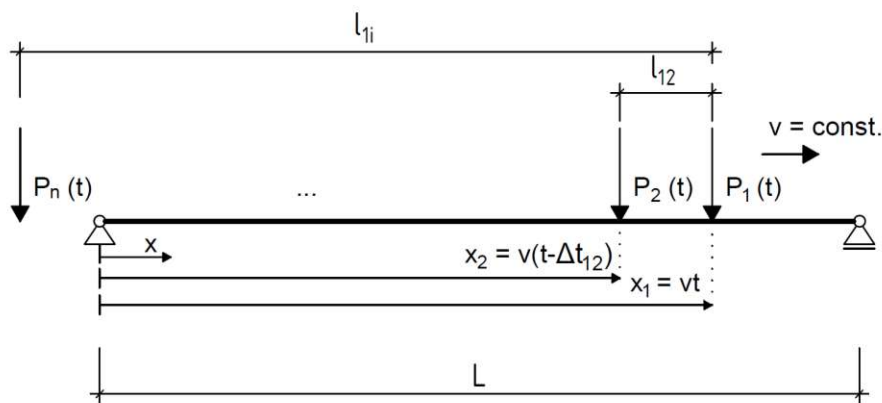
$$\alpha = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad \beta = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.34)$$

## 2.2 Fahrzeugmodelle

### 2.2.1 MLM - Moving Load Model

Das Moving Load Model (MLM) oder Einzellastmodell eines Zugs stellt ein vergleichsweise einfaches Berechnungsmodell dar, um den Lastterm  $p_z$  der Bewegungsgleichung (2.30) zu definieren. Dabei werden die dynamischen Eigenschaften und das

Schwingungsvermögen der Wagen gänzlich vernachlässigt. Ebenso werden Wechselwirkungen zwischen Zug und Brücke nicht beachtet. Dieses Modell reduziert ein Schienenfahrzeug - einen Reisezugwagen oder auch das Triebfahrzeug - auf eine Folge von vier sich bewegenden Einzellasten  $P_i$ , welche zueinander konstante Abstände beibehalten. Die Einzellasten sind als resultierende Gewichtskräfte des Schienenfahrzeugs zu verstehen, welche auf die Positionen der Radachsen aufgeteilt werden. Die Achslasten bewegen sich während der Überfahrt über das Brückentragwerk mit konstanter Geschwindigkeit  $v$ . Bei einer Aneinanderreihung von einzelnen Reisezugwagen und Triebfahrzeugen zu einem Zug kann die Anzahl und die Anordnung der Wagen beliebig gewählt werden.



**Abb. 2.2:** Modellierung des Zuges als Folge von Einzelkräften

Mathematisch lässt sich der Lastterm folgendermaßen anschreiben:

$$p_z = \sum_{i=1}^m P_i \Gamma_i(x_i) \delta(x - x_i) \quad (2.35)$$

mit der aktuellen Koordinate einer Kraft  $P_i$ :

$$x_i = vt - l_{1i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.36)$$

$m$  steht für die Gesamtanzahl der Achslasten. Es wird von der Rechteckfunktion  $\Gamma_i(x_i)$  Gebrauch gemacht. Diese definiert, ob sich zu einem bestimmten Zeitpunkt die  $i$ -te Kraft auf dem Tragwerk befindet oder nicht.

$$\Gamma_i(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x_i < L \\ 0 & \text{für } x_i < 0 \text{ oder } L < x_i \end{cases} \quad (2.37)$$

Die *Dirac'sche Deltafunktion*  $\delta(x - x_i)$  beschreibt den Angriffspunkt einer Kraft  $P_i$  an der Stelle  $x_i$ , welche mit Hilfe der Relation aus Gleichung (2.36) den Angriffspunkt zu jedem Zeitpunkt  $t$  definiert.

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } x - x_i = 0 \\ 0 & \text{für } x - x_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Unter der Voraussetzung, dass  $a$ ,  $b$  und  $\xi$  Konstanten sind und die Funktion  $f(x)$  im Intervall  $\langle a, b \rangle$  stetig ist, gilt:

$$\int_a^b \delta(x - \xi) f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi < a < b \\ f(\xi) & \text{für } a < \xi < b \\ 0 & \text{für } a < b < \xi \end{cases} \quad (2.39)$$

In weiterer Folge wird der Lastterm (2.35) in den Vektor des generalisierten Belastungsterms (2.30) eingesetzt, dabei wird die Beziehung (2.39) für die *Dirac'sche Deltafunktion* berücksichtigt und es wird angenommen, dass die Reihenfolge der Summation und der Integration vertauscht werden darf.

$$\mathbf{p}_z = \sum_{i=1}^m P_i \Gamma_i(x_i) \Phi_{\mathbf{k}} \quad (2.40)$$

Wie schon in den vorherigen Kapiteln beschrieben, wird das Brückentragwerk in der vorliegenden Arbeit als gelenkig gelagerter Balken modelliert, dessen Eigenfunktion für Transversalschwingungen  $\Phi_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  als Sinushalbwellen beschrieben wird.

$$\Phi_k(x) = \sin \frac{\lambda_k x}{L} \quad \lambda_k x = k\pi \quad (2.41)$$

Anschließend werden die Gleichungen (2.41) und (2.36) in die Gleichung (2.40) eingesetzt:

$$\mathbf{p}_z = \sum_{i=1}^m P_i \Gamma_i(x_i) \sin(\Omega t - \Theta_i) \quad (2.42)$$

mit der Erregungsfrequenz der Einzelkräfte  $P_i$ :

$$\Omega = \frac{v}{L} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

und mit der Phasenverschiebung der Einzelkräfte  $P_i$  zur Last  $P_1$ :

$$\Theta_i = \frac{l_{1i}}{L} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \Omega \Delta t_{1i} \quad (2.44)$$

Für eine geschlossene analytische Lösung der Bewegungsgleichung (2.25) in Kombination mit dem Lastterm (2.40), kann das *Duhamel'sche Faltungintegral* herangezogen werden. Es wird jedoch nicht näher darauf eingegangen, da in der vorliegenden Arbeit diese Bewegungsgleichung mit numerischer Zeitschrittintegration mit Hilfe von MATLAB gelöst wird.

## 2.2.2 DIM - Detailed Interaction Model

Das Detailed Interaction Model (DIM), bzw. das vollständige Interaktionsmodell, beschreibt ein als Mehrmassenschwinger abgebildetes Schienenfahrzeug. Die Abbildung 2.3 stellt einen vierachsigen Zugwagen mit zwei Drehgestellen grafisch dar. Die Abkürzungen, die in der Grafik Verwendung finden, stehen für die physikalische Größen, welche in der Tabelle 2.1 nachzulesen sind.

Das DIM erlaubt die Eingabe einer Vielzahl unterschiedlicher Parameter. So ist es beispielsweise möglich, die einzelnen Steifigkeiten sowohl der Primärstufe ( $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{13}$ ,  $k_{14}$ ) als auch der Sekundärstufe ( $k_{21}$ ,  $k_{22}$ ) individuell zu wählen. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch davon abgesehen und es werden einheitliche Werte für die Primärstufe ( $k_1$ ) und einheitliche Werte für die Sekundärstufe ( $k_2$ ) ausgewählt. Selbiges gilt für die Dämpfungen.

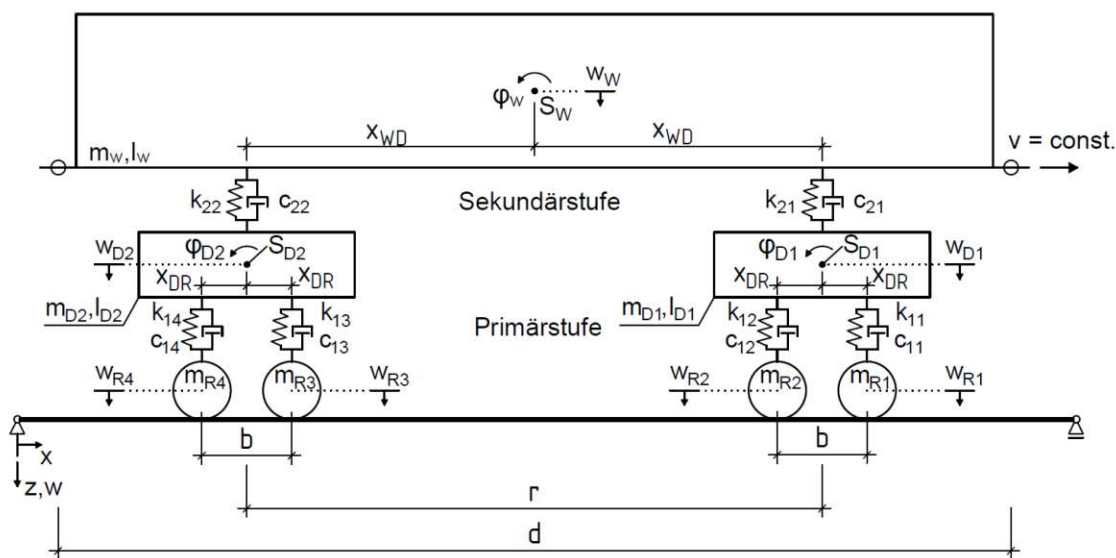


Abb. 2.3: Modellierung des Schienenfahrzeugs als Mehrkörpermodell

Jeder Zugwagen besitzt zehn Freiheitsgrade, auch Deformationsgrößen genannt. Diese beschreiben die vertikale Translation des Wagenkastens, der zwei Drehgestelle und der vier Radsätze sowie die Rotation des Wagenkastens und der zwei Drehgestelle. Als Zwangsbedingung wird eingeführt, dass ständiger Kontakt zwischen den vier Radsätzen und den Schienen herrscht. Das bedeutet, dass sowohl die Verschiebung der Radsätze  $w_{Ri}$  und die Verschiebung der Schiene  $w_i(x_i)$  an den Kontaktpunkten  $x_i$  immer die selben sind. Dadurch reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade von 10 auf 6.

Resultierend aus der Zwangsbedingung wird beim Aufstellen der zwei Bewegungsgleichungen - jener der Brücke und jener des Schienenfahrzeugs - das Gesamtsystem zwischen den Rädern und den Drehgestellen des Zuges gedanklich durchgeschnitten.

Gemäß dieser Betrachtungsweise fließen die Radsatzmassen in die Bewegungsgleichung der Brücke durch Berücksichtigung in ihrer Massenmatrix ein. Dass der Zug bei der Überfahrt seine Position kontinuierlich ändert, hat zur Folge, dass die Massenmatrix der Brücke

Tab. 2.1: Mehrkörpermodell - physikalische Größen

$x_{WD}$	$[m]$	Abstand Schwerpunkt Wagenkasten $S_W$ - Anschluss Sekundärstufe
$x_{DR}$	$[m]$	Abstand Schwerpunkt Drehgestell $S_D$ - Anschluss Primärstufe
$m_W$	$[kg]$	Masse des Wagenkastens
$m_{D1}, m_{D2}$	$[kg]$	Massen der Drehgestelle 1 und 2
$m_{R1}, m_{R2}, m_{R3}, m_{R4}$	$[kg]$	Massen Radsätze 1, 2, 3 und 4
$I_W$	$[kgm^2]$	Massenträgheitsmoment des Wagenkastens
$I_{D1}, I_{D2}$	$[kgm^2]$	Massenträgheitsmomente der Drehgestelle 1 und 2
$k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}$	$[N/m]$	Steifigkeiten der Primärstufe je Achse
$c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$	$[Ns/m]$	Dämpfungen der Primärstufe je Achse
$k_{21}, k_{22}$	$[N/m]$	Steifigkeiten der Sekundärstufe je Drehgestell
$c_{21}, c_{22}$	$[Ns/m]$	Dämpfungen der Sekundärstufe je Drehgestell
$w_W$	$[m]$	Verschiebung des Wagenkastens in vertikaler Richtung
$w_{D1}, w_{D2}$	$[m]$	Verschiebungen der Drehgestelle 1 und 2 in vertikaler Richtung
$w_{R1}, w_{R2}, w_{R3}, w_{R4}$	$[m]$	Verschiebungen der Radsätze 1, 2, 3 und 4 in vertikaler Richtung
$\varphi_W$	$[Rad]$	Verdrehung des Wagenkastens
$\varphi_{D1}, \varphi_{D2}$	$[Rad]$	Verdrehungen der Drehgestelle 1 und 2

sich in jedem Zeitschritt ändert. Zwischen der Brücke und dem Schienenfahrzeug werden dynamische Kontaktkräfte übertragen. Diese werden als äußere Einwirkungen auf das Schienenfahrzeug angesetzt und in jedem Zeitschritt neu berechnet.

Um die Bewegungsgleichung des vorliegenden Mehrkörpermodells zu formulieren, wird von dem *D'Alembert'schen Prinzip* Gebrauch gemacht. Dabei wird gemäß dem *Prinzip der virtuellen Arbeit* der Ansatz verfolgt, dass sämtliche Kräfte, welche auf einen Körper im betrachteten System wirken, zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht stehen. Demzufolge wird die Summe der virtuellen Arbeit  $\delta A$ , welche durch die inneren und äußeren Kräfte gebildet wird und die virtuelle Arbeit der Massenträgheitskräfte  $\delta A_m$  gleich Null gesetzt.

$$\delta A + \delta A_m = 0 \quad (2.45)$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte setzt sich aus den primären und sekundären Feder- und Dämpferkräften zusammen. Zu den äußeren Kräften zählen die Gewichtskräfte sämtlicher Wagenteile sowie die Kopplungskräfte, die am freigeschnittenen System zwischen Fahrzeug und Fahrbahn wirken. In die Massenträgheitskräfte fließen die Massen der einzelnen Teile des Zugwagens sowie die Massenträgheitsmomente des Wagenkastens und der Drehgestelle ein. Setzt man nun sämtliche Arten der virtuellen Kräfte in die

Gleichung (2.45) ein, führt mehrere Abkürzungen ein und formt einige Male um, so erhält man die Bewegungsgleichung eines auf einer Schiene abrollenden Mehrkörpermodells.

$$\mathbf{K}^{fz}\mathbf{u} + \mathbf{C}^{fz}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{M}^{fz}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{F}_w - \mathbf{F}_{\frac{\partial w}{\partial t}} \quad (2.46)$$

Die in der Gleichung (2.46) verwendeten Matrizen und Vektoren lauten folgendermaßen: Steifigkeitsmatrix des Schienenfahrzeuges

$$\mathbf{K}^{fz} = \begin{bmatrix} 2k_2 & 0 & -k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 2x_{WD}^2k_2 & -x_{WD}k_2 & 0 & x_{WD}k_2 & 0 \\ -k_2 & -x_{WD}k_2 & 2k_1 + k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_{DR}^2k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & x_{WD}k_2 & 0 & 0 & 2k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_{DR}^2k_1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Dämpfungsmatrix des Schienenfahrzeuges

$$\mathbf{C}^{fz} = \begin{bmatrix} 2c_2 & 0 & -c_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 2x_{WD}^2c_2 & -x_{WD}c_2 & 0 & x_{WD}c_2 & 0 \\ -c_2 & -x_{WD}c_2 & 2c_1 + c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_{DR}^2c_1 & 0 & 0 \\ -c_2 & x_{WD}c_2 & 0 & 0 & 2c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_{DR}^2c_1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Massenmatrix des Schienenfahrzeuges

$$\mathbf{M}^{fz} = \begin{bmatrix} m_W & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_W & & \\ & & m_{D1} & \vdots \\ \vdots & & & I_{D1} \\ & & & m_{D2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_{D2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Vektoren der Einwirkungen auf das Schienenfahrzeug

$$\mathbf{F}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_1w_{R1} - k_1w_{R2} \\ -x_{DR}k_1w_{R1} + x_{DR}k_1w_{R2} \\ -k_1w_{R3} - k_1w_{R4} \\ -x_{DR}k_1w_{R3} + x_{DR}k_1w_{R4} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_{\frac{\partial w}{\partial t}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_1\frac{\partial w_{R1}}{\partial t} - c_1\frac{\partial w_{R2}}{\partial t} \\ -x_{DR}c_1\frac{\partial w_{R1}}{\partial t} + x_{DR}c_1\frac{\partial w_{R2}}{\partial t} \\ -c_1\frac{\partial w_{R3}}{\partial t} - c_1\frac{\partial w_{R4}}{\partial t} \\ -x_{DR}c_1\frac{\partial w_{R3}}{\partial t} + x_{DR}c_1\frac{\partial w_{R4}}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$



Vektoren der Freiheitsgrade des Schienenfahrzeuges

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} w_W \\ \varphi_W \\ w_{D1} \\ \varphi_{D1} \\ w_{D2} \\ \varphi_{D2} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Um im nächsten Schritt den Lastterm für die Bewegungsgleichung der Brücke mathematisch auszudrücken, werden die einzelnen als Punktmassen definierten Radsätze zunächst freigeschnitten. Dabei stehen die an einem Radsatz angreifenden, dynamischen Kräfte im Gleichgewicht mit der statischen Aufstandskraft  $F_{sti}$  unter dem freigeschnittenen,  $i$ -ten Rad. Das dynamische Gleichgewicht wird folgendermaßen formuliert:

$$P_i(x_i, t) = F_{sti}(t) - F_{k1i}(t) - F_{c1i}(t) - m_{Ri} \frac{\partial^2 w_{R,i}(x_i, t)}{\partial t^2} \quad (2.52)$$

$F_{k1i}$  und  $F_{c1i}$  sind die modalen Kopplungskräfte der Primärstufe und  $P_i(x_i)$  ist die Kontaktkraft zwischen Radsatz und Brücke. Der letzte Term des dynamischen Gleichgewichts beschreibt die Trägheitskräfte des Radsatzes, die sich zufolge der Zwangsbedingung von Radsatz und Brückentragwerk in dieser Form ausdrücken lassen. Mit der zeitveränderlichen Kraft  $P_i(x_i)$  kommt man auf den generalisierten Belastungsvektor  $\mathbf{p}_x$ , der nun in die Bewegungsgleichung des *Bernoulli-Euler-Balkens* (2.25) eingesetzt wird:

$$\mathbf{M}^b \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} + \mathbf{Z}^b \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{K}^b \mathbf{q} = \sum_{i=1}^m \left\{ F_{sti}(t) - F_{k1i}(t) - F_{c1i}(t) - m_{Ri} \frac{\partial^2 w_{R,i}(x_i, t)}{\partial t^2} \right\} \Gamma_i(x_i) \phi(x_i) \quad (2.53)$$

Dabei ist  $m$  die Anzahl der Radsätze eines Zugs.

Zufolge der Zwangsbedingung (2.54) stehen das Brückentragwerk und die Radmassen im ständigen Kontakt. Mit Bezug auf den zweifach zeitlich abgeleiteten *Ritz'schen Näherungsansatz* (2.20) erhält man die Brückenbeschleunigung  $\frac{\partial^2 w_B^*(x_i, t)}{\partial t^2}$ .

$$\frac{\partial^2 w_{R,i}(x_i, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_B^*(x_i, t)}{\partial t^2} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 w_B^*(x_i, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^n \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 q_j(t)}{\partial t^2} \phi_j(x_i)}_{\text{vertikale Beschleunigung}} + \underbrace{2v \frac{\partial q_j(t)}{\partial t} \frac{\partial \phi_j(x_i)}{\partial x}}_{\text{Coriolisbeschleunigung}} + \underbrace{v^2 q_j(t) \frac{\partial^2 \phi_j(x_i)}{\partial x^2}}_{\text{Zentripetalbeschleunigung}} \right] \quad (2.55)$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad n = \text{Anzahl der berücksichtigten Eigenformen}$$

Die einzelnen Terme beschreiben zum einen die vertikale Beschleunigung  $\frac{\partial^2 w_B(x_i, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 q_j(t)}{\partial t^2} \phi_j(x_i)$  des Balkens, zum anderen die *Coriolisbeschleunigung* zufolge der Rotationsgeschwindigkeit des Querschnitts sowie der *Zentripetalbeschleunigung* zufolge der

Krümmung des Balkens.

Weil die beiden Subsysteme, Brückentragwerk und Zug, über die Federkräfte  $F_{k1i}$  und Dämpferkräfte  $F_{c1i}$  der Primärstufe miteinander gekoppelt sind und, weil die Radsatzmassen des Schienenfahrzeugs der Massenmatrix aus der Bewegungsgleichung des Balkens zugeordnet sind, müssen die Bewegungsgleichung des Schienenfahrzeugs (2.46) sowie die Bewegungsgleichung der Brücke (2.53) für jeden Zeitschritt iterativ und abhängig voneinander gelöst werden. Die ausführlichen Herleitungen können beispielsweise [8, S. 71-80, 111-113] entnommen werden.

### 2.2.3 Numerische Auswertung

Um die in den vorherigen Kapiteln 2.2.1 und 2.2.2 beschriebenen Differentialgleichungen numerisch zu lösen, hat Tobias Mähr 2008 am Forschungsbereich für Stahlbau der Technischen Universität Wien MATLAB- und Simulink-Codes erstellt. Die ursprünglichen Quellcodes sind in den letzten Jahren überarbeitet und weiterentwickelt worden. Das in der vorliegenden Arbeit verwendete Programm bezieht sich auf einen gelenkig gelagerten Einfeldträger, für welchen die Bewegungsgleichung nach der Baken Theorie nach Bernoulli-Euler mathematisch formuliert wurde, siehe Gleichung (2.1). In der Tabelle 2.2 sind die Eingabedaten zu sehen, welche die unterschiedlichen Parameter der Brücke beschreiben und zu Beginn der Berechnung anzugeben sind.

**Tab. 2.2:** Brückenparameter

Parameter des Brückentragwerks		
$L$	[m]	Spannweite
$f_0$	[Hz]	Eigenfrequenz
$\mu$	[kg/m]	Massenbelegung
$\zeta$	[-]	Dämpfung
$EA_{zz}$	[Nm <sup>2</sup> ]	Biegesteifigkeit

In MATLAB [15] gibt es neben dem Haupt-Skript, das auch Simulationsprogramm genannt wird und in dem die dynamischen Berechnungen stattfinden, unter anderen ein separates Skript, in dem charakteristische Eigenschaften der einzelnen Wagen gespeichert werden. Diese Eigenschaften eines solchen Wagens sind in der Tabelle 2.1 angegeben. Außerdem werden die einzelnen Wagen in beliebiger Anordnung und Anzahl zu Zügen aneinander gereiht. Anschließend wird ein solches Zugmodell in das Simulationsprogramm importiert. Von Vorteil ist, dass man so einfach auf unterschiedliche Zugmodelle zurückgreifen kann. Im Simulationsprogramm besteht auch die Möglichkeit die Anzahl der Brückeneigenformen zu wählen. Entsprechend den Vorgaben nach Eurocode 0 Abschnitt A2.4.4.2.1 [4] wurden in der vorliegenden Arbeit drei Brückeneigenformen berücksichtigt. Wegen der besseren Vergleichbarkeit werden die Beschleunigungen und Durchbiegungen der Brücke ausschließlich in Feldmitte verglichen. Das Simulationsprogramm würde es auch erlauben, die Beschleunigungen und Durchbiegungen an anderen Stellen der Brücke, beispielsweise an den Viertelpunkten, auszugeben.

Um die vorliegenden Differentialgleichungen iterativ zu lösen, bietet sich die Verwendung des in MATLAB integrierten Solver *ode15s* (*Ordinary Differential Equations*) an. Dieser Solver bedient sich einem impliziten Lösungsverfahren. Er ist gut geeignet für so genannte *steife Anwendungsprobleme*. Der Solver kann selbstständig eine optimale Diskretisierung der Integrationssschritte vornehmen und aktualisiert diese fortlaufend. Der im Simulationsprogramm anzugebende Auswertungszeitschritt  $\Delta t$  ist zum einen der Maximalwert der Integrationszeitschritte und zum anderen ist er für die Genauigkeit der Ergebnisdarstellung verantwortlich. Sowohl für das Berechnungsmodell MLM als auch DIM werden geschwindigkeitsabhängige Auswertungszeitschritte nach  $\Delta t = \frac{1}{10v}$  gewählt. Für realistische Geschwindigkeiten von Hochgeschwindigkeitszügen im Bereich von  $100 \text{ km/h}$  bis  $300 \text{ km/h}$  ergeben sich Auswertungszeitschritte  $\Delta t$  von  $\Delta t(v = 100 \text{ km/h}) = \frac{1}{10 \cdot 27,78 \text{ m/s}} = 0,0036 \text{ s}$  bzw. von  $\Delta t(v = 300 \text{ km/h}) = \frac{1}{10 \cdot 83,33 \text{ m/s}} = 0,0013 \text{ s}$ .

Um die Rechenzeit des Simulationsprogrammes deutlich zu verkürzen, bietet sich an, die Berechnung mit Hilfe der MATLAB-Erweiterung *Parallel Computing Toolbox* [16] auch auf andere Kerne des Prozessors auszulagern. Das funktioniert beispielsweise bei expliziten Integrationsverfahren, wenn Berechnungsparameter unabhängig von vorherigen Lösungen sind. Das implizite Lösungsverfahren des *ode15s* Solver kann damit nicht mehrere Kerne parallel verwenden. Was jedoch parallel berechnet werden kann, sind Geschwindigkeitsfolgen, da für jede Geschwindigkeit die dazugehörige Bewegungsgleichung separat gelöst wird.

## 2.3 Modell für Tragwerk und Oberbau

Um seitens des Brückenüberbaus eine größere Modellierungstiefe zu erlangen, besteht die Möglichkeit, die Interaktionsdynamik zwischen Oberbau und Tragwerk abzubilden. Im Kapitel 2.1 werden im Gegensatz dazu die Eigenschaften von Tragwerk und Oberbau im beschriebenen schubstarrten Bernoulli-Euler-Balken zusammengefasst. Das komplexere Mehrkörpermodell des Tragwerks wird als Koppelträgermodell bezeichnet. Dabei werden Schiene und Schwelle, die zusammen als Gleisrost bezeichnet werden, als separater schubstarrer Bernoulli-Euler-Balken modelliert und mit Wegfedern und viskosen Dämpferelementen an einen zweiten Bernoulli-Euler-Balken, der die Tragkonstruktion repräsentiert, gekoppelt. Durch die komplexere Modellierung ist es möglich, die realen Gegebenheiten genauer wiederzugeben und dadurch realitätsnahe Rechenergebnisse von Auslenkung und Beschleunigung des Tragwerks zu erhalten. Gleichzeitig ist dieses detaillierte Modell weitaus rechenintensiver und es sind mehr Eingangsparameter nötig, wie die Schottersteifigkeit  $\bar{k}_{ba}$  und die Schotterdämpfung  $\bar{c}_{ba}$  die zur Berechnung der Steifigkeits- und Dämpfungskennwerte der Feder- und Dämpferelemente der vertikalen Kopplung verwendet werden. Durch die elastische Modellierung des Schotters beachtet man die günstige lastverteilende Wirkung des Oberbaus. Um Rechenaufwand einzusparen, ist es von Vorteil, die lastverteilende Wirkung bei einfachen Balkenmodellen durch die Aufteilung der Achslasten vereinfacht nachzubilden. Wie die Verteilung erfolgt, richtet sich nach der festgelegten Steifigkeit von

Schiene und Bettung.

In der Abbildung 2.4 ist sowohl ein realitätsnahes Modell zu sehen, gezeigt am Beispiel des Koppelträgermodells, als auch ein einfacheres Modell, repräsentiert durch den abgebildeten *Bernoulli-Euler-Balken*.

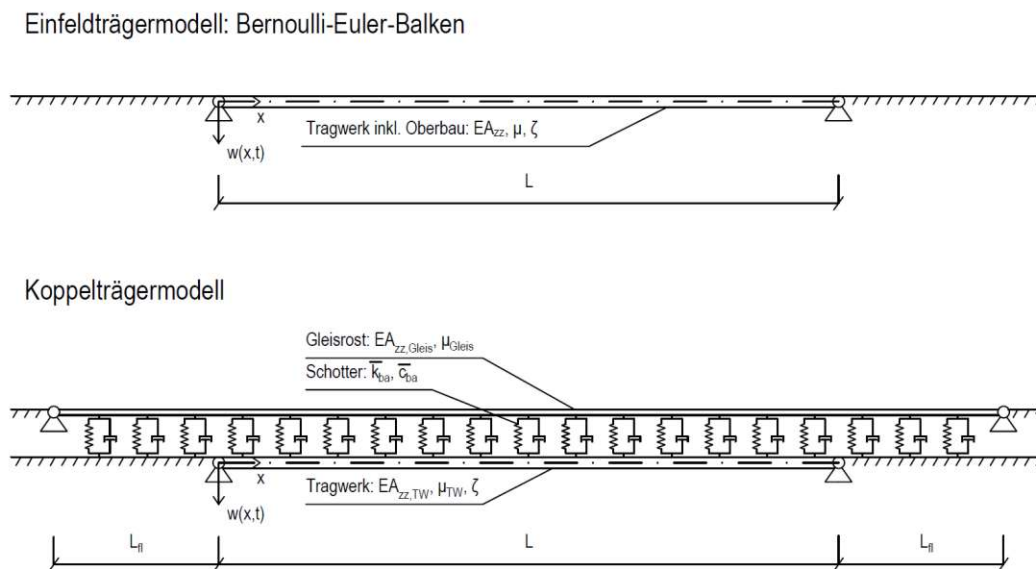


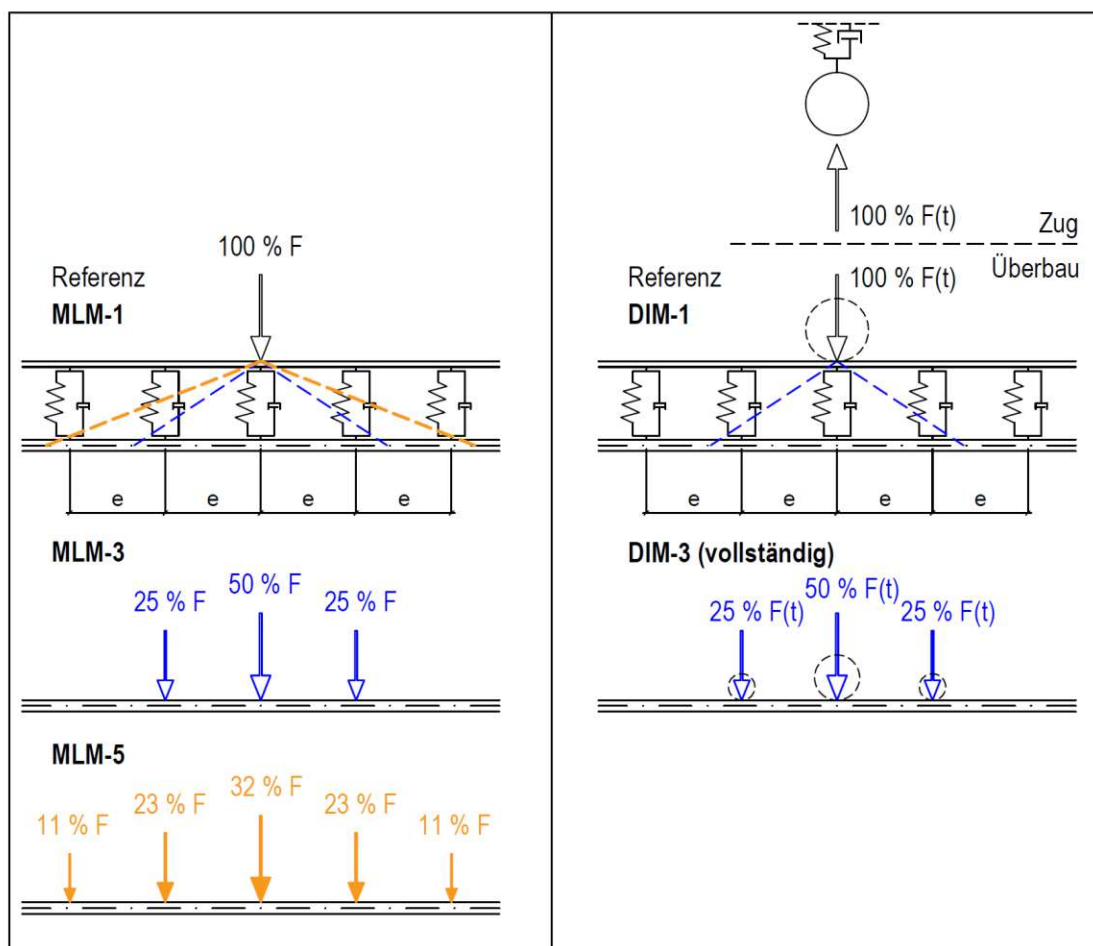
Abb. 2.4: Möglichkeiten des Überbaumodells

Weil Berechnungen mit Einzellastmodellen für Brücken mit kleineren Einflusslängen als  $10\text{ m}$  die dynamischen Effekte auf das Tragwerk zufolge einer Zugüberfahrt überschätzen, empfiehlt der Eurocode 1 [5] im Abschnitt 6.4.6.4 für diese kurzen Tragwerke die lastverteilende Wirkung durch Schiene und Schwelle miteinzubeziehen. Einzellasten dürfen dazu über drei Schienenstützpunkte im Abstand zweier Schwellen  $e$  von jeweils  $60\text{ cm}$  im Verhältnis  $25\% - 50\% - 25\%$  aufgeteilt werden. In [12] untersucht Rauter unter anderem, wie sich eine Variation der Schottersteifigkeit auf die Einflussbreite der Lastverteilung auswirkt. Zu diesem Zweck erstellt er ein FE-Modell, welches eine  $12\text{ m}$  lange  $60E1$  Gleischiene ( $I = 3055\text{ cm}^4$ ,  $E = 210.000\text{ N/mm}^2$ ) abbildet, die über Federn im Abstand von  $60\text{ cm}$  mit dem Unterbau gekoppelt ist und durch eine Einzellast beansprucht wird. Als Stützpunktsteifigkeit wählt der Autor  $k_c = 45\text{ kN/m}$  und als Einzellast  $Q = 200\text{ kN}$ . Mit den gewählten Parametern wird die Einzellast beinahe ausschließlich über 5 Schienenstützpunkte ins Tragwerk eingeleitet. In Anlehnung an seine Ergebnisse wird für die folgende Parameterstudie eine prozentuelle Aufteilung von  $11\% - 23\% - 32\% - 23\% - 11\%$  neben der Aufteilung laut Eurocode verwendet.

In weiterer Folge wird das *Moving Load Model* ohne Lastaufteilung als MLM-1 bezeichnet. Erfolgt eine Lastaufteilung auf drei Kräfte wird das Berechnungsmodell als MLM-3 bezeichnet und bei einer Lastaufteilung auf fünf Kräfte als MLM-5.

Die auf die Brücke einwirkende Kraft beim *Detailed Interaction Model* besteht neben der statischen Aufstandskraft auch aus dynamischen Anteilen. In der Abbildung 2.5 ist die

vollständige Aufteilung aller Kraftanteile auf drei Kräfte dargestellt, diese wird als DIM-3 bezeichnet. In der nachfolgenden Vorstudie wird näher auf die Aufteilungsmöglichkeiten der Kraftanteile eingegangen. Die Aufteilung auf fünf Kräfte würde beim *Detailed Interaction Model* analog zur Aufteilung auf 3 Kräfte funktionieren, jedoch wird in der vorliegenden Arbeit diese Variante des Lastmodells nicht verwendet und deshalb auch nicht in der Abbildung 2.5 dargestellt.



**Abb. 2.5:** Schematische Darstellung der Lastverteilung für das Einzellastmodell (MLM - links) und das Mehrkörpermodell des Zuges (DIM - rechts)

## 2.4 Einflussparameter

Im folgenden Kapitel wird ein Überblick über charakteristische Parameter gegeben, die Einfluss auf die dynamische Antwort einer Brücke zufolge einer regelmäßigen Belastung haben. Bestimmt wird das dynamische Verhalten der Brücke, durch physikalische Eigenschaften seitens der Brücke selbst sowie seitens des überfahrenden Zugs.

### 2.4.1 Brückenparameter

Bei den Brückenparametern handelt es sich um physikalische Größen, welche als Eingangswerte der dynamischen Simulation die Brücke idealisiert abbilden. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird eine Parameterstudie erstellt, die den Einfluss der verschiedenen Brückenparameter auf die Beschleunigung und Durchbiegung der Brücke im Resonanzfall untersucht, vergleiche dazu Kapitel 4. Da diese Studie den Hauptteil der vorliegenden Arbeit bildet, wird bei den nun folgenden Beschreibungen der einzelnen Parameter des Öfteren Bezug auf die gewählten Parameter in der später durchgeführten Studie genommen.

#### Frequenzen

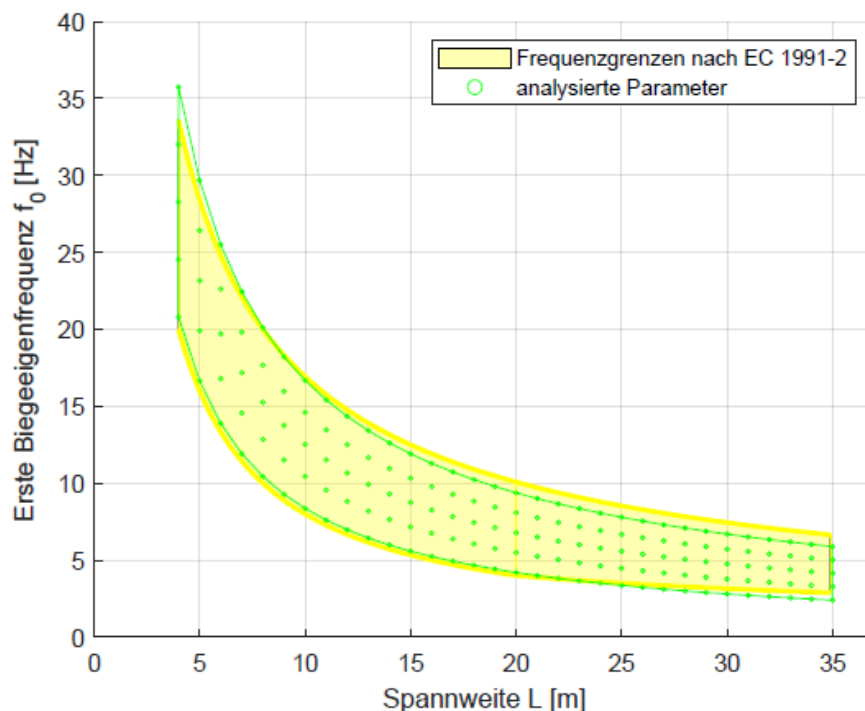
Um ein Parameterfeld von Biegeeigenfrequenzen für die folgende Parameterstudie aufzustellen, orientiert sich die Autorin an jenem Parameterfeld, das Glatz und Fink [6] für ihre Studie zur fiktiven Zusatzdämpfung aufgestellt haben. Dabei haben Glatz und Fink 210 existierende Brücken aufbereitet und spannenweitenabhängige Funktionen für Biegeeigenfrequenzen erstellt. Alle Brücken sind eingleisige Einfeldträger mit Spannweiten, die nicht mehr als 40 m betragen. Dabei handelt es sich um Stahl-, Verbund-, Beton- und WIB-Brücken. Als Zusammenhang von Spannweite und erster Biegeeigenfrequenz wurde für die 210 betrachteten Brücken eine Potenz-Regressions-Funktion in Form von  $f_0 = aL^b$  (bzw. gemäß [6]  $n_0$ ) gewählt. Die Regressionsgleichung lautet:  $f_{0,Reg} = 97,76L^{-0,9124}$  (bzw. gemäß [6]  $n_{0,fit}$ ). Die Berandung des Parameterfeldes wurde durch die Konfidenzintervalle von 95 % definiert. Daraus ergibt sich zum einen die untere Begrenzung  $f_{0,u} = 82,43L^{-0,9937}$  (bzw. gemäß [6]  $n_{0,LB}$ ) und zum anderen die obere Begrenzung  $f_{0,o} = 113,1L^{-0,8312}$  (bzw. gemäß [6]  $n_{0,UB}$ ). Die, für die Parameterstudie der vorliegenden Arbeit gewählten Kombinationen aus Tragwerksspannweite und erster Biegeeigenfrequenz, sind in der Abbildung 2.6 als grüne Kreise dargestellt. Für die Spannweiten von 4 bis 35 m wurden für jeden Spannweiteschritt von einem Meter fünf Biegeeigenfrequenzen gewählt: die Werte von  $f_{0,u}$ ,  $f_{0,o}$ , sowie drei Werte dazwischen mit jeweils äquidistanten Abständen. Eine Aufteilung der Brücken in Beton- und WIB-Brücken sowie in Stahl- und Verbundbrücken würde laut Glatz und Fink zu beinahe deckungsgleichen Parameterfeldern führen.

In Abbildung 2.6 ist in gelb hervorgehoben der Bereich der ersten Eigenfrequenzen zu sehen, für die laut Eurocode [5] Abschnitt 6.4.4 definiert, ob eine dynamische Berechnung erforderlich ist oder nicht. Sind die spannenweitenabhängigen Frequenzgrenzen und andere Voraussetzungen (örtlich zulässige Geschwindigkeit, Brückentyp, Spannweite des Tragwerks, Verhältnis von Torsionseigenfrequenz und Biegeeigenfrequenz der Brücke) eingehalten, kann eine statische Berechnung mit dynamischem Überhöhungsfaktor  $\Phi$  ausreichend sein. In Abbildung 2.6 ist zu sehen, dass die gewählten ersten Biegeeigenfrequenzen für die nachfolgende Parameterstudie den Grenzfällen des Eurocodes 1 [5] sehr ähnlich sind.

