



D I P L O M A R B E I T

MASTER'S THESIS

Das Stabilitätsproblem Biegedrillknicken bei Verbundbrücken im Bauzustand

Modellbildung, Berechnung und numerische Simulation
sowie Konstruktion von Aussteifungssystemen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom – Ingenieurs

unter der Leitung von

Univ. Prof. Dipl. – Ing. Dr. techn. Josef Fink

und

Ao. Univ. Prof. Dipl. – Ing. Dr. techn. Francesco AIGNER

Institut für Tragkonstruktionen – Abteilung Stahlbau

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Richard KERSCHBAUMER

Matrikelnummer 0026392

Lederergasse 14a/16

1080 Wien

Wien, im Juni 2007

.....

VORWORT

Gerne möchte ich ein paar Zeilen dazu verwenden, mich bei allen Personen, die maßgeblich Anteil am Zustandekommen dieser Arbeit hatten, zu bedanken.

Herrn Univ. Prof. Dipl. – Ing. Dr. techn. Josef Fink möchte ich an dieser Stelle nicht nur für die interessante Aufgabenstellung und seine persönliche Unterstützung bei der Beschäftigung mit der vorliegenden Arbeit danken. Seinem Engagement an der Technischen Universität verdanke ich einen Großteil meiner Begeisterung für den Stahlbau.

Es ist mir ein Bedürfnis, mich an dieser Stelle ganz besonders herzlich bei Herrn Ao. Univ. Prof. Dipl. – Ing. Dr. techn. Francesco Aigner zu bedanken. Bereits während meiner Studienzeit war er mir ein hervorragender Lehrer und Freund, von dem ich in unzähligen Gesprächen und Diskussionen viel lernen durfte. Auch während der Bearbeitung der vorliegenden Diplomarbeit stand er mir jederzeit mit außerordentlich wertvollen Anregungen zur Verfügung, wofür ich ihm herzlich danke.

Weiters geht mein Dank an alle meine Freunde und Studienkollegen, die mich auf meinem Weg durch das Studium begleitet haben und denen ich auch in Zukunft freundschaftlich verbunden sein werde.

Großer Dank geht auch an meine Arbeitgeber während der Studienzeit. Zwar war es oft sehr schwer, Arbeit und Studium zu vereinbaren, doch die dabei gesammelten Erfahrungen sind derart wertvoll, dass sie mich zumindest einige der unzähligen mit Arbeit verbrachten Stunden in der Freizeit oder am Wochenende vergessen lassen. Ganz besonderer Dank geht an das Team des Ingenieurbüros Sigl für sein Vertrauen in meine Arbeit und alles, was ich von ihm im Zuge der Bearbeitung etlicher Projekte lernen durfte.

Besonderer Dank gebührt meiner Familie und meiner Freundin. Sie waren immer an meiner Seite.

DANKE!

KURZFASSUNG

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Stabilitätsproblem Biegedrillknicken bei Stahl – Stahlbeton – Verbundbrücken im Bauzustand.

Anhand eines exemplarischen Verbundbrückentragwerks werden verschiedene Maßnahmen zur Anhebung der Sicherheit gegen Stabilitätsversagen untersucht.

Die Berechnung der Struktur erfolgt einerseits mit Hilfe des RITZ'schen Verfahren nach der Potentialmethode, begleitend dazu werden die modellierten Systeme auch mit Hilfe eines kommerziellen 3D – FEM – Programms berechnet und die Übereinstimmung der Ergebnisse nach diesen beiden Methoden verglichen.

Für die Näherungsverfahren wird besonderer Wert auf eine geeignete Modellbildung zur Berechnung der Struktur gelegt, was sich durch gute Übereinstimmungen der Ergebnisse nach RITZ mit jenen der aufwändigeren Berechnung nach der FE – Methode bezahlt macht.

In den ersten Kapiteln erfolgt eine allgemeine Einführung in die Stabilitätstheorie, die sich anschließend vertieft dem eigentlichen Problem des Biegedrillknickens widmet.

Anschließend wird das vorliegende Brückensystem vorgestellt und daran Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt.

Die weiteren Kapitel widmen sich der Stabilisierung des Systems durch Querträger und Verbände, welche anhand verschiedenster Kriterien optimiert werden. Bewusst wurde dabei immer der Bezug zur Praxis bewahrt.

Wegen der Vielzahl an Faktoren, die das komplexe Stabilitätsproblem Biegedrillknicken beeinflussen, ist es kaum möglich, allgemein gültige Formeln oder gar Anleitungen zu Stabilitätsberechnungen verschiedenster Systeme anzugeben.

Dennoch wird immer wieder von speziellen Problemstellungen ausgehend der Versuch unternommen, Zusammenhänge aufzuzeigen und diese in einem möglichst allgemeinen Kontext zu betrachten.

ABSTRACT

This work concentrates on the stability problem lateral torsional buckling of composite bridges during their state of construction. The discussed systems consist of steel made main girders and reinforced concrete slabs above.

By means of an exemplary bridge structure different measures to improve safety against loss of stability such as transverse members between the main girders and stiffening bracings are being examined.

On the one hand the system is being calculated with the RITZ – method, on the other hand the analysis uses a commercial three dimensional finite element program. The results are continuously being compared to each other and evaluated.

In all those considerations a strong emphasis lies on the proper modelling of the structure which represents the basis for all further investigations. This turns to account in good matches of the results gained by the RITZ – approximation method compared to the results from the finite element analysis.

The first chapters give a general introduction into stability theory and deepen into the actual problem of lateral torsional buckling. Afterwards the examined bridge system is being presented.

Further chapters are dedicated to calculations of different stabilization methods against stability failure.

Due to the complexity of the topic it's hardly possible to give generally valid instructions on how to cope with lateral torsional buckling. Nevertheless the author tries to reveal general contexts through the help of examinations at the discussed systems.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG.....	1
1.1	Allgemeines zu Verbundbrücken im Bauzustand – Problemstellung.....	1
1.2	Aufgabenstellung und Zielsetzung.....	2
2	MATHEMATISCHE UND MECHANISCHE GRUNDLAGEN	4
2.1	Koordinatensystem	4
2.2	TAYLORreihenentwicklung.....	5
2.2.1	TAYLORreihenentwicklung in einer Variable.....	5
2.2.2	TAYLORreihenentwicklung in mehreren Variablen	5
2.3	Mechanische Energieprinzipien.....	6
2.4	Orthogonalität	6
2.5	Norm	7
2.6	Fourierentwicklung	7
3	NOMENKLATUR.....	8
3.1	Materialkenngrößen.....	8
3.2	Koordinatensystem	8
3.3	Querschnittspunkte.....	8
3.4	Querschnittswerte	9
3.4.1	Flächenintegrale 0. Ordnung.....	9
3.4.2	Flächenintegrale 1. Ordnung.....	9
3.4.3	Flächenintegrale 2. Ordnung.....	10
3.4.4	Kindem’sche Querschnittsfunktionen	10
3.5	Verformungen	10
3.6	Belastungen	11
3.7	Schnittgrößen.....	11
3.8	Differentialgleichung der Biegelinie	12
4	STABILITÄTSTHEORIE.....	13
4.1	Energetische Betrachtungen von Stabilitätsproblemen – Das Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie.....	13
4.2	Stabilitätsgrenze	14
4.3	Stabilitätsverlust.....	15
4.4	Lösungsmethoden für Eigenwertprobleme	19
4.4.1	Exakte (analytische) Lösungsmethoden.....	19
4.4.2	Näherungslösungen nach der Energiemethode.....	19
4.4.2.1	RITZ – Verfahren	20
4.4.2.2	GALERKIN – Verfahren	22
4.4.2.3	Finite Elemente Methode (FEM).....	22

INHALTSVERZEICHNIS

4.4.2.4	Randelemente Methode (Boundary Elements Method – BEM).....	23
4.4.3	Allgemeines über die Wahl von Ansatzfunktionen.....	23
4.4.3.1	Trigonometrische Funktionen Sinus und Cosinus.....	24
4.4.3.2	Polynomiale Funktionen (Potenzreihen)	24
4.4.3.3	HERMITE'sche Polynome	24
5	WÖLBKRAFTTORSION NACH THEORIE II. ORDNUNG	25
5.1	Allgemeines.....	25
5.2	Voraussetzungen	25
5.2.1	Potential der äußeren Kräfte.....	25
5.2.2	Das Material ist elastisch, homogen und isotrop	25
5.2.3	Sämtliche Formänderungen sind klein.....	26
5.2.4	Die Querschnittsform bleibt im Zuge der Verformung des Stabes erhalten.....	26
5.2.5	Für die Biegebeanspruchung gilt die Hypothese von Jakob BERNOULLI vom Ebenbleiben der Querschnitte.....	27
5.2.6	Gültigkeit der WAGNER – Hypothese.....	27
5.2.7	Lokale Instabilität (Beulen) sei ausgeschlossen.....	28
5.3	Die Differentialgleichungen	28
5.4	Das elastische Potential des Biege – Torsionsproblems	29
5.4.1	Das Potential der inneren Kräfte	29
5.4.1.1	Der Anteil von elastischen Lagerungen und Bettungen am Potential der inneren Kräfte.....	30
5.4.2	Das Potential der äußeren Kräfte.....	31
5.4.3	Das Gesamtpotential längs- und querbelasteter Stäbe	32
5.5	Das Funktional $\frac{1}{2} \delta^2 \Pi$	32
5.5.1	Das Funktional $\frac{1}{2} \delta^2 \Pi$ des untersuchten Systems.....	33
6	DAS STABILITÄTSPROBLEM BIEGEDRILLKNICKEN.....	34
6.1	Allgemeines.....	34
6.2	Elementarfälle des Biegedrillknickens.....	35
6.2.1	Druckkraft im Schubmittelpunkt	37
6.2.2	Zentrischer Druck	38
7	BERECHNUNG DER IDEAL KRITISCHEN LASTEN NACH DEM RITZ'SCHEN VERFAHREN.....	41
7.1	Verwendete Mathematiksoftware	41
8	BERECHNUNG DER IDEAL KRITISCHEN LASTEN NACH DER FINITE ELEMENTE METHODE.....	42
8.1	FEM – Modellierung	42
8.2	Verwendete FEM – Software	42
8.2.1	Räumliches FEM – Modell des untersuchten Brückensystems.....	42
8.2.2	Elementeigenschaften.....	43

INHALTSVERZEICHNIS

8.3	Berechnung der Eigenwerte und dazugehöriger Eigenformen.....	44
8.4	Vergleichsrechnungen zur Überprüfung des Modells.....	45
8.4.1	Beispiel 1: Kragarm unter zentrischem Druck.....	45
8.4.2	Beispiel 2: Beidseitig gabelgelagerter Einfeldträger unter konstantem Moment („Kippen“).....	47
9	DAS UNTERSUCHTE BRÜCKENSYSTEM.....	49
9.1	System und Geometrie.....	49
9.2	Belastungsannahmen im Bauzustand.....	50
9.3	Statisches System, Rand- und Übergangsbedingungen.....	51
9.3.1	Hauptträger.....	52
9.3.1.1	Momentenverteilung.....	52
9.3.1.2	Rand- und Übergangsbedingungen.....	52
9.3.1.3	Querschnittswerte Hauptträger.....	53
9.3.2	Querträger.....	54
9.3.2.1	Querschnittswerte Querträger.....	54
10	EINFLUSS DER QUERTRÄGER AUF DIE IDEAL KRITISCHEN LASTEN.....	56
10.1	Modellierung der Querträger als diskret angeordnete Einzeldrehfedern.....	57
10.1.1	Eigenformen und elastische Drehfedersteifigkeiten C_{ϑ} der Querträger.....	57
10.1.2	Modellbildung und Berechnung für das RITZ'sche Verfahren.....	60
10.1.3	Variation der Querträgeranzahl – Ergebnisse der Berechnung nach der FE – Methode.....	62
10.1.4	Variation der Querträgeranzahl – Ergebnisse der Berechnung nach RITZ.....	62
10.1.5	Graphische Darstellung der ersten Eigenform der verschiedenen Brückensysteme.....	63
10.1.6	Diskussion der Ergebnisse.....	64
10.2	Modellierung der Querträger als kontinuierliche Drehbettung.....	65
10.2.1	Ergebnisse der Berechnung für die Systeme mit vier und fünf Querträgern.....	67
10.3	Minstdrehfedersteifigkeit C_{ϑ}^* für das Vorliegen einer ideellen Gabellagerung.....	72
10.4	Graphische Darstellung der ersten drei Eigenformen des Brückensystems mit fünf Querträgern.....	78
11	EINFLUSS VON HORIZONTALVERBÄNDEN AUF DIE IDEAL KRITISCHE LASTEN.....	80
11.1	Untersuchte Verbandsformen.....	80
11.2	Modellbildung zur Berechnung von Aussteifungsverbänden.....	82
11.3	Vergleich der Verbandsschubsteifigkeiten.....	84
11.4	Variation der Anzahl von Verbandfeldern.....	86
11.4.1	Ergebnisse der Berechnung nach RITZ.....	86
11.4.2	Ergebnisse der Berechnung nach der FE – Methode.....	87
11.4.3	Diskussion der Ergebnisse.....	89
11.5	Vergleich und Bewertung der Verbandsformen.....	90

INHALTSVERZEICHNIS

11.5.1 Tonnage	90
11.5.2 Bewertung mit Kennziffern	90
11.5.2.1 Ergebnisse der Berechnungen für die Ersatzsysteme	93
11.6 Ideal kritische Kipplasten je nach Lage des Verbandes.....	94
11.7 Ideal kritische Lasten in Abhängigkeit von der Verbandssteifigkeit.....	97
11.8 Mindeststeifigkeiten der Verbände für Vorhandensein einer Zwangsdrillachse.....	98
11.9 Zwangsdrillachse macht Biegedrillknicken unmöglich.....	104
11.10 Einfluss des Angriffsortes der äußeren Belastung auf ideal kritische Lasten.....	106
12 VERGLEICH DER AUSSTEIFUNGSMETHODEN QUERTRÄGER UND HORIZONTALVERBÄNDE.....	108
13 MÖGLICHE MODELLBILDUNGEN SAMT ZUGEHÖRIGER ANSATZFUNKTIONEN FÜR DAS RITZ'SCHE VERFAHREN	110
14 SCHLUSSBEMERKUNGEN	114
15 LITERATUR.....	115
16 ANHANG	117
16.1 Maple – Skripts.....	117
16.1.1 Berechnung der Querschnittswerte der Haupt- und Querträger	117
16.1.2 Berechnungen am System ohne Verbände nach RITZ.....	118
16.1.3 Berechnungen am System mit Verbänden nach RITZ.....	119
16.1.4 Berechnungen am System mit Zwangsdrillachse zufolge Verbänden nach RITZ	120
17 ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	121
18 TABELLENVERZEICHNIS	124

1 EINLEITUNG

1.1 Allgemeines zu Verbundbrücken im Bauzustand – Problemstellung

Stahl – Stahlbeton – Verbundbrücken liegen im Trend.

Im Vergleich zu reinen Stahl- oder Stahlbetonbrücken weisen sie eine Reihe von Vorteilen auf, aufgrund derer sich ihre Verwendung einer immer größer werdenden Beliebtheit erfreut. Sie vereinen und nutzen die spezifischen Eigenschaften der Baustoffe Stahl und Stahlbeton innerhalb eines Tragwerks. Dies kann jedoch erst vollständig nach Aushärtung der Bauteile aus Beton geschehen – vorher besitzt das System nur einen Bruchteil der Steifigkeit des Endsystems, muss jedoch schon in diesem Bauzustand erhebliche Lasten aufnehmen und unter anderem die Stabilität gewährleisten.

Nachdem die Widerlager und eventuelle Zwischenaufleger so weit fertig gestellt sind, dass die Montage der Stahlkonstruktion möglich ist, wird das vorgefertigte Stahltragwerk in seine endgültige Lage gebracht.



Abbildung 1.1: Einheben des Stahltragwerks; [12]

Dieses Stahltragwerk (noch ohne Stahlbetonplatte) trägt in weiterer Folge sämtliche Lasten im Bauzustand, welche sich im Wesentlichen aus dem Eigengewicht

- der eigentlichen Stahlkonstruktion,
- des Schalwagens für die Stahlbetonbauteile,
- des Betons im frischen Zustand,
- des Bewehrungsstahl in den Stahlbetonbauteilen

und

- den Nutzlasten zufolge Bauausführung

zusammensetzen.



Abbildung 1.2:

Blick auf Schalwagen mit Baustellen-
einrichtung; [12]



Abbildung 1.3:

Verbundtragwerk mit Schalwagen und teilweise
fertig gestellter Fahrbahnplatte; [12]

Diese Einwirkungen können beim Stahltragwerk unter anderem zu Stabilitätsversagen führen. Da die abstützende Wirkung der Stahlbetonplatte für die gedrückten Gurte der Stahlträger im Bauzustand noch nicht vorhanden ist, sind die Hauptträger des Brückensystems im Besonderen gefährdet, auf Biegedrillknicken zu versagen.

Das Biegedrillknicken eines durch Biegemomente beanspruchten Trägers (ohne Normalkräfte) bezeichnete man früher als „Kippen“ – dieser Begriff wird auch in der vorliegenden Arbeit beibehalten.

1.2 Aufgabenstellung und Zielsetzung

Speziell offene, dünnwandige Querschnitte sind aufgrund ihrer geringen Drillsteifigkeiten naturgemäß gefährdet, auf Biegedrillknicken zu versagen. Um dies zu verhindern, wird das Stahltragwerk im Bauzustand ausgesteift, was auf verschiedene Arten erfolgen kann. Eine Möglichkeit zur Erhöhung des Widerstandes gegen Stabilitätsverlust stellt die Anordnung von verdrehungsbehindernden Querrahmen entlang der Brückenachse dar. Im vorliegenden Fall eines Brückensystems, das aus zwei Hauptträgern besteht, geschieht dies durch die Anordnung von Querträgern zwischen diesen beiden Hauptträgern (siehe Kapitel 10).

Möglich ist auch, die stabilitätsgefährdeten Gurte der Träger durch Verbände zu stabilisieren. Diese Aussteifungsverbände verursachen jedoch zusätzlichen Materialbedarf und Aufwand für die Montage, ganz abgesehen davon, dass sie die Bauausführung teils erheblich behindern können. Verbände werden in Kapitel 11 näher untersucht.

Abgesehen von diesen Möglichkeiten zur Beeinflussung der Randbedingungen des Systems fließen noch viele andere Faktoren in die ideal kritischen Lasten beim Biegedrillknicken ein.

Einen davon stellt die tatsächliche Lage der Lastangriffspunkte im System dar. Im Zuge der Betrachtungen nach Theorie II. Ordnung wird daher auch besonderer Augenmerk auf die Lasteinleitung ins System gelegt.



Abbildung 1.4:

Am Obergurt der Hauptträger angreifende Lasten; [13]



Abbildung 1.5:

Mittels Kranfahrbahn am Untergurt der Hauptträger angreifende Lasten; [13]

Ein erstes Ziel der vorliegenden Arbeit ist, das Stabilitätsverhalten eines konkreten Brückensystems in Bezug auf Biegedrillknicken zu untersuchen und anschließend auch verschiedene Möglichkeiten zur Stabilisierung aufzuzeigen und miteinander zu vergleichen.

Im vorliegenden Fall wird das Brückensystem durch Querträger und Horizontalverbände stabilisiert und diese nach verschiedenen Kriterien optimiert und bewertet. Für diese Methoden werden die Verläufe der ideal kritischen Lasten in Abhängigkeit verschiedenster Parameter ermittelt. Diese werden einerseits mit aufwändiger Modellierung und Berechnung durch Finite Elemente Methode – Software, andererseits auch mit einfachen Näherungslösungen nach der Energiemethode ermittelt.

Die Ergebnisse dieser zwei Berechnungsmethoden werden laufend miteinander verglichen und auf ihre Genauigkeit untersucht.

Das zweite Ziel dieser Arbeit ist also, das tatsächliche Verhalten der realen Struktur durch eine sinnvolle Modellbildung zu beschreiben und damit so einfach wie möglich berechenbar zu machen. Verschiedene Bauteile wie Querträger und Horizontalverbände werden durch geeignete Federmodelle beschrieben und so einer einfachen Berechnung zugänglich gemacht. Trotz der relativen einfachen mathematischen Handhabung dieser Modelle soll jedoch die Qualität der Ergebnisse nicht unter diesen Vereinfachungen leiden.

2 MATHEMATISCHE UND MECHANISCHE GRUNDLAGEN

2.1 Koordinatensystem

(siehe [6])

Den Ausführungen in dieser Arbeit liegt ein rechtwinkeliges kartesisches Rechts – Koordinatensystem zugrunde. Dieses wird durch drei zueinander orthogonale Koordinatenachsen x_1 , x_2 und x_3 mit gleicher, linearer Maßeinteilung durch den Ursprung O festgelegt. Ein beliebiger Vektor \mathbf{v} wird als Linearkombination dreier linear unabhängiger Basisvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 in der Form $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ dargestellt (siehe Abbildung 2.1).

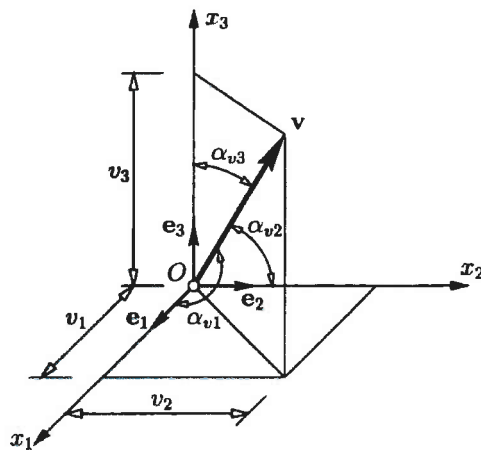


Abbildung 2.1:

Darstellung des Vektors \mathbf{v} in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem; [6]

Im Raum mit Skalarprodukt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ sind die projizierten Längen von \mathbf{v} in Richtung der Basisvektoren gleich

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = v \cos(\alpha_{v1}), \\ v_2 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = v \cos(\alpha_{v2}), \\ v_3 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 = v \cos(\alpha_{v3}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

In den weiteren Betrachtungen wird, wie es in der Technik üblich ist, die x_1 – Achse mit „x“, die x_2 – Achse mit „y“ und die x_3 – Achse mit „z“ bezeichnet.

2.2 TAYLORreihenentwicklung

(siehe [6])

2.2.1 TAYLORreihenentwicklung in einer Variable

Für eine im Intervall von der betrachteten Stelle $x = \bar{x}$ bis zu einer beliebigen Stelle x mindestens $(n+1)$ – mal differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt die TAYLOR’sche Formel:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})}{1!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} + \dots + \frac{(x - \bar{x})^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=\bar{x}} + \frac{(x - \bar{x})^{n+1}}{(n+1)!} \left. \frac{d^{(n+1)} f}{dx^{(n+1)}} \right|_{\bar{x} + \vartheta(x - \bar{x})} \tag{2.2}$$

wobei $0 < \vartheta < 1$ ist. Der letzte Term in Gl. (2.2) ist das TAYLOR’sche Restglied. Strebt dieses Glied mit wachsendem n gegen Null, so wird für $n \rightarrow \infty$ aus der TAYLOR’schen Formel die TAYLOR’sche Reihe. Ihre Auswertung an der Stelle $x = \bar{x} + h$ führt auf

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \frac{h}{1!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} + \dots \tag{2.3}$$

Die Abbildung 2.2 zeigt die bei Abbruch der TAYLOR’schen Reihe nach dem linearen Glied erhaltene Approximation des Funktionswertes $f(\bar{x} + h)$.

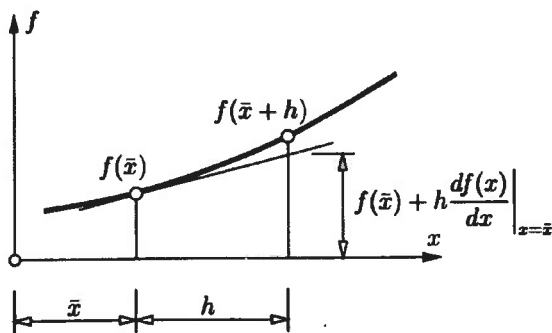


Abbildung 2.2: TAYLOR’sche Reihe; [6]

2.2.2 TAYLORreihenentwicklung in mehreren Variablen

Die Verallgemeinerung von Gl. (2.3) führt auf die Entwicklung von $f(\mathbf{x})$ in mehreren Variablen mit $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ an der Stelle $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}$:

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^n h_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} + \dots \tag{2.4}$$

2.3 Mechanische Energieprinzipien

Die mechanische Energie in einem System setzt sich aus

- der Verzerrungsenergie,
- dem Potential der äußeren Kräfte und
- der kinetischen Energie

zusammen.

Mathematisch hinreichend für die Existenz eines Potentials ist die Konservativität ihres Potentialfeldes, oder abstrakter: Kurvenintegrale über geschlossene Kurven verschwinden in solchen konservativen Feldern.

Anschaulicher wird dieser Sachverhalt mit den Worten der Physik: In einem konservativen Kraftfeld kann niemals Energie dadurch gewonnen werden, dass man eine Masse auf einer geschlossenen Kurve zum Startpunkt zurückbringt – es existiert also in einem konservativen Kraftfeld kein perpetuum mobile 1. Art (siehe [7]). Kräfte behalten im Zuge der Verformung des belasteten Systems auch ihre Richtung bei. Man nennt sie daher auch *richtungstreu*.

Basierend auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) in der EULER’schen Fassung (siehe [6]) gilt für die Bewegung eines Körpers, dessen innere und äußere Kräfte über Potentiale verfügen, also, dass die Summe aus potentieller und kinetischer Energie im System konstant bleibt.

$$\Pi + K = konst. \tag{2.5}$$

Π potentielle Energie

K kinetische Energie

Gl. (2.5) ist typisch für Bewegungen in einem konservativen Kraftfeld.

2.4 Orthogonalität

In [7] wird der mathematisch präzise Orthogonalitätsbegriff in einem Vektorraum \mathbf{V} durch das Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_a^b \varphi(x) \psi(x) r(x) dx \tag{2.6}$$

beschrieben, wobei $r(x)$ eine Gewichtsfunktion darstellt.

Für die im Zuge der Stabilitätsuntersuchungen ermittelten Eigenformen gelten die so genannten Orthogonalitätsrelationen

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0 \quad (k \neq j). \tag{2.7}$$

2.5 Norm

Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm

$$\|\mathbf{f}\| := \sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle}. \quad (2.8)$$

Über die Festlegung

$$\cos \alpha_{(f,g)} := \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle}{\|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\|} \quad (2.9)$$

kann ein Cosinus des Winkels, den die beiden Vektoren \mathbf{f} und \mathbf{g} miteinander einschließen, gemessen werden.

Für die graphische Festlegung der Eigenformen zu den jeweiligen Eigenwerten bedient man sich dieser Normierung (siehe auch Abschnitt 8.3).

2.6 Fourierentwicklung

Ist \mathbf{f} ein Element im Vektorraum \mathbf{V} mit $\|\mathbf{f}\| < \infty$, dann hat die Fourierapproximierende

$$s_m = c_1 \varphi_1 + \dots + c_m \varphi_m = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k \quad \text{die Fourierkoeffizienten } c_k = \frac{\langle \mathbf{f}, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \quad \left(= \frac{\langle \mathbf{f}, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \right).$$

Im Zuge der Näherungslösung von Stabilitätsproblemen werden die Ansatzfunktionen zur Formulierung der Eigenformen zweckmäßig im Sinne von Fourierreihen entwickelt.

3 NOMENKLATUR

Im Folgenden sind die im Zuge dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen angeführt. Bei einheitenbehafteten Größen sind weiter die physikalischen Einheiten (nach dem SI – System) angeführt, wobei das dynamische Grundgesetz der Mechanik in der folgenden Formulierung gilt:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

$$[\text{Newton}] = [\text{kg}] \cdot \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

3.1 Materialkenngrößen

E	Elastizitätsmodul	$[\text{N}/\text{m}^2]$	
ν	Querdehnzahl (Poisson'sche Zahl)	$[-]$	
G	Schubmodul	$[\text{N}/\text{m}^2]$	
$G =$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$		(3.1)

3.2 Koordinatensystem

x	Stablängsachse
y	Querschnittshauptachse
z	Querschnittshauptachse

3.3 Querschnittspunkte

S	Schwerpunkt
y_s	y – Koordinate des Schwerpunktes (bezogen auf einen beliebigen Nullpunkt)
z_s	z – Koordinate des Schwerpunktes (bezogen auf einen beliebigen Nullpunkt)
M	Schubmittelpunkt
y_M	y – Koordinate des Schubmittelpunktes (bezogen auf den Schwerpunkt)
z_M	z – Koordinate des Schubmittelpunktes (bezogen auf den Schwerpunkt)

3.4 Querschnittswerte

Sämtliche in der Folge verwendeten Querschnittswerte verwenden als Bezugssystem ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, dessen Längsachse sich mit der Schubmittelpunktsachse deckt. Diese Vereinbarung ist deshalb sinnvoll, da die natürliche Drehachse eines Querschnittes durch seinen Schubmittelpunkt geht.

Die Querschnittswerte für dieses System (Hauptsystem) werden durch (maximal) zweimalige Normierung der Werte aus einem allgemein gewählten Bezugssystem ermittelt. Für eine ausführliche Darstellung dieser Methode sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen (z. B. [1]).

Um den Umfang zu beschränken, werden nur Werte angeführt, die in dieser Arbeit auch tatsächlich Verwendung finden.

ω Einheitsverwölbung, Wölbordinate [m²]

$$\omega = \int_{s=0}^s r_t ds \quad (\text{siehe Abbildung 3.1})$$

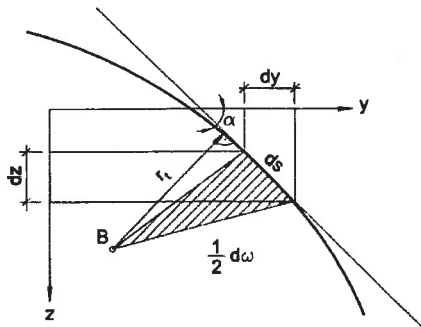


Abbildung 3.1: Zum Begriff der Verwölbung; [5]

3.4.1 Flächenintegrale 0. Ordnung

$$A = \int_A dA \quad \text{Querschnittsfläche} \quad [\text{m}^2]$$

3.4.2 Flächenintegrale 1. Ordnung

$$A_y = \int_A y(s) dA = S_z \quad \text{statisches Moment um die } z\text{-Achse} \quad [\text{m}^3]$$

$$A_z = \int_A z(s) dA = S_y \quad \text{statisches Moment um die } y\text{-Achse} \quad [\text{m}^3]$$

$$A_\omega = \int_A \omega(s) dA \quad \text{Wölbfläche oder statisches Sektormoment } A_\omega \quad [\text{m}^4]$$

3.4.3 Flächenintegrale 2. Ordnung

$$A_{yy} = \int_A y^2 dA = I_z \quad \text{Flächenträgheitsmoment um die } z - \text{ Achse} \quad [\text{m}^4]$$

$$A_{zz} = \int_A z^2 dA = I_y \quad \text{Flächenträgheitsmoment um die } y - \text{ Achse} \quad [\text{m}^4]$$

$$A_{\omega\omega} = \int_A \omega^2 dA = I_\omega \quad \text{Wölbwiderstand bezogen auf den Schubmittelpunkt M} \quad [\text{m}^6]$$

$$I_d = \sum_n b \cdot t^3 \quad \text{St. Venant'sche Torsionssteifigkeit (n = Anzahl der Einzelbleche)} \quad [\text{m}^4]$$

$$A_{pp}^S = \int_A (y^2 + z^2) dA \quad \text{polares Trägheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt S} \quad [\text{m}^4]$$

$$A_{pp}^M = \left(A_{pp}^S + A(y_M^2 + z_M^2) \right) \quad \text{polares Trägheitsmoment bezogen auf den Schubmittelpunkt M} \quad [\text{m}^4]$$

$$i_p^S = \sqrt{\frac{A_{pp}^S}{A}} \quad \text{polarer Trägheitsradius bezogen auf den Schwerpunkt S} \quad [\text{m}]$$

$$i_p^M = \sqrt{\frac{A_{pp}^M}{A}} \quad \text{polarer Trägheitsradius bezogen auf den Schubmittelpunkt M} \quad [\text{m}]$$

$$r_M = \sqrt{(y - y_M)^2 + (z - z_M)^2} \quad [\text{m}]$$

$$i_M^2 = \frac{1}{A} \int r_M^2 dA = i_p^2 + y_M^2 + z_M^2 \quad [\text{m}^2]$$

3.4.4 Kindem'sche Querschnittsfunktionen

$$r_{M_y} = \frac{1}{A_{yy}} \int y r_M^2 dA \quad \text{Kindem'sche Funktion in } y \quad [\text{m}]$$

$$r_{M_z} = \frac{1}{A_{zz}} \int z r_M^2 dA \quad \text{Kindem'sche Funktion in } z \quad [\text{m}]$$

$$r_{M_\omega} = \frac{1}{A_{\omega\omega}} \int \omega r_M^2 dA \quad \text{Kindem'sche Funktion in } \omega \quad [-]$$

3.5 Verformungen

$$u \quad \text{Verschiebung entlang der Stabachse in Richtung positiver } x - \text{ Richtung} \quad [\text{m}]$$

$$v \quad \text{Verschiebung quer zur Stabachse in Richtung positiver } y - \text{ Achse} \quad [\text{m}]$$

$$w \quad \text{Verschiebung quer zur Stabachse in Richtung positiver } z - \text{ Achse} \quad [\text{m}]$$

$\varphi = \frac{dw}{dx}$	Biegewinkel der Stabachse	[rad]
$\vartheta = \frac{dv}{dx}$	Verdrehung der Stabachse	[rad]
$\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dx}$	Verdrillung der Stabachse	[rad/m]

3.6 Belastungen

p_x, p_y, p_z	Linienlasten in den jeweiligen Richtungen x, y, z	[N/m]
P_x, P_y, P_z	Einzellasten in den jeweiligen Richtungen x, y, z	[N]
m_d	Torsionslinienmoment entlang x – Achse einschließlich allfälliger Anteile zufolge exzentrisch angreifender Linienlasten p_y, p_z	[Nm/m]
M_D	Einzeltorsionsmoment	[Nm]
M_y, M_z	Einzelbiegemomente um y – bzw. z – Achse	[Nm]
M_ω	Einzelwölbmoment	[Nm ²]

3.7 Schnittgrößen

N_x	Normalkraft in positiver x – Richtung	[N]
V_y	Querkraft in positiver y – Richtung	[N]
V_z	Querkraft in positiver z – Richtung	[N]
M_x	rechtsdrehend positives Torsionsmoment entlang x – Richtung	[Nm]
M_y	rechtsdrehend positives Biegemoment um positive y – Achse	[Nm]
M_z	rechtsdrehend positives Biegemoment um positive z – Achse	[Nm]

Die Schnittgrößen sind dann positiv, wenn ihr Vektor am positiven Schnittufer in die jeweilige positive Koordinatenrichtung zeigt.

3.8 Differentialgleichung der Biegelinie

In der linearen Stabtheorie darf die Krümmung der Biegelinie für kleine Durchbiegungen

($\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1$) linearisiert werden.

Mit $ds \approx dx$ erhält man also für den Ausdruck der Krümmung

$$\kappa = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

Durch Gleichsetzen des Ausdrucks in (3.2) mit der bekannten Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung

$$\kappa = \frac{M_i}{EA_{ij}} \quad (3.3)$$

erhält man somit

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{EA_{zz}}, \quad (3.4)$$

oder anders formuliert, die Differentialgleichung der Biegelinie für statische Belastungen (ohne Temperatureinflüsse)

$$\begin{aligned} EA_{zz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -M_y \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EA_{zz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= -Q_z \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EA_{zz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= q_z - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

4 STABILITÄTSTHEORIE

4.1 Energetische Betrachtungen von Stabilitätsproblemen – Das Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie

(siehe [6])

Energetisch betrachtet befindet sich ein System unter Einwirkung konservativer Belastung (siehe Abschnitt 2.3) im Gleichgewichtszustand, wenn dieser Zustand durch einen stationären Wert der gesamten, im System gespeicherten potentiellen Energie gekennzeichnet ist.

Die mathematische Formulierung dieses Sachverhaltes lautet präzise:

$$\Pi = \text{stationär}, \quad (4.1)$$

es muss also gelten, dass die Variation der potentiellen Energie verschwindet:

$$\delta\Pi = 0. \quad (4.2)$$

Gl. (4.2) lässt jedoch noch keine Aussagen über die Stabilität dieser Gleichgewichtslage zu, was in den Abbildungen 4.1 bis 4.3 veranschaulicht wird.

In jeder dieser Darstellungen befindet sich die Kugel in einer Gleichgewichtslage (was durch den stationären Wert der potentiellen Energie im System, graphisch dargestellt durch die waagrechte Ebene bei $\Pi = \text{konst.} = \text{stationär}$, verdeutlicht wird), jedoch ist nur die Gleichgewichtslage in Abbildung 4.1 *stabil*, die beiden anderen Abbildungen 4.2 und 4.3 hingegen zeigen *instabile* Gleichgewichtslagen.

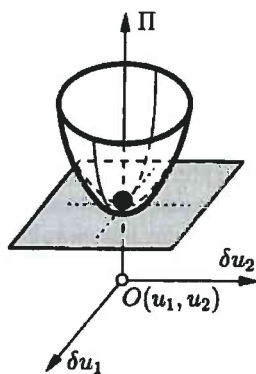


Abbildung 4.1:

Stabile Gleichgewichtslage; [6]

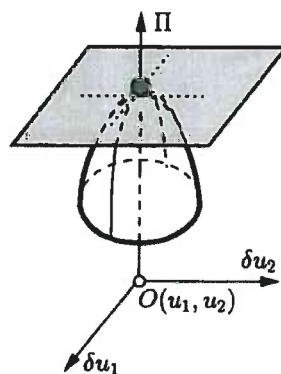


Abbildung 4.2:

Instabile Gleichgewichtslage; [6]

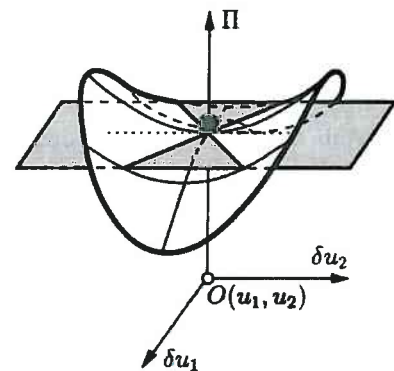


Abbildung 4.3:

Instabile Gleichgewichtslage; [6]

Notwendig für die Stabilität ist also zusätzlich zur Forderung der Gl. (4.2) die Bedingung

$$\delta^2\Pi > 0, \quad (4.3)$$

die potentielle Energie im System muss also ein Minimum sein.

Die drei Kriterien

$$\delta^2\Pi \begin{cases} > 0 & \text{stabil} \\ = 0 & \text{indifferent} \\ < 0 & \text{labil} \end{cases} \quad (4.4)$$

geben also Auskunft über die Stabilität der zu beurteilenden Gleichgewichtslage.

Die beiden Gl. (4.3) und Gl. (4.4) zusammen ergeben nun das Kriterium von DIRICHLET

$$\delta\Pi = 0 \quad \delta^2\Pi > 0. \quad (4.5)$$

Der Nachweis der Stabilität mit Hilfe dieses Kriteriums stellt also eine statische Aufgabe dar, wie aus den Gleichungen in (4.5) ersichtlich wird.

4.2 Stabilitätsgrenze

(siehe [6])

Nach LJAPUNOV sind stabile Gleichgewichtslagen mechanischer Systeme dadurch gekennzeichnet, dass die durch eine hinreichend kleine Störung verursachte Bewegung des Körpers für alle Zeit in einer vorgegebenen Umgebung der Gleichgewichtslage bleibt.

Einer Zahl $\varepsilon > 0$, die diese Umgebung kennzeichnet, ist also eine Zahl $\delta > 0$ zugeordnet, welche die Begrenzung des Gebietes hinreichend kleiner Störungen der Gleichgewichtslage charakterisiert (siehe Abbildung 4.4).

Wenn die Störbewegung für $t \rightarrow \infty$ wieder zurück zur ursprünglichen Gleichgewichtslage führt, wird diese Gleichgewichtslage als *asymptotisch stabil* bezeichnet.

Die Beurteilung der Stabilität anhand dieses Kriteriums ist folglich also eine Aufgabe der Dynamik.

