Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.

http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.

http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

π

Faszination einer Naturkonstanten

Institut für Analysis und Scientific Computing

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger

durch

Sebastian Hiller

3040 Neulengbach, Cottage 281/3

September 2013

Datum	Unterschrift

Danksagung

Bevor sich die werte Leserin/der werte Leser in meine Arbeit stürzt, möchte ich noch ein paar Worte des Dankes verlieren:
Ein kleiner Absatz, der nicht einmal im Inhaltsverzeichnis aufscheint (Anm.: Warum eigentlich nicht?), aber dennoch von Herzen kommt und mir ein Anliegen war, geschrieben zu werden.

Zu Beginn möchte ich meinen Dank meinen Eltern aussprechen, die mir dieses (länger als geplante) Studium ermöglicht hatten und auch dafür Sorge trugen, dass ich es nicht aufgebe. Ohne sie wäre ich wahrscheinlich nie in die Situation gekommen, eine Diplomarbeit zu schreiben.

Ein weiteres, nicht minder herzliches „Danke!“ geht an meine Frau Andrea, die mich und meine Launen in den letzten Zügen des Studiums und während der Diplomarbeit ertragen musste. Ohne ihren guten Zuspruch, ihre Motivationspredigten und ihrer Fähigkeit, mir den Rücken frei zu halten, damit ich in Ruhe schreiben kann, hätte diese Arbeit deutlich länger gedauert. Des Weiteren war sie eine der guten Feen, die mich beim Korrekturlesen unterstützten.

Darüber hinaus möchte ich meinem Sohn Jakob danken, der diese Zeilen wahrscheinlich erst in ein paar Jahren selber lesen wird können. Ihm danke ich dafür, dass er die ersten Monate seines Lebens hauptsächlich mit seiner Mutter vorliebgenommen hat, weil ich mit Schreiben und Recherchieren beschäftigt war. Außerdem war er eine der kräftigsten Triebfedern für mich, diese Arbeit schnellstmöglich hinter mich zu bringen und somit meinem Studienabschluss wieder einen Schritt näher zu sein.

An dieser Stelle möchte ich auch meinem Hund Sandokan danken, der mich mit seinem teilnahmslosen Schnarchen oft daran erinnert hat, wieder einmal eine Pause einzulegen.

Der nächste Dank richtet sich an meine Kolleginnen, die mich selbstlos unterstützten, indem sie diese Arbeit teilweise mehrmals Korrektur gelesen hatten.

Nun, mein allerletztes „Dankeschön!“ gebührt meiner Betreuerin Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger, die mich von Anfang an unterstützt hat und mir stets Hilfestellungen gab. Selbst an Wochenenden wurden meine Mails umgehend beantwortet und ermöglichten mir somit ein rasches Weiterarbeiten.

„Existieren die Zahlen in der Wirklichkeit? Oder sind sie nur eine Projektion unserer Fantasie?
Dienen sie nur zur Darstellung und Erklärung der Realität und sind sie nur ein mehr oder weniger gelungener Versuch, die Welt nach reproduzierbaren Gesetzen zu beschreiben, oder leben sie ein eigenes Leben? [7]

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist Pi überhaupt?

Die Zahl Pi, mit dem griechischen Symbol π (der 16. Buchstabe des griechischen Alphabets) abgekürzt, wird auch *Kreiszahl* oder *Ludolphsche Zahl* genannt. Sie gibt das Verhältnis zwischen Umfang U und Durchmesser d eines Kreises an:

$$\pi = \frac{U}{d}$$

Ist nun der Durchmesser d gleich 1, so ist der Umfang gleich π und die Formel vereinfacht sich zu:

$$\pi = U$$

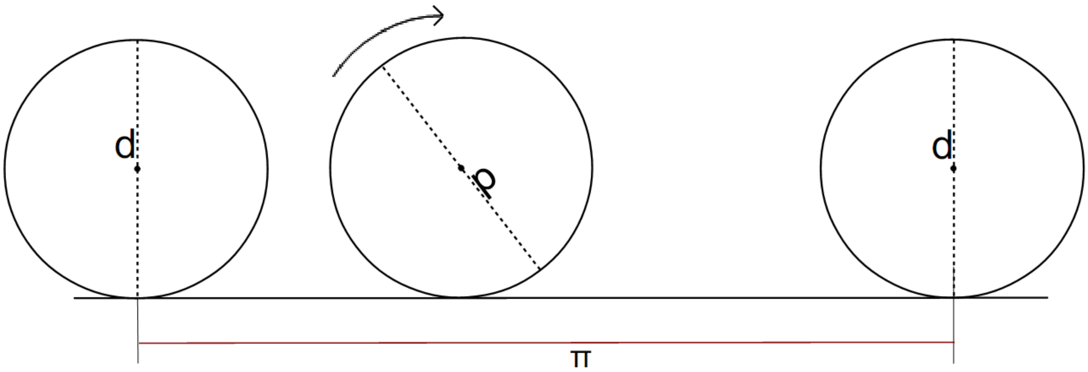


Abbildung 1: Kreisabrollung für d=1

Pi kommt allerdings nicht nur im Zusammenhang mit Kreise vor. Diese, wahrscheinlich berühmteste Zahl, findet sich auch in anderen Bereichen der Wissenschaft wieder, wo sie vielleicht nicht erwartet wird, wie zum Beispiel in der Quantenphysik oder der Kosmologie. [6]

Auf die Frage „Was ist Pi" hat David Blatner vom Betrachter abhängige Antworten:

„Mathematiker:	*Pi ist die Zahl, die die Beziehung zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser zum Ausdruck bringt.*
Physiker:	*Pi ist 3,1415927 plus/minus 0,000000005.*
Ingenieur:	*Pi ist ungefähr 3."* [5]

Diese Aussagen sind natürlich bis zu einem gewissen Grad ein Klischee, aber sie deuten

dennoch auf die Relevanz der Genauigkeit in den jeweiligen Bereichen hin.
Wie genau braucht man Pi eigentlich und wozu braucht man es?

1.1 Wozu Pi?

„Für die meisten Anwendungen der Kreiszahl ist es vollkommen ausreichend, die ersten, uns noch allen geläufigen Stellen 3,1415926… mit einzubeziehen. Viel mehr als 20 Stellen sind auch für die komplexesten technischen oder mathematischen Berechnungen nicht nötig.
Schon zehn Dezimalstellen von Pi reichen aus, um den Erdradius auf einen Millimeter genau zu berechnen, mit 15 Stellen lässt sich der Radius der Erdumlaufbahn in dieser Genauigkeit abdecken." [46]

Aus dieser Aussage lässt sich schließen, dass die Stellenjagd von Pi nicht darauf abzielt, noch genauere Resultate zu bekommen.
Warum wetteifern dennoch so viele Menschen mit ihren Computern darum, noch weitere Stellen als die bereits bekannten zu finden?
Die Motivation lässt sich wahrscheinlich am besten als eine Mischung aus Forschergeist, Neugierde und Ehrgeiz beschrieben.
Viele Fragen, die in den letzten Jahrhunderten, ja sogar schon Jahrtausenden gestellt wurden, wurden bereits beantwortet, wie zum Beispiel: „Ist Pi endlich?", „Ist Pi als Bruch darstellbar?" oder „Ist Pi algebraisch?". Die Antworten auf diese Fragen werden in dieser Arbeit behandelt.
Es gibt aber auch noch offene Fragen, die es zu beantworten gibt. Die aktuellste ist wahrscheinlich: „Ist Pi normal?" Diese ist der Frage „Lassen sich in den unendlich vielen Nachkommastellen von Pi irgendwelche Symmetrien oder Muster erkennen?" sehr ähnlich.
Mittlerweile ist Pi auf über 10 Billionen Nachkommastellen [50] bekannt und es sieht nicht danach aus, als ob man sich mit dieser Anzahl zufrieden geben würde.
Um nochmals auf das „Wozu?" zurückzukommen: Blatner erklärt die Motivation folgendermaßen:

„Das Bestreben, Pi zu verstehen, resultiert häufig weniger aus dem simplen Wunsch, immer mehr Stellen zu berechnen, als aus dem Verlangen herauszufinden, warum ein so einfacher Sachverhalt wie das Verhältnis zwischen einem Umfang und einem Durchmesser sich derart komplex auswachsen kann.“ [5]

Darüber hinaus vergleicht er die Suche nach Pi mit dem Besteigen des Mount Everest:

„Menschen tun es, weil er da ist.“ [5]

Die Suche nach den Stellen von Pi ist für Computer ein Belastungstest, der sowohl rasch verborgene Fehler oder Schwächen in der Software als auch in der Hardware aufzeigt. Natürlich ist auch dieser Wettstreit über die leistungsfähigsten Computersysteme eine Triebfeder für die Pi-Stellenjäger.
In dieser Arbeit möchte ich ein paar Einblicke in die Eigenschaften von Pi geben, einige Näherungsverfahren vorstellen, die Geschichte rund um Pi ein bisschen strukturieren und den Einfluss den Pi auf die Menschheit hat (der schon teilweise als „Kult“ bezeichnet werden kann), behandeln. [5]

1.2 Namensgebung

William James (1675-1749) verwendete in seiner *Synopsos Palmariorum Matheseos, or, a New Introducton to the Mathemaics* (Übersicht von Meisterstücken der Mathematik oder eine neue Einführung in die Mathematik) im Jahre 1706 erstmals den griechischen Buchstaben π (von dem griechischen Wort *periphereia,* dt. Umfang) für die Kreiszahl. Erst **Leonhard Euler** (1707-1783) sorgte dafür, dass dieser Name seither allgemein für das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises steht. Dieser verwendete „Pi“ nachweislich seit dem Jahre 1763. [10], [15]

2 Geschichte

Es ist nicht bekannt, wann und wer als erster erkannt hat, dass sich Durchmesser und Umfang eines Kreises im selben Verhältnis verändern, und auch die Kreisfläche auf diesem Verhältnis beruht.
Die erste bekannte Aufzeichnung davon findet sich in Ägypten. [5]

2.1 Ägypten

1858 erwarb der schottische Anwalt und Antiquar Alexander Henry Rhind, den nach ihm benannten „**Papyrus Rhind**". Dieser ist ein altägyptischer Papyrus, auf dem diverse Probleme der Mathematik abgehandelt sind. Er wurde wahrscheinlich kurz zuvor bei illegalen Grabungen im Gebiet Thebens gefunden. Dieser Papyrus wird auf etwa 1550 v. Chr. datiert. Der dort beschriebene Näherungswert von Pi ist $\frac{256}{81}$.

Abbildung 2: Papyrus Rhind

Ahmes, der als Verfasser des Papyrus Rhind gilt, beschrieb in seiner 48. Aufgabe ein Quadrat, dem ein Kreis einbeschrieben ist. Das Quadrat besteht aus 81 kleineren Quadraten (9×9) und der Kreis hat demnach den Radius von 9/2. Nun wird das große Quadrat in neun mittelgroße Quadrate aufgeteilt, die jeweils 3×3 groß sind. Wird von den vier mittelgroßen Quadraten, die an den Ecken stehen, jeweils die Hälfte abgeschnitten, also die Ecken des ganzen Quadrates, so entsteht ein Achteck. Dieses Achteck ist nur ein wenig kleiner als der Kreis.

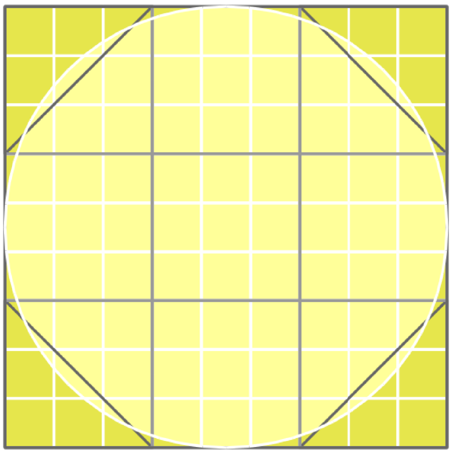


Abbildung 3: Kreis in quadratischem Gitter

Nun werden die Flächen berechnet und verglichen:

Das Achteck besteht aus fünf ganzen und vier halben mittleren Quadraten, was einen Flächeninhalt von $A_{8\text{eck}} = 9 \cdot (5+4/2) = 63\,QE$ ergibt. Nachdem der Kreis geringfügig größer ist als das Achteck, hat Ahmes noch 1 dazu gezählt und den Flächeninhalt des Kreises mit $A_{Kreis} = 64\,QE$ angegeben, was einem Quadrat mit der Seitenlänge 8 entspricht.

Durch diese Überlegung wird der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 8 dem eines Kreises mit dem Durchmesser 9 gleichgestellt.

Wird nun mit der damals noch nicht bekannten Formel die Zahl berechnen, die dem π entspricht, dann ergibt sich mit dem Kreisradius 9/2:

$$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$$
$$(9/2)^2 \cdot \pi \approx 8^2$$
$$\pi \approx \frac{8^2}{(9/2)^2} = \left(\frac{16}{9}\right) \approx 3{,}160494...$$

Dieser Wert hat einen relativen Fehler von etwa 0,6%. Dies ist für die damalige Zeit in der Tat bemerkenswert. [29]

2.2 Römer

Die Römer verwendeten für Pi stur den Wert $3\frac{1}{8}$ obwohl sie wussten, dass $3\frac{1}{7}$ genauer ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass ein Achtel einfacher zu bestimmen ist (die Hälfte der Hälfte einer Hälfte) als ein Siebentel. [5]

„Tatsächlich findet sich in einem römischen Vertrag über Landvermessung die folgende Vorschrift zur Quadratur des Kreises: «Unterteile den Umfang eines Kreises in vier Abschnitte und mache einen Abschnitt zur Seite eines Quadrates; dieses Quadrat hat die gleiche Fläche wie der Kreis.» Und das würde heißen, $\pi=4$.“ [5]

2.3 Griechen (550 v. Chr.-200 n. Chr.)

Anaxagoras von Klazomenai (~500-428 v. Chr.) war der erste Grieche, der sich mit dem Zusammenhang der Flächen von Kreis und Quadrat beschäftigte, war damit aber nicht sehr erfolgreich. Er behauptete, eine Methode entwickelt zu haben, mit der er ein Quadrat mit der gleichen Fläche eines gegebenen Kreises konstruieren kann.

Einige Zeit später versuchten zwei Zeitgenossen des **Sokrates** (469-399 v. Chr.), **Antiphon** und **Bryson aus Heraklea**, die Fläche eines Kreises zu bestimmen und zwar durch einbeschriebene Sechsecke, deren Seitenanzahl stets verdoppelt wurde. Sie waren der Meinung, dass sie damit *„früher oder später“* [5] genau den Kreis erhalten würden.

Nachdem zunächst Antiphon die Fläche des einbeschriebenen Vielecks berechnet hatte, revolutionierte Bryson die Approximation, indem er ein Vieleck umschrieb und sich somit auch eine obere Schranke berechnete. *„[...]wahrscheinlich wurde hier erstmals ein Ergebnis mittels oberer und unterer Begrenzungen bestimmt.“* [5]

Es wurden aber nicht sehr viele Stellen berechnet, da dies für die damalige Zeit eine sehr komplizierte Vorgehensweise war.

