

Master's Thesis

Development and implementation of an improved numerical model for the dimensioning of frost-resisting roadstructures

submitted in satisfaction of the requirements for the degree of
Diplom-Ingenieur
of the TU Wien, Faculty of Civil Engineering

Diplomarbeit

Entwicklung und Implementierung eines verbesserten numerischen Modells zur Dimensionierung frostsicherer Straßenoberbauten

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs
eingereicht an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen

von

David Zhou, B.Sc.

Matr.Nr.: 01126298

unter der Anleitung von

Dipl.-Ing. Dr.techn. **Ronald Blab**

Dipl.-Ing. Dr.techn. **Lukas Eberhardsteiner B.Sc.**

Institut für Verkehrswissenschaften
Forschungsbereich Straßenwesen
Technische Universität Wien
Karlsplatz 13/E230-03, 1040 Wien, Österreich

Wien, am 19. Januar 2023

Kurzfassung

Die Frost- und Tauwirkung im Straßenkörper stellt für Straßenkonstruktionen bei unzureichender Frostsicherheit einen wesentlichen Faktor der jährlichen Schädigung dar. Um dieser entgegenzuwirken, ist es erforderlich den Straßenoberbau ausreichend frostsicher zu dimensionieren. In welcher Dicke die dazu im Oberbau vorgesehenen ungebundenen frostsicheren Tragschichten anzuordnen sind, basiert derzeit auf erprobten Erfahrungswerten. Daher wird in dieser Arbeit versucht flächendeckende Zusammenhänge mithilfe eines physikalischen Modells abzuleiten, um daraus Rückschluss auf die Frostgefährdung der Straßenkonstruktion zu erhalten. Um ein geeignetes numerisches Modell mit geeigneter Messauflösung zu erhalten, sind verschiedene Möglichkeiten der Finiten Differenzen Methode miteinander und mit der analytischen Lösung verglichen. Durch Vergleich und Validierung verschiedener Modelle zur Abschätzung der wirkenden Randbedingungen an der Straßenkonstruktion konnte die Anzahl der benötigten Messgrößen auf eine einzige zu messende Größe, die Lufttemperatur, reduziert werden. Die Temperaturprofile sind für verschiedene Standardaufbauten der RVS 03.08.63 berechnet und in Form einer Datenbank gesichert. Nach Auswertung der Temperaturprofile wird ein Zusammenhang zur Dimensionierung der erforderlichen Dicke des frostsicheren Aufbaus hergeleitet. Zusätzlich wird versucht die bestehenden Erfahrungswerte mit Hilfe des Modells abzubilden.

Abstract

The frost and thaw effect represents a significant factor of annual damage for road structures if frost protection is inadequate. To ensure adequate service life, the road pavement must be sufficiently frost resistant. The design of the unbound frost protection layers is currently based on tried and tested empirical values. Therefore, this work attempts to derive comprehensive correlations with the help of a physical model in order to obtain conclusions about the frost risk of the road structures. In order to derive a suitable numerical model with appropriate measurement resolution, various possibilities of the finite difference method are compared with each other and with the analytical solution. By comparing and validating different models for estimating the acting boundary conditions on the road structure, the number of required measured variables could be reduced to a single variable to be measured, the air temperature. The temperature profiles in the road pavement are calculated for various standard structures of the Austrian standard for pavement design RVS 03.08.63 and saved in the form of a database. After evaluating the temperature profiles, a correlation is derived to design the adequate thickness of the frost-resistant structure. In addition, an attempt is made to map the existing empirical values with the help of the model.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
1.1	Problemstellung und Zielsetzung	6
1.2	Vorgehensweise und Struktur	7
2	Grundlagen	8
2.1	Wasser im Boden	8
2.2	Eislinsenbildung und Wasserwanderung	8
2.3	Tragfähigkeit der Straßenkonstruktion	9
2.4	Frost- und Tauschäden im Straßenkörper	9
2.4.1	Frostschäden	9
2.4.2	Tauschäden	10
3	Simulation der Temperatur in Straßenkörpern	11
3.1	Grundgleichung der Wärmeleitgleichung	11
3.1.1	Wärmekapazität	12
3.1.2	Wärmeleitfähigkeit	13
3.2	Analytische Lösungsansätze	14
3.2.1	Homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	14
3.2.2	Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	16
3.2.3	Homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und zeitabhängigen Dirichlet Randbedingungen	18
3.3	Finite Differenzen Methode - Dirichlet Randbedingung	21
3.3.1	Euler Vorwärts Verfahren - (explizit)	22
3.3.2	Euler Rückwärts Verfahren - (implizit)	26
3.3.3	Crank Nicolson Verfahren - (implizit)	31
3.3.4	Vergleich der Performance der Verfahren	36
3.4	Finite Differenzen Methode - Robin Randbedingung	36
3.4.1	Euler Vorwärts Verfahren (explizit)	37
3.4.2	Euler Rückwärts Verfahren (implizit) mit Robin Randbedingung	39
3.5	Transmission	42
3.5.1	Kurzwellige Strahlung - Modelle in Abhängigkeit vom Zenitwinkel der Sonne an wolkenlosen Tagen	44
3.5.2	Kurzwellige Strahlung - Modelle in Abhängigkeit der Linke Trübung an wolkenlosen Tagen	46
3.5.3	Kurzwellige Strahlung - Wolkenfaktor zur Abminderung der Strahlung mittels Prominenz	49
3.5.4	Langwellig Strahlung - Modellbildung	51
3.5.5	Langwellig Strahlung - Bestimmung der Regressionsparameter	51
3.6	Konvektion	52
3.6.1	Wärmeübergangskoeffizient	53
3.7	Validierung der Annahmen und der Modellparameter	55

4	Auswertung der Messdaten	57
4.1	Datenlage und Vorgangsweise	57
4.2	Berechnung der zeitabhängigen Temperaturprofile	57
4.3	Einfluss der Dicke der Straßenbefestigung auf die 0°C-Isotherme	57
4.4	Berechnung der jährlichen Frost- und Tauperioden	58
4.5	Die maximale Frosttiefen und die Verteilung über Österreich	61
4.6	Abschätzung der Dicke des frostsicheren Aufbaus	62
5	Zusammenfassung und Ausblick	75

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung und Zielsetzung

Durch die jahreszeitlichen Temperaturschwankungen im Untergrund ist der Straßenaufbau zusätzlich zu der mechanischen Beanspruchung des Verkehrs durch Frost- bzw. Tauvorgänge belastet. Um die in diesen Perioden entstehenden Schäden im Straßenkörper gering zu halten, ist es erforderlich frostsichere Schichten in gewissen ausreichenden Dicken vorzusehen. In welcher Dicke diese einzuplanen sind, beruht zur Zeit stark auf Erfahrungswerten. Daher wird in dieser Arbeit versucht, das thermische Verhalten des Straßenkörpers über den Jahresverlauf nachzubilden, um daraus die erforderlichen Dicken abzuschätzen.

Für das Auftreten von Schäden ist immer das Zusammenwirken folgender Faktoren verantwortlich [24, 29, S. 63]:

- frostempfindlicher Boden
- Wasser
- Frost (Tau)
- Verkehr

In den Monaten mit auftretendem Frost wird der Boden im Bereich der Frostgrenze mit Wasser in Form von Eis angereichert. Schmilzt das Eis in der Tauperiode wird die Tragfähigkeit des frostempfindlichen Bodens durch große Wassermengen und damit einhergehender großer Teilchenmobilität stark vermindert, was in Kombination mit der Verkehrsbelastung zu schweren Schäden führen kann [25, S. 63].

Ziel dieser Arbeit ist es, die zu wählenden Dicken basierend auf österreichischen flächendeckenden Klimadaten und den bestehenden Richtlinien abzuschätzen bzw. zu errechnen.

1.2 Vorgehensweise und Struktur

In dieser Arbeit sind verschiedene Varianten der Finiten Differenzen Methode (FDM) zur Lösung der Wärmeleitgleichung ausgearbeitet und implementiert. Um das Konvergenzverhalten der numerischen Verfahren besser zu verstehen, wird die analytische Lösung hergeleitet und mit den numerischen Verfahren verglichen. Diese Herangehensweise soll helfen, die FDM in ihren Grundzügen besser zu verstehen und die Entscheidungsgrundlage für die Wahl des Verfahrens zu legen.

Versucht wird, durch eine möglichst geringe Anzahl von Eingangsgrößen Temperaturprofile zu approximieren. Zur Abschätzung der Randbedingungen sind verschiedene Modelle verglichen und an entsprechender Stelle die gesuchten Regressionsparameter auf österreichische Verhältnisse angepasst. Mit den gewählten Modellansätzen werden für alle Lastklassen der Bautypen AS1 und BE1 der RVS 03.08.63 [3] die Temperaturprofile mithilfe der gegebenen Messdaten der ZAMG berechnet. Diese Ergebnisse werden in Form einer Datenbank gesichert. Aus den Temperaturprofilen werden die Frostgänge und weiter die täglichen Frost- und Tauvorkommen extrahiert, woraus durch Anpassen einer Verteilungsfunktion die Perioden abgeleitet werden. Durch den Vergleich der aktuellen Richtlinie mit den ermittelten Perioden kann so ein Rückschluss auf die erforderlichen Dicken gezogen werden.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel sind die der angewandten Methodik zu Grunde liegenden Annahmen und theoretischen Grundlagen beschrieben.

2.1 Wasser im Boden

Wasser stellt im Hinblick auf Frost- und Tauschäden an Straßen einen wesentlichen Faktor dar. Aufgrund von geringerer Verdunstung und geringerem Wasserbedarf der Pflanzen zwischen Oktober und März, also der kritischen Zeit, erreichen die Wasservorräte im Boden ihr Maximum. Es ist daher davon auszugehen, dass in den kritischen Perioden meist ausreichend Wasser zur Verfügung steht, um Eis im Straßenkörper anzureichern [29, S. 5]. Daher wird in den nachstehenden Simulationen von feuchten Bodenverhältnissen mit unbegrenztem Wassernachschub ausgegangen. In milden Wintern konnte beobachtet werden, dass es zu einer größeren Anzahl an Frostschäden kommt als in strengeren [24, S. 6]. Durch das rasche Eindringen des Frostes wird der Wassernachschub unterbunden und es entsteht ein homogener Bodenfrost, der auch während der Tauperiode tragfähig bleibt. Eislinsen entstehen in diesem Szenario tendenziell tiefer im Untergrund und damit in Zonen mit höherem und günstig wirkendem Überlagerungsdruck. Dadurch liegen beim Auftauen die weniger tragfähigen Zonen in einer Tiefe, die vom Einfluss der Verkehrsbelastung schon ausreichend abgemindert ist und schneller konsolidiert. Wenn die 0°C-Isotherme jedoch in einer Schicht mit geringerem Überlagerungsdruck zu liegen kommt, wie es bei milderer Wintern tendenziell eher der Fall ist, geschieht die Wasseranreicherung in den kritischeren Zonen. Der geringere Überlagerungsdruck in den oberen Schichten führt zu einem langsamerem Konsolidierungsprozess und damit zu einer längeren Zeitdauer, in der die Straße eine geringere Tragfähigkeit aufweist [25, S. 94].

Besonders Problematisch ist es, wenn der aufgeweichte Boden in die Frostschutzschicht eindringt. Durch die Vermischung des frostsicheren Aufbaus können vorher frostsichere Bodenschichten frostempfindlich werden. Auftretende Frostschäden zeigen sich in so einem Fall meist erst in der folgenden Tauperiode [25, S. 95].

2.2 Eislinnenbildung und Wasserwanderung

Beim Eindringen des Frostes in den Boden können mehrere nicht zusammenhängende Eisschichten in unterschiedlicher Dicke entstehen. Diese Form der Wasseranreicherung wird als rhythmische Eislinnenbildung bezeichnet. Bei der Kristallisation von Wasser zu Eis wird einem größeren Kristall, also einem bereits gefrorenen Eispaket, der Vorzug gegeben. Dabei versucht die Eislinne durch den Boden hindurch zu wachsen. [25, S. 63] Je tiefer die Temperaturen sinken und je weiter sich die Eislinne von der Gefrierfront entfernt, desto eher bildet sich ein neues Kristallisationszentrum. Bei mehrfacher Wiederholung dieses Vorganges entstehen die typisch geschichteten Boden-Eis Pakete, die im gefrorenen Zustand zwar zu erheblichen Hebungen führen, aber grundsätzlich als sehr tragfähig gelten. Ein interessantes Phänomen beschreibt [25, S. 63], dass das Wachstum

der Eislinse nicht nur in den Bereichen der 0°C-Isotherme, sondern auch darüber stattfinden kann. Bodenteilchen in einem wassergesättigten Boden weisen eine gewisse Wasseraffinität auf. Sie streben danach, sich mit einer Wasserhülle zu umgeben. Diese Art von Wasser wird Adsorptionswasser genannt und bleibt je nach Gefrierenergie (negative Temperatur) in einem gewissen Maße in einer gefrorenen Schicht in flüssiger Form erhalten. Wenn die Gefrierenergie in den Schichten über der 0°C-Isotherme ansteigt, kann von den Bodenkörnern gebundenes Wasser zum Wachstum der Eislinse herangezogen werden. Durch das Herausreißen des gebundenen Wassers aus der Wasserhülle des Kornes und dem gleichzeitigen Bestreben diese wieder aufzufüllen, werden Sogkräfte aktiviert, welche das Wasser in Richtung Gefrierfront ziehen.

Bei der Wasserwanderung kann also zwischen verschiedenen Arten unterschieden werden:

- **Migration** - Porenwasser (freies Wasser) wird in Richtung Eislinse transportiert.
- **Segration** - Porenwasser (Adsorptionswasser) wird in den gefrorenen Schichten in Richtung Eislinse transportiert.

Der mögliche Wassertransport der Segration ist stark eingeschränkt. Zwar kommt es zu einem zusätzlichen Wachstum, allerdings ist dieses im Vergleich zur Migration deutlich weniger ausgeprägt. [25, S. 65]

2.3 Tragfähigkeit der Straßenkonstruktion

Beim Frieren des Untergrundes verkittet das Eis den bestehenden Boden, wodurch es im allgemeinen zu einer Verfestigung im Untergrund kommt. Kritisch wird es dann, wenn das angereicherte Eis in der Tauperiode zu schmelzen anfängt. Das vorher festigende Eis weicht den gewachsenen Boden auf, wodurch Zonen mit erhöhtem Wassergehalt und stark reduzierter Tragfähigkeit entstehen. Die reduzierte Tragfähigkeit in Kombination mit einer für diese Zeit überhöhten Verkehrsbelastung (bspw. durch Holztransporte nach dem Winter) können zu schweren Frostschäden in der Straßenkonstruktion führen. Bis der Boden wieder die ursprüngliche Tragfähigkeit erreicht, muss das Wasser abgebaut werden. Die Abbaugeschwindigkeit ist stark abhängig vom Durchlässigkeitskoeffizienten des Bodens und dem vorherrschenden Überlagerungsdruck. Die Reduktion der Tragfähigkeit ist damit ein regenerativer Prozess.

Je tiefer eine Eislinse gewachsen ist umso höher der Überlagerungsdruck. Eine tiefliegende Anreicherung von Wasser im Untergrund kann schneller als eine hochliegende abgebaut werden. Zusätzlich leistet der Überlagerungsdruck im Untergrund der Eislinnenbildung einen Widerstand [25, S.93].

2.4 Frost- und Tauschäden im Straßenkörper

Die für die Straßenkonstruktion schwersten Schäden sind jene, die sich aufgrund der verminderten Tragfähigkeit im Untergrund in der Tauperiode ergeben. Es sind mögliche Arten von Schäden der jeweiligen Kategorie beschrieben. Grundsätzlich kann zwischen Frost- und Tauschäden unterschieden werden [29, S. 15].

2.4.1 Frostschäden

Aufgrund der Volumenzunahme beim Phasenübergang erfolgen in der Straßenkonstruktion langsame Hebungen. Sie führen, sofern sie gleichmäßig erfolgen, kaum zu bleibende Schäden in der Straßenkonstruktion. Bei flexiblen Befestigungen kann es im Zuge der Hebungen zu Längsrissen kommen. Starre unverdübelte Aufbauten sind im Hinblick auf Hebungen anfälliger.

Es kann dabei zu Stufen- und Rissbildung sowie dem Öffnen von Fugen kommen. Grundsätzlich werden die möglichen Frostschäden jedoch als eher unbedenklich eingestuft. Problematisch ist es nur, wenn durch Risse Verunreinigungen in den frostsicheren Aufbau gelangen. Dies kann bei großer Verunreinigung und häufiger Wiederholung die Tragfähigkeit des frostsicheren Aufbaus in der Tauperiode stark reduzieren [29, S. 15].

2.4.2 Tauschäden

Gleiches gilt auch, wenn aufgeweichter Boden von unten in den frostsicheren Aufbau eingepresst wird. Mit fortschreitender Durchtränkung des frostsicheren Aufbaus mit frostempfindlichen Material wird die Tragfähigkeit deutlich abgemindert, bis hin zum Versagen bei ungünstiger Verkehrsbelastung [24]. Ungleichmäßige Frosthebungen werden durch unterschiedliche Bedingungen im Untergrund oder an der Oberfläche hervorgerufen. Beispielsweise können Schneeablagerungen der Schneeräumung eine dämmende Schicht an der Oberfläche bilden. An den Randbereichen kommt es damit zu geringeren Frosttiefen als in der Mitte der Straßenkonstruktion. Wie bereits schon erwähnt, muss dieser Umstand nicht immer einen positiven Effekt im Hinblick auf die Frostgefährdung haben. Es kann also sein, dass in den Tauperioden genau in diesen Bereichen eine stärker verminderte Tragfähigkeit auftritt [29, S. 15].

Kapitel 3

Simulation der Temperatur in Straßenkörpern

In diesem Kapitel sind die Grundlagen beschrieben, um Temperaturfelder in Straßenkonstruktionen numerisch zu approximieren. Zusätzlich sind für die numerischen Lösungen die entsprechenden analytischen Lösungsansätze hergeleitet. Diese dienen dazu die Qualität der verschiedenen numerischen Lösungen abzuschätzen. Außerdem ist es wichtig herauszufinden in welcher Qualität bzw. Auflösung Temperaturmessungen erforderlich sind, um präzise Abschätzungen zu erhalten. Die analytischen Lösungen gelten immer nur für die jeweilige Kombination von Randbedingungen. Trotzdem sind in dieser Arbeit auch die Herleitungen der zwar relativ einfachen, aber zum Teil sehr aufwendigen Lösungen der Differentialgleichungen hergeleitet. Diese Herleitungen sollen die Basis für mögliche zukünftige präzise Implementierungen legen.

Aufgrund der beschränkten Gültigkeit der analytischen Lösungen der zugrunde liegenden Differentialgleichung findet die Finite Differenzen Methode große Beliebtheit. Sie liefert einen universalen und einfach umsetzbaren Lösungsansatz auf vergleichsweise performante Weise. Es werden in den entsprechenden numerischen Abschnitten die berechneten Temperaturfelder direkt mit der zugehörigen analytischen Lösung verglichen.

In diesem Kapitel ist anfangs die beschreibende Differentialgleichung des Wärmetransports zusammengefasst. Sie bildet die Ausgangslage für alle analytischen sowie numerischen Lösungsansätze. Danach werden alle notwendigen Lösungsansätze beschrieben um die für Straßenkonstruktionen relevante Problemdefinition analytisch zu lösen. Im Anschluss an die analytischen Lösungen folgen die numerischen Verfahren für verschiedene Arten von Randbedingungen. In allen Kapiteln sind zwecks Nachvollziehbarkeit numerische Beispiele angeführt.

Es folgen verschiedene Modelle zur Abschätzung der Transmission und Konvektion. Diese sind direkt in die davor beschriebenen Verfahren eingesetzt, um deren Auswirkung auf die numerische Approximation beurteilen zu können.

3.1 Grundgleichung der Wärmeleitgleichung

Das Temperaturfeld einer Straßenkonstruktion wird vereinfachend durch eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Diese wird als die Fourierische Wärmeleitgleichung bezeichnet. Die Differentialgleichung lässt sich für ein isotropes Material wie folgt anschreiben, dabei stellt ∇ den Nabla-Operator dar [28, S. 75]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T = a (\nabla \cdot \nabla T) \tag{3.1}$$

Der Laplaceoperator auf ein Temperaturfeld angewandt beschreibt die Krümmung dieses Feldes. Die Änderung der Zeit ist damit direkt proportional zur Krümmung des Temperaturfeldes, wobei der Proportionalitätsfaktor eine materialabhängige Größe darstellt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \tag{3.2}$$

Für unseren Anwendungsfall ist die Betrachtung des eindimensionalen Falls ausreichend. Daher reduziert sich die Glg. (3.2) zu:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

$$T_t = a \cdot T_{xx} \quad (3.4)$$

Dabei ist x in Richtung des Normalenvektors zur Oberfläche gerichtet. Die Temperaturleitzahl $a \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ definiert die Geschwindigkeit des Wärmetransfers von warm zu kalt erfolgt. Sie berechnet sich aus dem Quotienten von Wärmeleitfähigkeit $\lambda \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ und der volumetrischen Kapazität $C_{vol} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ des Materials:

$$a = \frac{\lambda}{C_{vol}} = \frac{\lambda}{C_{vol}} \quad (3.5)$$

Bei bekannter Anfangsbedingung und zeitunabhängigen und damit konstanten Randbedingungen handelt es sich um ein Anfangswertproblem, welches mit den gut bekannten Lösungsansätzen analytisch gelöst werden kann. Auf die Straßenkonstruktion wirken aufgrund der meteorologischen Bedingungen an der Oberflächen sowie den jahreszeitlichen Schwankungen der Untergrundtemperatur immer zeitabhängige Randbedingungen ein. Es handelt sich um eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und zeitabhängigen Randbedingungen. Dieses im ersten Anschein komplizierte Problem, kann in eine inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung überführt werden, für welche es in der Literatur [28] wiederum gut beschriebene Lösungsansätze gibt. Sie sind in der Herleitung aufwändig und immer nur für bestimmte definierte Randbedingungen gültig. Daher sind die analytischen Lösungsansätze in der Anwendung unhandlich. Eine für jede vorherrschende Randbedingung gültige Approximation von zeitabhängigen Temperaturfeldern bietet die Finite Differenzen Methode (FDM) mit all ihren Variationen. Grundsätzlich sind bei allen Variationen die infinitesimalen Differentiale durch endliche finite Intervalle Δt und Δx ersetzt. Es ergeben sich für den eindimensionalen Fall aus Glg. (3.3):

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = a \cdot \frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2} \quad (3.6)$$

Damit ermöglicht die FDM, durch die einfache Differenzenbildung verschiedener Ordnung, Näherungslösungen mit verschiedensten Randbedingungen universal zu lösen. Durch die Wahl des Differenzenquotienten lassen sich verschiedene Variationen der FDM ableiten, welche Unterschiede im Konvergenz- und Stabilitätsverhalten der Approximation zeigen. Für diesen konkreten Anwendungsfall, der Temperatursimulation in Straßenkonstruktionen, kann zwischen der Dirichlet- (bekannte Oberflächentemperatur) und der Robin-Randbedingung (bekannte Umgebungstemperatur mit bekanntem Wärmeübergang) unterschieden werden. In den nachstehenden Kapiteln werden die verschiedenen Lösungsansätze mit numerischen Beispielen beschrieben. Zwecks der Reproduzier- und Nachvollziehbarkeit sind die verschiedenen Lösungsansätze als Python-Package umgesetzt.

3.1.1 Wärmekapazität

Die Wärmekapazität C ist ein Maß dafür wie viel Energie aufgewendet werden muss, um eine Temperaturänderung in einem Stoff zu bewirken. Sie definiert also jene Energie die benötigt wird um 1 m^3 eines Stoffes um 1°C zu erwärmen oder abzukühlen. Für einen feuchten bzw.

gefrorenen Boden können die Kapazitäten von Wasser und trockenem Boden in Abhängigkeit vom Wassergehalt addiert werden:

$$C_{vu} = \rho_t \cdot \left(C_{mS} + \frac{C_{mW} \cdot w}{100} \right) \quad (3.7)$$

$$C_{vf} = \rho_t \cdot \left(C_{mS} + \frac{C_{mE} \cdot w}{100} \right) \quad (3.8)$$

Dabei beschreibt C_{vu} die volumenbezogene Wärmekapazität des ungefrorenen Bodens in $\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$, C_{vf} die volumenbezogene Wärmekapazität des gefrorenen Bodens in $\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$, ρ_t das Trockenraumgewicht in kg m^{-3} , C_{mS} die massenbezogene Wärmekapazität des Bodenkorns in $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$, C_{mW} die massenbezogene Wärmekapazität des gefrorenen Wassers in $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$, C_{mE} die massenbezogene Wärmekapazität des Wassers in $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ und w den Wassergehalt in % [25][S. 2].

3.1.2 Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit ist jene Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit von 1 s durch ein Einheitsvolumen hindurch wandert. Sie ergibt sich aus der Leitfähigkeit der Matrix sowie der Leitfähigkeit des Porenraums [25][S.1]. Eine hohe Wärmeleitfähigkeit führt dazu, dass Temperatur sehr schnell innerhalb eines Körpers transportiert werden kann. Damit kann auf der einen Seite Frost schnell in die Straßenkonstruktion eindringen, auf der anderen Seite die interne Wärme des Erdreiches schnell an die Oberfläche dringen. Schichtaufbauten mit geringerer Wärmeleitfähigkeit bewirken, dass der Frost nicht so schnell in den Boden eindringt, aber auch, dass der Boden sich langsamer aufwärmt. Günstigere Straßenaufbauten bezogen auf die Frosttiefe sind also jene, die eine geringe Wärmeleitfähigkeit in Kombination mit hoher Wärmekapazität aufweisen. Diese Befestigungen leisten dem Eindringen des Frostes den größten Widerstand. Je nachdem, ob der Boden als trocken, feucht oder wassergesättigt angenommen wird, ist der Porenraum mit Luft, oder teilweise vollständig mit Wasser gefüllt. Eine einfache Möglichkeit das Zweiphasensystem zu beschreiben besteht darin, die effektive Wärmeleitfähigkeit, bzw. ihre Grenzen, über das volumetrische Gesetz von Mixturen zu berechnen:

$$\lambda_{eff,o} = \lambda_s(1 - n) + \lambda_p \cdot n \quad (3.9)$$

$$\lambda_{eff,u} = \left(\frac{1 - n}{\lambda_s} + \frac{n}{\lambda_p} \right)^{-1} \quad (3.10)$$

mit:

$$n = \frac{V_p}{V_g} \quad (3.11)$$

Dabei beschreibt $\lambda_{eff,o}$ die obere Grenze der Wärmeleitfähigkeit in $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, $\lambda_{eff,u}$ die untere Grenze der Wärmeleitfähigkeit in $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, λ_s die Wärmeleitfähigkeit des Bodens in $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, λ_p die Wärmeleitfähigkeit des Porenraums in $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, V_p das Porenvolumen in m^3 , V_g das Gesteinsvolumen in m^3 und n den Porenanteil. Anders ausgedrückt geht man von einer wärmedämmenden Wirkung des Porenraums aus [13][S.2]. Wenn $\lambda_p \ll \lambda_s$ kann mit guter Näherung Glg. (3.9) zu:

$$\lambda_{eff} = \lambda_s(1 - n) \quad (3.12)$$

vereinfacht werden [17]. Der gewachsene Boden unter der Straßenkonstruktion wird vereinfachend als homogen angesehen, womit sich die Wärmeleitfähigkeiten direkt aus erprobten Kenngrößen ergeben.

3.2 Analytische Lösungsansätze

In diesem Abschnitt sind alle notwendigen Lösungsansätze beschrieben, die es braucht, um die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und zeitabhängigen Randbedingungen zu lösen.

3.2.1 Homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Um die Problemdefinition mit zeitabhängigen Randbedingungen zu lösen, wird in diesem Unterkapitel die in der Literatur ausführlich beschriebene analytische Lösung der Wärmeleitgleichung für das Anfangswertproblem im homogenen Fall hergeleitet. Sie stellt die Ausgangslage für die folgenden analytischen Lösungsansätze dar. Da es sich bei der Lösung um eine Reihenlösung handelt, wird diese auch als semi-analytische Lösung bezeichnet. Ausgangslage der Herleitung ist die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (3.3) und folgenden Randbedingungen [28][S. 248]:

$$\begin{aligned} T_t(x, t) &= aT_{xx}(x, t) \\ T(0, t) &= 0 \\ T(l, t) &= 0 \\ T(x, 0) &= r(x) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Gelöst wird die Differentialgleichung durch Separation der Variablen. Es wird angenommen, dass sich die Lösung der Differentialgleichung aus einem Anteil abhängig von x und einem Anteil abhängig von t zusammensetzt. Die Temperaturverteilung muss also folgende Form annehmen [28][S. 232]:

$$T(x, t) = f(x)g(t) \quad (3.14)$$

Einsetzen des Lösungsansatzes aus Glg. (3.14) in Glg. (3.3) führt auf:

$$f(x) \frac{\partial g(t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} g(t) \quad (3.15)$$

$$f(x)g_t(t) = af_{xx}(x)g(t) \quad (3.16)$$

Durch Separation der Variablen erhält man:

$$\frac{f_{xx}(x)}{f(x)} = \frac{g_t(t)}{ag(t)} = -\alpha^2 \quad (3.17)$$

wobei α eine beliebige Konstante beschreibt. Durch den soeben erhaltenen Ausdruck ergeben sich folgende zwei Bedingungen, die in jedem Fall erfüllt sein müssen:

$$f_{xx}(x) + \alpha^2 f(x) = 0 \quad (3.18)$$

$$g_t(t) + \alpha^2 ag(t) = 0 \quad (3.19)$$

Um die erste der beiden neu erhaltenen Differentialgleichungen zu lösen, werden die Randbedingungen in den ursprünglichen Lösungsansatz (3.14) eingesetzt:

$$T(0, t) = f(0)g(t) \rightarrow f(0) = 0 \quad \forall g(t) \quad (3.20)$$

$$T(l, t) = f(l)g(t) \rightarrow f(l) = 0 \quad \forall g(t) \quad (3.21)$$

Es zeigt sich, dass die triviale Lösung Teil des Lösungsraumes ist, wodurch die Randbedingung für jedes beliebige $g(t)$ gültig sein muss. Damit beschreibt Glg. (3.18) ein Eigenwertproblem, welches mit folgendem Ansatz gelöst werden kann:

$$f(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) \quad (3.22)$$

Das Einsetzen der Randbedingungen führt auf:

$$f(0) = A = 0 \rightarrow f(l) = B \sin(\alpha l) = 0 \quad (3.23)$$

Gesucht sind gemäß des Eigenwertproblems alle nicht trivialen Lösungen der Glg. (3.23). Daher ergeben sich folgende Koeffizienten:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.24)$$

$$f_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = B_n \varphi_n(x) \quad (3.25)$$

Die zweite zu lösende Gleichung (3.19) ist eine homogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, welche mit folgendem Ansatz gelöst werden kann:

$$g(t) = C e^{-\alpha^2 a t} \quad (3.26)$$

Es ergibt sich weiter durch Einsetzen von α aus Glg. (3.24):

$$g_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a t} \quad (3.27)$$

Damit kann die gut bekannte Lösung des Randwertproblems angeschrieben werden:

$$T(x, t) = f(x)g(t) = r_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.28)$$

wobei $r_n = B_n C_n$ hier eine beliebige Konstante sein kann. Da es sich um eine homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten handelt, gilt das Superpositionsprinzip. Dies führt auf die (semi-) analytische Reihenlösung:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.29)$$

Die nun erhaltene Reihenlösung muss die Anfangsbedingung erfüllen. Durch Einsetzen der Randbedingung erhält man:

$$T(x, 0) = r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \varphi_n(x) \quad \text{mit} \quad r_n = \frac{2}{l} \int_0^l r(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.30)$$

Numerisches Beispiel

In diesem numerischen Beispiel ist an der Oberfläche sowie im Untergrund eine konstante Temperatur von 10°C definiert. Als Anfangsbedingung wird eine Sinushalbwellen angesetzt:

$$\begin{aligned} T_t(x, t) &= aT_{xx}(x, t) \\ T(0, t) &= T_s = 0 \\ T(l, t) &= T_g = 0 \\ T(x, 0) &= \sin\left(\frac{x}{l}\pi\right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\text{(vgl. 3.30)} \quad r_n = 0 \mid n = 1 \quad r_n = 1 \mid \forall n \geq 2 \quad (3.32)$$

Explizit ergibt das für die Parameter $a = 1$, $l = 1$:

$$\text{(vgl. 3.29)} \quad T(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(x\pi) \quad (3.33)$$

Da es sich bei der gewählten Anfangsbedingung selbst um eine trigonometrische Funktion handelt, degeneriert die unendliche in eine endliche Reihe mit der Anfangsbedingung als Koeffizient. Die Lösungsfunktion des Temperaturfeldes mit den vorgegebenen Randbedingungen sowie der Anfangsbedingung ist in Abb. 3.1 dargestellt.