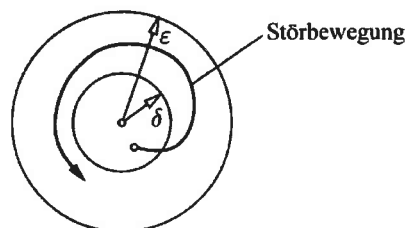


Abbildung 4.4: Störbewegung; [6]

4.3 Stabilitätsverlust

Stabilitätsverlust statischer Systeme kann auf drei Arten erfolgen:

- Verzweigung des Gleichgewichts (Verzweigungsprobleme),
- Durchschlagen (Durchschlagprobleme),
- Erreichen der Traglast des Systems (Traglast- bzw. Spannungsprobleme).

Die mathematische Formulierung von Durchschlag- und Traglastproblemen führt auf *inhomogene Gleichungssysteme*. Bei diesen Stabilitätsproblemen handelt es sich um *Spannungsprobleme*.

Im Gegensatz dazu wird man bei der Lösung von *Verzweigungsproblemen* immer auf *homogene Gleichungssysteme* geführt, sie stellen also Eigenwertprobleme im mathematisch – physikalischen Sinne dar.

Im Folgenden sei der Sachverhalt für die wichtige Gruppe der Verzweigungsprobleme kurz anhand eines typischen Beispiels – dem beidseitig gelenkig gelagerten EULER’schen Knickstab – erläutert.



Abbildung 4.5:
System und Belastung
des EULER –
Knickstabes; [6]

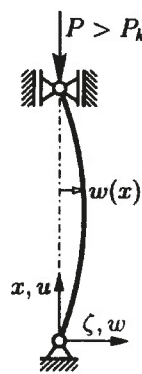


Abbildung 4.6:
Erste Eigenform des
Knickstabes; [6]

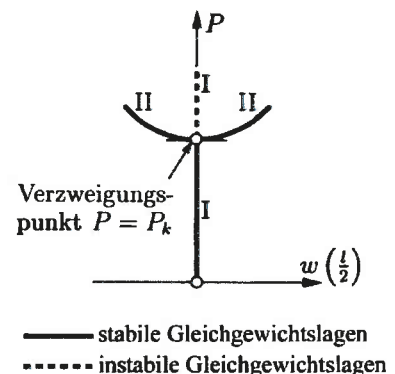


Abbildung 4.7:
Last – Verschiebungsdiagramm für EULER –
Knickstab; [6]

Die Benennung von Verzweigungsproblemen trägt der Tatsache Rechnung, dass bei Erreichen der Stabilitätsgrenze ($P = P_k$) im Last – Verschiebungsdiagramm für das System eine Verzweigung auftritt. Dieser Sachverhalt bedeutet, dass an der Stabilitätsgrenze für ein- und dieselbe Belastung ($P = P_k$) mindestens eine infinitesimal benachbarte, *ausgebogene Gleichgewichtslage* neben der ursprünglichen *geraden Gleichgewichtslage* existiert. Man spricht in diesem Zusammenhang von *indifferentem Gleichgewicht*.

Im Sinne von Gl. (4.2) gilt in der *ursprünglichen geraden Gleichgewichtslage* (im Folgenden werden Ausdrücke, die sich auf diesen Grundzustand beziehen, mit den Indizes ...₀ gekennzeichnet) natürlich auch

$$\delta\Pi_0 = 0, \quad (4.6)$$

da es sich ja um eine Gleichgewichtslage handelt.

Nach Erreichen der Stabilitätsgrenze kann diese Forderung auch für die *infinitesimal benachbarte Lage* (dessen Terme mit den Indizes ...₁ gekennzeichnet werden) formuliert werden, da sich ja auch diese per Definition im Gleichgewicht befindet.

Es muss also auch die Variation der potentiellen Energie für die neu entstandene Gleichgewichtslage verschwinden, es gilt also

$$\delta\Pi_1 = 0. \quad (4.7)$$

Die potentielle Energie Π_1 wird zweckmäßigerweise ausgehend von der potentiellen Energie Π_0 des Grundzustandes ermittelt. Dazu führt man die *spezielle $\bar{\delta}$ - Variation* ein, die sich nur auf die vom Grund- zum Nachbarzustand führenden Größen bezieht.

Die Verformungen v_M , w_M und \mathcal{G} variiert man dementsprechend in benachbarte Lagen

$$\begin{aligned} v_M &\rightarrow v_M + \delta v_M \\ w_M &\rightarrow w_M + \delta w_M \\ \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} + \delta \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Das Potential geht damit im Sinne einer TAYLORentwicklung (siehe Abschnitt 2.2) über in

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \overline{\Delta\Pi_0} = \Pi_0 + \bar{\delta}\Pi_0 + \frac{1}{2!}\bar{\delta}^2\Pi_0 + \frac{1}{3!}\bar{\delta}^3\Pi_0 + \dots \quad (4.9)$$

Für die weiteren Formulierungen werden alle Glieder von 3. Ordnung und höher ($\frac{1}{3!}\bar{\delta}^3\Pi_0 + \dots$) vernachlässigt, um nichtlineare Terme in den folgenden Differentialgleichungen der Variation zu vermeiden. Da sich die beiden Gleichgewichtslagen ja in infinitesimaler Nachbarschaft befinden, ist dieses Vorgehen im Sinne einer Linearisierung zulässig.

Neu formuliert nimmt Gl. (4.9) somit folgende Form an:

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \overline{\delta}\Pi_0 + \frac{1}{2!}\overline{\delta^2}\Pi_0, \quad (4.10)$$

oder in Worten:

Die potentielle Energie des Nachbarzustandes ist gleich der potentiellen Energie des Grundzustandes plus deren erster und zweiter (mit $\frac{1}{2!}$ multiplizierter) spezieller Variationen.

Gl. (4.6) beschreibt das Gleichgewicht des Grundzustandes, im Sinne von Gl. (4.7) muss sich natürlich auch der infinitesimal benachbarte Grundzustand im Gleichgewicht befinden, wir wenden diese Forderung also auf Gl. (4.10) an.

Unter Beachtung, dass bei Vorliegen von statischem Gleichgewicht jede *erste* Variation der potentiellen Energie stets identisch verschwinden muss ($\delta\Pi_i = 0$), es gilt also auch $\overline{\delta}\Pi_i = 0$ für die spezielle Variation $\overline{\delta}$, erhält man nun für die erste Variation von Π_1

$$\delta\Pi_1 = \delta\left(\Pi_0 + \frac{1}{2!}\overline{\delta^2}\Pi_0\right) = \delta\Pi_0 + \delta\left(\frac{1}{2!}\overline{\delta^2}\Pi_0\right) \quad (4.11)$$

In Gl. (4.11) verschwindet nun wiederum $\delta\Pi_0$, weil ja einerseits statisches Gleichgewicht vorliegt ($\delta\Pi_i = 0$) und der Grundzustand im Zuge der Variation selbst unveränderlich sein soll. Es ergibt sich also nach Division durch den Faktor $\frac{1}{2!}$.

$$\delta\left(\overline{\delta^2}\Pi_0\right) = 0. \quad (4.12)$$

Diese Beziehung stellt das *Kriterium von TREFFTZ* dar, das eine notwendige aber noch nicht hinreichende Bedingung für die Stabilitätsgrenze darstellt.

Ein Gleichgewichtszustand ist demnach indifferent, wenn die erste Variation von mindestens einer speziellen zweiten Variation der potentiellen Energie des Grundsystems bei ein- und derselben Belastung identisch zu Null wird.

Die Forderung dass $\overline{\delta^2}\Pi_0$ einen stationären Wert annehmen muss, besagt lediglich, dass es sich bei diesem Wert um ein lokales Extremum handelt – ob Minimum oder Maximum, kann anhand von Gl. (4.12) nicht beurteilt werden.

Nach dem *Kriterium von DIRICHLET* – Gl. (4.5) – kann man also abschließend für indifferentes Gleichgewicht die nachstehende, energetische Doppelbedingung formulieren:

$$\delta(\overline{\delta^2\Pi_0})=0 \text{ und } \delta^2\Pi_0 = \text{Min} \quad (4.13)$$

Wenn man die spezielle zweite Variation als Störarbeit auffasst, muss also die Variation der Störarbeit verschwinden, die Störarbeit selbst also ein Minimum sein, um indifferentes Gleichgewicht zu erzeugen.

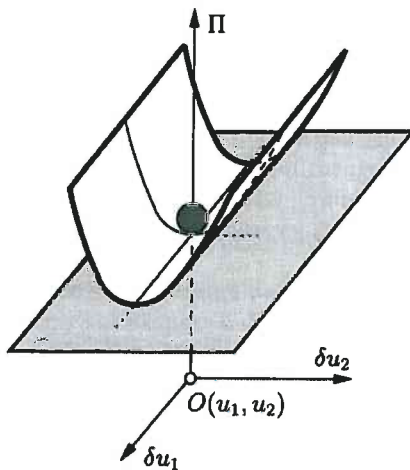


Abbildung 4.8:

Gleichgewichtslage an der Stabilitätsgrenze für ein System mit zwei Freiheitsgraden; [6]

Die Abbildung 4.8 stellt die potentielle Energie eines Systems mit zwei Freiheitsgraden (die Kugel kann sich in der δu_1 - δu_2 - Ebene bewegen) für eine infinitesimale Umgebung der Gleichgewichtslage an der Stabilitätsgrenze dar. Hier gilt für alle beliebigen Variationen (Bewegungen der Kugel auf der Schale aus der Gleichgewichtslage) $\delta^2\Pi = \text{Min.}$, einzig die Variation von δu_1 aber (entspricht einer Bewegung der Kugel entlang der δu_1 - Achse) erzeugt indifferentes Gleichgewicht.

Die spezielle Variation ist in der Abbildung mit $\delta u_2 = 0$ ersichtlich.

4.4 Lösungsmethoden für Eigenwertprobleme

4.4.1 Exakte (analytische) Lösungsmethoden

Leider lässt sich nur eine geringe Anzahl von Stabilitätsproblemen exakt auf analytischem Wege lösen. Allerdings sei in diesem Zusammenhang erwähnt, dass die beschreibenden Differentialgleichungen selbst ja bereits unter vielen vereinfachten Voraussetzungen formuliert werden, wie etwa der Annahme ideal – elastischen Materialverhaltens, geometrisch perfekter Strukturen, etc.

Oftmals werden die dann aufgestellten Differentialgleichungen noch weiter vereinfacht – z. B. durch Linearisierungen (vgl. Abschnitt 3.8) – und dann unter Vorgabe von Randbedingungen streng geschlossen gelöst.

Als Beispiel sei der einfeldrige, beidseits gabelgelagerte Stab erwähnt, der durch Stabendmomente belastet wird. Für dieses System existiert eine exakte analytische Lösung im mathematisch – physikalischen Sinne.

Werden die Randbedingungen dieses Systems nun aber beispielsweise so verändert, dass an einem Stabende eine unendlich starre Einspannung existiert, so verhindert bereits diese relativ einfache Systemänderung eine exakte Lösung und die Berechnung entzieht sich einem analytischen Zugang – es müssen folglich Näherungsverfahren angewendet werden (siehe [5]).

4.4.2 Näherungslösungen nach der Energiemethode

Bei der näherungsweise Lösung von Stabilitätsproblemen nach der Energiemethode werden für die unbekanntenen Verformungen Ansatzfunktionen gewählt. Für diese angesetzten Funktionen gilt natürlich, dass die Genauigkeit der damit berechneten Ergebnisse umso besser ist, je besser die anfangs gewählten Ansatzfunktionen mit den wirklichen Verformungen übereinstimmen.

Die errechneten Stabilitätsgrenzen liegen jedoch immer auf der *unsicheren Seite*, da Abweichungen von der wirklichen Verformung als zusätzliche Zwänge im System interpretiert werden können, welche aber im tatsächlichen System nicht vorhanden sind.

Diese zusätzlichen Zwänge erhöhen den Anteil der inneren Energie am Gesamtpotential und überschätzen somit das richtige Resultat (nach [2]).

4.4.2.1 RITZ – Verfahren

Mathematisch betrachtet können mit Hilfe des RITZ'schen Verfahrens allgemein Näherungen für die Lösung u einer inhomogenen Operatorgleichung $Au = f$ mit homogenen Randbedingungen gefunden werden. Grundlage des RITZ'schen Verfahrens ist dabei der stationäre Wert der potentiellen Energie des betrachteten Systems – die Lösung u hat demnach minimale Energie im Vektorraum V .

Die RITZapproximierende s_m der Lösung hat minimale Energie im Unterraum V_m . Entscheidend ist, die Lösung durch Wahl von geeigneten Ansatzfunktionen im Vorhinein durch ihre RITZapproximierende s_m so gut wie möglich anzunähern. Praktisch bedeutet dies, die Verformungsfigur im Stabilitätsfall möglichst gut zu beschreiben. Dies erfordert die Erfüllung der geometrischen (kinematischen) Randbedingungen durch die Ansatzfunktionen. Statische bzw. dynamische Randbedingungen hingegen dürfen unberücksichtigt bleiben. Zur Wahl der Ansatzfunktionen siehe Abschnitt 4.4.3.

Im Folgenden wird das Verfahren nach RITZ näher beschrieben (siehe auch [1]):

Um die potentielle Energie des Systems berechnen zu können, ist es notwendig, dass es sich um ein konservatives Kraftsystem handelt. In einem solchen ist die potentielle Energie der Kräfte von den durchlaufenen Wegen unabhängig (wie in Abschnitt 2.3 dargestellt ist). Mathematisch sieht man diesen Zusammenhang sofort nach Ableitung der potentiellen Energie nach den verallgemeinerten Verschiebungen – diese liefern nämlich die zugeordneten, verallgemeinerten Kräfte.

Um die geometrischen Randbedingungen erfüllen zu können, ist es notwendig, die Verformungsfigur im Stabilitätsfall zu kennen – diese spezielle Variation folgt aus der Gleichung

$$\delta(\overline{\delta^2 \Pi_0}) = 0. \quad (4.14)$$

Die tatsächliche Verformung wird durch die angenäherte Verformung (mit den gewählten Ansatzfunktionen) beschrieben. Allgemein sind diese Ansätze für die Verformungskomponenten von der Bauart

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x). \quad (4.15)$$

Die $\varphi_i(x)$ sind darin Ansatzfunktionen, von denen verlangt wird, dass sie die geforderten Randbedingungen erfüllen.

Da es sich um ein Ersatzsystem handelt, welches das Originalsystem näherungsweise beschreibt, geht das Potential des Originalsystems folglich über in ein Ersatzpotential

$$\Pi \rightarrow \Pi^*. \quad (4.16)$$

Formuliert man nun die Störarbeit mit den Verschiebungsansätzen laut Gl. (4.15), so erhält man die zweite Variation des Ersatzpotentials $\delta^2\Pi^*$, welche jetzt nur noch von den freien Parametern a_i in Gl. (4.15) abhängig ist.

$$\delta^2\Pi^* = \delta^2\Pi^*(a_i) \quad (4.17)$$

Im Sinne der Ausführungen in Abschnitt 4.2, wird nun natürlich an diese Näherungslösung dieselbe Forderung wie an die tatsächliche Lösung gestellt, nämlich jene, dass die erste Variation einer speziellen zweiten Variation der Energie im Stabilitätsfall ein Minimum wird. Für die Parameter a_i soll demnach gelten:

$$\frac{\partial(\overline{\delta^2\Pi^*})}{\partial a_i} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{grad}(\overline{\delta^2\Pi^*}) = 0 \quad \text{für } i=1,2,\dots,n \quad (4.18)$$

Über diese Forderungen erhält man dann die n Gleichungen für die n frei gewählten Parameter a_i in den Ansatzfunktionen.

Liegt nun ein Verzweigungsproblem vor, das im mathematischen Sinn ja einem Eigenwertproblem entspricht, ist dieses $(n \times n)$ – Gleichungssystem stets homogen. Das Nullsetzen der Determinante der Koeffizientenmatrix liefert die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte, aus welchen in Folge dann auch die zugehörigen (orthogonalen) Eigenformen bestimmt werden können. Dies natürlich nur qualitativ, ein unbekannter Multiplikator in der Eigenform (Streckungs- oder Stauchungsfaktor) bleibt ja stets in der Lösung enthalten.

Von praktischem Interesse ist jedoch meist nur der kleinste positive Eigenwert samt dazugehöriger Eigenform, bei dem Stabilitätsverlust erfolgt. Stillschweigend wird dadurch angenommen, dass unterhalb dieses Verzweigungspunktes durchwegs Stabilität vorliegt. Dies ist laut [1] unter der Voraussetzung zulässig, dass zwischen labilen und stabilen Bereichen stets indifferente Gleichgewichtszustände liegen. In praktischen Fällen wird dies meist erfüllt sein, für Ausnahmen davon sei auf die Literatur verwiesen.

4.4.2.2 GALERKIN – Verfahren

Ein weiteres Verfahren zur Gewinnung von Näherungslösungen ist das Verfahren nach *GALERKIN*. Zum Unterschied vom Verfahren nach Rayleigh/RITZ müssen bei Verwendung des GALERKIN – Verfahrens neben den geometrischen (kinematischen) auch die statischen bzw. dynamischen Randbedingungen durch die Ansatzfunktionen befriedigt werden. Dieses Verfahren kommt in dieser Arbeit jedoch nicht zur Anwendung und wird daher nicht weiter beschrieben.

4.4.2.3 Finite Elemente Methode (FEM)

Das FE – Verfahren ist ebenso wie die Verfahren von RITZ und GALERKIN ein auf energetischen Betrachtungen basierendes Verfahren zur Ermittlung von Näherungslösungen. Anders als bei den vorher erwähnten Verfahren ist es jedoch hier nicht notwendig, dass die Ansätze für die Verformungskomponenten Gültigkeit für das gesamte System (global) besitzen müssen.

Bei der Methode der finiten Elemente wird das System durch eine endliche (finite) Anzahl von Elementen diskretisiert und für jedes dieser Elemente lokale Verschiebungsansätze formuliert. Diese Ansätze lassen sich selbst bei komplexen Randbedingungen stets leicht angeben.

Anschließend wird über die Summe aller finiten Elemente das Verhalten des Gesamtsystems beschrieben. So gesehen stellt die FE – Methode also eine konsequente Erweiterung der Verfahren von RITZ und GALERKIN dar.

Abgesehen von diesen eigentlichen Ansätzen hängen die Qualität und vor allem die Richtigkeit der Ergebnisse sowie der notwendige Rechenaufwand somit sehr stark von der Art und Feinheit der Diskretisierung der Struktur ab.

Nur zu oft werden diese Umstände und die Tatsache, dass es sich auch bei der Methode mittels finiten Elementen nur um ein Näherungsverfahren handelt, in Kombination mit fehlendem Hintergrundwissen und immer leistungsfähigeren Rechnern in der praktischen Anwendung übersehen.

Auf eine genauere Beschreibung der Finite Elemente Methode wird an dieser Stelle verzichtet, dies würde den Rahmen dieser Arbeit bei Weitem sprengen.

4.4.2.4 Randelemente Methode (Boundary Elements Method – BEM)

Die BEM ist ebenso wie die FEM ein Verfahren zur Gewinnung von Näherungslösung. Dabei wird das Innere der untersuchten Struktur jedoch sukzessive von dessen Rand aus beschrieben.

Für eine detaillierte Beschreibung dieser Methode wird hier wieder auf die einschlägige Literatur verwiesen.

4.4.3 Allgemeines über die Wahl von Ansatzfunktionen

Im Zuge der Näherungslösung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der Energiemethode (siehe Abschnitt 4.4.2) ist es erforderlich, die tatsächlichen Verformungen so gut wie möglich durch Verformungsansätze zu beschreiben. Meist ist die Formulierung mehrgliedriger Ansätze erforderlich. Diese können – wie bereits erwähnt – allgemein in der Form

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) \quad (4.19)$$

formuliert werden.

Die Ansatzfunktion $\varphi_n(x)$ muss nun, um – der Variationsrechnung entsprechend – gute Ergebnisse zu liefern, bestimmten Voraussetzungen genügen:

- $\varphi_n(x)$ muss eine mögliche Variation der anzunähernden Funktion sein, es müssen also die vorhandenen Randbedingungen erfüllt sein.

Für die Anwendung des RITZ'schen Verfahrens genügt die Erfüllung der geometrischen Randbedingungen, während beim GALERKIN – Verfahren zusätzlich auch die dynamischen Randbedingungen befriedigt sein müssen.

- $\varphi_n(x)$ muss im betrachteten Bereich stetig und differenzierbar sein.

Die Faktoren a_i in Gl. (4.19) werden im Zuge der Variationsrechnung bestimmt.

Die Gleichgewichtsforderung $\partial\Pi = 0$ aus Gl. (4.2) geht im Verlauf der Variation über in n

lineare Gleichungen $\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = 0$, $i=1\dots n$, über welche dann ein Gleichungssystem mit dem

Faktorenvektor \mathbf{a}_i bestimmt werden kann.

4.4.3.1 Trigonometrische Funktionen Sinus und Cosinus

Trigonometrische Funktionen werden sehr häufig für die Formulierung von Ansatzfunktionen verwendet, da sie einige entscheidende Vorteile aufweisen.

- Ihr Funktionenverlauf ist leicht überschau- und handhabbar.
- Sie sind im Sinne der Ausführungen in Kapitel 2.4 zueinander orthogonal.
- Die Ableitungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ reproduzieren sich laufend. Jede gerade Ableitung ist wieder – abgesehen vom Vorzeichen – die Funktion selbst.

Außerdem stellt die Funktion $\varphi(x) = a \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$ die erste Eigenform einiger einfacher

Stabilitätsprobleme (z. B. 2. EULER'scher Knickstab, gabelgelagerter Biegeträger unter konstanten Endmomenten) dar.

Sämtliche Berechnungen dieser Arbeit nach dem RITZ'schen Näherungsverfahren wurden mit trigonometrischen Sinusfunktionen in den Verschiebungsansätzen durchgeführt.

4.4.3.2 Polynomiale Funktionen (Potenzreihen)

Potenzreihen für die Verformungsansätze der Form

$$v/w/\vartheta = \sum_{i=j}^k A_i x^i \quad (4.20)$$

mit den unabhängigen Beiwerten A_i sind prinzipiell für die Anwendung im Zuge von Näherungsverfahren gut geeignet, da sie leicht zu integrieren sind und auch deren Ableitungen ohne Probleme ermittelt werden können.

Allerdings sind sie im Allgemeinen nicht zueinander orthogonal und nur schwer den gegebenen Randbedingungen des zu untersuchenden Problems anzupassen. Außerdem sind die qualitativen Verläufe von Potenzreihen höherer Ordnung oftmals nur schwer erkennbar.

4.4.3.3 HERMITE'sche Polynome

Durch die systematische Anpassung von Potenzreihen an die vorgegebenen Randbedingungen kann ein geeigneter Stamm von Ansatzfunktionen, die so genannten *HERMITE'schen Polynome* entwickelt werden. Sie sind für Standardprobleme bekannt und tabelliert, also leicht verfügbar. In dieser Arbeit werden sie jedoch nicht verwendet, es bleibt daher an dieser Stelle bei einem Verweis auf die Literatur (z. B. [2]).

5 WÖLBKRAFTTORSION NACH THEORIE II. ORDNUNG

5.1 Allgemeines

[1] gibt einen kurzen historischen Abriss der Entwicklung der Wölbkrafttorsion nach Theorie II. Ordnung wieder. Am Anfang stand zunächst die Erkenntnis, dass ein auf Biegung beanspruchter, schlanker Stab *kippen* (siehe Kapitel 1.1), und mittig oder außermittig gedrückte Stäbe *biegedrillknicken* können.

Infolge dessen wurde der Zusammenhang erkannt, dass die Last, zufolge derer Stabilitätsverlust eintritt, nicht nur von den Biegesteifigkeiten, sondern auch wesentlich von der Torsions- und Wölbsteifigkeit des Stabes abhängt.

Diese am idealen System ermittelte Last wird als *ideal kritische Last* bezeichnet.

Im Folgenden wird die Wölbkrafttorsion nach Theorie II. Ordnung (Betrachtungen am verformten Element) vorgestellt.

5.2 Voraussetzungen

In [1] sind die üblichen Voraussetzungen für die Wölbkrafttorsion nach Theorie II. Ordnung angegeben:

5.2.1 Potential der äußeren Kräfte

Um Wölbkrafttorsion nach Theorie II. Ordnung in der vorliegenden Form betreiben zu können, ist es notwendig, dass die Belastung auch bei Verformung des Stabes ihre Richtung beibehält. Es handelt sich dabei um Belastungen in einem konservativen Kraftfeld – es existiert also ein Potential der äußeren Kräfte.

5.2.2 Das Material ist elastisch, homogen und isotrop

Das Hooke'sche Gesetz ist unbeschränkt gültig, es gilt also

$$\sigma = \varepsilon \cdot E. \tag{5.1}$$

Die Materialeigenschaften sind in jedem Punkt in alle Richtungen gleich.

5.2.3 Sämtliche Formänderungen sind klein

Unter dieser Voraussetzung gilt für die Krümmung folgende Linearisierung:

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{d^2w}{dx^2}; \quad \text{mit } \frac{d^2w}{dx^2} \ll 1. \quad (5.2)$$

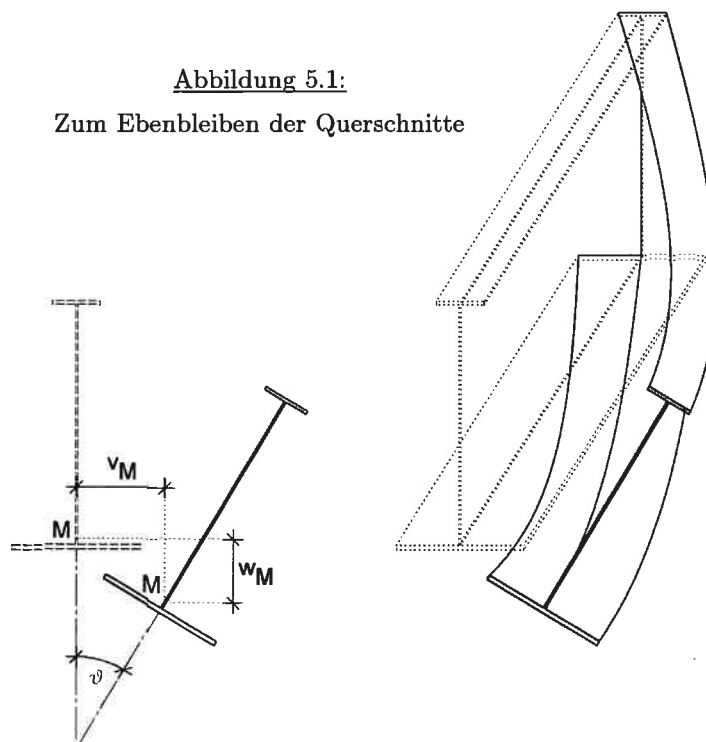
Für die Krümmungen in y bzw. z - Richtung gilt demnach

$$\frac{1}{\rho_y} \approx -v'' \quad \frac{1}{\rho_z} \approx -w''. \quad (5.3)$$

5.2.4 Die Querschnittsform bleibt im Zuge der Verformung des Stabes erhalten

Diese Forderung bedeutet, dass sich die räumliche Verschiebung eines jeden Querschnittspunktes durch die Verschiebungen v_M und w_M eines definierten Querschnittspunktes (hier: Schubmittelpunkt) und die Querschnittsdrehung ϑ beschreiben lässt. Die Drillruheachse der Verformung beschreibt im Allgemeinen eine räumliche Kurve, wie in Abbildung 5.1 zu sehen ist.

Abbildung 5.1:
Zum Ebenbleiben der Querschnitte



5.2.5 Für die Biegebeanspruchung gilt die Hypothese von Jakob BERNOULLI vom Ebenbleiben der Querschnitte

Sämtliche vor der Biegedeformation senkrecht zur Stabachse liegenden Querschnittsebenen sollen gemäß der Hypothese von Jacob BERNOULLI auch nach der Deformation senkrecht zur Stabachse liegen und eben sein. Bei gleichzeitig wirkender Torsion gilt dies jedoch nicht mehr.

5.2.6 Gültigkeit der WAGNER – Hypothese

Nichtwölbfreie Querschnitte erfahren unter gleichzeitiger Biegung und Torsion neben den Verschiebungen v und w in der Querschnittsebene auch Verschiebungen u aus der Querschnittsebene heraus.

Die WAGNER – Hypothese geht dabei vom Fehlen der Schubverzerrungen γ in der Profilmittellinie aus, was Gl. (5.4) mathematisch präzisiert:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0. \tag{5.4}$$

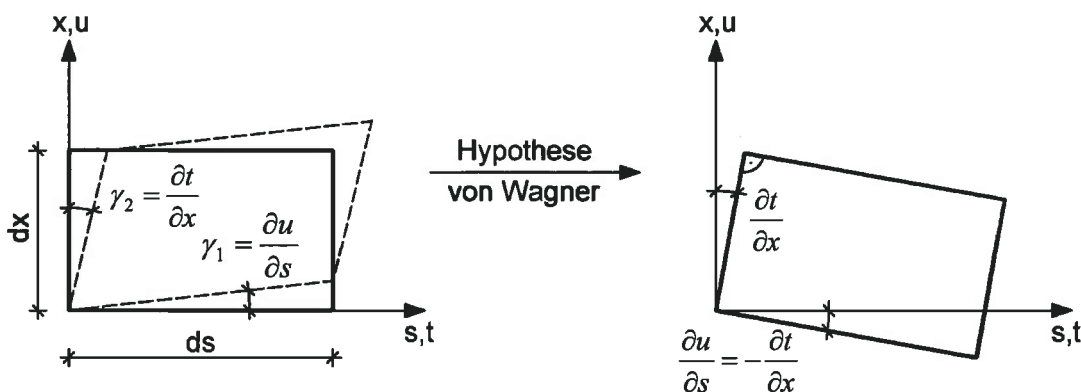


Abbildung 5.2: Schubverzerrung eines Flächenelementes

Dies gilt jedoch nur für offene Profile. Bei geschlossenen Profilen werden nur Schubverzerrungen zufolge des Bredt'schen Schubflusses berücksichtigt (primäre Schubspannungen aus St. Venant'scher Torsion). Die Verzerrungen zufolge sekundärer Schubspannungen (Wölbschubspannungen) werden dort meist vernachlässigt.

Über diese Bedingung lässt sich dann die Längsverschiebung $u(x, s)$ wie folgt bestimmen:

$$u(x, s) = u_0(x) - \int_{s=0}^s \frac{\partial t}{\partial x} ds. \tag{5.5}$$

$u_0(x)$ ist der Wert für die Längsverschiebung am Startpunkt $s=0$, der als Integrationskonstante erhalten wird.

Nach Umformungen und Integration erhält man schließlich unter Verwendung des Ausdrucks der Verwölbung (siehe Abschnitt 3.4) für die Verschiebung aus der Querschnittsebene heraus

$$u(x,s) = u_0(x) - v'(x)y(s) - w'(x)z(s) - \vartheta'(x)\omega(s) \quad (5.6)$$

Wie der letzte Term in Gl. (5.6) verdeutlicht, gilt hier also offensichtlich für den Gesamtquerschnitt die BERNOULLI – Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte nicht mehr.

5.2.7 Lokale Instabilität (Beulen) sei ausgeschlossen

Dies wird durch geeignete konstruktive Aussteifungen sichergestellt.

5.3 Die Differentialgleichungen

In [1] wird – basierend auf den angeführten Voraussetzungen – ausführlich folgendes simultanes Differentialgleichungssystem hergeleitet:

$$\begin{aligned} EA_{yy}v_M^{IV} + (M_y\vartheta)'' - [N_x(v_M' + z_M\vartheta')] &= p_y \\ EA_{zz}w_M^{IV} + (M_z\vartheta)'' - [N_x(w_M' - y_M\vartheta')] &= p_z \\ EA_{\omega\omega}\vartheta^{IV} - GI_D\vartheta'' - (N_xz_Mv_M')' + (N_xy_Mw_M')' + (M_yv_M)'' + \\ + (M_zw_M)'' - \left[\vartheta \left(N_xi_M^2 + M_yr_{M_z} - M_zr_{M_y} + M_\omega r_{M_\omega} \right) \right] + p_y y_p^M \vartheta + p_z z_p^M \vartheta &= m_d \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Gleichungen (5.7) lassen erkennen, dass

- die 3 Verformungskomponenten v, w und ϑ im Allgemeinen miteinander gekoppelt sind, d.h. der Stab wird gebogen und gleichzeitig verdreht,
- nur in bestimmten Sonderfällen eine Entkoppelung der drei Einzelgleichungen in Gl. (5.7) auftritt,
- eine Lösung für allgemeine Belastungsfälle auf analytischem Wege sehr kompliziert wird – es empfiehlt sich also die Anwendung von Näherungsverfahren (z. B. nach der Energiemethode, siehe auch Kapitel 4.4.2).

5.4 Das elastische Potential des Biege – Torsionsproblems

Mit den unter Abschnitt 5.2 genannten Voraussetzungen kann das elastische Potential des kombinierten Biege – Torsionsproblems aufgestellt werden. Sämtliche in der Folge angegebenen Gleichungen verwenden als Bezugspunkt sowohl für die Verschiebungs– als auch Querschnittswerte den Schubmittelpunkt des betrachteten Querschnittes (Indizes ..._M). Die Potentialformulierung erfolgt unter Benützung einiger Vereinfachungen, so wird z. B. der Einfluss aus der Umlenkung des Torsionsmomentes vernachlässigt. Wegen ihrer Kleinheit werden ebenso die Komponenten der Verwölbungsverschiebung in der Querschnittsebene vernachlässigt, und die Schnittgrößen für die Momente nach Theorie I. Ordnung verwendet. Für eine ausführliche Herleitung und Beschreibung dieser Vereinfachungen sei auf die behandelnde Literatur (z. B. [4]) verwiesen, welcher auch die folgenden Ausführungen entnommen sind.

5.4.1 Das Potential der inneren Kräfte

Das Potential der inneren Kräfte entspricht der im System gespeicherten Formänderungsarbeit.

Sie errechnet sich unter Berücksichtigung bis zu Termen zweiter Ordnung in den Verformungsbeziehungen mit den unter Abschnitt 3 genannten Größen zu

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(i)} = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left(EA_{yy} v_M''^2 + EA_{zz} w_M''^2 + EA_{\omega\omega} \vartheta''^2 + GI_D \vartheta'^2 \right) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l N_x \left(2z_M v_M' \vartheta' - 2y_M w_M' \vartheta' + v_M'^2 + w_M'^2 + i_M^2 \vartheta'^2 \right) dx - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{x=0}^l M_z \left(-2w_M'' \vartheta + r_{M_y} \vartheta'^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l M_y \left(2v_M'' \vartheta + r_{M_z} \vartheta'^2 \right) dx - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{x=0}^l M_x \left(2v_M' w_M'' - 2w_M' v_M'' \right) dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l M_\omega \left(r_{M_\omega} \vartheta'^2 \right) dx - \\
 & - \left[M_\omega \left(v_M' w_M'' - v_M'' w_M' \right) \right]_0^l
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

In Gl. (5.8) werden Einflüsse aus Querkraft– und Wölbschubspannungen bei offenen Profilen vernachlässigt, Formänderungsarbeit von Schubspannungen aus St. Venant'scher Torsion (primäre Schubspannungen) jedoch berücksichtigt. Zentrische Verschiebungen u sind ebenfalls nicht berücksichtigt.

Der letzte Term in Gl. (5.8), der ein Wölbmoment berücksichtigt, ist von den gegebenen Randbedingungen abhängig. Bei Gabellagerung und starrer Einspannung wird er zu Null.

5.4.1.1 Der Anteil von elastischen Lagerungen und Bettungen am Potential der inneren Kräfte

Sind elastische Lagerungen oder Bettungen in Form von Federn vorhanden, muss deren Beitrag zum Potential der inneren Kräfte natürlich berücksichtigt werden.

Von entscheidender Bedeutung ist dabei auch der Angriffspunkt der Feder am Querschnitt, dessen Koordinaten y_c und z_c lauten. Die Verschiebungskomponenten v_c und w_c der Feder können somit zu

$$\begin{aligned} v_c &= v_M - (z_c - z_M) \vartheta = v_M - z_{c_M} \vartheta \\ w_c &= w_M + (y_c - y_M) \vartheta = w_M + y_{c_M} \vartheta \end{aligned} \quad (5.9)$$

transformiert und auf den Schubmittelpunkt bezogen werden.

Für Einzelfedern mit den Federsteifigkeiten $C_{i,k}$, die an diskreten Punkten „k“ entlang der Stabachse angeordnet sind, lautet der Beitrag zum Potential der inneren Kräfte

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_k \left[C_{z,k} (w_M + y_{c_M} \vartheta)_k^2 + C_{y,k} (v_M - z_{c_M} \vartheta)_k^2 + C_{\vartheta,k} \vartheta_k^2 + C_{M_y,k} w_k'^2 + C_{M_z,k} v_k'^2 + C_{M_\omega,k} \vartheta_k'^2 \right]. \quad (5.10)$$

Für kontinuierliche Bettungen mit den Bettungsziffern c_i , die entlang der Stabachse vorhanden sind, kann das innere Potential zu

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l (c_z w_c^2 + c_y v_c^2 + c_\vartheta \vartheta^2) dx \quad (5.11)$$

formuliert werden.

Der Gesamtbeitrag von elastischen Lagerungen und Bettungen am Potential der inneren Kräfte lautet also

$$\begin{aligned} \Pi_C^{(i)} &= \frac{1}{2} \sum_k \left[C_{z,k} (w_M + y_{c_M} \vartheta)_k^2 + C_{y,k} (v_M - z_{c_M} \vartheta)_k^2 + C_{\vartheta,k} \vartheta_k^2 + C_{M_y,k} w_k'^2 + C_{M_z,k} v_k'^2 + C_{M_\omega,k} \vartheta_k'^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x=0}^l (c_z (w_M + y_{c_M} \vartheta)^2 + c_y (v_M - z_{c_M} \vartheta)^2 + c_\vartheta \vartheta^2) dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.4.2 Das Potential der äußeren Kräfte

Gemäß der Definition eines Potentials kann das Potential der äußeren Kräfte im System als die negative äußere Arbeit, die von den Belastungen entlang der zugehörigen Verformungen geleistet wird, gedeutet werden.

$P_{x,i}, P_{y,i}, P_{z,i}, M_{D,i}$ sind Einzellasten bzw. -momente an bestimmten Querschnittspunkten.
 $M'_y, M'_z, M'_\omega, M'_D$ stellen an den Stabenden eingeprägte Momente dar, durch die auch exzentrische Normalkräfte ersetzt werden können.

p_x ist eine in der Schwerlinie angreifende Linienlast und
 p_y und p_z stehen für beliebig am Querschnitt angreifende Linienlasten.
 m_D^a kennzeichnet ein Streckentorsionsmoment entlang der Stabachse.

Die Verschiebungskomponenten $u_{p,i}, v_{p,i}$ und $w_{p,i}$ der Lastangriffspunkte werden unter Vernachlässigung der Verwölbungsverschiebung in der Querschnittsebene und Berücksichtigung kleiner Verformungen (Terme mit $\dots \frac{1}{2} \vartheta^2$) mit den

Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} u_p &= u_0 \\ v_p &= v_M - z_p^M \vartheta - y_p^M \frac{1}{2} \vartheta^2 \\ w_p &= w_M + y_p^M \vartheta - z_p^M \frac{1}{2} \vartheta^2 \end{aligned} \tag{5.13}$$

auf den Schubmittelpunkt bezogen.