Mathematisch lässt sich die ungedämpfte erste Biegeeigenfrequenz  $f_0$  des beidseitig gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler-Balkens* folgendermaßen ausdrücken:

$$f_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA_{zz}}{\mu L^4}} \quad (2.56)$$





**Abb. 2.6:** Frequenzgrenzen gemäß Eurocode 1 und Parameterfeld von spannweitenabhängigen ersten Biegeeigenfrequenzen

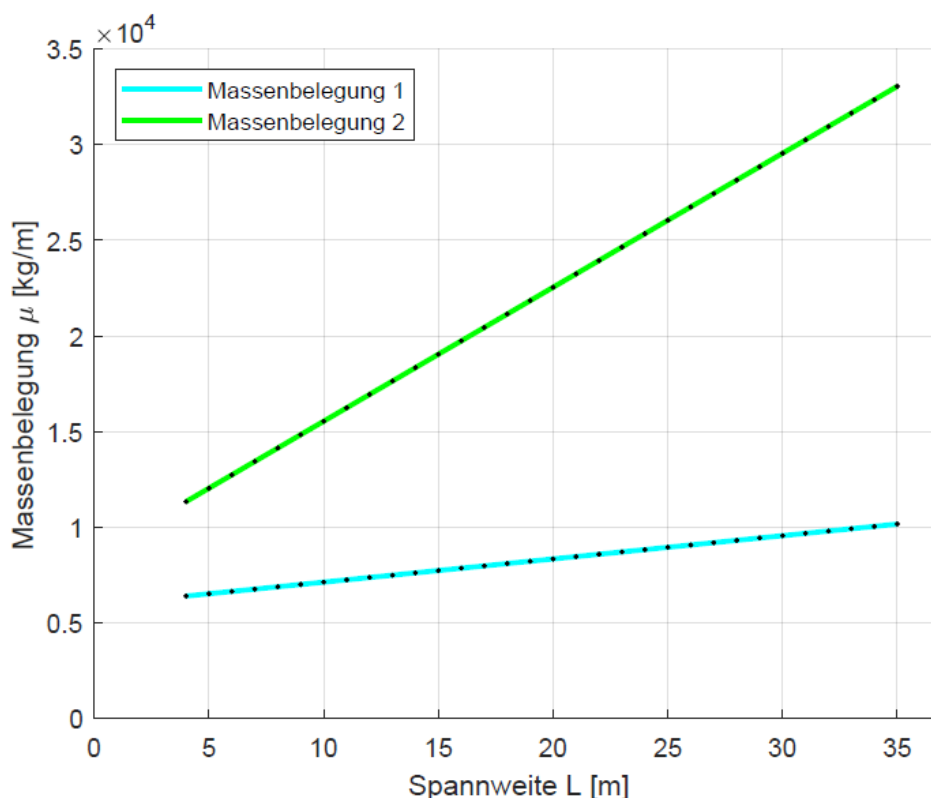
Sie wird aus der Spannweite  $L$ , der Massenbelegung  $\mu$  und der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  der Brücke gebildet.

Entsprechend der Annahmen im Simulationsprogramm können keine Torsionsfrequenzen dargestellt werden. Die angreifenden Belastungen werden zentrisch in der Stabachse modelliert, wodurch dreidimensionale Effekte ausgeschlossen werden. Laut Eurocode 1 [5] Abschnitt 6.4.4 müssen Torsionsschwingungen jedoch auch für den Schwingungsnachweis herangezogen werden, sollte die erste Torsionseigenfrequenz die erste Biegeeigenfrequenz um nicht mehr als 20 % übertreffen.

### Massenbelegung

Die Masse der Tragkonstruktion lässt sich bei praktischen Anwendungen für bestehende Brücken über die Abmessungen der Brücke relativ genau beziffern. Anders sieht es beim darüberliegenden Schotterbett aus, dessen Lagerungsdichte problematisch zu bestimmen ist. In [6] haben Glatz und Fink neben den Biegeeigenfrequenzen der 210 existierenden Brücken auch die Massenbelegung mathematisch erfasst. Um eine gewisse Korrelation der Massenbelegung zur Spannweite der Brücke festzustellen, ist es notwendig die Tragwerke zu kategorisieren. Eingeteilt werden diese in Stahl- und Verbundbrücken sowie in Stahlbeton- und WIB-Brücken. Es wurden zwei separate lineare Regressionsfunktionen in der Form  $\mu(L) = kL + d$  angesetzt. Daneben haben Glatz und Fink auch jeweils die oberen und unteren Schranken in Form von Konfidenzintervallen von 95 % angesetzt. Aus Gründen der einfacheren Datenverarbeitung liegt der Fokus im Verlauf der vorliegenden Arbeit auf

nur zwei unterschiedlichen Massenbelegungen, nämlich jeweils auf den sich aus Regressionsfunktionen ergebenden Massenbelegungen:  $\mu_{St}(L) = 0,1214L + 5,918$  (bzw. gemäß [6]  $\mu_5$ ) für Stahl- und Verbundbrücken, im Folgenden als Massenbelegung 1 bezeichnet und  $\mu_B(L) = 0,7002L + 8,539$  (bzw. gemäß [6]  $\mu_2$ ) für Beton- und WIB-Brücken, im Folgenden als Massenbelegung 2 bezeichnet.



**Abb. 2.7:** längenspezifische Massenbelegungen

Diese Variation der Massenbelegung wurde gewählt, da leichtere Brücken zu größeren Beschleunigungsspitzen führen und bei den schwerere Brücken Resonanzeffekte schon bei niedrigeren Geschwindigkeiten auftreten. Beide Wirkungen sind bei der Planung einer Brücke kritisch zu betrachten.

### Spannweite

Der Eurocode 1 [5] nimmt an, dass für Brücken mit einer Spannweite über 30 m Effekte aus Fahrzeug-Brücken-Interaktionen nicht mehr besonders ausschlaggebend sind. In der Regel werden Brücken mit Spannweiten unter 10 m, die im Bereich von Hochgeschwindigkeitsstrecken eingesetzt werden, als Rahmen- oder Integralbrücken ausgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit hat die Autorin in Anlehnung an die zuvor erläuterten längenspezifischen Festlegungen Tragwerke im Spannweitenbereich von 4 - 35 m für die nachfolgende Parameterstudie gewählt. Größere Spannweiten  $L$  sind aufgrund der konstruktiven Ausführung in der Regel mit niedrigeren Biegeeigenfrequenzen verbunden. Weil die Spannweite  $L$  mit einer



höheren Potenz als die Massenbelegung  $\mu$  in die Berechnung der Biegeeigenfrequenzen eingeht, siehe (2.56), hat die Spannweite  $L$  den größeren Einfluss auf die Reduktion der kritischen Geschwindigkeiten.

### Biegesteifigkeit

Die Formel (2.56) beschreibt die ungedämpfte erste Biegeeigenfrequenz  $f_0$  des beidseitig gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler-Balkens*. Sind drei der vier in Gleichung (2.56) einfließenden Brückenparameter ( $L$ ,  $f_0$ ,  $\mu$ ,  $EA_{zz}$ ) bekannt, lässt sich die vierte leicht berechnen. In der folgenden Parameterstudie werden die Spannweite  $L$ , die erste Biegeeigenfrequenz  $f_0$  sowie die Massenbelegung  $\mu$  für die untersuchten Tragwerke gewählt und der unbekannte Parameter der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  kann rechnerisch ermittelt werden. Gerade für Betonkonstruktionen ist es vorteilhaft, die brückenspezifische Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  auf diese Weise zu bestimmen, da diese durch die Rissbildung und zeitabhängige Materialänderungen nur anhand geometrischer Informationen schwierig abzuschätzen ist.

### Dämpfung

Im Eurocode 1 findet man spannweitenabhängige Vorgaben zur Tragwerksdämpfung, die als untere und sehr konservative Grenze der Dämpfung angesehen werden kann. Diese reichen von 0,5 % bzw. 1,5 % (bei längeren Brücken) bis zu knapp unter 3 % (bei sehr kurzen Brücken)[5, S. 71-80]. Es wird nach Bauart der Brücken unterschieden. Um die nachfolgende Parameterstudie übersichtlicher zu gestalten, wird von einer spannweitenabhängigen Dämpfung abgesehen. Um jedoch den Einfluss der Dämpfung auf die Ergebnisse der dynamischen Berechnung beurteilen zu können, werden für alle untersuchten Tragwerke zwei unterschiedliche Dämpfungen gewählt. Mit einem Dämpfungsmaß von 1 % und 2 % liegen diese innerhalb der normativen Vorgaben.

### Geschwindigkeit

Durch die regelmäßigen Kräfte mit Abstand  $x$ , die sich mit konstanter Geschwindigkeit über das Tragwerk bewegen, wird ein Schwingungszustand des Tragwerks erzwungen. Liegt die Frequenz dieses Schwingungszustandes nahe bei der Eigenfrequenz des Tragwerks oder auch eines Vielfachen davon, sind große Schwingungsamplituden möglich. Dieses Ereignis wird als Resonanz bezeichnet. Für dynamische Nachweise sind insbesondere die daraus resultierende übermäßigen Beschleunigungen relevant. Die Geschwindigkeit mit welcher sich die Lasten im Resonanzfall über die Brücke bewegen, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$v_{xi} = \frac{f_0 \cdot x}{i} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.57)$$

Die resonanzerzeugende Geschwindigkeit  $v_{xi}$  ist abhängig von den regelmäßigen Abständen der Lasten des Zuges (Länge über Puffer  $d$ , Drehgestellabstand  $b$  oder Radsatzabstand  $r$ ) und von der ersten Biegeeigenfrequenz der Brücke. In den folgenden Auswertungen sind insbesondere die Resonanzgeschwindigkeiten  $v_{di}$  zufolge der Gesamtlänge der Zugwagen explizit ausgewertet, da bei diesen in der Regel die maßgebenden Beschleunigungsmaxima ausbilden. Gänzlich unabhängig von der Einwirkung des Zuges ist die Auslöschungsgeschwindigkeit  $v_{ci}$ , welche beispielsweise von Yang et al. [17] untersucht wurde. Dabei kommt

es zur selbstinduzierten Dämpfung der Schwingung. Diese Auslöschungsgeschwindigkeit ist dominant gegenüber der Resonanzgeschwindigkeit. Das bedeutet, dass, für den Fall, dass die Resonanzgeschwindigkeit und die Auslöschungsgeschwindigkeit zusammenfallen, der Resonanzfall unterdrückt wird und es zu keinen übermäßig großen Schwingungsamplituden kommt.

$$v_{ci} = \frac{2 \cdot f_0 \cdot L}{2i - 1} \quad (2.58)$$

Der Eurocode 1 [5] verlangt Resonanzereignisse bis zum 1,2-fachen der örtlich zugelassenen Geschwindigkeit zu untersuchen.

### 2.4.2 Zugkonfigurationen

Abhängig von der Art der Modellierung des überfahrenden Zuges müssen unterschiedlich viele technische Daten dessen als Eingangsparameter bekannt sein. Für das *Moving Load Model* sind die statischen Achslasten im Abstand der Radsatzachsen notwendig. Diese Abstände der Kräfte sind abhängig von der Gesamtlänge des Zugwagens über Puffer  $d$ , der Drehgestellachsen  $r$  sowie der Radsatzachsabstände eines Drehgestells  $b$ , vergleiche dazu Abbildung 2.3. Dabei ist  $r$  der zweifache Abstand vom Schwerpunkt des Wagenkastens zum Anschluss der Sekundärstufe  $2 \cdot x_{WD}$  und  $b$  ist der zweifache Abstand vom Schwerpunkt des Drehgestells zum Anschluss der Primärstufe  $2 \cdot x_{DR}$ . Zusätzlich müssen für das *Detailed Interaction Model* die Massen und Massenträgheitsmomente sämtlicher Zugwagenelemente und die Feder- und Dämpferkoeffizienten der Primär- und Sekundärstufe bekannt sein. So ist es möglich, Zugmodelle mit üblichen Zugkonfigurationen zu erzeugen. Diese Herangehensweise bietet sich an, wenn der Fokus der dynamischen Untersuchung auf dem Einfluss unterschiedlicher Brückenparameter liegt. Werden hingegen auch charakteristische Parameter des überfahrenden Zuges betrachtet, bietet es sich an, dimensionslose Verhältnisse bezüglich Längen, Massen, Frequenzen und Dämpfungen zwischen Brücke und Zug zu bilden. Im weiteren Verlauf werden Zugkonfigurationen dargestellt, wie sie auch in den Berechnungen dieser Arbeit Verwendung finden. Untersucht werden zwei verschiedene Hochgeschwindigkeitszüge: Der *Railjet* der *Österreichische Bundesbahnen-Holding AG* und der *ICE 4* der *Deutsche Bahn AG*. Beide bestehen aus vertikal entkoppelten Zugwagen mit je zwei Drehgestellen.

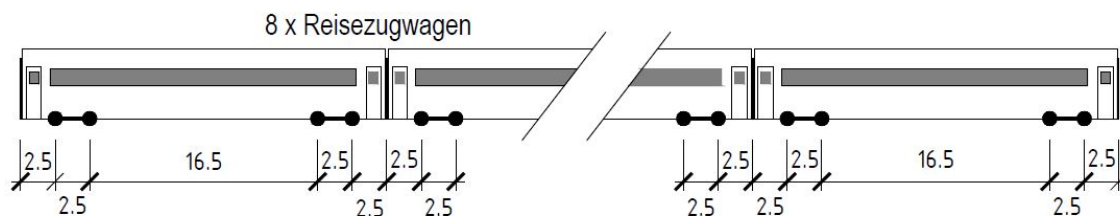
#### Railjet

Seit 2008 verkehrt der *Railjet* oder abgekürzt als RJ, mit bis zu 230 *km/h* in Österreich und angrenzenden Ländern. Eine übliche Railjetkonfiguration besteht laut [10] Anhang A, aus einem Triebwagen an einem Ende, mehrere Personenwagen in der Mitte und einem Steuerwagen am anderen Ende. Alternativ können auch an beiden Enden Triebwagen und im mittleren Bereich zwischen den Personenwagen zwei Steuerwagen angeordnet sein. Möglich sind auch zwei Triebwagen im mittleren Bereich und zwei Steuerwagen an den Enden. Die Steuerwagen unterscheiden sich bezüglich der Gewichtskräfte nicht und hinsichtlich der Achsabstände nur schwach von den Personenwagen. Als überfahrender Zug für die Vorstudie wird eine Konfiguration gewählt, die aus acht Personenwagen ohne Triebwagen besteht. Dadurch wird erwartet, dass die Effekte der Lastverteilung auf den Resonanzfall

besser erkennbar sind und nicht durch mögliche Effekte zufolge unterschiedlicher Massen und Lastabstände von Triebwagen und Personenwagen beeinflusst werden. Die ÖBB besitzt verschiedene Personenwagen für die unterschiedlichen Komfortklassen und diese unterscheiden sich leicht in ihren Kennwerten. Vereinfachend werden für den überfahrenden Zug nur Standard-Personenwagen der *Economy Class* gewählt. Die Fahrzeugkennwerte sind dem Artikel aus *Engineering Structures* von Glatz und Fink [6] entnommen.

**Tab. 2.3:** Fahrzeugdaten für den *Railjet*

Parameter	Einheit	Personenwagen
Masse Wagenkasten $m_W$	[kg]	47.316
Trägheitsmoment Wagenkasten $I_W$	[kgm <sup>2</sup> ]	3.070.000
Masse Drehgestell $m_D$	[kg]	2.800
Trägheitsmoment Drehgestell $I_D$	[kgm <sup>2</sup> ]	1.700
Masse Radsatz $m_R$	[kg]	1.900
primäre Federsteifigkeit $k_1$	[N/m]	1.690.000
sekundäre Federsteifigkeit $k_2$	[N/m]	280.000
primäre Dämpfung $c_1$	[Ns/m]	20.000
sekundäre Dämpfung $c_2$	[Ns/m]	14.000
Achsabstand der Radsätze eines Drehgestells $b$	[m]	2,50
Achsabstand der Drehgestelle eines Wagens $r$	[m]	19,00
Gesamtlänge über Puffer $d$	[m]	26,50
Achslast Radsätze $P$	[kN]	148,4



**Abb. 2.8:** Railjet bestehend aus 8 Reisezugwagen, Maße in Meter

#### ICE 4

Der *ICE 4* ist seit 2007 im Einsatz. Seit einer technischen Aufrüstung erreicht dieser Zug Höchstgeschwindigkeiten von 265km/h. Im Gegensatz zum *Railjet* wird der *ICE 4* nicht durch einen separaten Triebwagen angetrieben, sondern durch Drehgestelle mit angetriebenen Achsen, sogenannten Triebdrehgestellen. Die siebenteilige Grundkonfiguration des *ICE 4*, wird aus zwei antriebslosen Endwagen (Steuerwagen), zwei antriebslosen Mittelwagen (Sitzwagen und Boardrestaurant) und drei angetriebenen Mittelwagen (Sitzwagen und Servicewagen) gebildet. Hinsichtlich der Fahrzeugdaten lassen sich die einzelnen Wagen vereinfachend in angetriebene und passive Reisezugwagen einteilen, die sich in ihren Massen, ihren Trägheitsmomenten, ihren Feder- und Dämpferkoeffizienten sowie ihren Radsatzabständen je Drehgestell unterscheiden.

Tab. 2.4: Fahrzeugdaten für den ICE 4

Parameter	Einheit	angetrieben	passiv
Masse Wagenkasten $m_W$	[kg]	52.896	55.279
Trägheitsmoment Wagenkasten $I_W$	[kgm <sup>2</sup> ]	3.550.000	3.910.000
Masse Drehgestell $m_D$	[kg]	4.427	2.414
Trägheitsmoment Drehgestell $I_D$	[kgm <sup>2</sup> ]	3.090	770
Masse Radsatz $m_R$	[kg]	2.322	1.430
primäre Federsteifigkeit $k_1$	[N/m]	2.000.000	13.000.000
sekundäre Federsteifigkeit $k_2$	[N/m]	5.000.000	720.000
primäre Dämpfung $c_1$	[Ns/m]	20.000	/
sekundäre Dämpfung $c_2$	[Ns/m]	20.000	10.000
Achsabstand der Radsätze eines Drehgestells $b$	[m]	2,60	2,30
Achsabstand der Drehgestelle eines Wagens $r$	[m]	19,50	19,50
Gesamtlänge über Puffer $d$	[m]	28,75	28,75
Achslast Radsätze $P$	[kN]	174,2	161,4

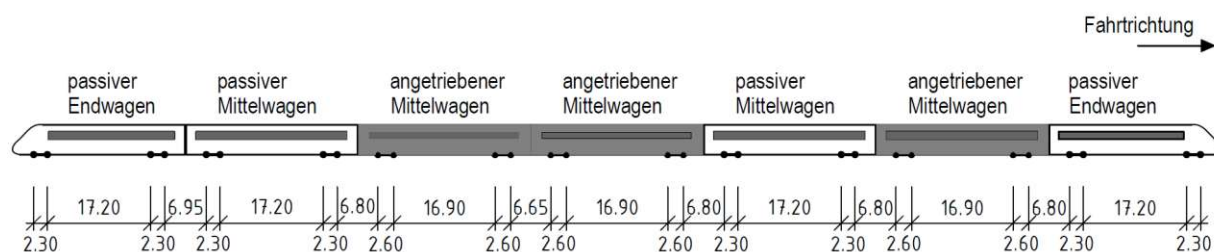


Abb. 2.9: ICE 4 bestehend aus 7 Wagen, Maße in Meter

# Kapitel 3

## Vorstudie

Die im Folgenden beschriebene Vorstudie stellt den Einfluss unterschiedlicher Varianten der Lastverteilung auf die rechnerisch ermittelten Tragwerksbeschleunigungen gegenüber, sowohl für das Einzellastmodell als auch für das vollständige Interaktionsmodell des Zuges. Um die lastverteilende Wirkung des Tragwerkoberbaus vereinfachend abzubilden, werden die Achskräfte im Abstand der Schwellen  $e = 60 \text{ cm}$  aufgeteilt. Parallel dazu werden Referenz-Berechnungen ohne Lastverteilung durchgeführt. Die Ergebnisse werden anschließend verglichen. Um eine gute Vergleichbarkeit der unterschiedlichen Lastverteilungen zu gewähren, werden für die Brücke immer die selben Parameter gewählt. Diese sind im Folgenden aufgezählt:

- $f_0 = 10 \text{ Hz}$
- $L = 10 \text{ m}$
- $\mu = 10 \text{ t/m}$
- $\zeta = 1 \%$

In der Abbildung 2.6 ist zu sehen, dass die gewählte spannenweitenabhängige erste Biegeeigenfrequenz in dem Bereich liegt, der es laut Eurocode 1 [5, S. 75] erlaubt, für die dynamische Berechnung den vereinfachten Nachweis mit dynamischem Überhöhungsfaktor anzuwenden. Sie ist nahe der unteren Grenze der Brückeneigenfrequenzen, welche laut Eurocode 1 durch dynamische Anregungskriterien bestimmt wird.

Eine gewählte Spannweite von  $10 \text{ m}$  entspricht einer kurzen Stahlbrücke beziehungsweise liegt die gewählte Länge bei Betonbrücken ca. bei einem Drittel der Bandbreite üblicher Längen, siehe [1, S. 289].

Die gewählte Massenbelegung von  $10 \text{ t/m}$  entspricht bezogen auf die ausgesuchte Spannweite einer schweren Stahlbrücke. Im Speziellen liegt diese spannenweitenabhängige Massenbelegung für die 210 existierenden Brücken, die Glatz und Fink analysiert haben [6, S. 5] und die im Kapitel 2.4.1 beschrieben sind, knapp unter der höheren 95 %-Konfidenzintervallgrenze für Stahl- und Verbundbrücken.

Für die relativ kurze Brücke ist das *Lehr'sche Dämpfungsmaß* mit 1 % recht niedrig gewählt worden. Grund dafür ist, dass die Vorstudie zum Ziel hat, die Unterschiede der verschiedenen Berechnungsmethoden sichtbar zu machen und eine geringe Tragwerksdämpfung die Brücke anfälliger für größere Beschleunigungsamplituden macht.

Der überfahrende Zug besteht aus 8 Wagen der Railjet Garnitur. Dieser ist entsprechend der Hersteller- und Literaturangaben aus der Tabelle 2.3 im Kapitel 2.4.2 erstellt. Wie im Abschnitt *Geschwindigkeit* im Kapitel 2.4.1 beschrieben, lassen sich Resonanzgeschwindigkeiten zufolge regelmäßiger Abstände der einwirkenden Kräfte, wie der Gesamtwagenlänge  $d$ , der Drehgestellabstände  $r$  oder der Radsatzabstände  $b$ , gemäß Gleichung (2.57) leicht berechnen. Die Gesamtwagenlänge über Puffer  $d$  eines Railjetwagens beträgt  $26,5\text{ m}$ .

**Tab. 3.1:** resonanzerzeugende Geschwindigkeiten

$i$ [-]	$v_{di}$ [km/h]
1	954,0
2	477,0
3	318,0
4	238,5
5	190,8
6	159,0
7	136,3
8	119,3
9	106,0
10	95,4

**Tab. 3.2:** Auslöschungsgeschwindigkeiten

$i$ [-]	$v_{ci}$ [km/h]
1	720,0
2	240,0
3	144,0
4	102,9
5	80,0

Das stärkste Resonanzereignis ist bei der Geschwindigkeit  $v_{d1}$  zu erwarten. Um auch dieses zu betrachten, werden im Rahmen dieser Vorstudie Geschwindigkeiten von  $80\text{ km/h}$  bis  $1.000\text{ km/h}$  untersucht. Zwar werden die Höchstgeschwindigkeiten realer Züge weit überschritten, doch besteht so die Möglichkeit das Verhalten des gewählte Brückentragwerks für die Überfahrt des Railjets bei Beschleunigungsspitzen zufolge unterschiedlicher Resonanzereignisse zu untersuchen.

Neben den fahrzeugabhängigen Resonanzgeschwindigkeiten gibt es auch noch die Auslöschungsgeschwindigkeiten (2.58), die für die Brückendynamik relevant sind. Diese sind ausschließlich von tragwerksspezifischen Parametern abhängig und solche Auslöschungseffekte sind dominant gegenüber Resonanzen. In der Tabelle 3.2 finden sich alle Auslöschungsgeschwindigkeiten, die für den gewählten Geschwindigkeitsbereich relevant sind.

### 3.1 Berechnungen mit dem MLM

Für des einfachere *Moving Load Model* werden mit Hilfe des Simulationsprogramms in MATLAB [15] geschwindigkeitsabhängige Beschleunigungsverläufe und geschwindigkeitsabhängige Verschiebungsverläufe erstellt. Für die Beschleunigung und für die Verschiebung werden jeweils zwei Verläufe mit unterschiedlichen Lastmodellen des Zugs berechnet und abgebildet. Anschließend werden die maximalen Werte der Beschleunigungen und Ver-

schiebungen aus den unterschiedlichen Lastmodellen gegenübergestellt und miteinander verglichen.

### 3.1.1 Varianten der Lastmodelle des Zugs

#### MLM-1

Zur Ermittlung des Referenzbeschleunigungsverlaufes wird in den zugrunde liegenden Berechnungen von einer Achslastaufteilung abgesehen und als Einwirkung auf das Tragwerk die statische Achslast zu 100 % am Aufstandspunkt des Radsatzes angesetzt.

#### MLM-3

Im Vergleich zum Referenzbeschleunigungsverlauf erfolgt bei der rechnerischen Ermittlung des zweiten Beschleunigungsverlaufs eine Verteilung der statischen Achslast im Verhältnis 25 % - 50 % - 25 %.

### 3.1.2 Vergleich der maximalen Beschleunigungen und Verschiebungen des Tragwerks

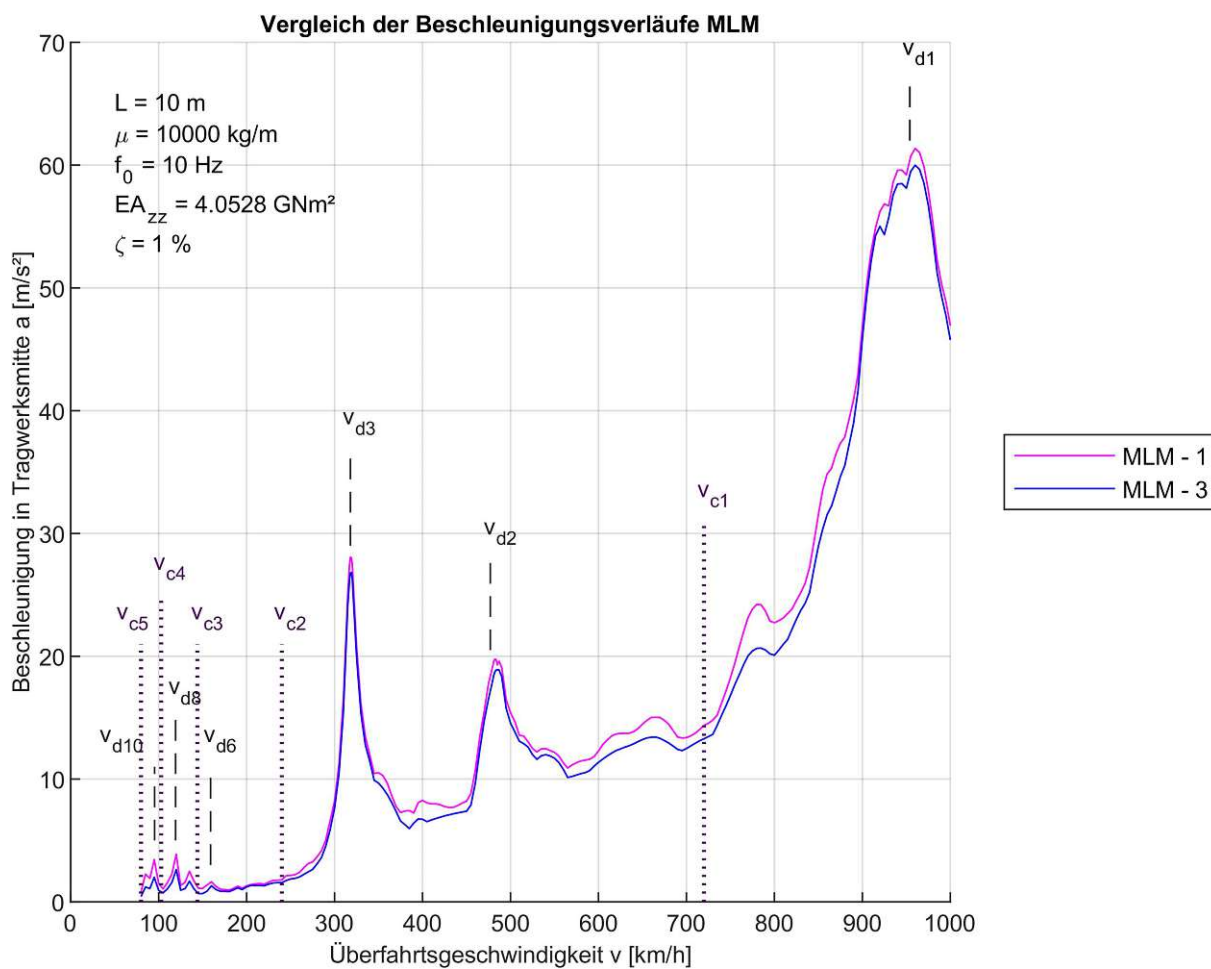
Um die Beschleunigungs- und Verschiebungsverläufe des Tragwerks darzustellen wird ein-gangs eine Diskretisierung des Geschwindigkeitsbereichs vorgenommen. Es werden für die Berechnungen mit dem MLM Geschwindigkeitsschritte von  $5 \text{ km/h}$  gewählt. Im Bereich der Maximalwerte werden, wenn erforderlich, zusätzliche Berechnungspunkte in Abständen von 1 oder  $2 \text{ km/h}$  eingefügt, um alle Resonanzspitzen sorgfältig abzubilden.

Die Werte aller Beschleunigungs- und Verschiebungsverläufe in der vorliegenden Arbeit beziehen sich auf die unausgelenkte Lage in Tagwerksmitte.

Im Grundlagenkapitel wurde die Notation der Beschleunigung in Form der zweifachen zeitlichen Ableitung der Verschiebung  $\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}$  gewählt, so wie sie in der Kontinuumsmechanik oftmals zur Anwendung kommt. In weiterer Folge wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die Beschleunigung als  $a$  definiert.

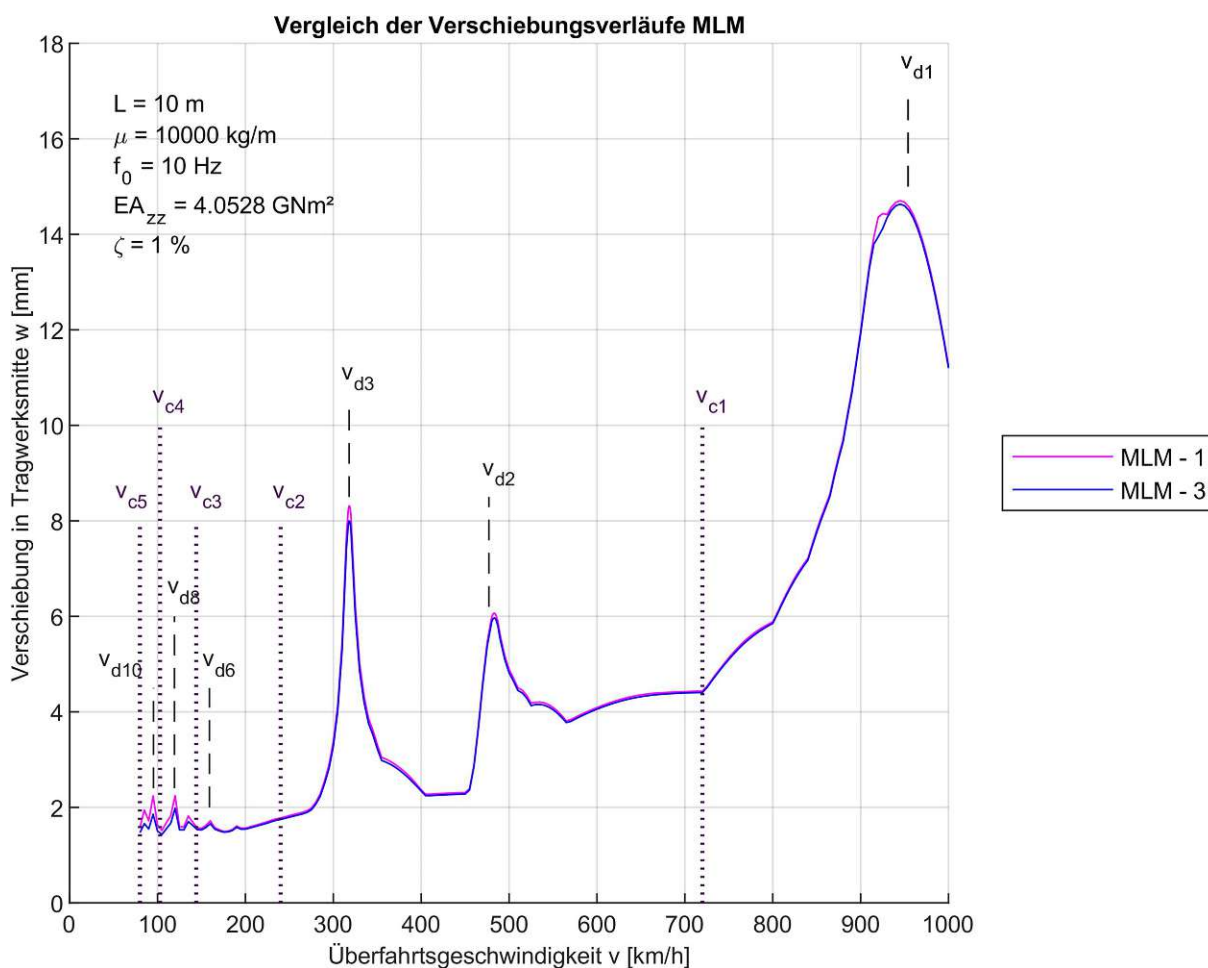
In der Abbildung 3.1 sind die Beschleunigungsverläufe und in der Abbildung 3.2 die Verschiebungsverläufe des untersuchten Tragwerks dargestellt. Des Weiteren sind in den Abbildungen die resonanzerzeugenden Geschwindigkeiten  $v_{di}$  aus der Tabelle 3.1 sowie die Auslöschungsgeschwindigkeiten aus der Tabelle 3.2 eingezeichnet.





**Abb. 3.1:** Beschleunigungsverläufe für ein Tragwerk mit und ohne Lastverteilung. Berechnung für RJ mit 8 Wagen, mittels MLM.





**Abb. 3.2:** Verschiebungsverläufe für ein Tragwerk mit und ohne Lastverteilung. Berechnung für RJ mit 8 Wagen, mittels MLM.

**Tab. 3.3:** Beschleunigung MLM

$v_{crit,i}$ [km/h]	$a_{MLM-1}$ [m/s <sup>2</sup> ]	$a_{MLM-3}$ [m/s <sup>2</sup> ]	$ \delta a $ [%]
960	61,354	59,992	2,2
482	19,748	18,902	4,3
318	28,062	26,774	4,6
190	1,282	1,142	10,9
160	1,636	1,312	19,8
135	2,485	1,680	32,4
120	3,875	2,620	32,4
95	3,439	1,996	42,0

**Tab. 3.4:** Verschiebung MLM

$v_{crit,i}$ [km/h]	$w_{MLM-1}$ [mm]	$w_{MLM-3}$ [mm]	$ \delta w $ [%]
945	14,634	14,704	0,5
483	5,966	6,066	1,7
318	8,313	7,998	3,8
190	1,609	1,582	1,7
160	1,717	1,657	3,5
135	1,818	1,703	6,3
120	2,241	1,978	11,7
95	2,234	1,855	17,0

Die Beschleunigungswerte  $a_{MLM-1}$  und  $a_{MLM-3}$  aus der Tabelle 3.3 sind die lokalen Maxima des Beschleunigungsverlaufs aus Abbildung 3.1. Die Verschiebungswerte  $w_{MLM-1}$  und  $w_{MLM-3}$  aus der Tabelle 3.4 sind die lokalen Maxima des Verschiebungsverlaufs aus Abbildung 3.2. Die Geschwindigkeiten, bei welchen die lokalen Maxima auftreten, werden als  $v_{crit}$  bezeichnet.

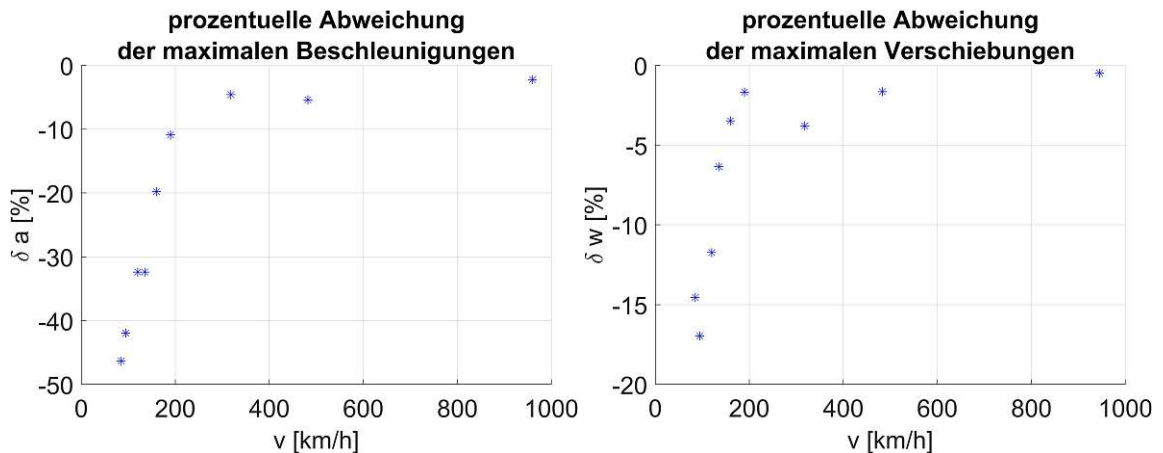
Um den Einfluss der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts, welche durch die Achslastaufteilung des überfahrenden Zugs idealisiert wird, auf die maximalen Beschleunigungen und Verschiebungen der Brücke besser analysieren zu können, werden die prozentuellen Verhältnisse der Beschleunigungs- beziehungsweise Verschiebungsdifferenzen in der Abbildung 3.3 gezeigt. Die abgebildeten Verhältnisse ergeben sich folgendermaßen:

$$\delta a = \frac{a_{MLM-3} - a_{MLM-1}}{a_{MLM-1}} \cdot 100 [\%] \quad \delta w = \frac{w_{MLM-3} - w_{MLM-1}}{w_{MLM-1}} \cdot 100 [\%] \quad (3.1)$$

Dabei stammen  $a_{MLM-1}$  und  $a_{MLM-3}$  sowie  $w_{MLM-1}$  und  $w_{MLM-3}$  aus Berechnungen mittels Einzellastmodell ohne beziehungsweise mit Lastverteilung.

Zur Auswertung herangezogen werden Beschleunigungs- und Verschiebungsspitzen im gesamten Geschwindigkeitsbereich von 80 km/h bis 1.000 km/h. Solche Spitzenwerte entstehen im Bereich der resonanzerzeugenden Geschwindigkeiten  $v_{d1}$ ,  $v_{d2}$ ,  $v_{d3}$ ,  $v_{d5}$ ,  $v_{d6}$ ,  $v_{d7}$ ,  $v_{d8}$ ,  $v_{d10}$  und  $v_{d11}$ . Weil die Geschwindigkeiten  $v_{d4} = 238,5$  km/h und  $v_{d9} = 106$  km/h in unmittelbarer Nähe zu den Auslöschungsgeschwindigkeiten  $v_{c2} = 240$  km/h und  $v_{c4} = 103$  km/h liegen und die Auslöschungsgeschwindigkeiten dominant gegenüber den resonanzerzeugenden Geschwindigkeiten sind, bilden sich in diesen Bereichen keine Beschleunigungs- und Verschiebungsspitzen aus.

Die Auswertung der prozentuellen Verhältnisse erfolgt über ein separates MATLAB-Skript, das die Spitzenbeschleunigungen und -verschiebungen identifiziert, ordnet und zueinander in Beziehung bringt. Die Prozentzahlen der abgebildeten Verhältnisse sind negativ, da die Spitzenbeschleunigungen und verschiebungen der Varianten mit einer Lastverteilung kleiner sind als die Referenzbeschleunigungen und -verschiebungen ohne Lastverteilung.



(a) Abweichungen der max. Beschleunigungen      (b) Abweichungen der max. Verschiebungen

**Abb. 3.3:** Prozentuelles Verhältnis der Maximalwerte bei Berücksichtigung der Lastverteilung zu den Maximalwerten ohne Berücksichtigung der Lastverteilung, Berechnung mittels MLM

## 3.2 Berechnungen mit dem DIM

Im diesem Abschnitt wird untersucht, welche Auswirkungen die Idealisierung der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts durch unterschiedliche Achslastanteile des überfahrenden Zugs bei dem detaillierteren Berechnungsmodell, dem *Detailed Interaction Model*, auf die Beschleunigungen und Verschiebungen des Tragwerks im Resonanzfall haben. Da beim *Detailed Interaction Model* neben der statischen Aufstandskraft auch dynamische Kraftanteile wirken, ist eine differenziertere Betrachtungsweise der Lastaufteilung als beim *Moving Load Model* möglich. Insgesamt werden Berechnungen mit drei verschiedenen Varianten des Fahrzeugmodells durchgeführt. Diese unterschiedlichen Modelle werden eingangs genau beschrieben und anschließend werden die maximalen Beschleunigungs- und Verschiebungswerte der unterschiedlichen Fahrzeugmodelle miteinander verglichen. Abschließend werden die Zeitverläufe aus Berechnungen mit unterschiedlichen Fahrzeugmodellen beim ersten und beim elften Resonanzfall gezeigt.

### 3.2.1 Varianten der Lastmodelle des Zugs

#### DIM-1

Bei dieser Betrachtungsweise wird von einer Lastverteilung abgesehen. Sie dient als Referenz für das *vollständige Interaktionsmodell*. Die Übertragung der Kontaktkräfte auf das Brückentragwerk erfolgt im Radaufstandspunkt.

#### DIM-3-vollständige Aufteilung

In diesem Fall wird eine komplette Aufteilung aller Kräfte vorgenommen, welche zwischen Radsatz und Brücke am Radsatzaufstandspunkt übertragen werden. Die Aufteilung erfolgt im selben prozentuellen Verhältnis von 25 % - 50 % - 25 % wie schon zuvor beim *Moving Load Model* mit den beiden zusätzlichen Aufteilungspunkten 60 cm vor beziehungsweise nach dem Aufstandspunkt. Es werden sowohl die statischen Aufstandskräfte  $F_{stat,i}$  und die dynamischen Kopplungskräfte der Primärstufe  $F_{k,i}(t)$  und  $F_{c,i}(t)$  als auch die Masenträgheitskräfte aufgeteilt. Bei den Letzteren wird somit die vereinfachte Modellierung vorgenommen, dass für die Trägheitsanteile zufolge vertikalen Beschleunigung, der *Coriolis*- und der *Zentripetalbeschleunigung* der Radsatzmassen auf drei Anteile im Schwellenabstand verteilt werden und entsprechend die Beschleunigungen an den Aufteilungspunkten  $(x_i - 0,6; x_i; x_i + 0,6)$  angesetzt werden.

