

Die approbierte Originalversion dieser
Dissertation ist in der Hauptbibliothek der
Technischen Universität Wien aufgestellt und
zugänglich.

<http://www.ub.tuwien.ac.at>



The approved original version of this thesis is
available at the main library of the Vienna
University of Technology.

<http://www.ub.tuwien.ac.at/eng>



Beitrag zur effizienten Strukturoptimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften unter Leitung von

Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Christian Bucher
Inst. Nr. 206
Institut für Hochbau und Technologie

Eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

David Schneider
geboren am 09. Mai 1980
in Gera/Thüringen (Deutschland)

Wien, im März 2010

„Zu wissen, was man weiss, und zu wissen, was man nicht weiss, das ist Wissen.“

Konfuzius

Vorwort

Mein besonderer Dank gilt Professor Christian Bucher für die Betreuung der Promotion. Vor allem seinem Weitblick und den stets richtigen Worten ist es zu verdanken, dass es möglich war, die Arbeit unter den gegebenen Randbedingungen zu vollenden. Ebenso danken möchte ich Doktor Fabian Duddeck für die hilf- und lehrreichen Hinweise welche die folgenden Seiten um wichtige Aspekte bereicherten. Bei beiden Herren möchte ich mich zutiefst für die Begutachtung der Dissertation und jede Minute ihrer wertvollen Zeit bedanken.

Doktor Thomas Most und Jörg Riedel halfen mir durch viele fruchtbare Diskussionen und Anregungen über Antwortflächenverfahren, Statistik und Optimierer, welche mich schließlich zu der Idee des SampleRecycling führten. Daniel Arnold nahm mich in Wien auf, half mir bei dem praktischen Beispiel und war da, wenn ich Hilfe brauchte. Ohne ihn wäre Vieles unendlich komplizierter oder gar unmöglich gewesen. Ich danke ihm für Alles und wünsche ihm, dass er sich in einiger Zeit an ähnlicher Stelle befindet und Dankesworte formulieren darf.

Meine Frau Nancy kann ich nur dafür bewundern, wie sie es die letzten Monate geschafft hat, mich zu fordern, zu kritisieren, zu unterstützen und mir zu zeigen, dass noch eine Welt existiert, deren Auflösung man im Allgemeinen nicht in Pixel angibt. Es fällt mir schwer meine Dankbarkeit in Worte zu fassen.

Wien, 01. März 2010

David Schneider

Kurzfassung

Qualität ist eine der wichtigsten Eigenschaften eines Produktes. Sie in einem optimalen Maß anzubieten, kann die Kosten für Nacharbeit, Ausschuß, Rückruf oder Gerichtsprozesse reduzieren, während der Wunsch der Kunden nach Zuverlässigkeit erfüllt wird. Die im Produktentwicklungsprozess gebräuchliche Methode, dieses Ziel zu erreichen, ist die Anwendung der Robust Design Optimization (RDO). Dabei werden skalare Ergebnisse von stochastischen Analysen als Nebenbedingung oder Zielfunktion für die ausgeführte Optimierung verwendet. In der klassischen Herangehensweise wird der Aufwand des Optimierungsalgorithmus mit dem für die stochastische Analyse vervielfacht. In vielen Ingenieurproblemen sind die notwendigen Evaluationen der komplexen Modelle zeitaufwendig oder binden viele Rechenkapazitäten. Da diese Ressourcen in der Regel begrenzt sind, können intensive Studien wie die Optimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten nur selten ausgeführt werden. Einige spezielle Methoden, welche diesen Aufwand reduzieren, werden entwickelt und finden sich in der Literatur. Die meisten sind jedoch fest an eng definierte Aufgabenstellungen gebunden. Die Optimierungsstrategie und Methodik der stochastischen Auswertung sind strikt gekoppelt. Eine Sonderstellung nimmt dabei die zuverlässigkeitsorientierte Optimierung, Reliability Based Design Optimization (RBDO), ein. Eine flexible, anpassungsfähige Verwendung ist kaum möglich. In vielen praktischen Anwendungen muß die ursprüngliche Herangehensweise ausgeführt werden.

Antwortflächenverfahren können verwendet werden, um den numerischen Aufwand zu reduzieren. Die Hauptaufgabe ist es, dabei ein repräsentierendes aber minimales Stützstellenset zu finden. Globale, statische Versuchspläne benötigen ein hohes Maß an Information, um lokale Phänomene abbilden zu können. Einige adaptive DOE-Techniken, welche damit umgehen können, werden in der Literatur beschrieben. Die meisten verweisen jedoch ausschließlich auf eine einzelne Auswahl von Metamodell und abfragendem Algorithmus. Die Wiederverwendung bereits gesammelter Daten wird nur selten adressiert. Eine neue Methodik, welche unabhängig von der Wahl eines exklusiven Metamodells oder einer fest zu wählenden Untersuchungsmethode anwendbar ist, wird in dieser Arbeit vorgestellt. **SampleRecycling**, der neue vorgeschlagene Algorithmus, entscheidet, ob es möglich ist, eine Systemantwort auf Basis einer Antwortfläche zu approximieren. Verschiedene Entscheidungskriterien und deren Kombination werden in dieser Arbeit diskutiert. Wenn die Qualität der Approximation nicht die notwendige Güte erreicht, so muss das komplexe Ingenieurmodell evaluiert werden. Durch Hinzufügen der Ergebnisse zur Datenbank, wächst die Approximationsqualität im untersuchten Gebiet. Alle folgenden Untersuchungen können auf die zuvor erhaltenen Daten zurückgreifen. Somit geht während des Designprozesses kein Wissen verloren. Mit der beschriebenen Strategie wird es zusätzlich möglich, die geforderte Approximationsgüte iterativ zu steigern. Gekoppelte Studien, wie die Robust Design Optimization, können durch diese Eigenschaften und Vorgehensweisen sehr effizient ausgeführt werden. Den Abschluß der Arbeit bilden Beispiele, welche den Nutzen und Mehrwert der vorgeschlagenen Methodik in verschiedenen Anwendungsgebieten nachweisen.

Abstract

Quality is one of the most important properties of a product. Providing it in an optimal dose can reduce costs for rework, scrap, recall or even legal actions while satisfying customers demand for reliability. During the product development the common approach to achieve the goal is to apply Robust Design Optimization (RDO). It uses scalar results of stochastic analysis as constraint or objective to accomplish the optimization. In the classic approach the effort required for stochastic analysis multiplies with that of the optimization algorithm. In many engineering problems the necessary evaluations of one complex model need a lot of computational capacity and time. Since these are limited, it becomes in many cases expensive to accomplish intensive studies like optimization with respect to uncertainties. Some special methods that are reducing the resulting effort can be found in recent research. But most of the developed methods are hard related to one kind of problem definition. Optimizing strategy and quality measuring are strictly coupled. An exceptional position has the optimization with respect to reliability, Reliability Based Design Optimization (RBDO). A flexible and adaptable usage is hardly possible. In most practical applications the primal algorithm needs to be used.

Response surface techniques can be applied to reduce the computational effort. The major challenge therefore is to find a representing but minimal support point set. Global, static experimental design needs a high amount of information to represent important local phenomena. Some adaptive DOE techniques that cope with it can be found in literature. But most of them refer solely on one kind of metamodel and one single demanding kind of algorithm. The recycling of previous gathered data is hardly addressed in converging applications. A new method will be presented that builds adaptive DOE independently from exclusive metamodel or investigation method. Therefore the new proposed algorithm **SampleRecycling** decides whether it is possible to recycle the result from an underlying response surface. Different decision criteria and their combination will be discussed. If the quality of the approximation is not as good as necessary the complex engineering model has to be solved. By adding the obtained results to the database, the approximation quality grows in the region of interest. All further investigations can access information once made. So no intelligence will be lost during a design process. Through the described strategy it is also possible to improve the approximation quality iteratively. Coupled methods like robust design optimization can be accomplished with high efficiency. Some examples will be presented to proof the benefit and useability of the proposed method in different fields of application.

Liste häufig verwendeter Formelzeichen und Abkürzungen

Die folgende Aufstellung gibt häufig verwendete Formelzeichen und Schreibweisen wieder. Abweichende Verwendung ist möglich und im Textzusammenhang erklärt.

COC	...	Cost Of Conformance
CONC	...	Cost Of Non Conformance
COQ	...	Cost Of Quality
DOE	...	Design Of Experiments; (statistischer) Versuchsplan
RBDO	...	Reliability Based Design Optimization
RDO	...	Robust Design Optimization
PRG	...	Polynomregression
IDW	...	Inverse Distanz Wichtung
KRG	...	Kriging
MLS	...	Moving Least Squares

$[\hat{\cdot}]$...	approximierter Wert
$[\tilde{\cdot}]$...	geschätzter Wert
$[\dots]^u$...	obere Grenze (upper bound)
$[\dots]^m$...	mittlerer Wert
$[\dots]^l$...	untere Grenze (lower bound)
x_i^j	...	i-ter Eintrag im Vektor \mathbf{x}^j

N_{inp}	...	Anzahl Inputparameter
N_{out}	...	Anzahl Outputparameter
N_b	...	Anzahl Beobachtungen
d, h	...	Abstand
$w()$...	Wichtungsfunktion
D	...	Einflussradius
$\gamma()$...	Variogramm
λ	...	linearer Wichtungsfaktor
m	...	Anzahl Koeffizienten

\mathbf{Y}, y, f	...	Systemantwort
β, \mathbf{B}	...	Koeffizientenvektor
\mathbf{x}	...	Vektor der Eingabewerte bzw. Koordinatenvektor
\mathbf{X}	...	Matrix der Inputparameterpolynome

δ_q	...	Robustheitsmaß
USG	...	untere Spezifikationsgrenze
OSG	...	obere Spezifikationsgrenze
$g()$...	Grenzzustandsfunktion
$e()$...	Fehlerfunktion
$u()$...	Nutzenfunktion
$l()$...	Verlustfunktion
ϵ	...	Fehler, Abweichung
p	...	stochastische Parameter
d	...	deterministische Parameter

$E[]$...	Erwartungswert
$Cov()$...	Kovarianz
P_f	...	Versagenswahrscheinlichkeit
μ	...	Mittelwert
σ	...	Standardabweichung

$\Phi()$...	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
$\Phi^{-1}()$...	Inverse Standardnormalverteilung
$\sim N(a, b)$...	Normalverteilt mit $\mu = a$ und $\sigma = b$

K_0	...	untere Grenze des Kriteriums
K_1	...	obere Grenze des Kriteriums

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	11
Inhaltsverzeichnis	13
1 Einleitung	15
1.1 Qualitätskosten	17
1.2 Optimierung	20
2 Metamodellierung	25
2.1 Verfahren	28
2.2 Design of Experiments	51
2.3 Adaptives Design of Experiments	58
3 Optimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten	69
3.1 Formulierungen	71
3.2 Robustheitsmaße	74
3.3 Verfahren	79
4 SampleRecycling	83
4.1 Verfahren	85
4.2 Entscheidungskriterien	86
4.3 SampleDecider	89

4.4	Optimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten	92
5	Beispiele	95
5.1	Braninfunktion	96
5.2	Balken unter dynamischer Last	103
5.3	Hochdimensionales analytisches Beispiel	114
5.4	Falltest	121
5.5	Auswertung	126
6	Zusammenfassung und Ausblick	127
	Literaturverzeichnis	131
	Anhang	145
A.1	Abkürzungen der Optimierungsverfahren	145
A.2	Stützstellen Braninfunktion ARSM	146
A.3	Stützstellen Braninfunktion	147
A.4	Stützstellen Balkenbeispiel 1	148
A.5	Stützstellen Balkenbeispiel 2	150

Kapitel 1

Einleitung

Kürzere Entwicklungszyklen, höhere Qualitätsziele und geringe Produktkosten sind nur einige von vielen, ständig steigenden Anforderungen an moderne Produktentwicklungsprozesse. Dazu kommen kontinuierliche Verbesserungen und Neuentwicklungen im Bezug auf Herstellungsprozesse, Materialien oder Formen. Die Konsequenz ist eine breite Vielfalt von möglichen Designvorschlägen. Da schlussendlich nur ein Produkt hergestellt werden kann, muss man sich für eine Variante entscheiden. Dazu wird, im Sinne optimaler Produkte, die Palette der Möglichkeiten hinsichtlich geforderter Kriterien analysiert. Weil es einen entscheidenden Wettbewerbsvorteil darstellt, Produkte mit entsprechender Qualität zu liefern [26], basieren viele der Entscheidungskriterien auf Qualitätsaussagen. Die traditionelle *cost of change* - Kurve [14] zeigt, dass die

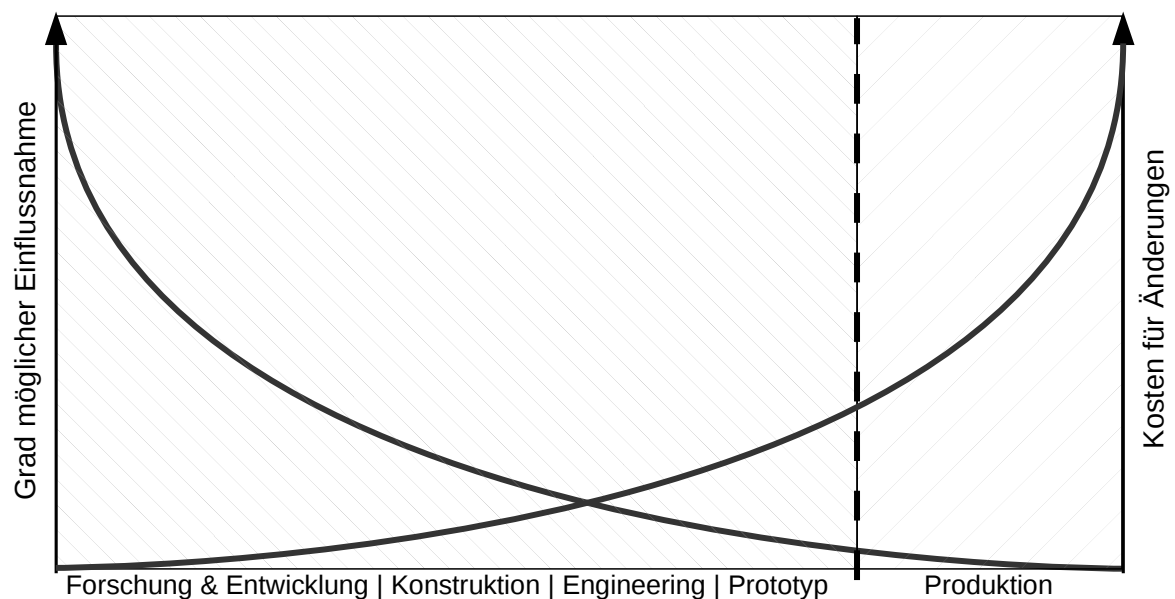


Abbildung 1.1: *cost of change* - Kurve

Kosten für Änderungen am Produkt mit fortschreitendem Entwicklungsprozess steigen. Gleichzeitig sinkt der Grad möglicher Einflussnahme. Es existieren verschiedene Ansätze die Kurvenverläufe zum Beispiel durch agile Vorgehensweisen abzuflachen [11]. Diese Methoden sind jedoch sehr restriktiv und fordernd an die unterliegenden Prozesse. Die Basisaussagen steigender Kosten und sinkender Einflussnahme ändern sich dadurch nicht. Lediglich ihre Relevanz kann geschwächt werden. Die logische Schlußfolgerung aus Abbildung 1.1 ist, dass das Auftreten von Fehlern in späten Entwicklungsphasen minimiert werden muß. Qualitätskritische Entscheidungen müssen so früh wie möglich getroffen werden. Die Qualität muss in ein Produkt „hineingeplant“ werden. Folglich sind die größte Aufmerksamkeit und die meisten Ressourcen in den frühen Entwicklungsphasen anzusiedeln. In vielen Ingenieurproblemen ist es unwirtschaftlich oder schlichtweg unmöglich, nötige Variantenuntersuchungen an Prototypen vorzunehmen. In der Planungsphase eines Gebäudes ist es kaum möglich 1:1 Modelle der Gesamtstruktur zu bauen. Ebenfalls unmöglich ist es, für jeden Lastfall und jede Planungsvariante einen Fahrzeugprototyp herzustellen, um einen Crashtest damit durchzuführen. Deshalb kommen numerische Modelle zum Einsatz. Aber auch in diesem Fall gilt, dass Optimierung, Zuverlässigkeits- oder Robustheitsanalysen eine Vielzahl von Variantenüberprüfungen erfordern. Dies gilt insbesondere für Kombinationen dieser Verfahren zum Beispiel für die Optimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten, und damit der Qualität. In der klassischen Vorgehensweise wird dabei für jedes Optimierungsdesign eine stochastische Auswertung unternommen. Damit multipliziert sich der Aufwand für die Optimierung mit dem für die stochastische Analyse. Die Ressourcen für die Evaluation numerischer Modelle sind dessen ungeachtet limitiert. Ursachen sind Rechenzeiten und -kapazitäten sowie Lizenzkosten. Somit werden häufig günstigere Metamodelle eingesetzt. In vielen Fällen geschieht dies auf Basis von Approximationsverfahren. Die Lage der dafür notwendigen Stützstellen wird über feste Muster generiert. Nur für diese Stützstellen werden Simulationen gerechnet. Durch die Interpolation der Zwischenwerte kann der numerische Aufwand immens gesenkt werden. Hinsichtlich der Dimension ist die Größe des Stützstellensets jedoch von exponentieller Komplexität. Besonders in hoch dimensionalen Problemen müssen lokale Effekte oder Zusammenhänge höherer Ordnung vernachlässigt werden. Die wichtigsten Informationen gehen dann oftmals verloren. Aus diesem Grund werden Verfahren zum adaptiven Gewinnen von Informationen entwickelt. Die verwendeten adaptiven Algorithmen sind zur Zeit meist nur für festgelegte Kombinationen von Untersuchungsalgorithmus und Antwortflächenverfahren entwickelt. Hauptziel der Entwicklungen zur Optimierung von qualitätsrelevanten Maßen ist die Minimierung des Aufwandes. Dieser entsteht durch die gekoppelte Betrachtung von Optimierung und stochastischer Auswertung. In der Literatur finden sich dazu verschiedene Ansätze. In der Regel werden dabei spezielle Eigenschaften der stochastischen Maße genutzt oder Vereinfachungen vorgenommen. Andere Ansätze verfolgen die Möglichkeit den numerischen Aufwand durch die Verwendung von Metamodellen zu minimieren. Derzeit sind diese Prozesse jedoch stark auf den abfragenden Algorithmus oder das verwendete Metamodell angepasst. Eine flexible Anwendung ist daher nicht möglich. Desweiteren wird das Nutzen von Informationen, welche bereits durch andere Untersuchungen vorhanden sind, nur unzureichend adressiert.

In dieser Arbeit wird ein neuer Algorithmus zum adaptiven Generieren eines Stützstellensets vorgestellt, das „**SampleRecycling**“. Es kann unabhängig vom verwendeten Antwortflächenverfahren und der darüberliegenden Untersuchung (z.B. Optimierung) angewendet werden. Zusätzlich können Informationen aus vorangegangenen Untersuchungen in das Stützstellenset eingepasst werden. So steigt die Informationsdichte beziehungsweise sinkt der numerische Aufwand. Das Wissen über bereits evaluierte Stichproben (*engl.* sample) kann demzufolge wiederverwendet (*engl.* to recycle) werden. Das entwickelte Verfahren zielt darauf ab, eine Datenbank anzulegen, in der alle berechneten Varianten gespeichert werden (Abb. 1.5). Alle Abfragen können auf diese Ergebnisse zurückgreifen. Nur wenn der Inhalt der Datenbasis den abgefragten Sachverhalt unzureichend repräsentiert, müssen Informationen gewonnen werden. Diese Information wird dann von der Datenbasis geerbt. In allen anderen Fällen wird das abgefragte Resultat durch Approximation erhalten. Das bedeutet einen geringeren numerischen Aufwand. Durch die Vererbung von Informationen wächst die Dichte im untersuchten Bereich - der Approximationsfehler sinkt. Die Methode ist dadurch ohne signifikanten Genauigkeitsverlust anwendbar. Dabei benötigt sie im Vergleich jedoch nur einen Bruchteil von Modellevaluationen. An mehreren Beispielen wird die Funktionsweise der vorgestellten Verfahrensweise validiert.

1.1 Qualitätskosten

Die Kosten eines Produktes enthalten mehr als Entwicklungs-, Produktions- und Managementkosten. Qualitätsbezogene Aufwendungen dürfen aus genannten Gründen nicht vernachlässigt werden [38]. Sie umfassen zum Beispiel Ausgaben für Nacharbeit, Ausschuß oder Rückruf. Wie bereits beschrieben, ist es einer der größten Wettbewerbsvorteile, die korrespondierende Qualität zu liefern. Andererseits ist es aber auch nicht wirtschaftlich, zu hohe Qualitätsziele zu verwirklichen. Je höher die Anforderungen sind, desto höher sind die Ausgaben für Konformität (*engl.* cost of conformance) *COC*. Gleichzeitig sinken die Ausgaben welche von der Nichtkonformität (*engl.* cost of non-conformance) *CONC* herrühren. Die Summe dieser Posten werden als Qualitätskosten bezeichnet (*engl.* cost of quality) *COQ*. Sie müssen minimiert werden, um die wirtschaftlich optimale Qualität COQ_{min} zu erreichen. In diesem Zusammenhang existieren unterschiedliche Kostenmodelle. Sie finden breite Anwendung in den verschiedensten Wirtschaftszweigen national und international agierender Unternehmen. Die Basisformulierung [36] findet sich in Gleichung 1.1:

$$COQ = COC + CONC \quad (1.1)$$

Häufig werden die Kosten im PAF-Modell (*engl.* prevention, appraisal, failure) [57, 82] erfasst. Es teilt die Konformitätskosten in zwei Gruppen. Die Fehlervermeidungskosten sind, bezogen auf eine untersuchte mechanische Struktur, zum Beispiel Ausgaben für Forschung und Entwicklung, Material oder das Qualitätsmanagement an sich. Die Prüfkosten enthalten die Aufwendungen für die Inspektion der Produkte. Die Kosten

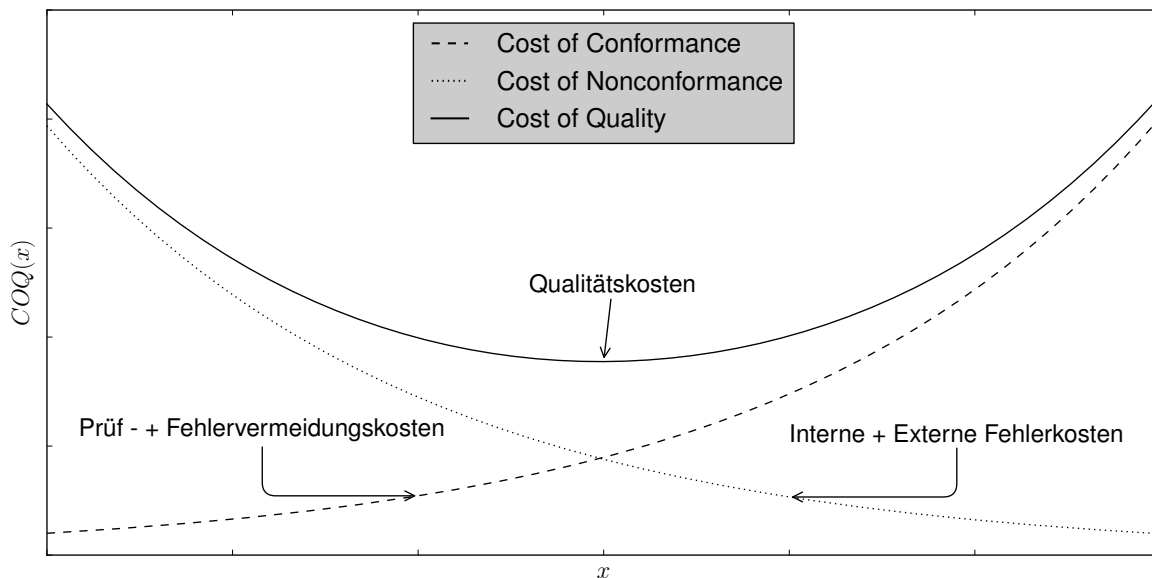


Abbildung 1.2: Konformitätsmodell [106]

für Nichtkonformität werden ebenfalls in zwei Gruppen geteilt. Gelegentliche beziehungsweise mögliche Kosten können in diesen Modellen ebenfalls berücksichtigt werden. Darunter zählen zum Beispiel Rechtsstreitigkeiten oder immaterielle Kosten aus nicht getätigten Verkäufen. Produkte, welche die an sie gestellten Qualitätsanforderungen erreichen oder übererfüllen, stehen in der Gunst der Kunden höher als solche, die dies nicht tun. Marktforschungen zeigen, dass Kunden bereit sind höhere Ausgaben für ein Produkt zu akzeptieren, wenn damit geringere Fehlerquoten einhergehen. Zusätzlich hängt das Vertrauen in den Produzenten stark vom Erreichen dieser Ziele ab. Erwartungen an Neuentwicklungen werden oftmals anhand der Qualität vorangegangener Produkte klassifiziert. Der Verlust von Reputation durch schlechte Kundenmeinung kann ebenfalls berücksichtigt werden [152]. Indem man geringere Erlöse durch Verkaufs-

Fehlervermeidungskosten
Schulungen
Planung
Vergleiche
...

Prüfkosten
Eingangs-/Ausgangskontrollen
Dokumentation
Prüfmittel
...

Interne Fehlerkosten
Wertminderung
Wiederholungskosten
Ausfallzeiten
...

Externe Fehlerkosten
Garantie
Haftung
Rückrufaktionen
...

ausfälle oder einen kleineren erzielbaren Verkaufspreis als Verlust deklariert, erhält man in den genannten Modellen eine zu den Nutzenfunktionen äquivalente Beschreibung. Werden alle Forderungen berücksichtigt, erhält man eine einzelne Zielfunktion ohne Nebenbedingungen. In der Praxis ist es jedoch schwer, a priori alle Kostenarten zu definieren. Um sinnvolle Formulierungen zu finden, sind gesammelte Daten notwendig. Nichtberücksichtigung oder Unterbewertung von bestimmten Kostenarten kann dramatische Konsequenzen nach sich ziehen. Andere Modelle versuchen mittels Lebenszykluskostenrechnung alle Kostenarten über den gesamten Zeitraum der Produktexistenz zu addieren. Sie reichen von der Entwicklung bis zur Entsorgung [29, 63]. Dazu wird die Formulierung der Nutzenfunktion mit den erwarteten Kosten für Ausfälle kombiniert.

Die wirtschaftlich optimale Qualität lässt sich als jene beschreiben, bei der die Differenz von qualitätsabhängigen Erlösen und Kosten am größten ist [81]. Dazu ist eine Definition der Qualität notwendig. In der Vergangenheit wurden verschiedene Beschreibungen gegeben. Juran definiert Qualität als Gebrauchstauglichkeit (*engl.* fitness for use) [82]. Laut Taguchi ist Qualität durch den Verlust, welcher der Gesellschaft entsteht, zu quantifizieren (*engl.* loss to society) [171]. Für Crosby wird sie durch Erfüllung von Bedingungen (*engl.* conformance to requirements) erreicht [36]. Nach der gültigen Norm ist Qualität der „Grad, in dem ein Satz inhärenter Merkmale Anforderungen erfüllt“ [42]. Alle Bewertungen sind also relativ zu sehen. Der Bezugswert wird dabei durch den Kunden, im Vergleich zu Konkurrenten usw. definiert [67]. Crosby ging mit seiner Nullfehlerforderung davon aus, dass sich Qualität immer lohnt. Er forderte einen Qualitätsstandard, welcher keinen Ausfall zulässt. Da die Kosten in einer nicht deterministischen Welt exponentiell mit der Annäherung an dieses Ziel steigen, muss diese Forderung angepasst werden. Zukünftige Verkaufserfolge hängen von der Qualität der Vergangenheit ab. Die Forderung nach perfekten Produkten wird in modernen Prozessen als ferne Endstation von Qualitätszirkeln verstanden. Langfristig erfolgreiche Unternehmungen nutzen Prozesse, welche die Qualität ihrer Produkte ständig steigern. Diese Qualitätszirkel fordern in jedem Iterationsschritt bessere Produkte und bauen dabei auf Erfahrungen vorangegangener Iterationen auf. Das einfließende Wissen kommt aus allen involvierten Bereichen und reicht von der Marktforschung bis hin zur Verwendung von bestimmten Produktionstechniken. Durch ständige Adaption der Prozesse und Ziele können immer bessere und günstigere Produkte hergestellt werden.

In der Regel sind die untersuchten Prozesse oder Produkte Streuungen unterworfen. Das heißt, die Qualität lässt sich nicht deterministisch bestimmen. In späten Entwicklungsphasen kann man auf Erfahrungswerte zurückgreifen. Das Total Quality Management (TQM) fasst Methoden zur Verbesserung der Qualität während des Produktionsprozesses zusammen [148]. In dieser Arbeit wird nicht näher auf den Produktionsprozess und dessen spezielle Probleme eingegangen. Stattdessen werden Methoden, welche in der Entwicklungsphase anzusiedeln sind, untersucht [182, 183]. In den frühen Stadien bedient man sich numerischer Simulationen. Dazu sind Methoden notwendig, die es ermöglichen, das Verhalten in Abhängigkeit von den Streuungen zu beurteilen. Eine häufig verwendete Methodik ist die nach Taguchi [169]. Übersichten, Diskussionen und Argumentationen sind vielfältig vorhanden. Beispielhaft zu nennen sind [122, 149, 170]. Auch weitere Verfahren können diese Anforderungen erfüllen. Jedoch sind sie meist sehr komplex, aufwendig oder unflexibel. Deshalb sind sie in kommerziellen Programmen

nicht weit verbreitet und kommen in der Regel nur im wissenschaftlichen Betrieb zum Einsatz. Ziel dieser Arbeit ist es, ein Verfahren vorzustellen, welches diese Beschränkungen aufweicht. Damit wird es möglich, breitere Anwendungsgebiete für die Qualitätsoptimierung zu erschließen. Samplingverfahren sind eine Möglichkeit um die nötigen statistischen Maße zu bestimmen, nur wird dabei für jedes COQ-Optimierungsdesign eine statistische Auswertung nötig. Die Aufwände für Stochastik und Optimierung multiplizieren sich. Diese Arbeit stellt ein Verfahren vor, welches diesen Aufwand so minimiert, dass Kostenoptimierungen durchgeführt werden können.

1.2 Optimierung

Die Formulierungen von Optimierungsaufgaben sind vielfältig. Versucht man in wirtschaftlichen Problemstellungen die Kosten zu minimieren oder den Gewinn zu maximieren, so wird beispielsweise in der Strukturoptimierung nach Parametereinstellungen und Formen gesucht, welche minimale Spannungen oder Verformungen ergeben. Die breite Auswahl möglicher Definitionen und Herangehensweisen kann aufgrund der Fülle und Größe des Themengebietes an dieser Stelle nicht ausführlich oder gar vollständig beschrieben werden. Vielmehr soll ein kurzer Überblick über die nötige Terminologie, wichtige Definitionen und Verfahren gegeben werden. Für weitergehende Informationen wird auf Literatur wie [99, 124, 125, 155] verwiesen. Die dynamische Programmierung (Optimierung) zum Finden optimaler Steuervektoren beziehungsweise Prozesse wird hier nicht direkt adressiert. Die Vorgehensweisen bedienen sich teilweise ähnlicher Methoden und Terminologie, sind jedoch aufgrund der Struktur ihrer Problembeschreibung getrennt zu betrachten. Weitergehende Literatur zu diesem Thema findet sich zum Beispiel in [12, 33].

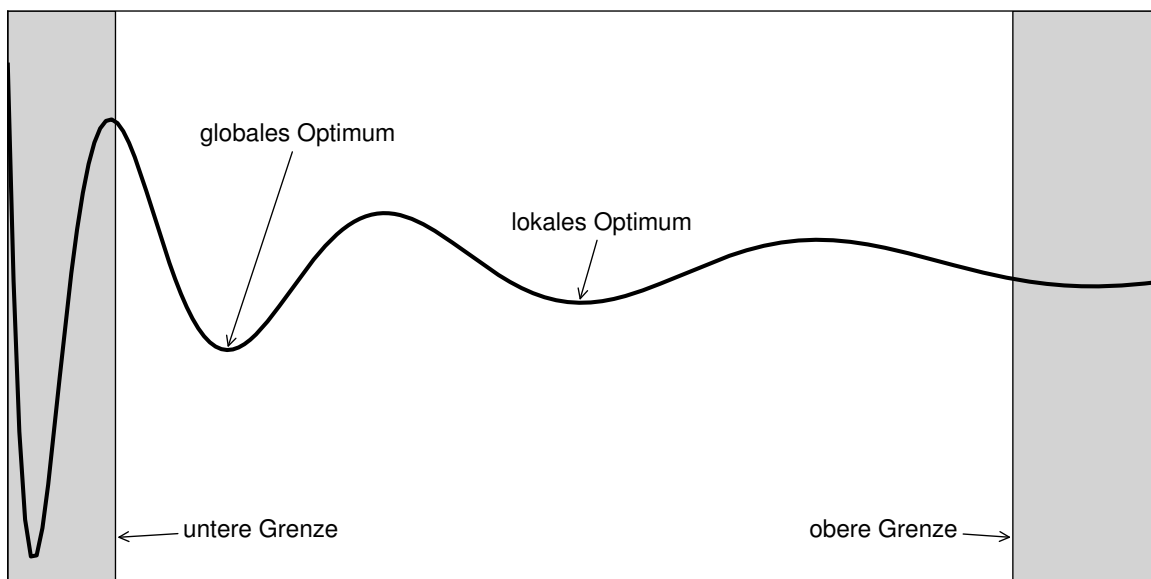


Abbildung 1.3: Zielfunktion

Im Allgemeinen lässt sich die Aufgabenstellung auf die Minimierung einer Zielfunktion reduzieren (Abb. 1.3). Diese Formulierung wird so im Rest der Arbeit verwendet. Maximierungsprobleme werden durch Tauschen der Vorzeichen in der Zielfunktion definiert. Im mathematischen Sinn bedeutet dies die Suche des absoluten Minimums in Abhängigkeit von N_{inp} kontrollierbaren Variablen. Sie stellen Eingabewerte zum Quantifizieren des Funktionswertes für diese Parametereinstellung dar. Ein Paar von Inputparametern und zugehörigem Wert der Zielfunktion bildet einen Punkt im aufgespannten Raum. Eine gebräuchliche Bezeichnung für diesen Punkt ist (Optimierungs-) Design. Offensichtlich ist für jeden Designpunkt eine Evaluation der Zielfunktion nötig. Aus diesem Grund werden sie auch Designauswertungen genannt.

Die Parameter können in einem begrenzten Bereich variiert werden. Dieser Raum wird auch als Parameterraum oder Variationsbereich bezeichnet. Er stellt den Definitionsbereich der Problembeschreibung dar. Die Begrenzung des Variationsbereiches bildet somit die einfachste Form von Restriktionen. Weitere Nebenbedingungen ergeben sich aus der Limitierung anderer, von den Parametereinstellungen abhängigen, Kennwerte. Beispielsweise kann eine Struktur mit minimaler Gesamtmasse unter der Restriktion, dass eine maximale Spannung nicht überschritten wird, gesucht werden. Es existieren verschiedene Ansätze, Nebenbedingungen und Zielfunktion zusammenzuführen. In der Regel bedeutet es die Bestrafung des Designs bei Nichterfüllung der Voraussetzungen.