Erst gut 200 Jahre später wurde dieses mathematische Problem wieder aufgegriffen, und zwar von Archimedes. [5]

2.4 Archimedes

Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr.), einer der bedeutendsten Wissenschafter der damaligen Zeit, nützt die Exhaustionsmethode von Antiphon und Bryson. Er widmete sich der Umfangsberechnung des Kreises, und versuchte diese durch einbeschriebene und umschriebene Vielecke zu approximieren. Er begann mit regelmäßigen 6-Ecken, und verdoppelte fortlaufend die Seitenanzahl. Nach viermaliger Verdoppelung erhielt er zwei 96-Ecke, die jeweils dem Kreis einbeschrieben bzw. umschrieben sind. Somit konnte er folgende Abschätzung angeben:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Als gemittelter Wert ergibt sich: $\pi \approx 3{,}1419$ [5]

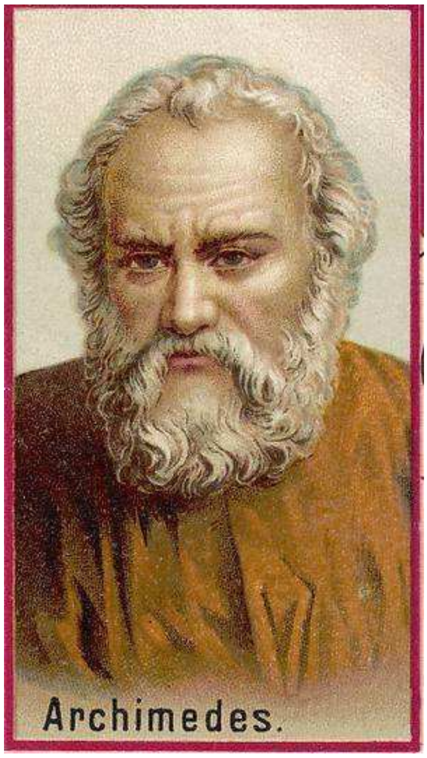


Abbildung 4: Archimedes

2.5 China (100-700 n. Chr.)

„Die Chinesen des ersten Jahrtausends hatten zwei mathematische Vorteile gegenüber dem Rest der Welt. Erstens verfügten sie über die Dezimalschreibweise, während sich die meisten anderen Menschen mit Brüchen behelfen mussten. Zweitens verwendeten sie ein Symbol für Null.“ [5]

Die Chinesen verwendeten seit dem 12. Jahrhundert vor Christus den Wert π=3. Erst zu Beginn des 2. Jahrunderts nach Christus wurde von **Ch'ang Hong** die Näherung $\pi=\sqrt{10}$ aufgestellt, was etwa 3,162 entspricht. Er notierte kurz vor seinem Tod das Verhältnis (Umfang eines Kreises)² zu (Umfang des einbeschriebenen Quadrates)² sei 5/8. Bei dem Einheitskreis (mit d=1) ergibt sich daraus $\pi^2/16=5/8$. Löst man diese

Gleichung auf, ergibt sich für Pi der Wert $\sqrt{10}$. Wahrscheinlich war die einfache Schreibweise der Grund dafür, dass sich dieser Wert relativ lange im asiatischen Raum hielt.

Gute hundert Jahre später stellte **Wang Fau** (229-267) fest, dass ein Kreis mit dem Umfang 142 den Durchmesser 45 hat. Wie er auf diese Werte gekommen ist, ist nicht ganz klar, jedoch ergibt sich aus ihnen für Pi der Wert 3,156.

263 veröffentlichte der Chinese **Liu Hui** ein Buch, in dem er seine Exhaustionsmethode darlegte, bei der er mittels eines einbeschriebenen 192-Ecks herausfand, dass folgende Abschätzung gelten müsse: $3{,}141024 < \pi < 3{,}142704$. (Anm.: In der Literatur bleibt das Zustandekommen des oberen Wertes offen.) Später ermittelte er den Näherungswert 3,1416 für Pi mittels eines 3072-Eck.

Im fünften Jahrhundert berechnete der Astronom **Tsu Ch'ung Chi** mit seinem Sohn **Tsu Keng Chi** einbeschriebene 24576-Ecke. Diese Berechnungen führten zu dem Näherungswert 355/113, was etwa 3,1415969 entspricht. Dieser Wert weicht lediglich um 10^{-7} von dem exakten Wert für Pi ab. [5]

2.6 Ludolf van Ceulen

Ludolf van Ceulen (1540-1610) war ein in Deutschland geborener Fechter und Mathematiker, der den Großteil seines Lebens in den Niederlanden verbrachte. Dort hat er sich auch mit der Kreiszahl beschäftigt und war der Erste, der 35 Stellen von Pi berechnete. Ihm zu Ehren wurde Pi bis ins 19. Jahrhundert auch als „Ludolfsche Zahl“ bezeichnet. Heute wird dieser Name nur noch sehr selten verwendet. Ludolf van Ceulen verwendete einen Großteil seines Lebens damit, diese 35 Stellen zu berechnen und ließ sich diese auch in seinen Grabstein gravieren.

Van Ceulen verwendete für seine Berechnungen die archimedische Methode (vergleiche Kapitel 5.1 Exhaustionsmethode von Archimedes). Er rechnete mit diesem Prinzip bis zu einem 2^{62}-Eck, einem Polygon mit etwa 4 Trillionen Seiten. [27]

2.7 arctan-Formel

John Machin, der um 1700 in London lebte, entdeckte 1706 die bekannte arctan-Formel, für die Zahl π:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Mit Hilfe der Taylorentwicklung des Arkustangens ergibt sich eine schnell konvergierende Reihe, die Pi ergibt. Mit dieser Methode hat Machin 100 Stellen von Pi berechnet. Die Aproxximation mittels dieser Formel wird in Kapitel *5.4 arctan-Formel* noch genauer behandelt. [23]

3 Chronologie

ca. 2000 v .Chr.	Die Babylonier verwenden $\pi = 3\frac{1}{8}$ Die Ägypter verwenden $\pi = (256/81) = 3{,}1605$	
ca. 1550 v. Chr.	Papyrus Rhind	
ca. 1100 v. Chr.	Die Chinesen verwenden $\pi = 3$.	
ca. 550 v. Chr.	Das Alte Testament lässt auf einen Wert von = 3 schließen.	Sokrates 469-399
ca. 434 v. Chr.	Anaxagoras versucht, den Kreis zu quadrieren.	
ca. 430 v. Chr.	Antiphon und Bryson stellen das Exaustionsprinzip auf.	
3. Jhdt. v. Chr.	Archimedes verwendet ein 96-Eck und kam auf $3\,^{10}/_{71} < \pi < 3\,^{1}/_{7}$.	Archimedes 287-212
0	Christi Geburt	
1220	Leonardo von Pisa (Fibonacci) ermittelt: $\pi = 3{,}141818...$	
1596	Ludolph van Ceulen berechnet Pi auf 32 Stellen.	L. v. Ceulen 1540-1610
1610	Van Ceulen erweitert seine Berechnungen auf 35 Stellen.	
1655/1656	John Wallis findet ein unendliches rationales Produkt für Pi.	
1671	James Gregory entdeckt die Arkustangens-Reihe.	William James 1675-1749; John Machin 1680-1751
1706	William James verwendet erstmals den griechischen Buchstaben π. John Machin berechnet Pi auf 100 Stellen.	Leonhard Euler 1707-1783
1748	Leonhard Euler veröffentlicht eine Schrift, die die Eulersche Formel beinhaltet.	
1761	Johann Heinrich Lambert beweist die Irrationalität von Pi.	
1763	Euler verwendet den Buchstaben π und sorgt damit für eine einheitliche Verwendung.	
1775	Euler vermutet, dass Pi transzendent ist.	
1855	500 Nachkommastellen werden von Richter berechnet.	Ferdinand Lindemann 1852-1939
1858	Der Papyrus Rhind wird von Henry Rhind erstanden.	
1873	Charles Hermite beweist die Transzendenz von e.	David Hilbert 1862-1943
1882	Ferdinand von Lindemann beweist die Transzendenz von Pi.	
1893	David Hilbert findet eine Vereinfachung des Beweises von Lindemann.	Ivan Niven 1915-1999
1940	Computer betreten die Pi-Bühne.	
1947	D. F. Ferguson und JH. W. Wrench errechnen 808 Stellen. Ivan Niven findet einen einfachen Beweis für die Irrationalität von Pi.	
1949	G.W. Reitwieser ermittelt 2035 Stellen.	
1954	S.C. Nicholson und J. Jeenel berechnen 3089 Stellen.	
1958	F. Genuis: 10 000 Stellen	
1961	Daniel Shanks und John Wrench ermitteln 100 200 Stellen.	
1966	Der IBM 7030 berechnet 250 000 Stellen.	
1967	Der CDC 6600 berechnet 500 000 Stellen.	
1973	Jean Guilloud und M. Boyer ermitteln 1 000 000 Stellen.	
1983	Y. Tamura und Y. Janada errechnen 16 Millionen Stellen.	
1995	Die Brüder Chudnovky kommen auf eine Milliarde Stellen.	
. . .		

Anm.: Diese Chronik entstand in Anlehnung an jene von Blatner. [5]

4 Eigenschaften

4.1 Irrationalität

Die Menge der reellen Zahlen besteht aus zwei echten Teilmengen, zum einen aus den *rationalen Zahlen* und zum anderen aus den *irrationalen Zahlen* . Erstere sind jene, die sich als Bruch darstellen lassen. Dazu gehören trivialerweise die ganzen Zahlen, aber auch endliche Dezimalzahlen (z.B.: $1/4 = 0{,}25$) oder unendliche, aber periodische Zahlen (z.B.: $1/3 = 0{,}333...$ oder $22/7 = 3{,}142857142857...$). [3]
Die irrationalen Zahlen sind jene, die sich nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lassen. Die Konsequenz daraus ist, dass ihre Dezimalstellen weder enden noch sich wiederholen. Die erste Zahl, bei der dies bewiesen wurde, ist $\sqrt{2}$. Weitere irrationale Zahlen sind e (die Eulersche Zahl), $\sqrt{3}$ und kaum überraschend π.
Schon die alten Griechen wussten über die Existenz solcher Zahlen Bescheid und **Euklid** bewies im 4. Jahrhundert vor Christus die Irrationalität von $\sqrt{2}$ in seinem bekannten Werk *Elemente*. 1761 zeigte **Johann Heinrich Lambert** die Irrationalität der Zahl π. [44]
Bevor wir auf den Beweis der Irrationalität von Pi eingehen, soll noch der Beweis von Euklid, mit dem die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 gezeigt wurde, angeführt werden. Das Bemerkenswerte an diesem Beweis ist, dass er als erster Widerspruchsbeweis in der Geschichte der Mathematik gilt.
Der Widerspruchsbeweis, der auch als indirekter Beweis oder „Reduktio as absurdum“ bekannt ist, ist eine Beweistechnik der Logik. Sie kann nur bei zweiwertiger Logik angewendet werden, das bedeutet, dass es nur zwei Möglichkeiten der Eigenschaften gibt – in der Mathematik wird dafür auch die Phrase „tertium non datur“ verwendet. Ein einfaches Beispiel dafür wäre die Aussage: Eine Zahl ist entweder durch 2 teilbar oder nicht – es gibt keine dritte Möglichkeit.
Der indirekte Beweis zeigt nun nicht direkt, was bewiesen werden soll, sondern es wird das Gegenteil von dem zu Beweisenden angenommen, und dies wird zu einem Widerspruch geführt. Dadurch dass es nur zwei Möglichkeiten gibt, muss daher das Gegenteil zutreffen. Somit wurde indirekt das Gewünschte bewiesen.

4.1.1 Euklids Beweis der Irrationalität der $\sqrt{2}$

Da die Beweisführung mittels Widerspruchsbeweis die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 zeigen soll, wird angenommen, dass $\sqrt{2}$ rational ist und diese Aussage wird zu einem Widerspruch geführt.
Es wird also angenommen, dass $\sqrt{2}$ als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellbar ist:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Weiters wird angenommen, dass p und q teilerfremd sind, das bedeutet, dass der Bruch schon weitestmöglich gekürzt wurde.
Quadriert man nun diese Gleichung, ergibt sich daraus, dass das Quadrat des Bruches gleich 2 ist:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

Dies lässt sich zu

$$p^2 = 2q^2$$

umformen.

$2q^2$ ist auf Grund des Faktors 2 eine gerade Zahl, somit muss auch p^2 eine gerade Zahl sein. Aus dieser Überlegung folgt außerdem, dass p eine gerade Zahl sein muss. Somit kann p auch durch $p = 2r$ dargestellt werden, wobei r eine ganze Zahl ist.
Setzt man diesen Zusammenhang nun in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

Dieser Ausdruck durch 2 dividiert ergibt:

$$q^2 = 2r^2$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie zuvor $p^2 = 2q^2$, somit kann mit der gleichen Argumentation gezeigt werden, dass sowohl q^2 und demnach q an sich eine gerade Zahl ist.
Nachdem nun sowohl p als auch q gerade Zahlen und somit beide durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zu der Annahme, dass p und q teilerfremd sind.
Nachdem wir in diesem Beweis, der die Rationalität von $\sqrt{2}$ beweisen soll, einen Widerspruch haben, folgt daraus direkt, dass das Gegenteil stimmen muss. Somit wurde indirekt bewiesen, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. [20]

4.1.2 Beweis der Irrationalität von π

Der hier angeführte Beweis geht auf **Ivan Niven** (1915-1999) zurück. Niven, ein US-amerikanischer-kanadischer Mathematiker, erbrachte 1947 den Beweis von der Irrationalität der Zahl Pi. Auch dieser Beweis ist ein Widerspruchsbeweis.

Die Beweisführung im Anschluss ist sehr stark an jener von *www.herldermann-verlag.de* [41] orientiert.

Wir nehmen an, π sei rational und darstellbar durch

$$\pi = \frac{a}{b} \tag{1}$$

mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Weiters definieren wir zu jeder natürlichen Zahl *n* zwei reelle Funktionen f_n und F_n durch

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n (a-bx)^n}{n!} \\ F_n(x) &= f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^j f_n^{(2j)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei bezeichnet $f_n^{(2j)}$ die *(2j)*-te Ableitung von f_n.

Für $0 \leq j < n$ verschwindet die *j*-te Ableitung von f_n an den Stellen 0 und π. Um das zu erkennen, reicht es, die erste Ableitung von $x^n (a-bx)^n$ zu bilden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n (a-bx)^n &= n x^{n-1} (a-bx)^n + n (a-bx)^{n-1} (-b) x^n \\ &= n \{ x^{n-1} (a-bx)^n - b x^n (a-bx)^{n-1} \} \\ &= n \{ (ax-bx^2)^{n-1} (a-bx) - bx (ax-bx^2)^{n-1} \} \\ &= n (ax-bx^2)^{n-1} (a-2bx) \\ &= n x^{n-1} (a-bx)^{n-1} (a-2bx) \end{aligned} \tag{3}$$

Daraus ist ersichtlich, dass auch die höheren Ableitungen von f_n bis $j < n$ aus Summanden bestehen, die jeweils den Faktor $ax - bx^2$ enthalten. Dieser verschwindet für $x=0$ und $x=\pi=\frac{a}{b}$.