Damit kann das Potential der äußeren Kräfte aufgestellt werden. Es lautet

$$\begin{aligned} \Pi^{(a)} = & - \int_{x=0}^l \left[P_x u_0 + P_y \left(v_M - z_p^M \vartheta - \frac{1}{2} y_p^M \vartheta^2 \right) + P_z \left(w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \vartheta^2 \right) + m_D^a \vartheta \right] dx + \\ & + \sum_i \left[P_{x,i} u_{0,i} + P_{y,i} \left(v_{M,i} - z_{p,i}^M \vartheta_i - \frac{1}{2} y_{p,i}^M \vartheta_i^2 \right) + P_{z,i} \left(w_{M,i} + y_{p,i}^M \vartheta_i - \frac{1}{2} z_{p,i}^M \vartheta_i^2 \right) + M_{D,i} \vartheta_i \right] + \\ & + \sum_i \left(M'_z v'_{M_r} - M'_y w'_{M_r} - M'_\omega \vartheta'_r + M'_D \vartheta'_r \right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

5.4.3 Das Gesamtpotential längs- und querbelasteter Stäbe

Das Gesamtpotential längs- und querbelasteter Stäbe ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen (5.8), (5.12) und (5.14) als die Summe der im System gespeicherten inneren und äußeren Energie zu

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left[EA_{yy} v_M'^2 + EA_{zz} w_M'^2 + EA_{\omega\omega} \vartheta'^2 + GI_D \vartheta'^2 + N \left(2z_M v_M' \vartheta' - 2y_M w_M' \vartheta' + v_M'^2 + w_M'^2 + i_M^2 \vartheta'^2 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - M_z \left(-2w_M' \vartheta + r_{M_y} \vartheta'^2 \right) + M_y \left(2v_M' \vartheta + r_{M_z} \vartheta'^2 \right) + M_\omega \left(r_{M_\omega} \vartheta'^2 \right) \right] dx + \\
 &\quad \sum_k \left[C_{z,k} \left(w_M + y_{c_M} \vartheta \right)_k^2 + C_{y,k} \left(v_M - z_{c_M} \vartheta \right)_k^2 + C_{\vartheta,k} \vartheta_k^2 + C_{M_y,k} w_k'^2 + C_{M_z,k} v_k'^2 + C_{M_\omega,k} \vartheta_k'^2 \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left(c_z \left(w_M + y_{c_M} \vartheta \right)^2 + c_y \left(v_M - z_{c_M} \vartheta \right)^2 + c_\vartheta \vartheta^2 \right) dx - \\
 &\quad - \int_{x=0}^l \left[P_y \left(v_M - z_p^M \vartheta - \frac{1}{2} y_p^M \vartheta^2 \right) + P_z \left(w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \vartheta^2 \right) + m_d^a \vartheta \right] dx - \\
 &\quad - \sum_i \left[\left(P_{y,i} \left(v_{M,i} - z_{p,i}^M \vartheta_i - \frac{1}{2} y_{p,i}^M \vartheta_i^2 \right) + P_{z,i} \left(w_{M,i} + y_{p,i}^M \vartheta_i - \frac{1}{2} z_{p,i}^M \vartheta_i^2 \right) + M_{D,i} \vartheta_i \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_i \left(M_z^r v_{M_r}' - M_y^r w_{M_r}' - M_\omega^r \vartheta_r' + M_D^r \vartheta_r \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

5.5 Das Funktional $\frac{1}{2} \delta^2 \Pi$

Berechnet man den Potentialausdruck in Gl. (5.15) mit den in ihre benachbarte Lagen variierten Verformungskomponenten v , w und ϑ

$$\begin{aligned}
 v_M &\rightarrow v_M + \delta v_M \\
 w_M &\rightarrow w_M + \delta w_M \\
 \vartheta &\rightarrow \vartheta + \delta \vartheta.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

und entwickelt diesen im Sinne einer TAYLORreihe bis zum zweiten Glied, so kann man das

Funktional $\frac{1}{2} \delta^2 \Pi$ leicht anschreiben (siehe auch Abschnitt 4).

5.5.1 Das Funktional $\frac{1}{2} \delta^2 \Pi$ des untersuchten Systems

Im vorliegenden Fall tritt als einzige Belastung die kontinuierlich wirkende Linienlast p_z auf. Diese wird zentrisch auf die Hauptträger eingetragen und erzeugt daher außer Biegemomenten M_y keine weiteren Schnittgrößen (in diesem Fall Torsionsmomente), die im Funktional berücksichtigt werden müssen.

Für die Modellierung der Querträger und Horizontalverbände werden in den folgenden Kapiteln Federmodelle verwendet. Diese verwenden Einzeldrehfedern der Steifigkeit C_{ϑ} bzw. drehelastische Bettungen mit der Bettungsziffer c_{ϑ} zur Beschreibung der Querträger im Brückensystem.

Die Aussteifungsverbände werden wirkungsäquivalent durch Einzelfedern der Steifigkeit C_y bzw. eine wegelastische Bettung mit der Bettungsziffer c_y ersetzt.

Damit kann das allgemeine Funktional an das untersuchte Brückensystem angepasst werden. Es lautet

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left[EA_{yy} \delta v_M'^2 + EA_{zz} \delta w_M'^2 + EA_{\omega\omega} \delta \vartheta'^2 + GI_D \delta \vartheta'^2 + M_y \left(2 \delta v_M' \delta \vartheta + r_{M_z} \delta \vartheta'^2 \right) \right] dx + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_k \left[C_{y,k} \left(\delta v_M - z_{c_M} \delta \vartheta \right)_k^2 + C_{\vartheta,k} \delta \vartheta_k^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left(c_y \delta v_c^2 + c_{\vartheta} \delta \vartheta^2 \right) dx - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left[p_z \left(\delta w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \delta \vartheta^2 \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

6 DAS STABILITÄTSPROBLEM BIEGEDRILLKNICKEN

6.1 Allgemeines

Biegedrillknicken bezeichnet als Überbegriff im Allgemeinen den Vorgang, währenddessen sich ein Stab gleichzeitig verbiegt und verdreht (entlang seiner Stabachse also verdrillt). Sinngemäß sind natürlich Profile mit geringen Drillsteifigkeiten (z. B. offene Profile) besonders gefährdet, auf Biegedrillknicken zu versagen.

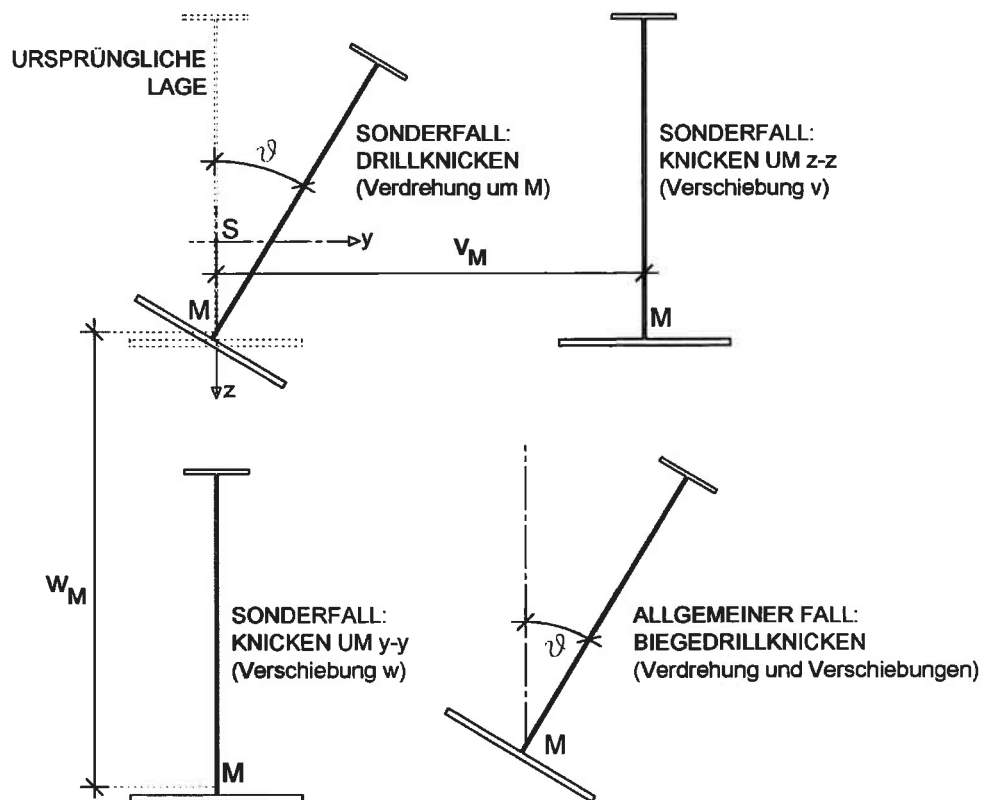


Abbildung 6.1: Elementarfälle beim Biegedrillknicken

Wie die obige Abbildung 6.1 zeigt, kann man das allgemeine Biegedrillknicken in drei Komponenten zerlegen.

- Drillknicken (Verdrehung um den Schubmittelpunkt)
- Knicken um die Querschnittshauptachse $y - y$
- Knicken um die Querschnittshauptachse $z - z$

Der allgemeinste Fall ergibt sich als Kombination dieser drei Grundfälle, bei ihm tritt also eine Verformung des Stabes auf, die in Verschiebungskomponenten in Richtung der beiden Querschnittshauptachsen und eine Verdrehungskomponente um den Schubmittelpunkt (Verdrillung entlang der Schubmittelpunktsachse) zerlegt werden kann.

6.2 Elementarfälle des Biegedrillknickens

Unter Beachtung der in der Stabilitätstheorie üblichen Vorzeichenkonvention, für „N“ den Betrag der Druckkraft in die Gleichungen einzusetzen, ergibt sich das unter Abschnitt (5.3) angeführte Differentialgleichungssystem neu angeschrieben zu

$$\begin{aligned}
 EA_{yy}v_M^{IV} + (M_y \mathcal{G})'' + N(v_M'' + z_M \mathcal{G}'') &= p_y \\
 EA_{zz}w_M^{IV} + (M_z \mathcal{G})'' + N(w_M'' - y_M \mathcal{G}'') &= p_z \\
 \left. \begin{aligned}
 &EA_{\omega\omega} \mathcal{G}^{IV} - GI_D \mathcal{G}'' + Nz_M v_M'' - Ny_M w_M'' + (M_y v_M)'' + (M_z w_M)'' + \\
 &\left[\mathcal{G}' (Ni_M^2 - M_y r_{M_z} + M_z r_{M_y} - M_\omega r_{M_\omega}) \right]' + p_y y_P^M \mathcal{G} + p_z z_P^M \mathcal{G}
 \end{aligned} \right\} = m_d.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Mit den Bezeichnungen laut Abbildung 6.2 werden im Folgenden Studien durchgeführt, anhand derer man schon die wesentlichen Zusammenhänge beim Biegedrillknicken erkennen kann.

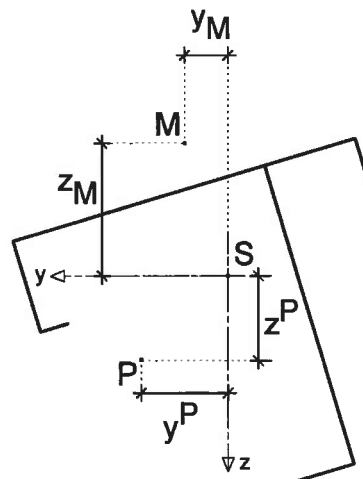


Abbildung 6.2: Systemskizze

- S Schwerpunkt
- M Schubmittelpunkt mit den Koordinaten (y_M, z_M)
- P Lastangriffsort mit den Koordinaten (y^P, z^P)

Für den Fall, dass im Punkt P eine Druckkraft N angreift, gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} N &= \text{const} \\ M_y &= -N \cdot z^P = \text{const} \\ M_x &= N \cdot y^P = \text{const} \\ p_y &= p_z = m_d = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass kein äußeres Wölbmoment $M_\omega = N \cdot \omega$ auftritt. Es folgt somit $M_\omega = 0$.

Mit den Schnittgrößen ergibt sich das entsprechende Differentialgleichungssystem (DGS) (6.1) nun laut [4] zu

$$\begin{aligned} EA_{yy} v_M^{IV} + N v_M'' - N(z^P - z_M) \vartheta'' &= 0 \\ EA_{zz} w_M^{IV} + N w_M'' + N(y^P - y_M) \vartheta'' &= 0 \\ EA_{\omega\omega} \vartheta^{IV} - \left[GI_D - N(i_M^2 + z^P r_{M_z} + y^P r_{M_y}) \right] \vartheta'' - N(z^P - z_M) v_M'' + N(y^P - y_M) w_M'' &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Der Term $\left[GI_D - N(i_M^2 + z^P r_{M_z} + y^P r_{M_y}) \right]$ kann darin als eine effektive Drillsteifigkeit $(GI_D)_{\text{eff}}$ des Querschnitts gedeutet werden. Diese ist offensichtlich umso kleiner, je größer die wirkende Normalkraft ist, unter Wirkung einer Druckkraft wird das System also „weicher“. Im Falle einfach- oder doppeltsymmetrischer Querschnitte verringert sich der Beitrag dieses Terms $N(i_M^2 + z^P r_{M_z} + y^P r_{M_y})$ jedoch wieder. In diesem Fall sind nämlich die Kindem'schen Querschnittswerte r_{M_y} bzw. r_{M_z} (je nach Symmetrieachse) gleich Null.

Die Gleichungen sind über die Verformungskomponenten v , w und ϑ miteinander gekoppelt. Zwar ist das DGS auf den ersten Blick homogen, doch über die Terme $N \dots''$ treten an den Systemrändern inhomogene Glieder auf. Zum Beispiel ist über die Randbedingung

$$w_M'' = -\frac{M_y}{EA_{zz}} \text{ der inhomogene Term } \frac{N z^P}{EA_{zz}} \text{ im Gleichungssystem enthalten.}$$

Bei näherer Betrachtung des DGS (6.3) wird deutlich, wann eine Entkopplung der Gleichungen voneinander auftritt und als Lösung einer der in (Abbildung 6.1) dargestellten Elementarfälle des Biegedrillknickens auftritt.

Sobald der Klammerterm $(z^P - z_M)$ in der ersten Zeile zu Null wird, entkoppeln sich die Verformungskomponenten v und ϑ . In diesem Fall beschreibt die erste Zeile das Problem der einachsigen Biegung um die z -Achse des Querschnitts.

Analog dazu tritt Entkoppelung von w und ϑ unter der Voraussetzung $(y^P - y_M) = 0$ bzw. $y^P = y_M$ auf. Dann kann man aus der zweiten Zeile vom Gleichungssystem (6.3) die einachsige Biegung um die y – Achse des Querschnitts herauslesen.

Dabei handelt es sich jedoch um Spannungsprobleme, weil die jeweiligen Gleichungen nach wie vor inhomogen sind.

Diese Elementarfälle werden in den beiden nächsten Abschnitten behandelt.

6.2.1 Druckkraft im Schubmittelpunkt

Für den Fall einer im Schubmittelpunkt angreifenden Kraft gilt $y^P = y_M$ und $z^P = z_M$, das DGS entkoppelt sich. Die ersten beiden Gleichungen in (6.3) beschreiben das Spannungsproblem außermittigen Drucks um die beiden Hauptachsen.

Die dritte Gleichung ist in diesem Fall eine homogene Gleichung und beschreibt somit das Verzweigungsproblem Biegedrillknicken.

Ihre Lösung liefert die ideal kritische Last für reines Drillknicken des Querschnittes.

Beim beidseitig gabelgelagerten Stab der Länge l mit der Ansatzfunktion für die Verdrehung

$$\vartheta = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (6.4)$$

lautet die Lösung für diese Verzweigungslast N^ϑ

$$N_{ki} = N^\vartheta = \frac{EA_{\omega\omega} \frac{\pi^2}{l^2} + GI_D}{i_M^2 + z^P r_{M_z} + y^P r_{M_y}} \quad (6.5)$$

Mit der Abkürzung

$$r^2 = \left(i_M^2 + z^P r_{M_z} + y^P r_{M_y} \right) \quad (6.6)$$

kann für N^ϑ anders

$$N_{ki} = N_{Euler}^\vartheta = \frac{EA_{\omega\omega} \frac{\pi^2}{l^2} + GI_D}{r^2} \quad (6.7)$$

geschrieben werden.

Im formalen Aufbau dieser Lösung ist die gerne benutzte Analogie zwischen Wölbkrafttorsion und Biegung mit Normalkraft nach Theorie II. Ordnung gut sichtbar. Diese baut auf dem formal identischen Aufbau der beschreibenden Differentialgleichungen von Wölbkrafttorsion und Biegung mit Normalkraft nach Theorie II. Ordnung auf.

Für den Stab der Länge l unter der „Zugkraft“ $(GI_D)_{eff}$ und der „Biegesteifigkeit“ $EA_{\omega\omega}$ ergibt sich nach Theorie II. Ordnung dieselbe kritische Last N_{ki} wie für das entsprechende Biegedrillknickproblem, nämlich der Ausdruck in Gl. (6.7).

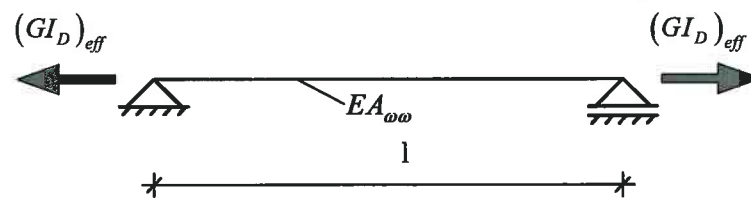


Abbildung 6.3: Analogiesystem Biegung mit Normalkraft nach Theorie II. Ordnung

Für einfache Probleme bietet diese Analogie eine gute Alternative zur Berechnung, da viele Lösungen bereits vorhanden und tabelliert sind.

In dieser Arbeit kommt sie jedoch nicht zur Anwendung.

6.2.2 Zentrischer Druck

Bei zentrischem Kraftangriff ($y^P = z^P = 0$) im Schwerpunkt lautet das DGS

$$\begin{aligned} EA_{yy} v_M^{IV} + N v_M'' + N z_M \vartheta'' &= 0 \\ EA_{zz} w_M^{IV} + N w_M'' - N y_M \vartheta'' &= 0 \\ EA_{\omega\omega} \vartheta^{IV} + (N i_M^2 - GI_D) \vartheta'' + N z_M v_M'' - N y_M w_M'' &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Diese Gleichungen sind nun allesamt homogen und liefern – jede für sich – die Lösung des jeweiligen Verzweigungsproblems.

Die erste Zeile beschreibt Knicken um die z – Achse, aus der zweiten Zeile kann man das Knicken um die y – Achse herauslesen und die dritte Zeile gibt das Verzweigungsproblem des Biegedrillknickens wieder.

Für den Fall des beidseitig gabelgelagerten Stabes der Länge l können für die Verformungskomponenten die folgenden einfachen Ansatzfunktionen formuliert werden:

$$\begin{aligned} v_M &= A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \\ w_M &= B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \\ \vartheta &= C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Nach Einsetzen in das DGS und Verwendung der Beziehung für N_{ki} nach Gl. (6.7) lässt sich folgende Koeffizientenmatrix für die Freiwerte A , B und C aufstellen:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} EA_{yy} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - N_{ki} & 0 & -N_{ki} z_M \\ 0 & EA_{zz} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - N_{ki} & N_{ki} y_M \\ -N_{ki} z_M & N_{ki} y_M & EA_{\omega\omega} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + GI_D - N_{ki} i_M^2 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

In deren Determinante tauchen wieder die EULER – Knicklasten für reines Biegeknicken um die beiden Hauptachsen und Drillknicken um den Schubmittelpunkt auf. Sie lauten für diesen Fall

$$N_{Euler}^y = EA_{zz} \frac{\pi^2}{l^2}, \quad N_{Euler}^z = EA_{yy} \frac{\pi^2}{l^2} \quad \text{und} \quad N_{Euler}^{\vartheta} = \frac{EA_{\omega\omega} \frac{\pi^2}{l^2} + GI_D}{r^2}. \quad (6.11)$$

Unter Beachtung von $i_M = r$ für zentrischen Druck und Einsetzen in die Matrix \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{N_{Euler}^z}{N_{ki}} - 1 & 0 & -\frac{z_M}{i_M} \\ 0 & \frac{N_{Euler}^y}{N_{ki}} - 1 & \frac{y_M}{i_M} \\ -\frac{z_M}{i_M} & \frac{y_M}{i_M} & \frac{N_{Euler}^{\vartheta}}{N_{ki}} - 1 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

ergibt sich die Knickdeterminante des Systems, welche die Bestimmungsgleichung zur Ermittlung der ideal kritischen Biegedrillknicklast (in diesem Fall die Druckkraft N_{ki}) liefert.

Sie lautet

$$\left(\frac{N_{Euler}^z}{N_{ki}} - 1\right) \cdot \left(\frac{N_{Euler}^y}{N_{ki}} - 1\right) \cdot \left(\frac{N_{Euler}^g}{N_{ki}} - 1\right) - \left[\left(\frac{N_{Euler}^z}{N_{ki}} - 1\right) \cdot \left(\frac{y_M}{i_M}\right)^2 + \left(\frac{N_{Euler}^y}{N_{ki}} - 1\right) \cdot \left(\frac{-z_M}{i_M}\right)^2 \right] = 0. \quad (6.13)$$

Wichtig dabei ist, dass sie Lösungen für N_{ki} liefert, welche stets *kleiner* als die kleinste der drei EULER – Knicklasten N_{Euler}^y , N_{Euler}^z und N_{Euler}^g sind.

$$N_{ki} < \min\{N_{Euler}^y, N_{Euler}^z, N_{Euler}^g\} \quad (6.14)$$

Gl. (6.14) ist als Ergebnis dieser Untersuchungen übrigens der Beweis für die wichtige Tatsache, dass der Stabilitätsverlust zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem, unsymmetrischen Querschnitt *immer* zufolge Biegedrillknickens eintritt.

7 BERECHNUNG DER IDEAL KRITISCHEN LASTEN NACH DEM RITZ'SCHEN VERFAHREN

7.1 Verwendete Mathematiksoftware

Zur Durchführung der mathematischen Routinen (Berechnung der Querschnittswerte, Berechnung der Ergebnisse nach RITZ, u. v. m.) wird das Mathematik – Softwarepaket MAPLE in der Version v6.01 verwendet [9].

Dazu muss zuerst das Funktional $\frac{1}{2}\delta^2\Pi$ für das jeweilige System laut Gl. (5.17) mit dem Ersatzpotential Π^* aufgestellt werden. Für die Verformungskomponenten v , w und ϑ werden dabei unterschiedliche Ansatzfunktionen formuliert.

Basierend auf diesem energetischen Ausdruck $\frac{1}{2}\delta^2\Pi^*$, das mit den Ansatzfunktionen für die angenäherten Verformungskomponenten formuliert wird, folgen dann die weiteren Berechnungen nach dem RITZ'schen Verfahren, wie sie unter Abschnitt 4.4.2.1 ausführlich beschrieben sind.

Im *ANHANG* sind die in der MAPLE – Programmiersprache verfassten Programmschritte für diese Berechnungsroutinen ersichtlich.

8 BERECHNUNG DER IDEAL KRITISCHEN LASTEN NACH DER FINITE ELEMENTE METHODE

8.1 FEM – Modellierung

8.2 Verwendete FEM – Software

Zur Berechnung des Systems nach der FE – Methode kommt das kommerzielle 3D – Programm InfoCAD in der Version v6.08c zum Einsatz [10].

Dieses bietet die Möglichkeit, das untersuchte Modell dreidimensional zu diskretisieren. Je nach Belastung und Randbedingungen können dazu verschiedene Elementtypen wie Scheiben, Platten-, Schalen- oder Stabelemente mit ihren typischen Eigenschaften verwendet werden.

8.2.1 Räumliches FEM – Modell des untersuchten Brückensystems

Zuerst wird im CAD – Programm [8] ein dreidimensionales Modell der beiden Längsträger der Brückenstruktur erstellt, über die *.dxf – Schnittstelle exportiert und anschließend in das FEM – Programm eingelesen. In der Geometrie müssen bereits Zwangslinien für das FE – Modell (wie z. B. die Achse des Schubmittels- und Schwerpunktes der beiden Längsträger sowie Teilungen der Längsträger in den Ebenen, in welchen im FE – Modell dann die Querträger angeschlossen werden) berücksichtigt werden.

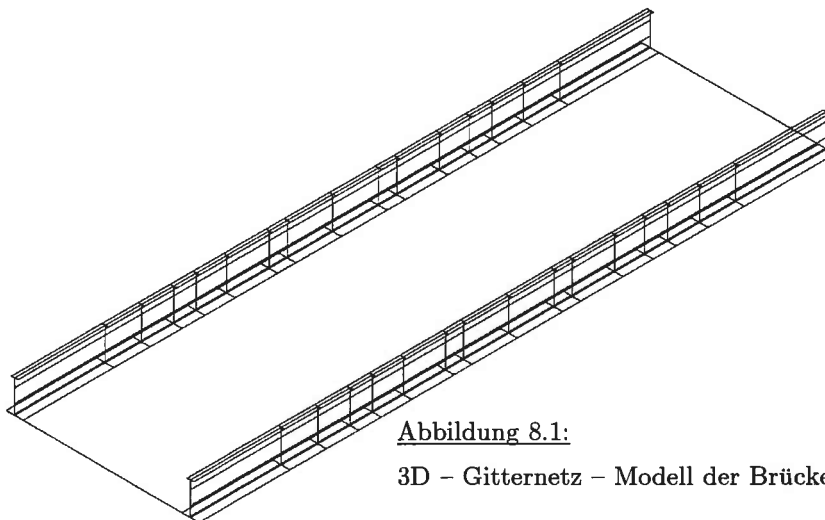


Abbildung 8.1:

3D – Gitternetz – Modell der Brückenlängsträger

Die Modellierung des vorhandenen Systems erfolgt ausreichend detailgetreu im Programm. So werden etwa auch Beulsteifen im Modell (siehe Abbildung 8.2) vorgesehen, um lokales Stabilitätsversagen zu verhindern.

Diese Forderung entspricht ja auch einer der wesentlichen Voraussetzungen der Wölbkrafttorsion nach Theorie II. Ordnung, wenn das Stabilitätsverhalten der Gesamtstruktur untersucht werden soll (siehe Abschnitt 5.2.7).

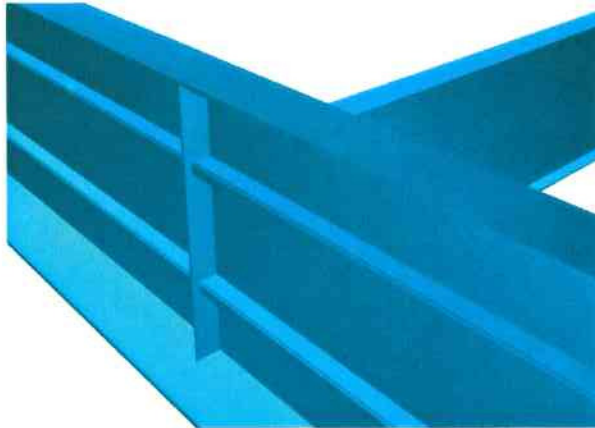


Abbildung 8.2:

Detailausschnitt des FEM – Modells mit Aussteifungen im Anschlusspunkt eines Querträgers

8.2.2 Elementeigenschaften

Zur Modellierung der verschiedenen Brückensysteme empfiehlt sich die Verwendung flächenhafter *Schalenelemente* für die räumliche Struktur der Hauptträger.

Die maximale Kantenlänge wird – wenn möglich – mit ca. 30 – 40 [cm] gewählt, in gewissen Bereichen der Zwangspunkte im Modell ergeben sich teilweise auch kleinere Elementgrößen.

Die Knotenpunkte der Vierpunkt – Schalenelemente mit der programminternen Bezeichnung *SH46* weisen im räumlichen xyz – Koordinatensystem sechs Freiheitsgrade auf:

- Translation: u_x, u_y, u_z
- Rotation: $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$

Pro Schalenelement mit vier Knotenpunkten ergeben sich damit also $4 \times 6 = 24$ Freiheitsgrade.

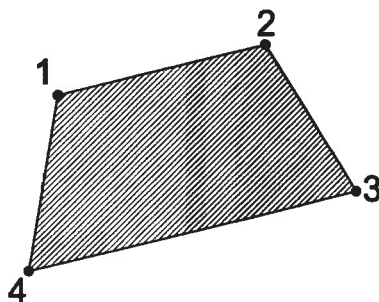


Abbildung 8.3:

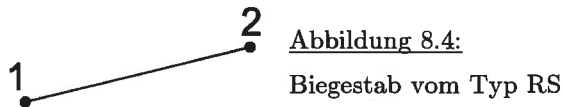
Schalenelement vom Typ SH46

Die Steifigkeitsmatrizen der Schalenelemente sind eine Kombination der Elementsteifigkeitsmatrizen aus Scheibenelementen und KIRCHHOFF'schen Plattenelementen, d.h. sie können sowohl Beanspruchungen in als auch quer zur Schalenebene aufnehmen [10].

Die Modellierung der Verbandsstäbe erfolgt mit *Biegestäben* (programminterne Bezeichnung *RS*), deren Knotenpunkte im räumlichen xyz – Koordinatensystem ebenfalls sechs Freiheitsgrade aufweisen:

- Translation: u_x, u_y, u_z
- Rotation: $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$

Pro Stabelement mit zwei Knotenpunkten ergeben sich damit also $2 \times 6 = 12$ Freiheitsgrade.



8.3 Berechnung der Eigenwerte und dazugehöriger Eigenformen

Die verwendete Software bietet die Möglichkeit, mit der programminternen Funktion *Knickeigenwerte* für eine eingegebene Struktur unter gegebener Belastung einen Laststeigerungsfaktor zu berechnen, unter welchem Stabilitätsverlust des Systems eintritt. Zu diesem errechneten Lastfaktor können auch eine gewünschte Anzahl von Eigenwerten samt dazugehöriger, qualitativer Eigenformen ausgegeben werden.

Diese ausgegebenen Eigenformen sind selbstverständlich orthogonal zueinander und werden normiert ausgegeben.

8.4 Vergleichsrechnungen zur Überprüfung des Modells

Um die Qualität der mittels FE – Methode ermittelten Ergebnisse beurteilen zu können, werden Vergleichsrechnungen zu Beispielen mit aus der Literatur bekannten Lösungen durchgeführt.

8.4.1 Beispiel 1: Kragarm unter zentrischem Druck

Untersucht wird ein 1.50 [m] langer Kragarm, der an seinem freien Ende durch eine im Schwerpunkt angreifende Einzellast $P = 1$ [kN] belastet wird.

Der Hutquerschnitt ist aus Baustahl der Festigkeitsklasse S235.

Die Werkstoffkennwerte lauten:

$$E = 21\,000 \quad [\text{kN/cm}^2],$$

$$G = 8\,077 \quad [\text{kN/cm}^2] \text{ (mit Querdehnzahl } \nu = 0.3).$$

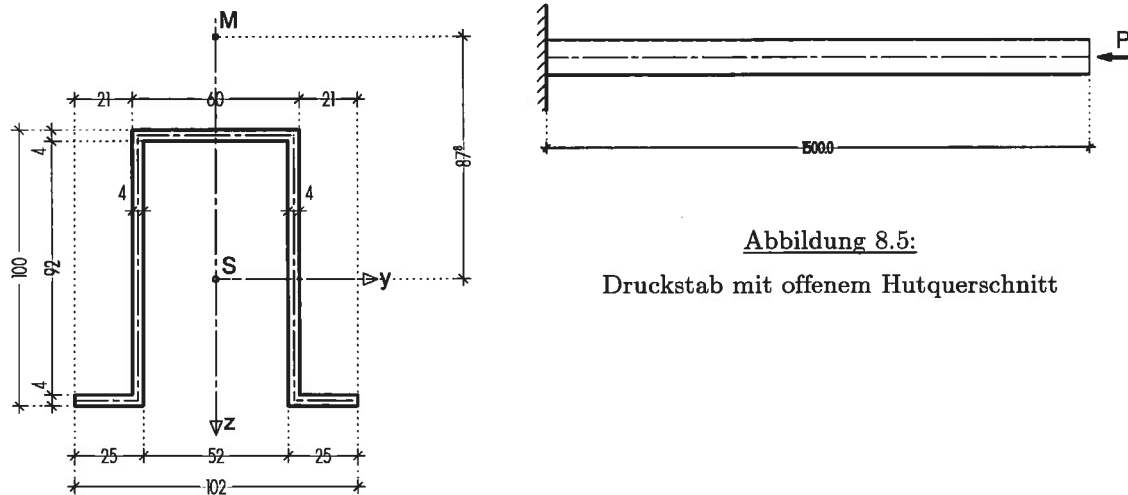


Abbildung 8.5:
 Druckstab mit offenem Hutquerschnitt

Die Einzellast „P“ wird im FEM – Schalenmodell durch eine Linienlast von

$$\frac{1 \text{ [kN]}}{294 \text{ [mm]}} = 0.0034 \text{ [kN/mm]} \text{ auf der Stirnfläche des Querschnittes ins System eingeleitet.}$$

Entlang der Mittellinie des Querschnitts (Gesamtlänge $l = 294$ [mm]) ergibt sich also die Lastsumme von 1 [kN].



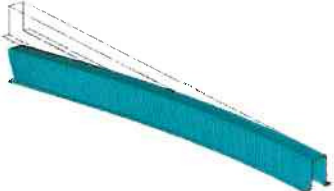



	1. Eigenform (Biegedrillknicken)	2. Eigenform (Knicken um die z – Achse)	3. Eigenform (Knicken um die y – Achse)
3D – Darstellung			
Draufsicht			
Ideal kritischer Lastfaktor μ_{ki}	<u>54</u>	190	346

Tabelle 8.1: Ergebnisse der FE – Berechnung für Beispiel 1

In [3] wird die ideal kritische Last des untersuchten Systems (mit dem RITZ'schen Verfahren ermittelt) zu

$$P_{ki} = 56.4 \text{ [kN]}$$

angegeben.

Das nach der FE – Methode berechnete Ergebnis liegt bei diesem Beispiel um ca. 4 % unter dem Wert nach RITZ. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Diskretisierung im FE – Modell eine bessere Modellbildung für das vorliegende Beispiel darstellt, als es die Formulierung der Ansatzfunktionen nach RITZ tut. Ungenau formulierte Ansatzfunktionen für das RITZ'sche Verfahren können laut [1] als innere Zwänge der untersuchten Struktur interpretiert werden, die die Berechnungsergebnisse entsprechend beeinflussen.

8.4.2 Beispiel 2: Beidseitig gabelgelagerter Einfeldträger unter konstantem Moment („Kippen“)

Für folgendes System eines 10 [m] langen, an beiden Stabenden gabelgelagerten Einfeldträgers unter konstanter Momentenbelastung sollen mit der FEM – Software die ideal kritischen Lasten der drei niedrigsten, positiven Eigenwerte ermittelt werden.

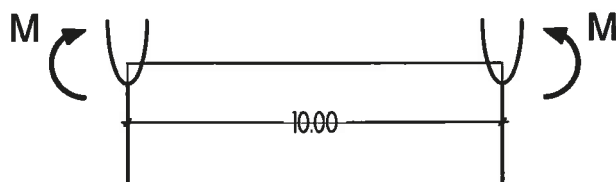


Abbildung 8.6: Systembild für Beispiel 2

Die Gabellagerung kann im FE – Modell durch eine dünne Endquerscheibe mit hohem E – Modul wirkungsäquivalent ersetzt werden.

[4] gibt für das ideal kritische Moment $M_{y,ki}$ (auch „Kippmoment“ genannt) des obigen Systems, gültig für einfachsymmetrische, offene Querschnitte den Wert

$$M_{y,ki} = \frac{EA_{yy}\pi^2}{l^2} \left[\frac{r_{Mz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_{Mz}}{2}\right)^2 + c^2} \right] \quad (8.1)$$

an. Dabei ist der Ausdruck

$$c^2 = \frac{A_{\omega\omega} + \frac{GI_D I^2}{E\pi^2}}{A_{yy}} \quad (8.2)$$

ein Hilfwert.

Mit den Material- und Querschnittswerten für einen HE–B 500 – Querschnitt

E	= 21 000	[kN/cm ²]
G	= 8 077	[kN/cm ²] (mit Querdehnzahl $\nu = 0.3$)
A_{yy}	= 12 620	[cm ⁴]
$A_{\omega\omega}$	= 7 018 000	[cm ⁶]
I_D	= 540	[cm ⁴]
r_{Mz}	= 0	(doppelsymmetrischer Querschnitt)

ergibt sich das ideal kritische Moment nach Auswertung der Gl. (8.1) zu

$$M_{y,ki} = 1\,233 \text{ [kNm]}.$$

Die Berechnung nach der FE – Methode ergeben für einen HE–B 500 – Querschnitt folgende Ergebnisse:

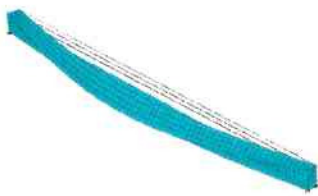




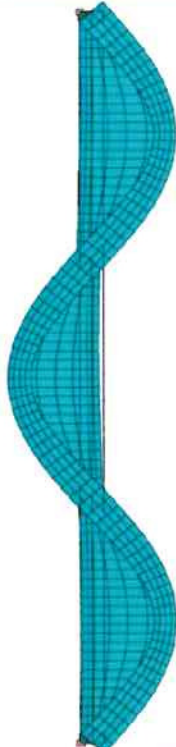
	1. Eigenform	2. Eigenform	3. Eigenform
3D – Darstellung			
Draufsicht			
Ideal kritischer Lastfaktor μ_{ki}	<u>1 288</u>	3 255	6 360

Tabelle 8.2: Ergebnisse der FEM – Berechnung für Beispiel 2

Die Abweichung der Ergebnisse nach RITZ und FEM voneinander beträgt für dieses Beispiel also abermals etwa 4 %.

Die gute Übereinstimmung der Ergebnisse beider Berechnungsverfahren untereinander wie auch mit Ergebnissen aus der Literatur rechtfertigt also den weiteren Einsatz dieser Berechnungsmethode mit dem räumlichen Schalenmodell.

9 DAS UNTERSUCHTE BRÜCKENSYSTEM

9.1 System und Geometrie

Das untersuchte Brückensystem stellt eine leichte Abwandlung des in [5] untersuchten Systems dar. Es handelt sich dabei um eine einfeldrige Brücke mit einem offenen Stahl – Stahlbeton – Verbundquerschnitt, dessen Längsträger zwei im Abstand von 8.30 [m] angeordnete, zusammengeschweißte Stahlprofile bilden.

Die Stützweite der Brücke beträgt 30.00 [m].

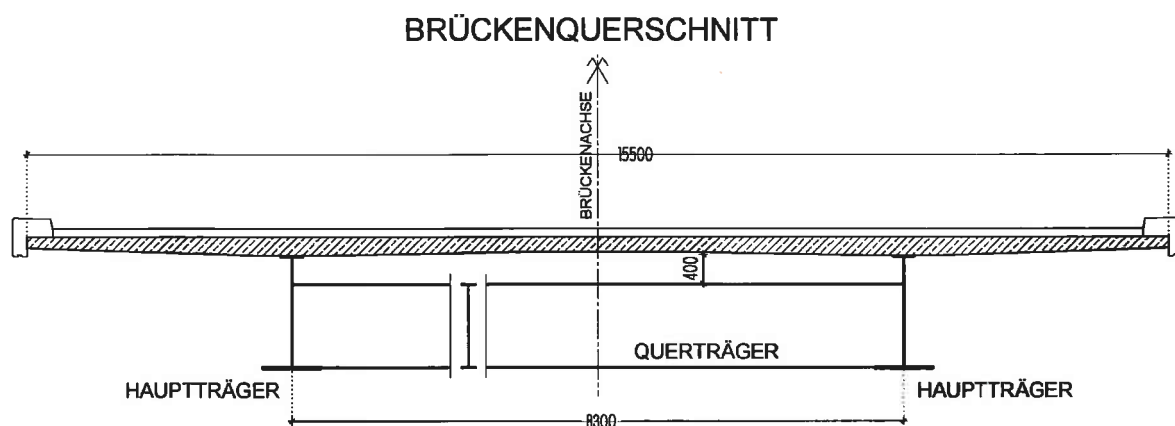


Abbildung 9.1:

Brückenquerschnitt (ohne Darstellung von Aussteifungen wie Beulsteifen u. ä.), Maße in [mm]

Die Querträger sind im Querschnitt gesehen so angeordnet, dass der vertikale Abstand zwischen der Unterkante der Betonplatte und der Oberkante der Querträger 40 [cm] beträgt. Dies wird im Bauzustand für die Unterbringung der Schalung der Betonplatte benötigt.

Der Abstand der Querträger in Brückenlängsrichtung wird im Zuge der Untersuchungen variiert und jeweils äquidistant aus der Stützweite und der Anzahl der Querträger bestimmt.

$$a = \frac{l}{n-1} \quad (9.1)$$

- a Abstand der Querträger in Brückenlängsrichtung
- l Stützweite der Brücke, $l = 30.00$ [m]
- n Anzahl der Querträger (incl. Endquerträger)

9.2 Belastungsannahmen im Bauzustand



Abbildung 9.2: Verbundbrücke im Bauzustand; [13]

Die folgenden Untersuchungen berücksichtigen nur vertikale Lasten im Bauzustand. Zusätzlich zum Eigengewicht der Haupt- und Querträger werden Lasten zufolge Eigengewichtes der darüber liegenden Bauteile (Schalungskonstruktionen und Betonplatte) sowie Nutzlasten, die sich aus der Baudurchführung ergeben, angesetzt.

Für die Berechnung im statischen Modell wird eine gleichmäßig verteilte Flächenlast angenommen, die in die Hauptträger über die darüber liegende Konstruktion (Schalwagen, Schalung, etc.) eingeleitet wird. Jeder Hauptträger des Brückensystems hat somit eine Lasteinflussbreite von $\frac{15.50}{2} = 7.75$ [m].