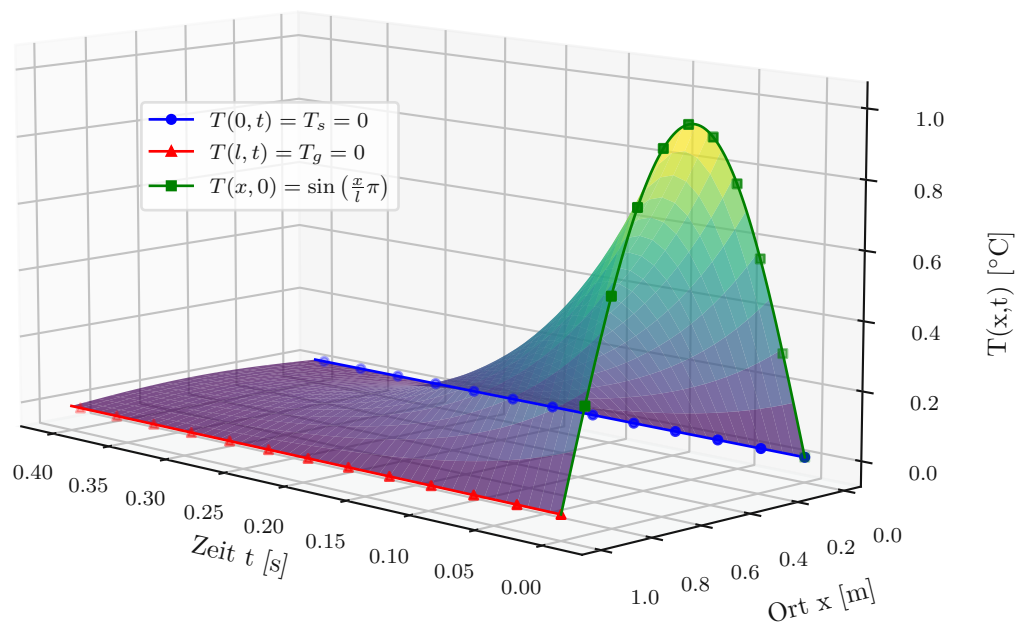


Abb. 3.1: Temperaturprofil des homogenen Anfangswertproblems mit der halb sinusförmigen Anfangsbedingung und den Randbedingungen $T(0, t) = 0$, $T(l, t) = 0$ für den fiktiven Aufbau mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 1 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 0.4$

3.2.2 Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Lösung des inhomogenen Problems der Wärmeleitgleichung mit konstanten Randbedingungen ist für die gesuchte Problemdefinition nur indirekt relevant. Sie wird hier aber trotzdem hergeleitet,

da sich das zu lösende Problem mit zeitabhängigen Randbedingungen, wie später gezeigt, in diese Art von Problemstellung überführen lässt. Daher wird in diesem Abschnitt auf ein numerisches Beispiel verzichtet und lediglich die Herleitung angeführt. Im Unterschied zum homogenen Fall enthält die Differentialgleichung nun einen vom Ort und der Zeit abhängigen Störterm $h(x, t)$ [30, 28]. Die Problemstellung sieht nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned} T_t(x, t) &= aT_{xx}(x, t) + h(x, t) \\ T(0, t) &= 0 \\ T(l, t) &= 0 \\ T(x, 0) &= r(x) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Anstatt des Lösungsansatzes aus Glg. (3.29) suchen wir nun nach einer von der Zeit abhängigen Reihe $c_n(t)$, welche folgende Bedingung einhalten muss:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x) \quad (3.35)$$

Der hier eingeführte Lösungsansatz führt nach Einsetzen in die Differentialgleichung auf:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a c_n(t) \frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2} + h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a c_n(t) \lambda_n \varphi_n(x) + h(x, t) \quad (3.36)$$

Zur Vereinfachung werden folgende Variablen eingeführt:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{\partial x^2} = - \underbrace{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}_{\lambda_n} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{\varphi_n(x)} = \lambda_n \varphi_n(x) \quad (3.37)$$

Aus der definierten Randbedingung und durch Vergleich der Reihenentwicklung ergibt sich, dass die Koeffizienten $c_n(0)$ den Fourierkoeffizienten der Anfangsbedingung entsprechen müssen. Diese Beziehung dient nach Integration zur Bestimmung von c_n :

$$\text{(vgl. 3.47)} \quad T(x, 0) = r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \varphi_n(x) \quad (3.38)$$

$$c_n(0) = r_n \quad (3.39)$$

Zunächst muss aber in einem nächsten Schritt die Störfunktion $h(x, t)$ als Fourierreihe entwickelt werden:

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \varphi_n(x) \quad (3.40)$$

Es ergeben sich die Koeffizienten der Störfunktion, wie schon in Glg. (3.30) definiert, mit:

$$h_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l h(x, t) \varphi_n(x) dx \quad (3.41)$$

Das Einsetzen der entwickelten Reihenformeln in Glg. (3.36) liefert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n c_n(t) \varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \varphi_n(x) \quad (3.42)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial c_n(t)}{\partial t} - a\lambda_n c_n(t) - h_n(t) \right) \varphi_n(x) = 0 \quad (3.43)$$

Da Glg. (3.43) für jedes beliebige $\varphi_n(x)$ gültig sein muss, erhalten wir folgende inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{\partial c_n(t)}{\partial t} - a\lambda_n c_n(t) = h_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.44)$$

So wie auch in Abschnitt 3.2.1 ergibt sich die Lösung durch Multiplizieren des gut bekannten Lösungsansatzes auf beiden Seiten:

$$\underbrace{e^{-a\lambda_n t} \frac{dc_n(t)}{dt} - e^{-a\lambda_n t} a\lambda_n c_n(t)}_{\frac{d}{dt}(e^{-a\lambda_n t} c_n(t))} = e^{-a\lambda_n t} h_n(t) \quad (3.45)$$

Nach der Integration erhält man den nachstehenden Ausdruck. Zwecks der besseren Übersicht wird für die Integration t mit τ substituiert:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{-a\lambda_n \tau} c_n(\tau) \right) d\tau = \int_0^t e^{-a\lambda_n \tau} h_n(\tau) d\tau \quad (3.46)$$

$$e^{-a\lambda_n t} c_n(t) - \underbrace{c_n(0)}_{r_n} = \int_0^t e^{-a\lambda_n \tau} h_n(\tau) d\tau \quad (3.47)$$

Schlussendlich ergeben sich durch Umformung die gesuchten Koeffizienten:

$$c_n(t) = e^{a\lambda_n t} r_n + e^{a\lambda_n t} \int_0^t e^{-a\lambda_n \tau} h_n(\tau) d\tau \quad (3.48)$$

Das Einsetzen in Glg. (3.35) liefert nun das gesuchte Temperaturfeld der inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit Störfunktion:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{a\lambda_n t} r_n \varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{a\lambda_n t} \int_0^t e^{-a\lambda_n \tau} h_n(\tau) d\tau \right) \varphi_n(x) \quad (3.49)$$

3.2.3 Homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und zeitabhängigen Dirichlet Randbedingungen

Die in diesem Abschnitt beschriebene Lösung des Randwertproblems soll dazu dienen, das Konvergenzverhalten sowie den Fehler der numerischen Lösungsverfahren abschätzen zu können. Zusätzlich soll die nachstehende Herleitung den Grundstein für einen analytischen Lösungsansatz zur Berechnung von Temperaturfeldern in Mehrschichtsystemen legen. Ausgangslage ist, wie

auch bei den zwei oben beschriebenen Lösungsansätzen, die Wärmeleitgleichung (3.3), diesmal aber mit folgenden zeitabhängigen Randbedingungen [28]:

$$\begin{aligned} T_t(x, t) &= aT_{xx}(x, t) \\ T(0, t) &= T_s(t) \\ T(l, t) &= T_g(t) \\ T(x, 0) &= r(x) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Hier stellen $T_s(t)$ und $T_g(t)$ die zeitabhängigen Dirichlet Randbedingungen an der Straßenoberfläche und im Untergrund dar. Die Funktion $r(x)$ beschreibt, wie gehabt, die Anfangsbedingung im Untergrund.

Die Randbereiche aller Randbedingungen müssen thermisch kompatibel sein, daher ergeben sich zusätzlich folgende Kompatibilitätsbedingungen zwischen der Anfangsbedingung und den zwei Randbedingungen:

$$r(0) = T_s(0) \quad (3.51)$$

$$r(l) = T_g(0) \quad (3.52)$$

Ziel ist, das Problem mit zeitabhängigen Randbedingungen in ein stationäres Problem mit homogenen Randbedingungen zu überführen. Dies ermöglicht die in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Lösungsansätze unverändert anzuwenden. Dazu werden folgende zwei Funktionen eingeführt:

$$h(x, t) = T_s(t) + \frac{x}{l} (T_g(t) - T_s(t)) \quad (3.53)$$

$$v(x, t) = T(x, t) - h(x, t) \quad (3.54)$$

Durch einmaliges Ableiten nach t und zweimaliges Ableiten nach x der zwei neu eingefügten Funktionen $h(x, t)$ sowie $v(x, t)$ (3.54) ergibt sich:

$$v_t(x, t) - av_{xx}(x, t) = T_t(x, t) - h_t(x, t) - a(T_{xx}(x, t) - h_{xx}(x, t)) \quad (3.55)$$

$$h_t(x, t) = T_{s,t} + \frac{x}{l} (T_{g,t} - T_{s,t}) \quad \text{und} \quad h_{xx}(x, t) = 0 \quad (3.56)$$

Das Einsetzen der abgeleiteten Beziehungen aus (3.56) in Glg. (3.55) liefert:

$$v_t(x, t) - av_{xx}(x, t) = \underbrace{T_t(x, t) - aT_{xx}(x, t)}_0 + h_t(x, t) - ah_{xx}(x, t) = h_t(x, t) \quad (3.57)$$

$$v_t(x, t) = av_{xx}(x, t) + h_t(x, t) \quad (3.58)$$

Die neuen Randbedingungen ergeben sich durch Einsetzen weiter zu:

$$\begin{aligned} v(0, t) &= T(0, t) - h(0, t) = T_s(t) - T_s(t) = 0 \\ v(l, t) &= T(l, t) - h(l, t) = T_g(t) - T_g(t) = 0 \\ v(x, 0) &= T(x, 0) - \left(T_s(0) + \frac{x}{l} (T_g(0) - T_s(0)) \right) \equiv v_0(x) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Zusammenfassend zeigt sich nun folgende neue Problemdefinition:

$$\begin{aligned}v_t(x, t) &= av_{xx}(x, t) + h_t(x, t) \\v(0, t) &= 0 \\v(l, t) &= 0 \\v(x, 0) &= v_0(x)\end{aligned}\tag{3.60}$$

Das Einführen der zwei Funktionen $h(x, t)$ sowie $v(x, t)$ führt also auf die inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und homogenen Randbedingungen. Dieses umformulierte Problem lässt sich somit analog zu Abschnitt 3.2.2 lösen. Durch Reihenentwicklung der neu eingeführten, von der Randbedingung abhängigen Funktion $h(x, t)$ sowie der erhaltenen neuen Anfangsbedingung $v_0(x)$ ergibt sich:

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n(x) \quad \text{mit} \quad h_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l h(x, t) \varphi_n(x) dx\tag{3.61}$$

sowie:

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{0n} \varphi_n(x) \quad \text{mit} \quad v_{0n} = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(x) \varphi_n(x) dx\tag{3.62}$$

Die Lösung lässt sich analog zu Glg. (3.49) anschreiben:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{a\lambda_n t} v_{0n} \varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{a\lambda_n t} \int_0^t e^{-a\lambda_n \tau} \frac{dh_n(\tau)}{d\tau} d\tau \right) \varphi_n(x)\tag{3.63}$$

Als Störterm ist allerdings die zeitliche Ableitung der Funktion $h(x, t)$ eingesetzt (vgl. dazu die Problemdefinition aus (3.60)). Schlussendlich erhält man das gesuchte Temperaturfeld durch Superposition, wie in Glg. (3.54) definiert, mit:

$$T(x, t) = v(x, t) + h(x, t)\tag{3.64}$$

Numerisches Beispiel

In diesem numerischen Beispiel ist an der Oberfläche eine zeitabhängige Sinushalbwellenlänge und im Untergrund eine konstante Temperatur als Randbedingung angesetzt:

$$\begin{aligned}T_t(x, t) &= aT_{xx}(x, t) \\T(0, t) &= A_1 \sin(f_1 t) + B_1 \\T(l, t) &= B_2 \\T(x, 0) &= T(0, 0) + \frac{x}{l}(T(l, 0) - T(0, 0))\end{aligned}\tag{3.65}$$

$$\text{vgl. (3.53)} \quad h(x, t) = A_1 \sin(f_1 t) + B_1 + \frac{x}{l}(-A_1 \sin(f_1 t) - B_1 + B_2)\tag{3.66}$$

$$\text{vgl. (3.61)} \quad h_n(\tau, x) = \varphi_n(x) (A_1 \sin(f_1 t) + B_1 + B_2)\tag{3.67}$$

$$\frac{d}{d\tau} h_n(\tau) = -A_1 f_1 \varphi_n(x) \cos(f_1 \tau)\tag{3.68}$$

$$\text{vgl. (3.62)} \quad v_{0n} = 0\tag{3.69}$$

$$\text{vgl. (3.63)} \quad v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_1 f_1 \varphi_n^2 \left(-a \lambda_n e^{a \lambda_n t} + a \lambda_n \cos(f_1 t) - f_1 \sin(f_1 t) \right)}{a^2 \lambda_n^2 + f_1^2} \quad (3.70)$$

Explizit ergibt das für die Parameter $A_1 = 10$, $B_1 = 10$, $f_1 = 1$, $B_2 = 10$, $l = 1$ und $a = 1$:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \left(-\pi^2 n^2 e^{\pi^2 n^2 t} \cos(t) + \pi^2 n^2 - e^{\pi^2 n^2 t} \sin(t) \right) e^{-\pi^2 n^2 t} \sin^2(\pi n x)}{\pi^4 n^4 + 1} \quad (3.71)$$

wodurch das gesuchte Temperaturfeld berechnet werden kann:

$$T(x, t) = h(x, t) + v(x, t) \quad (3.72)$$

Abb. 3.2 zeigt das in diesem numerischen Beispiel berechnete Temperaturfeld der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit zeitabhängigen Randbedingungen. Wie zu erwarten, werden alle Randbedingungen sowie die Anfangsbedingung eingehalten.

Um das soeben beschriebene Problem mit tatsächlich gemessenen Temperaturen analytisch lösen zu können, wäre es erforderlich die zugrunde liegende Differentialgleichung mittels Fourier Transformation umzuformen. Die Randbedingungen könnten dann über die Fast Fourier Transformation auf das zu lösende System angesetzt werden.

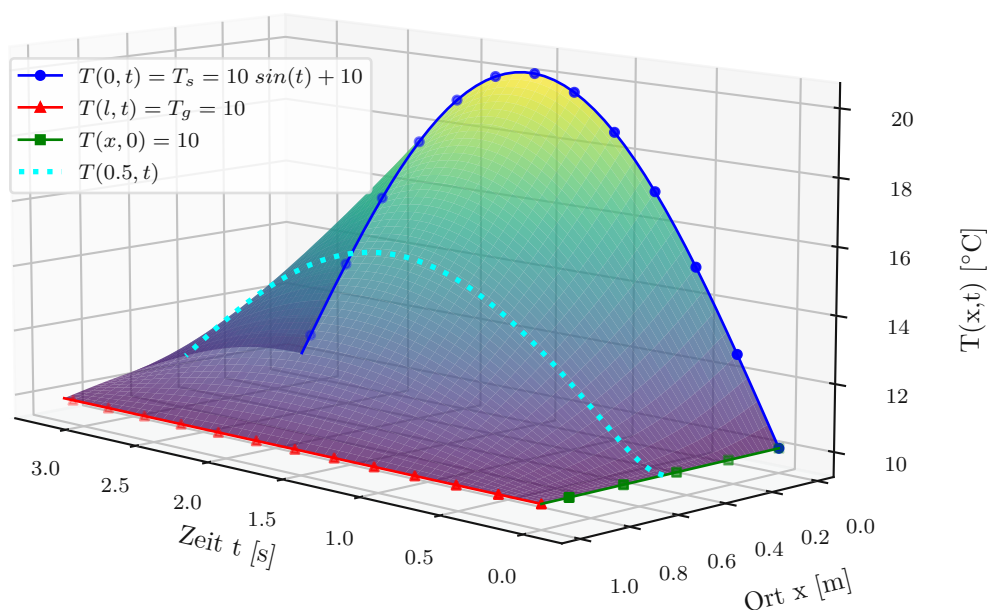


Abb. 3.2: Temperaturprofil der analytischen Lösung des Randwertproblems mit zeitabhängigen Randbedingungen sowie $A_1 = 10$, $B_1 = 10$, $f_1 = 1$, $B_2 = 10$, $l = 1$ und $a = 1$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq \pi$.

3.3 Finite Differenzen Methode - Dirichlet Randbedingung

In diesem Kapitel werden verschiedene Varianten beschrieben, wie die Finite Differenzen Methode mit einer Dirichlet Randbedingung anzuwenden ist. Diese Verfahren ermöglichen es, bei bekannten Temperaturen an zwei Punkten, bspw. durch Messung, die Temperaturverteilung im Untergrund abzuschätzen.

Die hier zusammengefassten Verfahren sind mit der in Abschnitt 3.2.3 hergeleiteten analytischen Lösung verglichen, um das Konvergenzverhalten der verschiedenen Ansätze besser abschätzen zu können.

3.3.1 Euler Vorwärts Verfahren - (explizit)

Ausgehend von der diskretisierten Grundgleichung der Wärmeleitung (3.6) ergibt sich für eine explizite Formulierung auf der linken Seite der Vorwärts-Differenzenquotient 1. Ordnung und auf der rechten Seite der zentrale Differenzenquotient 2. Ordnung zum Zeitpunkt n . Es lässt sich schreiben [10, 27, 28, 31]:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = a_j \cdot \frac{T_{j+1}^n - 2 \cdot T_j^n + T_{j-1}^n}{\Delta x_j^2} \quad (3.73)$$

Der hochgestellte Index n entspricht dem Zeitpunkt und der tiefgestellte Index j der Schichtgrenze. Durch Umformen ergibt sich die Temperatur zum Zeitpunkt $n + 1$ als Funktion in Abhängigkeit von der Temperatur zum vorherigen Zeitpunkt n mit:

$$T_j^{n+1} = a_j \frac{\Delta t}{\Delta x_j^2} \cdot (T_{j+1}^n - 2 \cdot T_j^n + T_{j-1}^n) + T_j^n \quad (3.74)$$

Die Temperatur zum nächsten Zeitpunkt kann damit direkt (explizit) berechnet werden. Dieses Verfahren ist bei ungünstiger Wahl an Δt und Δx nicht immer numerisch stabil. Um die Stabilitätsgrenze abschätzen zu können, kann folgende Gleichung angewendet werden. Bei Zeitreihen mit großen Zeitintervallen müssen die einzelnen Schichtsegmente Δx entsprechend groß gewählt werden, um eine stabile Lösung zu erhalten. Dies führt bei großen Zeitreihen und dünnen Schichten (bspw. einer Betondecke in der Straßenkonstruktion) zu numerischen Schwierigkeiten:

$$a_j \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_j^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.75)$$

Glg. (3.74) lässt sich für den gesamten Schichtaufbau mit Hilfe einer $k \times k$ Abbildungsmatrix \mathbf{A}_Δ anschreiben:

$$c_j = a_j \frac{\Delta t}{\Delta x_j^2} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{A}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & -2c_2 + 1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{k-1} & -2c_{k-1} + 1 & c_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Dabei beschreibt k die Anzahl der Schichtengrenzen und j die jeweilige Schicht. Die hier eingeführte Matrix ist also eine konstante Größe, welche von den Materialparametern der Schichten

und den gewählten Intervallen abhängig ist. Das gesamte Temperaturprofil für den nächsten Zeitpunkt $n + 1$ kann mittels Matrix Vektor Multiplikation von \mathbf{A}_Δ und dem Temperaturprofil zum vorherigen Zeitpunkt n berechnet werden. Zu beachten ist, dass die zeitabhängige Dirichlet Randbedingung an der Oberfläche und im Untergrund eingepreßt werden muss:

$$\vec{T}_{n+1} = \mathbf{A}_\Delta \cdot \vec{T}_n \quad (3.78)$$

Der Fehler ϵ des numerischen Verfahrens wächst linear mit dem gewählten Zeitschritt Δt und quadratisch mit der gewählten Schichtdicke Δx . Dieses Verhalten zeigt sich deutlich in Abbildung 3.3, wo verschiedene Kombinationen von Δt und Δx , eingesetzt in die FDM, der analytischen Lösung gegenübergestellt sind. Entscheidend für eine gute Approximation ist also die Wahl möglichst kleiner Intervalle von Δt und Δx , welche durch das Verhältnis von Δt und Δx^2 , also der Stabilitätsgrenze (3.75), begrenzt sind. Diese Grenze ist immer materialabhängig (vgl. Glg. (3.75)). Daher sind in einem ersten Schritt die numerisch ermittelten Abweichungen der Temperaturgänge in Schichtmitte $x = 0.5$ aus Abschnitt 3.2 für verschiedene Kombinationen von Δt und Δx in Abb. 3.3 dargestellt. Es zeigt sich, dass eine Änderung des Zeitschritts Δt wenig zur gewünschten Minimierung des Fehlers beiträgt. Hingegen die Änderung der Schichtdicke Δx zu schneller Konvergenz führt. Allerdings ist die Stabilitätsgrenze für eine effektive Berechnung in diesem fiktiven Beispiel schnell erreicht.

Um das Verhalten des Verfahrens für den relevanten und materialabhängigen Anwendungsfall zu studieren, ist in dem numerischen Teil des Abschnitts ein weiterer Vergleich angeführt. Dieser soll helfen die geforderten Messauflösungen abschätzen zu können.

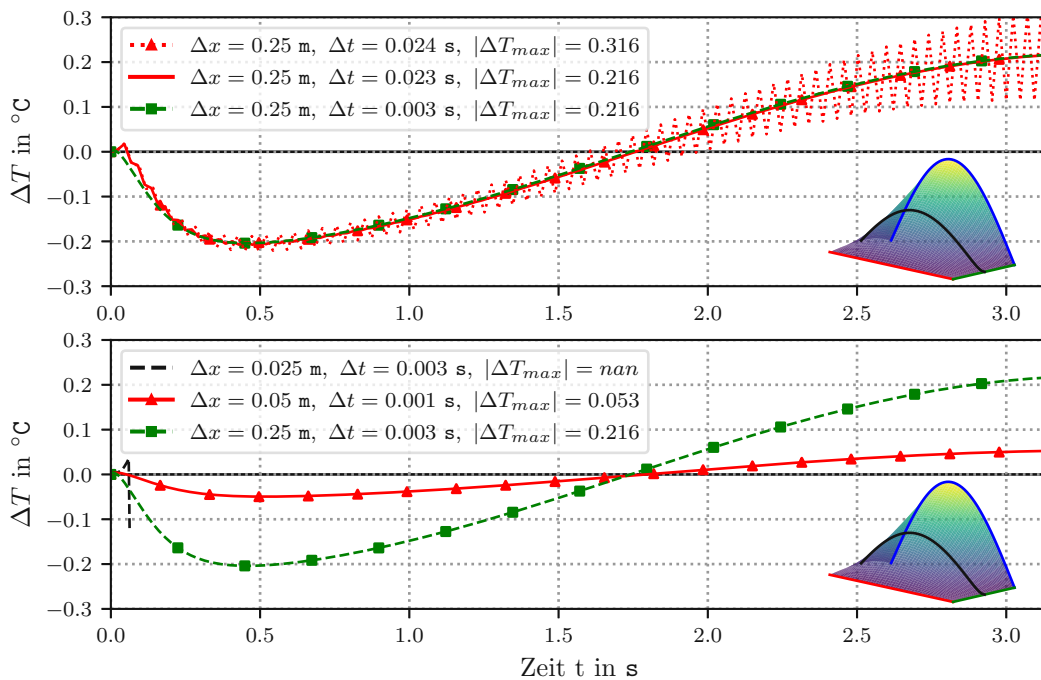


Abb. 3.3: Abweichung des mittels Euler Vorwärts Verfahren numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.5, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für den fiktiven Aufbau mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ und $C = 1 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ über das Zeitintervall $0 \leq t \leq \pi \text{ s}$.

Numerisches Beispiel

In diesem numerischen Beispiel wird das Temperaturfeld einer 0.2 m dicken Betondecke mittels Euler Vorwärts Verfahren bestimmt und mit der analytischen Lösung aus Abschnitt 3.2.3 verglichen. Es gelten folgende Randbedingungen:

$$T(x, 0) = 10 \quad (3.79)$$

$$T(0, t) = \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{\pi}{60 \cdot 60} \quad (3.80)$$

$$T(l, t) = 10 \quad (3.81)$$

Die materialabhängigen Koeffizienten der dünn besetzten Matrix ergeben sich für Beton wie folgt:

$$\text{vgl. (3.5)} \quad a_j = \frac{\lambda}{\rho C} = 8.88889e^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (3.82)$$

$$\text{vgl. (3.76)} \quad c_j = a_j \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.055556 \quad (3.83)$$

mit den Parametern Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, Dichte $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, Wärmekapazität $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, Schichtdicke $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und Zeitinkrement $\Delta t = 1.0 \text{ s}$. Durch Einsetzen der Temperaturleitzahl a_j sowie des dimensionslosen Koeffizienten in Glg.(3.77) ergibt sich nun die $k \times k = 50 \times 50$ dimensionale materialabhängige Abbildungsmatrix \mathbf{A}_Δ zu:

$$\text{vgl. (3.77)} \quad \mathbf{A}_\Delta = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0.0578 & 0.8844 & 0.0578 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0.0578 & 0.8844 & 0.0578 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0.0578 & 0.8844 & 0.0578 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}}_{k \times k = 50 \times 50} \quad (3.84)$$

Damit kann nun des Temperaturfeld für den ersten Zeitschritt bestimmt werden.

$$\text{vgl. (3.78)} \quad \underbrace{\vec{T}_1}_{T(x,0)} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ \ddots \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix} \rightarrow T(x, 1) = \vec{T}_2 = \mathbf{A}_\Delta \cdot \vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 10.0087 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ \ddots \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Alle weiteren Temperaturprofile ergeben sich aufgrund des Assoziativgesetzes mit:

$$\vec{T}_{n+i} = (\mathbf{A}_\Delta)^i \cdot \vec{T}_n \quad (3.86)$$

Das Temperaturprofil nach 3600 s lässt sich wie folgt berechnen:

$$\vec{T}_{3599} = \mathbf{A}_{\Delta} \cdot \vec{T}_{3598} = \begin{bmatrix} 10.0087 \\ 10.8533 \\ 11.5598 \\ \ddots \\ 10.0228 \\ 10.0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{T}_{3600} = \mathbf{A}_{\Delta} \cdot \vec{T}_{3599} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.8454 \\ 11.5525 \\ \ddots \\ 10.0228 \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Durch die zeitabhängige Randbedingung an der Betonoberfläche müssen an der ersten und letzten Stelle der Temperaturvektoren \vec{T}_{n+i} die definierten Randbedingungen eingepreßt werden. Das numerische Temperaturfeld der gegebenen Problemstellung nach 3600 s ist in Abb. 3.4 und das analytische Temperaturfeld der gleichen Problemstellung in Abb. 3.5 dargestellt. Wie zu erwarten zeigen sich qualitativ gleiche Ergebnisse zwischen der numerischen und der analytischen Lösung. Bei genauerer Betrachtung ergeben sich allerdings, je nach Wahl der Intervalle Δt und Δx , verschieden große Abweichungen zwischen numerischer und analytischer Lösung.

Wie oben beschrieben sind die Konvergenzverhalten der verschiedenen Verfahren immer ma-

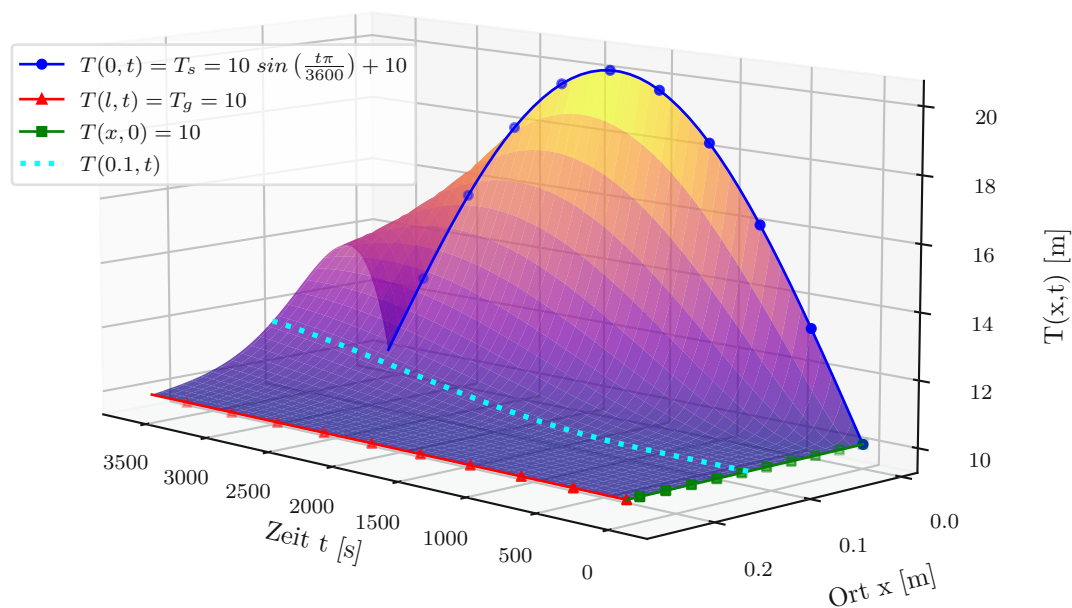


Abb. 3.4: Temperaturfeld der numerischen expliziten Lösung des Randwertproblems mit einer Dirichlet Randbedingung und den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 3600 \text{ s}$.

terialabhängig, daher ist der Temperaturgang für eine Betondecke mit einer Dicke $l = 0.2 \text{ m}$ in Schichtmitte $x = 0.1 \text{ m}$ für verschiedene Kombinationen an Δt und Δx in Abbildung 3.6 dargestellt. Zusätzlich ist die Frequenz ω sowie die Anzahl der Perioden erhöht, um das Verhalten im Bereich einer Messauflösung von 1 h zu untersuchen. Folgende Zusammenhänge können aus dem Diagramm abgeleitet werden:

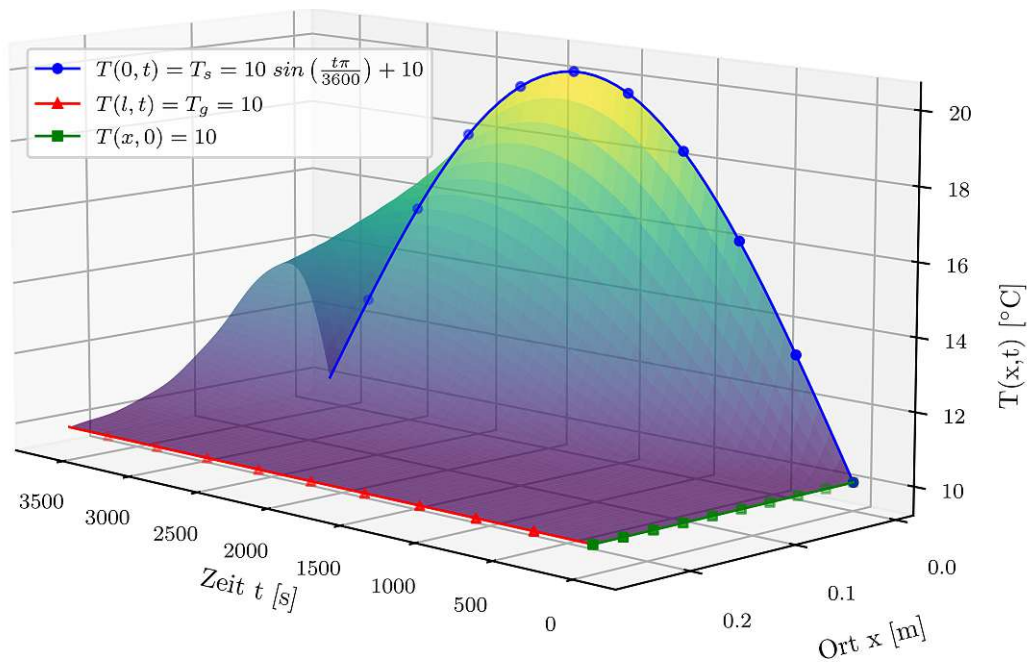


Abb. 3.5: Temperaturfeld der analytischen Lösung des Randwertproblems mit einer Dirichlet Randbedingung und den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 3600 \text{ s}$.

