



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

Diplomarbeit

## Optimale Dividendenauszahlung mit endlichem Zeithorizont

ausgeführt am Institut für  
Wirtschaftsmathematik  
der Technischen Universität Wien  
unter Anleitung von

**Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits**

durch

Roman Schneider

0247970, E873

3830 Waidhofen/Thaya, Perneggstraße 5

10. März 2008

## Danksagung

Zu allererst möchte ich mich bei meinem Betreuer Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits für die Auswahl eines interessanten Diplomarbeitsthemas und für die Anregungen und Ratschläge, von denen die Arbeit profitierte, bedanken.

Weiters seien Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek und Christian Gawrilowicz für die Hilfe bei der Literatursuche und Ao.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.rer.nat. Josef Teichmann dankend erwähnt. Letzterer erleichterte mir durch seine Lehrveranstaltungen über stochastische Analysis das Verständnis der Theorie der Diplomarbeit.

Schließlich gilt meinen Eltern besonderer Dank, da diese mich während meines gesamten Studiums nicht nur finanziell tatkräftig unterstützt haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Compound-Poisson-Modell</b>	<b>4</b>
1.1	Modellbeschreibung . . . . .	4
1.1.1	Das Stabilitätsproblem . . . . .	7
1.1.2	Stabilitätskriterien . . . . .	8
1.1.3	Allgemeine Beschreibung des Kriteriums der Dividenden-Strategie . . . . .	9
1.1.4	Annahmen der Modellvariablen für die Dividenden-Strategie-Methode als Stabilitätskriterium . . . . .	10
1.2	Dividenden-Strategie in diskreter Zeit . . . . .	11
1.2.1	Resultate in diskreter Zeit . . . . .	13
1.2.2	Barriere-Strategien im diskreten Fall . . . . .	14
1.3	Dividenden-Strategie im stetigen Fall . . . . .	16
1.3.1	Die Integro-Differential-Gleichung der Barriere-Strategie im stetigen Fall . . . . .	19
1.3.2	Lösen der Integro-Differential-Gleichung für $V(Q, a)$ . . . . .	22
1.3.3	Lösen der Integro-Differential-Gleichung für $V(Q, a)$ bei exponentialverteilten Schäden . . . . .	23
1.3.4	Asymptotisches Verhalten von $a_0$ . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Diffusionsapproximation</b>	<b>31</b>
2.1	Motivation der Diffusionsapproximation . . . . .	31
2.2	Durchführung der Diffusionsapproximation . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Kontrolltheorie</b>	<b>35</b>
3.1	Allgemeine Problemstellung . . . . .	35
3.2	Itô-Diffusionen und deren Generatoren . . . . .	36
3.3	Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung . . . . .	39
3.4	Verifikationstheoreme . . . . .	42
3.4.1	Endlicher Zeithorizont . . . . .	42

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
3.4.2 Unendlicher Zeithorizont . . . . .	46
3.4.3 Gestoppte Zustandsprozesse . . . . .	48
3.5 Hamilton-Jacobi-Bellman-Algorithmus . . . . .	49
<b>4 Opt. beschränkte Dividenden-Auszahlung</b>	<b>51</b>
4.1 Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung . . . . .	52
4.2 Überprüfung der Lösung . . . . .	59
<b>5 Opt. unbeschr. Dividenden-Auszahlung</b>	<b>61</b>
5.1 Lokalzeit . . . . .	61
5.1.1 Einführung . . . . .	61
5.1.2 Tanaka-Formel . . . . .	62
5.2 Optimale Dividenden-Strategie . . . . .	70
5.2.1 Vorstellung des Modells . . . . .	70
5.2.2 Lösung des Optimierungsproblems . . . . .	71
<b>6 Barriere-Strategien</b>	<b>83</b>
6.1 Problemstellung . . . . .	83
6.2 Probe der Simulation . . . . .	85
6.3 Simulationsergebnisse . . . . .	87

# Kapitel 1

## Compound-Poisson-Modell

### 1.1 Modellbeschreibung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Problem der optimalen Dividendenauszahlung im Compound-Poisson-Modell. Die hier gebrachten Ergebnisse wurden aus dem Buch „Mathematical Methods in Risk Theory“ von Hans Bühlmann entnommen.<sup>1</sup>

Um den Begriff der optimalen Dividenden-Strategie einführen zu können, wird nun im Folgenden das Modell vorgestellt, in welchem wir uns bewegen werden.

Der Vermögensverlauf eines Versicherungsunternehmens wird durch die eingehenden Schäden wesentlich beeinflusst, welche hier durch Compound-Poisson Zufallsvariablen modelliert werden. Compound-Poisson Zufallsvariablen sind Zufallssummen, wobei die Anzahl der Summanden Poisson-verteilt sind und die Summanden aus einer von der Anzahlvariablen unabhängigen u.i.v. Folge entnommen werden, wie man nachfolgend bei der Konstruktion der Schäden sieht.

$S_t^{(i)}$  sei die Summe der bis zum Zeitpunkt  $t$  eingegangenen Schäden in der Sparte  $i$  für  $i = 1, \dots, N$ :

$$S_t^{(i)} := \sum_{j=1}^{N_t^{(i)}} Y_j^{(i)} \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

$N_t^{(i)}$	...	Poissonprozess mit Intensität $\mu_i(\vartheta_i)$
$\vartheta_i$	...	Risikoparameter
$(Y_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}}$	...	u.i.v. Folge von Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F^{(i)}(x \vartheta_i)$

---

<sup>1</sup>siehe [1]

$$S_t := \sum_{i=1}^N S_t^{(i)} \quad (1.2)$$

$S_t$  ... Summe der bis zum Zeitpunkt  $t$  eingegangenen Schäden

Eine weitere Annahme in dem von Bühlmann beschriebenen Modell ist, dass die Schadenprozesse  $(S_t^{(i)})_{t \geq 0}$  bei bekannten Risikoparametern voneinander unabhängig sind. Wie das nachfolgende Theorem zeigt, können wir bei dieser Beschreibung des Schadenprozesses eines Versicherungsunternehmens den aggregierten Schaden  $S_t$  ebenfalls als Compound-Poisson-Zufallsvariable darstellen:

**Satz:** Wenn die Schadenzufallssummen  $S_t^{(i)}$  der einzelnen Sparten  $i=1, \dots, N$  Compound-Poisson-Zufallsvariablen und unabhängig sind, so ist auch der aggregierte Schaden  $S_t$  eine Compound-Poisson-Zufallsvariable mit Intensität  $\mu^*(\vartheta_1, \dots, \vartheta_N) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\vartheta_i)$  und einer u.i.v. Folge mit charakteristischer Funktion  $\chi^*(u|\vartheta_1, \dots, \vartheta_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i(\vartheta_i)}{\mu^*} \chi_i(u|\vartheta_i)$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch die Berechnung der charakteristischen Funktion des aggregierten Schadens  $S_t$  – dazu berechnen wir zuerst die charakteristische Funktion des Schadens der Sparte  $j$   $S_t^{(j)}$ :

$$\varphi_t^{(j)}(u|\vartheta_j) = \mathbb{E}[e^{iuS_t^{(j)}}] = \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}[e^{iuS_t^{(j)}} | N_t^{(j)}]}_{\mathbb{E}[e^{iuY_1^{(j)}}]^{N_t^{(j)}}}\right] = M_{N_t^{(j)}}(\log(\chi_j(u|\vartheta_j)))$$

Hierbei bezeichnet  $\chi_j(u|\vartheta_j)$  die charakteristische Funktion der Einzelschadenverteilung der Sparte  $j$   $Y_1^{(j)}$  und  $M_{N_t^{(j)}}(\cdot)$  die momentenerzeugende Funktion von  $N_t^{(j)}$ :

$$M_{N_t^{(j)}}(w) = \mathbb{E}[e^{wN_t^{(j)}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_j(\vartheta_j)te^w)^n}{n!} e^{-\mu_j(\vartheta_j)t} = e^{-\mu_j(\vartheta_j)t(1-e^w)}$$

Man erkennt also, dass die charakteristische Funktion einer Compound-Poisson Zufallsvariable mit Parameter  $\mu_j(\vartheta_j)$  der Schadenzählvariablen und charakteristischer Funktion  $\chi_j(u|\vartheta_j)$  der Schadenhöhen von der Gestalt

$$e^{-\mu_j(\vartheta_j)t(1-\chi_j(u|\vartheta_j))}$$

ist und somit sollten wir bei der Berechnung der charakteristischen Funktion von  $S_t$  auf dieselbe Bauart kommen mit der im Satz angegebenen Intensität und Schadenhöhenverteilung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{iuS_t}] &= \prod_{j=1}^N \varphi_t^{(j)}(u|\vartheta_j) = \prod_{j=1}^N e^{-\mu_j(\vartheta_j)t(1-\chi_j(u|\vartheta_j))} \\ &= e^{-\sum_{j=1}^N \mu_j(\vartheta_j)t(1-\chi_j(u|\vartheta_j))} \\ &= e^{-\mu^*t\left(1-\sum_{j=1}^N \frac{\mu_j(\vartheta_j)\chi_j(u|\vartheta_j)}{\mu^*}\right)}\end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion des Schadens  $S_t$  ist also jene, welcher der im Satz angegebenen entspricht, was den Beweis schließt.

Aufgrund dieses Satzes kann also unter unseren Annahmen  $S_t$  direkt als Compound-Poisson-Zufallsvariable modelliert werden, wobei die Intensität des zugehörigen Poisson-Prozesses gerade der Summe der Intensitäten der einzelnen Sparten entspricht, und die neue u.i.v. Folge besteht nun aus Einzelschadenverteilungen, die als Mischverteilungen der Schadenhöhen der einzelnen Sparten interpretiert werden können.

Ein weiterer Faktor, der bei der Modellierung des Vermögensverlaufes eines Versicherungsunternehmens berücksichtigt werden muss, ist das Prämieinkommen  $P_t^*$ , welches sich aus den Prämien  $P_t^{(i)}$  aller Sparten zusammensetzt:

$$P_t^* = \sum_{i=1}^N P_t^{(i)} \dots \text{vereinnahmte Prämie in } [0, t] \text{ für alle Risiken}$$

Nun kann die sogenannte *Irrfahrt des Profits*  $Z_t^*$ , der durch die in Vertrag genommenen Risiken erwirtschaftet wird, definiert werden:

$$Z_t^* = P_t^* - S_t$$

Wenn  $Q$  das Anfangskapital des Versicherungsunternehmens bezeichne, kann man nun die *Irrfahrt der freien Reserve*  $Z_t$  durch  $Z_t = Q + Z_t^*$  anschreiben – der Ökonomie würde in diesem Zusammenhang eher von einem Kapitalstrom sprechen. Eine Veranschaulichung der *Irrfahrt der freien Reserve*  $Z_t$  ergibt das folgende Schaubild:

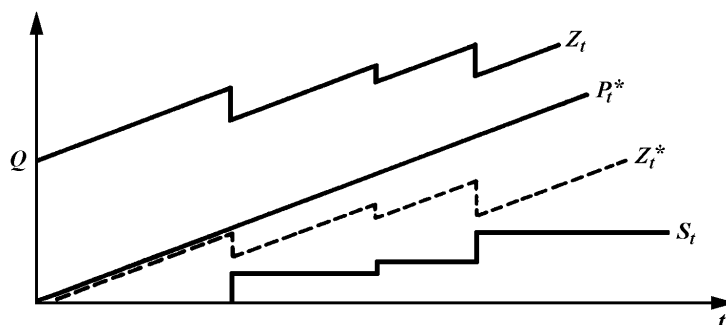


Abbildung 1.1:  
Zusammenhang der freien Reserve mit Schadenprozess, Prämien und Profit

### 1.1.1 Das Stabilitätsproblem

Wenn man die Theorie der Prämienkalkulation und das Problem der Eigenbehaltfestlegung und in diesem Zusammenhang die Frage nach der idealen Reserve betrachtet, so stellt man fest, dass sowohl die vorgeschlagene Prämie als auch der Eigenbehalt von Parametern abhängen, die unbestimmt bleiben.

a) Beispiel für Prämienkalkulationsprinzipien:

$$P = \mathbb{E}[S] + \alpha\sigma(S) \quad \dots \quad \text{Standardabweichungsprinzip}$$

$$P = \mathbb{E}[S] + \beta\sigma^2(S) \quad \dots \quad \text{Varianzprinzip}$$

Das „Level“  $\alpha$  (bzw.  $\beta$ ) repräsentiert bei diesen Prämienkalkulationsprinzipien den unbestimmten Parameter.

b) Beispiel beim Eigenbehaltsproblem:

$$V(a_j, S^{(j)}) = C\gamma_j$$

proportionale Rückversicherung mit  $P_j - \mathbb{E}[S^{(j)}] = \gamma_j\mathbb{E}[S^{(j)}]$

$$W(M_j, S^{(j)}) = C\alpha_j$$

nicht proportionale Rückversicherung mit  $P_j - \mathbb{E}[S^{(j)}] = \alpha_j\mathbb{E}[S^{(j)}]$

- $P_j$  ... Rückversicherungsprämie für den Schaden  $S^{(j)}$
- $a_j$  ... Proportionalitätsfaktor (prozentueller Eigenbehalt)
- $M_j$  ... Eigenbehalt
- $V, W$ ... Funktionale, mit denen eine proportionale bzw. nicht proportionale Rückversicherungslösung anhand der Schadenverteilung und des relativen Sicherheitszuschlages gefunden werden kann



Hier wäre  $C$  der zu bestimmende Parameter für eine konkrete Rückversicherungslösung.

c) Im Falle der *Irrfahrt der freien Reserve* ist das Anfangskapital  $Q$  ein relevanter Parameter für das Stabilitätsproblem.

Es wurden nun die drei Parameter aufgezählt, welche wir die *Entscheidungsvariablen* nennen werden:

a) das Zuschlagsniveau bei der Prämie ( $\alpha$  oder  $\beta$ )

b) das Eigenbehaltsniveau ( $C$ )

c) das Anfangskapital ( $Q$ )

Im Folgenden wird das Zuschlagsniveau einfach  $\alpha$  genannt – dieser Zuschlag könnte proportional zum Erwartungswert, zur Standardabweichung oder der Varianz des aggregierten Schadens sein. Das Anfangskapital kann als die Reserve interpretiert werden, welche zum Zeitpunkt  $t = 0$  bereitgestellt wird, um gegen Schwankungen im technischen Ergebnis des Versicherungsunternehmens gewappnet zu sein.

Es ist darauf hinzuweisen, dass die eben geschilderten *Entscheidungsvariablen* sich nur auf die Regelung des rein technischen Ergebnisses des Versicherungsunternehmens über die Zeit beziehen – allgemeinere wirtschaftliche oder Management-Entscheidungen werden bewusst in diesem Modell außer Acht gelassen. Beim Stabilitätsproblem handelt es sich also um ein ausschließlich aktuarielles Problem.

### 1.1.2 Stabilitätskriterien

Nachdem wir nun unsere drei Entscheidungsvariablen  $\alpha$  (Zuschlagsniveau),  $C$  (Eigenbehaltlevel) und  $Q$  (Anfangskapital) definiert haben, können wir nun eine konkrete Stabilitätsstrategie eines Versicherers durch das folgende Tripel reeller Zahlen festlegen:

$$[\alpha = \alpha_0, C = C_0, Q = Q_0] \quad \text{bzw.} \quad [\alpha_0, C_0, Q_0]$$

Das Problem des Versicherers in diesem Modell beschränkt sich nun auf die in einem gewissen Sinne beste Wahl von dem Tripel  $[\alpha_0, C_0, Q_0]$ , welches seine Strategie festlegt. Was als die „beste Wahl“ angesehen wird, wird durch das sogenannte *Stabilitätskriterium* bestimmt.

In der Literatur findet man folgende drei Stabilitätskriterien:

- I) das Ruinwahrscheinlichkeitskriterium
- II) das Dividenden-Strategie-Kriterium

III) das Nutzen-Kriterium

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Kriterium der optimalen Dividenden-Strategie als Stabilitätskriterium.

### 1.1.3 Allgemeine Beschreibung des Kriteriums der Dividenden-Strategie

Im diskreten Fall werden wir uns mit der *Irrfahrt der freien Reserve*

$$Z_t = Q + P_t^* - S_t$$

beschäftigen:

$Q$	...	Anfangskapital
$P_t^*$	...	vereinnahmte Prämie des Versicherers für das übernommene Risiko in $[0,t]$
$S_t$	...	aggregierter Schaden (Summe der Schäden aller Sparten bis zum Zeitpunkt $t$ )

Die *Irrfahrt der freien Reserve* wird vom Zuschlagsniveau  $\alpha$ , dem Eigenbehaltsniveau  $C$ , welches Einfluss auf die vereinnahmte Prämie und die Verteilung des aggregierten Schadens nimmt, und dem Anfangskapital  $Q$  beeinflusst. Das Problem besteht nun darin, unter den in Abhängigkeit der Parameter entstehenden Irrfahrten auszuwählen. Es besteht also ein Bedarf zur Bewertung der einzelnen Irrfahrten.

Die Art der Bewertung durch die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit wurde von De Finetti als zu konservativ angesehen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, die alternative Bewertungsmethode über die Dividenden-Strategien (als Vorschlag von De Finetti) zu präsentieren.

Bei dieser Bewertungsmethode geht man von dem Gedanken aus, dass man nach einer bestimmten Strategie zu gewissen Zeitpunkten den Prozess der freien Reserve  $Z_t$  verringert. Diese Abschöpfungen werden in Folge als Dividenden bezeichnet, obwohl man sich anstatt der Dividenden-Interpretation auch jede andere Form von nicht rückgängig machbarer Transaktion vorstellen kann. Die Bewertung wird nun anhand der Summe der diskontierten Dividenden bis zum Zeitpunkt des Ruins vorgenommen.

Die Regel  $\zeta$ , welche die Zeitpunkte und Höhe der Dividendenauszahlungen vorgibt, nennt man Dividenden-Strategie. Wenn diese Strategie im Erwartungswert die höchstmögliche diskontierte Summe an Dividenden ergibt, so

wird sie die *optimale Dividenden-Strategie* genannt.

Eine Stabilitätsstrategie  $[\alpha_0, C_0, Q_0]$  wird einer anderen Strategie  $[\alpha_1, C_1, Q_1]$  vorgezogen, falls sie einen höheren Erwartungswert der diskontierten Dividenden mit der jeweils *optimalen Dividenden-Strategie* erzielt.

Man ist also bei dieser Bewertungsmethode mit dem Problem konfrontiert, zu einer gegebenen *Irrfahrt der freien Reserven* die optimale Strategie zu finden und die damit verbundene erwartete Höhe der diskontierten Dividenden zu ermitteln.

### 1.1.4 Annahmen der Modellvariablen für die Dividenden-Strategie-Methode als Stabilitätskriterium

Bei der Betrachtung der *Irrfahrt der freien Reserve*  $Z_t = Q + P_t^* - S_t$  werden die folgenden Annahmen getroffen:

$S_t$  ist im allgemeinen Modell von Bühlmann ein gewichteter Compound-Poisson-Prozess, d.h.  $S_t$  ist eine Compound-Poisson-Zufallsvariable deren Risikoparameter gemäß einer Verteilungsfunktion  $U$  „ausgewürfelt“ wird. In den folgenden Berechnungen wird jedoch davon ausgegangen, dass wir bereits den Risikoparameter kennen – d.h. in der nachfolgend angegebenen Verteilungsfunktion  $G_{S_t}(\cdot)$  und bei der charakteristischen Funktion  $\varphi_{S_t}(\cdot)$  von  $S_t$  verschwinden in dem Modell, das wir betrachten werden, die Integrale – außerdem ist  $S_t$  bei bekanntem Risikoparameter ein Prozess mit unabhängigen und stationären Inkrementen.

$$\varphi_{S_t}(u) = \int e^{\mu^*(\vartheta)t(x^*(u|\vartheta)-1)} dU(\vartheta)$$

$$G_{S_t}(x) = \int \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu^*(\vartheta)t} \frac{(\mu^*(\vartheta)t)^k}{k!} F^{*k}(x|\vartheta) dU(\vartheta)$$

$\vartheta \dots$  Risikoparameter (z.B.  $\vartheta = [\vartheta_1, \dots, \vartheta_N]$ )

In der obigen Formel gilt  $S_t = \sum_{j=1}^{N_t} X_j$ , wobei die Einzelschadenshöhen  $X_j$  gemäß der Verteilungsfunktion  $F$  verteilt sind.

Für das Prämieeinkommen  $P_t^*$  wird bei unendlichem Planungshorizont angenommen, dass  $P_t^*$  proportional zu  $t$  ist. Diese Annahme wäre in unserem Modell z.B. beim Erwartungswert-Prämienkalkulationsprinzip aber auch

beim Varianzprinzip erfüllt, wie die nachfolgenden Rechnungen zeigen:

Erwartungswertprinzip:

$$P_t^* = (1 + \alpha)\mathbb{E}[S_t] = (1 + \alpha)\underbrace{\mathbb{E}[N_t]}_{\mu^*(\vartheta)t}\mathbb{E}[X_1] = tc$$

wobei:  $c = (1 + \alpha)\mu^*(\vartheta)\mathbb{E}[X_1] = (1 + \alpha)\mathbb{E}[S_1]$

Varianzprinzip:

$$\begin{aligned} P_t^* &= \mathbb{E}[S_t] + \alpha \text{var}(S_t) \\ &= \mu^*(\vartheta)\mathbb{E}[X_1]t + \alpha(\underbrace{\mathbb{E}[\text{var}(S_t|N_t)]}_{\text{var}(X_1)N_t} + \underbrace{\text{var}(\mathbb{E}[S_t|N_t])}_{\mathbb{E}[X_1]N_t}) \\ &= \mathbb{E}[S_1]t + \alpha(\underbrace{\text{var}(X_1)}_{t\mu^*(\vartheta)}\underbrace{\mathbb{E}[N_t]}_{t\mu^*(\vartheta)} + \mathbb{E}[X_1]^2 \underbrace{\text{var}(N_t)}_{t\mu^*(\vartheta)}) = tc \end{aligned}$$

wobei:  $c = \mathbb{E}[S_1] + \alpha\mathbb{E}[X_1^2]\mu^*(\vartheta)$

Da in unserem Modell der Risikoparameter  $\vartheta$  als bekannt vorausgesetzt wird, können wir die charakteristische Funktion von  $S_t$  im Folgenden ohne dem Parameter  $\vartheta$  anschreiben:

$$\varphi_{S_t}(u) = e^{\mu^*t(x^*(u)-1)}$$

In stetiger Zeit werden wir außerdem die zusätzliche Annahme treffen, dass die Schadenhöhenverteilungen strikt positive Zufallsvariablen sind, d.h.  $F(0) = 0$ .

## 1.2 Dividenden-Strategie in diskreter Zeit

In diskreter Zeit betrachten wir die *Irrfahrt der freien Reserve*  $Z_t$  nur an den ganzzahligen Zeitpunkten  $t = 0, 1, 2, \dots$ , welche als die Tage der Jahresabrechnung eines Versicherungsunternehmens interpretiert werden können. Es wird angenommen, dass alle Größen, die auf die Irrfahrt Einfluss nehmen, nur ganzzahlige Werte annehmen. Damit sind die folgenden Größen gemeint:

- $Q_0 = Z(0)$      ...    das Anfangskapital
- $S_t(t = 0, 1, \dots)$     ...    der aggregierte Schadenprozess
- $c$                      ...    das Prämieeinkommen in einer Zeiteinheit

In diesem Zusammenhang beschreibt  $L_t := Z_t - Z_{t-1} = c + S_{t-1} - S_t$  den jährlichen Anstieg der freien Reserve  $Z_t$ .

Unter unseren Annahmen sind die Werte von  $L_t$  ganzzahlig und außerdem unabhängig und identisch verteilt aufgrund der Anforderungen an  $S_t$  in unserem Modell – natürlich mit Ausnahme von  $L_0 = Q_0$ . Die Verteilung von  $L_t$  für  $t = 1, 2, \dots$  sei durch die Werte  $g_j$  beschrieben:

$$\mathbb{P}[L_t = j] = g_j, (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Die Dividende, die am Ende des Jahres ausbezahlt wird, sei durch  $D_t$  bezeichnet. Dadurch verändert sich die ursprüngliche Irrfahrt der freien Reserve

$$Z_t = Q_0 + L_1 + \dots + L_t$$

unter Einbeziehung der Dividendenzahlungen in den folgenden Prozess, wobei die Dividendenzahlung des letzten Jahres nicht gezahlt wird, erhält man den modifizierten Reserveprozess  $(Q_t)$ :

$$Q_t = Q_0 - D_0 + L_1 - D_1 + \dots + L_{t-1} - D_{t-1} + L_t \quad (1.3)$$

Zu jedem Zeitpunkt  $t$  wird durch eine Dividenden-Strategie  $\zeta$  die Höhe der Dividende  $D_t$  bestimmt, welche auf Basis der vorhandenen Daten  $[Q_0, L_1, Q_1, \dots, L_t, Q_t]$  ermittelt wird. Diese Entscheidung wird unter der Forderung  $0 \leq D_t \leq Q_t$  getätigt – d.h. der Versicherer ist nicht befugt, eine höhere Dividende auszusahlen als es durch die freie Reserve abzüglich der bisherigen Dividendenzahlungen möglich ist.

Sei  $\tau$  der Zeitpunkt des Ruins des Versicherungsunternehmens – d.h. jener Zeitpunkt  $t$ , zu dem erstmals  $Q_t < 0$  auftritt. Dann kann man passenderweise die darauf folgenden Dividendenzahlung auf 0 setzen:

$$D_\tau = D_{\tau+1} = D_{\tau+2} = \dots = 0$$

Unter Verwendung eines Diskontfaktors  $v$  mit  $0 < v < 1$  kann nun eine konkrete Strategie  $\zeta$  für ein Anfangskapital  $Q_0$  folgendermaßen bewertet werden:

$$\Upsilon(Q_0, \zeta) = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{\tau-1} v^t D_t \right] \quad (1.4)$$

An dieser Stelle wird stillschweigend angenommen, dass der obige Erwartungswert endlich ist. Die Bewertung unserer Strategie erfolgt also über die erwartete, diskontierte Summe der Dividenden.

Die gegebene Irrfahrt  $Z_t$  wird schließlich durch  $\Upsilon(Q_0) := \sup_{\zeta} \Upsilon(Q_0, \zeta)$  bewertet – also durch die größtmögliche, erwartete Summe an Dividenden, die

man durch Wahl einer Dividenden-Strategie, deren Entscheidungen zu jedem Zeitpunkt nur auf dem bisherigen Reserveverlauf beruhen, erzielen kann.

Eine sogenannte *stationäre Dividenden-Strategie* ist dadurch charakterisiert, dass die Dividendenhöhe zum Zeitpunkt  $t$  nur von dem momentanen Wert der freien Reserve abzüglich der bisherigen Dividendenzahlungen abhängt – also  $D_t = f(Q_t)$  für  $t = 0, 1, \dots$  gilt.

