

**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN**

**VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY**

DIPLOMARBEIT

Stabilitätsuntersuchungen am Raumaufzug

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alois STEINDL
E 325/2
Institut für Mechanik und Mechatronik
Abteilung für Angewandte Mechanik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für
MASCHINENWESEN und BETRIEBSWISSENSCHAFTEN

von

Michael Hermann SCHWARZBART
0125399
Josef Bartmannstrasse 15, 2483 Weigelsdorf

Wien im Mai 2007

Danksagung

Ich möchte mich recht herzlich bei meinem Betreuer Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alois Steindl bedanken. Er schlug für mich in eindrucksvoller Weise Brücken zwischen der Mechanik und der Mathematik. Weiters gilt mein Dank O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c. Hans Troger, der mir die Mitarbeit an der Publikation [14] ermöglichte. Besonders dankbar bin ich beiden für zahlreiche Diskussionen und das daraus resultierende konstruktive Arbeitsklima am Institut.

Meiner Familie und in besonderer Weise meinen Eltern Maria und Hermann gilt mein Dank für die langjährige Unterstützung während meiner gesamten Ausbildung. Für das Korrekturlesen und die unvoreingenommene Auseinandersetzung mit dieser Arbeit danke ich meiner Freundin Christine.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Stabilitätsanalyse eines Hantelsatelliten	3
2.1. Starrer Hantelsatellit	3
2.1.1. Homotopieverfahren [7, 15]	8
2.2. Starrer Hantelsatellit mit zusätzlicher Masse im GEO	9
2.3. Elastischer Hantelsatellit	13
2.3.1. Federpendel	22
2.3.2. Ergebnisse des kontinuierlichen Hantelmodells [14]	24
3. Stabilitätsanalyse eines Raumaufzugs	26
3.1. Diskretes Modell mit masseloser Feder	26
3.1.1. Befestigung mit einem Festlager	27
3.1.2. Befestigung mit einem Loslager	27
3.2. Kontinuierliches Modell	31
3.2.1. Radiale Gleichgewichtslage	33
3.2.2. Stabilität der radialen Gleichgewichtslage	38
A. Der Stabilitätsbegriff	46
A.1. Gleichgewichtslagen	46
A.1.1. Kriterium von Lagrange-Dirichlet	47
A.2. Relative Gleichgewichtslagen	47
A.2.1. Die <i>Reduced Energy-Momentum Method</i>	48
A.2.2. Die Methode von Routh	50
B. Die untersuchten Werkstoffe	53
C. Variationsprobleme - Optimale Steuerung	54
C.1. Das Maximum-Prinzip von Pontrjagin	54

Abbildungsverzeichnis

2.1. Bewegung eines starren Hantelsatelliten im Zentralfeld eines Planeten . . .	3
2.2. Stabilitätsverhalten in Abhängigkeit von β	7
2.3. Radiale Lagen des Hantelsatelliten	8
2.4. Starrer Hantelsatellit mit zusätzlicher Masse in radialer Lage	9
2.5. Massenverhältnis zur Stabilisierung des starren Hantelsatelliten	11
2.6. Elastischer Hantelsatellit mit zusätzlicher Masse im GEO	13
2.7. Stabilitätsverhalten für $A = 2 \cdot 10^{-9}m^2$	19
2.8. Stabilitätsverhalten für $A = 2 \cdot 10^{-8}m^2$	19
2.9. Massenverhältnis α_{\min} für Stabilisierung bei $A = 2 \cdot 10^{-9}m^2$	20
2.10. Massenverhältnis α_{\min} für Stabilisierung bei $A = 2 \cdot 10^{-8}m^2$	20
2.11. Dehnung der innern und äußeren Feder	21
2.12. Federpendel in radialer Gleichgewichtslage	22
2.13. Kräftegleichgewicht (2.36) in skaliertes Form	23
2.14. Kritischer Eigenwert λ ohne zusätzliche Masse m_s	24
2.15. α_{\min} für den kontinuierlichen Hantelsatelliten an der Stabilitätsgrenze . .	25
3.1. Raumaufzug mit masseloser Feder	26
3.2. Raumaufzug mit kontinuierlichem Faden in radialer Lage	31
3.3. Querschnittsverläufe mit Endmassen von 1 kg	37
3.4. Querschnittsverlauf mit verschiedenen Massen am inneren Fadenende . .	38
3.5. Verlauf des kritischen Eigenwerts	45

Verwendete Formelzeichen

Um die unterschiedlichen Schreibweisen in den Darstellungen der einzelnen Autoren für diese Arbeit in eine einheitliche Form zu bringen, werden die häufig verwendeten Formelzeichen nachfolgend angeführt und kurz beschrieben.

X, Y, Z	bewegtes, terrestrisches Koordinatensystem
x, y, z	inertialfestes Koordinatensystem
T	kinetische Energie
V	potentielle Energie $V = U + W$
U	Potential der inneren Kräfte
W	Potential der äußeren Kräfte
k	Produkt aus Gravitationskonstanter \mathbf{G} und Planetenmasse; für die Erde: $k = \mathbf{G} m_e \approx 3,986 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$
\mathbf{G}	Gravitationskonstante $\mathbf{G} = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg}$
m_e	Erdmasse $m_e = 5,974 \cdot 10^{24} kg$
$\dot{\vartheta}$	Winkelgeschwindigkeit des betrachteten Planeten; für die Erde: $\dot{\vartheta}_e = \frac{2\pi}{\text{siderischer Tag}} = \frac{2\pi}{23,934 h} \approx 7,292 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$
r_e	Erdradius $r_e = 6378137 m$
V_{μ_0}	<i>amended potential</i>
V_{ξ}	<i>augmented potential</i>
\mathcal{J}	<i>locked inertia tensor</i>
ξ	Gruppengeschwindigkeit
μ_0	Wert der Impulsabbildung am relativen Gleichgewicht
ident_{ξ_0}	<i>ident-Operator</i>
$\mathbf{H}(f)$	Hessematrix einer Funktion f
λ	Bezeichnung für Eigenwerte oder Hauptminoren von $\mathbf{H}(f)$
l_0	ungedehnte Federlänge
$A, A(s)$	Seilquerschnitt
$\tilde{}$	im jeweiligen Ausdruck sind die Längen auf r_{gs} bezogen

1. Einleitung

Faszinierend erscheint die Tatsache, dass sowohl die Raumfahrt in ihrer heutigen Form, als auch die Idee des Raumaufzugs untrennbar mit den grundlegenden Überlegungen von Konstantin Eduardovich Tsiolkovskii (1857-1935) verbunden sind. Der russische Mathematiklehrer Tsiolkovskii leitete einerseits die nach ihm benannte Raketengrundgleichung her und folgerte daraus das heute praktizierte Konzept der Stufenrakete. Andererseits ersann er, von der Konstruktion des Eiffelturms inspiriert, seinen *Space Tower*, der eine materielle Verbindung der Erdoberfläche mit Höhen in der Größenordnung des geostationären Orbits darstellt. Diese Verbindung würde die Raumfahrt revolutionieren, weil dadurch die hohen Kosten für Raketentriebwerke ($\approx 10^5 \text{€}/\text{kg}$ Nutzlast im Jahr 2000), die zum Überwinden des Gravitationsfeldes der Erde und des Reibungswiderstandes der Atmosphäre notwendig sind, um Größenordnungen reduziert werden könnten.

Alle Untersuchungen namhafter Wissenschaftler in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts blieben von akademischer Natur, weil zu jener Zeit kein technisch realistisch verarbeitbarer Werkstoff den enormen Anforderungen gerecht wurde, die für die Realisierung des Raumaufzugs notwendig sind. Die in den Werkstoffwissenschaften gebräuchliche Reißlänge, vgl. Anhang B, ist dazu prädestiniert zu zeigen, warum zu damaliger Zeit nur einige Idealisten sich mit dem Konzept des Raumaufzugs beschäftigten. Für Stahl wird bereits bei einer Länge von $l_* \approx 64,5 \text{ km}$ im oberen Aufhängepunkt die Zugfestigkeit erreicht, weit unter der angestrebten Höhe des GEO $r_{\text{gs}} \approx 42164 \text{ km}$.

1991 entwickelte Iijima [6] einen neuen Werkstoff namens *carbon nanotubes* mit revolutionären elektrischen und mechanischen Eigenschaften. Dieser neue Werkstoff bietet einen hohen E-Modul bei geringer Dichte, wodurch eine Realisierung des Raumaufzugs als möglich erscheint.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Frage der Stabilität eines Raumaufzugs, anhand einfacher mechanischer Modelle, zu studieren. Im Anhang B sind jene Werkstoffe angeführt die auf ihre Eignung, für die Verwirklichung eines *Sky-hooks*, untersucht werden.

Um die Realität in einem mechanischen Modell abbilden zu können, um sie mit den Methoden der Mathematik beschreibbar zu machen, sind Idealisierungen und Vernachlässigungen unausweichlich. Wir vernachlässigen viele, in der Realität wirkenden, Kräfte: Störungen des kugelsymmetrischen Erdschwerefeldes durch die Erdabplattung, Kräfte zufolge aerodynamischer Effekte, Reibungskräfte, Anziehung durch Sonne, Mond und andere Planeten sowie Strahlungsdruck des Sonnenwinds werden nicht betrachtet. Wir berücksichtigen somit nur äußere Kräfte zufolge eines kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes und Kräfte die in einem bewegtem Koordinatensystem zufolge der Erddrehung als Scheinkräfte auftreten. Im Zuge der Modellbildung bedienen wir uns Idealisierungen, die durch Eigenschaften wie „masselos“, „starr“ oder „linear elastisch“ der betrachteten

Verbindungselemente, bzw. durch die zu verbindenden „Punktmassen“ angezeigt werden. Eine letzte wichtige Vereinfachung ergibt die Einschränkung auf ebene Probleme. Bei [9] wurde gezeigt, dass für die Untersuchung von Hantelsatelliten die Behandlung des ebenen Problems ausreichend ist. Beim Konzept des Raumaufzugs geht man grundsätzlich davon aus, dass dieser am Äquator mit der Erdoberfläche verbunden ist, wodurch die Betrachtung des ebenen Problems in erster Näherung gerechtfertigt ist.

Alle diese Vereinfachungen dienen dazu, einfache Systemgleichungen, die mit geringem mathematischen Aufwand zu behandeln sind, zu erhalten. Die grundlegenden Eigenschaften, die daraus abgeleitet werden, sind für das Verständnis aufwendigerer Modelle unverzichtbar. In der vorliegenden Arbeit werden mehrere Modelle betrachtet, die nach dem Grad der Idealisierungen geordnet sind. Von einem Modell zum nächsten werden gewisse Vereinfachungen fallengelassen und versucht der Realität näher zu kommen. Diese Vorgehensweise bringt einerseits von Modell zu Modell einen erhöhten mathematischen Aufwand, führt aber andererseits zu einem umfassenderen Verständnis des Systemverhaltens. Numerische Auswertungen wurden mit den Programmpaketen BIFPACK [15] und BNDSCO [12] unter FORTRAN 95 durchgeführt.

Ein, aus den präsentierten Ergebnissen, erwachsender Optimismus für eine realistische Verwirklichung eines *Sky hooks* muss dahingehend gebremst werden, als dass in dieser Arbeit nur die Stabilität der Gleichgewichtslagen der Fahrbahn für den eigentlichen Aufzug betrachtet wird. Die Bewegung einer Kabine entlang des Raumaufzugs verlangt eine dynamische Analyse der gesamten Anordnung. Weiters muss die Beeinträchtigung der Werkstoffeigenschaften durch erosive Effekte und ein verminderter Querschnitt im Lauf der Zeit durch Kollision mit kleinen die Erde umkreisenden Meteoriten oder Weltraumschrott berücksichtigt werden. Aus heutiger Sicht ist das größte Problem die Produktion von *carbon nanotubes*, die im industriellen Rahmen zwar hergestellt werden, aber die Länge von wenigen Zentimetern noch nicht überschreiten. Die Zielsetzung für die Zukunft besteht darin, sich einerseits genauer mit dem eigentlichen Betrieb und den daraus erwachsenden Problemen auseinander zu setzen. Andererseits muss man sich die Frage stellen, wie die ausgezeichneten Eigenschaften der *carbon nanotubes* auf größere Maßstäbe übertragbar sind.

2. Stabilitätsanalyse eines Hantelsatelliten

Die Stabilitätsanalyse von Hantelsatelliten tritt als vereinfachtes Modell bei der Untersuchung verkabelter Satellitensysteme (*tethered satellite systems*) auf. Diese Systeme bestehen aus zwei oder mehreren Subsatelliten, die mit langen Verbindungselementen aneinander gekoppelt werden [2]. Der Hantelsatellit ist somit der einfachste Fall, bei dem nur zwei Subsatelliten verbunden werden. Diese Konzepte sind deshalb von Bedeutung, weil sie bereits in der Realität umgesetzt wurden, und die analytischen Ergebnisse bestätigten. Die Idee besteht nun darin, die Länge dieses Satellitensystems soweit zu erhöhen, bis ein Ende die Erdoberfläche berührt. Wir behandeln in diesem Kapitel sowohl starre, als auch elastische, aber masselose Verbindungselemente, stets mit der Zielsetzung, einen der beiden Subsatelliten bis zur Erde zu führen.

2.1. Starrer Hantelsatellit

Zunächst wird der Hantelsatellit im Gravitationsfeld um einen beliebigen Planeten betrachtet. Bei diesem Modell werden, wie in Abb. 2.1 dargestellt, zwei gleich große Massen m mit einem starren, masselosen Stab der Länge $2a$ verbunden.

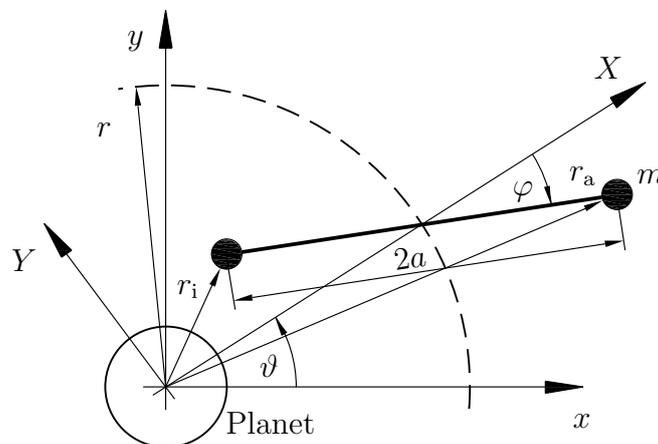


Abbildung 2.1.: Bewegung eines starren Hantelsatelliten im Zentralfeld eines Planeten

Mit ϑ ist der Winkel zwischen dem bewegten Koordinatensystem $X, Y, (Z)$ (mit dem Planeten verbunden) und dem inertialfesten System $x, y, (z)$ bezeichnet. Der Hantelsatellit kann eine, gegenüber dem mitbewegten System um den Winkel φ , verdrehte Lage

einnehmen. Als dritter Freiheitsgrad tritt die radiale Lage r des Stabmittelpunkts auf. Somit ergibt sich die kinetische und die potentielle Energie in Abhängigkeit von den drei Freiheitsgraden r, φ und ϑ zu

$$T = m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + a^2 (\dot{\vartheta} - \dot{\varphi})^2 \right) \quad (2.1)$$

$$V = -km \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i(r, \varphi)|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_a(r, \varphi)|} \right), \quad (2.2)$$

mit den Positionen der inneren und äußeren Masse

$$|\mathbf{r}_i(r, \varphi)| = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi} \quad |\mathbf{r}_a(r, \varphi)| = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi}.$$

Weil ϑ im Ausdruck für das Potential (2.2) nicht auftritt und somit eine zyklische Variable darstellt, wurde die *Reduced Energy-Momentum Method* (REMM) zur Stabilitätsuntersuchung verwendet (vgl. Anhang A).

Für das vorliegende Modell ergibt sich der *locked inertia tensor* (A.10) zu

$$\mathcal{J}(r) = 2m(a^2 + r^2),$$

womit sich gemäß (A.8) das *augmented potential* zu

$$V_\xi(r, \varphi) = -km \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i(r, \varphi)|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_a(r, \varphi)|} \right) - \xi^2 m (a^2 + r^2) \quad (2.3)$$

ergibt. Gleichung (2.3) ist nur von den beiden nicht-zyklischen Freiheitsgraden r und φ , sowie von der Gruppengeschwindigkeit ξ , die in dieser Anordnung dem $\dot{\vartheta}$ entspricht, abhängig.

Bevor wir auf die Gleichgewichtslagen des Hantelsatelliten eingehen, besprechen wir den wichtigen Fall einer Punktmasse im Orbit.

Punktmasse im Gravitationsfeld

Setzen wir die Stablänge $a = 0$ voraus, dann können obige Gleichungen vereinfacht als

$$T = \frac{m^*}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 \right) \quad (2.4a)$$

$$V = \frac{-km^*}{r} \quad (2.4b)$$

$$\mathcal{J}(r) = m^* r^2 \quad (2.4c)$$

$$V_\xi(r) = \frac{-km^*}{r} - \frac{\xi^2}{2} m^* r^2 \quad (2.4d)$$

angeschrieben werden, mit $m^* = 2m$. Als Freiheitsgrade erhalten wir einerseits die zyklische Variable ϑ , und andererseits die radiale Entfernung r vom Planeten. Die Gleich-

gewichtslage bestimmt sich mit (2.4d) gemäß (A.13) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\xi}{\partial r} = 0 &= m \left(\frac{k}{r^2} - \xi^2 r \right) \\ \Rightarrow r &= \sqrt[3]{\frac{k}{\xi^2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Wenn es sich beim betrachteten Planeten um die Erde handelt, dann definiert (2.5), mit den entsprechenden Konstanten, den geostationären Orbit (GEO) $r_{\text{gs}} \approx 42164 \text{ km}$.

Für den Hantelsatelliten kann nun die Frage nach den relativen Gleichgewichtslagen mit dem bekannten Potential (2.3) durch Bestimmung der kritischen Punkte von (A.13) beantwortet werden. Die Ableitungen des Potentials (2.3) nach den beiden Freiheitsgraden φ und r liefern Bestimmungsgleichungen für die relativen Gleichgewichtslagen

$$\frac{\partial V_\xi}{\partial \varphi} = 0 = \sin \varphi \, km a r \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i(r, \varphi)|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_a(r, \varphi)|^3} \right) \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial V_\xi}{\partial r} = 0 = km \left(-\frac{r - a \cos \varphi}{|\mathbf{r}_i(r, \varphi)|^3} - \frac{r + a \cos \varphi}{|\mathbf{r}_a(r, \varphi)|^3} \right) - 2rm\xi^2. \quad (2.6b)$$

Gleichung (2.6a) ist erfüllt wenn durch $|\mathbf{r}_i| = |\mathbf{r}_a|$ der Klammerausdruck Null wird, oder der Winkel φ Null bzw. ganzzahlige Vielfache von π annimmt. Weil der Hantelsatellit aus zwei identischen Punktmassen m besteht, hat er nur eine tangentielle ($\varphi = \pi/2$) und eine radiale ($\varphi = 0$) Gleichgewichtslage. Um Aussagen über die Stabilität dieser relativen Gleichgewichtslagen im Zentralfeld eines Planeten treffen zu können, muss gezeigt werden, dass diese Stellen im *amended potential* (A.7) ein Minimum darstellen. Um dies mit (A.16) zu überprüfen, berechnen wir zunächst den *ident*-Operator (A.17)

$$\mathbf{ident}_{\xi_0}(\delta \mathbf{q}) = -4\xi \begin{pmatrix} mr \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \delta \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Gleichung (A.16) ergibt für die Freiheitsgrade r und φ folgende Matrix

$$\mathbf{H}(V_{\mu_0}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial r \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial \varphi \partial r} & \frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial \varphi^2} \end{array} \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 V_\xi}{\partial r^2} + \mathbf{ident}_{\xi_0}(\delta r) \cdot \mathcal{J}^{-1} \mathbf{ident}_{\xi_0}(\delta r) & \frac{\partial^2 V_\xi}{\partial r \partial \varphi} \\ & \frac{\partial^2 V_\xi}{\partial \varphi^2} \end{array} \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}, \quad (2.7)$$

die für jede in Frage kommende Gleichgewichtslage $\mathbf{q}_0 = (r_0, \varphi_0)$ auf positive Definitheit überprüft werden muss. Die Einträge in der Nebendiagonale ergeben sich sowohl für $\varphi = 0$ als auch für $\varphi = \pi/2$ zu Null, womit die Einträge in der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix darstellen, die für Stabilität beide positiv sein müssen.

Tangentiale Gleichgewichtslage ($\varphi = \pi/2$)

Spezifiziert man zunächst den rechten unteren Eintrag von (2.7) auf $\varphi = \pi/2$, erhält man

$$\frac{\partial^2 V_\xi}{\partial \varphi^2} = -\frac{6a^2 r^2 km}{(a^2 + r^2)^{5/2}},$$

womit sich die tangentielle Lage als eine instabile relative Gleichgewichtslage für jede physikalisch sinnvolle Wahl der Parameter herausstellt. In weiterer Folge wird dieser Fall nicht näher diskutiert. Das Interesse beschränkt sich auf den radialen Fall, weil dieser für sehr große Stablängen ein stark idealisiertes mechanisches Modell für den *Sky-Hook* darstellt.