#### DIM-3-unvollständige Aufteilung

Im nächsten Schritt wird eine unvollständige Aufteilung untersucht. Dabei werden die statischen Aufstandskräfte  $F_{stat,i}$  und die dynamischen Kopplungskräfte der Primärstufe  $F_{k,i}(t)$  und  $F_{c,i}(t)$  in derselben Weise wie bei der zuvor beschriebenen Variante aufgeteilt. Die Trägheitskräfte wirken jedoch ausschließlich am Aufstandspunkt.

#### Ausblick

Als weitere Variante besteht die Möglichkeit, die statischen Aufstandskräfte  $F_{stat,i}$  und die dynamischen Kopplungskräfte der Primärstufe  $F_{k,i}(t)$  und  $F_{c,i}(t)$  vollkommen und die Trägheitskräfte teilweise aufzuspalten. Im Speziellen wäre es interessant, die Trägheitskräfte

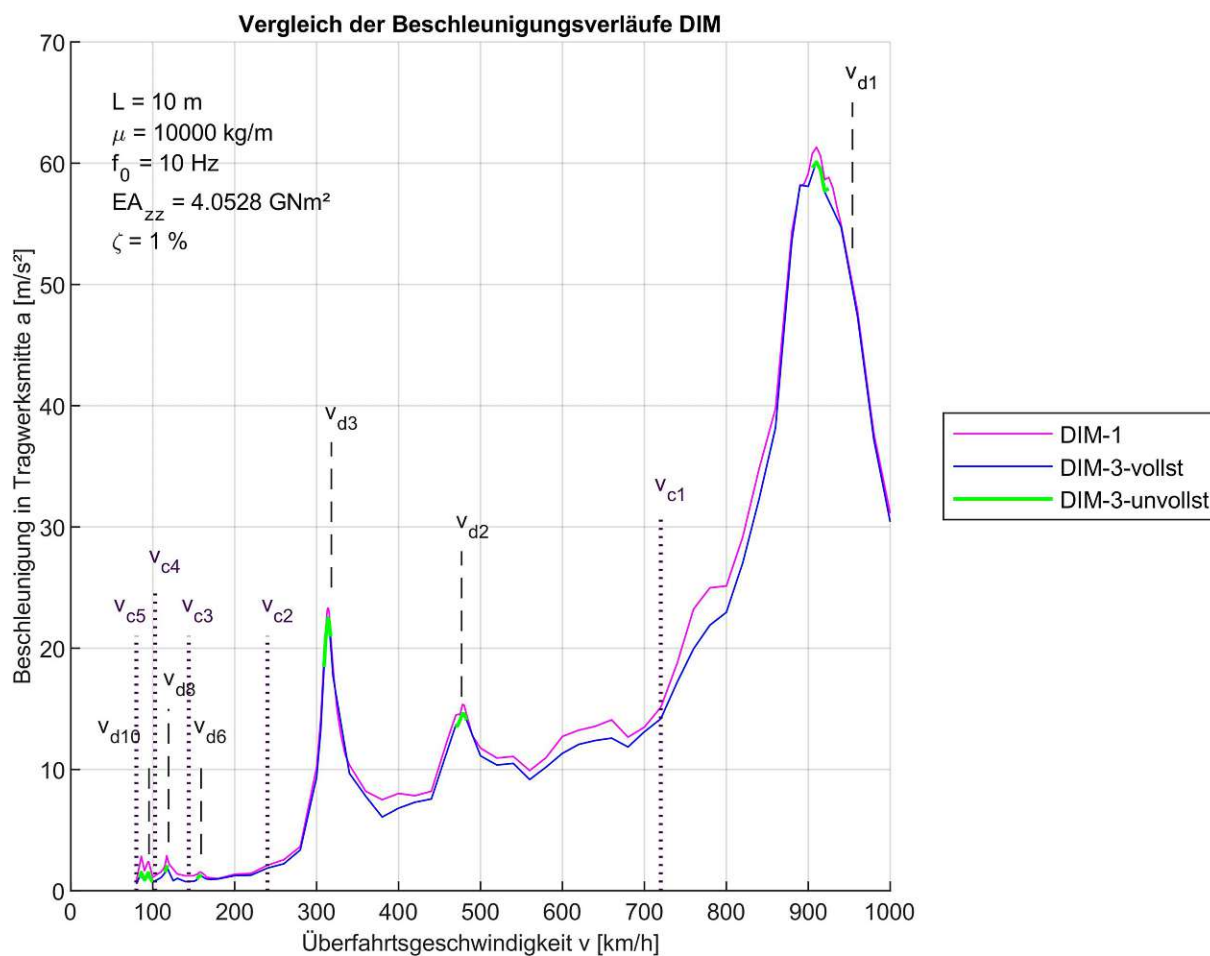
zufolge der vertikalen Beschleunigung im Aufstandspunkt des Radsatzes angreifen zu lassen und die Trägheitskräfte zufolge der *Coriolis-* und der *Zentripetalbeschleunigung* prozentuell auf die drei Aufteilungspunkte zu verteilen. Wie in [8] im Kapitel 4.2 erläutert, existiert beim Lösen der Bewegungsgleichung (2.25) für das vollständige Interaktionsmodell die Problematik, dass die Unbekannte  $\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2}$  vom Lastterm  $\mathbf{p}_z$  abhängig ist, der jedoch wiederum eine Funktion von  $\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2}$  ist. Durch eine mathematische Umformulierung der Bewegungsgleichung kann jedoch die algebraische Schleife umgangen werden. In weiterer Folge ist es jedoch nicht ohne Weiteres möglich, die Massenträgheitskräfte der Radsatzmassen separat zu berechnen und erst danach aufzuteilen. Bei den Ergebnissen der zwei Varianten „Vollständige Aufteilung“ und „Unvollständige Aufteilung“ ist zu erkennen, dass sie sich nur marginal unterscheiden. Das bedeutet, ob alle Trägheitskräfte gemeinsam aufgeteilt werden oder vollständig am Radsatzaufstandspunkt angesetzt werden, hat keinen großen Einfluss auf die Schwingungsantwort. Das wiederum lässt den Schluss zu, dass bei einer teilweisen Aufteilung der Trägheitskräfte ebenfalls nur ein geringer Einfluss auf die Schwingungsantwort der Brücke zu erwarten ist. Das ist der Grund, weshalb von einer rechnerischen Betrachtung dieser zusätzlichen Variante abgesehen wird.

### 3.2.2 Vergleich der maximalen Beschleunigungen und Verschiebungen des Tragwerks

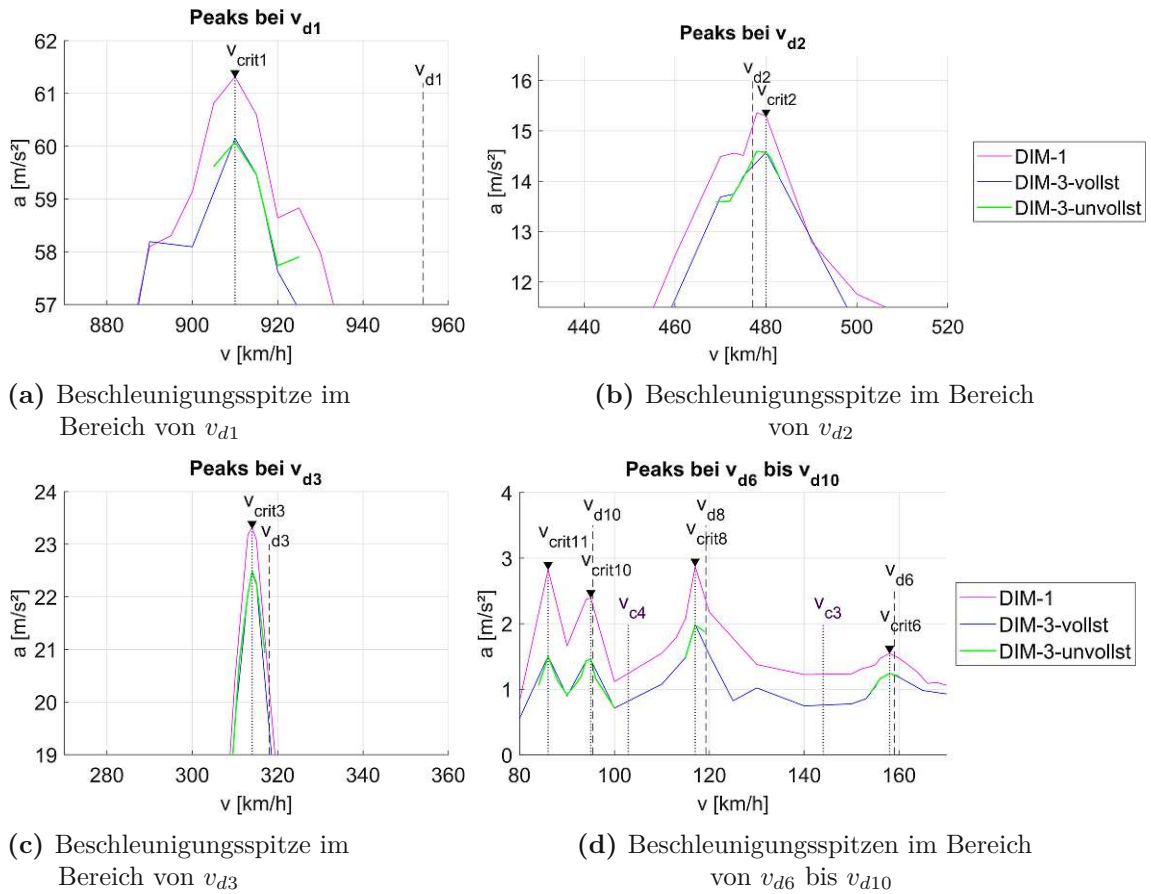
Um die Beschleunigungs- und Verschiebungsverläufe zu berechnen wird, wie schon bei den Berechnungen mit dem MLM, eingangs der untersuchte Geschwindigkeitsbereich diskretisiert. Weil der Rechenaufwand beim DIM deutlich größer ist als beim MLM, werden die Berechnungspunkte nicht so engmaschig ausgewählt. Für Berechnungen mit dem DIM wird ein generelles Geschwindigkeitsnetz von 10  $km/h$  Schritten im Geschwindigkeitsbereich von 80 – 180  $km/h$  und 20  $km/h$  Schritte für Geschwindigkeiten ab 180  $km/h$  gewählt. In den Bereichen um die Resonanzspitzen herum werden die Abstände nach Bedarf auf 5, 2 oder 1  $km/h$  zwischen den Berechnungspunkten reduziert.

Weil zwischen den Beschleunigungsverläufen und Durchbiegungsverläufen der Tragwerke für Berechnungen mit verteilten einwirkenden Kräften keine qualitativen Unterschiede zwischen vollständiger und unvollständiger Aufteilung zu erwarten sind und der Rechenaufwand für Berechnungen mit dem DIM sehr hoch ist, werden für die unvollständige Aufteilung die Beschleunigungs- und Verschiebungswerte nur an den Stellen der Spitzenwerte, der zuvor berechneten Verläufe zufolge vollständigen Aufteilung, ermittelt. Um sicherzustellen, dass es sich wirklich um den lokalen Maximalwert handelt, werden zusätzlich die Beschleunigungs- und Verschiebungswerte für die jeweiligen Geschwindigkeiten, um 2  $km/h$  vermindert und um 2  $km/h$  erhöht, ermittelt.

In der Abbildung 3.4 sind die Beschleunigungsverläufe und in der Abbildung 3.7 die Verschiebungsverläufe des untersuchten Tragwerks dargestellt. Des Weiteren sind in den Abbildungen die relevanten resonanzerzeugenden Geschwindigkeiten  $v_{di}$  aus der Tabelle 3.1 sowie die Auslöschungsgeschwindigkeiten aus der Tabelle 3.2 eingezeichnet.



**Abb. 3.4:** Beschleunigungsverläufe für ein Tragwerk mit drei unterschiedlichen Lastverteilungen: keine, vollständige und unvollständige Aufteilung der Kontaktkräfte. Berechnung für RJ mit 8 Wagen, mittels DIM.



**Abb. 3.6:** Einzelne Ausschnitte des Diagramms der Beschleunigungsverläufe (Abb. 3.4), in den Bereichen der einzelnen Beschleunigungsspitzen.

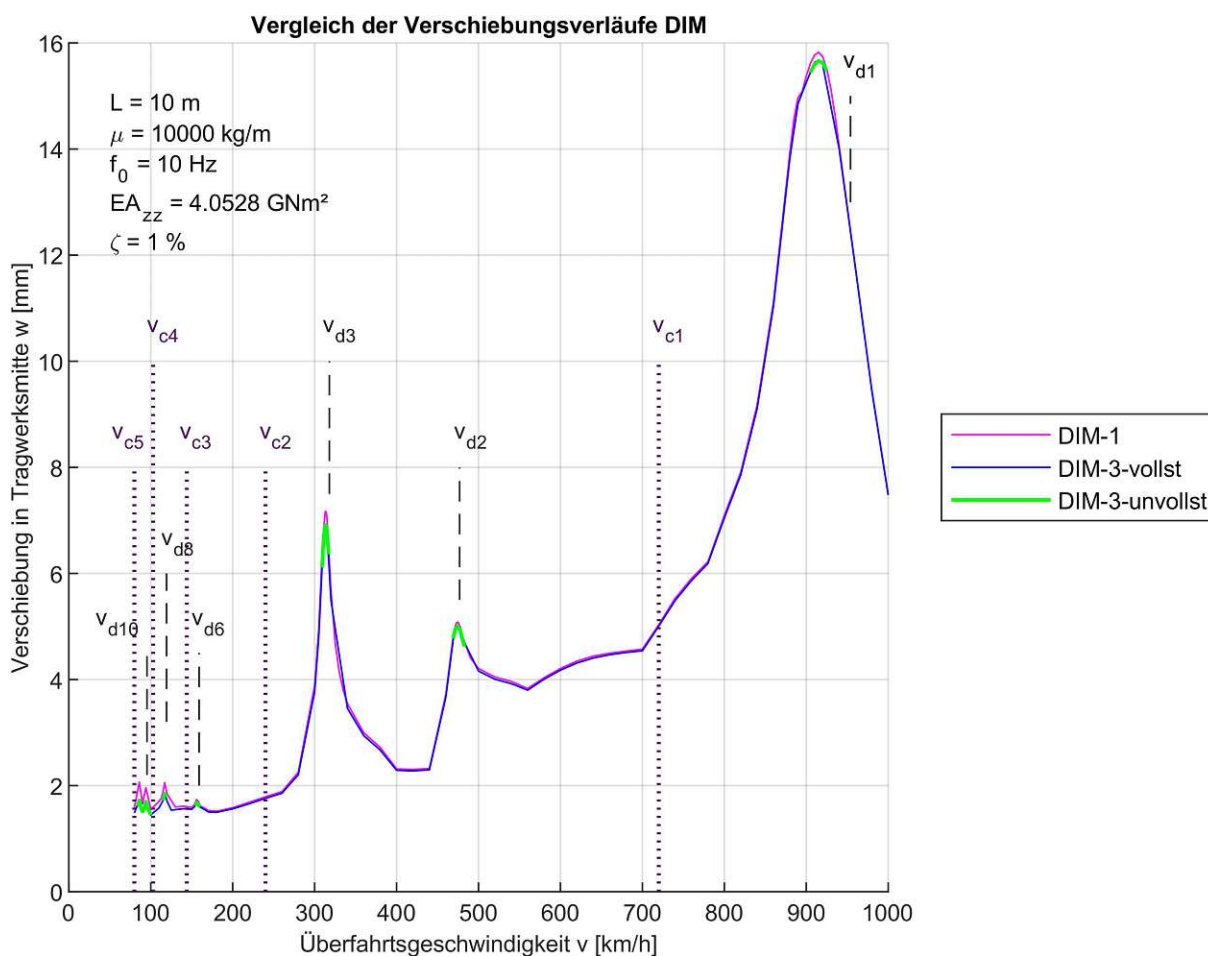
**Tab. 3.5:** Beschleunigung DIM

$v_{crit,i}$ [km/h]	$a_{DIM-1}$ [m/s <sup>2</sup> ]	$a_{DIM-3-vollst}$ [m/s <sup>2</sup> ]	$a_{DIM-3-unvollst}$ [m/s <sup>2</sup> ]	$ \delta a_{vollst} $ [%]	$ \delta a_{unvollst} $ [%]
910	61,318	60,147	60,083	1,9	2,0
480	15,297	14,575	14,575	4,7	4,7
314	23,321	22,455	22,488	3,7	3,6
158	1,547	1,240	1,239	19,8	19,9
117	2,872	1,985	1,980	30,9	31,1
95	2,391	1,448	1,456	39,4	39,1
86	2,826	1,497	1,497	47,0	47,0

Die prozentuellen Abweichungen aus der Tabelle 3.5 sind wie folgt definiert:

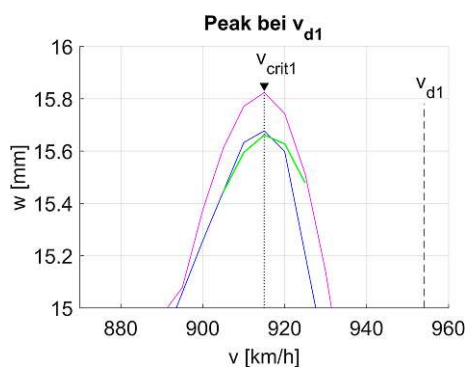
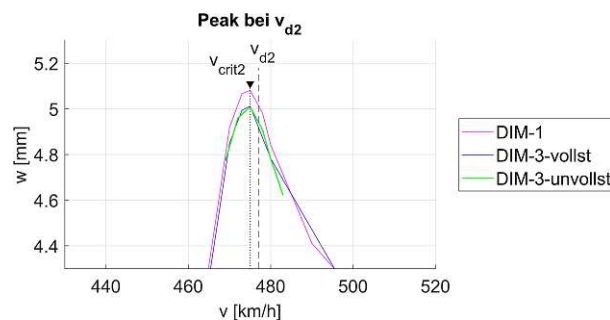
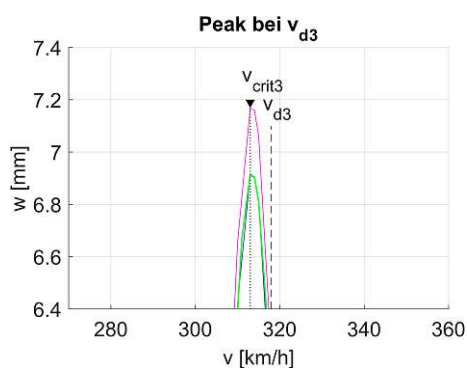
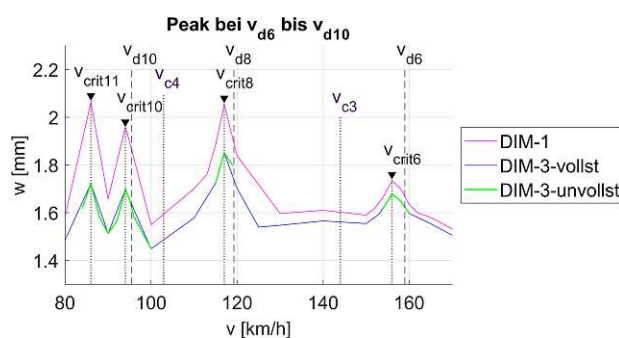
$$\delta a_{vollst} = \frac{a_{DIM-3-vollst} - a_{DIM-1}}{a_{DIM-1}} \cdot 100 [\%] \quad (3.2)$$

$$\delta a_{unvollst} = \frac{a_{DIM-3-unvollst} - a_{DIM-1}}{a_{DIM-1}} \cdot 100 [\%] \quad (3.3)$$



**Abb. 3.7:** Verschiebungsverläufe für ein Tragwerk mit drei unterschiedlichen Lastverteilungen: keine, vollständige und unvollständige Aufteilung der Achskräfte. Berechnung für RJ mit 8 Wagen, mittels DIM.



(a) Durchbiegungsspitze im Bereich von  $v_{d1}$ (b) Durchbiegungsspitze im Bereich von  $v_{d2}$ (c) Durchbiegungsspitze im Bereich von  $v_{d3}$ (d) Durchbiegungsspitze im Bereich von  $v_{d6}$  bis  $v_{d10}$ 

**Abb. 3.8:** Einzelne Ausschnitte des Diagramms der Verschiebungsverläufe (Abb. 3.7), in den Bereichen der einzelnen Beschleunigungsspitzen.

**Tab. 3.6:** Verschiebung DIM

$v_{crit,i}$ [km/h]	$w_{DIM-1}$ [mm]	$w_{DIM-3-vollst}$ [mm]	$w_{DIM-3-unvollst}$ [mm]	$ \delta w_{vollst} $ [%]	$ \delta w_{unvollst} $ [%]
915	15,824	15,677	15,661	0,9	1,0
475	5,082	5,012	5,009	1,4	1,4
313	7,168	6,912	6,914	3,6	3,5
156	1,735	1,678	1,679	3,3	3,2
117	2,053	1,850	1,851	9,9	9,8
94	1,959	1,698	1,698	13,3	13,3
86	2,063	1,722	1,722	16,5	16,5



Die prozentuellen Abweichungen aus der Tabelle 3.6 sind wie folgt definiert:

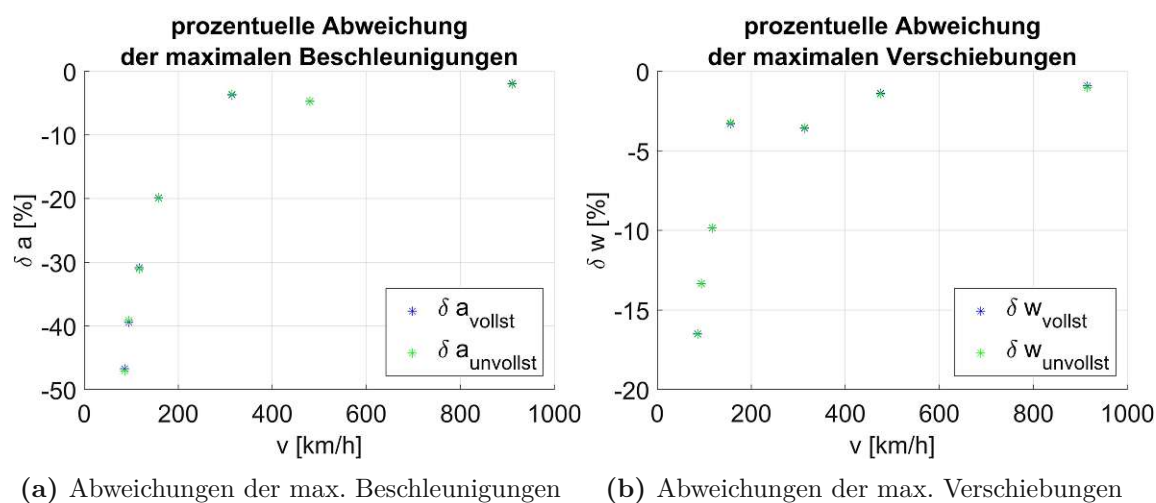
$$\delta w_{vollst} = \frac{w_{DIM-3-vollst} - w_{DIM-1}}{w_{DIM-1}} \cdot 100 [\%] \quad (3.4)$$

$$\delta w_{unvollst} = \frac{w_{DIM-3-unvollst} - w_{DIM-1}}{w_{DIM-1}} \cdot 100 [\%] \quad (3.5)$$

Neben den resonanzerzeugenden Geschwindigkeiten  $v_{d4}$  und  $v_{d9}$ , die auch beim Einzellastmodell unterdrückt werden, wird beim Interaktionsmodell zusätzlich dazu  $v_{d7} = 136,3 \text{ km/h}$  durch die nächstgelegene Auslöschungsgeschwindigkeit  $v_{c3} = 144,0 \text{ km/h}$  unterdrückt. Obwohl die resonanzerzeugende Geschwindigkeit  $v_{d5} = 190,8 \text{ km/h}$  mit keiner Auslöschungsgeschwindigkeit zusammenfällt, bildet sich im Bereich von  $v_{d5}$  bei Berechnungen mittels DIM keine Beschleunigungs- oder Verschiebungsspitze aus.

Es wäre möglich, dass in diesem Geschwindigkeitsbereich die schwingungsdämpfende Wirkung der mit Feder-Dämpfer-Elementen gekoppelten Drehgestelle und Wagenkästen durch Anregung der optimalen Frequenz maximiert wird, was einer Ausbildung übermäßiger Schwingungen des Tragwerks entgegenwirken würde.

In der Abbildung 3.9 sind die prozentuellen Verhältnisse aus der Tabelle 3.5 und aus der Tabelle 3.6 grafisch dargestellt.



**Abb. 3.9:** Prozentuelles Verhältnis der Maximalwerte bei Berücksichtigung der Lastverteilung zu den Maximalwerten ohne Berücksichtigung der Lastverteilung, Berechnung mittels DIM

In Abbildung 3.9a und 3.9b ist erkennbar, dass sich die prozentuellen Verhältnisse zufolge vollständiger und unvollständiger Aufteilung der einwirkenden Kräfte nur marginal unterscheiden.

Wie auch beim prozentuellen Vergleich aus dem vorherigen Abschnitt, der die Lastverteilung im Einzellastmodell widerspiegelt (Abbildung 3.3), sieht man beim prozentuellen Vergleich zufolge Lastverteilung im Interaktionsmodell (Abbildung 3.9), dass im Bereich der maximal

zulässigen Betriebsgeschwindigkeit des Railjets die prozentuellen Abweichungen signifikant höher sind als bei den Peaks von  $v_{d1}$ ,  $v_{d2}$  und  $v_{d3}$ , jenseits der tatsächlich gefahrenen Geschwindigkeiten. Bei der niedrigsten betrachteten Geschwindigkeit  $v_{crit} = 86 \text{ km/m}$  werden die Beschleunigungen bei beiden Fahrzeugmodellen zufolge der Lastverteilung beinahe halbiert. Die Verschiebungen werden bei beiden Fahrzeugmodellen um ungefähr 17% verringert.

### 3.2.3 Ausgewählte Zeitverläufe

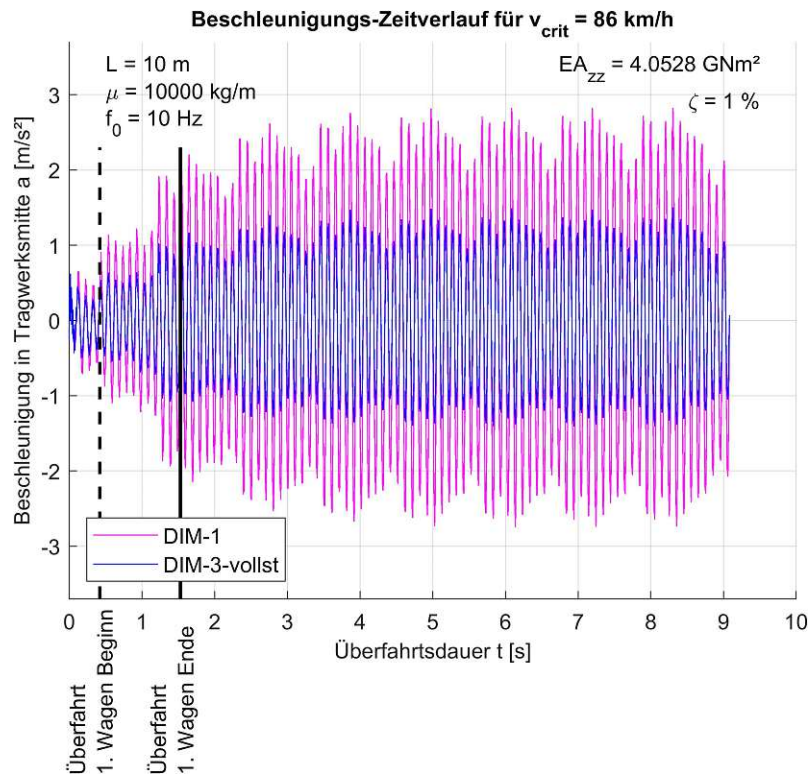
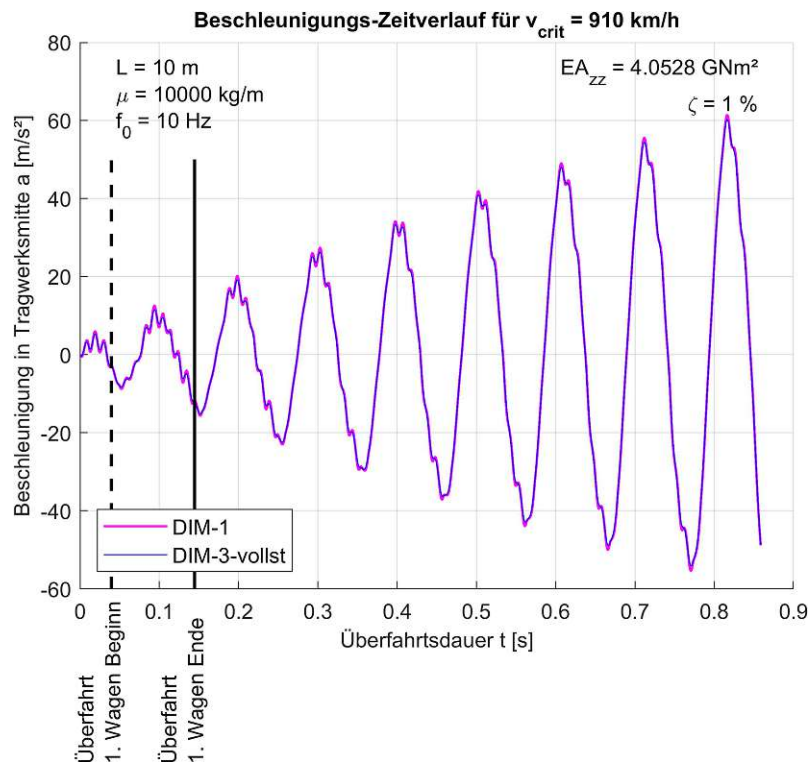
Um den möglichen Einfluss der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts, welche durch die Achslastaufteilung des überfahrenden Zugs idealisiert wird, auf den Zeitverlauf der Schwingung eines Brückentragwerks genauer zu beleuchten, sind in den Abbildungen 3.10 und 3.11 je zwei beispielhafte Beschleunigungs- und Durchbiegungs-Zeitverläufe dargestellt. Berechnet sind diese mittels DIM bei der ersten und elften Resonanzgeschwindigkeit  $v_{d1}$  und  $v_{d11}$  zufolge der Wagenlänge. Bei dem magentafarbenen Verlauf wird von einer Lastverteilung abgesehen. Bei dem blauen werden die statischen Aufstandskräfte, die dynamischen Kräfte und die Trägheitskräfte vollständig in prozentuale Kraftanteile von 25% - 50% - 25% aufgeteilt. Bei der Geschwindigkeit  $v_{crit,11}$  ist zu erkennen, dass der Einfluss der Lastverteilung bis zu dem Moment, in dem der erste Radsatz die Brücke überquert hat, sehr gering ist. Ab da nimmt der Einfluss immer mehr zu, bis zu dem Moment, in dem der erste Wagen vollständig die Brücke überquert hat. Ab diesen Zeitpunkt hat die Lastverteilung ihren größten Einfluss erreicht und hat für die Überfahrt der restlichen Wagen jeweils fast die selbe Wirkung. Bei sehr hohen Geschwindigkeiten, wie sie bei der Beschleunigungs- und der Verschiebungsspitze im Bereich von  $v_{d1}$  auftreten, ist der Einfluss der Lastverteilung nicht sehr hoch.

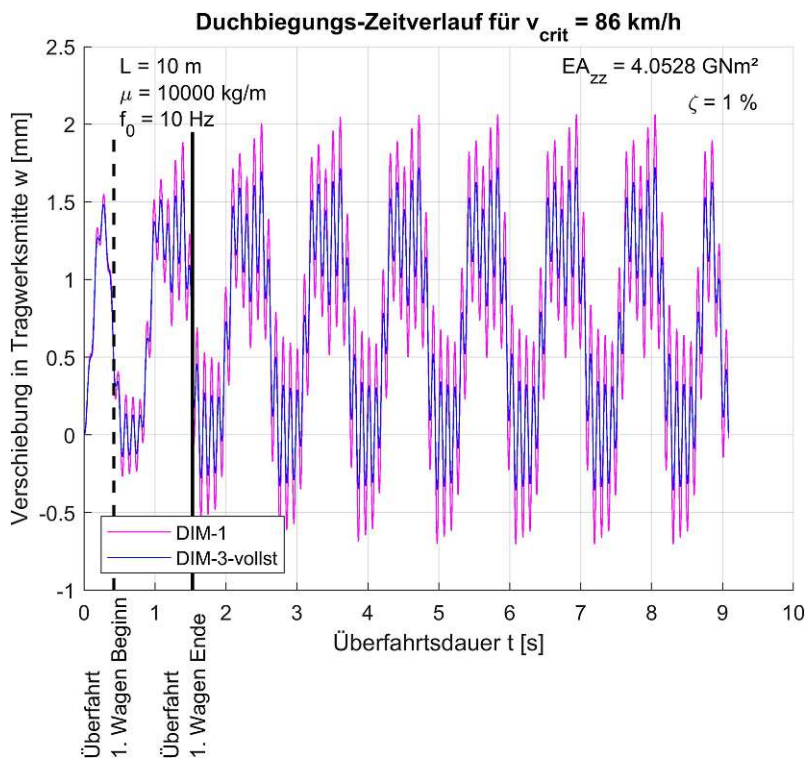
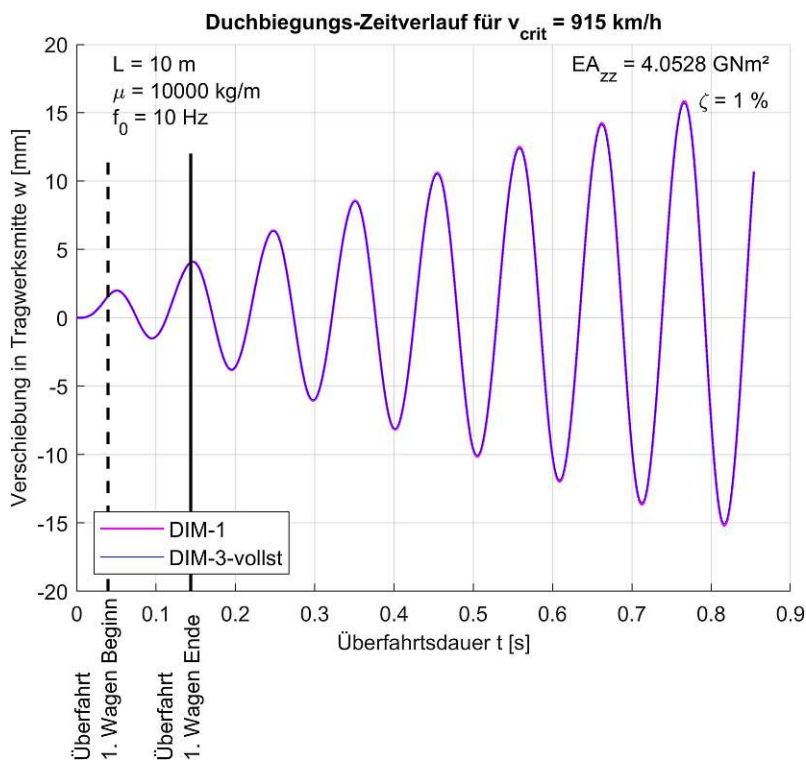
Es ist gut zu erkennen, dass bei niedrigen Geschwindigkeiten, exemplarisch bei  $v_{crit,11} = 86 \text{ km/h}$ , nach der Überfahrt des ersten Wagens die Schwingung schon beinahe ihre maximale Amplitude erreicht hat. Bei hohen Geschwindigkeiten, exemplarisch bei  $v_{crit,1} = 910 \text{ km/h}$  und  $v_{crit,1} = 915 \text{ km/h}$ , kann man erkennen, dass sich mit jeder weiteren Überfahrt eines Wagens die Amplitude der Schwingung weiter steigert.

### 3.3 Vergleich MLM - DIM

Allgemein ist zu sagen, dass sowohl die Beschleunigungs- als auch die Verschiebungsverläufe aus den Berechnungen mit dem DIM und mit dem MLM qualitativ sehr ähnlich aussehen. Bei den Berechnungen mittels MLM entwickeln sich im Geschwindigkeitsbereich unter  $200\text{ km/h}$  weniger Beschleunigungs- und Verschiebungsspitzen als bei den Berechnungen mittels DIM.

Betrachtet man die Geschwindigkeiten, bei welchen maximale Verschiebungen auftreten, fällt auf, dass die kritischen Geschwindigkeiten, die aus Berechnungen mit dem Interaktionsmodell stammen (siehe Tabelle 3.6), deutlich niedriger sind als jene, die mit dem Einzellastmodell berechnet werden (siehe Tabelle 3.4). Ein Grund dafür ist, dass im Interaktionsmodell auf Grund der Kontaktbedingung von Rad und Tragwerk die Radsatzmassen in die Massenmatrix der Brücke mit einfließen und damit die Masse der Brücke erhöht wird. Dasselbe Schema ist auch bei den Geschwindigkeiten der Beschleunigungsspitzen zu beobachten, jedoch in geringerem Ausmaß.

(a) Beschleunigungs-Zeitverlauf  $a(t)$  für RJ mit der Geschwindigkeit  $v_{crit,11} = 86 \text{ km/h}$ (b) Beschleunigungs-Zeitverlauf  $a(t)$  für RJ mit der Geschwindigkeit  $v_{crit,1} = 910 \text{ km/h}$ **Abb. 3.10:** Beschleunigungs-Zeitverlauf  $a(t)$  Vergleich von keiner Lastaufteilung und vollständiger Aufteilung auf drei Kräfte. Berechnung für RJ mit 8 Wagen mittels DIM.

(a) Duchbiegungs-Zeitverlauf  $w(t)$  für RJ mit der Geschwindigkeit  $v_{crit,11} = 86 \text{ km/h}$ (b) Duchbiegungs-Zeitverlauf  $w(t)$  für RJ mit der Geschwindigkeit  $v_{crit,1} = 915 \text{ km/h}$ 

**Abb. 3.11:** Duchbiegungs-Zeitverlauf  $w(t)$  Vergleich von keiner Lastaufteilung und vollständiger Aufteilung auf drei Kräfte. Berechnung für RJ mit 8 Wagen mittels DIM.

# Kapitel 4

## Parameterstudie

Die Hauptstudie der vorliegenden Arbeit hat zum Ziel, die Auswirkungen der Achslastverteilung zufolge der Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts auf die maximalen Beschleunigungen im Resonanzfall darzustellen und zu beurteilen. Dabei soll der Einfluss der Brückenparameter und der resonanzerzeugenden Geschwindigkeit des überfahrenden Zugs evaluiert werden. Die Berechnungen werden mit unterschiedlichen Lastverteilungsvarianten durchgeführt und anschließend verglichen.

### 4.1 Modellparameter

#### 4.1.1 Brückenparameter

Für die Untersuchung der Spitzenbeschleunigungen in Tragwerksmitte wird ein umfangreiches Brückenparameterfeld herangezogen, das sich durch die Spannweite  $L$ , die erste Biegeeigenfrequenz  $f_0$ , die Massenbelegung  $\mu$  und die Tragwerksdämpfung in Form des Lehr'schen Dämpfungsmaßes  $\zeta$  auszeichnet.

In dieser Stelle wird auf das Kapitel 2.4.1 verwiesen, welches bereits eine umfangreiche Beschreibung der relevanten Brückenparameter beinhaltet.

Das Parameterfeld bezogen auf die Spannweite erstreckt sich von kürzeren Brücken mit einer Länge von 4 m bis hin zu längeren Brücken mit einer Länge von 35 m. Die Spannweiten der Brücken werden in äquidistanten Schritten von je 1 m durchlaufen. Somit ergeben sich 32 betrachtete Spannweiten.

Das Parameterfeld auf Seiten der ersten Biegeeigenfrequenz orientiert sich an den Begrenzungen, welche Glatz und Fink in [6] aufgestellt haben.

Oberer Begrenzung:

$$f_{0,o}(L) = 113,1L^{-0,8312} \quad (4.1)$$

Untere Begrenzung:

$$f_{0,u}(L) = 82,43L^{-0,9937} \quad (4.2)$$

Für jede zu untersuchende Spannweite werden die Biegeeigenfrequenz an der oberen Schranke und der unteren Schranke sowie 3 Eigenfrequenzen dazwischen mit jeweils äquidistanten Abständen gewählt. Durch diese Aufteilung ergeben sich 160 unterschiedliche Biegeeigen-



frequenzen.

Für das untersuchte Parameterfeld werden zwei unterschiedliche Massenbelegungen gewählt, die so wie die Biegeeigenfrequenzen aus den statistischen Auswertungen aus [6] stammen:

Massenbelegung 1:

$$\mu_{St}(L) = 0,1214L + 5,918 \quad (4.3)$$

Massenbelegung 2:

$$\mu_B(L) = 0,7002L + 8,539 \quad (4.4)$$

Die in der nachfolgenden Studie untersuchten unterschiedlichen Längsverteilungen der Achslasten bilden eine vereinfachte Form zur Implementierung der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts anstelle der realitätsnahen aber rechenintensiveren dynamischen Modellierung des Brückenoberbaus. In dieses detailliertere Betrachtungsmodell gehen experimentell ermittelte Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften des Schotteroberbaus ein. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird untersucht, ob sich die lastverteilende Wirkung unabhängig von dem Zugmodell und dem Dämpfungsmaß der Tragwerke auf das Schwingungsverhalten auswirkt. Gewählt wird dazu eine Dämpfung mit 1 % und mit 2 %.

Für die 32 unterschiedlichen Spannweiten gibt es jeweils fünf verschiedene, spannenweitenabhängige Biegeeigenfrequenzen, zwei spannenweitenabhängige Massenbelegungen und zwei Dämpfungsgrade. Daraus ergeben sich  $32 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 640$  Parameterkombinationen.

### 4.1.2 Zugparameter

Als überfahrender Zug wird für die Parameterstudie der *ICE 4* gewählt, der im Simulationsprogramm durch Einzellasten (MLM) abgebildet wird. Die ausführlichen Fahrzeugdaten für die siebenteilige Zugkonfiguration sind bereits im Abschnitt 2.4.2 aufgelistet.

## 4.2 Berechnung und Datenverarbeitung

Durchgeführt werden die Berechnungen mithilfe des *Moving Load Models*, wobei drei unterschiedliche Lastverteilungsvarianten zum Einsatz kommen. Bei diesen Zugmodellen handelt es sich um das MLM-1, das MLM-3 und das MLM-5. Eine ausführliche Beschreibung dieser Modelle ist im Kapitel 2.3 zu finden.