### 1.2.1 Resultate in diskreter Zeit

Die wichtigste Frage bei dem Dividenden-Strategie-Kriterium ist jene nach der Existenz der optimalen Strategie  $\zeta_0$  und deren Eigenschaft. Die definierende Beziehung der optimalen Strategie ist gegeben durch:

$$\Upsilon(Q_0, \zeta_0) = \sup_{\zeta} \Upsilon(Q_0, \zeta) = \Upsilon(Q_0) \quad (1.5)$$

Takeuchi<sup>2</sup> bewies in diesem Zusammenhang das folgende Resultat:

**Satz:** Eine optimale Strategie existiert immer und sie kann als Band-Strategie charakterisiert werden.

Unter einer Band-Strategie versteht man das Folgende:

**Definition:** Eine Band-Strategie ist ein Spezialfall einer stationären Dividenden-Strategie, welche durch die natürlichen Zahlen  $a_i, b_i$  beschrieben wird, wobei:

$$0 \leq a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < b_n < a_n$$

Die Strategie ergibt sich nun durch  $D_t = f(Q_t)$  mit:

$$f(x) = \begin{cases} x - a_k & \text{für } a_k < x \leq b_{k+1} \quad (b_{n+1} = \infty \text{ und } k = 0, 1, \dots, n) \\ 0 & \text{für } b_k < x \leq a_k \quad (b_0 = 0 \text{ und } k = 0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

$f(x)$  ist hier nur für ganzzahlige Werte von  $x$  relevant und ergibt veranschaulicht das folgende Bild:

---

<sup>2</sup>siehe [2]

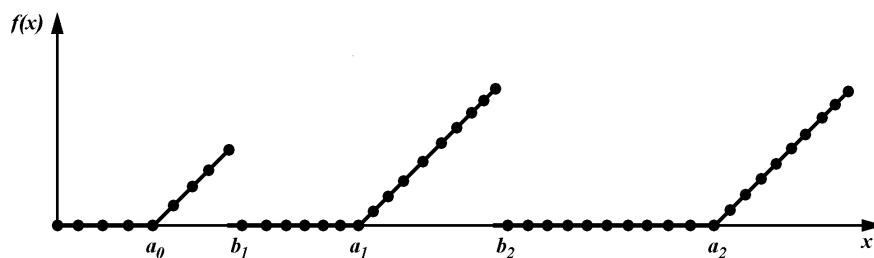


Abbildung 1.2:  
Darstellung der definierenden Funktion einer Band-Strategie  
(stationäre Dividenden-Strategie)

Eine derartige Band-Strategie kann gut interpretiert werden: Bei freien Reserven  $Q$  innerhalb des Intervalls  $(b_k, a_k]$  werden keine Dividenden bezahlt, sonst wird die freie Reserve durch eine Dividenden-Auszahlung auf das nächst niedrigere  $a$ -Niveau gesenkt.

Ein Spezialfall einer Band-Strategie, bei dem  $n = 0$  ist, ist eine Barriere-Strategie. In diesem Fall gilt:

$$f(x) = \begin{cases} x - a_0 & \text{für } x > a_0 \\ 0 & \text{für } x \leq a_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

De Finetti betrachtete in seiner Arbeit nur derartige Strategien und machte spezielle Annahmen über die Wahrscheinlichkeiten  $(g_j)$ . Mijasawa<sup>3</sup> zeigte, dass eine optimale Barriere-Strategie für den Fall  $g_2 = g_3 = \dots = 0$  existiert – aber diese Optimalitätseigenschaft gilt nicht im allgemeinen Fall. Es werden jedoch trotzdem im folgenden Abschnitt die Barriere-Strategien näher betrachtet, weil diese in der Praxis von großer Bedeutung sind. Der größte Nachteil der allgemeinen Band-Strategien besteht darin, dass diese nicht monoton vom verfügbaren Kapital abhängt.

### 1.2.2 Barriere-Strategien im diskreten Fall

Die Summe der erwarteten diskontierten Dividenden kann im Fall der Barriere-Strategie durch Lösung eines Systems von Differenzgleichungen bestimmt werden.

<sup>3</sup>siehe [3]

Sei  $\Upsilon(Q_0, a_0)$  die Summe der erwarteten Dividenden für eine Anfangsreserve  $Q_0$  und eine Barriere  $a_0$ , dann ergibt sich das folgende System:

$$\Upsilon(Q_0, a_0) = 0 \quad \text{für } Q_0 < 0 \quad (1.7)$$

$$\Upsilon(Q_0, a_0) = v \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Upsilon(Q_0 + j, a_0) g_j \quad \text{für } 0 \leq Q_0 \leq a_0 \quad (1.8)$$

$$\Upsilon(Q_0, a_0) = Q_0 - a_0 + v \Upsilon(a_0, a_0) \quad \text{für } Q_0 > a_0 \quad (1.9)$$

Die Gleichung 1.7 ergibt sich aus der Tatsache, dass das Versicherungsunternehmen keine Dividenden auszahlen kann, wenn es bereits zu Beginn Schulden hat – hierbei würde für den Zeitpunkt des Ruins  $\tau$  in 1.4  $\tau = 0$  gelten. Die Gleichung 1.8 erhält man durch Bedingen auf die Zufallsvariable  $L_1$  (wegen der Bauart von  $Q_t$  wie in 1.3 angegeben) und Identifikation der bedingten Erwartungswerte als neuen Erwartungswert einer Summe von Dividenden bezüglich eines neuen Reserveprozesses mit Anfangskapital  $\tilde{Q}_0 = Q_0 + L_1$  und  $\tilde{Q}_{t-1} := Q_t$  für  $t \geq 2$  – hierbei benutzt man die u.i.v.-Eigenschaft der Zufallsvariablen  $(L_t)$  und die Tatsache, dass  $D_0 = 0$  ist aufgrund der Höhe des Anfangskapitals und der Barriere-Strategie. Die entsprechende Rechnung stellt sich also wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{\tau-1} v^t D_t \right] &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \underbrace{D_0}_0 + v \sum_{t=1}^{\tau-1} v^{t-1} \underbrace{f(Q_t)}_{f(\tilde{Q}_{t-1}) =: \tilde{D}_{t-1}} \mid L_1 = j \right] g_j = \\ &= v \sum_{j=-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{\tau-2} v^t \tilde{D}_t \mid L_1 = j \right]}_{\Upsilon(Q_0 + j, a_0)} g_j \end{aligned}$$

Dazu wäre noch zu erwähnen, dass für den neu definierten Prozess  $(\tilde{Q}_t)$  der Ruinzeitpunkt  $\tilde{\tau}$  durch  $\tilde{\tau} = \tau - 1$  gegeben ist, falls  $Q_0 + L_1 \geq 0$  gilt.

Für  $Q_0 + L_1 < 0$  betrachtet man bedingte Erwartungswerte leerer Summen, die den Wert 0 haben und somit auch mit  $\Upsilon(Q_0 + L_1, a_0)$  wegen 1.7 übereinstimmen.

1.9 erhält man unter Berücksichtigung der Barriere-Strategie:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{\tau-1} v^t D_t \right] &= \mathbb{E} \left[ \underbrace{D_0}_{Q_0 - a_0} + v \sum_{t=1}^{\tau-1} v^{t-1} \underbrace{f(Q_t)}_{f(\tilde{Q}_{t-1}) =: \tilde{D}_{t-1}} \right] = \\ &= Q_0 - a_0 + v \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{\tau-2} v^t \tilde{D}_t \right]}_{\Upsilon(a_0, a_0)} \end{aligned}$$



In der Original-Arbeit von De Finetti wurde der Spezialfall

$$g_1 = p, g_{-1} = 1 - p =: q \text{ und } g_j = 0 \text{ für } j \neq 1, -1$$

betrachtet. Hier vereinfacht sich 1.8 zu:

$$\Upsilon(Q_0, a_0) = vp\Upsilon(Q_0 + 1, a_0) + vq\Upsilon(Q_0 - 1, a_0)$$

In diesem Fall kann man eine Lösung der obigen Gleichung durch den Ansatz  $\Upsilon(Q_0, a_0) = r^{Q_0}$  finden. Die Randbedingungen für  $\Upsilon(Q_0, a_0)$  ergeben sich aus den Gleichungen 1.7 und 1.9:

$$\begin{aligned} \Upsilon(0, a_0) &= vp\Upsilon(1, a_0) + \underbrace{vq\Upsilon(-1, a_0)}_{=0} \\ \Upsilon(a_0, a_0) &= vp \underbrace{\Upsilon(a_0 + 1, a_0)}_{=1+v\Upsilon(a_0, a_0)} + vq\Upsilon(a_0 - 1, a_0) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten also:

$$\begin{aligned} \Upsilon(0, a_0) &= vp\Upsilon(1, a_0) \\ \Upsilon(a_0, a_0) &= \frac{vp + vq\Upsilon(a_0 - 1, a_0)}{1 - v^2p} \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme dieser Randbedingungen kann man passende Konstanten  $C_1, C_2$  finden, sodass  $\Upsilon(Q_0, a_0) = C_1 r_1^{Q_0} + C_2 r_2^{Q_0}$  gilt, wobei  $r_1$  und  $r_2$  die Lösungen der Gleichung  $r = vpr^2 + vq$  sind.

### 1.3 Dividenden-Strategie im stetigen Fall

Die Annahmen aus Abschnitt 1.1.4 seien gültig. Nun werden für die *Irrfahrt der freien Reserve*  $Z_t$  alle Zeitpunkte  $t \geq 0$  betrachtet – außerdem sind nun zu allen Zeitpunkten (stetige oder diskrete) Dividendenauszahlungen möglich. In diesem Fall ist die Dividenden-Strategie  $\zeta$  als eine Vorschrift anzusehen, welche jeder Realisation der Irrfahrt  $Z_t$  eine nicht-abnehmende Funktion  $Y(t)$  zuweist. Hierbei bezeichne  $Y(t)$  die Summe aller Dividenden (ausschließlich dem Zeitpunkt  $t$ ), die bisher von der freien Reserve  $Z_t$  finanziert wurde.  $Y(t_2) - Y(t_1)$  stellt also die Höhe der ausgezahlten Dividenden innerhalb des Zeitraumes  $[t_1, t_2]$  dar. Die Schäden, welche  $Z_t$  beeinflussen, sind einschließlich dem Zeitpunkt  $t$  berechnet.

Der um die Dividenden-Auszahlungen modifizierte Reserven-Prozess  $Q_t$  hat die folgende Form:

$$Q_t = Q_0 + ct - S_t - Y(t) = Z_t - Y(t) \quad (1.10)$$

$Q_t$  repräsentiert die Reserve vor der möglichen Dividenden-Auszahlung der Höhe  $Y(t + 0) - Y(t)$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Es ist analog zu den bisherigen Forderungen an unser Modell nicht möglich, dass das Versicherungsunternehmen Dividenden-Auszahlungen tätigt, welche nicht mehr durch die vorhandene Reserve abgedeckt werden können, d.h.

$$Y(t + 0) - Y(t) \leq Q_t$$

und

$$Y(t) = Y(\tau) \quad \text{für } t \geq \tau,$$

wobei  $\tau$  der Ruinzeitpunkt des Versicherungsunternehmens ist.

Weiters wird angenommen, dass die Dividenden-Auszahlungen nur von dem Reservenverlauf bis zum Zeitpunkt, zu dem entschieden wird, abhängen. Es gilt somit  $Y_1(t) = Y_2(t)$ , falls  $Z_1(s) = Z_2(s)$  für alle  $s < t$ , wobei  $Y_1(\cdot)$  und  $Y_2(\cdot)$  die Funktionen sind, die von der Strategie  $\zeta$  dem Reservenverlauf  $Z_1(\cdot)$  bzw.  $Z_2(\cdot)$  zugeordnet worden sind.

Der Zusammenhang von  $Z_t$ ,  $Y_t$  und  $Q_t$  wird in der folgenden Abbildung im Fall einer Barriere-Strategie mit Barriere  $a_0$  illustriert:

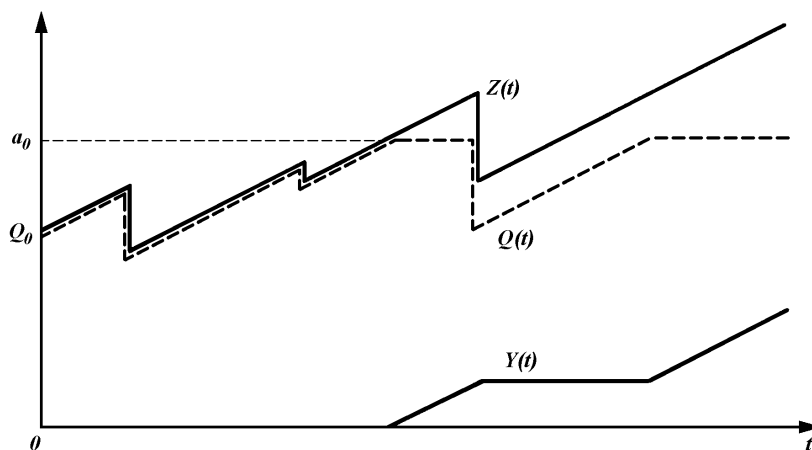


Abbildung 1.3:  
Zusammensetzung des um die Dividendenauszahlungen bereinigten Reserveprozesses  $Q_t$

Es sollte erwähnt werden, dass die Strategie  $\zeta$  immer (ohne Verlust an Allgemeinheit) so gewählt werden kann, dass die behandelten Integrale und

Erwartungswerte in diesem Kapitel sinnvoll sind.

Mit Hilfe der Zinsintensität  $\beta > 0$  bewerten wir nun die Strategie  $\zeta$  für eine Anfangsreserve  $Q_0$  wieder mit der erwarteten insgesamten Dividenden-Auszahlung abgezinst auf den Zeitpunkt 0:

$$V(Q_0, \zeta) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) \right] \quad (1.11)$$

Wie im diskreten Fall definiert man nun:

$$V(Q_0) = \sup_{\zeta} V(Q_0, \zeta) \quad (1.12)$$

Man nennt  $\zeta_0$  eine *optimale Dividenden-Strategie*, falls  $V(Q_0, \zeta_0) = V(Q_0)$  gilt. Das Existenz-Theorem für den stetigen Fall wurde von Gerber bewiesen. Hier wird aber statt diesem allgemeinen Satz ein für die Praxis relevanteres Resultat von Gerber angegeben:

**Satz:** Es existiert eine Zahl  $a_0$ , sodass für eine beliebige Anfangsreserve  $Q_0$  mit  $0 \leq Q_0 \leq a_0$  die folgende Dividenden-Strategie optimal ist:

Wenn  $Q_t = a_0$  ist, dann werden die vereinnahmten Prämien direkt als Dividenden ausgezahlt

Wenn  $Q_t < a_0$  gilt, werden keine Dividenden ausbezahlt.

Für ein gegebenes Elementarereignis könnte  $Y(t)$  unter Anwendung der obigen Strategie die folgende Gestalt annehmen:

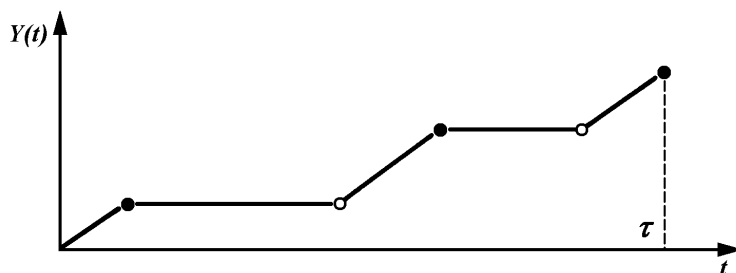


Abbildung 1.4:

Mögliche Gestalt von  $Y(t)$  im Fall einer Barriere-Strategie mit Barriere  $a_0$ , wobei  $Q_0 = a_0$  angenommen wurde

Man kann in Analogie zum diskreten Fall auch Barriere-Strategien mit einer

Barriere  $a$  wie folgt definieren:

- Wenn  $Q_t > a$ : Unverzögliche Dividenden-Auszahlung der Höhe  $Q_t - a$  (diskrete Dividenden-Auszahlung)
- Wenn  $Q_t = a$ : Direkte Auszahlung der hereinkommenden Prämie als Dividende (stetige Dividenden-Auszahlung)
- Wenn  $Q_t < a$ : Es werden keine Dividenden ausgezahlt.

Wenn  $V(Q_0, a)$  die erwarteten diskontierten Dividenden der Barriere-Strategie mit Barriere  $a$  bezeichnet, so besagt der letzte Satz, dass ein  $a_0$  mit der nachstehend angegebenen Eigenschaft existiert:

$$V(Q_0, a_0) = V(Q_0) \quad \text{für } 0 \leq Q_0 \leq a_0$$

Man nennt den obigen Zusammenhang die „eingeschränkte Optimalität der Barriere-Strategie mit Barriere  $a_0$ “.

Dieser Satz ist in der Praxis am nützlichsten für große  $a_0$ . Die Berechnung von  $a_0$  ist in diesem Zusammenhang also von großer Bedeutung.

Dieses Problem ist identisch zur Bestimmung der optimalen Barriere-Strategie, weil für  $Q_0 \leq a_0$  die Barriere-Strategie mit Barriere  $a_0$  die optimale Taktik unter allen Dividenden-Strategien und somit insbesondere unter den Barriere-Strategien darstellt.

### 1.3.1 Die Integro-Differential-Gleichung der Barriere-Strategie im stetigen Fall

Es wird in diesem Abschnitt die Barriere-Strategie mit Barriere  $a$  und erwarteten diskontierten Dividenden  $V(Q, a)$  für eine gegebene Anfangsreserve  $Q$  betrachtet. Die erste Beobachtung ist, dass  $V(Q, a)$  rechtsstetig in  $Q$  für  $0 \leq Q \leq a$  ist. Diese Tatsache erhält man durch die folgende Beziehung:

$$V(Q + ch, a) \geq V(Q, a) \geq e^{-(\mu^* + \beta)h} V(Q + ch, a) \quad h > 0 \quad (1.13)$$

Die Ungleichung  $V(Q + ch, a) \geq V(Q, a)$  gilt wegen  $ch > 0$ , weil für jede Realisierung der *Irrfahrt der freien Reserve* jene Reserve mit höherem Anfangskapital immer über der anderen liegt und somit anhand der Barriere-Strategie früher Dividenden auszahlt und aufgrund desselben zeitlichen Verlaufes mindestens so viele Dividenden freigibt wie die mit niedrigerer Anfangsreserve.  $V(Q, a) \geq e^{-(\mu^* + \beta)h} V(Q + ch, a)$  ergibt sich wie unten ausgeführt, wobei die

Annahme des Poisson-Prozesses für die Schadenzählung und die Stationarität und Unabhängigkeit der Inkremente des aggregierten Schadenprozesses  $S_t$  in unserem Modell genutzt werden:

$$\begin{aligned}
 V(Q, a) &= \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) | N_h - N_0 = 0 \right] \mathbb{P}[N_h - N_0 = 0] \\
 &+ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) | N_h - N_0 \neq 0 \right] \mathbb{P}[N_h - N_0 \neq 0]}_{\geq 0} \\
 &\geq \mathbb{E} \left[ \underbrace{\int_0^h e^{-\beta t} dY(t)}_{\geq 0} + e^{-\beta h} \int_h^\tau e^{-\beta(t-h)} dY(t) | N_h - N_0 = 0 \right] \underbrace{\mathbb{P}[N_h - N_0 = 0]}_{e^{-\mu^* h}} \\
 &\geq e^{-(\mu^* + \beta)h} \mathbb{E} \left[ \underbrace{\int_h^\tau e^{-\beta(t-h)} dY(t) | N_h - N_0 = 0}_{=V(Q+ch, a)} \right] \\
 &= e^{-(\mu^* + \beta)h} V(Q + ch, a)
 \end{aligned}$$

Für  $\mathbb{E} \left[ \int_h^\tau e^{-\beta(t-h)} dY(t) | N_h - N_0 = 0 \right] = V(Q + ch, a)$  wurde

$$Q + ct + \underbrace{S_h}_0 + S_t - S_h | \{N_h - N_0 = 0\} \hat{=} (Q + ch) + c(t - h) + S_{t-h}$$

ausgenutzt, wobei  $\hat{=}$  die Gleichheit in Verteilung bezeichnet.

Durch Bedingen beim Erwartungswert  $V(Q, a)$  erhält man durch die unten

angeführten Umformungen eine Integro-Differentialgleichung für  $V(Q, a)$ :

$$\begin{aligned}
 V(Q, a) &= \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) | N_h - N_0 = 0 \right] \underbrace{\mathbb{P}[N_h - N_0 = 0]}_{e^{-\mu^* h} = 1 - \mu^* h + O(h^2)} \\
 &+ \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) | N_h - N_0 = 1 \right] \underbrace{\mathbb{P}[N_h - N_0 = 1]}_{= \mu^* h e^{-\mu^* h} = \mu^* h + O(h^2)} \\
 &+ \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) | N_h - N_0 > 1 \right] \underbrace{\mathbb{P}[N_h - N_0 > 1]}_{= \sum_{n=2}^\infty \frac{(\mu^* h)^n}{n!} e^{-\mu^* h} = O(h^2)} = \\
 &= (1 - \mu^* h) \mathbb{E} \left[ \int_0^h e^{-\beta t} dY(t) + e^{-\beta h} \int_h^\tau e^{-\beta(t-h)} dY(t) | N_h - N_0 = 0 \right] \\
 &+ \mu^* h \mathbb{E} \left[ \int_0^h e^{-\beta t} dY(t) + e^{-\beta h} \int_h^\tau e^{-\beta(t-h)} dY(t) | N_h - N_0 = 1 \right] + O(h^2)
 \end{aligned}$$

Bei Betrachtung der obigen Gleichung kann man für  $0 \leq Q < a$  nun  $h$  so klein wählen, sodass man mit dem Prämieeinkommen bis zum Zeitpunkt  $h$  der Höhe  $ch$  die Barriere nicht übersteigt. Dadurch verschwinden die Integrale  $\int_0^h e^{-\beta t} dY(t)$  in den bedingten Erwartungswerten. Nun können wir den obigen Ausdruck unter Berücksichtigung von  $e^{-\beta h} = 1 - \beta h + O(h^2)$  und Konditionierung auf die Schadenhöhe im zweiten bedingten Erwartungswert umformen (wobei die Schadenhöhe  $X_1$  gemäß der Verteilungsfunktion  $F(\cdot)$  verteilt sei):

$$\begin{aligned}
 V(Q, a) &= (1 - \mu^* h - \beta h) \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_h^\tau e^{-\beta(t-h)} dY(t) | N_h - N_0 = 0 \right]}_{V(Q+ch, a)} \\
 &+ \mu^* h \int_0^{Q+0} \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_h^\tau e^{-\beta(t-h)} dY(t) | \{N_h - N_0 = 1, X_1 = y\} \right]}_{V(Q-y+ch, a)} dF(y) + O(h^2)
 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für hinreichend kleine  $h$  und  $0 \leq Q < a$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{V(Q+ch, a) - V(Q, a)}{ch} &= (\mu^* + \beta) \frac{V(Q+ch, a)}{c} \\
 &- \frac{\mu^*}{c} \int_0^{Q+0} V(Q-y+ch, a) dF(y) + O(h)
 \end{aligned}$$

Für  $h \rightarrow 0$  und  $0 \leq Q < a$  gilt also:

$$\frac{\partial V(Q, a)}{\partial Q} = \frac{\mu^* + \beta}{c} V(Q, a) - \frac{\mu^*}{c} \int_0^{Q+0} V(Q - y, a) dF(y) \quad (1.14)$$

Die Randbedingung für  $Q = a$  lautet:

$$V(a, a) = \frac{c}{\mu^* + \beta} + \frac{\mu^*}{\mu^* + \beta} \int_0^{a+0} V(a - y, a) dF(y) \quad (1.15)$$

Für die Herleitung von 1.15 spaltet man den Erwartungswert in die folgenden zwei Summanden auf:

1) Die erwarteten diskontierten Dividenden-Auszahlungen bis zum ersten Schaden:

Dazu benutzen wir die Dichtefunktion für die Zwischenankunftszeiten in unserem Modell, die durch  $\mu^* e^{-\mu^* s}$  für  $s > 0$  gegeben ist. Da wir die erwarteten Dividenden bei einer Anfangsreserve betrachten, die mit der Barriere  $a$  übereinstimmt, wird von Beginn an kontinuierlich mit der Prämienintensität  $c$  bis zum Eintreten des ersten Schadens Dividende ausgezahlt:

$$\begin{aligned} \mu^* \int_0^\infty \left( \int_0^s c e^{-\beta t} dt \right) e^{-\mu^* s} ds &= \frac{\mu^* c}{\beta} \int_0^\infty (1 - e^{-\beta s}) e^{-\mu^* s} ds \\ &= \frac{\mu^* c}{\beta} \left[ \underbrace{\frac{1}{\mu^*} - \frac{1}{\mu^* + \beta}}_{\frac{\beta}{\mu^*(\mu^* + \beta)}} \right] = \frac{c}{\mu^* + \beta} \end{aligned}$$

2) Erwartete diskontierte Dividenden-Auszahlung nach dem ersten Schaden:

$$\mu^* \int_0^\infty [e^{-\beta s} \int_0^{a+0} V(a - y, a) dF(y)] e^{-\mu^* s} ds = \frac{\mu^*}{\mu^* + \beta} \int_0^{a+0} V(a - y, a) dF(y)$$

### 1.3.2 Lösen der Integro-Differential-Gleichung für

$$V(Q, a)$$

Durch Transformation in eine Erneuerungsgleichung kann gezeigt werden, dass die Integro-Differentialgleichung

$$h'(x) = \frac{\mu^* + \beta}{c} h(x) - \frac{\mu^*}{c} \int_0^{x+0} h(x - y) dF(y) \quad 0 < x < \infty \quad (1.16)$$

genau eine Lösung bis auf multiplikative Konstante besitzt. Wir können daher für die Integro-Differential-Gleichung 1.14 folgern, dass  $V(Q, a)$  von der folgenden Gestalt sein muss:

$$V(Q, a) = C(a)h(Q)$$

Setzt man diese Beziehung in die Randbedingung 1.15 ein, so kann man die Konstante  $C(a)$  bestimmen

$$C(a)h(a) = \frac{c}{\mu^* + \beta} + \frac{\mu^*}{\mu^* + \beta} C(a) \int_0^{a+0} h(a-y) dF(y)$$

und erhält somit

$$C(a) = \frac{c}{(\mu^* + \beta)h(a) - \mu^* \int_0^{a+0} h(a-y) dF(y)} = \frac{1}{h'(a)}$$

aufgrund der Erneuerungsgleichung 1.16.

Das führt nun zu:

$$V(Q, a) = \frac{h(Q)}{h'(a)} \quad 0 \leq Q \leq a \quad (1.17)$$

Die Ermittlung des optimalen  $a_0$  reduziert sich also auf zwei analytische Aufgaben:

1. Bestimmung einer positiven Lösung  $h(x)$  von der Erneuerungsgleichung 1.16
2. Auffinden von  $a_0$ , sodass  $h'(a_0)$  minimal ist.

### 1.3.3 Lösen der Integro-Differential-Gleichung für $V(Q, a)$ bei exponentialverteilten Schäden

Im Fall von exponentialverteilten Schäden ist in der Erneuerungsgleichung 1.16 nun  $F(x) = 1 - e^{-\gamma x}$  einzusetzen. Das ergibt die Gleichung

$$ch'(x) = (\mu^* + \beta)h(x) - \mu^* \gamma \int_0^x h(x-y) e^{-\gamma y} dy,$$

welche nun nach  $x$  differenziert wird

$$ch''(x) = (\mu^* + \beta)h'(x) - \mu^* \gamma \int_0^x h'(x-y) e^{-\gamma y} dy - \mu^* \gamma h(0) e^{-\gamma x},$$



sodass man nach partieller Integration des obigen Integrals die folgende Gleichung erhält:

$$ch''(x) = (\mu^* + \beta)h'(x) + \underbrace{\mu^*\gamma^2 \int_0^x h(x-y)e^{-\gamma y} dy}_{=\gamma((\mu^* + \beta)h(x) - ch'(x))} - \mu^*\gamma h(x)$$

Die oben durch die geschwungene Klammer angegebene Gleichheit ergibt sich aus der Erneuerungsgleichung, von der wir bei unseren Berechnungen ausgegangen sind. Man muss also zur Berechnung von  $h(x)$  die unten angegebene homogene lineare Differentialgleichung lösen:

$$ch''(x) - (\mu^* + \beta - c\gamma)h'(x) - \beta\gamma h(x) = 0$$

Diese Differentialgleichung löst man wegen des Ansatzes  $h(x) = Ce^{rx}$  durch die Nullstellen  $r_1$  und  $r_2$  des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung  $p(r)$ :

$$p(r) = cr^2 - (\mu^* + \beta - c\gamma)r - \beta\gamma = 0$$

Wir haben also die Lösung

$$h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

für

$$r_{1,2} = \frac{\mu^* + \beta - c\gamma}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu^* + \beta - c\gamma}{2c}\right)^2 + \frac{\beta\gamma}{c}}.$$

Wegen  $\frac{\beta\gamma}{c} > 0$  gilt für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $p(r)$  der Zusammenhang

$$r_1 > 0 > r_2.$$

Das Verhältnis von  $C_1$  zu  $C_2$  lässt sich durch Einsetzen von  $h(x)$  in die Erneuerungsgleichung 1.16 ermitteln

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{r_1 + \gamma}{r_2 + \gamma}$$

Man kann nachrechnen, dass  $r_2 + \gamma > 0$  gilt, weil die Parameter  $c, \gamma$  und  $\mu^*$  positiv sind. Das bedeutet wegen des negativen Vorzeichens von  $\frac{C_1}{C_2}$ , dass  $C_1$  und  $C_2$  unterschiedliche Vorzeichen haben. Damit  $h(x)$  eine positive Lösung der Erneuerungsgleichung 1.16 ist, muss  $C_1 > 0, C_2 < 0$  und  $C_1 > -C_2$  gelten, da  $r_1 > 0 > r_2$  und  $0 < x < \infty$ . Die Funktion  $h'(x)$

$$h'(x) = C_1 r_1 e^{r_1 x} + C_2 r_2 e^{r_2 x}$$

nimmt ihr Minimum in  $a_0$  auf  $[0, \infty)$  an, wobei  $a_0$  durch  $h''(a_0) = 0$  aufgefunden werden kann.