Radiale Gleichgewichtslage ($\varphi = 0$)

Beschränken wir unsere Betrachtung auf die radiale Gleichgewichtslage $\varphi = 0$, kann (2.6b) zu folgender nichtlinearen Gleichung

$$\frac{\partial V_\xi}{\partial r} = km \left(\frac{1}{(r-a)^2} + \frac{1}{(r+a)^2} \right) - 2rm\xi^2 = 0 \quad (2.8)$$

umgeformt werden, deren Lösung die noch zu bestimmende radiale Gleichgewichtslage r des Hantelsatelliten darstellt. Diese Gleichung gilt noch ganz allgemein für einen Hantelsatelliten im Zentralfeld eines beliebigen Planeten. Die radiale Lage r ist nur von der Stablänge a und der Gruppengeschwindigkeit ξ abhängig. Wir wollen zunächst die Gleichung in dieser allgemeinen Form weiter betrachten und nicht für das Gravitationsfeld der Erde spezialisieren. Für die Stabilitätsuntersuchung passen wir die beiden Einträge in (2.7) an den radialen Fall an, wodurch sich

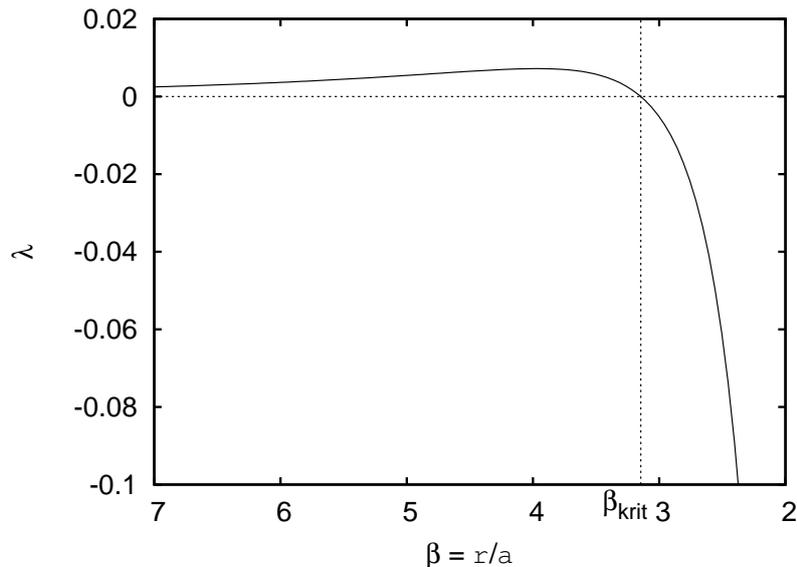
$$\frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial r^2} = -2m \left(\xi^2 + k \left(\frac{1}{(r-a)^3} + \frac{1}{(r+a)^3} \right) \right) + \frac{8mr^2 \xi^2}{a^2 + r^2} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial \varphi^2} = km ar \left(\frac{1}{(r-a)^3} - \frac{1}{(r+a)^3} \right) \quad (2.10)$$

ergibt. Der Term (2.10) ist wegen $r+a > r-a > 0$ sicher positiv. Um schließlich Aussagen über die Stabilität machen zu können muss noch (2.9) näher untersucht werden. Nachdem eine relative Gleichgewichtslage (2.8) erfüllen muss, kann daraus ξ ausgedrückt und in (2.9) eingesetzt werden. Wird zusätzlich die dimensionslose Größe $\beta = r/a$ eingeführt, kann (2.9) als

$$\frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial r^2} = \lambda = \frac{km}{a^3} \left[\frac{2(\beta^4 - 10\beta^2 + 1)}{\beta(\beta^2 - 1)^3} \right] \quad (2.11)$$

angeschrieben werden. Das Vorzeichen von (2.11) entscheidet somit, in Abhängigkeit von β , über die Stabilität der radialen Gleichgewichtslage.

Abbildung 2.2.: Stabilitätsverhalten in Abhängigkeit von β

Weil die Parameter k , a und m keine negativen Werte annehmen können, ist in Abb. 2.2 nur die eckige Klammer aus (2.11) dargestellt.

Das unerwartete Ergebnis kann so interpretiert werden, dass unabhängig von der Größe der beiden Endmassen m ab einem kritischen Verhältnis $\beta_{\text{krit}} \approx 3,146$ keine stabile Gleichgewichtslage mehr existiert. Für einen kurzen Hantelsatelliten ($\beta > \beta_{\text{krit}}$) ist die radiale, relative Gleichgewichtslage stabil. Wird der kritische Wert unterschritten ($\beta < \beta_{\text{krit}}$) kann sich der Hantelsatellit zwar radial einstellen, aber eine kleine Störung genügt, um ihn aus dieser Lage zu bringen, die er in weiterer Folge nicht mehr erreichen kann. Es handelt sich bei dieser Form des Stabilitätsverlustes um eine Bahninstabilität, wie man aus der Simulation der Bewegungsgleichungen folgern kann [14].

Bei diesem Beispiel ist es gelungen, die im Allgemeinen aufwendige Kontrolle der positiven Definitheit der Matrix (A.16) auf eine einzige Gleichung (2.11) zu reduzieren. In einem nächsten Schritt spezifizieren wir die obigen Ergebnisse auf unsere Erde, indem wir an Stelle der Winkelgeschwindigkeit des Planeten $\dot{\vartheta}$ jene der Erde $\dot{\vartheta}_e$ stellen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir in den folgenden Darstellungen auf den Index e . Soll der Hantelsatellit im Gravitationsfeld der Erde studiert werden, muss (2.8) für die Lage r und (2.9) für deren Stabilität gelöst werden. Für die numerische Lösung dieser Aufgabe wurde ein Homotopieverfahren verwendet. Weil bei späteren Auswertungen ebenfalls von diesem numerischen Verfahren Gebrauch gemacht wird, sei an dieser Stelle kurz die Grundidee skizziert.

2.1.1. Homotopieverfahren [7, 15]

Ein kompliziertes System $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ besitzt zumeist auch eine einfacher gebaute Variante $\mathbf{F}_0(\mathbf{x})$, die mit einem Newtonverfahren gelöst werden kann. Die Aufgabe besteht nun darin, mit einem Homotopieparameter $\tau \in [0, 1]$ beide Systeme in eine Familie $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) = 0$ einzubetten. Dieser Parameter verknüpft nun das einfache Problem $\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x})$ mit dem komplizierten $\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Es wird vorerst numerisch die Lösung für das einfache Problem $\tau = 0$ berechnet. In einem nächsten Schritt wird der Homotopieparameter auf $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta\tau$ erhöht und die Lösung der vorigen Berechnung als Startvektor für die Lösung des modifizierten Gleichungssystems verwendet. Falls die Lösungen stetig vom Homotopieparameter abhängig sind, nähert man sich durch Wiederholung der Lösungsschritte der gesuchten Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems. Der Homotopieparameter ist entweder ein künstlich eingeführter Parameter oder eine Größe, die bereits in den Gleichungen vorhanden ist. In den nachfolgenden Berechnungen wird entweder die Position der inneren Masse oder die des inneren Fadenendes ausgehend vom GEO in Richtung Erde geführt, womit diese, in den entsprechenden Gleichungen explizit auftretenden Größen als Homotopieparameter dienen.

Numerische Auswertung und Diskussion der Ergebnisse

Abbildung 2.3 zeigt die Lösung von (2.8), wobei in der numerischen Auswertung die Stablänge ausgehend von $a = 0$ soweit erhöht wurde, bis die innere Masse den Erdradius erreicht.

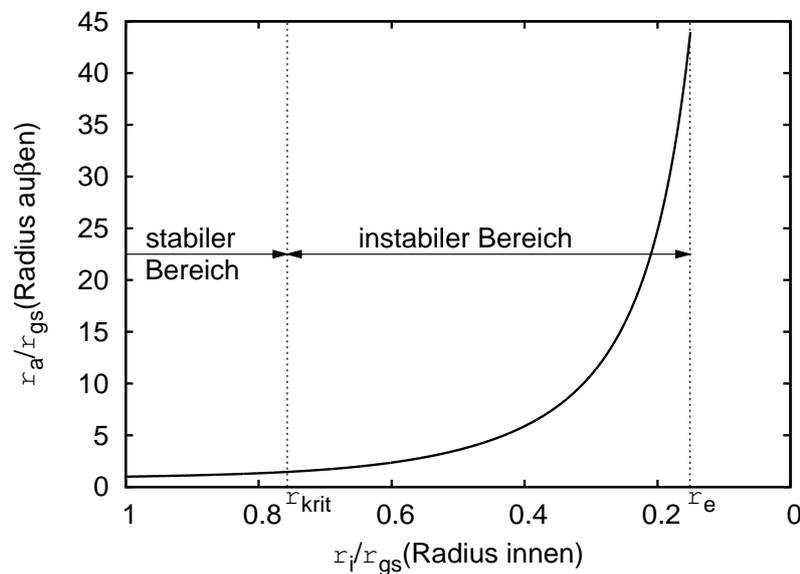


Abbildung 2.3.: Radiale Lagen des Hantelsatelliten

Für $a = 0$ befinden sich beide Massen im GEO $r_i/r_{gs} = r_a/r_{gs} = 1$. Wird jetzt a schrittweise erhöht, so nimmt, auf Grund des nichtlinearen Gravitationsfeldes, der Radius der äußeren Masse stärker zu als jener der inneren Masse ab. Um die Lage der inneren Masse

bis auf die Erdoberfläche reduzieren zu können ($r_i/r_{gs} = r_e/r_{gs} \approx 0,151$), ist eine Lage der äußeren Masse von $r_a/r_{gs} \approx 45$ notwendig. Die Kurve in Abb. 2.3 stellt also die Summe aller physikalisch sinnvollen Gleichgewichtslagen für $\varphi = 0$ dar. Wird nun die Stabilitätsbedingung (2.9) auf das Gravitationsfeld der Erde angepasst, so ergibt sich eine kritische Lage der inneren Masse von $r_{krit} \approx 0,756$. Die, für kleine Stablängen a stabile radiale Gleichgewichtslage wird instabil, noch bevor die innere Masse in die Nähe des Erdradius gelangt.

Auf den ersten Blick scheint das mechanische Modell des Hantelsatelliten nicht geeignet zu sein, wertvolle Aussagen für das Stabilitätsverhalten eines Raumaufzugs zu liefern. Mit einer kleinen Modifikation gelingt es dennoch, den Radius der inneren Masse weiter zu reduzieren, bis er die Erdoberfläche erreicht, und trotzdem Stabilität zu garantieren.

2.2. Starrer Hantelsatellit mit zusätzlicher Masse im GEO

Auf Grund der Tatsache, dass eine Punktmasse im GEO eine stabile, relative Gleichgewichtslage besitzt, kann das oben besprochene Modell durch eine zusätzliche Masse m_s im GEO, die als eine Raumstation verstanden werden kann, stabilisiert werden.

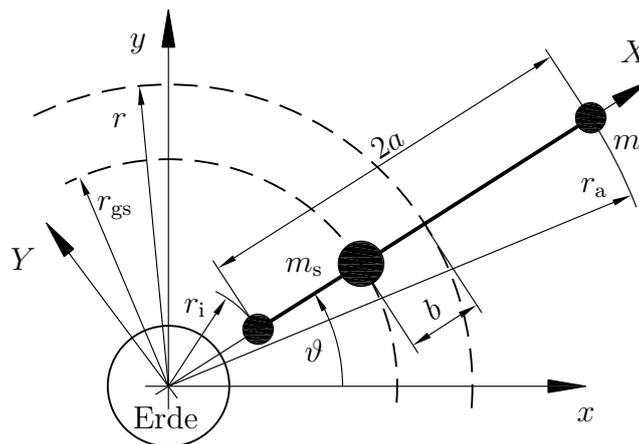


Abbildung 2.4.: Starrer Hantelsatellit mit zusätzlicher Masse in radialer Lage

Die zusätzliche Masse m_s verändert grundsätzlich die Anzahl der Freiheitsgrade im System nicht, weil die Verbindungen zu den beiden Endmassen über die starre Hantel erfolgt. Analog zum vorigen Modell sind Gleichgewichtslagen nur in radialer ($\varphi = 0$) oder tangentialer ($|\mathbf{r}_i| = |\mathbf{r}_a|$) Konfiguration möglich, wobei die tangentialen Gleichgewichtslagen, unabhängig von den Parametern, instabil sind. Mit anderen Worten kann eine beliebig große, zusätzliche Masse im GEO die tangentialen Gleichgewichtslagen nicht stabilisieren, aus diesem Grund betrachten wir nur die in Abb. 2.4 dargestellte radiale Konfiguration. Die benötigten Ausdrücke werden daher für $\varphi = 0$ angeschrieben und zusätzlich ein Massenverhältnis $\alpha = m_s/m$ eingeführt, wodurch sich die kinetische bzw.

potentielle Energie zu

$$T = m \left(\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 (r^2 + a^2) \right) + \frac{1}{2} \alpha \left(\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 (r - b)^2 \right) \quad (2.12)$$

$$V = -km \left(\frac{1}{(r - a)} + \frac{1}{(r + a)} + \frac{\alpha}{(r - b)} \right) \quad (2.13)$$

ergeben. Gemäß (A.10) bestimmt sich der *locked inertia tensor* aus dem Ausdruck für die kinetische Energie zu

$$\mathcal{J}(r) = m(2(a^2 + r^2) + \alpha(r - b)^2)$$

und der *ident*-Operator mit (A.17) zu

$$\mathbf{ident}_{\xi_0}(\delta \mathbf{q}) = -\xi m(4r + 2\alpha(r - b))\delta r.$$

Somit ergibt sich das *augmented potential* (A.8) zu

$$V_{\xi}(r) = -km \left(\frac{1}{(r - a)} + \frac{1}{(r + a)} + \frac{\alpha}{(r - b)} \right) - \frac{\xi^2}{2} m (2(a^2 + r^2) + \alpha(r - b)^2). \quad (2.14)$$

Mit der Ableitung des Potentials (2.14) nach dem Freiheitsgrad r erhalten wir die Bestimmungsgleichung für die noch unbekanntene Lage r

$$\frac{\partial V_{\xi}}{\partial r} = 0 = \underbrace{km \left(\frac{1}{(r - a)^2} + \frac{1}{(r + a)^2} \right)}_{= \text{Gleichung (2.8)}} - 2rm\xi^2 + \alpha m \left(\frac{k}{(r - b)^2} - \xi^2(r - b) \right). \quad (2.15)$$

In der Beschreibung der Position der zusätzlichen Masse m_s wurde mit $r - b$ die Abhängigkeit vom Freiheitsgrad r sichergestellt (starre Verbindung der Massen). Der letzte Klammerausdruck aus (2.15) ergibt mit $r - b = r_{\text{gs}}$ und (2.5) Null. Wie zu erwarten war, beeinflusst die Masse im GEO die Lage des Hantelsatelliten nicht, weil sich die vom masselosen Stab zu übertragenden Kräfte durch die zusätzliche Masse m_s nicht verändern. Gleichung (2.8) beschreibt somit die radiale Lage des Hantelsatelliten mit und ohne zusätzlicher Masse im GEO.

Um die Stabilität der soeben bestimmten Lagen r zu überprüfen, muss die positive Definitheit von (A.16) an dieser Gleichgewichtslage gezeigt werden.

$$\frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial r^2} = \lambda = \frac{\partial^2 V_{\xi}}{\partial r^2} + \mathbf{ident}_{\xi_0}(\delta r) \cdot \mathcal{J}^{-1} \mathbf{ident}_{\xi_0}(\delta r) \quad (2.16)$$

Nach erfolgter Differentiation kann $r - b$ durch r_{gs} ersetzt werden und ergibt

$$\frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial r^2} = m \left[-2k \left(\frac{1}{(r - a)^3} + \frac{1}{(r + a)^3} + \frac{\alpha}{(r_{\text{gs}})^3} \right) - \xi^2 (2 + \alpha) + \frac{4(2r + r_{\text{gs}}\alpha)^2}{2a^2 + 2r^2 + \alpha r_{\text{gs}}^2} \right]. \quad (2.17)$$

In der bisherigen Darstellung aller Gleichungen war mit der Festlegung des Freiheitsgrads r und der Stablänge a die Lage beider Massen m eindeutig bestimmt. Für die numerische Behandlung der Systemgleichungen (2.15) und (2.17), aber auch um eine anschaulichere Darstellung zu gewinnen, drücken wir die Gleichungen direkt durch die Lage der inneren Masse r_i und der äußeren r_a aus (vgl. Abb. 2.4) und erhalten schließlich

$$\frac{\partial V_\xi}{\partial r} = 0 = m \left[k \left(\frac{1}{r_i^2} + \frac{1}{r_a^2} \right) - \xi^2 (r_i + r_a) \right] \quad (2.18a)$$

$$\frac{\partial^2 V_{\mu_0}}{\partial r^2} = \lambda = m \left[-2k \left(\frac{1}{r_i^3} + \frac{1}{r_a^3} + \frac{\alpha}{r_{gs}^3} \right) - \xi^2 (2 + \alpha) + \frac{4(r_a + r_i + r_{gs}\alpha)^2}{r_a^2 + r_i^2 + r_{gs}^2\alpha} \right]. \quad (2.18b)$$

Die Untersuchung des starren Hantelsatelliten mit zusätzlicher Masse im GEO reduziert sich also auf die Lösung von (2.18), die den Zusammenhang zwischen der Lage beider Massen r_i und r_a , dem Massenverhältnis α und dem Eigenwert λ ausdrückt. Beide Gleichungen enthalten natürlich den zuvor betrachteten Fall ohne zusätzliche Masse im GEO ($\alpha = 0$).

Für die numerische Lösung machen wir wieder vom, im Kapitel 2.1.1 dargestellten, Homotopieverfahren für nichtlineare Gleichungen Gebrauch. Als Homotopieparameter wurde der Radius der inneren Masse r_i verwendet, der für $r_i = r_{gs}$ das einfache Problem beider Punktmassen im GEO repräsentiert, und für $r_i \rightarrow r_e$ ein Modell für den Raumaufzug liefert. Zu Beginn der Rechnung wird α auf Null gesetzt und für jedes r_i mit (2.18a) das zugehörige r_a bestimmt bzw. mit (2.18b) der Eigenwert λ berechnet. Wie schon aus dem ersten Beispiel bekannt, wird der Eigenwert λ für die kritische Lage $r_{krit} \approx 0,756$ der inneren Masse Null. Ab dieser Lage wird in der Rechnung der Eigenwert auf Null gehalten und für fortschreitende Reduktion von r_i das notwendige Massenverhältnis α berechnet, das einen Eigenwert von Null sicherstellt.

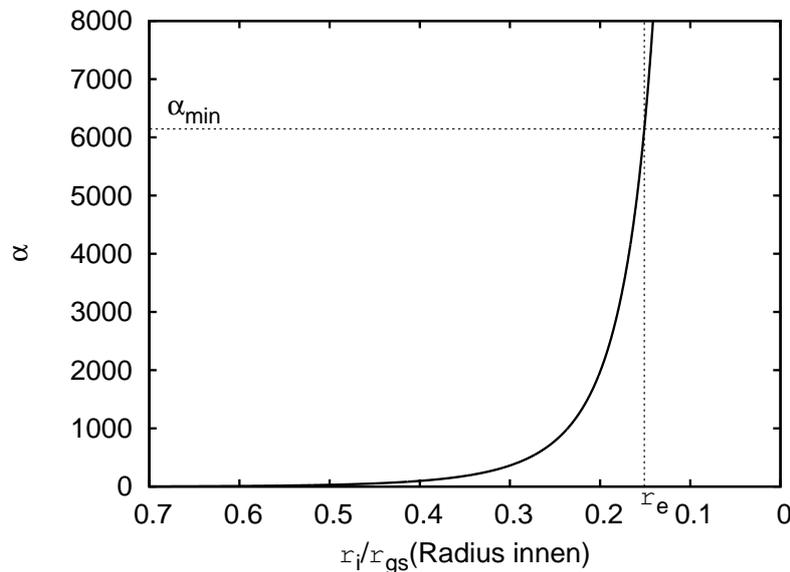


Abbildung 2.5.: Massenverhältnis zur Stabilisierung des starren Hantelsatelliten

Das System wird also nach dem Stabilitätsverlust an dieser Stabilitätsgrenze gehalten und die innere Masse weiter in Richtung Erdoberfläche geführt. Als Ergebnis wird das Massenverhältnis α zurückgeliefert, das für $\lambda = 0$ notwendig ist. Abbildung 2.5 zeigt die Lösung von (2.18) mit dem Ergebnis, dass ein $\alpha_{\min} \approx 6200$ notwendig ist, um den Radius der inneren Masse bis auf den Erdradius zu reduzieren. Dieses Resultat ist wertvoll, weil es die Größenordnung des Massenverhältnisses zeigt, das für die Stabilisierung des starren Hantelsatelliten mindestens notwendig ist. Die Betonung liegt auf mindestens, weil das System an der Stabilitätsgrenze gehalten wird.

2.3. Elastischer Hantelsatellit

Bei diesem Modell versuchen wir der Realität näher zu kommen, indem wir die starre Verbindung der Punktmassen durch elastische, masselose Federn ersetzen. Natürlich ist das immer noch eine Vereinfachung, aber, durch Hinzunahme von Federsteifigkeit und ungedehnter Federlänge, kommen Kennwerte in die Berechnung, die es uns erlauben werden, verschiedene Werkstoffe zu analysieren und zu vergleichen.

Die Betrachtung des starren Modells hat ergeben, dass eine zusätzliche Masse im GEO zur Stabilisierung notwendig ist, daher wird diese auch für den elastischen Hantelsatelliten vorgesehen. Auf Grund der einfachen Federelemente ist nur die Betrachtung der radialen Konfiguration sinnvoll.

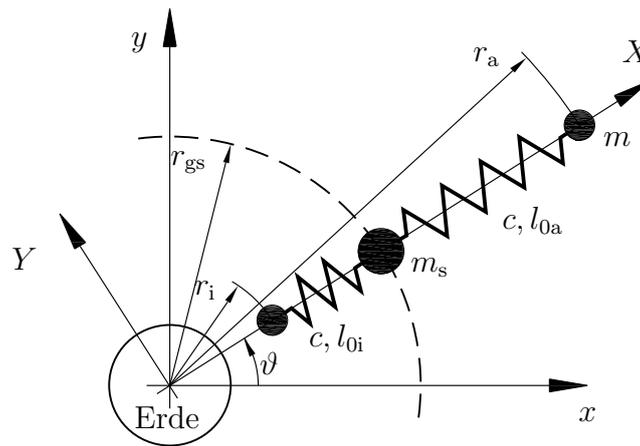


Abbildung 2.6.: Elastischer Hantelsatellit mit zusätzlicher Masse im GEO

Abbildung 2.6 zeigt das Modell mit den Radien r_i , r_a und r_{gs} bzw. dem Winkel ϑ , mit deren Angabe die Lage des Systems eindeutig bestimmt ist. Die beiden Verbindungen der Massen m mit der Masse im GEO m_s sollen aus dem gleichen Material sein, daher werden beide Federn mit derselben Federsteifigkeit c modelliert, aber mit unterschiedlichen ungedehnten Längen l_{0i} und l_{0a} . Bevor die Systemgleichungen aufgestellt werden, muss noch der Federsteifigkeit erhöhte Aufmerksamkeit geschenkt werden. Ein wichtiges Ziel der Betrachtung des elastischen Hantelsatelliten ist es, Werkstoffe auf ihre Anwendbarkeit in einem Raumaufzug zu untersuchen. In Tab. B.1 sind jene Werkstoffe zusammengestellt, die in der vorliegenden Arbeit betrachtet werden. Um nun die entsprechenden Werkstoffkennwerte in Federsteifigkeiten umzurechnen, stellt man sich die Feder als einen elastischen Faden der Querschnittsfläche A vor, der eine Längssteifigkeit von

$$c = \frac{EA}{l_0} \quad (2.19)$$

besitzt. Bleibt noch zu klären, wie groß die Querschnittsfläche A in Rechnung zu stellen ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sowohl beim elastischen als auch beim starren Hantelsatelliten die Kraft im jeweiligen Verbindungselement nur von der Lage der beiden Massen m abhängig, und entlang der Achse konstant ist. Die Kraft ist

deshalb konstant, weil in beiden Modellen die vereinfachende Annahme von masselosen Fäden getroffen wurde. Beim elastischen Modell kann aus der Zugkraft im Faden sofort über die maximale Zugspannung σ_{\max} des jeweiligen Werkstoffs die notwendige Querschnittsfläche berechnet werden. Weil die Dichten der untersuchten Werkstoffe nicht in die Rechnung eingehen, muss, für die Berechnung der Steifigkeit mit (2.19), jeweils derselbe repräsentative Querschnitt verwendet werden. Würde der erforderliche Querschnitt jedes einzelnen Werkstoffs in die Bestimmung der Federsteifigkeit eingehen, dann hätte bei unseren Werkstoffen Stahl die größte Steifigkeit. Für die nachfolgenden Berechnungen soll weiters die Querschnittsfläche nicht an die jeweilige Lage der inneren Masse r_i (vgl. Homotopieverfahren) angepasst, sondern konstant gehalten werden. Der Fadenquerschnitt bestimmt sich aus jener Konfiguration, die mit der größten Zugbelastung verbunden ist. Befindet sich die Masse nahe der Erdoberfläche, so überwiegt die Gravitationskraft die Kraft zufolge der Erdrotation, wodurch die Fadenkraft der Differenz beider Kräfte das Gleichgewicht halten muss und den Faden auf Zug belastet. Diese Überlegung führt auf die Bestimmungsgleichung

$$A_{\min} = \frac{F_{\text{Feder}}}{\sigma_{\max}} = \frac{m}{\sigma_{\max}} \left(\frac{k}{r_e^2} - \xi^2 r_e \right) \quad (2.20)$$

für die Fadenquerschnittsfläche. Gleichungen (2.19) und (2.20) stellen also formal den Zusammenhang zwischen maximaler Zugspannung σ_{\max} , dem E-Modul E und der Federsteifigkeit c her. Bei aufwendigeren Modellen, wie sie bei [14] zu finden sind, wird für jeden Werkstoff ein Querschnitt gewählt der sich am jeweiligen σ_{\max} orientiert, weil dort die Dichte und somit die Masse des Fadens mitberücksichtigt wird.