Inputparameter und Zielfunktion

Kann die Zielfunktion linear angenommen werden, wird von linearer Optimierung oder linearen Programmen gesprochen. Der Begriff Programm steht dabei für Planung der Suche und ist nicht mit einem Computerprogramm zu verwechseln. Ziel ist folglich die Minimierung einer linearen Zielfunktion innerhalb eines durch Nebenbedingungen beschriebenen Polyeders. Das heißt, es wird nach dem Eckpunkt mit geringstem Wert gesucht. Diese Form ist somit eine Vereinfachung von konvexen Zielfunktionen. Für diese gilt, dass jedes lokale Optimum auch globales Optimum ist. Es wird von konvexer Optimierung gesprochen. In der allgemeinen Beschreibung nichtlinearer Zielfunktionen treten lokale und globale Optima auf. Ziel ist es, mit minimalem Aufwand den Parameterraum zu durchsuchen, sodass das globale Optimum gefunden wird (Abb. 1.3).

Bei der Verwendung der genannten Definitionen wird nicht selten davon ausgegangen, dass die Inputparameter kontinuierlich zu variieren sind. In der Realität treten jedoch oftmals Problembeschreibungen mit diskretem Definitionsbereich auf. Die Aufgabenstellung führt zu kombinatorischen Optimierungen. Das heißt, es entstehen in der Regel NP-schwere Probleme (nichtdeterministisch polynomiell). Die exakte Lösung ist daher meistens numerisch sehr aufwendig oder nicht zu finden. Durch das Wissen um Ordnung oder Abhängigkeiten der einzelnen Zustände innerhalb der Problembeschreibung kann eine Heuristik so aufgestellt und ausgenutzt werden, dass effiziente Verfahren genutzt werden können. So kann es möglich werden, kombinatorische Aufgaben mit vertretbarem Aufwand zu lösen. Exemplarisch wird hier die Nutzung der Dreiecksun-

gleichung zur Optimierung von Routen genannt. Desweiteren kommen Approximationsalgorithmen zum Einsatz, welche sich effizient mit einer bekannten Mindestgüte an das Optimum annähern. Die Verbindung von kontinuierlichen und diskreten Eingabewerten in einer Problembeschreibung kann meist nur durch Heuristiken effizient gelöst werden.

Verfahren

Im Allgemeinen ist die Suche nicht analytisch zu lösen. Deshalb kommen verschiedene Optimierungsverfahren zum Einsatz, welche den Raum nach optimalen Parametereinstellungen absuchen. Dazu werden unterschiedliche Designvorschläge vom Algorithmus angegeben deren Funktionswerte zu bestimmen sind. Auf deren Grundlage werden weitere Parametereinstellungen vorgeschlagen. Die meisten Optimierungsverfahren sind somit iterative Prozesse. In vielen Ingenieurproblemen kann kein mathematisch exaktes, globales Minimum gefunden werden. Dies liegt an der Existenz mehrerer (fast) gleichwertiger Optima, dem notwendigen Aufwand oder den Unsicherheiten in der Beschreibung der Aufgabenstellung. Deshalb kann auch von Verbesserungsstrategien gesprochen werden [108, 109]. Die Problembeschreibungen und Herangehensweisen bleiben bestehen. Zwei große Gruppen von Optimierungsverfahren werden unterschieden:

Deterministische Verfahren

Gradientenfreie Verfahren	Gradientenverfahren	Verfahren höherer Ordnung
gierige Suche (<i>engl.</i> greedy)	steilster Abstieg	Newton-Raphson
Bisektionsverfahren [21]	BFGS	SQP
DiRect [80]	L-BFGS [192]	Trust Region
Branch and Bound [37, 96]	CG [61]	NLPQL [153]
Branch and Cut		CG [74]
Simplex Verfahren [39, 123]		GRG [97]

Stochastische Verfahren

rein physikalisch	rein biologisch	evolutionär
Metropolis [72, 116]	GA [91]	ES [142, 143, 158]
SA [28, 86]	PSO [84]	DE [168]
	ACO [46]	

Den Abkürzungen zuzuordnende Methodennamen können im Anhang (A.1) nachgeschlagen werden. Die genannten Verfahren werden in verschiedenen Anwendungsbereichen eingesetzt. Sie unterscheiden sich in Aufwand und Genauigkeit des erreichten Optimums oder dem Konvergenzverhalten der iterativen Vorgehensweise. Die deterministischen Ergebnisse sind in der Regel reproduzierbar. Für stochastische Verfahren müssen dafür Hilfskonstruktionen gefunden werden, welche den (Pseudo-) Zufallsgenerator dahingehend manipulieren. Desweiteren existieren Verfahren, welche weitestge-

hend unabhängig von der Dimensionalität des Parameterraumes einsetzbar sind. Andere Vorgehensweisen zeigen exponentielle Komplexität hinsichtlich der Größe der Problembeschreibung. Durch ihre Beschränkung auf lineare oder konvexe Optimierungsprobleme sind einige Strategien nicht in der Lage, lokale von globalen Optima zu unterscheiden. Eine weitere Einschränkung, welche aus der Form der Zielfunktion resultiert, ist die Forderung einiger Herangehensweisen an einen differenzierbaren Verlauf. Alle angesprochenen Verfahren sind im wissenschaftlichen und kommerziellen Einsatz.

Multikriterielle Optimierung

Optimierungsprobleme können mehrere gegensätzliche Ziele enthalten. Ein Beispiel dafür ist die Minimierung von Masse und Verformung einer Struktur. Ist es nicht möglich, die Ziele durch Wichtung der Einzelwerte zu einer Funktion zu kombinieren, liegt eine Mehrzieloptimierung vor. Parametereinstellungen, die (mindestens) eine Zielstellung besser erfüllen als ein anderes Design, dominieren dieses. Analoges Vorgehen findet sich beim Verletzen von Nebenbedingungen wieder. Varianten, die sich aufgrund dieser Definition gegenseitig dominieren würden, sind ebenbürtig. Dadurch erscheint eine Dominanzfront von Designs, welche nicht dominiert werden, die Paretofront (Abb. 1.4). Alle darauf befindlichen Punkte sind hinsichtlich der Optimierungsziele äquivalent. Aufgabe des Optimierungsalgorithmus ist es, diese Front so gut wie möglich abzubilden. Dazu werden verschiedene (interne) Ziele formuliert. Sie versuchen die Suche nach optimalen Designs so auszuführen, dass daraus eine gleichmäßige Verteilung auf der Front entsteht. Es kommen unterschiedlichste Verfahren zum Einsatz. Exemplarisch sollen die Maximierung der Entropie, des dominierten Volumens oder des minimalen Abstandes zwischen zwei Punkten auf der Front genannt werden. Zur weiteren Literatur sei auf Veröffentlichungen wie [31, 193] verwiesen.

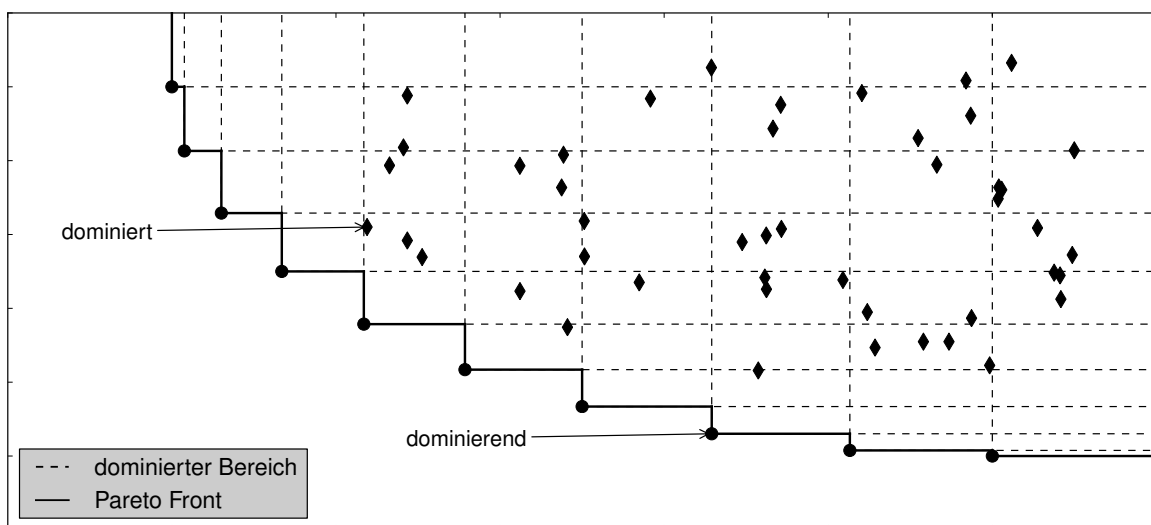


Abbildung 1.4: Paretofront mit dominierenden und dominierten Designs

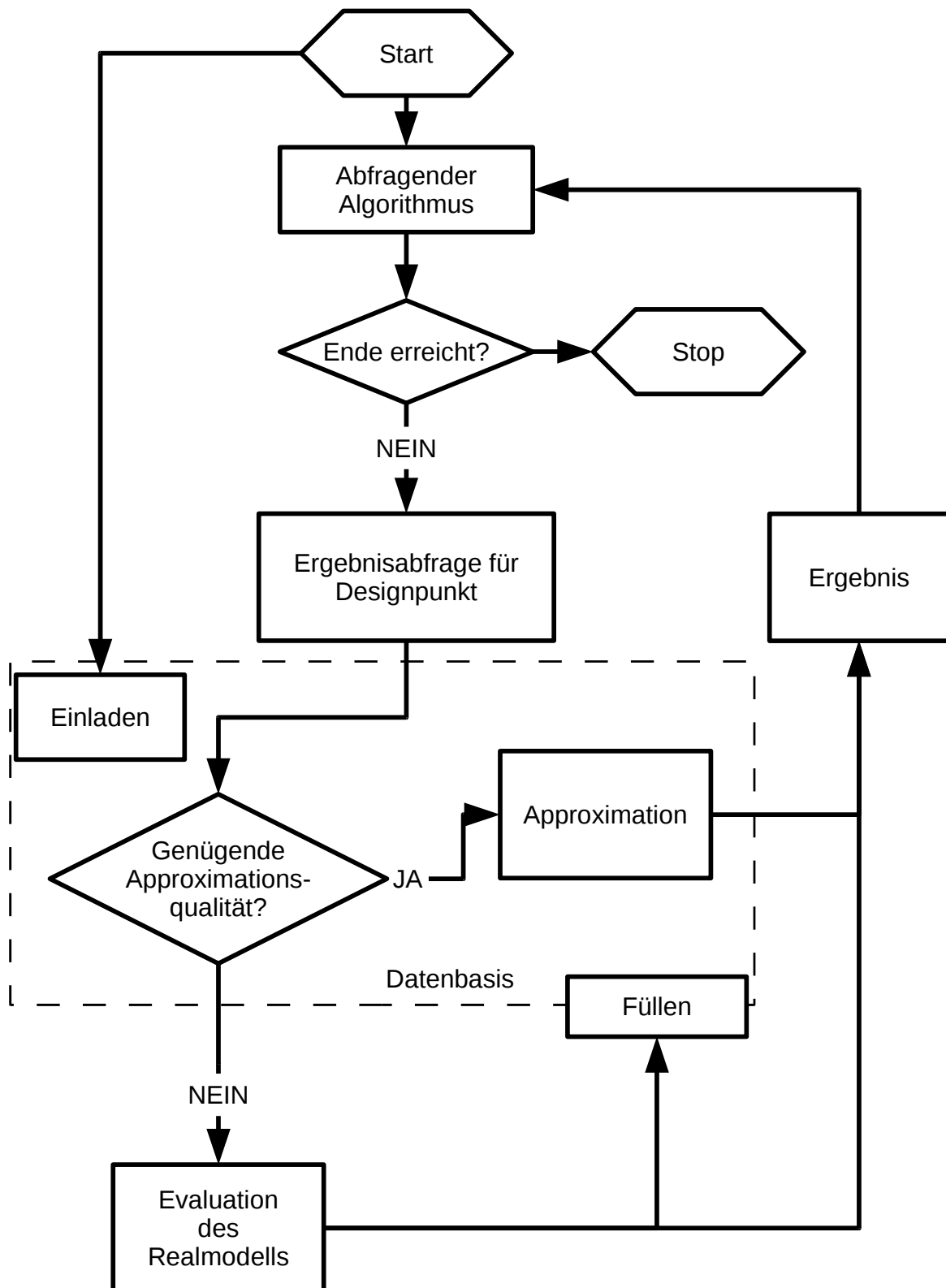


Abbildung 1.5: Einfaches Schema der vorgeschlagenen Methodik

Kapitel 2

Metamodellierung

Die Beschreibung der realen Welt erfordert es, sie zu modellieren. Modelle sind Abbildungen der realen Welt in einen einfacheren, verständlicheren Kontext. Ihre Anwendungsbereiche betreffen alle Gebiete menschlichen Denkens und Handelns. Sie werden zur Beschreibung von Arbeitsabläufen, physikalischer oder chemischer Prozesse sowie wirtschaftswissenschaftlicher Zusammenhänge verwendet. In vielen Fällen wird es erst durch ihre Anwendung möglich, Interaktionen zu verstehen. Modelle können in allen Formen auftreten. So können Gedankenmodelle der frühen Philosophen, maßstäbliche Nachbildungen oder mathematische Formeln zum Verstehen der Welt beitragen. Die folgenden Erläuterungen betreffen im Wesentlichen numerische Modelle physikalischer Prozesse. Teilprozesse der komplexen realen Welt müssen dazu durch eine analoge Beschreibung ersetzt werden. Eine einhundertprozentige Abbildung der Realität würde perfekte Qualität bedeuten. Aus oben genannten Gründen gingen damit unendliche Kosten einher. Deshalb beschränkt man sich auf die wichtigen Eigenschaften, welche das untersuchte Phänomen beschreiben. Das heißt, beim Aufstellen eines Modells muss entschieden werden, welche Qualität beziehungsweise welche Prognosefähigkeit notwendig ist und erreicht werden soll. Ein Modellierungsfehler muss dabei immer akzeptiert werden. Die Gründe für Fehler des Modells sind vielfältig. Fehler können in der Strukturmechanik zum Beispiel ungenaue Materialmodelle sein. In der Regel sind die Randbedingungen sehr komplex oder unbekannt und müssen somit vereinfacht angenommen werden. Zum anderen ist es unmöglich oder unwirtschaftlich, alle Informationen zu beschaffen oder bereitzustellen, die für eine vollständige Beschreibung notwendig sind. Oftmals ist eine genauere Beschreibung möglich, aber nicht gewünscht. So kann zum Beispiel in der FEM durch ein feineres Netz oder höherwertige Ansatzfunktionen der Diskretisierungsfehler (Abb. 2.1) minimiert werden. Der numerische Aufwand für qualitativ höherwertigere Modelle wächst jedoch im Allgemeinen mit. Folglich muss eine optimale Qualität ermittelt werden. Diese ist in der Regel a priori unbekannt und muss überprüft werden. Die Validation geschieht am realen Objekt, zum Beispiel einem Prototypen. Ist dies nicht möglich, muss der Modellierungsfehler geschätzt werden. Zu diesem Zweck existieren die verschiedensten Verfahren, welche jeweils auf den Typ des Modells angepasst sind. Die Verringerung des Fehlers ist meist nur durch erhöhten

Aufwand möglich. So ergibt sich eine Optimierungsaufgabe mit den konkurrierenden Zielen minimaler Kosten sowie minimaler Unterschiede der Ergebnisse zur Realität. Es ist das Modell zu wählen, welches bei akzeptablem Aufwand ausreichend gute Ergebnisse liefert. Eine Gegenprüfung des Modells mit realen Resultaten muss aber stets stattfinden.

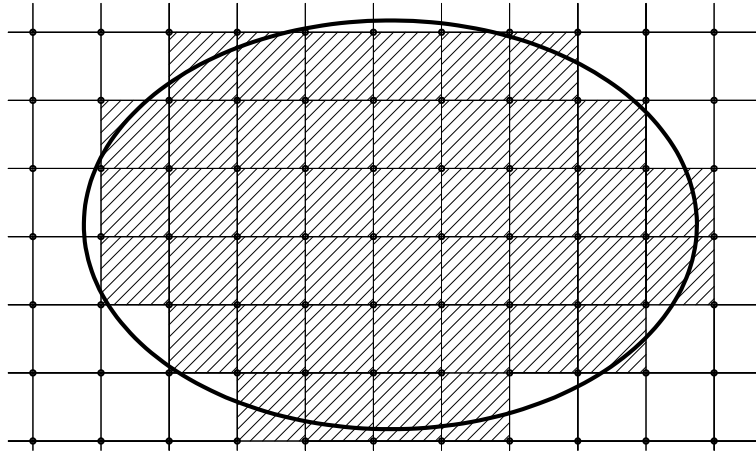


Abbildung 2.1: Diskretisierungsfehler (geometrisch)

Im Allgemeinen untersucht man in den meisten Ingenieurproblemen die Abhängigkeiten einiger Systemantworten (Outputs Y) von Eingabewerten (Inputs \mathbf{x}). Meist sind diese Abhängigkeiten jedoch nicht von vornherein bekannt. Infolgedessen muss das Verhalten simuliert oder durch Experimente erforscht werden, um es bewerten zu können. Die Evaluation dieser Modelle ist in vielen Fällen sehr aufwendig. Deshalb werden die Systemantworten von unwirtschaftlichen, aufwendigen und teuren Simulationen $Y(\mathbf{x})$ oft durch einfache, billige Ersatzmodelle $\hat{Y}(\mathbf{x})$ ersetzt. Das innere Verhalten des Modells bleibt dem verwendeten Metamodell unbekannt. Das Surrogat bildet lediglich die Input - Output Beziehungen ab (Abb. 2.2).

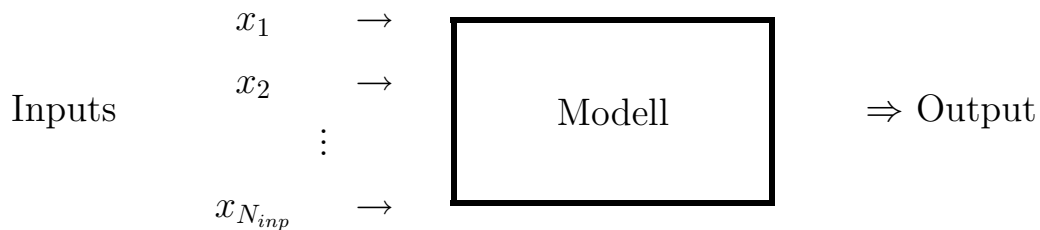


Abbildung 2.2: Prozesskette und Beziehungen von Eingabewerten zu Systemantworten

Die Anwendung dieser Ersatzmodelle wird daher auch Metamodellierung genannt. Es gelten die bereits erwähnten Gesetzmäßigkeiten der Modellierung. Ein Fehler ϵ muss jederzeit in Kauf genommen werden, wenn das Verhalten einer Simulation durch ein Surrogat $\hat{Y}(\mathbf{x})$ simuliert wird (siehe Gl. 2.1). Demzufolge überlagern sich Modellierungs-

und Metamodellierungsfehler. Die Parameterwahl muss demzufolge den Gesamtaufwand, die Gesamtgenauigkeit und die Verfügbarkeit von Ressourcen berücksichtigen.

$$Y(\mathbf{x}) = \hat{Y}(\mathbf{x}) + \epsilon \quad (2.1)$$

Bei der numerischen Simulation sind zusätzlich Rundungs- oder Konvertierungsfehler möglich, sodass die Ergebnisse in den meisten Fällen mit numerischem Rauschen versehen sind. Anpassende Metamodellierungsformen (Abb. 2.4) bilden dieses Rauschen voll ab und neigen daher zu Überanpassungen. Durch die Wahl eines geeigneten Metamodells kann der Effekt zufälliger Schwankungen geglättet werden (Abb. 2.3). Die Ursache der verrauschten Systemantwort ist dabei nicht relevant. Das Rauschen wird in vielen Verfahren normalverteilt angenommen. Sind zu hohe Fluktuationen in den Resultaten vorhanden, das heißt das Signal-Rausch-Verhältnis ist schlecht, können diese zwar geglättet, lokale Effekte aber nicht mehr erschlossen werden. Diese Effekte sind speziell in der Optimierung mit einem Metamodell zu beachten.

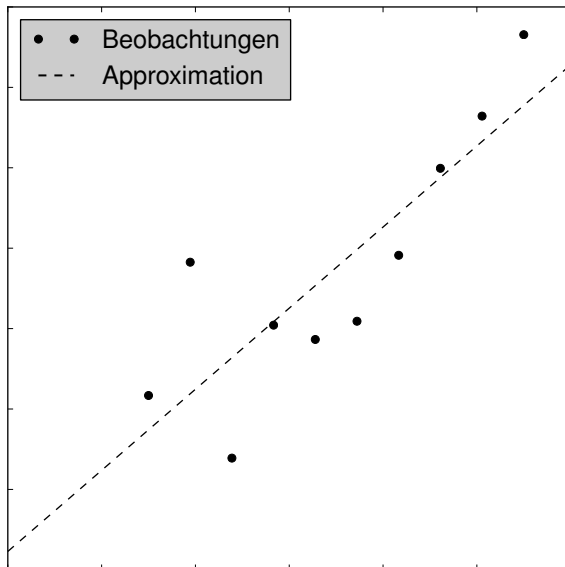


Abbildung 2.3: glättendes Metamodell

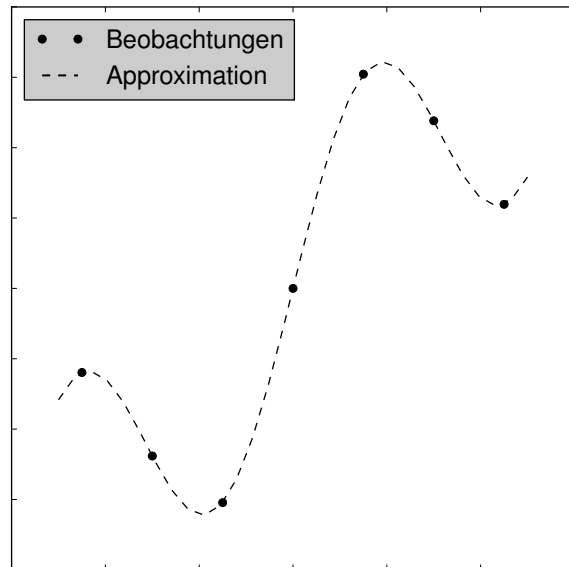


Abbildung 2.4: anpassendes Metamodell

In der Regel wird für jede Systemantwort eine Approximation aufgebaut, das heißt es werden N_{out} Metamodelle erzeugt. Die Approximation ist dabei die Beschreibung der Zusammenhänge zwischen verschiedenen Beobachtungen innerhalb eines definierten Bereiches. Jede Beobachtung stellt das Resultat von N_{inp} Eingabewerten dar. Der Variationsbereich der Inputparameter spannt einen N_{inp} -dimensionalen Raum auf. Unterschiedliche Einstellungen der Eingabewerte ergeben unterschiedliche Ergebnisse. Sie können demnach als Punkte oder Stützstellen interpretiert werden. In den Zwischenräumen können die Ergebnisse durch das Ersatzmodell vorhergesagt werden. Historisch gesehen wurden zunächst Interpolationsverfahren zur Vorhersage von Werten zwischen zwei bekannten Punkten verwendet. Dabei kommt ein einfacher eindimensionaler linearer Zusammenhang zum Einsatz (Gl. 2.2). Dieses Verfahren ist aufgrund seiner Einfachheit in breiter Anwendung. Nachschlagewerke bieten oft Tabellen

für komplex zu ermittelnde Sachverhalte. Die Zwischenwerte werden interpoliert. Bei genügender Auflösung kann der lineare Verlauf zwischen zwei Punkten angenommen werden. Der resultierende Fehler gilt als akzeptabel.

$$\hat{Y}(x) = Y(x_1) + \frac{Y(x_2) - Y(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (2.2)$$

Höhere Ansätze wie quadratische Interpolation oder Berücksichtigung mehrerer Eingabedimensionen kommen seltener zum Einsatz. Gründe dafür sind beispielsweise in der Fehleranfälligkeit bei der Anwendung zu sehen. Desweiteren ist eine höherrangige Modellierung der Interpolation mit den gegebenen Mitteln meist nicht in angemessenen Zeiträumen zu bewerkstelligen. Das Abfragen von Werten außerhalb der bekannten Stützstellen ist oft als fragwürdig einzuordnen. Es ist nur sinnvoll, wenn lediglich globale Trends approximiert werden sollen oder der Verlauf bekannt ist. Die lineare Interpolation aus Tabellen kann als eine Urform der Metamodellierung verstanden werden.

2.1 Verfahren

Antwortflächenverfahren sind eine Möglichkeit der numerischen Metamodellierung. Die historischen Wurzeln liegen in der Approximation von Messwerten aus Experimenten [17, 19, 121]. Durch virtuelle Informationsgewinnung wird von Punkten, für welche die Systemantwort bekannt ist, auf nicht direkt bestimmte Werte geschlossen. Normalerweise wird dabei für jede Systemantwort ein gesondertes Approximationsmodell erstellt. Einfache mathematische Modelle werden auf komplexe Daten angepasst. Rechenkapazitäten können eingespart und der Gebrauch von Softwarelizenzen verringert werden. Oft wird erst durch den Einsatz der Metamodelle die numerische Untersuchung komplexer Strukturen möglich. Mittels linearer oder quadratischer Ansatzfunktion können, basierend auf einem vorhandenen Stützstellenset, weitere Systemantworten approximiert werden.

Dabei wird die Schwäche des Verfahrens offensichtlich. Die Anzahl der notwendigen Stützstellen wächst in Abhängigkeit von der Dimensionalität des Problemes und der Ordnung der Ansatzfunktion. Verschiedene Verfahren zur Dimensionsreduktion kommen aus diesem Grund zum Einsatz. Häufig genutzte Verfahren sind Hauptkomponentenanalyse (PCA), Unabhängigkeitsanalyse (ICA) oder schrittweise Regression [62]. Ist eine Reduktion der Dimensionalität nicht möglich, weil alle Parameter gleich zur Systemantwort beitragen, muß gegebenenfalls die Ordnung der Ansatzfunktion reduziert werden. Nutzen und Aufwand höherer Qualität müssen dabei immer gegeneinander betrachtet werden. Aus diesem Grund kommen zu verschiedenen Zeiten des Designentwicklungsprozesses Metamodelle unterschiedlicher Güte zum Einsatz. Zusätzlich muss bemerkt werden, dass in Experimenten durch Meß- oder numerische Fehler immer verrauschte Outputs vorliegen. Durch geeignete Wahl und Konditionierung des Appro-

ximationsverfahrens kann dieser Effekt geglättet werden. Die Metamodellierung bleibt ein Schätzverfahren. Die Fähigkeit, Interaktionen des betrachteten Modells vorherzusagen, muss in jedem Fall verifiziert werden.

In vielen Fällen ist es angebracht, die Daten so zu transformieren, dass die Abhängigkeiten besser dargestellt werden können. Die einfachste Variante ist die lineare Transformation der Inputs in einheitliche Grenzen z.B. $[0,1]$. Aus numerischen Gründen kann dieses Vorgehen auch für die Outputs nützlich sein. Desweiteren ist es oftmals sinnvoll, die Outputs mit höheren Ansätzen zu transformieren. Das Metamodell wird auf Basis der transformierten Daten aufgebaut. Die Koordinaten vorherzusagender Punkte müssen vor der Approximation transformiert, die Ergebnisse zurücktransformiert werden. Das Verfahren nach Box und Cox findet in diesem Zusammenhang breite Verwendung, weil dabei eine optimale Transformation erreicht wird [16]. Grundlage hierbei ist die Optimierung eines potenzierenden Parameters λ mit Ziel die Vorhersagefehler zu minimieren. Aus den Formulierungen wird ersichtlich, dass vor der Anwendung des Box-Cox-Verfahrens die Outputs so transformiert werden, dass alle Werte größer 0 sind. Die lineare Transformation ist dafür das übliche Werkzeug.

$$\hat{Y}_i^{BC}(\lambda) = \begin{cases} \dot{Y} \ln Y_i & \text{für } \lambda = 0 \\ \frac{Y_i^\lambda - 1}{\lambda \dot{Y}^{\lambda-1}} & \text{für } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Dabei ist

$$\dot{Y} = \left(\prod Y_i \right)^{\frac{1}{N_b}} \quad (2.4)$$

das geometrische Mittel aller Beobachtungen um insgesamt vergleichbare Werte zu erhalten. Die Optimierung definiert sich zum Beispiel:

$$\sum \left(Y_i^{BC} - \hat{Y}_i^{BC}(\lambda) \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.5)$$

Das Optimierungsproblem hat nur einen zu variierenden Parameter (λ). Das verwendete Verfahren kann daher gut angepasst werden. Je nachdem, wie der Vorhersagefehler bestimmt wird, kann die Suche numerisch aufwendig werden. Wenn es Überlagerungen zwischen den Ansatzfunktionen des Metamodells und der Transformation gibt, ist die Optimierung numerisch anfällig. Die Ergebnisse für den Parameter λ sind daher nicht in jedem Fall vergleichbar. Die Rücktransformation geschieht über:

$$\hat{Y}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp \left(\frac{\hat{Y}_i^{BC}(\mathbf{x})}{\dot{Y}} \right) & \text{für } \lambda = 0 \\ \left(\hat{Y}_i^{BC}(\mathbf{x}) \lambda_{opt} \dot{Y}^{\lambda_{opt}-1} + 1 \right)^{\frac{1}{\lambda_{opt}}} & \text{für } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Polynomregression

Nach dem Satz von Stone und Weierstraß [167, 181] kann jede stetige Funktion durch Polynome beliebig gut approximiert werden. Durch Kombination von Basisfunktionen wird dabei versucht, eine passende Approximation für den realen Sachverhalt zu finden. Im Allgemeinen werden dazu Ansätze geringer Ordnung (linear, quadratisch) gewählt. Für ein Polynom zweiter Ordnung mit N_{inp} Inputparametern kann dies wie folgt ausgedrückt werden:

$$\hat{f}(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{N_{inp}} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{N_{inp}} \sum_{j \leq i}^{N_{inp}} \beta_{ij} x_i x_j \quad (2.7)$$

Oder in Matrixform:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.8)$$

Da es sich um eine lineare Kombination der Parameter handelt, wird auch von linearer Polynomregression gesprochen. Die Matrizen für N_b Beobachtungen haben in der zweidimensionalen ($N_{inp} = 2$) Formulierung und $m = 6$ Termen folgendes Aussehen:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N_b} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{11}x_{21} & x_{11}^2 & x_{21}^2 \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{12}x_{22} & x_{12}^2 & x_{22}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1N_b} & x_{2N_b} & x_{1N_b}x_{2N_b} & x_{1N_b}^2 & x_{2N_b}^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{N_b} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Dabei stellt \mathbf{Y} den Vektor der beobachteten Systemantworten, \mathbf{X} die Matrix der Inputparameterpolynome für die ausgeführten Experimente und \mathbf{B} den Koeffizientenvektor des Polynoms dar. Der Fehler wird normalverteilt angenommen. Der Erwartungswert des Fehlers sei 0.

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim N(0, \sigma) \quad (2.10)$$

Um eine hinreichend gute Schätzung für \mathbf{B} zu erhalten, wird die Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet. Die zur Ausgleichsrechnung benutzte Methodik findet breite Verwendung in allen erdenklichen Disziplinen. Sie dient zum Anpassen von Kurven in eine Wolke von Datenpunkten (Abb. 2.5). Dazu wird die Summe der quadrierten Fehler über alle Observationen minimiert. Die Methode wurde Ende des 18./Anfang des 19. Jahrhunderts von C. F. Gauß beziehungsweise A. M. Legendre entwickelt [68, 101]. Das Verfahren ist damit die Erweiterung des von P. S. Laplace angewendeten Verfahrens zur Minimierung der Fehlersumme. Unter Annahme normalverteilter Residuen deckt sich das Verfahren mit der maximum likelihood Methode [59]. Große Fehler werden durch das Quadrieren stark bestraft. Dadurch erhält man gute Anpassungen. Die Schwäche

des Verfahrens liegt in der Behandlung von Ausreißern. Abbildung 2.6 zeigt die Anpassung eines quadratischen und eines linearen Polynoms an verschiedene Beobachtungen.