Die optimalen Barrieren für verschiedene Werte von  $\mu^*$ ,  $\gamma$  und  $c$  sind nachfolgend tabelliert.<sup>4</sup>

Expected claim amount	Expected number of claims $\mu^*$	Margin 10%		Margin 20%	
		$c$ premium income	$a_0$ optimal bound	$c$ premium income	$a_0$ optimal bound
$1/\gamma$					
1,000	1,000	1.1 millions	117,000	1.2 millions	79,600
5,000	200	1.1 millions	419,000	1.2 millions	304,000
10,000	100	1.1 millions	706,000	1.2 millions	530,000
1,000	5,000	5.5 millions	151,000	6 millions	98,700
5,000	1,000	5.5 millions	583,000	6 millions	398,000
10,000	500	5.5 millions	1,020,000	6 millions	714,000

### 1.3.4 Asymptotisches Verhalten von $a_0$

Wie wir bereits im Abschnitt über das Lösen der Integro-Differential-Gleichung 1.3.2 gesehen haben, kann  $V(Q, a)$  durch die Lösung  $h(x)$  der Erneuerungsgleichung 1.16 bestimmt werden. Nun spalten wir  $h(x)$  in ein Produkt auf:

$$h(x) = e^{sx} \delta(x) \tag{1.18}$$

d.h. die Ableitung beschreibt sich nun als

$$h'(x) = se^{sx} \delta(x) + e^{sx} \delta'(x), \tag{1.19}$$

wobei

$$s = \frac{\mu^* + \beta}{c} - \frac{\mu^*}{c} \int_0^\infty e^{-sy} dF(y) \tag{1.20}$$

gelten soll.

Setzt man nun 1.18 und 1.19 in die Erneuerungsgleichung 1.16 ein, erhält man nachdem man die Gleichung durch  $e^{sx}$  dividiert hat:

$$s\delta(x) + \delta'(x) = \frac{\mu^* + \beta}{c} \delta(x) - \frac{\mu^*}{c} \int_0^{x+0} \delta(x-y) e^{-sy} dF(y)$$

---

<sup>4</sup>siehe [1], Seite 174

Die obige Gleichung wird nun nach  $\delta'(x)$  aufgelöst:

$$\delta'(x) = \left( \frac{\mu^* + \beta}{c} - s \right) \delta(x) - \frac{\mu^*}{c} \int_0^{x+0} \delta(x-y) e^{-sy} dF(y)$$

Mit den Definitionen

$$\lambda = \int_0^\infty e^{-sy} dF(y)$$

$$d\tilde{F}(y) = \frac{1}{\lambda} e^{-sy} dF(y)$$

und Berücksichtigung der Definition von  $s$  lässt sich nun die Gleichung für  $\delta'(x)$  anders anschreiben:

$$\delta'(x) = \frac{\mu^* \lambda}{c} \delta(x) - \frac{\mu^* \lambda}{c} \int_0^{x+0} \delta(x-y) d\tilde{F}(y)$$

Nun wenden wir auf das obige Integral partielle Integration an und denken an unsere Annahme im Stetigen  $F(0) = 0$ , d.h. die Schäden sind durch strikt positive Zufallsvariable gegeben.

$$\delta'(x) = \frac{\mu^* \lambda}{c} \delta(x) - \frac{\mu^* \lambda}{c} \left( \delta(0) \tilde{F}(x) - \underbrace{\delta(x) \tilde{F}(0)}_0 + \int_0^{x+0} \delta'(x-y) \tilde{F}(y) dy \right)$$

durch Integration  $\int_0^t$  der obigen Gleichung gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \delta(t) - \delta(0) &= \frac{\mu^* \lambda}{c} \int_0^t \delta(x) dx - \\ &- \frac{\mu^* \lambda}{c} \left( \int_0^t \delta(0) \tilde{F}(x) dx + \underbrace{\int_0^t \int_0^{x+0} \delta'(x-y) \tilde{F}(y) dy dx}_{= \int_0^t \int_y^t \delta'(x-y) dx \tilde{F}(y) dy} \right) \end{aligned}$$

wegen

$$\int_y^t \delta'(x-y) dx = \delta(t-y) - \delta(0)$$

gilt

$$\begin{aligned} \delta(t) - \delta(0) &= \frac{\mu^* \lambda}{c} \int_0^t \delta(x) dx - \\ &- \frac{\mu^* \lambda}{c} \left( \int_0^t \delta(0) \tilde{F}(x) dx + \int_0^t (\delta(t-y) - \delta(0)) \tilde{F}(y) dy \right) \end{aligned}$$

Man sieht, dass sich die Terme  $\int_0^t \delta(0) \tilde{F}(x) dx$  aufheben, und erhält nach einer Substitution  $x = t - y$  im ersten Integral oben:

$$\delta(t) - \delta(0) = \frac{\mu^* \lambda}{c} \int_0^t \delta(t - y) \left(1 - \tilde{F}(y)\right) dy \quad (1.21)$$

$\delta(x)$  ist also (so wie  $h(x)$ ) als Lösung einer Erneuerungsgleichung bis auf multiplikative Konstante eindeutig.

Die Bestimmung von  $h(x)$  kann also auf die Ermittlung von  $\delta(x)$  reduziert werden.

Wie bereits erwähnt, sind die Fälle, bei denen die optimale Barriere-Strategie bezüglich einer großen Barriere  $a_0$  gegeben sind, von speziellem Interesse. Der folgende Satz besagt, dass die Barriere für hinreichend kleines  $\beta$  groß wird.

**Satz:** Wenn  $c > \mu^* \int_0^\infty x dF(x)$  erfüllt ist, so gilt  $a_0 \rightarrow \infty$  für  $\beta \rightarrow 0$ .

**Bem:** Der Limes  $\beta \rightarrow 0$  ist so zu verstehen, dass alle anderen Parameter des Modells konstant bleiben, während die Zinsintensität  $\beta$  gegen 0 strebt und damit die erwarteten diskontierten Dividenden und somit die optimale Barriere  $a_0$  beeinflusst. Die Voraussetzung des Satzes, dass die Prämienrate den erwarteten Schaden pro Zeiteinheit übersteigt, ist eine realistische Forderung an unser Modell.

**Beweis:**  $d$  habe die Eigenschaft  $0 < d < c - \mu^* \int_0^\infty x dF(x)$ .

Wir definieren eine Dividenden-Strategie  $\zeta$ , die bis zum Eintreten des Ruins stetige Dividende mit Intensität  $d$  ausbezahlt. In diesem Fall entwickelt sich die Reserve des Versicherungsunternehmens unter Berücksichtigung der Dividendenauszahlung folgendermaßen:

$$Q_t = Q + \underbrace{(c - d)}_{> \mu^* \int_0^\infty x dF(x)} t - S_t$$

Da die Einnahmenintensität  $c - d$  die erwarteten Schäden pro Zeiteinheit übersteigt (es also nach der Konstruktion von  $d$  einen positiven Sicherheitszuschlag bei den Einnahmen des Versicherungsunternehmens gibt), folgt aus den Kenntnissen der Ruinthorie, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens  $\mathbb{P}[\tau = \infty] = 1 - \Psi(Q)$  für beliebiges Anfangskapital  $Q \geq 0$  positiv ist – insbesondere für den Fall  $Q = 0$ . Man kann also im Erwartungswert der diskontierten Dividenden auf die Ruinzeit  $\tau$  konditionieren, um zu einer Abschätzung zu gelangen – in der nachfolgenden Notation bezeichnet  $\{\tau < \infty\}$  das Ereignis, dass Ruin eintritt, und  $\{\tau = \infty\}$ , dass nie

Ruin eintritt.

$$\begin{aligned}
 V(0) &\geq V(0, \zeta) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) \right] = \\
 &= \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) | \{\tau < \infty\} \right]}_{\geq 0} \mathbb{P}[\tau < \infty] + \\
 &+ \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dY(t) | \{\tau = \infty\} \right] \underbrace{\mathbb{P}[\tau = \infty]}_{1 - \Psi(0)} \\
 &\geq \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \underbrace{e^{-\beta t} dY(t)}_{de^{-\beta t} dt} | \{\tau = \infty\} \right] [1 - \Psi(0)] = [1 - \Psi(0)] \frac{d}{\beta}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend bedeutet das:

$$V(0) \geq V(0, \zeta) \geq [1 - \Psi(0)] \frac{d}{\beta}$$

Wegen unserer Abschätzung gilt also  $V(0) \rightarrow \infty$  für  $\beta \rightarrow 0$ . Daraus kann man wiederum  $a_0 \rightarrow \infty$  für  $\beta \rightarrow 0$  folgern. Diese Folgerung wird durch Widerspruch bewiesen: Wenn  $a_0$  für  $\beta \rightarrow 0$  beschränkt wäre, so wäre die erwartete Überlebenszeit  $\mathbb{E}[\tau]$  bei Verwendung der Barriere  $a_0$  ebenfalls beschränkt – und damit wäre  $V(0) = V(0, a_0)$  auch beschränkt, was im Widerspruch zu unserer Folgerung aus der obigen Abschätzung steht.

Wie man bei der in Abschnitt 1.3.1 hergeleiteten Integro-Differential-Gleichung

$$\frac{\partial V(Q, a)}{\partial Q} = \frac{\mu^* + \beta}{c} V(Q, a) - \frac{\mu^*}{c} \int_0^{Q+0} V(Q - y, a) dF(y)$$

ersieht, kann derselbe Effekt auf  $V(Q, a)$  einer Veränderung der Zinsintensität  $\beta$  durch eine Variation von  $\mu^*$  und  $c$  bei gleichbleibendem Verhältnis  $\frac{\mu^*}{c}$  erzielt werden. So kommt einer Halbierung der Zinsintensität  $\beta$  eine Verdoppelung der Prämienintensität  $c$  und der erwarteten Schadenanzahl pro Zeiteinheit  $\mu^*$  gleich. Konkret kann man also die beobachteten Effekte bei  $\beta \rightarrow 0$  ebenso als Folgen von  $\mu^*, c \rightarrow \infty$  bei konstantem  $\beta$  und  $\frac{\mu^*}{c}$  ansehen. Wir gelangen also zum folgenden Theorem.

**Satz:** Wenn  $c > \mu^* \int_0^\infty x dF(x)$  erfüllt ist, so gilt  $a_0 \rightarrow \infty$  für  $\mu^*, c \rightarrow \infty$  ( $\beta$  und  $\frac{\mu^*}{c}$  konstant).

**Bem:** Intuitiv kann der obige Satz so interpretiert werden, dass größer werdende Risikomassen, die in unserem Satz durch die anwachsende Schadenfrequenz  $\mu^*$  zum Ausdruck kommen, und passend steigendes Prämienvolumen (wegen  $\frac{\mu^*}{c}$  konstant) eine anwachsende optimale Barriere zur Folge haben.

Im Folgenden wird das asymptotische Verhalten von  $\delta(x)$  und somit von  $h(x)$  untersucht. Es ist in diesem Fall praktisch  $\delta(x)$  derart zu normieren, sodass  $\delta(\infty) = 1$  gilt. Aus der Gleichung 1.21 für  $\delta(x)$  folgt zusammen mit Kenntnissen der Ruintheorie, dass  $\delta(x)$  mit der Überlebenswahrscheinlichkeit übereinstimmt.

Falls

$$\frac{\mu^* \lambda}{c} \int_0^\infty [1 - \tilde{F}(x)] dx < 1$$

gilt, so kann das asymptotische Verhalten von  $\delta(x)$  wie folgt beschrieben werden

$$\delta(x) \sim 1 - Ce^{-\kappa x} \quad \text{für große } x$$

mit  $\kappa$ , sodass

$$\frac{\mu^* \lambda}{c} \int_0^\infty e^{\kappa y} [1 - \tilde{F}(y)] dy = 1$$

und

$$C = \frac{1 - \frac{\mu^* \lambda}{c} \int_0^\infty [1 - \tilde{F}(y)] dy}{\kappa \mu^\#}$$

mit

$$\mu^\# = \frac{\mu^* \lambda}{c} \int_0^\infty ye^{\kappa y} [1 - \tilde{F}(y)] dy.$$

Dieses asymptotische Verhalten gilt wegen der zugehörigen Bedingung für

$$c > \mu^* \int_0^\infty x dF(x),$$

den realistischen Fall von einem positiven Sicherheitszuschlag.

Das bedeutet für das asymptotische Verhalten von  $h(x) = e^{sx} \delta(x)$ :

$$h(x) \sim e^{sx} - Ce^{(s-\kappa)x} \quad \text{für große } x \quad (1.22)$$

Wie bereits im Abschnitt über das Lösen der Integro-Differential-Gleichung 1.3.2 erwähnt, ist die optimale Barriere  $a_0$  als jenes  $x = a_0$  charakterisiert, für das  $h'(x)$  sein Minimum erreicht. Es ist also intuitiv nachvollziehbar jenes

$x = a_1$  zu ermitteln, für das  $g'(x)$  (mit  $g(x) = e^{sx} - Ce^{(s-\kappa)x}$ ) sein Minimum annimmt, und zu erwarten, dass  $a_1$  (z.B. im Fall  $\beta \rightarrow 0$ ) eine gute asymptotische Approximation für  $a_0$  darstellt – die Güte dieser Approximation wird im Folgenden nicht untersucht.

Zweifache Ableitung von  $g(x)$  liefert

$$g''(x) = s^2 e^{sx} - C(s - \kappa)^2 e^{(s-\kappa)x}$$

und durch den Zusammenhang

$$g''(a_1) = 0$$

erhält man

$$a_1 = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ C \left( \frac{\kappa}{s} - 1 \right)^2 \right]. \quad (1.23)$$

# Kapitel 2

## Diffusionsapproximation

### 2.1 Motivation der Diffusionsapproximation

Eine mögliche Approximation des freien Reserveprozesses  $Z_t$  im Compound-Poisson-Modell im Fall häufiger kleiner Schäden ist die Diffusionsapproximation. Den mathematischen Hintergrundgedanken für den Ansatz der Näherung von  $Z_t$  durch eine Brownsche Bewegung mit Drift liefert unter anderem der folgende Satz, der aus dem Buch „Ruin Probabilities“ von Asmussen entnommen wurde.<sup>5</sup> Dazu betrachten wir den sogenannten Schadenüberschussprozess  $(U_t)$ , der durch

$$U_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k - ct$$

definiert sei, d.h.  $Z_t = x - U_t$

Weiters bezeichne  $\rho$  die Prämienintensität ohne Sicherheitszuschlag

$$\rho = \mathbb{E}[S_1] = \mu^* \mathbb{E}[X_1]$$

und, um die Abhängigkeit des Schadenüberschussprozesses von der Prämienintensität  $c$  anzudeuten, schreiben wir im Folgenden  $(U_t^{(c)})$ .

**Satz:** Für  $c \downarrow \rho$  gilt die folgende Konvergenz im Rahmen des Compound-Poisson-Modells

$$\left( \frac{|\rho - c|}{\sigma^2} U_{\frac{t\sigma^2}{(\rho-c)^2}}^{(c)} \right)_{t \geq 0} \rightarrow (W_{-1}(t))_{t \geq 0},$$

wobei

$$\sigma^2 = \text{var}(S_1) = \mu^* \mathbb{E}[X_1^2].$$

---

<sup>5</sup>siehe [4]



**Bem.:** Im obigen Satz bezeichnet  $(W_{-1}(t))_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung mit Drift  $-1$  – das bedeutet insbesondere  $W_{-1}(t) \hat{=} \mathcal{N}(-t, t)$ . Man kann also bei Schadenüberschussprozessen aus dem Compound-Poisson-Modell feststellen, dass diese bei immer schnellerem Zeit-Durchlauf (was häufigere Schäden ergibt) und gleichzeitig geringerer Skalierung (entspricht kleiner werdenden Schäden) eine Konvergenz in Verteilung zu einer Brownschen Bewegung mit Drift aufweisen.

**Beweisskizze:** Zuerst beobachten wir, dass die folgende Konvergenz in Verteilung zutrifft:

$$\left( \frac{1}{\sigma\sqrt{x}} \left( \underbrace{U_{tx}^{(c)}}_{\sum_{k=1}^{N_{xt}} X_k - ctx} - tx(\rho - c) \right) \right) = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{x}} U_{tx}^{(\rho)} \right) \rightarrow (W_0(t))_{t \geq 0} \quad (2.1)$$

für  $c \downarrow \rho$ , wobei

$$x = x^{(c)} \quad \text{mit} \quad \lim_{c \rightarrow \rho} x^{(c)} = \infty$$

Damit 2.1 gilt, muss insbesondere  $\frac{U_t^{(\rho)}}{\sqrt{t}} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  in der Verteilung für  $t \rightarrow \infty$  gelten. Dazu erinnern wir uns, dass der aggregierte Schadenprozess und somit auch der Schadenüberschussprozess im Compound-Poisson-Modell stationäre und unabhängige Inkremente besitzt – deswegen kann  $U_{nh}^{(\rho)}$  für  $n = 1, 2, \dots$  und eine Schrittweite  $h > 0$  als Summe von Summanden, welche aus einer u.i.v.-Folge entnommen werden, interpretiert werden und wir können aus dem zentralen Grenzwertungssatz die zu zeigende Verteilungskonvergenz an diesen diskreten Zeitpunkten folgern, wobei wir  $\mathbb{E}[U_{nh}^{(\rho)}] = 0$  und  $\text{var}(U_{nh}^{(\rho)}) = nh\sigma^2$  nutzen. Es bleibt also nur noch die Erweiterung dieser Kenntnis auf  $U_t^{(\rho)}$  zu zeigen. Dazu wählen wir für festes  $t$  ein  $n$  derart, dass  $nh \leq t < (n+1)h$  gilt. Wir betrachten nun die folgende Differenz:

$$\frac{U_t^{(\rho)}}{\sqrt{t}} - \frac{U_{nh}^{(\rho)}}{\sqrt{nh}} = \frac{S_t}{\sqrt{t}} - \frac{S_{nh}}{\sqrt{nh}} - \rho(\sqrt{t} - \sqrt{nh})$$

Wegen

$$\sqrt{t} - \sqrt{nh} < h \cdot \max_{t \in [nh, (n+1)h]} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{t} - \sqrt{nh}) = h \frac{1}{2\sqrt{nh}}$$

müssen wir für  $t \rightarrow \infty$  (und somit  $n^{(t)} \rightarrow \infty$ ) nur mehr  $\frac{S_t}{\sqrt{t}} - \frac{S_{nh}}{\sqrt{nh}}$  betrachten:

$$\frac{S_t}{\sqrt{t}} - \frac{S_{nh}}{\sqrt{nh}} = \underbrace{\frac{S_t}{\sqrt{t}} - \frac{S_{nh}}{\sqrt{t}}}_{\geq 0} + \frac{S_{nh}}{\sqrt{t}} - \frac{S_{nh}}{\sqrt{nh}}$$

Außerdem gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{nh}} < h \cdot \max_{t \in [nh, (n+1)h]} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{nh}} \right) = -h \frac{1}{2\sqrt{((n+1)h)^3}}$$

Wegen den unabhängigen und stationären Inkrementen von  $S_t$  wissen wir aus dem Starken Gesetz der Großen Zahlen, dass sich  $S_{nh}$  so wie  $\mathbb{E}[S_{nh}] = nh\mu^*\mathbb{E}[X_1]$  verhält – also für  $n \rightarrow \infty$  von  $((n+1)h)^{-\frac{3}{2}}$  dominiert wird. Zusammenfassend kommen wir zur folgenden Darstellung:

$$\frac{U_t^{(\rho)}}{\sqrt{t}} \geq \frac{U_{nh}^{(\rho)}}{\sqrt{nh}} + \Delta_t^{(1)}$$

Mit analoger Vorgangsweise erhält man auch eine Abschätzung nach oben.

$$\frac{U_t^{(\rho)}}{\sqrt{t}} \leq \frac{U_{(n+1)h}^{(\rho)}}{\sqrt{(n+1)h}} + \Delta_t^{(2)}$$

Es gilt also tatsächlich  $\frac{U_t^{(\rho)}}{\sqrt{t}} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , weil die Terme  $\Delta_t^{(1)}$  und  $\Delta_t^{(2)}$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 streben und die Verteilungskonvergenz an den diskreten Zeitpunkten bekannt ist.

Nun definieren wir  $x = x^{(c)} = \frac{\sigma^2}{(\rho-c)^2}$  und beobachten, dass wie gewünscht  $x^{(c)} \rightarrow \infty$  für  $c \rightarrow \rho$  gilt. Wir können also in 2.1 einsetzen:

$$\left( \frac{|\rho - c|}{\sigma \cdot \sigma} \left( U_{\frac{t\sigma^2}{(c-\rho)^2}}^{(c)} - t \frac{\sigma^2}{(\rho - c)^2} (\rho - c) \right) \right) = \left( \frac{|\rho - c|}{\sigma^2} U_{\frac{t\sigma^2}{(c-\rho)^2}}^{(c)} + t \right) \rightarrow (W_0(t))_{t \geq 0}$$

woraus die Behauptung des Satzes folgt:

$$\left( \frac{|\rho - c|}{\sigma^2} U_{\frac{t\sigma^2}{(c-\rho)^2}}^{(c)} \right)_{t \geq 0} \rightarrow (W_0(t) - t)_{t \geq 0} = (W_{-1}(t))_{t \geq 0} \quad \text{für} \quad c \downarrow \rho$$

## 2.2 Durchführung der Diffusionsapproximation

Man kann also im Sinn der im vorigen Abschnitt 2.1 hergeleiteten Verwandtschaft des Schadenüberschussprozesses im Compound-Poisson-Modell und

der Brownschen Bewegung mit Drift die sogenannte Diffusionsapproximation des Reserveprozesses  $Z_t$  durchführen.

Dies kann z.B. durch Anpassung der ersten beiden Momente erfolgen – man arbeitet also anstatt des ursprünglichen Reserveprozesses  $Z_t$  nun mit dem Reserveprozess  $R_t = x + \mu t + \sigma W(t)$ , wobei die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  durch

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}[Z_1 - x] = \mathbb{E}[c - S_1] = c - \mathbb{E}[X_1]\mu^* \\ \sigma^2 &= \text{var}(Z_1 - x) = \text{var}(S_1) = \mathbb{E}[X_1^2]\mu^*\end{aligned}$$

an das ursprüngliche Compound-Poisson-Modell angepasst werden können. In der Notation der stochastischen Differentialgleichungen erfüllt der Reserveprozess  $R_t$  also die folgende Gleichung:

$$dR_t = \mu dt + \sigma dW(t)$$

Bezieht man nun auch in das Diffusionsmodell die Möglichkeit einer Dividendenzahlung der Intensität  $a(t) \in [0, a_0]$  für  $a_0 > 0$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  mit ein, so ergibt sich für den um die Dividendenzahlungen modifizierten Reserveprozess  $R_t^{(a)}$  die folgende definierende stochastische Differentialgleichung:

$$dR_t^{(a)} = (\mu - a(t))dt + \sigma dW(t)$$

Bewertet man den Reserveprozess  $R_t$  mit dem Dividenden-Strategie-Kriterium, muss eine Strategie  $(a(t))_{t \geq 0}$  derart gefunden werden, sodass

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\beta t} a(t) dt\right]$$

maximiert wird – hierbei bezeichnet  $\tau$  wiederum den Ruinzeitpunkt (dies sei nun jener Zeitpunkt, zu dem erstmals  $R_t = 0$  auftritt). Ein derartiges Optimierungsproblem kann mit Methoden der Kontrolltheorie gelöst werden, welche im nachfolgenden Kapitel vorgestellt werden.

# Kapitel 3

## Kontrolltheorie

Der in diesem Kapitel behandelte Teil zur Kontrolltheorie orientiert sich nach dem Skriptum „Stochastic Control: With Applications to Financial Mathematics“ von Jörn Saß.<sup>6</sup>

### 3.1 Allgemeine Problemstellung

Die Kontrolltheorie beschäftigt sich mit Itô-Prozessen, welche eine stochastische Differentialgleichung (SDG) in Abhängigkeit einer Brownschen Bewegung erfüllen.

Wir betrachten dazu einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $T > 0$  als Endpunkt des betrachteten Zeithorizonts,  $\mathcal{F}$  sei eine Filtration, welche die „natürlichen Bedingungen“ erfüllt (d.h. Rechtsstetigkeit und  $\mathcal{F}_0$  beinhaltet alle  $\mathbb{P}$ -Nullmengen der  $\sigma$ -Algebra, die wir betrachten) und  $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$

$$W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)^T$$

sei eine  $m$ -dimensionale Brownsche Bewegung auf  $\mathcal{F}$ .

Ein Kontrollprozess ist ein  $\mathcal{F}$ -progressiv messbarer Prozess  $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$  mit Werten in einer Menge  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p$  – d.h. der Prozess  $u$  eingeschränkt auf  $\Omega \times [0, t]$  ist messbar bezüglich der Produkt- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{F}_t$  mit der Spur- $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen auf  $[0, t]$ .

Der  $n$ -dimensionale Zustandsprozess  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  erfüllt die folgende SDG:

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t \quad X_0 = x_0 \quad (3.1)$$

wobei

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

---

<sup>6</sup>siehe [5]

messbare Abbildungen sind. Weitere Bedingungen werden für jedes Kontrollproblem gesondert spezifiziert. Es sind insbesondere Bedingungen notwendig, um die Existenz von  $X$  als Lösung der SDG zu gewährleisten. Um die Abhängigkeit von  $X$  vom Kontrollprozess  $u$  anzudeuten, schreiben wir im Folgenden auch  $X_t^u$  für den Zustandsprozess zum Zeitpunkt  $t$ .

Die zu optimierende Zielfunktion ist durch

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T \psi(t, X_t^u, u_t)dt + \Psi(T, X_T^u) | X_t^u = x\right] \quad (3.2)$$

gegeben.

Die Menge der zulässigen Kontrollprozesse wird mit  $\mathcal{A}(t, x)$  bezeichnet und beinhaltet alle Prozesse  $(u_s)_{s \in [t, T]}$ , für die zumindest die SDG 3.1 für den Zustandsprozess  $X_t$  eine starke Lösung auf  $[t, T]$  gegeben  $X_t = x$  besitzt und für die die Zielfunktion 3.2 wohldefiniert ist. Je nach dem betrachteten Optimierungsproblem können weitere Annahmen getroffen werden. Wir bezeichnen  $\mathcal{A}(x_0) = \mathcal{A}(0, x_0)$ .

Die Wertfunktion des Kontrollproblems ist durch

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, u)$$

definiert.

Das Ziel ist,  $V(0, x_0)$  zu berechnen und den zugehörigen Kontrollprozess  $u^*$  zu eruiieren, d.h.  $u^*$  mit der Eigenschaft  $V(0, x_0) = J(0, x_0, u^*)$  aufzufinden.  $u^*$  wird der optimale Kontrollprozess genannt.