- Es zeigt sich, dass es bei dem Euler Vorwärts Verfahren mit einer $l = 0.2 \text{ m}$ dicken Betondecke, auch bei sehr kleinen Intervallen von Ort und Zeit, zu schlechtem Konvergenzverhalten der Lösung kommt.
- Je dünner die Schicht ist, desto kleiner ist die geforderte Messauflösung.
- Die Stabilitätsgrenze des Verfahrens ist für eine Messauflösung $\Delta t = 3600 \text{ s}$ und eine Dicke $l = 0.2 \text{ m}$ sowie die gewählten Materialparametern für Beton $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ also nicht einhaltbar.

3.3.2 Euler Rückwärts Verfahren - (implizit)

Analog zur expliziten Formulierung ist die Ausgangslage die diskretisierte Grundgleichung der Wärmeleitung (3.6). Allerdings wird auf der linken Seite anstatt des Vorwärts-Differenzenquotient der Rückwärts Differenzenquotient 1. Ordnung angewendet [27, 28]. Auf der rechten Seite bleibt der zentrale Differenzenquotient 2. Ordnung zum Zeitpunkt $n + 1$ unverändert erhalten:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = a_j \cdot \frac{T_{j+1}^{n+1} - 2 \cdot T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j^2} \quad (3.88)$$

Nach Umformung auf die Temperatur zum Zeitpunkt n ergibt sich:

$$T_j^n = a_j \frac{\Delta t}{\Delta x_j^2} \cdot (-T_{j+1}^{n+1} + 2 \cdot T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) + T_j^{n+1} \quad (3.89)$$

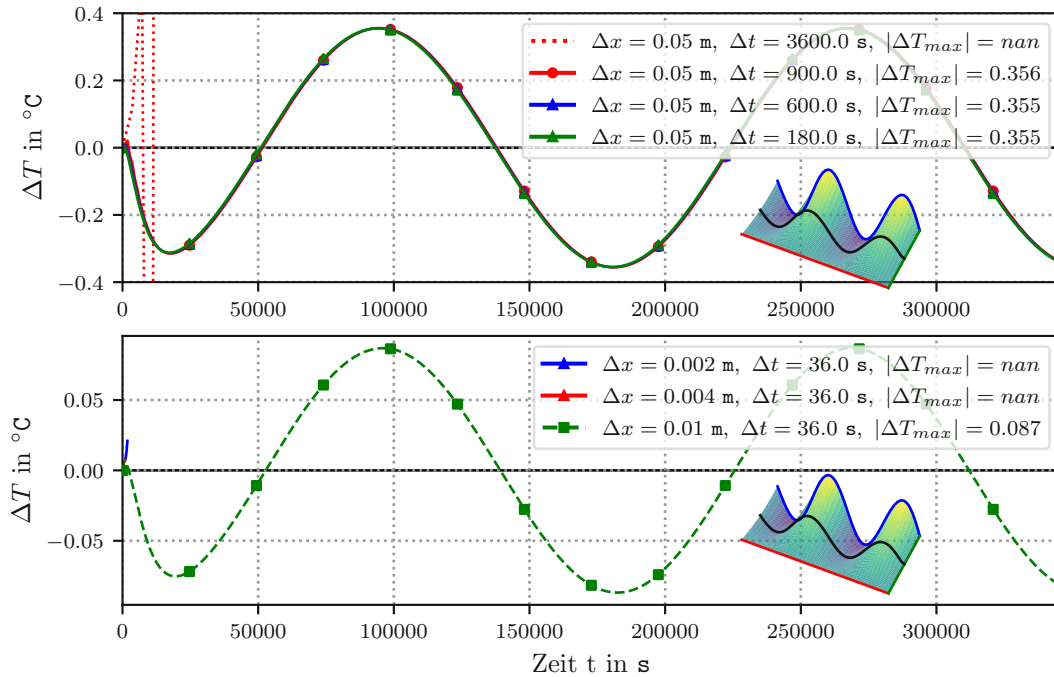


Abb. 3.6: Die Abweichung des mittels Euler Vorwärts Verfahren numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.5, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für eine Betonschicht mit den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 4 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ s}$ und mit den Randbedingungen $T(x, 0) = 10$, $T(0, t) = \sin(\omega t)$, $T(l, t) = 10$ mit $\omega = \frac{4\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24}$.

Daraus kann wiederum die Abbildungsmatrix analog zu 3.3.1 angeschrieben werden:

$$\mathbf{A}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & 2c_1 + 1 & -c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_k & 2c_k + 1 & -c_k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Der schicht- und materialabhängige Koeffizient c_j ergibt sich analog zu der expliziten Formulierung aus Glg. (3.76). Nun wird das Temperaturprofil zum Zeitpunkt $n+1$ auf den Zeitpunkt n abgebildet (Backward in Time).

$$\mathbf{A}_\Delta \cdot \vec{T}_{n+1} = \vec{T}_n \quad (3.91)$$

Um das Temperaturprofil zum Zeitpunkt $n + 1$ zu erhalten, muss daher die Inverse der Abbildungsmatrix \mathbf{A}_Δ gebildet werden. Dieser zusätzliche Rechenschritt ist zwar rechenintensiver als

die explizite Formulierung, allerdings hat das implizite Verfahren die Eigenschaft in jedem Fall numerisch stabil zu sein:

$$\vec{T}_{n+1} = \mathbf{A}_{\Delta}^{-1} \cdot \vec{T}_n \quad (3.92)$$

Der in diesem Verfahren begangene Fehler ϵ verhält sich in gleicher Weise wie im expliziten Euler Vorwärtsverfahren aus dem Abschnitt 3.3.2. Er wächst linear mit dem Zeitschritt Δt und quadratisch mit der Schichtdicke Δx . Das Konvergenzverhalten des fiktiven Beispiels ist in Abbildung 3.7 ersichtlich. Es zeigen sich folgende Zusammenhänge:

- Das Konvergenzverhalten des Euler Rückwärts Verfahrens unterscheidet sich grundsätzlich nicht vom Euler Vorwärts Verfahren.
- Die Sicherstellung der Stabilität ermöglicht es, das Intervall Δx auch bei hoher Messauflösung klein zu wählen.
- Die Approximation lässt sich dadurch näher an die analytische Lösung heranführen.
- Die implizite Formulierung ist für den gegenständlichen Anwendungsfall also immer der expliziten vorzuziehen.

Um auch hier wieder das Verhalten für den Anwendungsfall zu erkunden, ist im numerischen Teil des Abschnitts ein weiterer Vergleich für Beton angeführt.

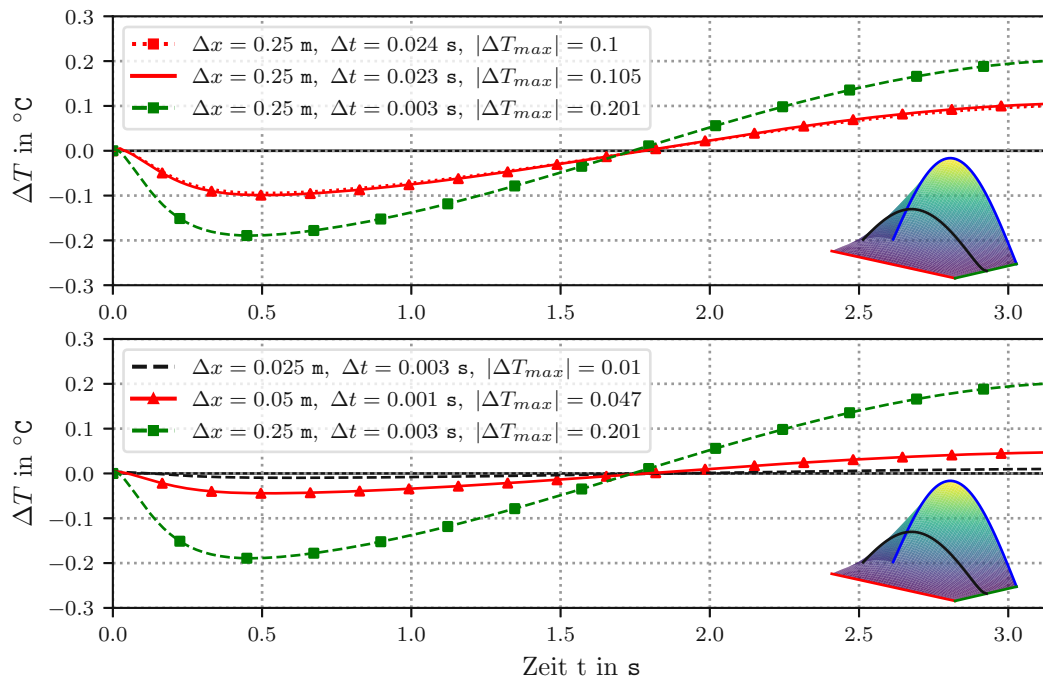


Abb. 3.7: Abweichung des, mittels Euler Rückwärts Verfahren, numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.5, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für den fiktiven Aufbau mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ und $C = 1 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ über das Zeitintervall $0 \leq t \leq \pi \text{ s}$.

Numerisches Beispiel

In diesem numerischen Beispiel wird das gleiche Temperaturfeld wie in Abb. 3.6 für eine 0.2 m dicke Betonschicht bestimmt. Dafür gelten folgende Randbedingungen:

$$T(x, 0) = 10 \quad (3.93)$$

$$T(0, t) = \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{\pi}{60 \cdot 60} \quad (3.94)$$

$$T(l, t) = 10 \quad (3.95)$$

Die materialabhängigen Koeffizienten der dünn besetzten Matrix ergeben sich (vgl. 3.82 u. 3.83) für Beton:

$$\text{vgl. (3.5)} \quad a_j = \frac{\lambda}{\rho C} = 8.88889e^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (3.96)$$

$$\text{vgl. (3.76)} \quad c_j = a_j \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.055556 \quad (3.97)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, der Dichte $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, der Wärmekapazität $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, dem Schichtinkrement $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und dem Zeitinkrement $\Delta t = 1.0 \text{ s}$. Durch das Einsetzen der Temperaturleitzahl a_j sowie des dimensionslosen Koeffizienten in Glg.(3.90) ergibt sich nun die $k \times k = 50 \times 50$ dimensionale materialabhängige Abbildungsmatrix \mathbf{A}_Δ :

$$\text{vgl. (3.90)} \quad \mathbf{A}_\Delta = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -0.0578 & 1.1156 & -0.0578 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -0.0578 & 1.1156 & -0.0578 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -0.0578 & 1.1156 & -0.0578 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$k \times k = 50 \times 50$

und weiter die Inverse \mathbf{A}_Δ^{-1} :

$$\mathbf{A}_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0.05195 & 0.898798 & 0.046693 & 0.00242573 & \dots & 0 \\ 0.002699 & 0.046693 & 0.901224 & 0.046819 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0.002426 & 0.046693 & 0.898798 & 0.05195 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$k \times k = 50 \times 50$

Damit ergibt sich das Temperaturprofil nach dem ersten Zeitinkrement zu:

$$\vec{T}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ \dots \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}}_{T(x,0)} \rightarrow \vec{T}_2 = \mathbf{A}_{\Delta}^{-1} \cdot \vec{T}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 10.0087 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ \dots \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}}_{T(x,1)} \quad (3.100)$$

Alle weiteren Temperaturprofile können aufgrund des Assoziativgesetzes folgendermaßen berechnet werden:

$$\vec{T}_{n+i} = \left(\mathbf{A}_{\Delta}^{-1}\right)^i \cdot \vec{T}_n \quad (3.101)$$

Das Temperaturprofil nach 3600 s lässt sich also wie folgt anschreiben:

$$\vec{T}_{3599} = \mathbf{A}_{\Delta} \cdot \vec{T}_{3598} = \begin{bmatrix} 10.0087 \\ 10.861 \\ 11.5663 \\ \dots \\ 10.0228 \\ 10.0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{T}_{3600} = \mathbf{A}_{\Delta} \cdot \vec{T}_{3599} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.853 \\ 11.5591 \\ \dots \\ 10.0229 \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Auch hier müssen die zeitabhängigen Randbedingungen an den entsprechenden Komponenten (erste und letzte) der Temperaturprofilvektoren T_i eingepreßt werden. Nach 3600 s zeigt das räumlich dargestellte Temperaturfeld aus Abb. 3.8 qualitativ das gleiche Bild wie die zugehörige analytische Lösung aus Abb. 3.5. Zusätzlich sind in Abb. 3.9 die gleichen Kombinationen von Δt und Δx wie in Abb. 3.6 dargestellt. Grundsätzlich gilt wieder das gleiche Konvergenzverhalten, jedoch mit dem entscheidenden Unterschied im Stabilitätsverhalten. Dadurch ist die Annäherung der Lösung auch bei großer Messauflösung und kleinem Schichtinkrement möglich.

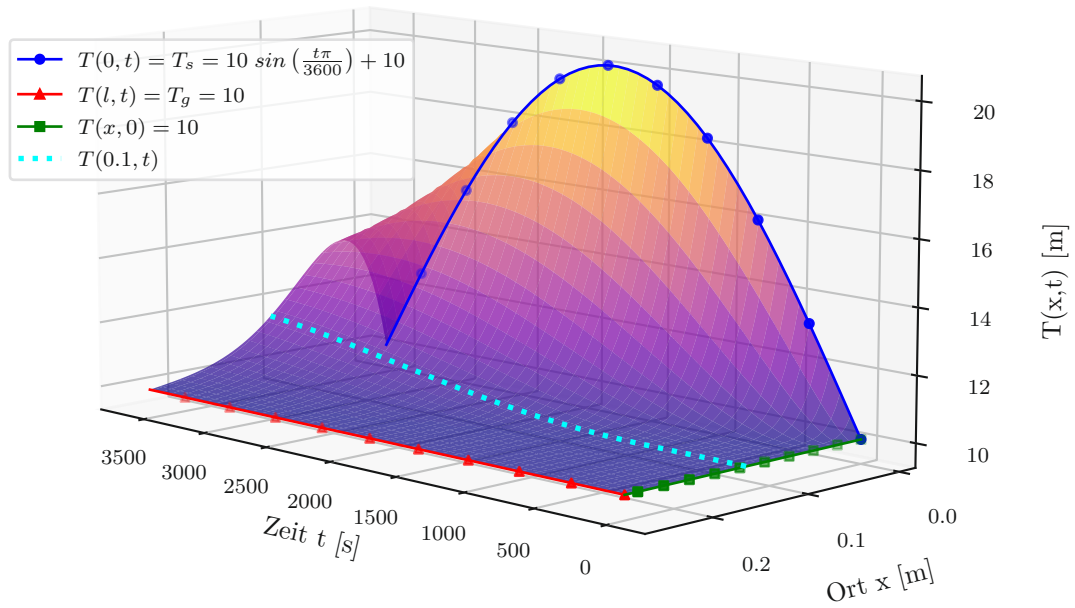


Abb. 3.8: Temperaturfeld des numerischen Euler Rückwärts Verfahrens - Lösung des Randwertproblems mit einer Dirichlet Randbedingung und den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 3600 \text{ s}$

3.3.3 Crank Nicolson Verfahren - (implizit)

Das Crank Nicolson Verfahren verknüpft das Euler Rückwärts Verfahren mit dem Euler Vorwärts Verfahren über die Trapezregel [26]:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{T_{j+1}^{n+1} - 2 \cdot T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{j+1}^n - 2 \cdot T_j^n + T_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (3.103)$$

$$T_j^{n+1} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x^2} \left(-T_{j-1}^{n+1} + 2 \cdot T_j^{n+1} - T_{j+1}^{n+1} \right) = -T_j^n + \frac{a\Delta t}{2\Delta x^2} \left(-T_{j-1}^n + 2 \cdot T_j^n - T_{j+1}^n \right) \quad (3.104)$$

Aus diesem Ausdruck ergeben sich nun die beiden Abbildungsmatrizen für den Zeitpunkt $n + 1$ und n in analoger Weise zum Euler Rückwärts- und Vorwärts Verfahren mit:

$$\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{2} & c_1 + 1 & -\frac{c_1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{c_k}{2} & c_k + 1 & -\frac{c_k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

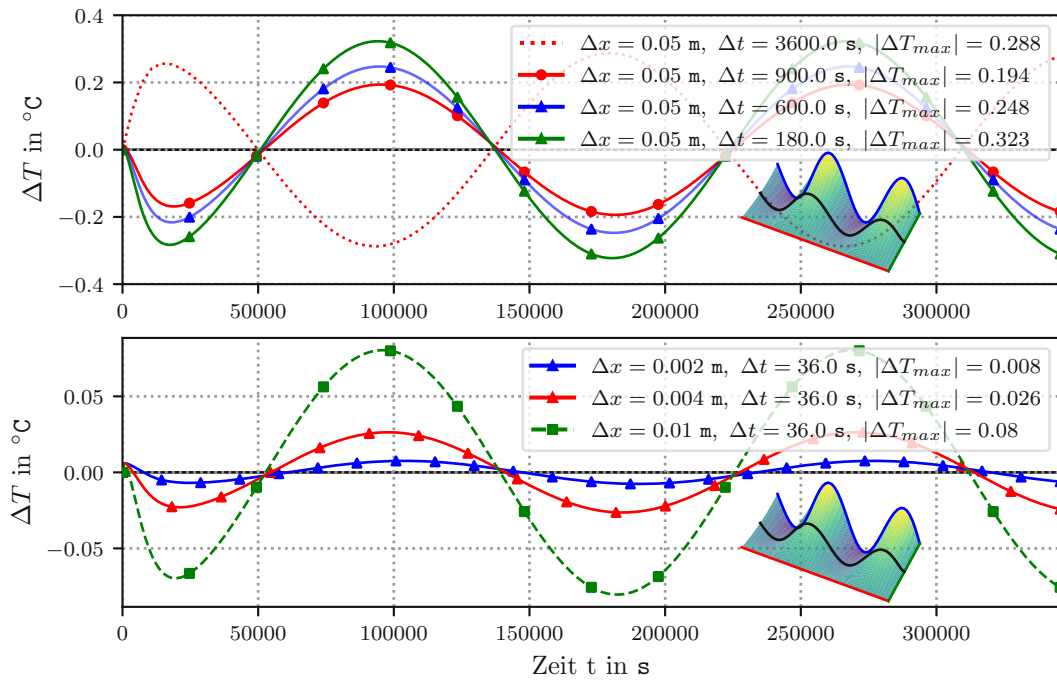


Abb. 3.9: Abweichung des, mittels Euler Rückwärts Verfahren, numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.1, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für eine Betonschicht mit den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 4 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ s}$ und mit den Randbedingungen $T(x, 0) = 10$, $T(0, t) = \sin(\omega t)$, $T(l, t) = 10$ mit $\omega = \frac{4\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24}$

$$\mathbf{A}_{\Delta}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{2} & c_1 - 1 & -\frac{c_1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{c_k}{2} & c_k - 1 & -\frac{c_k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Dabei ist der schicht- bzw. der materialabhängige Koeffizient c_j wie in Glg. (3.76) definiert:

$$\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \mathbf{A}_{\Delta}^n \cdot \vec{T}_n \quad (3.107)$$

$$\vec{T}_{n+1} = \left(\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\Delta}^n \cdot \vec{T}_n \quad (3.108)$$

Mit Glg. (3.108) kann in unveränderter Art und Weise das Temperaturprofil für den nächsten Zeitschritt $n + 1$ durch eine einfache Matrix-Vektor-Multiplikation berechnet werden. Der begangene Fehler ϵ (siehe Abschnitt 3.3.2 und Abschnitt 3.3.1) wächst bei diesem Verfahren linear mit dem Zeitschritt Δt und linear mit der Schichtdicke Δx . Auch für dieses Verfahren ist die

Abweichung des numerischen Temperaturprofils von der analytischen Lösung in Abb. 3.10 für die fiktive Schicht dargestellt.

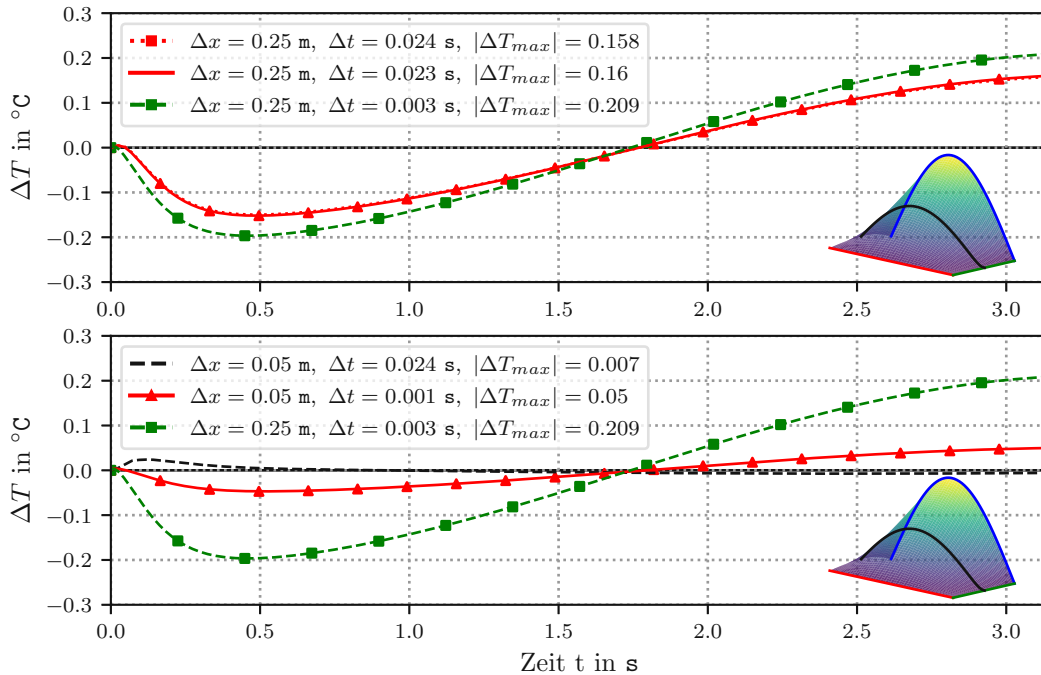


Abb. 3.10: Abweichung des, mittels Crank Nicolson Verfahren, numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.5, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für den fiktiven Aufbau mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ und $C = 1 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ über das Zeitintervall $0 \leq t \leq \pi \text{ s}$

Numerisches Beispiel

In diesem numerischen Beispiel wird das gleiche Temperaturfeld für eine 0.2 m dicke Betondecke bestimmt. Dafür gelten folgende Randbedingungen:

$$T(x, 0) = 10 \quad (3.109)$$

$$T(0, t) = \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{\pi}{60 \cdot 60} \quad (3.110)$$

$$T(l, t) = 10 \quad (3.111)$$

Die materialabhängigen Koeffizienten der dünn besetzten Matrix ergeben sich analog (vgl. 3.82 u. 3.83) für Beton zu:

$$\text{vgl. (3.5)} \quad a_j = \frac{\lambda}{\rho C} = 8.88889e^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (3.112)$$

$$\text{vgl. (3.76)} \quad c_j = a_j \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.055556 \quad (3.113)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, der Dichte $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, der Wärmekapazität $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, dem Schichtinkrement $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und dem Zeitinkrement $\Delta t = 1.0 \text{ s}$. Durch Einsetzen der Temperaturleitzahl a_j sowie des dimensionslosen Koeffizienten in Glg.(3.90)

ergeben sich nun die beiden $k \times k = 50 \times 50$ dimensionalen materialabhängigen Abbildungsmatrizen \mathbf{A}_{Δ}^n sowie $\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1}$ zu:

$$\text{vgl. (3.105)} \quad \mathbf{A}_{\Delta}^{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -0.055556 & 2.11111 & -0.055556 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -0.055556 & 2.11111 & -0.055556 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}}_{k \times k = 50 \times 50} \quad (3.114)$$

$$\text{vgl. (3.106)} \quad \mathbf{A}_{\Delta}^n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0.055556 & 1.88889 & 0.055556 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0.055556 & 1.88889 & 0.055556 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}}_{k \times k = 50 \times 50} \quad (3.115)$$

$$\left(\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\Delta}^n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0.052668 & 0.896051 & 0.049931 & 0.001315 & \dots & 0 \\ 0.001387 & 0.049931 & 0.897366 & 0.049965 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0.001315 & 0.049931 & 0.896051 & 0.052668 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}}_{k \times k = 50 \times 50} \quad (3.116)$$

$$\text{vgl. (3.108)} \quad \vec{T}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ \vdots \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}}_{T(x,0)} \rightarrow \vec{T}_2 = \left(\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\Delta}^n \cdot \vec{T}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 10.0087 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ \vdots \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}}_{T(x,1)} \quad (3.117)$$

Alle weiteren Temperaturprofile ergeben sich aufgrund des Assoziativgesetzes mit:

$$\vec{T}_{n+i} = \left[\left(\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\Delta}^n\right]^i \cdot \vec{T}_n \quad (3.118)$$

Das Temperaturprofil ergibt sich somit nach 3600 s zu:

$$\vec{T}_{3599} = \begin{bmatrix} 10.0087 \\ 10.8726 \\ 11.5885 \\ \vdots \\ 10.0202 \\ 10.0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{T}_{3600} = (\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\Delta}^n \cdot \vec{T}_{3599} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.8646 \\ 11.5813 \\ \vdots \\ 10.0203 \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

So wie auch bei den anderen beiden Verfahren müssen die zeitabhängigen Randbedingungen an der ersten und letzten Komponente der Temperaturvektoren eingepreßt werden. Qualitativ zeigt sich in Abb. 3.11 auf den ersten Blick auch hier ein ähnliches Temperaturfeld wie bei der exakten analytischen Lösung. Der große Vorteil dieses Verfahrens liegt in der, aufgrund der impliziten

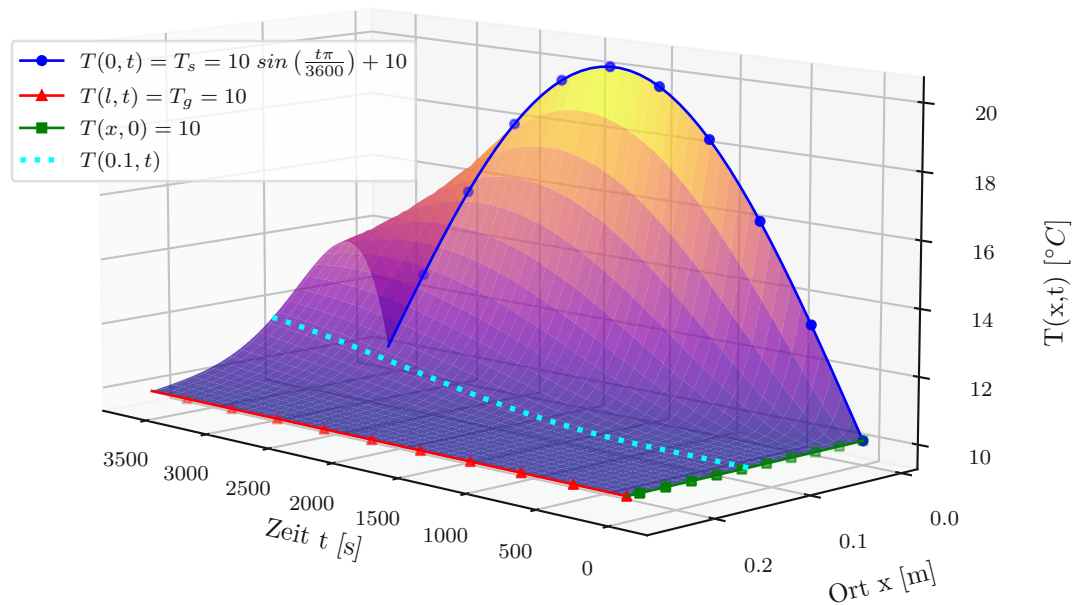


Abb. 3.11: Temperaturfeld des numerischen Euler Rückwärts Verfahrens - Lösung des Randwertproblems mit einer Dirichlet Randbedingung und den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 3600 \text{ s}$.

Formulierung, zusätzlich gewonnen Stabilität. Daher ist es möglich bei großen Zeitintervallen durch Variation der Schichtdicke eine schnelle Konvergenz zu erreichen. Dies hat zur Folge, dass die Schichtintervalle weniger klein gewählt werden müssen, als bei den beiden anderen Verfahren, um die gleiche Genauigkeit zu erreichen. Anders ausgedrückt, liefert dieses Verfahren bei Erhöhung des Zeitschritts Δt schneller eine genaue Lösung als die anderen Verfahren. Die Abweichungen zwischen analytischer und numerischer Lösung für verschiedene Kombinationen aus Δt und Δx sind in Abb. 3.12 dargestellt.

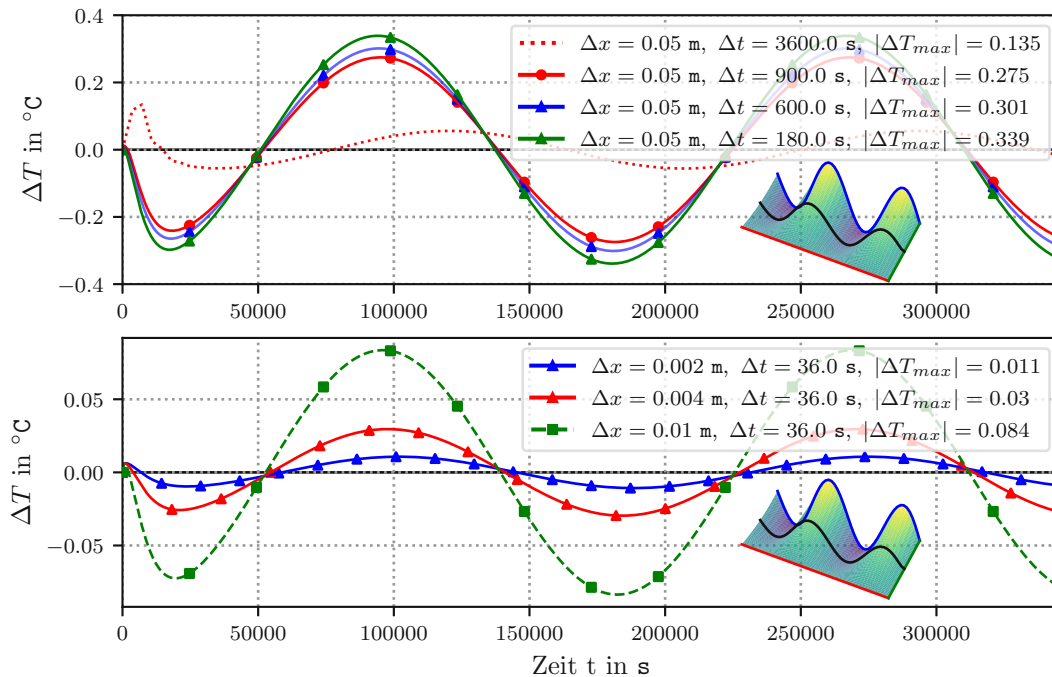


Abb. 3.12: Abweichung des, mittels Crank Nicolson Verfahren, numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.1, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für eine Betonschicht mit den Parametern $l = 0.2$ m, $\lambda = 1.6$ W m $^{-1}$ K $^{-1}$, $\rho = 2000$ kg m $^{-3}$, $C = 900$ J m $^{-3}$ K $^{-1}$, $\Delta x = 0.004$ m und $\Delta t = 1.0$ s über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 4 \cdot 3600 \cdot 24$ s und den Randbedingungen $T(x, 0) = 10$, $T(0, t) = \sin(\omega t)$, $T(l, t) = 10$ mit $\omega = \frac{4\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24}$

3.3.4 Vergleich der Performance der Verfahren

In diesem Abschnitt sind die verschiedenen Verfahren auf Performance untersucht. Bestimmt ist die Zeit die das Verfahren braucht, um das Temperaturprofil nach $t = 3600$ s für eine $l = 1$ m dicke Schicht zu bestimmen. Dabei wird das Zeitinkrement sowie die Schichtdicke variiert. In Abb. 3.13 ist deutlich zu sehen, dass durch den zusätzlichen Rechenschritt der Inversenbildung die Rechenzeiten der beiden Impliziten Verfahren wesentlich höher sind als bei dem expliziten Verfahren. Das Euler Vorwärts Verfahren und das Crank Nicolson Verfahren zeigen kaum Unterschiede. Das Verhalten der Rechengeschwindigkeit bei Variation von Δt und Δx verhält sich bei allen Verfahren gleich. Mit zunehmender Reduzierung der Inkremente wachsen die Rechenzeiten exponentiell an.