Mit den vier Freiheitsgraden r_i , r_a , r_{gs} , ϑ und dem Massenverhältnis $\alpha = m_s/m$ (vgl. Abb. 2.6) ergibt sich die kinetische und die potentielle Energie zu

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}_i^2 + \dot{r}_a^2 + \dot{\vartheta}^2(r_i^2 + r_a^2) + \alpha \left(\dot{r}_m^2 + r_{\text{gs}}^2 \dot{\vartheta}^2 \right) \right) \quad (2.21)$$

$$V = -km \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} + \frac{\alpha}{r_{\text{gs}}} \right) + \frac{EA}{2(l_{0i} + l_{0a})} (r_{\text{gs}} - r_i - l_{0i})^2 + \frac{EA}{2(l_{0i} + l_{0a})} (r_a - r_{\text{gs}} - l_{0a})^2. \quad (2.22)$$

Aus dem *locked inertia tensor* (A.10)

$$\mathcal{J}(r_i, r_a, r_{\text{gs}}) = m (r_i^2 + r_a^2 + \alpha r_{\text{gs}}^2) \quad (2.23)$$

und dem Potential (2.22) berechnet sich das *augmented potential* (A.8) zu

$$V_{\xi}(r_i, r_a, r_{\text{gs}}) = -km \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} + \frac{\alpha}{r_{\text{gs}}} \right) + \frac{EA}{2(l_{0i} + l_{0a})} (r_{\text{gs}} - r_i - l_{0i})^2 + \frac{EA}{2(l_{0i} + l_{0a})} (r_a - r_{\text{gs}} - l_{0a})^2 - \frac{\xi^2}{2}m (r_i^2 + r_a^2 + \alpha r_{\text{gs}}^2). \quad (2.24)$$

Für die spätere numerische Behandlung ist es vorteilhaft, alle explizit auftretenden Längen auf r_{gs} zu beziehen. Somit ergibt sich aus (2.23) und (2.24)

$$\begin{aligned} V_{\xi}(r_i, r_a, r_{\text{gs}}) &= -km \frac{1}{r_{\text{gs}}} \left(\frac{1}{\tilde{r}_i} + \frac{1}{\tilde{r}_a} + \frac{\alpha}{\tilde{r}_m} \right) + \frac{EA r_{\text{gs}}^2}{2 r_{\text{gs}}} \left(\frac{(\tilde{r}_m - \tilde{r}_i - \tilde{l}_{0i})^2}{\tilde{l}_{0i} + \tilde{l}_{0a}} \right) \\ &\quad + \frac{EA r_{\text{gs}}^2}{2 r_{\text{gs}}} \left(\frac{(\tilde{r}_a - \tilde{r}_m - \tilde{l}_{0a})^2}{\tilde{l}_{0i} + \tilde{l}_{0a}} \right) - \frac{\xi^2}{2} m r_{\text{gs}}^2 (\tilde{r}_i^2 + \tilde{r}_a^2 + \alpha \tilde{r}_m^2) \\ \mathcal{J}(r_i, r_a, r_{\text{gs}}) &= m r_{\text{gs}}^2 (\tilde{r}_i^2 + \tilde{r}_a^2 + \alpha \tilde{r}_m^2), \end{aligned}$$

und nach Division durch $\frac{1}{2}\xi^2 m r_{\text{gs}}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\xi}(r_i, r_a, r_{\text{gs}}) &= -2 \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} + \frac{\alpha}{r_{\text{gs}}} \right) + \kappa \left(\frac{(r_{\text{gs}} - r_i - l_{0i})^2}{l_{0i} + l_{0a}} \right) \\ &\quad + \kappa \left(\frac{(r_a - r_{\text{gs}} - l_{0a})^2}{l_{0i} + l_{0a}} \right) - (r_i^2 + r_a^2 + \alpha r_{\text{gs}}^2) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}(r_i, r_a, r_{\text{gs}}) = \frac{2}{\xi^2} (r_i^2 + r_a^2 + \alpha r_{\text{gs}}^2), \quad (2.26)$$

mit der Konstanten

$$\kappa = \frac{EA}{\xi^2 m r_{\text{gs}}}. \quad (2.27)$$

Es ist uns also gelungen, alle physikalischen Größen in einen Parameter (2.27) zusammen zu ziehen und sowohl das Potential, als auch den *locked inertia tensor* in eine skalierte Form (2.25) bzw. (2.26) überzuführen.

Die Stabilitätsbetrachtung mit dem *augmented potential* (2.25) führt in weiterer Folge auf numerische Schwierigkeiten, weil die Matrix (A.16), deren positive Definitheit gezeigt werden muss, für diese Wahl der Freiheitsgrade (r_i , r_a und r_{gs}), aus numerischer Sicht, singularär wird. Der Grund dafür liegt in den stark variierenden Größenordnungen der entsprechenden Einträge. In (2.25) übersteigt κ alle anderen Werte um zwei bis drei Größenordnungen, wodurch die numerische Bestimmung der Eigenwerte der Matrix (A.16) entsprechend schwierig ist. Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen ist die Einführung neuer Freiheitsgrade, die diese Unausgewogenheit der Matrixeinträge kompensieren.

Der Freiheitsgrad der inneren Masse r_i bleibt in den Gleichungen erhalten, wohingegen r_{gs} durch die Kraft in der inneren Feder N_i , und r_a durch die Kraft in der äußeren Feder N_a ersetzt wird. Um diesen Übergang zu schaffen, beschreibt man die Lage der mittleren Masse r_{gs} als Summe der Position der inneren Masse r_i , der ungedehnten Federlänge l_{0i} und der Verlängerung dieser Feder. Für die Lage der äußeren Masse r_a geht man ähnlich

vor und erhält folgende Transformationen

$$\begin{aligned} r_i &\Rightarrow r_i \\ r_{\text{gs}} &\Rightarrow r_i + l_{0i} \left(1 + \frac{N_i}{EA} \right) \\ r_a &\Rightarrow r_i + l_{0i} \left(1 + \frac{N_i}{EA} \right) + l_{0a} \left(1 + \frac{N_a}{EA} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

die den Übergang auf die neuen Freiheitsgrade r_i , N_i und N_a darstellen. Angewandt auf das Potential (2.25) und den *locked inertia tensor* (2.26) ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\xi(q) = & -2 \left[\frac{1}{r_i} + EA \left(\frac{1}{r_i EA + l_{0a}(N_a + EA) + l_{0i}(N_i + EA)} + \frac{\alpha}{r_i EA + l_{0i}(N_i + EA)} \right) \right] \\ & - \left\{ r_i^2 + \left[r_i + l_{0i} \left(1 + \frac{N_i}{EA} \right) + l_{0a} \left(1 + \frac{N_a}{EA} \right) \right]^2 + \alpha \left[r_i + l_{0i} \left(1 + \frac{N_i}{EA} \right) \right]^2 \right\} \\ & + \kappa \frac{N_i^2 l_{0i}^2}{(EA)^2 (l_{0i} + l_{0a})} + \kappa \frac{N_a^2 l_{0a}^2}{(EA)^2 (l_{0i} + l_{0a})} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}(q) = \frac{2}{\xi^2} \left\{ r_i^2 + \left[r_i + l_{0i} \left(1 + \frac{N_i}{EA} \right) + l_{0a} \left(1 + \frac{N_a}{EA} \right) \right]^2 + \alpha \left[r_i + l_{0i} \left(1 + \frac{N_i}{EA} \right) \right]^2 \right\}. \quad (2.30)$$

Mit dem Potential (2.29) wird wie in der vorangegangenen Stabilitätsuntersuchung verfahren, aber, auf Grund der Länge der entstehenden Beziehungen, werden die Gleichungen nicht explizit angeschrieben. Die nachfolgende Darstellung beschränkt sich auf das zu lösende Gleichungssystem, die Vorgehensweise bei der numerischen Behandlung und die Diskussion der gefundenen Ergebnisse.

Zunächst führt die Ableitung von (2.29) nach den Freiheitsgraden r_i , N_i und N_a gemäß (A.13)

$$\frac{\partial \tilde{V}_\xi}{\partial r_i} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{V}_\xi}{\partial N_i} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{V}_\xi}{\partial N_a} = 0 \quad (2.31)$$

zu den Bestimmungsgleichungen für die Gleichgewichtslagen r_{i0} , N_{i0} und N_{a0} , aus denen sofort mit (2.28) und den ungedehnten Längen l_{0i} , l_{0a} die entsprechenden Lagen der einzelnen Massen bestimmt werden können. Aus der Menge aller Lösungen des obigen Gleichungssystems sind nur jene von Interesse, die einem stabilen Systemverhalten entsprechen. Um mit (A.16) Aussagen über die Stabilität machen zu können bestimmen wir zunächst den *ident*-Operator gemäß (A.17)

$$\mathbf{ident}_{\xi_0}(\delta q) = -\frac{4}{\xi} \begin{pmatrix} \frac{l_{0a}(N_a + EA) + l_{0i}(N_i + EA)(1 + \alpha) + r_i EA(2 + \alpha)}{l_{0i}(l_{0a}(N_a + EA) + (r_i EA + l_{0i}(N_i + EA))(1 + \alpha))} \\ \frac{EA}{(EA)^2} \\ \frac{l_{0a}(l_{0i}(N_i + EA) + r_i EA + l_{0a}(N_a + EA))}{(EA)^2} \end{pmatrix} \cdot \delta \begin{pmatrix} r_i \\ N_i \\ N_a \end{pmatrix}.$$

Dieser verknüpft die zweiten Ableitungen des *augmented potentials* mit jenen des *amen-
ded potentials*. In weiterer Folge ergibt sich mit (A.16) folgende Matrix

$$\mathbf{H}(\tilde{V}_{\mu_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial r_j^2} & \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial r_i \partial N_i} & \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial r_i \partial N_a} \\ \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial N_i \partial r_i} & \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial N_i^2} & \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial N_i \partial N_a} \\ \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial N_a \partial r_i} & \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial N_a \partial N_i} & \frac{\partial^2 \tilde{V}_{\mu_0}}{\partial N_a^2} \end{bmatrix}_{r_{i0}, N_{i0}, N_{a0}}, \quad (2.32)$$

die, um Stabilität zu gewährleisten, positiv definit sein muss. Es sei noch angemerkt, dass durch den Übergang auf die neuen Freiheitsgrade (r_{i0} , N_{i0} und N_{a0}) diese Matrix, im Gegensatz zur Darstellung in den ursprünglichen Freiheitsgraden, vollbesetzt ist.

Grundsätzlich stehen mehrere Verfahren zur Auswahl, um die Definitheit einer Matrix zu zeigen. Für dieses konkrete Problem wurden die Eigenwerte von $\mathbf{H}(\tilde{V}_{\mu_0})$ bestimmt, was auf die charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{H}(\tilde{V}_{\mu_0}) - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (2.33a)$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$-\lambda^3 + \lambda^2 d + \lambda e + f = 0 \quad (2.33b)$$

mit den entsprechenden Einträgen der Matrix in Indexschreibweise

$$d = H_{11} + H_{22} + H_{33} \quad (2.34a)$$

$$e = H_{12}^2 + H_{13}^2 + H_{23}^2 - H_{11}H_{22} - H_{11}H_{33} - H_{22}H_{33} \quad (2.34b)$$

$$f = -H_{12}^2 H_{33} + H_{13}^2 H_{22} + 2H_{12}H_{13}H_{23} + H_{11}H_{22}H_{33} \quad (2.34c)$$

führt. Im Stabilitätsproblem des elastischen Hantelsatelliten treten neun Unbekannte auf: die drei Freiheitsgrade r_i , N_i und N_a , das Massenverhältnis α , die ungedehnten Federlängen beider Federn l_{0i} und l_{0a} sowie die drei Eigenwerte λ_1 , λ_2 und λ_3 . Mit (2.31) und (2.33) bzw. (2.34) haben wir erst sechs Gleichungen für neun Unbekannte, oder anders ausgedrückt benötigen wir noch drei Gleichungen für eine eindeutige Lösung. Eine weitere Gleichung liefert uns die Voraussetzung, dass die zusätzliche Masse im GEO angebracht wird, womit

$$r_{\text{gs}} = 1 = r_i + l_{0i} \left(1 + \frac{N_i}{EA} \right) \quad (2.35)$$

erfüllt werden muss. Bei der numerischen Behandlung kommt, wie bei den vorigen Beispielen, ein Homotopieverfahren (Kap. 2.1.1) zum Einsatz. Wieder ist die Lage der inneren Masse r_i unser Homotopieparameter, der ausgehend von der Lage im GEO $r_i = 1$ (einfaches Problem) in Richtung Erde $r_i \rightarrow r_e$ (kompliziertes Problem) geführt wird. Das Vorschreiben von r_i , in Abhängigkeit der Schrittweite, liefert eine weitere Gleichung. Zu

Beginn der Auswertung wird das Massenverhältnis α auf Null gehalten. Wenn im Laufe der Rechnung einer der drei Eigenwerte Null ergibt, das System somit Stabilitätsverlust erleidet, so wird in der weiteren Berechnung dieser auf Null gehalten und das Massenverhältnis aus den Gleichungen bestimmt. Durch Festhalten des Massenverhältnisses, bzw. des Eigenwerts auf dem Wert Null erhält man die letzte Gleichung, womit das Gleichungssystem vollständig definiert ist.

Numerische Auswertung und Diskussion der Ergebnisse

An dieser Stelle sei kurz die Vorgehensweise der Berechnung der Eigenwerte von (2.32) skizziert. Die numerische Auswertung startet bei $r_i = 1$, womit eine stabile Lage beider Massen im GEO garantiert wird und daher alle Eigenwerte positives Vorzeichen besitzen. Weil die Eigenwerte stetig von den restlichen Unbekannten des Systems abhängig sind, muss für Stabilitätsverlust der kritische Eigenwert in Abhängigkeit vom Homotopieparameter einen Nulldurchgang besitzen. Der kritische Eigenwert ist genau dann Null, wenn in (2.33b) der Koeffizient f (2.34c) identisch gleich Null ist. Kommt das System an eben diese Stabilitätsgrenze, wird in der numerischen Auswertung nicht der Eigenwert direkt, sondern der Koeffizient f auf Null gehalten. Für die weitere Rechnung wird dann das Massenverhältnis α bestimmt und zusätzlich darauf geachtet, dass nicht e aus (2.34b) ebenfalls Null wird, was einen zweiten Nulleigenwert zur Folge hätte. Bei allen numerischen Auswertungen ist dieser Fall jedoch nie aufgetreten. Mit anderen Worten sind nicht die drei Eigenwerte (λ_1 , λ_2 und λ_3) Unbekannte im Gleichungssystem, sondern die Koeffizienten d , e und f mit den entsprechenden Bestimmungsgleichungen (2.34). Der Grund für diese Vorgehensweise liegt darin, dass es einfacher ist, im Zuge der Homotopie f auf Null zu halten als den Eigenwert selbst.

In Tab. B.1 sind jene Werkstoffe angegeben, die bei der numerischen Auswertung obiger Gleichungen Berücksichtigung fanden. Die Federsteifigkeit geht mit (2.19) in die Rechnung ein. Wie bereits erwähnt, muss, um die Vergleichbarkeit der Resultate zu gewährleisten, derselbe Fadenquerschnitt für alle Werkstoffe angenommen werden. Dieser Querschnitt wird für das Material mit der geringsten Zugfestigkeit, also für Stahl mit (2.20) bestimmt und ergibt $A_{\min} \approx 2 \cdot 10^{-9} m^2$, bei Endmassen von 1 kg. Zusätzlich wurden die Rechnungen auch mit einer Querschnittsfläche von $A \approx 2 \cdot 10^{-8} m^2$ durchgeführt. Weil in die Berechnung der Federsteifigkeit mit (2.19) für alle untersuchten Materialien dieselbe Querschnittsfläche A in Rechnung zu stellen ist, und CTT und CTM gleichen E-Modul aufweisen (vgl. Tab. B.1), ergibt die Stabilitätsanalyse mit diesem Modell für beide Materialien dieselben Ergebnisse.

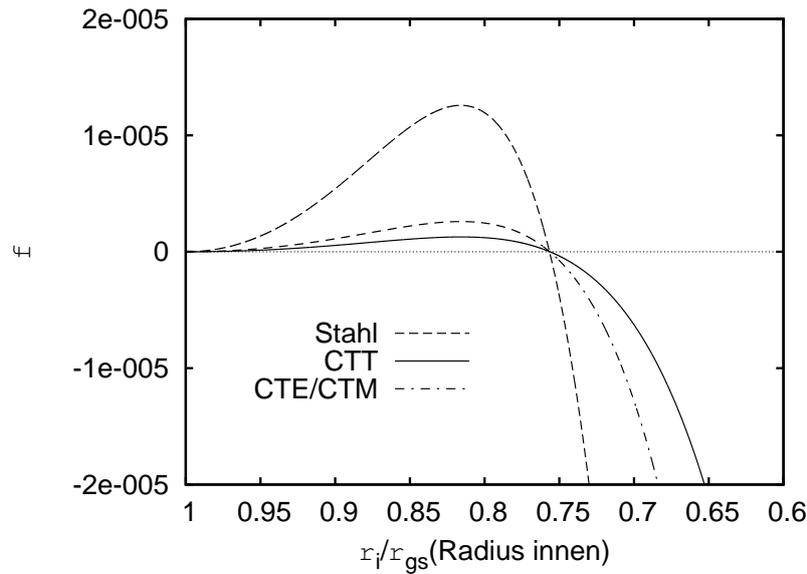
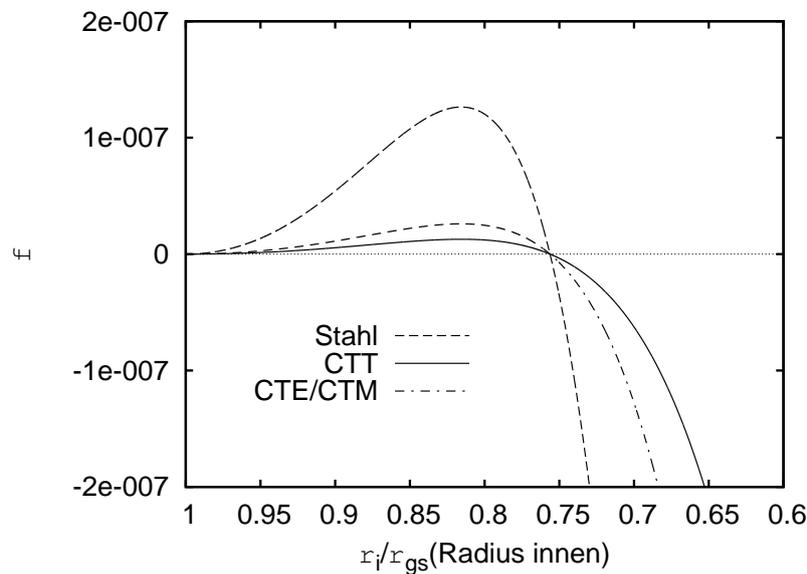
Abbildung 2.7.: Stabilitätsverhalten für $A = 2 \cdot 10^{-9} m^2$

Abbildung 2.7 zeigt den Wert der Konstanten f in Abhängigkeit von der Position der inneren Masse. Erreicht die innere Masse einen kritischen Wert von $r_i/r_{gs} \approx 0,756$, wird ein Eigenwert Null und es tritt Stabilitätsverlust ein. Für die Querschnittsfläche von $A = 2 \cdot 10^{-8} m^2$ zeigt sich, mit unterschiedlicher Größenordnung der Werte für f , dasselbe grundsätzliche Systemverhalten, das in Abb. 2.8 dargestellt ist.

Abbildung 2.8.: Stabilitätsverhalten für $A = 2 \cdot 10^{-8} m^2$

In beiden Fällen tritt Stabilitätsverlust im Bereich der Werte des starren Hantelsatelliten (vgl. Abb. 2.3) auf. Dieses Ergebnis ist zwar interessant, aber für unsere Betrachtung ist es unerheblich, ob das System bei $r_i/r_{gs} = 0,756$ oder erst bei $r_i/r_{gs} = 0,7$ instabil wird,

weil diese Werte immer noch weit entfernt von der Erdoberfläche $r_i/r_{gs} = 0,151$ liegen. Ein signifikanter Unterschied zwischen den jeweiligen Materialien besteht im notwendigen Massenverhältnis α , um das System an der Stabilitätsgrenze zu halten. Die Ergebnisse für beide Fadenquerschnitte sind in den Abbildungen 2.9 und 2.10 zusammengestellt.