Im Zuge der Berechnung wird jeweils als Anfangswert eine gleichmäßig verteilte Flächenlast von 1.00 [kN/m²] auf das Brückensystem aufgebracht und dann bis zum Stabilitätsversagen zufolge Biegedrillknicken der Hauptträger gesteigert. Dies entspricht also einer konstanten Linienlast von 7.75 [kN/m] auf den Hauptträgern im entsprechenden Berechnungsmodell.

Sämtliche Lasten greifen am Obergurt der Längsträger an, welche auch im Zuge der Untersuchung immer die stabilitätsgefährdeten Bauteile darstellen – die Querträger sind frei von direkter Lasteinwirkung und werden nicht gesondert auf Biegedrillknicken untersucht. Zusätzlich werden aber auch andere Lastenleitungsunkte am Querschnitt des Hauptträgers (Schwerpunkt, Untergurt u.a.) untersucht.

9.3 Statisches System, Rand- und Übergangsbedingungen

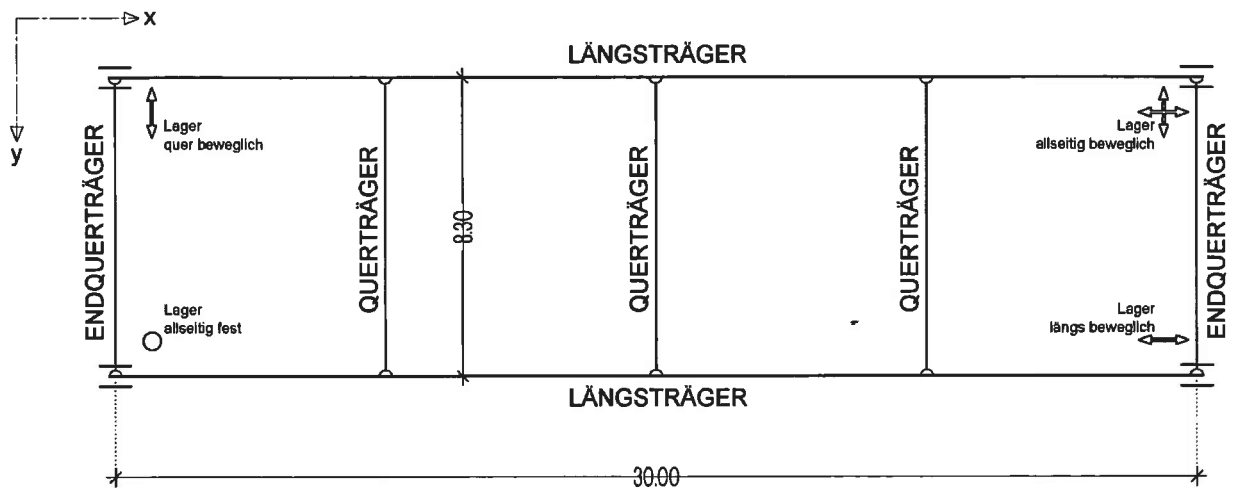


Abbildung 9.3:

Draufsicht Brückensystem mit Lagerungsschema (Maße in [m]);
exemplarisch für drei Querträger im Feld

Abbildung 9.3 zeigt das Brückensystem mit 3 Querträgern zwischen den Endquerträgern. Die steifen Endquerscheiben verhindern die Querschnittsverdrehung an den Brückenenden – die Wirkung entspricht jener eines Gabellagers, das die Verdrehung um die globale x – Achse verhindert. Gleichzeitig wird auch die Verwölbung der Hauptträger behindert.

Im statischen Modell sind die Querträger an die Längsträger mit einer räumlichen Scharniergelenk – Lagerung angeschlossen. Diese koppelt die beiden Bauteile entlang ihrer Anschlusslinie starr miteinander, einzig die Verdrehung um die vertikale z – Achse wird ermöglicht.

An diesen Anschlussstellen können somit Biegemomente von den Querträgern auf die Hauptträger übertragen werden, die Ausbildung verhindert aber die Übertragung von lokalen Bimomenten M_{ω} von den Quer- auf die Längsträger.

9.3.1 Hauptträger

9.3.1.1 Momentenverteilung

Im vorliegenden Modell werden sämtliche Lasten in Form einer konstanten Linienlast direkt in die Längsträger eingeleitet.

Gemäß Abschnitt 5.4 darf die Momentenverteilung zur Formulierung des Potentials nach Theorie I. Ordnung ermittelt werden. Damit ergibt sich für die Hauptträger unter der Belastung p_z ein Biegemomentenverlauf in Form einer durch

$$M_y(x) = \frac{p_z x}{2} (l - x) \quad (9.2)$$

beschriebenen quadratischen Parabel.

Da die Hauptträger und Querträger offene Profile sind und selbst nur geringe St. Venant'sche Torsionssteifigkeiten besitzen, kommt es durch die äußere Belastung zur Verformung und in weiterer Folge zu primären Torsionsmomenten, die von den Hauptträgern aufgenommen werden müssen. Diese werden, basierend auf den unter Abschnitt 5.4 getroffenen Vereinfachungen, nicht berücksichtigt.

Durch das Eigengewicht der Querträger resultierende Einzellasten werden „verschmiert“ zur angreifenden Gleichlast dazugerechnet und so in die Hauptträger eingeleitet.

Der Angriffspunkt der Lasteinleitung am Hauptträger wird mit den Koordinaten y_p^M und z_p^M im Hauptsystem (Bezugspunkt = Schubmittelpunkt) erfasst.

9.3.1.2 Rand- und Übergangsbedingungen

Für die Berechnung nach der Energiemethode erfolgt die Modellierung der Hauptträger als Stäbe. Sämtliche Verformungskomponenten beziehen sich auf den Schubmittelpunkt als ausgezeichneten Punkt des Querschnitts.

Für die Verschiebungen v und w sowie die Querschnittsverdrehung ϑ ergeben sich an den gabelgelagerten Trägerenden folgende

Geometrische (kinematische) Randbedingungen

Seitliche Verschiebung in y – Richtung = Null

$$v_M = 0$$

Vertikale Verschiebung in z – Richtung = Null

$$w_M = 0$$

Verdrehung um die x – Achse = Null

$$\vartheta = 0$$

An den Anschlusspunkten der Quer- an die Längsträger wird der Stab durch elastische Einzeldrehfedern der Steifigkeit C_ϑ stabilisiert. Diese Einzeldrehfedern können auch äquivalent in eine elastische Drehbettung mit der Bettungsziffer c_ϑ umgerechnet werden. Eine detaillierte Beschreibung dieser Vorgangsweise ist im Abschnitt 10 gegeben. Horizontalverbände werden durch elastische Lagerungen mit der Bettungsziffer c_y oder Einzelfedern der elastischen Steifigkeit C_y beschrieben (siehe Abschnitt 11).

9.3.1.3 Querschnittswerte Hauptträger

Materialkennwerte und Querschnittswerte der HAUPTTRÄGER	
	$E = 21\,000 \quad [\text{kN/cm}^2]$ $G = 8\,070 \quad [\text{kN/cm}^2]$ $A = 480.00 \quad [\text{cm}^2]$ $A_{yy} = 132\,500 \quad [\text{cm}^4]$ $A_{zz} = 1\,733\,300 \quad [\text{cm}^4]$ $A_{\omega\omega} = 101\,098\,900 \quad [\text{cm}^6]$ $i_p = 62.3 \quad [\text{cm}]$ $I_D = 886.4 \quad [\text{cm}^4]$ $z_S = 104.75 \quad [\text{cm}]$ $z_M = 42.57 \quad [\text{cm}]$ $r_{Mz} = -125.38 \quad [\text{cm}]$

Tabelle 9.1: Querschnitt Hauptträger, Maße in [mm]

Die Querschnittswerte werden mit dem dafür verfassten Maple – Skript (siehe Abschnitt 16.1.1 im ANHANG) ermittelt.

Alle Bauteile sind aus Stahl der Festigkeitsklasse S355 hergestellt.

Nach [11] ergeben sich mit $\gamma_{M1} = 1.1$ folgende plastische Grenzschnittgrößen für einen Hauptträger:

$N_{pl,k} = \pm 11\,500 \quad [\text{kN}]$	$N_{pl,R_d} = \pm 10\,500 \quad [\text{kN}]$
$V_{pl,y,k} = \pm 3\,400 \quad [\text{kN}]$	$V_{pl,y,R_d} = \pm 3\,100 \quad [\text{kN}]$
$V_{pl,z,k} = \pm 2\,500 \quad [\text{kN}]$	$V_{pl,z,R_d} = \pm 2\,300 \quad [\text{kN}]$
$M_{pl,y,k} = \pm 5\,500 \quad [\text{kNm}]$	$M_{pl,y,R_d} = \pm 4\,500 \quad [\text{kNm}]$
$M_{pl,z,k} = \pm 1\,300 \quad [\text{kNm}]$	$M_{pl,z,R_d} = \pm 1\,200 \quad [\text{kNm}]$

Die Gewichtskraft der Hauptträger beträgt – unter Vernachlässigung von Beulsteifen u. ä. –

$$g_k = A_{QT} \cdot \gamma = 480.00 \cdot 10^{-4} [m^2] \cdot (7\,850 [kg/m^3] \cdot 9.81 [m/s^2]) = 3.70 [kN/m].$$

Bei einer Länge von $l = 30 [m]$ ergibt sich somit eine Gesamtgewichtskraft von

$$G_k = 3.70 \cdot 30.00 = 111.00 [kN], \text{ was umgerechnet etwa } 11\,300 [kg] \text{ pro Längsträger entspricht.}$$

9.3.2 Querträger

Wie schon erwähnt, sind die Querträger im untersuchten System laut Annahme frei von äußerer, vertikaler Belastung. Ihr M_y – Verlauf zufolge äußerer Lasten ist daher stets identisch Null.

Ihre Aufgabe besteht in der Erhaltung der Querschnittsform des Brückenquerschnitts sowie in der Stabilisierung der Hauptträger. Im Zuge der Modellbildung werden sie durch elastische Drehfedern ersetzt, welche die Verdrehung der Hauptträger je nach Steifigkeit be- bzw. verhindern.

9.3.2.1 Querschnittswerte Querträger

Als Querträger werden geschweißte Profile aus Blechen der Festigkeitsklasse S355 verwendet, deren Abmessungen und Querschnittswerte in der folgenden Übersicht angeführt sind:

Materialkennwerte und Querschnittswerte der QUERTRÄGER			
	E	$= 21\,000$	$[kN/cm^2]$
	G	$= 8\,070$	$[kN/cm^2]$
	A	$= 198.16$	$[cm^2]$
	A_{yy}	$= 2\,133$	$[cm^4]$
	A_{zz}	$= 357\,800$	$[cm^4]$
	$A_{\omega\omega}$	$= 6\,858\,400$	$[cm^6]$
	i_p	$= 42.62$	$[cm]$
	I_D	$= 119.0$	$[cm^4]$
	z_S	$= 57.50$	$[cm]$
	z_M	$= 57.50$	$[cm]$
	r_{Mz}	$= 0$ (doppeltsymm.)	$[cm]$

Tabelle 9.2: Querschnitt Querträger, Maße in [mm]

Die Berechnung der plastische Grenzschnittgrößen mit dem Maple – Skript (siehe Abschnitt 16.1.1 im *ANHANG*) führt unter Beachtung von $\gamma_{M1}=1.1$ (siehe [11]) zu folgenden Werten für einen Querträger:

$$N_{pl,k} = \pm 4\,800 \text{ [kN]}$$

$$V_{pl,y,k} = \pm 900 \text{ [kN]}$$

$$V_{pl,z,k} = \pm 1\,900 \text{ [kN]}$$

$$M_{pl,y,k} = \pm 1\,800 \text{ [kNm]}$$

$$M_{pl,z,k} = \pm 90 \text{ [kNm]}$$

$$N_{pl,R_d} = \pm 4\,300 \text{ [kN]}$$

$$V_{pl,y,R_d} = \pm 800 \text{ [kN]}$$

$$V_{pl,z,R_d} = \pm 1\,700 \text{ [kN]}$$

$$M_{pl,y,R_d} = \pm 1\,600 \text{ [kNm]}$$

$$M_{pl,z,R_d} = \pm 80 \text{ [kNm]}$$

Die Gewichtskraft der Querträger beträgt

$$g_k = A_{QT} \cdot \gamma = 198.16 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]} \cdot (7\,850 \text{ [kg/m}^3\text{]} \cdot 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}) = 1.53 \text{ [kN/m]}.$$

Bei einer Länge von $l = 830 - 1.2 = 828.8 \text{ [cm]}$ ergibt sich somit eine Gesamtgewichtskraft von $G_k = 1.53 \cdot 8.288 = 12.68 \text{ [kN]}$, was umgerechnet etwa $1\,300 \text{ [kg]}$ pro Querträger entspricht.

10 EINFLUSS DER QUERTRÄGER AUF DIE IDEAL KRITISCHEN LASTEN

Die Notwendigkeit der Anordnung von Querträgern ergibt sich aus einer Vielzahl von Anforderungen an ein Brückensystem.

Eine davon ist jene, dass die Querschnittsform des Systems während der Verformung zufolge auftretender Belastungen erhalten bleiben soll.

So bilden die Querträger des Brückensystems gemeinsam mit den Hauptträgern ein Rahmensystem, das diese Anforderung erfüllt (siehe Abschnitt 5.2.4).

Außerdem stellen sie eine äußerst effiziente Methode dar, die ideal kritische Biegedrillknicklast des Systems anzuheben.

Dies geschieht in erster Linie durch die Behinderung der Verdrehung der Hauptträger, die Querträger stellen also elastische Lagerungen in Form von Drehfedern für die Hauptträger dar.

Diese Federn werden in der Formulierung des Gesamtpotentials in Gl. (5.15) mit C_{φ} erfasst.

Die folgenden beiden Abbildungen zeigen das Brückensystem mit fünf Querträgern (Abbildung 10.1) und die dazugehörige Modellbildung eines Hauptträgers als Grundlage für die Berechnung nach dem RITZ'schen Verfahren (Abbildung 10.2).

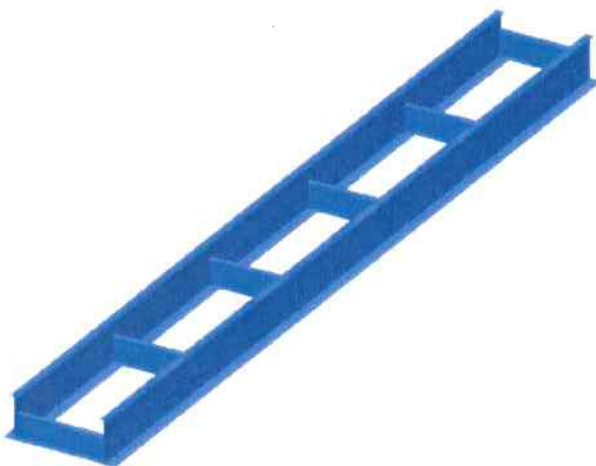


Abbildung 10.1:

Rahmensystem aus Längs- und Querträgern

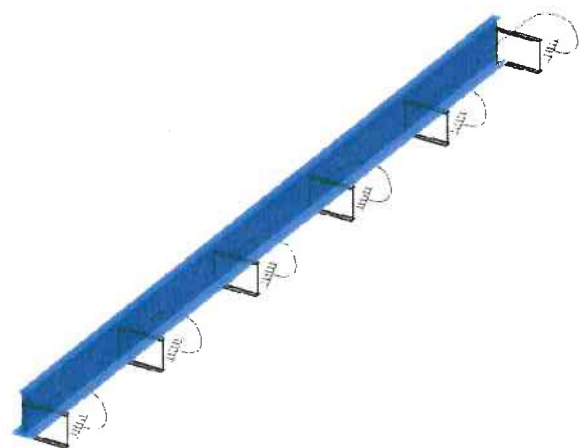


Abbildung 10.2:

Modellierung der Querträger als Einzeldrehfedern

10.1 Modellierung der Querträger als diskret angeordnete Einzeldrehfedern

Zur Berechnung der kritischen Systemlasten nach dem RITZ'schen Verfahren kommt das unter Abschnitt 16.1.2 im *ANHANG* angeführt Maple – Skript zur Verwendung. Dieses wird je nach Anzahl und Anordnung der Querträger entsprechend angepasst.

Die Anordnung der Querträger in Längsrichtung wird als äquidistant angenommen, bei einer Gesamtlänge der Hauptträger von $l = 30.00$ [m] ergeben sich also folgende Abstände der Querträger:

Anzahl der Querträger (incl. Endquerträger)	Querträgerabstand in [m]
2	30.00
3	15.00
4	10.00
5	7.50
6	6.00
7	5.00

Tabelle 10.1: Querträgerabstände in Brückenlängsrichtung

10.1.1 Eigenformen und elastische Drehfedersteifigkeiten C_y der Querträger

Da die vorhandenen Querträger nicht direkt belastet werden und ausreichend steif sind, um nicht selbst auf Biegedrillknicken zu versagen, wird nachstehendes, durch eine symmetrische Eigenform der Hauptträger erzwungenes Verformungsbild angenommen:

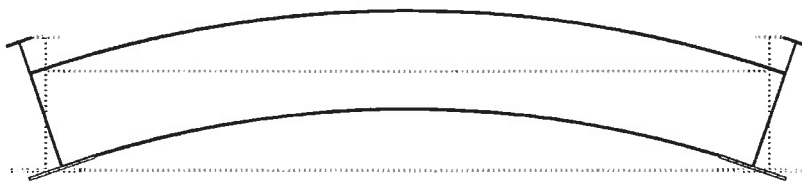


Abbildung 10.3:

Verformung der Querträger bei Erreichen der ersten symmetrischen Eigenform der Hauptträger

Für das statische System der Querträger aus Abbildung 10.3 lässt sich deren Drehfedersteifigkeit nach [4] mit den Querschnittswerten aus Tabelle 9.2 zu

$$C_y = \frac{2EA_{zz}}{l} = \frac{2 \cdot 21\,000 \cdot 357\,752}{830} = 18\,103\,113 \text{ [kNcm/rad]} \quad (10.1)$$

bestimmen.

Die Größe l in Gl. (10.1) bezeichnet mit 830 [cm] den Achsabstand der Längsträger.

Ist die Eigenform des Systems dagegen antimetrisch, lässt sich die Drehfedersteifigkeit der Querträger zu

$$C_{\vartheta} = \frac{6EA_{zz}}{l} = \frac{6 \cdot 21\,000 \cdot 357\,752}{830} = 54\,309\,340 \text{ [kNcm/rad]} \quad (10.2)$$

ermitteln.

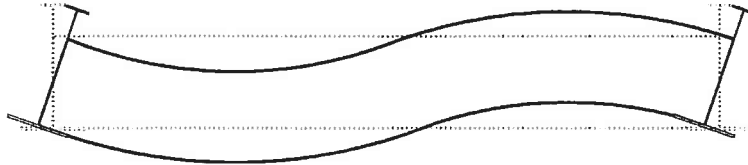


Abbildung 10.4:

Verformung der Querträger
zufolge antimetrischer Eigenform
der Hauptträger

Im Zuge der Stabilitätsberechnungen mittels FEM – Software ist es möglich, die qualitativen Eigenformen des Systems zu ermitteln – eine Aussage über Absolutwerte der Verformungen aber ist nicht möglich. Die Eigenformen zu den zugehörigen Eigenwerten der kritischen Lasten lassen sich ja bekanntlich nur inklusive eines unbekanntem Multiplikators bestimmen. Für die graphische Wiedergabe der Eigenformen bedient man sich der Normierung – die betragsmäßig größte Auslenkung bei indifferenten Gleichgewicht wird auf einen gewünschten Faktor (meist „1“) normiert und alle anderen Werte relativ dazu angegeben.

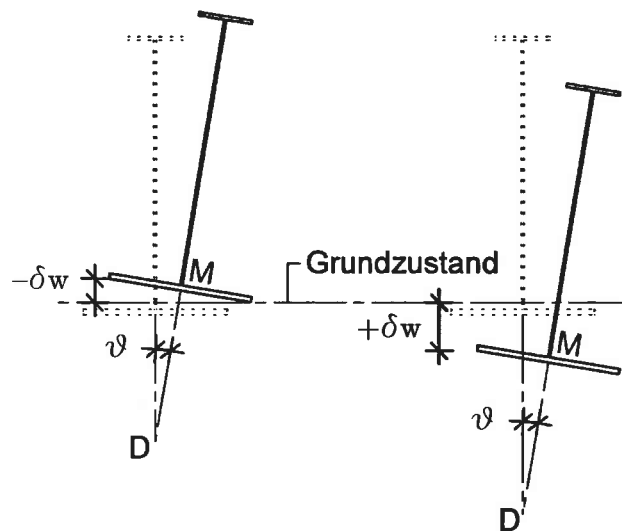


Abbildung 10.5: Mögliche Eigenform der Hauptträger

Wie die obige Darstellung zeigt, ist es durchaus möglich, dass die Eigenform des Brückensystems für den Nachbarzustand („ δ “ – Bezeichnung) des einen Hauptträgers eine Verschiebung in positiver z – Richtung ergibt (Verschiebung „ $+\delta w$ “), wogegen sich der andere Hauptträger in negativer z – Richtung (Verschiebung um „ $-\delta w$ “) verschiebt.

Auf den ersten Blick mag dies verwirrend erscheinen, verformt sich der Träger ja entgegen seiner Belastungsrichtung. Dass es sich dabei dennoch um ein Stabilitätsproblem handeln kann, illustriert [1] durch das folgende, einfache Beispiel:

Der zentrisch gedrückte Stab

Ersetzt man den Stab mit der zentrischen Druckkraft 2P laut nachstehender Abbildung durch das statisch äquivalente System auf der rechten Seite, so ergibt sich auch hier für den Nachbarzustand des Systems eine Bewegung *entgegen* der Belastungsrichtung (Verschiebung um „-Δx“).

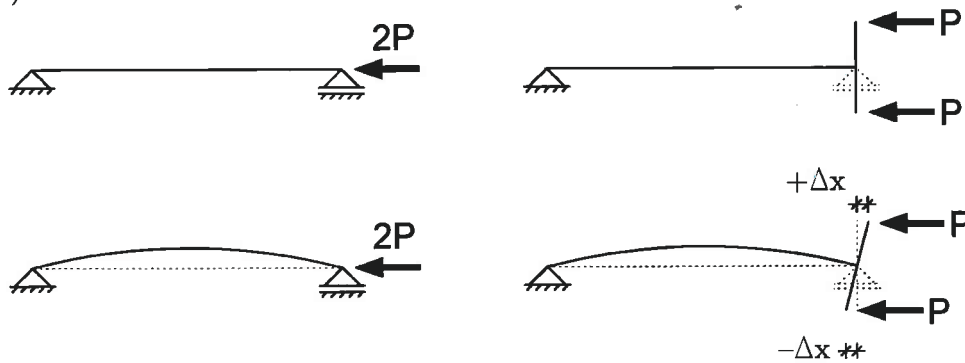


Abbildung 10.6: Knickstäbe mit zugehörigen Eigenformen

Der Beweis, dass sich die Eigenform gemäß Abbildung 10.5 im Zuge eines Stabilitätsproblems einstellen kann, ist ebenfalls leicht mit Hilfe des folgenden Stabilitätskriteriums zu erbringen:

Das Kriterium von Klöppel – Lie

Dieses Kriterium geht vom Vorliegen eines Stabilitätsproblems aus, sobald die Bedingung

$$\delta\Pi = \int_0^l (M \delta M) dx = 0 \tag{10.3}$$

erfüllt ist. Laut [5] kennzeichnet die Variable „M“ in Gl. (10.3) den Momentenverlauf zufolge äußerer Belastung und „δM“ jenen zufolge der niedrigsten Eigenform des Systems.

	linker Hauptträger	rechter Hauptträger
„M“ – Verlauf		
„δM“ – Verlauf		

Tabelle 10.2: Zum Kriterium von Klöppel – Lie

Die Bedingung in Gl. (10.3) ist für die Momentverläufe des linken Hauptträgers gemäß Tabelle 10.2 offensichtlich erfüllt. Der Integrand ($M\delta M$) wird nämlich als Produkt einer symmetrischen und einer antimetrischen Funktion zu Null.

Damit ist auch auf diesem Weg bewiesen, dass es sich im Falle einer Verschiebung entgegen der Lastrichtung ebenso um ein Stabilitätsproblem handeln kann.

10.1.2 Modellbildung und Berechnung für das RITZ'sche Verfahren

Das Funktional $\frac{1}{2}\delta^2\Pi$ des Systems mit Querträgern lautet somit

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left[EA_{yy} v_M'^2 + EA_{zz} w_M'^2 + EA_{\omega\omega} \vartheta'^2 + GI_D \vartheta'^2 + M_y (2v_M'' \vartheta + r_{M_z} \vartheta'^2) \right] dx + \sum_k (C_{\vartheta,k} \vartheta_k^2) - \int_{x=0}^l p_z \left(w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \vartheta^2 \right) dx \tag{10.4}$$

Im Term $\sum_k (C_{\vartheta,k} \vartheta_k^2)$ wird die Wirkung der Querträger in der Potentialformulierung erfasst.

Für die Ansatzfunktion zur Beschreibung der Verformungskomponente in y – Richtung (Verschiebung v) und die Ansätze für die Verdrehung ϑ werden jeweils fünfgliedrige trigonometrische Ansätze der Form

$$v(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + A_4 \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + A_5 \sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) = \sum_{i=1}^5 A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \tag{10.5}$$

$$\vartheta(x) = B_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + B_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + B_4 \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + B_5 \sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) = \sum_{i=1}^5 B_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$

gewählt.

Durch die Überlagerung dieser fünf ein- bis fünfhalbwelligen Verschiebungsansätze

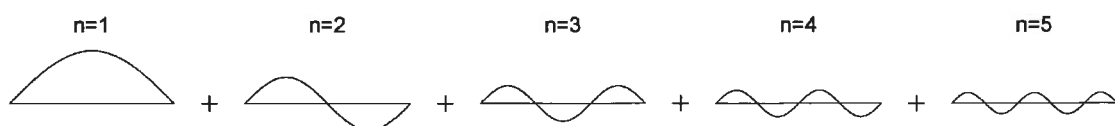


Abbildung 10.7: Sinushalbwellen erster bis fünfter Ordnung

ist es möglich, eine Verformung des Hauptträgers zu beschreiben, dessen Eigenform beliebige Anteile aus jeder einzelnen dieser fünf Welligkeiten enthalten kann.

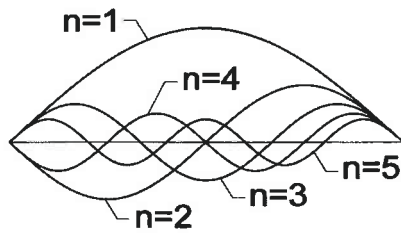


Abbildung 10.8:

Überlagerung der Sinushalbwellen

Als Ansatzfunktion für die Durchbiegung $w(x)$ in z - Richtung genügt hingegen eine einwellige Sinushalbwellen der Form

$$w(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (10.6)$$

Mit den jeweils fünfgliedrigen Ansatzfunktionen für v und ϑ sowie der eingliedrigen Ansatzfunktion für die Durchbiegung ergibt sich nun nach Durchführung der Forderungen für indifferentes Gleichgewicht am Ersatzpotential Π^*

$$\text{grad}\left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi^*\right) = 0 \quad (10.7)$$

ein Gleichungssystem zur Bestimmung der elf Unbekannten A_1 bis A_5 , B_1 bis B_5 und C_1 . Aus dessen (11x11) - Koeffizientenmatrix wird über die Bedingung „Determinante = 0“ die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte gewonnen.

Diese Berechnung ist hier aus Platzgründen nicht ausführlich angeschrieben, in der folgenden Tabelle jedoch sind die Ergebnisse der Berechnungen für die kleinsten positiven Eigenwerte zusammengestellt:

10.1.3 Variation der Querträgeranzahl – Ergebnisse der Berechnung nach der FE – Methode

Die Berechnung mit dem eingegebenen Schalenmodell nach der FE – Methode ergibt folgende Ergebnisse:

Anzahl der Querträger	BERECHNUNG NACH FEM		
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	Laststeigerungsfaktor [-]
2	4,8	541	1,0
3	13,7	1.543	3,1
4	26,7	2.999	6,0
5	43,4	4.883	9,8
6	62,9	7.071	14,2
7	78,7	8.850	17,8

Tabelle 10.3: Ideal kritische Lasten in Abhängigkeit von der Querträgeranzahl nach FEM

Die dazugehörigen Eigenformen sind in Tabelle 10.5 auf der nächsten Seite dargestellt.

10.1.4 Variation der Querträgeranzahl – Ergebnisse der Berechnung nach RITZ

Die Berechnung nach dem RITZ'schen Verfahren liefert folgende Ergebnisse:

Anzahl der Querträger	BERECHNUNG NACH RITZ			
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	Laststeigerungsfaktor [-]	Abweichung zum Ergebnis nach FEM [%]
2	4,4	498	1,0	-7,9
3	12,9	1.453	2,9	-5,9
4	25,2	2.839	5,7	-5,3
5	42,0	4.726	9,5	-3,2
6	63,4	7.133	14,3	+0,9
7	89,5	10.068	20,2	+13,8

Tabelle 10.4: Ideal kritische Lasten in Abhängigkeit von der Querträgeranzahl nach RITZ

10.1.5 Graphische Darstellung der ersten Eigenform der verschiedenen Brückensysteme

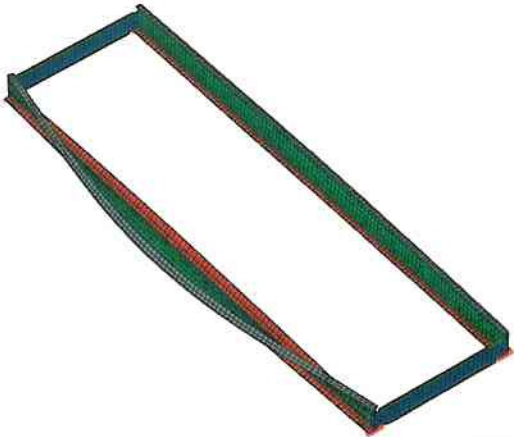
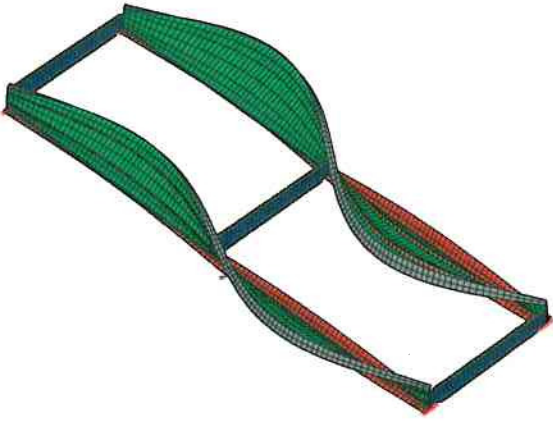

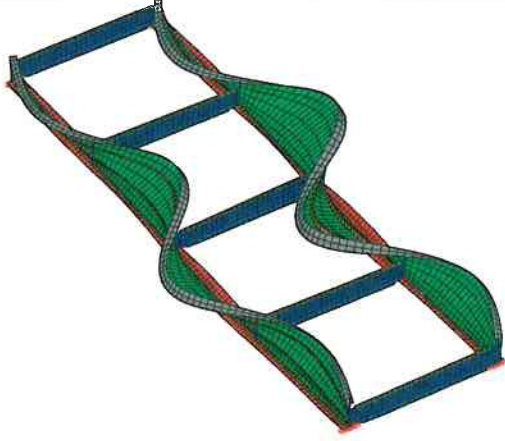
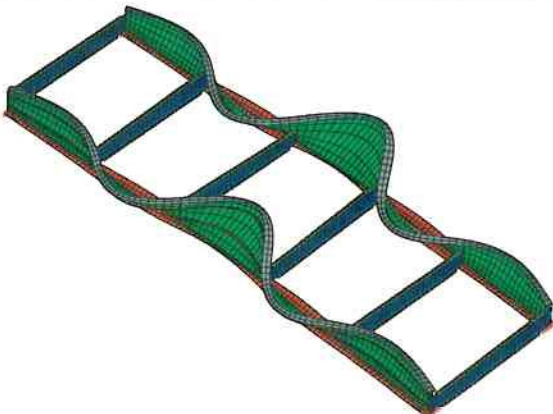
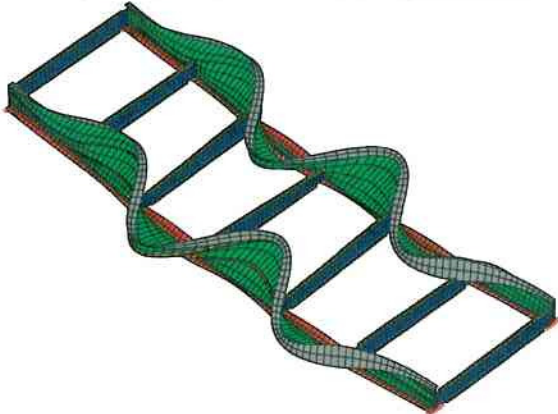
	
Brückensystem mit zwei Querträgern	Brückensystem mit drei Querträgern
	
Brückensystem mit vier Querträgern	Brückensystem mit fünf Querträgern
	
Brückensystem mit sechs Querträgern	Brückensystem mit sieben Querträgern

Tabelle 10.5: Erste Eigenform der Brückensysteme mit zwei bis sieben Querträgern
(programminterne Farbgebung je nach Blechstärken)

10.1.6 Diskussion der Ergebnisse

Die nachstehende Abbildung 10.9 gibt die ideal kritischen Biegedrillknicklast in Abhängigkeit verschiedener Anzahlen von angeordneten Querträgern wieder (ohne Einfluss des Eigengewichtes der Struktur).

Wie erwartet kann die ideal kritische Last, unter welcher das System auf Kippen versagt, durch die Anordnung von Querträgern effizient gesteigert werden.

Sehr zufrieden stellend ist auch die Tatsache, dass für das Brückensystem mit bis zu sechs Querträgern die nach dem RITZ'schen Verfahren ermittelten Ergebnisse und die Ergebnisse aus der FE – Berechnung gute Übereinstimmungen zeigen.

Ihre Abweichungen voneinander liegen durchwegs im unteren einstelligen Prozentbereich.

Zusätzlich zu den kritischen Biegedrillknicklasten ist in Abbildung 10.9 auch noch jener Wert der Gleichlast $p_{z,yield}$ angeführt, unter dessen Belastung die erste Faser des Hauptträgers ins Fließen gerät (entspricht der elastischen Grenzlast des Systems).

Er errechnet sich zu

$$f_{y,d} = \frac{M_y}{W_{y,el,min}} = \frac{q_y l^2}{8} \rightarrow q_y = W_{y,el,min} \cdot f_{y,d} \cdot \frac{8}{l^2} = \frac{1\,733\,301}{104,75} \cdot \frac{35,5}{1,1} \cdot \frac{8}{3\,000^2} = 47,47 \text{ [kN/m]}. \quad (10.8)$$

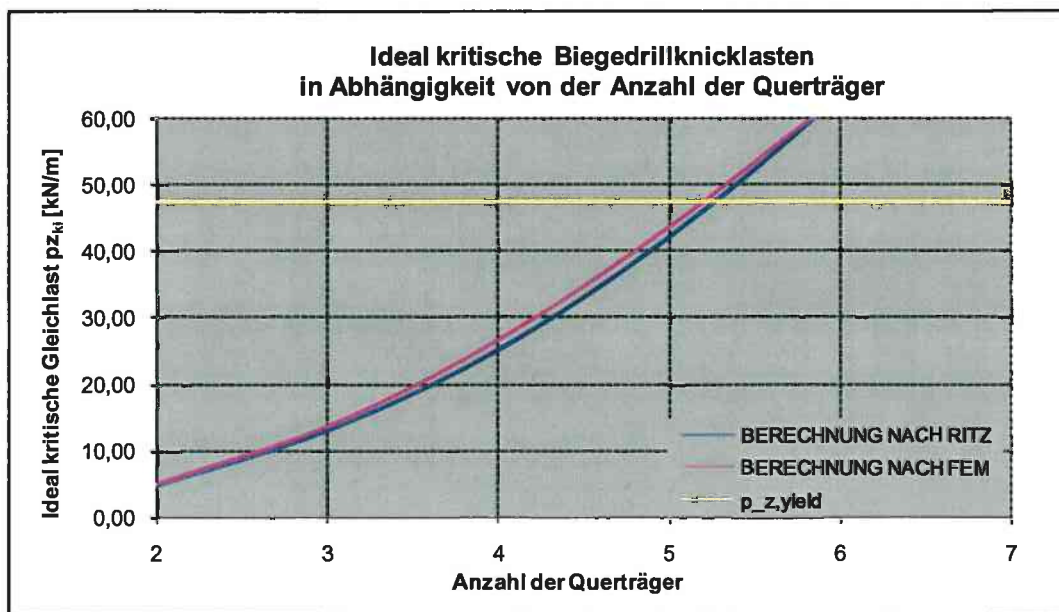


Abbildung 10.9: Ideal kritische Biegedrillknicklasten ja nach Anzahl der Querträger

Die Ergebnisse in Abbildung 10.9 entsprechen auch einer durchaus gängigen Erfahrung im Brückenbau, bei Einfeld – Systemen kleiner bis mittlerer Stützweiten Querträger etwa in den Drittel- bis Viertelpunkten der Hauptträger anzuordnen.

10.2 Modellierung der Querträger als kontinuierliche Drehbettung

Um die Berechnung nach dem RITZ'schen Verfahren weiter zu vereinfachen, liegt die Überlegung nahe, die diskret angeordneten Drehfedern in den Anschlusspunkten der Querträger durch eine äquivalente Drehbettung zu ersetzen.

Die elastische Drehfedersteifigkeit c_g dieser Bettung errechnet sich zu

$$c_g = \frac{n \cdot C_g}{L}. \quad (10.9)$$

C_g Drehfedersteifigkeit eines Querträgers [Nm/rad]

n Anzahl der angeordneten Querträger

L Länge eines Hauptträgers [m]

Die Einheit der *Drehbettungsziffer* c_g wird in [Nm/radm] angegeben.

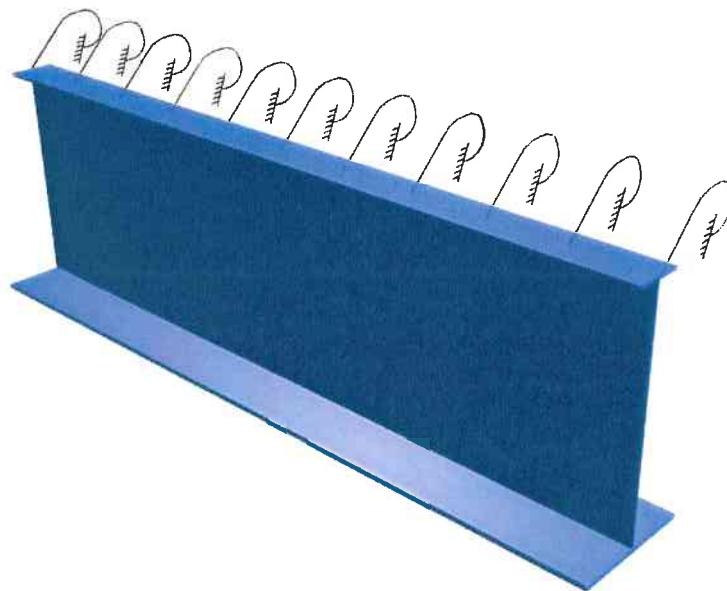


Abbildung 10.10: Kontinuierliche Drehbettung

Diese Modellierung erfolgte sowohl in der Berechnung nach dem RITZ'schen Verfahren, als auch im FEM – Modell.

Für die Ansatzfunktionen der zwei Verformungskomponenten v und w wurden jeweils wieder fünfgliedrige Ansätze gewählt.

$$\begin{aligned} v(x) &= A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + A_4 \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + A_5 \sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) = \sum_{i=1}^5 A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \\ \vartheta(x) &= B_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + B_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + B_4 \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + B_5 \sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) = \sum_{i=1}^5 B_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \end{aligned} \quad (10.10)$$

Die Durchbiegung wird wieder durch eine eingliedrige Ansatzfunktion der Form

$$w(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (10.11)$$

angenähert.

Das Funktional $\frac{1}{2}\delta^2\Pi$ des Systems mit der kontinuierlichen Drehbettung lautet nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left[EA_{yy} v_M'^2 + EA_{zz} w_M'^2 + EA_{\omega\omega} \vartheta'^2 + GI_D \vartheta'^2 + M_y (2v_M' \vartheta + r_{M_z} \vartheta'^2) \right] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x=0}^l (c_g \vartheta^2) dx - \int_{x=0}^l p_z \left(w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \vartheta^2 \right) dx \end{aligned} \quad (10.12)$$

mit dem neuen Term $\int_{x=0}^l (c_g \vartheta^2) dx$, der anstelle des Ausdrucks $\sum_k (C_{g,k} \vartheta_k^2)$ in Gl. (10.4) tritt und die Wirkung der Querträger erfasst.