3.4 Finite Differenzen Methode - Robin Randbedingung

Großflächige und vor allem lange Messreihen an Daten existieren meist nur von der Lufttemperatur. Für die folgende Auswertung ist es zwingend notwendig, die Oberflächentemperaturen abzuschätzen. Bei bekannter Umgebungstemperatur (Lufttemperatur) und bekanntem Wärmeübergang (Windgeschwindigkeit) lässt sich das Temperaturprofil mit Hilfe einer Robin Randbedingung (gemischte Randbedingung) berechnen [10, 31]. In diesem Abschnitt ist die FDM mit Robin Randbedingung beschrieben. Dieser Ansatz ist analog zu den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.1 in Matrix-Vektor-Form für das Euler Rückwärts und das Euler Vorwärts Verfahren formuliert. Auch

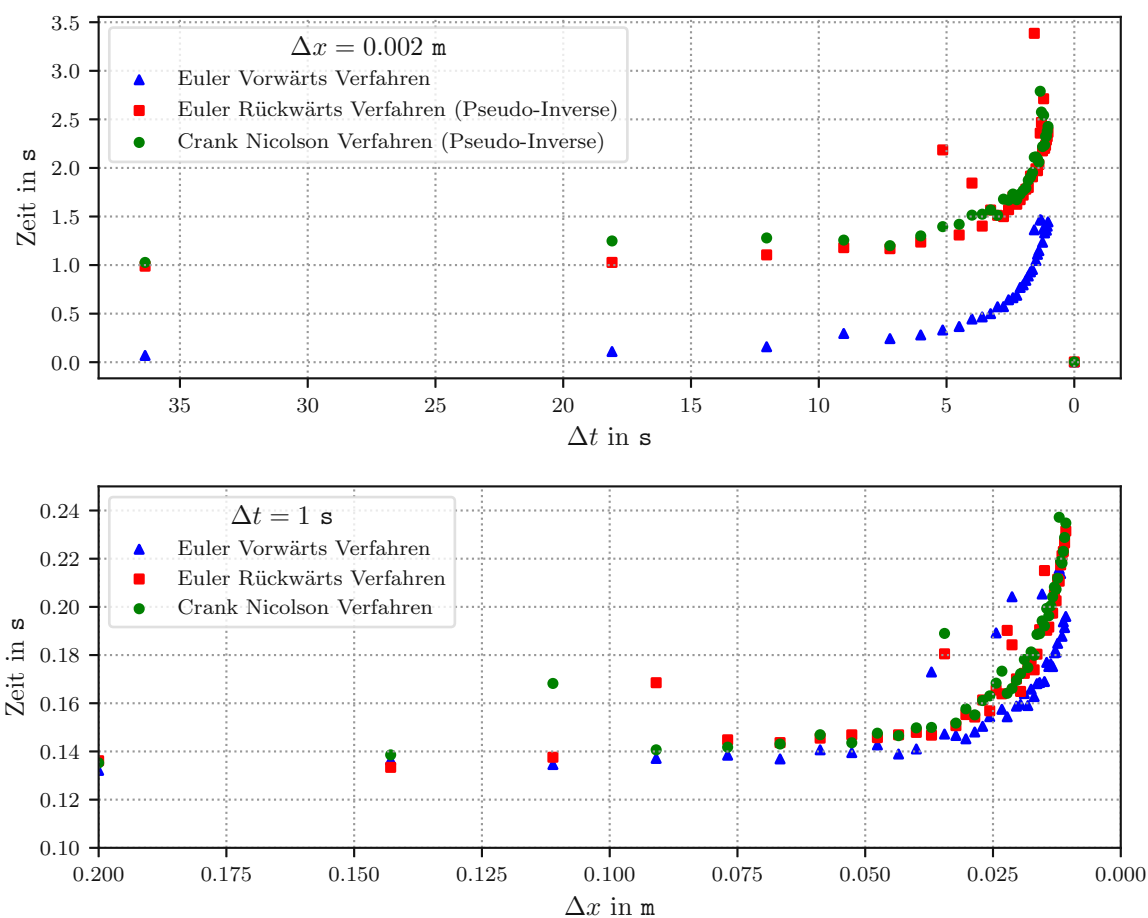


Abb. 3.13: Vergleich der Performance der verschiedenen Verfahren bei Variation des Zeitinkrements Δt und der Schichtdicke Δx

hier gelten die positiven Stabilitätseigenschaften des Euler Rückwärts Verfahrens, weshalb in weiterer Folge für die Auswertung der Oberflächentemperaturen dieses Verfahren zur Anwendung gekommen ist.

3.4.1 Euler Vorwärts Verfahren (explizit)

Ausgangslage ist die diskretisierte Grundgleichung der Wärmeleitung (3.6). Die Differenzenquotienten ergeben sich in analoger Weise zu Abschnitt 3.3.1 [10, 31]:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = a_j \cdot \frac{T_{j+1}^n - 2 \cdot T_j^n + T_{j-1}^n}{\Delta x_j^2} \quad (3.120)$$

Die Energiebilanz an der Straßenoberfläche setzt sich vereinfacht aus der Strahlungsbilanz Q , dem Bodenwärmestrom B , dem Strom fühlbarer Wärme L sowie der Kondensationswärme

V zusammen. Die Kondensationswärme V kann, aufgrund des geringen Einflusses auf die Temperatur, an der Oberfläche mit guter Näherung vernachlässigt werden [10, 31]:

$$Q + B + L + V = 0 \quad (3.121)$$

$$Q - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha (T_A - T_S) = 0 \quad (3.122)$$

Die verschiedenen Anteile der Bilanzgleichung ergeben sich wie folgt:

$$B = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad L = -\alpha (T_A - T_S) \quad V = 0 \quad (3.123)$$

Der Term L wird auch als Newton'sches Abkühlungsgesetz bezeichnet. Es besagt, dass die verlorene Wärme eines Körpers direkt proportional zur Differenz der Temperaturen zwischen Umgebung und Körper ist. Durch das Ersetzen der infinitesimalen Differentiale und Approximation mittels Differenzenquotienten 2. Ordnung erhält man die approximierte Bilanzgleichung (Robin - Randbedingung). Die Energiebilanzgleichung entspricht im eingesetzten Zustand der Robin Randbedingung in allgemeiner Form:

$$Q^n - \lambda_j \frac{T_j^n - T_S^n}{\Delta x_j} - \alpha^n (T_S^n - T_A^n) = 0 \quad (3.124)$$

Anmerkung: der hochgestellte Index n beschreibt den Zeitpunkt und der tiefgestellte Index j die Schicht. Durch Umformen erhält man einen Ausdruck für die Oberflächentemperatur T_S^n :

$$T_S^n = d_{j,0} \left(2Q^n \Delta x_j + T_j^n \lambda_j + 2T_A^n \alpha^n \Delta x_j \right) \quad (3.125)$$

mit

$$d_{j,0} = \frac{1}{2\alpha^n \Delta x_j + \lambda_j} \quad (3.126)$$

Dieser kann nun in die approximierte Grundgleichung (3.120) eingesetzt und in einem weiteren Schritt umgeformt werden. Dadurch erhält man einen neuen Ausdruck für die Temperatur an der Schicht 1:

$$T_1^{n+1} = 2 \frac{d_{j,0} a_j \Delta t}{\Delta x_j} Q^n + 2 \frac{d_{j,0} a_j \alpha^n \Delta t}{\Delta x_j} T_A^n + \frac{d_{j,0} d_{j,1}}{\Delta x_j^2} T_1^n + c_j T_2^n \quad (3.127)$$

mit

$$d_{j,1} = \left(2\alpha^n \Delta x_j^3 + \Delta x_j^2 \lambda - 4a_j \alpha^n \Delta t \Delta x_j - a_j \Delta t \lambda \right) \quad (3.128)$$

Die Temperaturen an den übrigen Schichtgrenzen ergeben sich analog zu der Dirichlet Randbedingung:

$$T_j^{n+1} = \underbrace{a_j \frac{\Delta t}{\Delta x_j^2}}_{c_j} \cdot \left(T_{j+1}^n - 2 \cdot T_j^n + T_{j-1}^n \right) + T_j^n \quad (3.129)$$

Mit Hilfe der Glg. (3.135) und Glg. (3.129) kann die Abbildungsmatrix wie folgt angeschrieben werden:

$$\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{d_{j,0}a_j\Delta t}{\Delta x_j} & 2\frac{d_{j,0}a_j\alpha^n\Delta t}{\Delta x_j} & \frac{d_{j,0}d_{j,1}}{\Delta x_j^2} & c_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & -2c_2 + 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_k & -2c_k + 1 & c_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Die Temperatur für den nächsten Zeitschritt ergibt sich mit

$$\vec{T}_{n+1} = \mathbf{A}_{\Delta}^{n+1} \cdot \vec{T}_n \quad (3.131)$$

Dabei muss in der ersten Komponente der Vektoren \vec{T}_n immer die Strahlungsbilanz und an der zweiten Komponente die Lufttemperatur eingepreßt werden. In einer Nachlaufrechnung kann die Oberflächentemperatur T_S^n für jeden Zeitpunkt mit der Glg. (3.125) berechnet werden. Zu berücksichtigen ist, dass der Koeffizient α eine von der Windgeschwindigkeit abhängige und damit eine zeitabhängige Größe darstellt. Dies hat zur Folge dass die erhaltene Abbildungsmatrix nun keine materialabhängige Konstante des Schichtaufbaus darstellt, sondern für jeden Zeitschritt neu berechnet werden muss. Dadurch nimmt der Rechenaufwand und damit die Performance des Verfahrens erheblich zu.

3.4.2 Euler Rückwärts Verfahren (implizit) mit Robin Randbedingung

Ausgangslage ist die diskretisierte Grundgleichung der Wärmeleitung (3.6). Die Differenzenquotienten ergeben sich in analoger Weise zu Abschnitt 3.3.2 [28]:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = a_j \cdot \frac{T_{j+1}^{n+1} - 2 \cdot T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j^2} \quad (3.132)$$

Aus der diskretisierten Wärmehaushaltsgleichung (3.122) kann analog zu der expliziten Formulierung die Oberflächentemperatur für den Zeitpunkt $n + 1$ hergeleitet werden. Der Koeffizient $d_{j,0}$ Glg. (3.126) bleibt dabei unverändert:

$$T_S^{n+1} = d_{j,0} \left(2Q^{n+1}\Delta x_j + T_j^{n+1}\lambda_j + 2T_A^{n+1}\alpha^{n+1}\Delta x_j \right) \quad (3.133)$$

Nach Einsetzen in die approximierten Grundgleichung (3.120) und anschließender Umformung nach der Temperatur T_1^n zum Zeitpunkt n kommt man auf die Beziehung:

$$T_1^n = -2\frac{d_{j,0}a_j\Delta t}{\Delta x_j}Q^{n+1} - 2\frac{d_{j,0}a_j\alpha^n\Delta t}{\Delta x_j}T_A^{n+1} + \frac{d_{j,0}d_{j,1}}{\Delta x_j^2}T_1^{n+1} - c_jT_2^{n+1} \quad (3.134)$$

mit:

$$d_{j,1} = \left(2\alpha^{n+1} \Delta x_j^3 + \Delta x_j^2 \lambda + 4a_j \alpha^{n+1} \Delta t \Delta x_j + a_j \Delta t \lambda \right) \quad (3.135)$$

Die Temperaturen an den übrigen Schichtgrenzen ergeben sich analog zu der Dirichlet Randbedingung für den Zeitpunkt T^n :

$$T_j^n = a_j \frac{\Delta t}{\Delta x_j^2} \cdot \left(-T_{j+1}^{n+1} + 2 \cdot T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1} \right) + T_j^{n+1} \quad (3.136)$$

Damit liegen alle Gleichungen vor die gebraucht werden, um die Abbildungsmatrix \mathbf{A}_{Δ}^n anzuschreiben:

$$\mathbf{A}_{\Delta}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 \frac{d_{j,0} a_j \Delta t}{\Delta x_j} & -2 \frac{d_{j,0} a_j \alpha^n \Delta t}{\Delta x_j} & \frac{d_{j,0} d_{j,1}}{\Delta x_j^2} & -c_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 2c_2 + 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_k & 2c_k + 1 & -c_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Die Temperatur für den nächsten Zeitschritt ergibt sich mit:

$$\vec{T}_{n+1} = \mathbf{A}_{\Delta}^{n+1} \cdot \vec{T}_n \quad (3.138)$$

Um das Temperaturprofil zum Zeitpunkt $n+1$ zu erhalten, muss die Inverse der Abbildungsmatrix \mathbf{A}_{Δ} gebildet werden:

$$\vec{T}_{n+1} = \left(\mathbf{A}_{\Delta}^{n+1} \right)_{\Delta}^{-1} \cdot \vec{T}_n \quad (3.139)$$

An der ersten Komponente der Vektoren \vec{T}_n muss immer die Strahlungsbilanz und an der zweiten Komponente die Lufttemperatur eingepreßt werden. In einer Nachlaufrechnung kann die Oberflächentemperatur T_g^n für jeden Zeitpunkt mit der Glg. (3.133) berechnet werden. So wie auch in der expliziten Formulierung stellt die Abbildungsmatrix eine zeitabhängige Größe dar. Aufgrund des zusätzlichen Rechenschritts ist die Performance des Verfahrens zwar etwas langsamer als die explizite Formulierung, allerdings liefert die implizite Formulierung immer eine Lösung. Das Euler Rückwärts Verfahren mit Robin Randbedingung dient in weiterer Folge der Auswertung zur Abschätzung der Oberflächentemperaturen.

Numerisches Beispiel

In diesem fiktiven numerischen Beispiel ist das Temperaturfeld einer 0.2 m dicken Betondecke bestimmt. Dafür gelten folgende Randbedingungen:

$$T(x, 0) = 10 \quad (3.140)$$

$$\alpha(0, t) = 43.62 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \quad (3.141)$$

$$Q(0, t) = 10 \sin(\omega t) + 10 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{\pi}{60 \cdot 60} \quad (3.142)$$

$$T_A(0, t) = 10 \sin(\omega t) + 10 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{\pi}{60 \cdot 60} \quad (3.143)$$

$$T(l, t) = 10 \quad (3.144)$$

Die materialabhängigen Koeffizienten für Beton der dünn besetzten Abbildungsmatrix (Sparse Matrix) ergeben sich analog zur Problemstellung mit Dirichlet Randbedingung zu:

$$\text{vgl. (3.5)} \quad a_j = \frac{\lambda}{\rho C} = 8.88889 \text{ e}^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (3.145)$$

$$\text{vgl. (3.76)} \quad c_j = a_j \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.0578 \quad (3.146)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, der Dichte $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, der Wärmekapazität $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, der Schichtdicke $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und dem Zeitinkrement $\Delta t = 1.0 \text{ s}$. Durch Einsetzen der Temperaturleitzahl a_j sowie des dimensionslosen Koeffizienten in Glg.(3.90) ergeben sich nun die beiden $k \times k = 50 \times 50$ dimensionalen materialabhängigen Abbildungsmatrizen \mathbf{A}_{Δ}^n sowie:

$$\mathbf{A}_{\Delta}^n = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2.334\text{e-}4 & -1.018\text{e-}2 & 1.068 & -5.780\text{e-}2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -5.780\text{e-}2 & 1.116 & -5.780\text{e-}2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -5.780\text{e-}2 & 1.116 & -5.780\text{e-}2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

und weiter die Inverse \mathbf{A}_{Δ}^{-1} zu:

$$\mathbf{A}_{\Delta}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2.192\text{e-}4 & 9.561\text{e-}3 & 9.390\text{e-}1 & 4.878\text{e-}2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 4.682\text{e-}2 & 9.012\text{e-}1 & 4.669\text{e-}2 & 2.699\text{e-}3 \\ 0 & \dots & 2.426\text{e-}3 & 4.669\text{e-}2 & 8.988\text{e-}1 & 5.195\text{e-}2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Damit ergibt sich das Temperaturprofil nach dem ersten Zeitinkrement zu:

$$\vec{T}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ \vdots \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}}_{T(x,0)} \rightarrow \vec{T}_2 = \mathbf{A}_{\Delta}^{-1} \cdot \vec{T}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 10.01 \\ 10.01 \\ 10.0 \\ \vdots \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}}_{T(x,1)} \quad (3.149)$$

Alle weiteren Temperaturprofile können aufgrund des Assoziativgesetzes folgendermaßen berechnet werden:

$$\vec{T}_{n+i} = \left(\mathbf{A}_{\Delta}^{-1}\right)^i \cdot \vec{T}_n \quad (3.150)$$

Das Temperaturprofil nach 3600 s lässt sich damit wie folgt anschreiben:

$$\vec{T}_{3599} = \mathbf{A}_{\Delta} \cdot \vec{T}_{3598} = \begin{bmatrix} 10.01 \\ 10.01 \\ 12.63 \\ \vdots \\ 10.02 \\ 10.0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{T}_{3600} = \mathbf{A}_{\Delta} \cdot \vec{T}_{3599} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ 12.62 \\ \vdots \\ 10.02 \\ 10.0 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

Validiert ist das Verfahren mit meteorologischen Messdaten einer bei Wopfung betriebenen Messstation. Gemessen wurden die verschiedenen Strahlungsanteile, die mittlere stündliche Windgeschwindigkeit, die Lufttemperatur und die Oberflächentemperatur. Es zeigt sich in Abb. 3.14, dass eine genaue und hochauflösende Messung zu einer guten Approximation der zurückgerechneten Oberflächentemperatur führt. Dies erfordert jedoch einen sehr aufwändigen Messaufbau, welcher in den meisten Fällen nicht gegeben ist. Daher ist die erforderliche Qualität an Messdaten für eine flächendeckende Auswertung nicht verfügbar.

3.5 Transmission

Einer der wichtigsten Einflussfaktoren zur Bestimmung der Oberflächentemperatur ist die Transmission (Wärmestrahlung) [8, 11]. Um diese als zusätzliche Eingangsgröße in der Randbedingung an der Straßenoberfläche berücksichtigen zu können, ist sie, wie in Abschnitt 3.4 gezeigt [10, 31], über die Energiebilanzgleichung subsumiert (vgl. dazu Abschnitt 3.4.2). Daher sind in diesem Abschnitt verschiedene Modelle zur Abschätzung der Strahlungsanteile zusammengefasst und mit den gemessenen Daten verglichen. Bei all den beschriebenen Verfahren ist die Transmission über die geometrischen Beziehungen zwischen Sonne und Erde abgeschätzt. Im Allgemeinen

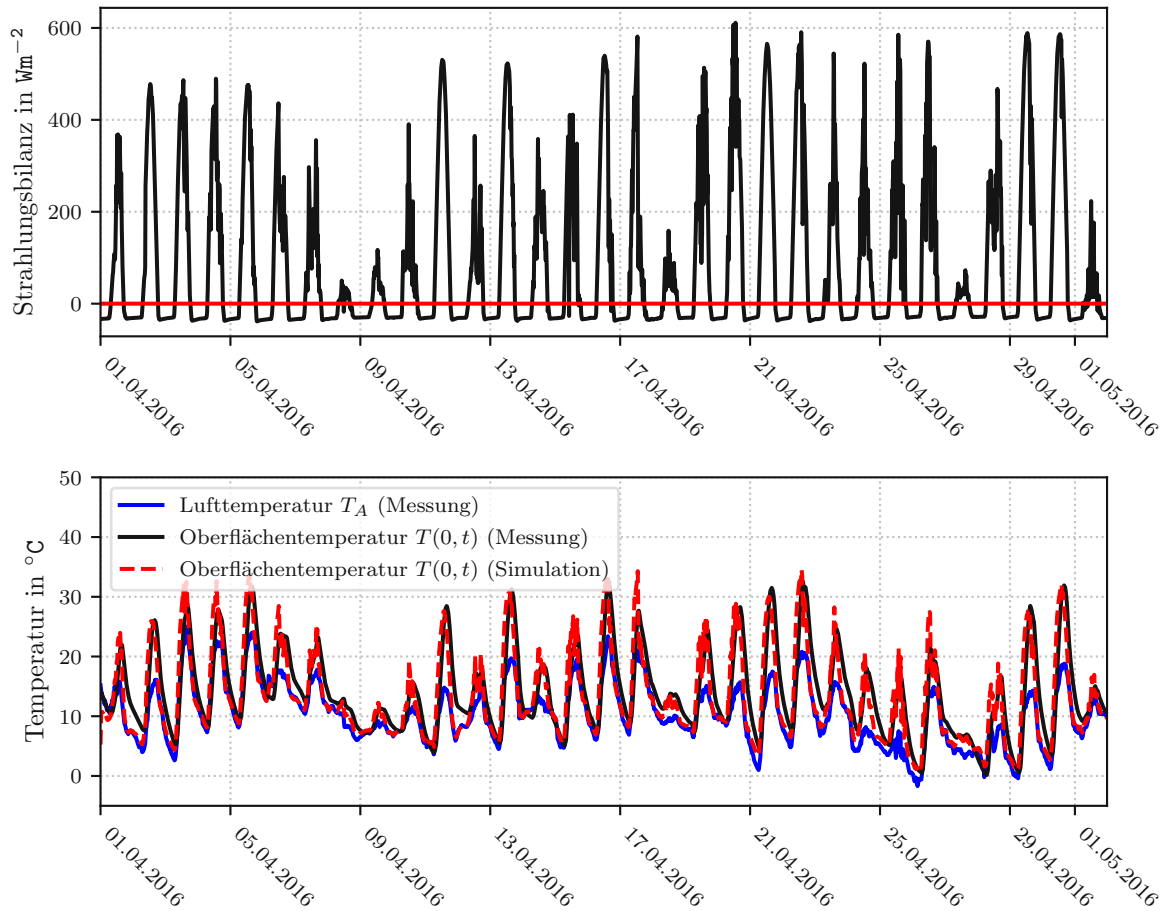


Abb. 3.14: Validierung des Euler Rückwärts Verfahrens durch den Vergleich der Oberflächentemperaturen mit den Parametern

kann zwischen der kurzwelligen und der langwelligen Transmission unterschieden werden. Die Strahlungsbilanz kann damit als Summe dieser Anteile angeschrieben werden [11]:

$$q_{rad} = q_{kw} + q_{lw} \quad (3.152)$$

Die kurzwelligen und langwelligen Strahlungsanteile setzen sich weiter aus einem eingehenden und aus einem ausgehenden Anteil zusammen. Es lassen sich damit folgende Anteile anschreiben:

$$q_{kw} = q_{kw,a} - q_{kw,r} \quad \text{und} \quad q_{lw} = q_{lw,a} - q_{lw,e} \quad (3.153)$$

dabei beschreibt $q_{kw,a}$ den absorbierten, $q_{kw,r}$ den kurzwelligen reflektierten, $q_{lw,a}$ den langwelligen von der Atmosphäre ausgehenden und $q_{lw,e}$ den von der Straße emittierenden Anteil. Vereinfachend lässt sich der kurzwellig reflektierte Anteil $q_{kw,r}$ als Funktion des eingehenden Anteils $q_{kw,a}$ anschreiben:

$$q_{kw,r} = \underbrace{(1 - \alpha)}_{\text{Albedo}} q_{kw,a} \quad (3.154)$$

Hier beschreibt α den Absorptionsgrad des Straßenbelags. Der Ausdruck $(1 - \alpha)$ wird dabei als Albedo bezeichnet. Weiter ergibt sich durch das Einsetzen des reflektierten Anteils:

$$q_{kw} = q_{kw,a} - (1 - \alpha) q_{kw,a} = \alpha q_{kw,a} \quad (3.155)$$

Um die Auswirkung der Strahlung für das angewendete Modell abschätzen zu können, werden die berechneten Strahlungsanteile direkt in die FDM mit Robin Randbedingung eingesetzt und mit den gemessenen Strahlungsanteilen verglichen.

3.5.1 Kurzwellige Strahlung - Modelle in Abhängigkeit vom Zenitwinkel der Sonne an wolkenlosen Tagen

Die nachstehenden Gleichungen stellen eine Zusammenfassung publizierter Modelle zur Abschätzung der kurzwelligen Strahlung in Abhängigkeit vom Zenitwinkel dar [16].

Kasten-Czeplak Modell [9]:

$$q_{kw} = 910 \cdot \cos z - 30 \quad (3.156)$$

Haurwitz Modell [6]:

$$q_{kw} = 1098 \cdot \cos(z) \cdot \left(\frac{-0.057}{\cos z} \right) \quad (3.157)$$

Robledo-Soler Modell [14]:

$$q_{kw} = 1159.24 \cos^{1.179} z \cdot e^{-0.0019 \cdot (\frac{\pi}{2} - z)} \quad (3.158)$$

In Abb. 3.15 sind die drei Modelle zur Berechnung der kurzwelligen Strahlung miteinander verglichen und der gemessenen Strahlung gegenübergestellt. Grundsätzlich liefern alle Modelle an wolkenlosen Tagen gute Approximationen der tatsächlich gemessenen kurzwelligen Strahlung. An bewölkten Tagen zeigen sich jedoch sehr große Abweichungen. Das Modell von Kasten-Czeplak [9] zeigt nach Einsetzen der kurzwelligen Strahlung über das gesamte Jahr die kleinsten Abweichungen. Allgemein lässt sich für alle Modelle sagen, dass in jenen Monaten mit höherer Strahlungsintensität die Streuung größer ist als in den Monaten mit geringerer Strahlungsintensität. Der Grund dafür ist, dass in diesen Monaten durch die fehlende Sonne an bewölkten Tagen die Differenz der Strahlungsintensität umso größer ist. Durch das Einsetzen der kurzwelligen Strahlungsanteile in das oben beschriebene Euler Rückwärts Verfahren mit Robin Randbedingung zeigen die Ergebnisse, wie auch beim direkten Vergleich mit der kurzwelligen Strahlung, dass an wolkenlosen Tagen die Oberflächentemperatur vergleichsweise gut abgeschätzt werden kann. Zu großen Abweichungen der Temperatur kommt es wie beim Vergleich der Strahlung an bewölkten Tagen. Es sei hier angemerkt, dass in Abb. 3.16 die schwarz dargestellte Temperatur (Messstation Wopfung) nicht der tatsächlich gemessenen, sondern der simulierten Temperatur mit gemessener kurzwelliger Strahlung entspricht. Zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten h ist der Ansatz nach [7] mit einer konstanten Windgeschwindigkeit von 10 m s^{-1} angewendet (siehe Abschnitt 3.6).

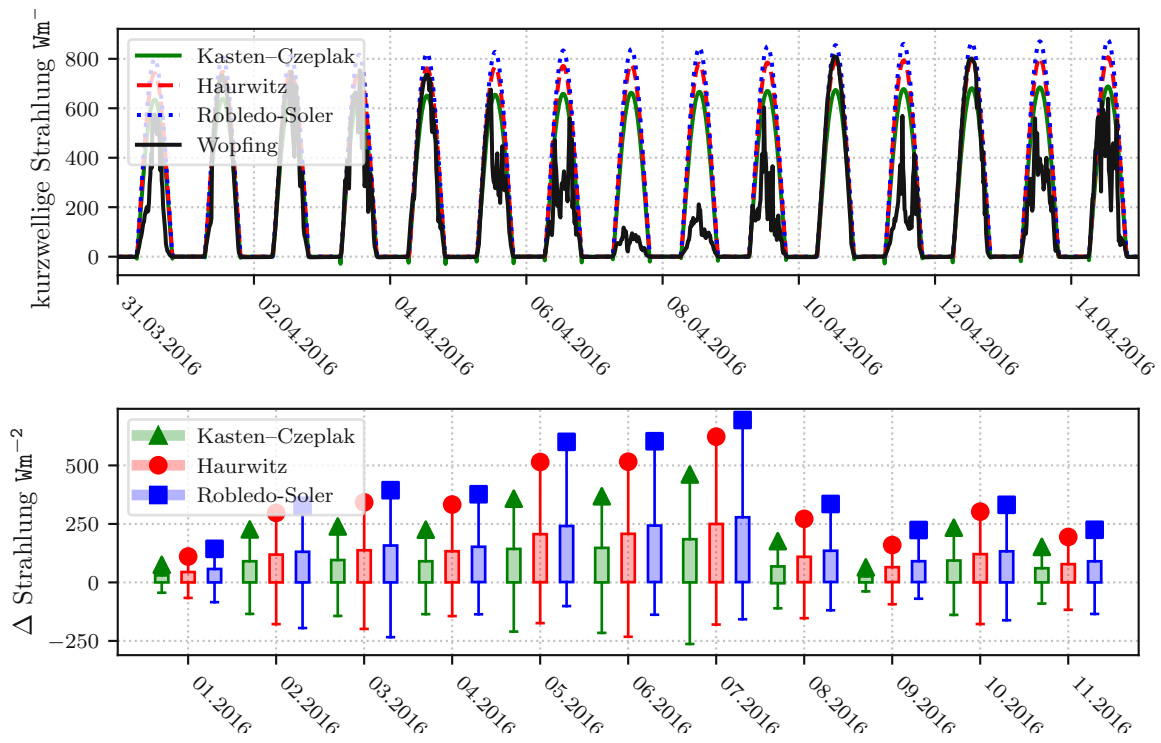


Abb. 3.15: Vergleich der simulierten kurzwelligigen Strahlung [9, 6, 14] mit der gemessenen kurzwelligigen Strahlung in Wopfung

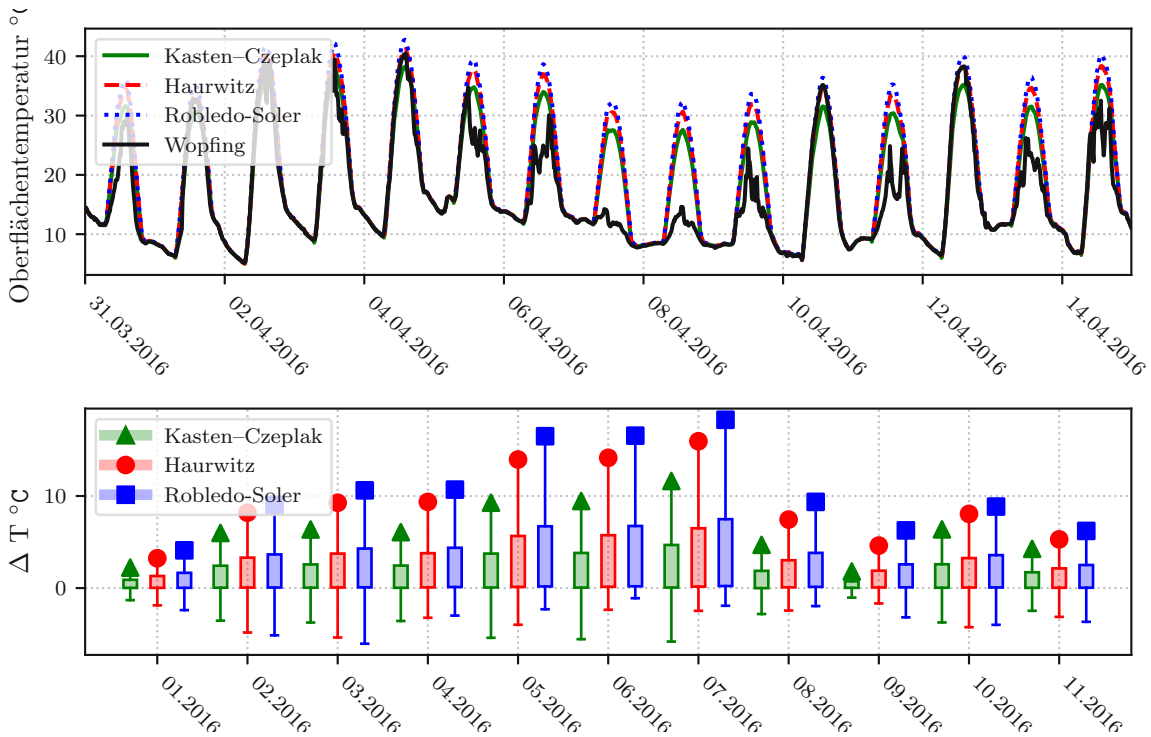


Abb. 3.16: Vergleich der simulierten Oberflächentemperaturen der FDM mit Robin Randbedingung nach Einsetzen der kurzwelligigen Strahlung [6, 9, 14] und der Messung in Wopfung

3.5.2 Kurzwellige Strahlung - Modelle in Abhängigkeit der Linke Trübung an wolkenlosen Tagen

Die nachstehenden Gleichungen stellen eine Zusammenfassung publizierter Modelle dar, welche zusätzlich zum Zenitwinkel auch atmosphärische Einflüsse berücksichtigen. Nach [9] kann die Globalstrahlung wie folgt bestimmt werden:

$$q_{kw} = 0.84 \cdot E_0 \cdot \cos z \cdot e^{-0.027 \cdot AM \cdot (f_{h1} + f_{h1}(TL-1))} \quad (3.159)$$

Dabei ist TL die Linke Trübung ein Maß zur Abschätzung der Absorption und Streuung der Atmosphäre aufgrund von Wasserdampf und aerosolen Partikeln. Mit zunehmender Linke Trübung erfährt die Strahlung in diesem Modell eine zunehmende Dämpfung. Für den ausgewählten Standort Wopfing mit der geographischen Breite 47.866222 und Länge 16.052597 sowie einer Seehöhe von 402 m ü. A. ergibt sich der Jahresgang der Linke Trübung für das Jahr 2016 nach Abb. 3.17 [4].