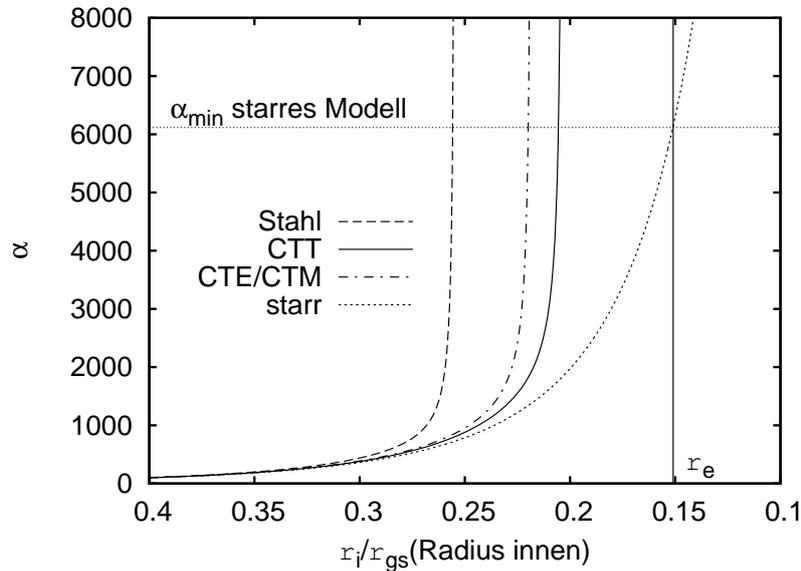


Abbildung 2.9.: Massenverhältnis α_{\min} für Stabilisierung bei $A = 2 \cdot 10^{-9} m^2$

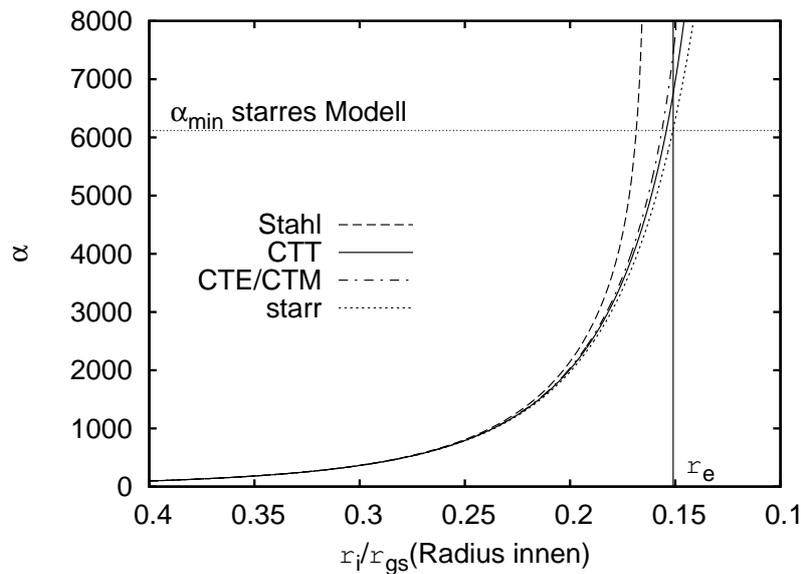


Abbildung 2.10.: Massenverhältnis α_{\min} für Stabilisierung bei $A = 2 \cdot 10^{-8} m^2$

Der Vergleich beider Ergebnisse zeigt eindeutig, dass die in der Modellbildung als masselos und linear elastisch vorausgesetzten Federn nicht dazu geeignet sind, Werkstoffe auf ihre mögliche Anwendbarkeit beim Raumaufzug hin zu untersuchen. Der Grund dafür liegt in der Bestimmung der Federsteifigkeit mit (2.19), womit ein erhöhter Fa-

denquerschnitt zu einer größeren Steifigkeit c führt. In natürlicher Weise würde diese Querschnittserhöhung das Gesamtgewicht des Fadens erhöhen, was sich aber in den masselosen Federn nicht widerspiegeln kann.

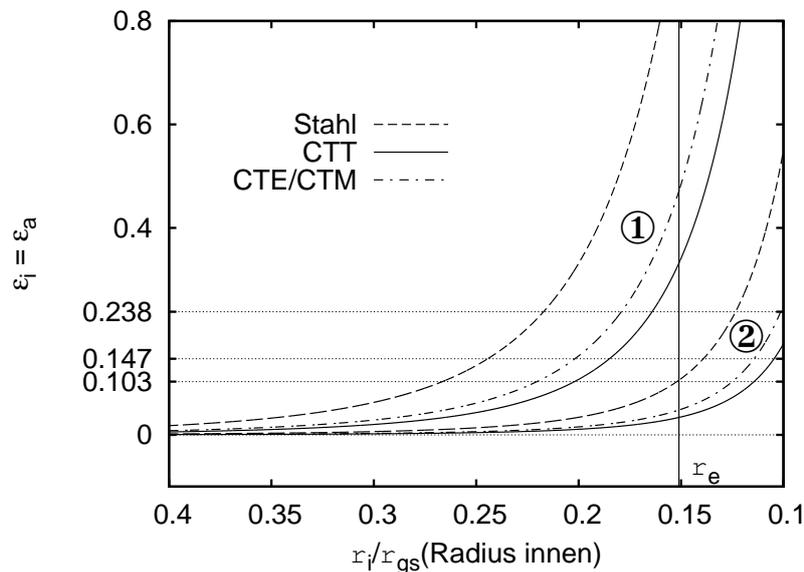


Abbildung 2.11.: Dehnung der inneren und äußeren Feder

Trägt man die entsprechenden Dehnungen der Federn ($\varepsilon_i = \varepsilon_a$) über der Lage der inneren Masse auf, so wird die Schwäche des gewählten Modells erkennbar. Abbildung 2.11 zeigt die entsprechenden Verläufe für $A = 2 \cdot 10^{-9} m^2$ (Kuvenschar ①) und für $A = 2 \cdot 10^{-8} m^2$ (Kurvenschar ②). Eine Erhöhung des Fadenquerschnitts bewirkt also eine Verschiebung der Dehnungskurven nach rechts, zu Lagen der inneren Masse näher der Erde. Zusätzlich sind die maximalen Dehnungen für die *carbon nanotubes* gemäß Tab. B.1 eingezeichnet. Die Analyse des vorliegenden Modells liefert, trotz seiner Einfachheit, qualitativ wichtige Erkenntnisse über das Verhalten eines elastischen Hantelsatelliten im Gravitationsfeld der Erde. Einerseits zeigt der Vergleich mit dem starren Hantelsatelliten, dass dieser eine nie zu erreichende obere Schranke darstellt, weil mit geringstem Massenverhältnis α die Erdoberfläche erreicht wird (Abb. 2.9, Abb. 2.10). Andererseits ergeben die Resultate dieses Modells, dass die Federsteifigkeit darüber entscheidet, ob die innere Masse bis auf die Erdoberfläche geführt werden kann, bei gleichzeitig stabilem Systemverhalten. Wir haben gesehen, dass durch die Modellierung mit einfachen Federn die Verläufe des Massenverhältnisses und der Dehnung entscheidend vom Querschnitt A abhängig sind. Ungeachtet dessen zeigt beispielsweise Abb. 2.9, dass für manche Steifigkeiten ein Grenzwert für die zu erreichenden Lage existiert. Es ist zunächst nicht einsichtig, warum für $\alpha \rightarrow \infty$ nicht jede Lage r_i erreichbar ist. Um dieses interessante Phänomen besser verstehen zu können, betrachten wir ein Federpendel im Orbit.

2.3.1. Federpendel

Für eine unendlich große Masse im GEO (Abb. 2.6) kann diese durch eine starre Befestigung, wie sie in Abb. 2.12 angedeutet ist, ersetzt werden.

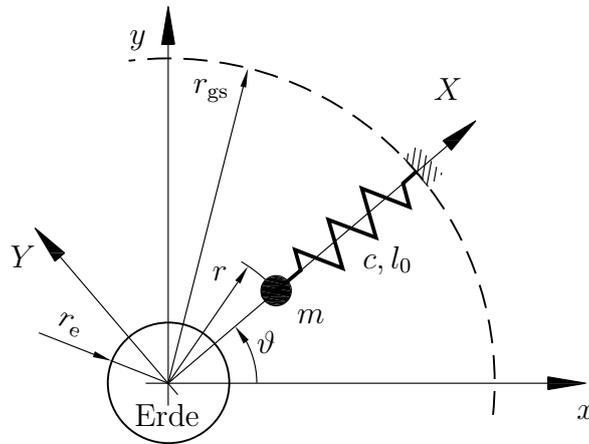


Abbildung 2.12.: Federpendel in radialer Gleichgewichtslage

In radialer Gleichgewichtslage liefert das Kräftegleichgewicht

$$\frac{km}{r^2} = c(r_{\text{gs}} - r - l_0) + mr\dot{\vartheta}^2.$$

Verwenden wir nun einerseits die Definition der Steifigkeit (2.19), und andererseits die Definition vom GEO (2.5), so ergibt sich

$$km \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_{\text{gs}}^3} \right) = \frac{EA}{l_0^*} (r_{\text{gs}} - r - l_0).$$

Beziehen wir nun, wie gewohnt, alle Längen auf r_{gs} erhalten wir

$$\frac{km}{r_{\text{gs}}^2} \left(\frac{1}{\tilde{r}^2} - \tilde{r} \right) = \frac{EA}{\tilde{l}_0^*} (1 - \tilde{r} - \tilde{l}_0).$$

In einem nächsten Schritt passen wir noch den Ausdruck für die Federsteifigkeit an den entsprechenden Ausdruck aus der Betrachtung des elastischen Hantelsatelliten an

$$\frac{km}{r_{\text{gs}}^2} \left(\frac{1}{\tilde{r}^2} - \tilde{r} \right) = \frac{EA}{\tilde{l}_{0i} + \tilde{l}_{0a}} (1 - \tilde{r} - \tilde{l}_0). \quad (2.36)$$

An dieser Stelle wird klar, warum in den Gleichungen verschiedene ungedehnte Federlängen auftreten, weil sie einerseits die Federsteifigkeit charakterisieren ($\tilde{l}_{0i} + \tilde{l}_{0a}$) und andererseits die tatsächliche ungedehnte Länge der Feder (\tilde{l}_0) darstellen. Anders ausgedrückt wird die innere Feder aus dem elastischen Hantelsatelliten, mit der dort ermittelten Steifigkeit, im Federpendelmodell mit variabler, ungedehnter Länge \tilde{l}_0 , verwendet. Das Kräftegleichgewicht (2.36) liefert somit, in Abhängigkeit von den physikalischen

Parametern und der ungedehnten Federlänge \tilde{l}_0 , die Gleichgewichtslage \tilde{r} , die man sich auch graphisch als Schnittpunkt der Funktionen beider Gleichungsseiten vorstellen kann.

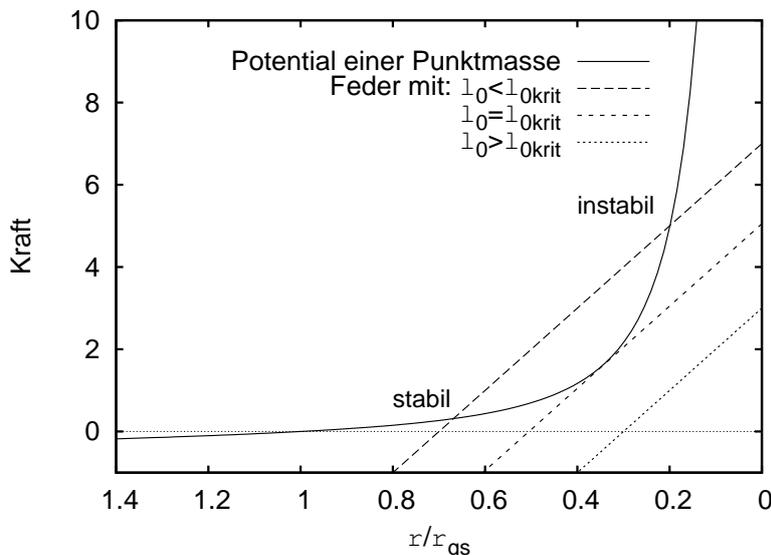


Abbildung 2.13.: Kräftegleichgewicht (2.36) in skaliertem Form

Abbildung 2.13 zeigt den qualitativen Verlauf von (2.36), wobei die linke Seite der Gleichung einem hyperbolischen Kraftverlauf entspricht, der durch das nichtlineare Gravitationsfeld und dem Anteil zufolge der Fliehkraft entsteht. Die Geraden entsprechen Federn mit derselben Steifigkeit, aber unterschiedlicher ungedehnter Federlängen \tilde{l}_0 . Für $\tilde{l}_0 < \tilde{l}_{0\text{krit}}$ erhalten wir zwei Schnittpunkte, wobei der linke eine stabile und der rechte eine instabile Gleichgewichtslage repräsentiert. Stellen wir eine ungedehnte Federlänge von $\tilde{l}_0 > \tilde{l}_{0\text{krit}}$ in Rechnung, ergibt sich kein Schnittpunkt und somit auch keine Gleichgewichtslage. Besonders interessant ist der Fall $\tilde{l}_0 = \tilde{l}_{0\text{krit}}$, weil dort die stabile und die instabile Lage zusammenfallen und dieser Wert für \tilde{r} genau jener Wert ist, der sich in Abb. 2.9 bzw. Abb. 2.10 als Grenzwert in der zu erreichende Lage der inneren Masse eingestellt hat. In der numerischen Auswertung der Gleichungen für den elastischen Hantelsatelliten wurde, wie bereits erwähnt, ein Homotopieverfahren angewendet. Startwert war jeweils die Lage beider Massen im GEO, somit haben wir, in Abhängigkeit von der Schrittweite, bei der Lösung der Systemgleichungen stets Schnittpunkte auf dem linken Hyperbelast (Abb. 2.13) berechnet.

Wir haben zwar mit dem einfachen Federpendelmodell geklärt, warum bei entsprechender Wahl der Parameter Grenzwerte für die zu erreichende Lage der inneren Masse existieren, aber die Schwäche unseres Modells in Bezug auf die zu einfache Definition der Steifigkeit (2.19) hindert uns daran, die Werkstoffe richtig zu beurteilen. Wie bereits erwähnt, ist bei [14] ein aufwendigeres Modell, das auch die Dichte des Materials in Rechnung stellt, angegeben. Das dort verwendete Rechenmodell wird in leicht modifizierter Form im Kapitel 3.2 verwendet und dort eingehend besprochen. Wir geben an dieser Stelle nur die Ergebnisse für die in dieser Arbeit betrachteten Werkstoffe an und besprechen diese.

2.3.2. Ergebnisse des kontinuierlichen Hantelmodells [14]

Beim kontinuierlichen Modell wird an Stelle der Feder aus Abb. 2.6 ein kontinuierlicher Faden betrachtet. Der Querschnitt wird durch die entsprechenden Gleichungen geliefert, wenn man voraussetzt, dass in jedem Fadenstück dieselbe maximale Dehnung herrscht, um das Material optimal zu nutzen.

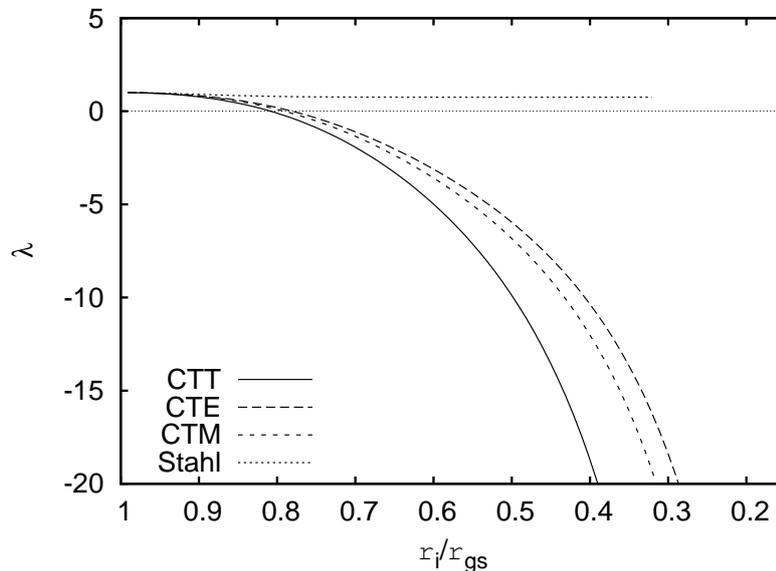


Abbildung 2.14.: Kritischer Eigenwert λ ohne zusätzliche Masse m_s

Abbildung 2.14 zeigt ein aus dem einfachen Modell bereits bekanntes Verhalten. Ab einer kritischen Lage der inneren Masse $r_i \approx 0,8$ hat der kritische Eigenwert einen Nulldurchgang. Ein Faden aus Stahl wird nicht instabil, weil die geringe Zugfestigkeit einen sehr großen Querschnitt im GEO notwendig macht. Auf Grund des großen Querschnitts befindet sich ein beträchtlicher Anteil der Gesamtmasse im Bereich von r_{gs} , was sich positiv auf das Stabilitätsverhalten auswirkt. Zuzufolge der geringen maximal zulässigen Dehnung würde ein Faden aus Stahl enorme Querschnittsflächen notwendig machen, die eine Gesamtmasse von $\approx 10^{28}$ t bedeuten würden (vgl. Erdmasse $m_e \approx 6 \cdot 10^{21}$ t).

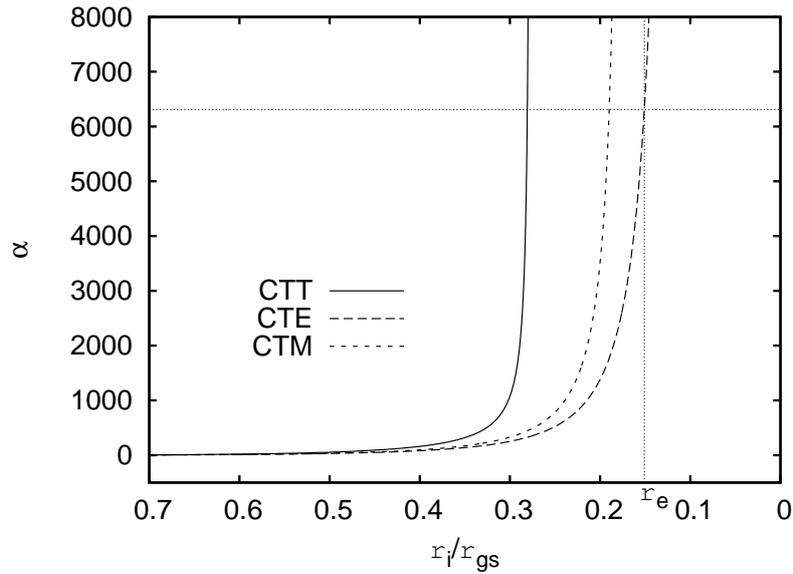


Abbildung 2.15.: α_{\min} für den kontinuierlichen Hantelsatelliten an der Stabilitätsgrenze

Versuchen wir nun das System an der Stabilitätsgrenze zu halten, ergibt sich das Massenverhältnis in Abhängigkeit der Position der inneren Masse, wie in Abb. 2.15 dargestellt. Dieses Modell weist für eine entsprechende Wahl der Werkstoffparameter, so wie bereits beim einfachen Modell, Grenzwerte der zu erreichenden Lage der inneren Masse auf. Die Erklärung dafür haben wir bereits im Kap. 2.3.1 angegeben. Weiters wird aus den Ergebnissen ersichtlich, dass, unter der Voraussetzung maximaler Dehnung, nur mit CTE eine materielle Verbindung zwischen dem GEO und der Erdoberfläche in Form eines elastischen Hantelsatelliten möglich ist.

3. Stabilitätsanalyse eines Raumaufzugs

Im Gegensatz zu den vorigen Modellen wird jetzt eine Konfiguration untersucht, die vorsieht, dass ein Fadenende auf der Erdoberfläche fest verankert ist und am anderen Ende eine Masse m angebracht wird. Diese Anordnung kommt der Idee des Raumaufzugs sehr nahe. In diesem Kapitel gehen wir auch der Frage nach, welche Art der Befestigung des inneren Fadenendes sich vorteilhaft auf das Stabilitätsverhalten auswirkt.

3.1. Diskretes Modell mit masseloser Feder

Im vorliegenden Modell nehmen wir eine masselose, linear elastische Feder als Verbindungselement zwischen Erdoberfläche und Punktmasse m an.

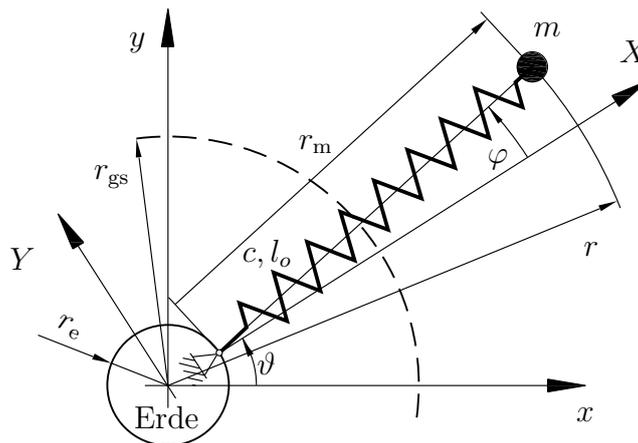


Abbildung 3.1.: Raumaufzug mit masseloser Feder

Einerseits wird die Befestigung mit einem Festlager, wie in Abb. 3.1 gezeichnet, und andererseits die Ausführung mit einem auf der Erdoberfläche frei verschieblichen Loslager diskutiert. Verschiedene Autoren, darunter Beletsky [2], haben gezeigt, dass eine horizontal verschiebbare Lagerung sich positiv auf die Stabilität auswirkt. Die Behandlung dieses Modells erlaubt uns, auf Grund der einfachen Bauart der Gleichungen, beide Fälle in einer Rechnung zu diskutieren. An entsprechender Stelle wird auf die zusätzlichen Terme hinzuweisen sein.