## 3.2 Itô-Diffusionen und deren Generatoren

Es werden im Folgenden Definitionen und Sätze vorgestellt, die wir zum Verständnis der Hamilton-Jabobi-Bellman-Methode benötigen, die im Rahmen dieses Kapitels vorgestellt wird.

Wir betrachten die  $n$ -dimensionale SDG

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (3.3)$$

wobei  $W$  eine  $m$ -dimensionale Brownsche Bewegung ist und der messbare Drift und die Diffusionskoeffizienten

$$b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

erfüllen für eine Konstante  $K > 0$  und für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $s, t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \|b(s, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(s, x) - \sigma(t, y)\| &\leq K(\|y - x\| + |t - s|) \\ \|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 &\leq K^2(1 + \|x\|^2) \end{aligned}$$

Wir betrachten die Filtration  $\mathcal{F}$ , welche von der Brownschen Bewegung  $W$  erzeugt wird, wobei noch zusätzlich alle Nullmengen von  $\mathcal{F}_T$  enthalten sein sollen. Unter diesen Bedingungen hat die SDG 3.3 eine eindeutig starke Lösung  $X$ , welche wir Itô-Diffusion nennen. Außerdem bezeichnen wir

$$a(t, x) := \sigma(t, x)\sigma(t, x)^T$$

die Diffusionsmatrix von  $X$ .

Für eine Zufallsvariable  $Y$  schreiben wir

$$\mathbb{E}_{t,x}[Y] = \mathbb{E}[Y|X_t = x]$$

und

$$\mathbb{E}_x[Y] = \mathbb{E}_{0,x}[Y].$$

**Satz:**  $X$  sei eine zeitlich homogene Itô-Diffusion und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und messbar. So gilt:

(i) Für alle  $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t](\omega) = \mathbb{E}_{X_t(\omega)}[f(X_s)] \quad t, s \geq 0$$

(ii) Wenn  $\tau$  eine Stoppzeit mit  $\tau < \infty$  ist, gilt:

$$\mathbb{E}_x[f(X_{\tau+s})|\mathcal{F}_\tau](\omega) = \mathbb{E}_{X_\tau(\omega)}[f(X_s)] \quad t, s \geq 0$$

Die Eigenschaft (i) wird Markov-Eigenschaft genannt, (ii) die starke Markov-Eigenschaft. Normalerweise wird die Abhängigkeit von  $\omega$  nicht angeschrieben. Es sollte damit im obigen Satz angedeutet werden, dass  $\mathbb{E}_{X_t}[f(X_s)]$  eine Zufallsvariable ist, nämlich

$$\mathbb{E}_{X_t}[f(X_s)] = g(X_t), \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(x) = \mathbb{E}_x[f(X_s)].$$

Von nun an wird angenommen, dass  $X$  eine Itô-Diffusion wie in 3.3 ist.

Der infinitesimale Generator  $L$  von  $X$  ist definiert als

$$Lf(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathbb{E}_{s,x}[f(t, X_t)] - f(s, x)}{t - s}$$

für alle  $s \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$  und  $f$  in  $\mathcal{D}_L$ , welche die Klasse aller Funktionen  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , für die die obigen Grenzwerte für alle  $s, x$  existieren, sei.

Weiters definieren wir einen Operator  $\mathcal{L}$  wie folgt:

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.4)$$

Dieser Operator kann auf alle Funktionen  $f$  in

$$\mathcal{C}^{1,2} := \{g = g(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ 1x stetig diff.bar in } t \text{ und 2x in } x\}$$

angewandt werden, was zur Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(t, x) &:= f_t(t, x) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(t, x)b_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \underbrace{f_{x_i x_j}}_{=f_{x_j x_i}} \\ &= f_t(t, x) + (D_x f(t, x))^T b(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( (D_{xx} f(t, x)) a(t, x) \right) \end{aligned}$$

führt, wobei  $D_x f$  den Gradienten der Funktion  $f$ ,  $D_{xx}$  die Hesse-Matrix von  $f$  (d.h.  $(D_{xx} f)_{ij} = f_{x_i x_j}$ ) und  $\text{tr}(A)$  die Spur der Matrix  $A$  (d.h. die Summe der Diagonalelemente von  $A$ ) bezeichnet.

Mit der eben definierten Notation kann Itô's Formel folgendermaßen angeschrieben werden:

$$df(t, X_t) = \mathcal{L}f(t, X_t)dt + (D_x f(t, X_t))^T \sigma(t, X_t)dW_t$$

**Satz:** Angenommen, es gilt  $f \in \mathcal{C}^{1,2}$  und für alle  $u \geq t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^u |\mathcal{L}f(s, X_s)| ds \right] < \infty, \quad \mathbb{E} \left[ \int_t^u \| (D_x f(s, X_s))^T \sigma(s, X_s) \|^2 ds \right] < \infty,$$

dann gilt  $f \in \mathcal{D}_L$  und  $Lf(t, x) = \mathcal{L}f(t, x)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Anwendung der Itô-Formel auf  $f(t, X_t)$  in

$$Lf(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathbb{E}_{s,x}[f(t, X_t)] - f(s, x)}{t - s}.$$

Wir erhalten also

$$Lf(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathbb{E}_{s,x} \left[ \int_s^t \mathcal{L}f(u, X_u) du + \int_s^t (D_x f(u, X_u))^T \sigma(u, X_u) dW_u \right]}{t - s}.$$

Wegen  $\mathbb{E} \left[ \int_t^u \| (D_x f(s, X_s))^T \sigma(s, X_s) \|^2 ds \right] < \infty$  handelt es sich beim stochastischen Integral  $\left( \int_s^t (D_x f(u, X_u))^T \sigma(u, X_u) dW_u \right)_{t \geq s}$  um ein Martingal. Es gilt also insbesondere:

$$\mathbb{E}_{s,x} \left[ \int_s^t (D_x f(u, X_u))^T \sigma(u, X_u) dW_u \right] = \int_s^s (D_x f(u, X_u))^T \sigma(u, X_u) dW_u = 0$$

Weiters kann beim übrigen Term in der Itô-Formel wegen

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^u |\mathcal{L}f(s, X_s)| ds \right] < \infty$$

Erwartungswert und Grenzübergang vertauscht werden, was zusammen mit der Voraussetzung  $f \in \mathcal{C}^{1,2}$  zu der Aussage des Satzes führt:

$$Lf(s, x) = \mathbb{E}_{s,x} \left[ \underbrace{\lim_{t \downarrow s} \frac{\int_s^t \mathcal{L}f(u, X_u) du}{t - s}}_{\mathcal{L}f(s, X_s)} \right] = \mathcal{L}f(s, x)$$

Aufgrund des obigen Satzes wird  $\mathcal{L}$  auch Generator von  $X$  genannt. Die Bedingungen dieses Satzes sind für  $f \in \mathcal{C}^{1,2}$  mit kompaktem Träger erfüllt, weil in diesem Fall die Ableitungen beschränkt sind.

**Satz:** *Dynkin's Formel*

Sei  $f \in \mathcal{C}^{1,2}$  eine Funktion mit kompaktem Träger und  $\tau$  eine Stoppzeit mit der Eigenschaft  $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$ , so gilt:

$$\mathbb{E}[f(\tau, X_\tau)] = f(0, x) + \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\tau \mathcal{L}f(s, X_s) ds \right]$$

Falls  $\tau$  die Austrittszeit aus einer beschränkten Menge ist, kann *Dynkin's Formel* für  $f \in \mathcal{C}^{1,2}$  angewandt werden. Die Formel von Dynkin werden wir beim Beweis eines sogenannten Verifikationstheorems verwenden, welches Aufschluss über Bedingungen für die Anwendbarkeit des Hamilton-Jacobi-Bellman-Algorithmus gibt.

### 3.3 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Für die Herleitung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung) verwenden wir das sogenannte Bellman-Prinzip, welches besagt, dass ein optimaler Kontrollprozess auf  $[t, t_1]$  für  $t < t_1$  und anschließendes optimales Handeln auf  $[t_1, T]$  auch zu einem globalen Optimum (also auf  $[t, T]$ ) führt. Das Bellman-Prinzip ergibt also für die Wertfunktion  $V(t, x)$  unseres Optimierungsproblems das Folgende:

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1}^u) \right]$$



Um nun zur HJB-Gleichung, welche die Wertfunktion  $V(t, x)$  unter bestimmten Voraussetzungen notwendigerweise erfüllt, zu gelangen, wenden wir Itô's Formel auf  $V(t_1, X_{t_1}^u)$  an:

$$\begin{aligned}
V(t, x) &= \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[ \int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) ds + V(t, X_t^u) \right. \\
&\quad + \int_t^{t_1} \left( V_t(s, X_s^u) + (D_x V(s, X_s^u))^T b(s, X_s^u, u_s) \right) ds \\
&\quad + \int_t^{t_1} \frac{1}{2} \text{tr} \left( (D_{xx} V(s, X_s^u)) a(s, X_s^u, u_s) \right) ds \\
&\quad \left. + \int_t^{t_1} (D_x V(s, X_s^u))^T \sigma(s, X_s^u, u_s) dW_s \right],
\end{aligned}$$

wobei  $a$  die Diffusionsmatrix

$$a(s, X_s^u, u_s) := \sigma(s, X_s^u, u_s) \sigma(s, X_s^u, u_s)^T$$

bezeichnet.

Wenn  $\int_t^{t_1} (D_x V(s, X_s^u))^T \sigma(s, X_s^u, u_s) dW_s$ ,  $t_1 \geq t$  ein Martingal ist und somit der Erwartungswert 0 ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
V(t, x) &= \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[ \int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) ds + V(t, X_t^u) \right. \\
&\quad + \int_t^{t_1} \left( V_t(s, X_s^u) + (D_x V(s, X_s^u))^T b(s, X_s^u, u_s) \right) ds \\
&\quad \left. + \int_t^{t_1} \frac{1}{2} \text{tr} \left( (D_{xx} V(s, X_s^u)) a(s, X_s^u, u_s) \right) ds \right]
\end{aligned}$$

Weil  $V(t, X_t^u) = V(t, x)$  im obigen bedingten Erwartungswert aufgrund der Bedingung  $X_t^u = x$  gilt, subtrahieren wir nun  $V(t, x)$ . Weiters dividieren wir die Gleichung durch  $t_1 - t$  und betrachten  $t_1 \downarrow t$ :

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t_1 \downarrow t} \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[ \frac{\int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) ds}{t_1 - t} \right. \\
&\quad + \frac{\int_t^{t_1} \left( V_t(s, X_s^u) + (D_x V(s, X_s^u))^T b(s, X_s^u, u_s) \right) ds}{t_1 - t} \\
&\quad \left. + \frac{\int_t^{t_1} \frac{1}{2} \text{tr} \left( (D_{xx} V(s, X_s^u)) a(s, X_s^u, u_s) \right) ds}{t_1 - t} \right]
\end{aligned}$$

Für die Herleitung der HJB-Gleichung nehmen wir weiters an, dass der Grenzübergang mit der sup- und Erwartungswert-Bildung vertauschbar ist und erhalten damit:

$$\begin{aligned}
0 = & \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E}_{t,x} \left[ \lim_{t_1 \downarrow t} \frac{\int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) ds}{t_1 - t} \right. \\
& + \lim_{t_1 \downarrow t} \frac{\int_t^{t_1} \left( V_t(s, X_s^u) + (D_x V(s, X_s^u))^T b(s, X_s^u, u_s) \right) ds}{t_1 - t} \\
& \left. + \lim_{t_1 \downarrow t} \frac{\int_t^{t_1} \frac{1}{2} \text{tr} \left( (D_{xx} V(s, X_s^u)) a(s, X_s^u, u_s) \right) ds}{t_1 - t} \right]
\end{aligned}$$

Im Grenzfall  $t_1 \downarrow t$  beschränkt sich nun das Problem der Auffindung eines optimalen Kontrollprozesses auf  $[t, t_1]$  auf die Wahl von  $u_t = u \in \mathcal{U}$ . Weiters gilt unter Stetigkeit der Integranden, dass diese die Ergebnisse der Quotienten im Grenzwert sind und wir verwenden, dass  $X_t^u = x$  im bedingten Erwartungswert gilt und dass man nach dem Übergang zum Grenzwert und Ausnutzung von  $X_t^u = x$  den bedingten Erwartungswert vernachlässigen kann:

$$\begin{aligned}
0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} & \left\{ \psi(t, x, u) + V_t(t, x) + (D_x V(t, x))^T b(t, x, u) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left( (D_{xx} V(t, x)) a(t, x, u) \right) \right\} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Die obige Gleichung nennt man HJB-Gleichung. Sie ist unter den Voraussetzungen, die während ihrer Herleitung aufgezählt wurden, eine notwendige Bedingung für die Wertfunktion  $V(t, x)$  eines Optimierungsproblems. Wir definieren zur kürzeren Schreibweise der HJB-Gleichung einen Operator  $\mathcal{L}^u$ , der vom Kontrollprozess abhängt, durch

$$\mathcal{L}^u f(t, x) = f_t(t, x) + (D_x f(t, x))^T b(t, x, u) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( (D_{xx} f(t, x)) a(t, x, u) \right)$$

Nun kann die HJB-Gleichung 3.5 als

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u V(t, x) \right\}$$

angeschrieben werden.

Wir haben also unter gewissen Voraussetzungen eine notwendige Bedingung für  $V(t, x)$  gefunden. Man kann zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen die HJB-Gleichung auch eine hinreichende Bedingung für die Wertfunktion eines Kontrollproblems darstellt – in diesem Fall charakterisiert die

HJB-Gleichung  $V(t, x)$  und gibt uns somit einen Lösungsansatz des Kontrollproblems. Über die nötigen Voraussetzungen für diese Charakterisierung geben die sogenannten Verifikationstheoreme Aufschluss, die im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt werden.

## 3.4 Verifikationstheoreme

### 3.4.1 Endlicher Zeithorizont

In diesem Abschnitt wird gezeigt, unter welchen Bedingungen das Erfüllen der HJB-Gleichung einer Funktion  $\Phi(t, x)$  hinreichend ist, um  $\Phi(t, x)$  als die Wertfunktion unseres Kontroll-Problems zu identifizieren. Wir bewegen uns weiterhin in dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Modell. Um konkrete Ergebnisse ausarbeiten zu können, müssen wir nun die Menge der zulässigen Kontrollprozesse  $\mathcal{A}(t, x)$  spezifizieren.

Für einen Prozess  $(u_s)_{s \in [t, T]}$  gelte  $u \in \mathcal{A}(t, x)$ , wenn er die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

(A1)  $u = (u_s)_{s \in [t, T]}$  ist progressiv messbar, hat Werte in  $\mathcal{U}$  und erfüllt

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \|u_s\|^2 ds\right] < \infty.$$

(A2) Die SDG 3.1 hat eine starke Lösung  $(X_s)_{s \in [t, T]}$  mit  $X_t = x$  und

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2\right] < \infty.$$

(A3)  $J(t, x, u)$  ist wohldefiniert.

Die Bedingung (A3) wird zusammen mit (A1) und den Voraussetzungen des nachfolgenden Satzes bereits erfüllt sein.

**Satz: Verifikationstheorem**

Angenommen es gelte  $\|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$  und  $\psi$  sei stetig mit der Eigenschaft  $\|\psi(t, x, u)\|^2 \leq C_\psi(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$  für Konstante  $C_\sigma, C_\psi > 0$  und alle  $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}$ , so kann man folgern:

(i) Angenommen  $\Phi \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  ist stetig auf  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  mit

$$\|\Phi(t, x)\| \leq C_\Phi(1 + \|x\|^2)$$

und erfüllt die HJB-Gleichung mit entsprechender Randbedingung wie folgt:

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x) \right\} &= 0 & t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n \\ \Phi(T, x) &= \Psi(T, x) & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

so gilt für alle  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\Phi(t, x) \geq V(t, x)$$

(ii) Wenn Argumente  $\hat{u}(t, x)$  existieren, welche  $u \rightarrow \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x)$  maximieren, sodass  $u^* = (u_t^*)_{t \in [0, T]}$  mit  $u_t^* := \hat{u}(t, X_t^*)$  ein zulässiger Kontrollprozess ist, so gilt  $\Phi(t, x) = V(t, x)$  für alle  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $u^*$  ist eine optimale Kontroll-Strategie – d.h.  $V(t, x) = J(t, x, u^{t,x})$ , wobei  $u^{t,x} = (u_s^*)_{s \in [t, T]} \in \mathcal{A}(t, x)$  gilt.  $X_t^*$  bezeichnet hier die Lösung von 3.1 mit der Kontrolle  $u_s^*$  auf  $[0, t)$ .

**Beweis:** Um mit beschränkten Prozessen argumentieren zu können, definieren wir für festes  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  die Stoppzeiten

$$\tau_n = T \wedge \inf\{s > t : \|X_s - X_t\| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Itô-Formel folgt für  $X_t = x$  und zulässiges  $u$ :

$$\Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) = \Phi(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^{u_s} \Phi(s, X_s) ds + \int_t^{\tau_n} \Phi_x(s, X_s)^T \sigma(s, X_s, u_s) dW_s$$

Wegen der Zulässigkeit von  $u$  und der stetigen Differenzierbarkeit von  $\Phi$  können wir  $\mathbb{E}_{t,x}[\int_t^{\tau_n} \|\Phi_x(s, X_s)^T \sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds] < \infty$  folgern. Dazu benutzen wir, dass  $X$  auf  $[t, \tau_n]$  nach Konstruktion beschränkt ist, nämlich in der folgenden Art und Weise:

$$\|X_s\| \leq \|X_t\| + \|X_s - X_t\| \leq \|X_t\| + n, \quad s \in [t, \tau_n]$$

Aufgrund dieser Beschränktheit der Argumente von  $\Phi_x$  ist auch  $\Phi_x$  wegen der vorausgesetzten Stetigkeit beschränkt. Weiters gilt nach Voraussetzung

$$\|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$$

so, dass wir aufgrund der Zulässigkeit von  $u$  folgern können:

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^{\tau_n} \|\Phi_x(s, X_s)^T \sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds \right] < \infty$$

Damit ist das stochastische Integral in Itô's Formel ein Martingal und somit gilt zusammen mit der offensichtlichen Eigenschaft  $\mathbb{E}[\tau_n] < \infty$ :

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^{\tau_n} \Phi_x(s, X_s)^T \sigma(s, X_s, u_s) dW_s \right] = 0$$

Wir wenden nun Itô's Formel im bedingten Erwartungswert unter Berücksichtigung der Martingal-Eigenschaft des stochastischen Integrals an:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^{\tau_n} \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right] &= \\
 &= \mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^{\tau_n} \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^{u_s} \Phi(s, X_s) ds \right] \\
 &= \Phi(t, x) + \mathbb{E}_{t,x} \left[ \underbrace{\int_t^{\tau_n} \left( \psi(s, X_s, u_s) + \mathcal{L}^{u_s} \Phi(s, X_s) \right) ds}_{\leq 0} \right] \\
 &\leq \Phi(t, x)
 \end{aligned}$$

Die obige Abschätzung erhalten wir aufgrund der Voraussetzung, dass  $\Phi$  die HJB-Gleichung erfüllt und wegen  $u_s \in \mathcal{U}$  und  $s \in [t, T]$ .

Als Nächstes wollen wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} [\int_t^{\tau_n} \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n})]$  bestimmen. Dazu wollen wir den Satz der dominierten Konvergenz verwenden und deshalb schätzen wir die Folge von Zufallsvariablen nach oben ab, um die nötige Voraussetzung für die Anwendung des Satzes zu bekommen.

$$\begin{aligned}
 \left| \int_t^{\tau_n} \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right| & \\
 &\leq \int_t^{\tau_n} \|\psi(s, X_s, u_s)\| ds + \|\Phi(\tau_n, X_{\tau_n})\| \\
 &\leq C_\psi \int_t^T (1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds + C_\Phi (1 + \|X_{\tau_n}\|^2)
 \end{aligned}$$

Als Nächstes beobachten wir

$$\begin{aligned}
 \int_t^T (1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds & \\
 &\leq (T - t) + (T - t) \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2 + \int_t^T \|u_s\|^2 ds
 \end{aligned}$$

und

$$\|X_{\tau_n}\|^2 \leq \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2.$$

Zusammenfassend erhalten wir also eine von  $n$  unabhängige Majorante der Folge von Zufallsvariablen, deren Grenzwert wir im bedingten Erwartungswert ermitteln wollen – diese ist, wie im Satz der dominierten Konvergenz gefordert, integrierbar, da unsere Zulässigkeitsanforderungen

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^T \|u_s\|^2 ds \right] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_{t,x} \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2 \right] < \infty$$

an den Kontroll-Prozess  $u$  die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{t,x} \left[ (T-t) + (T-t) \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2 \right. \\ & \left. + \int_t^T \|u_s\|^2 ds + C_\Phi (1 + \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2) \right] < \infty \end{aligned}$$

sichern.

Wir wissen also bereits nach dem Satz der dominierten Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^{\tau_n} \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right] \\ & = \mathbb{E}_{t,x} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_t^{\tau_n} \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right) \right] \end{aligned}$$

gilt.

Die nächste entscheidende Beobachtung in diesem Beweis ist die Gültigkeit von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = T$ . Dies folgt aus der Voraussetzung

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2 \right] < \infty.$$

Diese impliziert  $\sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\| < \infty$  *f.s.*, womit für jedes Elementar-Ereignis  $\omega$  die Existenz eines Index  $n(\omega)$  gesichert ist, sodass die nachfolgend angegebene Ungleichung erfüllt ist.

$$\|X_t - X_s\| \leq \|X_t\| + \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\| \leq \|X_t\| + n(\omega)$$

d.h. für  $\tilde{n} > \|X_t\| + n(\omega)$  gilt  $\tau_{\tilde{n}} = T$ . Wir erhalten somit wegen der Stetigkeit von  $\Phi$  und der Randbedingung der HJB-Gleichung:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_t^{\tau_n} \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right) &= \int_t^T \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(T, X_T) \\ &= \int_t^T \psi(s, X_s, u_s) ds + \Psi(T, X_T) \end{aligned}$$

Daraus folgt nun  $J(t, x, u) \leq \Phi(t, x)$  wegen

$$\begin{aligned} J(t, x, u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^{\tau_n} \psi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right] \\ &\leq \Phi(t, x), \end{aligned}$$

also insbesondere

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} J(t, x, u) \leq \Phi(t, x).$$

Behauptung (i) wurde also bereits bewiesen.

Für (ii) liefern analoge Beweisschritte unter Berücksichtigung, dass für  $\hat{u}(t, X_t^*)$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^{\tau_n} \left( \psi(s, X_s^*, \hat{u}(s, X_s^*)) + \mathcal{L}^{\hat{u}(s, X_s^*)} \Phi(s, X_s^*) ds \right) \right] = 0$$

gilt, den Beweis. Wir erhalten also nun mit denselben Grenzwert-Argumenten anstatt einer Ungleichung die Gleichheit  $V(t, x) = \Phi(t, x) = J(t, x, u^*)$  für die Strategie  $(u_t^*)$ .

### 3.4.2 Unendlicher Zeithorizont

Wir werden in diesem Abschnitt annehmen, dass weder die Koeffizienten  $b(x, u)$  und  $\sigma(x, u)$  des Zustands-Prozesses  $X$  noch  $\psi(x, u)$  explizit von der Zeit  $t$  abhängen. Wir betrachten also die SDG

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \quad (3.6)$$

und definieren den zugehörigen Differential-Operator in Abhängigkeit von  $u$  durch

$$\mathcal{L}^u f(x) = (D_x f(x))^T b(x, u) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( (D_{xx} f(x)) a(x, u) \right).$$

Als Bewertungskriterium für den Kontroll-Prozess verwenden wir die Zielfunktion

$$J(x, u) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty e^{-\beta s} \psi(X_s, u_s) ds \right]$$

mit der Zinsintensität  $\beta > 0$ . Die Voraussetzungen an  $b$  und  $\sigma$  und an die zulässigen Kontroll-Strategien, welche nun in der Menge  $\mathcal{A}(x)$  zusammengefasst werden, seien analog zu Abschnitt 3.4.1 definiert. Die Wertfunktion des Kontroll-Problems ist durch

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(x)} J(x, u)$$

gegeben.

#### Satz: Verifikationstheorem

Angenommen es gelte  $\|\sigma(x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$  und  $\psi$  sei stetig mit der Eigenschaft  $\|\psi(x, u)\|^2 \leq C_\psi(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$  für Konstante  $C_\sigma, C_\psi > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}$ , so kann man folgern:

(i) Angenommen  $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|\Phi(x)\| \leq C_\Phi(1 + \|x\|^2)$  erfüllt die folgende HJB-Gleichung:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(x) - \beta \Phi(x) \right\} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

so gilt für  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\Phi(x) \geq V(x)$$

(ii) Wenn Argumente  $\hat{u}(x)$  existieren, welche  $u \rightarrow \psi(x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(x) - \beta \Phi(x)$  maximieren, sodass  $u^* = (u_t^*)_{t \geq 0}$  mit  $u_t^* := \hat{u}(X_t^*)$  ein zulässiger Kontrollprozess ist, so gilt  $\Phi(x) = V(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $u^*$  ist eine optimale Kontrollstrategie – d.h.  $V(x) = J(x, u^*)$ .  $X_t^*$  bezeichnet hier die Lösung von 3.6 mit der Kontrolle  $u_s^*$  auf  $[0, t]$ .

**Beweisidee:** Der Beweis kann mit Hilfe des Verifikationstheorems für endlichen Zeithorizont geführt werden. Dafür betrachtet man endliche Zeithorizonte  $[0, T]$  und betrachtet anschließend den Grenzfall  $T \rightarrow \infty$ .

Die Bedingung, die  $\Phi^{(T)}(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ) aufgrund der Markov-Eigenschaft des Zustandsprozesses unter unseren Voraussetzungen und der Bauart der Zielfunktion über die Zeit erfüllt, ist  $\Phi^{(T)}(t, x) = e^{-\beta t} \Phi^{(T)}(x)$ .

Nun erinnern wir uns an die HJB-Gleichung für endlichen Zeithorizont:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \hat{\psi}^{(T)}(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi^{(T)}(t, x) \right\} = 0, \quad t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n$$

Als Nächstes setzt man  $\hat{\psi}^{(T)}(t, x, u) = e^{-\beta t} \psi(x, u)$  ein und berechnet

$$\mathcal{L}^u \Phi^{(T)}(t, x) = \mathcal{L}^u (e^{-\beta t} \Phi^{(T)}(x))$$

mit dem folgenden Ergebnis für die HJB-Gleichung (für den eindimensionalen Fall angeschrieben):

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ e^{-\beta t} \psi(x, u) - \beta e^{-\beta t} \Phi^{(T)}(x) \right. \\ \left. + e^{-\beta t} \Phi'^{(T)}(x) b(x, u) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, u) e^{-\beta t} \Phi''^{(T)}(x) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht, dass man in dieser Gleichung durch  $e^{-\beta t}$  kürzen kann und erhält schließlich:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(x, u) - \beta \Phi^{(T)}(x) + \mathcal{L}^u \Phi^{(T)}(x) \right\} = 0$$

Es gelten also für  $\Phi^{(T)}(0, x) = \Phi^{(T)}(x)$  für Zeithorizont  $T$  die Aussagen des Verifikationstheorems mit der HJB-Gleichung für unendlichen Zeithorizont. Die Gültigkeit für  $T \rightarrow \infty$  erfolgt durch ein Grenzwert-Argument.