10.2.1 Ergebnisse der Berechnung für die Systeme mit vier und fünf Querträgern

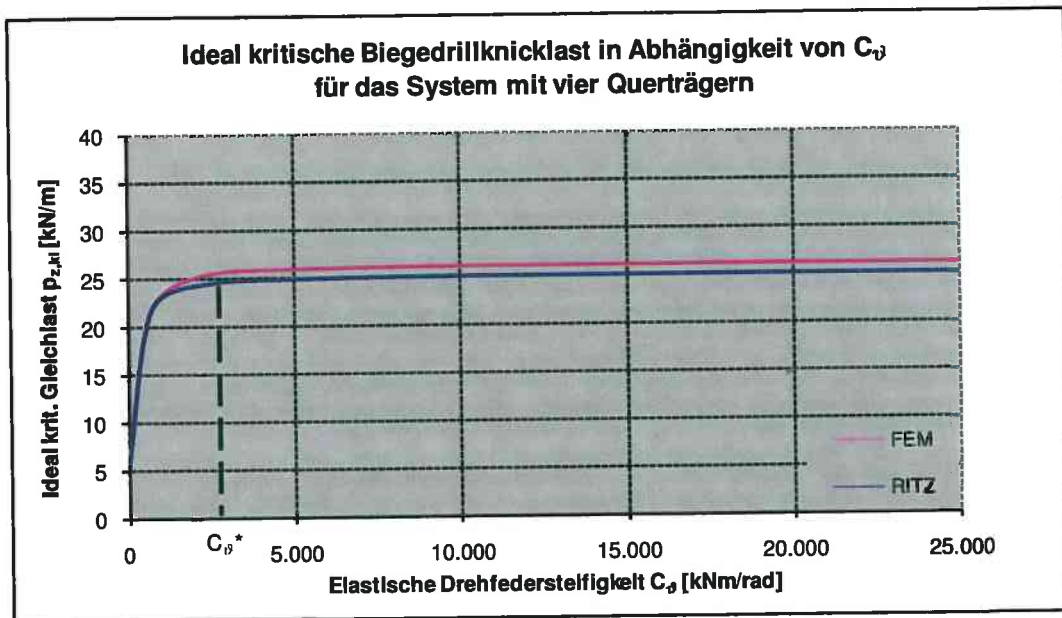


Abbildung 10.11: Ideal kritische Biegedrillknicklasten bei vier Querträgern

Die Ergebnisse der Berechnung mit einer kontinuierlichen drehelastischen Bettung beinhalten mehrere äußerst interessante Erkenntnisse.

Es ist klar zu erkennen, dass sich die ideal kritische Last bereits bei Überschreiten bereits relativ kleiner Drehfedersteifigkeiten nicht mehr erhöhen lässt.

Im Bereich unterhalb dieses Wertes, der in Folge als *Mindestdrehfedersteifigkeit* C_ϕ^* bezeichnet wird, besteht ein annähernd nichtlinearer Zusammenhang zwischen der ideal kritischen Last des Systems und der Drehfedersteifigkeit der Querträger.

Ab einer gewissen Steifigkeit stabilisiert die Drehfeder das System in weiterer Folge wie eine *ideelle Gabellagerung*, es erhöht sich also bei gleich bleibendem Wert der kritischen Last $p_{z,ki}$ nur mehr die Welligkeit der Eigenform zufolge Biegedrillknickens.

Dies geschieht beim System mit vier Querträgern bereits bei einer Drehfedersteifigkeit der Querträger von $C_{\vartheta}^* = 3\,000$ [kNm/rad] (siehe Abbildung 10.11).

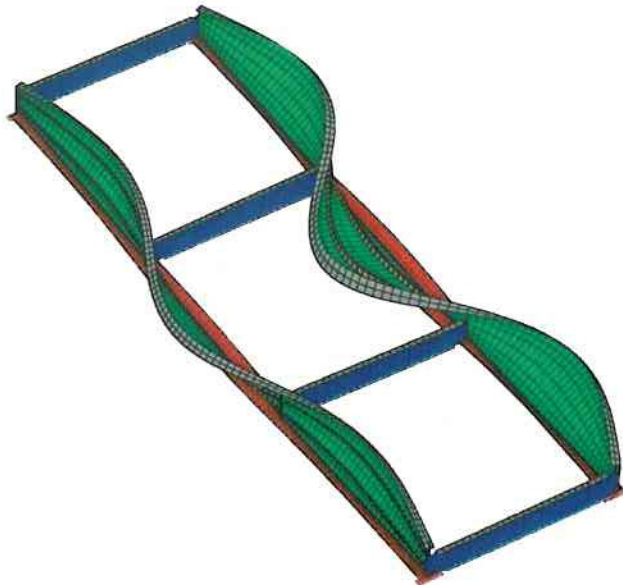


Abbildung 10.12:

Erste Eigenform des Systems mit vier Querträgern
(programminterne Farbgebung je nach Blechstärken)

In weiterer Folge wird die erste Eigenform des System also nicht mehr Anteile aller fünf Glieder der Ansatzfunktionen über die Trägerlänge aufweisen sondern fast ausschließlich Anteile ,zufolge dreiwelligem Biegedrillknicken. Dabei markieren die ideellen Gabellager (steife Drehfedern) die Nulldurchgänge der Sinushalbwellen exakt in den Anschlussstellen der beiden Querträger. Zum Vergleich beträgt die vorhandene Drehfedersteifigkeit der Querträger (für die antimetrische erste Eigenform) im untersuchten System $C_{\vartheta} = 543\,093$ [kNm/rad], also mehr als das 180fache dieses Wertes für C_{ϑ}^* .

Entscheidend in all diesen Betrachtungen ist die Relation der Steifigkeiten der Haupt- zu den Querträgern.

Dieser Vergleich unterstreicht abermals die effiziente Steigerung der ideal kritischen Biegedrillknicklasten durch die Anordnung von drehelastischen Lagerungen in Form von Querträgern, auch wenn diese im vorliegenden Fall offensichtlich recht großzügig dimensioniert sind. Diese müssten also – nur für das Stabilitätsproblem Biegedrillknicken betrachtet – nicht so steif dimensioniert sein.

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die ermittelten Eigenformen der Hauptträger für Drehfedersteifigkeiten der Querträger unter und über dieser Mindestdrehfedersteifigkeit C_{φ}^* .

In Abbildung 10.13 liegt C_{φ} mit einem Wert von 100 [kNm/rad] weit unter C_{φ}^* . Abbildung 10.14 dagegen zeigt die erste Eigenform des Systems für die tatsächlich vorliegenden Steifigkeitsverhältnisse der Querträger, die mit 543 093 [kNm/rad] weit über dem Wert für C_{φ}^* liegen. Diese Eigenform entspricht jener mit einer *ideellen Gabellagerung* durch die Querträger in den Drittelpunkten der Längsträger.

Unterschiedliche Farben in den beiden folgenden Abbildungen kennzeichnen unterschiedliche Querschnitte im FEM – Modell.

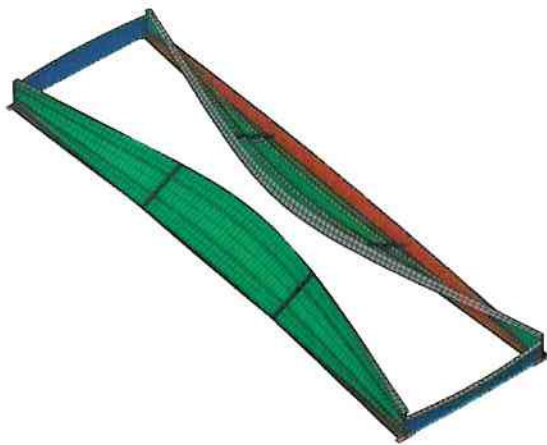


Abbildung 10.13:

Eigenform für $C_{\varphi}=100$ [kNm/rad]



Abbildung 10.14:

Eigenform für $C_{\varphi}=543\,093$ [kNm/rad]

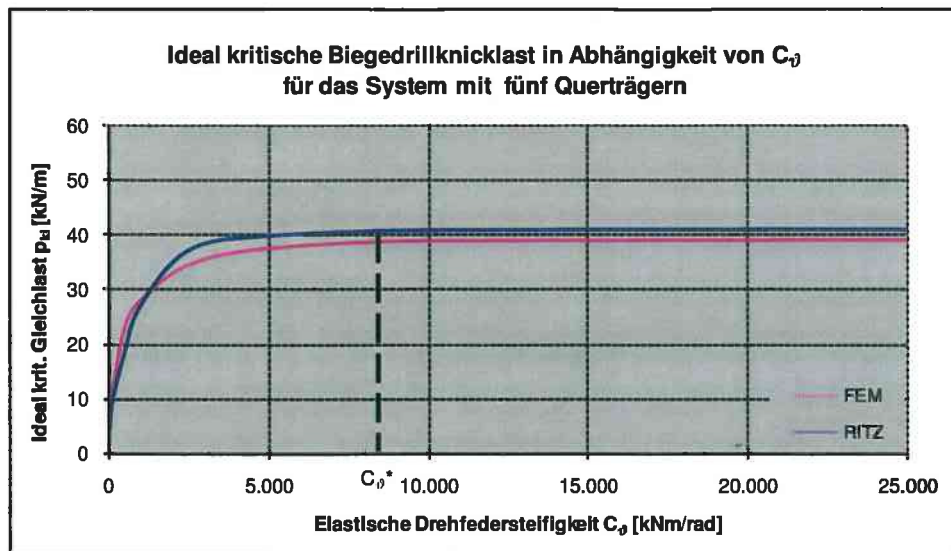


Abbildung 10.15: Ideal kritische Biegedrillknicklasten bei fünf Querträgern

Beim System mit fünf Querträgern, das bei niedrigen Drehfedersteifigkeiten C_ϕ ebenfalls Anteile aller fünf Glieder der Ansatzfunktionen in seiner Eigenform aufweist, tritt der Übergang der Drehfeder in ein äquivalentes Gabellager bei einer Drehfedersteifigkeit der Einzelfedern von $C_\phi^* = 8\,000$ [kNm/rad] auf. Bei höheren Werten wird das System also bei gleich bleibender Laststufe vorwiegend vierwellig versagen.

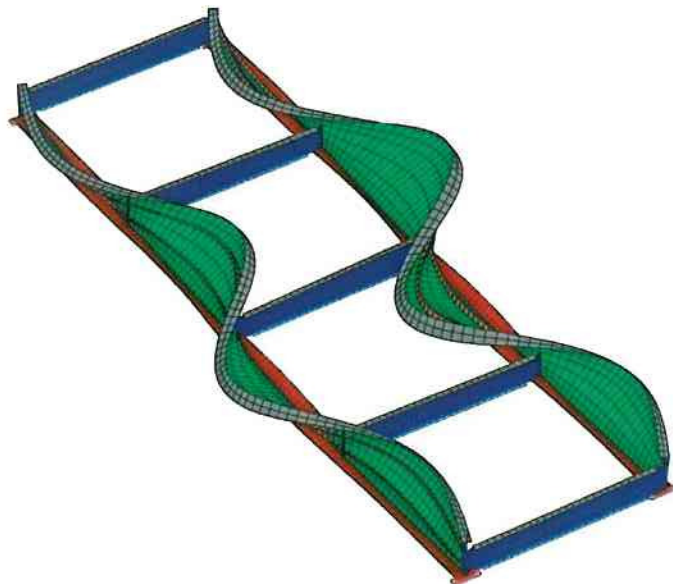


Abbildung 10.16:

Erste Eigenform des Systems mit fünf Querträgern

Gut sichtbar ist in Abbildung 10.16, dass der gedrückte Obergurt in Bereichen größerer Momente (gemäß der angenommenen Momentenverteilung einer quadratischen Parabel) größere seitliche Verschiebungen aufweist als in Bereichen mit kleineren Momenten.

Abbildung 10.17 rechtfertigt das „Versmieren“ der Einzeldrehfedern zu einer kontinuierlichen Bettung, allerdings mit einer wesentlichen Einschränkung. Wie deutlich zu sehen ist, unterschätzt man bei der Berechnung mittels kontinuierlicher Drehbettung die ideal kritischen Lasten des Systems im Bereich niedriger Drehfedersteifigkeiten nur wenig.

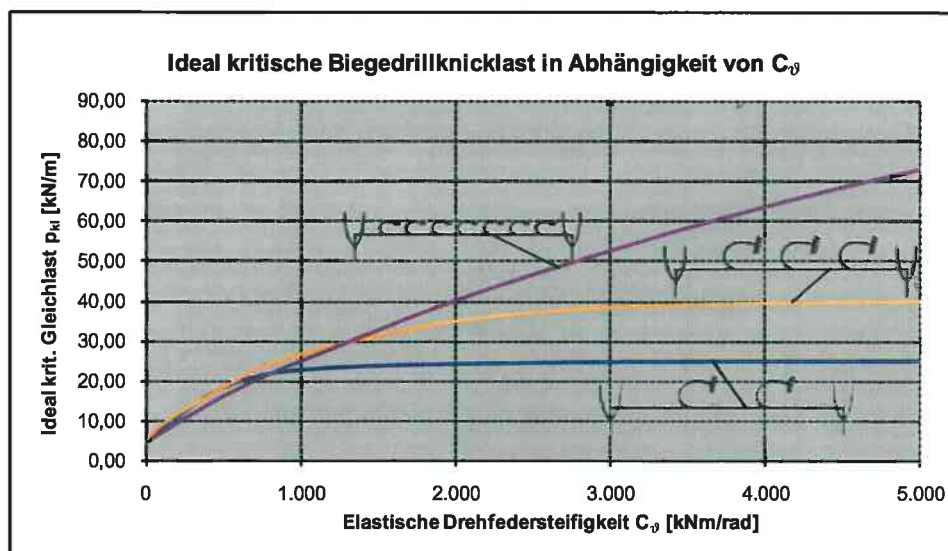


Abbildung 10.17: Ideal kritische Biegedrillknicklasten in Abhängigkeit von C_D

In diesem Bereich liegt man mit der Idealisierung der Einzeldrehfedern zu einer drehelastischen Bettung sogar auf der sicheren Seite, während man bei höheren Steifigkeiten recht schnell zu absolut unbrauchbaren Ergebnissen kommt, die *weit* auf der unsicheren Seite liegen. Dies liegt auch daran, dass die Linie für die kontinuierliche Drehbettung in Abbildung 10.17 keine Konvergenz zeigt.

Für die Berechnung des untersuchten Systems mit der Einzeldrehfedersteifigkeit eines Querträgers von $C_D = 543\,093$ [kNm/rad] ist die Umrechnung auf eine Streckendrehfeder sicher nicht zulässig, um nicht zu sagen, sie wäre gänzlich falsch.

Die auftretenden Abweichungen werden umso größer, je kleiner die Anzahl der Einzeldrehfedern ist, was auch plausibel erscheint, denn eine kontinuierliche Bettung bedeutet ja im weitesten Sinne nichts anderes als unendliche viele hintereinander angeordnete Einzeldrehfedern entlang der Trägerlängsachse.

Interessant wäre in diesem Zusammenhang auch, einen „Mindestfederabstand“ für die Anwendbarkeit der Berechnung mittels einer elastischen Drehbettung zu bestimmen, was im Zuge dieser Arbeit jedoch nicht weiter verfolgt wird.

10.3 Mindestdrehfedersteifigkeit C_{ϑ}^* für das Vorliegen einer ideellen Gabellagerung

Es drängt sich nun also förmlich die Frage nach der Bestimmung dieser Mindeststeifigkeit C_{ϑ}^* auf, ab welcher die Querträger auf die Verdrehung der Hauptträger wie Gabellager wirken, es also bei gleich bleibender Laststufe zu einem Übergang auf eine höherwellige Eigenform kommt.

Wüsste man bereits im Vorhinein, dass die vorhandenen Querträger diese Mindeststeifigkeit C_{ϑ}^* besitzen, könnte man in den Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten v , w und ϑ gleich die passende Welligkeit in nur einem Glied formulieren und damit genau dieselben Ergebnisse wie bei Verwendung mehrgliedriger Ansatzfunktionen erhalten.

Die Ansatzfunktion für die Verdrehung ϑ beispielsweise würde dann die einfache Funktion

$$\vartheta(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (10.13)$$

darstellen, wobei $(n+1)$ der Anzahl der vorhandenen Querabstützungen incl. Endquerträger entspräche. Natürlich nur unter der Voraussetzung, dass diese Querabstützungen auch eine Biegesteifigkeit EA_{zz} besitzen, welche ja die Verdrehungsbehinderung der Hauptträger erst ermöglicht.

Da sich der Verlauf der ideal kritischen Last mit mehrgliedrigen Ansatzfunktionen jenem mit einem einzigen Glied in den jeweiligen Ansatzfunktionen (Gabellagerung) asymptotisch nähert, wird zur Bestimmung der Mindestdrehfedersteifigkeit C_{ϑ}^* jener Wert ermittelt, bei dem die Werte auf 95 % miteinander übereinstimmen.

Im Sinne einer praktischen Anwendung ist dieser Wert sicherlich annehmbar.

Im Folgenden ist die Durchführung dieser Berechnung für den Fall mit Querträgern in den Viertelpunkten des Längsträgers (fünf Querträger insgesamt) angeführt.

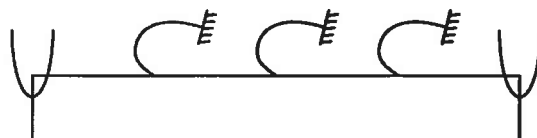


Abbildung 10.18:

Modellbildung für das System
mit fünf Querträgern

Das Funktional $\frac{1}{2}\delta^2\Pi$ des vorliegenden Systems lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left(EA_{yy} v_M'^2 + EA_{zz} w_M'^2 + EA_{\omega\omega} \vartheta'^2 + GI_D \vartheta'^2 + M_y (2v_M' \vartheta + r_{M_z} \vartheta'^2) \right) dx + \\ & \sum_k [C_{\vartheta,k} \vartheta_k^2] - \int_{x=0}^l p_z \left(w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \vartheta^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Mit den Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten

$$v(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad w(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad \text{und} \quad \vartheta(x) = C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (10.15)$$

sowie der Momentenverteilung für den Hauptträger nach Theorie I. Ordnung in Form einer quadratischen Parabel, die durch die Funktion

$$M_y(x) = \frac{p_z x}{2} (l - x) \quad (10.16)$$

beschrieben werden kann, ergibt sich für das Ersatzpotential $\frac{1}{2}\delta^2\Pi^*$ nach Integration zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi^* = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{EA_{yy}\pi^2}{2l^3} \right) A^2 + \left(\frac{EA_{zz}\pi^2}{2l^3} \right) B^2 - \left(\frac{4p_z l}{\pi} \right) B \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{EA_{\omega\omega}\pi^2}{2l^3} + \frac{GI_D}{2l} + p_z \left(\frac{lz_p^M}{2} + \frac{lr_{M_z}\pi^2}{24} - \frac{lr_{M_z}}{8} \right) + C_{\vartheta} \right) C^2 - \left(\frac{p_z l}{4} + \frac{p_z l \pi^2}{12} \right) AC \right] \end{aligned} \quad (10.17)$$

Mit den Stabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi^* = 0 \right), \quad \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi^* = 0 \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi^* = 0 \right) \quad (10.18)$$

lassen sich nun drei Gleichungen für A, B und C gewinnen, deren (symmetrische) Koeffizientenmatrix gebildet wird.

$$\mathbf{M}^g = \begin{pmatrix} \frac{EA_{yy}\pi^4}{2l^3} & 0 & \frac{p_z l}{8} \left(-\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \\ 0 & \frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3} & 0 \\ \frac{p_z l}{8} \left(-\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) & 0 & \frac{EA_{\omega\omega}\pi^4 + GI_D l^2 \pi^2}{2l^3} + \frac{p_z l}{2} \left(z_p^M + \frac{r_{M_z} \pi^2}{12} - \frac{r_{M_z}}{4} \right) + 2 \cdot C_g \end{pmatrix} \quad (10.19)$$

In (10.19) ist die Koppelung der Verschiebung v mit der Verdrehung ϑ durch die Belegung der Matrixglieder gut sichtbar. Die Nulleinträge in der zweiten Zeile und Spalte zeigen, dass die Durchbiegung w nicht mit v und ϑ gekoppelt ist.

Diese zweite Zeile des Gleichungssystems gehört zur Beschreibung der einachsigen Biegung um die y – Achse (siehe auch Abschnitt 6.2).

Außerdem ist am Eintrag der dritten Spalte in der dritten Zeile zu sehen, welchen Beitrag die Drehfedersteifigkeit C_g zur Drillsteifigkeit des Systems leistet ($\dots + 2C_g$).

Über die Bedingung $\det|\mathbf{M}^g| = 0$ erhält man die charakteristische Bestimmungsgleichung für die ideal kritische Last $p_{z,ki}^g$. Sie lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} & \left(\frac{EA_{yy}\pi^4}{2l^3} \right) \cdot \left(\frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3} \right) \cdot \left[\frac{EA_{\omega\omega}\pi^4 + GI_D l^2 \pi^2}{2l^3} + \frac{p_z l}{2} \left(z_p^M + \frac{r_{M_z} \pi^2}{12} - \frac{r_{M_z}}{4} \right) + 2 \cdot C_g \right] - \\ & - \left[\frac{p_z l}{8} \left(-\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \right]^2 \cdot \left(\frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Analog dazu werden nun für das System *ohne* Einzeldrehfedern, dessen Funktional nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left(EA_{yy} v_M'^2 + EA_{zz} w_M'^2 + EA_{\omega\omega} \vartheta'^2 + GI_D \vartheta'^2 + M_y \left(2v_M' \vartheta + r_{M_z} \vartheta'^2 \right) \right) dx - \\ & - \int_{x=0}^l p_z \left(w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \vartheta^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (10.21)$$

lautet, die Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten in v , w und ϑ gewählt.

Für den Hauptträger, dessen Einzeldrehfedern die Mindestdrehfedersteifigkeit C_ϑ^* aufweisen, werden diese analog zum System mit drei Gabellagerungen in den Viertelpunkten zu

$$v(x) = A \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right), \quad w(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad \text{und} \quad \vartheta(x) = C \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \quad (10.22)$$

gewählt.

Die Wahl der Ansatzfunktionen in dieser Form ist nun der entscheidende Punkt bei dieser Vorgangsweise.

So wird schließlich vom System bereits a priori angenommen, dass die Verformungskomponenten v und ϑ der Eigenform die Form einer vierwelligen Sinusfunktion besitzen.

Die Durchbiegung wird wie immer durch eine einzige Sinushalbwellen angenähert.

Dadurch kann jetzt auch der Term zur Berücksichtigung der Drehfedersteifigkeit C_ϑ in Gl. (10.21) entfallen.

Die Querschnittsdrehung ϑ ist ja in den Viertelpunkten des Hauptträgers durch die Gabellagerung zu Null vorgegeben und leistet daher keinen energetischen Beitrag in den Potentialformulierungen.

In Anlehnung an die vorher ausführlich beschriebene Vorgangsweise wird wieder in das Funktional eingesetzt und man erhält nach Ausführung der Integration und Bildung der partiellen Ableitungen nach A , B und C (was der Forderung nach indifferentem Gleichgewicht entspricht) wieder ein Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix nun

$$\mathbf{M}^{Gabel} = \begin{pmatrix} \frac{128EA_{yy}\pi^4}{l^3} & 0 & \frac{p_z l}{24}(-16\pi^2 - 3) \\ 0 & \frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3} & 0 \\ \frac{p_z l}{24}(-16\pi^2 - 3) & 0 & \frac{128EA_{\omega\omega}\pi^4 + 8GI_D l^2 \pi^2}{l^3} + \frac{p_z l}{24}(12z_p^M + 16r_{M_z} \pi^2 - 3r_{M_z}) \end{pmatrix} \quad (10.23)$$

lautet. Wie in \mathbf{M}^ϑ sind auch hier in \mathbf{M}^{Gabel} die Koppelungen der Verformungskomponenten v und ϑ miteinander durch die entsprechenden Matrixbelegungen deutlich zu sehen.

Mit der charakteristischen Gleichung $\det|\mathbf{M}^{Gabel}| = 0$, die sich zu

$$\left(\frac{128EA_{yy}\pi^4}{l^3}\right) \cdot \left(\frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3}\right) \cdot \left[\frac{128EA_{\omega\omega}\pi^4 + 8GI_D l^2 \pi^2}{l^3} + \frac{p_z l}{24} (12z_p^M + 16r_{M_z} \pi^2 - 3r_{M_z})\right] - \left[\frac{p_z l}{24} (-16\pi^2 - 3)\right]^2 \cdot \left(\frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3}\right) = 0 \quad (10.24)$$

errechnet, kann abermals die ideal kritische Gleichlast $p_{z,ki}^{Gabellagerung}$ errechnet werden.

Nun lässt sich unter Beachtung der getroffenen Genauigkeitsbeschränkung, dass die

Übereinstimmung beider ideal kritischer Lasten 95 % ($\frac{p_{z,ki}^s}{p_{z,ki}^{Gabellagerung}} = \frac{95}{100}$) betragen soll, die gesuchte Mindestdrehfedersteifigkeit C_{ϑ}^* bestimmen.

Da die dafür notwendige Bestimmungsgleichung sehr unhandlich ist, wird sie hier nicht explizit angeführt.

Ohne Anführung der Zwischenrechnungen beträgt C_{ϑ}^* im konkreten Fall für fünf Querträger

$$C_{\vartheta} = 4\,618 \text{ [kNm/rad]}.$$

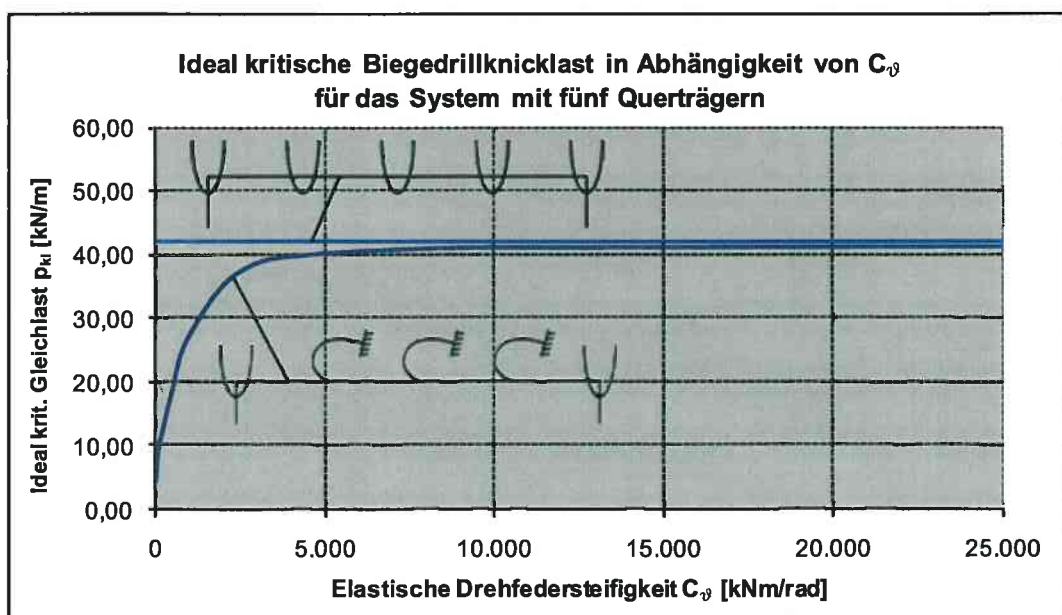


Abbildung 10.19: Ideal kritische Biegedrillknicklasten bei fünf Querträgern in Abhängigkeit von C_{ϑ}

Beim Fall mit vier Querträgern wirken die Einzeldrehfedern bereits ab einer Drehfedersteifigkeit von $C_{\vartheta} = 1\,476$ [kNm/rad] (wieder mit der 95 %igen Genauigkeitsvereinbarung) wie ideale Gabelager verdrehungsbehindernd und somit stabilisierend auf das System.

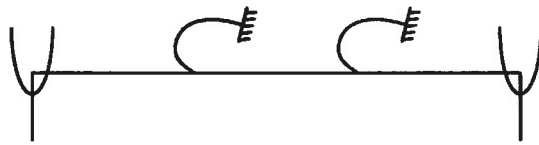


Abbildung 10.20:

Modellbildung für das System mit vier Querträgern

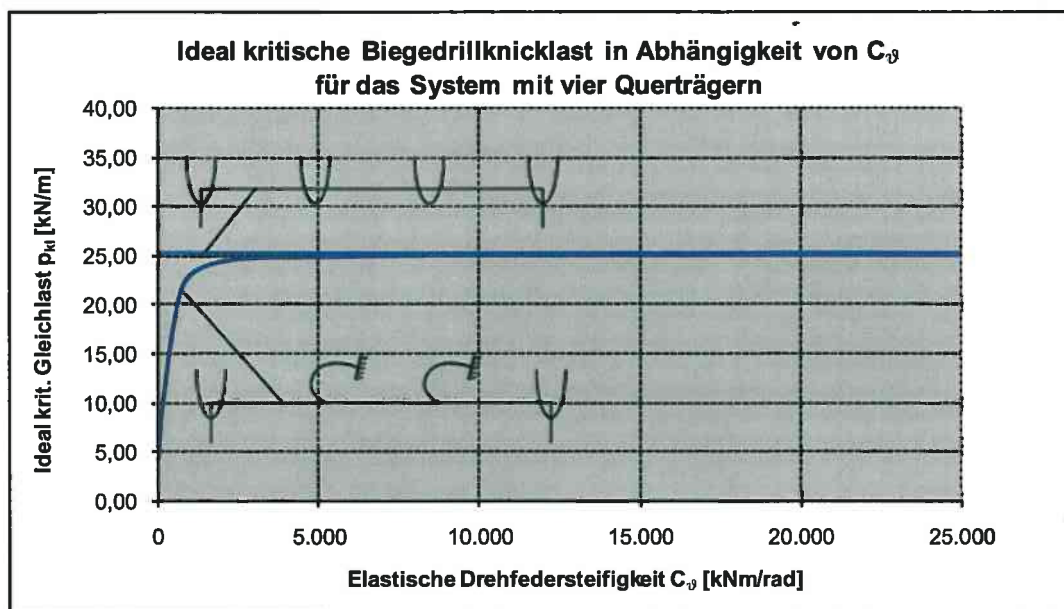


Abbildung 10.21: Ideal kritische Biegedrillknicklasten bei vier Querträgern in Abhängigkeit von C_{ϑ}

Für praktische Fälle bedeuten diese Ergebnisse, dass ab einer gewissen Mindestdrehfedersteifigkeit der Querträger bereits mit nur eingliedrigen trigonometrischen Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten v , w und ϑ bereits sehr gute Näherungslösungen erzielt werden können.

Leider ist es ohne weitere Systemvereinfachungen kaum möglich, eine allgemein gültige Formel zur Bestimmung dieser Mindeststeifigkeit anzugeben, doch wird das reale System – wie die Zahlenvergleiche in allen Fällen vermuten lassen – in der Regel ausreichend dimensioniert sein, um diese Forderung an die Mindestdrehfedersteifigkeit C_{ϑ}^* zu erfüllen. Diese Annahme unterstreicht auch der Zahlenvergleich im vorliegenden Fall, bei dem das Verhältnis von vorhandener zu erforderlicher Drehfedersteifigkeit C_{ϑ} für eine ideale Gabelagerung der Haupt– durch die Querträger im Fall von fünf Querträgern ca. 117 und im Fall von 4 Querträgern sogar 367 beträgt.

Die Berechnung der ideal kritischen Lasten mit nur eingliedrigen trigonometrischen Ansatzfunktionen ist hier also zulässig.

10.4 Graphische Darstellung der ersten drei Eigenformen des Brückensystems mit fünf Querträgern

Die Tabelle auf der nächsten Seite gibt einen Überblick über die ersten drei Eigenformen (normiert) des Brückensystems mit fünf Querträgern.

Deutlich sichtbar ist das vierwellige Versagensbild der Struktur.

Wie mit der Rechnung gezeigt werden kann, stabilisieren die vorhandenen Querträger das System für die Verdrehung wie Gabellager.

Sichtbar ist auch, dass die Amplituden der Sinushalbwellen der Verformung direkt proportional zum Momentenverlauf sind. In Feldmitte weisen sie daher ihre größten Werte auf, wogegen sie an den Enden der beiden Hauptträger kleiner werden.

Es könnte also eine weitere Genauigkeitssteigerung der Ergebnisse nach RITZ dadurch erzielt werden, dass man die Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten gemäß diesem Sachverhalt beschreibt.

Dies könnte z.B. für die Ansatzfunktion der Verdrehung in der folgenden Formulierung geschehen

$$\vartheta(x) = r(x) \cdot B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (10.25)$$

worin $r(x)$ eine Gewichtsfunktion darstellt, die den Momentenverlauf entlang des Hauptträgers erfasst.

Im vorliegenden Fall eines Einfeldträgers unter Gleichlast p_z könnte $r(x)$ wie folgt formuliert werden:

$$r(x) = f(M_y(x)) = f\left(\frac{p_z x}{2}(l-x)\right). \quad (10.26)$$

Bei der dritten Eigenform, die zwar für baupraktische Belange keine Bedeutung mehr hat, der Vollständigkeit wegen aber trotzdem angeführt ist, wird zusätzlich noch ein großer Anteil einer einwelligen Ansatzfunktion für die Verschiebung zur Seite sichtbar, wogegen die Eigenformen eins und zwei überwiegend gemäß den Ansatzfunktionen der Form $\sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right)$ biegedrillknicken.

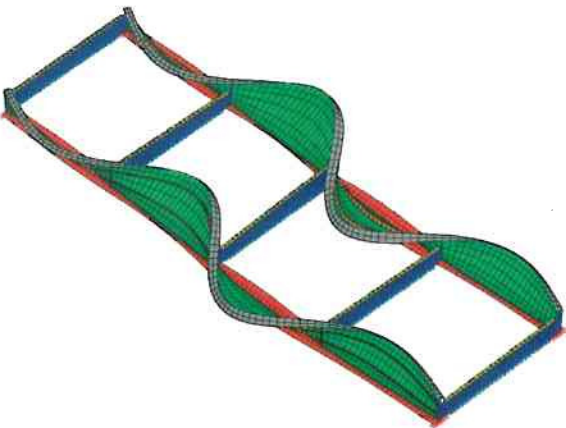

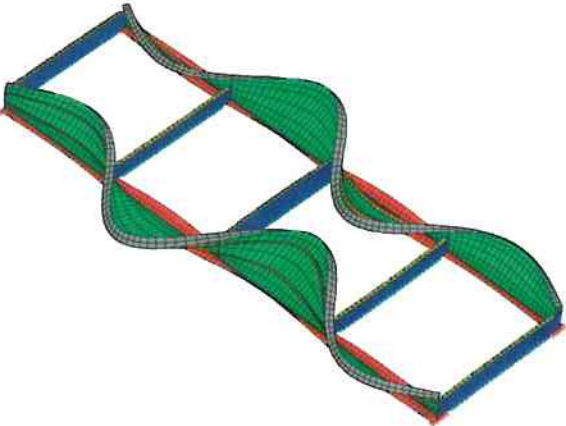
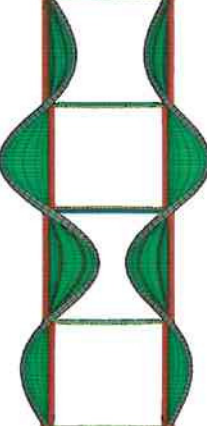
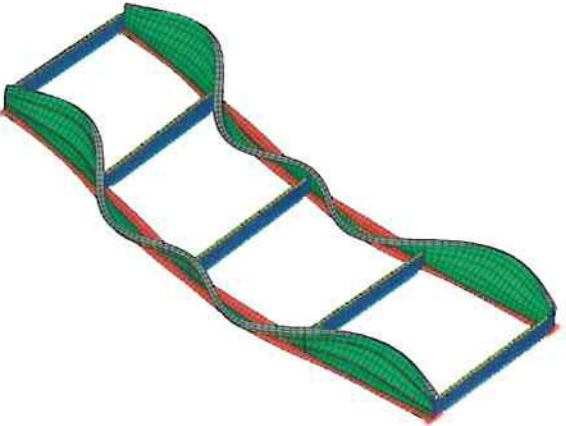

	3D – Darstellung	Draufsicht	
1. Eigenform			Ideal kritische Last $p_{z,ki} \text{ [kN/m]} = 26.66$
			Antimetrische Eigenform
2. Eigenform			Ideal kritische Last $p_{z,ki} \text{ [kN/m]} = 26.89$
			Symmetrische Eigenform
3. Eigenform			Ideal kritische Last $p_{z,ki} \text{ [kN/m]} = 42.16$
			Antimetrische Eigenform

Tabelle 10.6: Eigenformen für System mit fünf Querträgern (aus FEM)

11 EINFLUSS VON HORIZONTALVERBÄNDEN AUF DIE IDEAL KRITISCHE LASTEN

Neben der im Abschnitt 10 behandelten Anordnung von Querträgern kann der Widerstand des Systems gegen Stabilitätsverlust auch durch die Anordnung von Verbänden wirksam erhöht werden, wenn diese die stabilitätsgefährdeten Gurte der Hauptträger stützen.

Diese können entweder als Windverbände permanent oder als Montageverbände temporär im Brückentragwerk vorhanden sein.

11.1 Untersuchte Verbandsformen

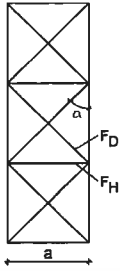
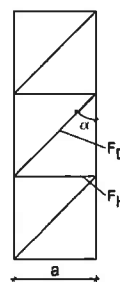
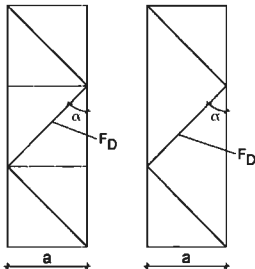
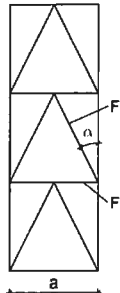
Verbandsform	Geometrie	Schubsteifigkeit S_D [kN]
I „Kreuzverband“		$\frac{1}{\frac{1}{2EF_D \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{1}{EF_H \cot \alpha}}$
II		$\frac{1}{\frac{1}{EF_D \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{1}{EF_H \cot \alpha}}$
III		$EF_D \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$
IV „K-Verband“		$\frac{1}{\frac{1}{EF_D \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{1}{2EF_H \cot \alpha}}$

Tabelle 11.1: Untersuchte Verbandsformen der Horizontalverbände

Die Füllstäbe zwischen den Gurten bei der Verbandsform III (strichlierte Linien in der Skizze) können, müssen aber nicht vorhanden sein (Nullstäbe).

Zum Aufbau der ideellen Schubsteifigkeit in Spalte 3 leisten sie nämlich keinen Beitrag und können deshalb auch entfallen. Im Zuge aller weiteren Verbandsberechnungen werden diese Nullstäbe nicht berücksichtigt.

Um praxisrelevante Ergebnisse zu erhalten, werden nur Systeme mit zwei bis vier Querträgern zwischen den Endquerträgern untersucht, da es unter der Vereinbarung, die Verbände immer in den Feldern zwischen den Querträgern anzuordnen, wenig Sinn machen würde, die liegenden Verbandsstäbe z. B. bei einem System ohne Querträger über eine Länge von $l_d \approx \sqrt{30.00^2 + 8.30^2} = 31.13$ [m] vom Ende des einen Hauptträgers quer über die gesamte Stützweite zum Ende des anderen Hauptträgers anzuordnen.