Unabhängig von der Befestigung des Fadens auf der Erdoberfläche erhält man die kine-

tische Energie und das Potential mit den in Abb. 3.1 angegebenen Größen

$$T = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}_m^2 + r_m^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \right) + r_e^2 \dot{\vartheta}^2 + 2r_m^2 \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + 2r_e r_m \dot{\vartheta} \left(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi} \right) \cos \varphi + 2r_e \dot{r}_m \dot{\vartheta} \sin \varphi \right] \quad (3.1)$$

$$V = \frac{-km}{|\mathbf{r}(r_m, \varphi)|} + \frac{EA}{2l_0} (r_m - l_0)^2, \quad (3.2)$$

mit

$$|\mathbf{r}(r_m, \varphi)| = \sqrt{r_e^2 + r_m^2 + 2r_e r_m \cos \varphi}.$$

3.1.1. Befestigung mit einem Festlager

Eine feste Verbindung des Fadens mit der Erdoberfläche reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade auf zwei und zerstört somit die Symmetrie des mechanischen Systems. Um nun, wie bei der bisherigen Betrachtung, mit Hilfe eines modifizierten Potentials die Gleichgewichtslagen und deren Stabilität zu überprüfen, betrachten wir zunächst die Kräfte, die auf die Punktmasse wirken. Das dynamische Grundgesetz ist nur in Bezug auf ein Inertialsystem streng gültig, aber durch Hinzufügen so genannter Scheinkräfte zu den physikalischen Kräften können wir es auch in einem, gegenüber dem Inertialsystem, bewegten System anwenden. Die Kinematik der Relativbewegung lehrt uns, dass sich die Absolutbeschleunigung einer Punktmasse aus Summe der Führungs-, Relativ- und Coriolisbeschleunigung zusammensetzt. Das dynamische Grundgesetz schafft nun den Übergang zur Kinetik, womit den einzelnen Beschleunigungen Scheinkräfte zugeordnet werden. Zusammengefasst kann die Bewegung eines Massenpunktes in einem, gegenüber dem Inertialsystem, rotierenden System durch zusätzliche Berücksichtigung von Massenkraft der Rotation, Corioliskraft und einer Zentrifugalkraft beschrieben werden (vgl. [1, 5]). Für unser konkretes Beispiel spielt nur die Zentrifugalkraft eine Rolle, der Hamel [5] in natürlicher Weise ein Potential zuordnet.

Mit dem zusätzlichen Potential der Zentrifugalkraft ergibt sich das Gesamtpotential im mitbewegten System zu

$$V_\psi(r_m, \varphi) = \frac{-km}{|\mathbf{r}(r_m, \varphi)|} + \frac{EA}{2l_0} (r_m - l_0)^2 - \frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 m (r_e^2 + r_m^2 + 2r_e r_m \cos \varphi). \quad (3.3)$$

3.1.2. Befestigung mit einem Loslager

Wird das Fadenende mit einem Loslager befestigt, so tritt, neben den Freiheitsgraden φ und r_m , der Winkel ϑ als eine zyklische Variable in den Gleichungen auf und wir können die REMM anwenden. In der schon gewohnten Vorgehensweise berechnet sich, mit dem *locked inertia tensor* (A.10)

$$\mathcal{J}(r_m, \varphi) = m (r_e^2 + r_m^2 + 2r_e r_m \cos \varphi) \quad (3.4)$$

das *augmented potential* (A.8) zu

$$V_\xi(r_m, \varphi) = \frac{-km}{|\mathbf{r}(r_m, \varphi)|} + \frac{EA}{2l_0} (r_m - l_0)^2 - \frac{1}{2} \xi^2 m (r_e^2 + r_m^2 + 2r_e r_m \cos \varphi). \quad (3.5)$$

Es gibt natürlich keinen formalen Unterschied zwischen (3.3) und (3.5), aber die Herleitung ist, wie aus der obigen Darstellung ersichtlich, eine grundsätzlich verschiedene. Vergleicht man die Argumentationen, die zu den beiden Potentialen geführt hat, so wird jetzt klar, warum die zusätzlichen Terme in (A.7) bzw. (A.8) bei einigen Autoren als Potential der Fliehkräfte bezeichnet werden.

Auf Grund der Unabhängigkeit des Potentials von der Wahl der Befestigung auf der Erdoberfläche haben natürlich beide Anordnungen dieselben Gleichgewichtslagen, die es nun zu bestimmen gilt. Beziehen wir alle Längen in (3.4) bzw. (3.5) auf r_{gs} und dividieren durch $\frac{1}{2}\xi^2 m r_{\text{gs}}^2$, so erhalten wir, mit der bereits in (2.27) definierten Konstanten κ

$$\tilde{V}_\xi(r_m, \varphi) = \tilde{V}_\psi(r_m, \varphi) = \frac{-2}{\sqrt{r_e^2 + r_m^2 + 2r_e r_m \cos \varphi}} + \kappa \frac{(r_m - l_0)^2}{l_0} - (r_e^2 + r_m^2 + 2r_e r_m \cos \varphi) \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}(r_m, \varphi) = \frac{2}{\xi^2} (r_e^2 + r_m^2 + 2r_e r_m \cos \varphi). \quad (3.7)$$

Jetzt leiten wir das Potential gemäß (A.13) nach den Freiheitsgraden (r_m, φ) ab und bekommen

$$\frac{\partial \tilde{V}_\xi(r_m, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 = \sin \varphi r_e r_m \left(1 - \frac{1}{|\mathbf{r}(r_m, \varphi)|^3} \right) \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_\xi(r_m, \varphi)}{\partial r_m} = 0 = \kappa \frac{r_m - l_0}{l_0} + (r_m + r_e \cos \varphi) \left(\frac{1}{|\mathbf{r}(r_m, \varphi)|^3} - 1 \right) \quad (3.8b)$$

als Bestimmungsgleichungen für die Gleichgewichtslagen. Gleichung (3.8a) impliziert, dass eine Gleichgewichtslage für eine gedehnte Feder (nichttriviale Lage) stets $\varphi = 0$ erfüllen muss. Spezialisieren wir (3.8b) auf eben diesen Fall, ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{V}_\xi(r_m, \varphi)}{\partial r_m} = 0 = \kappa \frac{r_m - l_0}{l_0} + (r_m + r_e) \left(\frac{1}{(r_m + r_e)^3} - 1 \right). \quad (3.9)$$

Mit $r = r_e + r_m$, unter Verwendung der Konstanten κ (2.27) und der Definition vom GEO (2.5) lässt sich (3.9) als

$$\frac{km}{r_{\text{gs}}^2} \left(\frac{1}{r^2} - r \right) = -\frac{EA}{l_0} (r - r_e - l_0) \quad (3.10)$$

anschreiben. Die letzte Umformung erlaubt den obigen Ausdruck (3.10) mit dem Kräftegleichgewicht beim Federpendel (2.36) direkt zu vergleichen. In der graphischen Darstellung Abb. 2.13 von (2.36) zeigt sich, dass für das Federpendel, in Abhängigkeit der ungedehnten Federlänge, bei sonst konstanter Steifigkeit, nicht alle Lagen für die Masse zulässig sind. Gleichung (3.10) unterscheidet sich von der in Abb. 2.13 dargestellten (2.36) nur durch das Vorzeichen beim Ausdruck für die Kraft zufolge der Federsteifigkeit. Mit anderen Worten entsprechen die um die x -Achse gespiegelten Geraden den Federcharakteristika im vorliegenden Modell. Natürlich müssen wir unsere Betrachtung

in Abb. 2.13 auf Zugfedern beschränken, womit nur Lagen der Masse m außerhalb des GEO physikalisch mögliche Gleichgewichtslagen darstellen. Zusammengefasst ist aber jede Lage $r > r_{\text{gs}}$ in unserem Modell mit der entsprechenden Wahl der Parameter erreichbar, weil es zu jeder Steifigkeit immer ein passendes l_0 gibt, das genau einen Schnittpunkt der Federkennlinie mit der Hyperbel zur Folge hat. Weiters ist ersichtlich, dass, im Gegensatz zum Federpendel, nur eine Gleichgewichtslage existiert, deren Stabilität noch zu zeigen ist.

In einfacher Form lässt sich aus (3.10) die ungedehnte Federlänge l_0 in Abhängigkeit der Lage r als

$$l_0 = \kappa \left(\frac{r^3 - r_e r^2}{r^3 + \kappa r^2 - 1} \right) \quad (3.11)$$

darstellen. Wir betrachten zunächst die Stabilität für den Fall der Befestigung des Fadens mit einem Festlager. Um die Stabilität der radialen Gleichgewichtslage zu zeigen, ist die positive Definitheit der Hessematrix des Potentials (3.3) bzw. der skalierten Form (3.6)

$$\mathbf{H}(\tilde{V}_\psi) = \mathbf{H}(\tilde{V}_\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\xi}{\partial r_m^2} & \frac{\partial^2 \tilde{V}_\xi}{\partial r_m \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 \tilde{V}_\xi}{\partial \varphi \partial r_m} & \frac{\partial^2 \tilde{V}_\xi}{\partial \varphi^2} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 - \frac{2}{r^3} + \frac{\kappa}{l_0} & 0 \\ 0 & r_e r_m \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \end{bmatrix}_{r_0, \varphi_0=0} \quad (3.12)$$

zu zeigen, wobei (3.12) bereits auf die radiale Lage ($\varphi = 0$) spezialisiert ist. Der untere Eintrag ist für alle physikalisch sinnvolle Lagen $r > 1$ stets positiv, wohingegen der obere Eintrag auf l_0 umgeformt folgende Ungleichung

$$l_{0\text{stabFest}} \leq \kappa \left(\frac{r^3}{r^3 + 2} \right) \quad (3.13)$$

ergibt. Mit anderen Worten kann mit (3.11) für ein beliebiges $r > 1$ ein l_0 bestimmt werden, welches, um Stabilität zu gewährleisten, kleiner dem $l_{0\text{stabFest}}$ aus (3.13) sein muss. Ein Vergleich beider Ausdrücke zeigt, dass dies stets für alle $r > 1$ gewährleistet ist.

Für den Fall der Befestigung mit einem Loslager und der somit vorhandenen zyklischen Variablen ϑ , muss gemäß (A.16) die zweite Variation des *amended potential* bestimmt werden. Nachdem schon die positive Definitheit von $V_\psi = V_\xi$ mit (3.12) gezeigt wurde und der Korrekturterm aus (A.16) auch eine positive Größe darstellt, ist die Befestigung mit einem Loslager mit Sicherheit ebenfalls stabil. Aus dem *locked inertia tensor* (3.7) berechnet sich der *ident*-Operator (A.17) und schließlich mit (A.16) die Hessematrix

$$\mathbf{H}(\tilde{V}_{\mu_0}) = 2 \begin{bmatrix} 3 - \frac{2}{r^3} + \frac{\kappa}{l_0} & 0 \\ 0 & r_e r_m \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \end{bmatrix}_{r_0, \varphi_0=0} \quad (3.14)$$

Der untere Eintrag in (3.14) unterscheidet sich nicht von jenem aus (3.12), der obere ergibt auf l_0 umgeformt

$$l_{0\text{stabLos}} \geq \kappa \left(\frac{r^3}{2 - 3r^3} \right) \quad (3.15)$$

Genauso wie (3.13) führt auch (3.15) für jedes $r > 1$ zu einer stabilen Gleichgewichtslage. Die Lagerung mit einem Loslager bewirkt zwar einen zusätzlichen positiven Term, der sich stabilisierend auswirkt, aber auch ein Festlager erlaubt eine stabile, radiale Lage. Das Loslager bietet einen wichtigen Vorteil, wenn es darum geht das untere Fadenende kontrolliert zu verschieben und so z.B. Weltraumschrott oder Satelliten auszuweichen. Wir wollen auf diese Fragestellungen in dieser Arbeit nicht näher eingehen, verweisen aber auf die weiterführende Literatur [13].

3.2. Kontinuierliches Modell

Bei allen bis jetzt analysierten Modellen wurden Punktmassen mit starren oder elastischen, aber stets masselosen, Verbindungselementen aneinander gekoppelt. Wir wollen auf diese Idealisierung im Folgenden verzichten, wodurch aufwendigere Konzepte zur Lösung des Stabilitätsproblems notwendig sind. Bei [14] wurden eben diese Konzepte bei der Behandlung des kontinuierlichen Hantelsatelliten angewendet. Wir leiten die entsprechenden Gleichungen her, spezialisieren diese aber auf das vorliegende Problem des kontinuierlichen Raumaufzugs.

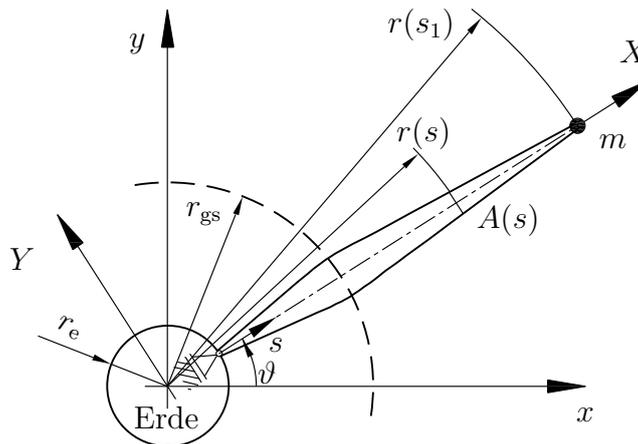


Abbildung 3.2.: Raumaufzug mit kontinuierlichem Faden in radialer Lage

Wir wollen nun das System des vorigen Abschnitts erneut betrachten, aber an Stelle der masselosen Feder soll jetzt, wie in Abb. 3.2 dargestellt, ein linear elastischer Faden die Verbindung zwischen Erde und Masse m darstellen. Mit dem Ersetzen der masselosen elastischen Verbindung durch einen Faden erhält man ein System mit abzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden. Beim Aufstellen der Systemgleichungen eines Kontinuums bezieht man sich entweder auf den unverformten oder den verformten Zustand, wobei die erstere als Lagrange- und die letztere als Eulersche-Betrachtung bezeichnet wird. Im Folgenden beziehen wir die Gleichungen auf die unverformte Bogenlänge s , die verformte Bogenlänge wird mit \bar{s} in Rechnung gestellt. Wie bei den vorigen Betrachtungen brauchen wir zunächst die entsprechenden Ausdrücke für die potentielle und kinetische Energie. Das Potential der masselosen Feder, aus den Betrachtungen des vorigen Abschnitts, wird durch die Verzerrungsenergie des kontinuierlichen Fadens

$$U = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} EA(s) \epsilon^2 ds \quad (3.16)$$

ersetzt. Mit $A(s)$ sei angezeigt, dass der Querschnitt nicht als konstant vorausgesetzt, sondern als eine von der Bogenlänge s abhängige Größe in Rechnung gestellt wird.

Ein unverformtes Element ds hat im verformten Zustand die Länge $d\bar{s}$, womit sich die Dehnung in Abhängigkeit der Verformung des Fadens als

$$\epsilon = \frac{d\bar{s} - ds}{ds} = \eta - 1 \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{d\bar{s}}{ds} \quad (3.17)$$

darstellen lässt, wobei η als Verlängerung bezeichnet wird. An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine Querkontraktion des Fadens, die mit einer Querschnittsverminderung einhergehen würde, keine Berücksichtigung in der folgenden Darstellung findet.

Mit der Definition des Tangenteneinheitsvektors aus der Differentialgeometrie [11]

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \bar{s}} = \mathbf{r}' \frac{1}{\eta}$$

und der Tatsache, dass dieser definitionsgemäß ein Einheitsvektor ist ($\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$), folgt

$$\eta = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = |\mathbf{r}'|.$$

Somit kann (3.17) als

$$\epsilon = \eta - 1 = |\mathbf{r}'| - 1 \quad (3.18)$$

dargestellt werden und der Ausdruck für die Verzerrungsenergie (3.16) vereinfacht sich zu

$$U = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} EA(s) (|\mathbf{r}'(s)| - 1)^2 ds. \quad (3.19)$$

Weil der Faden massebehaftet in Rechnung gestellt wird, ergibt sich das Potential der äußeren Kräfte zu

$$W = - \int_{s_0}^{s_1} \frac{k\rho A(s)}{|\mathbf{r}(s)|} ds - \frac{km}{|\mathbf{r}(s_1)|} \quad (3.20)$$

womit wir schließlich den Ausdruck für das Gesamtpotential

$$V = U + W = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{EA(s)}{2} (|\mathbf{r}'(s)| - 1)^2 - \frac{k\rho A(s)}{|\mathbf{r}(s)|} \right) ds - \frac{km}{|\mathbf{r}(s_1)|} \quad (3.21)$$

erhalten. Im Ausdruck für die kinetische Energie erhalten wir ebenfalls diskrete Anteile für die Punktmasse und integrale Anteile zufolge der verteilten Fadenmasse.

$$T = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} A(s)\rho \dot{\mathbf{r}}^2(s) ds + \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} A(s)\rho \left(\mathbf{r}(s)\dot{\vartheta} \right)^2 ds + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2(s_1) + \frac{1}{2} m \left(\mathbf{r}(s_1)\dot{\vartheta} \right)^2 \quad (3.22)$$

Mit der Definition (A.10) bestimmen wir den *locked inertia tensor*

$$\mathcal{J} = \int_{s_0}^{s_1} A(s)\rho \mathbf{r}^2(s) ds + m \mathbf{r}^2(s_1), \quad (3.23)$$

womit sich das *amended potential* (A.7) zu

$$V_{\mu_0} = V + \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}} \quad (3.24)$$

berechnet. In obiger Gleichung tritt der Wert der Impulsabbildung μ_0 auf, der sich gemäß (A.12) zu

$$\mu_0 = \xi \mathcal{J} = \xi \int_{s_0}^{s_1} A(s)\rho \mathbf{r}^2(s) ds + m \mathbf{r}^2(s_1) \quad (3.25)$$

ergibt. In der weiteren Behandlung benötigen wir die Variation der konstant bleibenden Impulsabbildung μ_0 , um die Variation des *locked inertia tensor* durch jene der Gruppengeschwindigkeit ausdrücken zu können, die wir an dieser Stelle angeben

$$\delta\mu_0 = 0 = \delta\xi\mathcal{J} + \xi\delta\mathcal{J}. \quad (3.26)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass wir zu Beginn der Rechnung das *amended potential* bestimmen, weil damit die Berechnung des Korrekturterms aus (A.16) entfällt und die weitere Darstellung einfacher wird. Gleichung (3.24) ist eine skalare Funktion, die von abzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden $\mathbf{r}(s)$ abhängig ist, womit an Stelle der Differentiation nach einzelnen Freiheitsgraden eine entsprechende Variation dieser Freiheitsgrade durchzuführen ist. Wir wollen zunächst nur Variationen in radialer Richtung zulassen, wodurch wir $\mathbf{r}(s) = r(s)\mathbf{e}_X$ schreiben können und in den folgenden Gleichungen auf die vektorielle Darstellung verzichten. Zu Gunsten der Übersichtlichkeit wird bei einigen Ausdrücken die unabhängige Variable s unterdrückt.

3.2.1. Radiale Gleichgewichtslage

Wenn für ein Kontinuum an Stelle der Differentiation die Variation tritt, dann führt die erste Variation des *amended potential* (3.24) gemäß (A.13) zur Bestimmungsgleichung der Gleichgewichtslage

$$\delta V_{\mu_0} = \delta V + \frac{\mu_0}{\mathcal{J}}\delta\mu_0 - \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2}\delta\mathcal{J} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (3.26) und dem Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta V_{\mu_0} &= \delta V - \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2}\delta\mathcal{J} \\ &= \delta \left(\int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{EA(s)}{2} (r'(s) - 1)^2 - \frac{k\rho A(s)}{r(s)} \right) ds - \frac{km}{r(s_1)} \right) \\ &\quad - \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2} \delta \left(\int_{s_0}^{s_1} A(s)\rho r^2(s) ds + m r^2(s_1) \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Vertauschung von Variation und Integration führt auf

$$\begin{aligned} \delta V_{\mu_0} &= \int_{s_0}^{s_1} EA(s) (r'(s) - 1) \delta r'(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{k\rho A(s)}{r(s)^2} \delta r(s) ds \\ &\quad + \frac{km}{r(s_1)^2} \delta r(s_1) - \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^2} \int_{s_0}^{s_1} A(s)\rho r(s) \delta r(s) ds + m r(s_1) \delta r(s_1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die gewohnte Vorgehensweise bei der Behandlung von Variationsproblemen verlangt das Herausheben voneinander unabhängiger Variationen. In (3.28) tritt einerseits die Variation des Radius $\delta r(s)$, und andererseits die der Ableitung des Radius $\delta r'(s)$ auf.

Die Letztere kann mit (3.18) sofort als die Variation der Dehnung interpretiert werden $\delta r'(s) = \delta \epsilon$. Somit ist klar, dass wir den Radius und die Dehnung nicht unabhängig voneinander variieren können. Im ersten Integral formen wir mit partieller Integration die Variation der Dehnung in eine des Radius um und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} EA(r' - 1) \delta r' ds &= EA(r' - 1) \delta r \Big|_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} E(A(r' - 1))' \delta r ds \\ &= E[A(s_1)(r'(s_1) - 1) \delta r(s_1) - A(s_0)(r'(s_0) - 1) \delta r(s_0) \delta r(s_0)] \\ &\quad - \int_{s_0}^{s_1} E(A(r' - 1))' \delta r ds. \end{aligned}$$

Wir geben einerseits die Lage des inneren Fadenendes vor, wodurch dessen radiale Variation verschwindet $\delta r(s_0) = 0$, andererseits verwenden wir die Definition der Impulsabbildung (3.26), womit sich zusammengefasst (3.28) vereinfacht als

$$\begin{aligned} \delta V_{\mu_0} = 0 &= \int_{s_0}^{s_1} \delta r \left\{ -E(A(r' - 1))' + \frac{k\rho A}{r^2} - \xi^2 A \rho r \right\} ds \\ &\quad + \delta r(s_1) \left\{ EA(s_1)(r'(s_1) - 1) + \frac{km}{r(s_1)^2} - \xi^2 m r(s_1) \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

anschreiben lässt. Weil δr im Integral unabhängig vom $\delta r(s_1)$ am Rand variiert werden kann, muss sowohl der Integrand als auch der Randterm getrennt gleich Null sein. Schenken wir zunächst dem einfacheren Randterm unsere Aufmerksamkeit

$$EA(s_1)(r'(s_1) - 1) + \frac{km}{r(s_1)^2} - \xi^2 m r(s_1) = 0, \quad (3.30)$$

der sich bei genauerer Betrachtung als Gleichgewichtsbedingung für die Punktmasse interpretieren lässt. Der erste Term repräsentiert die Kraft zufolge des gedehnten Fadens, mit der Dehnung am freien Ende des Fadens gemäß (3.18) $\epsilon(s_1) = r'(s_1) - 1$. Die beiden anderen Terme entsprechen der Gravitations- bzw. der Fliehkraft.