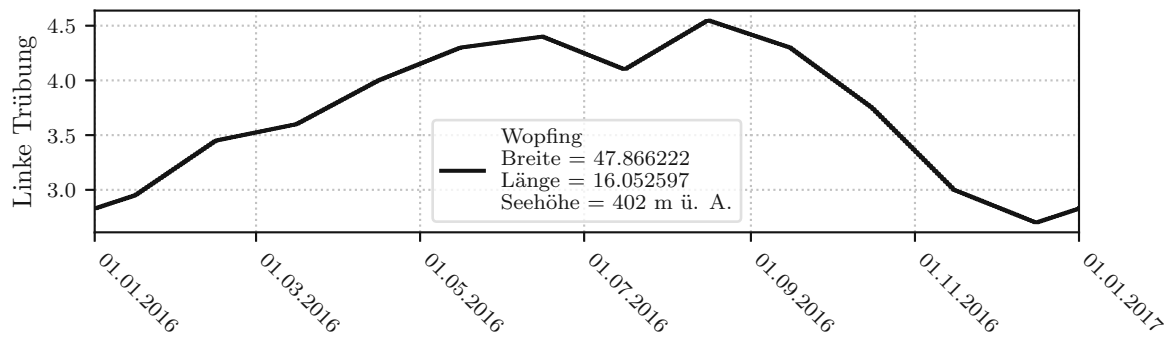


Abb. 3.17: Jahresgang der Linke Trübung nach dem Ansatz von [15] umgesetzt mit Hilfe von [4] für den Standort in Wopfing

Zur Abschätzung der Luftmasse AM_{rel} aus Glg. (3.159) für das Meeresniveau, ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung, kann die nachstehende Glg.(3.160) verwendet werden und sie ergibt sich aus den geometrischen Beziehungen zwischen der Sonne und einer zur Erdoberfläche parallel liegenden Platte:

$$AM_{rel} = \frac{1}{\cos z} \quad (3.160)$$

allerdings divergiert die Massenfunktion bei einem Zenitwinkel z von 90° gegen $-\infty$. Daher haben [9] einen für jeden Zenitwinkel nicht divergierenden Ansatz entwickelt:

$$AM_{rel} = \frac{1}{\cos z + 0.50572(96.07995 - z)^{-1.6364}} \quad (3.161)$$

Die druckabhängige absolute Luftmasse aus Glg. (3.159) ergibt sich nach [12] zu:

$$AM_{abs} = AM_{rel} \cdot \frac{p}{101325} \quad (3.162)$$

dabei beschreibt p den atmosphärischen Druck in Pascal. Die beiden Regressionsparameter aus Glg.(3.159) ergeben sich nach [9] zu:

$$\begin{aligned} f_{h1} &= e^{\frac{-h}{8000}} \\ f_{h2} &= e^{\frac{-h}{1250}} \end{aligned} \quad (3.163)$$

In [15] ist das Modell nach [9] mittels Messungen und anschließender Regression optimiert, indem die beiden Koeffizienten c_{g1} und c_{g2} eingeführt sind. Daraus ergibt sich die neue Formel zur Bestimmung der kurzwelliger Strahlung zu:

$$q_{kw} = c_{g1} \cdot I_0 \cdot \cos(z) \cdot e^{-c_{g2} \cdot AM \cdot (f_{h1} + f_{h2} \cdot (TL-1))} \cdot e^{0.01 \cdot AM^{1.8}} \quad (3.164)$$

mit:

$$c_{g1} = 5.09e^{-5} \cdot h + 0.868 \quad (3.165)$$

$$c_{g2} = 3.92e^{-5} \cdot h + 0.0387 \quad (3.166)$$

Die beiden Modelle sind in Abb. 3.18 der Messung aus Wopfung gegenübergestellt. Der Vergleich zeigt, dass beide Modelle etwas kleinere Abweichungen als die rein vom Zenitwinkel abhängigen Modelle liefern. Der zusätzliche Dämpfungsterm stellt in manchen Monaten eine bessere Abbildung der gemessenen Strahlung dar, jedoch ist deren Anwendung wesentlich aufwändiger. Das Problem der großen Abweichungen an bewölkten Tagen bleibt auch bei diesen Modellen bestehen. Es sei angemerkt, dass auch in Abb. 3.19 die dargestellte Temperatur aus Wopfung nicht der tatsächlich gemessenen, sondern der simulierten Temperatur mit gemessener kurzwelliger Strahlung entspricht. Zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten h ist hier der Ansatz nach [7] mit einer konstanten Windgeschwindigkeit von 10 m s^{-2} angesetzt (siehe Kapitel 3.6).

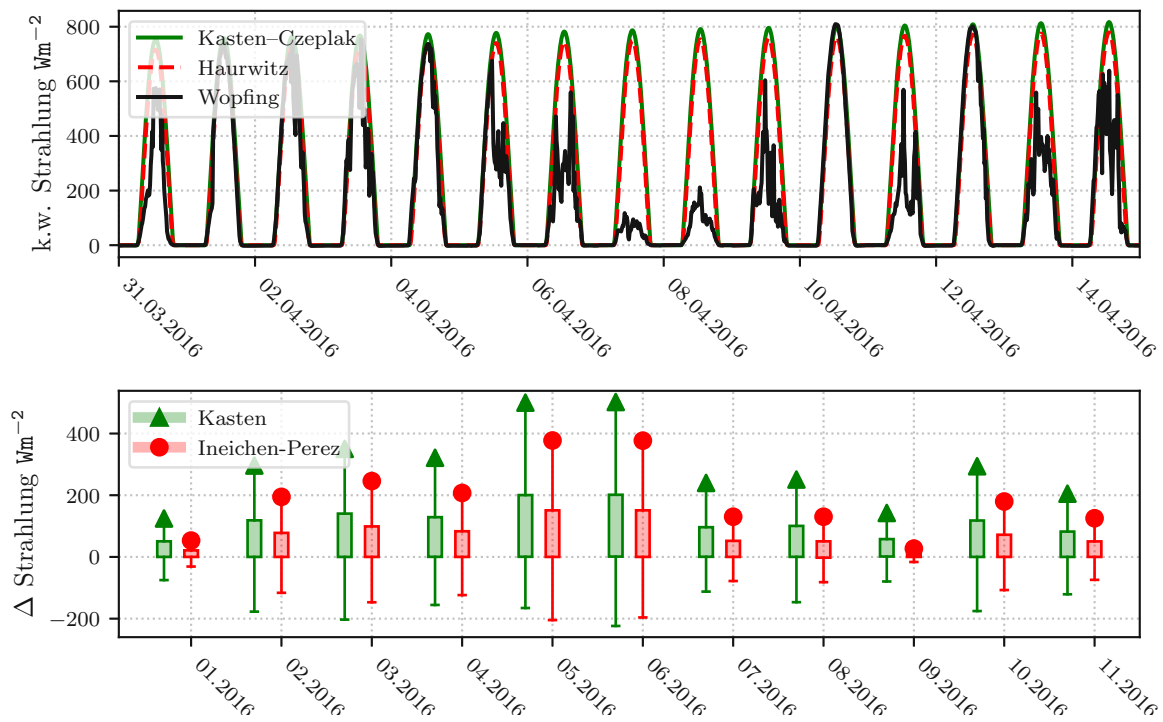


Abb. 3.18: Vergleich der kurzwelligen Strahlung nach [9, 15] mit der gemessenen kurzwelligen Strahlung in Wopfung

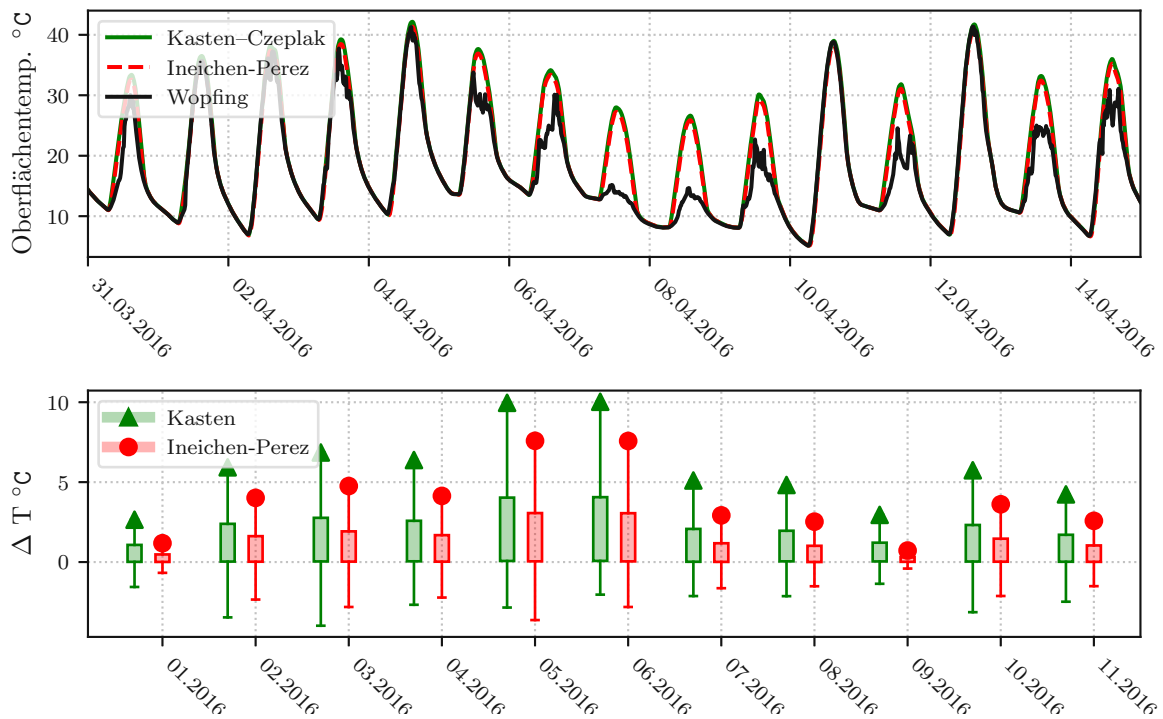


Abb. 3.19: Vergleich der simulierten Oberflächentemperaturen der FDM mit Robin Randbedingung nach Einsetzen der kurzwelligen Strahlung nach [9, 15] und der Messung in Wopfung

3.5.3 Kurzwellige Strahlung - Wolkenfaktor zur Abminderung der Strahlung mittels Prominenz

Um den Grad der Bewölkung und damit die Schwankungsbreite der Abweichungen zu reduzieren, wird in dieser Arbeit ein Wolkenfaktor eingeführt. Das thermisch gekoppelte System Straße Atmosphäre ist in ständigem Austausch. Strahlung, die auf die Straße trifft, erwärmt die Atmosphäre und damit die darüber liegende Luft. Damit ist die Information des Sonneneintrags, in transformierter Weise, in die Messdaten der Lufttemperatur projiziert. An wolkenfreien Tagen zeigt sich ein typisches Bild eines Temperaturganges mit einem Maximum um die Mittagszeit. An bewölkten Tagen kommt es zu stark unregelmäßigen Temperaturaufzeichnungen. Mit Hilfe der normierten Prominenz (Schartenhöhe) des täglichen Lufttemperaturganges über den gesamten Messzeitraum ergibt sich ein Abminderungsfaktor (Wolkenfaktor) für den täglichen Strahlungseintrag. Es ergibt sich also der Wolkenfaktor C zu:

$$C_n = 1 - \frac{P(T_{A,n})}{\max P(T_{A,n})} \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots \quad (3.167)$$

wobei die Funktion $P(T_{A,i})$ zur Bestimmung der Prominenz, $T_{A,n}$ dem Lufttemperaturgang des Tages und der Index n den Tag beschreibt. Der Wolkenfaktor C gibt also an wie stark bewölkt ein Tag ist, respektive wie viel Strahlung an einem Tag auf die Straße trifft. Der effektive kurzwellige Strahlungseintrag $q_{kw,eff}$ ergibt sich damit zu [8, 11]:

$$q_{kw,eff} = q_{kw} (1 - C_n) \quad (3.168)$$

wobei die kurzwellige Strahlung q_{kw} mit Hilfe der Modelle aus den Abschnitten 3.5.1 und 3.5.2 errechnet werden kann. Zur Validierung der Methodik ist, wie gehabt, die Messung der kurzwelligen Strahlung aus Wopfing herangezogen. In Abb. 3.20 und Abb. 3.21 sind die Oberflächentemperaturen und Abweichungen für ein Modell aus Abschnitt 3.5.1 und eines aus Abschnitt 3.5.2 dargestellt. Zwar sind nun die Strahlungsanteile zum Teil unterschätzt, allerdings liefern sie eine deutlich kleinere Streuung der Abweichungen. Vor allem werden mit diesem Modell stark bewölkte Tage gut registriert. Das Ergebnis der Simulation ist auf den ersten Blick vielversprechend, da als unbekannt und zu messende zeitliche Eingangsgröße nur die Lufttemperatur erforderlich ist.

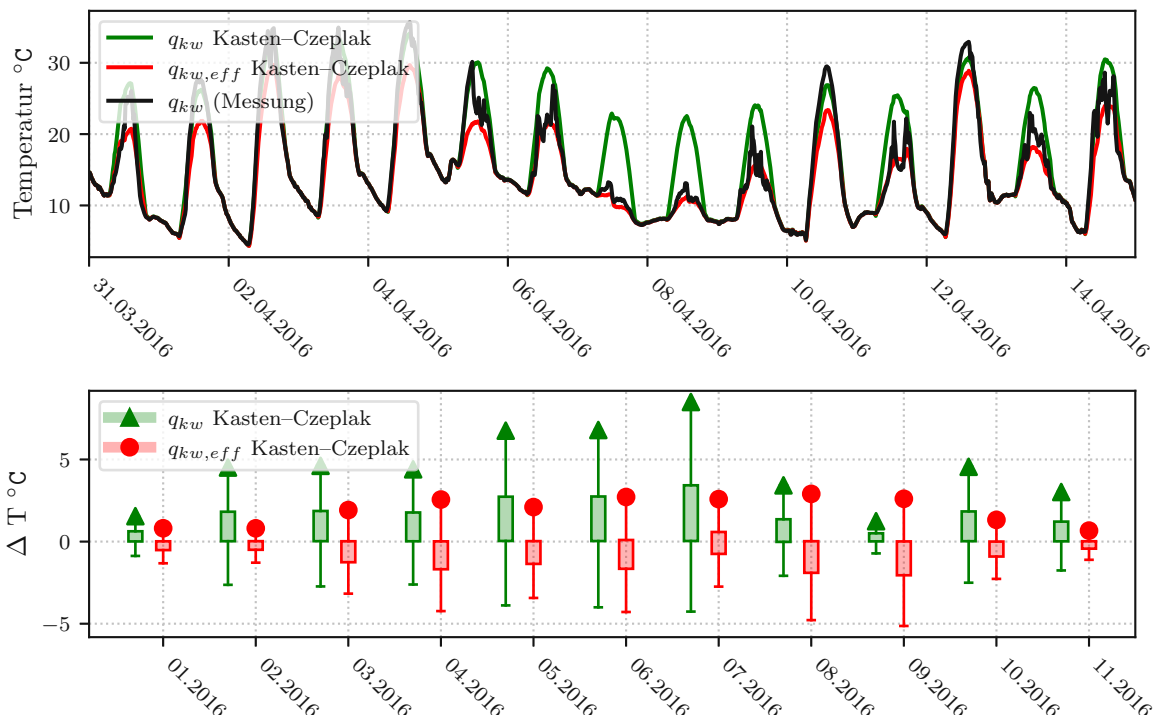


Abb. 3.20: Vergleich der simulierten Oberflächentemperaturen der FDM mit Robin Randbedingung nach Einsetzen der kurzwelligen Strahlung q_{kw} nach [9] sowie der effektiven kurzwelligen Strahlung $q_{kw,eff}$ und der Messung in Wopfung

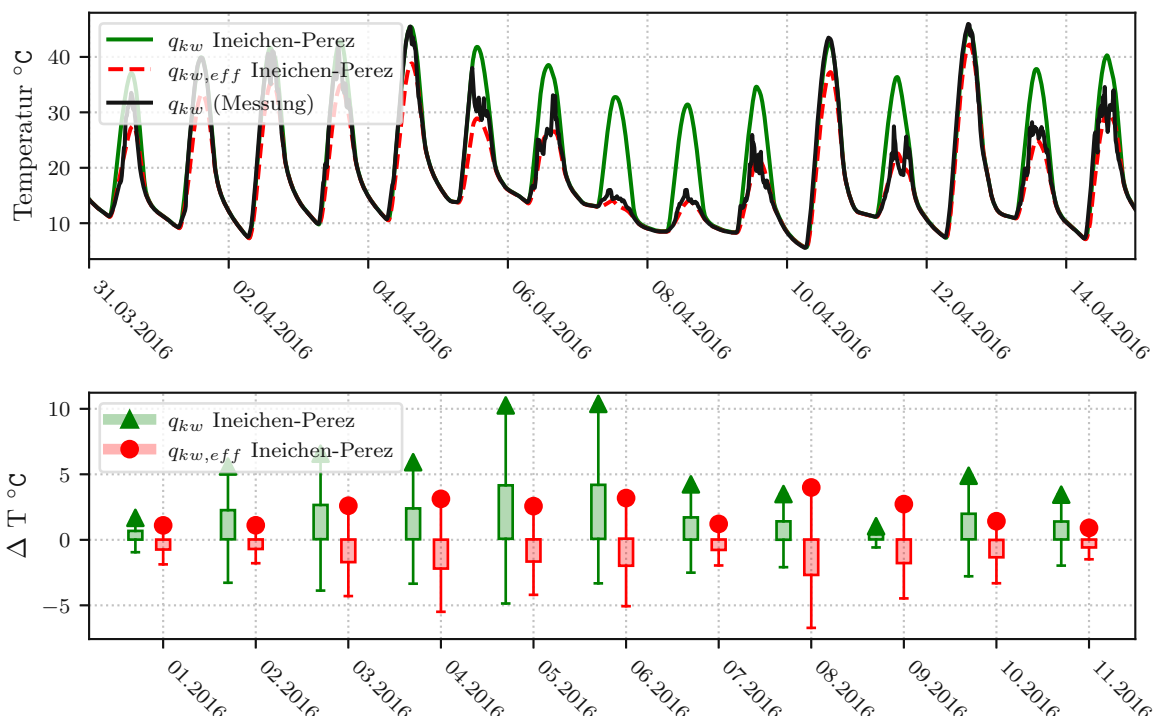


Abb. 3.21: Vergleich der simulierten Oberflächentemperaturen der FDM mit Robin Randbedingung nach Einsetzen der kurzwelligen Strahlung q_{kw} nach [15] sowie der effektiven kurzwelligen Strahlung $q_{kw,eff}$ und der Messung in Wopfung

3.5.4 Langwellig Strahlung - Modellbildung

Die langwellige Strahlung setzt sich aus einem von der Oberfläche ausgehenden emittierenden Anteil q_e und einem von der Atmosphäre eingehenden immitierenden Anteil q_a zusammen. Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die von einem schwarzen Körper abgestrahlte Leistung, bezogen auf seine Temperatur, direkt proportional zur vierten Potenz der Temperatur. Daraus ergibt sich nach [8, 11, 18, 19, 20] die vom Belag emittierte Strahlung zu:

$$q_{lw,e} = \sigma \epsilon T_S^4 \quad (3.169)$$

Da die Oberflächentemperatur in dem Anwendungsfall unsere gesuchte Größe ist, ergibt sich die Lösung aus einem iterativen Prozess, bei dem die Abweichung zwischen den Oberflächentemperaturen der Iterationsschritte minimiert wird. Das prozentuale Maß an Bewölkung kann auch hier mit Hilfe eines Wolkenfaktors C abgebildet werden. An dieser Stelle kommt der in Abschnitt 3.5.3 eingeführte Wolkenfaktor, bestimmt aus der Prominenz der Lufttemperatur, zum Einsatz. Die von der Atmosphäre emittierte langwellige Strahlung lässt sich aus einer empirischen Formel abschätzen [11]:

$$q_{lw,a} = \sigma T_A^4 (G - H \cdot 10^{Je}) \quad (3.170)$$

Die Regressionsparameter G , H und J sind für österreichische Verhältnisse jeweils für Beton- und Asphaltstraßen angepasst. Dabei entspricht e dem Dampfdruck, welcher vom Sättigungsdampfdruck sowie der relativen Luftfeuchtigkeit abhängig ist. Er ergibt sich damit aus folgender Beziehung:

$$e = \varphi(t) E(T_A) \quad (3.171)$$

wobei φ die relative Luftfeuchtigkeit beschreibt. Der Sättigungsdampfdruck kann mittels Näherungsformel von Magnus sehr genau abgeschätzt werden:

$$E(T_A) = E(0) e^{\frac{C_1 T_A}{C_2 + T_A}} \quad \text{mit} \quad E(0) = 610.78 \text{ Pa} \quad (3.172)$$

Für die Koeffizienten der Gleichung ergeben sich je nach Temperatur folgende Werte:

$$C_1 = 17.08085 \quad \text{und} \quad C_2 = 234.175^\circ\text{C} \quad \forall T_A \geq 0^\circ\text{C} \quad (3.173)$$

$$C_1 = 17.84362 \quad \text{und} \quad C_2 = 245.425^\circ\text{C} \quad \forall T_A < 0^\circ\text{C} \quad (3.174)$$

Die effektive langwellige Strahlung kann wiederum mit dem Wolkenfaktor C bestimmt werden. Es ergibt sich damit aus Glg. (3.153) [18, 22]:

$$q_{lw,eff} = (q_{lw,a} - q_{lw,e}) \cdot (1 - C) \quad (3.175)$$

3.5.5 Langwellig Strahlung - Bestimmung der Regressionsparameter

Da es in dieser Arbeit darum geht, die Dicke der erforderlichen Frostschuttschicht abzuschätzen, beschränken wir uns auf die Winterperiode (16.12. - 15.03.) und die Frühjahrstauperiode (16.03. - 15.05.) wie in der RVS 03.08.68 [1] definiert. Es sind jene Parameter ermittelt, welche zur geringsten Abweichung zwischen den gemessenen und simulierten Oberflächentemperaturen in den beiden Perioden führen. Da die Parameter auf diese Perioden sowie für die gewählten Bautypen bzw. Lastklassen angepasst sind, haben sie vorrangig mit diesen Annahmen ihre Gültigkeit. Für andere Anwendungsfälle (bspw. zur Abschätzung der Oberflächentemperaturen im Sommer) sind die Regressionsparameter neu anzupassen. Verwendet sind Temperaturmessungen der

Jahre 2017 bis 2020 von 121 Messstellen für Asphaltbefestigungen sowie 31 Messstellen für Betonbefestigungen. Als Referenzaufbau sind für Asphaltbefestigungen die Bautype AS1 mit der LK25 und für Betonbefestigungen die Bautype BE1 mit der LK21 gemäß RVS 03.08.63 [1] gewählt. Die verwendeten Schichtaufbauten mit den Materialparametern sowie die Modellierungsansätze können der Tabelle 3.1 entnommen werden.

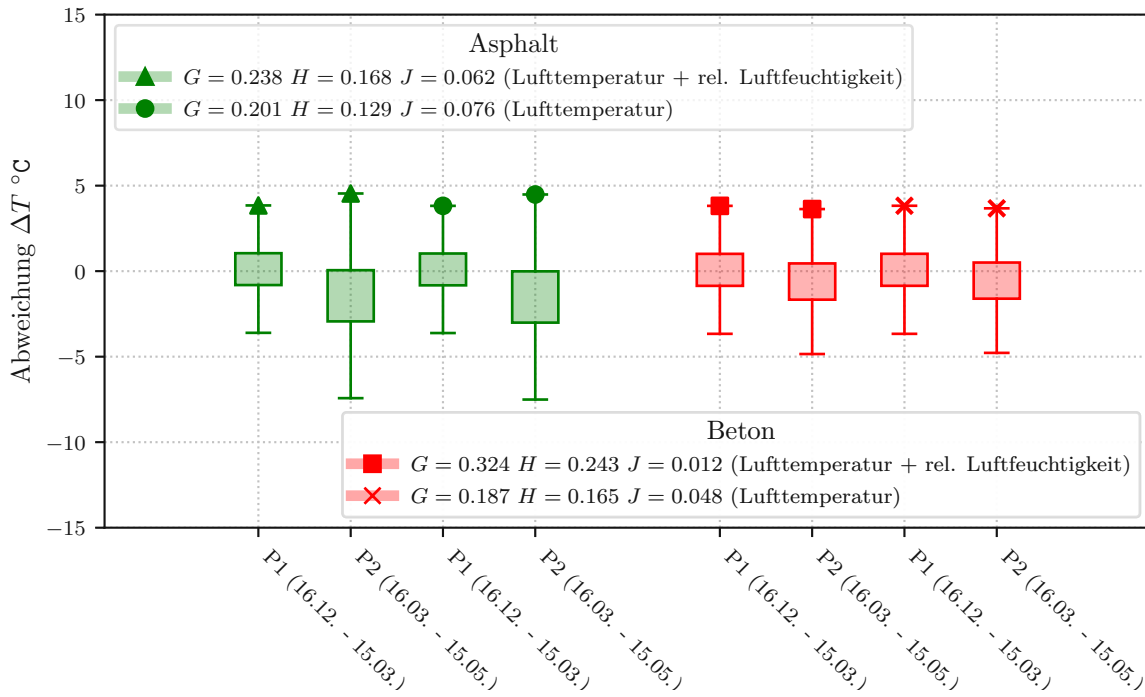


Abb. 3.22: Angepasste Parameter mit Abweichung der simulierten von den gemessenen Oberflächentemperaturen für Asphalt- und Betonbedeckungen für die Winter- (16.12. - 15.03.) und Frühjahrstauperiode (16.03. - 15.05.) - mit bekannter Lufttemperatur und rel. Luftfeuchtigkeit sowie mit nur bekannter Lufttemperatur

Um die Anzahl der zu messenden Inputgrößen zu reduzieren, sind die Parameter mit konstanter rel. Luftfeuchtigkeit von 80% angepasst. Es zeigt sich, dass es durch die vereinfachende Annahme zu keiner Zunahme der Abweichung zwischen gemessenen und simulierten Oberflächentemperaturen kommt. Dies erlaubt die von der Atmosphäre emittierte langwellige Strahlung rein aus den Lufttemperaturen und den angepassten Regressionsparametern abzuschätzen. Die angepassten Modellparameter können der Abb. 3.22 entnommen werden.

3.6 Konvektion

Die Konvektion wird durch das Newtonsche Abkühlungsgesetz abgebildet. Das Gesetz beschreibt den Temperaturengleich zwischen einem Körper und seiner Umgebung und besagt, dass der Wärmeübergang direkt proportional zur Temperaturdifferenz zwischen dem Körper und der Umgebung ist. Bei hohen Temperaturdifferenzen kommt es also zu schnellerem Wärmeabtrag.

$$q_c = h_c (T_s - T_a) \quad (3.176)$$

Die Proportionalitätskonstante h_c entspricht dabei dem Wärmeübergangskoeffizienten.

Schichtaufbauten						
AS1 LK25	t in m	λ in Wm^{-2}	ρ in kgm^{-3}	C in $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	n	
bit. Decke	0.25	0.7	2200	1000	50	ÖNORM B8110 [5]
ung. O. TS	0.2	0.7	1800	1000	50	ÖNORM B8110 [5]
ung. U. TS	0.3	0.7	1800	1000	50	ÖNORM B8110 [5]
Bodenmaterial	1.35	1.5	1200	1670	200	ÖNORM B8110 [5]
Modellierungsansätze						
Verfahren	FDM Euler Rückwärts mit Robin				Abschnitt 3.4.2	
Optimierer	RBFOpt				[23, 21]	
Transmission (kurzwellig)	Kasten-Czeplak $q_{kw,eff}$				Abschnitt 3.5.3	
Transmission (langwellig)	Dempsey $q_{lw,eff}$				Abschnitt 3.5.4	
Konvektion	Krebs und Böllinger h_c ($w = 10 \text{ ms}^{-1}$)				Abschnitt 3.6	
Input Größen						
Lufttemperatur			Messauflösung $\Delta t = 3600$			
Absorptionsgrad Asphalt			0.8			
Emissionsgrad Asphalt			0.9			
Absorptionsgrad Beton			0.75			
Emissionsgrad Beton			0.9			

Tab. 3.1: angesetzten Modellparameter und Modellierungsansätze für die Anpassung der Parameter G, H, J von Asphalt- und Betonbefestigungen aus Abb. 3.22.

3.6.1 Wärmeübergangskoeffizient

Zur Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten können empirische Formulierungen in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit verwendet werden. Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Modelle zur Abschätzung des Wärmeübergangs miteinander verglichen und bewertet. Dies soll helfen, ein geeignetes Modell für die weitere Auswertung zu finden. Folgende, bei bekannter Windgeschwindigkeit, sehr einfach umsetzbare empirische Formeln sind miteinander verglichen:

E. Barber 1957 [7]:

$$h_c = 5.678 \left(1.3 + 1.135 \cdot v^{0.75} \right) \quad (3.177)$$

Qin 2014 [18]:

$$\begin{aligned} h_c &= 5.6 + 4 \cdot v & \forall v \leq 5 \text{ ms}^{-1} \\ h_c &= 7.2 + v^{0.78} & \forall v > 5 \text{ ms}^{-1} \end{aligned} \quad (3.178)$$

Krebs 1981 [10]:

$$h_c = 10 \cdot \left(0.174 + 0.941 \cdot v^{0.366} \right) \quad (3.179)$$

In Abb. (3.23) sind die gerade beschriebenen Modelle gegenübergestellt. Bei niedrigen Windgeschwindigkeiten $v \leq 5 \text{ ms}^{-1}$ liefert das Modell nach [18] die kleinsten Wärmeübergangskoeffizienten. Sobald eine Windgeschwindigkeiten von $v > 5 \text{ ms}^{-1}$ erreicht ist, wird die Wirkung

des Wärmeübergangs in [18] reduziert. Das Modell nach [7] ergibt immer den höchsten Wärmeübergangskoeffizienten. Um nun den Einfluss des Wärmeübergangskoeffizienten auf die bis jetzt

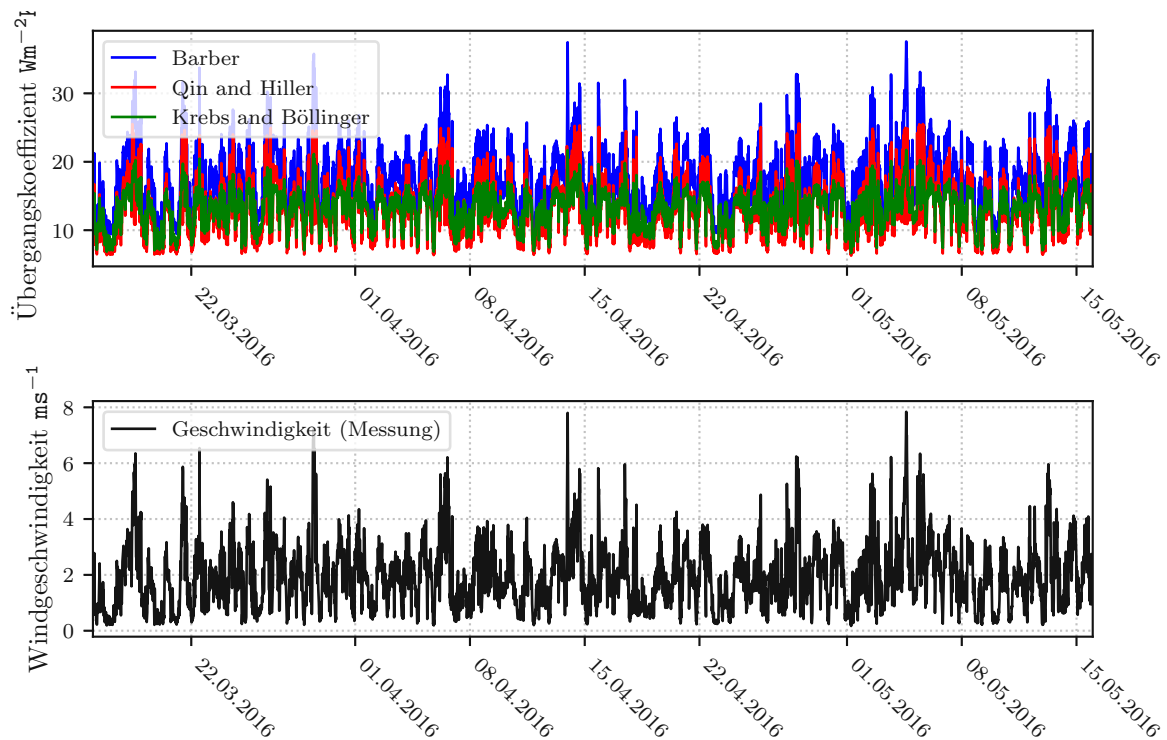


Abb. 3.23: Modelle zur Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten nach [7], [18] und [10] berechnet aus der stündlich mittleren Windgeschwindigkeit in Wopfung

beschriebene Modellbildung zu studieren, ist er, wie gehabt in die FDM mit Robin Randbedingung eingesetzt. Es zeigt sich in Abb. 3.24, dass alle Modelle vergleichsweise ähnlich Ergebnisse in der Simulation liefern. Der Wärmeübergang wird mit allen Modellen unterschätzt. Daher liefert das Modell mit dem höchstem Wärmeübergangskoeffizient jene Ergebnisse mit den geringsten Abweichungen. Das nicht lineare Verhalten des Modells nach [18] wirkt sich damit negativ auf die Genauigkeit der Simulation aus. Für die in Abb. 3.24 gezeigte Simulation sind die Modellparameter aus 3.2 angesetzt.