Für $n \leq j \leq 2n$ ist die *j*-te Ableitung von f_n an den Stellen 0 und π ganzzahlig. Um das zu erkennen reicht (3) nicht aus, dazu müssen wir $f_n(x)$ nach dem Binomialsatz entwickeln:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\left(a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}bx + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2n^2 - \cdots + (-1)^n b^n x^n\right) \tag{4}$$

Setzten wir nun zur Abkürzung $c_{n+k} = (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, so erhalten wir

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\left(c_n x^n + c_{n+1}bx^{n+1} + c_{n+2}bx^{n+2} + \cdots + c_{2n}b^n x^{2n}\right) \tag{5}$$

Dabei sind alle c_i, mit $n \leq i \leq 2n$, ganze Zahlen. Für die erste bis n-te Ableitung der so umgeformten Funktion $f_n(x)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f_n^{(1)}(x) &= \frac{1}{n!}\left(nc_n x^{n-1} + (n+1)c_{n+1}bx^n + (n+2)c_{n+2}bx^{n+1} + \cdots + (2n)c_{2n}b^n x^{2n-1}\right)\\
f_n^{(2)}(x) &= \frac{1}{n!}\Big(n(n-1)c_n x^{n-2} + (n+1)nc_{n+1}bx^{n-1} + (n+2)(n+1)c_{n+2}bx^n + \cdots\\
&\qquad \cdots + (2n)(2n-1)c_{2n}b^n x^{2n-2}\Big)\\
&\vdots\\
f_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!}\Big(n!c_n + [(n+1)n\cdots 2]c_{n+1}bx^1 + [(n+2)(n+1)\cdots 3]c_{2+n}bx^2 + \cdots\\
&\qquad \cdots + [(2n)(2n-1)\cdots(n+1)]c_{2n}b^n x^n\Big)\\
&= \frac{n!}{n!}c_n + \frac{n+1!}{n!1!}c_{n+1}bx + \frac{(n+2)!}{n!2!}c_{n+2}b^2x^2 + \cdots + \frac{(2n)!}{n!n!}c_{2n}b^n x^n\\
&= c_n + \binom{n+1}{1}c_{n+1}bx + \binom{n+2}{2}c_{n+2}b^2x^2 + \cdots + \binom{2n}{n}c_{2n}b^n x^n
\end{aligned} \tag{6}$$

Weil die Koeffizienten $\binom{n+k}{k}c_{n+k}$ mit $0 \leq k \leq n$ ganze Zahlen sind, ist $f_n^{(n)}$ ein Polynom in x mit ganzzahligen Koeffizienten. Es ist $f_n^{(n)}(0) = c_n \in \mathbb{Z}$ und auch $f_n^{(n)}(\pi)$ ist ganzzahlig, denn es gilt

$$f_n^{(n)}\left(\tfrac{a}{b}\right) = c_n + \binom{n+1}{1}c_{n+1}a + \binom{n+2}{2}c_{n+2}a^2 + \cdots + \binom{2n}{n}c_{2n}a^n \quad \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Für die höheren Ableitungen $f^{(j)}$ mit $n < j \leq 2n$ stellen sich $f_n^{(j)}(0)$ und $f_n^{(j)}(\pi)$ ebenfalls als ganzzahlig heraus. Es ist

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \binom{n+1}{1}c_{n+1}b + 2\binom{n+2}{2}c_{n+2}b^2x + \cdots + n\binom{2n}{n}c_{2n}b^n x^{n-1}\\
f^{(n+2)}(x) &= 2\binom{n+2}{2}c_{n+2}b^2 + 6\binom{n+3}{3}c_{n+3}b^3x + \cdots + n(n-1)\binom{2n}{n}c_{2n}b^n x^{n-2}\\
&\vdots\\
f^{(2n)}(x) &= n!\binom{2n}{n}c_{2n}b^n
\end{aligned} \tag{8}$$

und folglich

$$f^{(n+k)}(0) = k!\binom{n+k}{k} c_{n+k} b^k = \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k} b^k \quad \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2\dots, n. \tag{9}$$

Um auch $f_n^{(j)}(\pi)$ für $n < j \leq 2n$ zweifelsfrei als ganzzahlig nachzuweisen, muss man die $f^{(n+k)}$-te Ableitung, $k=1,2,\dots,n$, die in (8) nicht notiert wurde, genau hinschreiben. Sie lautet, wenn man die für $i=0,1,2,\dots,n-k$ gültige Identität

$$\frac{(k+i)!}{i!}\binom{n+k+i}{k+i} = \frac{(k+i)!}{i!} \cdot \frac{(n+k+i)!}{(k+i)!(n+k+i-(k+i))!} = \frac{(n+k+i)!}{i!n!} \tag{10}$$

berücksichtigt,

$$\begin{aligned} f^{(n+k)}(x) = \frac{(n+k+0)!}{0!n!} c_{n+k} b^k &+ \frac{(n+k+1)!}{1!n!} c_{n+k+1} b^{k+1} \\ &+ \frac{(n+k+2)!}{2!n!} c_{n+k+2} b^{k+2} x^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{(n+k+i)!}{i!n!} c_{n+k+i} b^{k+i} x^i &+ \cdots + \frac{(2n)!}{(n-k)!n!} b^n x^{n-k} \end{aligned} \tag{11}$$

Hierin sind die Faktoren $\frac{(n+k+i)!}{i!n!}$, wie aus (10) hervorgeht, ganze Zahlen. Man erhält nun für $f^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)(\pi) = f^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ die Summe

$$f^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n+k+i)!}{i!n!} c_{n+k+i} b^{k+i} \frac{a^i}{b^i} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n+k+i)!}{i!n!} c_{n+k+i} b^k a^i \quad \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Schließlich bleibt noch festzuhalten, dass die Ableitungen von f_n für $j > 2n$ vollständig verschwinden, denn $x^n(a-bx)^n$ ist ein Polynom in *x* vom Grad 2*n*.
Damit haben wir folgendes wesentliche Zwischenergebnis: Die Funktion f_n und auch alle ihre Ableitungen sind an den Stellen 0 und $\pi = \frac{a}{b}$ ganzzahlig. Aus diesem Grunde ist auch die Funktion F_n an den Stellen 0 und $\pi = \frac{a}{b}$ ganzzahlig.

Aus (2) ist ohne Umstände die Gültigkeit der Gleichung $F_n + F_n^{(2)} = f$ abzulesen. Man beachte dabei, dass $f^{(2n+2)}$ verschwindet. Die Gleichung zieht, wie man schnell nachrechnet, $(F_n^{(1)} \cdot \sin - F_n \cdot \cos)^{(1)} = f_n \cdot \sin$ nach sich. Das ergibt nunmehr

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx &= \left[F_n^{(1)}(x)\sin(x)-F_n(x)\cos(x)\right]_0^\pi \\ &= F_n^{(1)}(\pi)\sin\pi-F_n(\pi)\cos\pi-f_n^{(1)}(0)\sin 0+F_n(0)\cos 0 \\ &= F_n^{(1)}(\pi)\cdot 0-F_n(\pi)\cdot(-1)-F_n^{(1)}(0)+F_n(0)\cdot 1 \\ &= F_n(0)+F_n(\pi)\end{aligned} \tag{13}$$

Nach unserem Zwischenergebnis ist dieses Integral eine ganze Zahl. Andererseits folgt aus $0 \le x \le \pi = \frac{a}{b}$ die Ungleichung $0 \le bx \le a$ und daraus $0 \le a-bx \le a$. Mithin gilt

$$0 \le f_n(x) \le \frac{\pi^n a^n}{n!}, \tag{14}$$

woraus sich für das Integral (13) die Abschätzung

$$\begin{aligned}0 \quad &\le \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx = \left|\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx\right| \\ &\le \int_0^\pi |f_n(x)||\sin(x)|\,dx \le \frac{\pi^n a^n}{n!}\int_0^\pi |\sin(x)|\,dx = \frac{2\pi^n a^n}{n!}\end{aligned} \tag{15}$$

ergibt. Weil $n!$ schneller als jede Potenz $u^n, u>0$, wächst, kann der Ausdruck $\frac{2\pi^n a^n}{n!}$ für hinreichend großes n unter jede beliebige positive Schranke gedrückt, insbesondere also kleiner als 2 gemacht werden.

Zugleich ist $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{2b}\right)^n\left(a-b\frac{a}{2b}\right)^n \sin\frac{a}{b} > 0$, sodass wegen der Stetigkeit von $f_n \cdot \sin$

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx > 0 \tag{16}$$

gesichert ist. Zusammen mit (15) (bei hinreichend großen n) haben wir damit einen Widerspruch gegen die Ganzzahligkeit des Integrals $\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx$ erlangt. ■

Damit wurde widerlegt, dass π eine rationale Zahl ist. Nachdem es keine dritte Möglichkeit gibt, muss π eine irrationale Zahl sein, und genau das wollten wir zeigen. [41]

4.2 Transzendenz

Es gibt in der Menge der reellen Zahlen eine weitere Art der Unterteilung. Eine reelle Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie als Lösung einer algebraischen Gleichung beliebigen endlichen Grades auftreten kann. Anders formuliert: Eine Zahl ist genau dann algebraisch, wenn sie Nullstelle einer Gleichung der Form

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

für $n \geq 1$ mit ganzzahligen oder allgemein rationalen Koeffizienten a_n ist.
Die meisten Zahlen sind algebraisch. $\sqrt{2}$ ist zum Beispiel so eine algebraische Zahl, da sie unter anderem Lösung der Gleichung $x^2 - 2 = 0$ ist. Jene Zahlen, die diese Bedingung nicht erfüllen, heißen *transzendente Zahlen*.
Mittlerweile sind einige Zahlen bekannt, deren Transzendenz bewiesen ist. Neben π sind auch die Eulersche Zahl *e*, $2^{\sqrt{2}}$, oder $\ln(a)$ für ein rationales, positives $a \neq 1$ als transzendente Zahlen bewiesen. [34]

4.2.1 Transzendenz der Zahl Pi

Wir wollen uns jetzt mit der Transzendenz von Pi beschäftigen.
Dass Pi transzendent ist, hat schon **Charles Hermite** angenommen, beweisen konnte es jedoch erst **Ferdinand Lindemann** (1852-1939). Der 1882 erbrachte Beweis ist heute nur mehr sehr schwer nachzuvollziehen. [5]
1893 konnte sein Schüler **David Hilbert** (1862-1943) einen einfacheren Beweis erbringen.
Der nach Hilbert benannte Beweis ist im Anhang zu finden. [42]

4.3 Normalität

Eine Zahl wird als *normal* bezeichnet, wenn in ihren Nachkommastellen alle Ziffernblöcke mit der gleichen relativen Häufigkeit vorkommen. Ist eine Zahl normal, so tritt zum Beispiel die Ziffer 3 mit der Wahrscheinlichkeit 1/10 und der Ziffernblock 135 mit der Wahrscheinlichkeit 1/1000 auf.
Wenn in den Nachkommastellen lediglich alle Ziffern (0, 1, ..., 9) gleich oft

vorkommen, so heißt diese Zahl *einfach normal*.

Dieses Kapitel ist an dem gleichnamigen Abschnitt des Buches „π“ von Arndt und Haenel [2] orientiert.

Natürlich ist die Frage nach Normalität nur bei unendlich langen Zahlen sinnvoll und interessant. Nachdem Pi nachgewiesenerweise irrational ist und daher unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen hat, liegt die Frage nach der Normalität auf der Hand.

Bis dato wurde weder bewiesen, dass Pi normal ist noch, dass es nicht normal ist. Ebenso wurde noch nicht gezeigt, dass einer der beiden Beweise unmöglich wäre.

Ist Pi normal, dann kommen alle Zahlen und Ziffernblöcke gleich oft vor, ist es nicht normal, so sind einzelne Ziffern oder ganze Ziffernblöcke häufiger als andere, zum Beispiel kommt dann die Ziffer 0 öfter vor als die Ziffer 5.

Bei allen normalen Zahlen gibt es Bereiche, in denen sich einzelne Ziffern oder Ziffernblöcke häufen. Dies scheint auf den ersten Blick der Normalität zu widersprechen, jedoch geht es bei der Eigenschaft um die gesamte (unendliche) Zahl und nicht um eine kleine, endliche Folge in den Nachkommastellen.

Eine Möglichkeit, die Frage der Normalität von Pi zu klären, ist jene, die bekannten Stellen von Pi zu analysieren. Somit kann eine Statistik erstellt werden, welche Ziffern und Ziffernblöcke wie oft vorkommen. Dies kann aber wiederum nur im Endlichen passieren und ist somit kein definitiver Beweis für oder gegen die Normalität von Pi. Es können durch diese Analyse lediglich Wahrscheinlichkeiten angegeben werden.

Betrachtet man die ersten 6 Milliarden Stellen von π, so ergibt sich folgende Verteilung:

0	erscheint	599.963.005	mal
1	erscheint	600.033.260	mal
2	erscheint	599.999.169	mal
3	erscheint	600.000.243	mal
4	erscheint	599.957.439	mal
5	erscheint	600.017.176	mal
6	erscheint	600.016.588	mal
7	erscheint	600.009.044	mal
8	erscheint	599.987.038	mal
9	erscheint	600.017.038	mal

[12]

In dieser Verteilung lassen sich keine ungewöhnlichen Abweichungen erkennen. Das ist aber noch kein Beweis für die Normalität von Pi.

Klar ist auch, dass bei der Wahl eines kleineren Bereiches die Anzahl nicht so gleichverteilt sein wird. Bei den ersten 20 Stellen ergibt sich folgende Verteilung:

0	erscheint	0	mal
1	erscheint	2	mal
2	erscheint	2	mal
3	erscheint	3	mal
4	erscheint	2	mal
5	erscheint	3	mal
6	erscheint	2	mal
7	erscheint	1	mal
8	erscheint	2	mal
9	erscheint	3	mal

Erwartet würde, dass jede Ziffer zweimal vorkommt, jedoch ist diese Stichprobe eindeutig zu klein, um relevante Aussagen machen zu können.

5 Approximation

Der Begriff „Approximation“ kommt von dem lateinischen Wort „proximus“, welches soviel wie „der Nächste“ bedeutet. Somit lässt sich das Wort „Approximation“ als Synonym für „Näherung“ verstehen.

Approximationen werden verwendet, um sich dem Ergebnis von Gleichungen, die nicht einfach zu lösen sind, zu nähern oder um ein explizit gegebenes mathematisches Objekt aus einfachen Gebilden zu approximieren.

Im Folgenden werden Approximationen vorgestellt, die sich mehr oder weniger schnell dem tatsächlichen Wert von Pi nähern. [18]

5.1 Exhaustionsmethode von Archimedes

Archimedes nützte eine Methode, die zuvor noch nicht angewendet wurde. Diese Methode der Pi-Näherung blieb auch bis ins 17. Jahrhundert unübertroffen.

Archimedes umschrieb einem 6-Eck einen Kreis, der gleichzeitig Inkreis eines weiteren 6-Ecks war.

Er verdoppelte 4 mal die Seitenanzahl der beiden regelmäßigen 6-Ecke und erhielt somit zwei 96-Ecke. Diese stellten die obere und untere Schranke der Zahl Pi dar.

Grundlage dieser Berechnungen war der Lehrsatz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Archimedes ging davon aus, dass der Kreis den Radius 1 hat (Einheitskreis). Betrachtet man nun einen Sektor des Kreises, der durch zwei benachbarte Punkte des einbeschriebenen 6-Ecks begrenzt ist, so kann durch die Skizze auf der folgenden Seite

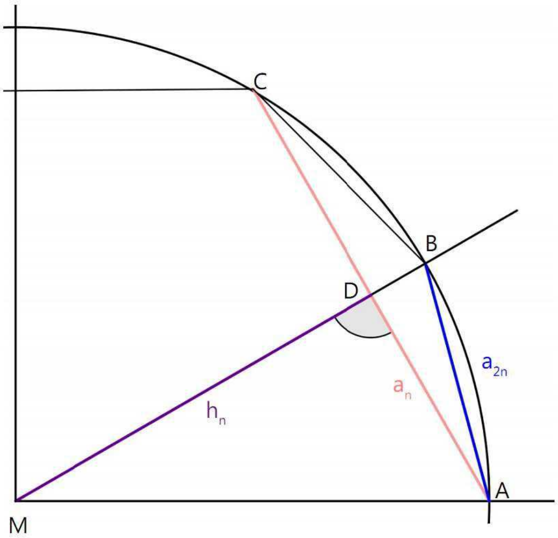


Abbildung 5: einbeschriebenes 6-Eck

auf die Zusammenhänge

$$\underline{\Delta\, MAD:}$$

$$h_n^2 = 1^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$

$$h_n = \frac{1}{2}\sqrt{4-a_n^2}$$

$$\underline{\Delta\, ABD:}$$

$$a_{2n}^2 = (1-h_n)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$

$$a_{2n}^2 = 1-2\cdot h_n + h_n^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$

$$a_{2n}^2 = 1-\sqrt{4-a_n^2} + 1^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$

$$a_n^2 = 2-\sqrt{4-a_n^2}$$

$$a_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$$

geschlossen werden.