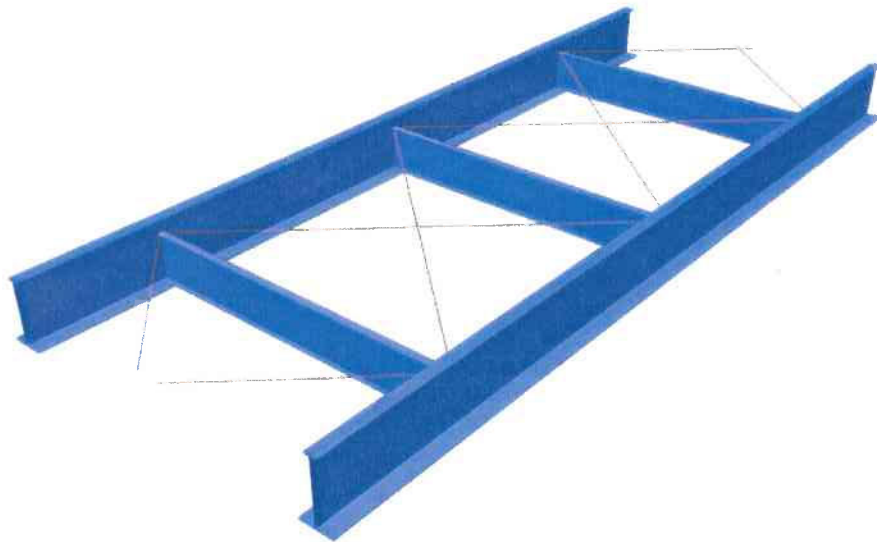


Abbildung 11.1: Verbandsfelder mit Kreuzverbänden

Es ist aber bereits vor Beginn der Berechnungen klar, dass die so ermittelten ideal kritischen Lasten weit über der Traglast des Systems liegen werden, da bereits das Vorhandensein von vier Querträgern im Feld ganz ohne Verbände die Biegedrillknicklast über die Traglast, zufolge welcher erstmalig Fließen der Hauptträger eintritt, anhebt (siehe Ergebnisse in Tabelle 10.3).

Da aber eine der Voraussetzungen für die Wölbkrafttorsion nach Theorie II. Ordnung gemäß Abschnitt 5.2.4 lautet, *die Querschnittsform der Struktur muss im Zuge der Verformung erhalten bleiben*, sind diese Querträger notwendig.

Deren Wirkung wird daher selbstverständlich auch in den Verbandsberechnungen berücksichtigt.

11.2 Modellbildung zur Berechnung von Aussteifungsverbänden

Für die Berechnung von Aussteifungsverbänden bedient man sich gerne folgender Modellbildung:

Der Verband wird in eine *ideelle Scheibe* umgerechnet, die unter Belastung in deren Ebene die gleiche Schubverzerrung wie die reale Verbandsform erfährt. Anschließend wird über diese Bedingung, dass eben die Schubsteifigkeiten dieser beiden Systeme gleich groß sein sollen, die ideelle Dicke einer solchen Scheibe bestimmt.

Diese Modellbildung beschreibt das stabilisierende Verhalten der Verbände auf die Gesamtstruktur auch schon recht gut.

Die dritte Spalte in Tabelle 11.1 gibt die Schubsteifigkeiten dieser ideellen Bleche an, mit denen in Folge weitergerechnet wird. Diese Werte sind aus [3] entnommen und gelten unter der Voraussetzung, dass die Querschnittsflächen der Fachwerksgurte groß gegenüber den Diagonalen sein sollen. Im konkreten Fall, in dem die Hauptträger der Brücke diese Fachwerksgurte darstellen, ist dies erfüllt.

Für die Berechnung nach dem RITZ'schen Verfahren wird die Federsteifigkeit mit genügender Genauigkeit als eine *kontinuierliche Federsteifigkeit* angenommen, die Schubsteifigkeit des Verbandes also über die Länge des Hauptträgers „verschmiert“. Streng genommen sollte diese *kontinuierliche Federsteifigkeit* natürlich aus zwei Bestandteilen (einem translatorischen und einem rotatorischen) gebildet werden – in den weiteren Untersuchungen wird jedoch nur die translatorische Federsteifigkeit (wegelastische Stützung des Obergurtes) erfasst. Die drehelastische Stützung in der Verbandsebene wird vernachlässigt.

In der Formulierung des Potentials – Gl. (5.15) – wird eine solche translationselastische Bettung in y – Richtung in Form der kontinuierlichen Federsteifigkeit c_y berücksichtigt.

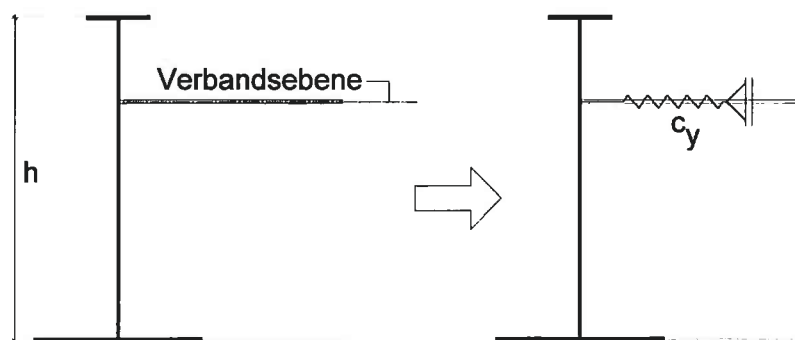


Abbildung 11.2:
Ersatzmodell für
Horizontalverband

Für die betrachtete Federbettung ist natürlich auch deren Lage am Querschnitt von großer Bedeutung.

Für die Berechnung des Funktionals $\frac{1}{2}\delta^2\Pi^*$ ist eine Ansatzfunktion für die Verschiebung der Feder entlang ihrer Wirkungsrichtung zu formulieren, in diesem Falle also die Verschiebung v_c . Mit den Koordinaten y_c und z_c des Federangriffspunktes am Querschnitt kann für v_c die geometrische Beziehung

$$v_c = v_M - (z_c - z_M)\vartheta = v_M - z_{cM}\vartheta \quad (11.1)$$

formuliert werden, die sich in dieser Formulierung auf den Schubmittelpunkt des Querschnitts bezieht. Darin bezeichnet z_{cM} den z – Abstand der Verbandsebene zum Schubmittelpunkt.

Analog dazu kann die Verschiebungskomponente w_c der Feder mit

$$w_c = w_M + (y_c - y_M)\vartheta = w_M + y_{cM}\vartheta \quad (11.2)$$

beschrieben werden. y_{cM} ist dabei der y – Abstand des Federangriffspunktes zum Schubmittelpunkt. Für eine wegelastische Bettung in y – Richtung ist jedoch nur v_c von Bedeutung.

Für die Modellbildung wird folgendermaßen vorgegangen:

Zur Ermittlung der kontinuierlichen Federsteifigkeit c_y (Einheit $[N/m^2]$) wird laut [3] die innere potentielle Energie (Formänderungsarbeit) der federelastischen Bettung mit jener der ideellen Scheibe gleichgesetzt

$$\frac{1}{2}\int_0^l c_y (v_M - z_{cM}\vartheta)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^l S_{ID} (v'_M - z_{cM}\vartheta')^2 dx \quad (11.3)$$

Durch Umformung erhält man die Beziehung für die gesuchte Federsteifigkeit c_y zu

$$c_y = S_{ID} \frac{\int_0^l (v'_M - z_{cM}\vartheta')^2 dx}{\int_0^l (v_M - z_{cM}\vartheta)^2 dx} \quad (11.4)$$

Die Auswertung der Gleichung (11.4) ergibt beispielsweise bei Verwendung einer einzigen Sinushalbwellen für die Ansatzfunktionen der Verformungskomponenten v und ϑ

$$c_y^1 = S_{ID} \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (11.5)$$

Für höhergliedrige Verformungsansätze über die Trägerlänge ergeben sich natürlich andere Werte, die dementsprechend zu errechnen sind.

Solche höhergliedrigen Sinusansätze werden beim Vorhandensein von mehr als zwei Querträgern angesetzt, wobei die Nulldurchgänge der Verformungsansätze jeweils an den Stellen der Querträger auftreten.

Diese Annahme rechtfertigen die Ergebnisse aus Abschnitt 10 – sie wird auch im Zuge der weiteren Berechnungen für die Verbandsuntersuchungen beibehalten. Stillschweigend wird damit also angenommen, dass die Querträger ausreichend dimensioniert sind, um die Verdrehung der Hauptträger wie Gabelträger zu verhindern.

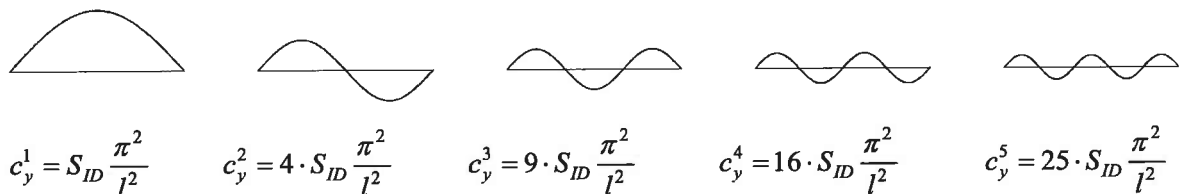


Abbildung 11.3: Bettungsziffern bei mehreren Verbandsfeldern

Die obige Übersicht zeigt, dass die Steifigkeit der Drehbettung – unter der Verwendung von eingliedrigem trigonometrischen Ansatzfunktion für die drei Verschiebungskomponenten – quadratisch mit der Anzahl an Verbandsfeldern zunimmt.

11.3 Vergleich der Verbandschubsteifigkeiten

Um einen ersten Vergleich der verschiedenen Verbandsformen durchführen zu können, wurden die Abmessungen der Stabquerschnitte in allen Berechnungen konstant beibehalten. Gewählt wurde ein Verbandsstab mit einem Querschnitt, der eine Fläche von $A = 30.00$ [cm²] aufweist.

Außerdem wurde angenommen, dass die Verbandsstäbe selbst nicht auf Stabilität versagen können, es wurden also Biegesteifigkeiten A_{yy} und $A_{zz} = \infty$ vorausgesetzt.

Dies ist für die eigentliche Verbandsberechnung aber nicht von Interesse, in die Formulierung zur Berechnung der Schubsteifigkeiten dieser ideellen Scheiben gehen ja ohnehin nur die Querschnittsflächen der Verbandsstäbe und nicht deren Biegesteifigkeiten ein (siehe Spalte 3 in Tabelle 11.1)

Die Abbildung 11.4 lässt bereits den Schluss zu, dass im Bezug auf die von den Verbandsfeldern gebildete ideale Schubsteifigkeit die maximale Anzahl von angeordneten Querträgern (incl. der beiden Endquerträger) bei fünf bis sechs liegen sollte. Der Grund dafür ist die vorhandene Geometrie.

Bis zu einer Anzahl von vier Querträgern ist der Abstand der Querträger zueinander mit 10.00 [m] (genau bei vier Querträgern incl. den beiden Endquerscheiben) größer als deren eigene Länge zwischen den beiden Hauptträgern, die 8.30 [m] beträgt. Bei einer größeren Anzahl von Querträgern werden die Verbandsfelder in ihrer Form derart „gestaucht“, dass ihre Schubsteifigkeit, wenn man sie nach den Angaben in Tabelle 11.1 ermittelt, sinkt. Dies gilt natürlich nur unter der vereinbarten äquidistanten Teilung in Brückenlängsrichtung. Für ein optimales Wirken der Horizontalverbände ist demnach – wie auch bei anders beanspruchten Fachwerken – deren Geometrie von äußerster Wichtigkeit.

Diese Ergebnisse decken sich auch mit den im Abschnitt 10 gewonnenen Erkenntnissen, dass die Teilung des Hauptträgers durch Querträger in mehr als vier Abschnitte kaum sinnvoll erscheint. Einzig bei Verwendung eines K – Verbandes würde sich diese Anzahl um ein bis zwei Felder erhöhen.

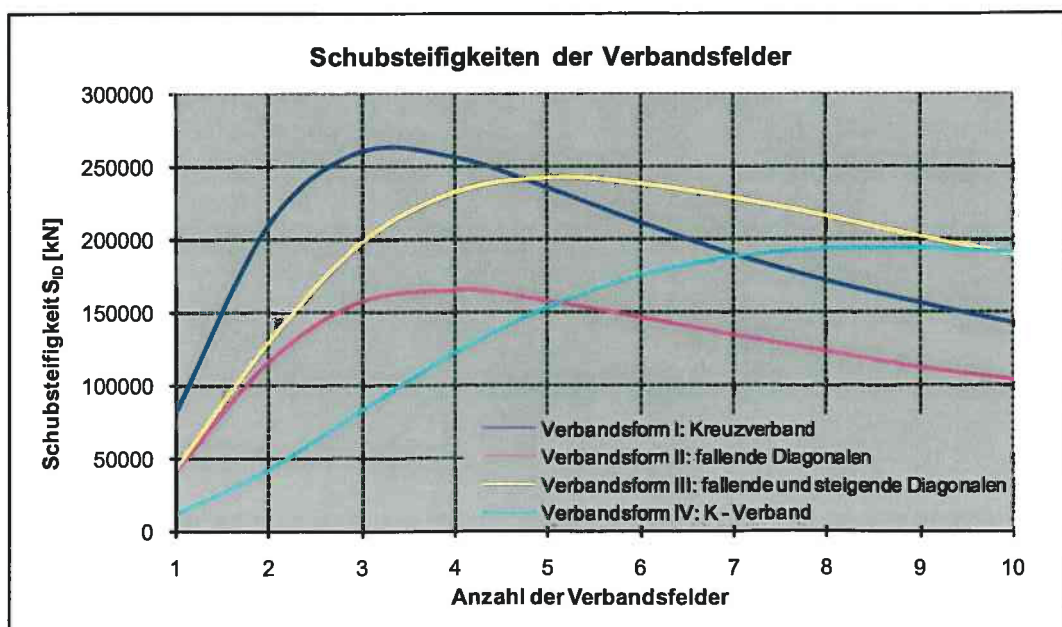


Abbildung 11.4: Verbandsschubsteifigkeiten je nach Anzahl der Verbandsfelder

11.4 Variation der Anzahl von Verbandsfeldern

11.4.1 Ergebnisse der Berechnung nach RITZ

In der Folge werden nun die Ergebnisse der Berechnungen nach dem RITZ'schen Verfahren angeführt. Die Lage des Verbandes wurde in der Obergurtebene der Querträger angenommen (siehe Abbildung 11.2).

Verbandsform I: Kreuzverband				
Anzahl der Verbandsfelder	BERECHNUNG NACH RITZ			
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	Steigerungsfaktor gegenüber System ohne Verband [-]	Laststeigerungsfaktor [-]
3	1.406,6	158.243	55,7	1,0
4	1.503,7	169.161	35,8	1,1
5	1.453,0	163.460	22,9	1,0

Tabelle 11.2: Ideal kritische Lasten für Verbandsform I

Verbandsform II: Fallende Diagonalen				
Anzahl der Verbandsfelder	BERECHNUNG NACH RITZ			
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	Steigerungsfaktor gegenüber System ohne Verband [-]	Laststeigerungsfaktor [-]
3	867,8	97.630	34,4	1,0
4	991,9	111.585	23,6	1,1
5	1.004,9	113.046	15,8	1,2

Tabelle 11.3: Ideal kritische Lasten für Verbandsform II

Verbandsform III: Fallende u. steigende Diagonalen				
Anzahl der Verbandsfelder	BERECHNUNG NACH RITZ			
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	Steigerungsfaktor gegenüber System ohne Verband [-]	Laststeigerungsfaktor [-]
3	1.081,8	121.703	42,9	1,0
4	1.372,0	154.348	32,7	1,3
5	1.497,2	168.431	23,6	1,4

Tabelle 11.4: Ideal kritische Lasten für Verbandsform III

Verbandsform IV: K - Verband				
Anzahl der Verbandsfelder	BERECHNUNG NACH RITZ			
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	Steigerungsfaktor gegenüber System ohne Verband [-]	Laststeigerungsfaktor [-]
3	478,7	53.848	19,0	1,0
4	749,2	84.283	17,8	1,6
5	977,5	109.964	15,4	2,0

Tabelle 11.5: Ideal kritische Lasten für Verbandsform IV

Die Ergebnisse zeigen, dass durch die Anordnung von Verbänden ebenfalls eine wirksame Anhebung der ideal kritischen Biegedrillknicklasten der Hauptträger möglich ist.

Bei zwei im Feld angeordneten Querträgern (was drei Verbandsfeldern entspricht) lassen sich die ideal kritischen Lasten etwa auf das vier- bis sechsfache der Werte ohne Verbände steigern. Dieser relative Faktor sinkt bei zunehmender Anzahl von vorhandenen Verbandsfeldern.

11.4.2 Ergebnisse der Berechnung nach der FE – Methode -

Leider ist bei derartigen Steigerungen der ideal kritischen Kipplasten eine lückenlose, begleitende Überprüfung mittels FEM – Software nur sehr schwer möglich, da es bei diesen hohen Laststufen meist zu örtlichem Stabilitätsversagen kommt, bevor das System als Ganzes zufolge Biegedrillknicken versagt.

Für die Berechnung müsste das modellierte System sehr dicht ausgesteift werden, um diese lokalen Instabilitäten auszuschließen, was jedoch unter vertretbarem Aufwand kaum möglich ist.

Ganz abgesehen davon, dass die Laststeigerung der ideal kritischen Lasten auf Werte, die ein Vielfaches der Tragfähigkeit der Hauptträgerquerschnitte betragen, keinen praktischen Nutzen mehr besitzt.

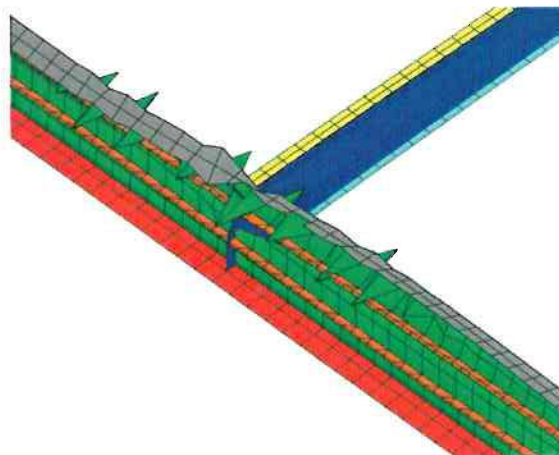


Abbildung 11.5: Lokales Stabilitätsversagen im FEM – Modell (ausgebeultes Stegblech)

Die ideal kritischen Lasten, die per Software ermittelt werden, sind daher teilweise nicht mehr geeignet, mit den Ergebnissen nach der Potentialmethode mit RITZ verglichen zu werden.

Der Vergleich von Berechnungsergebnissen für ideal kritische Kipplasten, welche noch kein Beulen der Stegbleche hervorrufen, zeigt jedoch wieder eine sehr gute Übereinstimmung der Berechnungen nach RITZ und FEM.

Für das System mit zwei Querträgern im Feld und einem Verband der Verbandsform II (Querschnitte mit $A = 30.00 \text{ [cm}^2\text{]}$, Lage in der Obergurtebene der Querträger) beträgt $p_{z,ki}$ nach der Energiemethode mit RITZ 867.82 [kN/m] . Für das selbe System wird mittels FEM ein Wert von $p_{z,ki} = 925.58 \text{ [kN/m]}$ ermittelt. Die Abweichung beträgt also etwa 6 %.

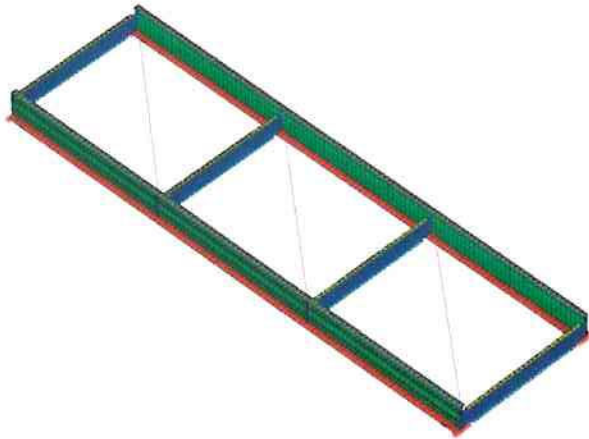


Abbildung 11.6:

Brückensystem mit zwei Querträgern und
Verbandsform II

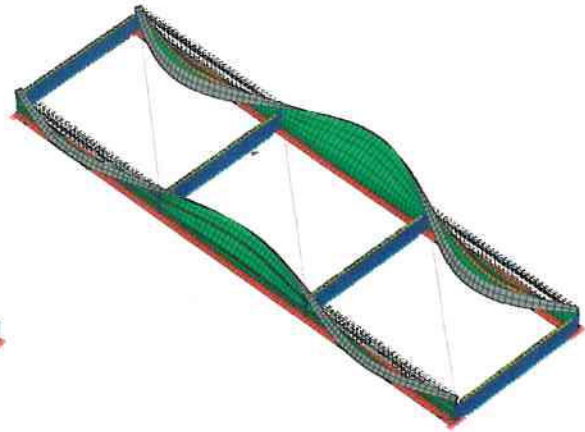


Abbildung 11.7:

Erste Eigenform bei $p_{z,ki} = 925.58 \text{ [kN/m]}$

11.4.3 Diskussion der Ergebnisse

Absolut gesehen lassen sich durch die materialintensiven Verbände wie Kreuz- und K – Verband (Verbandsformen I und IV) größere Stabilisierungen erzielen als mit den beiden anderen Verbandsformen, was auch nicht verwunderlich erscheint.

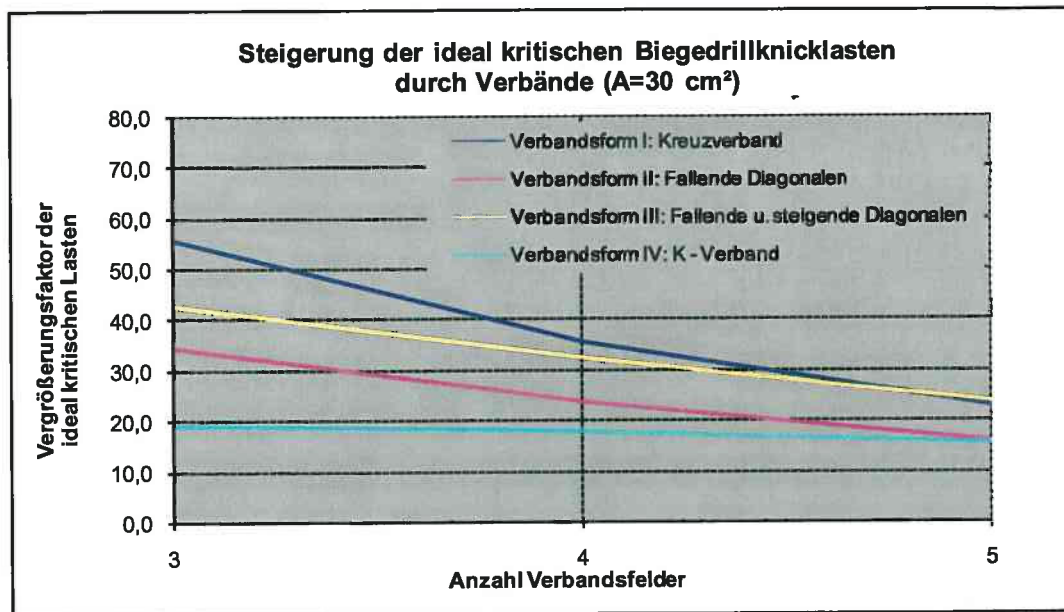


Abbildung 11.8: Vergleich der Verbandsformen

Dennoch scheint eine differenziertere Bewertung der Verbände notwendig, welche die Vergrößerung der Biegedrillknicklasten unter Beachtung der Wirtschaftlichkeit in Bezug auf Materialverbrauch (Tonnage der Verbandsstäbe, Anzahl der Anschlusspunkte), Instandhaltungskosten (Korrosionsschutz) u. ä. betrachtet.

11.5 Vergleich und Bewertung der Verbandsformen

11.5.1 Tonnage

Unter der Annahme, dass sämtliche Verbandsstäbe denselben Querschnitt mit einer Fläche von $A = 30.00 \text{ [cm}^2\text{]}$ aufweisen, kann die folgende Übersicht über die Tonnagen der einzelnen Verbandsformen angegeben werden.

Für die Berechnung der Verbandsform III wurde übrigens angenommen, dass die Füllstäbe zwischen den Gurten des Verbandes (siehe Tabelle 11.1) nicht vorhanden sind.

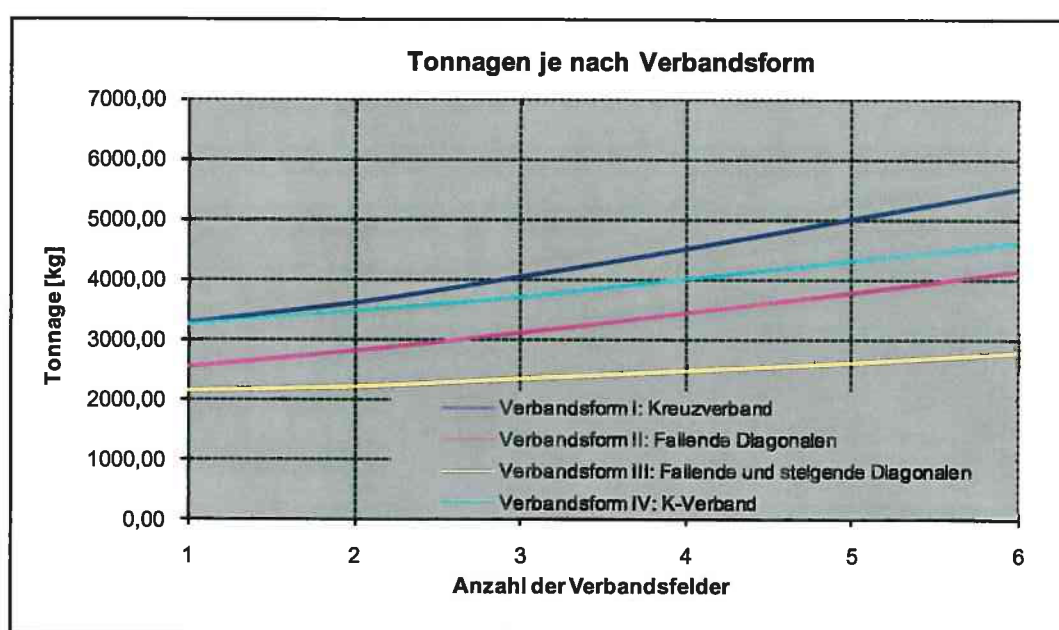


Abbildung 11.9: Tonnagen der verschiedenen Verbandsformen

11.5.2 Bewertung mit Kennziffern

Um nun die Steigerung der ideal kritischen Lasten durch die Anordnung eines Verbandes dem dadurch verursachten Mehraufwand gegenüberstellen zu können, wird folgendermaßen vorgegangen.

Das in Form von Verbänden zusätzlich notwendige Material wird in eine fiktive Verbreiterung des gedrückten Obergurtes der Hauptträger bei sonst gleichbleibenden Abmessungen umgerechnet. Diese Vereinfachung ist in guter Näherung zulässig, da ja zum größten Teil der gedrückte Obergurt der stabilitätsgefährdete Bauteil in der Struktur ist. Der unter Druck stehende Steganteil, welcher ebenfalls Beiträge zum Biegedrillknicken liefert, wird auf diese Weise vernachlässigt.

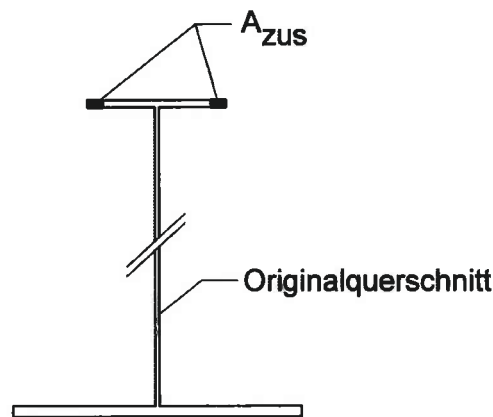


Abbildung 11.10: Fiktive Vergrößerung des Obergurtes

Anschließend wird für dieses fiktive System (vergrößerte Hauptträger und vorhandene Querträger *ohne Verbände*) die ideal kritische Last ermittelt und der ideal kritischen Last des realen Systems (tatsächliche Haupt- und Querträger *mit Verbänden*) gegenübergestellt und mit diesem Verhältnis eine so genannte lastbezogene Bewertungskennzahl gebildet.

$$v_{Last} = \frac{P_{ki}^{Ersatzsystem}}{P_{ki}^{reales System}} \quad (11.6)$$

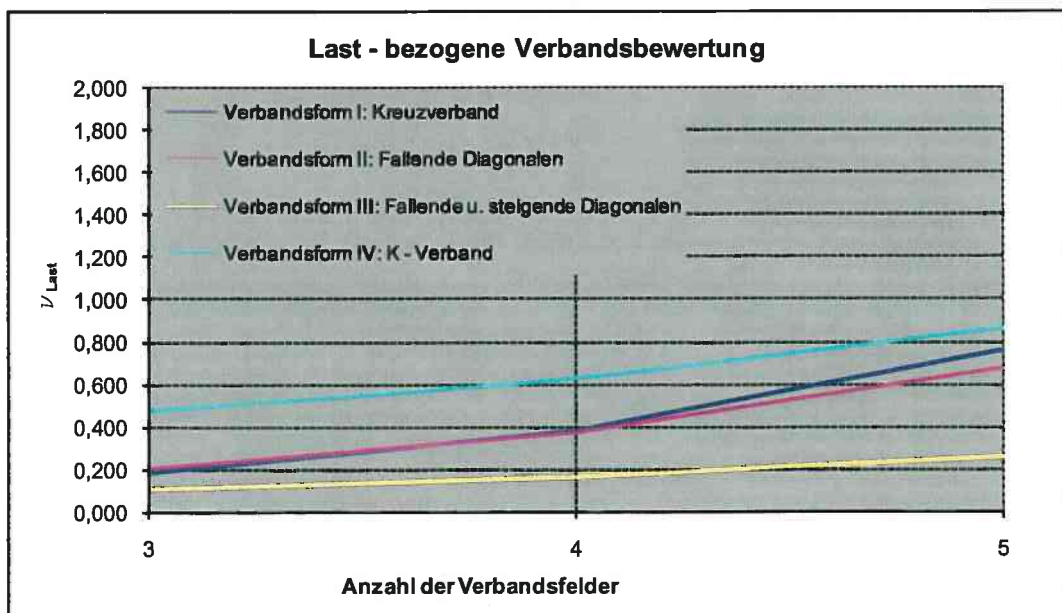


Abbildung 11.11: Bewertung der Verbände auf Lastebene

Auf diese Weise lässt sich vergleichen, welcher Mehrgrad an Stabilisierung erreicht würde, wenn man den durch die Verbände verbauten Stahl bereits von Anfang an im Hauptträger eingesetzt hätte, es ermöglicht also einen Vergleich auf der „Lastebene“.

Analog dazu wird nun ein Vergleich auf der geometrischen Ebene durchgeführt, es werden also das Volumen des Verbandes mit dem Volumen des Obergurtes verglichen und so eine geometrische Bewertungskennzahl gebildet.

$$v_{\text{Geometrie}} = \frac{A^{\text{Verband}}}{A^{\text{Obergurt, ursprünglich}}} \quad (11.7)$$

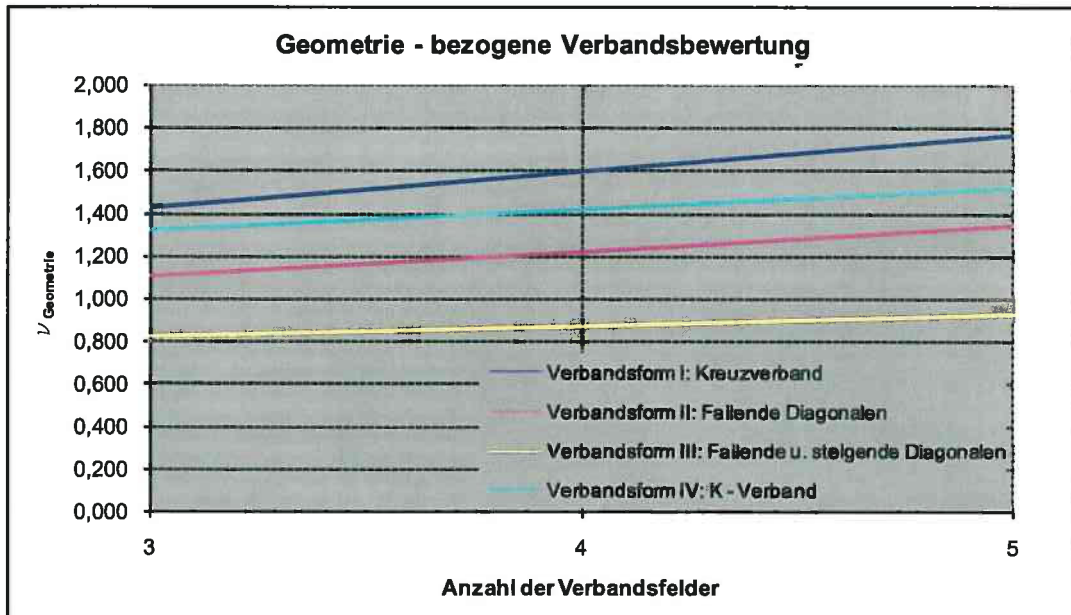


Abbildung 11.12: Bewertung der Verbände auf Geometrieebene

Zuletzt werden nun diese beiden Kennzahlen in ein Verhältnis zueinander gesetzt und damit die Effizienz der Verbände bewertet. Der Gewinn an ideal kritischer Last im Ersatzsystem wird also in Verhältnis zur Tonnage des Verbandes gesetzt.

$$\mu_{\text{Effizienz}} = \frac{v_{\text{Last}}}{v_{\text{Geometrie}}} \quad (11.8)$$

Je höher dieser Wert ist, desto effizienter kann also der Einsatz dieser Verbandsform gelten.

11.5.2.1 Ergebnisse der Berechnungen für die Ersatzsysteme

Verbandsform I: Kreuzverband					
Anzahl der Verbandsfelder	Ersatzsystem				
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	ν_{Last}	$\nu_{Geometrie}$	$\mu_{Effizienz}$
3	259,7	29.213	0,185	1,426	0,129
4	575,7	64.763	0,383	1,592	0,241
5	1.104,9	124.301	0,760	1,768	0,430

Tabelle 11.6: Bewertungszahlen für Verbandsform I

Verbandsform II: Fallende Diagonalen					
Anzahl der Verbandsfelder	Ersatzsystem				
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	ν_{Last}	$\nu_{Geometrie}$	$\mu_{Effizienz}$
3	173,1	19.475	0,199	1,102	0,181
4	369,1	41.518	0,372	1,219	0,305
5	682,8	76.820	0,680	1,342	0,506

Tabelle 11.7: Bewertungszahlen für Verbandsform II

Verbandsform III: Fallende u. steigende Diagonalen					
Anzahl der Verbandsfelder	Ersatzsystem				
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	ν_{Last}	$\nu_{Geometrie}$	$\mu_{Effizienz}$
3	116,8	13.141	0,108	0,825	0,131
4	228,0	25.651	0,166	0,873	0,190
5	390,3	43.909	0,261	0,927	0,281

Tabelle 11.8: Bewertungszahlen für Verbandsform III

Verbandsform IV: K - Verband					
Anzahl der Verbandsfelder	Ersatzsystem				
	Ideal krit. Gleichlast $q_{z,ki}$ [kN/m]	Ideal krit. Moment $M_{y,ki}$ [kNm]	ν_{Last}	$\nu_{Geometrie}$	$\mu_{Effizienz}$
3	228,2	25.668	0,477	1,318	0,362
4	471,6	53.053	0,629	1,417	0,444
5	846,1	95.189	0,866	1,523	0,568

Tabelle 11.9: Bewertungszahlen für Verbandsform IV

Die Gegenüberstellung zeigt, dass für das untersuchte System von den beiden materialintensiven Verbänden (Verbandsformen I und IV) der K – Verband (Verbandsform IV) die ideal kritische Last *effizienter* als der Kreuzverband (Verbandsform I) anhebt. Der Mehraufwand an notwendigem Material steht also in einem günstigeren Verhältnis zur dadurch erreichten Laststeigerung. Beim Vergleich der beiden weniger materialintensiven Verbandsformen II und III zeigt sich, dass im vorliegenden Fall der Verbandsform II der Vorzug zu geben wäre.

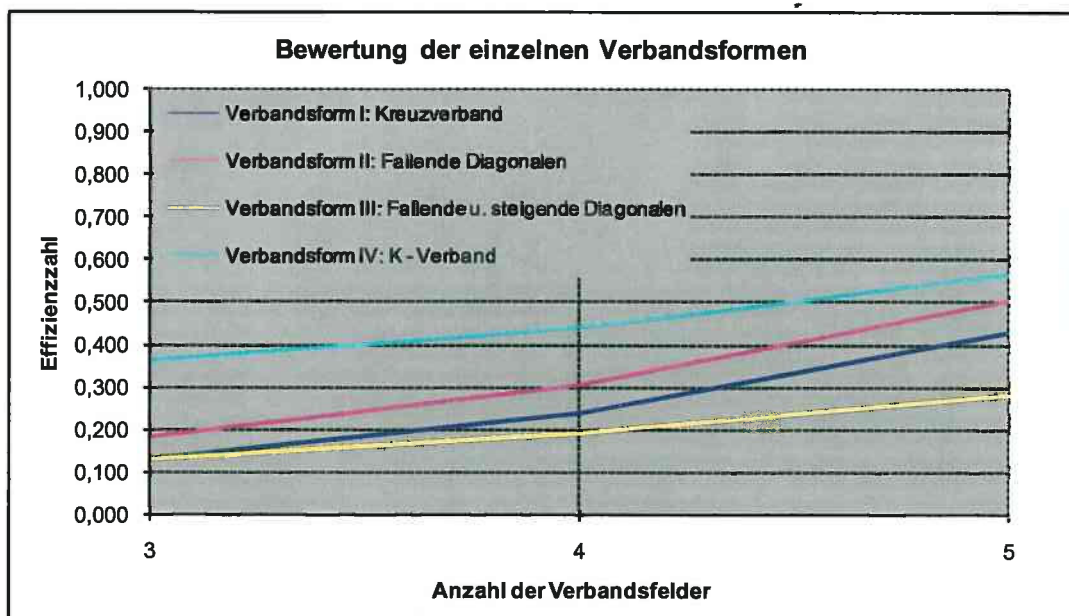


Abbildung 11.13: Bewertung der einzelnen Verbandsformen

11.6 Ideal kritische Kipplasten je nach Lage des Verbandes

Wie bereits am Beginn des aktuellen Abschnittes erwähnt wurde, ist die Lage des Verbandes von entscheidender Bedeutung.

Beim konkreten Fall eines Einfeldträgers unter Querlasten ist in erster Linie der Obergurt des Hauptträgers jener stabilitätsgefährdete Bauteil, der aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage ausweichen will. Es ist also zu erwarten, dass bei gleich bleibendem Querschnitt die ideal kritische Last des Systems umso höher liegen wird, je besser der gedrückte Obergurt durch den Verband abgestützt ist.

Mit der aus der Koordinate z_c des Federangriffspunktes am Trägerquerschnitt sowie der Koordinate z_M des Schubmittelpunktes gewonnenen geometrischen Beziehung für die relevante Verschiebung der Translationsfeder

$$v_c = v_M - (z_c - z_M) \vartheta = v_M - z_{cM} \vartheta \quad (11.9)$$

wird nun wieder das Gesamtpotential des Systems aufgestellt und anschließend die ideal kritische Last ermittelt.

Die Berechnungen werden für das Brückensystem mit Querträgern in den Drittelpunkten der Längsträger (4 Querträger insgesamt) anhand eines Kreuzverbandes (Verbandsform I) mit den bereits vorher verwendeten Verbandsstäben (Querschnitte mit $A = 30.00 \text{ [cm}^2\text{]}$) durchgeführt.

Mit den Querschnittswerten und Systemabmessungen laut Abschnitt 0 und den Ansatzfunktionen

$$v(x) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \quad w(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \vartheta(x) = C \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (11.10)$$

wird das Funktional $\frac{1}{2} \delta^2 \Pi$ des Systems mit einer kontinuierlichen Drehbettung formuliert.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left(EA_{yy} v_M'^2 + EA_{zz} w_M'^2 + EA_{\omega\omega} \vartheta'^2 + GI_D \vartheta'^2 + M_y \left[2v_M'' \vartheta + r_{M_z} \vartheta'^2 \right] \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l c_y (v_M - z_{cM} \vartheta)^2 dx - \int_{x=0}^l p_z \left(w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \vartheta^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Nach Integration von Gl. (11.11) und anschließender Formulierung der Bedingungen für indifferentes Gleichgewicht in den drei Verformungskomponenten v , w und ϑ

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi^* = 0 \right), \quad \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi^* = 0 \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi^* = 0 \right) \quad (11.12)$$

lässt sich wieder die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems aufstellen, welche an dieser Stelle jedoch nicht explizit angeführt ist.

Die Stabilitätsbedingung für das System wird durch Nullsetzen der Determinante dieser soeben ermittelten Matrix gefunden.