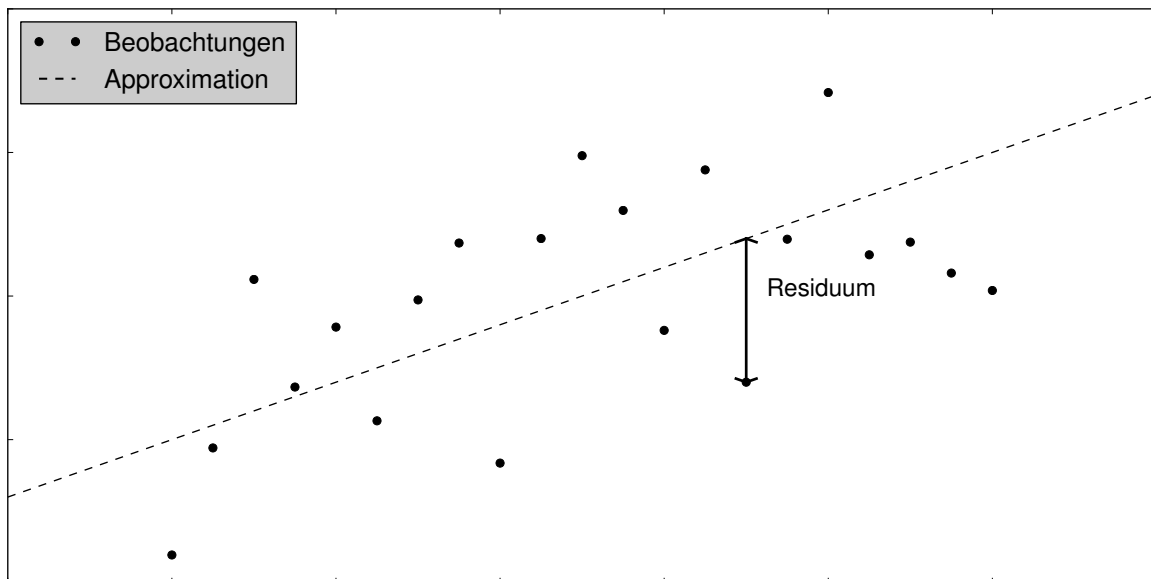


Abbildung 2.5: Differenz zwischen beobachteten Werten und der Approximation

Die Summe der Fehlerquadrate ist zu minimieren:

$$\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \min \quad (2.11)$$

Beziehungswise

$$\min (\mathbf{Y} - \mathbf{XB})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XB}) \quad (2.12)$$

Die Minimierung kann analytisch erfolgen. Durch Ableiten und Einsetzen der notwendigen Bedingungen erhält man:

$$\frac{\partial \left((\mathbf{Y} - \mathbf{XB})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XB}) \right)}{\partial \mathbf{B}} = 0 \quad (2.13)$$

Daraus folgt ein lineares Gleichungssystem für den Erhalt der Parameter mit minimalem Least Square Fehler.

$$-2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.14)$$

Wenn $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ invertierbar ist, erhält man:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (2.15)$$

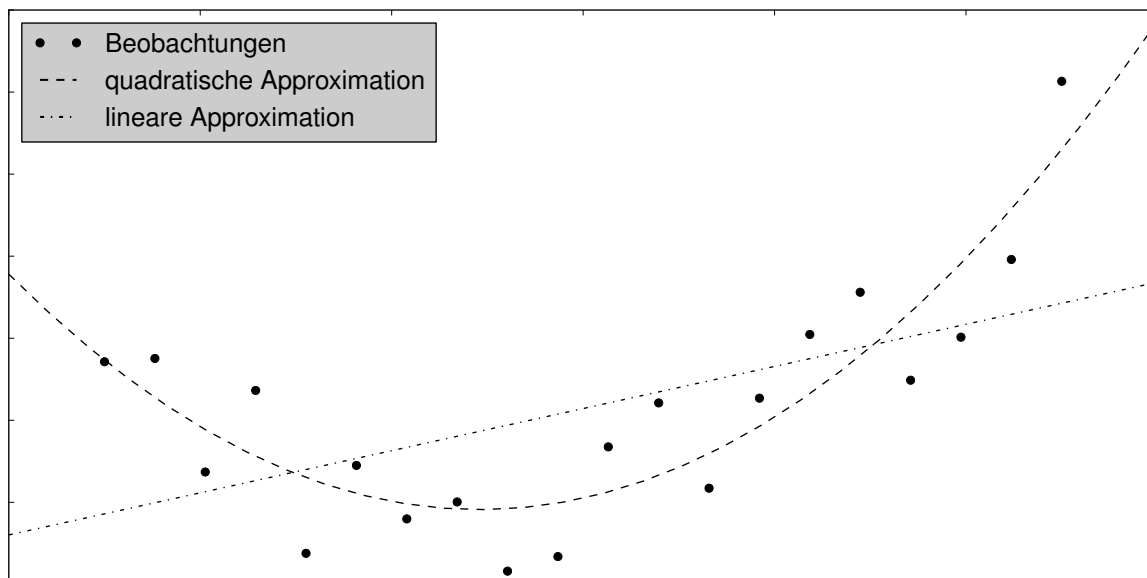


Abbildung 2.6: Unterschied zwischen linearem und quadratischem Ansatz

Aus dieser Formulierung werden verschiedene Probleme bei der Anwendung der Approximationsverfahren offensichtlich. Zum einen wächst die Komplexität der Lösung mit zunehmender Stützstellenzahl und Grad der Ansatzfunktionen. Dieses Problem verschärft sich dadurch, dass die Multiplikation oft voll besetzte Matrizen als Resultat hat. Die Inversion ist somit sehr aufwendig. Deshalb werden bei großen Stützstellensets oftmals lokale Approximationen angewandt. Sie verwenden nur Beobachtungen innerhalb eines definierten Radius. Zum anderen entstehen durch ähnliche Zeilen in der \mathbf{X} -Matrix numerisch instabile Formulierungen. Diese können bei schlechter Konditionierung dazu führen, dass das Gleichungssystem nicht in gewünschter Qualität gelöst werden kann. Die Approximation \hat{f} für eine bestimmte Stelle \mathbf{x} berechnet sich mittels:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad (2.16)$$

Die Inversion ist bei konstanter Stützstellenmenge nur einmal auszuführen. Der numerische Aufwand für jede weitere Vorhersage beläuft sich lediglich auf die Multiplikation des Koeffizientenvektors mit dem Vektor der Inputpolynome. Im Allgemeinen ist dieses Problem damit numerisch beherrschbar. Durch Dimensionsreduktionsverfahren kann der Aufwand für die Inversion reduziert werden. Eine Möglichkeit dafür ist die schrittweise Regression. Dabei werden die Terme (des Pascalschen Dreiecks) beginnend mit dem konstanten Anteil schrittweise zur Formulierung des Ansatzes hinzugenommen. Abbruchkriterien können das Unterschreiten eines geforderten maximalen Approximationsfehlers oder die maximale Anzahl der notwendigen Terme sein. Durch geeignete Vorauswahl mittels statistischer Verfahren oder Optimierungsverfahren ist das Vorgehen zu beschleunigen. Aus Gleichung 2.15 wird ersichtlich, dass dieses Vorgehen für Polynomregression meist nur bei variabler Stützstellenmenge von Belang ist. Ein weitaus wichtigeres Anwendungsgebiet von Dimensionsreduktionsverfahren erklärt sich aus einem anderen Problem der Inversion. Diese wird nur dann möglich, wenn mindestens

soviel Beobachtungen einfließen, wie Koeffizienten berücksichtigt werden. Sind nicht genügend Informationen verfügbar, so müssen die wichtigsten Koeffizienten ermittelt werden. Durch das Entfernen unwichtiger Einträge kann das Gleichungssystem dann gelöst werden. Der Sonderfall einer einzigen Beobachtung ergibt somit eine konstante Approximation.

Inverse Distanzwichtung

Die Annahme, dass der Funktionswert für einen Punkt im Raum nicht unabhängig von den umgebenden Datenpunkten ist, kann für die Approximation genutzt werden. Die inverse Distanzwichtung (*engl.* inverse distance weighting, IDW) lässt dabei den Einfluss einer Beobachtung auf einen approximierten Wert sinken, je weiter er davon räumlich entfernt ist. Die einfachste Beschreibung der inversen Wichtung w in Abhängigkeit des Abstandes d ist:

$$w(d) = \frac{1}{d^p} \quad (2.17)$$

Für gewöhnlich wird $p = 2$ gesetzt. Zusätzlich existieren verschiedenste Wichtungsfunktionen. Die einzige Forderung ist, dass diese Funktion monoton fallend sein muss. Dadurch kann zum Beispiel auch der Einflussradius der Wichtung begrenzt werden. Punkte in größerer Entfernung haben dann keinen Einfluss auf den approximierten Wert, ihre Wichtung ist Null. D. Shepard gilt als Pionier der inversen Distanzwichtung. Er entwickelte unter anderem eine Funktion zweier getrennter Nachbarschaftsräume [161] mit unterschiedlichen Exponenten. Dabei werden die Parameter so angepasst, dass ein kontinuierlicher Übergang entsteht. Die Approximation der Systemantwort Y an der Position X erfolgt durch Addition der Einflüsse aller N_b Beobachtungen.

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{w(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|)}{\sum_{i=1}^{N_b} w(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|)} y_i \quad (2.18)$$

Daraus ist zu erkennen, dass sich das Ergebnis der Approximation immer zwischen definierten Grenzen bewegt. Die Vorhersage von beispielsweise sinusoidalen Zusammenhängen wie sie in der Strukturmechanik relativ häufig sind, ist mit dieser Formulierung nur schwer möglich [144]. Ein weiterer Effekt der Regularisierung ist die Vermeidung von Aufhockerungseffekten (*engl.* dimpling) an den Maximal- und Minimalpunkten (Abb. 2.7). Zudem verläuft die Approximation immer durch die Stützstellen, eine Glättung der Daten findet somit nicht statt. Eine Optimierung ohne Nebenbedingungen wird unter Zuhilfenahme der Regularisierung immer an der Stützstelle mit minimalem Wert enden.

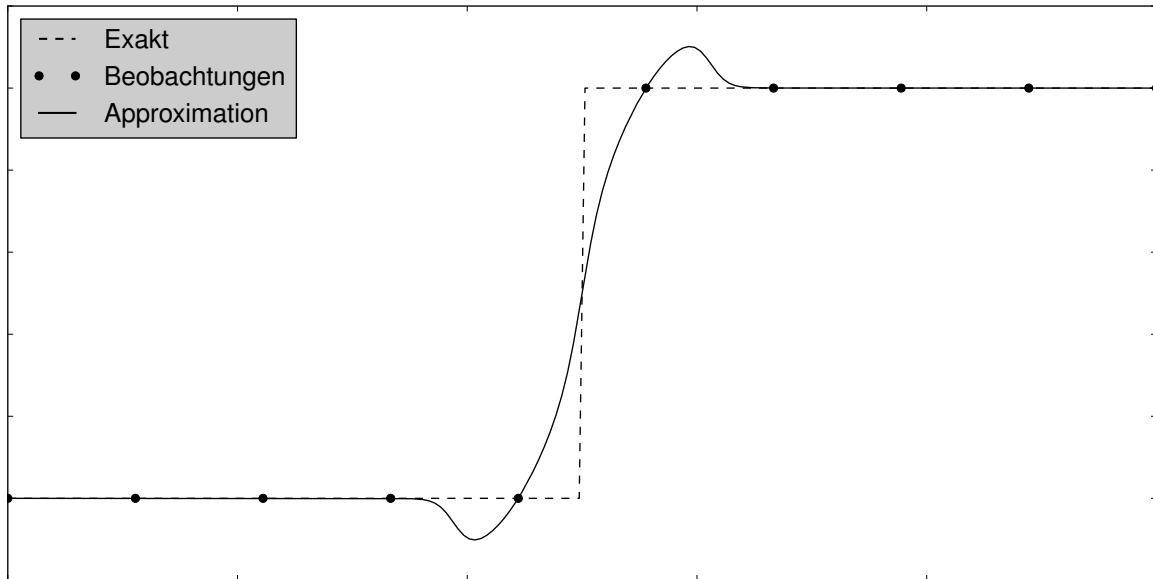


Abbildung 2.7: Aufhöckerung bei Moving Least Squares [95]

Moving Least Squares

Die Kombination der Least-Squares Formulierung und der Inversen Distanzwichtung ist in [95] beschrieben. Dabei wird die Regressionsbeschreibung um die Wichtungsterme am zu approximierenden Punkt erweitert, woraus eine lokale Glättung resultiert. Nach Umstellen erhält man so eine Formulierung des Fehlers. Diese entspricht der Beschreibung des Fehlers in der Polynomregression bereichert um die lokale Wichtung für den zu approximierenden Punkt (Abb. 2.8).

Wie oben wird der Fehler minimiert.

$$\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \min \quad (2.19)$$

Die Berechnung des lokalen Koeffizientenvektors ergibt sich zu:

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{Y} \quad (2.20)$$

Dabei ist die Wichtungsmatrix \mathbf{W} eine Diagonalmatrix ($N_b \times N_b$) mit den vom zu approximierenden Punkt und den vorhandenen Daten abhängigen Wichtungen.

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}|) & & & 0 \\ & w(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}|) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w(|\mathbf{x}_{N_b} - \mathbf{x}|) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

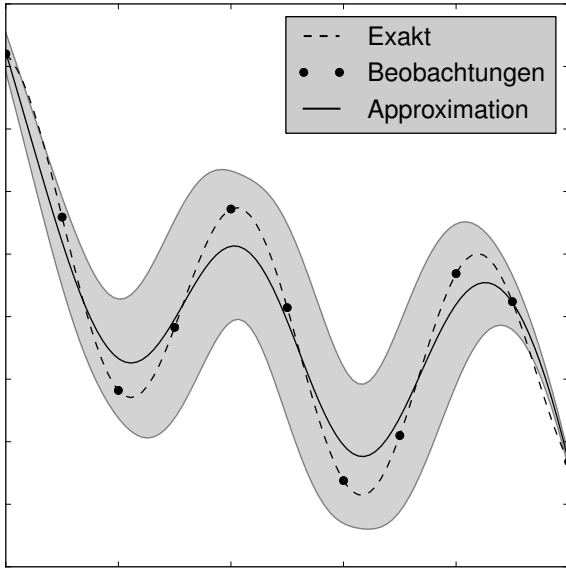


Abbildung 2.8: MLS-Approximation und Approximationsfehler $\epsilon^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \epsilon$

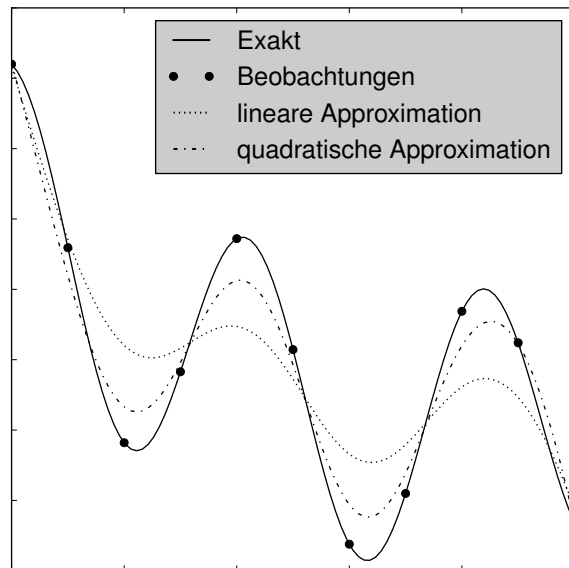


Abbildung 2.9: Unterschied zwischen quadratischem und linearem Ansatz

Die Approximation \hat{f} für eine bestimmte Stelle \mathbf{x} berechnet sich dann:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (2.22)$$

Die Inversion ist für jeden Punkt einmal auszuführen. In Abhängigkeit von der Lage der Stützstellen ist die Matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{X}$ vollbesetzt. Effiziente Lösungsstrategien für diese Form sind schwer zu finden. Die hier zu invertierende Matrix hat nur die Größe der Koeffizientenanzahl. Durch das lokale Anwenden kann in der Regel auf höhergradige Ansatzfunktionen verzichtet werden, wodurch die Dimensionalität des Problems von entscheidender Bedeutung für Komplexitätsbetrachtungen ist (siehe Abb. 2.9).

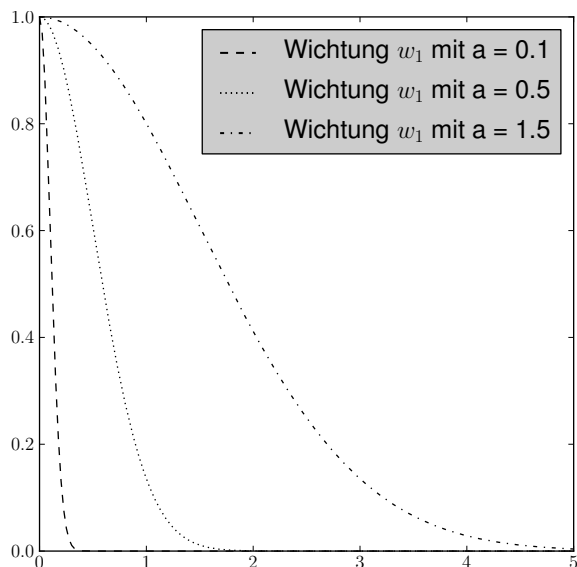
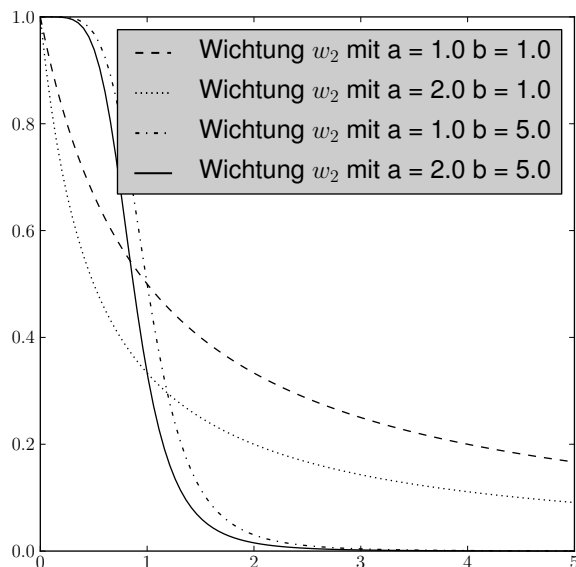
Es existieren die unterschiedlichsten Formen von Wichtungsfunktionen. Einzige Anforderung ist, dass ihr Funktionswert mit zunehmender Distanz sinkt. In der Regel erhalten die Funktionen weitere Parameter um ihr Verhalten anzupassen.

$$w_1(d) = e^{-\frac{1}{2} \frac{d^2}{a^2}} \quad (2.23)$$

Eine weitere mögliche Formulierung ist:

$$w_2(d) = \frac{1}{1 + ad^b} \quad (2.24)$$

Je höher der Parameter a in Gleichung 2.23 gewählt wird, desto mehr werden die Daten geglättet (Abb. 2.12 links). Je kleiner a wird, desto mehr werden die Beobachtungen

Abbildung 2.10: Wichtung für w_1 Abbildung 2.11: Wichtung für w_2

angepasst. Wählt man den Parameter zu klein, können beim Invertieren in Gl. 2.20 numerische Fehler auftreten. Singularitäten innerhalb der Matrix werden beim numerischen Lösen nicht, oder zu spät, offensichtlich. Die Approximation kann damit ungültig werden (Abb. 2.12 rechts).

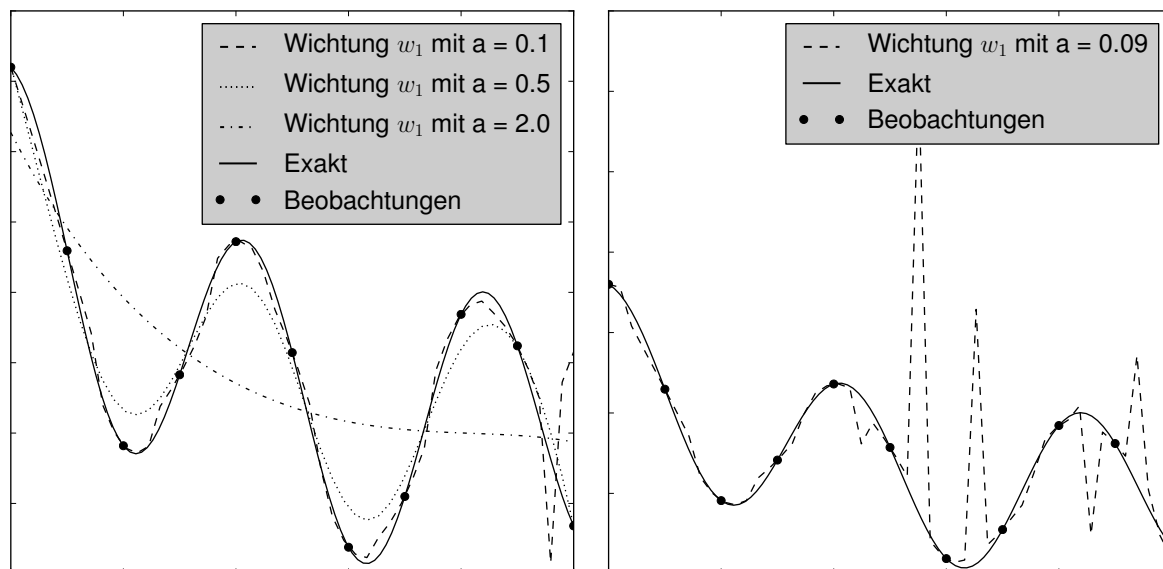


Abbildung 2.12: Abhängigkeit der Approximation von Parametern der Wichtungsfunktion (links) und numerischer Fehler (rechts)

Wie bereits für die Inverse Distanzwichtung (IDW) erwähnt, ist es auch für im Moving Least Squares Verfahren verwendete Wichtungsfunktionen möglich, einen Einflussradius D zu wählen [95]. Punkte mit größerer Entfernung haben dadurch keinen Einfluss

auf den approximierten Wert. Durch Anwendung auf Gl. 2.23 erhält man:

$$w_3(d) = \begin{cases} e^{-\frac{d^2}{D^2\alpha}} & \text{für } d \leq D \\ 0 & \text{für } d > D \end{cases} \quad (2.25)$$

Der Parameter α wird dabei konstant gehalten. Durch diese Formulierung erhält man eine nichtkontinuierliche Wichtungsfunktion (Abb. 2.13). Wird der Einflussradius hoch gewählt, so wird die Wichtungsmatrix zur Einheitsmatrix. Im Grenzfall erhält man die Ergebnisse der Polynomregression mit gleichem Ansatz. Das heißt, die Stützstellen werden stärker geglättet. Je kleiner D gewählt wird, desto geringer werden die Einflüsse von Stützstellen, die weiter vom zu approximierenden Punkt entfernt sind. Daraus resultiert eine starke lokale Anpassung an die Beobachtungen. Wird D zu klein gewählt, so wird das Problem nicht lösbar, da sich nicht genügend Stützstellen im Einflussradius befinden um das Gleichungssystem zu lösen. Die Determinante wird 0. Kurz bevor dieser Zustand eintritt, kommt es zu numerischen Instabilitäten.

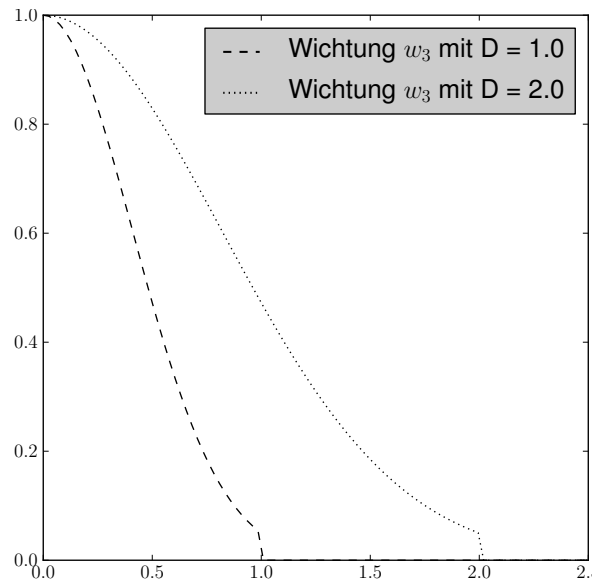


Abbildung 2.13: Wichtungsfunktion mit Einflussradius

Die numerischen Probleme bei der Inversion werden in [119] durch eine der IDW entlehnte Regularisierung gelöst. Sie basiert auf der Gauß'schen Wichtungsfunktion [73]. Die sich ergebende Wichtungsfunktion

$$w_4(d) = \frac{\hat{w}_4(d)}{\sum_{i=1}^{N_b} \hat{w}_4(d_i)} \quad \text{mit} \quad d_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| \quad (2.26)$$

und

$$\hat{w}_4(d) = \frac{\left(\frac{d^2}{D^2} + \epsilon\right)^{-2} - (1 + \epsilon)^{-2}}{(\epsilon)^{-2} - (1 + \epsilon)^{-2}} \quad (2.27)$$

gibt eine angepasste Antwort zurück, welche nahezu unabhängig vom Einflussradius approximiert. Der Einflussradius kann so hoch gewählt werden, dass keine numerischen Instabilitäten auftreten (Abb. 2.14). Eine Glättung tritt dann jedoch nicht auf. Will man bessere Anpassungen durch kleinere Einflussradien erhalten, so sind die oben erwähnten Effekte ebenfalls zu beobachten. Durch die Regularisierung verläuft sie durch die Stützstellen und ist durch feste Grenzen limitiert. Es gelten ähnliche Aussagen, wie sie bereits für die Regularisierung der Shepard-Interpolation getroffen wurden. In [119] wird aufgrund der Rechengenauigkeit von Computern ein Wert $\epsilon = 10^{-5}$ vorgeschlagen. Der Parameter ϵ wird verwendet, um einen statistischen Fehler zu berücksichtigen. Weiteres Rauschen wird angepasst.

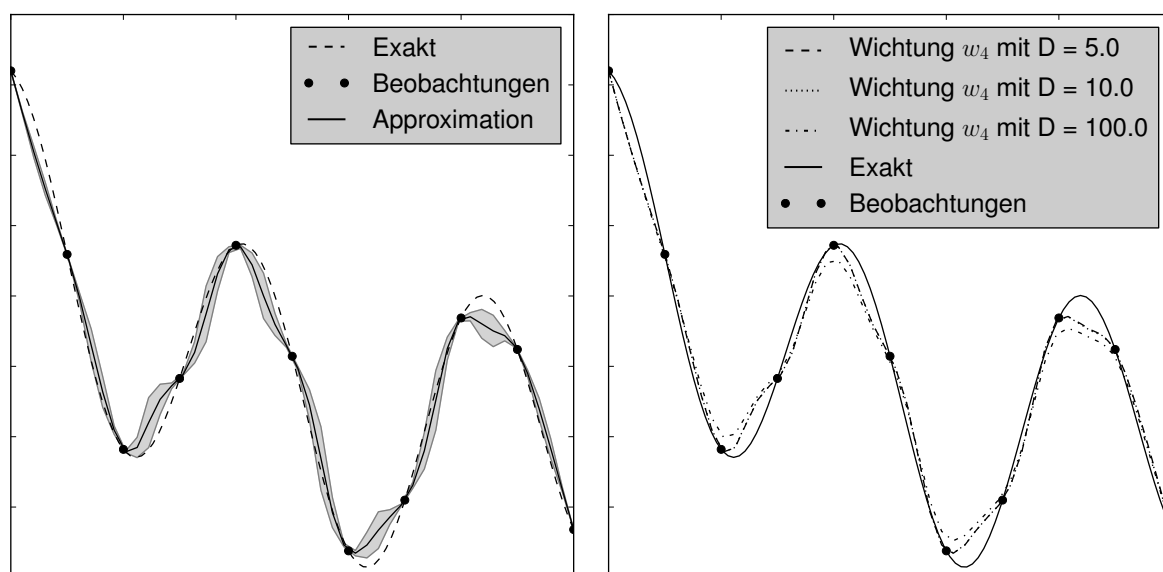


Abbildung 2.14: Approximationsfehler (links) und verschiedene Einflussradien (rechts) für Wichtung w_4

Die Parameter der Wichtungsfunktionen müssen zum Beispiel durch Optimierungsverfahren angepasst werden. Ziel ist die Steigerung der Approximationsqualität. Oftmals ist das Verhalten im untersuchten Bereich konvex. Zusätzlich werden meist nicht mehr als 2 Parameter für die Wichtungsfunktion verwendet. Deshalb können deterministische Gradientenverfahren zum Optimieren benutzt werden [153, 192]. Die Auswahl auf mehrere Wichtungsfunktionen zu erweitern, macht die Optimierungsaufgabe wesentlich komplexer. Es ergeben sich unabhängige Insellösungen mit verschiedenen lokalen Minima. In diesem Fall empfehlen sich stochastische Optimierer [70]. Möglichkeiten, die Güte einer Antwortfläche zu ermitteln, werden später in diesem Abschnitt genannt.

Kriging

Als Kriging wird eine Gruppe von Verfahren bezeichnet, welche den Wert eines Zufallsfeldes an einem unbeprobten Ort in Abhängigkeit von räumlich nahen Beobachtungen interpoliert. Kriging ist ein lineares, erwartungstreuere Schätzverfahren. Die Methodik wird nach dem südafrikanischen Bergbauingenieur D. G. Krige benannt [92]. G. Matheron etablierte das Verfahren in den 1960er Jahren in der Geostatistik [112]. Im selben Zeitraum entwickelte der sowjetische Mathematiker L. S. Gandin die Methodik zur Anwendung in der Meteorologie [66]. Ein Krigingmodell approximiert einen Wert Y mit:

$$Y(x) = Z(x) + \mu(x) + \epsilon \quad (2.28)$$

Dabei ist $Z(x)$ die Realisierung eines stochastischen (Gauß'schen) Prozesses.

$$Z(x) \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.29)$$

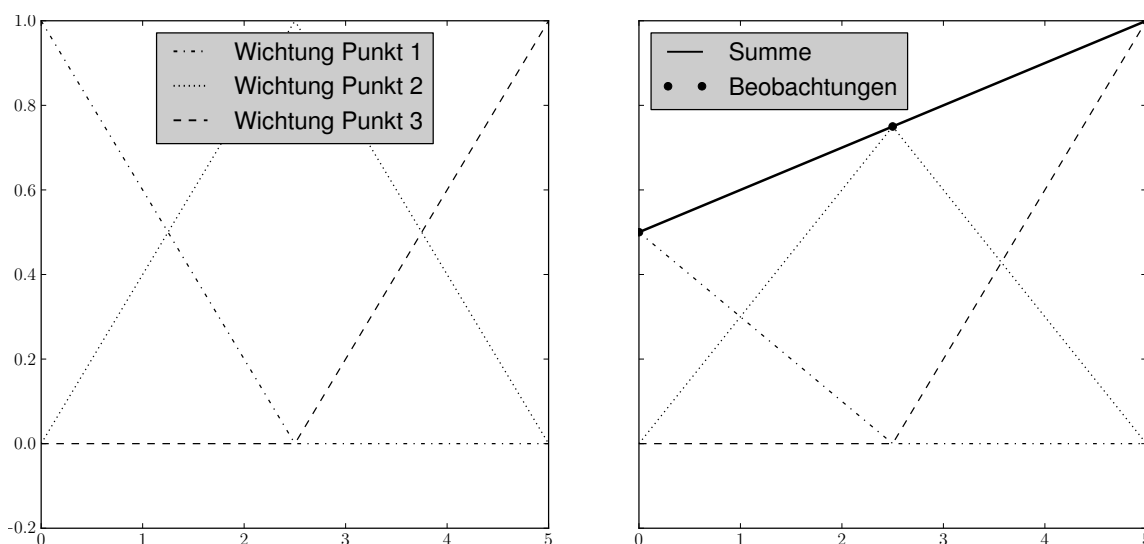


Abbildung 2.15: Lineare Ansatzfunktionen für 3 Beobachtungen (links) und Summe gewichteter Ansatzfunktionen (rechts)

Ähnlich zu den oben genannten Verfahren, wird auch im Kriging ein unbekannter Wert Y an der Position x durch die gewichtete Summe der N_b Beobachtungen an den Stellen x_i geschätzt. Kriging wird als linearer Schätzer bezeichnet, da der vorhergesagte Wert \hat{Y} eine lineare Kombination ist.

$$\hat{Y}(x) = \sum_{i=1}^{N_b} \lambda_i Y(x_i) \quad (2.30)$$

Mit

$$\sum_{i=1}^{N_b} \lambda_i = 1 \quad (2.31)$$

Es ist demnach mathematisch mit den Least Squares-Beschreibungen verwandt. Zu anderen Antwortflächenverfahren lassen sich ähnliche Zusammenhänge finden. In einem anderen Kontext wird Kriging auch als Gauß'scher Prozess, Gauß'sche Prozess Regression oder Kolmogorov Wiener Interpolation bezeichnet. Die Wichtungen müssen so optimiert werden, dass der Fehler

$$\epsilon(x) = Y(x) - \sum_{i=1}^{N_b} \lambda_i Y(x_i) \quad (2.32)$$

minimal ist. Kriging ist erwartungstreu.

$$E[\hat{Y}(x)] = E[Y(x)] \quad (2.33)$$

Variogramm

Die Darstellung der räumlichen Zusammenhänge geschieht im Kriging über das (theoretische) Variogramm. Es wird angenommen, dass Outputs stärker positiv korrelieren, je geringer die räumliche Distanz der zugehörigen Inputs ist. Das Variogramm bringt diese Annahme in eine mathematische Formulierung (Gl. 2.34).

$$2\gamma(x_i, x_j) = E(|Y(x_i) - Y(x_j)|^2) \quad (2.34)$$

Für experimentell gewonnene Daten gilt für N_D Beobachtungen an Punkten mit Entfernung h (Abb. 2.16):

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N_D(h)} \sum_{i=1}^{N_D(h)} (y(x_i) - y(x_i + h))^2 \quad (2.35)$$

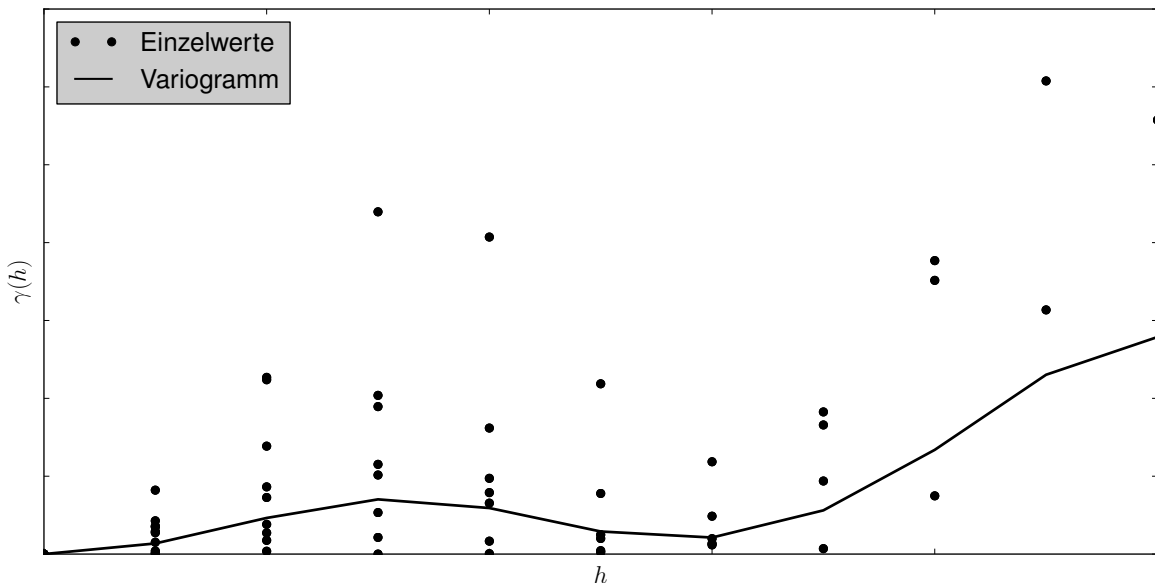


Abbildung 2.16: Variogramm

Die Anpassung an eine stetige Funktion kann über Least-Squares-Verfahren geschehen [35]. Das darunterliegende Variogramm muss angenommen und seine Verwendbarkeit verifiziert werden. Richtungsabhängige Variogramme sind dabei nicht unüblich. Im Folgenden sollen jedoch nur isotrope Abhängigkeiten dargestellt werden. Da das Verfahren aus der Geologie stammt, entspringen die Namen für die Parameter zur Beschreibung des räumlichen Zusammenhanges der dort üblichen Terminologie. *Nugget* bezeichnet die Varianz am Punkt der Beobachtung. In unverrauschten Anwendungen ist sie 0 (siehe Gl. 2.34). *Sill* ist der Schwellenwert. *Range* bezeichnet den Wirkungsbereich des

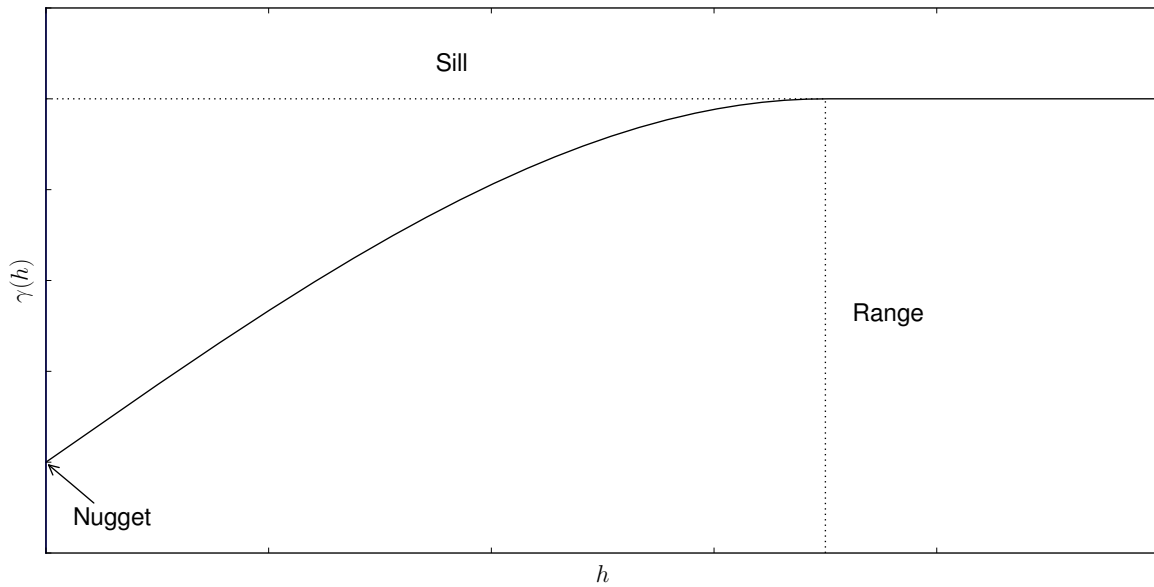


Abbildung 2.17: Ansatz für ein Variogramm

räumlichen Zusammenhanges. Werte außerhalb der Reichweite werden als (nahezu) ohne Wirkung angenommen. Die Reichweite kann dem Einflussradius von MLS und IDW gleichgesetzt werden. Der Einfluss der Wahl von Parametern des Variogramms wird in [178] untersucht. Es existieren verschiedene Ansätze, die Gebräuchlichsten sind [156]:

Lineares Modell

$$\gamma(h) = \begin{cases} nugget + \frac{a}{range}h & \text{für } 0 \leq h < range \\ sill & \text{für } h \geq range \end{cases} \quad (2.36)$$

Mit

$$a = sill - nugget \quad (2.37)$$

Sphärisches Modell

$$\gamma(h) = \begin{cases} nugget + a \left(\frac{3h}{2range} - \frac{h^3}{2range^3} \right) & \text{für } 0 \leq h < range \\ sill & \text{für } h \geq range \end{cases} \quad (2.38)$$

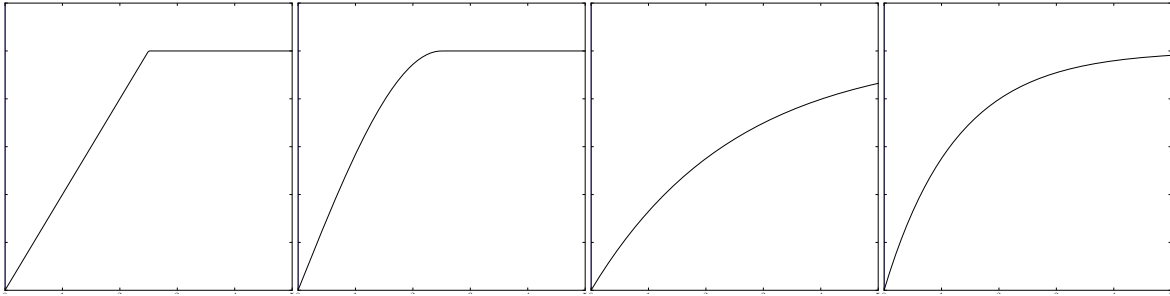


Abbildung 2.18: Lineares, Sphärisches, Exponentielles und Gauß'sches Modell

Exponentielles Modell

$$\gamma(h) = \text{nugget} + a \left(1 - e^{\frac{-h}{\text{range}}} \right) \quad (2.39)$$

Gauß'sches Modell

$$\gamma(h) = \text{nugget} + a \left(1 - e^{\frac{-2h}{\text{range}}} \right) \quad (2.40)$$

Der räumliche Zusammenhang kann ebenfalls durch die Kovarianzfunktionen dargestellt werden [151]. Die Überführung der Kovarianzbeschreibung in die Variogrammbeschreibung geschieht über folgende Formulierungen. Für einen Zufallsprozess $Z()$ gilt:

$$C(x, y) = \text{cov}(Z(x), Z(y)) \quad (2.41)$$

$$C(h) = C(0, h) = C(x, x + h) \quad (2.42)$$

$$C(0) = \text{Var}(Z(x)) \quad (2.43)$$

Durch Einsetzen und Umformen erhält man:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (2.44)$$

Und

$$\text{sill} = C(0) \quad (2.45)$$

Simple Kriging

Simple Kriging nimmt einen konstanten, bekannten Trend $\mu(x) = 0$ an. Die Variogrammatrix W enthält die Variogrammwerte aller beobachteten Punkte zueinander. Der Vektor $\gamma(x)$ beinhaltet die Variogrammwerte für den räumlichen Zusammenhang zwischen dem zu schätzendem Punkt und den Beobachtungen. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Variogramm bekannt ist, beziehungsweise richtig gewählt wurde. Die Werte in $\lambda(x)$ enthalten die Wichtungen für die Variogrammwerte zur Vorhersage des Wertes am Punkt x (Vgl. Gl. 2.20 ff). Es müssen Werte für λ gefunden werden, welche eine sinnvolle Schätzung für den Punkt x liefern. Die optimalen Wichtungswerte finden sich nach [35] bei:

$$\hat{\lambda}(x)^T = \left(\gamma(x) + \mathbf{1} \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{W}^{-1} \gamma(x)}{\mathbf{1}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{1}} \right)^T \mathbf{W}^{-1} \quad (2.46)$$

Dabei sind alle Einträge des Vektors $\mathbf{1}$ gleich eins. Grundlage dafür bilden die Gleichungen 2.30 ff. Das Ausnutzen der Maximum Likelihood Methode für die Kovarianzbeschreibung wird auch in [98, 151] erläutert.