Schichtaufbau						
Wopfung	t in m	λ in Wm^{-2}	ρ in kgm^{-3}	C in $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	n	
Beton Decke	0.08	1.65	2200	1000	100	ÖNORM B8110 [5]
Mörtelbett	0.05	1.35	2000	1000	100	ÖNORM B8110 [5]
ung. TS	0.15	0.7	1800	1000	200	ÖNORM B8110 [5]
Modellierungsansätze						
Verfahren	FDM Euler Rückwärts mit Robin				Abschnitt 3.4.2	
Input Größen						
Lufttemperatur	Messauflösung $\Delta t = 15 \cdot 60$				Wopfung	
Transmission (kurzwellig)	Messauflösung $\Delta t = 15 \cdot 60$				Wopfung	
Transmission (langwellig)	Messauflösung $\Delta t = 15 \cdot 60$				Wopfung	
Windgeschwindigkeit	Messauflösung $\Delta t = 15 \cdot 60$				Wopfung	
Absorptionsgrad Beton	0.75					
Emissionsgrad Beton	0.9					

Tab. 3.2: angesetzte Modellparameter und Modellierungsansätze aus Abb. 3.25.

Mit der gemessenen stündlichen Windgeschwindigkeit zeigen sich wie in Abb. 3.24 ersichtlich nur marginale Unterschiede der Ergebnisse. Die abkühlende Wirkung der Konvektion wird in allen Modellen unterschätzt. Diese Erkenntnis und die Tatsache der schlechten Performance des Verfahrens aufgrund der zeitabhängigen Abbildungsmatrix (vgl. 3.4.2) ist die Motivation das Ansetzen von konstanten Windgeschwindigkeiten zu studieren. In Abb. 3.25 sind die Oberflächentemperaturen bei verschiedenen konstanten Windgeschwindigkeiten mit dem Modell nach [7] gegenübergestellt. Es zeigt sich ein Reduzierung der Abweichungen über das gesamte Messjahr in Wopfung. Daher ist angenommen, dass die Konvektion zwar einen großen Einfluss hat, diese aber in guter Näherung mit konstanten 10 ms^{-1} angenommen werden kann. Dies erspart für das hier beschriebene Modell eine zusätzliche Messgröße und erhöht die Performance der Berechnung erheblich. Die Performance stellt vor allem bei langen Zeitreihen einen wichtigen Faktor dar.

3.7 Validierung der Annahmen und der Modellparameter

Um die angepassten Modellparameter und alle getroffenen Annahmen zu validieren, sind die monatlichen Abweichungen für einen Datensatz aus den Jahren 2013 bis 2015 berechnet. Da keine Information über den damals vorherrschenden Straßenbelag vorhanden ist, ist davon ausgegangen, dass die Absorption und Emission des Straßenbelags dem einer Asphaltbefestigung entspricht. Diese Annahme verfälscht die Ergebnisse zwar, jedoch kann dadurch gezeigt werden, in welcher Größenordnung die Abweichungen von der gemessenen Temperatur zu erwarten sind.

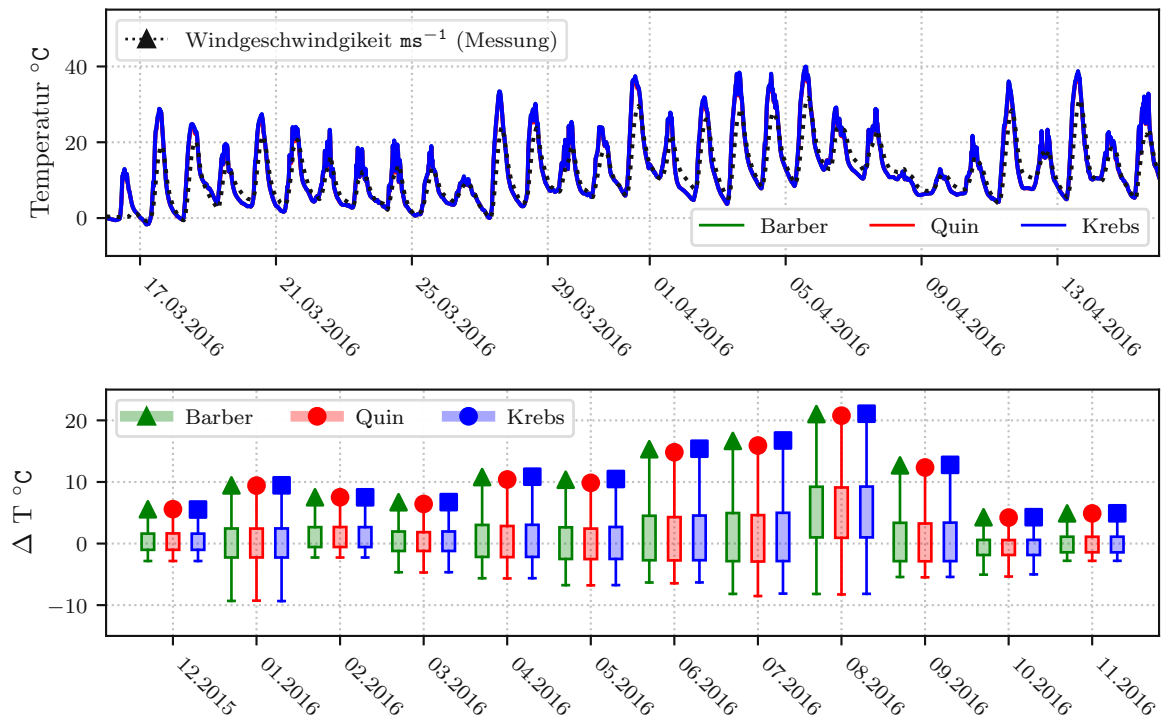


Abb. 3.24: Oberflächentemperatur nach Anwendung der FDM mit Robin Randbedingung mit den verschiedenen Modellen zur Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten nach [7, 18, 10]

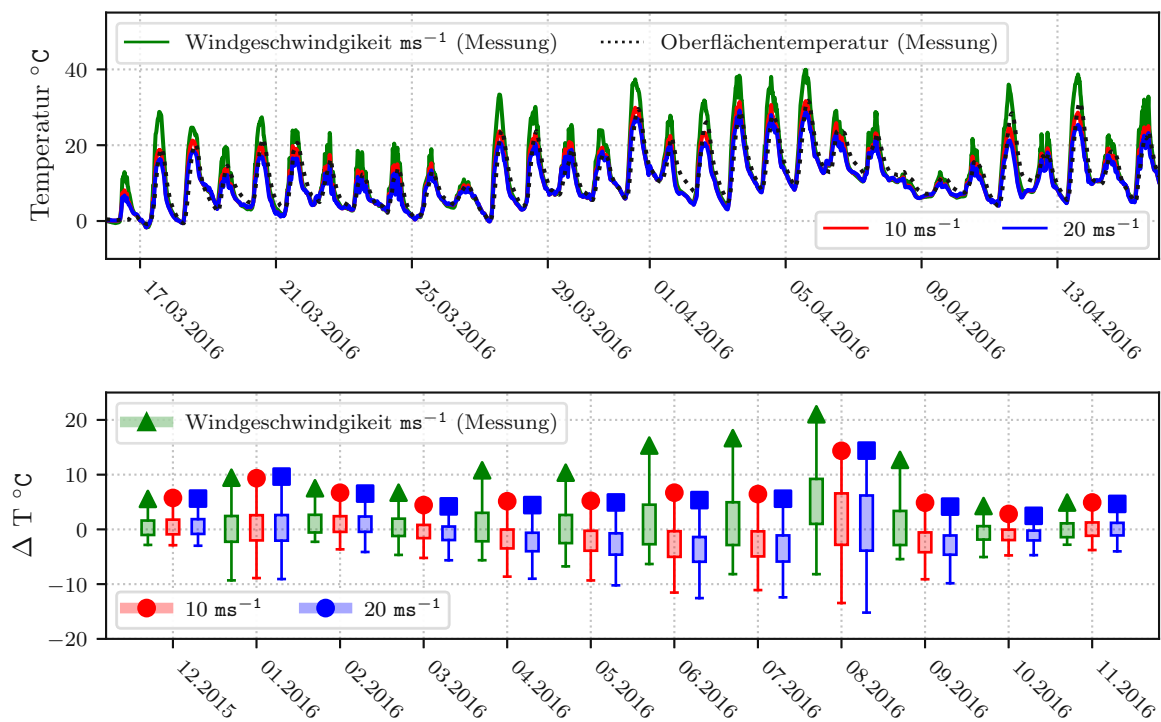


Abb. 3.25: Oberflächentemperatur nach Anwendung der FDM mit Robin Randbedingung und konstanten Windgeschwindigkeiten nach dem Modell von [7]

Kapitel 4

Auswertung der Messdaten

4.1 Datenlage und Vorgangsweise

Anhand von flächendeckenden Oberflächentemperaturdaten an österreichischen Straßen sind die oben beschriebenen Parameter für die zwei Bautypen in Asphalt bzw. Beton kalibriert. Diese kalibrierten Schichtaufbauten sind in weiterer Folge dazu verwendet, die Oberflächentemperaturen, also die gesuchte Dirichlet Randbedingung an der Oberfläche, anhand der Lufttemperatur abzuschätzen. Mit Hilfe der ermittelten Oberflächentemperaturen sind die Temperaturprofile über 18 Jahre für alle Lastklassen der Bautypen AS1 und BE1 der RVS 03.08.68 [3] bestimmt. Daraus sind alle Frostperioden extrahiert und ausgewertet. Die Frostperioden sind nach Gefährdung gefiltert und mit den zugehörigen Frostindices verknüpft.

4.2 Berechnung der zeitabhängigen Temperaturprofile

Mithilfe der kalibrierten Parameter für die Standardaufbauten sowie den in Abschnitt 3.4 beschriebenen Verfahren sind die Oberflächentemperaturen für Asphalt- und Betonbefestigungen abgeschätzt. Die abgeschätzten Randbedingungen sind weiter in die FDM aus Abschnitt 3.3.2 eingesetzt, welche mit Hilfe des analytischen Lösungsansatzes aus Abschnitt 3.2.3 validiert ist. Die Auswertung erfolgt für 113 Stationen über den Zeitraum von 18 Jahren an Lufttemperaturen und einer stündlichen Messauflösung sowie für alle Lastklassen der Bautypen AS1 und BE1 der RVS 03.08.63 [3]. Ein exemplarisches zeitabhängiges Temperaturprofil mit den zugehörigen abgeleiteten Isothermen (Linien gleicher Temperatur) ist in Abb. 4.1 dargestellt. Weiters sind aus der Steigung der 0°C -Isotherme die Frost- und Tauperioden abgeleitet. Dabei bedeutet eine fallende 0°C -Isotherme ein Fortschreiten des Frostes und eine steigende 0°C -Isotherme ein Tauen des Bodens.

Besonderes Augenmerk ist auf die teilweise Zweigleisigkeit der Isotherme zu legen. Wenn die Temperatur schnell ansteigt, kommt es zum beidseitigen Tauen im Boden. Diese Zeitabschnitte gelten als besonders kritische Phasen für die Straßenkonstruktion und sollten in Zukunft genauer untersucht werden. Von oben tauendes Schmelzwasser kann nicht abfließen, wodurch es im Untergrund zu einer verstärkten Aufweichung des Bodens kommen kann.

4.3 Einfluss der Dicke der Straßenbefestigung auf die 0°C -Isotherme

Durch Variation der Asphaltbefestigung ist der Einfluss der Dicke auf die Temperaturverteilung untersucht. Dargestellt sind in Abb. 4.2 die 0°C -Isothermen aller Lastklassen der Bautype AS1. Näherungsweise ergibt sich, dass eine Veränderung der Asphaltsschicht um x cm eine Reduktion der Frosttiefe um dem Faktor 2 verursacht. Einerseits wird das Eindringen des Frostes erschwert und andererseits wird die frostempfindliche Tiefe nach unten versetzt. Es wird davon

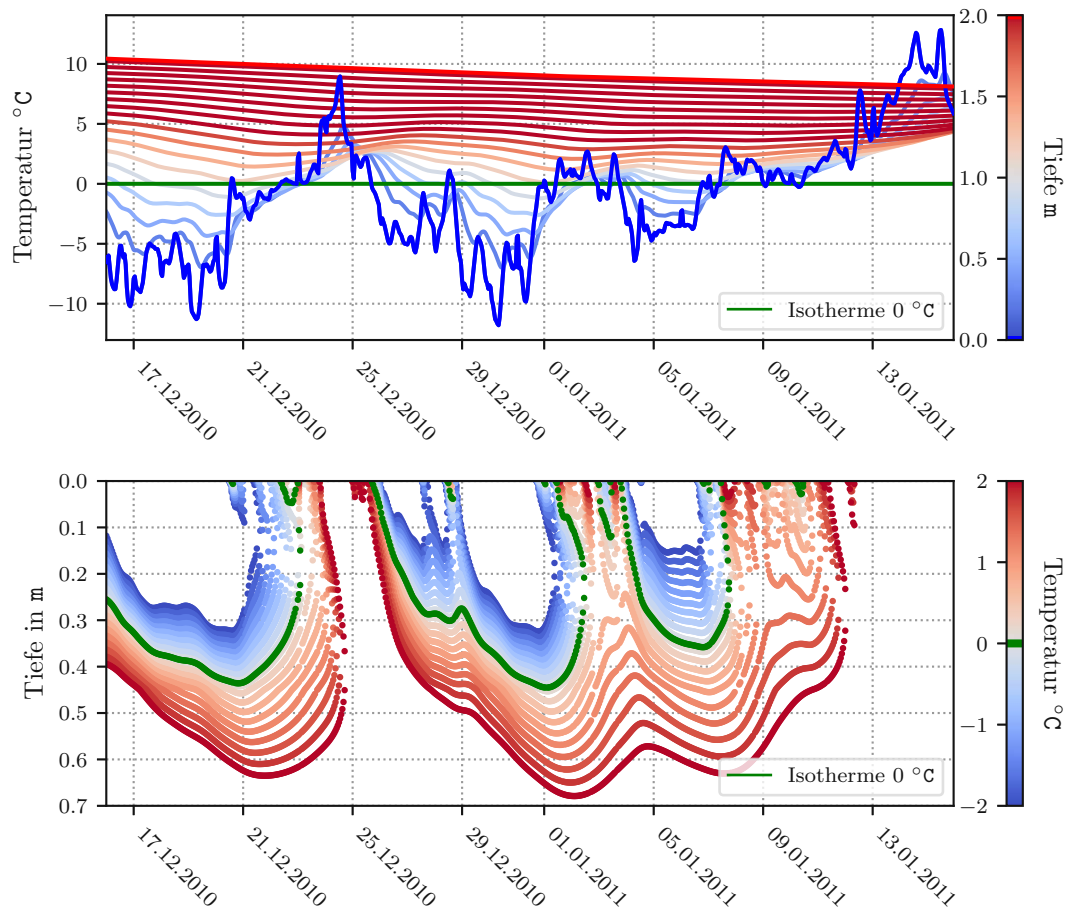


Abb. 4.1: Exemplarisch ermittelte zeitabhängige Temperaturprofile mittels der FDM für die Station Stockerau (Breitengrad: 48.39694444, Längengrad:16.1925, Seehöhe:203 m.ü.A)

ausgegangen, dass die untere Randbedingung nicht in 2 m Tiefe, gerechnet von der Oberfläche der Straßenkonstruktion, sondern in 2 m Tiefe des gewachsenen Bodens wirkt.

4.4 Berechnung der jährlichen Frost- und Tauperioden

Gemäß der RVS 03.08.68 [1] und RVS 03.08.69 [2] werden die Untergrundtragfähigkeiten in den jeweiligen Perioden angepasst, um den veränderten jahreszeitlichen Bedingungen Rechnung zu tragen. Diese auf langjährige Erfahrung beruhende und bewehrte Methode wird statistisch zu erfassen versucht. In dem Modell ist eine Frostperiode als jener Bereich definiert, bei dem die 0°C-Isotherme eine positive Steigung erfährt. In analoger Weise ist ein Tauabschnitt definiert, wobei die 0°C-Isotherme eine negative Steigung aufweisen muss. Ein Kritikpunkt dieser Definition liegt darin, dass zwischen den verschiedenen Steigungen der 0°C-Isotherme nicht differenziert ist. Wie schnell Frost in den Boden eindringt, beeinflusst stark die Wahrscheinlichkeit der Eislinnenbildung und damit der ungünstigen Wasseranreicherung. Um nun die Auftretswahrscheinlichkeit der Tauperioden und damit die jährliche Schädigung bewerten zu können, ist es notwendig eine passende Verteilung für die jährliche Häufigkeit an Frost- sowie Tautagen zu finden. Es wird versucht eine Verknüpfung der simulierten Temperaturprofile mit der aktuellen Richtlinie herzu-

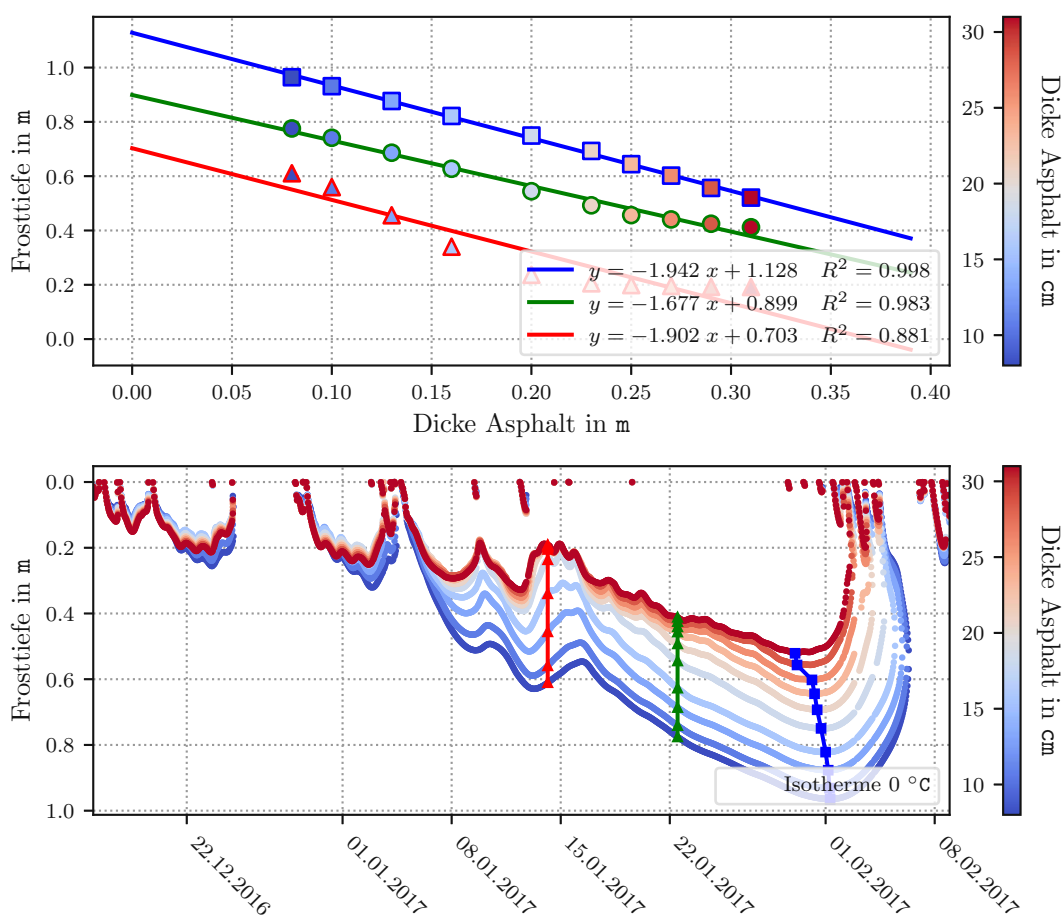


Abb. 4.2: Exemplarisch ermittelte zeitabhängige Temperaturprofile mittels der FDM für die Station Stockerau (Breitengrad: 48.39694444, Längengrad:16.1925, Seehöhe:203 m.ü.A)

stellen. Für beide Fälle sind Gaußverteilungen angenommen. Die Dichte- und Verteilungsfunktion lassen sich wie folgt abschreiben:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.1)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad (4.2)$$

Die sich ergebenden Momente μ und σ für die Häufigkeit von Tau- und Frosttagen können der Abb. 4.3 entnommen werden. Es sei darauf hingewiesen, dass zur Anpassung der Verteilungsfunktion eine neue Metrik (Tag des Jahres) eingeführt ist, wobei von einem Schaltjahr ausgegangen ist. Durch Einsetzen der Zeitabschnitte der RVS 03.08.68 [1] und RVS 03.08.69 [2] sind jene Quantil Werte bestimmt, welche es benötigt um auf gleiche Perioden zu kommen. Für die Frostperiode ergeben sich die Quantile 1.06% und 95.06%. Dieser Bereich würde mit der gewählten Verteilung 94% aller Frostabschnitte aus 18 Jahren Temperaturdaten für Österreich abdecken. Die Tauperiode startet beim Quantil 88.74% und endet verzögert nach dem letzten auftreten von Tau. Der Boden braucht Zeit, um sich zu konsolidieren und zu verfestigen, daher wirkt die reduzierte Tragfähigkeit im Untergrund noch längere Zeit nach der letzten Tauphase. Die mit dem

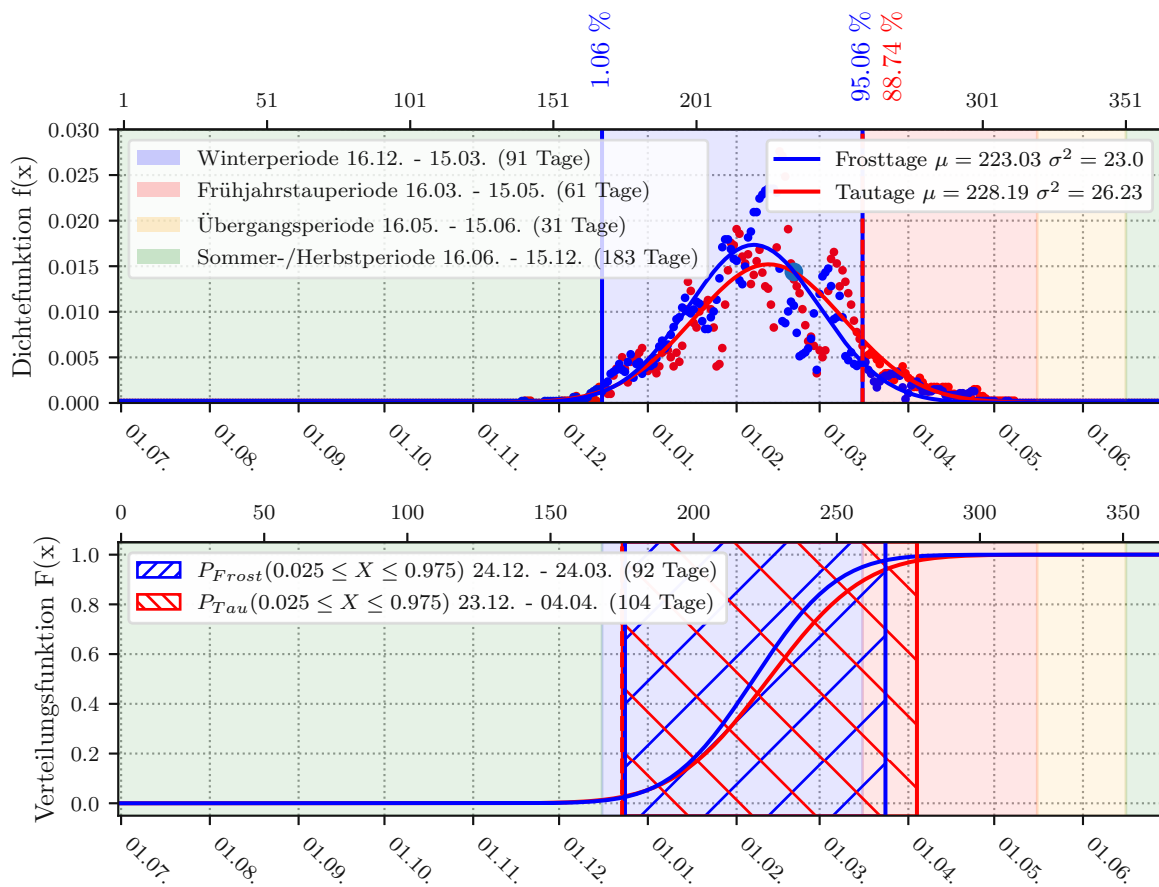


Abb. 4.3: Dichte- und Verteilungsfunktion der jährlichen Häufigkeit an Frost- sowie Tautagen mit 95% Intervallen

Verfahren ermittelte Frostperiode ergibt sich für ein Konfidenzintervall von 95% mit 92 Tagen und für die Tauperiode mit gleichem Konfidenzintervall mit 104 Tagen. Im Vergleich zur Richtlinie ist die Frostperiode mit der gewählten Interpretation sehr genau abgebildet, wohingegen die Tauperiode stark überschätzt ist. Deswegen ist es notwendig, eine neue Grenze der Tauperiode zu definieren. Während der Frostperioden treten oft durch Schwankungen der Temperatur ausgelöst durch meteorologische Bedingungen, kurze Tauphasen auf. Sobald die stündliche 0°C -Isotherme eine positive Steigung, unabhängig von der Dauer, registriert, geht der Tag als Tautag in die Statistik ein. Eine Tauperiode wird daher nur dann als solche definiert, wenn in den 18 Jahren überwiegend Tau an diesen Tagen auftritt. Definiert ist die Periode als jener Bereich der folgende Bedingung einhält:

$$f_{Frost}(x) < f_{Tau}(x) \quad (4.3)$$

Die Tauperiode startet an jenem Punkt an dem die Dichtefunktion der Frosttage die Dichtefunktion der Tautage unterschreitet. Dieser heuristische Ansatz liefert wie in Abb. 4.4 ersichtlich vergleichbare Perioden, wie sie in der RVS 03.08.68 [1] und RVS 03.08.69 [2] definiert sind.

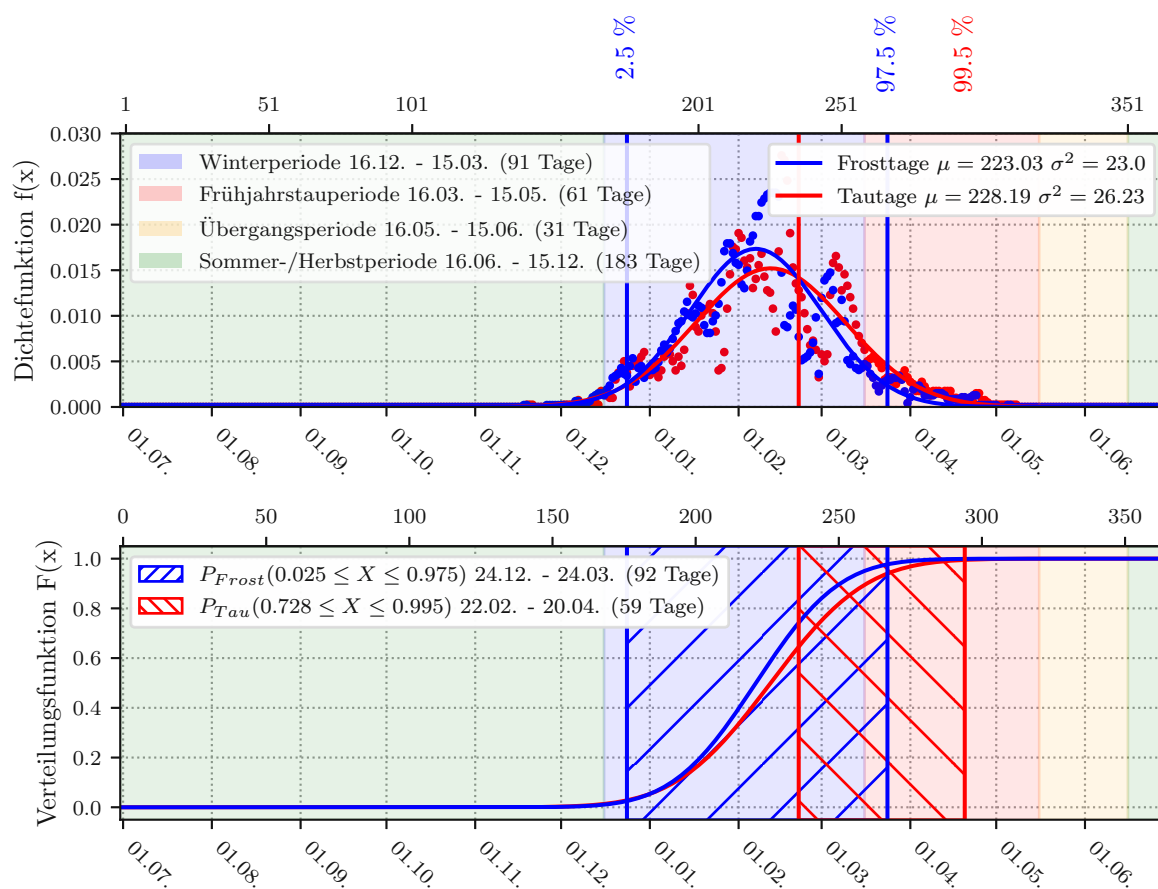


Abb. 4.4: Dichte- und Verteilungsfunktion der jährlichen Häufigkeit an Frost- sowie Tautagen mit dem neu eingeführten Kriterium zur Bestimmung der Dauer der Tauperioden

4.5 Die maximale Frosttiefen und die Verteilung über Österreich

Die maximalen Frosttiefen sind für alle Lastklassen der Bautype AS1 und BE1 mit dem oben beschriebenen Modell bestimmt und in Abb. 4.5 sowie der Abb. 4.8 gegenübergestellt. Es sind jene Bereiche markiert, in denen die Frosttiefe die frostsicheren Schichten überschreitet. Zusätzlich sind die errechneten maximalen Frosttiefen mittels Inverser Distanzwichtung (IDW) interpoliert. Die Karten der maximalen Frosttiefen aller Lastklassen der Bautypen AS1 und BE1 können den Abb. 4.6, Abb. 4.7, Abb. 4.9 und Abb. 4.10 entnommen werden. Wie zu erwarten zeigt sich, dass in den Alpenregionen wesentlich höhere maximale Frosttiefen erreicht werden. Bei Asphaltbefestigungen liegen ab LK4 und bei Betonbefestigungen ab LK2.1 90% alle errechneten Frosttiefen der 18 Jahre im frostsicheren Aufbau. Alle höheren Lastklassen können somit mit einem Sicherheitsniveau von 90% als durchgehend frostsicher angenommen werden. In beiden Fällen zeigt sich eine deutliche Reduktion der Frosttiefen bei Zunahme der Lastklasse. Eine Erhöhung der Lastklasse erhöht also nicht nur die Dicke des frostsicheren Aufbaus, sondern reduziert auch die Frosttiefe und wirkt sich damit doppelt positiv auf die Frostsicherheit aus.