Diese charakteristische Gleichung zur Ermittlung der ideal kritischen Gleichlast $p_{z,ki}$ (Einheit [kN/cm]) lautet im konkreten Fall ausgewertet

$$16\,430\,339 \cdot z_{cM}^2 - 927\,744\,448 \cdot z_{cM} \cdot p_z - 8\,650\,767\,000 \cdot p_z^2 - 10\,519\,754\,690 \cdot p_z + 27\,930\,328\,330 = 0 \quad (11.13)$$

Aus dieser Gl. (11.13) lassen sich dann die Lösungen für $p_{z,ki}$ ermitteln.

In Abbildung 11.14 ist der Verlauf der positiven Lösung graphisch dargestellt, die negative Lösung der quadratischen Gl. (11.13) ist für die praktische Auswertung nicht von Interesse. Mit den z -Koordinaten der obersten Faser des Obergurtes $z_{OG} = -147.32$ [cm] und jener der untersten Faser des Untergurtes $z_{UG} = +7.68$ [cm] lässt sich nach Auflösen der charakteristischen Gleichung der Verlauf der ideal kritischen Last darstellen. Die Verbandslage variiert darin entlang der Höhe des Hauptträgers ($-147.32 \leq z_{cM} \leq +7.68$ [cm]).

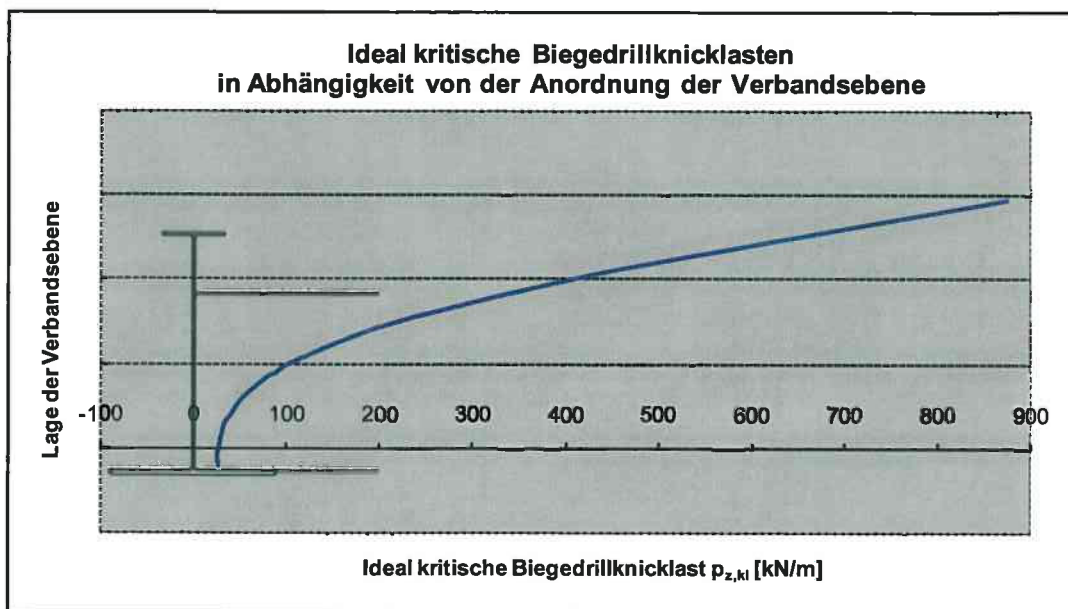


Abbildung 11.14: Ideal kritische Kipplasten je nach Verbandslage

Es handelt sich dabei um eine quadratische Parabel, die ihren Scheitelpunkt auf der Höhe des Schubmittelpunktes des Querschnitts hat, wovon man sich durch einfaches Ableiten nach z_{cM} und anschließendes Nullsetzen überzeugen kann.

Läge die Verbandsebene auf der Höhe des Schubmittelpunktes, wäre der Verband im Bezug auf Biegedrillknicken wirkungslos. In einfachen Worten bedeutet dies auch, dass – wie erwartet – die ideal kritische Kipplast des Systems umso größer ist, je näher sich die federelastische Stützung beim gedrückten Obergurt befindet.

Die optimale Verbandsebene liegt im untersuchten Fall also auf der Höhe des gedrückten Obergurtes des Hauptträgers.

Da diese Anordnung oftmals nicht möglich ist, weil in diesem Bereich z. B. die Schalung für die Betonplatte des Verbundtragwerkes vorhanden ist, empfiehlt es sich, den Verband im konkreten Beispiel in gleicher Höhe mit den oberen Flanschen der Querträger anzuordnen.

11.7 Ideal kritische Lasten in Abhängigkeit von der Verbandssteifigkeit

Aufbauend auf den unter Abschnitt 10.3 gewonnenen Erkenntnissen für die Mindeststeifigkeit einer drehfederelastische Bettung liegt die Vermutung nahe, dass es bei elastischen Translationsfedern ebenfalls eine gewisse Grenzsteifigkeit gibt, ab welcher sich die ideal kritische Last des Systems nicht mehr wesentlich erhöhen lässt.

Dieser Umstand wird dadurch untermauert, dass die Terme in der Formulierung des Potentials in Gl. (5.15) zur Berücksichtigung dreh- und wegelastischer Bettung formal denselben mathematischen Aufbau aufweisen. Sie lauten

$$\Pi = \dots + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left(c_z (w_M + y_{c_M} \vartheta)^2 + c_y (v_M - z_{c_M} \vartheta)^2 + c_\vartheta \vartheta^2 \right) dx + \dots \quad (11.14)$$

Um diesen Sachverhalt näher zu untersuchen, wird die wegelastische Bettung durch den Verband in einzelne Translationsfedern umgerechnet.

Analog zu Abschnitt 10.3 wird nun an dieser Stelle der umgekehrte Weg beschritten und mit der Beziehung

$$C_y = \frac{L \cdot c_y}{n} \quad (11.15)$$

aus der Anzahl der vorhandenen Querträger – welche ja die Anzahl der Verbandfelder (n-1) vorgeben – und der Bettungsziffer c_y , die Federkonstante C_y solcher Einzelwegfedern ermittelt. Diese sind vereinbarungsgemäß in den Anschlusspunkten der Quer- an die Hauptträger angeordnet. Als Verbandslage wird wieder die Obergurtebene der Querträger angenommen.

In völliger Analogie zur ausführlich unter Abschnitt 10.3 angeführten Berechnung der ideal kritischen Lasten kann hier – ohne explizite Anführung der Rechenschritte – für das System mit 2 Querträgern im Feld (entspricht 3 Verbandsfeldern) folgender Zusammenhang zwischen der elastischen Federsteifigkeit C_y und der ideal kritischen Last des Systems graphisch angegeben werden:

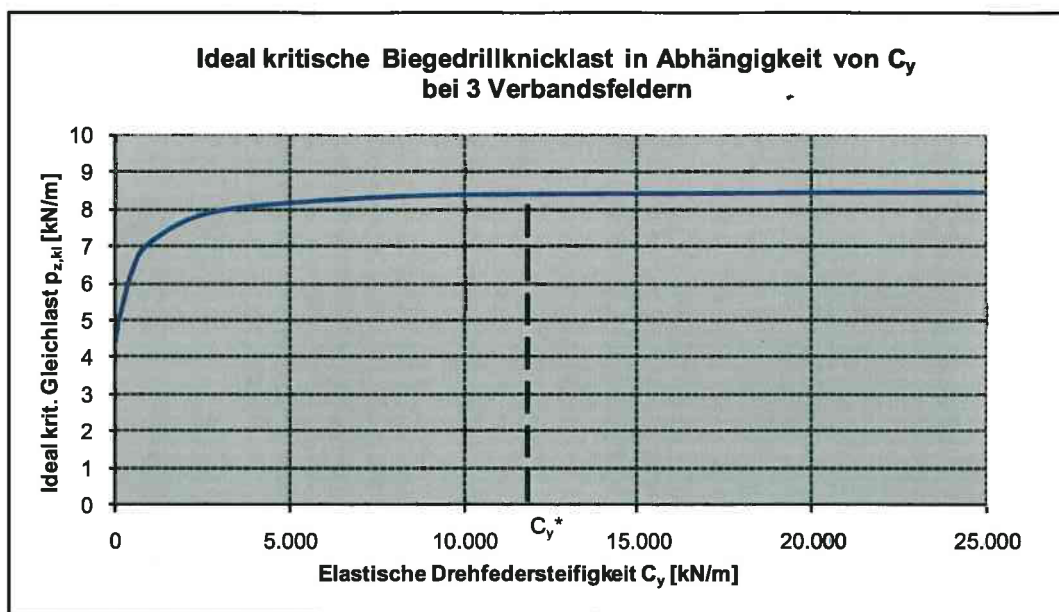


Abbildung 11.15: Ideal kritische Biegedrillknicklast in Abhängigkeit von C_y

11.8 Mindeststeifigkeiten der Verbände für Vorhandensein einer Zwangsdrillachse

Abermals drängt sich also die Frage nach der Bestimmung dieser Mindestwegfedersteifigkeit C_y^* auf, ab welcher die ideal kritische Last des Systems praktisch nicht mehr gesteigert werden kann.

Ist diese Mindeststeifigkeit erreicht, spricht man von einer *Zwangsdrillachse*.

Gerne wird dieser Fall – unter Querlasten – auch als *Kippen mit gebundener Drehachse* bezeichnet, wogegen man beim Kippen ohne seitliche Abstützungen von *freier Kippung* oder *Kippen mit freier Drehachse* spricht.

Sie ist also das Analogon (im Bezug auf Translationsfedern) zum Gabellager (bei Drehfedern) wenn man einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Grenzfällen sehen will.

Da sich der Verlauf von $p_{z,ki}$ erneut asymptotisch diesem Grenzwert der ideal kritischen Last $p_{z,ki,grenz}$ nähert, wird für praktisch relevante Anwendungen wieder eine Übereinstimmung von 95 % als ausreichend angesehen.

Um eine allgemeinere Aussage erhalten zu können, wird in der Folge diese Mindeststeifigkeit für das Brückensystem ohne Querträger im Feld errechnet, die einwelligten Ansatzfunktionen der Verformungskomponenten lauten also

$$v(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad w(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad \text{und} \quad \vartheta(x) = C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (11.16)$$

Für den Hauptträger unter der Gleichlast p_z ist die Momentenlinie nach Theorie I. Ordnung in Form einer quadratischen Parabel, die der Funktion

$$M_y(x) = \frac{p_z x}{2}(l-x) \quad (11.17)$$

entspricht, gegeben.

Geht man mit diesen Ansätzen nun in die Formulierung der (mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten) zweiten Variation des Potentials

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \left(EA_{yy} v_M'^2 + EA_{zz} w_M'^2 + EA_{\omega\omega} \vartheta'^2 + GI_D \vartheta'^2 + M_y (2v_M'' \vartheta + r_{M_z} \vartheta'^2) \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x=0}^l c_y (v_M - z_{cM} \vartheta)^2 dx - \int_{x=0}^l p_z \left(w_M + y_p^M \vartheta - \frac{1}{2} z_p^M \vartheta^2 \right) dx \end{aligned} \quad (11.18)$$

des vorliegenden Systems und bildet nach Formulierung der Variationsbedingungen indifferenten Gleichgewichts für das Funktional

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi^* = 0 \right), \quad \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi^* = 0 \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi^* = 0 \right) \quad (11.19)$$

ein Gleichungssystem für die drei Variablen A, B und C, so kann dessen symmetrische (3x3) – Koeffizientenmatrix zu

$$\mathbf{M}^{c_y} = \begin{pmatrix} \frac{EA_{yy} \pi^4}{2l^3} + \frac{lc_y}{2} & 0 & \frac{p_z l}{8} \left(-\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) - \frac{lc_y z_{cM}}{2} \\ 0 & \frac{EA_{zz} \pi^4}{2l^3} & 0 \\ \frac{p_z l}{8} \left(-\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) - \frac{lc_y z_{cM}}{2} & 0 & \frac{EA_{\omega\omega} \pi^4 + GI_D l^2 \pi^2}{2l^3} + \frac{p_z l}{2} \left(z_p^M + \frac{r_{M_z} \pi^2}{12} - \frac{r_{M_z}}{4} \right) + \frac{lc_y z_{cM}^2}{2} \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

angeschrieben werden.

In den Einträgen der Matrix \mathbf{M}^{c_y} wird sichtbar, wie die kontinuierliche Bettung c_y die Biegesteifigkeit des Systems zur Seite (EA_{yy}) vergrößert. Man könnte also hier den Term $\left(\frac{EA_{yy}\pi^4 + l^4 c_y}{2l^3}\right)$ als effektive Steifigkeit $(EA_{yy})_{eff}$ des Systems gegen seitliches Ausweichen erkennen.

Der Verband bewirkt aber ebenso eine Erhöhung der Drillsteifigkeit des Systems (Term $\frac{lc_y z_{cM}^2}{2}$ in der dritten Spalte der dritten Zeile in \mathbf{M}^{c_y}).

Die charakteristische Gleichung zur Bestimmung von $p_{z,ki}^{c_y}$ mit einem Horizontalverband lautet also

$$\det|\mathbf{M}^{c_y}| = 0 = \left(\frac{EA_{yy}\pi^4}{2l^3} + \frac{lc_y}{2}\right) \cdot \left(\frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3}\right) \cdot \left(\frac{EA_{\omega\omega}\pi^4 + GI_D l^2 \pi^2}{2l^3} + \frac{p_z l}{2} \left(z_p^M + \frac{r_{M_z} \pi^2}{12} - \frac{r_{M_z}}{4}\right) + \frac{lc_y z_{cM}^2}{2}\right) - \left[\frac{p_z l}{8} \left(-\frac{\pi^2}{3} - 1\right) - \frac{lc_y z_{cM}}{2}\right]^2 \cdot \left(\frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3}\right). \quad (11.21)$$

Bei der gebundenen Kippung entlang einer Zwangsdrillachse ist im Gegensatz zur freien Kippung die Verschiebung v in y – Richtung mit der Verdrehung über die kinematische Beziehung

$$v_M = z_{cM} \cdot \vartheta \quad (11.22)$$

gekoppelt (siehe auch Abbildung 11.16).

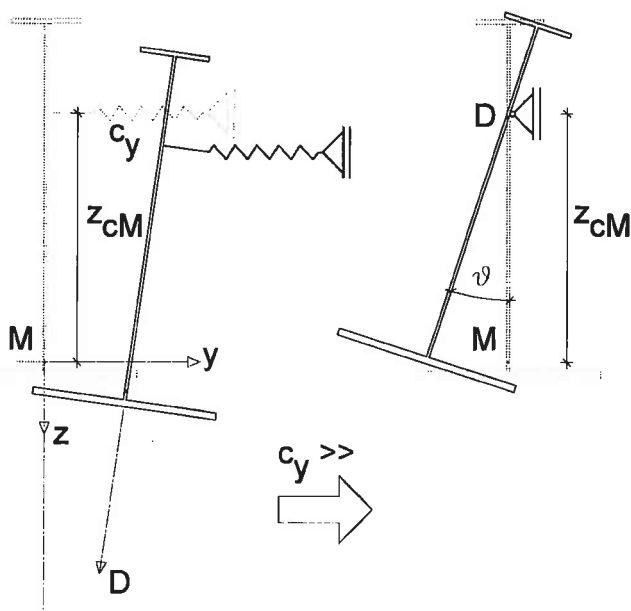


Abbildung 11.16: Kinematik bei gebundener Kippung

Die Lage der Drillachse ist nun durch den Anschlusspunkt der Verbandsebene an den Hauptträger vorgegeben – es handelt sich dabei um die bereits erwähnte *Zwangsdrillachse*.

Dementsprechend lauten die Ansatzfunktionen beim Kippen entlang einer Zwangsdrillachse nun

$$w(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \vartheta(x) = C \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right), v(x) = z_{cM} \cdot C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (11.23)$$

Die Koeffizientenmatrix für B und C ist nun anstelle einer (3x3) – Matrix die (2x2) – Matrix

$$\mathbf{M}^{\text{Zwangsdrillachse}} = \begin{pmatrix} \frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3} & 0 \\ 0 & \frac{EA_{yy}\pi^4 z_{cM}^2 + EA_{\omega\omega}\pi^4 + GI_D l^2 \pi^2}{2l^3} + \frac{p_z l}{2} \left(z_p^M + \frac{r_{M_z} \pi^2}{12} - \frac{r_{M_z}}{4} \right) + p_z l z_{cM} \left(-\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \right) \end{pmatrix} \quad (11.24)$$

Die erste Zeile ist Teil der Beschreibung der einachsigen Biegung um die y – Achse des Querschnitts.

Die zweite Zeile in $\mathbf{M}^{\text{Zwangsdrillachse}}$ ist Teil des Ausdrucks für das Biegedrillknicken des Systems. Präzise formuliert handelt es sich dabei um einachsige Biegung um die z – Achse (Ausweichen zur Seite) unter gleichzeitiger Verdrehung um den Schubmittelpunkt. Die kinematische Koppelung von seitlicher Verschiebung und Verdrehung in Gl. (11.22) zieht sich ja natürlich auch durch den Aufbau der obigen Koeffizientenmatrix.

Das Ausweichen des Querschnitts zur Seite und dessen *gleichzeitige* Verdrehung ist am Term $\left(\frac{EA_{yy}\pi^4 z_{cM}^2 + EA_{\omega\omega}\pi^4 + GI_D l^2 \pi^2}{2l^3} \right)$ in der zweiten Zeile deutlich zu erkennen.

Dieser verbindet den Ausdruck der für die seitliche Verschiebung relevanten Biegesteifigkeit EA_{yy} mit der Wölb- und Drillsteifigkeit des Querschnittes ($EA_{\omega\omega}$ und GI_D), die ihrerseits für die Verwölbung und Verdrillung des Stabes von Interesse sind.

Mit

$$\det \left| \mathbf{M}^{\text{Zwangsdrillachse}} \right| = 0 = \left(\frac{EA_{zz}\pi^4}{2l^3} \right) \cdot \left[\frac{EA_{yy}\pi^4 z_{cM}^2 + EA_{\omega\omega}\pi^4 + GI_D l^2 \pi^2}{2l^3} + \frac{p_z l}{2} \left(z_p^M + \frac{r_{M_z} \pi^2}{12} - \frac{r_{M_z}}{4} \right) + p_z l z_{cM} \left(-\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (11.25)$$

ist die Bestimmungsgleichung für $p_{z,ki}^{Zwangsdrillachse}$ gefunden, ihre einzige Lösung lautet

$$p_{z,ki}^{Zwangsdrillachse} = -\frac{12\pi^2}{l^4} \cdot \frac{EA_{yy}\pi^2 z_{cM}^2 + EA_{\omega\omega}\pi^2 + GI_D l^2}{r_{M_z}(-3 + \pi^2) + z_{cM}(-6 - 2\pi^2) + 12z_p^M} \quad (11.26)$$

Nun kann wieder mit der Vereinbarung, dass die Ergebnisse der ideal kritischen Lasten

beider Systeme z. B. auf 95 % ($\frac{p_{z,ki}^{c_y}}{p_{z,ki}^{Zwangsdrillachse}} = \frac{95}{100}$) genau übereinstimmen sollen, die

gesuchte Mindeststeifigkeit c_y^* für die wegelastische Bettung in y – Richtung bestimmt werden, ab welcher eine „praktische“ Zwangsdrillachse für das System vorliegt.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass der Ausdruck für c_y^* wiederum eine sehr umfangreiche Formel wird und deshalb hier nicht explizit angeführt wird.

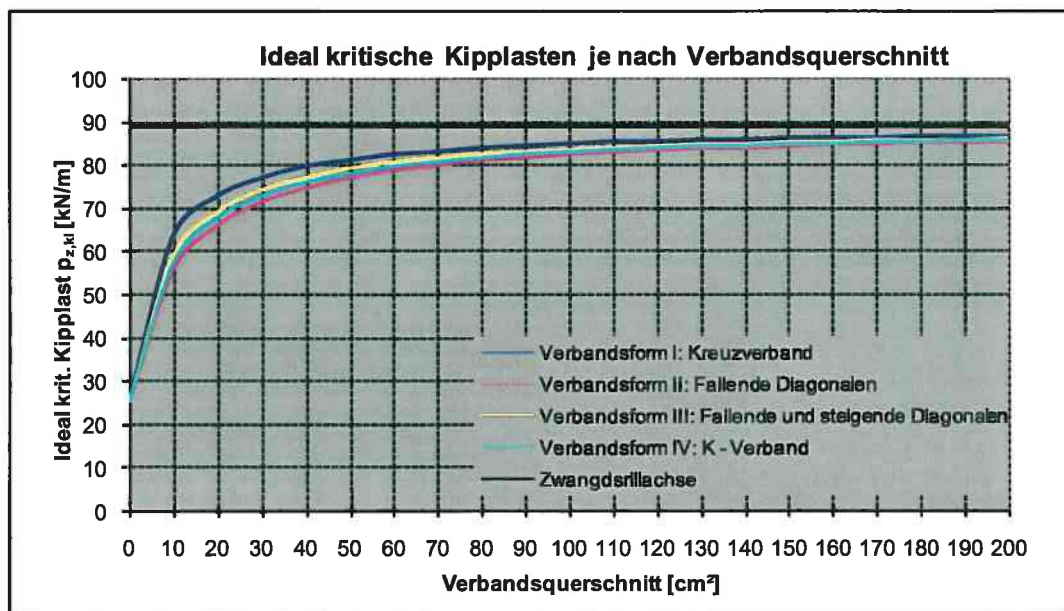


Abbildung 11.17: Ideal kritische Kipplasten je nach Verbandsquerschnitt

Diese in Abbildung 11.17 angegebenen Verläufe der ideal kritischen Lasten gelten für das Brückensystem mit vier Querträgern und einer angenommenen z – Koordinate der Verbandsebene bzw. Zwangsdrillachse von $z_M = -30$ [cm] bei Lastangriffspunkt am Obergurt des Hauptträgers. Dieser Wert wurde gewählt, um positive Werte für $p_{z,ki}$ zu erhalten. Ab einer gewissen Lage der Zwangsdrillachse ist das Kippen des Trägers nämlich unter der gegebenen Belastung nicht mehr möglich (siehe Abschnitt 11.9).

Man sieht durch den steilen Anstieg der Kurven in Abbildung 11.17 deutlich, dass der Beitrag von Verbänden zur Anhebung der ideal kritischen Kipplasten den „Eigenbeitrag“ der Hauptträger recht schnell übersteigt, die Steifigkeit der Verbände also *deutlich* überwiegt. Bei Verwendung eines Kreuzverbandes (Verbandsform I) wird bei einer Querschnittsfläche der Verbandsstäbe von ca. 100 [cm²] der 95%ige Wert der Kipplast für die gebundene Kippung ($p_{z,ki} = 88.99$ [kN/m]) erreicht.

Für die untersuchten Verbandsquerschnitte von $A = 30.00$ [cm²] ergeben sich bereits Werte für die ideal kritischen Lasten, die etwa 80 % jener für das System mit einer Zwangsdrillachse betragen.

Für 0 [cm²] Querschnittsfläche entspricht die ideal kritische Kipplast natürlich jenem des Systems mit 2 Querträgern im Feld *ohne* Verband. Für diesen Fall der freien Kippung wurde $p_{z,ki}$ laut Tabelle 10.3 zu $p_{z,ki} = 25.23$ [kN/m] errechnet.

Den größten Querschnitt müssten die Stäbe eines Verbandssystems der Verbandsform II aufweisen, um die ideal kritische Kipplast des Systems auf den geforderten Wert anzuheben.

Anders als bei der unter Abschnitt 10.3 untersuchten Mindestdrehfedersteifigkeit C_{ϑ}^* zur Erzielung von *ideellen Gabellagerungen* sind hier also die Mindestfedersteifigkeiten, ab welchen eine *ideelle Zwangsdrillachse* erreicht wird, im Verhältnis zu praxisrelevanten Dimensionen nicht mehr ganz so klein.

11.9 Zwangsdrillachse macht Biegedrillknicken unmöglich

Wie gezeigt, kann mit sehr steifen Verbänden, die dann als eine *ideelle Zwangsdrillachse* stabilisierend auf das System wirken, unter Umständen überhaupt verhindert werden, dass das System auf Biegedrillknicken versagt.

Die bekannte Tatsache, dass für bestimmte Lagen der Zwangsdrillachse Biegedrillknicken unter den gegebenen Bedingungen nicht mehr möglich ist, zeigt Abbildung 11.18.

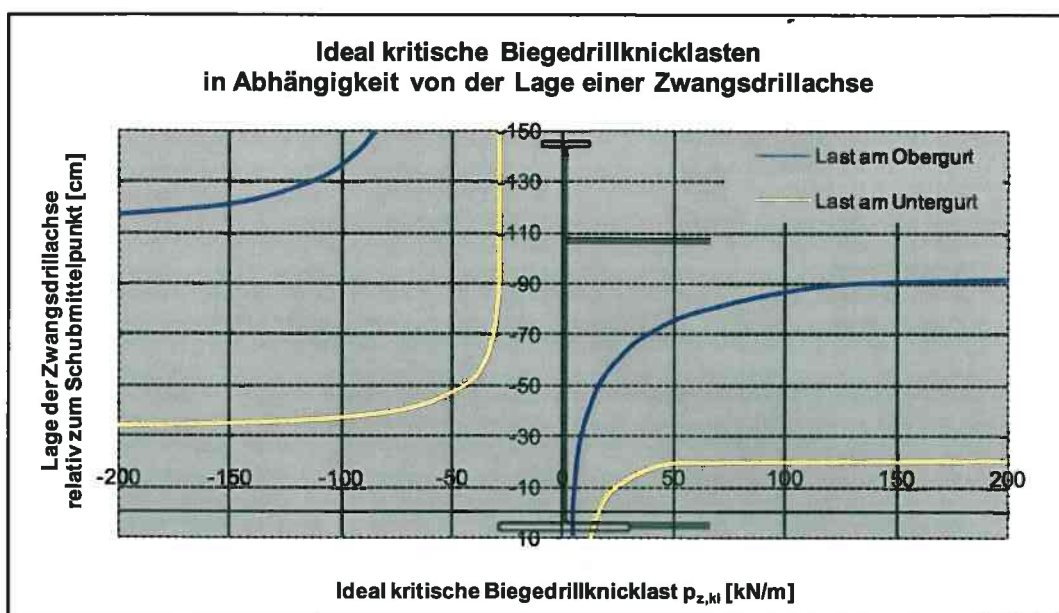


Abbildung 11.18: Ideal kritische Kipplasten je nach Lage der Zwangsdrillachse

Bei Lasteinleitung am Obergurt liegt diese Lage der Zwangsdrillachse für das untersuchte System etwa 90 [cm] über dem Schubmittelpunkt. Bei darüber liegenden Lagen einer Zwangsdrillachse wird Kippen *unmöglich*.

Ist die Last hingegen am Untergurt des Hauptträgers „angehängt“, wird Kippen bereits bei einer Zwangsdrillachse, die sich nur ca. 25 [cm] über dem Schubmittelpunkt befinden muss, unter den gegebenen Bedingungen nicht mehr möglich.

Kippen könnte erst dann eintreten, wenn die Last ihre Richtung umkehren würde, für den vorliegenden Fall müsste also die Belastung umschlagen und von unten nach oben (in negativer z – Richtung) wirken.

Hier wird auch der Einfluss des Lastangriffsortes untersucht und es zeigt sich – für den untersuchten Fall des Einfeldträgers, bei dem der Obergurt der gedrückte Bauteil ist – deutlich, dass es für das Stabilitätsverhalten günstiger ist, Lasten am Träger unten „anzuhängen“, als sie auf dessen Obergurt „stehend“ einzuleiten.

Stabilitätsversagen gemäß gebundener Kippung ist hier bei unten angehängten Lasten nur in viel kleinerem Maße möglich als bei oben aufgestellten Lasten.

In vielen praktischen Fällen ist es jedoch nur schwer bis gar nicht möglich, den Ort der Lasteinwirkung dermaßen zu verändern, dass es zu einer Entlastung des System käme.

Der Einfluss des Ortes der Lasteinleitung konservativer (richtungstreuer) Kräfte in das System ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

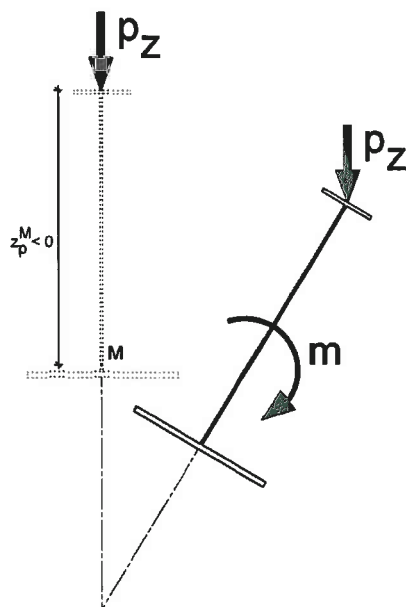


Abbildung 11.19:

Kraftangriff bewirkt „abtreibendes Moment“

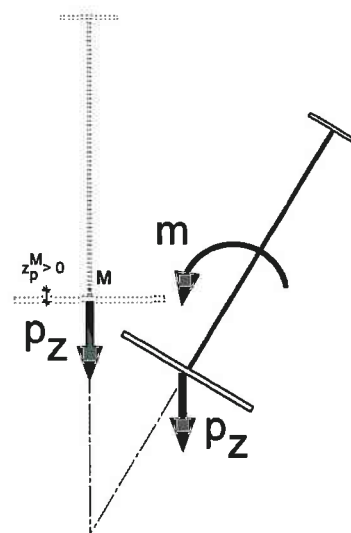


Abbildung 11.20:

Kraftangriff bewirkt rücktreibendes Moment

Definitionsgemäß werden bei der Wölbkrafttorsion nach Theorie II. Ordnung die Differentialgleichungen am verformten System aufgestellt.

In den Termen des Potentials – Gl. (5.15) – spielt die Stelle des Lastangriffs (z_p^M laut obiger Skizze) im Bezug auf den Schubmittelpunkt eine große Rolle. Bei Lasten mit negativen Werten für z_p^M (z. B. Lasten am Obergurt) vergrößert sich die Belastung des Systems durch das abtreibende Moment zusätzlich gemäß Abbildung 11.19.

Im Falle positiver Werte von z_p^M (z. B. bei unten „angehängten“ Lasten) wirkt das dadurch bewirkte Torsionsmoment rückdrehend auf das System und somit entlastend, wie in Abbildung 11.20 veranschaulicht wird.

Eine Erweiterung der Abbildung 11.18 für weitere Angriffspunkte der äußeren Belastung zeigt Abbildung 11.21.

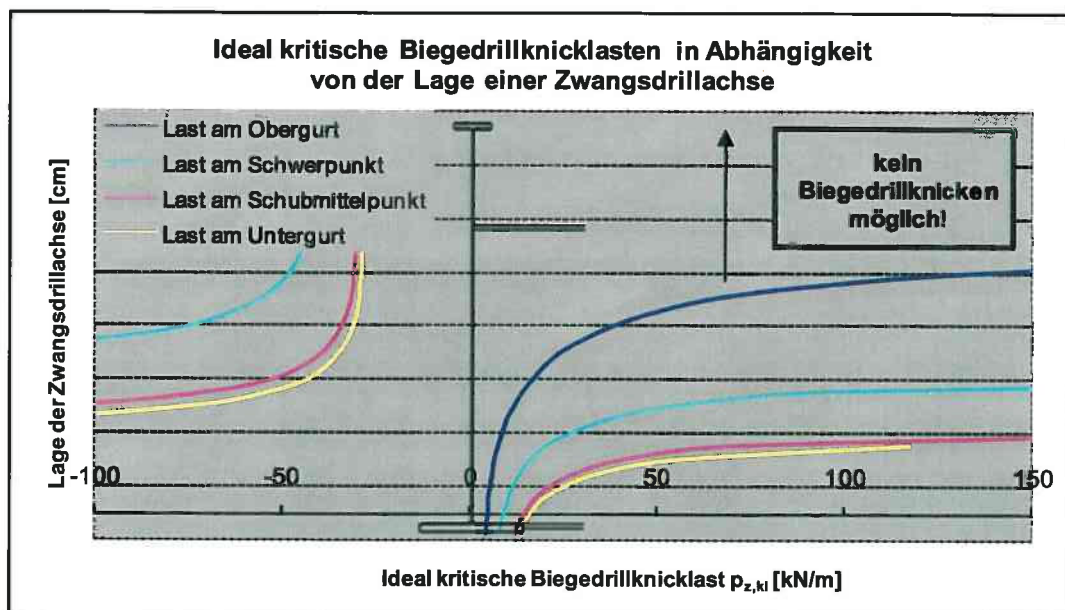


Abbildung 11.21: Ideal kritische Kipplasten bei gebundener Kippung je nach Lastangriffsort

11.10 Einfluss des Angriffsortes der äußeren Belastung auf ideal kritische Lasten

In den Differentialgleichungen (6.1), mit denen das Biegedrillknicken beschrieben werden kann, wird der Angriffspunkt der äußeren Belastung mit seinen Koordinaten y_p^M und z_p^M erfasst. Bei praktischen Bauvorhaben wird es zwar meist nur schwer möglich sein, durch die Wahl von günstigen Lastenleitungspunkten die Sicherheit gegen Stabilitätsverlust zu erhöhen. Dennoch soll an dieser Stelle auf den Einfluss des Angriffsortes der äußeren Belastung auf die ideal kritische Last eingegangen werden, da dieser auch einen wichtigen Faktor für das Biegedrillknicken darstellt.

Für das System mit vier Querträgern ergibt sich unter Verwendung der Ansatzfunktionen

$$v(x) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right), w(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \text{ und } \vartheta(x) = C \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right). \quad (11.27)$$

und der üblichen Berechnungen (siehe vorige Abschnitte) folgende Bestimmungsgleichung für die ideal kritische Last in Abhängigkeit von der Koordinate des Lastangriffspunktes z_p^M ($y_p^M = 0$):

$$p_{z,ki} = -\frac{1}{z_p^M} \cdot \left(\frac{81\pi^4 E^2 A_{\omega\omega} A_{yy} + 9\pi^2 EI^2 M_y A_{yy} r_{M_z} + 9\pi^2 EI^2 GI_D A_{yy} - I^4 M_y^2}{EI^4 A_{yy}} \right). \quad (11.28)$$

Wie die Gleichung zeigt, besteht ein direkter, linearer Zusammenhang zwischen der ideal kritischen Biegedrillknicklast und der z – Koordinate des Lastangriffspunktes.

Den Verlauf dieser Lösungskurve für das betrachtete System zeigt die folgende Abbildung.

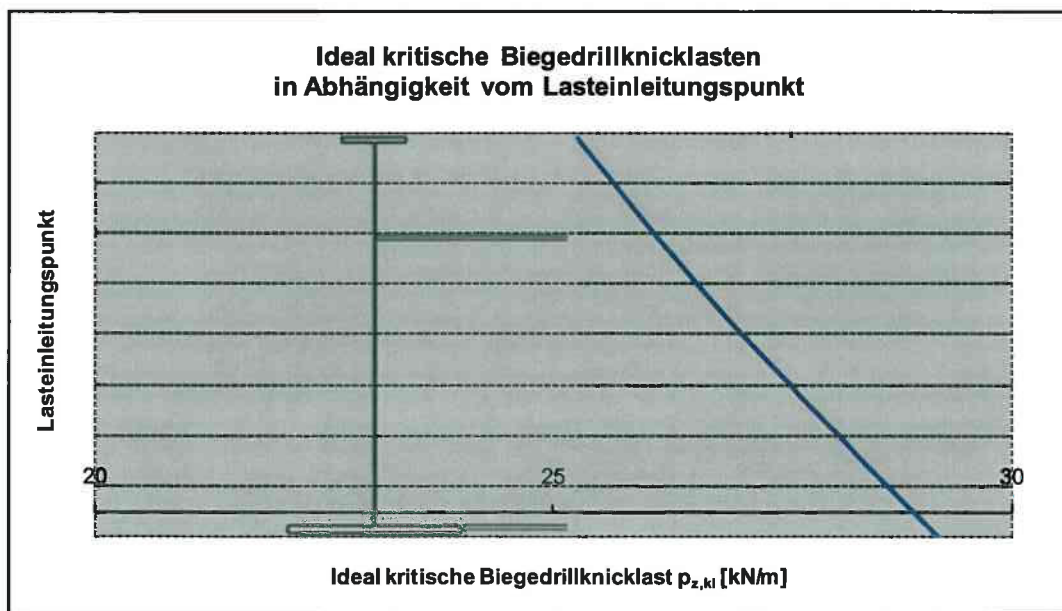


Abbildung 11.22: Verlauf der ideal kritischen Kipplast je nach Höhe der Lasteinleitung

Für den Fall einer Lasteinleitung im Untergurt ergibt sich für $p_{z,ki}$ ein um ca. 15 % höherer Wert als bei Lasteinleitung im Obergurt.

12 VERGLEICH DER AUSSTEIFUNGSMETHODEN QUERTRÄGER UND HORIZONTALVERBÄNDE

In den Kapiteln 10 und 11 werden für das vorliegende Brückensystem (siehe Kapitel 9) der Einfluss von Querträgern und Horizontalverbänden auf die ideal kritischen Biegedrillknicklasten untersucht.

Das Ergebnis dieser Berechnungen zeigt, dass sowohl die Anordnung von Querträgern als auch das Aussteifen der Brücke durch Verbände gute Möglichkeiten darstellen, die ideal kritischen Lasten des Systems, die zum Stabilitätsverlust zufolge Biegedrillknickens führen, deutlich zu steigern.

Bereits bei äquidistanter Anordnung von sechs Querträgern entlang der Hauptträger wird noch vor Stabilitätsverlust die Traglast zufolge Erreichen der zulässigen Fließspannung am Querschnitt erreicht. Dies ist auch darauf zurückzuführen, dass die Abmessungen der Brücke bereits für die Tragsicherheit im Endzustand optimiert sind.

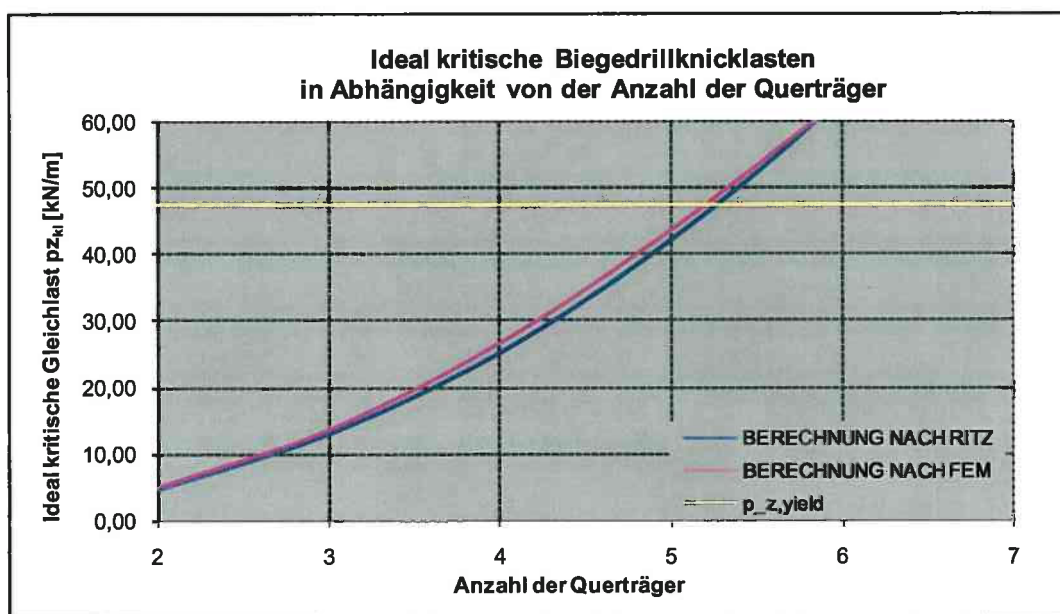


Abbildung 12.1: Ideal kritische Biegedrillknicklasten je nach Anzahl der Querträger

Für das Systemverhalten mit Aussteifungsverbänden wird angenommen, dass die im Kapitel 10 untersuchten Querträger ebenfalls vorhanden sind, um die Formtreue des Gesamtquerschnitts über die Brückenlänge zu gewährleisten. Zwischen zwei Querträgern gelangt immer ein Verbandsfeld zur Anordnung.

Die in der Folge ermittelten ideal kritischen Biegedrillknicklasten liegen somit weit über der elastischen Traglast des Systems (Kriterium: $f_{y,d}$).