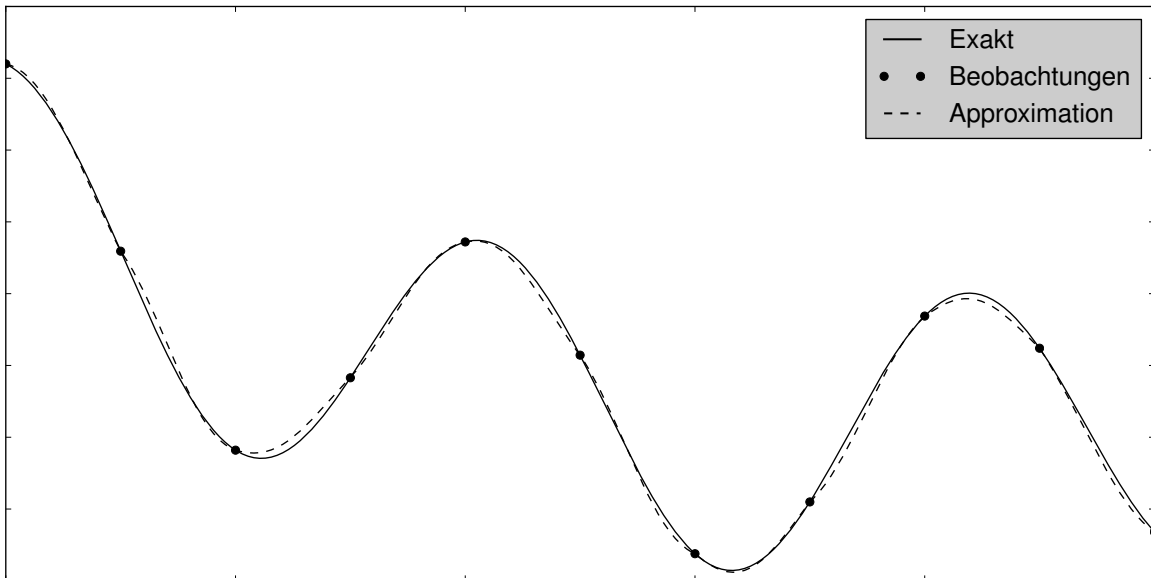


Abbildung 2.19: Simple Kriging

Die Matrizen und Vektoren lesen sich zu:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \gamma(|x_1 - x_1|) & \gamma(|x_1 - x_2|) & \dots & \gamma(|x_1 - x_{N_b}|) \\ \gamma(|x_2 - x_1|) & \gamma(|x_2 - x_2|) & \dots & \gamma(|x_2 - x_{N_b}|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(|x_{N_b} - x_1|) & \gamma(|x_{N_b} - x_2|) & \dots & \gamma(|x_{N_b} - x_{N_b}|) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

und

$$\boldsymbol{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} \gamma(|x_1 - x|) \\ \gamma(|x_2 - x|) \\ \vdots \\ \gamma(|x_{N_b} - x|) \end{pmatrix} ; \quad \hat{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{N_b} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Die Vorhersage für Punkt x ist demnach

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_b} \hat{\lambda}_i(x) Y(x_i) \quad . \quad (2.49)$$

Ordinary Kriging

Ordinary Kriging entspricht im Wesentlichen dem Simple Kriging. Es nimmt jedoch einen konstanten, aber unbekanntem Trend $\mu(x) = \mu$ an. Die Gleichungen des Simple Kriging werden dazu um den Lagrange Multiplikator μ erweitert.

$$W_+ = \begin{pmatrix} \gamma(|x_1 - x_1|) & \gamma(|x_1 - x_2|) & \dots & \gamma(|x_1 - x_{N_b}|) & 1 \\ \gamma(|x_2 - x_1|) & \gamma(|x_2 - x_2|) & \dots & \gamma(|x_2 - x_{N_b}|) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(|x_{N_b} - x_1|) & \gamma(|x_{N_b} - x_2|) & \dots & \gamma(|x_{N_b} - x_{N_b}|) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

und

$$\boldsymbol{\gamma}_+(x) = \begin{pmatrix} \gamma(|x_1 - x|) \\ \gamma(|x_2 - x|) \\ \vdots \\ \gamma(|x_{N_b} - x|) \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \hat{\boldsymbol{\lambda}}_+(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{N_b} \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Krigingvarianz

Für die geschätzten Werte kann die Krigingvarianz als Maß der Genauigkeit verwendet werden. Diese Aussage ist jedoch von der Wahl des richtigen Variogramms abhängig.

$$\sigma_k^2(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{w}(\mathbf{x}) - \frac{(\mathbf{1}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) - \mathbf{1})^2}{\mathbf{1}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{1}} \quad (2.52)$$

Durch die Annahme eines normalverteilten Fehlers und eines erwartungstreuen Schätzers lassen sich für jeden vorhergesagten Punkt Konfidenzintervalle angeben. Weitergehende Verfahren zur Bestimmung der Krigingvarianz finden sich u.a. in [41].

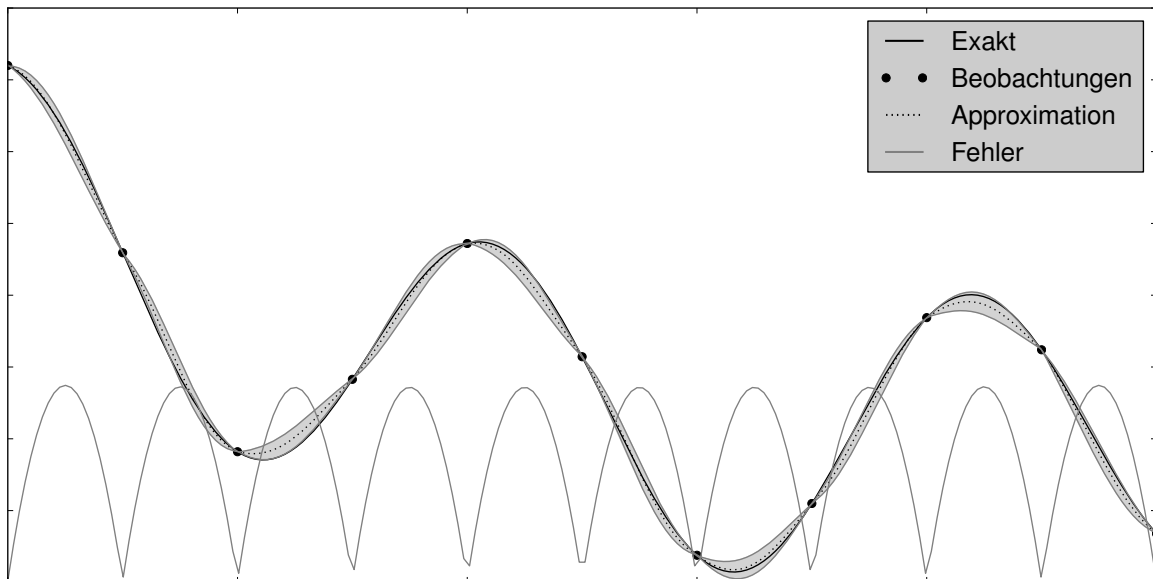


Abbildung 2.20: Krigingvarianz und 95% Konfidenzintervall

Es existieren noch viele weitere Kriging Verfahren. So werden zum Beispiel *Co-Kriging*, *Stratified Kriging*, *Universal Kriging* und *Indicator Kriging* häufig in der Literatur genannt [35]. Anwendungen der Krigingverfahren finden sich in allen erdenklichen Gebieten. Die Bewertung in der Literatur ist im Allgemeinen positiv. Aufgrund der Vielfalt der beschriebenen Einsatzmöglichkeiten wird auf eine weitere Diskussion an dieser Stelle verzichtet.

Validierung

Es ist notwendig, Angaben über die Qualität eines Metamodells anstellen zu können, um es zu bewerten. Die Validierung kann über die Bewertung des Fehlers an den beobachteten Punkten geschehen. Der Fehler an einem Punkt ist der Unterschied, zwischen wahren und beobachtetem Wert.

$$\epsilon(x) = Y(x) - \hat{Y}(x) \quad (2.53)$$

In der Regel wird der Fehler quadriert. Die Gründe dafür sind die stärkere Wichtung großer Fehler und die Unabhängigkeit vom Vorzeichen.

$$e(x) = \epsilon(x)^2 = (Y(x) - \hat{Y}(x))^2 \quad (2.54)$$

Neben der quadratischen kommen auch andere Verlustfunktionen zum Einsatz:

$$\text{Laplace : } e(x) = |\epsilon(x)| \quad (2.55)$$

$$\text{Huber : } e(x) = \begin{cases} \epsilon(x)^2 & \text{für } |\epsilon(x)| < \epsilon \\ 2|\epsilon(x)|\epsilon - \epsilon^2 & \text{für } |\epsilon(x)| \geq \epsilon \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\epsilon\text{-sensitiv : } e(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\epsilon(x)| < \epsilon \\ |\epsilon(x)| - \epsilon & \text{für } |\epsilon(x)| \geq \epsilon \end{cases} \quad (2.57)$$

Lineare Wichtungen des Fehlers erreicht man durch die Anwendung der Laplace Verlustfunktion. Die Huber Verlustfunktion quadriert kleine Fehler und wichtet größere Fehler linear. Die ϵ -sensitive Funktion akzeptiert Werte innerhalb eines (Grenz-) Fehlers ϵ . Sie ordnet die Fehler linear zu, wenn dieser Bereich überschritten wird (siehe Abb. 2.21).

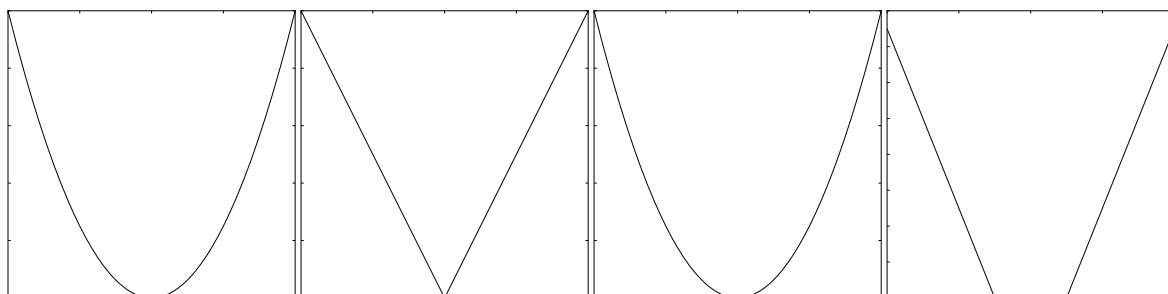


Abbildung 2.21: Quadratische, Lineare, Huber- und ϵ - sensitive Verlustfunktionen

Die Qualität des Metamodells kann durch den maximalen Fehler im beobachteten Bereich bestimmt werden.

$$\max(e(x)) \quad (2.58)$$

Eine weitere Möglichkeit ist den Fehler gewichtet zu integrieren:

$$\int e(x)\phi(x) \quad (2.59)$$

Dabei symbolisiert $\phi(x)$ die Wichtungsfunktion. In vielen Fällen ist die Integration analytisch nicht möglich und numerisch zu aufwendig. Desweiteren ist es unmöglich

oder schlichtweg ohne Sinn, ein Metamodell zu verwenden, wenn man für die untersuchte Region die exakten Systemantworten angeben kann. In diesen Fällen summiert man den Fehler an beprobten Orten.

$$\sum e(x^i)\phi(x^i) \quad (2.60)$$

Liegen keine zusätzlichen Informationen vor, wird die Wichtungsfunktion oft konstant 1 gesetzt. Aus der am häufigsten genutzten quadratischen Verlustfunktion (Gl. 2.54), resultiert die L_2 Norm. Die lineare (Laplace) Verlustfunktion ergibt die L_1 Norm. Der maximale absolute Fehler aller Punkte L_∞ kann ebenfalls als Qualitätsmaß verwendet werden. Weitere Fehlermaße werden beispielsweise in [69] genannt und verglichen. Das Anpassen der Parameter einer Antwortfläche um einen minimalen Fehler zu erzielen, ist eine Qualitätsoptimierung.

Den Fehler an einer Stützstelle zu bestimmen, welche Teil des Metamodells ist, führt bei vielen Antwortflächenverfahren zu unbrauchbaren Ergebnissen. So sind bei der regularisierten Wichtung des IDW die approximierte und wahre Antwort gleich. Der Fehler ist gleich Null. Gleiche Effekte treten bei zu gut anpassenden Ansatzfunktionen und daraus resultierender Überanpassung (*engl.* overfitting) auf. Aus diesem Grund wird der Fehler für einen Punkt bestimmt, welcher nicht Teil des Stützstellensets der Antwortfläche ist. Dazu sollen kurz drei mögliche Verfahren genannt werden [138].

Split Sample

Das Split Sample Verfahren teilt die Beobachtungen in zwei Datenmengen. Mit dem ersten Datenset, den Trainingsdaten, wird das Metamodell aufgebaut. Danach wird überprüft, wie gut sich die Werte des zweiten Sets, den Testdaten, mit dem aufgebauten Metamodell approximieren lassen. Der Fehler für einen Trainingsdatenpunkt ist die Differenz zwischen realem Ergebnis y_{td}^i und vorhergesagtem Wert \hat{y}_{td}^i .

$$\epsilon_{td}^i = y_{td}^i - \hat{y}_{td}^i \quad (2.61)$$

Diese Aussage stellt einen wahren Fehler dar. Weil jedoch die Qualität des Metamodells mit allen Informationen und nicht die Approximationsqualität einzelner Punkte auf Basis von Teilmengen bewertet wird, muss man in der Folge von geschätzten Fehlern sprechen. Nur die Testdaten werden überprüft, damit hat das Teilen der Beobachtungen einen großen Einfluss auf das Ergebnis. Diese Art der Validierung ist mit einem großen Schätzfehler behaftet. Aus diesem Grund kommen häufig robustere Verfahren der Fehlerschätzung zum Einsatz. Eine Diskussion über verschiedene Ansätze, die Daten zu teilen, findet sich in [132].

Kreuzvalidierung

Eine Erweiterung des Samplesplittings beruht auf der Aufspaltung des Stützstellen-satzes in k Teilmengen. Jede dieser Teilmengen wird dann einmal zum Testdatensatz der Restdaten erklärt. Der Approximationsfehler für alle Datenpunkte wird folglich so ermittelt, dass das Split Sample k -mal ausführt.

$$\hat{\epsilon}_{LKO}^i = y_i - \hat{y}_{\setminus k} \quad i \in k \quad (2.62)$$

Eine Spezialform ist das einzelne Überprüfen eines jeden Datenpunktes. Die Leave-One-Out Prozedur (LOO).

$$\hat{\epsilon}_{LOO}^i = y_i - \hat{y}_{\setminus i} \quad (2.63)$$

Die L_2 Norm des LOO-Fehlers wird auch als PRESS-value bezeichnet. Die Kreuzvalidierung kann als Ziehen ohne Zurücklegen aufgefasst werden. Für verschiedene Antwortflächenverfahren können analytische Auswertungen des Leave-One-Out-Fehlers vorgenommen werden [118, 120]. Dadurch kann der Aufwand enorm gesenkt werden. Der numerische Aufwand der Kreuzvalidierung für Moving Least Square Verfahren entspricht dem für die Approximation von N_b Vorhersagen. Der Grund dafür ist, dass die selben Matrixoperationen ausgeführt werden müssen. Lediglich die Wichtungen der zu überprüfenden Punkte müssen auf 0 gesetzt werden. Die zu invertierende Matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{X}$ ist in der Regel dadurch nicht dünner besetzt. Eine weitergehende Diskussion über den Rechenaufwand und die Aussagefähigkeit wird in [111] geführt.

Bootstrapping

Ein noch stabileres, dafür aber numerisch aufwendigeres Verfahren, ist das Bootstrapping [50]. Dabei werden N_{bs} Samplesplittings durchgeführt. Die Testdatensatz werden durch zufälliges Ziehen mit Zurücklegen ermittelt. Jedes Splitting ermittelt die zu schätzenden Werte. Durch mehrmaliges Durchführen des Experiments können die Verteilungsfunktionen des Schätzers dieser Werte bestimmt werden. So ist es möglich zum Beispiel Konfidenzintervalle anzugeben. Im Gegensatz zu vielen anderen Methoden ist man nicht an die Annahme einer Normalverteilung gebunden. Um robuste Schätzungen für die Verteilungsfunktionen zu erhalten, muß N_{bs} sehr groß gewählt werden. Vor diesem Hintergrund muss über die Verwendung des Verfahrens entschieden werden.

Weitere Verfahren

Neben den genannten Verfahren existiert noch eine breite Vielfalt von Antwortflächenverfahren [13]. Die Methode der Artificial Neural Networks (ANN) bildet biologische neuronale Netze nach [113]. Sie stellt sich dabei als nichtlineare Regression dar. Ihre hohe Flexibilität resultiert aus dem Ansatz für die Approximationsfunktion. Die

Aktivierungsfunktion Θ ist die lineare Kombination der mit den Koeffizienten ω_i gewichteten Funktionen f_i . Es existieren Parallelen zu höherwertigen Krigingansätzen.

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) = \Theta \left(\sum \omega_i f_i(\mathbf{x}) \right) \quad (2.64)$$

Ein weiteres häufig genutztes Verfahren sind Radial Basis Functions (RBF) [137]. Hierbei werden räumliche Abstände genutzt, um Abhängigkeiten zu beschreiben. Der Wert der Distanzfunktion ϕ ist abhängig vom Abstand des zu approximierenden Punktes zu den Stützstellen. Die Einflüsse aller N_b Beobachtungen werden gewichtet addiert, um den Wert von Y vorherzusagen. Die Wichtungen λ_i werden so optimiert, dass der Approximationsfehler minimal wird.

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_b} \lambda_i \phi(|x - x^i|) \quad (2.65)$$

Diese Beschreibung kann auch als einschichtiges neuronales Netz verstanden werden. In diesem Fall spricht man von *Radial Basis Function Networks*. Weitere Verfahren finden sich beispielsweise in [8].

Diskussion

Alle genannten Verfahren sind sowohl in kommerziellen als auch in freien Programmen umgesetzt. Dadurch sind sie weit verbreitet und werden an industriellen und wissenschaftlichen Beispielen angewendet. Die Verwendung einzelner Methoden wird jedoch von Nutzern konkurrierender Formulierungen häufig diskutiert. Auf eine Auflistung von in der Literatur zu findenden Vergleichen wird deshalb nicht weiter eingegangen. Bis zum heutigen Zeitpunkt konnte sich kein Verfahren als Alleiniges etablieren. Tatsächlich konnte im Rahmen dieser Arbeit festgestellt werden, dass die Wahl der Wichtungs- und Variogrammfunktionen sowie die Bestimmung der zugehörigen Koeffizienten einen bedeutenden Einfluss auf die Qualität der Approximation haben. Die Detailgenauigkeit in der Programmierung von Benchmarks hat daher einen sehr großen Einfluss. Dieser Fakt wird in vielen Diskussionen ignoriert. Die grundlegenden Ansätze sind in allen weit verbreiteten Verfahren gleich, beziehungsweise werden so definiert, dass sie sich ähneln. Exemplarisch sollen die oft genutzten exponentiellen Wichtungs-, Kernel- oder Variogrammbeschreibungen genannt werden.

Wichtige Unterschiede finden sich im numerischen Aufwand und numerischer Anfälligkeit. Betrachtet man nur die oben vorgestellten Verfahren, so erkennt man, dass das Krigingverfahren die aufwendige Inversion nur einmal ausführt. Die invertierte Matrix hat jedoch die Anzahl der Stützstellen als Kantlänge. Sind viele Beobachtungen vorhanden, so kann das Verfahren unökonomisch werden. Moving Least Squares Verfahren dagegen müssen die Inversion für jeden vorherzusagenden Punkt für eine wesentlich

kleinere Matrix anstellen. Dann können die erwähnten Instabilitäten auftreten. Dieser Fakt kann nur dann als Nachteil erkannt werden, wenn numerisch instabile Teilräume tatsächlich abgefragt werden. Der gleiche Effekt kann auch in Verfahren wie Kriging auftreten. Höherwertigere Methoden können bessere Ergebnisse erzielen, indem intern Optimierungsverfahren angewandt werden. Dadurch wird aber der Aufwand erhöht. Die Wahl hängt somit nicht zuletzt von den Kosten für die Informationsgewinnung ab. Je teurer die Evaluation des realen Modells ist, desto mehr Aufmerksamkeit ist dem Ersatzmodell zu widmen. Oberstes Ziel ist in jedem Fall die Minimierung des Gesamtaufwandes. Kann ein Sachverhalt durch mehrere Metamodelle gleichwertig dargestellt werden, so ist das einfachste zu bevorzugen („Ockham’s Rasiermesser“).

Für unterschiedliche Aufgabenstellungen können verschiedene Metamodelle besser geeignet sein. Bei kontinuierlichen Antworten mit einheitlichem Stützstellenraster ergeben sich keine größeren Qualitätsunterschiede. Sind die Stützstellen dagegen ungleichmäßig verteilt, treten bei einigen Verfahren Schwächen auf. Liegen die Systemantworten in *Clustern* vor, muss teilweise auf Klassifizierungsmethoden zurückgegriffen werden. Desweiteren muss bei der Wahl eines Metamodellverfahrens entschieden werden, ob die Beobachtungen geglättet oder angepasst werden sollen. Zudem ist der numerische Aufwand zu beachten. Die Qualität der Approximation muss immer mit den genannten Verfahren überprüft werden. Mit (Meta-) Modellen erhaltene Ergebnisse sind in jedem Fall zu verifizieren. So wird beispielsweise die Qualität einer Optimierung auf der Antwortfläche durch eine reale Evaluation des physikalischen Modells für die Konfiguration des erreichten Optimums nachgewiesen. Verfahren, welche, mit Weitblick entwickelt, auf Approximationsverfahren aufsetzen wollen, dürfen sich nicht fest an eine Methodik binden.

2.2 Design of Experiments

Das klassische Verfahren zum Aufstellen eines Ersatzmodells wird in Abb. 2.22 dargestellt. Um ein Metamodell aufbauen zu können, werden Informationen über das Modell an sich benötigt. Dazu wird zuerst ein Versuchsplan aufgestellt, welche Systemantworten zu ermitteln sind. Danach wird mit dieser Information eine Antwortfläche erstellt. Die Evaluation aller weiteren Antworten erfolgt auf dem Metamodell. Zusätzliche reale Berechnungen werden nicht mehr nötig. Das aufgestellte Stützstellenset muss somit alle wichtigen Zusammenhänge darstellen können. Es wird klar, dass die Systemantworten reproduzierbar, das heißt nicht zu stark verrauscht, sein müssen. Werden Haupteffekte durch das Rauschen so stark überdeckt, dass sie nicht zu erkennen sind, wird das Metamodell unbrauchbar. In der Literatur findet sich eine Reihe von Verfahren zum Aufstellen von Versuchsplänen. Einige der Wichtigsten sollen hier kurz erläutert werden. In den meisten Fällen wird ein Stützstellenset per statistischer Versuchsplanung

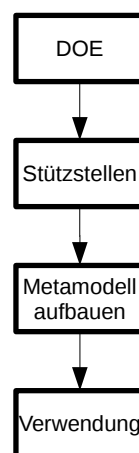


Abbildung 2.22: Klassische Metamodellierung

(*engl.* design of experiments (DOE)) erstellt [120]. Ziel der Verfahren ist es, soviel Informationen wie möglich für das zu erstellende Metamodell zu sammeln. Der Aufwand ist dabei so gering wie möglich zu halten. Die Ursprünge des DOE sind bei Versuchen in der Landwirtschaft zu finden. Aber auch andere Gebiete wie Biologie oder Chemie erkannten die Vorteile geplanter Versuche schnell [60, 115, 186].

Die meisten Kriterien zur Auswahl eines optimalen Versuchsplanes beruhen auf dem mathematischen Modell des zu beschreibenden Prozesses. In der Regel werden in erster Hinsicht Polynomansätze erster und zweiter Ordnung gewählt. In Abhängigkeit von der Größe des generierten Stützstellensets N_b und der Anzahl der Terme (Koeffizienten) m wird von übersättigten ($N_b > m$), gesättigten ($N_b = m$) oder untersättigten ($N_b < m$) Versuchsplänen gesprochen. Aus den mathematischen Beschreibungen der Antwortflächenverfahren lässt sich erkennen, dass für die Verwendung der Stützstellen in einem solchen Metamodell mindestens gesättigte Versuchspläne vorliegen müssen. Ist dies nicht der Fall, so können nicht alle Terme berücksichtigt werden. Sind mehr Beob-

achtungen vorhanden als Koeffizienten zu bestimmen, so kann man entweder den Grad des Ansatzes erhöhen oder eine geglättete Antwort erhalten. Speziell bei verrauschten Systemantworten ist es gefährlich, Metamodelle ohne Glättung beziehungsweise mit zu geringer Glättung zu verwenden. Der Grund dafür ist, dass die Fehler des Solverauschens mit angepasst und somit als wahre Antwort angenommen werden. Ist das untersuchte Gebiet klein genug, so ist die Annahme linearer oder quadratischer Zusammenhänge nur mit geringem Fehler behaftet. Deshalb ist es sinnvoll die Breite des untersuchten Raumes auf den tatsächlich wichtigen Bereich zu beschränken [5].

Vollfaktorieller Versuchsplan

Die einfachste Variante einen Versuchsplan aufzustellen, ist der vollfaktorielle Versuchsplan. Dazu wird der Raum der Inputparameter zwischen zu definierender unterer und oberer Grenze diskretisiert. Die Diskretisierungsabschnitte werden als *Level* oder auch als Faktoren bezeichnet. Der vollfaktorielle Versuchsplan stellt alle Faktorkombinationen auf. Es werden alle unabhängigen und gemischten Zusammenhänge erfasst. Der Nachteil ist, dass der Aufwand mit steigender Anzahl an Inputparametern beziehungsweise Faktoren rasch ansteigt (Gl. 2.66).

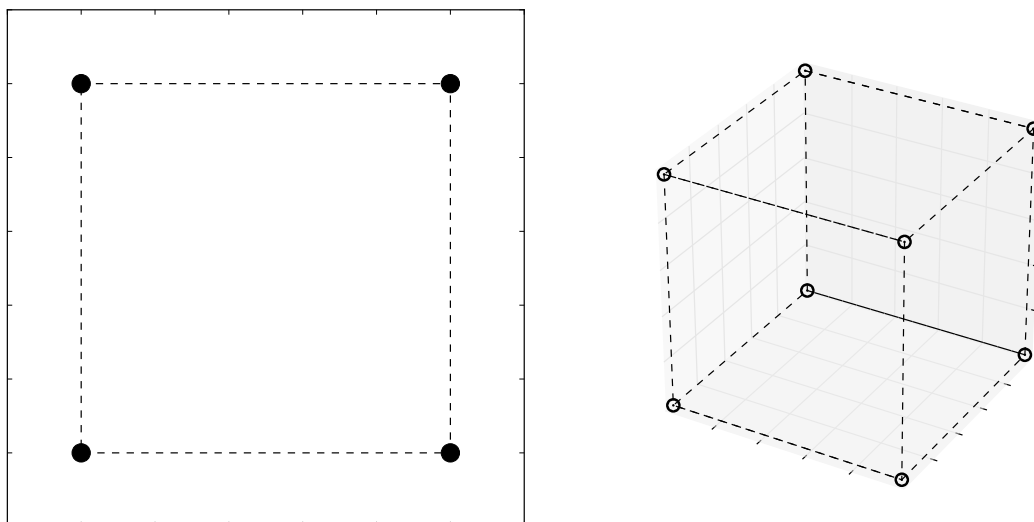


Abbildung 2.23: Vollfaktorieller Versuch 2D und 3D

$$N_b = \prod_{i=1}^{N_{inp}} m_i \quad (2.66)$$

Häufig werden nur 2 oder 3 Faktoren pro Inputdimension gewählt. So können lineare beziehungsweise quadratische Ansatzfunktionen abgebildet werden. Da die Zusammenhänge unbekannt sind, werden die Faktoren für alle Dimensionen gleich gewählt. Die Größe des Stützstellensets ist dann:

$$N_b = 2^{N_{inp}} \quad ; \quad N_b = 3^{N_{inp}} \quad (2.67)$$

Aus diesem Grund spricht man auch von 2^N und 3^N Designs. Um den Aufwand zu minimieren, wird der Versuchsplan lediglich entlang der Achsen aufgestellt. Dadurch werden die Wechselwirkungen vernachlässigt. Der Aufwand ist dann mit

$$N_b = 1 + \sum_{i=1}^{N_{inp}} (m_i - 1) \quad (2.68)$$

in Problemen höherer Dimensionalität wesentlich reduziert. Man spricht von **axial designs** beziehungsweise **star points** [17, 75].

Central Composite Designs

Das wohl am häufigsten genutzte Verfahren zum Aufstellen eines Stützstellensets für quadratische Approximationen ist das Central Composite Design (CCD). Es setzt sich aus drei Versuchsplänen zusammen. Der erste und einfachste Teilplan ist eine Stützstelle in der Mitte des zu beschreibenden Raumes, der **center point**. Der nächste Teilplan ist ein vollfaktorieller Versuchsplan mit zwei Faktoren. Der letzte Anteil ist eine Menge von **star points**, Punkte welche ausgehend vom Center Point in jede Achsenrichtung mit einem definierten Radius α gesetzt werden.

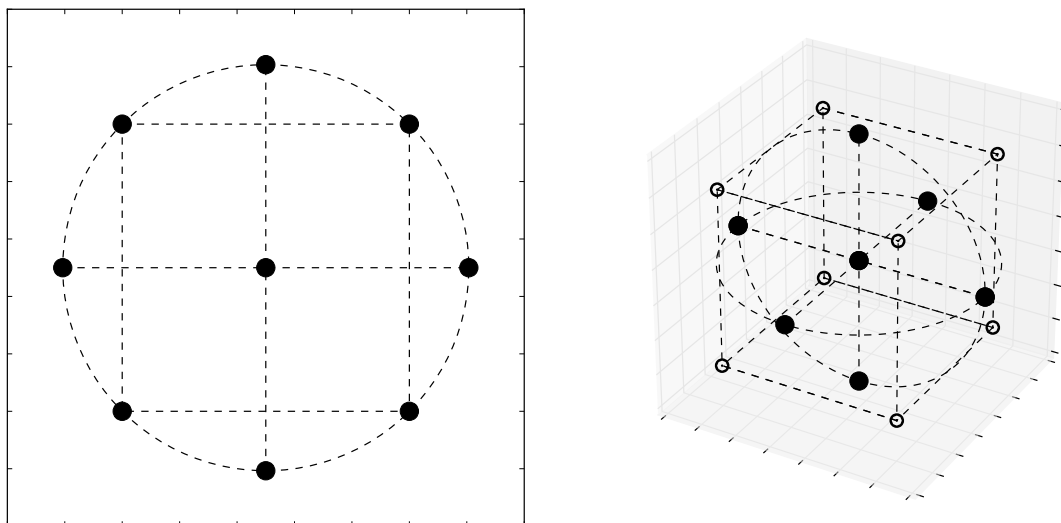


Abbildung 2.24: Central Composite Designs 2D und 3D

Der Aufwand für ein quadratisches CCD ist:

$$N_b = 2^N + 2N + 1 \quad (2.69)$$

Ähnlichkeiten zu diesem Versuchsplan haben **Box-Behnken Designs**. Sie bestehen aus dem center point und den Mittelpunkten der Kanten des Hyperwürfels. Extreme Effekte, wie sie im CCD vorkommen können, werden nicht berücksichtigt. Dieses Vorgehen kann in einigen Fällen sinnvoll und notwendig sein.