4.6 Abschätzung der Dicke des frostsicheren Aufbaus

Abschließend stellt sich nun die Frage, wie für niedrigere Lastklassen die erforderliche Dicke der Frostschutzschicht abgeschätzt werden kann. Es zeigt sich in den Abb. 4.11 und Abb. 4.12 ein linearer Zusammenhang zwischen der Seehöhe und der Frosttiefe, allerdings ergeben sich selbst für die höchsten Lastklassen unrealistische Schichtdicken. Daher ist es notwendig vorab nur jene Frostperioden in Betracht zu ziehen, welche auch tatsächlich zu kritischen Tragfähigkeitsreduktionen im Oberbau führen. Als gefährlich werden jene Frostverläufe eingestuft, welche langsam und über einen längeren Zeitraum in den Boden eindringen. In dieser Arbeit sind jene Perioden berücksichtigt, welche mit einer Geschwindigkeit < 2 cm/Tag in den Boden eindringen. Weiter sind die Frosttiefen um den frostsicheren Aufbau bereinigt, woraus sich direkt der Zuschlag zur unteren ungebunden Tragschicht (Frostschutzschicht) ableiten lässt. Die gefilterten und bereinigten Regressionsparameter sind in den Abb. 4.13 und den Abb. 4.16 dargestellt. Zusätzlich können die abgeleiteten Regressionsparameter in konzentrierter Fassung der Abb. 4.14 und der Abb. 4.16 entnommen werden.

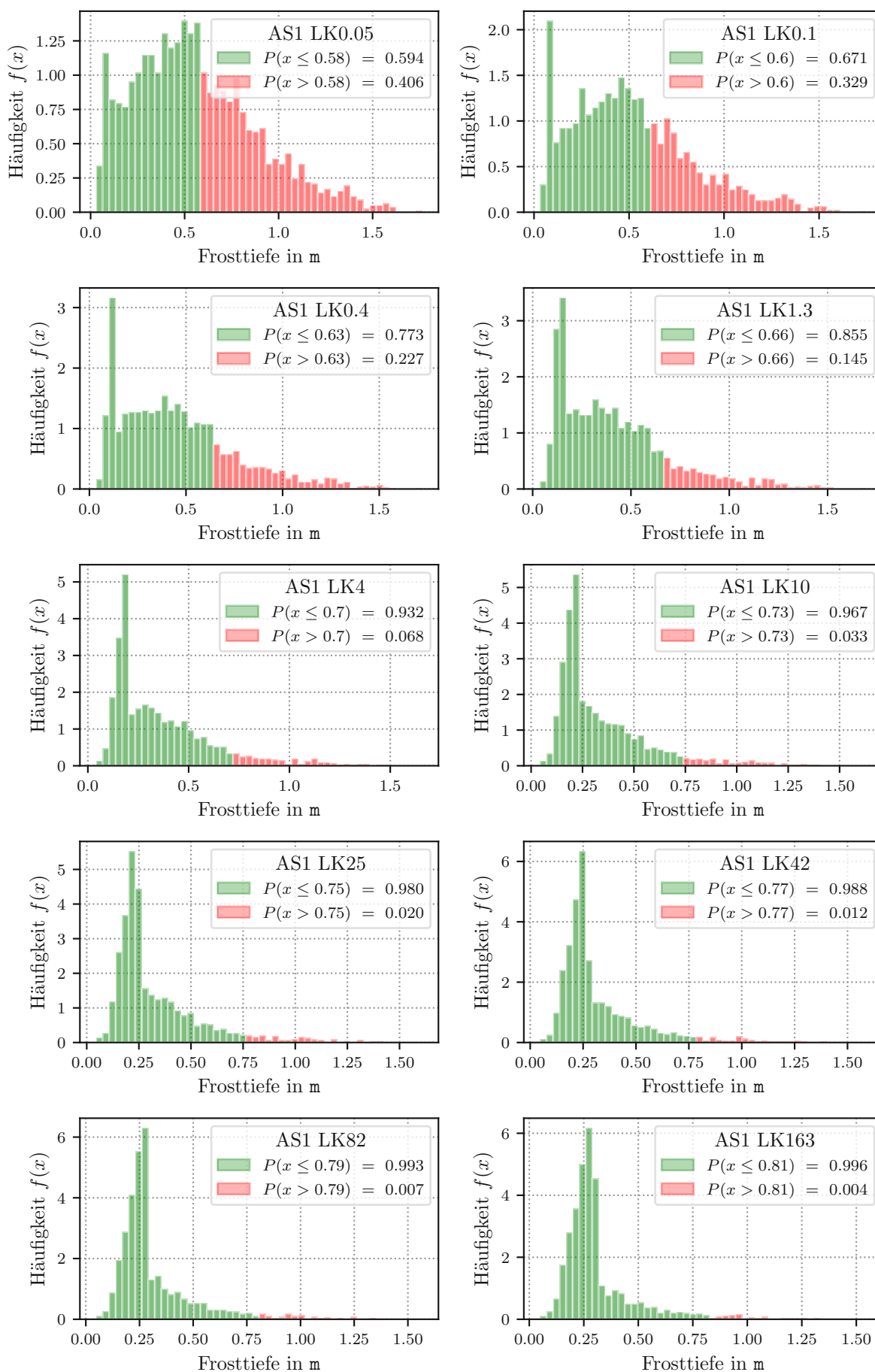
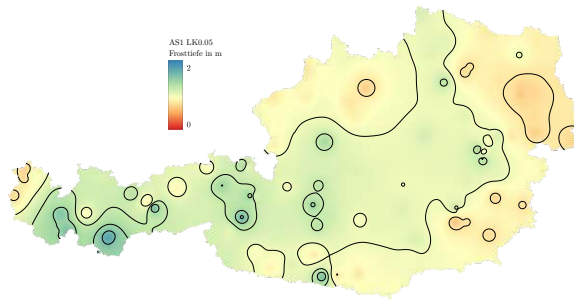
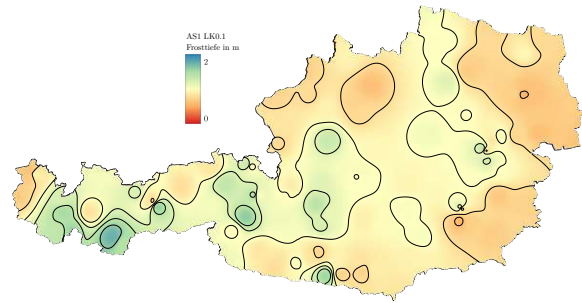


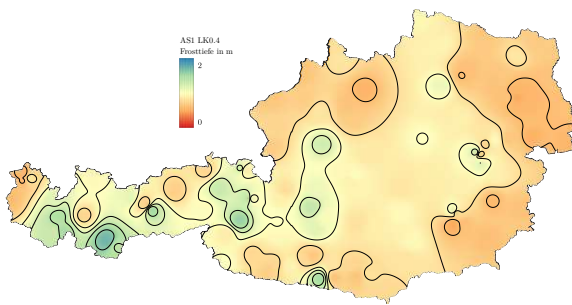
Abb. 4.5: Ermittelten Frosttiefen aller Lastklassen der Bautype AS1



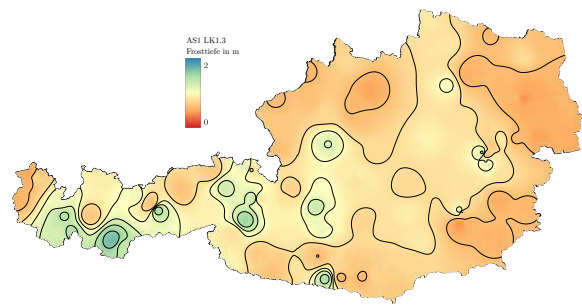
(a) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK0.05



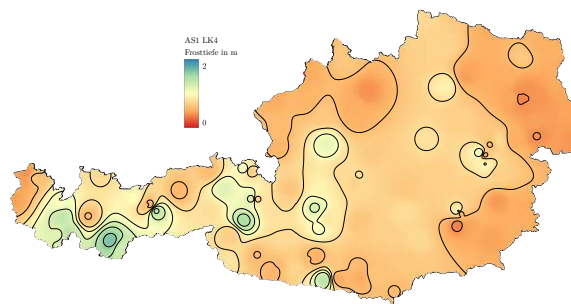
(b) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK0.1



(c) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK0.4

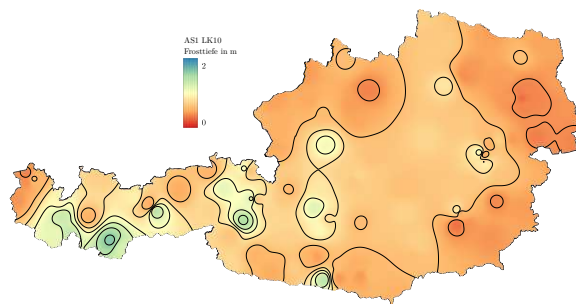


(d) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK1.3

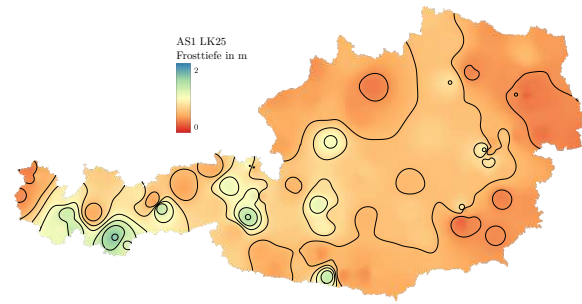


(e) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK4

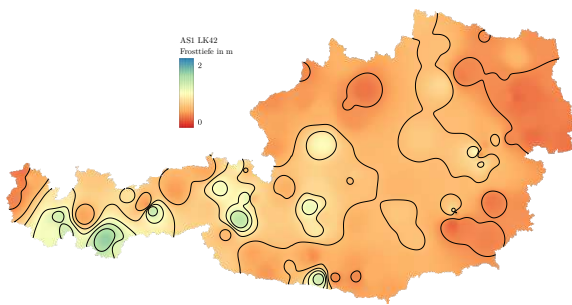
Abb. 4.6: Verteilung der maximalen Frosttiefen AS1 LK0.05 - LK4



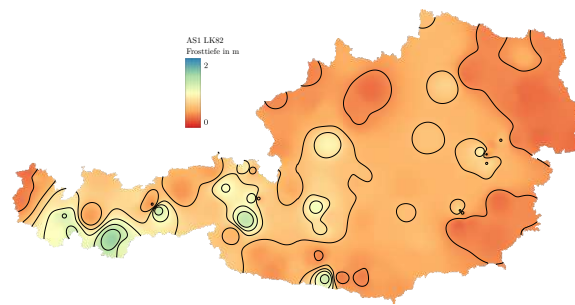
(a) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK10



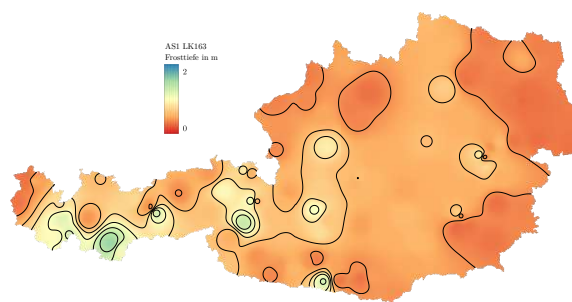
(b) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK25



(c) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK42



(d) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK82



(e) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK163

Abb. 4.7: Verteilung der maximalen Frosttiefen AS1 LK10 - LK163

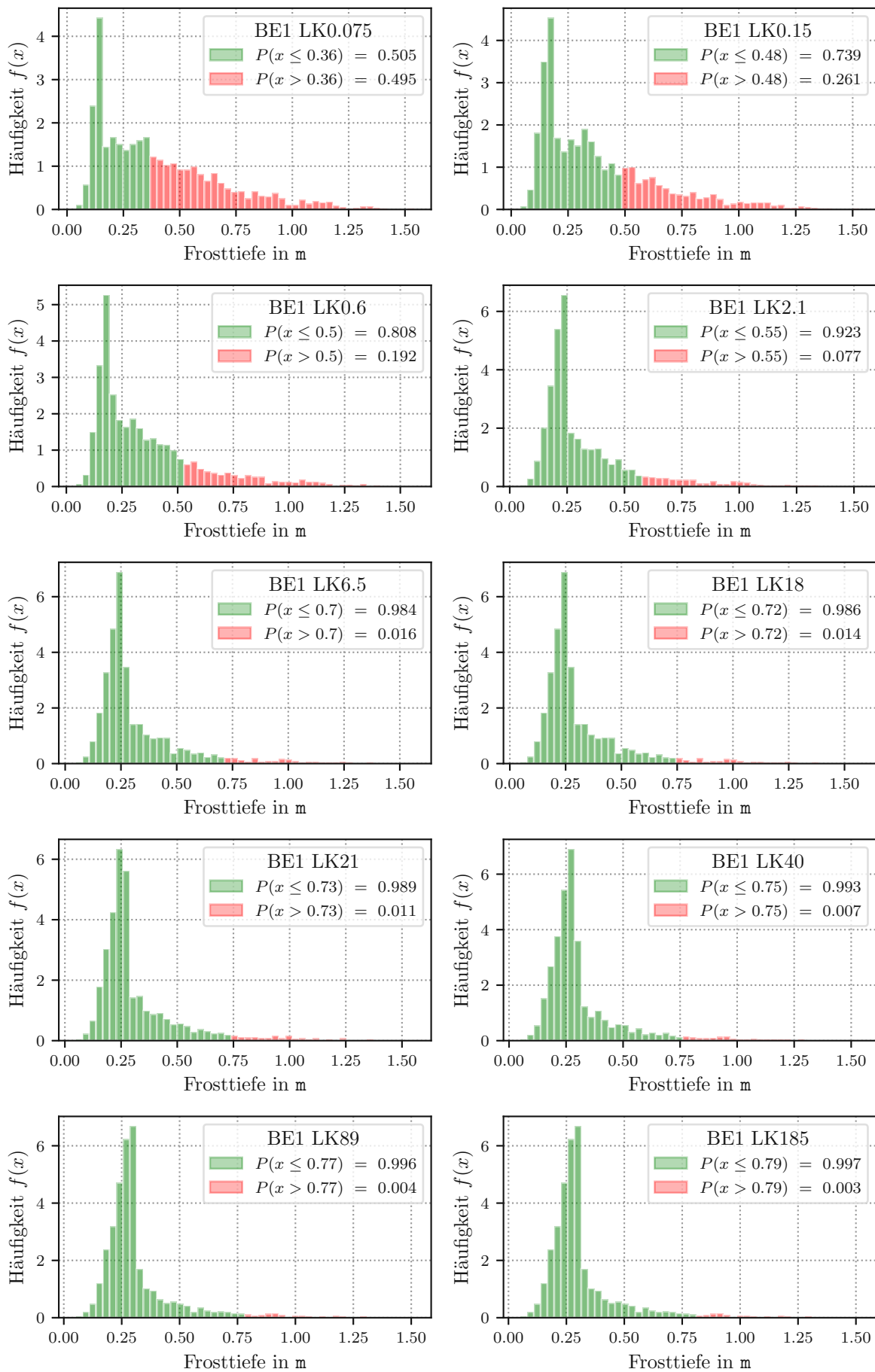
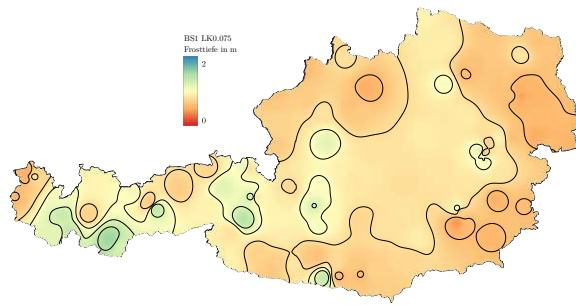
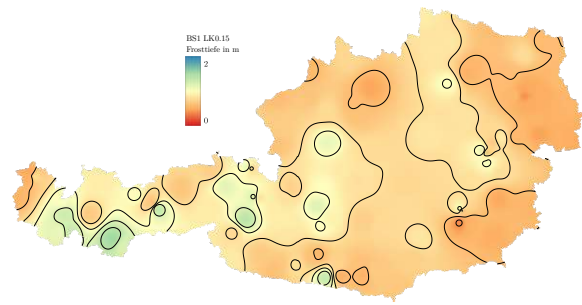


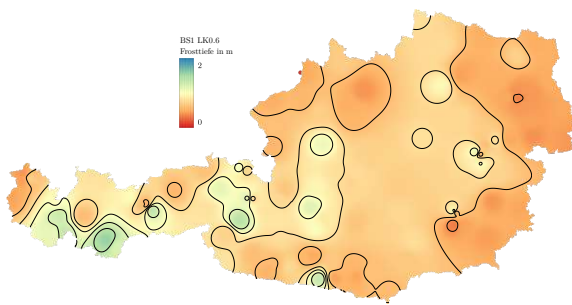
Abb. 4.8: Ermittelten Frosttiefen aller Lastklassen der der Bautype BE1



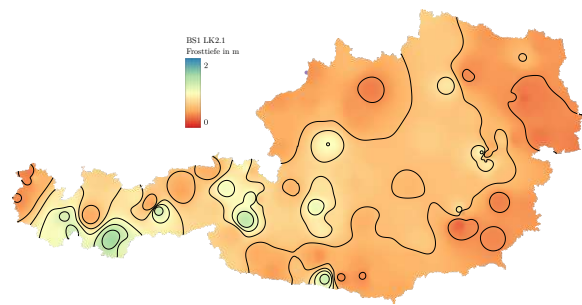
(a) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK0.075



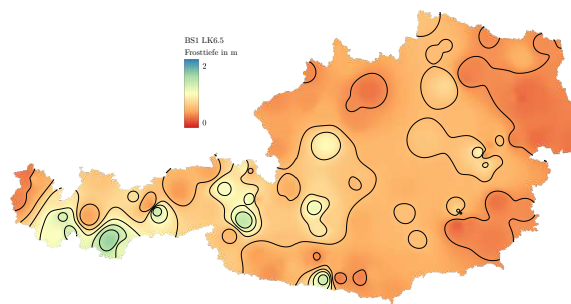
(b) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK0.15



(c) max. Frosttiefen Bautype AS1 LK0.6

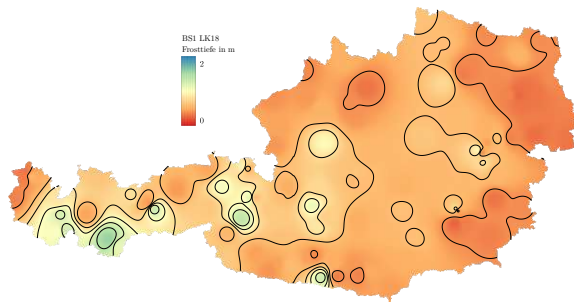


(d) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK2.1

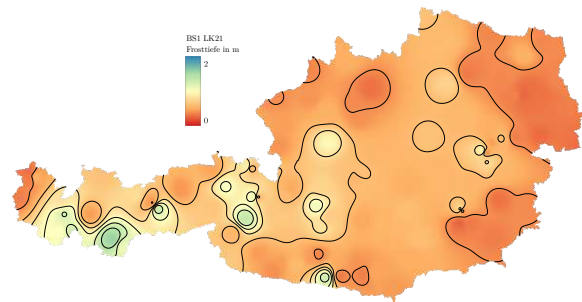


(e) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK6.5

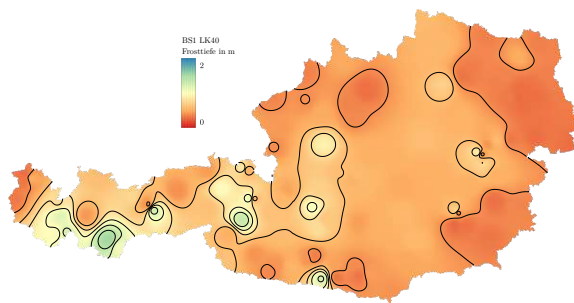
Abb. 4.9: Verteilung der maximalen Frosttiefen BE1 LK0.075 - LK6.5



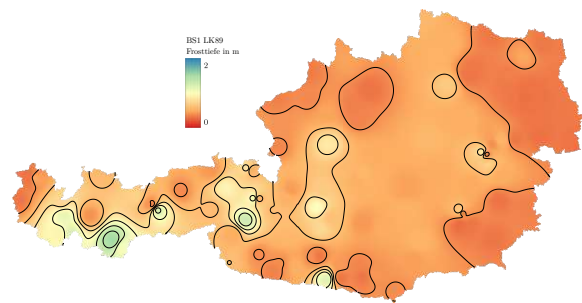
(a) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK18



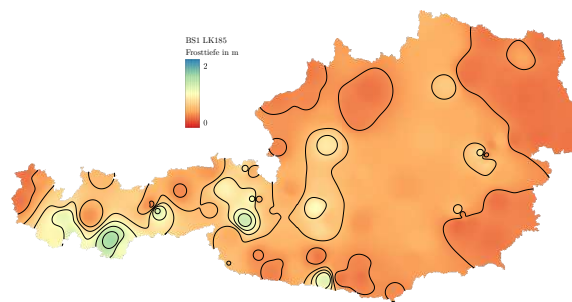
(b) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK21



(c) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK40



(d) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK89



(e) max. Frosttiefen Bautype BE1 LK185

Abb. 4.10: Verteilung der maximalen Frosttiefen BE1 LK18 - LK185

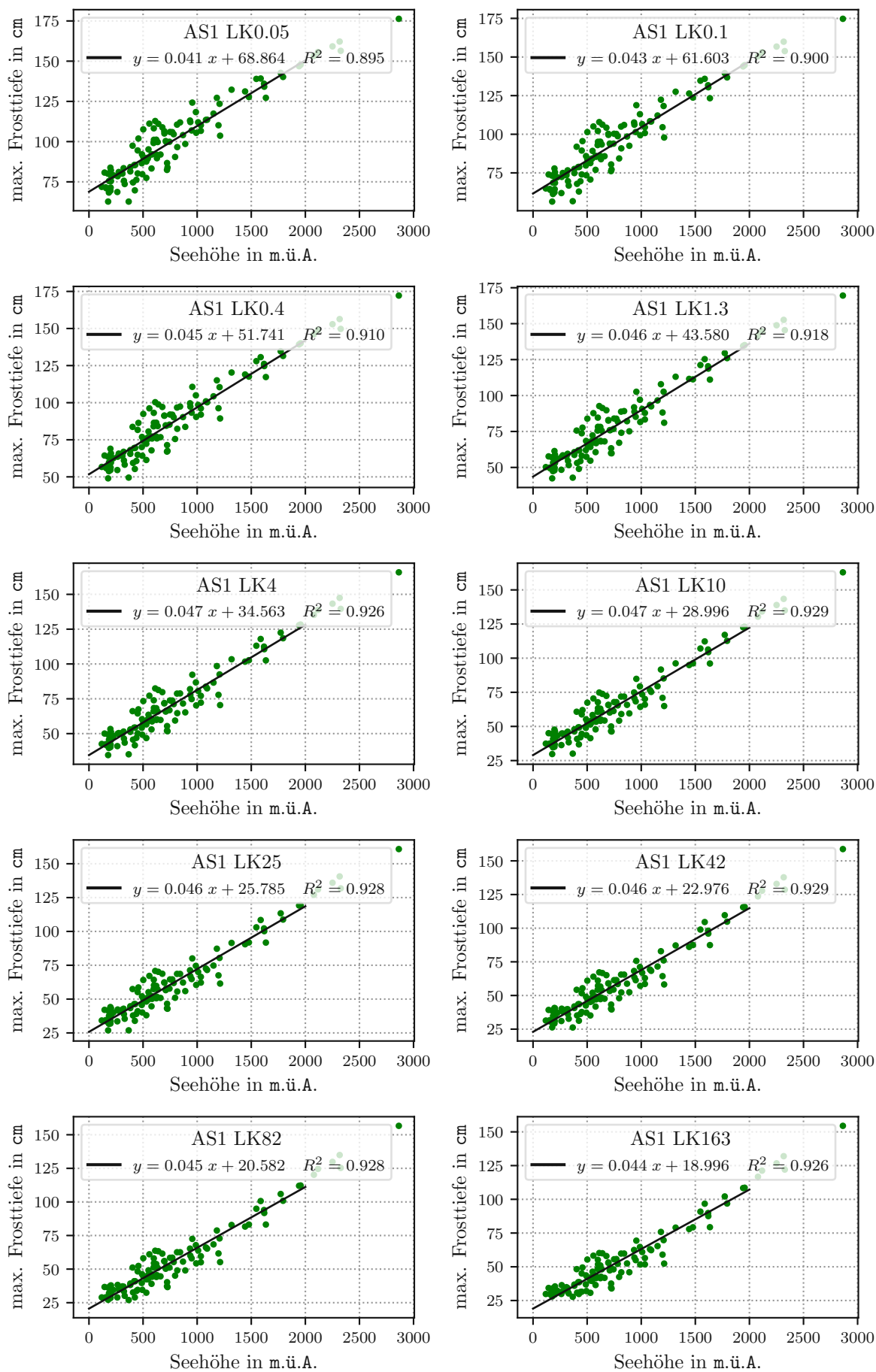


Abb. 4.11: max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe aller Lastklassen der Bautype AS1

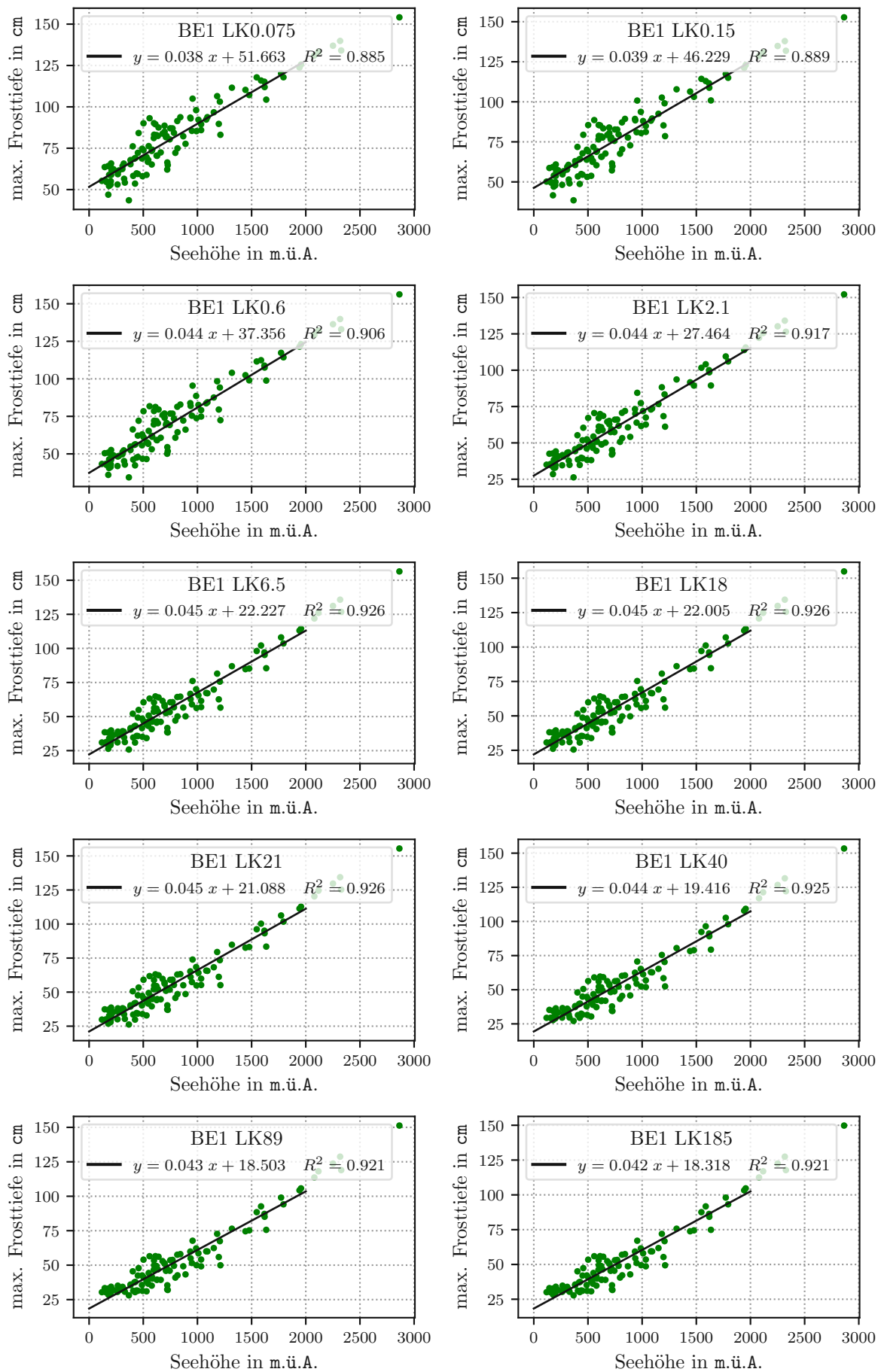


Abb. 4.12: max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe aller Lastklassen der Bautype BE1