Durch die nun bekannte Länge a_{2n} kann nun der Umfang des 2n-Ecks berechnet werden:

$$u_{2n} = 2n\cdot\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$$

Für ein umbeschriebenes n-Eck lässt sich analog Folgendes überlegen:

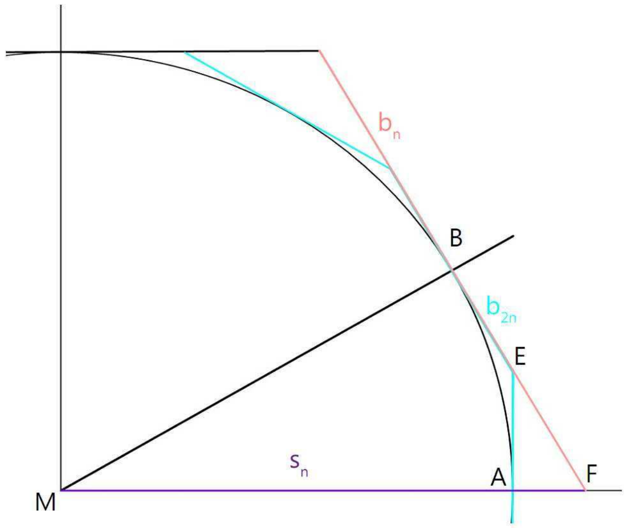


Abbildung 6: umbeschriebenes 6-Eck

$$\underline{\Delta\, MFB:}$$

$$s_n^2 = 1^2 + \left(\frac{b_n}{2}\right)^2$$

$$s_n = \frac{1}{2}\sqrt{4+b_n^2}$$

$$\underline{\Delta\, AFE:}$$

$$\left(\frac{b_{2n}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b_n}{2} - \frac{b_{2n}}{2}\right)^2 - (s_n - 1)^2$$

$$b_{2n} = 2\sqrt{\left(\frac{2}{b_n}\right)^2 + 1} - \frac{4}{b_n}$$

Im Falle des umbeschriebenen n-Ecks kann nun durch die bekannte Länge b_{2n} der Umfang angegeben werden:

$$u_{2n} = 2n \cdot \left(2\sqrt{\left(\frac{2}{b_n}\right)^2 + 1} - \frac{4}{b_n}\right)$$

Mit Hilfe dieser beiden Formel des inneren bzw. äußeren n-Ecks kann man nun die beiden Umfänge berechnen. Mit jedem weiteren Schritt nähern sich die beiden Werte einander an. Der Zahlenwert, der bis ins Unendliche zwischen diesen beiden Umfängen liegen wird, ist der Umfang des Kreises, dem diese Vielecke um- bzw. einbeschrieben wurden. Ist der Radius des Kreises gleich 1, (so wie in dieser Rechnung angenommen) so ergibt sich ein Umfang von 2π. [16]

In der untenstehenden Tabelle ist die Exhaustionsmethode für ein einbeschriebenes Vieleck dargestellt. Abzulesen sind die Anzahl der Ecken, ausgehend von einem 6-Eck, dessen Seitenanzahl immer verdoppelt wird, die Seitenlänge des jeweiligen n-Ecks, der Umfang und der halbe Umfang, der bei einem umbeschriebenen Kreis mit dem Radius 1 gleich π ist. Der absolute Fehler in der rechten Spalte ist die Differenz zum tatsächlichen Wert von π. (π = 3,1415926536...).

Anzahl der Ecken	Seitenlänge	Umfang	halber Umfang	Differenz zu Pi
n	a_n	u_n	Approximation	absoluter Fehler
6	1			
12	0,5176380902	6,2652572266	3,1326286133	0,0089640403
24	0,2610523844	6,2787004061	3,1393502030	0,0022424505
48	0,1308062585	6,2820639018	3,1410319509	0,0005607027
96	0,0654381656	6,2829049446	3,1414524723	0,0001401813
192	0,0327234633	6,2831152158	3,1415576079	0,0000350457
384	0,0163622792	6,2831677843	3,1415838921	0,0000087614
768	0,0081812081	6,2831809265	3,1415904632	0,0000021904
1536	0,0040906126	6,2831842121	3,1415921060	0,0000005475
3072	0,0020453074	6,2831850332	3,1415925166	0,0000001370
6144	0,0010226538	6,2831852373	3,1415926186	0,0000000349
12288	**0,0005113269**	**6,2831852906**	**3,1415926453**	**0,0000000083**
24576	**0,0002556635**	**6,2831852906**	**3,1415926453**	**0,0000000083**
49152	**0,0001278317**	**6,2831852906**	**3,1415926453**	**0,0000000083**
98304	**0,0000639159**	**6,2831852906**	**3,1415926453**	**0,0000000083**
196608	0,0000319579	6,2831873397	3,1415936698	0,0000010163
393216	0,0000159790	6,2831846076	3,1415923038	0,0000003498
786432	0,0000079895	6,2832173924	3,1416086962	0,0000160426
1572864	0,0000039948	6,2831736793	3,1415868397	0,0000058139
3145728	0,0000019974	6,2833485300	3,1416742650	0,0000816114
6291456	0,0000009987	6,2833485300	3,1416742650	0,0000816114
12582912	0,0000004994	6,2861454803	3,1430727402	0,0014800866
25165824	0,0000002498	6,3196123299	3,1598061649	0,0182135114

5.1.1 Auslöschung

„Unter der Auslöschung versteht man in der Numerik den Verlust an Genauigkeit bei der Subtraktion fast gleich großer Gleitkommazahlen.“ [19]

In Anlehnung an den Artikel aus Wikipedia soll diese Auslöschung an einem kleinen Zahlenbeispiel erklärt werden.
Wir haben zwei Zahlen: $a=4{,}6132135$ und $b=4{,}6143546$
Subtrahieren wir die beiden Zahlen, in diesem Fall b – a, so ergibt sich

$$b-a = 0{,}0011111 \ .$$

Stammen nun die beiden Zahlen *a* und *b* bereits aus vorherigen Berechnungen, so kann es sein, dass die hinteren Nachkommastellen durch Rundungen beeinflusst wurden. Dadurch kann es passieren, dass die Differenz alleine durch vorhergegangene Rundungsfehler auftritt, die beiden Zahlen *a* und *b* jedoch genaugenommen gleich sein sollten.
Nehmen wir nun an, die ersten beiden Nachkommastellen von *a* und *b* sind korrekt, dann ergibt sich eine Differenz von $b-a = 4{,}61-4{,}61 = 0$.
Sind die beiden Zahlen *a* und *b* nicht exakt gleich, können auch vorhergegangene Rundungen die berechnete Differenz beeinflussen, und so zum Beispiel die Approximation ungenauer werden lassen, weil richtige Stellen ausgelöscht werden und sich diese Fehler dann aufsummieren.
Angenommen die ersten drei Nachkommastellen der beiden Zahlen sind korrekt, dann ergibt sich eine Differenz von $4{,}614-4{,}613 = 0{,}001$, wohingegen wir uns zuvor mit $b-a = 0{,}0011111$ einen absoluten Fehler von $0{,}0011111-0{,}0010000 = 0{,}0001111$ und damit einen relativen Fehler von *11,11%* eingehandelt haben. [19]

In der Tabelle auf Seite 28 ist klar ersichtlich, dass diese Auslöschung nicht nur in der Theorie ihren Platz findet, sondern durchaus auch in der Praxis ein großes Problem darstellt, oft dann, wenn man sich auf iterativem Weg einem Ergebnis annähern will. Ab einem 12288-Eck nimmt die Genauigkeit von Pi nicht mehr zu, vielmehr nimmt sie nach vier weiteren Schritten wieder ab.

Ein weiteres Zahlenbeispiel zur iterativen Bestimmung der Zahl Pi soll zeigen, dass die

Auslöschung die Grenze der Genauigkeit darstellt.

Gegeben ist der Startwert $u_1 := 2$ und die Approximation

$$u_{k+1} = 2^k \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-(2^{-k} u_k)^2}\right)}$$

$$\text{mit } k = 1, 2, \dots .$$

Dies ergibt mittels Tabellenkalkulation berechnet folgende Ergebnisse:

k	iterative Approximation	π	absoluter Fehler
0	2	3,1415926536	1,1415926536
1	2,8284271247	3,1415926536	0,3131655288
2	3,0614674589	3,1415926536	0,0801251947
3	3,1214451523	3,1415926536	0,0201475013
4	3,1365484905	3,1415926536	0,0050441630
5	3,140331157	3,1415926536	0,0012614966
6	3,1412772509	3,1415926536	0,0003154027
7	3,1415138011	3,1415926536	0,0000788524
8	3,1415729404	3,1415926536	0,0000197132
9	3,1415877253	3,1415926536	0,0000049283
10	3,1415914215	3,1415926536	0,0000012321
11	3,1415923456	3,1415926536	0,0000003080
12	3,1415925765	3,1415926536	0,0000000770
13	3,1415926335	3,1415926536	0,0000000201
14	**3,1415926548**	**3,1415926536**	**0,0000000012**
15	3,1415926453	3,1415926536	0,0000000083
16	3,1415926074	3,1415926536	0,0000000462
17	3,1415929109	3,1415926536	0,0000002573
18	3,1415941252	3,1415926536	0,0000014716
19	3,1415965537	3,1415926536	0,0000039001
20	3,1415965537	3,1415926536	0,0000039001
21	3,141674265	3,1415926536	0,0000816114
22	3,1418296819	3,1415926536	0,0002370283
23	3,1424512725	3,1415926536	0,0008586189
24	3,1424512725	3,1415926536	0,0008586189
25	3,1622776602	3,1415926536	0,0206850066
26	0	3,1415926536	3,1415926536
27	0	3,1415926536	3,1415926536
28	0	3,1415926536	3,1415926536
29	0	3,1415926536	3,1415926536
30	0	3,1415926536	3,1415926536

Es ist deutlich erkennbar, dass bei $k = 14$ der Wert für π am Genauesten ist. Bei jedem weiteren Schritt nimmt die Genauigkeit wieder ab. Ab $k = 27$ löschen sich die Werte sogar vollständig aus.

Gehen wir nun einmal nur von dem einbeschriebenen n-Eck aus. Dieses nähert sich bekannterweise mit wachsendem n an π an. Das kann mit folgender Entwicklung verdeutlicht werden:

Wie zuvor gezeigt, gilt für die Seitenlänge in einem 2n-Eck folgende rekursive Darstellung:

$$a_{2\mathrm{n}} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$$

Um nun auf die Seitenlänge eines 4n-Ecks zu kommen, wird wiederum rekursiv eingesetzt, das bedeutet, dass für a_n unter der Wurzel der Ausdruck für $a_{2\mathrm{n}}$ eingesetzt wird. Dies führt zu

$$a_{4\mathrm{n}} = \sqrt{2-\sqrt{4-\left(\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}\right)^2}} \; .$$

Löst man das Quadrat unter der Wurzel auf und führt die triviale Subtraktion durch, so ergibt sich

$$a_{4\mathrm{n}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}} \; .$$

Diese Schritte beliebig oft wiederholt ergibt

$$\begin{aligned}
a_{8\mathrm{n}} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}}} \\
a_{8\mathrm{n}} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}}}} \\
a_{16\mathrm{n}} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}}}}} \qquad \textit{und so weiter.}
\end{aligned}$$

Da π das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser beschreibt, kann ein Näherungswert dafür wie folgt angegeben werden:

$$\pi = \frac{\mathit{Polygonumfang}}{\mathit{Kreisduchmesser}}$$

Der Polygonumfang ist $n \cdot a_n$. Gehen wir wiederum vom Radius der Länge 1 aus, so ergibt sich für Pi

$$\pi = \frac{n}{2} \cdot a_n \; .$$

Beginnt man nun mit einem einbeschriebenen Quadrat (n=4), bei dem die Seitenlänge $a_n = \sqrt{2}$ beträgt, erhält man für ein einbeschriebenes Sechzehneck

$$\pi = \frac{16}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 3{,}1214...$$

Für ein 32-Eck ergibt sich:

$$\pi = \frac{32}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 3{,}1365...$$

Dieser Wert nähert sich mit jeder Seitenverdoppelung besser an π an.

Dieser Ansatz geht, wie schon erwähnt, auf Archimedes zurück und lässt sich beliebig fortsetzen. Archimedes Problem war das Wurzelziehen, das zu seiner Zeit mühsamen Rechenaufwand bedeutete.

Jede Seitenverdoppelung bringt einen weiteren Wurzelausdruck. Allgemein gilt folgende Approximation

$$\pi = 2^k \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}$$

mit k ineinander geschachtelter Wurzelzeichen. [12], [16]

5.2 Approximation mittels Sinus und Tangens

Es gibt noch eine zweite Methode, um von ein- und umbeschriebenen n-Ecken auf eine Näherung der Zahl Pi zu kommen und zwar mit Hilfe von Kreisfunktionen, im Speziellen mittels Sinus und Tangens.

In Anlehnung an die Berechnung von Schmidt [12] betrachten wir hierzu den Kreissektor, der von einem Eckpunkt des inneren n-Ecks zum nächsten Eckpunkt reicht. In der untenstehenden Abbildung ist dies zu erkennen.

In diesem Fall handelt es sich wiederum um zwei regelmäßige 6-Ecke, ein einbeschriebenes und ein umbeschriebenes. Diese sind beide so gedreht, dass jeweils ein Eckpunkt des äußeren n-Ecks, ein Eckpunkt des inneren n-Ecks und der Mittelpunkt des Kreises auf einer Geraden liegen. Im Folgenden ist der Radius des Kreises rot eingezeichnet und die halben Seitenlängen der beiden 6-Ecke blau bzw. grün.

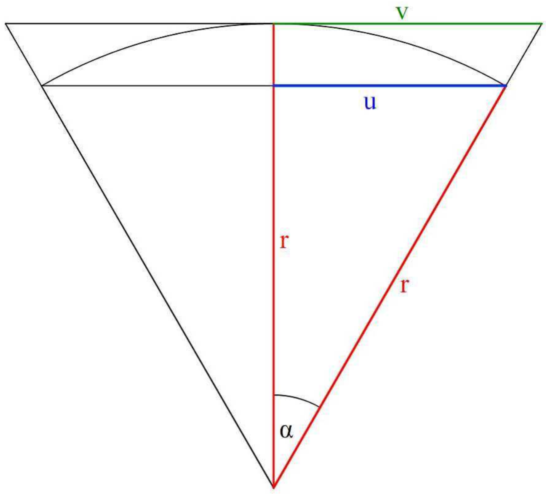


Abbildung 7: Kreissektor mit ein- und umbeschriebenen 6-Eck

Der Winkel α ist in diesem Fall der halbe Öffnungswinkel des zuvor erwähnten Kreissektors. Dieser lässt sich leicht wie folgt berechnen:

$$\alpha = \frac{360}{2\mathrm{n}} = \frac{180}{n}$$

Somit ist α in unserem Fall für ein regelmäßiges 6-Eck gleich 30°.

Den Radius nehmen wir der Einfachheit halber mit $r = 1/2$ an.

Der Zusammenhang zwischen dem Winkel α, dem Radius r und der Seitenlängen der beiden 6-Ecke wird mittels Sinus bzw. Tangens aufgestellt. Für die halbe Seitenlänge des inneren Polygons gilt:

$$\sin\alpha = \frac{u}{r}$$
$$u = r \cdot \sin\alpha$$

Ebenso gilt für die halbe Seitenlänge des äußeren Polygons:

$$\tan\alpha = \frac{v}{r}$$
$$v = r \cdot \tan\alpha$$

Der Umfang der jeweiligen Polygone lässt sich allgemein mit $2 \cdot n \cdot u$ bzw. mit $2 \cdot n \cdot v$ berechnen.