### 3.4.3 Gestoppte Zustandsprozesse

Wenn wir bei dem Zustandsprozess unseres Kontrollproblems an den Reserveprozess eines Versicherungsunternehmens denken und als Zielfunktion die erwarteten Dividenden vorstellen, so müsste das Integral über die ausgezahlten Dividenden im Zeitverlauf als obere Grenze jenen Zeitpunkt haben, zu dem erstmals  $X_t \leq 0$  gilt – d.h. bis zum Ruinzeitpunkt, falls dieser eintritt. Wir können also für diese Abbildung der Realität keinen unendlichen Zeithorizont wählen. Derartige Optimierungsprobleme können durch geeignet gewählte Stoppzeiten modelliert werden, wobei im Folgenden die Theorie bei einem endlichen Zeithorizont  $T$  ausgeführt wird. Hierbei müssen wiederum ähnlich dem bereits behandelten Fall des endlichen Zeithorizonts bei der Bewertung des Kontrollprozesses durch die Zielfunktion  $J(t, x, u)$  Randbedingungen für den Fall, dass der Zustandsprozess gestoppt wird, formuliert werden, wie nachfolgend ausgearbeitet wird.

Der Kontrollprozess  $u$  und der Zustandsprozess  $X$  seien so wie in Abschnitt 3.1 definiert. Nun soll der Prozess  $(t, X_t)_{t \geq 0}$  auf eine bestimmte Menge  $Q$  beschränkt sein. Die Menge  $Q$  sei eine offene Menge in  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  und  $\partial Q$  bezeichne den Rand von  $Q$ . Der Prozess soll gestoppt werden, sobald er die Menge  $Q$  verlässt – dies sei durch einen gestoppten Prozess mit der Stoppzeit  $\tau$  realisiert mit

$$\tau := \inf\{t > 0 : (t, X_t) \notin Q\}.$$

Die Menge  $(\{T\} \times \mathbb{R}^n) \cap \bar{Q}$  ist auf jeden Fall Teil des Randes von  $Q$ , wobei  $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$  bezeichnet – es gilt somit  $\mathbb{P}_{t,x}(\tau \leq T) = 1$  für alle  $(t, x) \in Q$ . Wir bezeichnen nun  $\partial^*Q$  jene Teilmenge der Randpunkte für die

$$\mathbb{P}_{t,x}((\tau, X_\tau) \in \partial^*Q) = 1, \quad \text{für alle } (t, x) \in Q$$

gilt.

Als Bewertungskriterium für den Kontrollprozess  $u$  wird die Zielfunktion

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}_{t,x} \left[ \int_t^\tau \psi(s, X_s, u_s) ds + \Psi(\tau, X_\tau) \right]$$

verwendet, wobei  $\Psi$  für  $t < T$  auf der Menge  $\partial^*Q$  definiert werden muss. Weiters ist

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} J(t, x, u)$$

wiederum die Wertfunktion des Kontroll-Problems.

Die Zulässigkeitsbedingungen und Annahmen an  $b$  und  $\sigma$  seien analog zu Abschnitt 3.4.1 formuliert.

Unter diesen Annahmen kann das folgende Verifikationstheorem bewiesen

werden:

**Satz:** *Verifikationstheorem*

Angenommen es gelte  $\| \sigma(t, x, u) \|^2 \leq C_\sigma(1 + \| x \|^2 + \| u \|^2)$  und  $\psi$  sei stetig mit der Eigenschaft  $\| \psi(t, x, u) \|^2 \leq C_\psi(1 + \| x \|^2 + \| u \|^2)$  für Konstante  $C_\sigma, C_\psi > 0$  und alle  $(t, x) \in Q, u \in \mathcal{U}$ , so kann man folgern:

(i) Angenommen  $\Phi \in \mathcal{C}^{1,2}(Q) \cap \mathcal{C}(\bar{Q})$  mit der Eigenschaft

$$\| \Phi(t, x) \| \leq C_\Phi(1 + \| x \|^2)$$

erfüllt die HJB-Gleichung mit entsprechender Randbedingung, wie folgt:

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x) \right\} &= 0, & (t, x) \in Q \\ \Phi(t, x) &= \Psi(t, x), & (t, x) \in \partial^* Q \end{aligned}$$

so gilt für alle  $(t, x) \in Q$ :

$$\Phi(t, x) \geq V(t, x)$$

(ii) Wenn Argumente  $\hat{u}(t, x)$  existieren, welche  $u \rightarrow \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x)$  für  $(t, x) \in Q$  maximieren, sodass  $u^* = (u_t^*)_{t \leq \tau}$  mit  $u_t^* := \hat{u}(t, X_t^*)$  ein zulässiger Kontrollprozess ist, so gilt  $\Phi(t, x) = V(t, x)$  für alle  $(t, x) \in Q$  und  $u^*$  ist eine optimale Kontroll-Strategie – d.h.  $V(t, x) = J(t, x, u^{t,x})$ , wobei  $u^{t,x} = (u_s^*)_{s \in [t, T]} \in \mathcal{A}(t, x)$  gilt.  $X_t^*$  bezeichnet hier die Lösung von 3.1 mit der Kontrolle  $u_s^*$  auf  $[0, t]$ .

Der Beweis erfolgt im Wesentlichen gleich wie beim Verifikationstheorem für endlichen Zeithorizont, wie im Abschnitt 3.4.1 ausgeführt wurde. Nun werden allerdings anstatt der  $\tau_n$  im ursprünglichen Beweis nun die Stoppzeiten  $\tau_n \wedge \tau$  verwendet.

## 3.5 Hamilton-Jacobi-Bellman-Algorithmus

Sind die Bedingungen der Verifikationstheoreme erfüllt, so ist die Wertfunktion unseres Kontroll-Problems aus 3.1 durch die HJB-Gleichung 3.5 charakterisiert. Man kann also für das Auffinden der optimalen Strategie und der zugehörigen Wertfunktion den folgenden Algorithmus angeben:

**HJB-Algorithmus:**

1. Auffinden eines optimalen  $u = \hat{u}(t, x)$  in 3.5 (im Fall eines endlichen Zeithorizontes z.B.)
2. Wenn  $\hat{u}$  existiert, hängt es von  $V_t, D_x V, D_{xx} V$  ab, d.h.

$$\hat{u}(t, x) = \tilde{u}(t, x, V_t(t, x), D_x V(t, x), D_{xx} V(t, x)).$$

Setzt man  $\widehat{u}$  in 3.5 ein, erhält man eine partielle Differentialgleichung für  $V$ , welche z.B. im Fall des endlichen Zeithorizonts mit der Randbedingung  $V(T, x) = \Psi(T, x)$  gelöst werden muss, um einen Kandidaten  $V^*$  für die Wertfunktion des Kontroll-Problems zu erhalten.

3. Wenn  $V^*$  die im Abschnitt über Verifikationstheoreme erläuterten Bedingungen erfüllt und  $u_t^* = \widehat{u}(t, X_t^*)$ ,  $t \in [0, T]$  eine zulässige Kontroll-Strategie ergibt, so ist  $V^*$  die Wertfunktion des Kontroll-Problems und  $u_t^* = \widehat{u}(t, X_t^*)$  definiert eine optimale Kontroll-Strategie.  $X_t^*$  bezeichnet hier die Lösung der definierenden SDG des Zustandsprozesses 3.1 unter Anwendung der optimalen Kontroll-Strategie  $u^*$  auf  $[0, t)$ .

# Kapitel 4

## Optimale beschränkte Dividenden-Auszahlung im Diffusionsmodell

In diesem Abschnitt betrachten wir den Reserve-Prozess  $(R_t)_{t \geq 0}$  eines Versicherungsunternehmens des in 2.2 motivierten Diffusionsmodells. Hier ist der Reserve-Prozess durch die SDG

$$dR_t = \mu dt + \sigma dW(t)$$

mit  $R_0 = x$  charakterisiert.

Um unser Dividenden-Problem mit Methoden der Kontroll-Theorie zu lösen, kann nun der stochastische Prozess  $(u_t)_{t \geq 0}$ , der die Dividendenzahlungen angibt, als der Kontroll-Prozess unseres Optimierungsproblems angesehen werden. In diesem Abschnitt sei die Dividenden-Auszahlungsintensität zum Zeitpunkt  $t$ , die durch  $u_t$  gegeben ist, nach oben beschränkt – d.h. es gibt eine Konstante  $u_0$ , sodass  $u_t \in \mathcal{U} = [0, u_0]$  für alle  $t \geq 0$  bei der Wahl der Dividenden-Strategie gewährleistet sein muss.

Der Zustandsprozess  $X$  unseres Kontroll-Problems ist der um die Dividenden-Auszahlungen korrigierte Reserve-Prozess, der nun die SDG

$$dX_t = (\mu - u_t)dt + \sigma dW(t)$$

erfüllt.

Da beim Dividenden-Kriterium die erwartete Dividenden-Auszahlung auf  $[0, \tau]$ , wobei  $\tau$  die Stoppzeit des Ruinzeitpunkts bezeichnet, maximiert werden soll, ist die Zielfunktion durch

$$J(x, u) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\tau e^{-\beta s} u_s ds \right]$$

gegeben, wobei  $\beta$  wiederum die Zinsintensität in unserem Modell darstellt. Im Vergleich mit dem Kontroll-Problem auf unendlichem Zeithorizont aus 3.4.2 können wir also  $\psi(x, u) = u$  identifizieren. Die Wertfunktion des Optimierungsproblems ist

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(x)} J(x, u).$$

Für das Aufstellen der HJB-Gleichung benötigen wir den Differential-Operator  $\mathcal{L}^u$ , der sich aus der definierenden SDG des Zustandsprozesses heraus folgendermaßen darstellt:

$$\mathcal{L}^u f(x) = (\mu - u_t) \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)$$

Wenn wir nun zur Anwendung des HJB-Algorithmus in die HJB-Gleichung für unendlichen Zeithorizont

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(x, u) + \mathcal{L}^u V(x) - \beta V(x) \right\} = 0$$

einsetzen, erhalten wir in unserem Fall

$$\sup_{u \in [0, u_0]} \left\{ u + (\mu - u) V'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) - \beta V(x) \right\} = 0$$

mit der Randbedingung  $V(0) = 0$ , weil keine Dividenden ausgezahlt werden können, falls dem Versicherungsunternehmen keine Anfangsreserve zur Verfügung steht.

## 4.1 Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Bei der Lösung der HJB-Gleichung, bei der wir analog zum Paper „Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out“ von Asmussen und Taksar<sup>7</sup> vorgehen werden, ermitteln wir zuerst das optimale  $\hat{u}(x)$ , sodass das Supremum erreicht wird – dieses hängt aufgrund der Linearität von  $u$  in unserer HJB-Gleichung nur von  $V'(x)$  ab, wie man in der nachfolgenden Darstellung der HJB-Gleichung ersieht:

$$\sup_{u \in [0, u_0]} \left\{ u(1 - V'(x)) + \mu V'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) - \beta V(x) \right\} = 0$$

---

<sup>7</sup>siehe [6]

Es gilt also:

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } V'(x) > 1 \\ u_0 & \text{für } V'(x) \leq 1 \end{cases}$$

Wir nehmen nun an, dass die Lösung  $V(x)$  konkav ist, was wir noch nachfolgend zeigen werden. In diesem Fall gibt es ein  $m \geq 0$ , sodass

$$V'(x) \begin{cases} > 1 & \text{für } x < m \\ \leq 1 & \text{für } x \geq m \end{cases}$$

gilt.

Man kann also die HJB-Gleichung in Abhängigkeit von  $x$  folgendermaßen anschreiben:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \beta V(x) = 0, \quad 0 \leq x < m \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u_0)V'(x) - \beta V(x) + u_0 = 0, \quad x \geq m \quad (4.2)$$

Man braucht also für die Lösung der HJB-Gleichung die Lösungen des charakteristischen Polynoms einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung der Gestalt

$$p(s) = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \lambda s - \beta = 0.$$

Diese Lösungen sind durch

$$\begin{aligned} \theta_1(\lambda) &= -\frac{\lambda}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2\beta\sigma^2}}{\sigma^2} \\ -\theta_2(\lambda) &= -\frac{\lambda}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2\beta\sigma^2}}{\sigma^2} \end{aligned}$$

gegeben.

Wir kennen also die Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung 4.1, welche sich für  $0 \leq x < m$  ergibt.

$$C_1 e^{\theta_1(\mu)x} + C_2 e^{-\theta_2(\mu)x} \quad (4.3)$$

Für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung 4.2 beobachten wir, dass es sich bei  $\frac{u_0}{\beta}$  um eine Partikulärlösung handelt, sodass wir durch Addition der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu dieser die allgemeine Lösung von 4.2 erhalten.

$$\frac{u_0}{\beta} + C_3 e^{\theta_1(\mu-u_0)x} + C_4 e^{-\theta_2(\mu-u_0)x} \quad (4.4)$$

Da die erwarteten diskontierten Dividenden nach oben aufgrund der Annahme der beschränkten Dividenauszahlungsintensität folgendermaßen abgeschätzt werden können

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\tau e^{-\beta s} u_s ds \right] \leq \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty e^{-\beta s} u_s ds \right] \\ &\leq \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty e^{-\beta s} u_0 ds \right] = \frac{u_0}{\beta}, \end{aligned}$$

gilt für  $V(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(x)} J(x, u)$  die Ungleichung  $V(x) \leq \frac{u_0}{\beta}$ .

Daher gilt für die Lösung 4.4 auf  $[m, \infty)$ , dass diese nicht exponentiell aufklingen darf (d.h.  $C_3 = 0$ ) und außerdem  $C_4 = -d < 0$  gelten muss, damit  $V(x) \leq \frac{u_0}{\beta}$  nicht verletzt wird.

Aufgrund der Randbedingung  $V(0) = 0$  gilt für 4.3  $C_1 = -C_2 = C$  – weiters können wir aus  $V(x) > 0$  für  $x > 0$  folgern, dass  $C > 0$  gelten muss.

Um die unbekannt Parameter  $C$ ,  $d$  und  $m$  zu ermitteln, verwenden wir das sogenannte „principle of smooth fit“, das die folgenden Gleichungen fordert:

$$V(m+) = V(m-) \quad (4.5)$$

$$V'(m-) = 1 \quad (4.6)$$

$$V'(m+) = 1 \quad (4.7)$$

Wir erhalten mit der Notation  $\theta_1 = \theta_1(\mu)$ ,  $\theta_2 = \theta_2(\mu)$  und  $\theta_3 = \theta_2(\mu - u_0)$  das dazu äquivalente Gleichungssystem:

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{u_0}{\beta} - de^{-\theta_3 m} \quad (4.8)$$

$$C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = 1 \quad (4.9)$$

$$d\theta_3 e^{-\theta_3 m} = 1 \quad (4.10)$$

Aus dem obigen Gleichungssystem erhalten wir die nachfolgende Gleichung

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{u_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_3} =: \alpha \quad (4.11)$$

Ein derartiges  $m > 0$  kann nur für  $\alpha > 0$  gefunden werden. Wir haben also eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit unseres Gleichungssystems, welche auch hinreichend ist, wie wir nachfolgend beweisen werden – dazu brauchen wir das nachfolgende Lemma.

**Lemma:**  $\alpha\theta_1 < 1$

**Beweis:** Aus der nach Äquivalenzumformungen leicht ersichtlichen Ungleichung

$$\sqrt{a^2 + b} - a < \frac{b}{2a}, \quad a, b > 0$$

folgt für  $a = \mu$  und  $b = 2\sigma^2\beta$  eine Ungleichung für  $\theta_1$

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2\beta} - \mu}{\sigma^2} < \frac{\beta}{\mu}. \quad (4.12)$$

Die zu zeigende Ungleichung

$$\alpha\theta_1 = \left(\frac{u_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_3}\right)\theta_1 < 1$$

ist zu

$$\frac{u_0}{\beta} < \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3} \quad (4.13)$$

äquivalent.

Für  $u_0 \leq \mu$  folgt 4.13 direkt aus 4.12 wegen  $\theta_3 > 0$  und

$$\frac{u_0}{\beta} \leq \frac{\mu}{\beta} < \frac{1}{\theta_1}.$$

Für  $u_0 > \mu$  betrachtet man die Ungleichung für  $a = u_0 - \mu$  und  $b = 2\sigma^2\beta$ :

$$\theta_3 = \frac{(\mu - u_0) + \sqrt{(u_0 - \mu)^2 + 2\sigma^2\beta}}{\sigma^2} < \frac{\beta}{u_0 - \mu}$$

Aus der obigen Ungleichung und 4.12 kann man

$$\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3} > \frac{\mu}{\beta} + \frac{u_0 - \mu}{\beta} = \frac{u_0}{\beta}$$

folgern, womit die Gültigkeit von  $\alpha\theta_1 < 1$  bewiesen ist.

Mit Hilfe des eben bewiesenen Lemmas kann man die folgende Proposition beweisen.

**Proposition:** Wenn  $\alpha > 0$  gilt, existiert ein eindeutiges Tripel  $(C, d, m)$ , welches das durch 4.8–4.10 gegebene Gleichungssystem löst.

**Beweis:** Dividiert man 4.8 durch 4.9, so erhält man

$$\frac{e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}} = \alpha.$$



Durch Äquivalenzumformungen gelangt man schließlich zu

$$(1 - \alpha\theta_1)e^{\theta_1 m} = (1 + \alpha\theta_2)e^{-\theta_2 m}.$$

Auflösen der obigen Gleichung nach  $m$  ergibt:

$$m = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 - \alpha\theta_1}$$

Wegen  $\alpha\theta_1 < 1$  gilt nun  $m > 0$  genau dann, wenn  $\alpha > 0$  erfüllt ist, da  $\theta_1, \theta_2 > 0$  gilt – d.h. wir haben eine eindeutig bestimmte Lösung von  $m$  in unserem Gleichungssystem und die eindeutigen Lösungen von  $C$  und  $d$  sind aufgrund der Gleichungen 4.9 und 4.10 durch

$$C = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}}$$

$$d = \frac{e^{\theta_3 m}}{\theta_3}$$

gegeben.

Eine andere Argumentationsmöglichkeit für die notwendige und hinreichende Bedingung  $\alpha > 0$  für die Existenz eines eindeutigen Lösungstripels  $(C, d, m)$  des durch 4.8–4.10 gegebenen Gleichungssystems erhält man durch Betrachtung der Funktion

$$g(m) = C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}).$$

Diese Funktion erfüllt  $g(0) = 0$  und  $\lim_{m \rightarrow \infty} g(m) = \infty$  wegen  $\theta_1, \theta_2 > 0$ . Weiters ist  $g(m)$  eine stetige Funktion, die aufgrund des Zwischenwertsatzes alle Werte in  $[0, \infty)$  annimmt. Da  $g(m)$  auch nur positive Werte annimmt, kann die definierende Gleichung von  $m$  im Gleichungssystem 4.8–4.10  $g(m) = \alpha$  dann und nur dann erfüllt werden, wenn  $\alpha > 0$  gilt.

Mit Hilfe der bisherigen Vorbereitungen können wir nun die Lösung unserer HJB-Gleichung  $V(x)$  angeben, wobei die Fälle  $\alpha > 0$  und  $\alpha \leq 0$  zu unterscheiden sind.

**Satz:** Es existiert eine zweimal stetig differenzierbare konkave Lösung der HJB-Gleichung 4.1 mit der Randbedingung  $V(0) = 0$ .

(1) Wenn  $\alpha = \frac{u_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_3} \leq 0$  gilt, so ist die Lösung durch

$$V(x) = \frac{u_0}{\beta} (1 - e^{-\theta_3 x}) \tag{4.14}$$

gegeben.

(2) Im Fall  $\alpha > 0$  ist die Lösung

$$V(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), & 0 \leq x < m \\ \frac{u_0}{\beta} - de^{-\theta_3 x}, & x \geq m \end{cases}$$

wobei  $C, d, m$  die eindeutigen Lösungen von 4.8–4.10 bezeichnen.

**Beweis:**

(1) Die Funktion  $V(x) = \frac{u_0}{\beta}(1 - e^{-\theta_3 x})$  erfüllt die Randbedingung  $V(0) = 0$  und ist wegen  $V''(x) = -\frac{u_0}{\beta}\theta_3^2 e^{-\theta_3 x} < 0$  konkav. Wegen  $\alpha = \frac{u_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_3} \leq 0$  gilt außerdem  $V'(0) = \frac{u_0}{\beta}\theta_3 \leq 1$ .  $V(x)$  erfüllt also in diesem Fall nach Konstruktion die HJB-Gleichung, da nun kein  $m > 0$  existiert und somit  $V(x)$  durch 4.4 mit  $C_3 = 0$  und  $C_4 = -d = -\frac{u_0}{\beta}$  bereits auf  $[0, \infty)$  definiert ist, da  $\hat{u}(x) = u_0$  für alle  $x \in [0, \infty)$  optimal ist.

(2) Die Lösung

$$V(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), & 0 \leq x < m \\ \frac{u_0}{\beta} - de^{-\theta_3 x}, & x \geq m \end{cases}$$

erfüllt wie gefordert  $V(0) = 0$  – außerdem ist das Tripel  $(C, d, m)$  für  $\alpha > 0$  durch das Gleichungssystem 4.8–4.10 eindeutig festgelegt und es gilt  $m > 0$ . Wenn  $V(x)$  tatsächlich konkav und zweimal stetig differenzierbar ist, so handelt es sich dabei nach Konstruktion um die Lösung der HJB-Gleichung (bei der Argumentation für das Auffinden der Lösung wurde bereits angenommen, dass  $V(x)$  konkav ist).

Auf den Intervallen  $[0, m)$  und  $(m, \infty)$  ist  $V(x)$  offensichtlich zweimal stetig differenzierbar.

Nach der Konstruktion von  $V(x)$  gilt außerdem  $V'(m+) = V'(m-)$  – d.h. es muss für die zweifach stetige Differenzierbarkeit lediglich  $V''(m+) = V''(m-)$  verifiziert werden:

$$\begin{aligned} V''(m-) &= C(\theta_1^2 e^{\theta_1 m} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 m}) \\ V''(m+) &= -\theta_3^2 d e^{-\theta_3 m} \end{aligned}$$

Wegen der Definitionen von  $C, d$  und  $m$  durch

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 - \alpha\theta_1} \\ C &= \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}} \\ d &= \frac{e^{\theta_3 m}}{\theta_3} \end{aligned}$$

ergibt sich  $V''(m+) = -\theta_3$  und für  $V''(m-)$  gilt:

$$\begin{aligned} V''(m-) &= \frac{\theta_1^2 e^{\theta_1 m} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 m}}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}} = \frac{\theta_1^2 e^{(\theta_1 + \theta_2)m} - \theta_2^2}{\theta_1 e^{(\theta_1 + \theta_2)m} + \theta_2} \\ &= \frac{\theta_1^2 \frac{1 + \alpha \theta_2}{1 - \alpha \theta_1} - \theta_2^2}{\theta_1 \frac{1 + \alpha \theta_2}{1 - \alpha \theta_1} + \theta_2} = \theta_1 - \theta_2 + \alpha \theta_1 \theta_2 \end{aligned}$$

Die Gleichheit  $[-\theta_3 =]V''(m+) = V''(m-)[= \theta_1 - \theta_2 + \alpha \theta_1 \theta_2]$  erhält man nun durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}}{\sigma^2} \\ \theta_2 &= \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}}{\sigma^2} \\ \alpha &= \frac{u_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_3} \end{aligned}$$

in  $V''(m-) = \theta_1 - \theta_2 + \alpha \theta_1 \theta_2$  unter Berücksichtigung von

$$\theta_3 = \frac{\mu - u_0}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{(\mu - u_0)^2 + 2\beta\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Das Nachrechnen der Gleichheit von  $V''(m+) = V''(m-)$  kann lediglich als Probe angesehen werden, weil diese in unserem Fall auch nach Konstruktion erfüllt sein muss. Betrachtet man nämlich die HJB-Gleichung auf den zwei Bereichen  $[0, m)$  und  $(m, \infty)$  und errechnet jeweils daraus  $V''(m-)$  und  $V''(m+)$  unter Berücksichtigung unserer Konstruktion  $V'(m+) = V'(m-) = 1$  und  $V(m+) = V(m-)$ , so ist die Gleichheit direkt ersichtlich. Die zweifache stetige Differenzierbarkeit von  $V(x)$  ist also bewiesen.

Für den Nachweis der Konkavität betrachten wir  $V''(x)$ :

$$V''(x) = \begin{cases} C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x}) & 0 \leq x < m \\ -\theta_3^2 d e^{-\theta_3 x} & x \geq m \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass  $V(x)$  auf  $(m, \infty)$  konkav ist. Für  $[0, m]$  stellen wir fest, dass  $V''(0) = C(\theta_1^2 - \theta_2^2) < 0$  gilt.

Weiters ist  $V''(x)$  wegen  $V'''(x) = C(\theta_1^3 e^{\theta_1 x} + \theta_2^3 e^{-\theta_2 x}) > 0$  auf  $[0, m]$  monoton, was zusammen mit  $V''(m+) = V''(m-) = -\theta_3 < 0$  zur Konkavität von  $V(x)$  auf  $[0, m]$  und somit auf  $[0, \infty)$  führt.

$V(x)$  ist also die Lösung der HJB-Gleichung, weil alle Annahmen, auf denen unser Lösungsvorgang gründete, bei dem erhaltenen Lösungskandidaten nachgewiesen wurden.

## 4.2 Überprüfung der Lösung

Die Lösung der HJB-Gleichung  $V(x)$  ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Bedingung  $|V(x)| \leq K(1 + |x|^2)$ , weil sie beschränkt ist. Außerdem sind die folgenden Ungleichungen für die Rechtfertigung des HJB-Algorithmus mit Hilfe eines Verifikationstheorems erfüllt:

$$\begin{aligned} |\sigma(x, u)|^2 &= |\sigma|^2 \leq \sigma^2(1 + |x|^2 + |u|^2) \\ |\psi(x, u)|^2 &= |u|^2 \leq (1 + |x|^2 + |u|^2) \end{aligned}$$

Weiters muss die aus unseren Berechnungen resultierende Kontroll-Strategie  $u_t^* = \hat{u}(X_t^*) = I_{\{X_t^* \geq m\}} u_0$  auf Zulässigkeit überprüft werden – dabei bezeichnet  $X_t^*$  die Lösung der stochastischen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} dX_t^* &= (\mu - u_t^*)dt + \sigma dW_t = (\mu - I_{\{X_t^* \geq m\}} u_0)dt + \sigma dW_t \\ X_0^* &= x \end{aligned}$$

Die Bedingungen der progressiven Messbarkeit von  $u_t^*$  und des Wertebereichs in  $\mathcal{U} = [0, u_0]$  sind offensichtlich erfüllt.

Dass die definierende SDG von  $X_t^*$  den Zustandsprozess auch tatsächlich als starke Lösung charakterisiert, welche auf endlichen Intervallen nicht unbeschränkt wächst, kann mit Hilfe eines Satzes aus dem Buch „Brownian Motion and Stochastic Calculus“ von Karatzas und Shreve<sup>8</sup> argumentiert werden:

**Satz:** Erfüllen die Koeffizienten  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad (4.15)$$

so, dass  $b$  beschränkt und  $\sigma^2$  auf jeder kompakten Teilmenge von  $\mathbb{R}$  von 0 abgegrenzt ist, so gilt für jeden Anfangswert  $\zeta$ , der unabhängig von der treibenden Brownschen Bewegung  $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$  ist, dass die SDG 4.15 eine nicht-explodierende, eindeutige starke Lösung besitzt.

**Bem:** Der Begriff einer nicht-explodierenden Lösung wird mit Stoppzeiten  $S_n$  charakterisiert, welche durch

$$S_n = \inf\{t \geq 0; |X_t| \geq n\}$$

definiert sind.

Für eine nicht-explodierende Lösung  $X_t$  gilt nun mit der Bezeichnung  $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ :

$$\mathbb{P}[S = \infty] = 1$$

<sup>8</sup>siehe [7], Seite 341, 5.17 Proposition

**Anwendung:** Da der Koeffizient  $\sigma$  der SDG unseres Zustandsprozesses  $X_t^*$  konstant ist, gilt die Forderung des obigen Satzes an  $\sigma$  offensichtlich. Die Beschränktheit von  $b(X_t^*) = \mu - I_{\{X_t^* \geq m\}} u_0$  gilt wegen

$$|b(X_t^*)| = |\mu - I_{\{X_t^* \geq m\}} u_0| \leq \mu + u_0.$$

Der obige Satz ist somit auf die SDG unseres Kontrollproblems anwendbar – unsere Dividenden-Strategie  $u_t^* = I_{\{X_t^* \geq m\}} u_0$  erfüllt also die Zulässigkeitsbedingungen.