Die weitere Behandlung des Integranden aus (3.29)

$$E(A(s)(r' - 1))' = \frac{k\rho A(s)}{r(s)^2} - \xi^2 A(s)\rho r(s) \quad (3.31)$$

wird uns in weiterer Folge den noch unbekanntem Verlauf des Fadenquerschnitts $A(s)$ liefern. An dieser Stelle muss man sich die Frage stellen, wie die Werkstoffeigenschaften für ein beliebiges Material am Besten ausgenutzt werden. Das vorliegende Modell berücksichtigt, im Gegensatz zu den bis jetzt betrachteten, sowohl die Elastizität als auch die Masse des Verbindungselements. Mit anderen Worten bedeutet eine Erhöhung der Querschnittsfläche sofort eine größere Masse, die sich in einer zusätzlichen Belastung bemerkbar macht. Um von diesem Sachverhalt ausgehend die optimale Lösung zu finden geht man den nahe liegenden Weg und definiert den optimalen Querschnittsverlauf als jenen, für den in jedem einzelnen Querschnitt die maximal zulässige Spannung σ_{\max} auftritt. Wenn aber in jedem Querschnitt dieselbe maximale Spannung herrscht, dann ist

natürlich die Dehnung im gesamten Faden konstant gleich der maximal zulässigen Dehnung ϵ_{\max} . In der weiteren Darstellung soll dieser Querschnittsverlauf bestimmt werden. In einem ersten Schritt formen wir das einachsige Hook'sche Gesetz mit (3.18) um

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= E\epsilon_{\max} = E(r' - 1) \\ \Rightarrow (r' - 1) &= \frac{\sigma_{\max}}{E},\end{aligned}\tag{3.32}$$

und vereinfachen damit (3.31) zu

$$E \left(A(s) \left(\frac{\sigma_{\max}}{E} \right) \right)' = A(s) \rho \left(\frac{k}{r(s)^2} - \xi^2 r(s) \right).$$

Weil auf der linken Seite nur noch der gesuchte Querschnittsverlauf von s abhängig ist erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{A'(s)}{A(s)} &= \frac{1}{A(s)} \frac{dA(s)}{ds} = \frac{\rho}{\sigma_{\max}} \left(\frac{k}{r(s)^2} - \xi^2 r(s) \right) \\ \int \frac{1}{A(s)} dA(s) &= \frac{\rho}{\sigma_{\max}} \int \left(\frac{k}{r(s)^2} - \xi^2 r(s) \right) ds.\end{aligned}$$

Für die gestreckte Lage, die wir ja betrachten, gilt $r(s) = \bar{s}$, womit beide Seiten ohne Schwierigkeiten integriert werden können

$$\ln |A(s)| = \frac{\rho}{\sigma_{\max}} \left(-\frac{k}{r(s)} - \frac{\xi^2 r(s)^2}{2} \right) + c.$$

Wir beziehen den Radius $r(s)$ auf r_{gs}

$$\ln |A(s)| = \frac{\rho}{\sigma_{\max}} \left(-\frac{k}{\tilde{r}(s)r_{\text{gs}}} - \frac{\xi^2 \tilde{r}(s)^2 r_{\text{gs}}^2}{2} \right) + c$$

und erhalten mit der Definition vom GEO (2.5) den Querschnittsverlauf

$$A(s) = c \cdot e^{\tau(s)} \quad \text{mit} \quad \tau(s) = \frac{k\rho}{\sigma_{\max} r_{\text{gs}}} \left(-\frac{1}{\tilde{r}(s)} - \frac{\tilde{r}(s)^2}{2} \right),\tag{3.33a}$$

mit der Integrationskonstante c . Wir haben festgestellt, dass (3.30) dem Kräftegleichgewicht für die Endmasse m entspricht (vgl. Abb. 3.2). Die Umformungen aus obiger Beziehung auf (3.30) angewendet führen auf

$$A(s_1) = \frac{km}{\sigma_{\max} r_{\text{gs}}^2} \left(\tilde{r}(s_1) - \frac{1}{\tilde{r}(s_1)^2} \right).\tag{3.33b}$$

Die Konstante c in (3.33a) skaliert unseren Querschnittsverlauf, daher ist zunächst zu klären, wie diese zu bestimmen ist. In der Betrachtung des vorliegenden Modells halten wir den Faden am inneren Ende fest. Die auf die Lagerung übertragene Kraft ist nur vom Querschnitt $A(s_0)$ abhängig, weil im gesamten Faden dieselbe Dehnung ϵ_{\max} herrschen soll. Mit anderen Worten können wir durch Vorschreiben des Querschnitts auf der Erdoberfläche die Zugbelastung für die Lagerung bestimmen, aber gleichzeitig skalieren wir damit den Querschnittsverlauf und somit die Konstante c . An Stelle der Vorgabe des Querschnitts wollen wir in anschaulicher Weise eine Masse m_0 vorgeben. Man kann sich vorstellen, dass die Kraft, die vom Lager aufgenommen wird, gerade so groß ist, um diese Masse m_0 über dem Erdboden zu halten.

$$A(s_0) = \frac{km_0}{\sigma_{\max}r_{\text{gs}}^2} \left(-\tilde{r}_e + \frac{1}{\tilde{r}_e^2} \right) \quad (3.33c)$$

Die Vorgabe der Masse am inneren Rand dient nur zur Festlegung des Fadenquerschnitts (3.33c) auf der Erdoberfläche, in der Stabilitätsanalyse wird natürlich das Loslager, wie in Abb. 3.2 dargestellt, berücksichtigt.

Um zu verstehen, wo die äußere Masse am Faden befestigt ist, nehmen wir zunächst an, wir hätten keine zusätzliche Punktmasse am äußeren Ende des Fadens. Gleichung (3.33a) stellt nun jenen Querschnittsverlauf dar, der in jedem Querschnitt die maximale Spannung σ_{\max} garantiert. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass erst im Grenzübergang

$$\lim_{r(s) \rightarrow \infty} A(s) = 0$$

der Querschnitt Null wird. Um also eine Gleichgewichtslage für einen Faden ohne zusätzlicher Masse zu erhalten, muss sich der Faden weit über den GEO hinaus erstrecken. Die grundlegende Idee der Kopplung des Fadens mit einer Endmasse hat, neben der Modellierung einer Raumstation, den Sinn, die Länge des Fadens zu reduzieren. Stellen wir uns einen unendlich langen Faden in seiner radialen Gleichgewichtslage vor, dann könnten wir ihn an einer Stelle $r(s_1) > r_{\text{gs}}$ abschneiden und dort eine Masse anbringen, die gerade so groß ist, dass sie dieselbe Wirkung auf den Querschnitt $A(s_1)$ hat wie der abgeschnittene Teil des Fadens.

Dieses Vorgehen spiegelt sich in (3.33a) und (3.33b) wider, die Masse m wird also an jener Stelle $r(s_1)$ angebracht, wo der Querschnitt $A(s_1)$ die notwendige Kraft zum Halten der Masse in $r(s_1)$ bereitstellt.

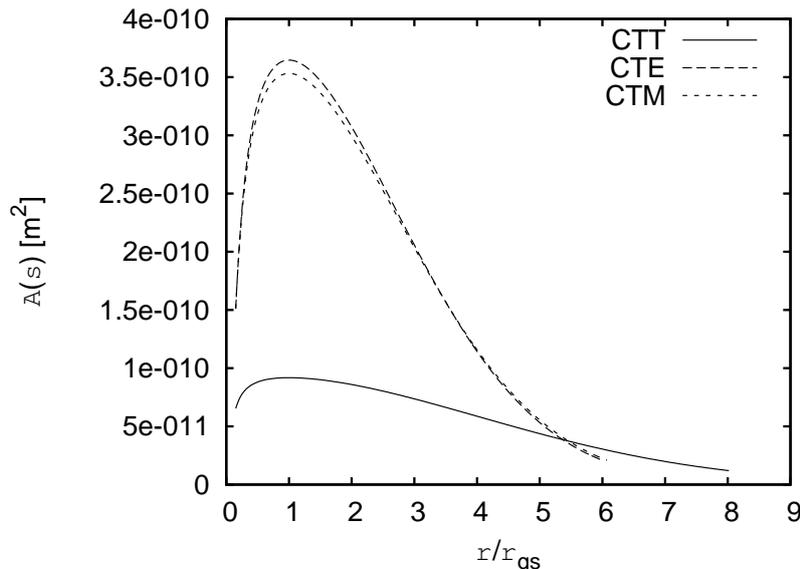


Abbildung 3.3.: Querschnittsverläufe mit Endmassen von 1 kg

Wir haben im Kapitel 2.3 gesehen, dass Stahl nicht als Werkstoff für den Raumaufzug in Frage kommt, wir geben daher in Abb. 3.3 die Querschnittsverläufe für die *carbon nanotubes* aus Tab. B.1 an. Diese Verläufe kommen durch das Vorschreiben von Endmassen von 1 kg an beiden Fadenenden zustande.

Werkstoff	$A(r_0)$ [m ²]	$A(r_{gs})$ [m ²]	γ [-]	m_{Faden} [kg]
CTT	6,5e-11	9,2e-11	1,40	20,4
CTE	1,5e-10	3,6e-10	2,41	57,8
CTM	1,5e-10	3,5e-10	2,34	54,8

Tabelle 3.1.: Werte aus dem Querschnittsverlauf für Endmassen von 1 kg

In Tab. 3.1 sind die Querschnittsflächen auf der Erdoberfläche bzw. am GEO angegeben, sowie das Verhältnis beider $\gamma = A(r_{gs})/A(r_0)$. Zusätzlich ist die Gesamtmasse des Fadens gemäß

$$m_{\text{Faden}} = \rho \int_{s_0}^{s_1} A(s) ds, \quad (3.34)$$

ohne Endmassen aufgelistet. Die außergewöhnlich guten mechanischen Eigenschaften von *carbon nanotubes* werden bei einem Vergleich der obigen Massen für den Faden mit jener für Stahl ($\approx 10^{28}$ t) ersichtlich.

Wenn für den Querschnittsverlauf die Masse, und somit der Querschnitt, am inneren Fadenende mit verantwortlich ist, dann ist die Frage berechtigt, wie sich eben dieser Verlauf in Abhängigkeit von dieser Masse verändert.

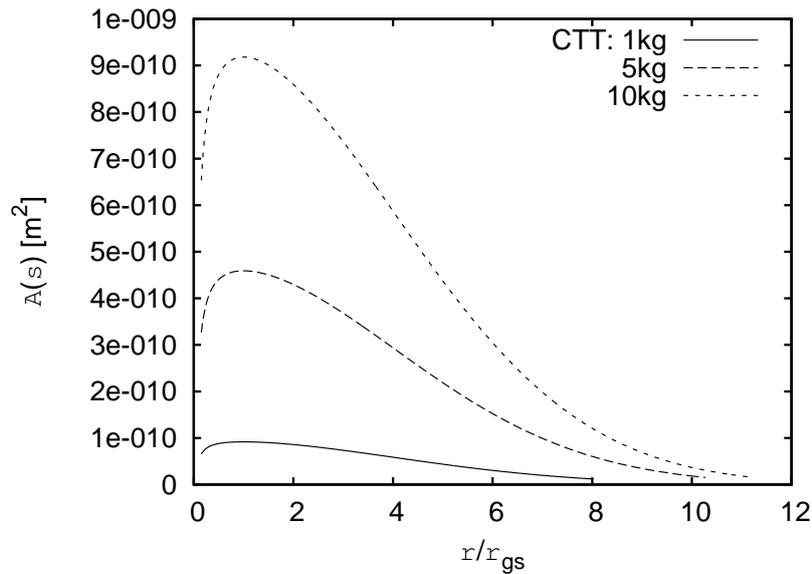


Abbildung 3.4.: Querschnittsverlauf mit verschiedenen Massen am inneren Fadenende

Die Auswertung der entsprechenden Gleichungen ergibt für CTT, mit Endmassen am inneren Ende von 1, 5 und 10 kg und bei einer konstanten äußeren Endmasse von 1 kg, den in Abb. 3.4 dargestellten Querschnittsverlauf. In natürlicher Weise verändert sich der grundsätzliche Charakter der Kurve nicht, sondern sie verschiebt sich zu höheren Querschnitten und das äußere Ende reicht weiter in den Weltraum hinaus. Eine größere Endmasse am äußeren Ende würde eine Lage näher dem GEO bewirken, wo eben die Querschnittsfläche so groß ist, um mit der konstant vorausgesetzten Dehnung die Kraft zu erzeugen, die das Halten der veränderten Masse garantiert. Die Beziehungen (3.33a) und (3.33b), zusammen mit dem dort Gesagtem, erklären dieses Verhalten. Alle unsere Überlegungen basieren auf der Tatsache, dass in jedem Querschnitt $A(s)$ des gesamten Fadens die gleiche maximale Dehnung ϵ_{\max} herrscht. In einem System, dessen Querschnitt für maximale Dehnung im Faden ausgelegt ist, führt eine nachträgliche Veränderung der äußeren Masse zu einer Abhängigkeit der Dehnung von der Bogenlänge. In der vorliegenden Arbeit ist dieser Fall nicht dargestellt, es wird stets in jedem Querschnitt dieselbe Dehnung verlangt.

3.2.2. Stabilität der radialen Gleichgewichtslage

In diesem Modell behandeln wir ein so genanntes hybrides Modell, eine Kombination aus einer diskreten Punktmasse und einem Kontinuum. Die Stabilitätsanalyse untersucht die Vorzeichen der Eigenwerte, also im vorliegenden Modell abzählbar unendlich vieler. Es gibt zwei Vorgehensweisen, sich die Eigenwerte eines kontinuierlichen Systems zu beschaffen. Einerseits besteht die Möglichkeit das Kontinuum zu diskretisieren und so in Abhängigkeit von der Feinheit eine endliche Anzahl von Eigenwerten zu bekommen, die eine Abschätzung der tatsächlichen Eigenwerte darstellen. Andererseits können wir das Eigenwertproblem, mit den Konzepten der Kontrolltheorie, als Randwertproblem

(Anhang C) formulieren. Diese Verfahren liefert möglicherweise den kleinsten und somit den über die Stabilität entscheidenden Eigenwert. Der Vorteil gegenüber einer diskreten Formulierung ist die große Genauigkeit, mit der dieser eine Eigenwert geliefert wird. Es ist theoretisch möglich, dass im Laufe der Rechnung ein anderer Eigenwert kleinere Werte annimmt, als jener der zu Beginn der Rechnung als kritisch eingestuft wurde. Für die Stabilitätsanalyse ist es wahrscheinlich, dass der Eigenmode, der keinen Nulldurchgang besitzt, also einem Starrkörpermode am nächsten kommt, aussagekräftiger ist als hochfrequente Eigenmodi. Genau dieser Eigenwert wird mit der vorliegenden Rechnung bestimmt. In der weiteren Darstellung wird stets vom kleinsten und somit kritischen Eigenwert die Rede sein.

Mit den beiden Ausdrücken (3.33a) und (3.33b) ist es uns gelungen, den Querschnittsverlauf zu bestimmen, der die entsprechenden Werkstoffeigenschaften in der radialen Gleichgewichtslage optimal ausnützt. Dieser Abschnitt ist der Stabilitätsuntersuchung eben dieser Gleichgewichtslage gewidmet. Aus der gestreckten Lage heraus sind laterale und radiale Variationen möglich. Auf analytischem Weg kann die Stabilität gegenüber lateralen Störungen gezeigt werden [14]. Wir gehen nicht näher darauf ein, sondern beschränken unsere Darstellung auf radiale Störungen. Für Stabilität muss gewährleistet sein, dass die zweite Variation des *amended potential*, ausgewertet an der zu untersuchenden Gleichgewichtslage, positiv definit ist. Um das zu zeigen, bilden wir die Variation von (3.27) mit Berücksichtigung von (3.26)

$$\begin{aligned}\delta^2 V_{\mu_0} &= \delta^2 V - \left(\frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^2} \delta\mu_0 \delta\mathcal{J} - \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} (\delta\mathcal{J})^2 + \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2} \delta^2 \mathcal{J} \right) \\ &= \delta^2 V + \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} (\delta\mathcal{J})^2 - \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2} \delta^2 \mathcal{J}.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Nach Einsetzen der jeweiligen Ausdrücke ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta^2 V_{\mu_0} &= \delta \left(\int_{s_0}^{s_1} \left(EA(s) (r' - 1) \delta r' + \frac{k\rho A(s)}{r^2} \delta r \right) ds + \frac{km}{r(s_1)^2} \delta r(s_1) \right) \\ &+ \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} \left(\int_{s_0}^{s_1} 2A(s)\rho r \delta r ds + 2mr(s_1)\delta r(s_1) \right)^2 \\ &- \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2} \delta \left(\int_{s_0}^{s_1} 2A(s)\rho r \delta r ds + 2mr(s_1)\delta r(s_1) \right)\end{aligned}$$

und mit Berechnung der entsprechenden Variationen erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\delta^2 V_{\mu_0} &= \int_{s_0}^{s_1} \left(EA(s) (\delta r')^2 - \frac{2k\rho A(s)}{r^3} (\delta r)^2 \right) ds - \frac{2km}{r(s_1)^3} (\delta r(s_1))^2 \\ &+ \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} \left(\int_{s_0}^{s_1} 2A(s)\rho r \delta r ds + 2mr(s_1)\delta r(s_1) \right)^2 \\ &- \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2} \int_{s_0}^{s_1} 2A(s)\rho \delta r^2 ds + 2m (\delta r(s_1))^2.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Gleichung (3.36) liefert für unser System abzählbar unendlich viele Eigenwerte λ , die alle positiv sein müssen, um die Stabilität zu garantieren. In der weiteren Betrachtung wird nicht das Vorzeichen jedes einzelnen Eigenwerts überprüft, sondern in nahe liegender Weise nur jenes des kleinsten Eigenwerts. Mit der im Anhang C skizzierten Vorgangsweise versuchen wir (3.36) in ein leichter zu behandelndes Problem überzuführen, und uns den kleinsten und somit kritischen Eigenwert zu bestimmen. In der dortigen Darstellung ist man an der zeitlichen Evolution eines Prozesses interessiert. Um die Konzepte auf unsere Problemstellung anzupassen ist als unabhängige Variable die Bogenlänge s an Stelle der Zeit t zu berücksichtigen.

Zur Vereinfachung obigen Ausdrucks betrachten wir zunächst die Normalkraft im Faden

$$N = \sigma_{\max} A(s) = \epsilon_{\max} EA(s) = (r' - 1)EA(s)$$

bzw. die entsprechende Variation, und erhalten

$$\begin{aligned} \delta N &= \delta r' EA(s) \\ \Rightarrow \delta r' &= \frac{\delta N}{EA(s)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Um (3.36) in eine übersichtlichere Form zu bringen betrachten wir weiters den Ausdruck für den *locked inertia tensor* (3.23) bzw. dessen Variationen

$$\mathcal{J}(s) = \int_{s_0}^{s_1} A(s) \rho r^2 ds + m r^2(s_1) \quad (3.38a)$$

$$\delta \mathcal{J}(s) = \int_{s_0}^{s_1} 2A(s) \rho r \delta r ds + 2m r(s_1) \delta r(s_1) \quad (3.38b)$$

$$\delta^2 \mathcal{J}(s) = \int_{s_0}^{s_1} 2A(s) \rho \delta r^2 ds + 2m (\delta r(s_1))^2 \quad (3.38c)$$

in integraler Form. Wir wollen an dieser Stelle daran erinnern, dass \mathcal{J} jene Massenmatrix darstellt, mit deren Hilfe die kinetische Energie bestimmt werden kann, wenn alle Freiheitsgrade gesperrt sind und sich das System nur entlang des Gruppenorbits bewegt. Resultiert die Symmetrie in einer zyklischen Variable, dann ist \mathcal{J} ein expliziter Eintrag in der Massenmatrix des Gesamtsystems, der der entsprechenden zyklischen Variablen zugeordnet ist. Somit ist klar, dass am inneren Ende des Fadens ($s = s_0$) dieser Teil der Massenmatrix Null, und für das äußere Ende ($s = s_1$) $\mathcal{J}(s_1)$ beträgt, das sich aus einem integralen Anteil des Fadens und einem diskreten zufolge der Punktmasse zusammensetzt. Ähnlich verhält es sich mit den entsprechenden Variationen, somit können obige Ausdrücke in differentieller Form

$$j'(s) = A(s) \rho r^2 \quad \begin{aligned} j(s_0) &= 0 \\ j(s_1) &= \mathcal{J}(s) \end{aligned} \quad (3.39a)$$

$$\delta j'(s) = 2A(s) \rho r \delta r \quad \begin{aligned} \delta j(s_0) &= 0 \\ \delta j(s_1) &= \delta \mathcal{J}(s) \end{aligned} \quad (3.39b)$$

$$\delta^2 j'(s) = 2A(s) \rho \delta r^2 \quad \begin{aligned} \delta^2 j(s_0) &= 0 \\ \delta^2 j(s_1) &= \delta^2 \mathcal{J}(s) \end{aligned} \quad (3.39c)$$

angeschrieben werden. Mit (3.37) und (3.38) vereinfacht sich (3.36) zu

$$\delta^2 V_{\mu_0} = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\delta N^2}{EA(s)} - \frac{2k\rho A(s)}{r^3} (\delta r)^2 \right) ds - \frac{2km}{r(s_1)^3} (\delta r(s_1))^2 + \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} (\delta \mathcal{J})^2 - \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2} \delta^2 \mathcal{J}. \quad (3.40)$$

Wie oben bereits gesagt, werden wir das Maximum-Prinzip von Pontrjagin dazu verwenden, den kleinsten und somit kritischen Eigenwert zu bestimmen. Gleichung (3.40) stellt das zu minimierende Funktional dar, wobei wir zusätzlich die Nebenbedingung

$$\int_{s_0}^{s_1} A(s)\rho (\delta r)^2 ds + m (\delta r(s_1))^2 = 1 \quad (3.41)$$

berücksichtigen, die wir in der Form

$$\mathcal{B} = \int_{s_0}^{s_1} A(s)\rho (\delta r)^2 ds = 1 - m (\delta r(s_1))^2, \quad (3.42)$$

verwenden wollen. Gleichung (3.42) als Differentialgleichung interpretiert ergibt

$$b'(s) = A(s)\rho (\delta r)^2. \quad (3.43)$$

Wir benötigen die Nebenbedingung (3.41), um unsere Eigenfunktionen entsprechend zu skalieren. In (3.39) und (3.43) sind jeweils die differentiellen Formulierungen von (3.38) und (3.42) angegeben. Der Grund dafür ist die Art der Implementierung dieser Terme in die Hamiltonfunktion \mathcal{H} . Das Konzept der Lagrange-Multiplikatoren erlaubt entsprechend formulierte Nebenbedingungen zu berücksichtigen. Die Idee besteht nun darin die zusätzlichen Bedingungen in Form von Differentialgleichungen in der Hamiltonfunktion zu berücksichtigen. Diese Gleichungen werden in der numerischen Auswertung zusätzlich zum eigentlichen Variationsproblem gelöst. Im vorliegenden Fall haben wir drei Differentialgleichungen: eine für die Skalierungsnebenbedingung $b'(s)$, eine für die erste Variation $\delta j'(s)$ und eine um die zweite Variation $\delta^2 j'(s)$ des *locked inertia tensors* zu berechnen. Als Kontrollvariable führen wir δN ein, also die Variation der Normalkraft die wir mit (3.37) durch Variation der Verzerrung ausgedrückt haben und erhalten die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \frac{\delta N^2}{EA(s)} - \frac{2k\rho A(s)}{r^3} (\delta r)^2 - \lambda_1 \underbrace{A(s)\rho (\delta r)^2}_{b'(s)} + \lambda_2 \underbrace{2A(s)\rho r \delta r}_{\delta j'(s)} + \lambda_3 \underbrace{2A(s)\rho (\delta r)^2}_{\delta^2 j'(s)} + \lambda_4 \underbrace{\frac{\delta N}{EA(s)}}_{\delta r'} \quad (3.44)$$

mit den jeweiligen Lagrange-Multiplikatoren, deren Entsprechungen in Tab. 3.2 zusammengefasst sind. Es sei auf das negative Vorzeichen von λ_1 hingewiesen, wir geben später eine Begründung dafür an.