Nachdem der Umfang U eines Kreises durch $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ gegeben ist, und dieser durch die Umfänge der n-Ecke begrenzt wird, gilt folgende Abschätzung:

$$2 \cdot r \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right) < 2 \cdot r \cdot \pi < 2 \cdot r \cdot n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

Nachdem wir $r = 1/2$ vorausgesetzt haben, vereinfacht sich der Umfang des Kreises zu $U = \pi$. Somit nähern sich die Umfänge der ein- bzw. umbeschriebenen 6-Ecke dem tatsächlichen Wert von π von unten bzw. oben an. Es gilt also die vereinfachte Abschätzung:

$$n \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right) < \pi < n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

Je größer n wird, desto mehr Ecken bekommen die n-Ecke und desto genauer wird die Approximation. Im Anschluss findet sich eine Tabelle für obere und untere Grenzen von π, wobei von einem 6-Eck ausgegangen wurde, dessen Seitenzahl sich stets verdoppelt. [12]

	untere Schranke		obere Schranke
n	$n \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right)$	π	$n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$
6	3,00000000000000	π	3,46410161513775
12	3,10582854123025	π	3,21539030917347
24	3,13262861328124	π	3,15965994209750
48	3,13935020304687	π	3,14608621513143
96	3,14103195089051	π	3,14271459964537
192	3,14145247228546	π	3,14187304997982
384	3,14155760791186	π	3,14166274705685
768	3,14158389214832	π	3,14161017660469
1536	3,14159046322805	π	3,14159703432153
3072	3,14159210599927	π	3,14159374877135
6144	3,14159251669216	π	3,14159292738510
12288	3,14159261936538	π	3,14159272203861
24576	3,14159264503369	π	3,14159267070200
49152	3,14159265145077	π	3,14159265786784
98304	3,14159265305504	π	3,14159265465931
196608	3,14159265345610	π	3,14159265385717
393216	3,14159265355637	π	3,14159265365664
786432	3,14159265358144	π	3,14159265360650
1572864	3,14159265358770	π	3,14159265359397
3145728	3,14159265358927	π	3,14159265359084
6291456	3,14159265358966	π	3,14159265359005
12582912	3,14159265358976	π	3,14159265358986
25165824	3,14159265358979	π	3,14159265358981

Es ist deutlich zu sehen, dass die beiden Funktionen sehr rasch konvergieren. In der folgenden Tabelle sind die absoluten Fehler, also die betragsmäßigen Abweichungen vom tatsächlichen Wert von Pi, eingetragen. Die Werte sind auf 15 Nachkommastellen gerundet, wodurch in der letzten Zeile der Wert Null steht. Dies bedeutet keineswegs, dass mit dieser Approximation der genaue Wert von Pi erreicht wurde, sondern lediglich, dass der Fehler kleiner als 10^{-15} ist.

n	π – unterer Schranke	π	obere Schranke – π
6	0,141592653589794	π	0,322508961547961
12	0,035764112359544	π	0,073797655583679
24	0,008964040308555	π	0,018067288507707
48	0,002242450542926	π	0,004493561541642
96	0,000560702699284	π	0,001121946055575
192	0,000140181304332	π	0,000280396390030
384	0,000035045677936	π	0,000070093467055
768	0,000008761441475	π	0,000017523014896
1536	0,000002190361744	π	0,000004380731732
3072	0,000000547590522	π	0,000001095181559
6144	0,000000136897636	π	0,000000273795304
12288	0,000000034224410	π	0,000000068448820
24576	0,000000008556102	π	0,000000017112205
49152	0,000000002139026	π	0,000000004278051
98304	0,000000000534756	π	0,000000001069512
196608	0,000000000133690	π	0,000000000267378
393216	0,000000000033423	π	0,000000000066844
786432	0,000000000008356	π	0,000000000016711
1572864	0,000000000002089	π	0,000000000004178
3145728	0,000000000000522	π	0,000000000001044
6291456	0,000000000000131	π	0,000000000000261
12582912	0,000000000000033	π	0,000000000000065
25165824	0,000000000000000	π	0,000000000000016

Vergleicht man diese Methode mit der des Archimedes, so fallen gleich zwei wichtige Unterschiede ins Auge, die jedoch sehr stark zusammenhängen.
Archimedes kam nicht auf diese Genauigkeit und er wurde mit wachsendem n ab einem gewissen Punkt immer ungenauer. Die Erklärung für diese beiden Beobachtungen wurde schon zuvor in dem Kapitel *5.1.1 Auslöschung* beschrieben.

Also lässt dies den Schluss zu, dass diese Methode nicht von der numerischen Auslöschung beeinflusst wird und somit beliebig genau werden kann.

5.3 japanische Methode

Diese Methode wird auf das 17. Jahrhundert datiert und ist jener von Archimedes sehr ähnlich. Sie erinnert auch sehr stark an das Verfahren mittels Ober- und Untersumme bei der Integralrechnung. Die Namensgebung ist von Schmidt [12] übernommen.

Ein Kreis wird in schmale, gleich breite, rechteckige Streifen unterteilt. Diese Rechtecke werden, ähnlich wie die n-Ecke bei Archimedes, ein- beziehungsweise umbeschrieben und deren Flächeninhalte berechnet, was verhältnismäßig einfach zu bewerkstelligen ist.

Die Fläche des Kreises liegt wiederum zwischen dem der Summe der Flächeninhalte der inneren und der Summe der Flächen der äußeren Rechtecke.

Nehmen wir den Kreis wiederum mit dem Radius 1 an, dann entspricht der Flächeninhalt gemäß der Formel $A = r^2 \cdot \pi$ gleich π.

Hier sehen wir einen Kreis, dem jeweils vier Rechtecke ein- bzw. umbeschrieben sind. Die beiden äußeren, einbeschriebenen Rechtecke haben die Höhe Null und sind daher zu je einem Strich entartet:

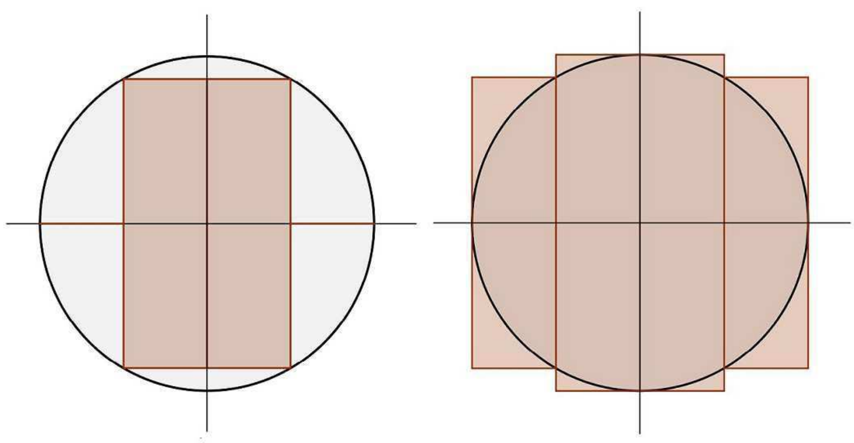


Abbildung 8: ein- und umbeschriebene Rechtecke

Der Einfachheit halber, beschränken wir uns ab nun nur mehr mit einem Viertelkreis und zwar mit dem I. Quadranten. Der berechnete Flächeninhalt dieses Kreissektors muss anschließend lediglich mit dem Faktor 4 multipliziert werden, um auf die Näherung von π zu kommen.

Auch für diese Berechnung wird der Satz des Pythagoras benötigt, wie beim Betrachten der folgenden Graphik schnell klar wird:

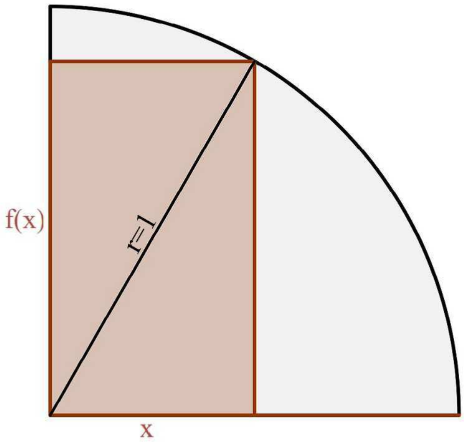


Abbildung 9: Flächenberechnung eines einbeschriebenen Rechtecks

Es gilt: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Somit lässt sich für den Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke (das rechte der beiden hat die Höhe Null und ist daher nur als Strich vorhanden) für den gesamten Kreis berechnen durch

$$A_{Untersumme} = 4(x \cdot f(x))$$

was in diesem Fall

$$A_{Untersumme} = 4\left(\frac{1}{2} \cdot f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \text{ ist.}$$

Wie schon zuvor angesprochen, ist der Flächeninhalt gleich der Näherung von π. Also:

$$\begin{aligned}\pi_{Untersumme} &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\right) \approx 1{,}73205081\end{aligned}$$

Für die umbeschriebenen Rechtecke ergibt sich auf Grund der aus der folgenden Graphik ersichtlichen Zusammenhänge:

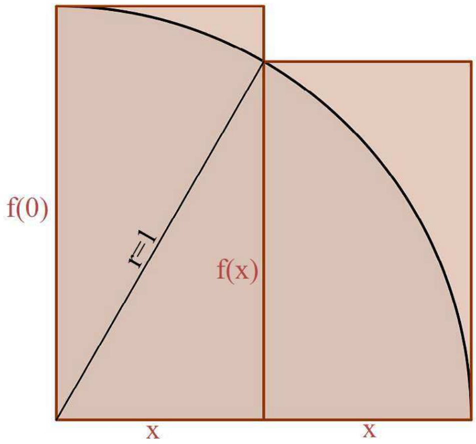


Abbildung 10: Flächenberechnung umbeschriebener Rechtecke

$$\begin{aligned}\pi_{Obersumme} &= 4\left(x\cdot f(0) + x\cdot f(x)\right)\\ &= 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\\ &= 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\right) \approx 3{,}73205081\end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass π im Intervall [1,73205081; 3,73205081] liegt. Der Mittelwert liegt bei 2,73205081.

Diese Approximation wird umso genauer, je mehr Rechtecke ein- bzw. umbeschrieben werden. Die Anzahl der Rechtecke pro Quadrant wird im Folgenden mit n bezeichnet.

Im Anschluss sind zwei Graphiken eingefügt, die veranschaulichen sollen, wie genau diese Art der Approximation mit 20 Rechtecken pro Quadrant ist. Die Beschriftung *x* und *f(x)* ist der Übersichtlichkeit halber weggelassen worden. Sie erfolgt analog zu jener in Abbildung 9 und Abbildung 10.

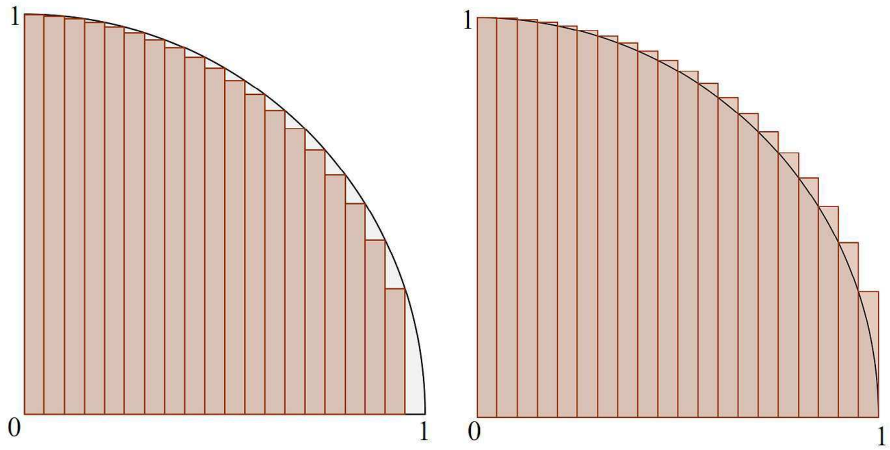


Abbildung 11: 20 ein- und umbeschriebene Rechtecke im I. Quadranten

Für *n=20* ergibt sich für Pi ein Intervall von [3,02846488; 3,22846488]. Dieser Wert ist deutlich genauer als jener von *n=2*. Der Mittelwert liegt bei etwa 3,12846488.
Diese Berechnungsmethode ist eine sehr einfache. Sie konvergiert aber sehr langsam gegen den tatsächlichen Wert von π. Will man einen genaueren Wert erreichen, ist diese Methode ein langwieriges Unterfangen. [4] [12]

5.4 arctan-Formel

Die sogenannte „arctan-Formel" ist nach dem englischen Astronom und Mathematiker **John Machin** (1680 – 1751) benannt. Er war Professor am Gesham College in London und beschäftigte sich unter anderem auch mit der Approximation von π. Im Jahre 1706 entdeckte er die Formel, welcher er auch seinen Bekanntheitsgrad verdankt. Mit ihrer Hilfe war es ihm möglich, 100 Stellen von π zu berechnen. Die Formel lautet:

$$\frac{\pi}{4} = 4\cdot\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Diese Formel ist mit Hilfe der Taylorentwicklung des Arkustangens eine schnell konvergierende Reihe, mit der man Pi gut numerisch berechnen kann. [23]
Oft ist sie auch in folgender Form zu finden:

$$\pi = 16\cdot\arctan\frac{1}{5} - 4\cdot\arctan\frac{1}{239}$$

Der Arkustangens ist die Umkehrfunktion der eingeschränkten Tangensfunktion. Die Einschränkung ist nötig, weil der Tangens eine periodische Funktion ist. Daher wählt man beim Tangens etwa das Intervall $]-\pi/2;\pi/2[$. Diese Funktion ist streng monoton steigend und punktsymmetrisch zum Nullpunkt (0;0). Oft wird statt *arctan* auch die Bezeichnung tan^{-1} verwendet. [17]

Der Graph dieser Arkustangensfunktion im gewählten Intervall sieht folgendermaßen aus:

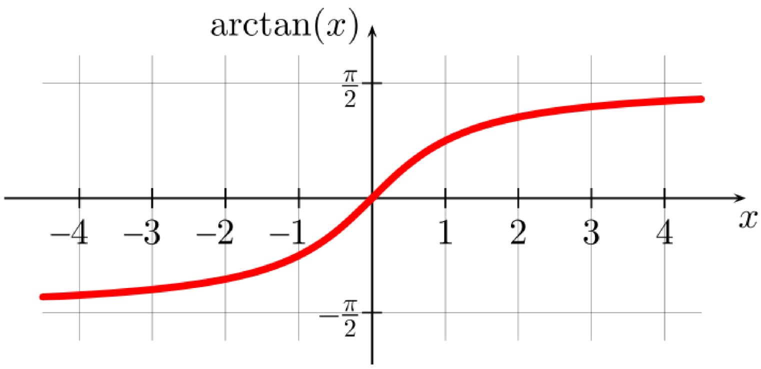


Abbildung 12: Arkustangensfunktion

5.5 unendliches Produkt

John Wallis (1616-1703) leitete 1656 in *Arithmetica Infinitorum* das nach ihm benannte „Wallische Produkt" her. Mit dessen Hilfe kann Pi näherungsweise berechnet werden. Die Formel dafür entstand aus der Integration der Fläche des Einheitskreises, also der Intergration der Funktion $(1-x^2)^n$ für $n=1/2$.

Es ergibt sich daraus folgendes Produkt:

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{8^2}{7\cdot 9}\cdot\quad\cdots$$

Oft wird auch die Schreibweise

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots$$

in der Literatur gefunden. [24]

5.6 Potenzreihen

Potenzreihen sind unendliche Summen. Der schottische Mathematiker **James Gregory** (1638-1675) entdeckte 1675 die Reihenentwicklung für den Arcustangens:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \cdots$$

Nachdem der Arkustangens von 1 gleich 45 Grad ist, was im Bogenmaß π/4 entspricht, erhält man ausgehend von der obigen Formel für $x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots$$

Diese Näherung ist einfach aufgebaut und mit sehr einfachen Mitteln berechenbar, allerdings konvergiert sie sehr langsam. Erst nach 300 Gliedern erhält man lediglich 2 richtige Dezimalstellen der gesuchten Kreiszahl.

Weitere Pi-approximierende Potenzreihen sind zum Beispiel:

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \ldots$$

oder, „*eine der schönsten dürfte die folgende sein*“: [3]

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

[3], [5]

5.7 Kettenbruch

Pi kann auch als Kettenbruch dargestellt werden. Zunächst einmal soll die Frage geklärt werden: „Was ist ein Kettenbruch?“
Eine mögliche Antwort findet sich bei Arndt und Haenel in ihrem Buch „Pi“ [2]:

„Ein Kettenbruch ist ein Bruch, dessen Zähler eine ganze Zahl ist und dessen Nenner die Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruch darstellt, der wiederum diese gleiche Form besitzt:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

[...]

Regelmäßige *oder* einfache *Kettenbrüche sind solche, bei denen alle Zähler* $a_i = 1$ *sind."* [2]

Bei diesen „einfachen" Kettenbrüchen wird eine vereinfachte und platzsparende Schreibweise verwendet, und zwar werden nur die Nenner, also die b_i in eckiger Klammer geschrieben: $[b_{0,} b_{1,} b_{2,} \cdots, b_n]$

Die Darstellung als einfacher Kettenbruch ist für jede reelle Zahl eindeutig. Ist der Kettenbruch endlich, so handelt es sich um eine rationale Zahl, bei irrationalen Zahlen wird er unendlich.

Johann Heinrich Lambert bewies 1766 mittels Kettenbrüchen, dass Pi irrational sein muss, nachdem der Kettenbruch von π/4 unendlich ist.

Es ist recht einfach, Zahlen von ihrer Dezimaldarstellung in ihre Kettenbruchdarstellung umzuwandeln und umgekehrt. Dies lässt sich mit einem einfachen Taschenrechner bewerkstelligen, der über die Kehrwertfunktion $1/x$ bzw. x^{-1} verfügt. [2]

Ein bekannter Kettenbruch ist jener für $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Ein nicht regelmäßiger Kettenbruch wurde von **Lambert** für π/4 gefunden:

$$\pi/4 = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{\ddots}}}}$$

[25]

Ebenso kann Pi durch einen regelmäßigen Kettenbruch dargestellt werden, also durch einen, bei dem die Zähler immer gleich 1 sind. Bei diesem Kettenbruch konnte aber bislang keinerlei Regelmäßigkeit bei den Nennern festgestellt werden. Die ersten 194 Nenner (also die b_i) sind im Folgenden angeführt, dabei erreichen sie eine Genauigkeit von 200 Dezimalstellen von Pi.

π = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, 2, 5, 4, 1, 2, 2, 8, 1, 5, 2, 2, 26, 1, 4, 1, 1, 8, 2, 42, 2, 1, 7, 3, 3, 1, 1, 7, 2, 4, 9, 7, 2, 3, 1, 57, 1, 18, 1, 9, 19, 1, 2, 18, 1, 3, 7, 30, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 2, 8, 1, 1, 2, 1, 15, 1, 2, 13, 1, 2, 1, 4, 1, 12, 1, 1, 3, 3, 28, 1, 10, 3, 2, 20, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 6, 1, 4, …]

Es ergibt sich damit die Darstellung als Reihenbruch:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

[26]

5.8 Monte-Carlo-Methode

5.8.1 Die Idee

Diese Methode wird häufig auch als „Monte-Carlo-Simulation“ bezeichnet und ist ein Verfahren aus der Stochastik, bei welchem ein Zufallsexperiment sehr oft hintereinander ausgeführt wird. Dadurch wird versucht, Probleme, die analytisch nur sehr aufwändig oder gar nicht zu lösen sind, numerisch zu lösen. Das „Gesetz der großen Zahlen“ ist die wichtigste Grundlage für diese Simulation. Dieses besagt im Grunde, „ *[...] dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses in der Regel* *der Wahrscheinlichkeit dieses Zufallsergebnisses annähert, wenn das zu Grunde liegende Zufallsexperiment immer wieder unter denselben Voraussetzungen durchgeführt wird."* [22]

Diese Zufallsexperimente können entweder real durchgeführt werden (z.B. Würfeln oder Münzwurf) oder durch geeignete Erzeugung von Zufallszahlen, die bei computergenerierten Vorgängen verwendet werden. Die Approximation von Pi übernimmt der Computer.
In Anlehnung an „niall's blog" [36] wird diese Simulation mit dem Programm „Python 2.7" durchgeführt. Es empfiehlt sich, die Befehle in einer Textdatei mit der Endung „.py" zu speichern und dann im Python zu öffnen und auszuführen.
Bei dieser Simulation geht es darum, dass auf ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 willkürlich zahlreiche Dartpfeile geworfen werden. Diese landen (bei genügend großer Anzahl) gleichverteilt auf der Quadratfläche. Nun wird ein Viertelkreis, ebenfalls mit dem Radius 1, einbeschrieben, der seinen Mittelpunkt in der linken unteren Ecke des Quadrates hat. Dieser beschreibt den ersten Quadranten des Einheitskreises, der seinen Mittelpunkt im Ursprung hat. Dies verdeutlicht die folgende Graphik:

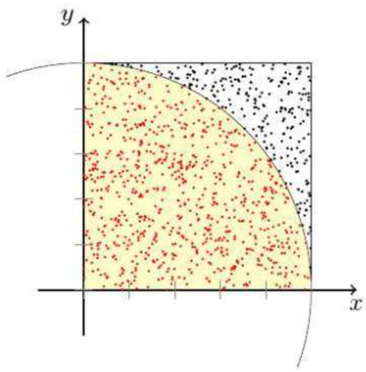


Abbildung 13: Monte-Carlo-Methode

Das Verhältnis der Treffer innerhalb des Kreisbogens zu der Anzahl der Würfe beträgt ein Viertel von Pi. Somit muss dieses Verhältnis mit dem Faktor 4 multipliziert werden und es ergibt sich ein Näherungswert für Pi, der von der Anzahl der Würfe abhängt.

5.8.2 Der Quellcode

Die Idee, diesen Quellcode so zu schreiben, ist ebenfalls von „niall's blog“ [36]:

```
from random import random
from math import pow, sqrt

DARTS   =100000000
treffer =0
wuerfe  =0
for i in range (1, DARTS):
        wuerfe = wuerfe + 1
        x = random()
        y = random()
        dist = sqrt(pow(x, 2) + pow(y, 2))
        if dist <= 1.0:
                treffer = treffer + 1.0

# treffer / wuerfe = 1/4 Pi
pi = 4 * (treffer / wuerfe)

print "pi = %s" %(pi)
```

Die ersten beiden Zeilen geben nur an, welche Pakete vom Programm selbst importiert werden sollen. Das ist aus dem Bereich „`random`“ der Befehl „`random`“ (zufällig) und aus dem Bereich „`math`“ die Befehle „`pow`“ (Potenz) und „`sqrt`“ (Quadratwurzel).

Die nächste Zeile gibt an, wie viele Würfe durchgeführt werden, in diesem Fall sind es eine Million. Danach werden die Variablen „`treffer`“ und „`wuerfe`“ definiert und mit dem Startwert 0 versehen. Der Index „`i`“ ist ein Laufindex im Intervall von 1 bis zur Anzahl der DARTS.

„`wuerfe = wuerfe + 1`“ gibt den Befehl, bei jedem Wurf eins weiter zu zählen. „`random`“ bedeutet für „x“ und „y“, dass diese Werte zufällig gewählt werden. Das heißt, bei jedem „Wurf“ wird ein zufälliges Zahlenpaar (x,y) gewählt, wobei die Werte jeweils aus dem Intervall [0;1[genommen werden.

„`dist`“ ist die Distanz, also der Abstand zum Nullpunkt links unten und dieser wird über die Kreisgleichung angegeben, da sie die Grenze zwischen innerhalb und außerhalb ist. In Formelschreibweise würde diese Zeile als $d=\sqrt{x^2+y^2}$ geschrieben werden.

Die Bedingung „`if dist <= 1.0: treffer = treffer + 1`“ bedeutet, dass ein „`treffer`“ gezählt werden soll, wenn der Abstand kleiner oder gleich 1 ist. Somit sind die „`treffer`“ jene „DARTS“, die innerhalb des Kreisbogens oder genau auf dem Kreisbogen liegen.

Nachdem das Verhältnis „`treffer/wuerfe`“ ein Viertel von Pi ist, ergibt sich „`pi = 4 * (treffer / wuerfe)`“. Die letzte Zeile ist nur mehr der Ausgabebefehl „`print`“.

5.8.3 Die Auswertung

Wie schon zuvor erwähnt, wächst die Genauigkeit mit steigender Anzahl der Würfe. Noch genauer wird die Näherung, wenn mehrere Experimente durchgeführt werden und der Mittelwert errechnet wird. Im Anschluss befindet sich eine Tabelle, in deren Spalten die Ergebnisse für unterschiedliche Dartanzahlen aufgelistet sind, wobei jeweils zehn Experimente durchgeführt wurden. In der letzten Zeile der jeweiligen Spalte findet sich dann das arithmetische Mittel der zehn Simulationen. Darunter steht der absolute Fehler zum tatsächlichen Wert von π $(\approx 3{,}14159265359)$.

	DARTS =	100	10000	1000000	100000000
Experiment	1	3,23232323232	3,14591459146	3,14473114473	3,14171027142
	2	2,66666666667	3,14631463146	3,14163114163	3,14177587142
	3	3,15151515152	3,10391039104	3,14321114321	3,14171587142
	4	3,27272727273	3,13151315132	3,14289914290	3,14158927142
	5	3,35353535354	3,15911591159	3,14135114135	3,14140223141
	6	3,15151515152	3,12871287129	3,14117114117	3,14138467141
	7	3,23232323232	3,14711471147	3,14201914202	3,14156687142
	8	3,11111111111	3,13551355136	3,14008714009	3,14174931142
	9	3,15151515152	3,13071307131	3,14106714107	3,14169011142
	10	3,03030303030	3,14351435144	3,14221514222	3,14179307142
	Mittelwert	3,13535353536	3,13723372337	3,14203834204	3,14163775542
	Fehler:	0,0062391182	0,0043589302	0,0004456884	0,00004510183

Es ist deutlich zu erkennen, dass bei 10^8 Würfen der Wert deutlich genauer ist als bei den Experimenten mit weniger Darts. [28], [36]

6 Pi in ...

6.1 ... der Mathematik

Unter dieser Überschrift sollte eigentlich alles bisher Geschriebene stehen. Jedoch soll in diesem Abschnitt nur eine kleine Auswahl von noch nicht erwähnten mathematischen Zusammenhängen angeführt werden.

Aus der nach **Leonhard Euler** (1707-1783) benannten Formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i \cdot \sin\phi$ lässt sich auch die bekannte Form $e^{i\pi}+1=0$ ableiten, indem man $\phi = \pi$ setzt, nachdem der Cosinus von π gleich (-1) ergibt und der Sinus von π gleich 0 ist.
Diese Formel *„[...] bildet das Bindeglied zwischen den trigonometrischen Funktionen und den Exponentialfunktionen mittels komplexer Zahlen.“* [21]

Rudolf Taschner hat diese Folgerung in seinem Buch *Funktionentheorie* [14] als „*bemerkenswert*“ bezeichnet. Weiters schrieb er über diese mathematische Formel:

„Denn in ihr kommen nicht nur alle fundamentalen mathematischen Konstanten 0, 1, e, π, i, sondern auch alle Grundrechnungsarten, nämlich Addieren, Multiplizieren und Potenzieren vor. So konzentriert sich in dieser Formel die Elementarmathematik. [14]

In Pierre Basieux *Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze* [3] wird diese Formel mittels Potenzreihen der Winkelfunktionen hergeleitet.
Die Taylorreihen stellen die Funktionen sin(x) und cos(x) wie folgt dar:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + - \ldots$$

Ebenso kann die Exponentialfunktion e^x mittels Potenzschreibweise dargestellt werden:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Wird das Argument nun $x = i\phi$ gesetzt, so ergibt sich daraus:

$$e^{i\phi} = 1 + \frac{i\phi}{1!} + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \ldots$$

Nachdem die imaginäre Einheit i als $\sqrt{-1}$ definiert ist, folgt für

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i \quad \text{und} \quad i^4 = 1 \,.$$

Dies in die obige Potenzreihe eingesetzt und in Imaginär- und Realteil aufgespaltet führt zu:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + - \ldots \\ + i\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + - \ldots\right) \end{aligned}$$

Vergleichen wir nun die Reihen des Real- bzw. des Imaginärteiles, so erkennen wir die Reihenentwicklung der beiden Winkelfunktionen. Der Realteil der Exponentialfunktion entspricht der Entwicklung für $\cos\phi$, der Imaginärteil jener für $\sin\phi$. Dies eingesetzt ergibt die gesuchte Euler-Formel:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \cdot \sin\phi \,. \quad [3], [33]$$

6.2 ... der Physik

Die beiden kanadischen Brüder **Jonathan** und **Peter Borwein**, beide Mathematiker, haben festgestellt, dass die ersten 39 Nachkommastellen der Zahl π ausreichen würden, um den Umfang eines Kreises, der das gesamte bekannte Universum umfasst, mit einem Fehler, der kleiner als die Größe eines Wasserstoffatoms ist, zu berechnen. [3], [43]

6.3 ... der Kunst

Das Verhältnis einer Seitenlänge zur Höhe der großen Pyramide in Gise entspricht in etwa dem Wert $\pi/2$. Jahrhundertelang wurde gerätselt, wodurch dieses Verhältnis, das genauer war als die damalige Näherung an Pi, zustande gekommen war.
Die Erklärung findet man in den Schriften von Herodot. Dieser hat geschrieben, dass die Pyramide so konstruiert wurde, dass der Flächeninhalt jeder Seitenfläche gleich der Fläche eines Quadrates ist, dessen Seitenlänge der Pyramidenhöhe entspricht. Somit lässt sich zeigen, dass das Verhältnis von einer Seitenlänge zur Höhe $\pi/2$ sein muss. [5]

Ein sehr bekanntes Bild von **Leonardo Da Vinci**, das er um 1490 gemalt haben soll, erinnert an das Problem der Quadratur des Kreises. Diese Zeichnung trägt den Namen *Der vitruvianische Mensch* und zeigt die Proportionen eines Menschen in einem Kreis und einem Quadrat. Es ist bis heute eines der berühmtesten und am meisten vervielfältigten Bildmotive. [35]

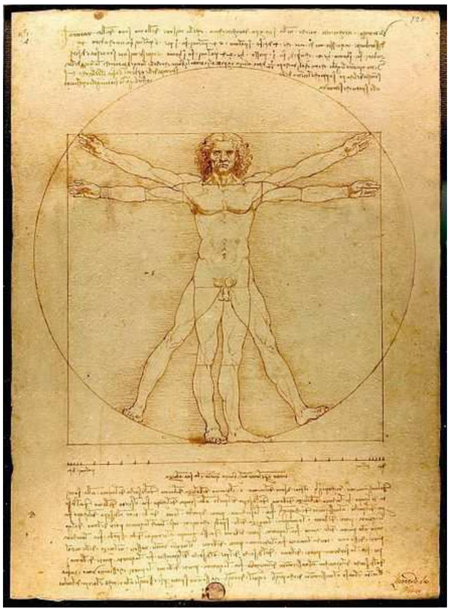


Abbildung 14: Der vitruvianische Mensch

6.4 ... der Bibel

Im Alten Testament wurde ein Kupferbecken im Salomontempel beschrieben:

„Sodann machte er das aus Erz gegossene „Meer“. Es maß von einem Rand bis zum anderen zehn Ellen war vollkommen rund und fünf Ellen hoch. Eine Schnur von 30 Ellen konnte es rings umspannen.“

Altes Testament, 3 Könige (1.KG) 7,23 [8]

Aus dieser Textstelle lässt sich herauslesen, dass π gleich 3 angenommen wurde:

$$\pi_{Bibel} = \frac{U}{d} = \frac{30}{10} = 3$$

Tatsächlich ist dieser Wert aber sehr ungenau und auch viel ungenauer als die damals bekannten Näherungen, wurden doch diese Zeilen wahrscheinlich im 6. Jahrhundert vor Christus geschrieben.
Diese Abweichung zum tatsächlichen Wert von Pi regte Mathematiker und Bibelgelehrte zu Diskussionen an. Erklärungen von „Die Bibel ist einfach falsch!“ bis hin zu „Pi ist exakt 3, die Wissenschaft belügt uns!“ folgten.

„Der im Bibeltext genannte Wert für Pi ist für einen Laien genau genug“, so eine andere Erklärung. Ein genauerer Wert war zwar bekannt, wurde jedoch nicht niedergeschrieben.

Weiters wurden andere Erklärungsversuche gestartet, die diese Diskrepanz lösen wollten. Ein Anhaltspunkt dafür war eine weitere Bibelstelle aus dem Alten Testament, die sich ebenfalls auf dieses Kupferbecken von Salomons Tempel bezog:

„Seine Dicke betrug eine Handbreit, sein Rand war gestaltet wie der Rand eines Bechers, [...]“

Altes Testament, 2 Chronik, 4,5 [8]

War dieses Wasserreservoir wie ein Becher geformt, so könnte es sein, dass der Durchmesser oben, der Umfang allerdings am unteren Rand gemessen wurde. Dadurch könnte es zu diesem ungenauen Verhältnis gekommen sein.