Zusammenfassend löst somit unsere ermittelte Strategie mit zugehöriger Wertefunktion  $V(x)$  tatsächlich das Problem der optimalen Dividenden-Strategie im Sinne maximaler erwarteter Dividenden-Auszahlung zum Zeitpunkt 0. Die optimale Strategie besteht also darin, mit maximaler Intensität  $u_0$  auszusahlen, falls die um die Dividenden-Auszahlungen bereinigte Reserve über dem Niveau  $m$  liegt und andernfalls keine Auszahlungen zu tätigen.

# Kapitel 5

## Optimale unbeschränkte Dividenden-Auszahlung im Diffusionsmodell

### 5.1 Lokalzeit

#### 5.1.1 Einführung

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung der Formel von Tanaka, in welcher die sogenannte Lokalzeit einer Brownschen Bewegung vorkommt. Für den Abschnitt über die Lokalzeit wurde das Buch „Introduction to Stochastic Integration“ von Chung und Williams als Vorlage herangezogen.<sup>9</sup> Die Tanaka-Formel gibt eine Zerlegung des Prozesses  $|W_t|$ , wobei  $(W_t)$  eine Brownsche Bewegung sei, in eine andere Brownsche Bewegung  $\widehat{W}$  und einen wachsenden Prozess  $L_t$ :

$$|W_t| = \widehat{W}_t + L_t$$

Dass der Prozess  $(L_t)$  in dieser Zerlegung wachsend ist, ist intuitiv nachvollziehbar, weil  $|W_t|$  aufgrund der Martingaleigenschaft der Brownschen Bewegung und der Konvexität der Betragsfunktion unter Verwendung der Jensen'schen Ungleichung als Submartingal verifiziert werden kann, welches im Mittel wächst.

Die allgemeine Formel von Tanaka stellt sich wie folgt dar:

$$|W_t - x| = \widehat{W}_t + L_t(x) \tag{5.1}$$

Den Prozess  $(L_t(x))$ , welcher in Folge auch durch  $(L(t, x))$  bezeichnet wird, nennt man Lokalzeit der Brownschen Bewegung  $W$  bei  $x$ . Wie wir im folgen-

---

<sup>9</sup>siehe [8]

den Abschnitt sehen werden, kann  $L(t, x)$  als ein Limes interpretiert werden:

$$L(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds$$

Im nächsten Abschnitt wird ausgeführt werden, in welchem Sinne dieser Limes existiert.  $L(t, x)$  kann also als Maß dafür interpretiert werden, wie lange die Brownsche Bewegung  $W$  in der Umgebung von  $x$  bis zum Zeitpunkt  $t$  verweilt.

### 5.1.2 Tanaka-Formel

Um die Formel 5.5 von Tanaka herzuleiten, bei welcher ein Absolutbetrag involviert ist, beweisen wir zuerst einen Zusammenhang für den Positiv-Anteil:

**Satz:** Es gilt f.s.:

$$(W_t - x)^+ - (W_0 - x)^+ = \int_0^t I_{[x, \infty)}(W_s) dW_s + \frac{1}{2} L(t, x) \quad (5.2)$$

wobei gilt

$$L(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds \quad \text{in } L^2(\mathbb{P})$$

**Beweis:** Für den Beweis wenden wir zunächst die Itô-Formel formal auf die Funktion  $f_x(y) := (y - x)^+$  an, obwohl diese nicht stetig differenzierbar ist. Die Ableitungen werden dafür im distributionellen Sinn durchgeführt, was zu

$$\begin{aligned} f'_x(y) &= I_{[x, \infty)}(y) \\ f''_x(y) &= \delta_x(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(y) \end{aligned}$$

führt.

Die Anwendung der Itô-Formel ergibt

$$(W_t - x)^+ - (W_0 - x)^+ = \int_0^t I_{[x, \infty)}(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \delta_x(W_s) ds.$$

Falls die Itô-Formel in diesem Fall anwendbar ist und das letzte Integral mit dem Grenzwert, durch den  $L(t, x)$  definiert wurde, übereinstimmt und wenn

insbesondere dieser Grenzwert existiert, so ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Dazu definiert man nun eine geeignete Funktion  $f_{x\epsilon}(y)$ , welche  $f_x(y)$  approximiert und für die man durch ein Grenzwertargument die Anwendung der Itô-Formel als zulässig beweisen kann:

$$f_{x\epsilon}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq x - \epsilon \\ \frac{(y-x+\epsilon)^2}{4\epsilon} & \text{für } x - \epsilon < y < x + \epsilon \\ y - x & \text{für } y \geq x + \epsilon \end{cases}$$

Mit dieser Konstruktion erhält man eine einmal stetig differenzierbare Funktion, welche gleichmäßig für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen  $f_x(y)$  strebt. Weiters gilt für die Ableitungen:

$$f'_{x\epsilon}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq x - \epsilon \\ \frac{y-x+\epsilon}{2\epsilon} & \text{für } x - \epsilon < y < x + \epsilon \\ 1 & \text{für } y \geq x + \epsilon \end{cases}$$

und

$$f''_{x\epsilon}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq x - \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & \text{für } x - \epsilon < y < x + \epsilon \\ 0 & \text{für } y \geq x + \epsilon \end{cases}$$

Für den Beweis der Durchführbarkeit der Itô-Formel für  $f_{x\epsilon}(y)$  verwendet man ein Standardverfahren aus der Analysis zur Glättung von Funktionen. Auf die geglätteten Funktionen kann man dann vorbehaltlos die Formel von Itô anwenden und wegen der nachfolgenden Konstruktion kann man durch ein Grenzwertargument das Gewünschte zeigen.

Wir wissen aus den Kenntnissen der Analysis, dass eine Folge von Funktionen  $\phi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  existiert, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

-)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Träger}(\phi_n) = \{0\}$ , wobei der Träger einer Funktion den Abschluss der Menge, auf welcher die Funktion Werte ungleich 0 besitzt, bezeichnet.

-)  $g_n(y) := \phi_n * f_{x\epsilon}(y) = \int_{\mathbb{R}} \phi_n(y-u) f_{x\epsilon}(u) du \rightarrow f_{x\epsilon}(y)$ , wobei dieser Limes für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  gilt.

-)  $g'_n(y) \rightarrow f'_{x\epsilon}(y)$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  für  $n \rightarrow \infty$

-)  $g''_n(y) \rightarrow f''_{x\epsilon}(y)$  punktweise Konvergenz für  $n \rightarrow \infty$  und  $y \neq x \pm \epsilon$

Ein Beispiel für eine derartige Folge von Funktionen wäre:

$$\phi_n(y) = n\phi(ny) \quad \text{mit} \quad \phi(y) = \frac{e^{-\frac{1}{1-y^2}} I_{[-1,1]}(y)}{\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt}$$



Auf die nun durch Faltung mit den Funktionen  $\phi_n$  geglätteten  $g_n$  kann die Formel von Itô angewendet werden. Es gilt somit:

$$g_n(W_t) - g_n(W_0) = \int_0^t g'_n(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''_n(W_s) ds \quad (5.3)$$

Zunächst beobachten wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{[0,t]}(s) g'_n(W_s) = I_{[0,t]}(s) f'_{x\epsilon}(W_s)$$

gleichmäßig auf  $[0, t] \times \Omega$  gilt. Der obige Limes gilt also im Sinne von  $L^2(\lambda \times d\mathbb{P})$ , wobei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß bezeichne – d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^t (g'_n(W_s) - f'_{x\epsilon}(W_s))^2 ds \right]$$

Man kann also aufgrund der Itô-Isometrie (der Isometrie-Eigenschaft der Abbildung des stochastischen Integrals vom Raum der progressiv-messbaren Prozesse in den  $L^2$ -Raum) folgern:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t (g'_n(W_s) - f'_{x\epsilon}(W_s)) dW_s \right)^2 \right]$$

Es gilt somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g'_n(W_s) dW_s = \int_0^t f'_{x\epsilon}(W_s) dW_s \quad \text{in } L^2(\mathbb{P}).$$

Weiters ist wegen  $\mathbb{P}[W_s = x \pm \epsilon] = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g''_n(W_s) = f''_{x\epsilon}(W_s) \quad f.s.$$

erfüllt. Der obige Limes gilt also insbesondere für  $\lambda$ -fast alle  $s$  *f.s.*

Weiters können wir in diesem Fall den Satz der beschränkten Konvergenz anwenden, da  $g''_n$  aufgrund der Konstruktion als Faltung mit einer durch  $\frac{1}{2\epsilon}$  beschränkten Funktion ebenfalls beschränkt ist. Wir erhalten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g''_n(W_s) ds = \int_0^t f''_{x\epsilon}(W_s) ds$$

Unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Konvergenz von  $g_n$  gegen  $f_{x\epsilon}$  kann man nun in Gleichung 5.3 zum Limes  $n \rightarrow \infty$  übergehen und erhält *f.s.*:

$$f_{x\epsilon}(W_t) - f_{x\epsilon}(W_0) = \int_0^t f'_{x\epsilon}(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{f''_{x\epsilon}(W_s)}_{\frac{1}{2\epsilon} I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s)} ds \quad (5.4)$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von  $f_{x\epsilon}$  gegen  $f_x$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  erhalten wir den folgenden Limes für die linke Seite der Gleichung 5.4:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f_{x\epsilon}(W_t) - f_{x\epsilon}(W_0)) &= f_x(W_t) - f_x(W_0) \quad \text{in } L^2(\mathbb{P}) \\ &= (W_t - x)^+ - (W_0 - x)^+ \end{aligned}$$

Als Nächstes untersuchen wir mit Hilfe der Itô-Isometrie den Limes des stochastischen Integrals in 5.4.

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t (f'_{x\epsilon}(W_s) - I_{[x,\infty)}(W_s))^2 ds \right] \leq \mathbb{E} \left[ \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds \right]$$

Die obige Ungleichung ist mit der nachfolgend angegebenen Grafik von  $f'_{x\epsilon}$  und  $f'_x = I_{[x,\infty)}$  nachvollziehbar.

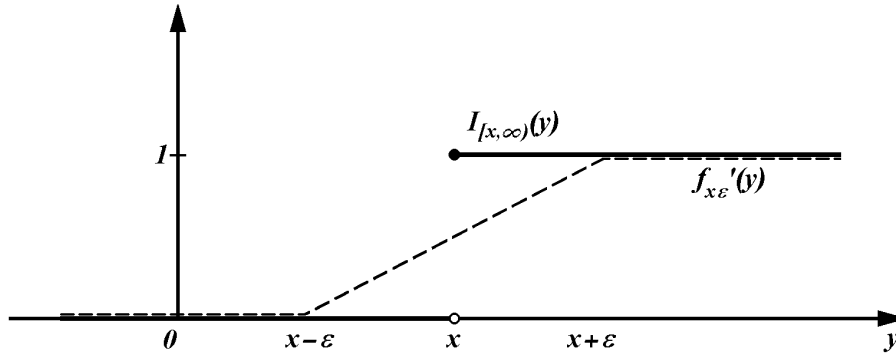


Abbildung 5.1:  
Veranschaulichung einer Beweisidee

Um einzusehen, dass der obige Erwartungswert für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen 0 strebt, nutzt man die Normalverteilungseigenschaft der Brownschen Bewegung aus ( $W_s \hat{=} \mathcal{N}(0, s)$ ) und schätzt so, wie nachfolgend durchgeführt, die Wahrscheinlichkeit, dass sich  $W_s$  in einem Intervall befindet, durch den Maximalwert der entsprechenden Normalverteilungsdichte mal der Intervall-Länge ab:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^t (f'_{x\epsilon}(W_s) - I_{[x,\infty)}(W_s))^2 ds \right] &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds \right] \\ &= \int_0^t \mathbb{P}[W_s \in (x - \epsilon, x + \epsilon)] ds \\ &\leq \int_0^t 2\epsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} ds \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten mit Hilfe der Itô-Isometrie:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t f'_{x\epsilon}(W_s) dW_s = \int_0^t I_{[x, \infty)}(W_s) dW_s \quad \text{in } L^2(\mathbb{P})$$

Mit Hilfe der Gleichung 5.4 kann also  $\frac{1}{2\epsilon} \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds$  als Summe von in  $L^2(\mathbb{P})$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  konvergenten Summanden dargestellt werden und ist somit ebenfalls im selben Sinne konvergent.

Die Definition der Lokalzeit durch

$$L(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds \quad \text{in } L^2(\mathbb{P})$$

ist wohldefiniert, was den Beweis des Satzes schließt.

**Bem:** -) Die Lokalzeit  $L(t, x)$  kann als Dichte der Verweildauer einer Brownschen Bewegung in  $[0, t]$  interpretiert werden, da der folgende Zusammenhang bewiesen werden kann:

$$\int_0^t I_{[a, b]}(W_s) ds = \int_a^b L(t, x) dx$$

-) Der Limes bei der Definition von  $L(t, x)$  gilt auch *f.s.*

**Satz(Tanaka-Formel):**  $\forall t > 0, x \in \mathbb{R}$  gilt *f.s.:*

$$|W_t - x| - |W_0 - x| = \int_0^t \text{sgn}(W_s - x) dW_s + L(t, x) \quad (5.5)$$

mit

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} -1 & \text{für } y < 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ 1 & \text{für } y > 0 \end{cases}$$

**Beweis:** Wir betrachten  $-W_t$ , was wiederum eine Brownsche Bewegung ist und daher auch eine Lokalzeit bei  $-x$  besitzt, welche mit  $L^-(t, x)$  bezeichnet werde. Aus der Definition der Lokalzeit ergibt sich  $L(t, x) = L^-(t, -x)$  *f.s.*, wie nachfolgend ausgeführt wird:

$$\begin{aligned} L^-(t, -x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t I_{(-x-\epsilon, -x+\epsilon)}(-W_s) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds = L(t, x) \end{aligned}$$

Wir wenden nun 5.2 auf die Brownsche Bewegung  $-W_t$  und auf  $-x$  an:

$$(-W_t + x)^+ - (-W_0 + x)^+ = \int_0^t I_{[-x, \infty)}(-W_s) d(-W_s) + \frac{1}{2} \underbrace{L^-(t, -x)}_{L(t, x)}$$

Wir erhalten somit wegen  $(-W_t + x)^+ = (W_t - x)^-$  und aus einer Umformung des obigen stochastischen Integrals:

$$(W_t - x)^- - (W_0 - x)^- = - \int_0^t I_{(-\infty, x]}(W_s) dW_s + \frac{1}{2} L(t, x) \quad (5.6)$$

Außerdem können wir die bekannte Gleichung 5.2 verwenden, welche aus Gründen der Übersicht nachfolgend noch einmal angegeben wird:

$$(W_t - x)^+ - (W_0 - x)^+ = \int_0^t I_{[x, \infty)}(W_s) dW_s + \frac{1}{2} L(t, x) \quad (5.7)$$

Man erhält nun wegen  $(W_t - x)^+ + (W_t - x)^- = |W_t - x|$  durch Addieren der Gleichungen 5.6 und 5.7 die Tanaka-Formel:

$$|W_t - x| - |W_0 - x| = \int_0^t \underbrace{(I_{[x, \infty)}(W_s) - I_{(-\infty, x]}(W_s))}_{\text{sgn}(W_s - x)} dW_s + L(t, x)$$

**Bem:** Die Definition der  $\text{sgn}$ -Funktion bei 0 ist unerheblich, da

$$\int_0^t I_{\{x\}}(W_s) dW_s = 0$$

*f.s.* gilt – dies kann man aus der Itô-Isometrie zusammen mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t I_{\{x\}}(W_s)^2 ds \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t I_{\{x\}}(W_s) ds \right] = 0$$

schließen, wobei der obige Erwartungswert 0 ist, weil die Menge  $\{s | W_s = x\}$  eine abgeschlossene Menge mit Lebesgue-Maß 0 ist.

Definiert man nun  $\widehat{W}(t, x) := |W_0 - x| + \int_0^t \text{sgn}(W_s - x) dW_s$ , so gilt der folgende Satz:

**Satz:**  $\forall x$  gilt *f.s.*:

$$|W(\cdot) - x| = \widehat{W}(\cdot, x) + L(\cdot, x) \quad (5.8)$$

d.h. die Tanaka-Formel gilt sogar pfadweise und nicht nur für festes  $t$ .

Weiters gilt:

-)  $\widehat{W}$  ist eine Brownsche Bewegung.

-)  $L(t, x)$  ist ein stetiger wachsender Prozess mit der Eigenschaft, dass  $L(t, x)$  nur dann wächst, falls  $W_t = x$  ist, d.h.

$$\int_0^\infty I_{\{u|W_u \neq x\}}(t) dL(t, x) = 0 \quad f.s. \quad (5.9)$$

**Beweis:** Für den Beweis von 5.8 verwenden wir unser Wissen, dass die Tanaka-Formel für festes  $t$  *f.s.* gilt, d.h. mit der Bezeichnung  $X_t = |W_t - x|$  und  $Y_t = |W_0 - x| + \int_0^t \text{sgn}(W_s - x) dW_s + L(t, x)$  gilt, dass die Menge  $N_t = \{\omega | X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$  Wahrscheinlichkeitsmaß 0 hat.

Weiters gilt  $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 0$ , wenn  $A$  die Menge auf der  $X_t$  und  $B$  die Menge auf der  $Y_t$  unstetig ist bezeichne – diese *f.s.* Stetigkeit der beiden Prozesse folgt aus der *f.s.* Stetigkeit der Brownschen Bewegung und der Lokalzeit  $L(t, x)$ , welche sogar stetig in  $(t, x)$  ist, was hier ohne Beweis erwähnt sei.

Die Menge  $N$ , welche durch

$$N := A \cup B \cup \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)} N_t$$

definiert sei, hat die Eigenschaft  $\mathbb{P}[N] = 0$  und es gilt  $X(\cdot) = Y(\cdot)$  auf  $N^c$ , wie man folgendermaßen einsehen kann:

Sei  $\omega \notin N$ , so kann man nach Konstruktion für ein beliebiges  $t \in [0, \infty)$  eine Folge  $(t_n) \in (\mathbb{Q} \cap [0, \infty))^{\mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  wählen, welche die Eigenschaft  $X_{t_n}(\omega) = Y_{t_n}(\omega)$  besitzt. Aufgrund der konstruierten Stetigkeit von  $X$  und  $Y$  auf  $N^c$ , kann man nun  $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$  wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{t_n}(\omega)$  schließen.

Es wurde also bewiesen, dass die Formel von Tanaka auch pfadweise gilt.

Für den Beweis, dass es sich bei  $\widehat{W}$  um eine Brownsche Bewegung handelt, verwendet man die Charakterisierung einer Brownschen Bewegung nach Levy, welche sich durch einen Bracket-Prozess  $t$  und durch die lokale Martingal-Eigenschaft formuliert:

$\widehat{W}$  ist ein lokales Martingal, da es ein stochastisches Integral mit beschränktem Integranden ist. Es bleibt also nur noch der Bracket-Prozess von  $\widehat{W}$  zu überprüfen:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{W} \rangle_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} \left( \widehat{W}_{(i+1)\frac{t}{2^n}} - \widehat{W}_{i\frac{t}{2^n}} \right)^2 \\ &= \int_0^t \underbrace{(\text{sgn}(W_s - x))^2}_{=1 \text{ f.s.}} d \underbrace{\langle W \rangle_s}_s = t \quad f.s. \end{aligned}$$

$\widehat{W}$  ist somit eine Brownsche Bewegung.  
 Aus der Definition der Lokalzeit

$$L(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds$$

sieht man, dass es sich dabei um einen wachsenden Prozess in  $t$  handelt, weil das Integral einen nichtnegativen Integranden besitzt und dadurch monoton wachsend ist – eine Eigenschaft, die auch bei Multiplikation mit  $\frac{1}{2\epsilon} > 0$  und Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  erhalten bleibt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $L(t, x)$  nur dann wächst, wenn  $W_t(\omega) = x$  gilt: Dazu definieren wir eine Menge  $\Omega_1$  mit  $\mathbb{P}[\Omega_1] = 1$ , auf welcher der Limes in der Definition der Lokalzeit für alle rationalen Zeitpunkte gilt – diese Menge kann wegen der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen und der Tatsache, dass der Limes für feste Zeitpunkte *f.s.* existiert, gefunden werden.

Nun sei  $\omega \in \Omega_1$  und  $t$  ein Wachstumspunkt von  $L(t, x)$ , d.h.  $\exists r, r'$  beliebig nahe bei  $t$  mit der Eigenschaft:  $r < t < r'$  und  $L(r, x)(\omega) < L(r', x)(\omega)$

Denkt man an die Definition der Lokalzeit durch

$$L(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t I_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds,$$

so kann man folgern:

$$\lambda(\{s \in [r, r'] | W_s \in (x - \epsilon, x + \epsilon)\}) > 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

Wegen der Stetigkeit von  $W \exists s \in [r, r']$  mit  $W_s(\omega) = x$  – da  $r$  und  $r'$  beliebig nahe bei  $t$  gewählt werden können, folgt für den Wachstumspunkt  $t$  von  $L(t, x)$   $W_t(\omega) = x$ , was zu zeigen war.

**Bem:** Die pfadweise Formel von Tanaka kann zu  $\widehat{W} = |W - x| - L$  umgeformt werden, was einen Spezialfall der sogenannten Skorohod-Zerlegung darstellt:

**Skorohod-Problem:** Das Skorohod-Problem ist ein analytisches Problem, bei dem man eine stetige Funktion (in unserem Beispiel  $\widehat{W}$ ) als eine nicht-negative Funktion (z.B.  $|W - x|$ ) abzüglich einer nichtfallenden Funktion (in unserem Fall die Lokalzeit) darstellen möchte.

In diesem Zusammenhang kann man zeigen:

- ) Das Skorohod-Problem hat eine eindeutige Lösung.
- ) Der nichtfallende Teil kann (anhand unseres Beispiels ausgeführt) folgendermaßen dargestellt werden:

$$L_t = \sup_{s \in [0, t]} \widehat{W}_s^- \tag{5.10}$$

## 5.2 Optimale Dividenden-Strategie bei unbeschränkter Auszahlungsintensität

Die im Folgenden gebrachten Resultate wurden dem Paper „Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out“ von Asmussen und Taksar entnommen.<sup>10</sup>

### 5.2.1 Vorstellung des Modells

Im Modell mit unbeschränkter Auszahlungsintensität ist nun mit der Notation aus Abschnitt 4  $u_t = \infty$  möglich, was eine rigorosere mathematische Behandlung erfordert.

Dazu betrachtet man  $L_t = \int_0^t u_s ds$  – es handelt sich dabei also um die Dividendenauszahlungen bis zum Zeitpunkt  $t$ . Offensichtlich ist  $L_t$  nichtfallend.  $L(\cdot)$  als Charakterisierung einer Dividenden-Strategie wird als zulässig angesehen, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

-)  $L_t$  ist  $\mathcal{F}_t$ -messbar.

-)  $L(\cdot)$  ist ein nicht-abnehmender, nicht-negativer Prozess.

Man beachte, dass diese Forderungen an  $L_t$  weder Stetigkeit noch absolute Stetigkeit implizieren.

Bei der Behandlung dieses Kontroll-Problems werden wir  $L(\cdot)$  anstatt  $u(\cdot)$  als Kontroll-Prozess ansehen.

$L(\cdot)$  kann Unstetigkeiten (Sprünge) aufweisen. Eine technische Forderung an  $L(\cdot)$ , die wir in Zukunft voraussetzen werden, ist die sogenannte cadlag-Eigenschaft der Pfade – d.h. die Pfade seien rechtsstetig mit existierendem linksseitigem Grenzwert.

$L_t - L_s$  bezeichnet in unserem Modell die ausgezahlten Dividenden im Intervall  $(s, t]$  und  $L_t - L_{t-}$  ist als Dividenden-Auszahlung (Einmalzahlung) zum Zeitpunkt  $t$  zu interpretieren.

Die Darstellung des kontrollierten Reserve-Prozesses  $(R_t)_{t \geq 0}$  erfolgt nun durch die kumulativen Dividenden-Auszahlungen bis zum Zeitpunkt  $t$ :

$$R_t = x + \mu t + \sigma W_t - L_t$$

Man beachte dabei, dass  $R_0 = x - L_0$  gilt – d.h. wäre nach der Dividenden-Strategie  $L(\cdot)$  eine Auszahlung zum Zeitpunkt 0 fällig, so wird die Reserve  $R$  zum Zeitpunkt 0 von  $x$  auf  $x - L_0$  vermindert. Für die mathematische Vereinbarkeit mit der Interpretation gelte die Konvention  $R(0-) = x$  und

---

<sup>10</sup>siehe [6]

$L_{0-} = 0$ , sodass die Einmalzahlung zum Zeitpunkt 0 im Modell ihren Ausdruck in  $L_0 - L_{0-}$  findet.

Das Zielfunktional hat die folgende Gestalt

$$J(x, L(\cdot)) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dL(t) \right],$$

wobei das Integral als Lebesgue-Stieltjes-Integral anzusehen ist, bei dem der linke Endpunkt in die Integration miteinbezogen wird.  $\tau$  bezeichnet wiederum den Ruinzeitpunkt.

Das Ziel im nächsten Abschnitt ist das Auffinden der Wertfunktion  $V(x) = \sup_{L(\cdot)} J(x, L(\cdot))$  inklusive der optimalen Dividenden-Strategie  $L^*(\cdot)$ , welche  $V(x) = J(x, L^*(\cdot))$  erfüllt.

## 5.2.2 Lösung des Optimierungsproblems

Zur Auffindung der Wertfunktion  $V(x)$  werden wir nun die sogenannten Variationsungleichungen herleiten, welche  $V(x)$  in unserem Fall erfüllen muss. Für die erste Variationsungleichung konstruieren wir geeignete Dividenden-Strategien, die darin bestehen, dass man in einem Intervall  $[0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ) nichts auszahlt und anschließend eine  $\epsilon$ -optimale Strategie verfolgt, wobei zum Zeitpunkt  $\delta$  eine Einmalzahlung fällig sein könnte, welche sich durch unendliche Auszahlungsintensität ergibt.

Für die formale Realisierung einer derartigen Strategie betrachten wir für jedes Anfangskapital  $y$  die  $\epsilon$ -optimale Strategie  $L^y(\cdot)$ , welche die Eigenschaft

$$J(y, L^y(\cdot)) \geq V(y) - \epsilon \tag{5.11}$$

besitzt. Fixiert man nun  $\delta > 0$  und definiert den Reserve-Prozess im Diffusionsmodell ohne Berücksichtigung der Dividenden-Auszahlungen durch  $r(t) = x + \mu t + \sigma W_t$ , so können die Strategien zur Herleitung der ersten Variationsungleichung folgendermaßen angeschrieben werden:

$$L_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \delta \\ L^{r(\delta)}(t - \delta) & \text{für } t \geq \delta \end{cases}$$

Die Dividenden-Strategie  $L_\epsilon(t)$  gewährt also keine Dividende bis zum Zeitpunkt  $\delta$  und anschließend wird die  $\epsilon$ -optimale Strategie angewendet, wobei das Anfangskapital nun dem Wert der Reserve zum Zeitpunkt  $\delta$  entspricht. Aufgrund dieser Konstruktion können wir nun die folgende Ungleichung her-



leiten:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \sup_{L(\cdot)} J(x, L(\cdot)) \geq J(x, L_\epsilon(\cdot)) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dL_\epsilon(t) \right] \\
 &= \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dL_\epsilon(t) I_{\{\tau < \delta\}} \right]}_0 + \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dL_\epsilon(t) I_{\{\tau \geq \delta\}} \right] \\
 &= e^{-\beta \delta} \mathbb{E} \left[ \underbrace{\int_\delta^\tau e^{-\beta(t-\delta)} dL^{r(\delta)}(t-\delta) I_{\{\tau \geq \delta\}}}_{\int_0^{\tau-\delta} e^{-\beta s} dL^{r(\delta)}(s)} \right]
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Markov-Eigenschaft kann die folgende Vereinfachung durchgeführt werden:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau-\delta} e^{-\beta s} dL^{r(\delta)}(s) I_{\{\tau \geq \delta\}} \right] = \mathbb{E}_{r(\delta)} \left[ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau-\delta} e^{-\beta s} dL^{r(\delta)}(s) I_{\{\tau \geq \delta\}} \right]}_{J(r(\delta), L^{r(\delta)}(\cdot)) \geq V(r(\delta)) - \epsilon} \right]$$

Wir erhalten also die folgende Ungleichung:

$$V(x) \geq e^{-\beta \delta} \mathbb{E} \left[ (V(r(\delta)) - \epsilon) I_{\{\tau \geq \delta\}} \right]$$

Diese kann wegen  $I_{\{\tau \geq \delta\}} + I_{\{\tau < \delta\}} = 1$  als

$$V(x) \geq e^{-\beta \delta} \mathbb{E} \left[ V(r(\delta)) - \epsilon I_{\{\tau \geq \delta\}} - V(r(\delta)) I_{\{\tau < \delta\}} \right]$$

angeschrieben werden.