Teilfaktorieller Versuchsplan

Der teilfaktorielle Versuchsplan wird auf Basis des vollfaktoriellen Planes erstellt. Es werden jedoch nicht alle möglichen Kombinationen berücksichtigt. Wechselwirkungen werden mit Faktoreffekten vermischt. Häufig sind die Zusammenhänge zwischen Inputparametern und dem Output so nur schwer zu erkennen. Die Bezeichnung der Versuchspläne ist in der Form l^{N-p} . Der Aufwand des vollfaktoriellen Versuchsplanes wird somit um den Reduktionsparameter p vermindert. Im Gegensatz zum vollfaktoriellen Versuch benötigt ein 3^{3-1} Plan nur ein Drittel der Stützstellen. Sollten sich bestimmte Inputparameter als unwichtig erweisen, so können ihre Effekte logischerweise als Rauschen aufgefasst werden. Die Dimensionalität des Problems ist dann reduzierbar. Die Stützstellen können orthogonal auf den verbleibenden Raum wichtiger Parameter projiziert werden. So erhält man einen kleineren Reduktionsparameter p oder einen vollfaktoriellen Plan.

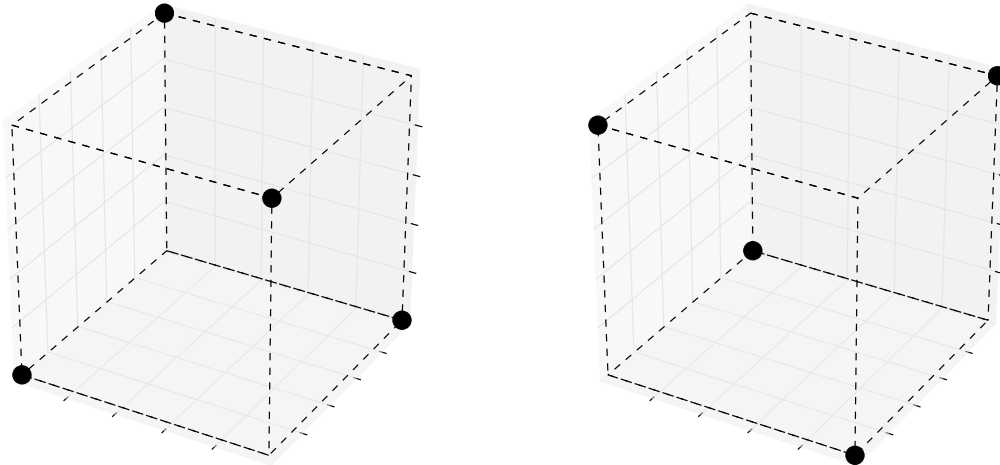


Abbildung 2.25: Teilfaktorieller Versuch 3D

Die Auswahl guter Fraktionen geschieht häufig über **orthogonale Felder**. Diese stellen ein wichtiges Werkzeug der Taguchi-Methodik dar. Ihre Verwendung ist breit diskutiert (siehe z.B. [122]). Die Schwächen, dass wichtige Haupteffekte nicht erkannt werden können, sind bekannt. Daher muss jedes DOE, welches über orthogonale Felder erstellt worden ist, daraufhin kontrolliert werden. Die Orthogonalität eines DOEs definiert sich darüber, dass das Skalarprodukt der Stützstellen zueinander Null ist. Die teilfaktoriellen Pläne 2^{N-1} sind somit orthogonal [75]. Die Anwendung der Methodik ist sehr populär, nicht zuletzt weil Tabellen existieren, in denen die Versuchspläne abgelesen werden können [131]. Eine Methode teilfaktorielle Versuchspläne zu erstellen, sind **Placket-Burman Designs**, welche stark vermengte orthogonale Felder produzieren [134, 135]. Eine weitere Möglichkeit, teilfaktorielle Versuchspläne aufzustellen, ergibt sich durch das Aufstellen eines Optimierungsproblems.

Optimalitätskriterien und -ziele

Basierend auf den Formulierungen der Metamodelle, kann die Lage der Stützstellen optimiert werden [18]. Sie können verschoben oder so ausgewählt werden, dass sie optimal verteilt sind. Für diese Art der Beurteilung sind keinerlei Funktionsauswertungen notwendig. Nur die Lage der Stützstellen wird adressiert. Zur Bewertung verwendet man die Formulierungen der Metamodelle. In der linearen Regression wird die Kovarianz der geschätzten Koeffizienten $\hat{\mathbf{B}}$ mit

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{B}}) = \sigma^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (2.70)$$

angegeben. Ein Ziel ist es, die Stützstellen so anzuordnen, dass der Streuungsellipsoid $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ optimal wird. Da die Optimierung skalare Werte benötigt, werden Kennwerte der Matrix verwendet. Die folgenden Kriterien sind einige der wichtigsten und am häufigsten genutzten:

- A-Optimalität: $\text{trace}((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) \rightarrow \min$ geometrisch bedeutet das die Minimierung der durchschnittlichen Ausdehnung des Streuungsellipsoiden
- D-Optimalität: $\det((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) \rightarrow \min$ - Minimierung des Volumens
- E-Optimalität: $\max[\text{eigenval}((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})] \rightarrow \min$ Minimierung der maximalen Ausdehnung

Weitere Ziele für die Optimierung des Stützstellensets sind zum Beispiel die Minimierung des maximalen Vorhersagefehlers $\max[\sigma(x_i), \dots, \sigma(x_{N_b})] \rightarrow \min$ (G-Optimalität) oder der Summe aller Vorhersagefehler $\sum_{i=1}^{N_b} \sigma(x_i) \rightarrow \min$ (V-Optimalität). Aus statistischer Sicht haben für Least-Squares Verfahren D- und G-Optimalität die gleichen Ziele. Für das Generieren der optimalen Sets existieren verschiedene Verfahren. Das effizienteste ist das sequentielle Vorgehen [49, 185]. Auf den entstandenen Versuchsplänen bauen Austauschverfahren oder der häufig genutzte DETMAX-Algorithmus auf [117]. Ein Überblick über die Methoden findet sich in [32, 78]. Die Auswahl der Designs über genetische Algorithmen aus einem vollfaktoriellen Versuch wird in [126] beschrieben.

Plain Monte Carlo

Das einfachste Verfahren stochastischer Simulation ist das Plain Monte Carlo (PMC) Verfahren [150]. Dabei werden mittels Zufallszahlengenerator und den Inputparametern zugehörigen Verteilungen N_b Stichproben generiert. Für deterministische Parameter wird dazu eine Gleichverteilung zwischen der unteren und der oberen Grenzen angenommen. Das Verfahren ist leicht verständlich und einfach zu programmieren. Ein weiterer Vorteil ist, dass sich jede beliebige Anzahl von Stützstellen generieren lässt. Das Hinzufügen neuer Punkte ist sehr einfach zu realisieren. Der größte Nachteil des Monte Carlo Verfahrens ist der Vorgang des Stichprobenziehens an sich. Um robuste Aussagen für Ereignisse geringer Wahrscheinlichkeit treffen zu können, sind

sehr viele Stützstellen notwendig. Die Standardabweichung eines geschätzten Wertes basierend auf einem Datensatz welcher durch Plain Monte Carlo gewonnen wurde ist $\sigma_{\bar{Y}} = \sigma N_b^{-0.5}$. Desweiteren ist der Raum uneinheitlich abgedeckt oder es treten Korrelationen zwischen den Inputparametern auf (Abb. 2.26).

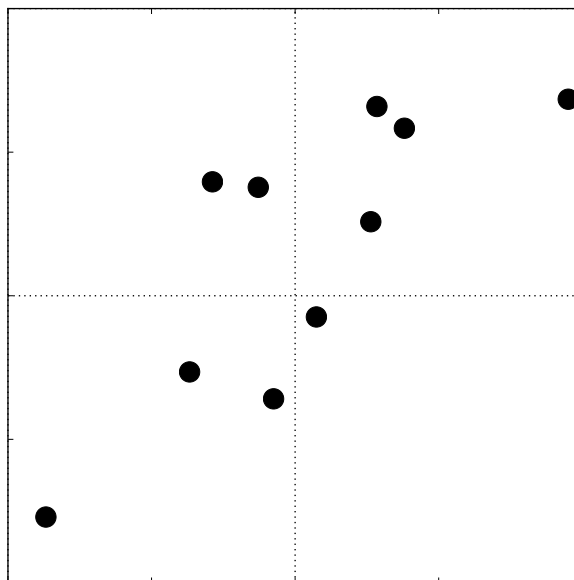


Abbildung 2.26: Klassische Monte Carlo Designs

Latin Hypercube Sampling

Ein fortschrittlicheres Verfahren ist das Latin Hypercube Sampling (LHS) [114]. Um den Aufwand des PMC zu reduzieren, werden alle Zustände der Inputparameter im gleichen Maß beachtet. Dazu werden die Verteilungsfunktionen der Parameter in N_b Klassen gleicher Wahrscheinlichkeit unterteilt. Jede Klasse wird mit einem Wert befüllt. Durch Ziehen ohne Zurücklegen oder zufällige Permutation werden die Stützstellen zusammengebaut. Jede der N_b Schichten (*lat. Stratum*) enthält danach genau ein Design. Störende Korrelationen zwischen den Designs können reduziert werden, indem man die Position einzelner Hyperzellen miteinander tauscht. Eine Möglichkeit ist das Nutzen einer Cholesky Zerlegung der Zielkorrelationsmatrix [77, 126]. Es entstehen orthogonale Versuchspläne. Ein gesättigter Versuchsplan ist dafür nötig. Der entstehende Versuchsplan deckt den Raum besser ab als klassische Monte Carlo Verfahren (Abb. 2.27). Das Hinzufügen von neuen Designs ist aufwendiger beziehungsweise nur bedingt möglich. Es ist zu erkennen, dass Parallelen zu orthogonalen Feldern bestehen [128, 172]. Neben der Korrelation der Designs können auch andere Kriterien zur Verbesserung der Lage des Stützstellensets benutzt werden. In [6] wird die potentielle Energie von Teilchen als physikalisches Analogon verwendet. Indem jedes Teilchen die gleiche Masse erhält, wird die Summe der inversen Distanzquadrate minimiert.

$$\sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j>i}^{N_b} \frac{1}{d_{ij}^2} \rightarrow \min \quad (2.71)$$

Oft genutzte Ziele sind auch das Maximieren der minimalen Distanz (maximin) zwischen zwei Designs, das Minimieren der maximalen Distanz (minimax) oder Maximierung der Entropie. Die Literatur zur erfolgreichen Verwendung der Optimierungsziele ist reichhaltig und wird an dieser Stellen nicht diskutiert. Das Optimierungsproblem an sich wird in der Regel durch *Greedy Search* oder fortgeschrittene Verfahren gelöst. Genetische Algorithmen sind dafür ein geeigneter Ansatz [10]. Durch Nutzen eines Optimierers wird es möglich, den Versuchsplan unter Berücksichtigung der oben genannten Ziele um Stichprobensätze zu erweitern.

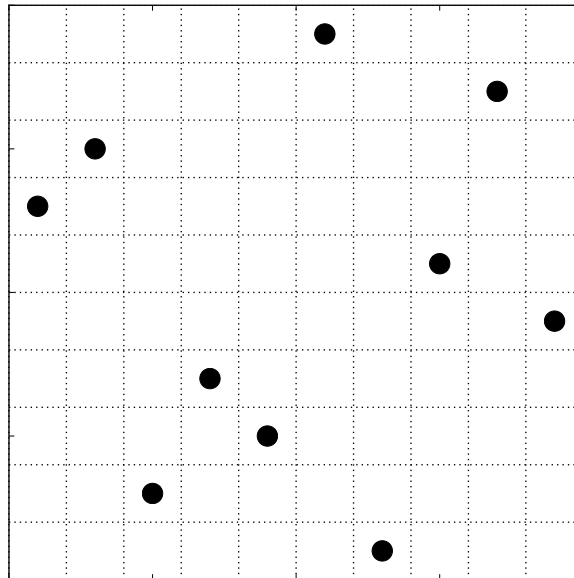


Abbildung 2.27: Latin Hypercube Design

2.3 Adaptive Design of Experiments

Klassische DOEs helfen, einen globalen Überblick über die Zusammenhänge zu erkennen. Aufgrund limitierter Ressourcen können jedoch meist nur lineare oder quadratische Effekte aufgezeigt werden. Oft ist die Kenntnis über lokale Phänomene notwendig. Für fortgeschrittene Untersuchungen reichen klassische, statische Versuchspläne somit nicht aus. Der Parameterraum muss so untersucht werden, dass in den interessanten Regionen Informationen in genügender Qualität und Anzahl vorhanden sind. Grundsätzlich gilt, je mehr Informationen vorhanden sind, desto besser kann die Ap-

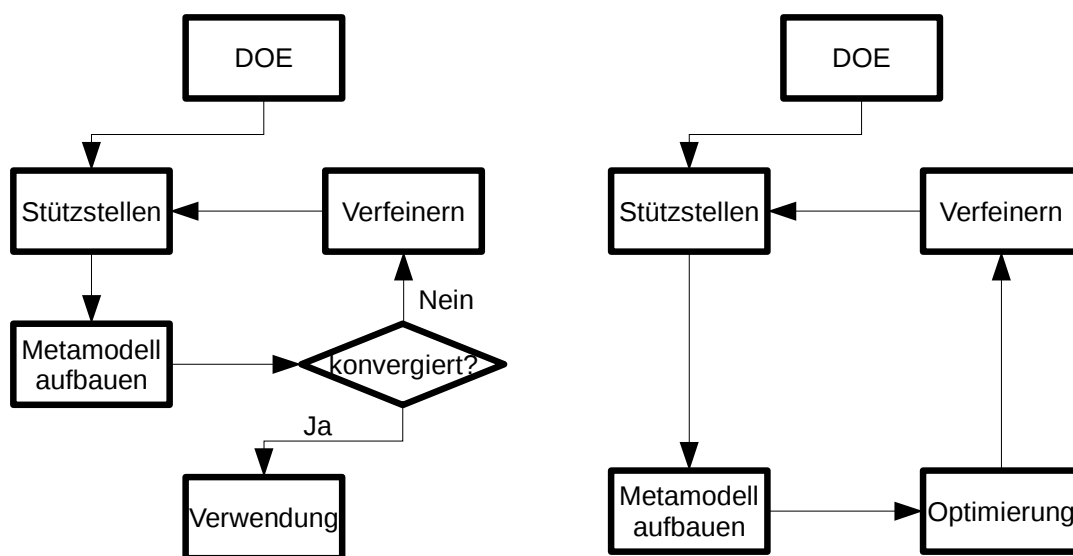


Abbildung 2.28: Adaptive Metamodellierung (I) und (II)

proximation sein [35]. Informationen erhalten Metamodelle über ihre Stützstellen. Das heißt, die Qualität eines Metamodells wird durch zusätzliche Stützstellen verbessert. In der Regel geschieht dies in mehreren Iterationsschritten in denen auf das Prüfen der Approximationsqualität, das Generieren und Berechnen neuer Stützstellen folgt. Abbruchkriterien sind dabei meist ein erreichtes Qualitätsziel, eine maximale Iterationsanzahl oder wenn sich die Güte nicht weiter verbessern lässt. Einige Verfahren erstellen ein optimales Stützstellen-set für globale Approximationen (Abb. 2.28 links). Bei dieser raumfüllenden Strategie werden sogenannte *infill-points* gefunden, um die Qualität des Stützstellen-set im gesamten Raum zu verbessern. In der Regel bedeutet dies eine Begrenzung des Approximationsfehlers ϵ . Andere Verfahren verfeinern ihr Stützstellen-set nur in der relevanten Zone (Abb. 2.28 rechts) [187, 188]. Dies geschieht zum Beispiel an der Grenzzustandsfläche [107, 146] oder für ein vorhergesagtes Optimum. Eine Polynomregression mit gleichbleibenden globalen Ansätzen ist im Allgemeinen kein geeignetes Metamodell, deshalb werden komplexere Verfahren verwendet.

Raumfüllende Strategie

Das Ziel dieser Vorgehensweise ist es, ein Stützstellenset so zu finden, dass das Modell im gesamten Variationsraum mit einem definierten Fehlermaß approximiert werden kann [180]. In der Regel wird mit einem geeigneten Optimierungsverfahren nach Stellen im Raum gesucht, welche schlecht approximiert werden können. Einfache Verfahren

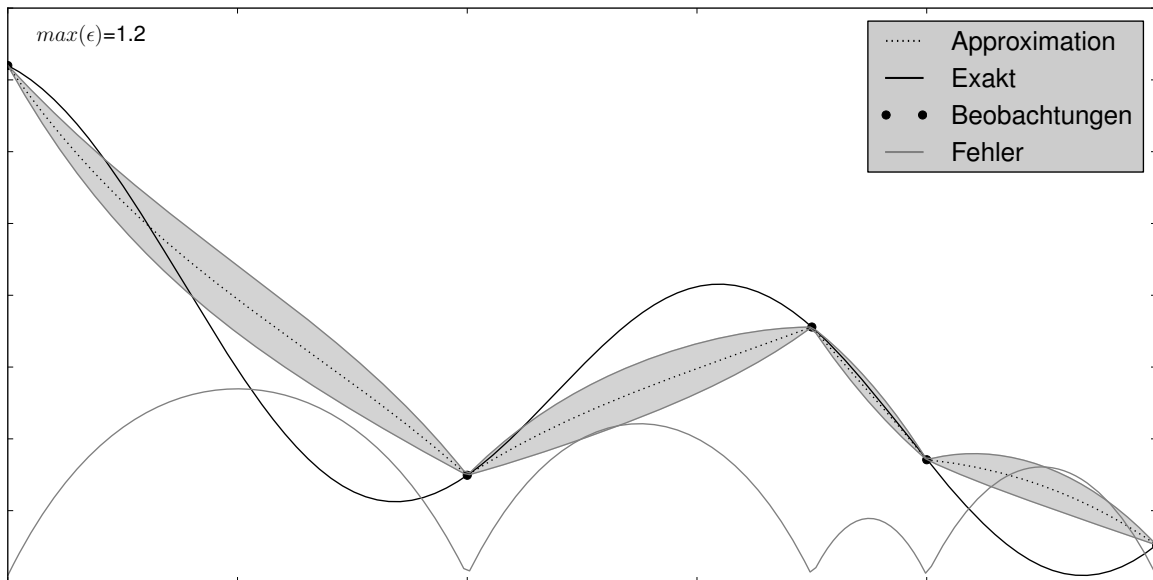


Abbildung 2.29: Initiale Stützstellen und Konfidenz

nutzen dazu die Varianzvorhersage des genutzten Antwortflächenverfahrens. Diese sind jedoch stark vom gewählten Ansatz (Wichtungsfunktion, Variogramm) abhängig. Für viele Surrogate sind entsprechende Aussagen deshalb nur schlecht nutzbar. In diesem

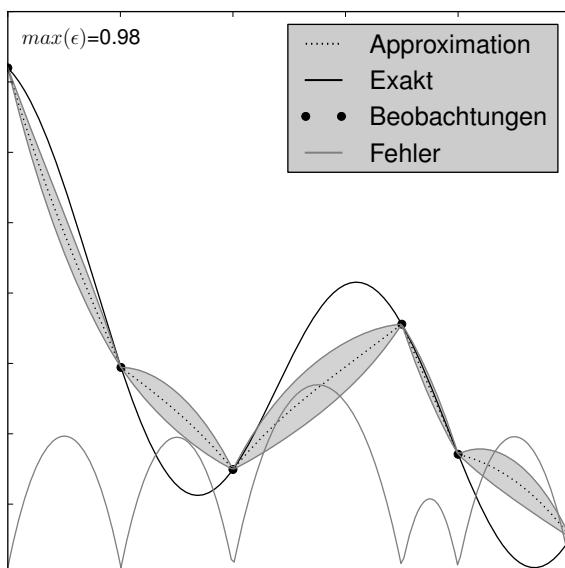


Abbildung 2.30: 1. Iterationsschritt

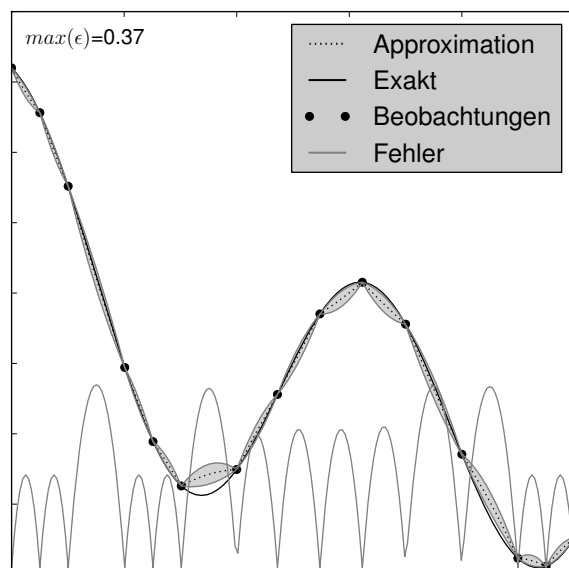


Abbildung 2.31: 10. Iterationsschritt

Kontext muss hervorgehoben werden, dass das Optimierungsproblem mehrere lokale Maxima besitzt. Da der Füllprozess iterativ abläuft, muss das Maximum jedoch nicht exakt gefunden werden. Von Fall zu Fall kann es genügen, lokale Optima zu identifizieren. Durch raumfüllende Strategien aufgestellte Antwortflächen neigen teilweise zum *overfitting* oder zu numerischen Durchschlageffekten. Diese Tatsachen müssen zum Beispiel in Abbruchkriterien oder bei der Wahl der Fehlermaßgewinnung berücksichtigt werden. In der Literatur sind alle Kombinationen von möglichen Metamodellen, Fehlerkriterien und Optimierungsalgorithmen zu finden. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass einmal erstellte Metamodelle für alle weitergehenden Untersuchungen verwendet werden können. Der Nachteil ist, dass Informationen an Stellen geschaffen werden, die für spätere Betrachtungen unwichtig sind. Bei vielen Inputparametern und großen Parameterräumen wird dieses Vorgehen schnell ineffizient. Das Verhältnis des benötigten Raumvolumens zum untersuchten ist bei konvergierenden Untersuchungen wie Optimierungen oder bestimmten Zuverlässigkeitsuntersuchungen besonders ungünstig. Bei

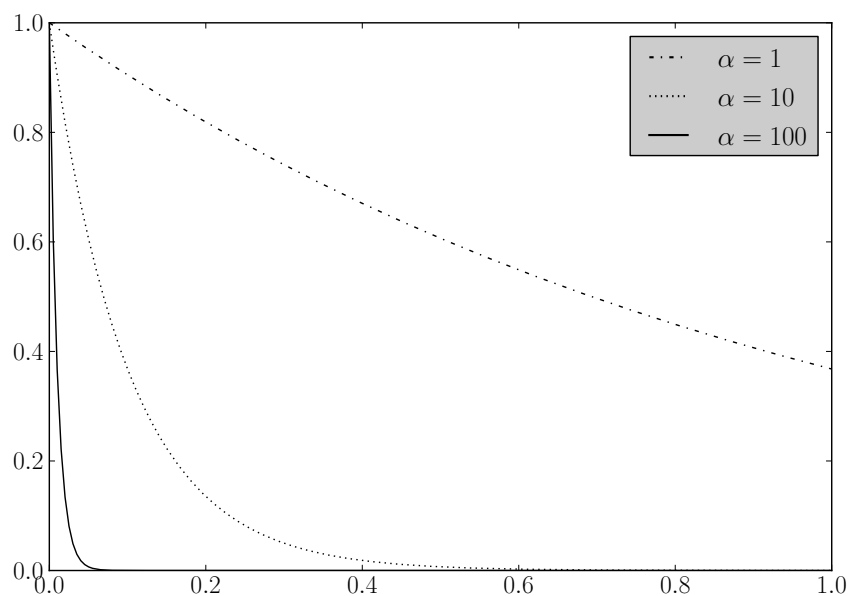


Abbildung 2.32: Wichtungsfunktion für den Leave-One-Out-Fehler [103, 104]

raumfüllenden Initialstützstellensets wie sie zum Beispiel durch Latin Hypercube aufgestellt werden, sind die Abstände zwischen den Punkten in etwa gleichgroß. Die vorhergesagte Varianz für einen zu approximierenden Punkt hängt in der Regel vom Abstand und Wert der nähergelegenen Stützstellen ab. Das heißt, sie ist größer, je höher die umgebenden Werte sind, beziehungsweise wie groß die Distanz zu den nächsten Punkten ist. Die spätere Nutzung für Minimierungsprobleme ist damit zu überdenken, wenn die Varianz als alleiniges Qualitätskriterium genutzt wird. Wenn der Fehler normiert wird, zum Beispiel bei Robustheitsuntersuchungen, bleibt das Vorgehen weiter zu überdenken, da die Entfernungsabhängigkeit vorhanden bleibt. Dies führt die Suche nach maximalem Fehler lediglich in Regionen schlechter Abdeckung. Eine Erweiterung und Anpassung findet sich in der später beschriebenen Strategie der zu erwarteten Verbesserung. Die Verfeinerung unter Berücksichtigung von Grenzwerten erläutert [133].

Die im Abschnitt 2.1 genannten Validierungsverfahren kommen deshalb häufig zum Einsatz. Gebiete hoher nichtlinearer und multimodaler Antworten werden in [103, 104] verfeinert. Dabei wird der Leave-One-Out-Fehler mit einer räumlich abhängigen Funktion approximiert. Der DoI (Degree-of-Influence) kann beispielsweise in exponentieller Form genutzt werden (Abb. 2.32). Es entsteht ein Metamodell zur Approximation des Fehlers an unbeprobten Orten. Dieser Umstand wird jedoch in den zitierten Arbeiten nicht direkt adressiert.

$$DoI(x_i) = \exp(-\alpha|x_i - x_0|) \quad (2.72)$$

Das Erweitern des Stützstellensets um Punkte mit maximalem Approximationsfehler und einem auf der Antwortfläche erhaltenem Optimum wird in [88] beschrieben. Dabei wird beispielsweise mit Bootstrapping Verfahren die Varianz für die verschiedenen Punkte auf der Antwortfläche robust ermittelt.

Moving Limits Strategie

Für konvergierende Verfahren wie Optimierungsalgorithmen ist es nicht notwendig, gute Approximationen im gesamten Raum zu besitzen. Vielmehr interessiert es, lokal gute Approximationen angeben zu können. Eine Möglichkeit hierfür ist die *moving limits* Strategie [1]. Dabei werden die Grenzen des Inputparameterraumes $x_i^{l_j}, x_i^{u_j}$ in jedem Iterationsschritt j neu festgelegt. Für jeden Durchlauf wird innerhalb dieser Grenzen mittels DOE ein Metamodell aufgebaut. Auf dessen Grundlage wird das Optimierungsproblem lokal gelöst. Zu den Nebenbedingungen der eigentlichen Optimierung kommen die Grenzen des Subparameterraumes. Das heißt, dass das Optimum immer zwischen $x_i^{l_j}$ und $x_i^{u_j}$ liegt. Die Startkonfiguration mit dem Mittelpunkt \mathbf{x}^{m_0} hat die Grenzen:

$$x_i^{l_0} = x_i^{m_0} - \gamma_0 r_i^0 \quad (2.73)$$

$$x_i^{u_0} = x_i^{m_0} + \gamma_0 r_i^0 \quad (2.74)$$

Die Breite des Variationsraumes eines jeden Parameters r_i^0 wird dazu als Iterationsstart für die Größe des zu betrachtenden Bereiches verwendet. Um die Grenzen des Optimierungsproblems auch als Grenzen des ersten Durchlaufs zu benutzen, wird der Faktor $\gamma_0 = 0.5$ gesetzt. Je nach dem wie lokal die Effekte der Systemantwort und wie voroptimiert der Startwert für $x_i^{m_0}$ ist, desto geringer ist dieser Faktor zu wählen. Die Gründe hierfür liegen in den verwendeten Ansatzfunktionen. Die Annahme stützt sich ähnlich wie in vielen Anwendungen der Taylorreihenentwicklung darauf, dass sich die Antwort im untersuchten Raum linear oder quadratisch verhält. Deshalb werden nur dementsprechende Stützstellensets generiert und Polynome verwendet. Mit fortschreitender Konvergenz der Optimierung und Kontraktion des Subparameterraumes trifft diese Annahme zu. Sind lokale Optima zu erwarten, sollte zum Beispiel mit einem

initialen Sampling ein guter Startwert gefunden werden. Die Strategie besitzt damit Ähnlichkeiten zum sequentiellen Optimierungsverfahren. Kern der Methodik ist die

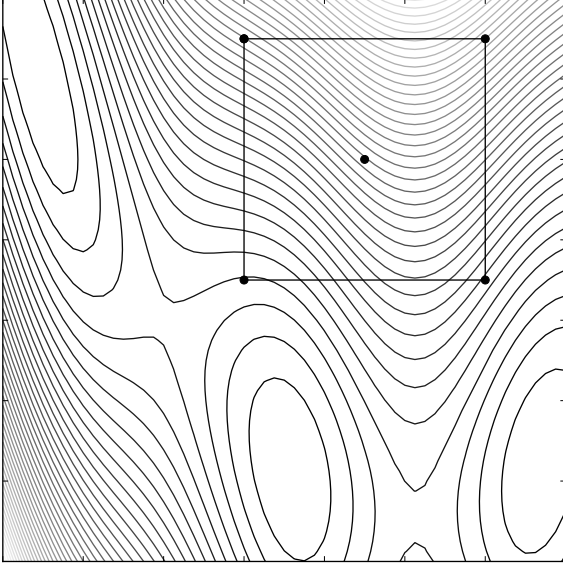


Abbildung 2.33: 1. Iterationsschritt

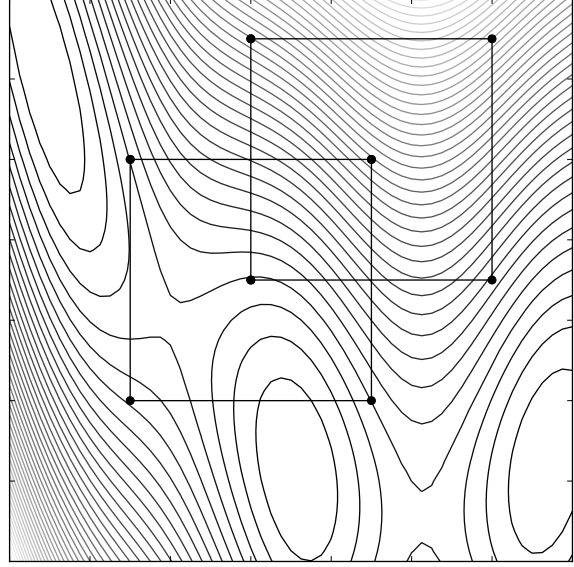


Abbildung 2.34: 2. Iterationsschritt

Definition der Grenzen des untersuchten Teilraumes im nächsten Iterationsschritt. Es existieren dafür verschiedene Vorschläge [55, 93, 126, 166, 175] die sich nur in Details unterscheiden. Grundidee ist es, die Grenzen mit der fortschreitenden Optimierung zu verschieben und zu verengen, wenn eine höhere Approximationsgüte erreicht werden soll. Dazu wird der Mittelpunkt x^{m_j} eines Iterationsschrittes auf das erhaltene Optimum des vorangegangenen Durchlaufs gesetzt.

$$x^{m_j} = x^{opt_{j-1}} \quad (2.75)$$

Die Verschiebung ist damit:

$$\Delta x_i^j = x^{m_j} - x^{m_{j-1}} \quad (2.76)$$

Die relative Verschiebung ist:

$$d_i^j = \frac{2\Delta x_i^j}{r_i^{j-1}} \quad (2.77)$$

Der Bewegungsindikator liegt somit immer zwischen -1 und 1 ($d_i^j \in [-1; 1]$). Ist dieser Wert Null ($d_i^j = 0$), bewegt sich der Mittelpunkt nicht. Ist der Indikator $|d_i^j| = 1$, wird der Mittelpunkt in Dimension i auf dem Rand des in der vorhergehenden Iteration beschriebenen Hyperwürfels liegen. In allen anderen Fällen liegt der Mittelpunkt des neuen Laufes innerhalb der Grenzen des vorherigen Hyperwürfels. Die Kontraktionsrate λ_i^j ist das Verhältnis der Breite des Variationsraumes der aufeinanderfolgenden Schritte.

$$r_i^j = \lambda_i^j r_i^{j-1} \quad (2.78)$$

Die neuen Grenzen sind:

$$x_i^{l_j} = x_i^{m_j} - 0.5r_i^{j-1} \quad (2.79)$$

$$x_i^{u_j} = x_i^{m_j} + 0.5r_i^{j-1} \quad (2.80)$$

Die Kontraktionsrate wird hier aus einer linearen Interpolation zwischen dem Zoomparameter η und dem Kontraktionsparameter γ in Abhängigkeit vom Bewegungsindikator gewonnen.

$$\lambda_i^j = \eta + |d_i^j|(\gamma - \eta) \quad (2.81)$$

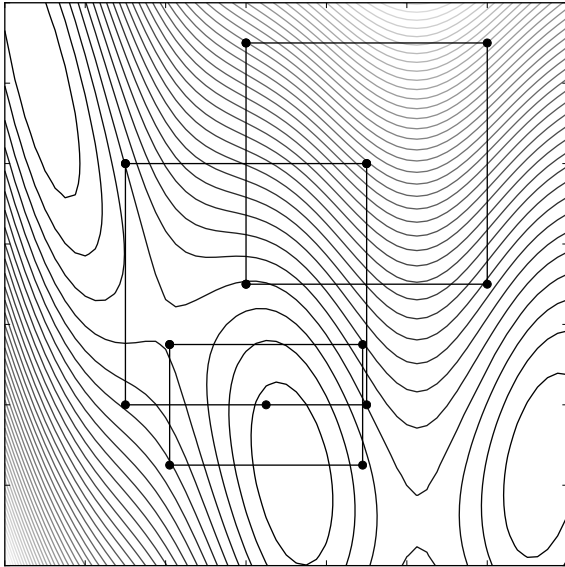


Abbildung 2.35: 3. Iterationsschritt

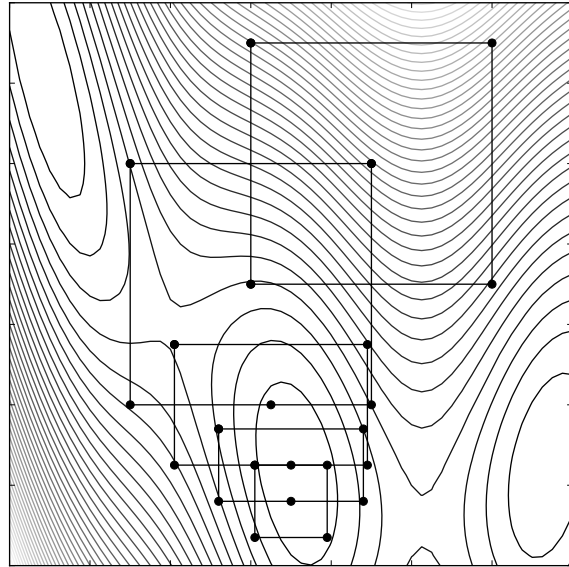


Abbildung 2.36: 5. Iterationsschritt

Die Parameter sind frei wählbar. Standardwerte werden in der oben zitierten Literatur mit $\eta = 0.5$ und $\gamma = 1.0$ angegeben. Erreicht die Optimierung den gleichen Ort wie im vorherigen Durchlauf, so ist die Kontraktionsrate gleich dem Zoomparameter. Liegt das Optimum auf einer Kante des Hyperwürfels, so nimmt sie den Wert des Kontraktionsparameters an. Folglich hat der entstehende Hyperwürfel in i -Richtung die gleichen Maße wie sein Vorgänger.