Ziel ist es, sämtliche Resonanzspitzen der Beschleunigungen im Zuggeschwindigkeitsverlauf aller drei Lastverteilungsvarianten für alle Brücken im Parameterfeld miteinander zu vergleichen. Das hat zur Folge, dass der betrachtete Geschwindigkeitsbereich so weit ausgedehnt wird, dass dieser nicht mehr im Bereich realistischer Überfahrtsgeschwindigkeiten liegt. Betrachtet man die Gleichung (2.57) der Resonanzgeschwindigkeit aus dem Grundlagenkapitel 2.4.1, so sieht man, dass die erste Biegeeigenfrequenz direkt proportional in die

Resonanzgeschwindigkeit eingeht. Das bedeutet, kurze Brücken, die tendenziell höhere erste Biegeeigenfrequenzen aufweisen, weisen auch die höchsten Resonanzgeschwindigkeiten auf. Die höchste Biegeeigenfrequenz im betrachteten Parameterfeld tritt bei einer 4 m langen Brücke mit 35,7 Hz auf. Ihre erste Resonanzgeschwindigkeit berechnet sich folgendermaßen:

$$v_{d1} = \frac{35,7 [Hz] \cdot 28,75 [m] \cdot 3,6}{1} = 3695 \text{ km/h} \quad (4.5)$$

Um jedoch den Rechenaufwand in einem adäquaten Umfang zu halten, werden die Beschleunigungen und Verschiebungen aller Brücken nicht für alle Überfahrtsgeschwindigkeiten berechnet. Die berechneten Überfahrtsgeschwindigkeiten werden nach folgenden Schema ausgewählt:

Der realistische Geschwindigkeitsbereich von 100 bis 300 km/h wird in 5 km/h-Schritten diskretisiert. Für Geschwindigkeiten über 300 km/h werden nur Geschwindigkeitsbereiche um potenziell resonanzerzeugende Geschwindigkeiten  $v_{di}$ , betrachtet. Daher wird der Bereich 10 % vor und 5 % nach den potenziell resonanzerzeugende Geschwindigkeiten  $v_{di}$  in 15 Geschwindigkeitspunkte unterteilt.

Nachdem die geschwindigkeitsabhängigen Beschleunigungs- und Verschiebungsverläufe für jede Brückenkombination und jedes Lastmodell berechnet und gespeichert wurden, werden jeweils die ersten 10 Resonanzereignisse, sollten so viele vorhanden sein, ermittelt. Nicht jedes lokale Maximum wird als separates Resonanzereignis eingestuft, da einzelne Resonanzereignisse manchmal doppelte Spitzen im Beschleunigungs- und/oder Verschiebungsverlauf besitzen oder sich der Extrempunkt nur minimal von den benachbarten Werten der Beschleunigungs- und Verschiebungsverläufe erhebt. Die Kriterien für die ausgewählten Resonanzereignisse wurden iterativ durch kritische Begutachtung folgendermaßen gewählt:

Für die Beschleunigung muss der Unterschied der Überfahrtsgeschwindigkeit zweier separater Resonanzereignisse mindestens 35 km/h betragen und die lokalen Maxima im Beschleunigungsverlauf müssen sich mindestens  $0,05 \text{ m/s}^2$  gegenüber den benachbarten Werten erheben. Für die Verschiebung gilt ein Unterschied der Überfahrtsgeschwindigkeiten von 5 km/h und eine Erhebung von mindestens 0,00005 mm. Weil ein Resonanzfall hervorgerufen durch unterschiedliche Lastverteilungsvarianten nicht immer bei der exakt gleichen Geschwindigkeit eintritt, wurden Intervalle definiert, um zwei Resonanzgeschwindigkeiten, die anzunehmenderweise durch den gleichen Resonanzeffekt hervorgerufen werden, zusammenzufassen. Damit die Spitzenwerte der Beschleunigungen aus den unterschiedlichen Berechnungsmodellen miteinander verglichen werden, darf sich die Resonanzgeschwindigkeit des Vergleichswertes MLM-3 oder MLM-5 nicht mehr als 2,5 % vor oder nach der des Referenzwertes des MLM-1 befinden. Für die Spitzenwerte der Verschiebung dürfen die Geschwindigkeiten der Vergleichswerte nicht mehr als 1,5 % vor beziehungsweise 1,1 % nach der des Referenzwert liegen. Durch die Lastverteilung in den Vergleichsmodellen MLM-3 und MLM-5 werden die im Resonanzfall auftretenden Schwingungen meist reduziert, sie können aber auch gänzlich unterdrückt werden. Kommt es beim Berechnungsmodell MLM-1 zu einem Resonanzfall, bildet sich bei selbiger Überfahrtsgeschwindigkeit im Berechnungsmodell MLM-3 beziehungsweise MLM-5 jedoch keine erkennbare Resonanzspitze in den



Beschleunigungs- oder Verschiebungsverläufen aus, wird auch der Resonanzfall aus dem Berechnungsmodell MLM-1 in weiterer Folge nicht zu Vergleichen herangezogen.

## 4.3 Ergebnisse - relative Reduktion in Abhängigkeit von Tragwerksparametern

### 4.3.1 Gegenüberstellung der Beschleunigungsspitzen unterschiedlicher Tragwerke, berechnet mittels MLM-1 und MLM-3

Im folgenden Abschnitt werden Grafiken dargestellt, welche unterschiedliche Ergebnisse der ermittelten Beschleunigungsspitzen für eine große Anzahl von Tragwerken miteinander vergleicht. Die Berechnungen werden mit Hilfe des MLM durchgeführt, wobei zwei unterschiedliche Lastverteilungsvarianten zum Einsatz kommen. Zum einen wird das MLM-1 und zum anderen das MLM-3 verwendet. (Vergleiche dazu Kapitel 2.3)

Um die Ergebnisse übersichtlich zu strukturieren, werden die Beschleunigungen separat für die jeweiligen kritischen Geschwindigkeiten verglichen. Es werden die jeweiligen maximalen Beschleunigungen ermittelt. Anschließend werden Verhältnisse mit den jeweiligen Beschleunigungsspitzen der zwei Lastverteilungsvarianten gebildet:

$$\delta a(v_{crit,i}) = \frac{a_{MLM-3}(v_{crit,i}) - a_{MLM-1}(v_{crit,i})}{a_{MLM-1}(v_{crit,i})} \cdot 100 [\%] \quad (4.6)$$

Im Zuge der Berechnungen wurden die Beschleunigungen bis zur zehnten kritischen Geschwindigkeit  $v_{crit,10}$  durchgeführt. Bei hohen kritischen Geschwindigkeiten treten, vor allem bei längeren Brücken keine ausreichend großen Resonanzeffekte mehr auf, welche die Kriterien aus dem vorherigen Kapitel 4.2 erfüllen. Die Grafiken werden bis zur fünften kritischen Geschwindigkeit erstellt, da in diesem Fall noch genügend Resonanzeffekte auftreten um aus den Grafiken Informationen ablesen zu können.

In den zentralen Grafiken dieses Kapitels werden auf der Abszisse die Spannweiten aufgetragen und auf der Ordinate befinden sich die dazugehörigen ersten Biegeeigenfrequenzen. Im relevanten Bereich zeigen farbige Flächen das relative Verhältnis zwischen den maximalen Beschleunigungswerten  $\delta a$ , wobei die Skala von -0,35 bis -0,01 reicht. Gelbliche Farben zeigen schwächere Unterschiede und bläuliche Farben zeigen signifikantere Unterschiede zwischen den Beschleunigungs- und Verschiebungsspitzen bei den jeweiligen kritischen Überfahrtsgeschwindigkeiten für die einzelnen Tragwerke, berechnet mit den zu vergleichenden Lastverteilungsvarianten. In die angesprochenen Grafiken werden nur negative Werte eingetragen.

Des Weiteren werden in den spannweiten- und biegeeigenfrequenzabhängigen Verhältnisdiagrammen Geschwindigkeits-Isolinien in roter Farbe abgebildet. Je höher die Biegeeigenfrequenz eines bestimmten Tragwerks ist, desto höher ist auch die Überfahrtsgeschwindigkeit

des Zugs, bei der das Tragwerk übermäßige Beschleunigungsspitzen erfährt, vergleiche dazu die Gleichung (2.57) der resonanzerzeugenden Geschwindigkeit. Daraus folgt, dass die Tragwerke, die in einem spannweiten- und biegeeigenfrequenzabhängigen Verhältnisdiagramm für eine bestimmte kritischen Geschwindigkeit geringe Biegeeigenfrequenzen aufweisen, im Resonanzfall durch niedrigere Überfahrtsgeschwindigkeiten angeregt werden als jene Tragwerke, die hohe Biegeeigenfrequenzen aufweisen. Die abgebildeten Linien verlaufen horizontal bei den Überfahrtsgeschwindigkeiten 200, 300 und 400  $km/h$ .

Jede der folgenden Abbildungen besteht aus vier Teilbildern. Bei diesen werden zwei charakteristische Eigenschaften des Tragwerks variiert, welche nicht auf den Achsen der Diagramme aufgetragen sind: das Lehr'sche Dämpfungsmaß und die Massenbelegung.

### Statistische Auswertung

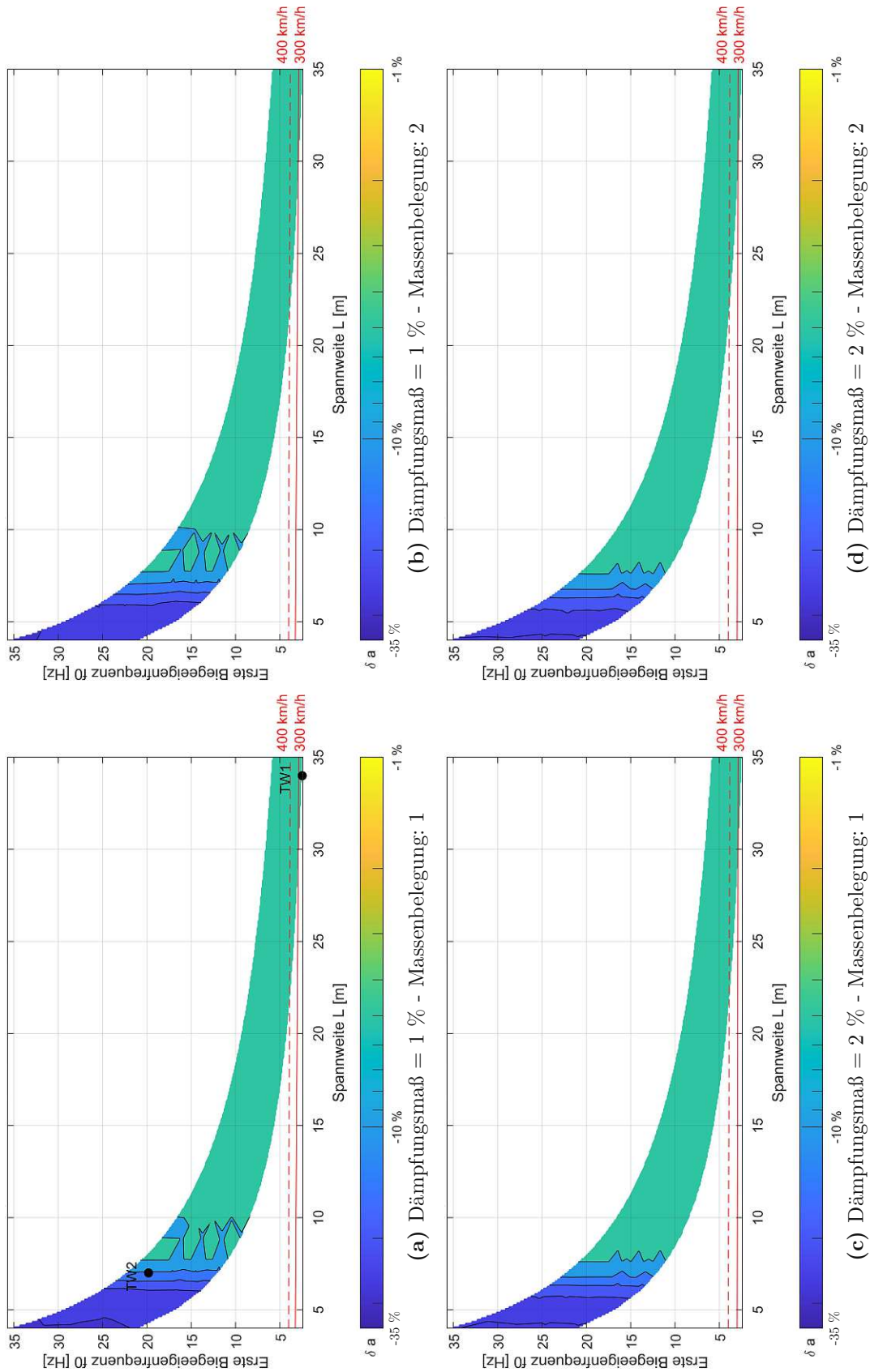
Eingangs ist eine statistische Auswertung der Verhältnisse von Beschleunigungsspitzen  $\delta a$ , die aus durchgeführten Berechnungen mit und ohne Lastverteilung stammen, vorweggenommen, siehe dazu Tabelle 4.1. Aufgelistet werden die folgenden Werte: Die betragsmäßig kleinste und größte relative Beschleunigungsreduktion  $|\delta a|_{min}$  und  $|\delta a|_{max}$ , der Mittelwert  $\bar{\delta a}$  und die Standardabweichung  $\sigma_{\delta a}$  der relativen Reduktionen zufolge der Achslastverteilung.

Die Auswertung erfolgt jeweils für die Beschleunigungsspitzen bei den kritischen Geschwindigkeiten  $v_{crit,i}$  von 1 bis 5 und separat für Tragwerke, bei welchen die charakteristischen Eigenschaften Massenbelegung (MB1 und MB2) sowie das Dämpfungsmaß (1% und 2%) variieren. Die Variationen der Tabelle 4.1 entsprechen den Teilbildern der Abbildungen 4.1, 4.3, 4.6 und 4.8 für  $i = 1$  bis 5.

**Tab. 4.1:** Statistik zu den relativen Beschleunigungsreduktionen. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

Variation	$ \delta a _{min}$ [%]	$ \delta a _{max}$ [%]	$\bar{\delta a}$ [%]	$\sigma_{\delta a}$ [%]
$v_{crit1}, MB 1, 1\%$	0.52	28.65	4.1	6.57
$v_{crit1}, MB 2, 1\%$	0.47	28.58	4.06	6.41
$v_{crit1}, MB 1, 2\%$	0.43	25.71	3.53	6.3
$v_{crit1}, MB 2, 2\%$	0.39	25.81	3.51	6.27
$v_{crit2}, MB 1, 1\%$	0.79	10.25	3	1.75
$v_{crit2}, MB 2, 1\%$	0.91	10.23	2.86	1.88
$v_{crit2}, MB 1, 2\%$	1.1	12.77	3.05	2
$v_{crit2}, MB 2, 2\%$	1.03	12.75	3.01	2
$v_{crit3}, MB 1, 1\%$	3.04	13.84	5.62	2.35
$v_{crit3}, MB 2, 1\%$	1.09	15.78	5.45	2.42
$v_{crit3}, MB 1, 2\%$	2.35	13.92	5.5	2.04
$v_{crit3}, MB 2, 2\%$	1.63	14.73	5.47	2.13
$v_{crit4}, MB 1, 1\%$	5.15	20.37	8.74	2.3
$v_{crit4}, MB 2, 1\%$	3.14	22.56	8.82	2.9
$v_{crit4}, MB 1, 2\%$	6.24	16.15	8.9	2.3
$v_{crit4}, MB 2, 2\%$	4.61	18.03	8.74	2.3
$v_{crit5}, MB 1, 1\%$	6.62	17.35	10.5	1.93
$v_{crit5}, MB 2, 1\%$	5.86	16.22	10.7	2.22
$v_{crit5}, MB 1, 2\%$	6.51	16.24	10.48	2.37
$v_{crit5}, MB 2, 2\%$	6.47	16.46	10.57	2.98

**Vergleich der maximalen Beschleunigungen im Bereich der resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d1}$**



**Abb. 4.1:** Vergleich der Beschleunigungspitzen  $\delta a$  unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d1}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

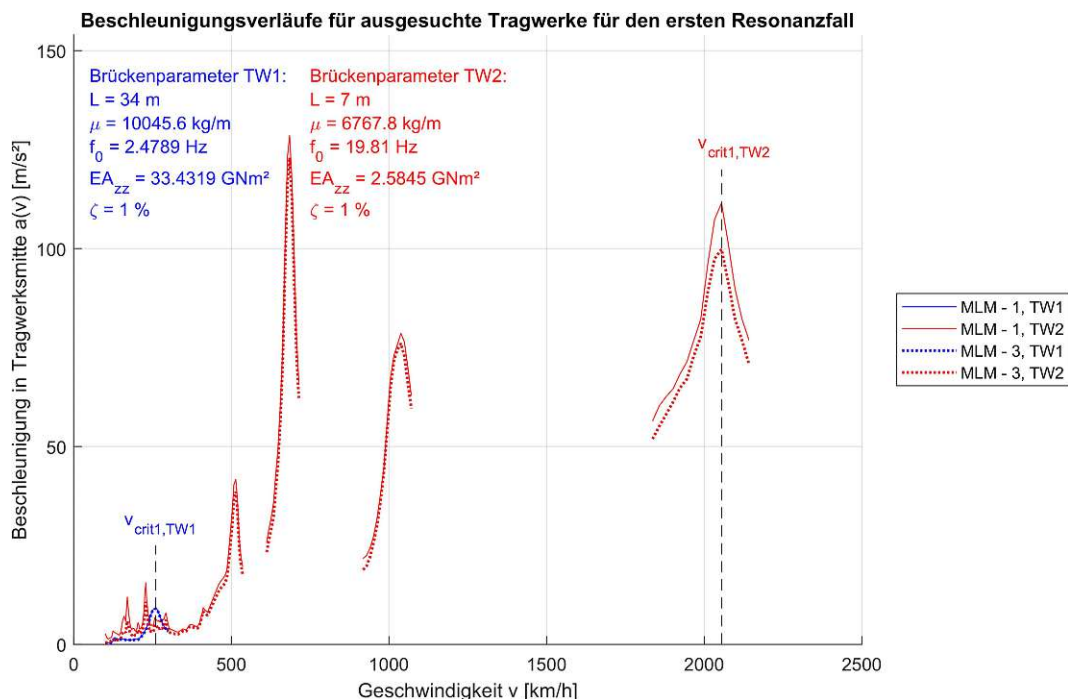
In der Abbildung 4.1 sind die Verhältnisse  $\delta a$  der maximalen Beschleunigungen im Bereich der jeweiligen ersten resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d1}$  dargestellt. Die Berücksichtigung der Lastverteilung hat ähnliche Auswirkungen auf kurze Brücken mit einer Spannweite bis zu 7 m, unabhängig davon, welche Massenbelegung beziehungsweise Dämpfung die jeweilige Brücke aufweist. Die quantitative Abweichung der Beschleunigungsspitzen im Resonanzfall scheint für diese sehr kurzen Brücken einzig von ihren Längen abzuhängen, nicht jedoch von ihren Eigenfrequenzen. Brücken mit sehr kurzen Spannweiten erfahren bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit, die gleich der ersten kritischen Geschwindigkeit ist, die maximalen Beschleunigungsreduktionen zufolge der Achslastaufteilung. Diese Reduktionen sind bei Tragwerken mit 1 % Dämpfung im Bereich von  $|\delta a| \approx 28,6\%$  und bei Tragwerken mit 2 % Dämpfung bei  $|\delta a| \approx 25,8\%$ . In dem Bereich von 8 bis 10 m langen Tragwerken mit 1 % Dämpfung hängen die Ergebnisse auch von der ersten Biegeeigenfrequenz  $f_0$  ab. Bei Brücken mit einer Spannweite von 11 m und mehr und einem Lehr'schen Dämpfungsmaß von 1 % ist die Reduktion der Beschleunigung durch die Aufteilung der Achslast auf 3 Kräfte im Verhältnis zur jeweiligen Referenzbeschleunigung gleich groß, unabhängig von der Spannweite, der ersten Biegeeigenfrequenz und der Massenbelegung der Brücke. Für Brücken mit einem Lehr'schen Dämpfungsmaß von 2 % und mit einer Spannweite von 8 m und mehr, gilt selbiges.

Tendenziell hat die Aufteilung der Kräfte weniger Einfluss auf die Reduktionen der Beschleunigung je länger die Brücken sind. Die Brücken erfahren durch die Aufteilung eine Reduktion der Beschleunigung in Feldmitte von durchschnittlich  $|\delta a| \approx 4,1\%$  bei Brücken mit 1 % Dämpfung und  $|\delta a| \approx 3,5\%$  bei Brücken mit 2 % Dämpfung. Aufgrund der starken Beschleunigungsreduktion bei den kurzen Brücken und der niedrigen Beschleunigungsreduktion bei den Brücken ab einer Spannweite von 10 m ist die Standardabweichung von  $\sigma_{\delta a} \approx 6,3\%$  bis  $\approx 6,6\%$  um einiges höher als die Standardabweichung bei den Auswertungen der anderen untersuchten kritischen Geschwindigkeiten  $v_{crit2}$  bis  $v_{crit5}$ .

Im betrachteten Definitionsbereich der Spannweiten kann die erste kritische Geschwindigkeit nur bei den längsten Brücken mit sehr niedrigen ersten Biegeeigenfrequenzen im realistischen Geschwindigkeitsbereich auftreten.

Um zu veranschaulichen, in welcher Größenordnung die erste kritische Geschwindigkeit liegen kann, wird in Abbildung 4.2 für zwei Tragwerke das jeweilige Beschleunigungs-Geschwindigkeitsdiagramm dargestellt. Die ausgewählten Tragwerke werden TW1 und TW2 genannt und sind mit schwarzen Markern in der Abbildung 4.1a gekennzeichnet. Einfluss auf die kritische Geschwindigkeit hat neben den regelmäßigen Abständen der Achslasten die erste Biegeeigenfrequenz der Brücke. Letztere ist für die Isolinien der kritischen Geschwindigkeiten in der Abbildung 4.1 zumeist ausschlaggebend, weil bei den vorliegenden, auszuwertenden Daten immer derselbe überfahrende Zug für die Berechnung verwendet worden ist und somit die Achsabstände gleichbleibend sind. Für den Resonanzfall mit der höchsten Geschwindigkeit ist meist jener regelmäßige Lastabstand maßgebend, welcher der Wagenlänge über Puffer entspricht. Somit wird ein Tragwerk mit niedrigerer ersten Biegeeigenfrequenz und eines mit höherer ersten Biegeeigenfrequenz für die grafische Auswertung in der Abbildung 4.2 gewählt. Exemplarisch werden das Tragwerk mit einer

Länge von  $34\text{ m}$  und einer ersten Biegeeigenfrequenz von  $2,48\text{ Hz}$  sowie das Tragwerk mit einer Länge von  $7\text{ m}$  und einer ersten Biegeeigenfrequenz von  $19,81\text{ Hz}$  gewählt. Beide Tragwerke besitzen ein Lehr'sches Dämpfungsmaß von  $1\%$  und sind der Massenbelegung  $1$  zuzuordnen.

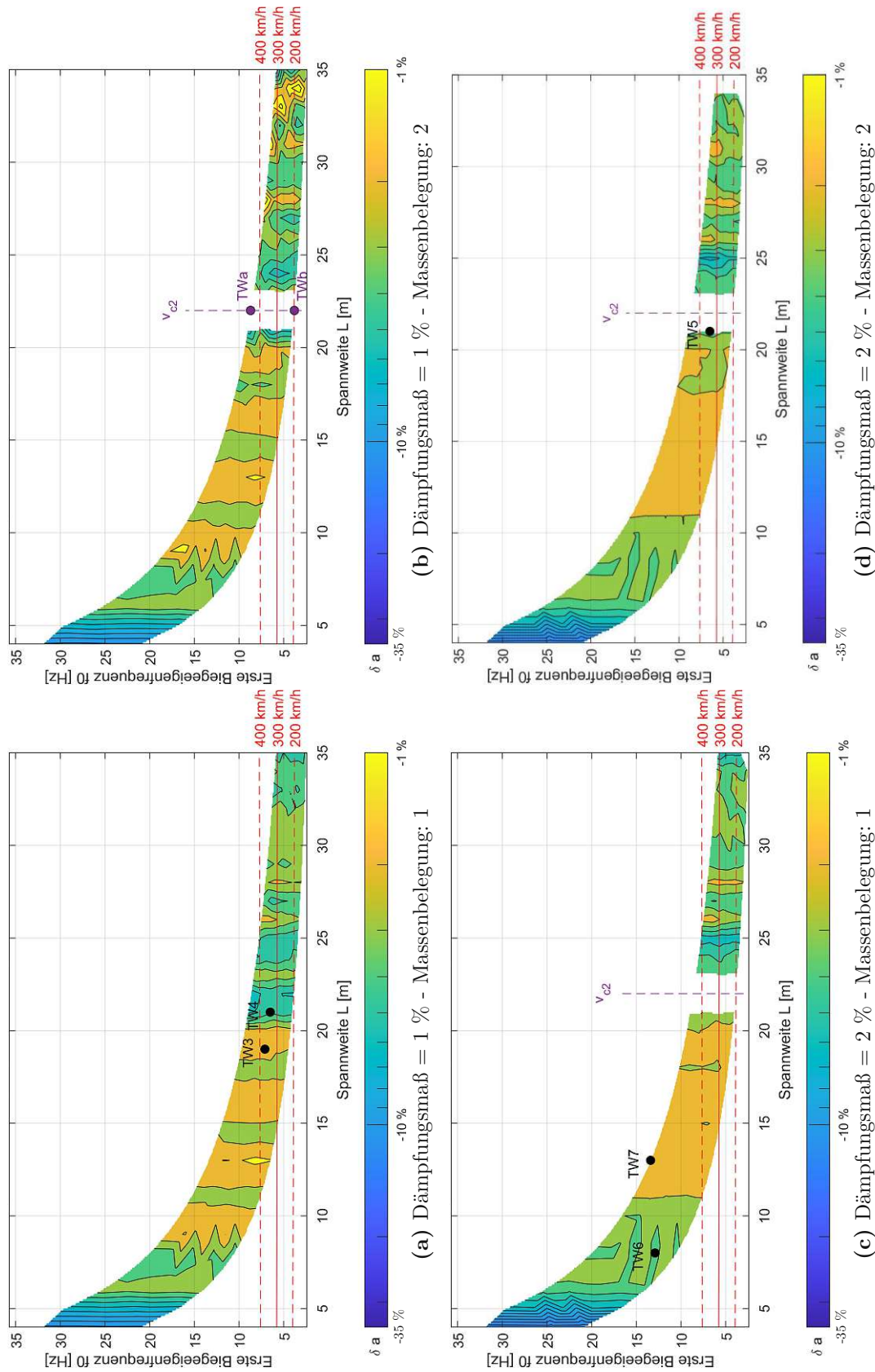


**Abb. 4.2:** Vergleich zweier Beschleunigungsverläufe: Tragwerk 1 mit  $L = 34\text{ m}$  und  $f_0 = 2,5\text{ Hz}$ , Tragwerk 2 mit  $L = 7\text{ m}$  und  $f_0 = 19,8\text{ Hz}$ , jeweils mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von  $\zeta = 1\%$ .

Auf den ersten Blick ist erkennbar, dass die berechneten Werte, sowohl die Beschleunigungen in Tragwerksmitte als auch die Überfahrgeschwindigkeiten, bei der die Resonanzen auftreten, des Tragwerks 2 viel größer sind als die des Tragwerks 1. Die erste kritische Geschwindigkeit von  $2055\text{ km/h}$  beim Tragwerk 2 ist ungefähr 8 mal so groß wie beim Tragwerk 1 mit einer ersten kritischen Geschwindigkeit von  $260\text{ km/h}$ . Gut sichtbar ist außerdem der glatte Beschleunigungs-Geschwindigkeits-Verlauf des ersten Tragwerks. Neben der maximalen Beschleunigung bei der Geschwindigkeit  $v_{crit,1}$  gibt es bei niedrigeren Geschwindigkeiten ein vergleichsweise niedriges Plateau an Beschleunigungen. Gegenteilig sieht es beim Tragwerk 2 aus: neben dem lokalen Maximum bei  $v_{crit,1}$  gibt es ungefähr ein Dutzend weitere lokale Maxima im untersuchten Geschwindigkeitsbereich. Den höchsten Wert der Beschleunigung erreicht das Tragwerk 2 beim dritten Resonanzfall, der bei einer Überfahrgeschwindigkeit von  $685\text{ km/h}$  eintritt.



**Vergleich der maximalen Beschleunigungen im Bereich der resonanz erzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d2}$**



**Abb. 4.3:** Vergleich der Beschleunigungsspitzen  $\delta a$  unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen resonanz erzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d2}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

Die Grafik 4.3 zeigt die Verhältnisse  $\delta a$  der maximalen Beschleunigungen im Bereich der jeweiligen zweiten resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d2}$ . Auffallend ist, dass sich die Farbverläufe der Grafiken für Tragwerke mit gleichem Dämpfungsmaß sehr ähneln. Bei Tragwerken mit 1 % Dämpfung haben diese, abhängig von ihrer Länge und ihrer ersten Biegeeigenfrequenz, durch die Lastaufteilung eine ähnliche Reduktion der Beschleunigung zu erwarten. Bei Brücken der Längen um 9 m, 13 m, 16 m und 19 m sind unterdurchschnittliche Reduktionen zu beobachten. Die durchschnittliche Reduktion bei den zweiten Resonanzfällen beträgt bei Brücken mit 1 % Dämpfung, je nach Massenbelegung,  $\overline{\delta a} = 2,86\%$  bzw.  $3,00\%$ , vergleiche dazu Tabelle 4.1. Abhängig von der ersten Biegeeigenfrequenz gibt es unter den gerade beschriebenen Tragwerken welche, deren Beschleunigungsreduktion durch die Lastaufteilung fast nicht beeinflusst wird. Ebenso gilt dies auch für Tragwerke mit den Längen von 33 und 34 m bei der Massenbelegung 2. Dabei handelt es sich um Reduktionen um 1 % oder noch weniger. In den Abbildungen 4.3a und 4.3b sind diese Tragwerke durch gelbe Füllflächen markiert. Bei Brücken der Längen um die 5 m, 22 m und 24 m treten überdurchschnittliche Reduktionen auf, jedoch kommt es bei den schweren Brücken mit diesen Längen teilweise zu keinen Resonanzfällen im Bereich der jeweiligen resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d2}$ . Ab einer Brückenlänge von 26 m ist das Reduktionsverhalten, besonders bei schweren Brücken stark von der ersten Biegeeigenfrequenz abhängig.

Bei Brücken mit 2 % Dämpfung lässt sich die Bandbreite der Tragwerkslängen in fünf Bereiche einteilen: Die sehr kurzen Brücken mit Spannweiten bis etwa 7 m, die durch die Lastverteilung eine starke Reduktion der Beschleunigung erfahren, die kürzeren Brücken mit Spannweiten von 7 m bis etwa 11 m, deren Beschleunigung durch die Achslastaufteilung deutlich weniger reduziert wird als es bei den sehr kurzen Brücken der Fall ist, die mittellangen Brücken mit Spannweiten von 11 m bis etwa 20 m, deren Beschleunigung noch etwas weniger reduziert wird als bei den kürzeren Brücken (7 bis 11 m Spannweite), Brücken mit einer Länge von 20 m bis 24 m, bei welchen sich keine Beschleunigungsspitzen ausbilden und das Feld der längeren Brücken, deren Verhalten sehr inhomogen ist.

In den Abbildungen 4.3b, 4.3c und 4.3d bilden sich in den Parameterfeldern jeweils weiße Flächen bei einer Spannweite von 22 m aus. Zu erklären ist das mit Hilfe der Auslöschungsgeschwindigkeit, vergleiche dazu Formel (2.58). Bei Geschwindigkeiten, die mit der besagten Formel ermittelt werden können, werden die Resonanzspitzen durch Auslöschungseffekte unterdrückt und bilden sich entsprechend nicht aus. Somit gibt es für die Tragwerke mit besagter Länge bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit keine Beschleunigungsspitze und somit auch keine Vergleichswerte für die lastverteilungsabhängige Reduktion. Zu dieser Auslöschung der 2. Resonanz kommt es jedoch nicht bei den leichten und gleichzeitig schwach gedämpften Tragwerken. Vermutlich, weil leichte Brücken mit 1 % Dämpfung generell höhere Resonanzspitzen erfahren und es, wenn die Auslöschungsgeschwindigkeit nicht in unmittelbarer Nähe zur Resonanzgeschwindigkeit ist, nicht zu einer gänzlichen Auslöschung des Resonanzereignisses kommt. Für zwei Tragwerke TWa und TWb, die in der Abbildung 4.3b mit violetten Markern gekennzeichnet sind und sich im ausgelöschten Bereich befinden, wurden zur Veranschaulichung, die jeweilige zweite Auslöschungsgeschwin-



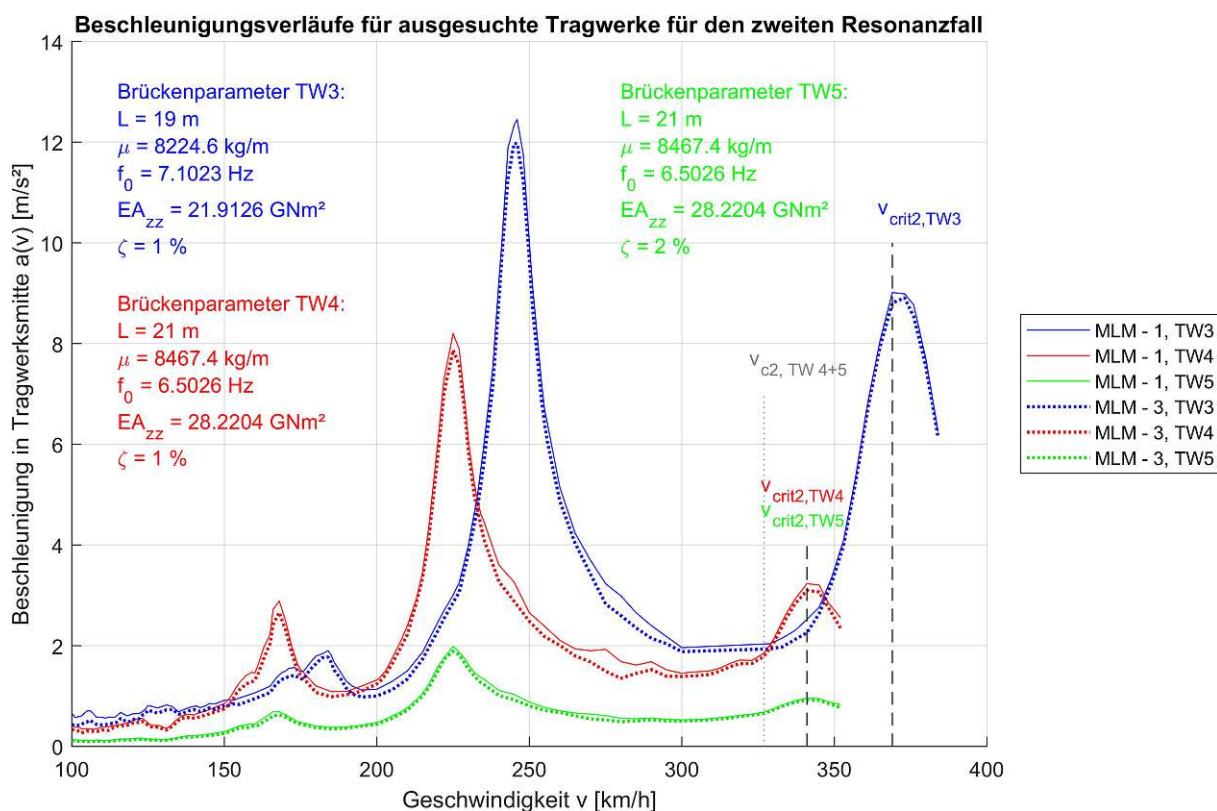
digkeit  $v_{c2}$  und die jeweilige zweite resonanzerzeugende Geschwindigkeit  $v_{d2}$  berechnet, vergleiche dazu Tabelle 4.2. Dabei ist zu sehen, dass sich für die einzelnen Tragwerke die berechneten Geschwindigkeiten nur minimal unterscheiden.

**Tab. 4.2:** Auslöschungsgeschwindigkeit für ausgewählte Tragwerke

	$L$ [m]	$f_0$ [Hz]	MB [-]	$\zeta$ [%]	$v_{c2}$ [km/h]	$v_{d2}$ [km/h]
<i>TW<sub>a</sub></i>	22	8,7	2	1	459	450
<i>TW<sub>b</sub></i>	22	3,8	2	1	201	197

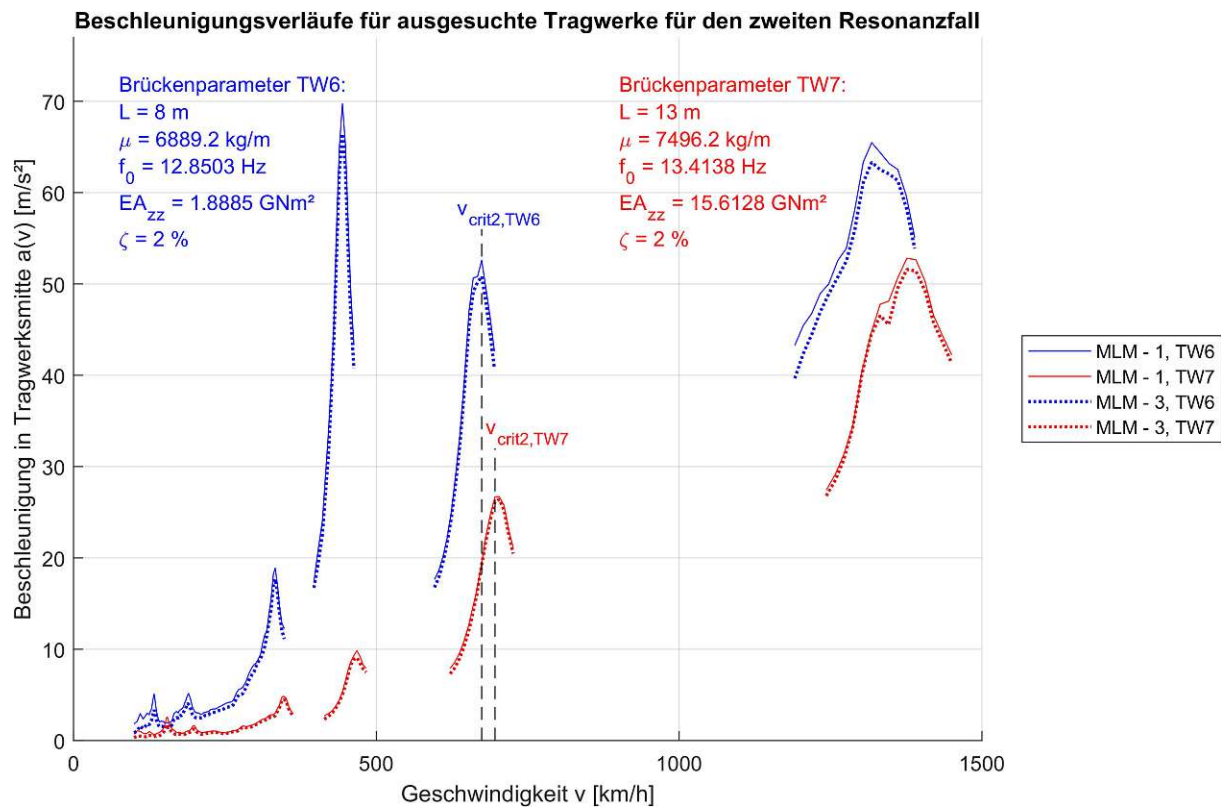
Die zweite kritische Geschwindigkeit kann bei Brücken mit Spannweiten ab 15 m schon im realistischen Geschwindigkeitsbereich von bis zu 300 km/h liegen.

Da sich die Brücken mit einer Spannweite von 19 m und einer Spannweite von 21 m in ihrer Länge nur geringfügig unterscheiden, bei 1 % Dämpfung jedoch auffallende Unterschiede im relativen Verhältnis zwischen den maximalen Beschleunigungswerten aufweisen, werden in der Abbildung 4.4 ihre Beschleunigungs-Geschwindigkeitsdiagramme dargestellt. Exemplarisch werden zwei Tragwerke ausgewählt: Das Tragwerk TW3 mit einer Länge von 19 m und einer ersten Biegeeigenfrequenz von 7,1 Hz und das Tragwerk TW4 mit einer Länge von 21 m und einer ersten Biegeeigenfrequenz von 6,5 Hz. Beide Tragwerke sind der Massenbelegung 1 zuzuordnen und besitzen das Lehr'sche Dämpfungsmaß von 1 %. Zusätzlich zu den beiden beschriebenen Tragwerken wird noch der geschwindigkeitsabhängige Beschleunigungsverlauf eines dritten Tragwerks TW5 abgebildet. Das Tragwerk 5 besitzt ebenso wie das Tragwerk 4 eine Spannweite von 21 m und eine erste Biegeeigenfrequenz von 6,5 Hz, jedoch gehört es der Massenbelegung 2 an und hat ein Lehr'sches Dämpfungsmaß von 2 %. Somit ist dieses Tragwerk in der Abbildung 4.3d nahe an dem nicht auswertbaren Bereich des Parameterfelds aufzufinden, welcher als weiße Fläche abgebildet ist.



**Abb. 4.4:** Vergleich dreier Beschleunigungsverläufe: Tragwerk 3 mit  $L = 19 \text{ m}$  und  $f_0 = 7,1 \text{ Hz}$ , Tragwerk 4 mit  $L = 21 \text{ m}$  und  $f_0 = 6,5 \text{ Hz}$ , jeweils mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von  $\zeta = 1 \%$  und MB1; Tragwerk 5 mit  $L = 21 \text{ m}$  und  $f_0 = 6,5 \text{ Hz}$  mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von  $\zeta = 2 \%$  und MB2.