Wurde der Umfang an der Innenseite des Bechers gemessen und wurde der Rand bei der Durchmesserbestimmung miteinbezogen, so wäre dies auch eine Erklärung für den Trugschluss, dass π gleich 3 sei. [5]

7 Die Quadratur des Kreises

Diese Phrase ist mittlerweile eine sehr bekannte, auch abseits der Mathematik. Doch was bedeutet sie und woher kommt sie?
Im Umgangssprachlichen wird damit ausgedrückt, dass ein Vorhaben unmöglich ist oder zumindest als unmöglich erscheint: „Das ist ja die Quadratur des Kreises!“
In der Mathematik beschreibt es ein klassisches Problem der Geometrie:
Dabei soll aus einem gegeben Kreis in endlich vielen Schritten ein flächengleiches Quadrat konstruiert werden.
Es wurde schon hunderte Jahre vor Christus begonnen, dieses Problem zu lösen, vor allem geometrisch – also mit Zirkel und Lineal.
Es gab unzählige Versuche und Vorgehensweisen, aber wie bei der Bestimmung des Wertes von Pi, wurde nie eine exakte Möglichkeit gefunden.
Mittlerweile wissen wir, dass dies unmöglich ist. Dies liegt vor allem an den Eigenschaften von Pi. 1882 bewies **Ferdinand von Lindemann** die Transzendenz von π (siehe Kapitel *4.2.1 Transzendenz von π*) und somit die Unmöglichkeit der Kreisquadrierung. [32]

8 Pi - Kult

8.1 Freunde der Zahl Pi

Die „Freunde der Zahl Pi“ [48] ist ein Verein, der 1995 offiziell gegründet wurde, nachdem die Idee schon vier Jahre zuvor in den Köpfen der Gründer existierte. Auf der Startseite ihrer Homepage *pi314.at* steht geschrieben:

„Ziel und Aufgabe unserer Vereinigung ist die Hochhaltung und Förderung des Geistes der Zahl Pi.“ [40]

Um Vollmitglied dieses Vereins zu werden, ist eine Aufnahmeprüfung zu absolvieren. Dabei *„[...] muss die Fähigkeit zur freien Rezitation der ersten hundert Nachkommaastellen der Zahl Pi demonstriert werden.“* [37]

8.2 Kurioses

Die Stellen 710150 bis 710164 lauten: ...353733333338638.... Hierbei fällt auf, dass die Ziffer 3 zehn Mal vorkommt und dabei gleich sieben Mal direkt hintereinander. [11]

„Die ersten 144 Dezimalstellen von π *summieren sich zu 666. Andererseits ist 144 gleich* $(6+6)\cdot(6+6)$ *. Symbolisiert 666 in der Schwarzen Magie nicht die Hölle? Auch das Glücksrad muss zwangsläufig mit* π *zu tun haben. Jedenfalls ergibt die Addition der Nummern des Roulette ebenfalls 666 und möglicherweise die Hölle für eine besondere Spezies von „Kreisquadrierern“, die unaufhörlich nach Gewinnsystemen sucht [...].“* [3]

...noch etwas Unglaubliches...

„Der afrikanische Fluss Nil hat mitsamt allen Windungen eine Länge von ca. 6670 Kilometern. Misst man die Luftlinie von der Quelle bis zur Mündung, ergibt das eine Strecke von 2120 Kilometern. Teilt man 6670 durch 2120 ist das Ergebnis 3,14, also »π«. Das ist so bei allen langen Flüssen auf der Welt. Tatsächliche Länge geteilt durch die Luftlinie ergibt immer mehr oder weniger »π«.“ [49]

8.3 Pi in der Passage

Bei der Wiener U-Bahn Station „Karlsplatz“ beim Ausgang zur Secession entstand 2006 das Kunstprojekt „Pi“. Bei diesem Projekt werden an den Wänden der Durchgänge auf verspiegelten Vitrinen neben der Kreiszahl auch noch 15 andere statistische Daten in Echtzeit gezeigt, wie zum Beispiel „Verzehrte Schnitzel in Wien seit 1. Jänner“ oder „Wachstum der Sahara seit 1. Jänner“.
Von der Kreiszahl werden die ersten 478 Stellen angegeben. [30]

Abbildung 15: Pi in der Passage 1

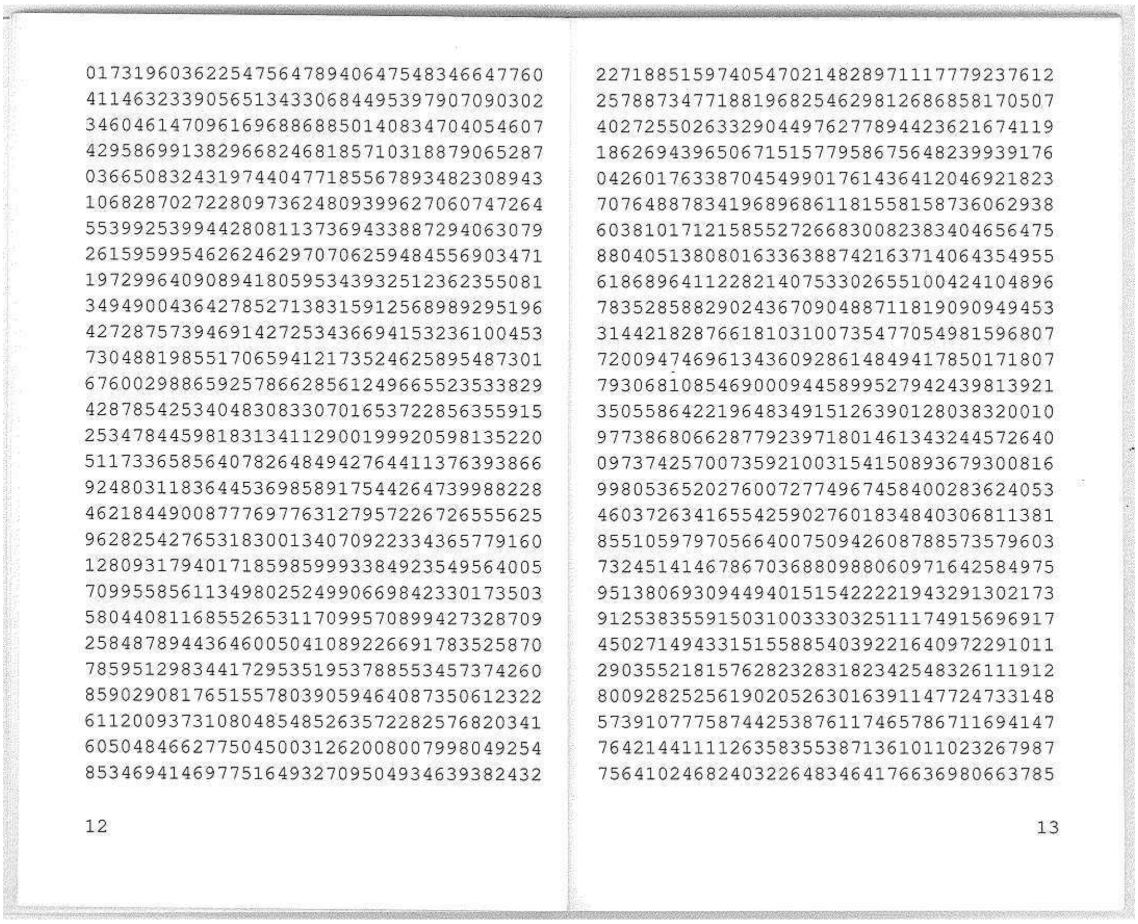
Danach werden die jeweils letzten berechneten Stellen auf einer 10-stelligen Digitalanzeige angezeigt.

Abbildung 16: Pi in der Passage 2

8.4 Ein Buch voll π

Ich bin, als ich mir die Literatur für diese Arbeit herausgesucht habe, auf ein Buch gestoßen, das den simplen Titel „π“ hat. Der Einband ist weiß und auf der Vorderseite thront ein griechisches „Pi“. In diesem Buch sind auf 63 Seiten die ersten 100000 Stellen der Kreiszahl abgedruckt – sonst nichts. Natürlich habe ich dieses Buch gekauft, auch wenn sein Inhalt nicht sehr viel zu dieser Arbeit beigetragen hat. Wieso ich es gekauft habe? Der Vollständigkeit halber! [13]

Hier ein kleiner Auszug:



01731960362254756478940647548346647760
41146323390565134330684495397907090302
34604614709616968868850140834704054607
42958699138296682468185710318879065287
03665083243197440477185567893482308943
10682870272280973624809399627060747264
55399253994428081137369433887294063079
26159599546262462970706259484556903471
19729964090894180595343932512362355081
34949004364278527138315912568989295196
42728757394691427253436694153236100453
73048819855170659412173524625895487301
67600298865925786628561249665523533829
42878542534048308330701653722856355915
25347844598183134112900199920598135220
51173365856407826484942764411376393866
92480311836445369858917544264739988228
46218449008777697763127957226726555625
96282542765318300134070922334365779160
12809317940171859859993384923549564005
70995585611349802524990669842330173503
58044081168552653117099570899427328709
25848789443646005041089226691783525870
78595129834417295351953788553457374260
85902908176515578039059464087350612322
61120093731080485485263572282576820341
60504846627750450031262008007998049254
85346941469775164932709504934639382432

12

22718851597405470214828971117779237612
25788734771881968254629812686858170507
40272550263329044976277894423621674119
18626943965067151577958675648239939176
04260176338704549901761436412046921823
70764887834196896861181558158736062938
60381017121585527266830082383404656475
88040513808016336388742163714064354955
61868964112282140753302655100424104896
78352858829024367090488711819090949453
31442182876618103100735477054981596807
72009474696134360928614849417850171807
79306810854690009445899527942439813921
35055864221964834915126390128038320010
97738680662877923971801461343244572640
09737425700735921003154150893679300816
99805365202760072774967458400283624053
46037263416554259027601834840306811381
85510597970566400750942608788573579603
73245141467867036880988060971642584975
95138069309449401515422221943291302173
91253835591503100333032511174915696917
45027149433151558854039221640972291011
29035521815762823283182342548326111912
80092825256190205263016391147724733148
57391077758744253876117465786711694147
76421441111263583553871361011023267987
75641024682403226483464176636980663785

13

Abbildung 17: Auszug aus dem Buch "Pi"

8.5 Pi Day

Der Pi-Tag oder englisch „Pi Day“ ist ein inoffizieller Feiertag, zu Ehren von Pi. Er wird am 14. März jeden Jahres begangen, da dieses Datum in amerikanischer Schreibweise 3/14 geschrieben wird. Dies entspricht den ersten beiden Nachkommastellen von Pi (3,14).
Einigen Verfechtern ist dies noch zu ungenau, daher feiern sie an diesem Tag auf die Sekunde genau um 1 Uhr 59 Minuten und 26 Sekunden. Dies entspricht schon den ersten sieben Nachkommastellen (3,1415926).
Als Begründer des Pi-Tages gilt der Amerikaner Larry Shaw, der den Pi Day 1988 am Exploratorium in San Francisco initiierte.
Gegessen werden traditioneller Weise runde Kuchen, die im Englischen „pie“ heißen und exakt wie das englische „Pi“ ausgesprochen werden.
Ebenso wird auch der 22. Juli gefeiert, und zwar als „Pi Approximation Day“, also als Annäherungstag, weil dieser Tag in amerikanischer Datumsschreibweise als 22/7 dargestellt wird. Der Bruch 22/7 ergibt etwa 3,14, was schon Archimedes als Näherungswert für Pi angegeben hatte. [31]

8.6 Alles steckt in Pi

Wir wissen, dass Pi transzendent ist (siehe Kapitel *4.2.1 Transzendenz der Zahl Pi*). Das bedeutet, dass es unendlich viele Nachkommastellen gibt und dass seine Zahlenfolge keiner Gesetzmäßigkeit genügt. Es lässt sich nichts über die nächste Stelle sagen, auch wenn man alle vorherigen kennt.
Demnach gibt es jede beliebige Zahlenkombination in den Nachkommastellen von Pi, die einfachen findet man schon nach wenigen Stellen. Dass sich jede zweistellige, beliebige Zahl in den Stellen von Pi wiederfinden lässt ist verständlich und glaubwürdig. (Zum Beispiel findet sich die Zahl 12 erstmals an der 148. Stelle von Pi und die Ziffernkombination 09 an der 54. Stelle – das ist noch nicht weiter verblüffend.)
Aber auch längere Ziffernkombinationen wie mein Geburtsdatum „09121983“ lassen sich finden. Dieses steht allerdings erst an Stelle 22 857 201.
Um diese Stellen zu finden, habe ich die Internetseite „http://www.subidiom.com/pi/“

[47] zu Hilfe genommen. Hier kann man die ersten 2 Milliarden Stellen von Pi, aber auch von der Eulerschen Zahl e, von $\sqrt{2}$ oder dem goldenen Schnitt ϕ nach beliebigen Ziffernkombinationen durchsuchen.

Spinnen wir den Gedanken der unendlichen Zahlenkombinationen einmal weiter:

Hat nun Pi unendlich viele Nachkommastellen (was nur schwer vorstellbar, aber bewiesen ist) und folgen die Zahlenfolgen von Pi keinerlei Schema, dann sind ALLE beliebigen Zahlenkombinationen irgendwo in Pi verborgen – wirklich ALLE. Das Schlüsselwort in dieser Aussage ist allerdings das Wort „irgendwo“, denn unendlich viele Stellen zu durchsuchen, von denen man fast alle nicht kennt, ist unmöglich.

Aber rein theoretisch wäre diese Arbeit (und natürlich alle anderen Texte), würde man sie mittels Zahlen codieren (nach welchem Schema auch immer), sodass der gesamte Text nur mehr aus Zahlen besteht, irgendwo in den unendlichen Weiten der Zahl Pi enthalten, und zwar zusammenhängend! [45]

8.7 Die Sinnlosigkeit von Pi

Im Anschluss findet sich ein Text, der das Thema „Sinnlosigkeit von Pi“ behandelt. Zu beachten ist, dass dieser Beitrag von den **Freunden** der Zahl Pi verfasst wurde, also den Verfechtern dieser Zahl. Natürlich kann man über die Sinnhaftigkeit, Milliarden Stellen zu berechnen, diskutieren und der Forschergeist und die Neugierde der Menschen ist unstillbar, aber rein für die Kreisberechnung, reichen wenige Stellen von Pi aus.

Aus der Homepage der „Freunde der Zahl Pi“:

„Selbstverständlich ist Pi nicht an sich und per se sinnlos; allein, betrachtet man die Tatsache, daß sich Menschen der Schwierigkeit unterwerfen, neue, schnellere Algorithmen zur Berechnung von Pi zu finden, um sodannen in stundenlanger Rechenarbeit wertvolle Computerzeit von Großrechnern zu verbrauchen, nur um anschließend 100 000e Seiten lange Ausdrucke von Milliarden Stellen der Zahl Pi zu generieren, dann fragt sich ein Durchschnittsbürger wohl:

Wozu?

Was soll solch eine Aktion für einen Sinn haben?! - Nun, die Antwort ist ganz einfach: Sie entbehrt jeden Sinnes!
Um dies zu verdeutlichen dienen ein paar Vergleiche. Um den Umfang eines Kreises auf 1 Millimeter genau zu bestimmen, genügen 4 Dezimalen, wenn der Radius 30 Meter (oder weniger) beträgt. Wenn der Radius so groß ist wie der Erdradius, genügen 10 Dezimalen. Und wenn man einen Kreis nimmt, dessen Radius so groß ist wie der Abstand der Erde von der Sonne, und man will den Kreisumfang auf Millimeter genau berechnen, so sind 15 Dezimalen von Pi ausreichend.
Um zu demonstrieren, welche unfaßbar große Genauigkeit mit den für die Aufnahme in den Klub der Freunde der Zahl Pi erforderlichen 100 Dezimalen der Zahl Pi erreichbar ist, möge man folgende Aufgabe betrachten: Man nehme eine Kugel, in deren Mitte unsere Erde liege und die bis zum Sirius reiche (Entfernung ca. 8.7 Lichtjahre); man fülle diese Kugel mit Bazillen, so daß auf jeden Kubikmillimeter eine Billion (= 1 000 000 000 000) Bazillen kommen. Man stelle nunmehr alle diese Bazillen auf einer geraden Linie so auf, daß die Entfernung vom ersten Bazillus zum zweiten so groß ist wie die Entfernung Erde-Sirius; ebenso groß sei die Entfernung vom zweiten zum dritten Bazillus, vom dritten zum vierten usw. Die Entfernung vom ersten zum letzten Bazillus nehme man als Radius eines Kreises. Berechnet man dann den Umfang dieses Kreises, indem man 100 Dezimalen der Dezimalbruchentwicklung von Pi benützt (höhere Dezimalen also unberücksichtigt läßt), dann wird - trotz der ungeheuren Größe des Kreises - der bei der Berechnung des Umfangs begangene Fehler immer noch kleiner ausfallen als ein Zehnmillionstel eines Millimeters!!!
Wenn man nun noch bedenkt, daß der derzeitige Rekord für die Berechnung von Pi bei ca. 206 Milliarden Stellen liegt, so möge man versuchen, sich vorzustellen, wie viele Bakterien man für 206 Milliarden Stellen benötigte, um auf die gleiche Genauigkeit zu kommen! -- Wem das immer noch nicht genügt, der halte sich vor Augen, daß die Teilchenzahl im Universum "nur" ca. 10^87 beträgt !! - Es ist wirklich sinnlos!“ [38]

9 Literaturverzeichnis

[1] Aigner, Martin & Ziegler, Günter M.: *Das Buch der Beweise*, 3. Auflage, Springer-Verlag Heidelberg (2010)

[2] Arndt, Jörg & Haenel Christoph: *π Algorithmen, Computer, Arithmetik,* 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidlberg (2000)

[3] Basieux, Pierre: *Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze*. Rowolt Taschenbuch Verlag, 61-70, 77-79 (2000).