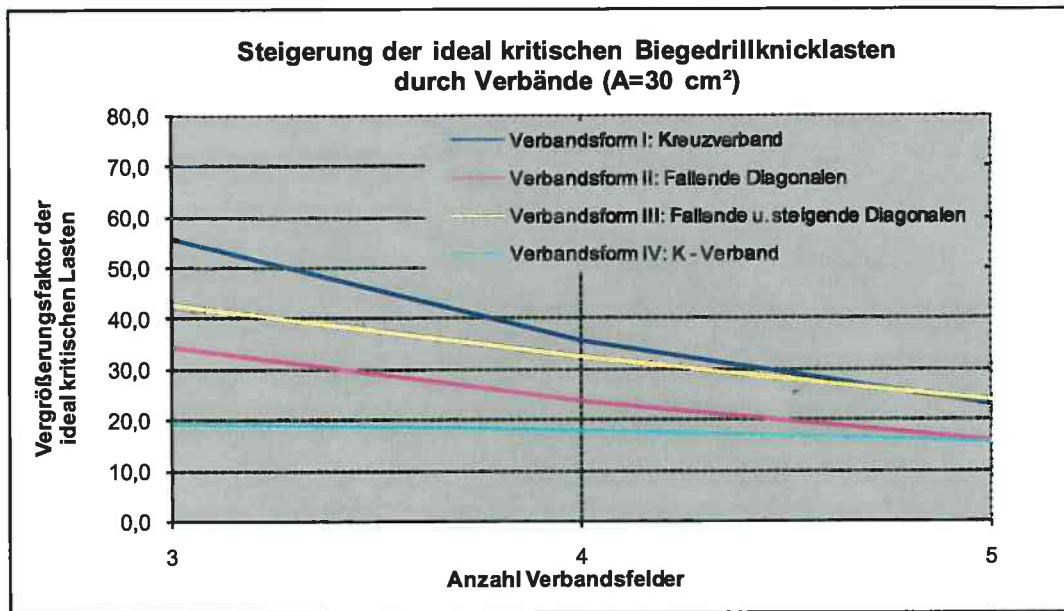


Abbildung 12.2: Vergleich der Verbandsformen

Es kann also keine Empfehlung darüber abgegeben werden, ob durch die Anordnung von Querträgern oder Verbänden wirkungsvoller stabilisiert werden kann, da die Querträger ja bei beiden Methoden als vorhanden angenommen werden.

Es kann aber gezeigt werden, dass für das vorliegende Brückensystem die Anordnung von Querträgern genügt, um im Bauzustand die Stabilität gegenüber Biegedrillknicken zu gewährleisten.

Dennoch ist es oft notwendig, Verbände anzuordnen, um die Lastabtragung und Aussteifung in anderen Lastfällen (z.B. Windverbände) herzustellen.

Diese vorhandenen Verbände verursachen zwar teilweise erheblichen Mehraufwand an Material und Kosten (Montage und Instandhaltung) und behindern möglicherweise auch die Bauausführung – in Kombination mit den Querträgern werden die ideal kritischen Lasten des Systems jedoch so weit angehoben, dass die Erfüllung des Stabilitätsnachweises für Biegedrillknicken kein Problem darstellt.

13 MÖGLICHE MODELLBILDUNGEN SAMT ZUGEHÖRIGER ANSATZFUNKTIONEN FÜR DAS RITZ'SCHE VERFAHREN

Um die Stabilität des Systems mit Querträgern und Horizontalverbänden untersuchen zu können, ist eine geeignete Modellbildung notwendig.

Diese könnte aussehen, wie es in der folgenden Abbildung dargestellt ist.

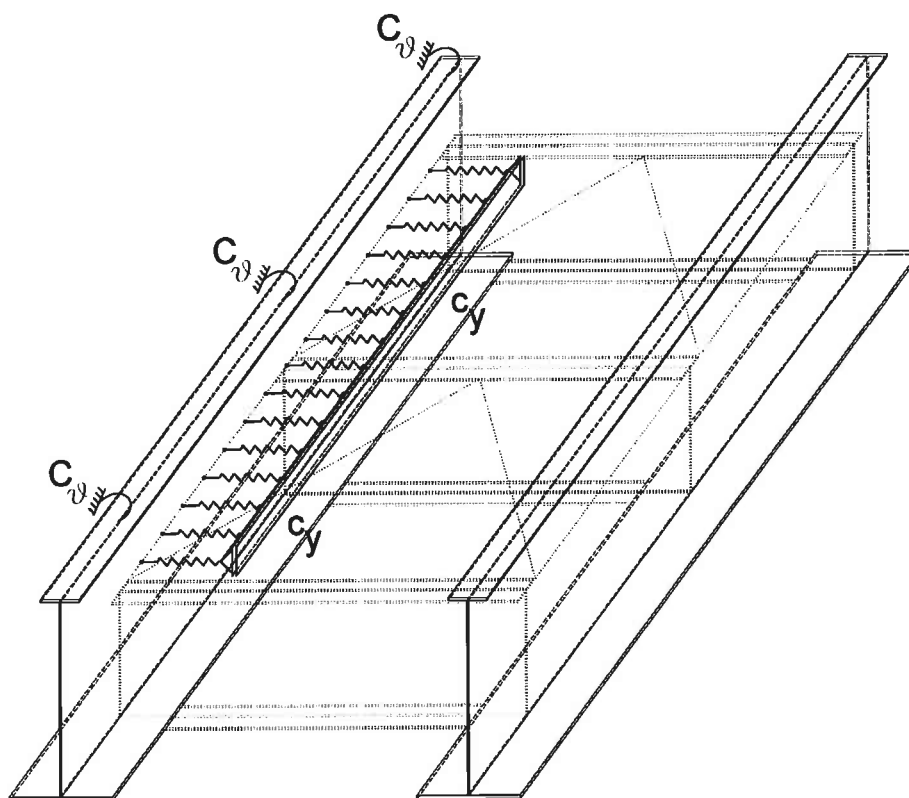


Abbildung 13.1: Modellbildung zur Stabilitätsuntersuchung der Hauptträger

Die Querträger werden durch drehelastische Einzelfedern (rotatorische Drehfedersteifigkeit C_ϕ) und die Horizontalverbände als wegelastische Bettungen (mit den translatorischen Bettungsziffern c_y) im Modell erfasst.

ZUGEHÖRIGER ANSATZFUNKTIONEN FÜR DAS RITZ'SCHE VERFAHREN

In Abhängigkeit der beiden Federsteifigkeiten können (unter Momentenbelastung) folgende Fälle unterschieden werden:

		Querträgersteifigkeit		
		$c_{\beta} = 0$	$0 < c_{\beta} < \infty$	$c_{\beta} = \infty$
Verbandssteifigkeit	$c_y = 0$	freie Kippung ohne Drehbehinderung durch Querträger	freie Kippung mit Drehbehinderung durch Querträger	freie Kippung mit Gabellagern in Anschlusspunkten der Querträger
	$0 < c_y < \infty$	Kippung mit seitlicher Stützung ohne Drehbehinderung durch Querträger	Kippung mit seitlicher Stützung und Drehbehinderung durch Querträger	Kippung mit seitlicher Stützung und Gabellagern in Anschlusspunkten der Querträger
	$c_y = \infty$	gebundene Kippung entlang Zwangsdrillachse ohne Drehbehinderung durch Querträger	gebundene Kippung entlang Zwangsdrillachse mit Drehbehinderung durch Querträger	gebundene Kippung entlang Zwangsdrillachse mit Gabellagern in Anschlusspunkten der Querträger

Tabelle 13.1: Verschiedene Modellbildungen je nach Steifigkeitsverhältnissen

Von entscheidender Bedeutung für die Qualität des Berechnungsergebnisses wird also sein, ob das gewählte Modell auch den tatsächlichen Steifigkeitsverhältnissen entspricht. Vor der Formulierung der Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten ist zu prüfen, ob nicht zufolge der Verbandssteifigkeit etwa eine gebundene Kippung entlang einer Zwangsdrillachse vorliegt. Außerdem ist die Drehfedersteifigkeit der Querträger dahingehend zu beurteilen, ob sie wie ein ideales Gabellager auf das System wirken.

Erst nach diesen Überprüfungen können die Ansatzfunktionen richtig formuliert und die ideal kritischen Biegedrillknicklasten des Systems ermittelt werden.

ZUGEHÖRIGER ANSATZFUNKTIONEN FÜR DAS RITZ'SCHE VERFAHREN

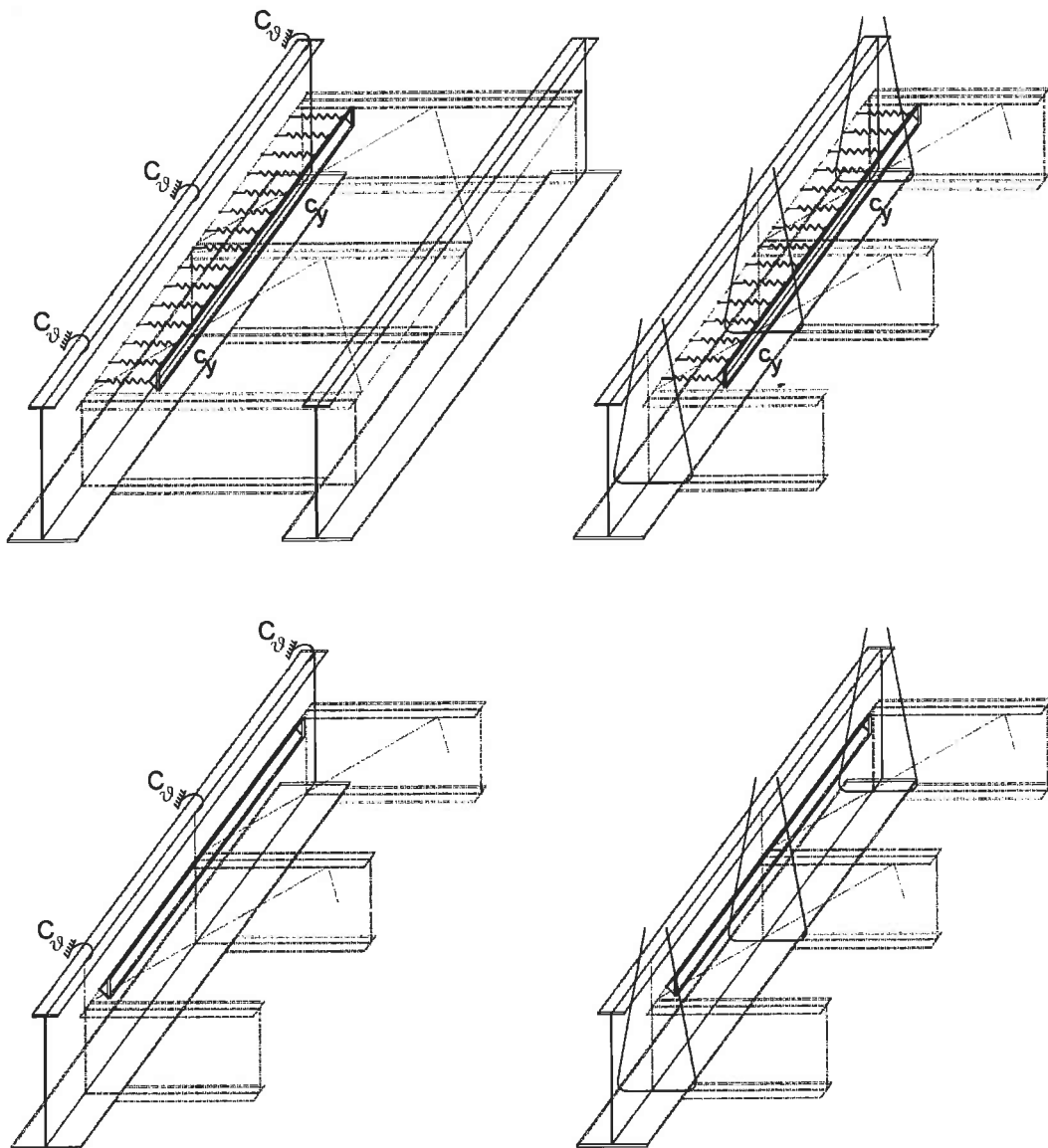


Abbildung 13.2: Mögliche Modellbildungen für die Hauptträger

In der Folge wird abschließend eine Übersicht einfacher, möglicher Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten zur Berechnung eines Brückensystem mit (n) Querträgern und $(n-1)$ Verbandsfeldern nach der Potentialmethode angegeben.

Die Verbandslage wird durch die Koordinate z_{cM} im Bezug auf den Schubmittelpunkt erfasst. Mit ausreichender Genauigkeit wird die Anzahl der Glieder in den Ansatzfunktionen mit der Welligkeit der ersten Eigenform minus Eins beschränkt. Dies bedeutet z. B. für $n=5$ einen Ansatz mit vier Gliedern.

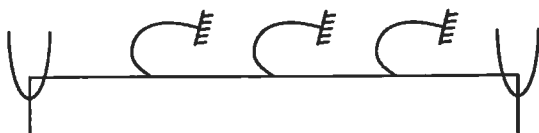


Abbildung 13.3:

Modellbildung für das Brückensystem mit $n=5$

ZUGEHÖRIGER ANSATZFUNKTIONEN FÜR DAS RITZ'SCHE VERFAHREN

		Querträgersteifigkeit	
		$C_g < C_g^*$	$C_g > C_g^*$ (Querträger wirkt wie Gabellager)
Verbandssteifigkeit	$c_y < c_y^*$	$g = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$ $v = \sum_{i=1}^{n-1} B_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$ $w = C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$	$g = A \sin\left(\frac{(n-1)\pi x}{l}\right)$ $v = B \sin\left(\frac{(n-1)\pi x}{l}\right)$ $w = C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$
	$c_y > c_y^*$ (Verband wirkt wie Zwangsdrillachse)	$g = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$ $v = z_{cM} \cdot g = z_{cM} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$ $w = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$	$g = A \sin\left(\frac{(n-1)\pi x}{l}\right)$ $v = z_{cM} \cdot g = z_{cM} \cdot A \sin\left(\frac{(n-1)\pi x}{l}\right)$ $w = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

Tabelle 13.2: Mögliche Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten

14 SCHLUSSBEMERKUNGEN

Für einfachste Systeme wie Einfeldträger mit beidseitiger Gabellagerung und ein- oder zweifach symmetrischen Querschnitten und entsprechend einfachen Lastbildern (Gleichlasten, konstante Momentenbelastung u. ä.) existieren Lösungen für Stabilitätsuntersuchungen mit Augenmerk auf das Biegedrillknicken in der Literatur.

Weicht das System jedoch von diesen genannten Bedingungen nur geringfügig ab (z. B. durch den Einbau von Querabstützungen), gestaltet sich dessen Stabilitätsuntersuchung meist sehr schwierig und aufwändig. Der Ingenieur wird mit allen Mitteln in den gültigen Vorschriften und Normen nach vereinfachten Berechnungsvorschriften bzw. gar Bedingungen, deren Einhaltung zur Vernachlässigung von genaueren Biegedrillknick – Untersuchungen berechtigen, suchen, um großen Berechnungsaufwand zu vermeiden.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die aufwändigen und zeitintensiven Berechnungen im Zuge von Stabilitätsuntersuchungen für Biegedrillknicken (sei es mit Hilfe von Software wie 3D FEM – Programmen oder händisch) bei Kenntnis des Sachverhalts durch Näherungslösungen nach der Potentialmethode mit dem RITZ'schen Verfahren sehr vereinfacht werden können, ohne dass die Qualität der damit erhaltenen Ergebnisse stark darunter leiden würde.

Mit Hilfe einfachster trigonometrischer Ansatzfunktionen lässt sich das komplexe Stabilitätsverhalten des untersuchten Brückensystems oftmals ausreichend genau beschreiben, um sehr gute Abschätzungen der ideal kritischen Lasten zu erhalten.

Auch die Berücksichtigung verschiedener Aussteifungselemente, die zur Erhöhung des Widerstandes gegen Stabilitätsversagen zufolge Biegedrillknickens beitragen, kann in diesen Näherungslösungen erfolgen. Dies geschieht durch geeignete Modellbildungen mit Hilfe von Federmodellen.

Die ideal kritischen Lasten des untersuchten Brückensystems können sowohl durch die Anordnung von Querträgern als auch die Verwendung von Aussteifungsverbänden sehr effizient gesteigert werden.

Damit ist es möglich, den Widerstand gegen Stabilitätsversagen wirkungsvoll anzuheben.

15 LITERATUR

- [1] *PFLÜGER, Alf*: Stabilitätsprobleme der Elastostatik; 3. Auflage – Berlin, Springer – Verlag, 1974.
- [2] *ROIK, CARL, LINDNER*: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe; 1. Auflage – Berlin und Dortmund, Wilhelm Ernst & Sohn – Verlag, 1972.
- [3] *PETERSEN, Christian*: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen; 2. Auflage – München, Friedr. Vieweg & Sohn – Verlag, 1982.
- [4] *FINK, Josef*: Besondere Stabilitätsprobleme im Stahlbau; Studienblätter und Vorlesungsmitschrift zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Stahlbau, TU Wien, 2004.
- [5] *FINK, Josef*: Stabilitätsuntersuchungen der Stahlkonstruktion von Verbundbrücken im Montagezustand; Diplomarbeit, Institut für Stahlbau, TU Wien, 1988.
- [6] *MANG, Herbert; HOFSTETTER, Günter*: Festigkeitslehre; 1. Auflage – Wien, Springer – Verlag, 2000.
- [7] *RAMHARTER, Gerhard*: Mathematik 2 für Bauingenieure; Skriptum und Vorlesungsmitschrift zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien, 2002.
- [8] *NEMETSCHKE ALLPLAN v2004*: Software für die Tragwerksplanung; Copyright © Nemetschke AG 1994–2003; <http://www.nemetschke.de>
- [9] *MAPLE v6.01*: Mathematiksoftware; Copyright © Waterloo Maple Inc. 1981–2000; <http://www.maplesoft.com>
- [10] *InfoCAD v6.08c*: Software für die Tragwerksplanung; Copyright © InfoGraph GmbH 1995–2004; <http://www.infograph.de>
- [11] *ÖNORM EN 1993-1-1*: Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten, Ausgabe: 2005-11-01.

- [12] TREFZ, Henry; Die Reichenbachtalbrücke; [http://www.tri-c.de/Die Autobahn/Die Bauwerke/Brucken/Reichenbachtal/reichenbachtal.html](http://www.tri-c.de/Die_Autobahn/Die_Bauwerke/Brucken/Reichenbachtal/reichenbachtal.html); 2006-09-01.
- [13] DOKA – Die Schalungstechniker; Havelbrücke Plaue; <http://www.doka.com/doka/deglobal/references/constructionmethods/bridgeconstruction/compositebridges/pages/03308/index.php>; 2006-09-01.

16 ANHANG

16.1 Maple – Skripts

Im Folgenden sind die unkommentierten Berechnungsalgorithmen, die zur Berechnung im Mathematik – Softwarepaket MAPLE (siehe 7.1) erstellt wurden, wiedergegeben.

16.1.1 Berechnung der Querschnittswerte der Haupt- und Querträger

```
# Routine zur Berechnung der Querschnittswerte geschweißter,
einfachsymmetrischer Profile

restart;
bog:=30;tst:=1.2;bug:=80;tog:=2.;hst:=150.0;tug:=3.0;
w1:=- (hst+tog/2+tug/2) * (bug/2) ;w2:=-w1;
A:=bog*tog+tst*hst+tug*bug;
Id:=1/3*(bog*tog^3+hst*tst^3+bug*tug^3);
Ay1:=0;Az1:=tst*hst*(tog/2+hst/2)+bug*tug*(tog/2+hst+tug/2);
Aw1:=0;Ayz1:=0;
Ayw1:=1/3*bug/2*w1*bug/2*tug+1/3*(-bug/2)*w2*bug/2*tug;Azw1:=0;
Ayy1:=(1/3*(bog/2)^2*bog/2+1/3*(bog/2)^2*bog/2)*tog+
(1/3*(bug/2)^2*bug/2+1/3*(bug/2)^2*bug/2)*tug;
Azz1:=1/3*(tog/2+hst+tug/2)^3*tst+(tog/2+hst+tug/2)^2*bug*tug;
Aww1:=(1/3*w1^2*bug/2+1/3*w2^2*bug/2)*tug;
ys1:=0;zs1:=Az1/A;wA:=0;
Ayz2:=0;Ayw2:=Ayw1-Ay1*Aw1/A;Azw2:=0;
Ayy2:=Ayy1-Ay1^2/A;Azz2:=Azz1-Az1^2/A;
ymb:=0;zmb:=(Azw2*Ayz2-Ayw2*Azz2)/(Ayy2*Azz2-Ayz2^2);
Aww:=Aww1+zmb*Ayw2;Ayy:=Ayy2;Azz:=Azz2;
zM:=- (zs1-zmb);zp_M:=- (zmb+tog/2);z_cyM:=- (zmb+tog/2);
iy:=sqrt(Ayy/A);iz:=sqrt(Azz/A);ip:=sqrt(iy^2+iz^2);
im:=sqrt(ip^2+ymb^2+zM^2);
rmzog:=tog*int((-zs1)*(y^2+(-zs1-(zM))^2),y=-bog/2..bog/2);
rmzst:=tst*int(z*(0+(z-(zM))^2),z=-zs1..(tog/2+hst+tug/2-zs1));
hwx:=(tog/2+hst+tug/2-zs1);
rmzug:=tug*int((hwx)*(y^2+(hwx-(zM))^2),y=-bug/2..bug/2);
r_Mz:=1/Azz*(rmzog+rmzst+rmzug);
```

16.1.2 Berechnungen am System ohne Verbände nach RITZ

```

# Routine zur Berechnung der kritischen Lasten der Hauptträger
unter Gleichlast, Querträger sind als Einzelfedern modelliert,
Verschiebungsansätze mehrgliedrig

restart:with(linalg):with(plots):with(plottools):
E:=21000;l:=3000;A_yy:=132500;A_zz:=1733301.250;A_ww:=101098868.;
G:=8077.;I_d:=886.4;p_z:=p_z;M_y:=p_z/2*x*(1-x);z_pM:=-148.32;
r_Mz:=-125.38;C_theta:=1;
theta :=x -> C1*sin(Pi*x/l)+C2*sin(Pi*2*x/l)+C3*sin(Pi*3*x/l)+
C4*sin(Pi*4*x/l)+0*C5*sin(Pi*5*x/l);
theta_erst:= diff(theta(x),x);theta_zweit:=diff(theta(x),x$2);
th1:=eval(theta(750));
th2:=eval(theta(1500));
th3:=eval(theta(2250));
v:= x->A1*sin(Pi*x/l)+A2*sin(Pi*2*x/l)+A3*sin(Pi*3*x/l)+
A4*sin(Pi*4*x/l)+0*A5*sin(Pi*5*x/l);
v_erst:= diff(v(x),x);
v_zweit:=diff(v(x),x$2);
w:=x->B1*sin(Pi*x/l);
w_erst:=diff(w(x),x);
w_zweit:=diff(w(x),x$2);
Teil1:=1/2*int((E*A_yy*v_zweit^2+E*A_zz*w_zweit^2+E*A_ww*theta_zwei
t^2+G*I_d*theta_erst^2),x=0..l);
Teil2:=1/2*int((M_y*(2*(theta(x))*v_zweit+
r_Mz*theta_erst^2)),x=0..l);
Teil3:=1/2*((C_theta*th1^2+C_theta*th2^2+C_theta*th3^2));
Teil4:=-int((p_z*(w(x)-1/2*z_pM*(theta(x)))^2),x=0..l);
erg:=Teil1+Teil2+Teil3+Teil4;
simplify(erg);
zeile1:=diff(erg,A1);zeile2:=diff(erg,A2);zeile3:=diff(erg,A3);
zeile4:=diff(erg,A4);zeile5:=diff(erg,A5);
zeile6:=diff(erg,B1);zeile7:=diff(erg,B2);zeile8:=diff(erg,B3);
zeile9:=diff(erg,B4);zeile10:=diff(erg,B5);
zeile11:=diff(erg,C1);zeile12:=diff(erg,C2);zeile13:=diff(erg,C3);
zeile14:=diff(erg,C4);zeile15:=diff(erg,C5);
gls:={zeile 1=0,zeile 2=0,zeile 3=0,zeile 4=0 ,
zeile 6=0,zeile11=0,zeile12=0,zeile13=0,zeile14=0}:
temp:=genmatrix(gls, [A1,A2,A3,A4,B1,C1,C2,C3,C4]);
char_g1:=det(temp);
solve(char_g1=0,p_z);

```

16.1.3 Berechnungen am System mit Verbänden nach RITZ

```

# Routine zur Berechnung der kritischen Lasten der Hauptträger
unter Gleichlast MIT VERBÄNDEN, Verbandssteifigkeiten
kontinuierlich verschmiert, Querträger sind als Einzelfedern
modelliert, Verschiebungsansätze mehrgliedrig

restart:with(linalg):with(plots):with(plottools):
E:=21000;l:=3000;a:=830;h:=152.5;A_yy:=132500;
A_zz:=1733301.250;A_ww:=101098868.;
G:=8077.;I_d:=886.4;p_z:=p_z;M_y:=p_z/2*x*(1-x);z_pM:=-148.32;
r_Mz:=-125.38;C_theta:=1; > b:=l/(n-1);
alpha:=evalf(arctan((a/2)/b));Fd:=30.;Fh:=30.;y_cm:=0.6;z_cm:=-
108.32;
theta :=x -> C1*sin(Pi*x/l)+C2*sin(Pi*2*x/l)+C3*sin(Pi*3*x/l)+
C4*sin(Pi*4*x/l)+0*C5*sin(Pi*5*x/l);
theta_erst:= diff(theta(x),x);theta_zweit:=diff(theta(x),x$2);
th1:=eval(theta(750));
th2:=eval(theta(1500));
th3:=eval(theta(2250));
v := x->A1*sin(Pi*x/l)+A2*sin(Pi*2*x/l)+A3*sin(Pi*3*x/l)+
A4*sin(Pi*4*x/l)+0*A5*sin(Pi*5*x/l);
v_erst:= diff(v(x),x);
v_zweit:=diff(v(x),x$2);
w := x-B1*sin(Pi*x/l);w_erst:=diff(w(x),x);w_zweit:=diff(w(x),x$2);
k:=1/2*1/(1/(2*E*Fd*(sin(alpha))^2*cos(alpha))+
1/(2*E*Fh*cot(alpha)));Sid:=2*k;
c_y:=1/2*Sid*(int((v_erst/A+h/2*theta_erst/C)^2,x=0..1))/
(int((v(x)/A+h/2*theta(x)/C)^2,x=0..1));
Teil1:=1/2*int((E*A_yy*v_zweit^2+E*A_zz*w_zweit^2+
E*A_ww*theta_zweit^2+G*I_d*theta_erst^2),x=0..1);
Teil2:=1/2*int((M_y*(2*(theta(x))*v_zweit+
r_Mz*theta_erst^2)),x=0..1);
Teil3:=1/2*((C_theta*th1^2+C_theta*th2^2+C_theta*th3^2));
+1/2*int((c_y*(v(x)-z_cm*theta(x))^2),x=0..1);
Teil4:=-int((p_z*(w(x))-1/2*z_pM*(theta(x))^2),x=0..1);
erg:=Teil1+Teil2+Teil3+Teil4;
simplify(erg);
zeile1:=diff(erg,A1);zeile2:=diff(erg,A2);zeile3:=diff(erg,A3);
zeile4:=diff(erg,A4);zeile5:=diff(erg,A5);
zeile6:=diff(erg,B1);zeile7:=diff(erg,B2);zeile8:=diff(erg,B3);
zeile9:=diff(erg,B4);zeile10:=diff(erg,B5);
zeile11:=diff(erg,C1);zeile12:=diff(erg,C2);zeile13:=diff(erg,C3);
zeile14:=diff(erg,C4);zeile15:=diff(erg,C5);
gls:={zeile 1=0,zeile 2=0,zeile 3=0,zeile 4=0,zeile 6=0,
zeile11=0,zeile12=0,zeile13=0,zeile14=0}:
temp:=genmatrix(gls, [A1,A2,A3,A4,B1,C1,C2,C3,C4]);
char_gl:=det(temp);> solve(char_gl=0,p_z);

```

16.1.4 Berechnungen am System mit Zwangsdrillachse zufolge Verbänden nach RITZ

```

# Routine zur Berechnung der kritischen Lasten der Hauptträger
unter Gleichlast MIT ZWANGSDRILLACHSE ZUFOLGE VERBÄNDEN,
Verbandssteifigkeiten kontinuierlich verschmiert, Querträger sind
als Einzelfedern modelliert, Verschiebungsansätze mehrgliedrig,

restart:with(linalg):with(plots):with(plottools):
E:=21000;l:=3000;a:=830;h:=152.5;A_yy:=132500;
A_zz:=1733301.250;A_ww:=101098868.;
G:=8077.;I_d:=886.4;p_z:=p_z;M_y:=p_z/2*x*(1-x);z_pM:=-148.32;
r_Mz:=-125.38;C_theta:=1; > b:=l/(n-1);
alpha:=evalf(arctan((a/2)/b));
Fd:=3.;Fh:=3.;y_cm:=0.6;z_dm:=-108.32;
theta :=x -> C1*sin(Pi*x/l)+C2*sin(Pi*2*x/l)+C3*sin(Pi*3*x/l)+
C4*sin(Pi*4*x/l)+0*C5*sin(Pi*5*x/l);
theta_erst:= diff(theta(x),x);theta_zweit:=diff(theta(x),x$2);
th1:=eval(theta(750));th2:=eval(theta(1500));
th3:=eval(theta(2250));
v := x -> z_dm*theta(x)
v_erst:= diff(v(x),x);v_zweit:=diff(v(x),x$2);
w := x-B1*sin(Pi*x/l);
w_erst:=diff(w(x),x);w_zweit:=diff(w(x),x$2);
k:=1/2*1/(1/(2*E*Fd*(sin(alpha))^2*cos(alpha))+
1/(2*E*Fh*cot(alpha)));Sid:=2*k;
c_y:=1/2*Sid*(int((v_erst/A+h/2*theta_erst/C)^2,x=0..l))/(int((v(x)
/A+h/2*theta(x)/C)^2,x=0..l));
Teil1:=1/2*int((E*A_yy*v_zweit^2+E*A_zz*w_zweit^2+E*A_ww*theta_zwei
t^2+G*I_d*theta_erst^2),x=0..l);
Teil2:=1/2*int((M_y*(2*(theta(x))*v_zweit+
r_Mz*theta_erst^2)),x=0..l);
Teil3:=1/2*((C_theta*th1^2+C_theta*th2^2+C_theta*th3^2));
+1/2*int((c_y*(v(x)-z_cm*theta(x))^2),x=0..l);
Teil4:=-int((p_z*(w(x)-1/2*z_pM*(theta(x))^2),x=0..l));
erg:=Teil1+Teil2+Teil3+Teil4;
simplify(erg);
zeile1:=diff(erg,A1);zeile2:=diff(erg,A2);zeile3:=diff(erg,A3);
zeile4:=diff(erg,A4);zeile5:=diff(erg,A5);
zeile6:=diff(erg,B1);zeile7:=diff(erg,B2);zeile8:=diff(erg,B3);
zeile9:=diff(erg,B4);zeile10:=diff(erg,B5);
zeile11:=diff(erg,C1);zeile12:=diff(erg,C2);zeile13:=diff(erg,C3);
zeile14:=diff(erg,C4);zeile15:=diff(erg,C5);
gls:={zeile 1=0,zeile 2=0,zeile 3=0,zeile 4=0 ,
zeile 6=0,
zeile11=0,zeile12=0,zeile13=0,zeile14=0};
temp:=genmatrix(gls, [A1,A2,A3,A4,B1,C1,C2,C3,C4]);
char_gl:=det(temp);
solve(char_gl=0,p_z);

```


17 ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1.1: Einheben des Stahltragwerks; [12]	1
Abbildung 1.2: Blick auf Schalwagen mit Baustellen- einrichtung; [12].....	2
Abbildung 1.3: Verbundtragwerk mit Schalwagen und teilweise fertig gestellter Fahrbahnplatte; [12]	2
Abbildung 1.4: Am Obergurt der Hauptträger angreifende Lasten; [13]	3
Abbildung 1.5: Mittels Kranfahrbahn am Untergurt der Hauptträger angreifende Lasten; [13]	3
Abbildung 2.1: Darstellung des Vektors \mathbf{v} in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem; [6].....	4
Abbildung 2.2: TAYLOR'sche Reihe; [6].....	5
Abbildung 3.1: Zum Begriff der Verwölbung; [5]	9
Abbildung 4.1: Stabile Gleichgewichtslage; [6]	13
Abbildung 4.2: Instabile Gleichgewichtslage; [6]	13
Abbildung 4.3: Instabile Gleichgewichtslage; [6]	13
Abbildung 4.4: Störbewegung; [6].....	14
Abbildung 4.5: System und Belastung des EULER – Knickstabes; [6].....	15
Abbildung 4.6: Erste Eigenform des Knickstabes; [6]	15
Abbildung 4.7: Last – Verschiebungsdiagramm für EULER – Knickstab; [6]	15
Abbildung 4.8: Gleichgewichtslage an der Stabilitätsgrenze für ein System mit zwei Freiheitsgraden; [6]	18
Abbildung 5.1: Zum Ebenbleiben der Querschnitte	26
Abbildung 5.2: Schubverzerrung eines Flächenelementes.....	27
Abbildung 6.1: Elementarfälle beim Biegedrillknicken.....	34
Abbildung 6.2: Systemskizze	35
Abbildung 6.3: Analogiesystem Biegung mit Normalkraft nach Theorie II. Ordnung.....	38
Abbildung 8.1: 3D – Gitternetz – Modell der Brückenlängsträger	42
Abbildung 8.2: Detailausschnitt des FEM – Modells mit Aussteifungen im Anschlusspunkt eines Querträgers	43
Abbildung 8.3: Schalenelement vom Typ SH46.....	43
Abbildung 8.4: Biegestab vom Typ RS	44
Abbildung 8.5: Druckstab mit offenem Hutquerschnitt	45
Abbildung 8.6: Systembild für Beispiel 2.....	47
Abbildung 9.1: Brückenquerschnitt (ohne Darstellung von Aussteifungen wie Beulsteifen u. ä.), Maße in [mm]	49
Abbildung 9.2: Verbundbrücke im Bauzustand; [13]	50

Abbildung 9.3: Draufsicht Brückensystem mit Lagerungsschema (Maße in [m]); exemplarisch für drei Querträger im Feld.....51

Abbildung 10.1: Rahmensystem aus Längs- und Querträgern.....56

Abbildung 10.2: Modellierung der Querträger als Einzeldrehfedern.....56

Abbildung 10.3: Verformung der Querträger bei Erreichen der ersten symmetrischer Eigenform der Hauptträger57

Abbildung 10.4: Verformung der Querträger zufolge antimetrischer Eigenform der Hauptträger58

Abbildung 10.5: Mögliche Eigenform der Hauptträger58

Abbildung 10.6: Knickstäbe mit zugehörigen Eigenformen.....59

Abbildung 10.7: Sinushalbwellen erster bis fünfter Ordnung60

Abbildung 10.8: Überlagerung der Sinushalbwellen.....61

Abbildung 10.9: Ideal kritische Biegedrillknicklasten ja nach Anzahl der Querträger64

Abbildung 10.10: Kontinuierliche Drehbettung65

Abbildung 10.11: Ideal kritische Biegedrillknicklasten bei vier Querträgern67

Abbildung 10.12: Erste Eigenform des Systems mit vier Querträgern (programminterne Farbgebung je nach Blechstärken)68

Abbildung 10.13: Eigenform für $C_{\varphi}=100$ [kNm/rad]69

Abbildung 10.14: Eigenform für $C_{\varphi}=543\ 093$ [kNm/rad].....69

Abbildung 10.15: Ideal kritische Biegedrillknicklasten bei fünf Querträgern.....70

Abbildung 10.16: Erste Eigenform des Systems mit fünf Querträgern70

Abbildung 10.17: Ideal kritische Biegedrillknicklasten in Abhängigkeit von C_{φ}71

Abbildung 10.18: Modellbildung für das System mit fünf Querträgern.....72

Abbildung 10.19: Ideal kritische Biegedrillknicklasten bei fünf Querträgern in Abhängigkeit von C_{φ} 76

Abbildung 10.20: Modellbildung für das System mit vier Querträgern.....77

Abbildung 10.21: Ideal kritische Biegedrillknicklasten bei vier Querträgern in Abhängigkeit von C_{φ} 77

Abbildung 11.1: Verbandsfelder mit Kreuzverbänden81

Abbildung 11.2: Ersatzmodell für Horizontalverband.....82

Abbildung 11.3: Bettungsziffern bei mehreren Verbandsfeldern84

Abbildung 11.4: Verbandsschubsteifigkeiten je nach Anzahl der Verbandsfelder.....85

Abbildung 11.5: Lokales Stabilitätsversagen im FEM – Modell (ausgebeultes Stegblech).....87

Abbildung 11.6: Brückensystem mit zwei Querträgern und Verbandsform II88

Abbildung 11.7: Erste Eigenform bei $p_{z,ki} = 925.58$ [kN/m]88

Abbildung 11.8: Vergleich der Verbandsformen89

Abbildung 11.9: Tonnagen der verschiedenen Verbandsformen90

Abbildung 11.10: Fiktive Vergrößerung des Obergurtes91

Abbildung 11.11: Bewertung der Verbände auf Lastebene	91
Abbildung 11.12: Bewertung der Verbände auf Geometrieebene	92
Abbildung 11.13: Bewertung der einzelnen Verbandsformen	94
Abbildung 11.14: Ideal kritische Kipplasten je nach Verbandslage.....	96
Abbildung 11.15: Ideal kritische Biegedrillknicklast in Abhängigkeit von C_y	98
Abbildung 11.16: Kinematik bei gebundener Kippung	100
Abbildung 11.17: Ideal kritische Kipplasten je nach Verbandsquerschnitt.....	102
Abbildung 11.18: Ideal kritische Kipplasten je nach Lage der Zwangsdrillachse	104
Abbildung 11.19: Kraftangriff bewirkt „abtreibendes Moment“	105
Abbildung 11.20: Kraftangriff bewirkt rücktreibendes Moment.....	105
Abbildung 11.21: Ideal kritische Kipplasten bei gebundener Kippung je nach Lastangriffsort	106
Abbildung 11.22: Verlauf der ideal kritischen Kipplast je nach Höhe der Lasteinleitung.....	107
Abbildung 12.1: Ideal kritische Biegedrillknicklasten je nach Anzahl der Querträger.....	108
Abbildung 12.2: Vergleich der Verbandsformen	109
Abbildung 13.1: Modellbildung zur Stabilitätsuntersuchung der Hauptträger	110
Abbildung 13.2: Mögliche Modellbildungen für die Hauptträger	112
Abbildung 13.3: Modellbildung für das Brückensystem mit $n=5$	112

18 TABELLENVERZEICHNIS

Tabelle 8.1: Ergebnisse der FE – Berechnung für Beispiel 1.....	46
Tabelle 8.2: Ergebnisse der FEM – Berechnung für Beispiel 2	48
Tabelle 9.1: Querschnitt Hauptträger, Maße in [mm].....	53
Tabelle 9.2: Querschnitt Querträger, Maße in [mm].....	54
Tabelle 10.1: Querträgerabstände in Brückenlängsrichtung.....	57
Tabelle 10.2: Zum Kriterium von Klöppel – Lie.....	59
Tabelle 10.3: Ideal kritische Lasten in Abhängigkeit von der Querträgeranzahl nach FEM...62	
Tabelle 10.4: Ideal kritische Lasten in Abhängigkeit von der Querträgeranzahl nach RITZ..62	
Tabelle 10.5: Erste Eigenform der Brückensysteme mit zwei bis sieben Querträgern (programminterne Farbgebung je nach Blechstärken).....	63
Tabelle 10.6: Eigenformen für System mit fünf Querträgern (aus FEM).....	79
Tabelle 11.1: Untersuchte Verbandsformen der Horizontalverbände.....	80
Tabelle 11.2: Ideal kritische Lasten für Verbandsform I.....	86
Tabelle 11.3: Ideal kritische Lasten für Verbandsform II.....	86
Tabelle 11.4: Ideal kritische Lasten für Verbandsform III	86
Tabelle 11.5: Ideal kritische Lasten für Verbandsform IV	86
Tabelle 11.6: Bewertungszahlen für Verbandsform I	93
Tabelle 11.7: Bewertungszahlen für Verbandsform II.....	93
Tabelle 11.8: Bewertungszahlen für Verbandsform III.....	93
Tabelle 11.9: Bewertungszahlen für Verbandsform IV.....	93
Tabelle 13.1: Verschiedene Modellbildungen je nach Steifigkeitsverhältnissen.....	111
Tabelle 13.2: Mögliche Ansatzfunktionen für die Verformungskomponenten	113