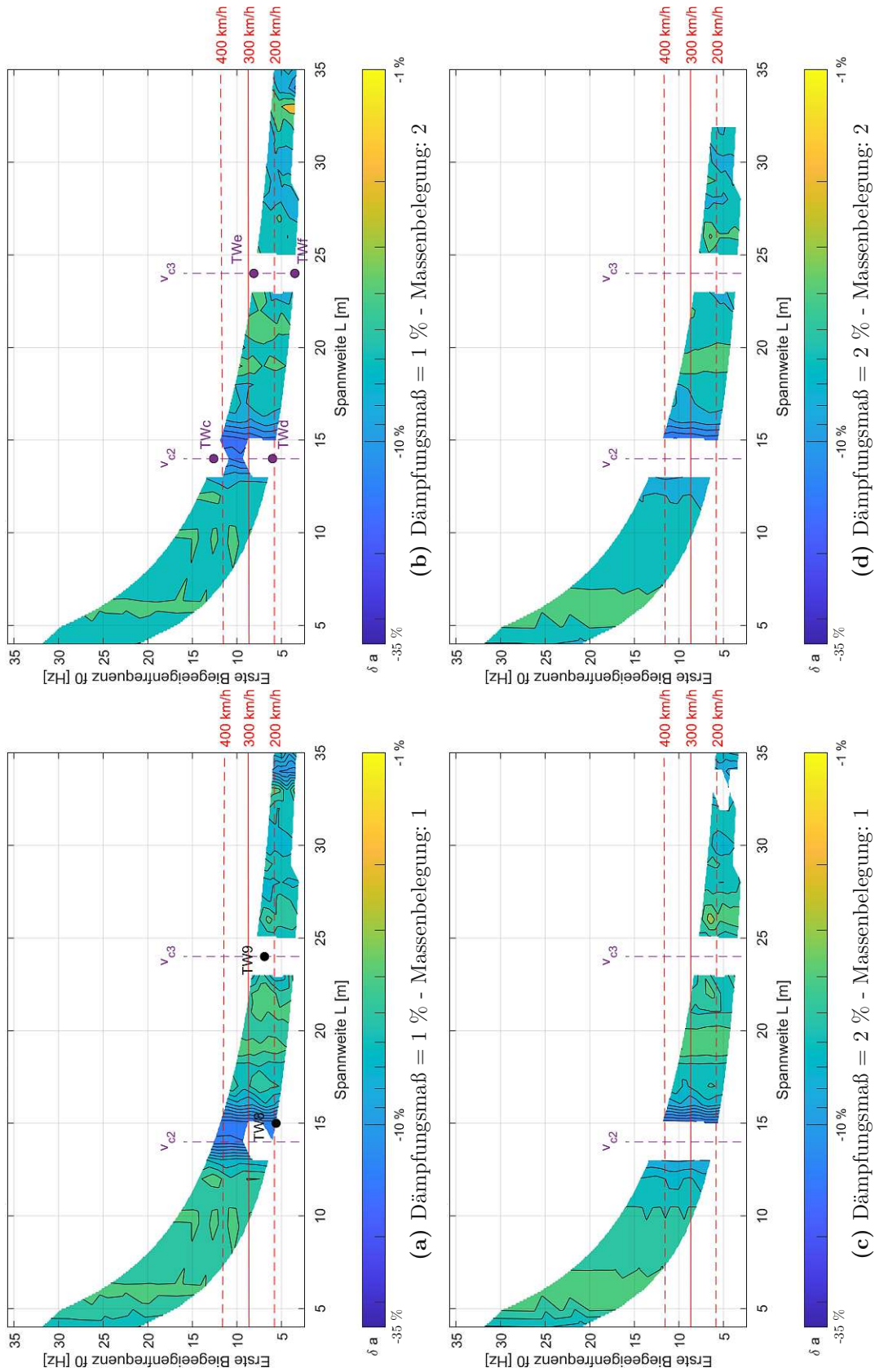
Vergleicht man im Beschleunigungs-Geschwindigkeitsdiagramm in der Abbildung 4.4 die leichten Tragwerke mit 1 % Dämpfung miteinander, ist zu sehen, dass die ersten zwei abgebildeten lokalen Beschleunigungsmaxima des Tragwerks 4 mit einer Länge von 21 m bei etwas niedrigeren Geschwindigkeiten auftreten und kleiner ausfallen als beim etwas kürzeren Tragwerk 3. Auffallend kleiner ist die Beschleunigungsspitze bei der Geschwindigkeit  $v_{crit,2}$  des Tragwerks 4 im Vergleich zu Tragwerks 3. Erklären lässt sich das möglicherweise durch die Auslöschungsgeschwindigkeit, vergleiche Formel 2.58. Die kleinere Beschleunigungsspitze beim Tragwerk 4 mit der Länge 21 m weist eine größere relative Beschleunigungsreduktion zufolge der Kraftaufteilung auf als das Tragwerk 3 mit einer Spannweite von 19 m. Des Öfteren wird bei der Auswertung der Beschleunigungsverläufe beobachtet, dass kleine Resonanzereignisse größere relative Beschleunigungsreduktionen zufolge der Lastaufteilung aufweisen, möglicherweise aufgrund des niedrigen Basiswerts in der Berechnung des Verhältnisses  $\delta a$ . Vergleicht man die Tragwerke 4 und 5 miteinander, also Tragwerke gleicher Länge und ähnlicher Biegeeigenfrequenz, sieht man, dass sich bei jener Geschwindigkeit, bei der sich beim Tragwerk 4 der zweite Resonanzfall einstellt, bei dem Tragwerk 5 beinahe keine Beschleunigungsspitze ausgebildet hat.



**Abb. 4.5:** Vergleich zweier Beschleunigungsverläufe: Tragwerk 6 mit  $L = 8 \text{ m}$  und  $f_0 = 12,9 \text{ Hz}$ , Tragwerk 7 mit  $L = 13 \text{ m}$  und  $f_0 = 13,4 \text{ Hz}$ , jeweils mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von  $\zeta = 2 \%$ .

Das zweite Resonanzereignis wird auch bei Tragwerken mit  $2 \%$  Dämpfung genauer betrachtet, und zwar für eine Brücke mit einer Spannweite von  $8 \text{ m}$  (Tragwerk 6) und einer Brücke mit einer Spannweite von  $13 \text{ m}$  (Tragwerk 7), wie in der Abbildung 4.5 zu sehen. Die jeweiligen ersten Biegeeigenfrequenzen wurden mit  $12,9 \text{ Hz}$  beziehungsweise  $13,4 \text{ Hz}$  möglichst nahe aneinander gewählt, damit Resonanzfälle bei ähnlichen Überfahrtsgeschwindigkeiten miteinander verglichen werden können. Beide Tragwerke sind der Massenbelegung 1 zuzuordnen. Generell ist zu sehen, dass beim kürzeren der betrachteten Tragwerke größere Beschleunigungen im Resonanzfall entstehen. Bei den zuvor betrachteten Beschleunigungsverläufen war es meistens so, dass kleinere Beschleunigungsspitzen größere relative Beschleunigungsreduktionen erfahren als größere Beschleunigungsspitzen, in diesem speziellen Fall ist das nicht so.

**Vergleich der maximalen Beschleunigungen im Bereich der resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d3}$**



**Abb. 4.6:** Vergleich der Beschleunigungspitzen  $\delta a$  unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d3}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

Die Grafik 4.6 zeigt die Verhältnisse  $\delta a$  der maximalen Beschleunigungen in unmittelbarer Nähe zur jeweiligen dritten resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d3}$ . Brücken mit den Längen um 15 m erfahren eine besonders große Reduktion der Beschleunigung, unabhängig von ihrem Dämpfungsmaß und ihrer Massenbelegung. Es ist durchaus möglich, dass die dritte kritische Geschwindigkeit bei Brücken mit einer Länge von 15 m und niedrigeren ersten Biegeeigenfrequenzen im realistischen Geschwindigkeitsbereich liegt.

Für einige längere Brücken, mit niedrigen ersten Biegeeigenfrequenzen, entstehen bei der dritten kritischen Geschwindigkeit keine ausgeprägten Resonanzeffekte, in der Abbildung 4.6 ist dies durch weiße Bereiche im Parameterfeld dargestellt. Dieses Ausbleiben des Resonanzeffektes ereignet sich praktisch nur bei Tragwerken, deren dritte potenziell resonanzerzeugende Geschwindigkeit unterhalb von 200 km/h liegt.

Die Mittelwerte der Beschleunigungsreduktionen aller vier Teilbilder aus Abbildung 4.6 liegen sehr nahe beisammen. Ihre Werte sind im Bereich von  $\overline{\delta a} = 5,45\%$  bis 5,62 %. Die Standardabweichung der Beschleunigungsreduktionen variiert im Bereich von  $\sigma_{\delta a} = 2,04\%$  bis 2,42 %, wobei die Standardabweichung bei Tragwerken mit 1 % größer ist.

Betrachtet man das Tragwerk 1 aus der Abbildung 4.2, ist zu erkennen, dass es bei diesem Tragwerk im untersuchten Geschwindigkeitsbereich eben keine ausgeprägten Resonanzspitzen im Beschleunigungsverlauf unterhalb von  $v_{crit,2}$  gibt. Somit stehen für das Tragwerk mit einer Länge von 34 m und einer ersten Biegeeigenfrequenz von 2,5 Hz keine Daten für weitere Resonanzereignisse zur Verfügung, daher werden in den Diagrammen für die kritische dritte Geschwindigkeit bis zur kritischen fünften Geschwindigkeit die Beschleunigungsverhältnisse an dieser Stelle als weiße Flächen im Parameterfeld dargestellt. Tragwerke mit ähnlicher Spannweite und ähnlicher erster Biegeeigenfrequenz weisen ähnliche Beschleunigungsverläufe auf.

Im der Abbildung 4.6 ist zu sehen, dass es bei Tragwerken mit den Längen 14 m und 24 m bei der dritten kritischen Geschwindigkeit zu keinen ausgeprägten Resonanzfällen kommt. Der anzunehmende Grund ist, dass die jeweiligen dritten Geschwindigkeiten sehr nahe bei den tragwerksabhängigen Auslöschungsgeschwindigkeiten  $v_{c2}$  und  $v_{c3}$  liegen. In der Tabelle 4.3 sind für die Tragwerke mit den besagten Längen und der jeweils höchsten und niedrigsten ersten Biegeeigenfrequenz die jeweiligen Auslöschungsgeschwindigkeiten angegeben. Vergleicht man diese Auslöschungsgeschwindigkeiten mit den rot dargestellten Geschwindigkeits-Isolinien, sieht man, dass diese gut übereinstimmen.

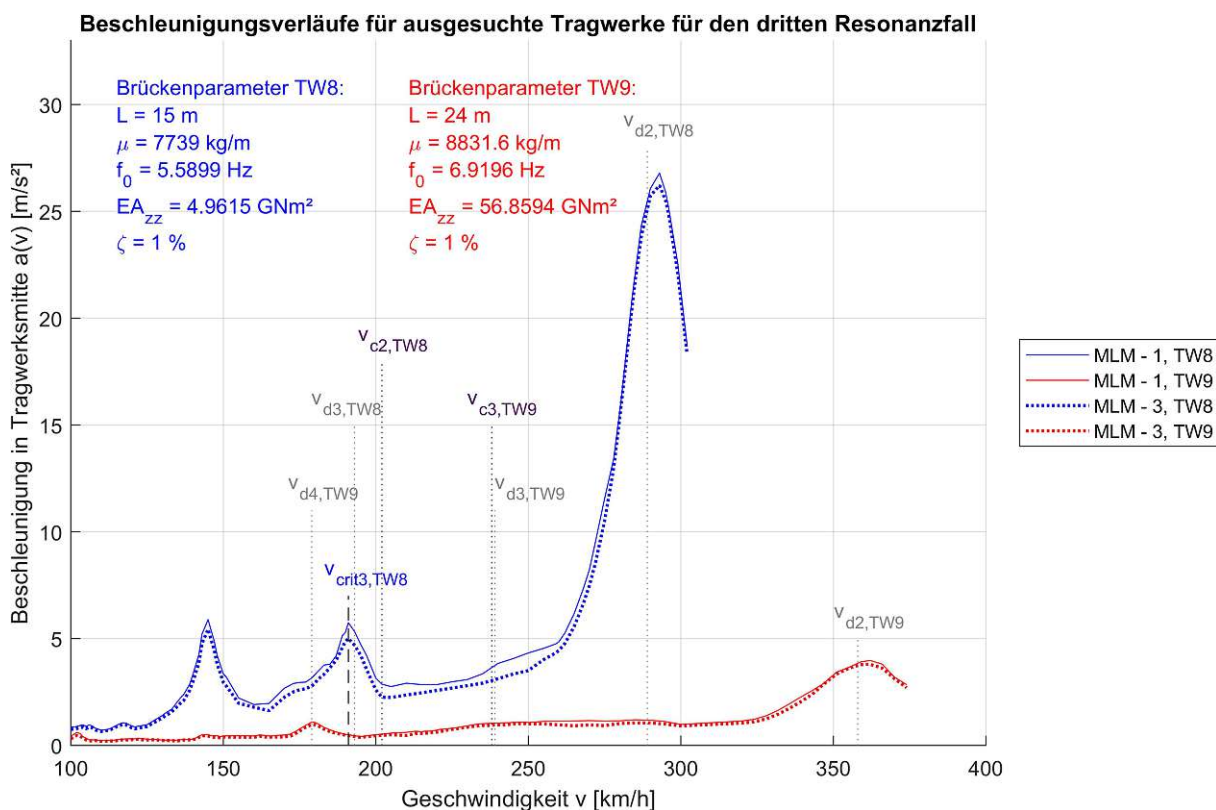
**Tab. 4.3:** Auslöschungsgeschwindigkeit für ausgewählte Tragwerke

	$L$ [m]	$f_0$ [Hz]	MB [-]	$\zeta$ [%]	$v_{c2}$ [km/h]	$v_{c3}$ [km/h]	$v_{d2}$ [km/h]
$TW_c$	14	12,6	2	1	423	254	435
$TW_d$	14	6,0	2	1	201	120	207
$TW_e$	24	8,1	2	1	467	279	279
$TW_f$	24	3,5	2	1	201	120	121



Vergleicht man die Tragwerke, bei welchen sich auf Grund der zweiten Auslöschungsgeschwindigkeit  $v_{c2}$  bei der dritten kritischen Geschwindigkeit  $v_{d3}$  keine Resonanzspitze ausbildet (siehe Tabelle 4.3), mit jenen Tragwerken, deren zweites potenzielles Resonanzereignis bei  $v_{d2}$  zufolge der Auslöschungsgeschwindigkeit  $v_{c2}$  unterdrückt wird (siehe Tabelle 4.2), sieht man, dass die Tragwerke kürzere Spannweiten und höhere Biegeeigenfrequenzen aufweisen, die jeweiligen Geschwindigkeiten bei denen Beschleunigungsspitzen auftreten, jedoch in einer ähnlichen Größenordnung bleiben. Bei den 14 m langen Tragwerken mit 2 % Dämpfung kommt es immer zur Auslöschung des dritten Resonanzfalls. Bei den 14 m langen und schwach gedämpften Tragwerken hingegen ist dieser Effekt abhängig von der ersten Biegeeigenfrequenz.

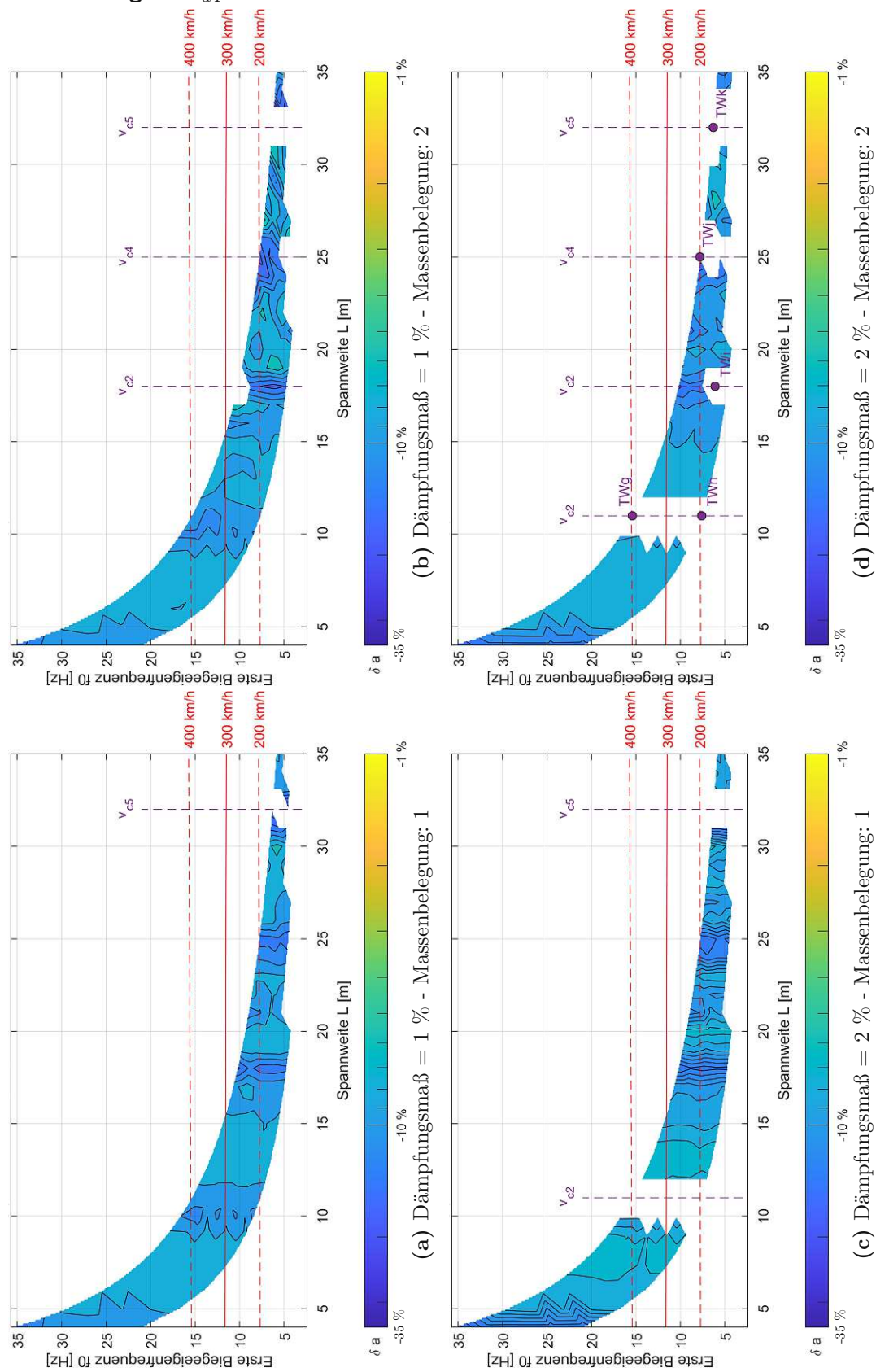
Im nächsten Schritt werden zwei Brücken ausgewählt, für welche die zuvor beschriebenen Effekte zutreffen. Zum einen eine 15 m lange Brücke (Tragwerk 8) mit einer, für den dritten Resonanzfall vergleichsweise großen Beschleunigungsreduktion zufolge der Lastaufteilung und zum anderen eine Brücke (Tragwerk 9) mit einer Spannweite von 24 m, bei welcher zufolge der Auslöschungsgeschwindigkeit  $v_{c3}$  das Resonanzereignis bei der dritten resonanz erzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d3}$  entfällt. Beide Tragwerke, die in der Abbildung 4.6a mit schwarzen Marken gekennzeichnet sind, sind der Massenbelegung 1 zuzuordnen und haben eine Dämpfung von 1 %.



**Abb. 4.7:** Vergleich zweier Beschleunigungsverläufe: Tragwerk 8 mit  $L = 15$  m und  $f_0 = 5,6$  Hz, Tragwerk 9 mit  $L = 24$  m und  $f_0 = 6,9$  Hz, jeweils mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von  $\zeta = 1$  %.

Beim Tragwerk mit der Spannweite von 24 m kommt es bei der Geschwindigkeit  $v_{d3,TW9}$  zu keinem Resonanzereignis. Erst bei  $v_{d4,TW9}$  entsteht neuerlich eine Beschleunigungsspitze.

**Vergleich der maximalen Beschleunigungen im Bereich der resonanzerzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d4}$**



**Abb. 4.8:** Vergleich der Beschleunigungspitzen  $\delta a$  unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen *resonanzerzeugenden Geschwindigkeit*  $v_{d4}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.



Die Ergebnisverläufe aus der Abbildung 4.8 weisen aufgrund der Brückenparametervariation von Massenbelegung und Dämpfung ein differenzierteres Aussehen auf, als es bei den bis jetzt beschriebenen kritischen Geschwindigkeiten der Fall war.

Das, was bei allen vier Variationen zu sehen ist, ist, dass sich bei Spannweiten von 9 bis 10 m das Reduktionsverhalten bei praktisch allen fünf Biegeeigenfrequenzen pro Spannweite ändert. Bei den Brücken mit 1 % Dämpfung nimmt die Beschleunigungsreduktion Werte im Bereich von 7 bis 11 % an.

Bei den Brücken mit 2 % zeigt sich das biegeeigenfrequenz-abhängige Verhalten auch bei den Auslöschungseffekten. Nicht nur die Resonanzeffekte bei den 11 m langen Tragwerken mit 2 % Dämpfung werden unterdrückt, sondern, je nach Biegeeigenfrequenz, auch die Resonanzfälle bei den 10 m langen Tragwerken.

Betrachtet man die Standardabweichungen der relativen Beschleunigungsreduktionen aus der Tabelle 4.1 fällt auf, dass die Steuungen bei allen Massenbelegungs-Dämpfungs-Variationen ident sind, bis auf den Ausreißer bei der Kombination Massenbelegung 2 und Dämpfung 1 %. Diese Kombination hat eine deutlich größere Standardabweichung von  $\sigma_{\delta a} = 2,9\%$ . Die Mittelwerte der Beschleunigungsreduktionen zufolge der Achslastaufteilung liegen im Bereich von  $\bar{\delta a} = 8,74\%$  bis  $8,90\%$ .

Bei allen vier Variationen ist eine größere relative Beschleunigungsreduktion bei Tragwerken mit Längen um 11, 18, 25 und um 32 m zu sehen, sofern es überhaupt zu einem Resonanzfall kommt. Diese größeren Werte finden sich meist am Rand des nicht auswertbaren Bereichs des Parameterfelds, welcher als weiße Flächen, abgebildet ist. Dies deckt sich mit dem zuvor beobachteten Phänomen, dass Resonanzspitzen in der Nähe von Auslöschungsgeschwindigkeiten kleiner ausfallen und in weiterer Folge die relativen Beschleunigungsreduktionen größer sind. Für die fünf Tragwerke TWg, TWh, TWi, TWj und TWk sind in der Tabelle 4.4 die Auslöschungsgeschwindigkeiten, berechnet mit der Formel (2.58), angegeben. Betrachtet man die Abbildung 4.8d, ist zu sehen, dass sich diese Tragwerke, abgebildet mit violetten Markern, im unauswertbaren Bereich des Parameterfelds befinden.

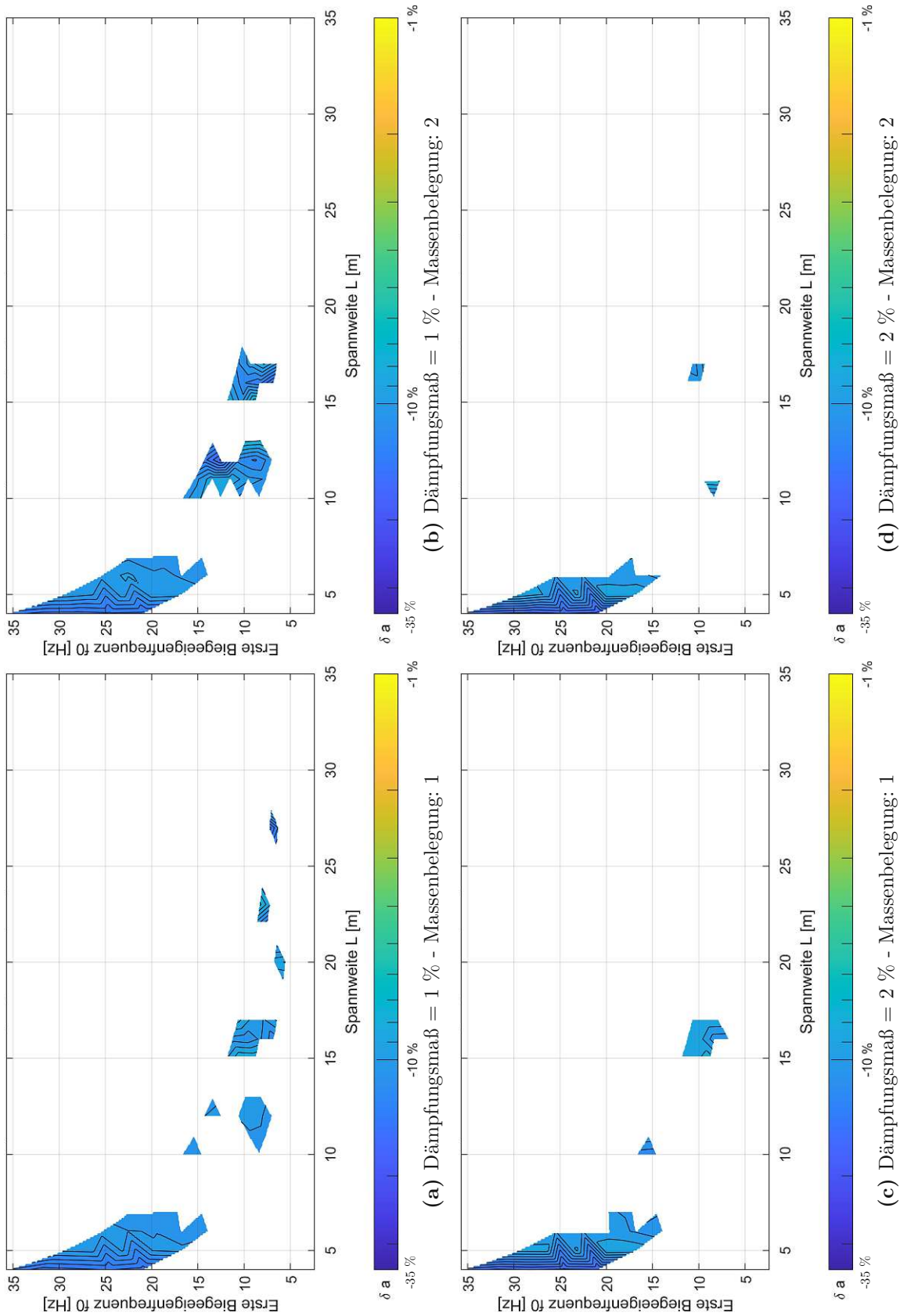
**Tab. 4.4:** Auslöschungsgeschwindigkeit für ausgewählte Tragwerke

	$L$ [m]	$f_0$ [Hz]	MB [-]	$\zeta$ [%]	$v_{c2}$ [km/h]	$v_{c3}$ [km/h]	$v_{c4}$ [km/h]	$v_{c5}$ [km/h]	$v_{d4}$ [km/h]
<i>TWg</i>	11	15,4	2	2	407				398
<i>TWh</i>	11	7,6	2	2	201				197
<i>TWi</i>	18	6,1	2	2		158			158
<i>TWj</i>	25	7,8	2	2			201		202
<i>TWk</i>	32	6,3	2	2				161	163

Wenn man den Abstand zwischen den Geschwindigkeits-Isolinien der vorherigen Resonanzfälle mit jenen bei der vierten kritischen Geschwindigkeit vergleicht (siehe Abbildung 4.8),

ist zu beobachten, dass die Distanz zweier Geschwindigkeits-Isolinien sukzessive größer wird. Die Tragwerke, die beim vierten Resonanzfall im Bereich der markierten Geschwindigkeit von 200 bis 400  $km/h$  liegen, sind deutlich kürzer als jene, die beispielsweise beim ersten Resonanzfall in diesem Geschwindigkeitsbereich liegen. Für die in dieser Arbeit untersuchten Brücken, steigt bei den kürzeren, die erste Biegeeigenfrequenz pro Geschwindigkeitsschritt deutlich mehr, als es bei den längeren Brücken der Fall ist. Wie anhand der Formel (2.57) für die kritische Geschwindigkeit zu erkennen ist, gehen der regelmäßige Lastabstand und die Biegeeigenfrequenz eines Tragwerks jeweils linear ein. Der regelmäßige Lastabstand ist im vorliegenden Vergleich als konstant anzunehmen. In Folge dessen kommt es bei Spannweitenänderungen der kürzeren Brücken um eine bestimmte Länge zu einem größeren Unterschied der kritischen Geschwindigkeit, als das bei langen Brücken der Fall ist. Tragwerke mit einer Spannweite von 20  $m$  und mehr haben bei niedrigeren ersten Biegeeigenfrequenzen als 5  $Hz$  keine auszuwertenden Ergebnisse und werden in der Abbildung 4.8 als weiße Flächen dargestellt. Bei diesen Tragwerken nimmt die vierte kritische Geschwindigkeit einen Wert unterhalb von 100  $km/h$  an. Für die vorliegende Parameterstudie werden jedoch nur Werte ab 100  $km/h$  untersucht.

**Vergleich der maximalen Beschleunigungen im Bereich der resonanz erzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d5}$**



**Abb. 4.9:** Vergleich der Beschleunigungspitzen  $\delta a$  unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen resonanz erzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d5}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

In der Abbildung 4.9 ist zu sehen, dass es im Vergleich zu den vorherigen resonanz erzeugenden Geschwindigkeiten  $v_{d1}$  bis  $v_{d4}$  nur noch wenige Tragwerke gibt, die einen Resonanzfall in unmittelbarer Nähe zur resonanz erzeugenden Geschwindigkeit  $v_{d5}$  ausbilden. Bei den Tragwerken mit 1 % Dämpfung bildet sich bei der besagten kritischen Geschwindigkeit etwas öfter eine ausgepögte Beschleunigungsspitze.

Die Anregung, die zu einem Resonanzereignis führen kann, wird durch bewegte Lasten in regelmäßigen Abständen erzeugt. Besitzt diese Anregung eine ähnliche Frequenz wie die Eigenfrequenz des Überbaus oder eines Vielfachen davon, kommt es zu Beschleunigungsspitzen. Die Resonanzfälle, die bei sehr hohen Geschwindigkeiten entstehen, werden zufolge des längsten regelmäßigen Abstands eines überfahrenden Zugwagens angeregt. Für die hier untersuchten Geschwindigkeiten  $v_{di}$  wird dieser Abstand als die Wagenlänge über Puffer angenommen. Bei niedrigeren Geschwindigkeiten kann der Fall durchaus eintreten, dass Resonanzfälle zufolge kürzerer Abstände entstehen, wie beispielweise durch den Achsabstand der Drehgestelle oder den Abstand der Radsätze eines Drehgestells. Durch den Einfluss der unterschiedlichen Anregungen zufolge unterschiedlicher Lastabstände auf die Vertikalbeschleunigungen bei niedrigen Überfahrtsgeschwindigkeiten, ist es nicht zwingend der Fall, dass eine Resonanzspitze genau bei der resonanz erzeugenden Geschwindigkeit zufolge der Wagenlänge über Puffer  $v_{d5}$  entsteht.

### Schlussfolgerungen

Generell lässt sich beobachten, dass bei Resonanzfällen mit höheren Geschwindigkeiten das relative Verhältnis zwischen den maximalen Beschleunigungswerten größer ist als bei Resonanzfällen mit niedrigeren Geschwindigkeiten. Dabei muss gesagt werden, dass die Resonanzereignisse bei niedrigeren Geschwindigkeiten viel geringere Beschleunigungswerte hervorrufen als bei höheren Geschwindigkeiten, wodurch die abgebildeten Verhältnisse durch den kleinen Referenzwert schnell groß werden. Die tatsächliche Größenordnung der Beschleunigungen ist aber zudem auch stark von den individuellen Tragwerksparemtern, wie der Tragwerkseigenfrequenz, dem Dämpfungsmaß und der Massenbelegung abhängig. Die frequenz- und spannweitenabhängigen Verhältnisse der Beschleunigungsreduktion sagen nichts über den absoluten Unterschied der Beschleunigungswerte aus.

Die Lastaufteilung hat auf Tragwerke mit einer bestimmten Länge, bei festgehaltenen Dämpfungsmaß und Massenbelegung, bei einem bestimmten Resonanzereignis oft dieselbe Auswirkung auf die maximalen Beschleunigungen unabhängig von der ersten Biegeeigenfrequenz. Dies zeigt sich in den Farbverläufen der Abbildungen 4.1, 4.3 und 4.6 durch vertikale Blöcke mit jeweils denselben Farben. Besonders bei den ersten Resonanzfällen ist dieses Phänomen gut erkennbar.

Betrachtet man schrittweise den ersten Resonanzfall, anschließend den zweiten, dritten und vierten, erkennt man, dass die Isolinien der Geschwindigkeiten, welche darauf hinweisen, welche Resonanzfälle bei welchen Tragwerken im realistischen Geschwindigkeitsbereich sind, sukzessive mit höheren Biegeeigenfrequenzen verbunden sind. Das bedeutet, dass der erste Resonanzfall nur für die längsten Brücken im betrachteten Parameterfeld mit niedrigen

Biegeeigenfrequenzen im realistischen Betriebszustand in Betracht gezogen werden muss. Höhere Resonanzfälle können folglich auch für kürzere Brücken relevant werden, wohingegen höhere Resonanzfälle bei längeren Brücken schon gar nicht mehr im betrachteten Geschwindigkeitsbereich liegen, weil die Geschwindigkeiten, bei denen sie auftreten, niedriger sind.

Zu beobachten ist, dass die hier gewählte Variation der Massenbelegung in der Regel einen viel geringeren Einfluss auf die Reduktion der Beschleunigungsamplituden zufolge der Lastaufteilung hat als die hier gewählte Änderung des Dämpfungsgrades der Brücke.

### 4.3.2 Gegenüberstellung der Beschleunigungsspitzen unterschiedlicher Tragwerke, berechnet mittels MLM-1 und MLM-5

Wie im vorherigen Abschnitt werden Berechnungen mit dem MLM durchgeführt und anschließend werden die Beschleunigungsspitzen zweier Lastverteilungsvarianten miteinander verglichen. Betrachtet werden die gleichen Kombinationen an Tragwerksparametern wie in der vorangegangenen Untersuchung für die Auswirkung der Lastverteilung auf drei Achslasten (MLM-3). Es wird zum einen wieder das Lastmodell mit nur einer einzelnen resultierenden Achslast (MLM – 1) als Referenzmodell herangezogen. Zum anderen werden die resultierenden Achslasten des Zuges nun auf fünf Einzellasten (MLM-5) aufgeteilt. Die verhältnismäßige Aufteilung und die Angriffspunkte der Einzellasten sind dem Kapitel 2.3 zu entnehmen.

Die Grafiken der Beschleunigungsreduktionen zufolge der Lastverteilung sind nach demselben Schema aufgebaut, wie es schon beim vorangegangenen Vergleich der Verteilungsvarianten MLM-1 und MLM-3 der Fall war. Wieder werden die maximalen Beschleunigungen aus den zwei betrachteten Lastmodellen durch relative Verhältnisse verglichen:

$$\delta a(v_{crit,i}) = \frac{a_{MLM-5}(v_{crit,i}) - a_{MLM-1}(v_{crit,i})}{a_{MLM-1}(v_{crit,i})} \cdot 100 [\%] \quad (4.7)$$

Auf der Abszisse der Grafik von den Beschleunigungsreduktionen zufolge der Lastverteilung werden die Spannweiten aufgetragen und auf der Ordinate befinden sich die dazugehörigen ersten Biegeeigenfrequenzen. Im Bereich der untersuchten Kombinationen aus Spannweite und Biegeeigenfrequenz zeigen farbigen Flächen die relativen Verhältnisse zwischen den maximalen Beschleunigungswerten bei den jeweiligen kritischen Geschwindigkeiten. Wie auch bei der vorherigen Auswertung des Verhaltens der Lastaufteilung auf 3 Lasten in Abbildung 4.1 bis 4.9 kennzeichnen gelbliche Farben schwächere Unterschiede und bläuliche Farben stärkere Unterschiede zwischen den jeweiligen Beschleunigungsspitzen. Um auf den ersten Blick zu sehen, welchen Einfluss der Dämpfungsgrad und die Massenbelegung haben, sind die Variationen dieser zwei Parameter wieder in vier Teilbildern gegenübergestellt. Die Grafiken der Auswertung für den ersten Resonanzfall bis zum fünften Resonanzfall sind im Appendix zu finden.

Im Wesentlichen sehen die Ergebnisverläufe qualitativ den Ergebnisverläufen aus der vorangegangenen Untersuchung sehr ähnlich. Die Beschleunigungen im Resonanzfall, die mit einer differenzierteren Lastaufteilung beim MLM-5 berechnet werden, fallen meist kleiner aus, als es jene bei einer Berechnung einer weniger differenzierten Lastaufteilung beim MLM-3 tun. Folglich werden die relativen Beschleunigungsreduktionen beim Vergleich MLM1 und MLM-5 größer als es jene beim Vergleich MLM1 und MLM-3 sind.

Beim Berechnungsmodell MLM-5 werden Resonanzspitzen zufolge der Auslöschungsgeschwindigkeiten teilweise bei anderen Tragwerken unterdrückt, als es bei Berechnungsmodell MLM-3 der Fall ist. So zum Beispiel bei der dritten kritischen Geschwindigkeit bei schwach gedämpften Tragwerken der Massenbelegung 2 und einer Spannweite von 14 m. Besitzt ein solches Tragwerk eine vergleichsweise niedrige erste Biegeeigenfrequenz, kommt es bei einer Berechnung mittels MLM-3 und MLM-5 zu einem Auslöschungsereignis. Bei einer vergleichsweise hohen ersten Biegeeigenfrequenz kommt es einer Berechnung mittels MLM-3 zu einer Auslöschung des Resonanzfalls, beim MLM-5 jedoch nicht. Bei der vierten kritischen Geschwindigkeit kommt es bei Tragwerken der Längen 18, 19 und 25 m bei der Berechnung mittels MLM-5 teilweise zu Auslöschungseffekten, bei der Berechnung mittels MLM-3 jedoch nicht. Dieser Effekt ist abhängig von der Massenbelegung, dem Dämpfungsmaß und der ersten Biegeeigenfrequenz der jeweiligen Tragwerke. Bei der fünften kritischen Geschwindigkeit kommt es bei Berechnungen mittels MLM-5 zu wenig Resonanzfällen, möglicherweise zufolge der Auslöschungsgeschwindigkeit. Möglich wäre auch, dass die Beschleunigungsspitzen durch die differenzierte Lastaufteilung des MLM-5 so klein werden, dass sie den Auswahlkriterien, die im Kapitel 4.2 definiert wurden, nicht mehr entsprechen.

### Statistische Auswertung

In der unten angehängten Tabelle 4.5 erkennt man die betragsmäßig kleinste und größte relative Beschleunigungsreduktion, den Mittelwert und die Standardabweichung der relativen Beschleunigungsreduktionen im Resonanzfall.

**Tab. 4.5:** Statistik zu den relativen Beschleunigungsreduktionen. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.

Variation	$ \delta a _{min}$ [%]	$ \delta a _{max}$ [%]	$\bar{\delta a}$ [%]	$\sigma_{\delta a}$ [%]
$v_{crit1}, MB 1, 1\%$	1.45	57.1	8.51	13.11
$v_{crit1}, MB 2, 1\%$	1.36	57.24	8.5	13.08
$v_{crit1}, MB 1, 2\%$	1.13	49.17	7.1	11.88
$v_{crit1}, MB 2, 2\%$	1.18	49.71	7.1	11.88
$v_{crit2}, MB 1, 1\%$	3.27	19.19	6.11	2.76
$v_{crit2}, MB 2, 1\%$	2.27	19.13	6.03	2.91
$v_{crit2}, MB 1, 2\%$	3.57	22.84	6.3	3.22
$v_{crit2}, MB 2, 2\%$	3.34	22.85	6.16	3.25
$v_{crit3}, MB 1, 1\%$	9.05	18.79	11.49	2.07
$v_{crit3}, MB 2, 1\%$	7.61	20.1	11.47	2.14
$v_{crit3}, MB 1, 2\%$	8.29	18.51	11.31	1.82
$v_{crit3}, MB 2, 2\%$	8.38	19.71	11.37	1.91
$v_{crit4}, MB 1, 1\%$	16.7	30.52	20.19	2.96
$v_{crit4}, MB 2, 1\%$	14.86	36.16	20.12	3.21
$v_{crit4}, MB 1, 2\%$	15.7	31.05	19.9	3.21
$v_{crit4}, MB 2, 2\%$	15.64	30.88	19.28	2.79
$v_{crit5}, MB 1, 1\%$	16.74	29.77	24.03	2.81
$v_{crit5}, MB 2, 1\%$	17.17	29.24	23.05	3.18
$v_{crit5}, MB 1, 2\%$	16.79	31.15	23.63	3.77
$v_{crit5}, MB 2, 2\%$	17.19	31.28	23.49	4.16

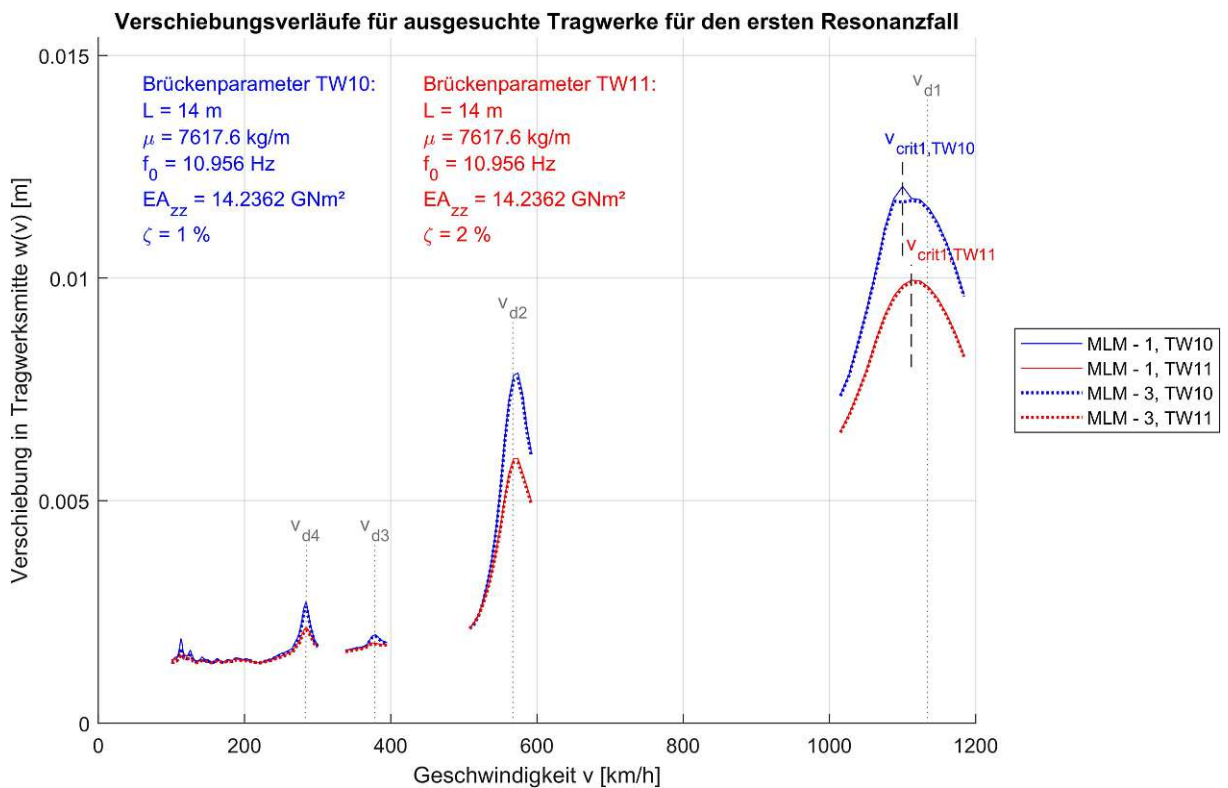
### 4.3.3 Gegenüberstellung der Verschiebungsspitzen unterschiedlicher Tragwerke, berechnet mittels MLM-1 und MLM-3

#### Vergleich der maximalen Verschiebungen im Bereich der resonanzerzeugenden Geschwindigkeit $v_{d1}$

Bei den relativen Verschiebungsverhältnissen gibt es des Öfteren auffallende Unterschiede zwischen unterschiedlichen Dämpfungsgraden der Tragwerke. Exemplarisch werden die Verschiebungsverläufe zweier unterschiedlich gedämpfter Brücken abgebildet, die große Unterschiede im ersten Resonanzfall aufweisen. Um das Augenmerk gänzlich auf die unterschiedlichen Effekte zu legen, die aus der Dämpfung resultieren, haben die ausgewählten Brücken ansonsten identische Eigenschaften. Es ist zu erkennen, dass bei der schwächer gedämpften Brücke durch die Lastverteilung der Einwirkung die extrem markante Durchbiegungsspitze bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit von 1100 km/h deutlich abgeschwächt wird. Bei der stärker gedämpften Brücke hingegen bildet sich dieser markante Extremwert bei der Überfahrtsgeschwindigkeit von 1100 km/h nicht aus. Dadurch ähneln sich die Ver-



schiebungsverläufe der unterschiedlichen Lastmodelle beim stärker gedämpften Tragwerk viel stärker als die der geringer gedämpften Tragwerke.