Kozustandsvariable	$-\lambda_1$	λ_2	λ_3	λ_4
Zustandsvariable	$b(s)$ Gl.(3.43)	$\delta j(s)$ Gl.(3.39b)	$\delta^2 j(s)$ Gl.(3.39c)	δr Gl.(3.37)

Tabelle 3.2.: Variablen in der Hamiltonfunktion \mathcal{H}

Die durch die Einzelmassen am Rand verursachten Anteile des *amended potentials* werden in der Restwertfunktion \mathcal{S} zusammengefasst. Diese sind einerseits die Randwerte der entsprechenden Differentialgleichungen (3.39b) und (3.39c), und andererseits die des diskreten Anteils aus (3.36).

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & -\frac{2km}{r(s_1)^3} (\delta r(s_1))^2 + \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} \underbrace{\left(\int_{s_0}^{s_1} 2A(s)\rho r \delta r ds + 2m r(s_1) \delta r(s_1) \right)^2}_{(\delta \mathcal{J})^2} \\ & - \frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2} \underbrace{\int_{s_0}^{s_1} 2A(s)\rho \delta r^2 ds + 2m (\delta r(s_1))^2}_{\delta^2 \mathcal{J}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Zunächst leiten wir, gemäß (C.6), \mathcal{H} nach der Kontrollvariable ab

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \delta N} = 0 &= \frac{2\delta N}{EA(s)} + \frac{\lambda_4}{EA(s)} \\ \Rightarrow \lambda_4 &= -2\delta N \end{aligned} \quad (3.46)$$

was uns den ersten der vier zu bestimmenden Multiplikatoren liefert. An den adjungierten Kozustandsgleichungen (C.2)

$$\lambda_1' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \text{const} \quad (3.47a)$$

$$\lambda_2' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \delta j(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \text{const} \quad (3.47b)$$

$$\lambda_3' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \delta^2 j(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = \text{const} \quad (3.47c)$$

$$\lambda_4' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \delta r} = -\left(-\frac{4k\rho A(s)}{r^3} \delta r - \lambda_1 2A(s)\rho \delta r + \lambda_2 2A(s)\rho r + \lambda_3 4A(s)\rho \delta r \right) \quad (3.47d)$$

ist ablesbar, dass λ_1 , λ_2 und λ_3 Konstanten darstellen, deren Werte in weiterer Folge zu bestimmen sind. Wir betrachten nun die Transversalitätsbedingung in allgemeiner Formulierung (C.9)

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b(s_1)} \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta j(s_1)} \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta^2 j(s_1)} \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta r(s_1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\lambda_1(s_1) \\ \lambda_2(s_1) \\ \lambda_3(s_1) \\ \lambda_4(s_1) \end{pmatrix} \right] \cdot \delta \begin{pmatrix} b(s_1) \\ \delta j(s_1) \\ \delta^2 j(s_1) \\ \delta r(s_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.48)$$

Für die weitere Behandlung obiger Beziehung stellt man sich wieder die Frage nach den voneinander unabhängigen Variationen. Wir setzen zunächst die Variation der Nebenbedingung (3.42)

$$\delta b(s_1) = \delta \mathcal{B} = -2m\delta r(s_1)\delta^2 r(s_1)$$

in (3.48) ein, und erhalten

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b(s_1)} \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta j(s_1)} \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta^2 j(s_1)} \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta r(s_1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\lambda_1(s_1) \\ \lambda_2(s_1) \\ \lambda_3(s_1) \\ \lambda_4(s_1) \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2m\delta r(s_1)\delta^2 r(s_1) \\ \delta^2 j(s_1) \\ \delta^3 j(s_1) \\ \delta^2 r(s_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.49)$$

In der Transversalitätsbedingung (3.49) treten drei voneinander unabhängig Variationen $(\delta^2 r(s_1), \delta^2 j(s_1), \delta^3 j(s_1))$ auf. Weil diese beliebig variiert werden können, müssen die entsprechenden Ausdrücke verschwinden. Die beiden mittleren Zeilen liefern zunächst die Kozustandsvariablen λ_2 und λ_3

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta j(s_1)} - \lambda_2(s_1) \right) \delta^2 j(s_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2(s_1) = \lambda_2 = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta \mathcal{J}} = \frac{2\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} \delta \mathcal{J} \quad (3.50a)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta^2 j(s_1)} - \lambda_3(s_1) \right) \delta^3 j(s_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3(s_1) = \lambda_3 = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta^2 \mathcal{J}} = -\frac{\mu_0^2}{2\mathcal{J}^2}. \quad (3.50b)$$

Um die letzte unbekannt Kozustandsvariable λ_1 zu berechnen betrachten wir die restlichen zwei Zeilen aus (3.49)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b(s_1)} + \lambda_1(s_1) \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta r(s_1)} - \lambda_4(s_1) \end{pmatrix} \cdot \delta^2 r(s_1) \begin{pmatrix} -2m\delta r(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.51)$$

Zunächst bestimmen wir die partiellen Ableitungen der Restwertfunktion (3.45)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b(s_1)} &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{B}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta r(s_1)} &= -\frac{4km}{r(s_1)^3} \delta r(s_1) + \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} \delta \mathcal{J} 4mr(s_1) - \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^2} 2m\delta r(s_1), \end{aligned}$$

die in (3.51) eingesetzt auf

$$-\lambda_1(s_1) 2m\delta r(s_1) - \frac{4km}{r(s_1)^3} \delta r(s_1) + \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^3} \delta \mathcal{J} 4mr(s_1) - \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^2} 2m\delta r(s_1) - \lambda_4(s_1) = 0$$

führt. Unter Verwendung von (3.25), (3.26) und der bekannten Kozustandsvariablen (3.46) kann der Ausdruck für $\lambda_1(s_1)$ vereinfacht werden, und als

$$\delta N(s_1) = \left(-\frac{2k}{r(s_1)^3} - \xi^2 - \lambda_1 \right) m\delta r(s_1) - 2m\xi r\delta\xi \quad (3.52a)$$

angeschrieben werden. Gleichung (3.52a) stellt somit die Variation der Normalkraft am äußeren Fadenende dar. Am inneren Ende haben wir einerseits keine zusätzliche Punktmasse und andererseits ein Loslager, wodurch eine radiale Variation nicht auftreten kann

$$\delta r(s_0) = 0. \quad (3.52b)$$

Um das Gleichungssystem zu vervollständigen setzen wir in (3.47d) die bereits bestimmten Kozustandsvariablen λ_2 und λ_3 aus (3.50), bzw. λ_4 aus (3.46) ein, und bekommen

$$\delta N' = -\frac{k\rho A(s)}{r^3}\delta r - \lambda_1 A(s)\rho\delta r + \frac{2\mu_0^2}{\mathcal{J}^3}\delta\mathcal{J}A(s)\rho r - \frac{\mu_0^2}{\mathcal{J}^2}A(s)\rho\delta r.$$

Obiger Ausdruck kann erheblich vereinfacht werden, wenn wir die Definition der Impulsabbildung (3.25) und deren Variation (3.26) verwenden

$$\delta N' = \left(-\frac{2k}{r(s)^3} - \xi^2 - \lambda_1\right) A(s)\rho\delta r(s) - 2A(s)\rho\xi r\delta\xi. \quad (3.52c)$$

An dieser Stelle sei die obige Vorgehensweise kurz zusammengefasst, bevor wir auf die numerische Auswertung und die Diskussion der Ergebnisse eingehen. Wir haben gesehen, dass die Stabilitätsanalyse des Fadens das Auffinden des kleinsten und somit kritischen Eigenwerts erfordert. Die Aufgabe reduzierte sich in einem ersten Schritt auf die Bestimmung der kritischen Punkte des *amended potentials* (3.24), also der Gleichgewichtslagen. Die Auswertung von $\delta V_{\mu_0} = 0$ ergab mit (3.33) das Gleichungssystem zur Berechnung des Fadenquerschnitts und der Lage der äußeren Masse. Diese Ergebnisse wurden unter der Voraussetzung konstanter Dehnung im gesamten Faden gewonnen. Um nun die gefundene radiale Gleichgewichtslage auf Stabilität zu untersuchen, muss, in einem zweiten Schritt, diese in $\delta^2 V_{\mu_0}$ eingesetzt positive Eigenwerte garantieren. Weil nur das Vorzeichen des kleinsten Eigenwerts von Interesse ist, formulieren wir die Fragestellung als ein Problem der Variationsrechnung. Mit der im Anhang C gezeigten Vorgehensweise bestimmten wir zunächst die Hamiltonfunktion \mathcal{H} . Tabelle 3.2 zeigt, welche Kozustandsvariablen welchen zusätzlichen Gleichungen entsprechen. Im Laufe der Rechnung hat sich λ_1 nicht aus den entsprechenden Gleichungen bestimmen lassen. Es kann gezeigt werden, dass dieses λ_1 genau der gesuchte Eigenwert λ ist. Um diese Aussage zu bestätigen, ist erheblicher Rechenaufwand notwendig, wir beschränken uns auf den Verweis auf [16], wo dies für einfachere Probleme gezeigt wird. Wenn jetzt unser λ_1 den vermeintlich kritischen Eigenwert λ des Problems darstellt, dann ist klar, warum dieser mit negativem Vorzeichen in Rechnung gestellt wurde (vgl. (3.44)). Das Maximum-Prinzip maximiert stets die entsprechende Größe, wenn diese nun mit negativem Vorzeichen Berücksichtigung findet, so liefert sie den kleinsten positiven Wert. Zusammenfassend muss die Lösung des aus (3.18), (3.26), (3.33), (3.34), (3.37), (3.39), (3.43) und (3.52) bestehenden Gleichungssystems, unter Verwendung der jeweils auftretenden Konstanten, gefunden werden.

Die Vorgehensweise bei der numerischen Auswertung wird im Folgenden kurz zusammengefasst. Zunächst schreibt das Homotopieverfahren (vgl. Kap. 2.1.1) die Lage des inneren Fadenendes $r(s_0)$ vor, und mit (3.33) berechnet sich einerseits der Querschnittsverlauf $A(s)$ und andererseits die Lage der äußeren Masse $r(s_1)$. Somit ist die radiale Fadenkonfiguration für diesen Homotopieschritt bestimmt und die Stabilitätsanalyse beginnt. Die Lösung von (3.52) wurde mit Hilfe des Randwertlösers BNDSCO [12] bestimmt. Dieses Programmpaket arbeitet mit einem Mehrzielverfahren, einer verbesserten Form des einfachen Schießverfahrens. Wird eine vorgegebene Genauigkeit erreicht, so startet

der nächste Homotopieschritt und bewegt das innere Fadenende in Richtung Erde. Im Gegensatz zum kontinuierlichen Hantelmodell sind die Zwischenergebnisse für die Lagen des inneren Fadenendes zwischen r_{gs} und r_e von geringem Interesse.

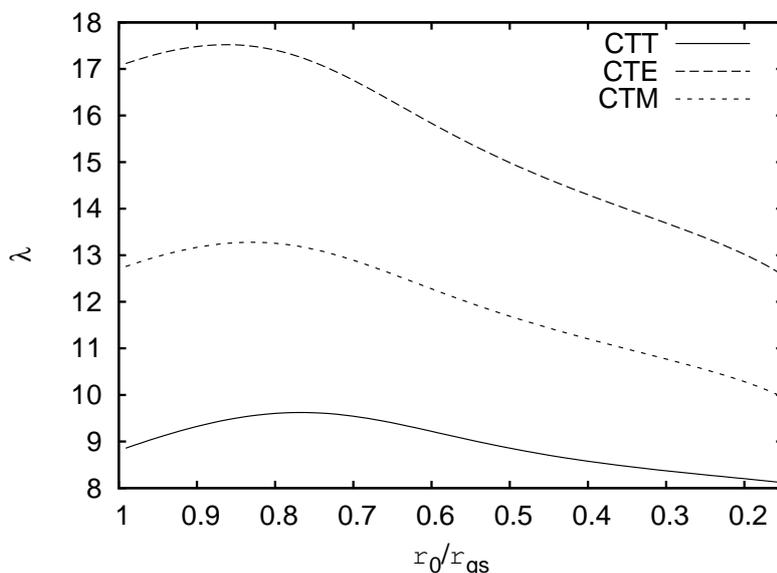


Abbildung 3.5.: Verlauf des kritischen Eigenwerts

Prinzipiell sind somit nur die Eigenwerte für $r_0 = r_e$ entscheidend für die Stabilität des Raumaufzugs, trotzdem ist in Abb. 3.5 der Verlauf des kleinsten Eigenwerts in Abhängigkeit der Lage des inneren Fadenendes dargestellt. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass nur das Vorzeichen für die Beurteilung ausschlaggebend ist. Wie bereits beim einfachen Modell gezeigt, ist die radiale Konfiguration stabil.

Im Kapitel 3.2.1 haben wir die radiale Gleichgewichtslage eingehend besprochen und gezeigt, wie durch Festlegung des Fadenquerschnitts auf der Erdoberfläche die Gesamtlänge beeinflusst werden kann. Wir geben in der Rechnung diesen inneren Querschnitt nicht direkt an, sondern schreiben dort eine entsprechende Punktmasse vor, die jedoch an der Lagerung mit einem Loslager nichts ändert. Weiters wurde gezeigt, dass mit der äußeren Masse die Länge des Fadens verändert werden kann. Für die Stabilitätsanalyse wurden beide Endmassen mit 1 kg in Rechnung gestellt und gewährleiten die Stabilität der, in Abb. 3.3 dargestellten, radialen Gleichgewichtslage.

A. Der Stabilitätsbegriff

In den unterschiedlichen Disziplinen der Mechanik haben sich verschiedene Definitionen des Stabilitätsbegriffs durchgesetzt. Ihnen allen gemein ist jedoch die grundlegende Frage, wie sich die gefundenen Lösungen der entsprechenden Systemgleichungen bei gestörten Anfangsbedingungen, Parametern oder physikalischen Gegebenheiten verhalten. Die Stabilitätsuntersuchung kennt folgende drei Vorgangsweisen:

- **Dynamische Methoden:**
Die Aussagen werden anhand der Bewegungsgleichungen getroffen und sind immer anwendbar.
- **Energiemethoden:**
Kann nur dann angewendet werden, wenn alle am System angreifenden Kräfte aus einem Potential herleitbar sind.
- **Gleichgewichtsmethoden:**
Nur wenn nach Stabilitätsverlust das System wieder in eine Gleichgewichtslage übergeht, kann diese Methode angewendet werden.

In der vorliegenden Arbeit geht es um das Auffinden von Gleichgewichtslagen und Bestimmung ihrer Stabilität. Es wurden ausschließlich Konzepte angewendet, die den Energiemethoden zugeordnet sind. Wir geben die notwendigen Definitionen und Begriffe an, um die behandelten Problemstellungen auf solide, theoretische Grundlagen zu stellen. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf einfache mechanische Systeme, für die $H = T + V$ gilt. Diese Einschränkung ist notwendig, weil die Stabilitätsbegriffe auch auf andere Systeme, mit entsprechenden Verallgemeinerungen, anwendbar sind.

A.1. Gleichgewichtslagen

Betrachten wir ein endlichdimensionales System, dann wird die Dynamik durch die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad (\text{A.1})$$

mit der Lagrangefunktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$, bestimmt. Suchen wir die Gleichgewichtslagen, dann müssen wir $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ in die Lagrangegleichung (A.1) einsetzen und erhalten folgendes Gleichungssystem

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Aus der Menge aller Gleichgewichtslagen, die (A.2) liefert, sind nur jene stabil, für die der folgende Satz gültig ist.

A.1.1. Kriterium von Lagrange-Dirichlet

Satz. Die Gleichgewichtslage \mathbf{q}_0 ist eine stabile Gleichgewichtslage, wenn die potentielle Energie in ihr ein Minimum besitzt

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} > 0. \quad (\text{A.3})$$

Die Stabilitätsanalyse beschränkt sich daher auf die Betrachtung des Potentials V , also nur auf den n -dimensionalen Konfigurationsraum Q .

A.2. Relative Gleichgewichtslagen

Die Theorie der relativen Gleichgewichtslagen ist mathematisch anspruchsvoll, daher begnügen wir uns mit der Definition der wichtigsten Konzepte, ohne alle verwendeten Begriffe anzugeben. Die verwendeten Bezeichnungen sind so wie bei Marsden [10] gewählt.

Ist für alle $\mathbf{z} \in P$ die Hamiltonfunktion $H(\mathbf{z})$ invariant gegenüber der Wirkung einer Lie-Gruppe G , auf den Phasenraum T^*Q , dann spricht man von einem symmetrischen Hamilton'schen System. Wir bezeichnen mit $\Psi_g : T^*Q \rightarrow T^*Q$ diese Wirkung von G auf den Phasenraum T^*Q , somit gilt

$$H(\Psi_g(\mathbf{z})) = H(\mathbf{z}) \quad \text{für alle } g \in G, \mathbf{z} \in P. \quad (\text{A.4})$$

Man nennt \mathbf{z}_0 ein relatives Gleichgewicht, wenn gilt

$$\mathbf{z}_0(t) = \Psi_{\exp(t\hat{\xi})} \cdot \mathbf{z}_0 = \exp(t\hat{\xi}) \cdot \mathbf{z}_0 \quad \text{für ein } \hat{\xi} \in \mathfrak{g}, \quad (\text{A.5})$$

wobei mit \mathfrak{g} die Lie-Algebra zur Lie-Gruppe G bezeichnet wird. Ein relatives Gleichgewicht ist nun dadurch gekennzeichnet, dass die Geschwindigkeit des Punktes \mathbf{z}_0 im Phasenraum T^*Q mit dem zur Gruppengeschwindigkeit $\hat{\xi}$ gehörenden infinitesimalen Generator entlang des Gruppenorbits übereinstimmt. Das bedeutet

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = \xi_P(\mathbf{z}_0) = \left. \frac{d}{dt} \exp(t\hat{\xi}) \cdot \mathbf{z}_0 \right|_{t=0} \quad \text{für ein } \hat{\xi} \in \mathfrak{g}. \quad (\text{A.6})$$

Die Stabilitätsuntersuchung solcher symmetrischer Systeme verlangt allgemeinere Konzepte wie z.B. die *Energy Momentum Method* [10], die den Symmetrieeigenschaften entsprechend Rechnung trägt. Diese Methoden haben den Nachteil, dass sie im $2n$ -dimensionalen Phasenraum T^*Q arbeiten. Die Grundidee der *Reduced Energy Momentum Method* besteht nun darin, ein verändertes Potential zu finden mit dem in einem

niedrigdimensionalen Raum scharfe Aussagen über die Stabilität gemacht werden können.

Bei vielen Systemen kann die Symmetrie dahingehend ausgenutzt werden, dass die Wahl der verallgemeinerten Koordinaten zu zyklischen Variablen führt. Diese treten dann nicht in der Lagrange- und somit auch nicht in der Hamilton-Funktion auf, und die entsprechenden Impulse sind konstant. Für diesen angenehmen Fall kann mit der Methode von Routh, die noch gesondert behandelt wird, das Stabilitätsproblem gelöst werden.

A.2.1. Die *Reduced Energy-Momentum Method*

Für ein tieferes Verständnis dieser Stabilitätsanalyse sind Begriffe aus der Differentialgeometrie und der Gruppentheorie notwendig, die bei [17] und den dort zitierten Autoren bereitgestellt werden. Ein Zugang zur REMM, der mehr den Anforderungen eines Ingenieurs gerecht wird, ist in [8, 9] dargestellt. Die Theorie der REMM geht vom Potential $V(\mathbf{q})$ aus, und modifiziert dieses, um der Symmetrie im System gerecht zu werden. Man definiert ein so genanntes *amended* (engl. berichtigt, geändert) *potential*

$$V_{\mu_0}(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \mathcal{J}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\mu}_0. \quad (\text{A.7})$$

In manchen Fällen ist der Umweg über das *augmented* (engl. erweitert, vermehrt) *potential*

$$V_{\xi}(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{J}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\xi} \quad (\text{A.8})$$

aus rechentechnischer Sicht empfehlenswert. Wir geben ohne mathematische Strenge die Definitionen der in (A.7) und (A.8) eingeführten Größen an, es sei darauf hingewiesen, dass bei der folgenden Darstellung die verbale Erklärung im Vordergrund steht. Für eine mathematisch fundierte Erklärung dieser Begriffe und deren Herleitung sei auf [17] bzw. [10] verwiesen.

- Für die Gruppengeschwindigkeit $\xi \in \mathfrak{g}$ ist der zugehörige infinitesimale Generator definiert durch

$$\boldsymbol{\xi}_P(\mathbf{z}) = \left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi) \cdot \mathbf{z} \right|_{t=0}, \quad (\text{A.9})$$

und stellt den Tangentenvektor an den Gruppenorbit dar. $\boldsymbol{\xi}_P$ ist jene Geschwindigkeit mit der sich das System entlang des Gruppenorbits bewegt, wenn die Symmetriegruppe auf den Phasenraum T^*Q wirkt und alle anderen Freiheitsgrade festgehalten werden.