[4] Benning, Wilhelm: *Die Berechnung von Pi* Skriptum des Geodätischen Instituts der RWTH Aachen (2002)

[5] Blatner, David: *π – Magie einer Zahl*. Rowohlt Taschenbuchverlag, (2001).

[6] Buchan, Jamie: *Pi mal Daumen*. Dtv(2011).

[7] Cascoschi, Claudio: *Die Geschichte des Pi*, R.G. Fischer Verlag (2009)

[8] Hamp, Vinzenz & Stenzel Meinrad: *Altes Testament*, Pattloch Verlag (1992)

[9] Hilbert, David: *Über die Transzendenz der Zahlen e und π* . Mathematische Annalen 43, 216-219 (1893).

[10] Katscher, Friedrich: *Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen,* Springer Verlag Wien (1979)

[11] Kranzer, Walter: *So interessant ist Mathematik*. Aulis Verlag Deubner, (1989).

[12] Schmidt, Karl Helmut: *pi – Geschichte und Algorithmen einer Zahl*. Books on Demand GmbH, (2001).

[13] Schulz, Manuel: π. Books on Demand GmbH, Nordstedt (2009)

[14] Taschner, Rudolf: *Funktionentheorie*. Manz-Verlag Wien (1983)

[15] Taschner, Rudolf: *MATHE-BRIEF* Februar 2012-Nr.22, ÖMG

[16] Wind, Michael: *Die Bibel. Archimedes und Ludolph van Ceulen zu π.* Seminar für LehramtskandidatInnen an der TU-Wien, SS 2013

Internetliteratur

[17] http://de.wikipedia.org/wiki/Arkustangens (15072013)

[18] http://de.wikipedia.org/wiki/Approximation (13072013)

[19] http://de.wikipedia.org/wiki/Ausl%C3%B6schung_%28numerische_Mathematik%29 (17072013)

[20] http://de.wikipedia.org/wiki/Euklids_Beweis_der_Irrationalit%C3%A4t_der_Wurzel_aus_2 (09072013)

[21] http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Formel (06072013)

[22] http://de.wikipedia.org/wiki/Gesetz_der_gro%C3%9Fen_Zahlen (12072013)

[23] http://de.wikipedia.org/wiki/John_Machin (10072013)

[24] http://de.wikipedia.org/wiki/John_Wallis (20072013)

[25] http://de.wikipedia.org/wiki/Kettenbruch (18072013)

[26] http://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl (15072013)

[27] http://de.wikipedia.org/wiki/Ludolph_van_Ceulen (14072013)

[28] http://de.wikipedia.org/wiki/Monte-Carlo-Simulation (06072013)

[29] http://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind (05072013)

[30] http://de.wikipedia.org/wiki/Pi_%28Kunstprojekt%29 (03082013)

[31] http://de.wikipedia.org/wiki/Pi_Day (19072013)

[32] http://de.wikipedia.org/wiki/Quadratur_des_Kreises (23072013)

[33] http://de.wikipedia.org/wiki/Sinus (06072013)

[34] http://de.wikipedia.org/wiki/Transzendente_Zahl (20072013)

[35] http://de.wikipedia.org/wiki/Vitruvianischer_Mensch (20082013)

[36] http://niallohiggins.com/2007/07/05/monte-carlo-simulation-in-python-1/#disqus_thread (06072013)

[37] http://pi314.at/Aufnahmepruefung.html (20072013)

[38] http://pi314.at/math/sinnlos.html (19072013)

[39] http://pi314.at/Mitglieder.html (19072013)

[40] http://pi314.at/Verein.html (20072013)

[41] http://www.heldermann-verlag.de/Mathe-Kabinett/IrrationalitaetVonPi.pdf (20072013)

[42] http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/pi.pdf (09082013)

[43] http://www.scinexx.de/dossier-detail-389-4.html (06072013)

[44] http://www.scinexx.de/dossier-detail-389-5.html (06072013)

[45] http://www.scinexx.de/dossier-detail-389-6.html (06072013)

[46] http://www.scinexx.de/dossier-detail-389-7.html (06072013)

[47] http://www.subidiom.com/pi/ (09072013)

[48] http://www.pi314.at (18062013)

[49] http://www.wdr.de/tv/wissenmachtah/bibliothek/pi.php5 (14072013)

[50] http://www.welt.de/wissenschaft/article13920059/Die-unheimliche-Magie-der-niemals-endenden-Zahl-Pi.html (12082013)

10 Abbildungsverzeichnis

11 Anhang

Дифференциальная геометрия многообразий фигур
Band 34 (2003), Seiten 144-148

R. Fritsch
(Ludwig-Maximilians-Universität München, zur Zeit Staatliche Universität Kaliningrad)

Hilberts Beweis der Transzendenz der Ludolphschen Zahl π

Im Jahr 1882 hat Ferdinand Lindemann (1852–1939, damals Professor in Freiburg im Breisgau) das Problem der Quadratur des Kreises erledigt, indem er die Transzendenz der Ludolphschen Zahl π bewies. Dadurch wurde er weltberühmt und an die im 19. Jahrhundert ein mathematisches Zentrum von Weltgeltung bildende Albertina in Königsberg berufen. Sein ursprünglicher Beweis ist heute nur schwer nachzuvollziehen. Im Jahr 1893 gelang seinem aus Königsberg stammenden und zu dem Zeitpunkt noch hier wirkenden Schüler David Hilbert (1862-1943) eine wesentliche Vereinfachung des Beweises. Damit hat die Transzendenz von π einen starken lokalen Bezug zum Erscheinungsort dieser Zeitschrift, was rechtfertigt, die Grundideen von Hilberts Beweis hier darzustellen.

Zur Erinnerung. Eine komplexe Zahl z heißt *algebraisch*, wenn sie Wurzel eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten, oder gleichbedeutend, Wurzel eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. Die erste Formulierung bedeutet: es gibt eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, derart dass gilt:

$$a_n \neq 0\,, \quad a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n = 0.$$

Für $z \neq 0$ kann dabei auch immer $a_0 \neq 0$ angenommen werden. Die Zahl z heißt *ganz algebraisch*, wenn sie Wurzel eines normierten Polynoms mit ganzen Koeffizienten ist, das heißt, $a_n = 1$ gewählt werden kann und die übrigen Koeffizienten trotzdem ganz bleiben.

Lemma 1. *Ist die komplexe Zahl z algebraisch und sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen, die die genannten Bedingungen erfüllen, so ist a_nz ganz algebraisch.*

Eine komplexe Zahl heißt *transzendent*, wenn sie nicht algebraisch ist.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal produzieren – algebraisch betrachtet – nur algebraische Zahlen. Deswegen bedeutet der Nachweis der Transzendenz der Zahl π, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal unmöglich ist; dies war eine Aufgabe, die dem griechischen Philosophen Anaxagoras im 5. Jahrhundert vor Christus eingefallen ist, als er wegen Gotteslästerung im Gefängnis saß.

Ein wesentliches Hilfsmittel für Hilberts Beweis der Transzendenz der Zahl π ergibt sich aus dem in jedem Lehrbuch der Algebra nachzulesenden Hauptsatz über symmetrische Funktionen.

Satz 2. *Sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen mit $a_n \neq 0$, so gilt:*

a) Jede symmetrische Funktion in n Unbestimmten, liefert angewandt auf die Wurzeln des Polynoms $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ einen rationalen Wert.

b) Ist $a_n = 1$, so liefert jede symmetrische Funktion in n Unbestimmten mit ganzen Koeffizienten angewandt auf die Wurzeln des Polynoms P einen ganzen Wert.

Hilbert führt – wie schon Lindemann – einen Widerspruchsbeweis. Er nimmt an, dass π algebraisch ist. Dann ist auch iπ algebraisch, also Wurzel eines normierten Polynoms P mit rationalen Koeffizienten. Man wählt ein derartiges Polynom P; es habe den Grad n. Mit $z_1 = \mathrm{i}\pi, z_2, \ldots, z_n$ seien die Wurzeln von P bezeichnet. Da iπ eine komplexe Wurzel des reellen Polynoms P ist, ist auch -iπ eine Wurzel von P; es kann $z_2 = -\mathrm{i}\pi$ angenommen werden. Wegen

$$e^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

gilt

$$0 \;=\; (e^{z_1}+1)\;(e^{z_2}+1)\;\ldots\;(e^{z_n}+1)\,.$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite dieser Gleichung ergibt sich:

$$0 = e^{y_1} + e^{y_2} + \ldots + e^{y_N} + 1,$$

wobei die Exponenten y_l Summen der Wurzeln z_j sind, mit $N = 2^{n-1}$. Manche der Exponenten y_l haben den Wert 0, zum Beispiel $y_l = z_1 + z_2$ und liefern damit den Beitrag 1 zu der Summe auf der rechten Seite. Die Numerierung der y_k wird so gewählt, dass die ersten M ($<N$) ungleich 0 und die übrigen gleich 0 sind. Damit erhält die Gleichung die Form

$$0 = e^{y_1} + e^{y_2} + \ldots + e^{y_M} + a,$$

wobei die Terme e^{y_l} nichttriviale Potenzen von e und $a = N\text{-}M\text{+}1$ eine natürliche Zahl ist. Im folgenden wird gezeigt, dass diese Gleichung nicht bestehen kann.

Dazu werden die Polynome

$$\begin{aligned}
&P_1 = P = (x - z_1)\,(x - z_2)\,\ldots\,(x - z_n),\\
&P_2 = (x - z_1 - z_2)\,(x - z_1 - z_3)\,\ldots\,(x - z_{n-1} - z_n),\\
&P_3 = (x - z_1 - z_2 - z_3)\,(x - z_1 - z_2 - z_4)\,\ldots\,(x - z_{n-2} - z_{n-1} - z_n),\\
&\vdots\\
&P_n = x - z_1 - z_2 - \ldots - z_n,\\
&P_\# = P_1\,P_2\,\ldots\,P_n
\end{aligned}$$

betrachtet. Die Koeffizienten des Polynoms $P_\#$ sind symmetrische Funktionen der Wurzeln z_j, also nach Teil a) von Satz 2 rationale Zahlen, die Wurzeln von $P_\#$ sind 0 und die eben definierten Zahlen y_k; dabei hat die Wurzel 0 die Vielfachheit N-M. Multiplikation mit dem Hauptnenner der Koeffizienten und Division durch x^{N-M} liefert das Polynom

$$Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_Mx^n$$

mit ganzen Koeffizienten, $b_0, b_n \neq 0$, und den Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_M$. Nach Lemma 1 handelt es sich bei den $b_M\,y_l$ um ganze algebraische Zahlen.

Nun sei k eine natürliche Zahl, zunächst beliebig; später erzeugt eine geeignete Wahl von k den gewünschten Widerspruch. Hilbert betrachtet die komplexe Funktion
g: **C** $\rightarrow$ **C**, die gegeben ist durch

$$g(z) = b_M{}^M Q(z)$$

und bildet das Integral

$$w_0 = \int_0^\infty z^k g(z)^{k+1} e^{-z} dz\,.$$

Da für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\int_0^\infty z^n e^{-z} dz = n!$$

ist w_0 von der Form

$$w_0 = (b_M{}^M b_0)^{k+1}\, k! + c_0\,(k+1)!,$$

wobei auch c_0 eine ganze Zahl ist.

Hilberts Ziel ist nun zu zeigen, dass bei geeigneter Wahl von k gilt:

$$\frac{w_0}{k!} \cdot (e^{y_1} + e^{y_2} + \ldots + e^{y_M} + a) = s + p,$$

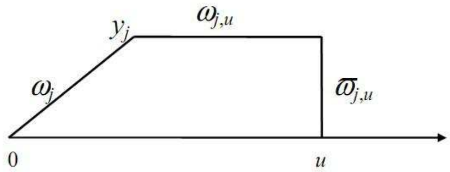
mit einer reellen Zahl s vom Betrag kleiner als 1 und einer von Null verschiedenen ganzen Zahl p. Dann kann die rechte Seite dieser Gleichung nicht gleich Null sein, also auch nicht der zweite Faktor auf der linken Seite, woraus sich der Widerspruch ergibt.

Dazu wird das Integral

$$w_0 = \lim_{u\to\infty} \int_0^u z^k g(z)^{k+1} e^{-z} dz$$

für alle $j \in \{1, 2, \ldots, M\}$ zerlegt. Da der Integrand eine Stammfunktion besitzt, ist das eigentliche Integral unabhängig vom Integrationsweg. Für $j \in \{1, 2, \ldots, M\}$ und $u > \operatorname{Re} y_j$ betrachtet Hilbert den folgenden zusammengesetzten Integrationsweg:

$\omega_j(v) = v \cdot y_j,\ v \in [0,1]$,
$\omega_{j,u}(v) = v + \mathrm{i}\ \operatorname{Im} y_j,\ v \in [\operatorname{Re} y_j, u]$,
$\varpi_{j,u}(v) = u + (1-v)\cdot \mathrm{i}\ \operatorname{Im} y_j,\ v \in [0,1]$.



Damit wird das Integral $\int_0^u z^k g(z)^{k+1} e^{-z} dz$ in drei Teile zerlegt. Für den dritten Teil gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^1 (u+(1-v)\ \mathrm{i}\ \operatorname{Im} y_j)^k \cdot g(u+(1-v)\ \mathrm{i}\ \operatorname{Im} y_j)^{k+1} e^{-(u+(1-v)\ \mathrm{i}\ \operatorname{Im} y_j)} (-\ \mathrm{i}\ \operatorname{Im} y_j) dv = 0.$$

Hilbert setzt nun

$$v_j = \int_0^1 (vy_j)^k \cdot g(vy_j)^{k+1} \cdot e^{-vy_j} \cdot y_j dv\,,$$

$$w_j = \lim_{u\to\infty} \int_{\mathrm{Re}\, y_j}^{u} (v + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, y_j)^k g(v + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, y_j)^{k+1} e^{-(v+\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, y_j)} dz =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \int_{0}^{u} (v + y_j)^k g(v + y_j)^{k+1} e^{-(v+y_j)} dz$$

und hat

$$w_0 = v_j + w_j$$

für alle $j \in \{1, 2, \ldots, M\}$.

Hilbert definiert

$$s = \frac{v_1 e^{y_1} + v_2 e^{y_2} + \cdots + v_M e^{y_M}}{k!}$$

$$p = \frac{w_0 a + w_1 e^{y_1} + w_2 e^{y_2} + \cdots + w_M e^{y_M}}{k!}$$

Da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind, gibt es Schranken s_1 und s_2 derart, dass gilt

$$|s| \le \frac{s_1^k}{k!} s_2 (|y_1 e^{y_1}| + |y_2 e^{y_2}| + \cdots + |y_M e^{y_M}|)$$

Damit wird für genügend großes $|s|<1$ wie gewünscht.

Weiter ergibt sich für alle $j \in \{1,2,\ldots,M\}$:

$$w_j \cdot e^{y_j} = (k+1)!\, K(b_M y_j),$$

wobei K ein Polynom mit ganzen Koeffizienten bezeichnet. Nach Teil b) von Satz 2 ist damit

$$w_1 e^{y_1} + w_2 e^{y_2} + \cdots + w_M e^{y_M}$$

eine ganze durch $(k+1)!$ teilbare ganze Zahl. Damit gilt

$$p = a(b_M^M b_0)^{k+1} + (c_0 + c_1) \cdot (k+1).$$

Wird k so gewählt, dass $k+1$ eine Primzahl größer als a, b_M und b_0 ist, dann ist sicher $p \neq 0$. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, gibt es ein solches k, für das zusätzlich $|s|<1$ wird. Damit ist das Ziel erreicht!

Quelle:

David Hilbert: Über die Transcendenz der Zahlen ***e*** und ***π***,
in: *Mathematische Annalen* **43**, 216-219 (1893)