**Abb. 4.10:** Vergleich zweier Durchbiegungsverläufe: beide Tragwerke besitzen die Eigenschaften  $L = 14 \text{ m}$  und  $f_0 = 10,96 \text{ Hz}$ , das Tragwerk 10 hat ein Lehr'sches Dämpfungsmaß von  $\zeta = 1 \%$ , das Tragwerk 11 hat ein Lehr'sches Dämpfungsmaß von  $\zeta = 2 \%$ .

#### Vergleich der maximalen Verschiebungen im Bereich der resonanzerzeugenden Geschwindigkeit $v_{d2}$

So wie bereits bei den Beschleunigungsspitzen kommt es bei Tragwerken mit den Spannweiten von 20 und 21 m zur Unterdrückung von Durchbiegungsspitzen zufolge der Auslöschungsgeschwindigkeit  $v_{c2}$ . Für die kürzeren Brücken bis ungefähr 15 m Spannweite gilt, dass beim zweiten Resonanzfall die relativen Verschiebungsverhältnisse stark abhängig vom Grad der Dämpfung des Tragwerks sind. Interessanterweise ist im Gegensatz zum ersten Resonanzfall bei Brücken mit 2 % Dämpfung eher ein biegeeigenfrequenz-abhängiges Verhalten zu erkennen, als dies bei den Brücken 1 % Dämpfung der Fall ist.

#### Vergleich der maximalen Verschiebungen im Bereich der resonanzerzeugenden Geschwindigkeit $v_{d3}$

Auffallend ist, dass Brücken mit den Spannweiten von 14 bis 15 m, 24 bis 25 m und 33 bis 35 m unabhängig von ihrer ersten Biegeeigenfrequenz größere relative Durchbiegungsreduktionen zufolge der Lastaufteilung erfahren, als die durchschnittlichen relativen Reduktionen bei der dritten kritischen Geschwindigkeit. Die Unterdrückung von Spitzenwerten zufolge der Auslöschungsgeschwindigkeit erfolgt bei Tragwerken mit denselben Spannweiten wie

schon bei den Beschleunigungen bei der dritten kritischen Geschwindigkeit. Abgesehen von den Auslöschungseffekten ist die Durchbiegungsreduktion bezogen auf die jeweiligen Spannweiten annähernd unabhängig von der ersten Biegeeigenfrequenz des Tragwerks.

#### **Vergleich der maximalen Verschiebungen im Bereich der resonanzerzeugenden**

##### **Geschwindigkeit $v_{d4}$**

So wie auch bei der dritten kritischen Geschwindigkeit ist eine biegeeigenfrequenz-unabhängige Auswirkung der Lastverteilung auf die relative Durchbiegungsreduktion bezogen auf die jeweiligen Spannweiten zu erkennen. Ausgenommen von dieser Beobachtung sind auch bei der vierten kritischen Geschwindigkeit wieder die Tragwerke, bei denen Auslöschungseffekte auftreten. Diese treten, wie schon bei den Beschleunigungen bei Spannweiten um 11, 18, 26 und 33 m auf, jedoch kommt es bei stärker gedämpften und insbesondere schwereren Brücken zu deutlich weniger Durchbiegungsspitzen. Es scheint, als würde es abhängig von der Spannweite bei hohen ersten Biegeeigenfrequenzen zu weniger Durchbiegungsspitzen kommen. Zusätzlich gibt es bei Tragwerken mit sehr niedrigen ersten Biegeeigenfrequenzen bei Spannweiten über 21 m keine auswertbaren Ergebnisse, da die vierte kritische Geschwindigkeit bei diesen Tragwerken häufig unterhalb der 100 km/h-Marke liegt und somit nicht weiter untersucht wird.

#### **Vergleich der maximalen Verschiebungen im Bereich der resonanzerzeugenden**

##### **Geschwindigkeit $v_{d5}$**

Bei der fünften resonanzerzeugenden Geschwindigkeit, kommt es zu weniger Spitzenwerten der Durchbiegung, als es bei den resonanzerzeugenden Geschwindigkeiten  $v_{d1}$  bis  $v_{d4}$  der Fall war. Wie schon bei den Beschleunigungen beschrieben, ist der Grund dafür möglicherweise, dass bei den hier betrachteten niedrigen Geschwindigkeiten, die ausschlaggebenden Resonanzeffekte nicht mehr nur zufolge der idealisierten Kräfte im Abstand einer Wagenlänge über Puffer  $d$  entstehen, vielmehr gibt es eine Reihe von möglichen, kürzeren regelmäßigen Abständen - inklusive der Abstände zwischen den verteilten Achslasten (Schwellenabstände), die einen Resonanzfall hervorrufen können und somit die klare Ausprägungen einer einzelnen Spitze verhindern.

#### **Statistische Auswertung**

Wichtige statistische Daten, wie die betragsmäßig kleinste und größte relative Durchbiegungsreduktion, den Mittelwert und die Standardabweichung der relativen Reduktionen, kann man aus der Tabelle 4.6 entnehmen.

**Tab. 4.6:** Statistik zu den relativen Durchbiegungsreduktionen. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

Variation	$ \delta w _{min}$ [%]	$ \delta w _{max}$ [%]	$\bar{\delta w}$ [%]	$\sigma_{\delta w}$ [%]
$v_{crit1}, MB 1, 1\%$	0.29	2.73	0.62	0.5
$v_{crit1}, MB 2, 1\%$	0.29	2.68	0.63	0.48
$v_{crit1}, MB 1, 2\%$	0.29	1.23	0.43	0.15
$v_{crit1}, MB 2, 2\%$	0.27	1.26	0.42	0.15
$v_{crit2}, MB 1, 1\%$	0.11	5.96	1.12	0.57
$v_{crit2}, MB 2, 1\%$	0.25	5.95	1.17	0.65
$v_{crit2}, MB 1, 2\%$	0.25	5.56	1.04	0.56
$v_{crit2}, MB 2, 2\%$	0.23	5.56	1.06	0.56
$v_{crit3}, MB 1, 1\%$	0.41	7.33	2.3	1.06
$v_{crit3}, MB 2, 1\%$	0.51	7.33	2.32	1.05
$v_{crit3}, MB 1, 2\%$	0.38	3.63	2	1.06
$v_{crit3}, MB 2, 2\%$	0.38	3.66	2.05	1.05
$v_{crit4}, MB 1, 1\%$	0.27	13.35	2.58	1.99
$v_{crit4}, MB 2, 1\%$	0.44	5.95	2.7	1.75
$v_{crit4}, MB 1, 2\%$	0.21	5.57	2.12	1.66
$v_{crit4}, MB 2, 2\%$	0.46	5.58	2.45	1.65
$v_{crit5}, MB 1, 1\%$	0.33	23.2	2.32	2.98
$v_{crit5}, MB 2, 1\%$	0.57	23.17	4.24	4.17
$v_{crit5}, MB 1, 2\%$	0.26	6.33	1.69	1.78
$v_{crit5}, MB 2, 2\%$	0.44	6.31	2.51	2.14

#### 4.3.4 Gegenüberstellung der Verschiebungsspitzen unterschiedlicher Tragwerke, berechnet mittels MLM-1 und MLM-5

Qualitativ sehen die Ergebnisverläufe der biegeeigenfrequenz- und spannenweitenabhängigen relativen Durchbiegungsreduktionen zufolge einer Lastverteilung auf fünf Einzellasten jenen der vorangegangenen Untersuchung (berechnet mittels MLM-1 und MLM-3) sehr ähnlich. Erwartungsgemäß fallen die relativen Verschiebungsverhältnisse beim Vergleich MLM-1 und MLM-5 etwas größer aus als jene beim Vergleich MLM-1 und MLM-3. Vergleicht man die für die Parameterfelder grafisch ausgewerteten Ergebnisse des Vergleichs MLM-1 und MLM-3 mit jenen des Vergleichs MLM-1 mit MLM-5, ist zu sehen, dass es bei Berechnungen mittels MLM-5 zu merklich weniger Resonanzereignissen kommt. Neben den unterdrückten Resonanzfällen zufolge der Auslöschungsgeschwindigkeiten, laut Gleichung (2.58), gehen aufgrund von definierten Minimalwerten einer Durchbiegungsamplitude im Kapitel 4.2 mehrere Tragwerke nicht in die Vergleichsberechnungen ein.

### Statistische Auswertung

Wie bereits bei der Tabelle 4.6 sind auch bei der hier angeführten Tabelle 4.7 die betragsmäßig kleinste und größte relative Durchbiegungsreduktion, der Mittelwert und die Standardabweichung der relativen Durchbiegungsreduktion zufolge der Lastverteilung zusammengefasst.

**Tab. 4.7:** Statistik zu den relativen Durchbiegungsreduktionen. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.

Variation	$ \delta w _{min}$ [%]	$ \delta w _{max}$ [%]	$\overline{\delta w}$ [%]	$\sigma_{\delta w}$ [%]
$v_{crit1}, MB 1, 1\%$	0.79	5.97	1.54	0.89
$v_{crit1}, MB 2, 1\%$	0.8	4.25	1.54	0.85
$v_{crit1}, MB 1, 2\%$	0.78	3.97	1.12	0.36
$v_{crit1}, MB 2, 2\%$	0.77	3.92	1.11	0.36
$v_{crit2}, MB 1, 1\%$	0.18	15.13	3.04	1.51
$v_{crit2}, MB 2, 1\%$	0.68	15.27	3.14	1.62
$v_{crit2}, MB 1, 2\%$	0.63	14.14	2.84	1.48
$v_{crit2}, MB 2, 2\%$	0.62	14.1	2.85	1.47
$v_{crit3}, MB 1, 1\%$	1.19	18.29	6.05	2.87
$v_{crit3}, MB 2, 1\%$	1.46	18.29	6.17	2.76
$v_{crit3}, MB 1, 2\%$	1.01	9.61	5.3	2.81
$v_{crit3}, MB 2, 2\%$	1.01	9.69	5.47	2.74
$v_{crit4}, MB 1, 1\%$	0.76	15.16	6.72	4.61
$v_{crit4}, MB 2, 1\%$	1.19	15.16	7.28	4.53
$v_{crit4}, MB 1, 2\%$	0.55	14.12	5.61	4.27
$v_{crit4}, MB 2, 2\%$	1.28	14.16	6.43	4.31
$v_{crit5}, MB 1, 1\%$	0.85	16.9	5.82	5.38
$v_{crit5}, MB 2, 1\%$	1.5	23.7	9.21	6.27
$v_{crit5}, MB 1, 2\%$	0.63	16.13	4.32	4.49
$v_{crit5}, MB 2, 2\%$	1.85	14.51	6.25	4.82

#### 4.3.5 Schlussfolgerungen aller vier Gegenüberstellungen

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Reduktion der Resonanzspitzen am stärksten durch die Überfahrtsgeschwindigkeit des Zugs beeinflusst wird. Das bedeutet, dass die Größe der Reduktion davon abhängig ist, bei welcher kritischen Geschwindigkeit das Verhältnis der maximalen Beschleunigungen aus den Berechnungen mit den unterschiedlichen Lastmodellen ausgewertet wird.

Bei den untersuchten Tragwerken wird die durchschnittliche Beschleunigungsreduktion im Resonanzfall beim Vergleich der Lastvarianten MLM-1 und MLM-3 immer größer, je niedriger die Überfahrtsgeschwindigkeiten werden, mit Ausnahme jener vom ersten und zweiten Resonanzfall. Für die Tragwerke, welche der Massenbelegung 1 zuzuordnen sind und die Tragwerksdämpfung 1 % aufweisen, sind die durchschnittlichen Beschleunigungsreduktionen  $\bar{\delta a}$  von der ersten bis zur fünften kritischen Geschwindigkeit im Folgenden angegeben:  $\bar{\delta a}(v_{crit1}) = 4,10\%$ ,  $\bar{\delta a}(v_{crit2}) = 3,00\%$ ,  $\bar{\delta a}(v_{crit3}) = 5,62\%$ ,  $\bar{\delta a}(v_{crit4}) = 8,74\%$  und  $\bar{\delta a}(v_{crit5}) = 10,5\%$ . Nachzulesen sind die angeführten Werte in der Tabelle 4.1.

Bei den maximalen Beschleunigungsreduktionen  $|\delta a|_{max}$  im Resonanzfall je kritische Geschwindigkeit ist die Reihenfolge hinsichtlich ihrer Größe beim Vergleich der Lastvarianten MLM-1 und MLM-3 anders. Dementsprechend sind die maximalen Beschleunigungsreduktionen im Resonanzfall in absteigender Reihenfolge bezogen auf ihre Größe angeführt:  $|\delta a|_{max}(v_{crit1}) = 28,65\%$ ,  $|\delta a|_{max}(v_{crit4}) = 22,56\%$ ,  $|\delta a|_{max}(v_{crit5}) = 17,35\%$ ,  $|\delta a|_{max}(v_{crit3}) = 15,78\%$  und  $|\delta a|_{max}(v_{crit2}) = 12,77\%$ .

Die Standardabweichung der Beschleunigungsreduktionen im Resonanzfall beim Vergleich der Lastvarianten MLM-1 und MLM-3 ist bei der ersten kritischen Geschwindigkeit im Vergleich zu den anderen untersuchten kritischen Geschwindigkeiten mit 6,4 % am größten.

Betrachtet man die statistische Auswertung der Tabelle 4.1, ist vor allem bei den höheren Überfahrtsgeschwindigkeiten zu sehen, dass die maximalen Beschleunigungsreduktionen stark von der Tragwerksdämpfung beeinflusst werden. Bei der ersten kritischen Geschwindigkeit sind die maximalen Beschleunigungsreduktionen bei den schwächer gedämpften Tragwerke um etwas weniger als 3 % größer als bei den Tragwerken mit 2 % Dämpfung. Bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit sind die maximalen Beschleunigungsreduktionen bei den Tragwerken mit 2 % Dämpfung größer als bei jenen Tragwerken mit 1 % Dämpfung (um ca. 2,5 %). Bei der dritten und vierten kritischen Geschwindigkeit ist zunehmend auch der Einfluss der Massenbelegung des Tragwerks zu erkennen. Bei den jeweiligen Tragwerksdämpfungen und bei den jeweiligen kritischen Geschwindigkeiten weisen Tragwerke, welche der Massenbelegung 2 zuzuordnen sind, größere maximale Beschleunigungsreduktionen auf als jene Tragwerke, welche der Massenbelegung 1 zuzuordnen sind.

Zu den Grafiken 4.1, 4.3, 4.6, 4.8, und 4.9 lässt sich sagen, dass die Abbildungen mit den Variationen aus Massenbelegung und Dämpfung des Tragwerks für bestimmte kritische Geschwindigkeiten Ähnlichkeiten haben, die Grafiken bei den verschiedenen betrachteten kritischen Geschwindigkeiten jedoch sehr unterschiedlich aussehen.

Es folgt eine Gegenüberstellung der statistischen Auswertung des Vergleichs von MLM-1 mit MLM-3 in Tabelle 4.1 mit der statistische Auswertung des Vergleichs von MLM-1 mit MLM-5 in Tabelle 4.5. Zu sehen ist, dass eine Lastaufteilung auf drei Einzelkräfte (Vergleich MLM-1 mit MLM-3) bei den ersten drei kritischen Geschwindigkeiten mittlere Beschleunigungsreduktionen hervorruft, welche durch eine weitere Lastaufteilung auf fünf Einzelkräfte (Vergleich MLM-1 mit MLM-5) um den Faktor 2 vergrößert werden. Bei der

vierten und fünften kritischen Geschwindigkeit liegt der Vergrößerungsfaktor zwischen 2,2 und 2,3. Die maximalen Beschleunigungsreduktionen beim Vergleich MLM-1 mit MLM-5 liegen mit 57,2 % um 28,6 % über jenen des Vergleichs MLM-1 mit MLM-3 und sind damit genau doppelt so groß.

Die prozentuellen Durchbiegungsreduktionen im Resonanzfall sind deutlich kleiner als die prozentuellen Beschleunigungsreduktionen zufolge der Lastaufteilung auf drei bzw. auf fünf Achslasten. Die durchschnittlichen Durchbiegungsreduktionen beim Vergleich MLM-1 und MLM-3 steigen von der ersten kritischen Geschwindigkeit bis hin zur vierten kritischen Geschwindigkeit von 0,53 % auf 2,46 %. Bei der fünften kritischen Geschwindigkeit ist die mittlere Durchbiegungsreduktion stark von der Massenbelegung sowie der Dämpfung des Tragwerks abhängig.

Vergleicht man die durchschnittlichen Durchbiegungsreduktionen zufolge der Lastverteilung auf fünf Achslasten mit jenen der Lastverteilung auf drei Achslasten, ist zu erkennen, dass diese um einen Faktor zwischen 2,5 und 2,7 größer sind.

#### 4.4 Ergebnisse - relative Beschleunigungsreduktion in Abhängigkeit von $\lambda$

Die nachfolgende grafische Aufarbeitung wurde erstellt um zu untersuchen, in welchem Maß die Beschleunigungsspitzen bei unterschiedlichen Resonanzereignissen zufolge bestimmter Lastabstände durch die Lastaufteilung Reduktionen erfahren.

Zu diesem Zweck wird die Größe  $\lambda$  eingeführt, deren Wert der Quotient aus einem regelmäßigen Lastabstand  $x$  und einer natürlichen Zahl  $i$  als Divisor ist. Umgekehrt lässt sich  $\lambda$  durch eine Resonanzgeschwindigkeit geteilt durch die erste Biegeeigenfrequenz des Tragwerks berechnen, vergleiche dazu die Gleichung (2.57):

$$\lambda = \frac{v_{xi}}{f_0} = \frac{x_i \cdot f_0}{i} \cdot \frac{1}{f_0} = \frac{x}{i} \quad (4.8)$$

Die Abbildungen 4.11 bis 4.14 zeigen, dass es meist zutrifft, dass es zu einem Resonanzfall kommt, wenn der Wert von  $\lambda$  nahe bei der Länge eines überfahrenden Zugwagens oder einem Teiler davon liegt.

Auf der Abszisse der Abbildungen 4.11 bis 4.14 werden die  $\lambda$ -Werte aufgetragen und auf der Ordinate die relativen Beschleunigungsreduktionen. Die relativen Beschleunigungsreduktionen bewegen sich auf einer Skala von -100 % bis knapp über 0 %, wobei 0 % am oberen Rand des Diagramms aufzufinden ist. Das bedeutet, dass Tragwerke, die durch die Lastverteilung eine geringe Reduktion der maximalen Beschleunigung im Resonanzfall erfahren, am oberen Rand des Diagramms angesiedelt sind. In den Abbildungen 4.11 bis 4.14 werden einige charakteristische  $\lambda$ -Werte auf der Abszisse aufgetragen. Ein Wert ist die Wagenlänge über Puffer des ICE4 (gekennzeichnet mit  $\lambda_{di}$ ), die anderen Werte sind Teiler von  $\lambda_{di}$ , siehe Tabelle 4.8.

Wenn in den folgenden Abbildungen 4.11 bis 4.14 ein Marker auf  $\lambda_{d1}$  aufgetragen ist, bedeutet das, dass die dazugehörige Beschleunigungsspitze bei einem Resonanzereignis der ersten Eigenform durch den regelmäßigen Achsabstand der Wagenlänge über Puffer entstanden ist.  $\lambda_{d1}$  bedeutet also, dass ein Zugwagen pro Schwingung über die Brücke fährt.  $\lambda_{d2}$  bedeutet, dass zwei Zugwagen pro Schwingung über die Brücke fahren.

**Tab. 4.8:**  $\lambda_{di}$  für einen idealisierten regelmäßigen Lastabstand - einer Wagenlänge über Puffer 28,75 m

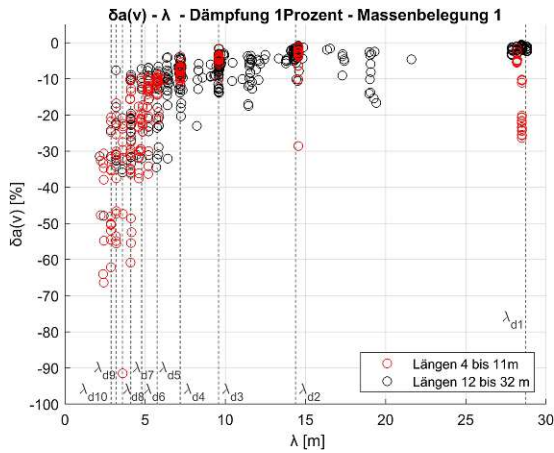
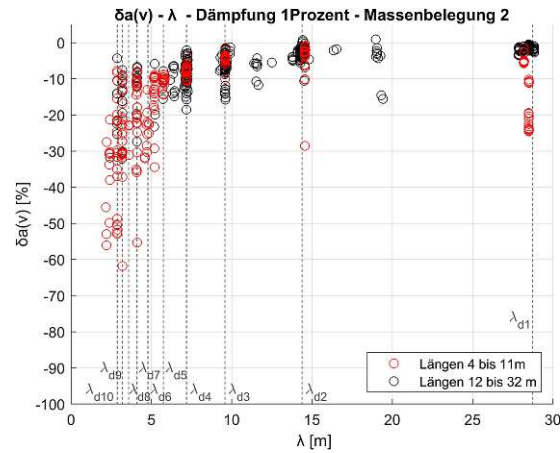
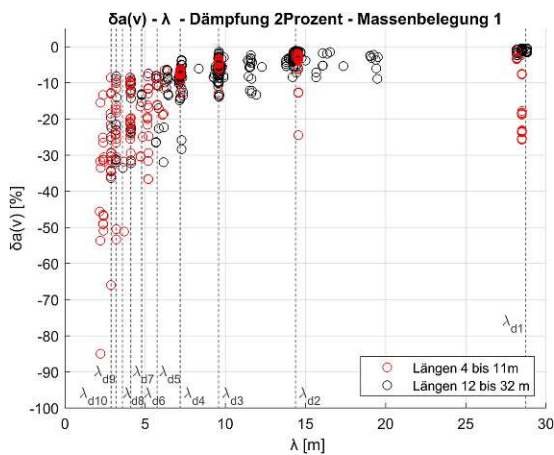
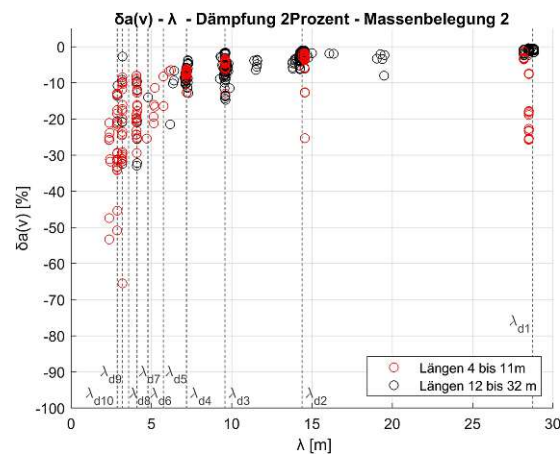
$\lambda_{d1}$	$\lambda_{d2}$	$\lambda_{d3}$	$\lambda_{d4}$	$\lambda_{d5}$	$\lambda_{d6}$	$\lambda_{d7}$	$\lambda_{d8}$	$\lambda_{d9}$	$\lambda_{d10}$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]
28,75	14,38	9,58	7,19	5,75	4,79	4,11	3,59	3,19	2,88

#### 4.4.1 Spannweitenabhängige Betrachtung

Wie bei der vorherigen Analyse zu sehen, wirkt sich die Lastaufteilung bei Brücken mit ähnlichen Längen entsprechend auf die Schwingung im Resonanzfall aus. Deshalb werden im nächsten Schritt vier Gruppen mit ähnlichen Spannweiten gebildet. Die Spannweitenteilung ist folgende: 4 bis 11 m, 12 bis 19 m, 20 bis 27 m, 28 bis 35 m. Durch rote Marker werden die Ergebnisse der betreffenden Brücken hervorgehoben, die restlichen Brücken des gesamten Parameterfeldes sind schwarz markiert. Außerdem gibt es pro Spannweitenintervall eine Variation von Dämpfungsgrad und Massenbelegung.



## Spannweiten 4 bis 11 m

(a) Dämpfungsmaß = 1 %  
Massenbelegung: 1(b) Dämpfungsmaß = 1 %  
Massenbelegung: 2(c) Dämpfungsmaß = 2 %  
Massenbelegung: 1(d) Dämpfungsmaß = 2 %  
Massenbelegung: 2

**Abb. 4.11:** Vergleich der relativen Beschleunigungsreduktion bezogen auf  $\lambda$  mit einem Augenmerk auf die Tragwerke der Länge 4 bis 11 m. Berechnet mittels MLM und einer Einwirkung mit Einzelkräften sowie einer verteilten Einwirkung auf drei Kräfte.

Besonders für niedrige  $\lambda$ -Werte gibt es eine Vielzahl von roten Markern. Ein Grund dafür ist, dass kurze Brücken sehr hohe erste Biegeeigenfrequenzen besitzen und diese fließt neben dem regelmäßigen Lastabstand proportional in die Gleichung der potenziellen resonanzerzeugenden Geschwindigkeit ein, vergleiche Gleichung (2.57). Somit nimmt der erste Resonanzfall bei kürzeren Brücken eine sehr hohe Geschwindigkeit an und ein sehr großes Geschwindigkeitsintervall wird bis zur niedrigsten betrachteten Geschwindigkeit, 100 km/h, aufgespannt. Daher können im Geschwindigkeitsintervall eine Vielzahl von Resonanzfällen auftreten.

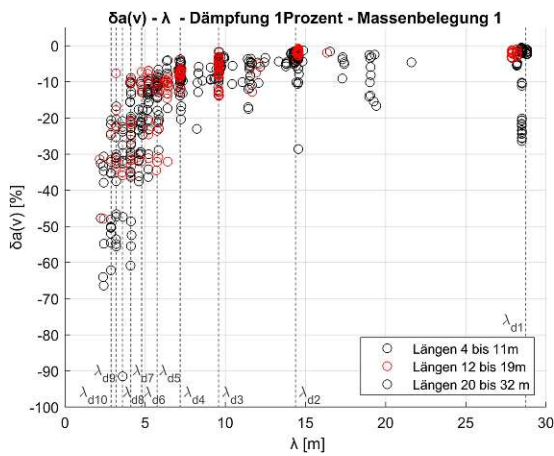
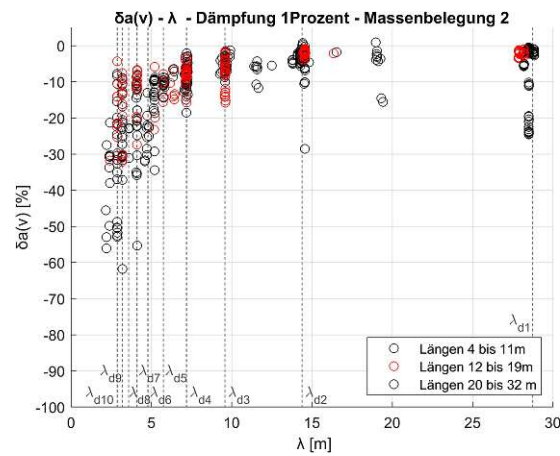
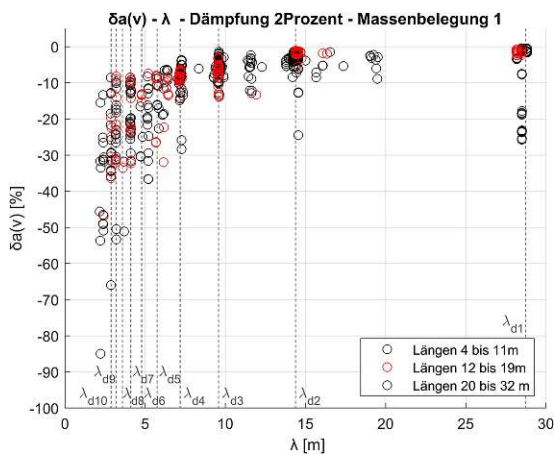
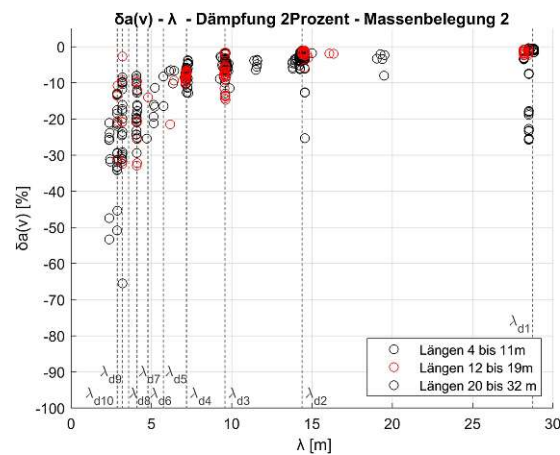
Besonders die ganz kurzen Brücken sind für die Extremwerte von  $\delta a = 40$  bis 70 % im dargestellten Diagramm verantwortlich.

Vergleicht man die Tragwerke der unterschiedlichen Massenbelegungen, ist zu erkennen, dass die roten Marker bei den Diagrammen der höheren Massenbelegung geordneter in Säulen übereinander angeordnet sind. Das lässt darauf schließen, dass die massiveren Brücken nicht so viele unterschiedlichen Resonanzeffekte zulassen.

Außerdem sind die relativen Beschleunigungsreduktionen zufolge Lastverteilung bei Brücken mit 2 % Dämpfung merklich niedriger als die der Brücken mit 1 % Dämpfung. Auch durch eine erhöhte Masse werden die Reduktionen vermindert.

Ein Sonderfall bei den Tragwerken mit den kurzen Spannweiten ist, dass die relativen Beschleunigungsreduktionen bei  $\lambda_{d1}$ , und somit beim ersten Resonanzfall, zum Teil größer sind als jene bei  $\lambda_{d2}$ ,  $\lambda_{d3}$  und  $\lambda_{d4}$ .

## Spannweiten 12 bis 19 m

(a) Dämpfungsmaß = 1 %  
Massenbelegung: 1(b) Dämpfungsmaß = 1 %  
Massenbelegung: 2(c) Dämpfungsmaß = 2 %  
Massenbelegung: 1(d) Dämpfungsmaß = 2 %  
Massenbelegung: 2

**Abb. 4.12:** Vergleich der relativen Beschleunigungsreduktion bezogen auf  $\lambda$  mit einem Augenmerk auf die Tragwerke der Länge 12 bis 19 m. Berechnet mittels MLM und einer Einwirkung mit Einzelkräften sowie einer verteilten Einwirkung auf drei Kräfte.

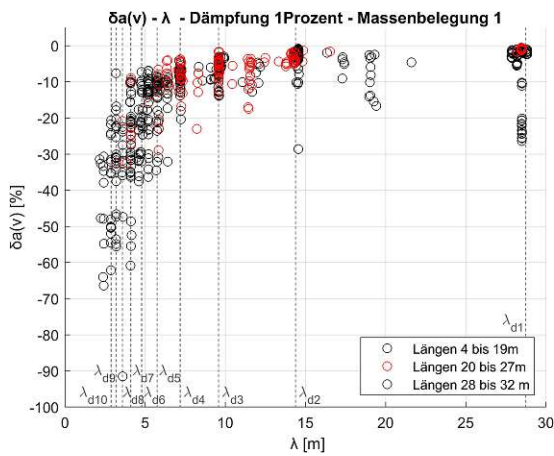
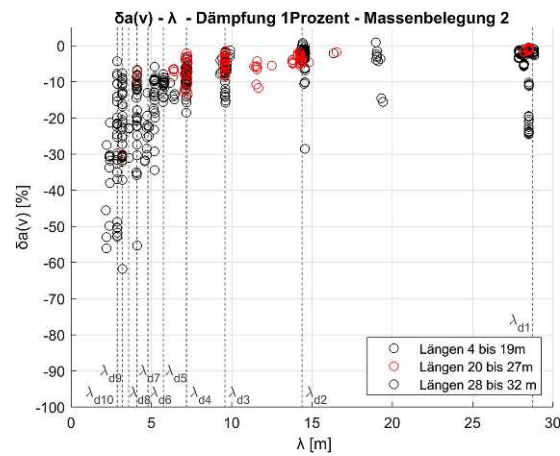
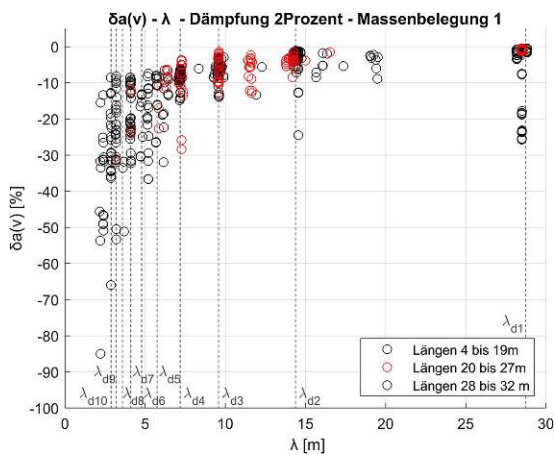
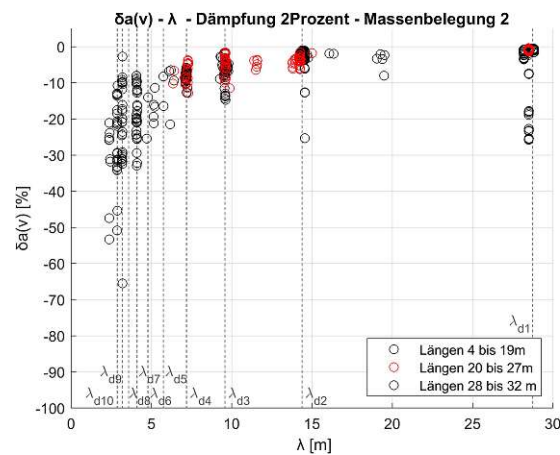
Im folgenden Abschnitt wird das Verhalten von Tragwerke mit Spannweiten von 12 bis 19 m betrachtet. Auffallend ist die breite Streuung der roten Marker bei der Geschwindigkeit  $\lambda_{d3}$  im Vergleich zu den anderen schwarz markierten Tragwerken. Die meisten Extremwerte bei der genannten Geschwindigkeit stammen von den Tragwerken, deren Spannweite 15 m beträgt. Ähnliches ist schon bei den Diagrammen im vorherigen Abschnitt 4.3 beobachtet worden.

Im Gegensatz dazu sind bei der Geschwindigkeit  $\lambda_{d2}$  die relativen Beschleunigungsreduktionen besonders einheitlich.

Bei einer einzelnen Brücke entsteht der zweite Resonanzfall ausnahmsweise nicht bei der Geschwindigkeit  $v_{d2}$ , sondern bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit, die etwas höher liegt.

Das dazugehörige  $\lambda$  für diese Brücke lautet  $16,3\text{ m}$ . Die jeweils ersten Resonanzereignisse haben ein  $\lambda$  von ca.  $28,0\text{ m}$ . Vergleicht man dieses  $\lambda$  mit der Gesamtwagenlänge über Puffer des ICE 4 von  $28,75\text{ m}$ , sieht man, dass es ungefähr um  $0,75\text{ m}$  kleiner ist. Trotzdem wird davon ausgegangen, dass dieser idealisierte Lastabstand der maßgebende Abstand für diesen ersten Resonanzfall ist. Ausgehend von dieser beschriebenen Vergrößerung vom  $\lambda$ -Wert zum kritischen Lastabstand, wird die Vermutung angestellt, dass der zugehörige kritische Lastabstand für die besagte Bücke mit  $\lambda = 16,30\text{ m}$  ungefähr  $17,05\text{ m}$  beträgt und somit ebenfalls um dem Wert  $0,75\text{ m}$  vergrößert wird. Der Abstand zwischen dem 2. und 3. Radsatz eines angetriebenen Wagens beträgt  $16,90\text{ m}$  und jener eines antriebslosen Wagens  $17,20\text{ m}$ . Mittelt man diese Längen, kommt man exakt auf die zuvor erwähnten  $17,05\text{ m}$ . Dieser Sonderfall tritt bei dem Tragwerk mit einer Spannweite von  $19\text{ m}$  und der ersten Biegeeigenfrequenz  $4,42\text{ Hz}$  ein, unabhängig von der Massenbelegung und Dämpfung des Tragwerks. Betrachtet man jedoch den Beschleunigungs-Geschwindigkeitsverlauf, wird ersichtlich, dass die maximale Beschleunigung des beschriebenen Resonanzfalls im Vergleich zu den maximalen Beschleunigungen der Resonanzfälle, hervorgerufen durch den regelmäßigen idealisierten Lastabstand einer Wagenlänge, marginal ist.

## Spannweiten 20 bis 27 m

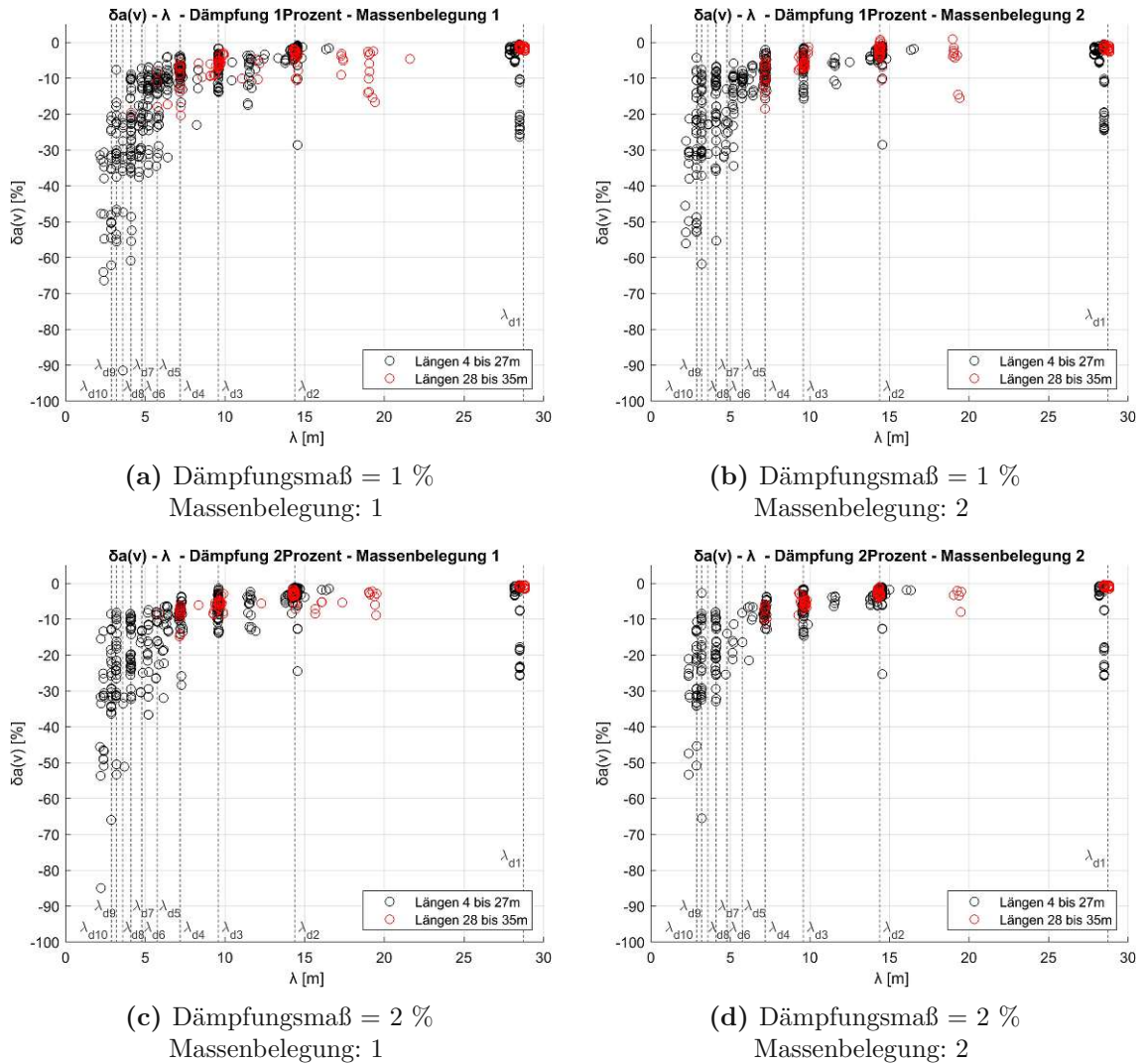
(a) Dämpfungsmaß = 1 %  
Massenbelegung: 1(b) Dämpfungsmaß = 1 %  
Massenbelegung: 2(c) Dämpfungsmaß = 2 %  
Massenbelegung: 1(d) Dämpfungsmaß = 2 %  
Massenbelegung: 2

**Abb. 4.13:** Vergleich der relativen Beschleunigungsreduktion bezogen auf  $\lambda$  mit einem Augenmerk auf die Tragwerke der Länge 20 bis 27 m. Berechnet mittels MLM und einer Einwirkung mit Einzelkräften sowie einer verteilten Einwirkung auf drei Kräfte.