Es ist möglich, dass durch oben beschriebenes Verfahren die Iteration von einer Subregion zur anderen oszilliert und sich somit in einer Endlosschleife bewegt. Dies ist häufig bei symmetrischen Problemen zu beobachten bei denen sich zwei gleichwertige Designs gegenüberliegen. Mit dem normalisierten Oszillationsindikator

$$\hat{c}_i^j = \text{sgn}(c_i^j) \sqrt{|c_i^j|} \quad \text{mit} \quad c_i^j = d_i^j d_i^{j-1} \quad (2.82)$$

wird erkannt, ob eine Unentschiedenheit vorliegt. Der Kontraktionsparameter berechnet sich neu wie folgt:

$$\gamma_i^j = \frac{1}{2} [\gamma_{pan} (1 + \hat{c}_i^{j-1}) + \gamma_{osc} (1 - \hat{c}_i^{j-1})] \quad (2.83)$$

Der Parameter γ_{osc} wird gewöhnlich zwischen 0.5 und 0.7 gewählt. Er repräsentiert die Dämpfung der Oszillation. Der Parameter γ_{pan} stellt den puren Verschiebungsfall dar und wird deshalb mit 1.0 angegeben [165]. Die Iteration wird so lang ausgeführt, bis eines der oben genannten Konvergenzkriterien erreicht wird. Die Verwendung höhergradiger Approximationsverfahren ermöglicht es, Stützstellen über mehrere Iterationen zu nutzen. Damit können auch stochastische Samplingstrategien zum Setzen der initialen oder der füllenden Stützpunkte benutzt werden. Ein ähnliches raumteilendes Verfahren wird in [159] beschrieben. Die Dimensionsreduktion in jedem Iterationsschritt wird mit den genannten Erweiterungen in [179] erläutert.

Erwartete Verbesserungsstrategie

Eine Methode lokale und globale Verbesserungen des Stützstellensets vorzunehmen wird in [79] präsentiert. Das Verfahren wird zur effizienten globalen Optimierung vorgeschlagen. Dazu wechseln sich in einer Iterationsschleife das Setzen von Stützstellen und die Suche des Optimums auf dem Metamodell ab. Das Vorgehen wird häufig im Zu-

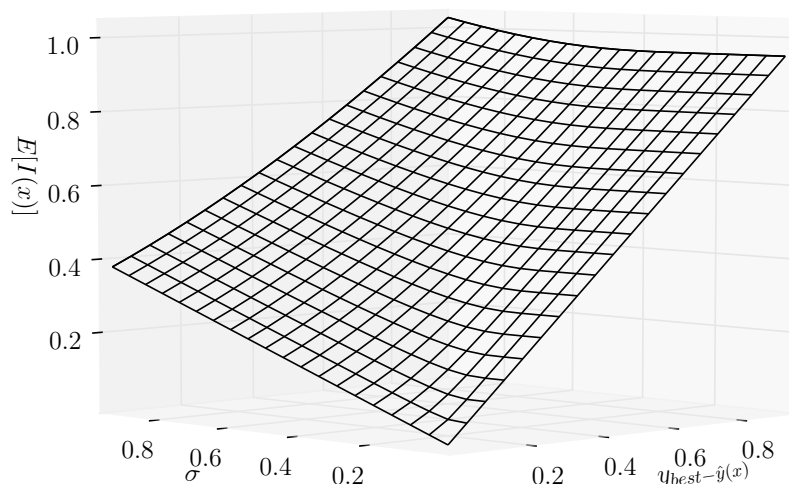


Abbildung 2.37: Erwartete Verbesserung

sammenhang mit Gauss'schen Prozessen angewendet. Dies resultiert nicht zuletzt aus dem stochastischen Ansatz des Krigingverfahrens. Es sind jedoch auch Umsetzungen mit anderen Metamodellverfahren möglich. So wird das Kriterium in [163] für Radial Basis Functions zum Einsatz gebracht. Die Prozedur startet mit einem initialen Sampling, um zu Beginn das Stützstellen-set zu füllen. In den folgenden Iterationen werden Stützstellen an den Punkten gesetzt, für welche sich die höchste erwartete Verbesserung ermitteln lässt. Basiswert für das Verbesserungskriterium ist das beste gefundene De-

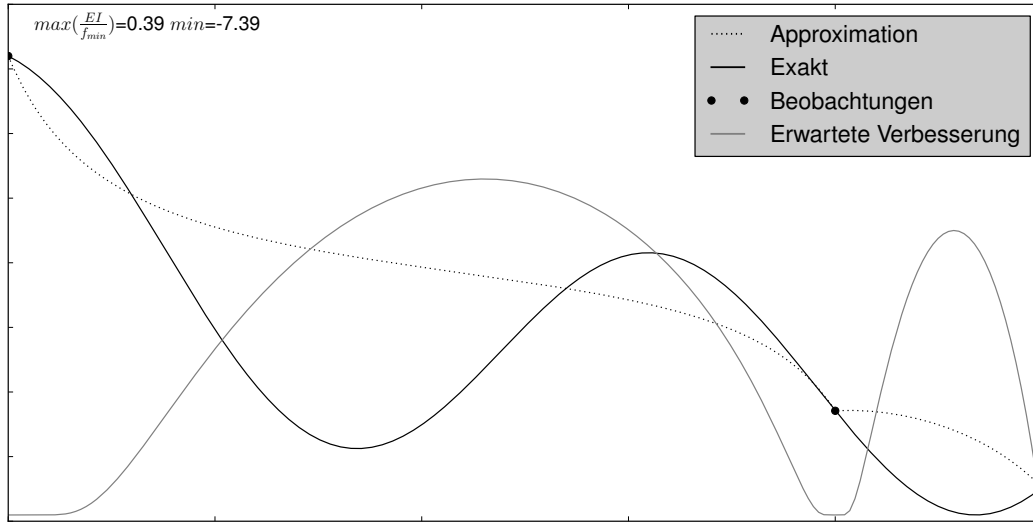


Abbildung 2.38: Initiale Stützstellen und erwartete Verbesserung

sign y_{best} . Die Beschreibung der Verbesserung eines Wertes Y an einem Ort \mathbf{x} geschieht im Kontext eines Minimierungsproblems:

$$I(x) = \max(0, y_{best} - Y(\mathbf{x})) \quad (2.84)$$

Da im Kriging $Y(x)$ die Realisation einer Zufallsvariable $Y(x) \sim N(\hat{y}(x), \sigma(x)^2)$ ist, wird der Erwartungswert verwendet:

$$E[I(x)] \equiv E[\max(0, y_{best} - Y(x))] \quad (2.85)$$

Eine Erklärung, warum auch deterministische Metamodelle sich dieser Formulierung bedienen können, wird in [163] angegeben. Durch Auflösen ergibt sich (Abb. 2.38):

$$E[I(x)] = (y_{best} - \hat{y}(\mathbf{x}))\Phi\left(\frac{y_{best} - \hat{y}(\mathbf{x})}{\hat{\sigma}}\right) + \hat{\sigma}\phi\left(\frac{y_{best} - \hat{y}(\mathbf{x})}{\hat{\sigma}}\right) \quad (2.86)$$

Leitet man die Funktion einmal nach \hat{y} und einmal nach $\hat{\sigma}$ ab, erhält man:

$$\frac{\partial E[I(x)]}{\partial \hat{y}} = -\Phi\left(\frac{y_{best} - \hat{y}(\mathbf{x})}{\hat{\sigma}}\right) \leq 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial E[I(\mathbf{x})]}{\partial \hat{\sigma}} = \phi \left(\frac{y_{best} - \hat{y}(\mathbf{x})}{\hat{\sigma}} \right) \geq 0 \quad (2.88)$$

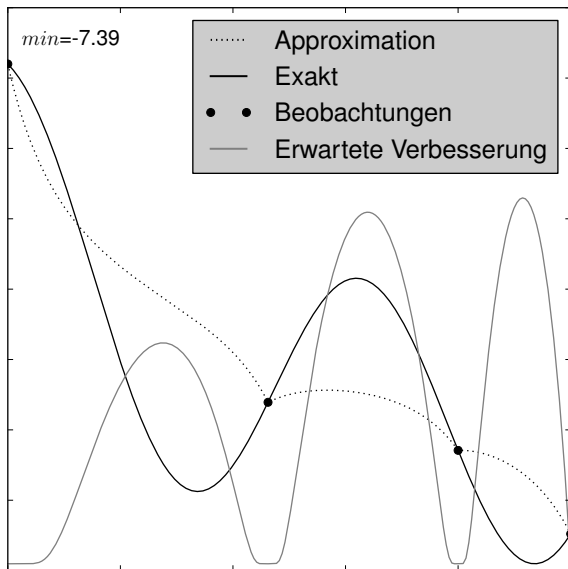


Abbildung 2.39: 1. Iterationsschritt

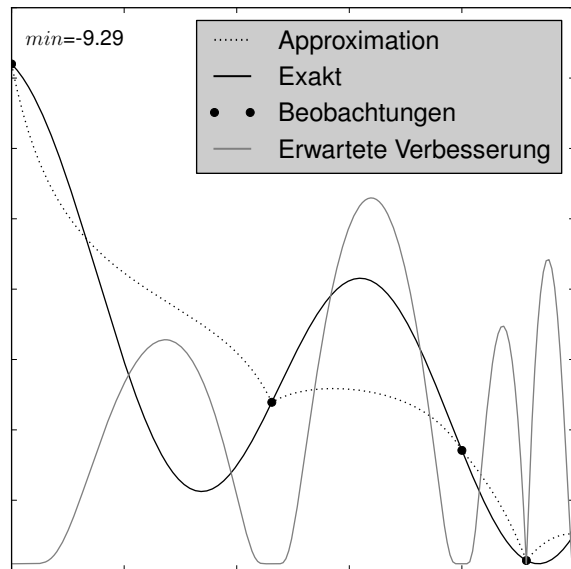


Abbildung 2.40: 2. Iterationsschritt

Je höher die geschätzte Varianz ist, beziehungsweise je näher der approximierte Wert am besten Design liegt, desto höher ist die erwartete Verbesserung (siehe Abb. 2.37). Regionen welche für die Optimierung vielversprechende Werte liefern, werden verfeinert. Die globale Erweiterung des Stützstellensets erfolgt in Regionen, in denen der Approximationsfehler hoch ist. Damit können auch Optimierungsaufgaben mit mehreren lokalen Minima effizient gelöst werden. Innerhalb des Variationsraumes wird nun

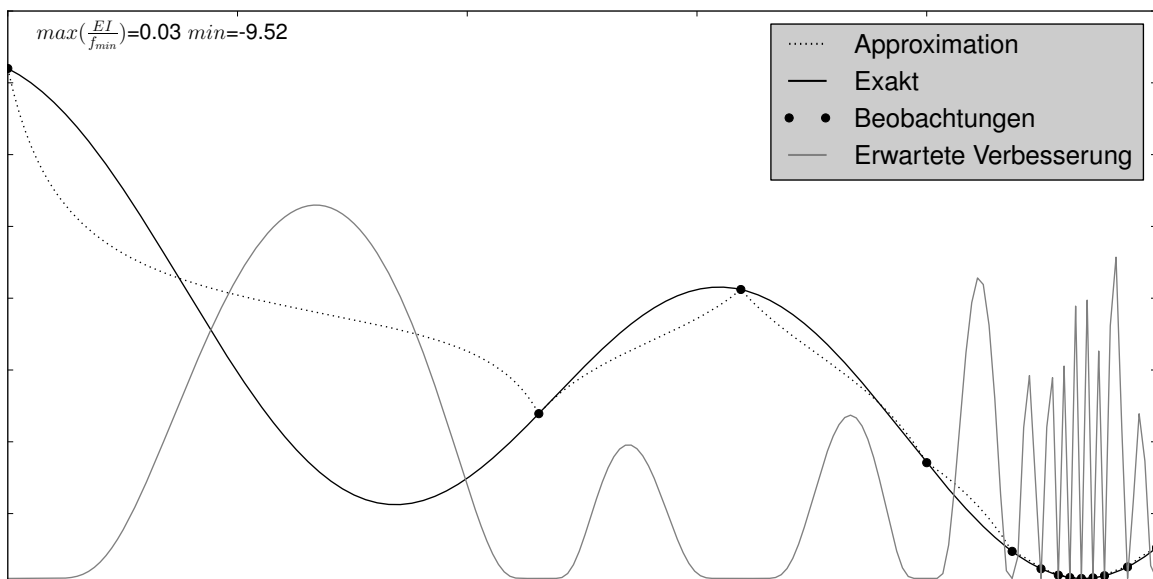


Abbildung 2.41: Erwartete Verbesserung nach dem 10. Iterationsschritt

mit einem geeigneten Optimierungsverfahren der Punkt mit maximaler zu erwartender Verbesserung gesucht. An diesem Punkt wird eine neue Stützstelle eingefügt. Danach startet der nächste Iterationsschritt. Die Abbruchkriterien definieren sich wie in den bereits genannten iterativen Strategien.

Da die Verwendung des Krigingverfahrens sich einer großen Beliebtheit erfreut und in vielen kommerziellen und nicht kommerziellen Softwarepaketen implementiert ist, finden sich unzählige Verbesserungen und Diskussionen zum aufgeführten Verfahren. Exemplarisch sollen Forschungen rund um [130] genannt werden. Verschiedene Generalisierungen des Kriteriums werden beispielsweise in [136] genannt und verglichen. Die Anwendung auf Paretoprobleme wird in [89] dokumentiert. Weitere Diskussionen und Verbesserungen sind unter anderem in [164] aufgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit gesondert zu erwähnen ist eine Erweiterung für RDO-Aufgaben [83]. Die Suche des most probable point wird in einem ähnlichen Verfahren in [100] adressiert.

Kapitel 3

Optimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten

Die Kosten eines Produktes beinhalten mehr als Entwicklungs-, Herstellungs- und Managementkosten. Ein wesentlicher Anteil der Gesamtkosten wird von der Qualität des Produktes bestimmt. Beispiele dafür sind Kosten durch Ausschuss, Nacharbeit oder Rückrufaktionen. Das Einhalten und Erreichen von Qualitätszielen gehört damit zu einem der wichtigsten Wettbewerbsvorteile [26]. Sind die Qualitätsansprüche zu hoch, zieht das kostenintensive Designs nach sich. Ziel ist es Produkte zu schaffen, die eine op-

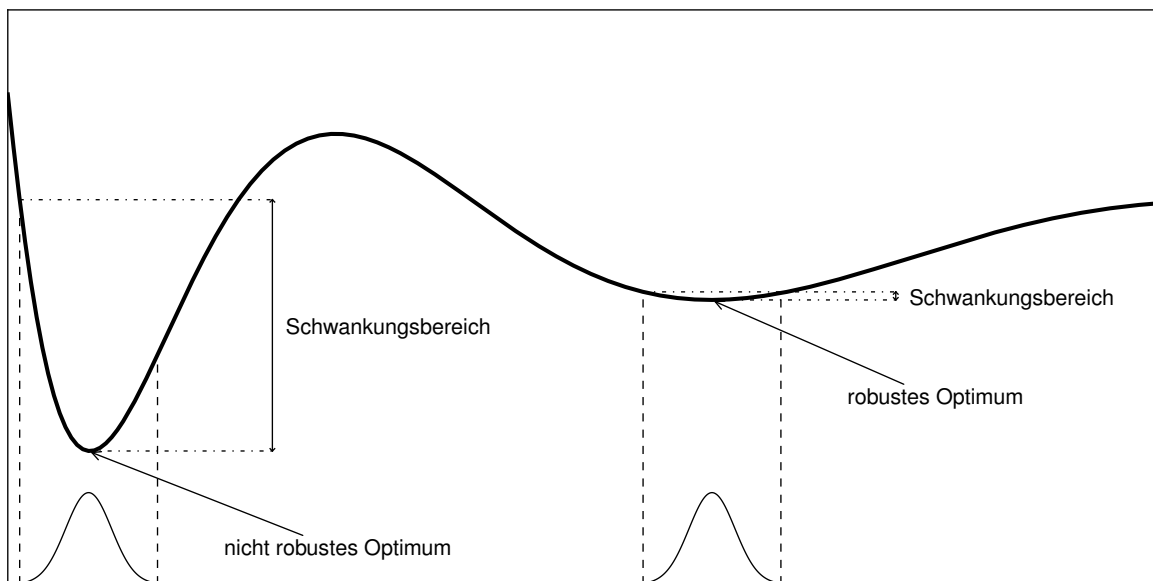


Abbildung 3.1: Schwankungsbereiche von robustem und nicht robustem Optimum

timale Qualität liefern. Dazu müssen bereits im Designprozess Unsicherheiten berücksichtigt werden. Dies geschieht jedoch in der deterministischen Optimierung nicht. Das Resultat reagiert oftmals sehr sensitiv. Kleine Änderungen der Randbedingungen haben große Auswirkungen auf die Systemantwort. Um Unsicherheiten und Schwankungen in Herstellungsprozess, Material, Belastungen etc. während des Designprozesses zu berücksichtigen, werden Parametergrößen mit positiver Wirkung verringert und Werte von Parametern negativer Wirkung erhöht. Für Tragwerke geschieht dies in der Regel über Sicherheitsfaktoren (siehe [43] u.ä.). Eine Anwendung dieses Verfahrens in der Optimierung birgt dabei folgende Risiken:

- Überbemessen
 - Produkt/Struktur ist zu sicher
 - ⇒ Verlust durch zu hohe Produktionskosten
- Unterbemessen
 - Produkt/Struktur ist nicht sicher genug
 - ⇒ Garantieansprüche, Nacharbeit, Ausfall etc.
- Überempfindlichkeit
 - zu hohe Empfindlichkeit des Produktes gegenüber Streuungen
 - ⇒ Gebrauchstauglichkeit ist nicht gegeben

Gründe hierfür sind die Fehleinschätzung der Zusammenhänge und das Vernachlässigen von Interaktionen. Für Tragwerke, deren Konstruktion keine Innovation darstellt, ist diese Vorgehensweise üblich. In verschiedenen Ingenieurdisziplinen sind Konstrukteure durch Erfahrungswerte in der Lage, Interaktionen und Zusammenhänge hinreichend genau einzuschätzen. Zusätzlich werden die Sicherheitsfaktoren so hoch gewählt, dass Fälle von Unterbemessung aufgrund zu geringer Beiwerte nur äußerst selten vorkommen. Im Fall der Vernachlässigung von Einwirkungen oder Nichtbeachtung relevanter Zustände, kommt es häufig zu Versagen aufgrund falscher oder unzulänglicher Modellbildung. Der Umstand ist durch keine Berechnungsmethodik auszugleichen. Überbemessene Strukturen dagegen sind an der Tagesordnung. Wenn eine simple Struktur in geringer Stückzahl hergestellt wird, gilt dies als akzeptabel. Die Kosten für Informationsbeschaffung und Mehrarbeit sind oftmals wesentlich höher als die durch Überbemessung verursachten. Nicht zu vernachlässigen ist der psychologische Aspekt, Ausfallwahrscheinlichkeiten öffentlich zu diskutieren. Die Wahrscheinlichkeit von Versagenszuständen an sich wurde bis zu Arbeiten wie [64, 65] weitgehend ignoriert. Der offene Umgang mit reinen Ausfallwahrscheinlichkeiten ist nur schlecht zu kommunizieren und unpopulär. Deshalb werden Sicherheitsfaktoren angegeben deren komplexe Herleitung sich nur tiefer Interessierten erschließt. Kann man sich keines reichhaltigen Erfahrungsschatzes bedienen, betrachtet innovative Strukturen oder ist gezwungen wirtschaftlich effiziente Designs zu kreieren, müssen fortgeschrittenere Verfahren verwendet werden. Das trifft auf häufig hergestellte oder komplexe Strukturen zu. Dieses Kapitel soll dazu dienen, grundlegende Techniken zur Berücksichtigung von Unsicherheiten in der Optimierung vorzustellen. Dabei wird sich im Wesentlichen auf die Phasen vor Produktionsstart bezogen. In der Produktionsphase eingesetzte Verfahrenstechniken werden nicht näher erläutert.

3.1 Formulierungen

In der Robust Design Optimization (RDO) fließen Qualitätsmaße als Nebenbedingung oder Zielfunktion in die Optimierung ein. Die Unsicherheiten werden somit explizit berücksichtigt und es können quantifizierbare Aussagen über die Qualität getroffen werden. Die Methoden stellen sicher, dass die Interaktionen zwischen den einzelnen Parametern berücksichtigt werden. Dadurch werden Fehlbemessungen vermieden. Das Resultat ist eine qualitätskostenoptimale Struktur. Wie jedes Optimierungsproblem hat auch die RDO-Aufgabenstellung Parameter, welche kontrolliert werden können. Diese werden zur Optimierung verwendet. Aus diesem Grund bezeichnet man diese auch als (deterministische) Designparameter \mathbf{d} .

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_{N_d}] \quad (3.1)$$

Die inhärenten Unsicherheiten des Modells werden durch die zufälligen Parameter repräsentiert.

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_{N_r}] \quad (3.2)$$

Designparameter mit streuenden Eigenschaften werden auch als gemischte Parameter bezeichnet. Sie können in \mathbf{p} und \mathbf{d} gefunden werden. Die RDO-Aufgabenstellung be-

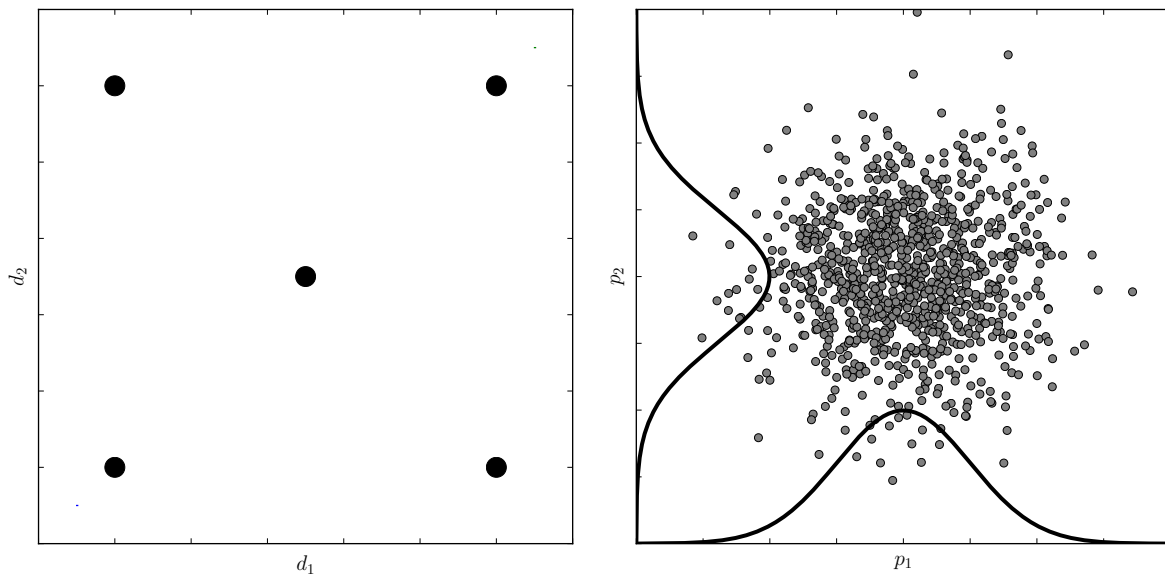


Abbildung 3.2: Subraum der Optimierungsparameter (links) und der stochastischen Parameter (rechts)

steht demnach aus zwei Subräumen. Der deterministische Raum spannt sich über \mathbf{d} auf. Der stochastische Raum wird durch \mathbf{p} definiert (Abb. 3.1). Die Vereinigung von stochastischem und deterministischem Raum bildet den Gesamtraum.

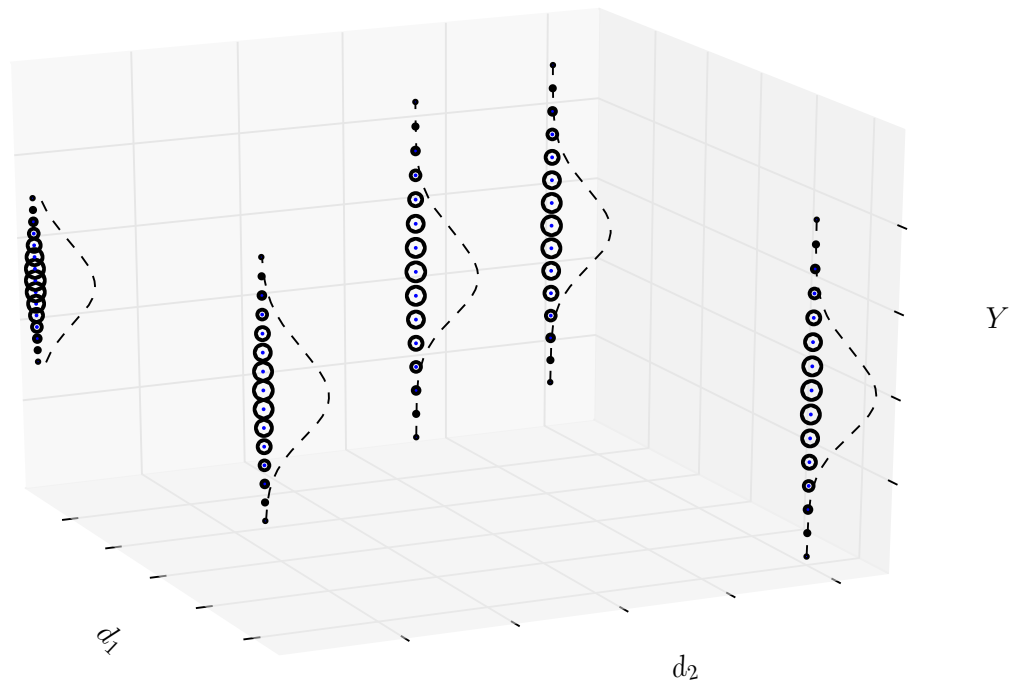


Abbildung 3.3: Projektion aller Systemantworten auf den deterministischen Subraum

Die Systemantwort

$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{N_{out}}] \quad (3.3)$$

ist offensichtlich das Ergebnis einer Abbildung des Gesamttraumes

$$f: \mathbb{R}^{N_{inp}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{out}}, \mathbf{p} \cup \mathbf{d} \mapsto Y \quad (3.4)$$

beziehungsweise

$$y_i = f_i(\mathbf{p} \cup \mathbf{d}). \quad (3.5)$$

Sind keine gemischten Parameter vorhanden ($\mathbf{p} \cap \mathbf{d} := \{\emptyset\}$) spricht man auch vom Spezialfall der „getrennten Räume“. Stochastische Auswertungen für die Designpunkte ergeben dann parallele Hyperlinien im Gesamttraum. Abbildung 3.3 zeigt eine Projektion aller ausgeführten Designauswertungen auf den deterministischen Subraum. Die Höhe eines Punktes ergibt sich aus der jeweiligen Systemantwort. Mehrere Punkte übereinander resultieren aus der statistischen Auswertung für ein deterministisches Design. Es entstehen die beschriebenen Hyperlinien.

Die Qualitätsmaße (δ_q) werden in der RDO als Zielfunktion,

$$\begin{aligned} & \delta_q(d, p) \rightarrow \min \\ \text{mit:} & \\ & d_L \leq d \leq d_U \\ & \dots \end{aligned} \tag{3.6}$$

oder Nebenbedingung

$$\begin{aligned} & Cost(d) \rightarrow \min \\ \text{mit:} & \\ & \delta_q(d, p) \geq C_{\delta_q} \\ & d_L \leq d \leq d_U \\ & \dots \end{aligned} \tag{3.7}$$

für die Optimierung verwendet. Definitionen für Qualitätsmaße werden im nächsten Abschnitt gegeben. Treten mehrere Qualitätsanforderungen als zu minimierendes Ziel auf, so werden sie oftmals gewichtet kombiniert. Eine weitere Möglichkeit ist die Lösung als Mehrzieloptimierung.

3.2 Robustheitsmaße

Die RDO verlangt, dass für jedes Optimierungsdesign ein Maß für die Robustheit angegeben wird. Das Messen der Robustheit bedeutet Quantifizierung der Qualität. In der Regel wird die Qualität von der Erwartungshaltung des Kunden oder von der geltenden Normung bestimmt. Im Rahmen einer Produktionskette gilt jeder Teilprozess gleichzeitig als Kunde und als Lieferant. Nicht für jeden Prozess und jedes Produkt werden gleichartige Anforderungen gestellt. Deshalb gelten in verschiedenen Bereichen unterschiedliche Bedingungen. Daraus resultieren verschiedenartige Definitionen des zu wählenden Robustheitsmaßes. Der folgende Abschnitt beschreibt einige davon.

Lage- oder Streuungsparameter

Die Systemantwort für ein Optimierungsdesign unter dem Einfluss von Unsicherheiten ergibt eine Verteilungsfunktion. Eine der einfachsten Möglichkeiten, die Robustheit für dieses Design anzugeben, ist es die Lage der Verteilungsfunktion zu bewerten. Häufig werden dazu der Mittelwert, die Standardabweichung oder andere Momente genutzt. Im Rahmen von Produktionsprozessen werden jedoch auch Prozessfähigkeitsindizes verwendet. Dabei werden die obere (OSG) und untere Spezifikationsgrenze (USG) festgelegt. Die Indizes betrachten, wie sich die Kennwerte des Prozesses innerhalb dieser Grenzen verteilen (Gl. 3.8 f).

$$\hat{c}_p k = \frac{\min(\hat{\mu} - USG, OSG - \hat{\mu})}{3\hat{\sigma}} \quad (3.8)$$

$$\hat{c}_p = \frac{OSG - USG}{6\hat{\sigma}} \quad (3.9)$$

Anhand der Indizes wird versucht, Auftretenswahrscheinlichkeiten der Grenzüberschreitung zu prognostizieren. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass hier die Annahme der Normalverteilung der Systemantworten getroffen wird. Argumentiert wird mit dem zentralen Grenzwertsatz und damit der Überschneidung mehrerer (zufälliger) Effekte. Der Modellierungsfehler dieser Behauptung kann zu falschen Vorhersagen führen. Beispielhaft sollen hier lineare Zusammenhänge von Materialparametern und Verformungen genannt werden. Da Materialparameter häufig lognormalverteilt angenommen werden, führen Annahmen über die Normalverteilung der Verformungen zu verfälschten Ergebnissen. Desweiteren sei angemerkt, dass die Aussage stark vom Schätzfehler von μ und σ abhängt. In einem begrenzten Bereich ist es möglich, auf den Lage- und Streuungsparametern basierend Quantile zu schätzen [34].

(Ungleich) Verteilungsmaße

Maße für die (Un-) Ordnung eines Systems sind ein weiteres Kriterium für seine Robustheit. Die Auswahlmöglichkeiten hinsichtlich Konzentrationsmaße sind sehr groß. Häufig verwendete Werte sind u.a. der Theil-Index, die Hoover-Ungleichverteilung und der Gini-Koeffizient. Exemplarisch sollen die Formulierungen der Shannon Entropie [160] genannt werden.

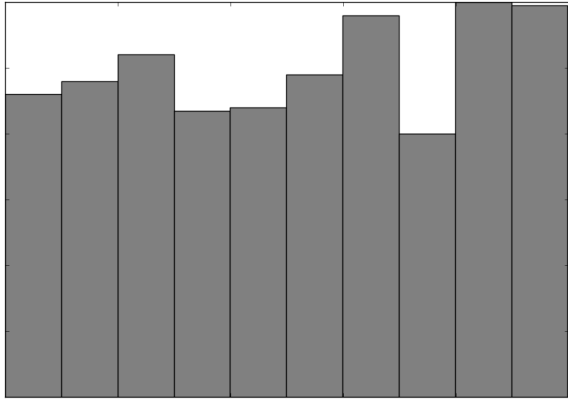


Abbildung 3.4: Ungeordnetes System

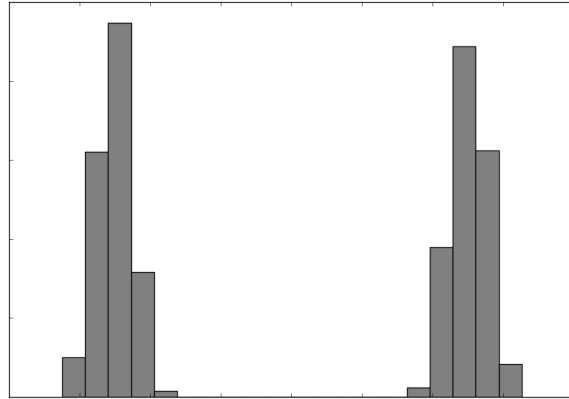


Abbildung 3.5: Geordnetes System

$$\delta_q = H = - \sum_i p(x_i) \log_2(p(x_i)) \quad (3.10)$$

Nicht selten liegen bei der Simulation physikalischer Prozesse Beobachtungen in einem kontinuierlichen Raum vor. Die Auswertung des diskreten Kriteriums ist dann stark von der Klasseneinteilung des Histogramms abhängig. Aus diesem Grund wird vorgeschlagen, eine Verteilungsfunktion an die Daten anzupassen [4, 59, 140]. Der Ausdruck

$$\delta_q = - \int p(x) \log_2(p(x)) dx \quad (3.11)$$

kann dann in der Regel analytisch gelöst werden.

Nutzen- und Verlustfunktionen

Der Nutzen $u(x)$ beziehungsweise Verlust $l(x)$ einer Realisierung x kann ebenfalls zur Bewertung verwendet werden. Bei unsicheren Systemantworten wird in der Regel der Erwartungswert des Nutzens und Verlustes verwendet.

$$E[u(x)] \quad \text{bzw.} \quad E[l(x)] \quad (3.12)$$

Die Wahl der Bezeichnung, ob Verlust oder Nutzen, ist eher psychologischen Gesichtspunkten zuzuschreiben. Grundsätzlich bleiben die Formulierungen gleich. Da in der

Optimierung meist von Minimierungsaufgaben ausgegangen wird, ändert sich lediglich das Vorzeichen. Die Formulierung ist eine Approximation auf der Basis bekannter Werte. Diese werden im Allgemeinen durch die geltende Normung oder die Kunden bestimmt. Das Aufstellen einer vollständigen Beschreibung ist Teil der Kostenleistungsrechnung und ähnlicher betriebswirtschaftlicher Instrumente. Dabei wird auf umfangreiche Kundenbefragungen, Statistiken und sonstige Erfahrungswerte zurückgegriffen. Insbesondere bei der Entwicklung neuer innovativer Produkte ist die Informationsbeschaffung schwer und aufwendig. Daher kommen häufig vereinfachte Ausprägungen zum Einsatz. Die bekanntesten und am häufigsten verwendeten Verlustfunktionen sind die Formulierungen nach G. Taguchi [27, 87, 131].