Es gilt also:

$$V(x) \geq e^{-\beta \delta} \mathbb{E} \left[ V(r(\delta)) \right] - e^{-\beta \delta} \epsilon \mathbb{P}[\tau \geq \delta] - e^{-\beta \delta} \mathbb{E} \left[ V(r(\delta)) I_{\{\tau < \delta\}} \right]$$

Da  $\epsilon$  in der obigen Ungleichung beliebig positiv gewählt werden kann, kann gefolgert werden:

$$V(x) - e^{-\beta \delta} \mathbb{E} \left[ V(r(\delta)) \right] + e^{-\beta \delta} \mathbb{E} \left[ V(r(\delta)) I_{\{\tau < \delta\}} \right] \geq 0 \quad (5.12)$$

Bezeichnet  $h^x(t)$  die auf das Ereignis  $\{r(\delta) = x\}$  bedingte Dichte der Stoppzeit des Ruinzeitpunktes  $\tau$ , so kann die folgende Abschätzung gemacht werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ V(r(\delta)) I_{\{\tau < \delta\}} \right] &= \mathbb{E}_{r(\delta)} \left[ V(r(\delta)) \int_0^\delta h^{r(\delta)}(t) dt \right] \\
 &\leq \mathbb{E}_{r(\delta)} \left[ V(r(\delta)) \delta \underbrace{\max_{t \in [0, \delta]} h^{r(\delta)}(t)}_{\rightarrow 0 \text{ für } \delta \rightarrow 0} \right]
 \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Konvergenzgeschwindigkeit für  $\delta \rightarrow 0$  kann 5.12 zur folgenden Ungleichung umformuliert werden:

$$V(x) - e^{-\beta\delta}\mathbb{E}[V(r(\delta))] + o(\delta) \geq 0 \quad (5.13)$$

Unter Annahme der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit von  $V$  kann man mit der Formel von Itô unter Berücksichtigung von  $r(0) = x$  zusammen mit der Approximation von  $e^{-\beta\delta}$  durch  $1 - \beta\delta$  die untenstehende Gleichung erhalten:

$$e^{-\beta\delta}\mathbb{E}[V(r(\delta))] = (1 - \beta\delta)\left(V(x) + \delta\left(\frac{1}{2}\sigma^2V''(x) + \mu V'(x)\right)\right) + o(\delta)$$

Setzt man diese Beziehung in 5.13 ein, dividiert die Ungleichung durch  $\delta > 0$  und lässt anschließend  $\delta$  unter Ausnutzung von „ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{o(\delta)}{\delta} = 0$ “ gegen 0 streben, so erhält man die erste Variationsungleichung von  $V(x)$ :

$$\frac{1}{2}\sigma^2V''(x) + \mu V'(x) - \beta V(x) \leq 0 \quad (5.14)$$

Um die zweite Variationsungleichung zu erhalten, definieren wir nun eine Dividenden-Strategie durch  $\mathcal{L}_\epsilon(t) = \delta + L^{x-\delta}(t)$ , wobei  $x$  und  $\delta > 0$  fixiert sind. Diese Strategie schüttet zu Beginn eine Einmalzahlung der Höhe  $\delta$  aus, welche die Reserve auf  $x - \delta$  reduziert, und anschließend verwendet man das Kontroll-Funktional  $L^{x-\delta}(\cdot)$ . In diesem Fall kann wiederum eine Ungleichung hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} V(x) &\geq J(x, \mathcal{L}_\epsilon(\cdot)) = \delta + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\beta t} dL^{x-\delta}(t)\right]}_{J(x, L^{x-\delta}(\cdot))} \\ &\geq \delta + V(x - \delta) - \epsilon \end{aligned}$$

Wegen der beliebigen Wählbarkeit von  $\epsilon > 0$  erhalten wir

$$V(x) - V(x - \delta) \geq \delta,$$

woraus

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(x) - V(x - \delta)}{\delta} - 1 = V'(x) - 1 \geq 0$$

folgt. Die zweite Variationsungleichung lautet also

$$1 - V'(x) \leq 0. \quad (5.15)$$

Wir haben also hergeleitet, dass  $V(x)$  die Ungleichungen 5.14 und 5.15 erfüllen muss. Zusammenfassend gilt also

$$\max\left(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \beta V(x), 1 - V'(x)\right) \leq 0.$$

Es kann außerdem gezeigt werden, dass in der obigen Ungleichung auch Gleichheit für die Wertfunktion  $V(x)$  gilt. Die Randbedingung  $V(0) = 0$  ist klar, da das Versicherungsunternehmen mit Anfangskapital  $x = 0$  ruiniert ist. Zusammenfassend gilt der folgende Satz:

**Satz:** Die Wertfunktion unseres Kontroll-Problems erfüllt die folgende HJB-Gleichung:

$$\max\left(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \beta V(x), 1 - V'(x)\right) = 0 \quad (5.16)$$

mit der Randbedingung

$$V(0) = 0$$

**Lösungsstrategie:** Um unser Kontroll-Problem zu lösen, gehen wir folgendermaßen vor:

- ) Wir konstruieren eine Lösung  $f$  der HJB-Gleichung 5.16.
- ) Wir zeigen, dass die Lösung  $f$  die Wertfunktion majorisiert.
- ) Konstruktion einer Dividenden-Strategie  $L^*(\cdot)$  mit einer erwarteten Dividende bei Anfangskapital  $x$ , welche genau  $f(x)$  entspricht, womit  $f = V$  und  $L^*(\cdot)$  als optimale Strategie bewiesen wäre.

Für die Lösung der HJB-Gleichung 5.16 nehmen wir  $f$  als konkav an – d.h.  $f'(x)$  ist nicht-zunehmend. Definiert man nun  $m := \sup\{x | f'(x) > 1\}$ , so gilt:

$$f'(x) \begin{cases} > 1 & \text{für } x < m \\ \leq 1 & \text{für } x \geq m \end{cases}$$

Betrachtet man die HJB-Gleichung 5.16, so gilt

$$\mathcal{A}f(x) = 0, \quad x < m \quad (5.17)$$

mit der Notation

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} - \beta.$$

In diesem Sinn sollte  $f$  auf zwei Bereichen unterschiedliche Bedingungen erfüllen: Auf  $[0, m)$  sollte für  $f$  die Gleichung 5.17 gelten und auf  $[m, \infty)$

sollte  $f$   $f'(x) = 1$  erfüllen, wie man aus unserer Konkavitätsannahme und der HJB-Gleichung ersieht.

Zum Auffinden der Schranke  $m$  verwenden wir wiederum das „principle of smooth fit“.  $f$  sollte 2-mal stetig differenzierbar sein – es muss also

$$f'(m) = f'(m-) = f'(m+), \quad f''(m) = f''(m-) = f''(m+)$$

gelten.

Das Problem besteht also erstmal darin, eine Lösung  $f$  von 5.17 und eine Schranke  $m$  zu finden, sodass die Gleichungen

$$f(0) = 0 \tag{5.18}$$

$$f'(m) = 1 \tag{5.19}$$

$$f''(m) = 0 \tag{5.20}$$

gelten, wobei sich die Bedingungen an die Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $m$  aus den rechtsseitigen Ableitungen zusammen mit  $f'(x) = 1$  auf  $[m, \infty)$  ergeben.

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 5.17 hat die Form  $C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{-\theta_2 x}$ , wobei  $\theta_1, \theta_2$  wie im Abschnitt 4.1 definiert sind und  $C_1, C_2$  beliebige Konstante sind. Ein weiterer Freiheitsgrad, der nun durch das Gleichungssystem 5.18–5.20 festgelegt werden kann, ist die Schranke  $m$ . Aus 5.18 ersieht man bereits, dass  $C_1 = -C_2$  gilt – d.h. die gesuchte Lösung  $f$  hat die folgende Gestalt

$$f(x) = C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}),$$

wobei aufgrund der Nichtnegativität der gesuchten Wertfunktion  $C > 0$  gelten muss. Aus den Ableitungen

$$f'(x) = C(\theta_1 e^{\theta_1 x} + \theta_2 e^{-\theta_2 x})$$

$$f''(x) = C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x})$$

erhält man nun mit den Bedingungen 5.19 und 5.20 an  $m$  und  $C$ :

$$C = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} - \theta_2 e^{-\theta_2 m}} \tag{5.21}$$

$$m = \frac{2}{\theta_1 + \theta_2} \log \left| \frac{\theta_2}{\theta_1} \right| \tag{5.22}$$

Aus

$$\theta_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$\theta_2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}}{\sigma^2}$$

ergibt sich für  $m$ :

$$m = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} \log \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}}{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} \right) \quad (5.23)$$

Damit wäre  $f$  auf  $[0, m)$  definiert.

Weiters muss  $f'(x) = 1$  auf  $[m, \infty)$  gelten, womit  $f(x) = x + \text{const}$  auf  $[m, \infty)$  folgt. Wegen der geforderten zweifachen stetigen Differenzierbarkeit an  $f$  muss insbesondere  $f(m-) = f(m+)$  erfüllt sein, womit die noch zu bestimmende Unbekannte  $\text{const}$  aus der Gleichung

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = m + \text{const}$$

errechnet werden kann, was  $\text{const} = C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) - m$  ergibt.

Zusammenfassend erhalten wir:

**Satz:** Definiert man

$$f(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}) & \text{für } x < m \\ C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) + x - m & \text{für } x \geq m, \end{cases} \quad (5.24)$$

wobei  $m$  und  $C$  durch 5.22 und 5.21 gegeben sind, so ist  $f(x)$  eine Lösung der HJB-Gleichung 5.16.

**Beweis:** Alles, was nach unserer Vorgangsweise bei der Lösungsauffindung noch bewiesen werden muss, ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 1 && \text{für } x < m \\ \mathcal{A}f(x) &\leq 0 && \text{für } x \geq m \end{aligned}$$

Sind diese beiden Ungleichungen gezeigt, erfüllt  $f$  nach Konstruktion die HJB-Gleichung 5.16.

Berechnet man  $f'''(x)$ , so sieht man, dass  $f'''(x) \geq 0$  aufgrund der Positivität von  $\theta_1$  und  $\theta_2$  gilt –  $f''(x)$  ist somit eine nicht-fallende Funktion. Weiters gilt  $f''(0) < 0$  wegen  $\theta_2 > \theta_1$ . Außerdem ist nach Konstruktion  $f''(m) = 0$  erfüllt und man kann zusammen mit der Monotonie von  $f''(x)$  auf die Konkavität von  $f$  auf  $[0, m)$  schließen – es gilt also insbesondere  $f'(x) \geq f'(m) = 1$  auf  $[0, m)$ .

Um  $\mathcal{A}f(x) \leq 0$  auf  $[m, \infty)$  zu beweisen, wendet man den Operator  $\mathcal{A}$  auf  $f$  für  $x \geq m$  an:

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 \underbrace{f''(x)}_{=0} + \mu \underbrace{f'(x)}_{=1} - \beta f(x) \quad \text{auf } [m, \infty)$$

Weil  $f$  wegen  $f'(x) = 1$  monoton wachsend auf  $[m, \infty)$  ist, kann man den Beweis mit der folgenden Abschätzung schließen:

$$\mathcal{A}f(x) = \mu - \beta f(x) \leq \mu - \beta f(m) = \lim_{x \rightarrow m^-} \underbrace{\mathcal{A}f(x)}_{=0} = \mathcal{A}f(m) = 0 \text{ auf } [m, \infty)$$

Als Nächstes werden wir zeigen, dass die gefundene Lösung der HJB-Gleichung 5.16  $f$  mit der Wertfunktion unseres Optimierungsproblems  $V(x)$  übereinstimmt. Zunächst werden wir beweisen, dass  $f(x)$  die erwartete Dividende einer beliebigen zulässigen Strategie  $L(\cdot)$  mit Anfangskapital  $x$  majorisiert – als direkte Folgerung gilt dann  $f(x) \geq V(x) = \sup_{L(\cdot)} J(x, L(\cdot))$ .

**Satz:** Für eine beliebige zulässige Dividenden-Strategie gilt:

$$f(x) \geq J(x, L(\cdot)) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dL(t) \right]$$

**Beweis:** Bei unserem Kontroll-Problem ist der Reserve-Prozess für eine beliebige Dividenden-Strategie  $L(\cdot)$  durch  $R_t = x + \mu t + \sigma W_t - L_t$  gegeben und  $\tau$  bezeichne wiederum den Ruinzeitpunkt. Für die Anwendung der verallgemeinerten Itô-Formel zerlegen wir die wachsende Funktion  $L(\cdot)$  in den Anteil, der die Sprünge (Unstetigkeiten) beinhaltet, welcher durch

$$L^d(t) = \sum_{s \in \Lambda, s \leq t} (L(s) - L(s-)) \quad \text{wobei } \Lambda = \{s | L(s-) \neq L(s)\}$$

gegeben ist und in den stetigen Anteil  $L^c(t) = L(t) - L^d(t)$ .

Anwendung der verallgemeinerten Itô-Formel liefert:

$$\begin{aligned} e^{-\beta(t \wedge \tau)} f(R_{t \wedge \tau}) &= f(x) + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} \mathcal{A}f(R_s) ds \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dW_s - \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dL_s \\ &+ \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-\beta s} (f(R_s) - f(R_{s-}) - f'(R_{s-})(R_s - R_{s-})) \\ &= f(x) + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} \mathcal{A}f(R_s) ds + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dW_s \\ &- \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dL_s^c + \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-\beta s} (f(R_s) - f(R_{s-})) \end{aligned}$$

Hierbei wurde bei der letzten Umformung

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dL_s + \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_{s-}) \underbrace{(R_s - R_{s-})}_{=-(L_s - L_{s-})} \\
&= \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dL_s - \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_{s-}) (L_s - L_{s-}) \\
&= \int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) \underbrace{(dL_s - dL_s^d)}_{dL_s^c}
\end{aligned}$$

ausgenutzt.

Aufgrund der Konkavität von  $f$  gilt  $0 < f'(x) < f'(0) < \infty$ . Es handelt sich somit bei  $\int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dW_s$  um ein stochastisches Integral mit der Martingal-Eigenschaft aufgrund des quadratisch integrierbaren Integranden – insbesondere verschwindet der Erwartungswert des stochastischen Integrals. Weiters wissen wir, weil  $f$  eine Lösung der HJB-Gleichung 5.16 ist, dass  $\mathcal{A}(f(x)) \leq 0$  und somit  $\int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} \mathcal{A}f(R_s) ds \leq 0$  erfüllt ist.

Nutzt man die beiden eben genannten Gültigkeiten zusammen mit der Gleichung, die sich aus der verallgemeinerten Itô-Formel ergeben hat, aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{-\beta(t \wedge \tau)} f(R_{t \wedge \tau})] &\leq f(x) - \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dL_s^c\right] + \\
&+ \mathbb{E}\left[\sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-\beta s} (f(R_s) - f(R_{s-}))\right] \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Wegen  $f(R_\tau) = f(0) = 0$  kann man folgern, dass die Gleichung

$$\mathbb{E}[e^{-\beta(t \wedge \tau)} f(R_{t \wedge \tau})] = \mathbb{E}[e^{-\beta(t \wedge \tau)} f(R_{t \wedge \tau}) I_{\{t < \tau\}}] = e^{-\beta t} \mathbb{E}[f(R_t) I_{\{t < \tau\}}]$$

gültig ist.

Aufgrund  $R_t = x + \mu t + \sigma W_t - L_t \leq |x + \mu t + \sigma W_t|$  und der Konkavität von  $f$ , welche die Existenz von  $a, b > 0$  mit  $f(x) \leq a + bx$  impliziert, kann

$$e^{-\beta t} \mathbb{E}[f(R_t) I_{\{t < \tau\}}] \leq e^{-\beta t} (a + b \mathbb{E}[|x + \mu t + \sigma W_t|])$$

gefolgert werden.

Nun gilt aber  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} (a + b \mathbb{E}[|x + \mu t + \sigma W_t|]) = 0$  und damit insbesondere:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} \mathbb{E}[f(R_t) I_{\{t < \tau\}}] = 0$$

Für die Betrachtung der rechten Seite der Ungleichung 5.25 erinnern wir uns an die Gültigkeit von  $f'(x) \geq 1$  und beobachten  $R_s - R_{s-} = L_{s-} - L_s$ . Mit diesem Wissen lässt sich die Abschätzung

$$-\mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} f'(R_s) dL_s^c\right] \leq -\mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} e^{-\beta s} dL_s^c\right]$$

einsehen und außerdem mit Hilfe der folgenden Abschätzung

$$\begin{aligned} f(R_s) - f(R_{s-}) &= f'(\xi) \underbrace{(R_s - R_{s-})}_{=-(L_s - L_{s-})} \\ &= -f'(\xi)(L_s - L_{s-}) \leq -(L_s - L_{s-}) \quad \xi \in [R_s, R_{s-}] \end{aligned}$$

die nachfolgende Ungleichung

$$\mathbb{E}\left[\sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-\beta s} (f(R_s) - f(R_{s-}))\right] \leq -\mathbb{E}\left[\sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-\beta s} (L_s - L_{s-})\right].$$

Zusammenfassend können wir aus 5.25 und Grenzübergang  $t \rightarrow \infty$  folgern:

$$0 \leq f(x) - \underbrace{\left(\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\beta s} dL_s^c\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{s \in \Lambda, s \leq t} e^{-\beta s} (L_s - L_{s-})\right]\right)}_{=\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\beta s} dL_s\right] = J(x, L(\cdot))}$$

Es gilt also wegen  $f(x) \geq J(x, L(\cdot))$  für beliebige Strategien insbesondere:

$$f(x) \geq V(x) = \sup_{L(\cdot)} J(x, L(\cdot))$$

Es bleibt somit nur noch zu zeigen, dass  $f(x) \leq V(x)$  gilt, um  $f$  als die Wertfunktion unseres Kontroll-Problems identifizieren zu können. Dazu werden wir nachfolgend eine Strategie  $L^*(\cdot)$  mit  $J(x, L^*(\cdot)) = f(x)$  konstruieren. Man wähle  $m$  wie in 5.23 und definiere:

$$\begin{aligned} L_t^* &= \max_{s \leq t} (x + \mu s + \sigma W_s - m)^+ \\ R_t^* &= x + \mu t + \sigma W_t - L_t^* \end{aligned}$$

Man beobachte, dass es sich bei  $(L_t^*)_{t \geq 0}$  um einen stetigen, wachsenden Prozess handelt, wobei  $L_0^* > 0$  für  $x > m$  gilt. In diesem Fall springt die kummulative Dividendenauszahlung  $L_t^*$  um die Sprunghöhe  $x - m$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ .



Der Prozess  $(R_t^*)_{t \geq 0}$  ist eine Brownsche Bewegung auf  $[0, m]$  mit  $m$  als obere reflektierende Schranke. Weiters nimmt das Funktional  $L^*(\cdot)$  nur zu den Zeitpunkten  $t$  zu, für die  $R_t^* = m$  gilt. Formal formuliert bedeutet das:

$$R_t^* \leq m \quad \text{für alle } t \geq 0$$

$$\int_0^\infty I_{\{R_t^* < m\}} dL_t^* = 0$$

**Bem.:** Um eine Interpretation von  $(R_t^*)$  als reflektierte Brownsche Bewegung mit oberer Reflexionsschranke  $m$  und einen Zusammenhang der Dividenden-Strategie  $L^*(\cdot)$  mit der Lokalzeit einer Brownschen Bewegung einsehen zu können, erinnern wir uns an die Formel von Tanaka 5.8, welche für  $x = 0$  eine Zerlegung einer an der unteren Schranke 0 reflektierten Brownschen Bewegung angibt. Stellt man sich nun eine Brownsche Bewegung  $x + B_t$  mit  $B_t = \mu t + \sigma W_t$  vor, welche an der oberen Schranke  $m$  reflektiert wird, so kann das durch

$$(m - |B_t + x - m|)_{t \geq 0}$$

als Prozess dargestellt werden. Wendet man nun die Formel von Tanaka an, erhält man

$$m - |B_t + x - m| = m - \widehat{B}(t, m - x) - L(t, m - x).$$

Da es sich bei  $m - \widehat{B}(t, m - x)$  um eine Brownsche Bewegung, welche bei  $x$  startet, Drift  $\mu$  und Volatilität  $\sigma$  hat, könnte dieser Prozess nun als unser Reserveprozess  $(r(t))$  im Diffusionsmodell interpretiert werden und wir sehen außerdem, wenn  $r(t) = m - \widehat{B}(t, m - x)$  gilt, unter Zuhilfenahme der Darstellung 5.10 der Lokalzeit, welche sich aus der Eindeutigkeit des Skorohod-Problems ergibt, dass es sich bei der Lokalzeit

$$\begin{aligned} L(t, m - x) &= \sup_{s \leq t} (\widehat{B}(t, m - x) - m + m)^- \\ &= \sup_{s \leq t} (\underbrace{m - \widehat{B}(t, m - x)}_{r(t)} - m)^+ = \sup_{s \leq t} (r(t) - m)^+ \end{aligned}$$

gerade um unsere optimale Strategie  $L^*(\cdot)$  handelt, deren Optimalität wir anschließend mit dem folgenden Satz beweisen werden. Außerdem kann der Verlauf von  $L^*(\cdot)$  bis auf die Einmalzahlung zum Zeitpunkt  $t = 0$ , falls  $x > m$  gilt, als der einer Lokalzeit einer Brownschen Bewegung interpretiert werden.

**Satz:** Definiert man  $f$  wie in 5.24 so gilt:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta t} dL_t^* \right] = J(x, L^*(\cdot)) = f(x)$$

mit der Strategie  $L^*(\cdot)$ , welche durch

$$L_t^* = \max_{s \leq t} (x + \mu s + \sigma W_s - m)^+$$

gegeben ist.

**Beweis:** Wir wenden die verallgemeinerte Itô Formel analog zum Beweis von  $f(x) \geq V(x)$  mit  $\tau^* = \inf\{t | R_t^* = 0\}$  und  $R_t^*$  wie oben definiert an:

$$\begin{aligned} e^{-\beta(t \wedge \tau^*)} f(R_{t \wedge \tau^*}^*) &= f(x) + \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} \mathcal{A}f(R_s^*) ds \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} f'(R_s^*) dW_s - \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} f'(R_s^*) dL_s^* \\ &+ \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} (f(R_s^*) - f(R_{s-}^*) - f'(R_{s-}^*)(R_s^* - R_{s-}^*)) \\ &= f(x) + \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} \mathcal{A}f(R_s^*) ds + \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} f'(R_s^*) dW_s \\ &- \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} f'(R_s^*) dL_s^{*c} + \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} (f(R_s^*) - f(R_{s-}^*)) \end{aligned}$$

Wegen  $\mathcal{A}f(x) = 0$  für  $x \leq m$  und  $R_t^* \leq m$  gilt:

$$\int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} \mathcal{A}f(R_s^*) ds = 0$$

Wendet man nun den Erwartungswert auf die Gleichung, die wir durch die verallgemeinerte Formel von Itô erhalten haben, an, verschwindet das stochastische Integral und wir erhalten wegen  $f(0) = 0$  analog zum Beweis von  $f(x) \geq V(x)$ :

$$\mathbb{E}[e^{-\beta t} f(R_t^*) I_{\{t < \tau^*\}}] = f(x) - \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} f'(R_s^*) dL_s^*\right] \quad (5.26)$$

Aufgrund  $f'(m) = 1$  und der Definition von  $L^*(\cdot)$  lässt sich die rechte Seite der Gleichung 5.26 folgendermaßen umformen.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} f'(R_s^*) dL_s^*\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} f'(R_s^*) I_{\{R_s^* = m\}} dL_s^*\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} \underbrace{f'(m)}_{=1} I_{\{R_s^* = m\}} dL_s^*\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} I_{\{R_s^* = m\}} dL_s^*\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-\beta s} dL_s^*\right] \end{aligned}$$

Aufgrund der Beschränktheit von  $f$  auf  $[0, m]$  konvergiert die linke Seite der Gleichung 5.26 für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 und wir erhalten somit durch Grenzübergang  $t \rightarrow \infty$  in 5.26

$$f(x) = \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^*} e^{-\beta s} dL_s^* \right] = J(x, L^*(\cdot)),$$

was zu zeigen war.

Zusammenfassend gilt somit nicht nur  $f(x) \geq V(x)$  sondern auch  $V(x) \geq f(x)$  – d.h. die Lösung der HJB-Gleichung  $f(x)$  ist die tatsächliche Wertfunktion unseres Optimierungsproblems und die optimale Dividenden-Strategie ist durch

$$L_t^* = \max_{s \leq t} (x + \mu s + \sigma W_s - m)^+$$

gegeben.

Das Problem der Auffindung der richtigen Auszahlungsintensität zu jedem Zeitpunkt kann also im Diffusionsmodell bei unendlichem Zeithorizont folgendermaßen umformuliert werden: Das Versicherungsunternehmen muss die optimale Reservenhöhe  $m$  ermitteln, welche deren Dividenden-Strategie in dem Sinn festlegt, dass alles, was an Reserve  $m$  übersteigen würde, sofort ausgezahlt wird und keine Auszahlungen geleistet werden, falls die Reserve unterhalb  $m$  liegt.

# Kapitel 6

## Barriere-Strategien bei endlichem Zeithorizont

### 6.1 Problemstellung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Vergleich dreier verschiedener Barriere-Strategien im Rahmen des Diffusionsmodells bei endlichem Zeithorizont. Der Vergleich der Strategien erfolgt durch Gegenüberstellung der mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulation geschätzten erwarteten Dividenden.

Bei der Simulation wurde der Zeitparameter  $t$  durch eine äquidistante Zerlegung des Zeithorizontes  $T$  in  $n$  Intervalle diskretisiert. Aufgrund der Eigenschaft der Inkremente der Brownschen Bewegung wurde die Reserve mit Hilfe von standardnormalverteilten Zufallszahlen simuliert.

Im Zuge einer Simulation eines Pfades unseres Diffusionsmodells erhält man nun die Werte der Reserve  $R_t$  für die Zeitpunkte  $t = i\frac{T}{n}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) durch:

$$\begin{aligned} R_0 &= x \\ R_{i\frac{T}{n}} &= R_{(i-1)\frac{T}{n}} + \mu\frac{T}{n} + \sqrt{\frac{T}{n}}\sigma Z, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

wobei  $Z$  für  $i = 1, \dots, n$  eine simulierte standardnormalverteilte Zufallszahl darstellt, wobei sich der Simulationsvorgang auf die Unabhängigkeit der Inkremente der Brownschen Bewegung und auf die folgende Gleichheit in Verteilung stützt:

$$W_{i\frac{T}{n}} - W_{(i-1)\frac{T}{n}} \hat{=} \sqrt{\frac{T}{n}}Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Die in diesem Kapitel verglichenen drei Dividenden-Strategien werden durch die folgenden Barrieren  $b(t)$  ( $t \in [0, T]$ ) charakterisiert:

$$\begin{aligned} b(t) &= \alpha \\ b(t) &= \gamma(T-t) \\ b(t) &= \delta\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

Hierbei sind  $\alpha$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  frei wählbare positive Parameter, die bei unserer Bewertung einer Strategie mittels Monte-Carlo-Simulation jeweils so gewählt werden, dass die größte erwartete Dividende unter allen getesteten Parameterwerten erzielt wird.