In der Abbildung 4.13 für Brücken mit Spannweiten 20 bis 27 m fällt auf, dass es bei einer ganzen Reihe von Tragwerken bei einem  $\lambda$ -Wert von ca. 11,5 m zu einer Resonanz kommt. Betrachtet man die Beschleunigungs-Geschwindigkeits-Verläufe der betreffenden Tragwerke, sieht man, dass die Beschleunigungsamplituden an den dazugehörigen Stellen im Vergleich zu den Beschleunigungen bei jeweils benachbarten Geschwindigkeiten gering ausgeprägte Spitzen sind. Auffallend viele dieser Tragwerke haben eine Spannweite von 24 – 27 m. Eventuell steht es in Bezug, dass die Spannweite knapp über dem Zweifachen des  $\lambda$ -Wertes liegt und sich somit gerade zwei idealisierte Kräfte auf dem Tragwerk befinden können, wodurch ein Resonanzfall entsteht.



## Spannweiten 28 bis 35 m



**Abb. 4.14:** Vergleich der relativen Beschleunigungsreduktion bezogen auf  $\lambda$  mit einem Augenmerk auf die Tragwerke der Länge 28 bis 35 m. Berechnet mittels MLM und einer Einwirkung mit Einzelkräften sowie einer verteilten Einwirkung auf drei Kräfte.

Abschließend werden in der Abbildung 4.14 die Beschleunigungsspitzen für die längsten Brücken im untersuchten Paramertfeld betrachtet. Bei einigen dieser langen Brücken kommt es zu Resonanzfällen bei einem  $\lambda$ -Wert von ca. 19,0 m. Damit liegt der Wert knapp unter dem des Achsabstandes der Drehgestelle eines Wagens  $r$  mit 19,5 m. Betrachtet man den Beschleunigungs-Geschwindigkeits-Verlauf für eines der betreffenden Tragwerke, zum Beispiel jenes mit einer Spannweite von 31 m und der ersten Biegeeigenfrequenz von 3,67 Hz, sieht man, dass die Beschleunigungsamplitude bei der Geschwindigkeit  $19,32 [m] \cdot 3,6 \cdot 3,67 [Hz] = 255 km/h$  im Vergleich zu den Beschleunigungen bei benachbarten Geschwindigkeiten eine gering ausgeprägte Spitzen ist. Jedoch wird diese Amplitude aufgrund der Kriterien für nennenswerte Resonanzfälle aus dem Kapitel 4.2 *Berechnung*

und Datenverarbeitung als solche eingestuft und ist in die weitere Datenverarbeitung eingegangen.

Bei den Brücken mit Spannweiten über 28 m kommt es durch die Lastaufteilung nicht nur zu einer Reduktion der Beschleunigungsamplituden, sondern in wenigen Fällen auch zu verstärkten Amplituden. Zu diesem Ereignis kommt es nur bei massiven und gleichzeitig schwach gedämpften Brücken und im Speziellen bei einem  $\lambda$ -Wert von ungefähr 19 m und bei  $\lambda_{d2}$ . Das Tragwerk, dessen Beschleunigungsamplitude am stärksten erhöht wird, ist das Tragwerk mit der Spannweite 34 m, einer ersten Biegeeigenfrequenz von 3,37 Hz, einem Lehr'sches Dämpfungsmaß von 1 % und der höheren Massenbelegung.

Generell lässt sich bei den längeren Brücken sagen, dass die relativen Reduktionen bei den jeweiligen  $\lambda$ -Werten relativ nahe beieinander liegen.

### Schlussfolgerungen

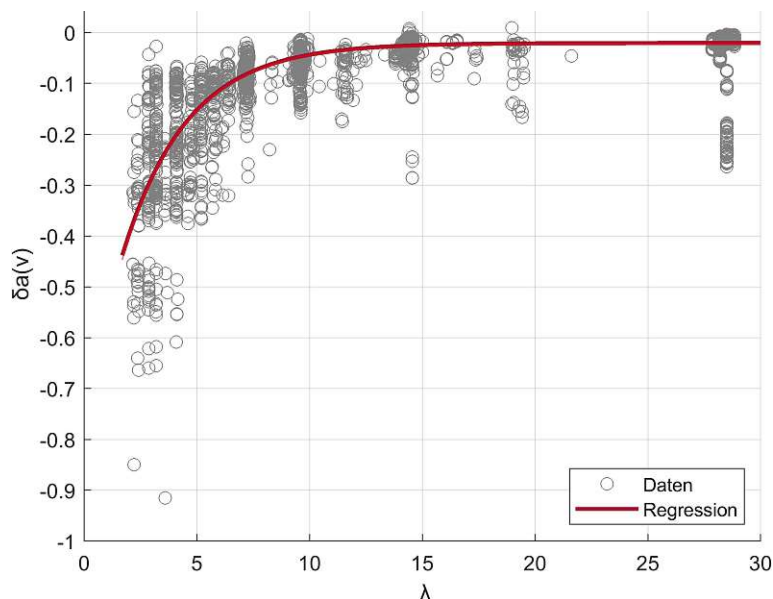
Zusammenfassend lässt sich eindeutig sagen, dass die idealisierten Kräfte im Abstand von einer Wagenlänge über Puffer die maßgebende Anregung verursachen. Bei gewissen Brückenlängen gibt es auch Anregungen zufolge anderer Lastabstände, dabei bilden sich jedoch keine großen Anregungsamplituden aus.

Abgesehen von den sehr kurzen Brücken ist zu erkennen, dass die Streuung bei kleinen  $\lambda$ -Werten groß ist und es zu durchaus beträchtlichen relativen Beschleunigungsreduktionen kommt. Anders verhält es sich bei größeren  $\lambda$ -Werten. Das bedeutet beispielsweise für  $\lambda_{d1}$ , dass eine Schwingungsperiode die Länge eines Wagens besitzt und die benachbarten Drehgestelle zweier Wagen diese anregen. Die Lastverteilung der Radaufstandskräfte der benachbarten Drehgestelle wirkt meist gänzlich in einer Schwingungsperiode und dadurch hat die Lastverteilung auch keine große dämpfende Wirkung. Marker werden für längere Brücken immer weniger, weil lange Brücken niedrige erste Biegeeigenfrequenzen besitzen und dazu direkt proportional ist die Geschwindigkeit des ersten Resonanzfalls. Somit bilden sich oberhalb der Betrachtungsgrenze von 100 km/h vergleichsweise wenige Beschleunigungsspitzen zufolge Resonanz aus.

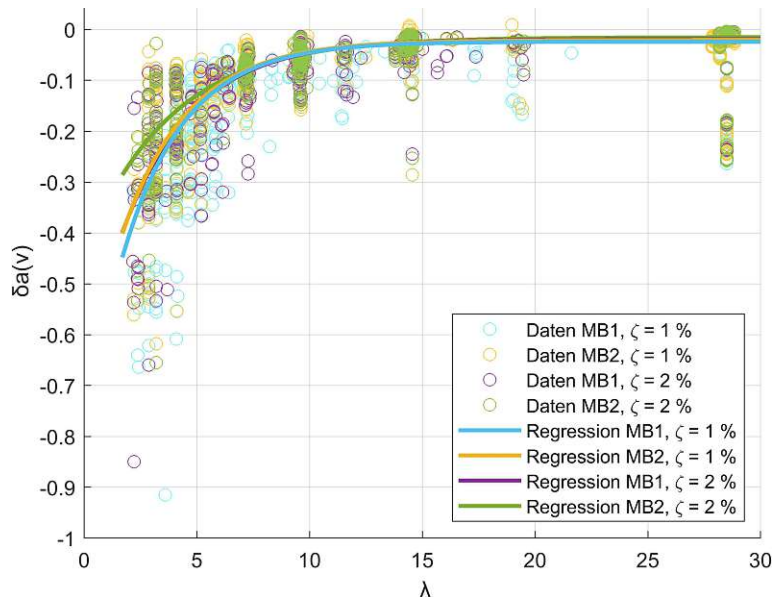
Vergleicht man die Variationen aus Massenbelegung und Dämpfungsgrad, ist zu erkennen, dass es bei schweren Tragwerken die Marker exakter bei den mittels vertikalen Linien hervorgehobenen  $\lambda_{di}$ -Werten liegen. Das lässt vermuten, dass die Resonanzfälle zufolge weniger unterschiedlicher Effekte entstehen. Bei Brücken, die über einen höheren Dämpfungsgrad verfügen, kommt es zu weniger Resonanzfällen und dadurch auch zu weniger Markern in den Diagrammen.



#### 4.4.2 Regressionsfunktionen



(a) alle Tragwerke im untersuchten Parameterfeld



(b) Tragwerke unterteilt nach Massenbelegungen und Dämpfungsgrade

**Abb. 4.15:** Regressionsfunktionen für die relativen Beschleunigungsreduktionen zufolge Lastverteilung bezogen auf  $\lambda$ .

Die Regressionsfunktion wird in der Form  $\delta a = -b(1) - b(2) \cdot e^{-b(3) \cdot \lambda}$  als Korrelation zwischen den  $\lambda$ -Werten und den relativen Beschleunigungsreduktionen gewählt. In der Abbildung 4.15 erkennt man, dass es an den Enden der Regressionsfunktion jedoch zu großen Streuungen kommt, weshalb die gewählte Approximation nicht sehr aussagekräftig ist.

Für alle untersuchten Tragwerke gemeinsam ergibt sich die Funktion  $\delta a = -0,021 - 0,755 \cdot e^{-0,349 \cdot \lambda}$ , in der Abbildung 4.15a ist diese, als rote Linie eingezeichnet.

Für die Variationen der betrachteten Massenbelegungen und Dämpfungen werden die zugehörigen Regressionskurven ermittelt und in der Tabelle 4.9 aufgelistet.

**Tab. 4.9:** Regressionsfunktionen aus Variationen aus Massenbelegung und Dämpfungsgrad

MB 1, Dämpfung 1 %	$\delta a_{1,1} = -0,024 - 0,782 \cdot e^{-0,360 \cdot \lambda}$
MB 2, Dämpfung 1 %	$\delta a_{2,1} = -0,021 - 0,677 \cdot e^{-0,339 \cdot \lambda}$
MB 1, Dämpfung 2 %	$\delta a_{1,2} = -0,019 - 0,658 \cdot e^{-0,322 \cdot \lambda}$
MB 2, Dämpfung 2 %	$\delta a_{2,2} = -0,015 - 0,423 \cdot e^{-0,262 \cdot \lambda}$

Für die maximalen Beschleunigungen, die leichte Tragwerke mit 1 % Dämpfung erfahren, lässt sich eine flachere Regressionsfunktion aufstellen, die maximalen Beschleunigungen der massiveren Tragwerke mit 2 % Dämpfung hingegen folgen einer stärker steigenden Regressionsfunktion.

Die Regressionskurve der Tragwerke mit einer höheren Massenbelegung und schwächeren Dämpfung ist fast deckungsgleich mit jener von Tragwerken mit niedriger Massenbelegung und höherer Dämpfung. Das beutet, dass die Lastverteilung der Achslasten des überfahrenden Zugs auf Tragwerke mit den zuvor erwähnten Parameterkombinationen eine ähnliche Wirkung auf die Reduktionen der maximalen Beschleunigungen hat.

Im Bereich höherer  $\lambda$ -Werte liegen die jeweiligen Regressionskurven sehr nahe beieinander.

# Kapitel 5

## Schlussfolgerungen und Ausblick

In diesem Kapitel werden die bedeutendsten Ergebnisse und die wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit hinsichtlich der eingangs formulierten Kernfragen diskutiert. Außerdem wird ein Ausblick auf weitere Forschungsthemen für zukünftige Untersuchungen gegeben.

### Kernfrage 1

*Welche Auswirkungen hat die Verteilung der Achslasten durch die Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts auf die Spitzenbeschleunigungen in Tragwerksmitte abhängig von den untersuchten Brückenparametern und der angeregten Resonanzgeschwindigkeit?*

Besonders stark beeinflusst wird die Reduktion der maximalen Beschleunigungen durch die Geschwindigkeit des überfahrenden Zugs. So ist die durchschnittliche Reduktion der maximalen in Tragwerksmitte auftretenden Beschleunigungen aller untersuchten Tragwerke bei der Berechnung mit der Lastverteilungsvariante MLM-3 gegenüber der Berechnungsvariante ohne Lastverteilung (MLM-1) bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit  $\bar{\delta a}(v_{crit2}) \approx 3,0\%$ , bei der fünften kritischen Geschwindigkeit hingegen  $\bar{\delta a}(v_{crit5}) \approx 10,6\%$ . Betrachtet man die Abbildungen 4.1, 4.3, 4.6, 4.8, und 4.9, ist zu erkennen, dass Tragwerke mit Spannweiten kleiner als 7 m meist stärkere Reduktionen erfahren als längere Tragwerke. Besonders stark ist dieses Verhalten bei der ersten kritischen Geschwindigkeit ausgebildet. Dies steht möglicherweise im Zusammenhang mit der starken Standardabweichung  $\sigma_{\delta a}$  von 6,27 bis 6,57 % der Beschleunigungsreduktionen bei der ersten kritischen Geschwindigkeit. Außerdem ist bei den Abbildungen, welche die spannweiten- und biegeeigenfrequenzabhängigen Beschleunigungsreduktionen zeigen, gut erkennbar, dass es bei Tragwerken mit gewissen Spannweiten und bei bestimmten kritischen Geschwindigkeiten zu keinen Resonanzeffekten kommt, da in diesem Fall die kritische Geschwindigkeit mit der Auslöschungsgeschwindigkeit (2.58) zusammenfällt. Diesen Effekt zeigen Tragwerke mit einer Spannweite von 22 m bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit, Tragwerke mit Spannweiten von 14 und 24 m bei der dritten kritischen Geschwindigkeit und Tragwerke mit Spannweiten von 11, 18, 25 und 32 m bei der vierten kritischen Geschwindigkeit. Bei den untersuchten Tragwerken kommt es bei höherer Massenbelegung und höherem Dämpfungsgrad eher zu Auslöschungen der Resonanzen als bei niedriger Massenbelegung und niedrigem Dämpfungsgrad.

Zufolge der maximalen Beschleunigungsreduktionen  $|\delta a|_{max}$  im Resonanzfall, die im Zuge der statistischen Auswertung ermittelt wurden, erkennt man, dass diese bei den höheren

Überfahrtsgeschwindigkeiten diese stark von der Tragwerksdämpfung beeinflusst werden und bei der dritten und vierten kritischen Geschwindigkeit zunehmend die Massenbelegung des Tragwerks Einfluss nimmt.

Betrachtet man die Tabelle 4.1, sieht man, dass die maximalen Beschleunigungsreduktionen bei der ersten kritischen Geschwindigkeit bei den stärker gedämpften Tragwerken im Vergleich zu den schwächer gedämpften Tragwerken um etwas weniger als 3 % verringert sind. Bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit sind die maximalen Beschleunigungsreduktionen bei den stärker gedämpften Tragwerken im Vergleich zu den schwächer gedämpften Tragwerken um etwa 2,5 % erhöht. Betrachtet man bei der dritten und vierten kritischen Geschwindigkeit die schwächer gedämpften Tragwerke, sind die maximalen Beschleunigungsreduktionen bei den Tragwerken mit Massenbelegung 1 um etwa 2 bzw. 2,2 % kleiner als bei jenen mit Massenbelegung 2. Bei den stärker gedämpften Tragwerken sind die maximalen Beschleunigungsreduktionen bei der Massenbelegung 2 ebenso größer als jene bei der Massenbelegung 1 (um etwa 0,8 bzw. 2,9 %).

### Kernfrage 2

*Sind Gesetzmäßigkeiten bei Berechnungen mit unterschiedlichen Lastverteilungsvarianten zu erkennen?*

Die Auswertung der Parameterstudie zeigt, dass die Lastverteilung teilweise große Reduktionen der Beschleunigungen mit sich bringt. Die Lastverteilung auf drei Einzellasten führt zu teilweise deutlichen Reduktionen der durchschnittlichen Beschleunigungen im Resonanzfall und die Achslastverteilung auf fünf Einzellasten erhöht die Reduktionen um den Faktor 2 bis 2,3 gegenüber jenen Reduktionen zufolge der Lastverteilung auf drei Einzellasten. Bei den Resonanzereignissen bei niedrigeren Geschwindigkeiten ist der Faktor tendenziell größer.

Die maximale Beschleunigungsreduktion im Resonanzfall tritt bei der ersten kritischen Geschwindigkeit auf und ist mit  $|\delta a|_{max}(v_{crit1}) = 57,2\%$  beim Vergleich MLM-1 mit MLM-5 um 28,6 % größer und damit genau doppelt so groß wie jene beim Vergleich MLM-1 mit MLM-3. Bei den Resonanzfällen, die bei niedrigeren Geschwindigkeiten entstehen, sind die maximalen Beschleunigungsreduktionen geringer als bei der ersten kritischen Geschwindigkeit sowohl beim Vergleich MLM-1 mit MLM-3 als auch beim Vergleich MLM-1 mit MLM-5. Bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit lauten die maximalen Beschleunigungsreduktionen  $|\delta a|_{max}(v_{crit2}) = 12,77\%$  (MLM-1/MLM-3) und  $|\delta a|_{max}(v_{crit2}) = 22,85\%$  (MLM-1/MLM-5). Die maximalen Beschleunigungsreduktionen bei der dritten kritischen Geschwindigkeit sind  $|\delta a|_{max}(v_{crit3}) = 15,78\%$  (MLM-1/MLM-3) und  $|\delta a|_{max}(v_{crit3}) = 20,10\%$  (MLM-1/MLM-5). Bei der vierten kritischen Geschwindigkeit sind diese Reduktionen  $|\delta a|_{max}(v_{crit4}) = 22,56\%$  (MLM-1/MLM-3) und  $|\delta a|_{max}(v_{crit4}) = 36,16\%$  (MLM-1/MLM-5) und bei der fünften kritischen Geschwindigkeit  $|\delta a|_{max}(v_{crit5}) = 17,35\%$  (MLM-1/MLM-3) und  $|\delta a|_{max}(v_{crit5}) = 31,28\%$  (MLM-1/MLM-5). Von der ersten bis zur vierten kritischen Geschwindigkeit treten die maximalen Beschleunigungsreduktionen jeweils bei der gleichen Kombination aus Massenbelegung und Tragwerksdämpfung auf. Den geringsten Unterschied zwischen dem Vergleich MLM-1 mit MLM-3 und dem

Vergleich MLM-1 mit MLM-5 gibt es bei den maximalen Beschleunigungsreduktionen bei der dritten kritischen Geschwindigkeit.

Vergleicht man die Standardabweichungen vom Vergleich MLM-1 mit MLM-5 mit jenen vom Vergleich MLM-1 mit MLM-3, sieht man, dass der Unterschied der Standardabweichungen bei den jeweiligen Resonanzfällen, welche bei höheren Überfahrtsgeschwindigkeiten auftreten, verhältnismäßig größer sind als jene bei den Resonanzfällen, welche bei niedrigeren Geschwindigkeiten auftreten.

Qualitativ sehen die Abbildungen der spannweiten- und biegefrequenzabhängigen Beschleunigungsreduktionen vom Vergleich MLM-1 mit MLM-3 jenen vom Vergleich MLM-1 mit MLM-5 sehr ähnlich. Auch die Tragwerke, die zufolge der Auslöschungsgeschwindigkeit (2.58) keine auswertbaren Resonanzereignisse haben, sind bei den Berechnungen mittels MLM-3 und MLM-5 mit wenigen Ausnahmen ähnlich hinsichtlich ihrer Spannweiten und Biegeeigenfrequenzen.

### Kernfrage 3

*Verhalten sich die Beschleunigungsreduktionen im Resonanzfall zufolge der Lastverteilung des Zugs bei Berechnungen mit und ohne Fahrzeug-Brücken-Interaktion gleich? Im Rahmen dieser Arbeit wird diese Fragestellung an einem ausgewählten Tragwerk untersucht.*

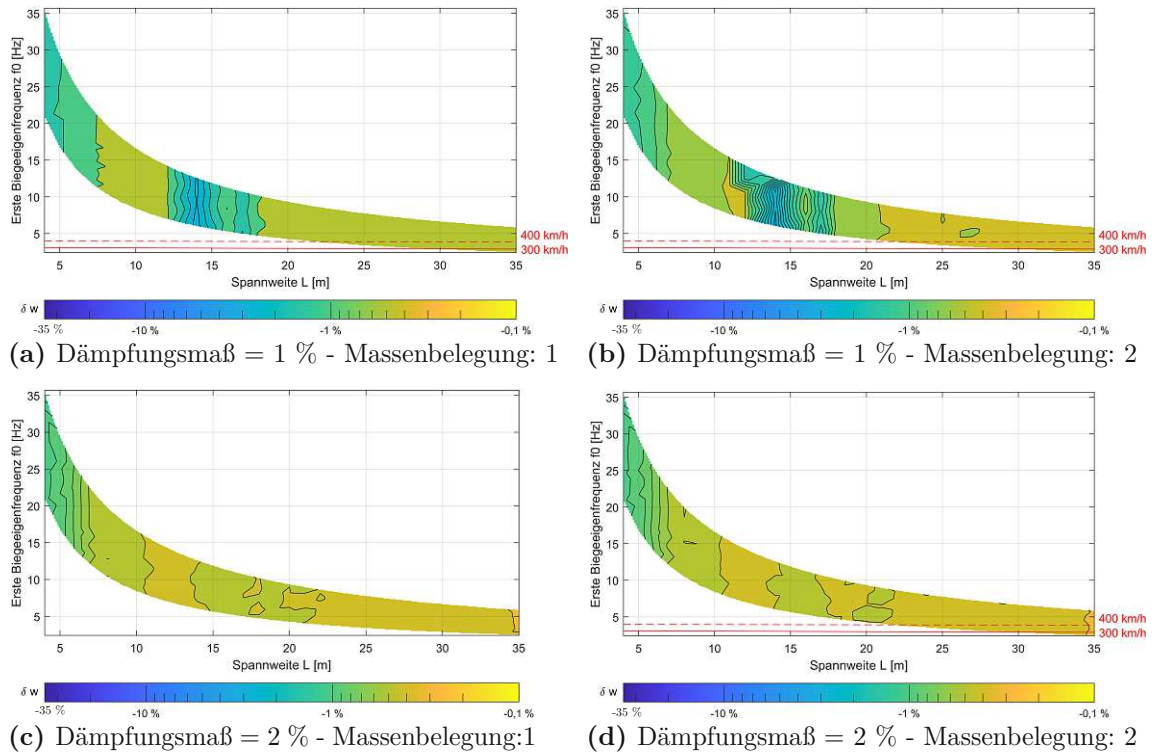
Bei den Beschleunigungen im Resonanzfall sind die Reduktionen zufolge der Achslastaufteilung bei den durchgeführten Berechnungen mit dem DIM ( $\delta a_{vollst}$ ) und MLM ( $\delta a$ ) sehr ähnlich. Tendenziell sind Reduktionen der Beschleunigungen im Resonanzfall zufolge der Lastverteilung bei den Berechnungen mit dem MLM etwas größer als bei den Berechnungen, die mit dem DIM durchgeführt werden. Eine Ausnahme stellt die zweite kritische Geschwindigkeit dar. Bei den ersten drei kritischen Geschwindigkeiten sind die Beschleunigungsreduktionen zufolge der Lastverteilung bei den Berechnungen mit dem Lastmodell MLM mit höchstens 4,6 % ohnehin recht klein. Bei einer Berechnung mit dem DIM ändern sich diese Prozentsätze um höchstens 0,9 %. Bei den anderen Resonanzspitzen ergeben sich bei den Berechnungen mit den Lastverteilungsvarianten MLM-1 und MLM-3 Reduktionen der maximalen Beschleunigungen im Bereich von 10 bis 42 %. Bei den Berechnungen mit dem Lastverteilungsvarianten DIM-1 und DIM-3-vollständig, zeigt sich, dass bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit des Zugs von 158 km/h die Reduktion der maximalen Beschleunigungen um ca. 9 % größer wird als bei dem selbigen Resonanzfall bei der Berechnung mittels MLM-1 und MLM-3 der Fall ist. Bei den Überfahrtsgeschwindigkeiten 117 und 95 km/h sind die Reduktionen der maximalen Beschleunigungen bei Berechnungen mit den Lastverteilungsvarianten DIM-1 und DIM-3-vollständig um etwa 2 % größer als jene bei den jeweiligen Resonanzfällen beim Vergleich der Lastverteilungsvarianten MLM-1 und MLM-3.

### Ausblick

Im Rahmen der Parameterstudie wurden die Brückenparameter und Überfahrtsgeschwindigkeiten aufgezeigt, bei deren Kombination die Lastaufteilung großen Einfluss auf die Beschleunigungsreduktion hat. In zukünftigen Untersuchungen könnte der Frage nachgegangen werden, bei welchen Randbedingungen eine Achslastverteilung bei dem Lastmodell DIM abweichenden Ergebnisse zu einer Achslastverteilung bei dem Lastmodell MLM liefert. Da Berechnungen mit dem DIM sehr rechenintensiv sind, bietet es sich an, ein kleineres Parameterfeld mit speziell für diesen Zweck ausgewählten Eigenschaften zu untersuchen.

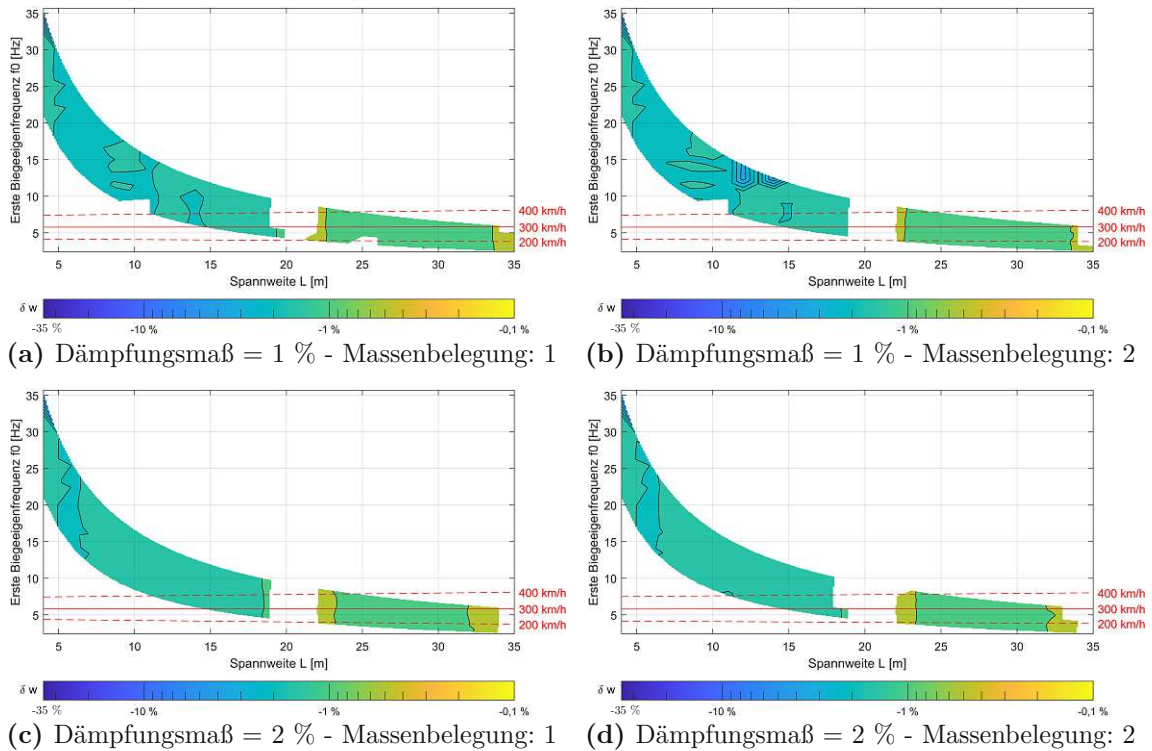
# Anhang A

relative Durchbiegungsreduktion  $\delta w$ , zwischen MLM-1 und MLM-3

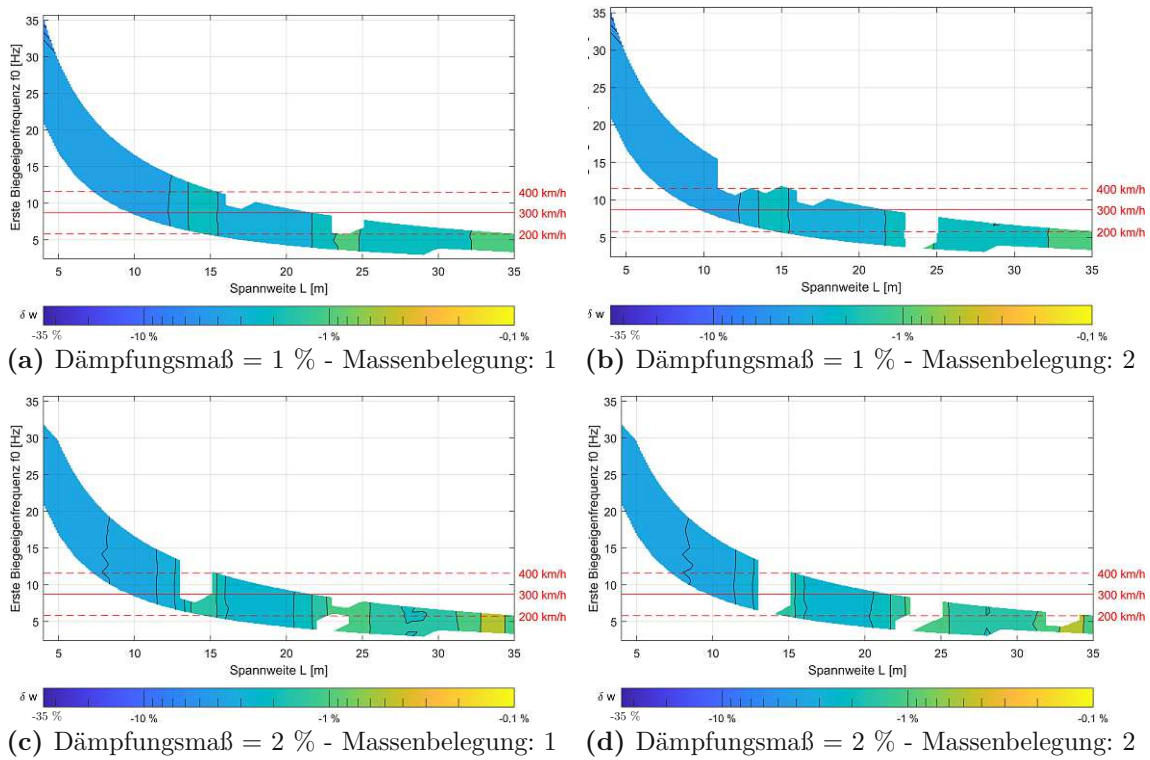


**Abb. A.1:** Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *ersten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.





**Abb. A.2:** Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *zweiten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.



**Abb. A.3:** Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *dritten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

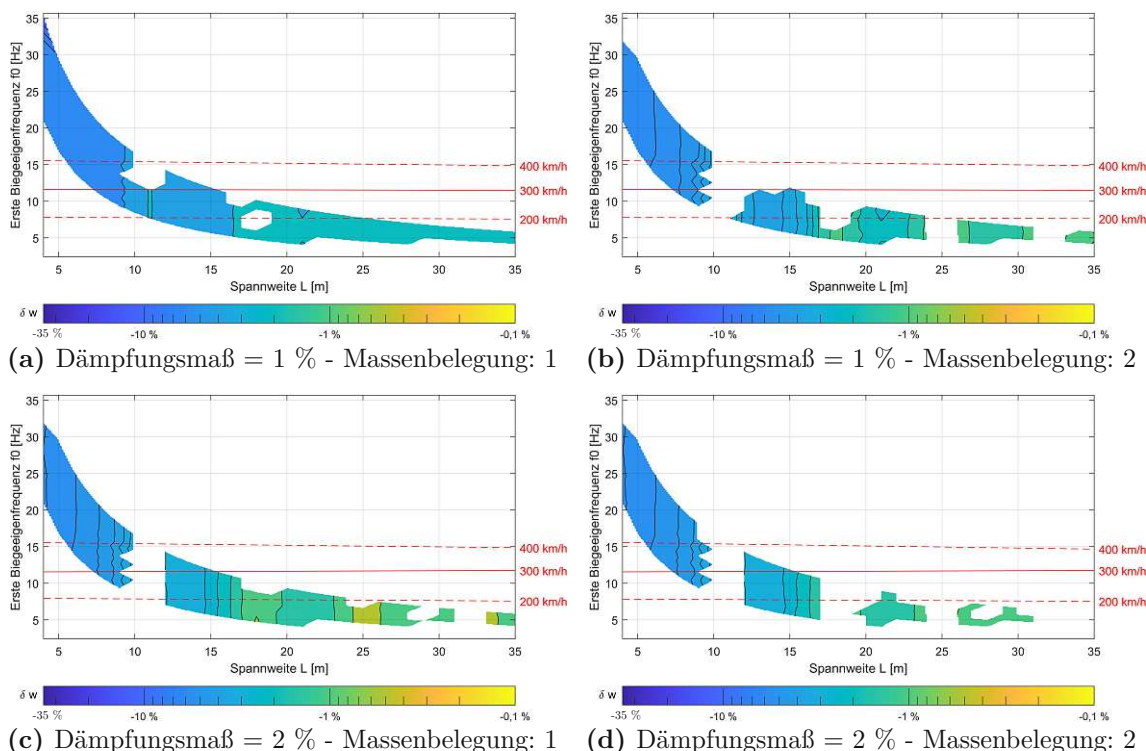


Abb. A.4: Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *vierten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

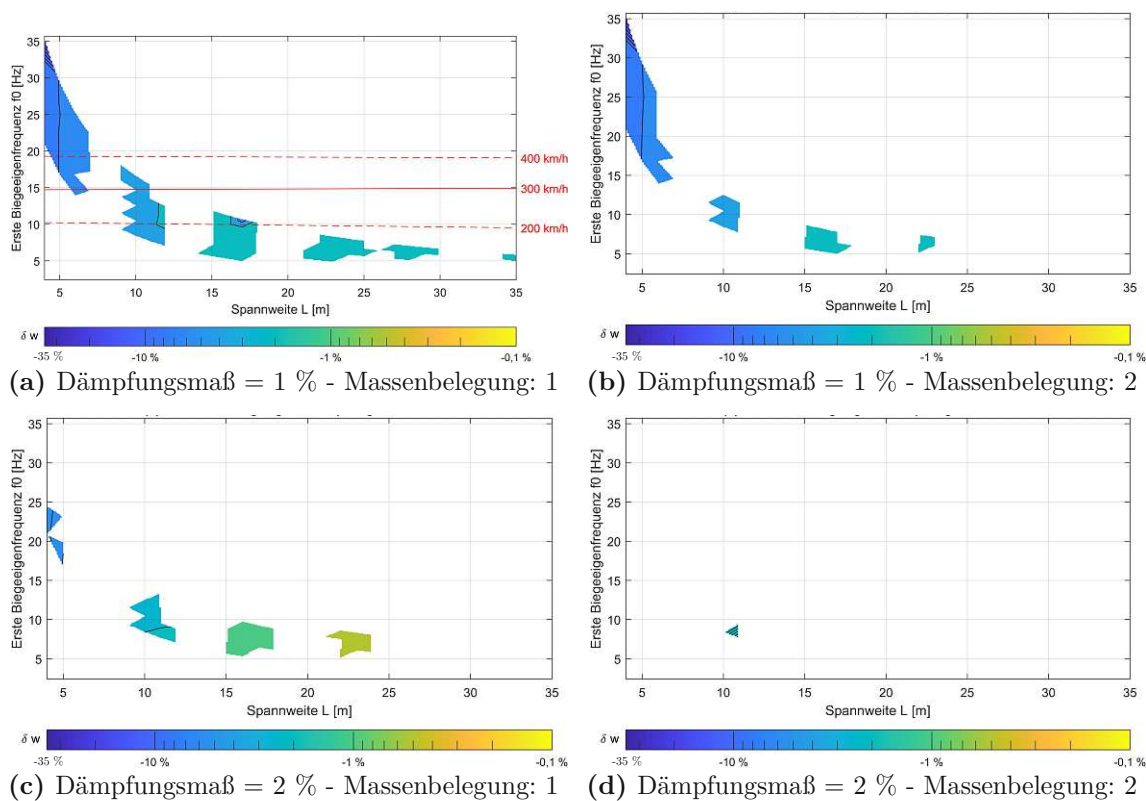
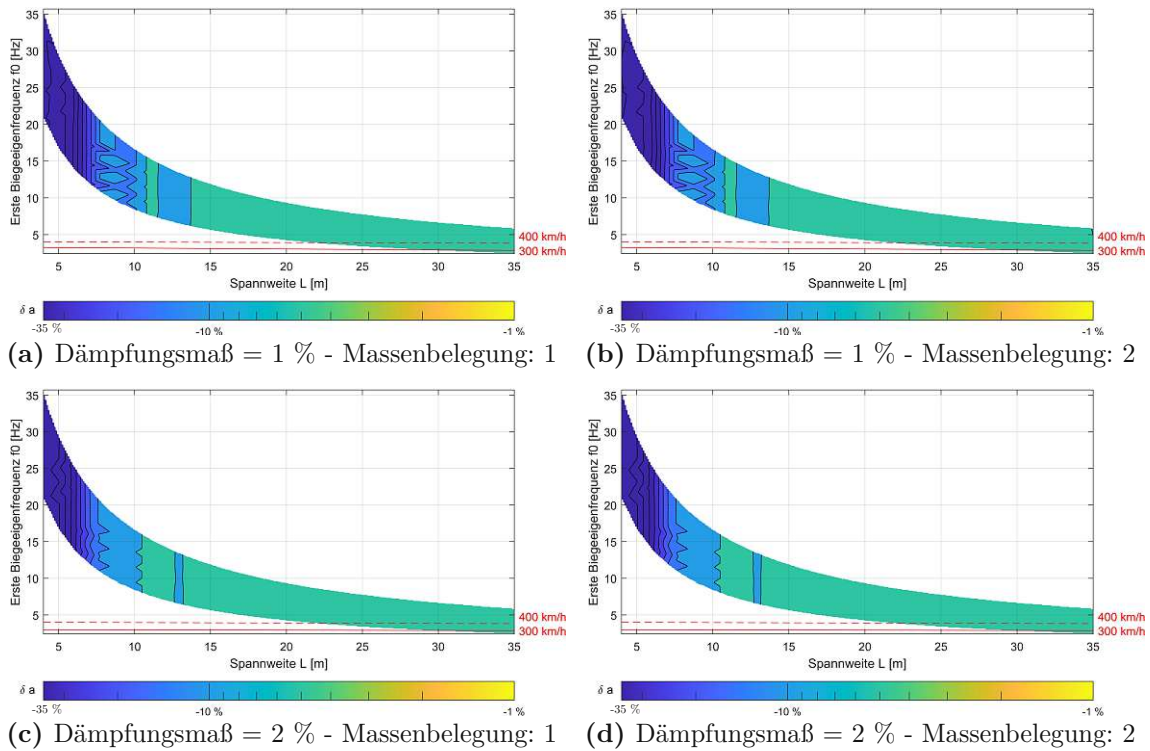


Abb. A.5: Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *fünften Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3.

relative Beschleunigungsreduktion  $\delta a$ , zwischen MLM-1 und MLM-5



**Abb. A.6:** Vergleich der Beschleunigungsspitzen  $\delta a$  beim jeweiligen *ersten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.

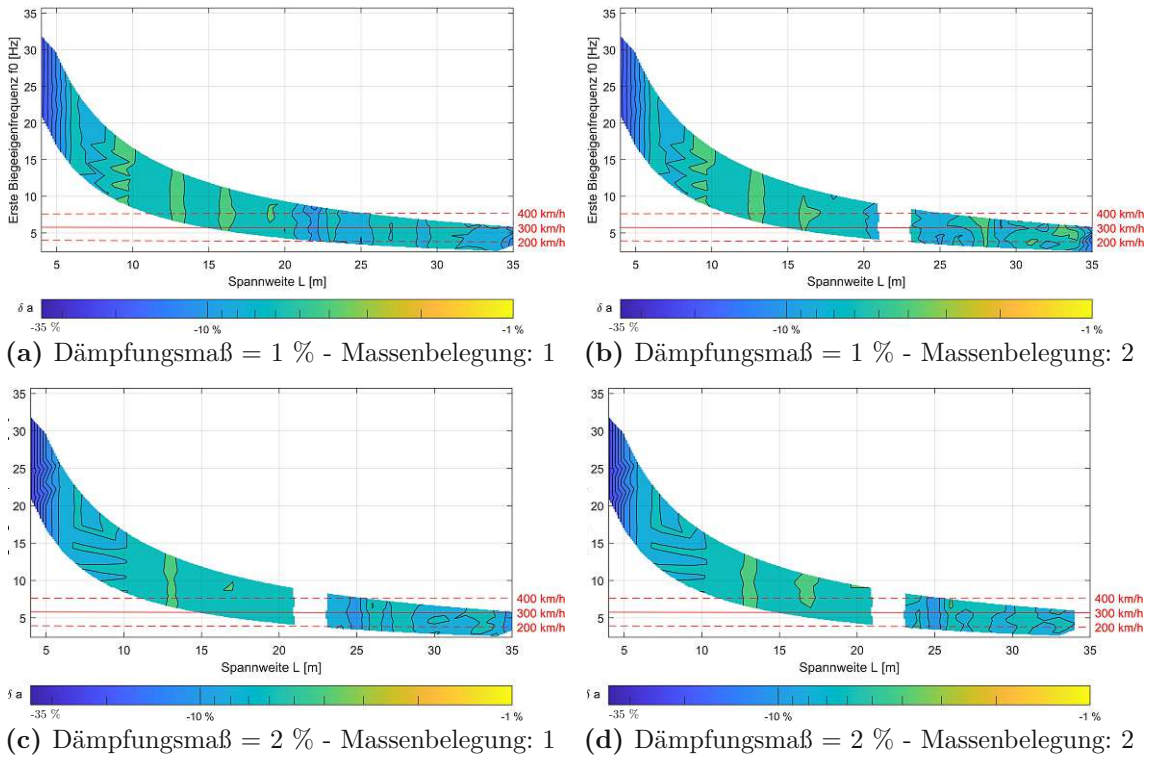


Abb. A.7: Vergleich der Beschleunigungsspitzen  $\delta a$  beim jeweiligen *zweiten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.