- Der *locked inertia tensor* $\mathcal{J}(\mathbf{q}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ wird als

$$\mathcal{J}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbb{F}L(\boldsymbol{\nu}_Q(\mathbf{q}))) \quad (\text{A.10})$$

definiert, wobei $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ die Legendre-Transformation und $\mathbf{J} : T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ die Impulsabbildung ist, die durch

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \langle \xi_Q(\mathbf{q}), p \rangle \quad (\text{A.11})$$

bestimmt ist. Darunter hat man sich eine generalisierte Massenmatrix vorzustellen, die durch Einfrieren, daher die Bezeichnung *locked*, einer Konfiguration \mathbf{q} entsteht. Wenn sich das System nur mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\nu}$ entlang des Gruppenorbits bewegt, dann ist \mathcal{J} gerade die Massenmatrix. Die Problemstellungen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, führen stets auf zyklische Variablen, vorausgesetzt es existiert eine Symmetrie, womit \mathcal{J} jeweils einem entsprechenden Eintrag in der Massenmatrix des Gesamtsystems entspricht.

- Wert der Impulsabbildung am relativen Gleichgewicht:

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{J}(\mathbf{z}_0) = \mathcal{J}(\mathbf{q}_0)\widehat{\boldsymbol{\xi}} \quad (\text{A.12})$$

Entspricht (A.11) ausgewertet an der Stelle des relativen Gleichgewichts \mathbf{z}_0 . Ist der Impuls im System, wenn eine Lage \mathbf{q} festgehalten wird, und nur eine Bewegung entlang des Gruppenorbits auftritt.

In Analogie zum Kriterium von Dirichlet kann die Stabilitätsanalyse, trotz vorhandener Symmetrien, mit den modifizierten Potentialen erfolgen. Zunächst bestimmen wir mit einem der beiden Potentiale gemäß

$$\left. \frac{\partial V_\xi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{\partial V_{\mu_0}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = 0 \quad (\text{A.13})$$

die kritischen Punkte, also relative Gleichgewichtslagen \mathbf{q}_0 des Systems. Beide Potentiale (A.7) und (A.8) liefern die Gleichgewichtslagen \mathbf{q}_0 des betrachteten Systems. Aus der Menge aller möglichen Gleichgewichtslagen \mathbf{q}_0 wollen wir nun Aussagen bezüglich deren Stabilität treffen. Bei der Stabilitätsuntersuchung für die mit den obigen Gleichungen bestimmten Gleichgewichtslagen führt

$$\mathbf{D}^2 V_\xi \big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} > 0 \quad (\text{A.14})$$

zwar auf eine Stabilitätsaussage, aber nur

$$\mathbf{D}^2 V_{\mu_0} \big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} > 0 \quad (\text{A.15})$$

zu einer scharfen Bedingung für ein stabiles Systemverhalten. Gleichgewichtslagen die (A.14) erfüllen sind stabile Lagen, aber es ist denkbar, dass (A.14) nicht erfüllt ist aber (A.15) schon. Bei einer Punktmasse im geostationären Orbit r_{gs} tritt genau dieser Fall auf. Aus diesem Grund ist immer die positive Definitheit des *amended potentials* mit (A.15) zu zeigen, um eine Gleichgewichtslage als stabil zu charakterisieren. Weil Variationen in Symmetrierichtung Nulleigenwerte zur Folge hätte, wird der Raum der zulässigen Variationen entsprechend eingeschränkt.

Bei der Auswertung von (A.15) führt die zweite Ableitung des inversen *locked inertia tensors* $\mathcal{J}^{-1}(\mathbf{q})$ in vielen Fällen zu Schwierigkeiten. Im Anhang von [8] wird gezeigt wie diese unangenehme Berechnung vermieden wird und das Stabilitätskriterium in Form von

$$\mathbf{D}^2 V_{\mu_0}(\mathbf{q}_0)(\boldsymbol{\delta q}, \boldsymbol{\delta q}) = \mathbf{D}^2 V_{\xi_0}(\mathbf{q}_0)(\boldsymbol{\delta q}, \boldsymbol{\delta q}) + \mathbf{ident}_{\xi_0}(\boldsymbol{\delta q}) \cdot \mathcal{J}^{-1}(\mathbf{q}_0) \mathbf{ident}_{\xi_0}(\boldsymbol{\delta q}) \quad (\text{A.16})$$

mit dem *ident*-Operator

$$\mathbf{ident}_{\xi_0}(\delta \mathbf{q}) = -(\mathbf{D}\mathcal{J}(\mathbf{q}_0) \cdot \delta \mathbf{q}) \cdot \xi_0 \quad (\text{A.17})$$

angeschrieben werden kann.

Für die REMM können die Freiheitsgrade für ein symmetrisches Hamiltonsches System beliebig gewählt werden, auch wenn diese zu keinen zyklischen Variablen führen. Der Grund dafür liegt in der Tatsache begründet, dass die grundsätzliche Eigenschaft einer Symmetrie nicht von der jeweiligen Wahl der Freiheitsgrade, sondern nur vom System selbst abhängig ist. Diese Freiheit in der Wahl der verallgemeinerten Koordinaten ist der wichtigste Vorteil der REMM, der dieses Verfahren zu einem nützlichen Werkzeug zur Stabilitätsuntersuchung komplizierter Systeme macht.

A.2.2. Die Methode von Routh

Für ein gegebenes n -dimensionales einfaches mechanisches System sei eine Variable q_n zyklisch, dann stellt sich die Lagrange-Funktion als

$$L = L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dots, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

und die entsprechende Hamilton-Funktion als

$$H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, \dots, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_{n-1}, \alpha, t)$$

dar. In der Formulierung nach Lagrange treten alle n verallgemeinerten Geschwindigkeiten auf, womit das Problem ein n -dimensionales ist, obwohl eine Variable zyklisch ist. Das Vorhandensein einer ignorierbaren Variablen reduziert in der hamiltonschen Formulierung die Dimension auf $n - 1$, weil der zur Variablen q_n zugeordnete Impuls $p_n = \alpha$ konstant ist. Das Verhalten der zyklischen Variablen wird durch

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

beschrieben. Dieser eindeutige Vorteil in der Handhabung von zyklischen Variablen mit den Hamiltonschen-Gleichungen in Verbindung mit der Lagrange-Funktion führt auf die Formulierung einer weiteren Funktion, der Routh-Funktion.

Die Methode teilt also die Freiheitsgrade eines Systems in zyklische und nicht-zyklische und führt die ersteren der hamiltonschen, und die letzteren der lagrangeschen Formulierung zu und bildet so die Routh-Funktion R . Von unseren n -Freiheitsgraden seien $r = n - s$ zyklisch. Die Routh-Funktion

$$R(q(1), \dots, q(s), \dot{q}(1), \dots, \dot{q}(s), p(s+1), \dots, p(n), t) = \sum_{i=s+1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (\text{A.18})$$

erfüllt nun einerseits die Hamiltonschen-Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad i = s+1, \dots, n \quad (\text{A.19})$$

und andererseits die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, s. \quad (\text{A.20})$$

Die den zyklischen Variablen zugeordneten Impulse sind gemäß (A.19) konstant, womit die Routh-Funktion nur mehr von s Unbekannten

$$R = R(q(1), \dots, q(s), \dot{q}(1), \dots, \dot{q}(s), \alpha_1, \dots, \alpha_r, t)$$

anhängig ist. Die Gleichgewichtslagen bestimmen sich nun aus

$$\left. \frac{\partial R}{\partial q_i} \right|_{q_{i0}} = 0 \quad i = 1, \dots, s. \quad (\text{A.21})$$

Mit einer beliebig kleinen Abweichung von der Gleichgewichtslage $\epsilon_i(t)$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} q_i(t) &= q_{i0} + \epsilon_i(t) \\ \dot{q}_i(t) &= \dot{\epsilon}_i(t) \end{aligned} \quad i = 1, \dots, s, \quad (\text{A.22})$$

nun werden obige Größen in die Routh-Funktion eingesetzt und um die Gleichgewichtslage in eine Taylorreihe entwickelt

$$R = R_0 + \underbrace{\frac{\partial R}{\partial q_{0i}}}_{=0} \epsilon_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{0i}} \dot{\epsilon}_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 R}{\partial q_{0i} \partial q_{0j}}}_{-c_{ij}} \epsilon_i \epsilon_j + \underbrace{\frac{\partial^2 R}{\partial q_{0i} \partial \dot{q}_{0j}}}_{g_{ij}} \epsilon_i \dot{\epsilon}_j + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 R}{\partial \dot{q}_{0i} \partial \dot{q}_{0j}}}_{a_{ij}} \dot{\epsilon}_i \dot{\epsilon}_j + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (\text{A.23})$$

Der erste Term R_0 im obigen Ausdruck ist konstant und der zweite erfüllt die Lagrange-Gleichung, womit R in erster Näherung als

$$R = \frac{1}{2} \mathbf{a}_{ij} \dot{\epsilon}_i \dot{\epsilon}_j + \mathbf{g}_{ij} \epsilon_i \dot{\epsilon}_j - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{ij} \epsilon_i \epsilon_j \quad (\text{A.24})$$

angeschrieben werden kann. In die Bewegungsgleichung nach Lagrange für ϵ_i eingesetzt ergibt

$$\mathbf{a}_{ij} \ddot{\epsilon}_j - \mathbf{b}_{ij} \dot{\epsilon}_j + \mathbf{c}_{ij} \epsilon_j = 0, \quad (\text{A.25})$$

mit dem, auch als gyroskopischen Term bezeichneten, Ausdruck

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{g}_{ij} - \mathbf{g}_{ji}. \quad (\text{A.26})$$

Mit einem exponentiellen Ansatz bekommt man folgende Determinante

$$|\mathbf{c} + i\omega \mathbf{b} - \omega^2 \mathbf{a}| = 0, \quad (\text{A.27})$$

deren Lösungen, als charakteristische Gleichung, über Stabilität der Bewegung um die Gleichgewichtslage entscheiden. Reelle Werte für ω bedeuten eine beschränkte und somit

stabile Gleichgewichtslage. Imaginäre ω 's führen zu einer unbeschränkten Vergrößerung von ϵ im Laufe der Zeit und bedeutet instabiles Verhalten.

Um die soeben beschriebene Methode von Routh anwenden zu können, muss eine im System vorhandene Symmetrie durch eine passende Wahl der Freiheitsgrade auf eine ignorierbare Variable führen. Der große Vorteil der REMM besteht nun darin, dass beliebige Freiheitsgrade möglich sind, und trotzdem Aussagen über die Stabilität gemacht werden können. Doch auch in Systemen mit zyklischen Variablen ist die Anwendung der REMM vorteilhafter, weil die Stabilitätsuntersuchung mit einfacheren Rechenschritten durchgeführt werden kann. Bei [8, 9] sind neben den zwei erwähnten Methoden zwei weitere Möglichkeiten der Analyse mechanischer Systeme mit Symmetrien angegeben und anhand eines einfachen Beispiels verglichen. In der vorliegenden Arbeit wurde auf Grund der dort beschriebenen Vorteile jedoch nur von der REMM Gebrauch gemacht, obwohl in allen Modellen die Freiheitsgrade so gewählt wurden, dass eine vorhandene Symmetrie auch zu einem zyklischen Freiheitsgrad führt.

B. Die untersuchten Werkstoffe

Um die technische Realisierbarkeit eines Raumaufzugs zu überprüfen, muss man sich zunächst die Frage stellen, welche Werkstoffe für eine derartige Konstruktion in Frage kommen. Um verschiedene Werkstoffe zu charakterisieren und zu vergleichen, kennt die Werkstoffwissenschaft eine Vielzahl von Kenngrößen, für den Raumaufzug aber ist die Reißlänge

$$l_* = \frac{\sigma_{max}}{\rho g}$$

jener Kennwert, der am aussagekräftigsten ist. Darunter versteht man jene Länge, bei der ein Material unter seinem Eigengewicht gerade die Zugfestigkeit im oberen Aufhängepunkt erreicht. Für sehr lange Konfigurationen kann g nicht mehr als konstant angesehen werden. Stellen wir uns nun diesen Aufhängepunkt im GEO vor und das freie Ende auf der Erdoberfläche, dann wird die Spannung im Fadenquerschnitt durch die Gravitationskraft, und die Kraft zufolge der Erddrehung („Fliehkraft“), in Abhängigkeit der Entfernung vom Zentrum der Erde, bestimmt. Stellt man für diese Anordnung die Frage der maximalen Belastung, so führt dies auf die bei Beletsky [2] angegebenen Reißlänge im Orbit

$$L_* = \frac{1}{\dot{\vartheta}} \sqrt{\frac{2 \sigma_{max}}{3 \rho}}.$$

Material	Abk.	σ_{max} [GPa]	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	ε_{max}	l_* [km]	L_* [km]
Stahl	St	1-5	200	7900	0.025	64.5	8900
<i>carbon nanotubes</i>	CTT	150	630	1300	0.238	11700	120000
	CTE	65	630	1300	0.103	5100	79000
	CTM	65	441	1300	0.147	5100	79000

Tabelle B.1.: In den numerischen Auswertungen verwendete Materialkennwerte.

σ_{max} : Zugfestigkeit; E : Elastizitätsmodul; ρ : Dichte;

ε_{max} : Verzerrung bei σ_{max} ; l_* : Reißlänge; L_* : Reißlänge im Orbit.

In Tab. B.1 sind nun jene Werkstoffe angegeben die in dieser Arbeit berücksichtigt wurden. Die Werte von CTT sind die theoretischen Eigenschaften von *carbon nanotubes*, wohingegen die Werte von CTE experimentellen Untersuchungen an realen Proben entstammen [14]. CTM entspricht einer Wahl der Parameter, die sich an der Berechnung der mechanischen Eigenschaften von defekten *carbon nanotubes* [13] orientiert.

C. Variationsprobleme - Optimale Steuerung

Die Grundaufgabe in der Variationsrechnung ist das Auffinden einer Funktion, die ein gegebenes Integral innerhalb eines bekannten Intervalls maximiert. Soll diese gesuchte Funktion zusätzlich einer Nebenbedingung in integraler Form genügen, spricht man von einem isoperimetrischen Variationsproblem. Führen wir zusätzlich eine Kontrollvariable \mathbf{u} ein, mit der wir den Wert des Integrals verändern können, kann man sich die Frage nach dem zeitlichen Verlauf von $\mathbf{u}(t)$ stellen, mit dem Ziel, den Wert des Integrals zu maximieren. Mit solchen Fragen beschäftigt sich die Theorie der optimalen Steuerungen, die vor allem in der Ökonomie eine wichtige Rolle spielt. Wir gehen in diesem Anhang nur auf die wichtigsten, zur Vereinfachung der Gleichungen beim Modell mit kontinuierlichem Faden notwendigen, Begriffe ein (vgl. [3]).

C.1. Das Maximum-Prinzip von Pontrjagin

Für ein wie immer geartetes Problem sei die Dynamik der Zustandsvariable \mathbf{q} durch eine Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) \quad (\text{C.1a})$$

gegeben, mit der Kontrollvariable \mathbf{u} in einem offenen oder abgeschlossenen Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Gesucht ist jener zeitliche Verlauf $\mathbf{u}(t)$, für den das Funktional

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) dt + \mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}(t_1)) \quad (\text{C.1b})$$

maximiert wird. Die skalare Funktion $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{u})$ wird bei Anwendungen wirtschaftlicher Natur als Nutzenfunktion bezeichnet, unter der Restwertfunktion oder auch Schrottwert $\mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}(t_1))$ hat man sich den Wert des Zustandes \mathbf{q} zur Zeit t_1 vorzustellen. Wir nehmen an, dass alle auftretenden Funktionen hinreichend oft stetig differenzierbar sind und dass die zulässige Menge Ω nicht leer ist. Zur Zeit $t = t_0$ sei der Anfangszustand des Systems bekannt

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0. \quad (\text{C.1c})$$

Der Endzustand sei keiner Beschränkung unterworfen. Mit der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}), \quad (\text{C.2})$$

wobei λ den Kozustand bezeichnet, lässt sich das zentrale Resultat der optimalen Kontrolltheorie wie folgt formulieren:

Satz. *Es sei $\mathbf{u}^*(t)$ eine optimale Steuerung für das Kontrollproblem (C.1) und $\boldsymbol{\lambda}^*$ die zugehörige Zustandstrajektorie. Dann existiert eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n$, welche als adjungierte Variable oder Kozustandsvariable bezeichnet wird, so dass folgende Aussagen gelten: An allen Stellen $t \in [t_0, t_1]$, wo $\mathbf{u}^*(t)$ stetig ist, gilt die Maximumbedingung*

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{u} \in \Omega} \mathcal{H}(t, \mathbf{q}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (\text{C.3})$$

und die adjungierte Kozustandsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}). \quad (\text{C.4})$$

Am Endzeitpunkt gilt die Transversalitätsbedingung

$$\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t_1, \mathbf{q}(t_1)). \quad (\text{C.5})$$

Wenn das Maximum der Hamiltonfunktion bezüglich \mathbf{u} im Inneren von Ω angenommen wird, dann lässt sich

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (\text{C.6})$$

als notwendige Bedingung erster Ordnung für ein lokales Minimum verwenden.

Wir geben eine Herleitung mittels der Variationsrechnung an, um zu zeigen wie die Randterme entsprechend zu behandeln sind. Gesucht ist also jene Funktion $\mathbf{u}^*(t)$ die einerseits das Funktional (C.1b) extremal werden lässt und andererseits das Differentialgleichungssystem (C.1a) erfüllt. Wir berücksichtigen die Nebenbedingungen mit Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{q}}) dt + \mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}(t_1)).$$

Mittels partieller Integration des Terms mit $\dot{\mathbf{q}}$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left(F(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{q} \right) dt + \mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}(t_1)) - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{q} \Big|_{t_0}^{t_1}$$

bzw. unter Verwendung der Definition (C.2) zu

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{q} \right) dt + \mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}(t_1)) - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{q} \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Wir wollen L nach \mathbf{u} maximieren und betrachten daher Variationen von L zufolge einer Änderung von \mathbf{u} auf $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ und der entsprechenden Systemantwort von \mathbf{q} auf $\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$

$$\delta L = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right] dt + \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t_1, \mathbf{q}(t_1)) - \boldsymbol{\lambda}(t_1) \right] \delta \mathbf{q}(t_1) + \boldsymbol{\lambda}(t_0) \delta \mathbf{q}(t_0).$$

Das gesuchte \mathbf{u} maximiert L , womit die notwendige Bedingung $\delta L = 0$ nur dann erfüllt ist, wenn die Koeffizienten von $\delta\mathbf{u}$ und $\delta\mathbf{q}$ verschwinden, was zu

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t_1, \mathbf{q}(t_1)) \quad (\text{C.7})$$

führt. Falls der Anfangs- oder Endzustand von \mathbf{q} auf einer Mannigfaltigkeit beschränkt wird, liefert

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) \delta \mathbf{q}(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda}(t_0) \perp \delta \mathbf{q}(t_0) \quad (\text{C.8})$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t_1, \mathbf{q}(t_1)) - \boldsymbol{\lambda}(t_1) \right) \delta \mathbf{q}(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t_1, \mathbf{q}(t_1)) - \boldsymbol{\lambda}(t_1) \right) \perp \delta \mathbf{q}(t_1) \quad (\text{C.9})$$

den passenden Satz von Randbedingungen für $\boldsymbol{\lambda}$. Schreiben wir beispielsweise ein q_j an einer Stelle $t_r \in \{t_0, t_1\}$ vor, so spricht man von einer kinematischen Randbedingung, wobei für die entsprechende adjungierte Variable $\lambda_j(t_r)$ keine Randbedingung angebar ist. Kann umgekehrt z.B. $q_j(t_1)$ frei variieren, ergibt sich die natürliche oder dynamische Randbedingung $\lambda_j(t_1) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j}$.

Weil der Fall der natürlichen Randbedingung in der Betrachtung des kontinuierlichen Fadens auftritt, geben wir eine verbale Interpretation an. Verlangen wir von einer Zustandsvariablen, dass ihr Anfangs- oder Endwert auf einer Mannigfaltigkeit liegen soll, dann liefert die Transversalitätsbedingung (C.9) eine zusätzliche Bedingung. Anschaulich sucht man also ein Extremum einer Funktion, deren Randwert auf einer Mannigfaltigkeit liegen muss. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Bedingung nur zu erfüllen ist, wenn am Rand die gesuchte Funktion senkrecht auf die Mannigfaltigkeit steht. Im einfachsten Fall steht die kürzeste Verbindungskurve eines Punktes zu einer beliebigen Geraden senkrecht auf diese, da man sonst kürzere Verbindungskurven angeben könnte.

Literaturverzeichnis

- [1] Arnold V. I., *Mathematical Methodes of Classical Mechanics*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer-Verlag, 1988.
- [2] Beletsky V. V., Levin E. M., *Dynamics of Space Tether Systems*, Advances of the Astronautical Sciences, 83, 1993.
- [3] Feichtinger G., Hartl R. F., *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*, Anwendung des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften, Walter de Gruyter, 1986.
- [4] Goldstein H., *Classical Mechanics*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, 1980.
- [5] Hamel G., *Theoretische Mechanik*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 57, Springer-Verlag, 1949.
- [6] Iijima S., *Helical microtubules of graphitic carbon*, Nature 354 65-8, 1991.
- [7] Keller Herbert B., *Numerical Solution of Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems*, Applications of Bifurcation Theory, Edited by Paul H. Rabinowitz, Academic Press Inc. 1977.
- [8] Krupa M., Steindl A., Troger H., *Stability of Relative Equilibria. Part I: Comparison of Four Methods*, Meccanica 35: 325–351, 2001.
- [9] Krupa M., Steindl A., Troger H., *Stability of Relative Equilibria. Part II: Dumbell Satellites*, Meccanica 35: 353–371, 2001.
- [10] Marsden J. E. and Ratiu T. S., *An Introduction to Mechanics and Symmetry*, A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems, Springer-Verlag, 1994.
- [11] Meyberg K., Vachenauer P., *Höhere Mathematik 1/2*, Springer-Verlag, 2001.
- [12] Oberle H.J., Grimm W., *BNDSCO A Programm for the Numerical Solution of Optimal Control Problems*, Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Report No. 515 der DFVLR, Reihe B, Bericht 36, Oktober 2001.
- [13] Pugno N., *On the strength of the nanotube-based space elevator cable: from nanomechanics to megamechanics*, J. of Physics – Condensed Matter, 18, S1971-1990, 2006.

-
- [14] Pugno Nicola, Schwarzbart Michael, Steindl Alois, Troger Hans, *On the stability of the track of the space elevator*, Paper Submitted for Acta Astronautica, March 2007.
 - [15] Seydel R., *BIFPACK a programm package for Continuation, Bifurcation and Stability Analysis*, Universität Ulm, 1999.
 - [16] Segel Lee A., *Mathematics applied to continuum mechanics*, Dover Publications Inc., 1987.
 - [17] Simo J. C., Lewis D, Marsden J. E., *Stability of Relative Equilibria. Part I: The Reduced Energy-Momentum Method*, Arch. Rational Mech. Anal. 115, 15–59, 1991.