1. „Target the Best“: je mehr sich der Output vom Zielwert μ_z entfernt, desto höher ist der Verlust

$$l(x) = k(x - \mu_z)^2 \quad (3.13)$$

2. „Maximum the Best“: je höher die Werte, desto geringer ist der Verlust

$$l(x) = k \frac{1}{x^2} \quad (3.14)$$

3. „Minimum the Best“: je geringer die Werte, desto geringer ist der Verlust

$$l(x) = kx^2 \quad (3.15)$$

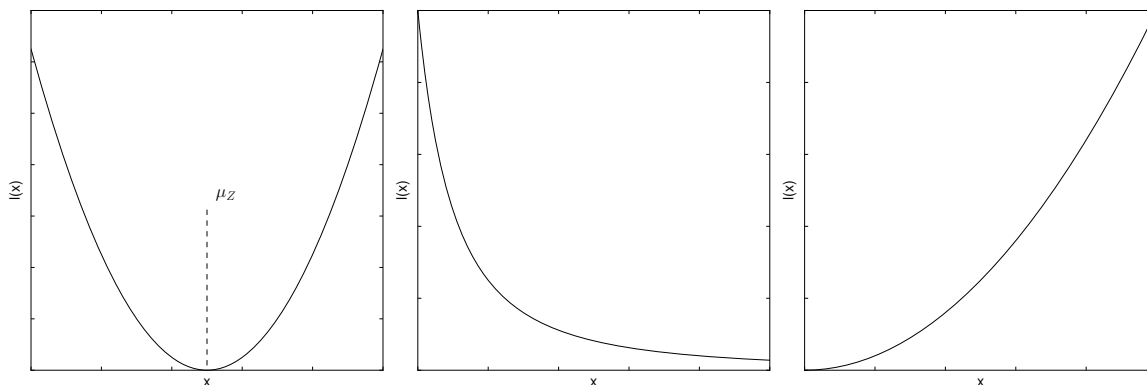


Abbildung 3.6: Target, Maximum, Minimum the Best

In der Ursprungsform wird vom „signal/noise ratio“ (SNR) gesprochen und zusätzlich der dekadische Logarithmus der oben genannten Funktionswerte verwendet. Die Gründe sind in der Biographie Taguchi’s zu finden. Der Begriff des Signalrauschverhältnisses ist ein Maß für die Qualität eines Signals beziehungsweise der übertragenen Signalenergie. In diesem Zusammenhang ist die Verwendung des dekadischen Logarithmus ein üblicher Umstand. Für die RDO spielt dies meist eine untergeordnete Rolle. Zu bemerken ist, dass die mit Abstand am häufigsten verwendete und zitierte Form die erste Verlustfunktion ist. Da k eine Konstante ist, spielt sie für die Optimierung

keine Rolle. Man erhält damit die aus der Gauss'schen Fehlertheorie bekannte Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Einige Anwendungen und Modifikationen können in [56, 127, 173] gefunden werden. Es ist zu erkennen, dass die im Abschnitt 2.1 genannten Qualitätsmaße für Metamodelle ebenfalls zu den Verlustfunktionen zu zählen sind. Damit wird klar, dass die Bewertung der Qualität einer Antwortfläche ebenfalls ein Robustheitsmaß darstellt. Die Optimierung eines Metamodells oder die Auswahl einer optimalen Approximation ist somit eine Aufgabenstellung aus dem Gebiet der Robust Design Optimization.

Die Wahl der zu verwendeten Formulierung hängt vom Anwendungsgebiet ab. In [174] werden Vorschläge unterbreitet, wann welche Formulierungen zu verwenden sind. In frühen Produktentwicklungsphasen werden meist einfache Formulierungen verwendet. Die Vereinigung aller vorhandenen Informationen in einer Nutzenfunktion kann Nebenbedingungen vermeiden. Desweiteren können so Optimierungsformulierungen mit nur einer Zielfunktion erhalten werden. Unscharfe Beschreibungen [141, 191] der Qualität können durch die Formulierung einer Kostenfunktion ersetzt werden. Ausführlichere Darstellungen von Nutzenfunktionen finden sich in einschlägiger betriebs- und volkswirtschaftlicher Literatur (z.B. [7, 81]).

Versagenswahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Versagenszustandes nimmt eine Sonderstellung in der Bewertung der Qualität ein. Die oben genannten Verfahren betrachten in der Regel Ereignisse hoher Wahrscheinlichkeit ($\leq \pm 2\sigma$). Die Formulierung der Gleichungen 3.6 f lassen jedoch auch Robustheitsmaße zu, welche geringere Wahrscheinlichkeiten adressieren. So soll beispielsweise eine optimale Struktur sehr kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten aufweisen. Da in diesem Fall andere Techniken verwendet werden müssen, existiert ein spezielles Teilgebiet der RDO. Die zuverlässigkeitsbasierte Optimierung (Reliability Based Design Optimization - RBDO) definiert den Versagenszustand durch eine deterministische Grenzzustandsfunktion.

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (3.16)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit eines Systems ist durch

$$P[g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int \dots \int_{g(x) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(x) dx \quad (3.17)$$

gegeben. Darin ist $f_{\mathbf{X}}(x)$ die gemeinsame Dichtefunktion der Basisvariablen \mathbf{X} [144]. In der RBDO werden Versagenswahrscheinlichkeiten in der Regel in Nebenbedingungen begrenzt, oder in der Zielfunktion minimiert. Dieses Robustheitsmaß repräsentiert eine diskrete Verlustfunktion, deren einziger Sprung von Null auf die durch den Ausfall verursachten Kosten am definierten Versagenspunkt erfolgt.

Gewinnung des Robustheitsmaßes

Wie beschrieben, werden die Robustheitsmaße aufgrund unterschiedlicher zu schätzender Wahrscheinlichkeitsbereiche in zwei Kategorien unterteilt. Dadurch werden verschiedene Verfahren zur Gewinnung des Robustheitsmaßes notwendig. Die Bereiche hoher Wahrscheinlichkeit werden in der Regel durch Samplingstrategien oder DOE Techniken exploriert. Die Integration der Wahrscheinlichkeitsmaße geschieht in diesen Fällen analytisch oder über Monte Carlo Integration. Für jede Stichprobe ist die Evaluation der Systemantwort notwendig. In realen Problemstellungen kann sie das Resultat eines komplexen Finite Elemente Modells sein. In diesem Fall ist die Berechnung sehr aufwendig und zeitintensiv. Aus diesem Grund wird die Größe des Samplings beschränkt. Um trotzdem robuste Schätzungen angeben zu können, werden varianzminimierende Verfahren und *resampling* Strategien, wie beispielsweise *bootstrapping* verwendet [51, 90]. Es gelingt dadurch Konfidenzintervalle anzugeben oder die Schätzung zu stabilisieren. Beim Auftreten von Ausreißern werden robuste Schätzer wie das RANSAC-Verfahren oder M-Schätzer verwendet [58]. Basieren alle Funktionsevaluationen auf Metamodellen, so ist der numerische Aufwand wesentlich geringer als für die Evaluation des realen Modells [30]. Das Rauschen des Robustheitsmaßes auf der Antwortfläche ist geringer, da der Schätzfehler durch höheren Aufwand beim Sampling deutlich minimiert werden kann. Der Approximationsfehler bleibt zu beachten und somit die Hauptfehlerquelle bei der Verwendung von Metamodellen. Sollen Ersatzmodelle eingesetzt werden, so muss ihre Qualität hinreichend gut und bewiesen sein.

Für Robustheitsmaße, welche sich durch Auftretenswahrscheinlichkeiten definieren, gibt es spezielle Verfahren. Der Aufwand, extreme Ereignisse durch klassische Samplingstrategien zu gewinnen, ist viel zu hoch. Deshalb existieren Methoden für die Schätzung kleiner Wahrscheinlichkeiten. Einige Verfahren suchen über die Formulierung eines Optimierungsproblems die wahrscheinlichsten Punkte des Auftretens des Versagenszustandes [71, 139, 162]. Die Simulation entlang von Richtungsvektoren ist ein weiteres mögliches Verfahren [40, 44]. Andere Verfahren verschieben das Sampling in relevante Bereiche und wichten die Auftretenswahrscheinlichkeit [15, 54, 76]. Das Anpassen der Simulationsdichte ist eine weitere Möglichkeit, die Zuverlässigkeit eines Systems effizient zu schätzen [25]. Eine Übersicht über diese Methoden wird in [24] gegeben. Im Zusammenhang mit der RBDO wird einigen Verfahren bessere Konvergenz und damit geringerer Aufwand zugeschrieben [177, 184, 190]. Eine Diskussion von Verfahren in der RBDO findet sich zum Beispiel in [53, 157].

3.3 Verfahren

Deterministische Optimierungen berücksichtigen schwankende Randbedingungen nur indirekt. Es resultieren ineffiziente, nicht gebrauchsfähige oder unsichere Realisierungen. Dadurch entsteht zwangsläufig ein wirtschaftlicher Verlust. Der Gedanke der Robust Design Optimization ist die Optimierung unter Berücksichtigung der Streuungen auszuführen. Während der Produktionsphase werden DOE Techniken, grafische Hilfsmittel und ähnliche Werkzeuge verwendet, um kritische Zusammenhänge zu identifizieren. Ziel ist es, den Einfluss der Streuungen auf die Systemantwort zu minimieren. Dazu werden die Korrelationen zwischen Eingabe- und Ausgabewerten genutzt. Es wird nach Inputvariablen gesucht, welche mit dem kritischen Outputwert gegensätzlich korreliert sind. Sie werden so kombiniert, dass sich die Streueffekte in der Systemantwort aufheben. Es existieren Ähnlichkeiten mit dem Zusammenstellen von Aktienportfolios [110]. Eine weitere Möglichkeit ist das Bevorzugen von Produktionsmitteln, welche nur geringe Schwankungen der kritischen Systemantwort hervorrufen, andere Werte aber positiv beeinflussen. Es ergibt sich ein breites Spektrum, die Zusammenhänge zwischen Inputs und Outputs zu nutzen. Im Allgemeinen kommen diese Techniken in den späten Entwicklungsphasen zum Einsatz. Der Einflussgrad auf Änderungen des Produktes ist dann gering. Die Kosten für Umgestaltungen sind jedoch meist hoch. Deshalb beschränkt man sich auf die Bewertung und Verbesserung des Produktionsablaufes. Es wird angestrebt, qualitätskritische Entscheidungen welche das Produktdesign betreffen in den frühen Entwicklungsphasen anzusiedeln. Die folgenden Vorgehensweisen sind in der Produktentwicklung etabliert und betreffen daher im Allgemeinen numerische Simulationen.

Double Loop Verfahren

Klassische Verfahren lösen das RDO-Problem mit der *double loop* oder auch bi-level Methode [2] (Abb. 3.7). Die Optimierung findet im deterministischen Subraum (äußere Schleife) statt. Für jedes deterministische Design werden die Qualitätsmaße $\delta_q(d, p)$ ermittelt. Dazu wird in der inneren Schleife eine Analyse im stochastischen Subraum ausgeführt. Die Anzahl der notwendigen Evaluationen für die Optimierung N_{det} multipliziert sich mit der Anzahl der stochastischen Analyse N_{sto} . Die Komplexität wächst exponentiell mit der Größe des Problems. In vielen realen Aufgabenstellungen ist eine einzelne Berechnung sehr aufwendig. Deshalb können umfangreiche Untersuchungen oft nicht ausgeführt werden. Es existieren viele verschiedene Verfahren, um diesen Aufwand zu reduzieren. Einige grundlegende Ansätze sollen kurz genannt werden. In der zuverlässigkeitsbasierten Optimierung ist es sinnvoll, im deterministischen Optimum zu beginnen. Durch Verwendung von Sicherheitsfaktoren lässt sich die Position eines guten Startpunktes finden. Für andere Robustheitsmaße ist dieses Vorgehen weniger erfolgreich. In diesem Fall werden Techniken eingesetzt, welche ein initiales DOE bewerten. Das Vernachlässigen von unwichtigen Parametern ist eine weitere Möglichkeit, den Aufwand zu senken. Da jedoch oftmals lokale Effekte Gegenstand der Untersuchungen sind, ist dieses Vorgehen mit Sorgfalt anzuwenden. Durch die Voroptimierung

und Dimensionsreduktion kann der Suchraum der RDO eingeschränkt werden, um den Aufwand zu reduzieren. Speziell in Aufgabenstellungen mit großem Inputparameter-

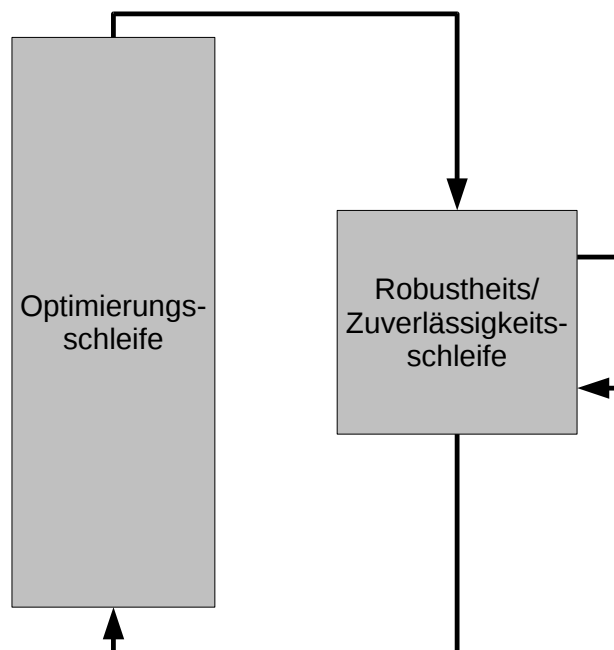


Abbildung 3.7: *double loop* - Doppelschleife

raum beziehungsweise aufwendigen Evaluationen sind Voruntersuchungen unbedingt auszuführen. Die Adaption der Methodik mit fortschreitender Optimierung wird in [52] beschrieben. Verschiedene mathematische Modelle mit variierender Genauigkeit, von niedriger zu hoher, werden dazu angewendet. Die Verwendung verschiedener Schätzer für Zuverlässigkeitsbewertungen wird in [190] diskutiert. Der Einsatz von Metamodellen ist eine weitere Herangehensweise, den numerischen Aufwand zu minimieren [189]. In der Regel werden jedoch einfache Verfahren zur Gewinnung des Robustheitsmaßes verwendet. Die Nutzung von Polynomen zweiter Ordnung, um ein Zuverlässigkeitsproblem in der inneren Schleife zu lösen, wird in [3] beschrieben. Weitere Möglichkeiten ergeben sich durch den Gebrauch von Samplingstrategien mit geringer Varianz.

Die Robustheitsmaße sind geschätzte Werte. Ein Schätzfehler wird daher immer vorhanden sein. Aus diesem Grund schwanken die Ergebnisse der inneren Schleife. Der in der äußeren Schleife eingesetzte Optimierer muss mit diesem Umstand zurechtkommen. So macht es zum Beispiel keinen Sinn ein Konvergenzkriterium zu wählen, welches geringer ist, als die zu erwartende Varianz der Robustheitsmaße. Ein Gradient kann nur schwer ermittelt werden. Im Designraum effiziente Optimierungsverfahren benötigen daher im stochastischen Subraum mehr Aufwand. Robustere (z.B. biologische) Vorgehensweisen benötigen jedoch in der Regel mehr Evaluationen im deterministischen Raum. Eine Adaption der Parameter mit fortschreitender Optimierung scheint sinnvoll. Die Konvergenzkriterien der Optimierung sind demzufolge der Qualität des Robustheitsmaßes entsprechend zu wählen. Bei schlechten Signal/Rauschverhältnissen ist die robuste Lokalisierung eines Optimums kaum möglich (Abb. 3.8). Die Verwendung

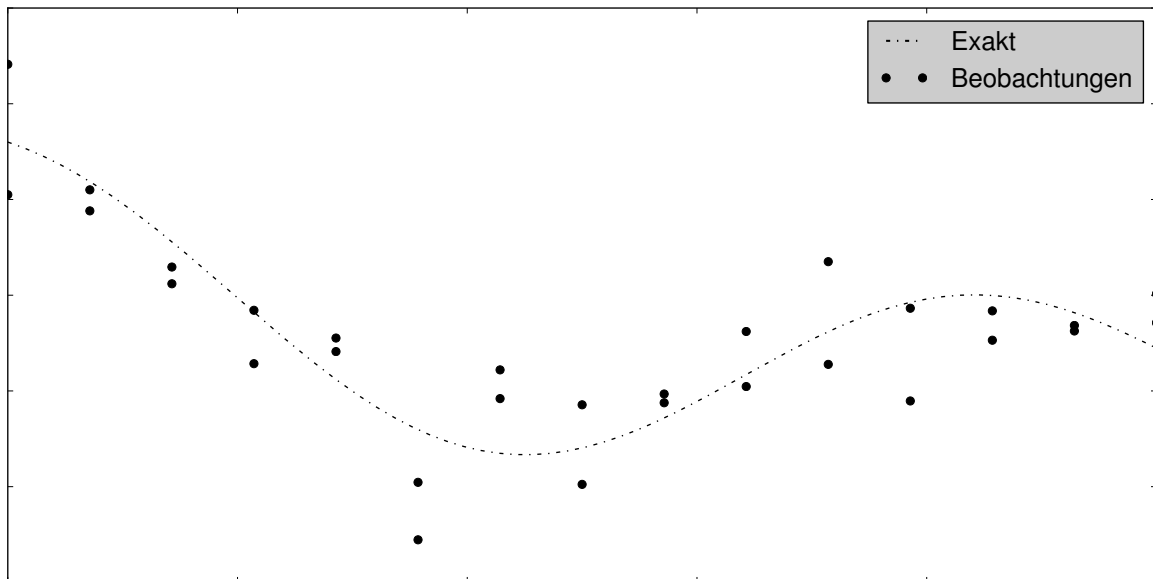


Abbildung 3.8: Verrauschte Zielfunktion

von adaptiven Antwortflächenverfahren im deterministischen Raum mit Wiederverwendung aller Robustheitsmaße als Stützstellen kann zur Lösung des Problems beitragen. Das mit jedem Iterationsschritt steigende regressive Verhalten glättet den negativen Effekt des Rauschens. Durch das konvergierende Verhalten des Optimierers erfolgt die Glättung in den dafür wichtigen Regionen. Das Optimum kann somit robuster lokalisiert werden (Abb. 3.3).

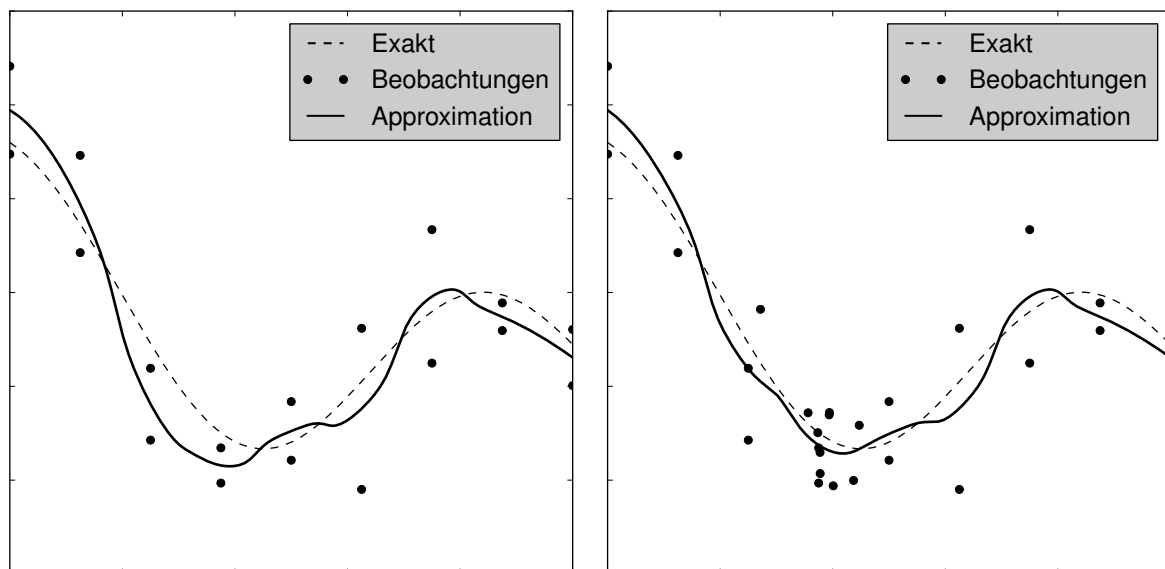


Abbildung 3.9: Glättung des Rauschen durch Moving Least Squares im initialen Stützstellenset und nach 10 Optimierungsschritten

Weitere Verfahren

Mit der Doppelschleife lassen sich alle RDO-Aufgabenstellungen lösen. Diese Flexibilität wird jedoch mit einem höheren Aufwand bezahlt. Aus diesem Grund werden Verfahren entwickelt, welche diesen Aufwand minimieren. Dies geschieht zu Lasten der Flexibilität oder Genauigkeit. Die folgenden Verfahren sind für spezielle Aufgabenstellungen entwickelt. Die Möglichkeit, die Optimierung iterativ vorzunehmen, wird in [105] beschrieben. Dabei werden die optimierende und die stochastische Schleife entkoppelt (*engl.* decoupled loop) (Abb. 3.10). Abhängig von den Ergebnissen der stochastischen Analyse, wird eine Verschiebung im Optimierungsraum vorgenommen. Das Heranziehen des Abstandes zum „most probable point“ (MPP) als Teil der Optimierung wird in [85, 94, 102] präsentiert. Dieses *single loop* Verfahren ist sehr effizient, kann aber nur für kleine, glatte Probleme angewendet werden. Zur weiteren Lektüre sei auf [2, 176] verwiesen.

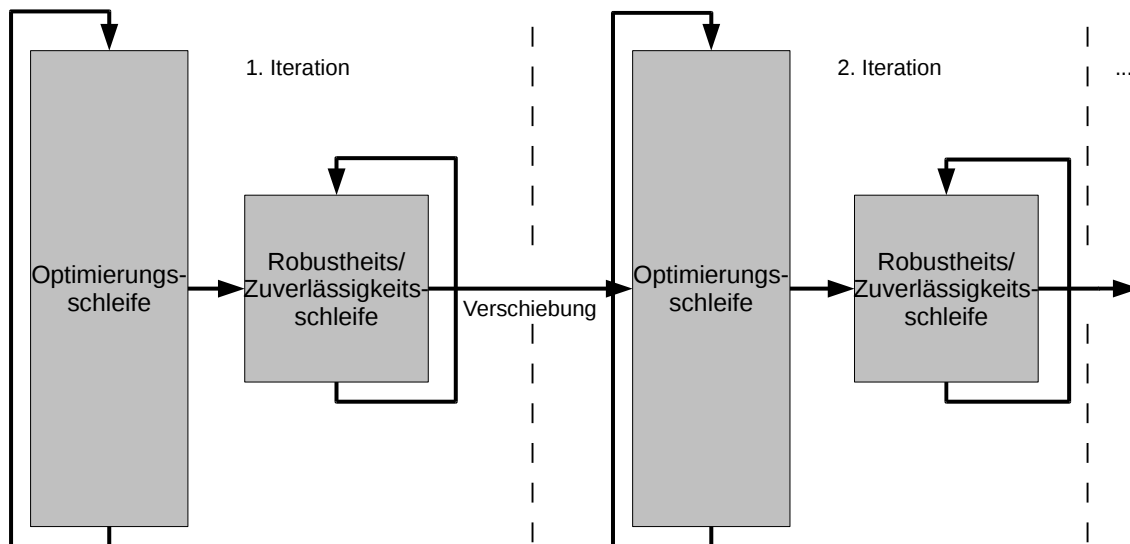


Abbildung 3.10: *decoupled loop* - Entkoppelte Schleife

Die beschriebenen Methoden sind (fast) ausschließlich der zuverlässigkeitsbasierten Optimierung zuzuschreiben. Sie nutzen β /MPP-basierte Methoden um den Aufwand gering zu halten. Durch das Ausnutzen der speziellen Eigenschaft diskreter Verlustfunktionen lassen sich effiziente Algorithmen beschreiben. Im Allgemeinen werden die Optimierungsziele der inneren und äußeren Schleife miteinander gekoppelt. Andere Robustheitsmaße, welche das Verhalten um einen Mittelpunkt beschreiben, können durch derartiges Vorgehen nicht effizienter gestaltet werden. In diesem Fall müssen bi-level Verfahren verwendet werden. Ansätze für die gleichzeitige Berücksichtigung von Qualitätsmaßen höherer und geringerer Wahrscheinlichkeiten sind aus diesem Grund nur selten zu finden. Die Betrachtung von Schwankungen um den Mittelwert und Extremereignissen findet in entkoppelten Aufgabenstellungen statt. Ein gegenseitiger Austausch von Informationen findet nicht statt. So addieren sich die Aufwände für die Betrachtungen.

Kapitel 4

SampleRecycling

Die Evaluation einer Systemantwort kann sehr aufwendig sein. Dies gilt insbesondere für komplexe Strukturanalysen, wie sie im Produktentwicklungsprozess häufig gebraucht werden. Die Verbesserung oder Untersuchung eines Systems erfordert eine Reihe dieser Evaluationen. Fortgeschrittene Algorithmen sind darum bemüht, diesen Aufwand so gering wie möglich zu halten. Optimierungsverfahren streben nach der bestmöglichen Konvergenz bei gleichzeitig genügender Exploration des Raumes. Sampling und Zuverlässigkeitsverfahren versuchen mit geringstmöglichem Aufwand eine ausreichende Konfidenz zu erreichen. Das Paretoproblem bleibt jedoch bestehen. In der Regel gilt, je genauer oder besser ein Ergebnis sein soll, desto höher ist der Aufwand.

In RDO-Aufgabenstellungen werden Optimierungs- und Stochastikverfahren miteinander verknüpft. Im Fall der Doppelschleife, dem flexibelsten und am häufigsten genutzten Verfahren, multiplizieren sich die Aufwände. Meist müssen aus diesem Grund sehr einfache Verfahren der Optimierung und Stochastik mit geringem Aufwand miteinander kombiniert werden. Auch beim Nutzen spezieller Eigenschaften des Robustheitsmaßes werden häufig nur einfache Methoden kombiniert. Die Annahmen über ein gutmütiges Problem bestimmen die klassischen Ansätze der zuverlässigkeitsbasierten Optimierung. Eine flexible und freie Auswahl und Kombination von Verfahren ist aus Gründen der Rechenkapazität kaum möglich. Existieren lokale Minima innerhalb des Optimierungsproblems, so können oftmals keine Verfahren angewendet werden, welche diesem Sachverhalt gerecht werden. Die Lösung liegt daher meist in der Nähe des Startwertes, dem deterministischen Optimum.

Eine Option, den Aufwand für Untersuchungen wie der RDO zu minimieren, ist die Verwendung von Metamodellen. Durch Evaluation auf der Antwortfläche wird es möglich, auch in der RDO komplexere Verfahren zu koppeln. In [30] wird die RBDO mit einer Moving Least Squares Antwortfläche basierend auf einem initialem Latin Hypercube Sampling ausgeführt. Alle folgenden Evaluationen erfolgen auf der Antwortfläche. Eine Adaption des Stützstellensets wurde nicht vorgenommen. In der Zuverlässigkeits- und Robustheitsuntersuchung interessieren allerdings lokale Ereignisse. Diese können durch

ein statisches Stützstellenset nur schwer abgebildet werden. Eine Adaption bleibt besonders in diesem Umfeld ohne Alternative. Die in Abschnitt 2.3 genannten Verfahren, um adaptiv Stützstellen hinzuzufügen, sind erfolgreich umgesetzt. Die raumfüllende Strategie ist jedoch für konvergierende Untersuchungen wie zum Beispiel der Optimierung nicht zufriedenstellend. Anwendungen der *moving limits* Strategie für RDO/RB-DO Aufgaben erzeugen Stützstellensets in den Subräumen und nicht im Gesamtraum. Einige Erweiterungen der Strategie der erwarteten Verbesserung beziehen sich auf ausgewählte Robustheitsmaße und sind für spezielle Antwortflächenverfahren vorgeschlagen. Darüberhinaus ist bis zum heutigen Zeitpunkt in der Fachwelt kein Konsens über ein Verfahren zur Metamodellierung gefunden (siehe Diskussion in Abschnitt 2.1). Für verschiedene Aufgabenstellungen scheinen sich unterschiedliche Ersatzmodelle zu eignen.

Desweiteren steht die Ausführung einer einzelnen Optimierung oder Robustheitsuntersuchung nie allein. Vielmehr werden Voruntersuchungen am Modell vorgenommen, um Effekte zu erkennen. Oder die Formulierung der Ziele ändert sich während des Designprozesses. Eine Weiterverwendung erhaltener Informationen für fortführende Untersuchungen ist in den meisten adaptiven Verfahren nicht vorgesehen. Da die Informationen aber ebenfalls durch aufwendige Simulationen des Modells ermittelt wurden, wäre es sinnvoll, sie in späteren Untersuchungen nutzen zu können. Hat man genügend Informationen über ein Modell, so würden keine neuen benötigt.

Aus den in dieser Arbeit genannten Randbedingungen lassen sich folgende Forderungen für ein neues adaptives Verfahren formulieren:

- Wiederverwendung von allen bisher gerechneten Designs
- Verwendung für verschiedene Approximationsmethoden
- Unterschiedliche Niveaus der Approximationsqualität einstellbar
- Unterschiedliche Qualitätsmaße für die Antwortfläche
- Unterstützung der Konvergenz abfragender Algorithmen
- Unabhängigkeit vom abfragenden Algorithmus

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Methodik entwickelt, welche diesen Forderungen entspricht. Dieses Kapitel dient dazu, das ausgearbeitete Konzept vorzustellen.

4.1 Verfahren

Die Grundidee des neuen Ansatzes ist, eine Datenbasis aller Evaluationen anzulegen. Auf ihrer Grundlage wird entschieden, ob es notwendig ist, ein Design aufwendig zu berechnen, oder ob es möglich ist, seine Systemantwort basierend auf Informationen in der Datenbasis vertrauenswürdig zu approximieren. Nur wenn es nicht möglich ist, das Resultat mit Hilfe eines Metamodells zu erhalten, muss eine teure Simulation gestartet werden. Ihre Ergebnisse fließen in die Datenbasis ein und tragen zur Verbesserung der Approximation bei. Das geschieht demzufolge immer in der Region, welche für den abfragenden Prozess von Interesse ist. Berechnungen werden nur in Teilgebieten notwendig, in denen die Approximationsqualität ungenügend ist, und der abfragende Algorithmus ein Ergebnis erwartet. In Gebieten, in welchen die Datenbasis das Berechnungsmodell vollkommen repräsentieren kann, werden keine zusätzlichen Simulationen nötig (Abb. 4.1). Grundsätzlich ist dieses Verfahren damit überall anwendbar, wo die Resultate so vorliegen, dass sie mit einem geeigneten Verfahren approximiert werden können.

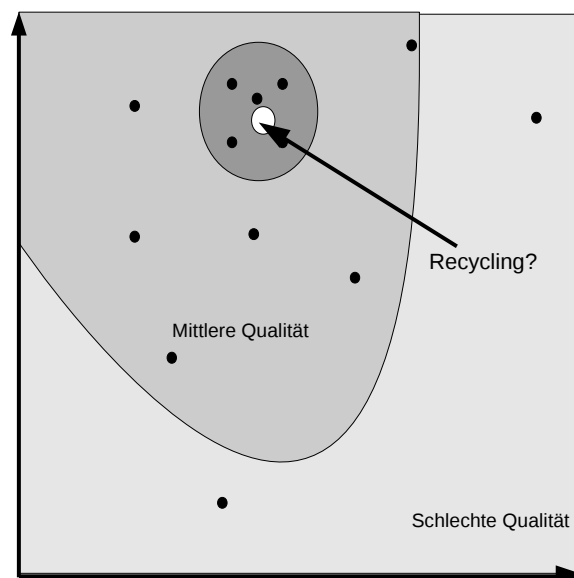


Abbildung 4.1: Verfeinern des Stützstellensets in interessanten Subräumen

Zunächst wird ein initiales Stützstellenset aufgebaut. Extrapolationen sind für jedes Approximationsverfahren als problematisch zu bezeichnen. Deshalb ergeben axiale oder teilfaktorielle Ansätze mit zwei Faktoren sinnvolle Startwerte. Damit werden die Grenzen des untersuchten Raumes abgedeckt. Zusätzlich kann der Raum mit einem raumfüllenden DOE wie zum Beispiel Latin Hypercube Sampling exploriert werden. Anschließend werden die Systemantworten ermittelt. Sind bereits Daten vorhanden, so können sie stattdessen eingeladen werden. Aufwendige Evaluationen sind dann nicht notwendig. Danach wird ein Metamodell basierend auf den Beobachtungen aufgestellt. Für dieses Metamodell werden die besten Parameter mittels eines Optimierungsalgorithmus gesucht. Die Optimierungsziele wurden in Kapitel 2 erläutert. Im Folgenden

wird der eigentliche Algorithmus, zum Beispiel eine Optimierung, gestartet. Für jedes Design fragt dieser die Datenbasis ab, ob es möglich ist, basierend auf dem Metamodell, eine vertrauenswürdige Aussage für die Systemantwort zu geben. Ist die Aussage vertrauenswürdig, so erhält der abfragende Algorithmus die approximierte Antwort. Ist das nicht der Fall, so wird das abgefragte Design einer realen Evaluation zugeführt. Anschließend werden die Ergebnisse verwendet, die Datenbasis zu füllen. Eine Evaluation des Realmodells ist nur an den Stellen notwendig, die für den abfragenden Algorithmus interessant sind und die bislang nur schlecht vorhergesagt werden können. Mit fortschreitendem abfragendem Algorithmus füllt sich somit die Datenbank in den abgefragten Regionen. Damit wächst dort die Vorhersagegenauigkeit. Uninteressante Teilräume werden nur gelegentlich untersucht. Sind genügend Informationen vorhanden, so ist keine zusätzliche reale Evaluation nötig.

4.2 Entscheidungskriterien

Für die Entscheidung, ob eine Auswertung auf dem Metamodell sinnvoll ist, sind Kriterien erforderlich, auf deren Grundlage entschieden werden kann. Diese sollten grundsätzlich auf den Bewertungen der lokalen Qualität des Metamodells beruhen. Damit kann geurteilt werden, ob das Wiederverwenden der Informationen (Recycling) sinnvoll ist, oder nicht. So wird beispielsweise das Metamodell in Abbildung 4.2 den abgefragten Wert gut vorhersagen. Die Approximationsgenauigkeit an dieser Stelle in Abbildung 4.3 ist hingegen ungenügend. Die Kriterien, auf deren Grundlage entschieden werden kann, ob die Approximationsgüte ausreichend ist, sollen in diesem Abschnitt detailliert erläutert werden.

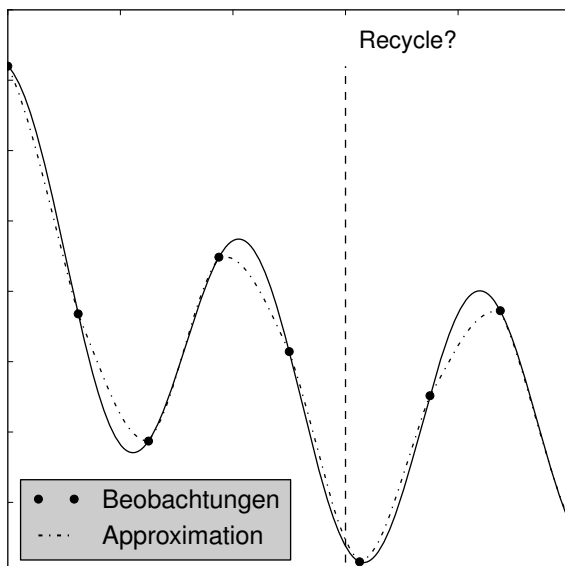


Abbildung 4.2: Gute Approximation

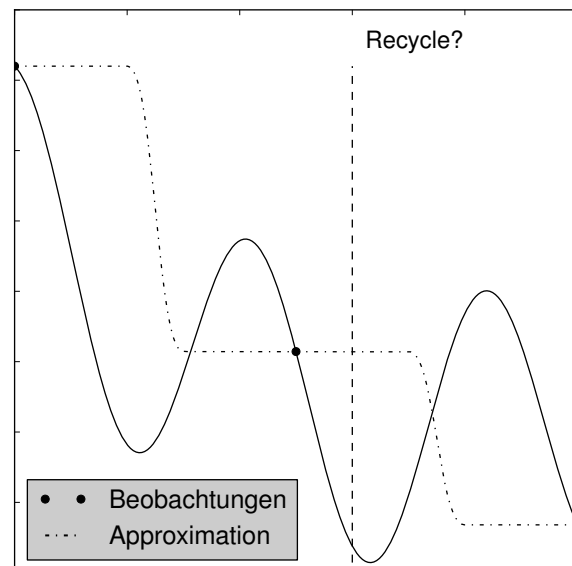


Abbildung 4.3: Schlechte Approximation

Konfidenzintervall

Metamodellverfahren sind in der Lage, die Varianz der Approximation für einen beliebigen Punkt vorherzusagen. Unter der Annahme, dass die Fehler normalverteilt mit Erwartungswert 0 sind, lässt sich ein Konfidenzintervall für einen vorhergesagten Wert angeben. Diese Fähigkeit wird zum Beispiel in der Strategie der erwarteten Verbesserung genutzt. Die Varianz wird für diesen Punkt lediglich geschätzt. Die Qualität dieser Schätzung hängt stark von der Wahl der Ansatzfunktion ab [178]. In Abbildung 4.4 sind die Konfidenzintervalle für zwei verschiedene Variogramme, linear (links) beziehungsweise sphärisch (rechts), dargestellt. Das Anpassen des Variogramms ist Teil einer Optimierungsaufgabe zur Suche des optimalen Metamodells. An dieser Stelle soll auf den Ausblick in Kapitel 6 verwiesen werden. Die Verwendung der Varianz des Metamodellverfahrens beruht auf der Annahme normalverteilter Fehler, korrekter Ansatzfunktionen und Koeffizienten. Sie sollte daher nicht als alleiniges Maß für die Konfidenz eines vorhergesagten Wertes verwendet werden.