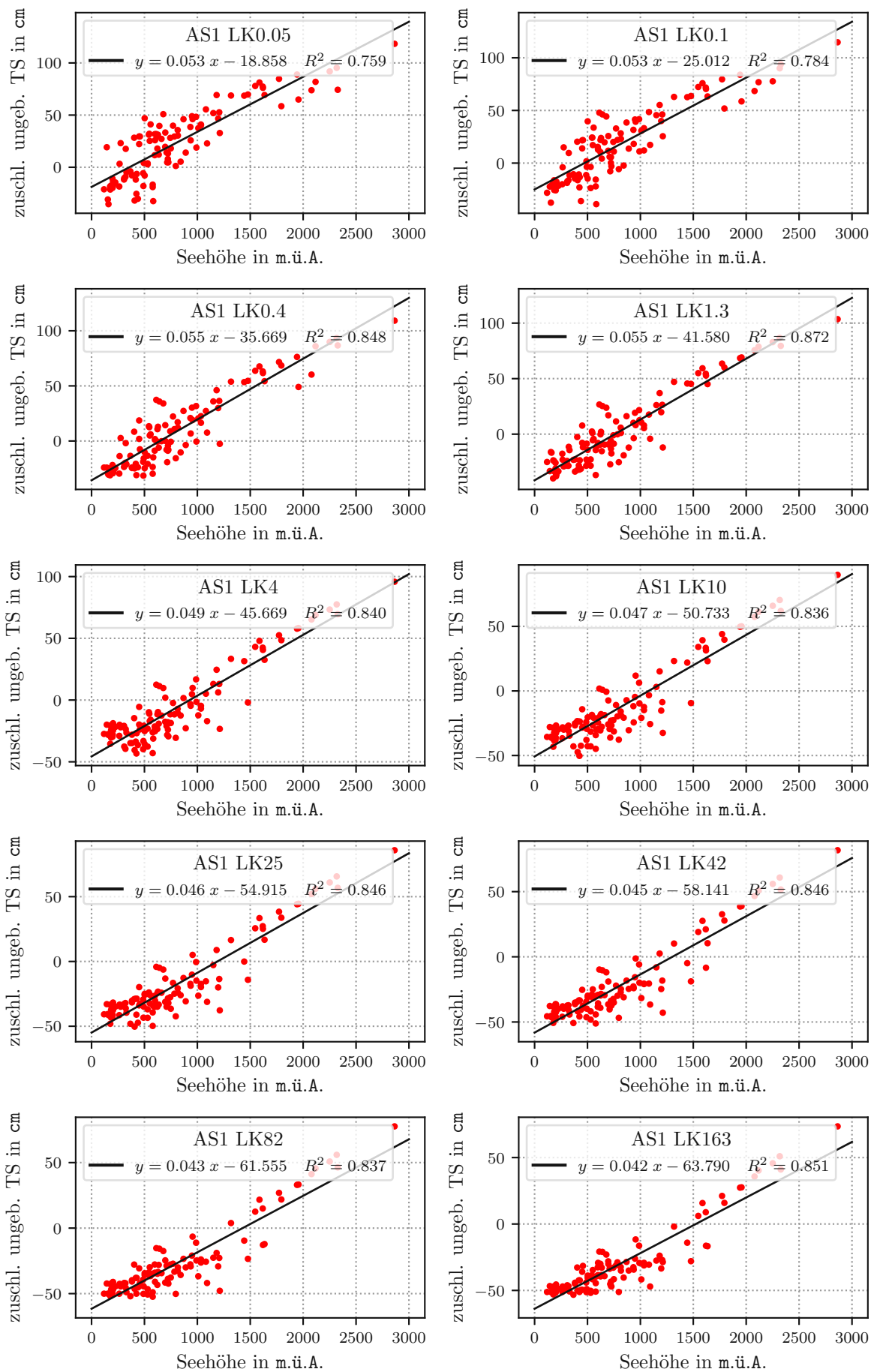
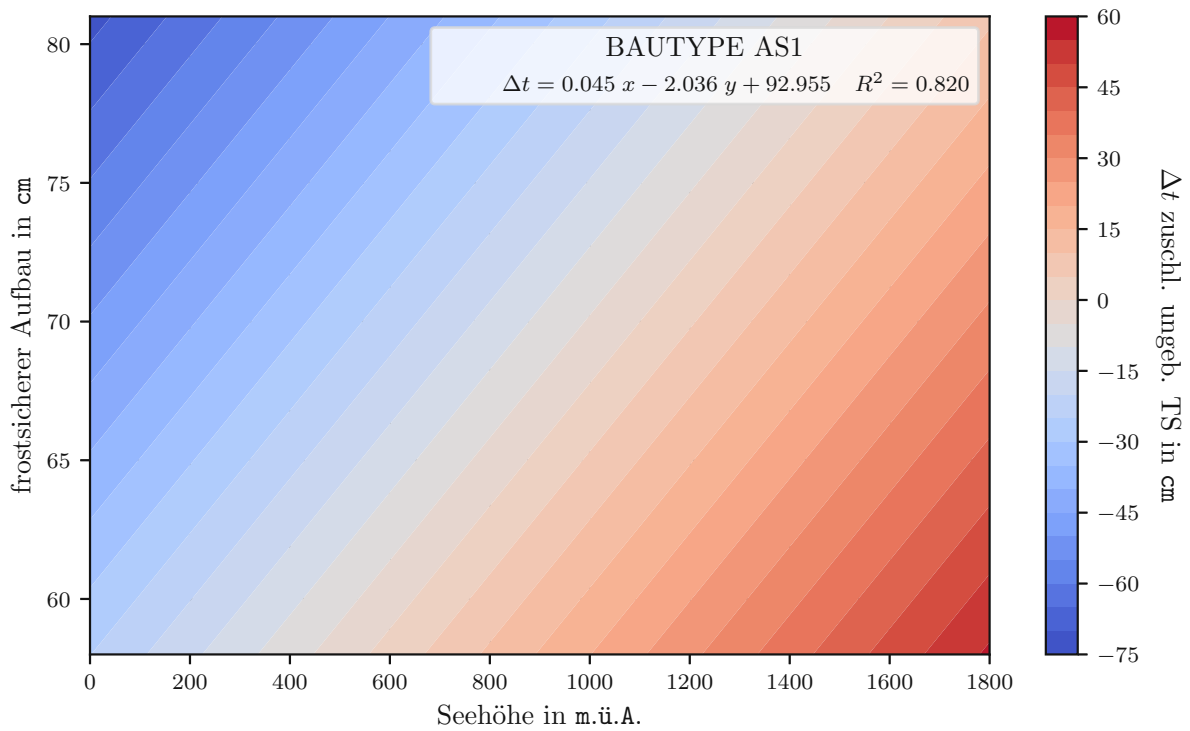
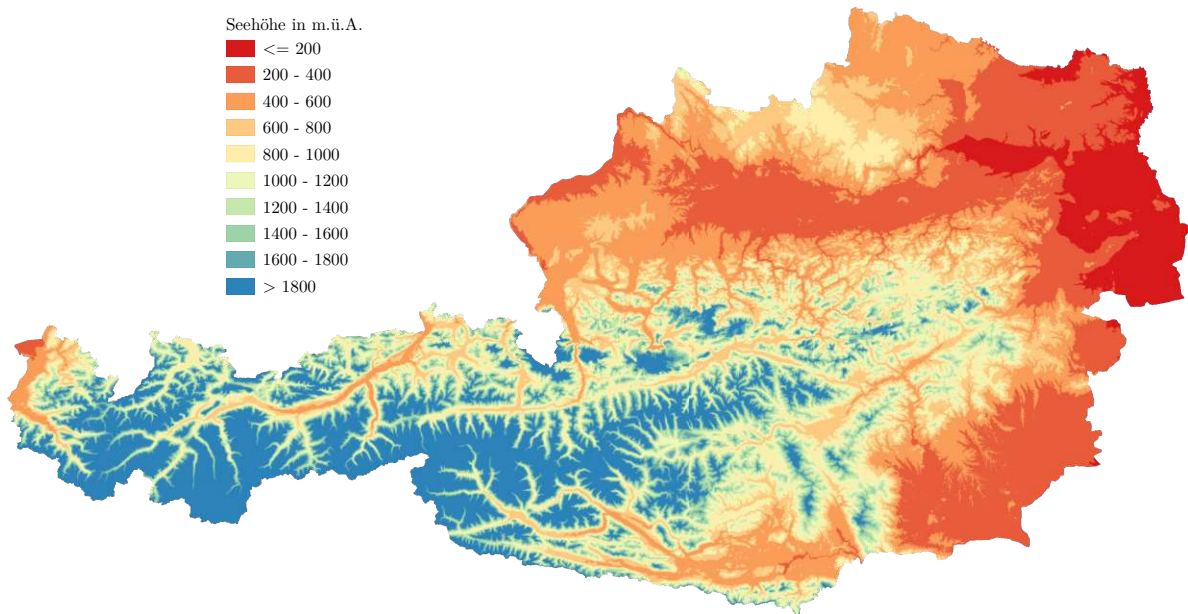


Abb. 4.13: max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe aller Lastklassen der Bautype AS1



(a) max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe und des frostsicheren Aufbaus für die Bautype AS1



(b) Seehöhen Österreich

Abb. 4.14: Regression in konzentrierter Fassung für die Bautype AS1

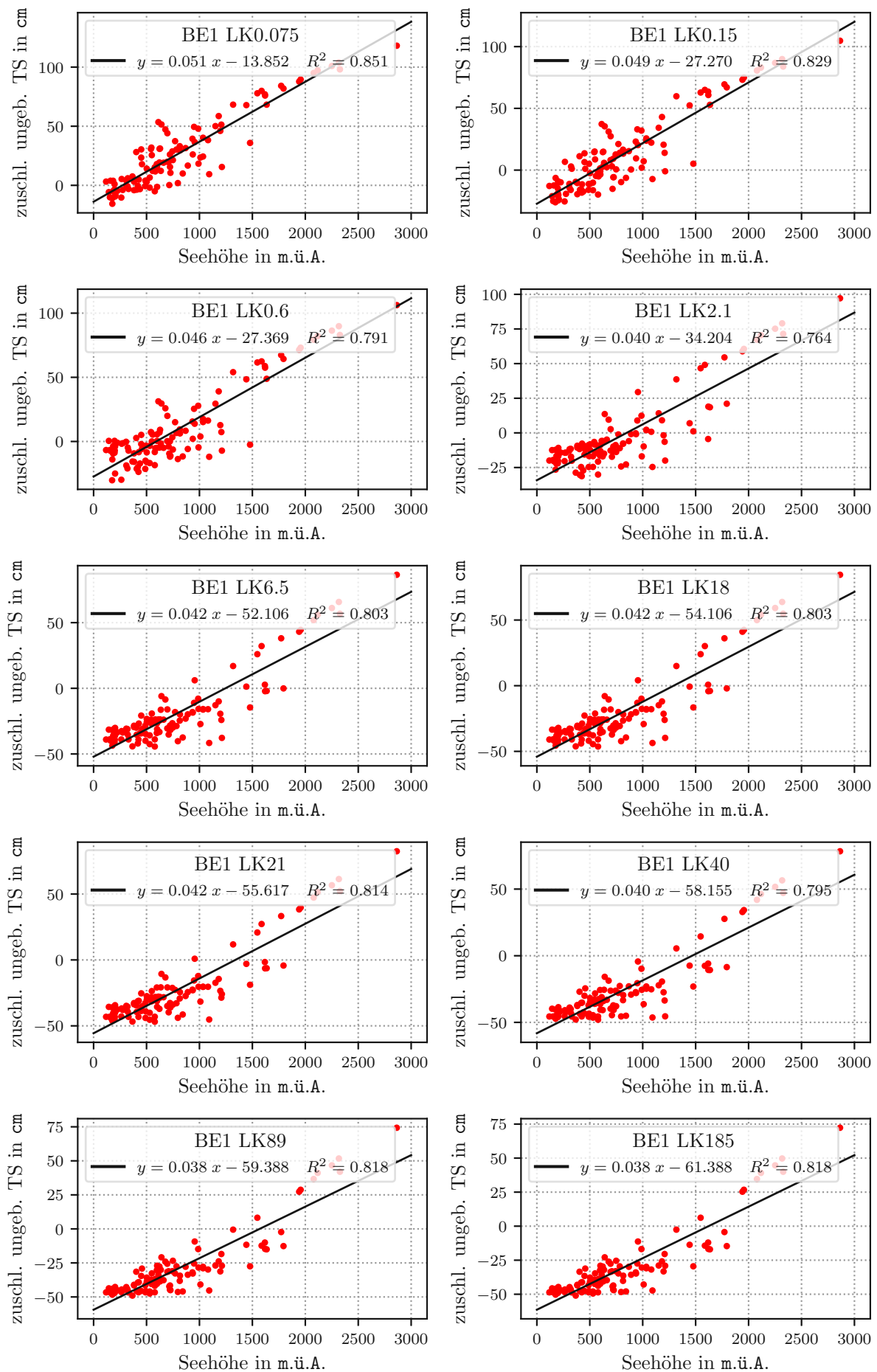
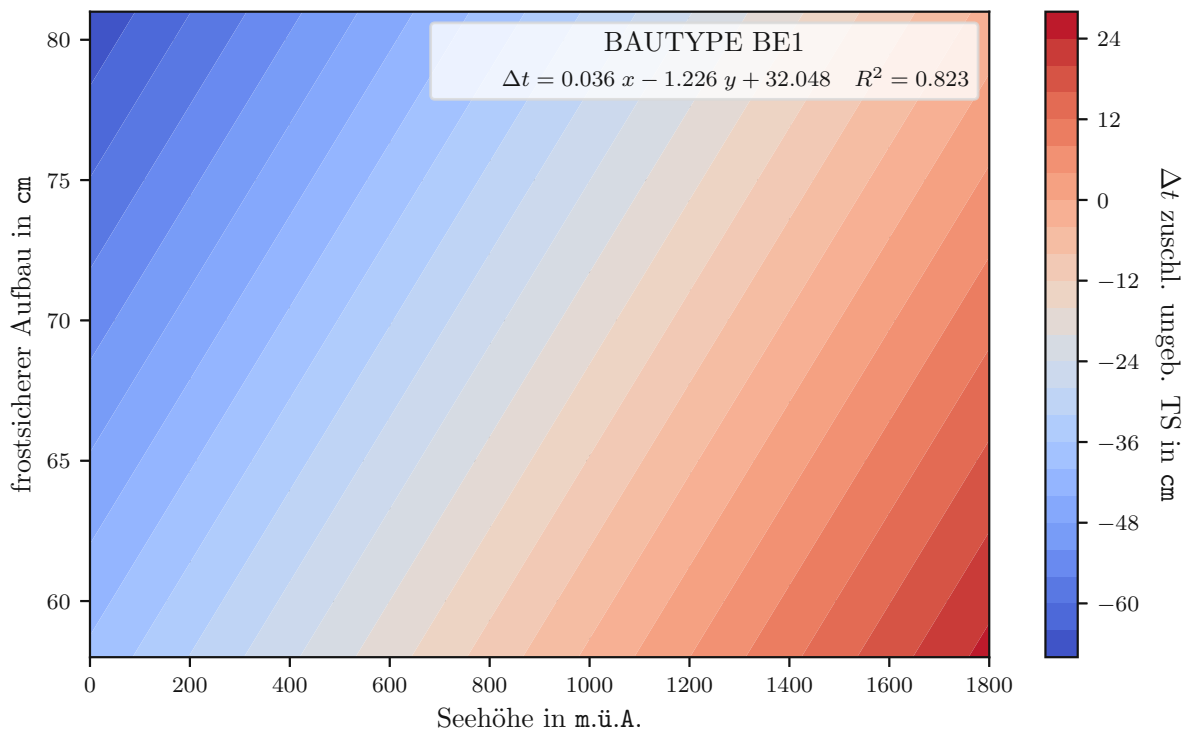
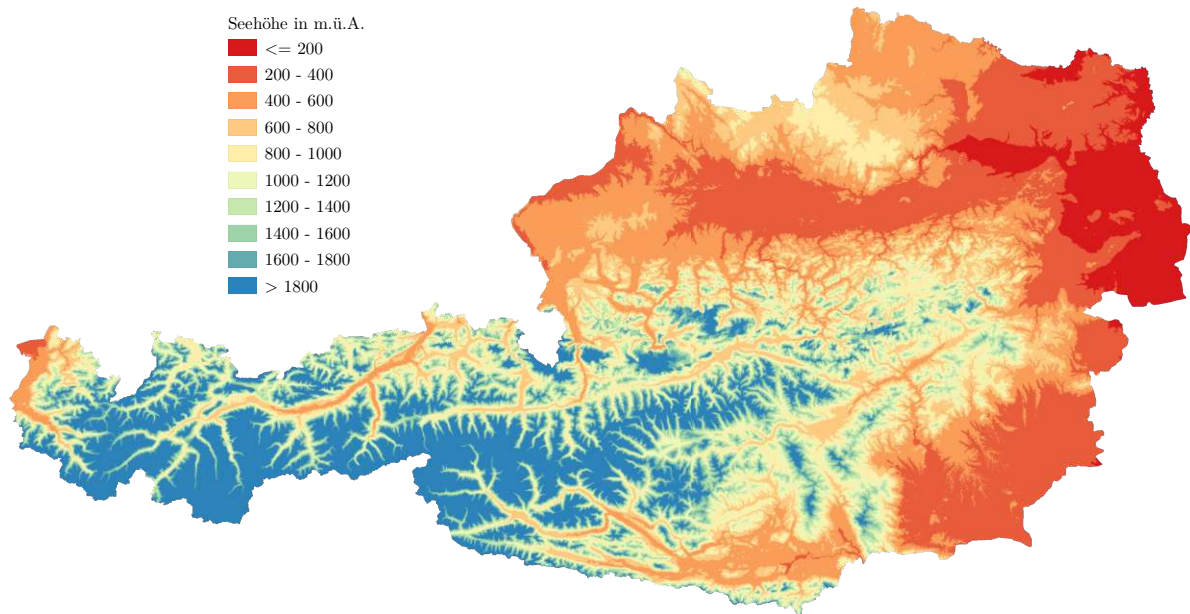


Abb. 4.15: max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe aller Lastklassen der Bautype BE1



(a) max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe und des frostsicheren Aufbaus für die Bautype BE1



(b) Seehöhen Österreich

Abb. 4.16: Regression in konzentrierter Fassung für die Bautype BE1

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird die analytische Lösung der Wärmeleitgleichung mit zeitabhängigen Randbedingungen hergeleitet. Mit dieser wird das Konvergenzverhalten der verschiedenen Varianten der Finiten Differenzen Methode untersucht, woraus eine für den gegenständlichen Anwendungszweck zur Prognose der Frosteindringung in Straßenoberbauten geeignete Variante gewählt wird. Um die Anzahl der benötigten Messgrößen gering zu halten und um eine flächendeckende Auswertung durchzuführen, ist die FDM mit Robin Randbedingung formuliert. Dies ermöglicht es in dem Modell, eine bekannte Oberflächentemperatur durch eine bekannte Umgebungstemperatur zu ersetzen. Zusätzlich ist der Strahlungseintrag in dem Modell über die Energiebilanzgleichung subsumiert, womit alle maßgebenden Einflussgrößen berücksichtigt werden können. Zur Abschätzung der Einflussgrößen werden verschiedene Modelle miteinander verglichen und direkt in die FDM eingesetzt, um die Auswirkung auf das zugrundeliegende Modell abzuschätzen. Durch Einführung eines Wolkenfaktors in Abhängigkeit der Prominenz der täglichen Lufttemperatur konnte der Strahlungseintrag rein aus den geometrischen Beziehungen zwischen Sonne und Erde mit guter Näherung abgeschätzt werden. Es wird gezeigt, dass die Konvektion zwar einen großen Einfluss auf die Energiebilanz am Straßenkörper hat, diese jedoch bei gleichbleibender Genauigkeit als konstant mit 10 m s^{-1} angenommen werden kann. Dadurch ist es möglich mit dem verwendeten Modell [10, 31] die Oberflächentemperaturen am Straßenkörper für Asphalt- und Betonbefestigungen und in weiterer Folge die Temperaturprofile abzuschätzen. Alle Temperaturprofile der Bautypen AS1 und BE1 werden anhand von Temperaturmessdaten aus einer 17-jährlichen Messreihe für das Österreichische Bundesgebiet simuliert und für mögliche zukünftige Auswertungen in einer Datenbank gesichert. Anhand der Temperaturprofile sind die maßgebenden Frosttiefen bestimmt und ausgewertet. Das Ergebnis der Auswertung sind Funktionen in Abhängigkeit der Seehöhe und der Dicke des frostsicheren Aufbaus, mit denen der notwendige Zuschlag zur ungebundenen Tragschicht für die Bautypen AS1 und BE1 abgeschätzt werden kann. Für die abgeleiteten Funktionen gilt es in Zukunft geeignete Anwendungsgrenzen zu definieren. Weiter ist es erforderlich, das Kriterium der maßgebenden Frostverläufe zu validieren. Außerdem wäre es für zukünftige Anwendungen lohnenswert, analytische Lösungen für Mehrschichtsysteme mithilfe der Fourier Transformation herzuleiten. Dies ermöglicht es, die Randbedingung mittels Diskreter Fourier Transformation und in weitere Folge mittels Fast Fourier Transformation zu diskretisieren.

Literaturverzeichnis

- [1] Forschungsgesellschaft Straße - Schiene - Verkehr(1. Januar 2018): *RVS 03.08.68 Rechnerische Dimensionierung von Asphaltstraßen.*
- [2] Forschungsgesellschaft Straße - Schiene - Verkehr(1. Juli 2020): *RVS 03.08.69 Rechnerische Dimensionierung von Betonstraßen.*
- [3] Forschungsgesellschaft Straße - Schiene - Verkehr(1. Juni 2016): *RVS 03.08.63 Oberbaubemessung.*
- [4] Holmgren, William F. / Andrews, Robert W. / Lorenzo, Antonio T. / Stein, Joshua S.(14.06.2015 - 19.06.2015): *PVLIB Python 2015*In: 2015 IEEE 42nd Photovoltaic Specialist Conference (PVSC)1–5.
- [5] Austrian Standards(15.03.2013): *ÖNORM B 8110-7: Wärmeschutz im Hochbau - Teil 7: Tabellierte wärmeschutztechnische Bemessungswerte.*
- [6] Bernhard Haurwitz(1945): *Insolation in relation to cloudiness and cloud density*154–166.
- [7] Edward S. Barber(1957): *Caclulation of maximum pavement temperatures from weather reports.*
- [8] Barry J. Dempsey / Marshall R. Thompson(1970): *A heat transfer model for evaluation frost action and temperature-related effects in multilayered pavement systems A.*
- [9] Kasten, Fritz / Czeplak, Gerhard(1980): *Solar and terrestrial radiation dependent on the amount and type of cloud*, 2: 177–189.
- [10] Krebs, Hans Günter / Böllinger, Günter(1981): *Temperaturberechnungen am bituminösen Straßenkörper*, 347: .
- [11] Barry J. Dempsey / W A Herlache / Arti J. Patel(1986): *Climatic material structural pavement analysis program.*
- [12] Gueymard, Christian(1993): *Critical analysis and performance assessment of clear sky solar irradiance models using theoretical and measured data*, 2: 121–138.
- [13] Collishaw, P. G. / Evans, J. R. G.(1994): *An assessment of expressions for the apparent thermal conductivity of cellular materials*, 9: 2261–2273.
- [14] Robledo, Luis / Soler, Alfonso(2000): *Luminous efficacy of global solar radiation for clear skies*, 16: 1769–1779.
- [15] Ineichen, Pierre / Perez, Richard(2002): *A new airmass independent formulation for the Linke turbidity coefficient*, 3: 151–157.
- [16] Stein, Joshua S. / Hansen, Clifford W. / Reno, Matthew J.(2012): *Global horizontal irradiance clear sky models : implementation and analysis.*

- [17] Smith, David S. u.a.(2013): *Thermal conductivity of porous materials*, 17: 2260–2272.
- [18] Qin, Yinghong / Hiller, Jacob E.(2013): *Ways of formulating wind speed in heat convection significantly influencing pavement temperature prediction*, 5: 745–752.
- [19] Li, Hui / Harvey, John / Jones, David(2014): *Development and Preliminary Validation of Integrated Local Microclimate Model for Numerical Evaluation of Cool Pavement Strategies*, 1: 151–162.
- [20] Huang, Kaijian / Zollinger, Dan G. / Shi, Xijun / Sun, Peizhi(2017): *A developed method of analyzing temperature and moisture profiles in rigid pavement slabs*782–788.
- [21] Costa, Alberto / Nannicini, Giacomo(2018): *RBFOpt: an open-source library for black-box optimization with costly function evaluations*, 4: 597–629.
- [22] Chen, Jiaqi / Wang, Hao / Xie, Pengyu(2019): *Pavement temperature prediction: Theoretical models and critical affecting factors*113755.
- [23] Nannicini, Giacomo(2021): *On the implementation of a global optimization method for mixed-variable problems*1–25.
- [24] Georg Kübler (1964): *Der einfluss der witterungsfaktoren auf die frostgefährdung von strassen: Wissenschaftliche Berichte.* , Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.
- [25] Jessberger, H. L. (1971): *Bodenfrost: Zusammenstellung und Auswertung des neueren Schrifttums über die Wirkung des Frostes auf den Boden.* , Bundesmin. f. Verkehr, Abt. Strassenbau.
- [26] LeVeque, Randall J. (2007): *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems.* Philadelphia, Pa., Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM 3600 Market Street Floor 6 Philadelphia PA 19104).
- [27] M. Necati Özişik / Helcio R. B. Orlande / Marcelo J. Colaço / Renato M. Cotta (2017): *Finite Difference Methods in Heat Transfer, Second Edition.* , CRC Press.
- [28] Myint U, Tyn / Debnath, Lokenath (2007): *Linear partial differential equations for scientists and engineers.* Boston and Berlin, Birkhäuser, 4. ed. Auflage.
- [29] Schaible, L. (1957): *Frost- und Tauschäden an Verkehrswegen und deren Bekämpfung.* , W. Ernst.
- [30] Stavroulakis, Ioannis P. / Tersian, Stepan A. (2004): *Partial differential equations: An introduction with Mathematica and MAPLE.* New Jersey and London, World Scientific, (2. ed.) Auflage.
- [31] Wistuba, Michael (2003): *Klimaeinflüsse auf Asphaltstrassen: Maßgebende Temperatur für die analytische Oberbaubemessung in Österreich: Zugl.: Wien, Techn. Univ., Diss., 2002.* Wien, ISTU.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Temperaturprofil des homogenen Anfangswertproblems mit der halb sinusförmigen Anfangsbedingung und den Randbedingungen $T(0, t) = 0$, $T(l, t) = 0$ für den fiktiven Aufbau mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 1 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 0.4$	16
3.2	Temperaturprofil der analytischen Lösung des Randwertproblems mit zeitabhängigen den Randbedingungen sowie $A_1 = 10$, $B_1 = 10$, $f_1 = 1$, $B_2 = 10$, $l = 1$ und $a = 1$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq \pi$	21
3.3	Abweichung des mittels Euler Vorwärts Verfahren numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.5, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für den fiktiven Aufbau mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ und $C = 1 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ über das Zeitintervall $0 \leq t \leq \pi \text{ s}$	23
3.4	Temperaturfeld der numerischen expliziten Lösung des Randwertproblems mit einer Dirichlet Randbedingung und den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 3600 \text{ s}$	25
3.5	Temperaturfeld der analytischen Lösung des Randwertproblems mit einer Dirichlet Randbedingung und den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 3600 \text{ s}$	26
3.6	Die Abweichung des mittels Euler Vorwärts Verfahren numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.5, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für eine Betonschicht mit den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 4 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ s}$ und mit den Randbedingungen $T(x, 0) = 10$, $T(0, t) = \sin(\omega t)$, $T(l, t) = 10$ mit $\omega = \frac{4\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24}$	27
3.7	Abweichung des, mittels Euler Rückwärts Verfahren, numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.5, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für den fiktiven Aufbau mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ und $C = 1 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ über das Zeitintervall $0 \leq t \leq \pi \text{ s}$	28
3.8	Temperaturfeld des numerischen Euler Rückwärts Verfahrens - Lösung des Randwertproblems mit einer Dirichlet Randbedingung und den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 3600 \text{ s}$	31
3.9	Abweichung des, mittels Euler Rückwärts Verfahren, numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.1, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für eine Betonschicht mit den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 4 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ s}$ und mit den Randbedingungen $T(x, 0) = 10$, $T(0, t) = \sin(\omega t)$, $T(l, t) = 10$ mit $\omega = \frac{4\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24}$	32

3.10	Abweichung des, mittels Crank Nicolson Verfahren, numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.5, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für den fiktiven Aufbau mit den Parametern $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ und $C = 1 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ über das Zeitintervall $0 \leq t \leq \pi \text{ s}$	33
3.11	Temperaturfeld des numerischen Euler Rückwärts Verfahrens - Lösung des Randwertproblems mit einer Dirichlet Randbedingung und den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 3600 \text{ s}$	35
3.12	Abweichung des, mittels Crank Nicolson Verfahren, numerisch ermittelten Temperaturganges $T(0.1, t)$ von der analytischen Lösung bei verschiedenen Kombinationen von Δx und Δt für eine Betonschicht mit den Parametern $l = 0.2 \text{ m}$, $\lambda = 1.6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 900 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ und $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ über das Zeitintervall $0.0 \leq t \leq 4 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ s}$ und den Randbedingungen $T(x, 0) = 10$, $T(0, t) = \sin(\omega t)$, $T(l, t) = 10$ mit $\omega = \frac{4\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24}$	36
3.13	Vergleich der Performance der verschiedenen Verfahren bei Variation des Zeitinkrements Δt und der Schichtdicke Δx	37
3.14	Validierung des Euler Rückwärts Verfahrens durch den Vergleich der Oberflächentemperaturen mit den Parametern	43
3.15	Vergleich der simulierten kurzwelligigen Strahlung [9, 6, 14] mit der gemessenen kurzwelligigen Strahlung in Wopfung	45
3.16	Vergleich der simulierten Oberflächentemperaturen der FDM mit Robin Randbedingung nach Einsetzen der kurzwelligigen Strahlung [6, 9, 14] und der Messung in Wopfung	45
3.17	Jahresgang der Linke Trübung nach dem Ansatz von [15] umgesetzt mit Hilfe von [4] für den Standort in Wopfung	46
3.18	Vergleich der kurzwelligigen Strahlung nach [9, 15] mit der gemessenen kurzwelligigen Strahlung in Wopfung	48
3.19	Vergleich der simulierten Oberflächentemperaturen der FDM mit Robin Randbedingung nach Einsetzen der kurzwelligigen Strahlung nach [9, 15] und der Messung in Wopfung	48
3.20	Vergleich der simulierten Oberflächentemperaturen der FDM mit Robin Randbedingung nach Einsetzen der kurzwelligigen Strahlung q_{kw} nach [9] sowie der effektiven kurzwelligigen Strahlung $q_{kw,eff}$ und der Messung in Wopfung	50
3.21	Vergleich der simulierten Oberflächentemperaturen der FDM mit Robin Randbedingung nach Einsetzen der kurzwelligigen Strahlung q_{kw} nach [15] sowie der effektiven kurzwelligigen Strahlung $q_{kw,eff}$ und der Messung in Wopfung	50
3.22	Angepasste Parameter mit Abweichung der simulierten von den gemessenen Oberflächentemperaturen für Asphalt- und Betonbedeckungen für die Winter- (16.12. - 15.03.) und Frühjahrstauperiode (16.03. - 15.05.) - mit bekannter Lufttemperatur und rel. Luftfeuchtigkeit sowie mit nur bekannter Lufttemperatur	52
3.23	Modelle zur Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten nach [7], [18] und [10] berechnet aus der stündlich mittleren Windgeschwindigkeit in Wopfung	54
3.24	Oberflächentemperatur nach Anwendung der FDM mit Robin Randbedingung mit den verschiedenen Modellen zur Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten nach [7, 18, 10]	56
3.25	Oberflächentemperatur nach Anwendung der FDM mit Robin Randbedingung und konstanten Windgeschwindigkeiten nach dem Modell von [7]	56

4.1	Exemplarisch ermittelte zeitabhängige Temperaturprofile mittels der FDM für die Station Stockerau (Breitengrad: 48.39694444, Längengrad:16.1925, Seehöhe:203 m.ü.A)	58
4.2	Exemplarisch ermittelte zeitabhängige Temperaturprofile mittels der FDM für die Station Stockerau (Breitengrad: 48.39694444, Längengrad:16.1925, Seehöhe:203 m.ü.A)	59
4.3	Dichte- und Verteilungsfunktion der jährlichen Häufigkeit an Frost- sowie Tautagen mit 95% Intervallen	60
4.4	Dichte- und Verteilungsfunktion der jährlichen Häufigkeit an Frost- sowie Tautagen mit dem neu eingeführten Kriterium zur Bestimmung der Dauer der Tauperioden	61
4.5	Ermittelten Frosttiefen aller Lastklassen der Bautype AS1	63
4.6	Verteilung der maximalen Frosttiefen AS1 LK0.05 - LK4	64
	a max. Frosttiefen Bautype AS1 LK0.05	64
	b max. Frosttiefen Bautype AS1 LK0.1	64
	c max. Frosttiefen Bautype AS1 LK0.4	64
	d max. Frosttiefen Bautype AS1 LK1.3	64
	e max. Frosttiefen Bautype AS1 LK4	64
4.7	Verteilung der maximalen Frosttiefen AS1 LK10 - LK163	65
	a max. Frosttiefen Bautype AS1 LK10	65
	b max. Frosttiefen Bautype AS1 LK25	65
	c max. Frosttiefen Bautype AS1 LK42	65
	d max. Frosttiefen Bautype AS1 LK82	65
	e max. Frosttiefen Bautype AS1 LK163	65
4.8	Ermittelten Frosttiefen aller Lastklassen der der Bautype BE1	66
4.9	Verteilung der maximalen Frosttiefen BE1 LK0.075 - LK6.5	67
	a max. Frosttiefen Bautype BE1 LK0.075	67
	b max. Frosttiefen Bautype BE1 LK0.15	67
	c max. Frosttiefen Bautype AS1 LK0.6	67
	d max. Frosttiefen Bautype BE1 LK2.1	67
	e max. Frosttiefen Bautype BE1 LK6.5	67
4.10	Verteilung der maximalen Frosttiefen BE1 LK18 - LK185	68
	a max. Frosttiefen Bautype BE1 LK18	68
	b max. Frosttiefen Bautype BE1 LK21	68
	c max. Frosttiefen Bautype BE1 LK40	68
	d max. Frosttiefen Bautype BE1 LK89	68
	e max. Frosttiefen Bautype BE1 LK185	68
4.11	max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe aller Lastklassen der Bautype AS1	69
4.12	max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe aller Lastklassen der Bautype BE1	70
4.13	max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe aller Lastklassen der Bautype AS1	71
4.14	Regression in konzentrierter Fassung für die Bautype AS1	72
	a max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe und des frostsicheren Aufbaus für die Bautype AS1	72
	b Seehöhen Österreich	72
4.15	max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe aller Lastklassen der Bautype BE1	73
4.16	Regression in konzentrierter Fassung für die Bautype BE1	74
	a max. Frosttiefen in Abhängigkeit der Seehöhe und des frostsicheren Aufbaus für die Bautype BE1	74
	b Seehöhen Österreich	74

Tabellenverzeichnis

3.1	angesetzten Modellparameter und Modellierungsansätze für die Anpassung der Parameter G, H, J von Asphalt- und Betonbefestigungen aus Abb. 3.22.	53
3.2	angesetzte Modellparameter und Modellierungsansätze aus Abb. 3.25.	55