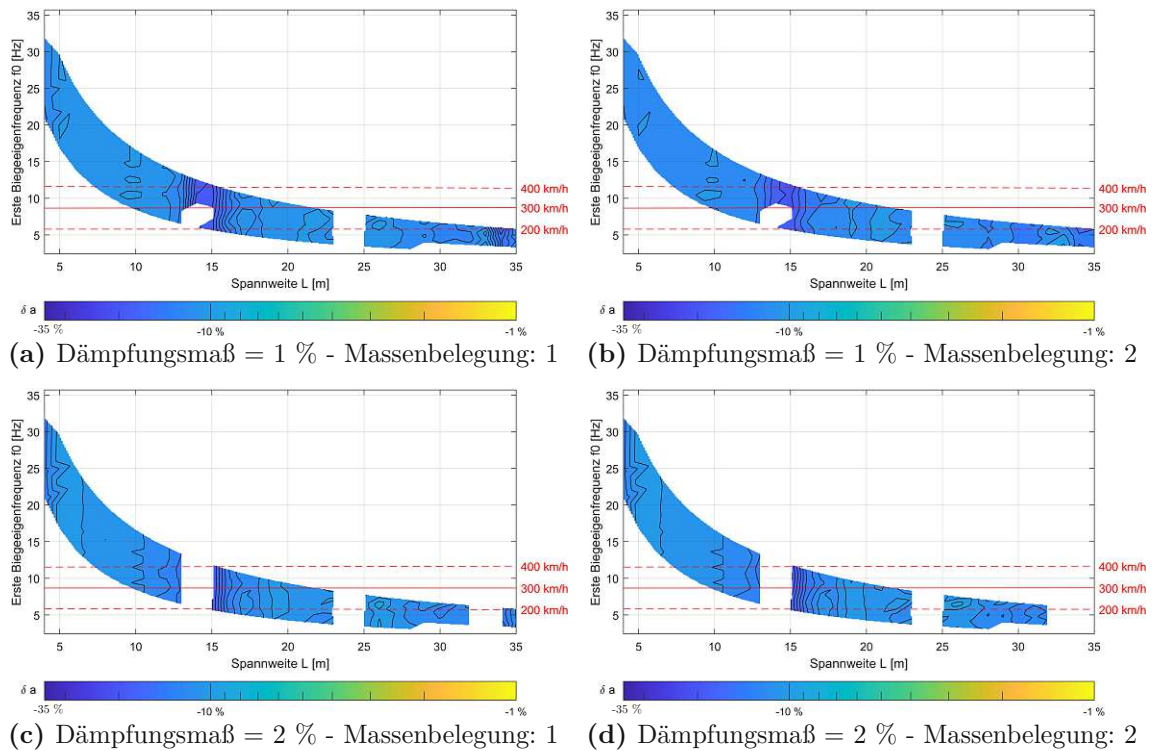
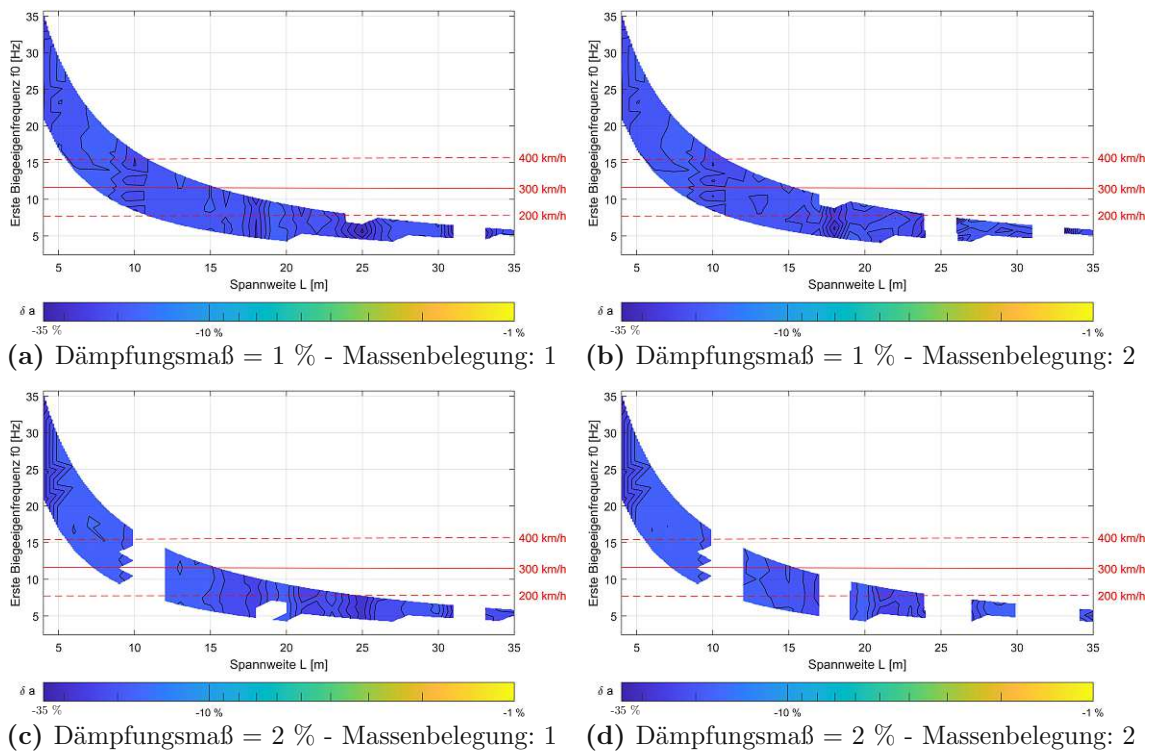
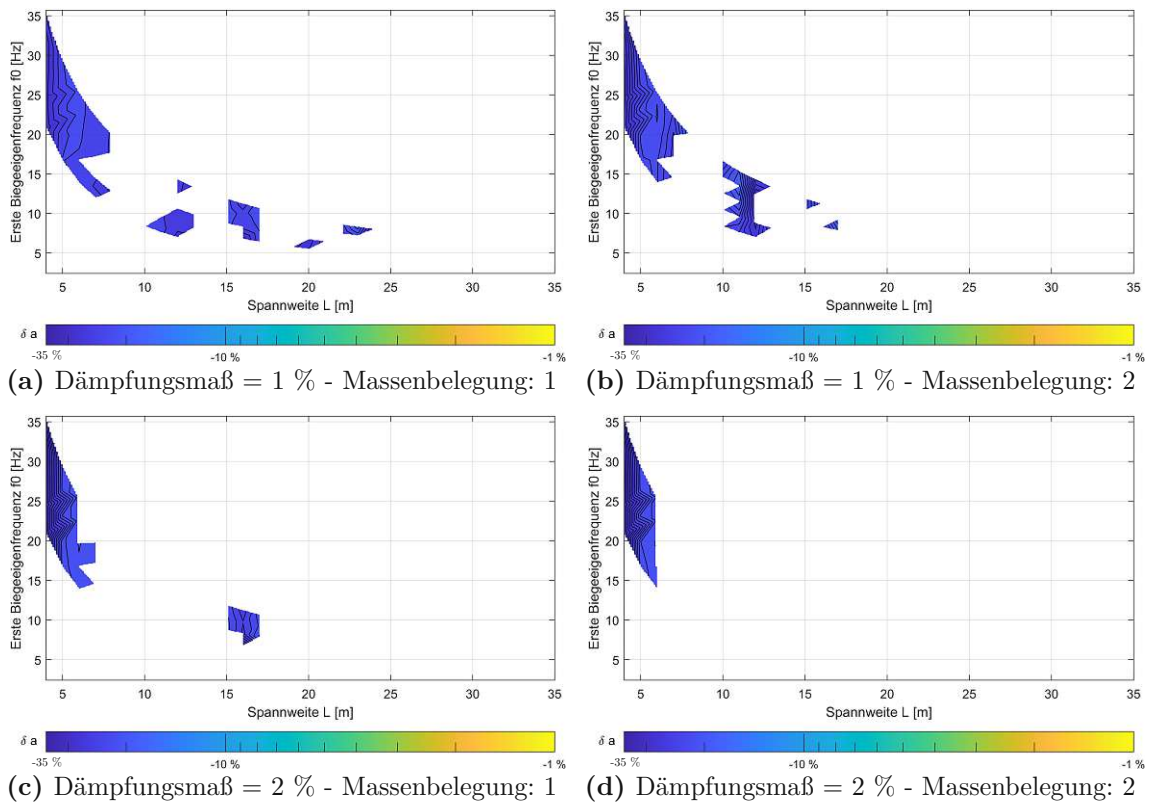


Abb. A.8: Vergleich der Beschleunigungsspitzen  $\delta a$  beim jeweiligen *dritten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.





**Abb. A.9:** Vergleich der Beschleunigungsspitzen  $\delta a$  beim jeweiligen *vierten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.



**Abb. A.10:** Vergleich der Beschleunigungsspitzen  $\delta a$  beim jeweiligen *fünften Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.

relative Durchbiegungsreduktion  $\delta w$ , zwischen MLM-1 und MLM-5

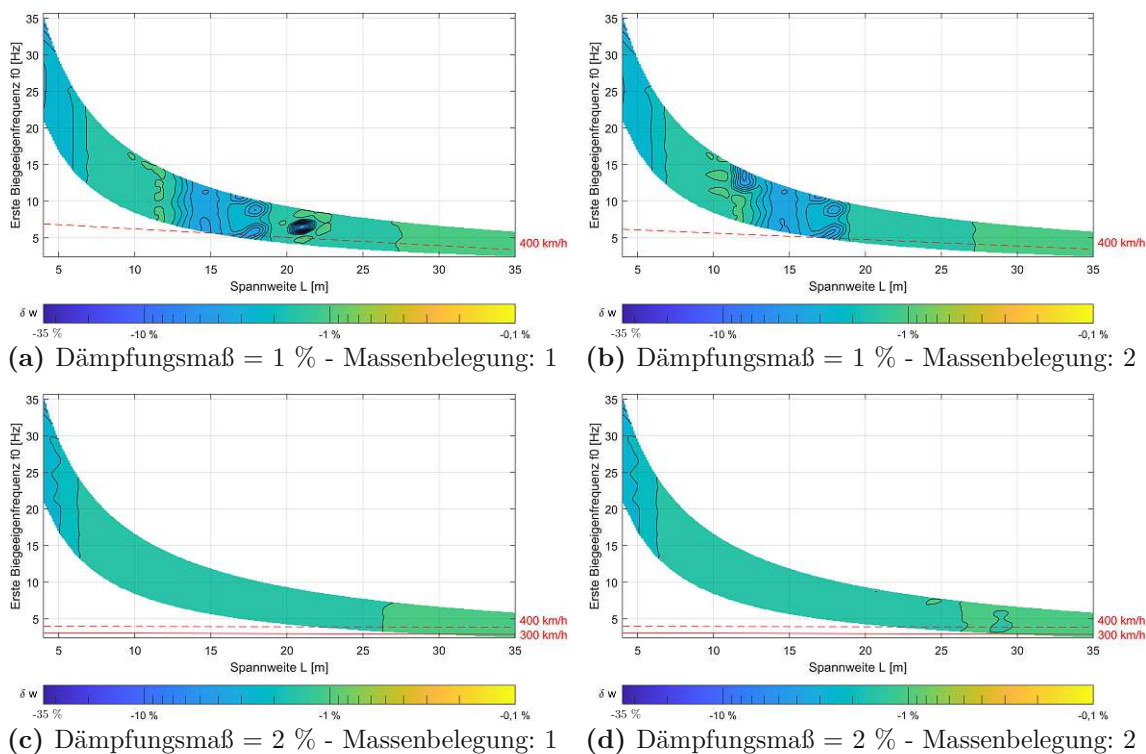
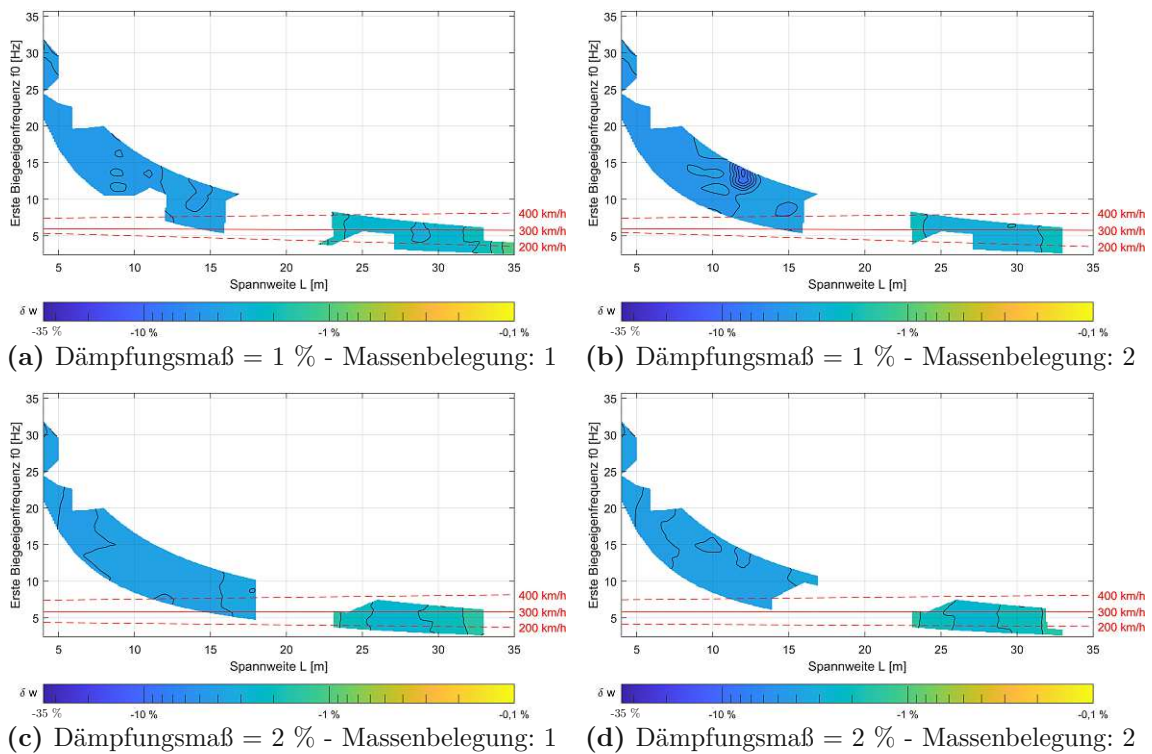
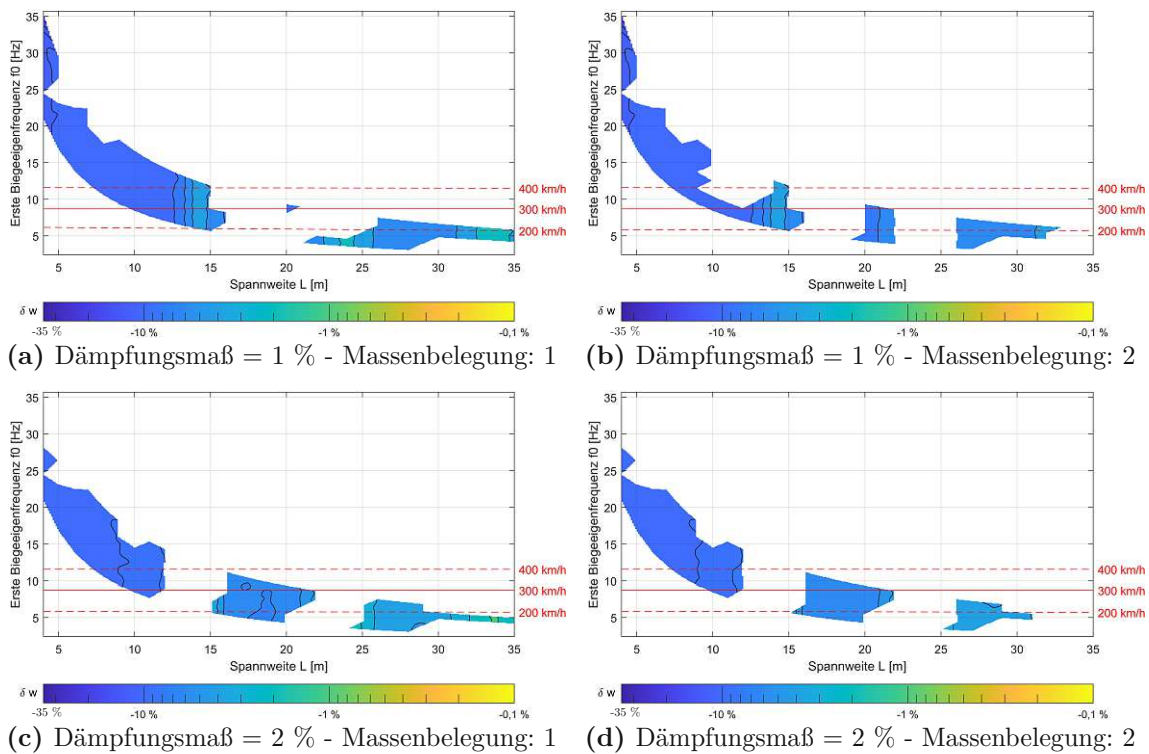


Abb. A.11: Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *ersten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.



**Abb. A.12:** Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *zweiten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.



**Abb. A.13:** Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *dritten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.



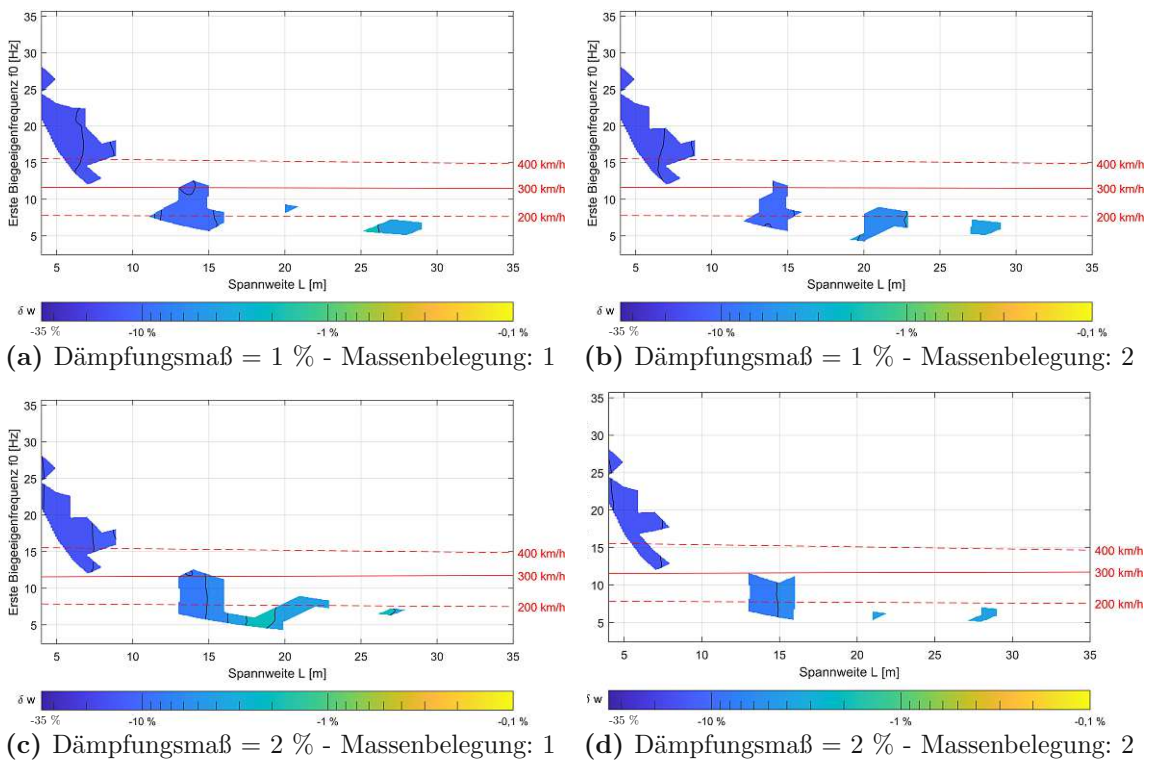


Abb. A.14: Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *vierten Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.

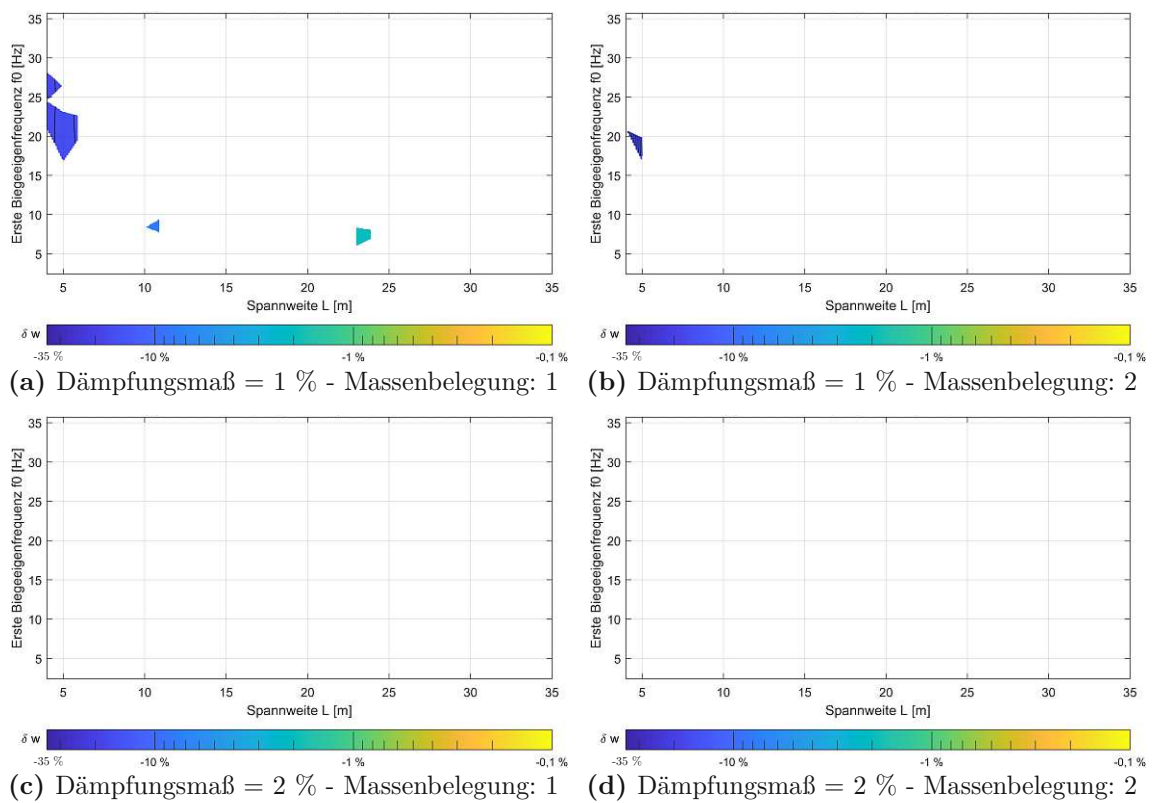


Abb. A.15: Vergleich der Durchbiegungsspitzen  $\delta w$  beim jeweiligen *fünften Resonanzfall*. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5.

# Literatur

- [1] L. Bettinelli, A. Stollwitzer und J. Fink. „Einfluss der Lastverteilung auf die dynamische Tragwerksantwort von Eisenbahnbrücken bei Hochgeschwindigkeitsverkehr“. In: *Bauingenieur BD.96, Nr.9* 285–295 (2021).
- [2] A. K. Chopra. *Dynamics of structures-Theory and applications to earthquake engineering*. 2. Aufl. NJ: Prentice-Hall, Inc., 2001. ISBN: 0-13-086973-2.
- [3] R. W. Clough und J. Penzien. *Dynamics of structures*. 2. Aufl. Singapore: McGraw-Hill Book Co., 1993. ISBN: 0-07-011394-7.
- [4] *DIN EN 1990/A1:2013-03-15: Eurocode - Grundlagen der Tragwerksplanung - Änderung 1: Anwendung bei Brücken (konsolidierte Fassung)*. Wien: Austrian Standards, März 2013.
- [5] *DIN EN 1991-2:2003+AC:2010: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken (Deutsche Fassung)*. Wien: Austrian Standards, Okt. 2010.
- [6] B. Glatz und J. Fink. „A redesigned approach to the additional damping method in the dynamic analysis of simply supported railway bridges“. In: *Engineering Structures* 241 (2021).
- [7] J. Kirchhofer und J. Fink. „Experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau“. In: *Stahlbau* 80 (5) (2011), S. 317–323.
- [8] T. C. Mähr. „Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau unter Verkehrslast“. Dissertation. Technische Universität Wien, 2009.
- [9] H. A. Mang und G. Hofstetter. *Festigkeitslehre*. 5. Aufl. Berlin: Springer Vieweg, 2018. ISBN: 9783662575642.
- [10] *ÖNORM B 1991-2:2018-08-01: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken*. Wien: Austrian Standards, Aug. 2018.
- [11] *ÖNORM B 4008-2:2019-11-15: Bewertung der Tragfähigkeit bestehender Tragwerke - Teil 2: Brückenbau*. Wien: Austrian Standards, Nov. 2019.
- [12] R. Rauter. „Einfluss der lastverteilenden Wirkung des Gleiskörpers auf das dynamische Verhalten von Eisenbahnbrücken“. Diplomarbeit. Technische Universität Wien, 2017.
- [13] Sachverständigenausschuss D214. „ERRI D 214/Report 4, Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten über 200 km/h: Wechselwirkung zwischen Zug und Brücke“. Europäisches Institut für Eisenbahnforschung (ERRI), Utrecht, Dez. 1999.

- [14] A. Stollwitzer. „Entwicklung eines Ansatzes zur rechnerischen Bestimmung der Dämpfung von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau“. Dissertation. Technische Universität Wien, 2021.
- [15] The MathWorks, Inc. *MATLAB*. Version R2020b (9.9.0.1467703). Natick, Massachusetts, United States, 2020.
- [16] The MathWorks, Inc. *Parallel Computing Toolbox*. 2022. URL: <https://de.mathworks.com/products/parallel-computing.html> (Zugriff am 26. 11. 2022).
- [17] Y. B. Yang, C. L. Lin, J. D. Yau und D. W. Chang. „Mechanism of resonance and cancellation for train-induced vibrations on bridges with elastic bearings“. In: *Journal of Sound and Vibration* 269 (1-2) (2004), S. 345–360.
- [18] F. Ziegler. *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*. 3. Aufl. Wien New York: Springer-Verlag, 1998.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Ansatzfunktionen . . . . .	17
2.2	Modellierung des Zuges als Folge von Einzelkräften . . . . .	20
2.3	Modellierung des Schienenfahrzeugs als Mehrkörpermodell . . . . .	22
2.4	Möglichkeiten des Überbaumodells . . . . .	28
2.5	Schematische Darstellung der Lastverteilung für das Einzellastmodell (MLM - links) und das Mehrkörpermodell des Zuges (DIM - rechts) . . . . .	29
2.6	Frequenzgrenzen gemäß Eurocode 1 und Parameterfeld von spannenweitenabhängigen ersten Biegeeigenfrequenzen . . . . .	31
2.7	längenspezifische Massenbelegungen . . . . .	32
2.8	Railjet bestehend aus 8 Reisezugwagen . . . . .	35
2.9	ICE 4 bestehend aus 7 Wagen . . . . .	36
3.1	Beschleunigungsverläufe für ein Tragwerk mit und ohne Lastverteilung. Berechnung für RJ mit 8 Wagen, mittels MLM. . . . .	40
3.2	Verschiebungsverläufe für ein Tragwerk mit und ohne Lastverteilung. Berechnung für RJ mit 8 Wagen, mittels MLM. . . . .	41
3.3	Prozentuelles Verhältnis der Maximalwerte bei Berücksichtigung der Lastverteilung zu den Maximalwerten ohne Berücksichtigung der Lastverteilung, Berechnung mittels MLM . . . . .	42
a	Abweichungen der max. Beschleunigungen . . . . .	42
b	Abweichungen der max. Verschiebungen . . . . .	42
3.4	Beschleunigungsverläufe für ein Tragwerk mit drei unterschiedlichen Lastverteilungen: keine, vollständige und unvollständige Aufteilung der Kontaktkräfte. Berechnung für RJ mit 8 Wagen, mittels DIM. . . . .	45
a	Beschleunigungsspitze im Bereich von $v_{d1}$ . . . . .	46
b	Beschleunigungsspitze im Bereich von $v_{d2}$ . . . . .	46
c	Beschleunigungsspitze im Bereich von $v_{d3}$ . . . . .	46
d	Beschleunigungsspitzen im Bereich von $v_{d6}$ bis $v_{d10}$ . . . . .	46
3.6	Einzelne Ausschnitte des Diagramms der Beschleunigungsverläufe (Abb. 3.4), in den Bereichen der einzelnen Beschleunigungsspitzen. . . . .	46
3.7	Verschiebungsverläufe für ein Tragwerk mit drei unterschiedlichen Lastverteilungen: keine, vollständige und unvollständige Aufteilung der Achskräfte. Berechnung für RJ mit 8 Wagen, mittels DIM. . . . .	47
3.8	Einzelne Ausschnitte des Diagramms der Verschiebungsverläufe (Abb. 3.7), in den Bereichen der einzelnen Beschleunigungsspitzen. . . . .	48
a	Durchbiegungsspitze im Bereich von $v_{d1}$ . . . . .	48

b	Durchbiegungsspitze im Bereich von $v_{d2}$ . . . . .	48
c	Durchbiegungsspitze im Bereich von $v_{d3}$ . . . . .	48
d	Durchbiegungsspitze im Bereich von $v_{d6}$ bis $v_{d10}$ . . . . .	48
3.9	Prozentuelles Verhältnis der Maximalwerte bei Berücksichtigung der Lastverteilung zu den Maximalwerten ohne Berücksichtigung der Lastverteilung, Berechnung mittels DIM . . . . .	49
a	Abweichungen der max. Beschleunigungen . . . . .	49
b	Abweichungen der max. Verschiebungen . . . . .	49
3.10	Beschleunigungs-Zeitverlauf $a(t)$ Vergleich von keiner Lastaufteilung und vollständiger Aufteilung auf drei Kräfte. Berechnung für RJ mit 8 Wagen mittels DIM. . . . .	52
a	Zitierproblematik . . . . .	52
b	Beschleunigungs-Zeitverlauf $a(t)$ für RJ mit der Geschwindigkeit $v_{crit,1} = 910 \text{ km/h}$ . . . . .	52
3.11	Durchbiegungs-Zeitverlauf $w(t)$ Vergleich von keiner Lastaufteilung und vollständiger Aufteilung auf drei Kräfte. Berechnung für RJ mit 8 Wagen mittels DIM. . . . .	53
a	Zitierproblematik . . . . .	53
b	Durchbiegungs-Zeitverlauf $w(t)$ für RJ mit der Geschwindigkeit $v_{crit,1} = 915 \text{ km/h}$ . . . . .	53
4.1	Vergleich der Beschleunigungsspitzen $\delta a$ unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen <i>resonanz erzeugenden Geschwindigkeit</i> $v_{d1}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	60
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	60
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	60
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	60
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	60
4.2	Vergleich zweier Beschleunigungsverläufe: Tragwerk 1 mit $L = 34 \text{ m}$ und $f_0 = 2,5 \text{ Hz}$ , Tragwerk 2 mit $L = 7 \text{ m}$ und $f_0 = 19,8 \text{ Hz}$ , jeweils mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von $\zeta = 1 \%$ . . . . .	62
4.3	Vergleich der Beschleunigungsspitzen $\delta a$ unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen <i>resonanz erzeugenden Geschwindigkeit</i> $v_{d2}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	63
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	63
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	63
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	63
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	63
4.4	Vergleich dreier Beschleunigungsverläufe: Tragwerk 3 mit $L = 19 \text{ m}$ und $f_0 = 7,1 \text{ Hz}$ , Tragwerk 4 mit $L = 21 \text{ m}$ und $f_0 = 6,5 \text{ Hz}$ , jeweils mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von $\zeta = 1 \%$ und MB1; Tragwerk 5 mit $L = 21 \text{ m}$ und $f_0 = 6,5 \text{ Hz}$ mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von $\zeta = 2 \%$ und MB 66	66

4.5	Vergleich zweier Beschleunigungsverläufe: Tragwerk 6 mit $L = 8\text{ m}$ und $12,9\text{ Hz}$ , Tragwerk 7 mit $L = 13\text{ m}$ und $13,4\text{ Hz}$ , jeweils mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von $2\%$ . . . . .	67
4.6	Vergleich der Beschleunigungspitzen $\delta a$ unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen <i>resonanzerzeugenden Geschwindigkeit</i> $v_{d3}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	68
a	Dämpfungsmaß = $1\%$ - Massenbelegung: 1 . . . . .	68
b	Dämpfungsmaß = $1\%$ - Massenbelegung: 2 . . . . .	68
c	Dämpfungsmaß = $2\%$ - Massenbelegung: 1 . . . . .	68
d	Dämpfungsmaß = $2\%$ - Massenbelegung: 2 . . . . .	68
4.7	Vergleich zweier Beschleunigungsverläufe: Tragwerk 8 mit $L = 15\text{ m}$ und $f_0 = 5,6\text{ Hz}$ , Tragwerk 9 mit $L = 24\text{ m}$ und $f_0 = 6,9\text{ Hz}$ , jeweils mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß von $\zeta = 1\%$ . . . . .	70
4.8	Vergleich der Beschleunigungspitzen $\delta a$ unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen <i>resonanzerzeugenden Geschwindigkeit</i> $v_{d4}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	72
a	Dämpfungsmaß = $1\%$ - Massenbelegung: 1 . . . . .	72
b	Dämpfungsmaß = $1\%$ - Massenbelegung: 2 . . . . .	72
c	Dämpfungsmaß = $2\%$ - Massenbelegung: 1 . . . . .	72
d	Dämpfungsmaß = $2\%$ - Massenbelegung: 2 . . . . .	72
4.9	Vergleich der Beschleunigungspitzen $\delta a$ unterschiedlicher Tragwerke im Bereich der jeweiligen <i>resonanzerzeugenden Geschwindigkeit</i> $v_{d5}$ . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	75
a	Dämpfungsmaß = $1\%$ - Massenbelegung: 1 . . . . .	75
b	Dämpfungsmaß = $1\%$ - Massenbelegung: 2 . . . . .	75
c	Dämpfungsmaß = $2\%$ - Massenbelegung: 1 . . . . .	75
d	Dämpfungsmaß = $2\%$ - Massenbelegung: 2 . . . . .	75
4.10	Vergleich zweier Durchbiegungsverläufe: beide Tragwerke besitzen die Eigenschaften $L = 14\text{ m}$ und $10,96\text{ Hz}$ , das Tragwerk 10 hat ein Lehr'sches Dämpfungsmaß von $1\%$ , das Tragwerk 11 hat ein Lehr'sches Dämpfungsmaß von $2\%$ . . . . .	80
4.11	Vergleich der relativen Beschleunigungsreduktion bezogen auf $\lambda$ mit einem Augenmerk auf die Tragwerke der Länge $4$ bis $11\text{ m}$ . Berechnet mittels MLM und einer Einwirkung mit Einzelkräften sowie einer verteilten Einwirkung auf drei Kräfte. . . . .	87
a	Dämpfungsmaß = $1\%$ Massenbelegung: 1 . . . . .	87
b	Dämpfungsmaß = $1\%$ Massenbelegung: 2 . . . . .	87
c	Dämpfungsmaß = $2\%$ Massenbelegung: 1 . . . . .	87
d	Dämpfungsmaß = $2\%$ Massenbelegung: 2 . . . . .	87

4.12	Vergleich der relativen Beschleunigungsreduktion bezogen auf $\lambda$ mit einem Augenmerk auf die Tragwerke der Länge 12 bis 19 m. Berechnet mittels MLM und einer Einwirkung mit Einzelkräften sowie einer verteilten Einwirkung auf drei Kräfte. . . . .	89
a	Dämpfungsmaß = 1 % Massenbelegung: 1 . . . . .	89
b	Dämpfungsmaß = 1 % Massenbelegung: 2 . . . . .	89
c	Dämpfungsmaß = 2 % Massenbelegung: 1 . . . . .	89
d	Dämpfungsmaß = 2 % Massenbelegung: 2 . . . . .	89
4.13	Vergleich der relativen Beschleunigungsreduktion bezogen auf $\lambda$ mit einem Augenmerk auf die Tragwerke der Länge 20 bis 27 m. Berechnet mittels MLM und einer Einwirkung mit Einzelkräften sowie einer verteilten Einwirkung auf drei Kräfte. . . . .	91
a	Dämpfungsmaß = 1 % Massenbelegung: 1 . . . . .	91
b	Dämpfungsmaß = 1 % Massenbelegung: 2 . . . . .	91
c	Dämpfungsmaß = 2 % Massenbelegung: 1 . . . . .	91
d	Dämpfungsmaß = 2 % Massenbelegung: 2 . . . . .	91
4.14	Vergleich der relativen Beschleunigungsreduktion bezogen auf $\lambda$ mit einem Augenmerk auf die Tragwerke der Länge 28 bis 35 m. Berechnet mittels MLM und einer Einwirkung mit Einzelkräften sowie einer verteilten Einwirkung auf drei Kräfte. . . . .	92
a	Dämpfungsmaß = 1 % Massenbelegung: 1 . . . . .	92
b	Dämpfungsmaß = 1 % Massenbelegung: 2 . . . . .	92
c	Dämpfungsmaß = 2 % Massenbelegung: 1 . . . . .	92
d	Dämpfungsmaß = 2 % Massenbelegung: 2 . . . . .	92
4.15	Regressionsfunktionen für die relativen Beschleunigungsreduktionen zufolge Lastverteilung bezogen auf $\lambda$ . . . . .	94
a	alle Tragwerke im untersuchten Parameterfeld . . . . .	94
b	Tragwerke unterteilt nach Massenbelegungen und Dämpfungsgrade . . . . .	94
A.1	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>ersten Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	100
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	100
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	100
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	100
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	100
A.2	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>zweiten Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	101
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	101
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	101
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	101
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	101



A.3	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>dritten Resonanzfall</i> .	
	Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	101
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	101
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	101
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	101
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	101
A.4	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>vierten Resonanzfall</i> .	
	Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	102
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	102
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	102
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	102
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	102
A.5	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>fünften Resonanzfall</i> .	
	Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	102
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	102
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	102
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	102
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	102
A.6	Vergleich der Beschleunigungsspitzen $\delta a$ beim jeweiligen <i>ersten Resonanzfall</i> .	
	Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	103
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	103
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	103
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	103
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	103
A.7	Vergleich der Beschleunigungsspitzen $\delta a$ beim jeweiligen <i>zweiten Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	104
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	104
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	104
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	104
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	104
A.8	Vergleich der Beschleunigungsspitzen $\delta a$ beim jeweiligen <i>dritten Resonanzfall</i> .	
	Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	104
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	104
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	104
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	104
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	104
A.9	Vergleich der Beschleunigungsspitzen $\delta a$ beim jeweiligen <i>vierten Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	105
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	105
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	105
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	105
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	105

A.10	Vergleich der Beschleunigungsspitzen $\delta a$ beim jeweiligen <i>fünften Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	105
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	105
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	105
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	105
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	105
A.11	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>ersten Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	106
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	106
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	106
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	106
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	106
A.12	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>zweiten Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	107
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	107
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	107
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	107
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	107
A.13	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>dritten Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	107
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	107
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	107
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	107
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	107
A.14	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>vierten Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	108
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	108
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	108
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	108
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	108
A.15	Vergleich der Durchbiegungsspitzen $\delta w$ beim jeweiligen <i>fünften Resonanzfall</i> . Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	108
a	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	108
b	Dämpfungsmaß = 1 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	108
c	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 1 . . . . .	108
d	Dämpfungsmaß = 2 % - Massenbelegung: 2 . . . . .	108

# Tabellenverzeichnis

2.1	Mehrkörpermodell - physikalische Größen . . . . .	23
2.2	Brückenparameter . . . . .	26
2.3	Fahrzeugdaten für den <i>Railjet</i> . . . . .	35
2.4	Fahrzeugdaten für den <i>ICE 4</i> . . . . .	36
3.1	resonanzerzeugende Geschwindigkeiten . . . . .	38
3.2	Auslöschungsgeschwindigkeiten . . . . .	38
3.3	Beschleunigung MLM . . . . .	41
3.4	Verschiebung MLM . . . . .	41
3.5	Beschleunigung DIM . . . . .	46
3.6	Verschiebung DIM . . . . .	48
4.1	Statistik zu den relativen Beschleunigungsreduktionen. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	59
4.2	Auslöschungsgeschwindigkeit für ausgewählte Tragwerke . . . . .	65
4.3	Auslöschungsgeschwindigkeit für ausgewählte Tragwerke . . . . .	69
4.4	Auslöschungsgeschwindigkeit für ausgewählte Tragwerke . . . . .	73
4.5	Statistik zu den relativen Beschleunigungsreduktionen. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	79
4.6	Statistik zu den relativen Durchbiegungsreduktionen. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-3. . . . .	82
4.7	Statistik zu den relativen Durchbiegungsreduktionen. Berechnet mittels MLM-1 und MLM-5. . . . .	83
4.8	$\lambda_{di}$ für einen idealisierten regelmäßigen Lastabstand - einer Wagenlänge über Puffer 28,75 m . . . . .	86
4.9	Regressionsfunktionen aus Variationen aus Massenbelegung und Dämpfungs- grad . . . . .	95