Die Entscheidung der Dividendenauszahlungshöhe zum Zeitpunkt  $i\frac{T}{n}$ , welche durch  $c_{i\frac{T}{n}}$  bezeichnet wird, gemäß der Strategie mit Barriere  $b(t)$  errechnet sich durch

$$c_{i\frac{T}{n}} = \left( \tilde{R}_{i\frac{T}{n}} - b\left(i\frac{T}{n}\right) \right)^+,$$

wobei  $\tilde{R}$  den um die Dividendenauszahlungen korrigierten Reserve-Prozess darstellt. Die Werte der Reserve  $\tilde{R}_t$  für die Zeitpunkte  $t = i\frac{T}{n}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) sind durch

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0 &= \min(x, b(0)) \\ \tilde{R}_{i\frac{T}{n}} &= \min\left(\tilde{R}_{(i-1)\frac{T}{n}} + \mu\frac{T}{n} + \sqrt{\frac{T}{n}}\sigma Z, b\left(i\frac{T}{n}\right)\right), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

gegeben.

Nach dem Simulationsvorgang eines Pfades wird die insgesamt Dividendenhöhe mit Hilfe der Zinsintensität  $\beta$  folgendermaßen bewertet:

$$\sum_{i=0}^n c_{i\frac{T}{n}} e^{-i\frac{T}{n}\beta}$$

Dieser Simulationsvorgang wurde nun  $N$ -mal durchgeführt und das arithmetische Mittel der erhaltenen insgesamt Dividendenhöhen als Schätzwert der erwarteten Dividendenhöhe bei Verwendung einer der drei Barriere-Strategien mit dem jeweils getesten Parameter  $\alpha$ ,  $\gamma$  oder  $\delta$  verwendet.

## 6.2 Probe der Simulation

Das geschriebene Programm wurde anhand der in Abschnitt 5.2.2 ausgeführten Theorie für optimale Dividendenauszahlung mit unbeschränkter Zahlungsintensität bei unendlichem Zeithorizont getestet. Es wurde dazu ein Zeithorizont von  $T = 10000$  gewählt, der einem unendlichen Zeithorizont nahe kommen soll. Weiters wurde die Zinsintensität  $\beta$  so gewählt, dass sie einem jährlichen Zins von 9% entspricht – der Zins wurde groß gewählt, damit Dividendenauszahlungen zu Zeitpunkten nach dem Zeithorizont  $T = 10000$  keinen nennenswerten Einfluss auf die erwarteten Dividenden ausüben. Somit wirken sich Auszahlungen zu Zeitpunkten  $t > 10000$  auch nicht relevant auf die optimale Schranke bei unendlichem Zeithorizont, welche sich durch 5.23 errechnen lässt, aus. Zusammenfassend wurden die folgenden Parameter für die Simulation gewählt, welche die Bestätigung der Optimalität der durch 5.23 errechneten Schranke als Ergebnis haben sollte, falls die Simulation korrekt arbeitet:

$$T = 10000, n = 200000, N = 1000, \beta = \log(1.09), x = 1, \mu = 0.05, \sigma = 0.08$$

Die Anzahl der Unterteilungen des Intervalls  $[0, T]$  wurden bewusst groß gewählt, um bei so großem Zeithorizont noch eine vernünftige Simulation eines Pfades einer Brownschen Bewegung zu erhalten. Da diese Realisierungen rechenintensiv sind wurde die Anzahl der Simulationen mit  $N = 1000$  gering gehalten – aber auch diese geringe Simulationsanzahl ergab ein befriedigendes Ergebnis:

Wenn man die simulierten erwarteten Dividenden gegen die getesteten Parameter aufträgt, sieht man deutlich, dass die theoretisch optimale Schranke  $m$  mit

$$m = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} \log \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}}{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} \right) = 0.2498861$$

die höchsten geschätzten erwarteten Dividenden unter allen getesteten Parametern ergibt:

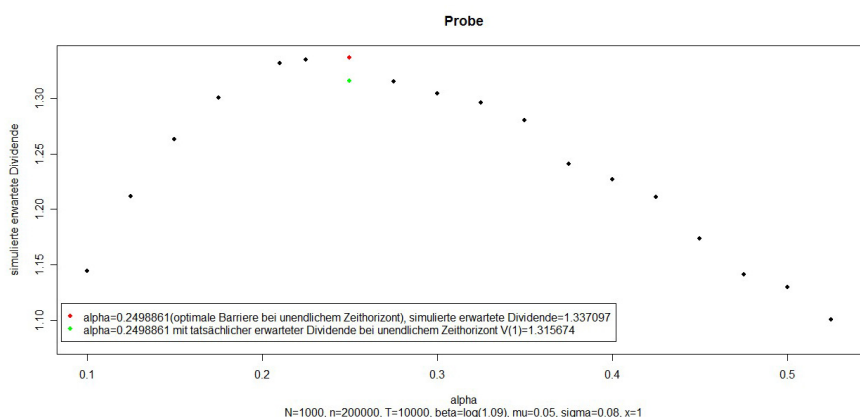


Abbildung 6.1:  
Veranschaulichung des Maximums unter allen getesteten Barrieren-Parameter  $\alpha$  an der Stelle der opt. Schranke für unendlichen Zeithorizont

Vergleicht man die simulierte erwartete Dividende  $\widehat{V}(1) = 1.337097$  bei  $\alpha = 0.2498861$  mit der tatsächlichen erwarteten Dividende bei unendlichem Zeithorizont  $V(1) = 1.315674$ , welche sich durch Auswerten der Wertfunktion 5.24 ergibt, so kommt man auf die folgende relative Abweichung:

$$\frac{|\widehat{V}(1) - V(1)|}{V(1)} = 0.01628325 \approx 1.6\%$$

Erhöht man die Anzahl der Simulationen auf  $N = 10000$  und die Anzahl der Zerlegungen von  $[0, T]$  für die Simulation der Brownschen Bewegung auf  $n = 800000$ , so erhält man eine geschätzte Dividende  $\widehat{V}(1) = 1.329269$ , was bereits eine höhere Genauigkeit bei einer relativen Abweichung von ungefähr 1% ergibt, wie man nachfolgend sieht:

$$\frac{|\widehat{V}(1) - V(1)|}{V(1)} = 0.01033345 \approx 1\%$$

Zusammenfassend bestätigen die Simulationsergebnisse wie erhofft die Ergebnisse der Theorie. Nach dieser Probe der Vertrauenswürdigkeit des Programmes zur Simulation, werden nun im nachfolgenden Abschnitt die Barriere-Strategien verglichen.

### 6.3 Simulationsergebnisse

Bei allen nachfolgenden Simulationsergebnissen, wurden die Parameter folgendermaßen gewählt:

$$T = 20, n = 10000, N = 10000, \beta = \log(1.03), x = 1, \mu = 0.05, \sigma = 0.08$$

Es wurden also bei einer Monte-Carlo-Simulation 10000 Szenarien simuliert, wobei der Zeithorizont, welcher 20 Jahre beträgt, zur Simulation des Reserveprozesses (mit Anfangskapital 1 und einem Drift der Höhe 0.05 und Volatilität 0.08) in 10000 Intervalle unterteilt wurde – die erzielte Dividende bei einem Simulationsdurchgang wurde mit einer Zinsintensität  $\beta$  berechnet, welche einem jährlichen Zins von 3% entspricht.

Bei der Barriere  $b(t) = \alpha$  wurden die erwarteten Dividenden für Werte  $\alpha = i \cdot 0.01$  für  $i = 0, \dots, 79$  simuliert, wobei sich das folgende Bild ergab:

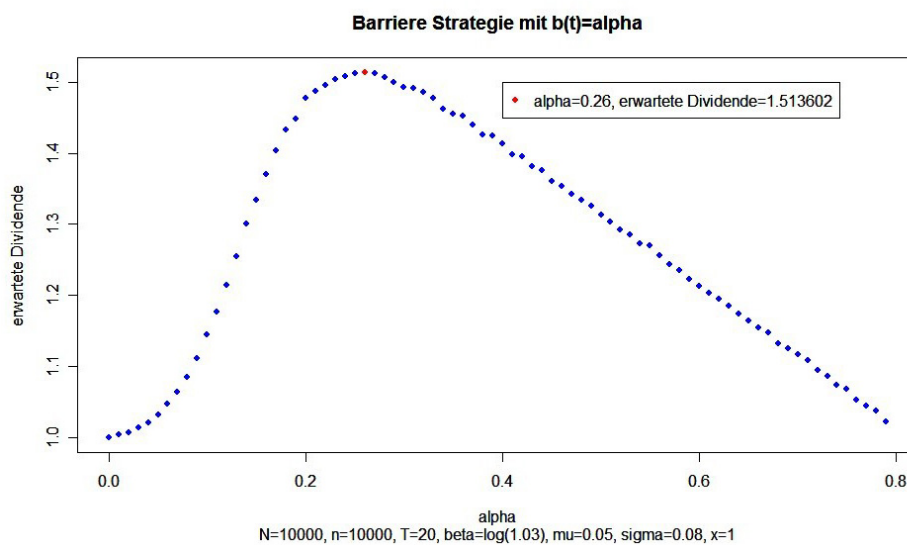


Abbildung 6.2:  
Geschätzte erwartete Dividende für alle getesteten Parameter  $\alpha$



Die entsprechenden Werte sind der angegebenen Tabelle zu entnehmen:

$\alpha$	erwartete Dividende	$\alpha$	erwartete Dividende
0.01	1.003587	0.19	1.448041
0.02	1.006908	0.20	1.477246
0.03	1.013243	0.21	1.487016
0.04	1.021348	0.22	1.495333
0.05	1.032057	0.23	1.504031
0.06	1.047469	0.24	1.508086
0.07	1.063862	0.25	1.512053
0.08	1.084616	0.26	1.513602
0.09	1.111937	0.27	1.512700
0.10	1.144354	0.28	1.506110
0.11	1.177216	0.29	1.499321
0.12	1.213960	0.30	1.493349
0.13	1.254160	0.31	1.491064
0.14	1.300115	0.32	1.485755
0.15	1.334503	0.33	1.477298
0.16	1.370556	0.34	1.462448
0.17	1.404028	0.35	1.455302
0.18	1.433319		

Im Vergleich zum Parameterwert  $\alpha = 0.26$ , welcher unter allen getesteten Werten die maximale simulierte Dividende ergab, wäre die optimale Schranke bei unendlichem Zeithorizont  $\alpha = 0.399174$ , welche durch die Gleichung 5.23 errechnet wurde, bei der die Schranke als  $m$  bezeichnet wird, bei einem Zeithorizont von 20 Jahren die erwartete Dividende mit 1.415563 jedoch deutlich niedriger als unser Maximalwert von 1.513602, wie man in der nachfolgenden Veranschaulichung gut erkennt.

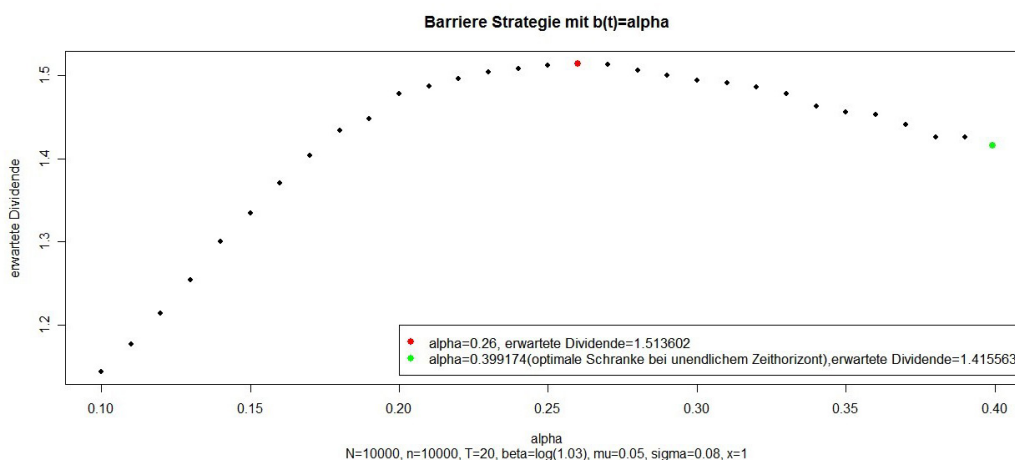


Abbildung 6.3:

Vergleich der unter allen getesteten Parametern maximalen geschätzten erwarteten Dividende mit der geschätzten erwarteten Dividende bei der optimalen Schranke für unendlichen Zeithorizont

Diese niedrigere Dividende bei der optimalen Schranke bei unendlichem Zeithorizont im Fall eines Horizontes von 20 Jahren ist insofern nachvollziehbar, weil die Ruingefahr in 20 Jahren nicht so relevant bei der Wahl der Dividenden-Strategie ist wie im unendlichen Fall, womit die unendlich optimale Schranke bei einem Zeithorizont von 20 Jahren zu „konservativ“ gewählt ist.

Für die Barriere  $b(t) = \gamma(T - t)$  wurden die erwarteten Dividenden für Werte  $\gamma = i \cdot 0.01$  für  $i = 0, \dots, 35$  simuliert mit dem nachfolgend grafisch veranschaulichten Ergebnis, darunter die zugehörigen Simulationsergebnisse in tabellierter Form:

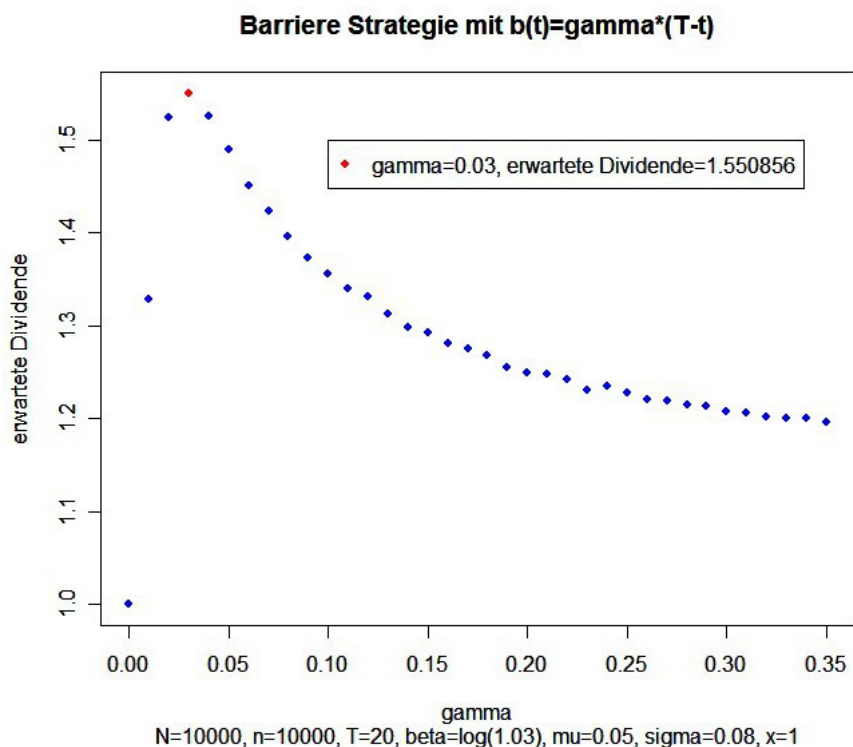


Abbildung 6.4:  
Geschätzte erwartete Dividende für alle getesteten Parameter  $\gamma$

$\gamma$	$b(0)=20\gamma$	erw. Dividende	$\gamma$	$b(0)=20\gamma$	erw. Dividende
0.01	0.2	1.329068	0.19	3.8	1.255130
0.02	0.4	1.524195	0.20	4.0	1.249868
0.03	0.6	1.550856	0.21	4.2	1.247840
0.04	0.8	1.525449	0.22	4.4	1.242280
0.05	1.0	1.490055	0.23	4.6	1.230931
0.06	1.2	1.451602	0.24	4.8	1.234911
0.07	1.4	1.423592	0.25	5.0	1.227449
0.08	1.6	1.396619	0.26	5.2	1.221456
0.09	1.8	1.373322	0.27	5.4	1.219470
0.10	2.0	1.356160	0.28	5.6	1.214411
0.11	2.2	1.340526	0.29	5.8	1.213091
0.12	2.4	1.331546	0.30	6.0	1.208314
0.13	2.6	1.313007	0.31	6.2	1.205983
0.14	2.8	1.299074	0.32	6.4	1.201592
0.15	3.0	1.292172	0.33	6.6	1.200521
0.16	3.2	1.281052	0.34	6.8	1.200495
0.17	3.4	1.275780	0.35	7.0	1.196452
0.18	3.6	1.268038			

Bei der Untersuchung der Barriere  $b(t) = \delta\sqrt{T-t}$  wurden die erwarteten Dividenden für Werte  $\delta = i \cdot 0.01$  für  $i = 0, \dots, 35$  simuliert, wobei sich das unten angegebene Bild ergab:

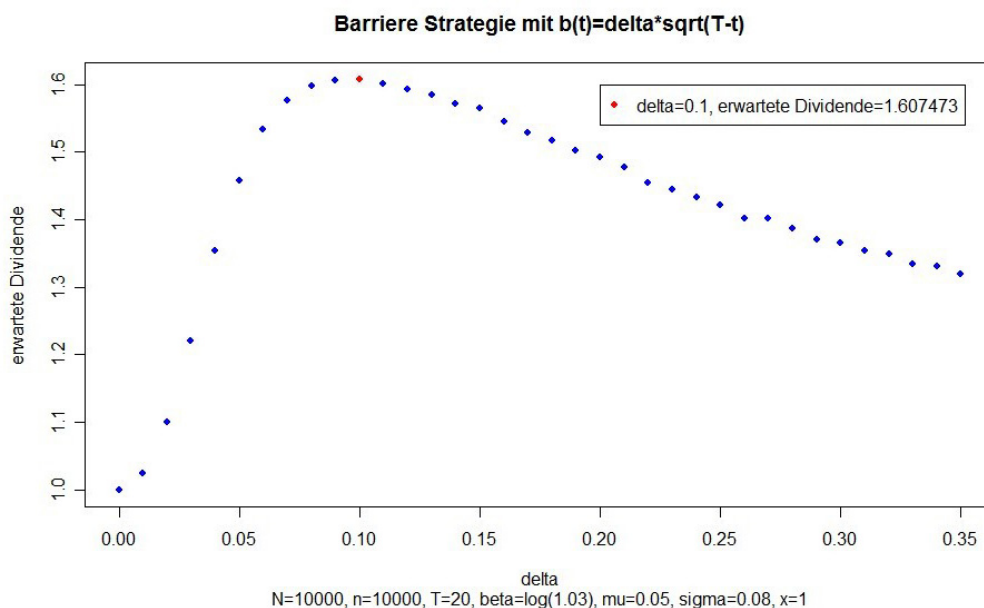


Abbildung 6.5:  
Geschätzte erwartete Dividende für alle getesteten Parameter  $\delta$

Die geschätzten erwarteten Dividenden sind nachfolgend aufgelistet:

$\delta$	$b(0)=\sqrt{20} \cdot \delta$	erw.Dividende	$\delta$	$b(0)=\sqrt{20} \cdot \delta$	erw.Dividende
0.01	0.044721	1.025164	0.19	0.849705	1.502623
0.02	0.089442	1.099949	0.20	0.894427	1.491709
0.03	0.134164	1.220338	0.21	0.939148	1.477353
0.04	0.178885	1.354299	0.22	0.983869	1.455139
0.05	0.223606	1.456905	0.23	1.028591	1.443791
0.06	0.268328	1.532818	0.24	1.073312	1.433587
0.07	0.313049	1.576452	0.25	1.118033	1.420795
0.08	0.357770	1.597479	0.26	1.162755	1.401565
0.09	0.402492	1.606390	0.27	1.207476	1.401225
0.10	0.447213	1.607473	0.28	1.252198	1.386376
0.11	0.491934	1.601694	0.29	1.296919	1.370552
0.12	0.536656	1.591965	0.30	1.341640	1.365701
0.13	0.581377	1.584230	0.31	1.386362	1.354299
0.14	0.626099	1.571632	0.32	1.431083	1.349156
0.15	0.670820	1.564782	0.33	1.475804	1.334559
0.16	0.715541	1.545128	0.34	1.520526	1.330468
0.17	0.760263	1.528127	0.35	1.565247	1.319856
0.18	0.804984	1.517592			

Zusammenfassend erhalten wir also die folgenden unter allen getesteten Parametern maximalen geschätzten erwarteten Dividenden bei den drei verglichenen Barrieren.

	$b(t) = \alpha$	$b(t) = \gamma \cdot (T - t)$	$b(t) = \delta \cdot \sqrt{T - t}$
erwartete Dividende	1.513602	1.550856	1.607473

Grafisch veranschaulicht ergibt sich das auf der nächsten Seite angegebene Bild.

Unter den getesteten Barrieren stellte sich also im Rahmen unserer Monte-Carlo-Simulationen  $b(t) = \delta\sqrt{T - t}$  als die beste Barriere-Strategie im Sinn möglichst großer erwarteter Dividenden-Auszahlungen zum Zeitpunkt 0 bei endlichem Zeithorizont heraus.

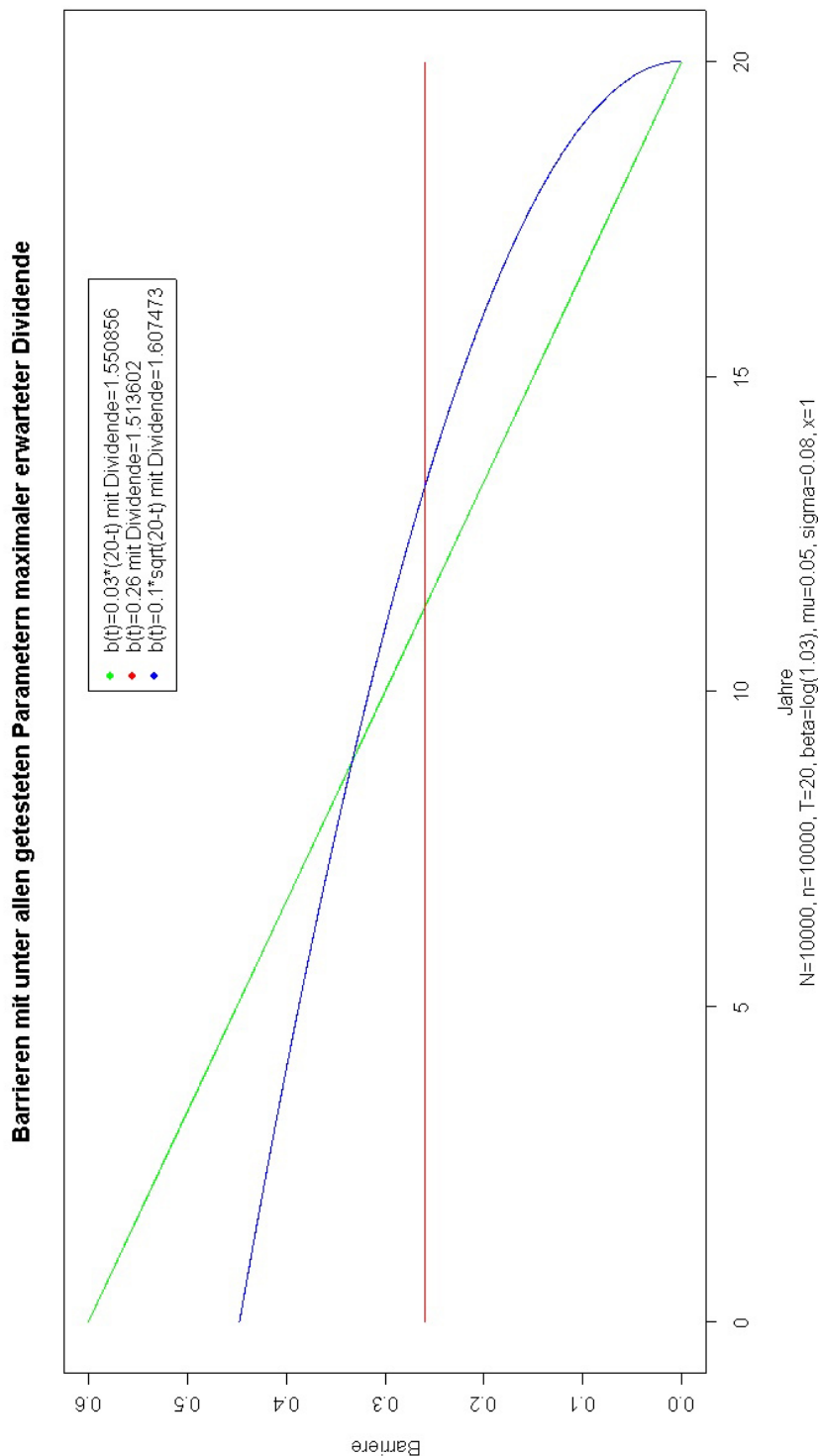


Abbildung 6.6:  
 Veranschaulichung der verglichenen Barrieren mit den jeweils besten unter allen getesteten Parametern dargestellt

# Literaturverzeichnis

- [1] BÜHLMANN, Hans: *Mathematical methods in risk theory*. Springer: Berlin 1970
  
- [2] TAKEUCHI, K.: *A remark on economic survival games*. J. Operations Res. Soc. Japan 4 (1962), S.114–121
  
- [3] MIJASAWA, K.: *An economic survival game*. J. Operations Res. Soc. Japan 4 (1962), S.95–113
  
- [4] ASMUSSEN, Søren: *Ruin probabilities*. World Scientific: Singapore 2000
  
- [5] SASS, Jörn: *Stochastic Control*. JKU Linz, Abruf vom 8. 2. 2008: <http://www.ricam.oeaw.ac.at/people/page/sass/teaching/stochcontrol>
  
- [6] Søren ASMUSSEN, Michael TAKSAR: *Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out*. Department of Mathematical Statistics, University of Lund. SUNY, Stony Brook, USA: Dezember 1995 erhalten; Oktober 1996 erhalten
  
- [7] Ioannis KARATZAS, Steven E. SHREVE: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer: USA 1998 (2.Auflage)
  
- [8] K. L. CHUNG, R. J. WILLIAMS: *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhäuser: Boston 1990 (2.Auflage)

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Zusammenhang der freien Reserve mit Schadenprozess, Prämien und Profit, erstellt nach [1], Seite 128 . . . . .	7
1.2	Darstellung der definierenden Funktion einer Band-Strategie (stationäre Dividenden-Strategie), erstellt nach [1], Seite 167 .	14
1.3	Zusammensetzung des um die Dividendenauszahlungen bereinigten Reserveprozesses $Q_t$ , erstellt nach [1], Seite 169 . . . . .	17
1.4	Mögliche Gestalt von $Y(t)$ im Fall einer Barriere-Strategie mit Barriere $a_0$ , wobei $Q_0 = a_0$ angenommen wurde, erstellt nach [1], Seite 170 . . . . .	18
5.1	Veranschaulichung einer Beweisidee . . . . .	65
6.1	Simulationsergebnis bei großem Zeithorizont zur Bestätigung der optimalen Schranke bei unendlichem Zeithorizont . . . . .	86
6.2	Veranschaulichung der geschätzten erwarteten Dividende für getestete Parameter $\alpha$ . . . . .	87
6.3	Vergleich der unter allen getesteten Parametern maximalen geschätzten erwarteten Dividende mit der geschätzten erwarteten Dividende bei der optimalen Schranke für unendlichen Zeithorizont . . . . .	89
6.4	Veranschaulichung der geschätzten erwarteten Dividende für getestete Parameter $\gamma$ . . . . .	90
6.5	Veranschaulichung der geschätzten erwarteten Dividende für getestete Parameter $\delta$ . . . . .	91
6.6	Veranschaulichung der verglichenen Barrieren mit den jeweils besten unter allen getesteten Parametern dargestellt . . . . .	93