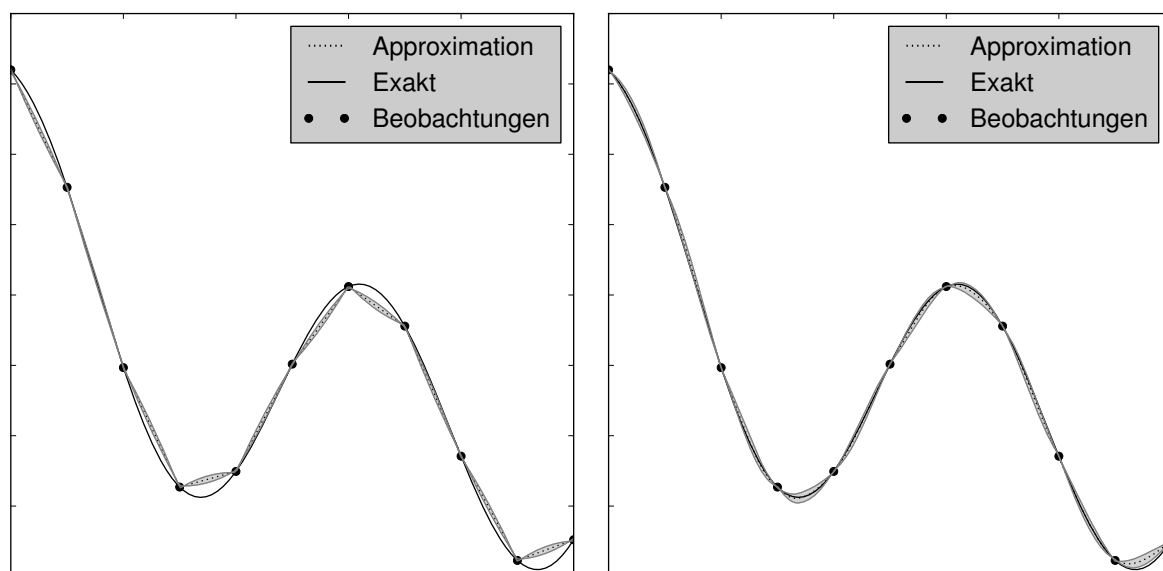


Abbildung 4.4: 95% Konfidenzintervall für ein lineares Variogramm (links) und ein sphärisches Variogramm (rechts)

Distanz

Viele Approximationsverfahren unterstellen räumliche Zusammenhänge. Für die Formulierung der Ansatzfunktionen wird gefordert, dass der Einfluss einer Stützstelle sinkt, je weiter man sich von ihr entfernt. Das Vertrauen in ein vorhergesagtes Resultat nimmt also mit steigendem Abstand zu den Stützstellen ab. Je dichter die Stützstellen in einem untersuchten Gebiet angeordnet sind, desto höher ist das Vertrauen in vorhergesagte Werte. Um das Distanzkriterium anzuwenden, werden die nächsten Nachbarn des vorherzusagenden Punktes bestimmt. Problematisch wird diese Anwendung bei

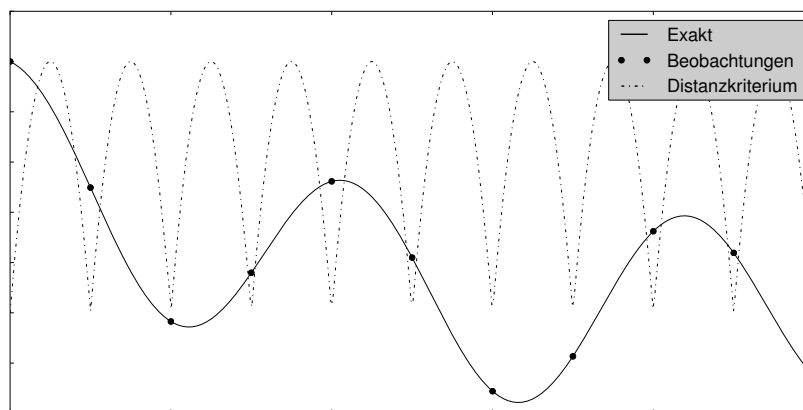


Abbildung 4.5: Distanzkriterium

stark anisotropen Verhalten. In diesem Fall kann statt der euklidischen Norm im normierten Raum, die Distanz für jede Dimension einzeln betrachtet werden. Finden sich zu wenig Stützstellen innerhalb einer definierten Distanz, so wird das Vertrauen als zu gering angesehen. Um die Darstellung zu vereinfachen, beziehen sich die Aussagen im Folgenden auf die euklidische Norm (im normierten Raum ermittelte Distanz) zum nächsten Nachbarn. Abbildung 4.5 zeigt das Distanzkriterium. Je größer der Abstand eines vorherzusagenden Punktes zur nächsten Stützstelle ist, desto geringer ist das Vertrauen in seine Approximation. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Punkt real berechnet werden muss, wächst.

Nächster Nachbar

Die Annahme dieses Kriteriums ist, dass ein Teilbereich schlecht zu approximieren ist, wenn die Validierung schlechte Ergebnisse liefert. Vor diesem Hintergrund ist ein prognostizierter Wert eher unglaubwürdig, wenn die Validierung im abgefragten Bereich schlechte Resultate liefert (Abb. 4.6 links). Für einen Punkt dessen nächste Nachbarn gut approximiert werden können, wird eine gute Approximationsgenauigkeit angenommen (Abb. 4.6 rechts, Vgl. [9, 47, 129]). Qualitätskriterium für die Approximationsfähigkeit eines nächsten Nachbarn ist im Rahmen der weiteren Betrachtungen sein Leave-One-Out-Fehler. Die Bestimmung der nächsten Nachbarn gestaltet sich,

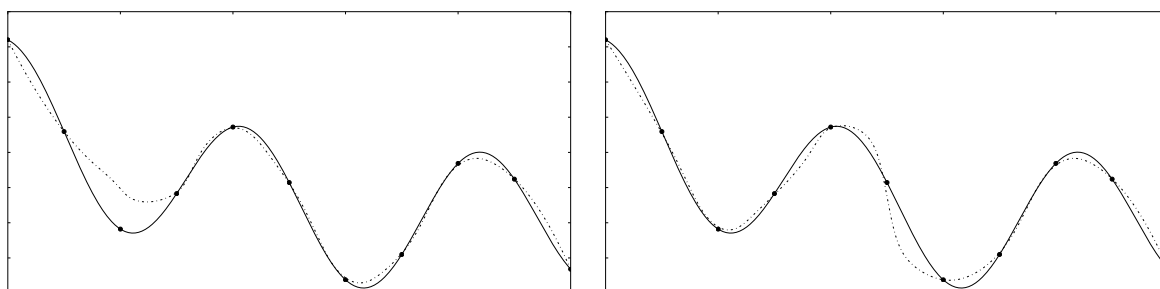


Abbildung 4.6: Approximation ohne Stützstelle 3 (links) und ohne Stützstelle 6 (rechts)

wie für das Distanzkriterium beschrieben, schwierig. Eine Möglichkeit, dies zu vermeiden, besteht in der Approximation der Validierungsergebnisse am vorherzusagenden Punkt. Dabei ist es sinnvoll, das Approximationsmodell zu nutzen, welches auch für die tatsächliche Vorhersage verwendet wird. Ein positiver Nebeneffekt ist, dass im richtigen Maß berücksichtigt wird, ob die Nachbarn das Ergebnis über- beziehungsweise unterschätzen. Die alleinige Nutzung dieses Kriteriums führt dazu, dass jede Stützstelle verifiziert wird. Der Aufwand an Stützstellen ist doppelt so hoch, als analytisch nötig

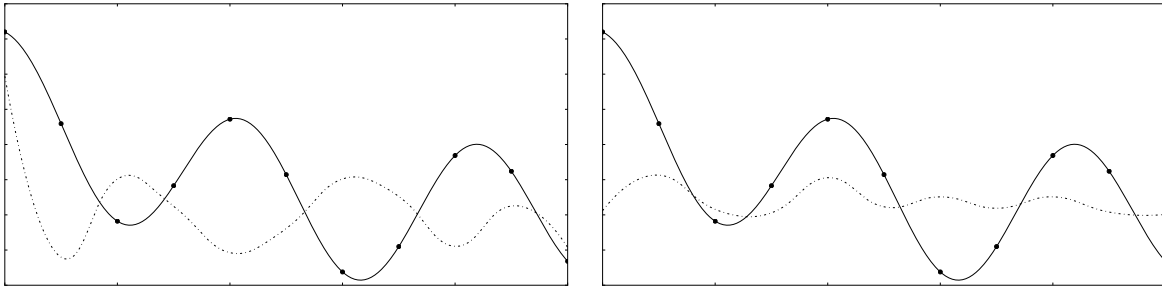


Abbildung 4.7: Absoluter und relativer approximierter Leave-One-Out-Fehler

wäre. Es kann zu numerischen Instabilitäten kommen, wenn die neue Stützstelle zu nah am schlecht vorhersagbaren Nachbarn liegt. Die Entscheidung, ob ein absoluter oder relativer Fehler (Abb. 4.7) als Kriterium heranzuziehen ist, hängt vom Wertebereich des Problems ab. In der Regel ist dieser durch Erfahrungswerte bekannt, oder kann durch das initiale Stützstellenset bestimmt werden. An dieser Stelle ist es ebenfalls möglich, den Fehler mit einer Kostenfunktion zu wichten, um die Wahrscheinlichkeit für das Recycling bestimmen zu können. Es lassen sich Parallelen zum Verfahren der erwartenden Verbesserung ziehen.

4.3 SampleDecider

Die oben genannten Kriterien beruhen auf der Schätzung der Qualität des Approximationsmodells im untersuchten Bereich. Ob der Wert für einen Punkt vertrauenswürdig ist oder nicht, kann demzufolge nicht scharf definiert werden. Es kann jedoch eine unscharfe Definition für das Vertrauen in Abhängigkeit vom Kriterium definiert werden. Dieses Vertrauen wird in einem Intervall von 0 (K_0 , volles Vertrauen) bis 1 (K_1 , kein Vertrauen) als Funktionswert des jeweiligen Kriteriums angegeben. Auf dieser vagen Aussage allein ist keine Entscheidung möglich. Deshalb wird die Vertrauensbeschreibung in Verbindung mit einem (Pseudo-) Zufallszahlengenerator genutzt. Dieser generiert mittels Gleichverteilung einen Wert zwischen 0 und 1. Ist die Zufallszahl kleiner als der Funktionswert, so gilt das Kriterium als verletzt. Analog kann die Vertrauensfunktion als Summenkurve einer Verteilungsfunktion angesehen werden [48]. Damit wird eine Zufallszahl generiert. Ist diese größer als der Wert des Kriteriums, so gilt es als erfüllt. Die Wahrscheinlichkeit die Aussage eines unerfüllten Kriteriums geht gegen 0, wenn der Funktionswert der Vertrauensfunktion nahe 0 ist. Mit steigendem Funktionswert wird es wahrscheinlicher, das Kriterium als verletzt zu detektieren (Abb. 4.8). Als sinnvoll, da

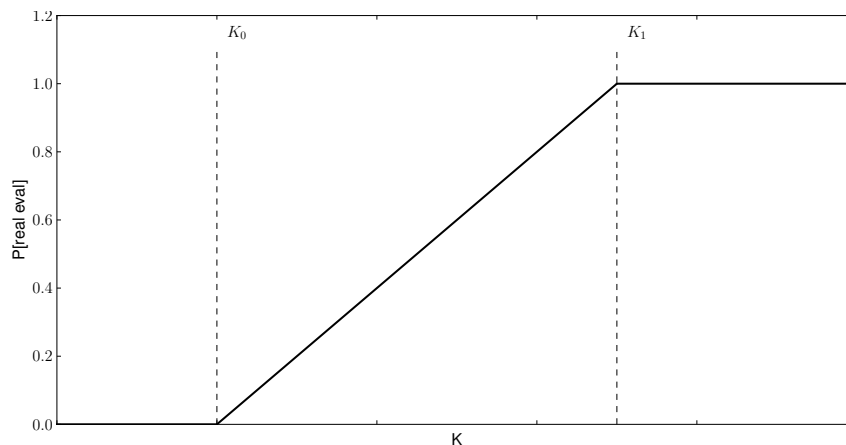


Abbildung 4.8: Entscheidungsfunktion

leicht zu verstehen, wird eine lineare Vertrauensbeschreibung gewählt. Diese enthält nur 2 Parameter, den Wert K_0 , bis zu welchem volles Vertrauen angenommen wird und den Schwellwert K_1 , ab welchem das Kriterium in jedem Fall versagt. Komplexere Ansätze lassen sich zum Beispiel durch normierte Verlustfunktionen definieren.

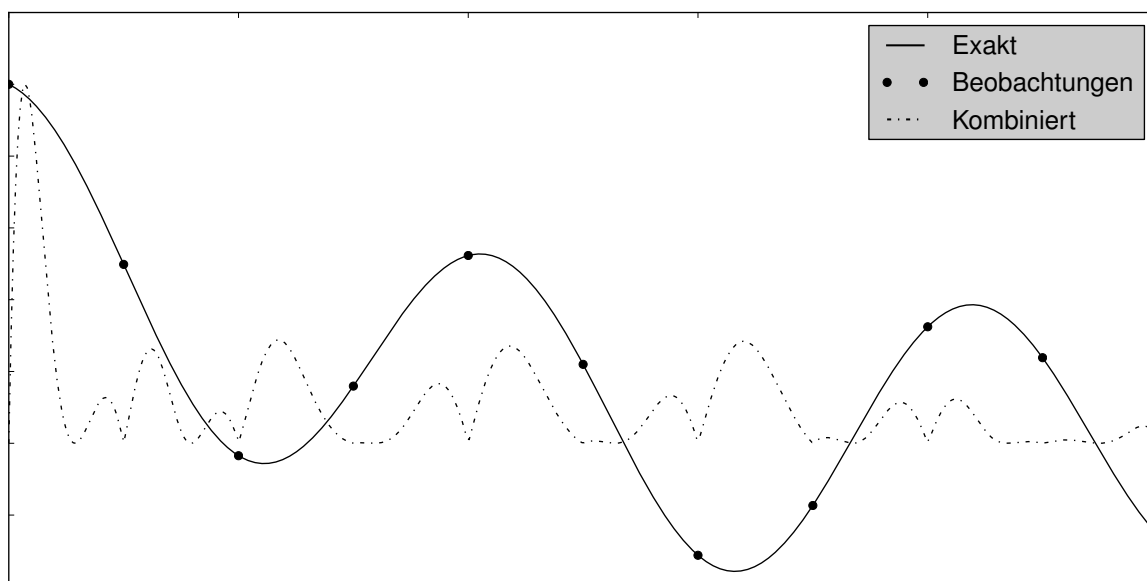


Abbildung 4.9: Kombination LOO und Distanzkriterium

Die Verwendung eines Kriteriums allein birgt das Risiko unsicherer Entscheidungen oder einer zu hohen Wahrscheinlichkeit, neue Stützstellen rechnen zu müssen. Die Kriterien sollten daher kombiniert werden. Bei der Kombination wird angenommen, dass bei einer positiven Erfüllung eines Kriteriums, die Approximationsgüte für den abgefragten Punkt ausreicht. In Abbildung 4.9 ist die beschriebene Kombination des approximierten LOO und des Distanzkriteriums dargestellt. Zu sehen ist die Wahrscheinlichkeit, dass für einen Punkt eine reale Evaluation ausgeführt werden muss. Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit unter der Voraussetzung, dass der Punkt abgefragt wird. Für konvergierende Verfahren wie die Optimierung ist die Abfra-

gedichte in bestimmten Regionen hoch. Für den abfragenden Algorithmus unwichtige Regionen werden eher selten abgefragt. Die Stützstellendichte wird dem abfragenden Algorithmus entsprechend lokal und global adaptiert.

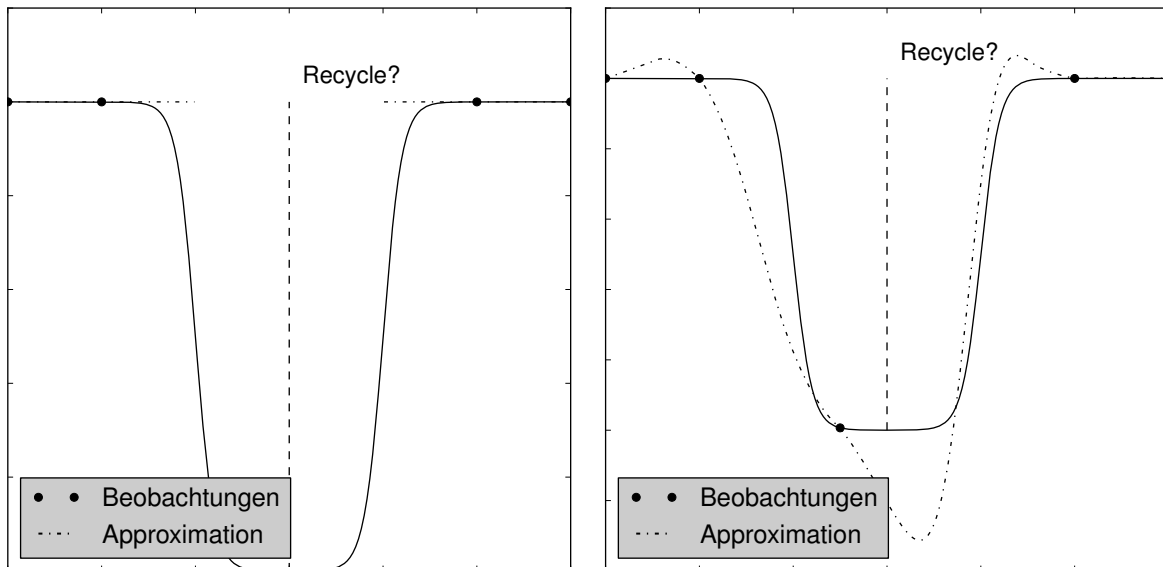


Abbildung 4.10: Vorhersage nicht observierter Bereiche (links) und Redundanzschaffender Punkt (rechts)

Für die Kreuzvalidierung ist entscheidend, wo die Stützstellen liegen. Bei verschiedenen Versuchen hat sich gezeigt, dass besonders bei deterministischen Initialstützstellensets Leave-One-Out-Fehler ermittelt wurden, welche eine hohe Approximationsqualität versprachen (Abb. 4.10). Gründe dafür sind das gute Abbilden globaler Trends und Redundanz in der dazu nötigen Information. Lokale Effekte konnten aber nicht erfasst werden. Deshalb wird zusätzlich ein redundanzschaffendes Kriterium verwendet. Es überstimmt mit relativ geringer Wahrscheinlichkeit positiv erfüllte Kriterien. Bei hoher Abfragedichte in lokalen Bereichen wird garantiert, dass Effekte, welche nicht dem globalen Trend entsprechen, abgebildet werden können. Die Wahl der Wahrscheinlichkeit für das Schaffen von Redundanz ist von der Anzahl abgefragter Antworten, der Größe des untersuchten Raumes und dem Vorkommen lokaler Effekte abhängig. Diese Fragestellung ist durch Ingenieurverständnis zu beantworten.

Entscheidung bei verrauschten Antworten Verrauschte Antworten stellen besondere Anforderungen an das Entscheidungskriterium der Validierung. Die Vertrauensfunktion muss so definiert werden, dass ein bestimmtes Maß an Schwankungen erwartet und akzeptiert wird. Zusätzlich muss genügend Redundanz in den Stützstellen vorhanden sein, um *overfitting* zu vermeiden. Das bedeutet, dass ein höherer Aufwand entsteht, wenn die Antworten verrauscht sind. Durch Bewertung des initialen Stützstellensets ist es möglich Schätzungen für das Solverrauschen abzugeben. Damit können die Parameter für die Entscheidungskriterien gewählt werden. Versuche mit analytischen Ansätzen haben gezeigt, dass das Abstandskriterium den Aufwand sinnvoll begrenzt. Grundsätzlich sind glättende Methoden den anpassenden Approxi-

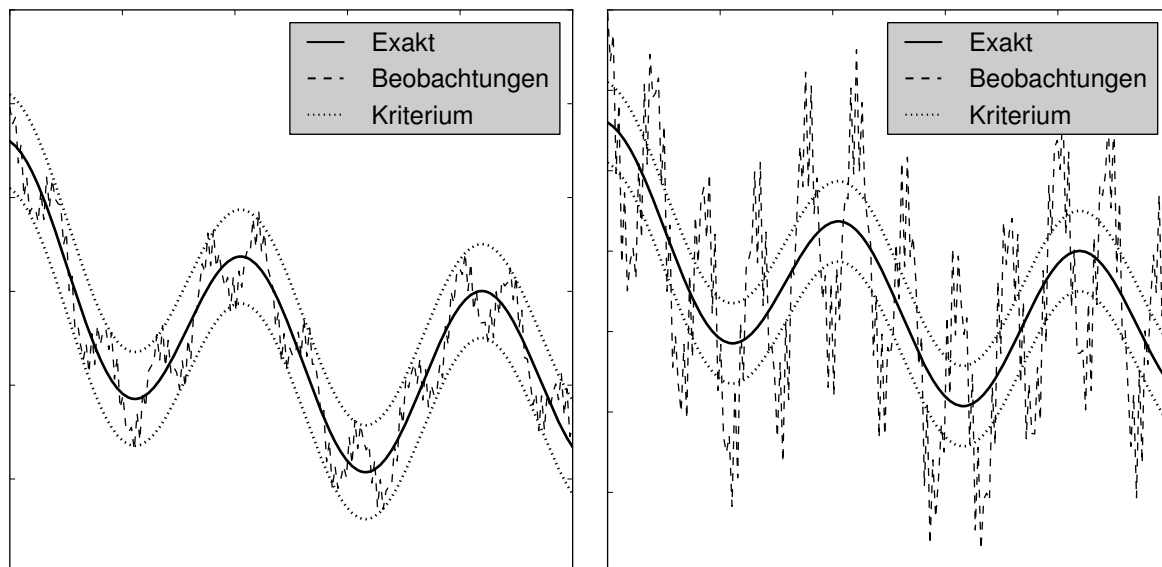


Abbildung 4.11: Rauschen für das Kriterium

mationsverfahren vorzuziehen (Abb. 3.8 f). Der approximierte Leave-One-Out-Fehler wird so geglättet, dass sich positive und negative Fehler aufheben können. Das Entscheidungskriterium wird dadurch unterstützt und somit effizient. Ist jedoch ein derart hohes Rauschen innerhalb der Systemantworten vorhanden, dass wichtige Effekte nicht erkennbar sind, so versagt die vorgestellte Methodik. Dieser Umstand gilt auch für den abfragenden Algorithmus und alle Approximationsverfahren. Daher wird dies nicht als negativer Aspekt gewertet. Eine abschließende Bewertung zu diesem Aspekt kann im Rahmen dieser Arbeit nicht gegeben werden. Aus diesem Grund wird auf den Ausblick in Kapitel 6 verwiesen.

4.4 Optimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten

Das SampleRecycling ist für die Optimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten von besonderem Wert. Es wird im Gesamttraum in Verbindung mit dem Doppelschleifenverfahren angewendet (siehe Gl. 3.5). Die äußere Schleife ist ein konvergierendes Verfahren, welches nur in bestimmten Teilräumen hohe Qualitätsanforderungen an das Metamodell hat. Dazu werden durch die innere Schleife im stochastischen Raum viele Werte in einer kleinen Region abgefragt. Das Verhältnis von tatsächlich gerechneten zu abgefragten Systemantworten ist daher äußerst günstig. In Abbildung 3.3 wird ersichtlich, dass (Hyper-) Linien für jedes Optimierungsdesign erscheinen. Je weiter die Optimierung fortschreitet (Abb. 4.12), desto mehr verdichten sich diese in einem kleinen Bereich des Gesamttraumes (Abb. 4.13). In dieser Region wird das Stützstellen-set so lang verfeinert, bis der Approximationsfehler unter dem gewünschten Wert liegt, beziehungsweise die Entscheidungskriterien erfüllt sind. Die Datenbasis wächst mit jedem

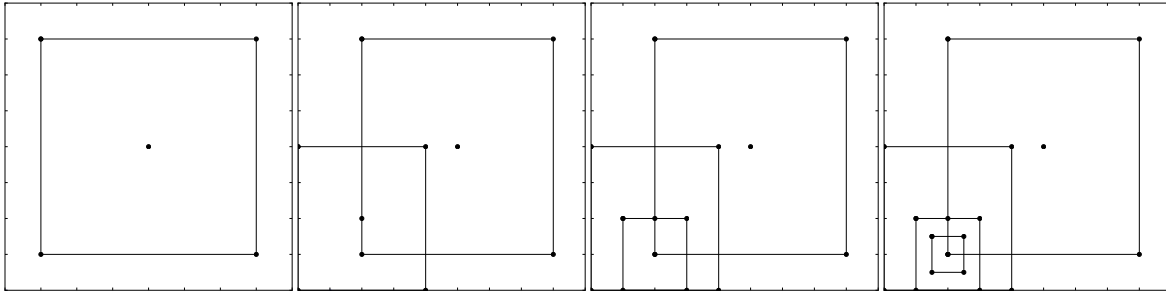


Abbildung 4.12: Fortschreitende Optimierung im deterministischen Subraum

Schritt. Damit können ohne großen zusätzlichen Aufwand die Robustheitsmaße mit immer höherer Genauigkeit ermittelt werden. Neue Berechnungen sind nur dann notwendig, wenn der Optimierer eine neue Subregion von Interesse findet. Durch die vorgestellte Methode ist es möglich, erhaltene Informationen für verschiedene Untersuchungen wiederzuverwenden. Gewonnene Informationen über ein numerisches Modell können in späteren Untersuchungen als Stützstellen für das Metamodell wiederverwendet werden. Somit können effizient Untersuchungen für Robustheitsmaße hoher Wahrscheinlichkeit und Extremereignisse gekoppelt werden. Das Steigern der Qualitätsanforderungen an das Metamodell mit fortschreitender Optimierung zeigt zusätzliches Potenzial, die Anzahl der notwendigen Evaluationen zu reduzieren. Um den Aufwand einschränken zu können, wird die iterative Erhöhung der Anforderungen an die Vorhersage empfohlen. Gestartet wird mit geringen Anforderungen an die Vertrauenswürdigkeit der Vorhersage. In jedem Iterationsschritt wird ein höheres Qualitätsniveau gefordert. Der numerische Aufwand im Vergleich zum bi-level Vorgehen N_{tot} sinkt immens, im Extremfall von $N_{opt} \cdot N_{stoch}$ auf einen konstanten Wert N_{const} . Die Zahl notwendiger Evaluationen übersteigt hierbei nicht die Anzahl der abgefragten Systemantworten. Im günstigsten Fall ist das erhaltene Stützstellenset nur um ein Design größer als das analytisch optimale. Dies resultiert daraus, dass die Modellannahme mindestens einmal verifiziert werden muss. Die Validierung der vorgestellten Methodik findet im nächsten Kapitel anhand ausgewählter Beispiele statt.

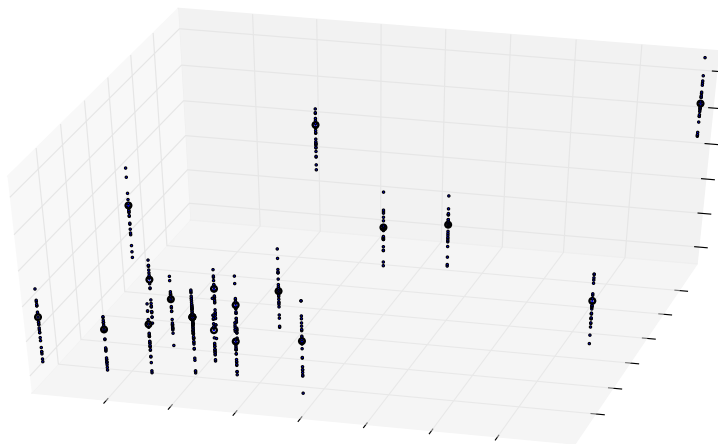


Abbildung 4.13: Projektion der Robustheitsmaße und zugehöriger Systemantworten

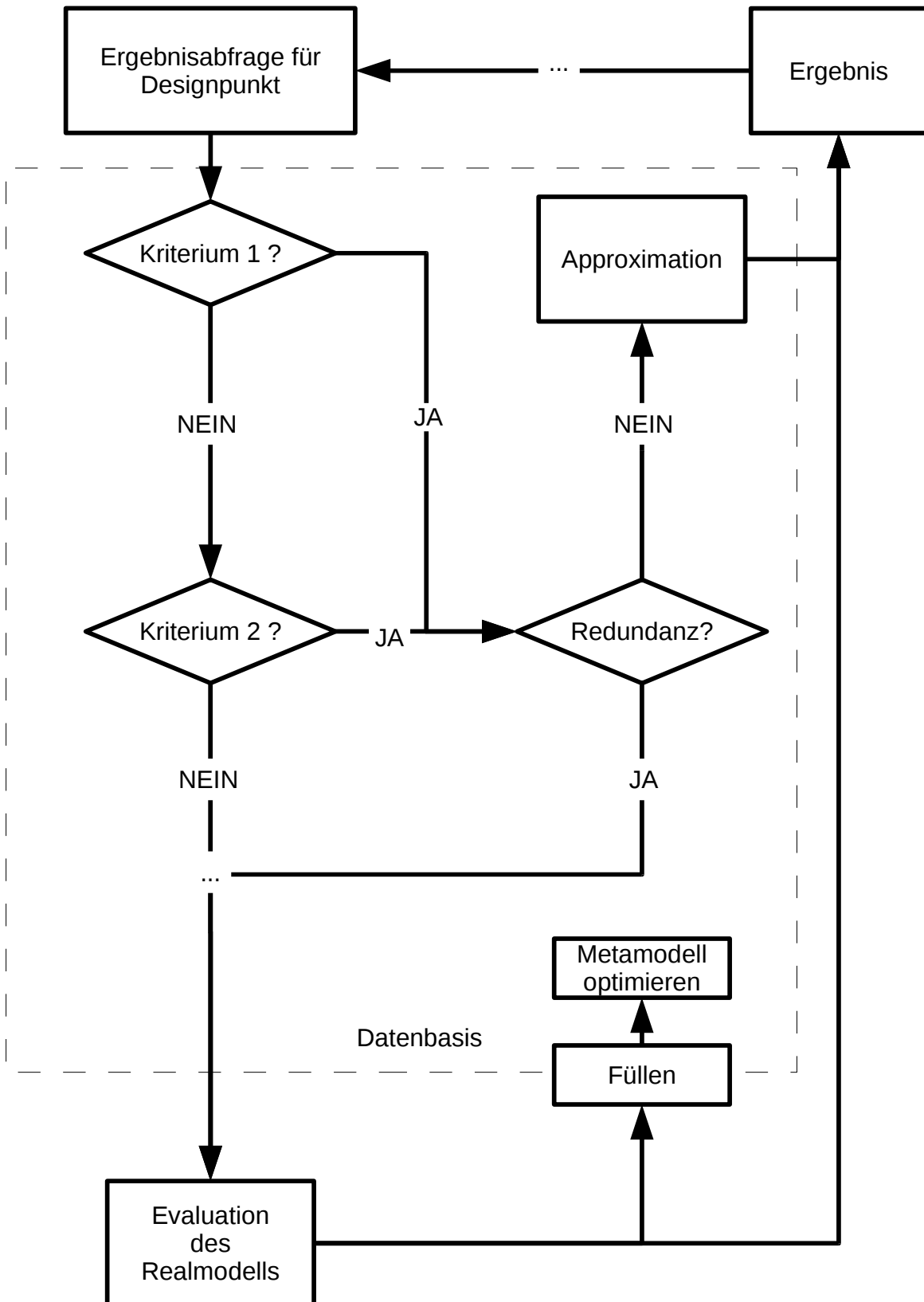


Abbildung 4.14: Ablaufdiagramm der vorgeschlagenen Methodik - Detailausschnitt

Kapitel 5

Beispiele

Die Validierung des Verfahrens wird anhand von vier Beispielen vorgenommen. Die Verfahren der kommerziellen Software optiSLang [126] werden als abfragende Algorithmen genutzt. Diese Anwendung stellt Implementationen für multidisziplinäre Optimierung, Robustheits- und Zuverlässigkeitsanalysen zur Verfügung. Darüber hinaus ermöglicht sie durch die Kombination der Methoden innerhalb einer Doppelschleife die flexible Behandlung von RDO-Aufgabenstellungen. Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Methodik des SampleRecycling wird in der Prozesskette als Schicht zwischen (abfragendem) Algorithmus und Solveraufruf eingefügt. Das Ausführen ohne SampleRecycling wird im Folgenden als klassische Herangehensweise bezeichnet. Die Abbildungen dieses Kapitels sind durch die Postprocessingkomponente der verwendeten Software erstellt. Die Möglichkeiten, die Darstellungen zu ändern, sind begrenzt. Zudem ist die Software englischsprachig, dadurch konnten nicht alle Beschriftungen in deutscher Sprache abgebildet werden. Weitergehende Beschreibungen der implementierten Algorithmen und Darstellungsformen finden sich in der Dokumentation der Software [126].

Um die Parametereinstellungen der Algorithmen nachvollziehbar und transparent zu gestalten, werden im Wesentlichen die voreingestellten Werte verwendet. Abweichende Einstellungen werden nur im Hinblick auf begrenzte Ressourcen vorgenommen. Um die Anwendung auf komplexe Ingenieurprobleme zu berücksichtigen, wird dabei für analytische Beispiele die Anzahl der realen Evaluationen herangezogen. Gleiches gilt für die Anzahl der verwendeten Stichproben zur Auswertung des Robustheitsmaßes. Von den Standardwerten abweichende Parametereinstellungen sind an den betreffenden Stellen dokumentiert. Zur besseren Vergleichbarkeit mit der klassischen Vorgehensweise werden die Aufwandsabschätzungen der Doppelschleife verwendet. Die Möglichkeit, den abfragenden Algorithmus mit aufwendigeren Konfigurationen auszuführen, ohne größeren realen Aufwand zu generieren, ist im Ausblick (Kapitel 6) beschrieben. Da diese Variante noch nicht ausreichend erforscht ist, wird auf ihre Anwendung im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Gleiches gilt für das iterative Erhöhen der Anforderungen an die Approximationsgüte. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, werden die Parameter der Entscheidungskriterien lediglich halbiert.

5.1 Braninfunktion

Als erstes Beispiel wird die Branin-Funktion verwendet. Diese einfache analytische Funktion wird oft als Benchmark für Optimierungsalgorithmen eingesetzt. Im Zusammenhang mit der RDO wird sie beispielsweise in [83] angeführt. Sie bildet daher eine gute Grundlage für einen ersten Nachweis der Anwendbarkeit des vorgestellten Verfahrens.

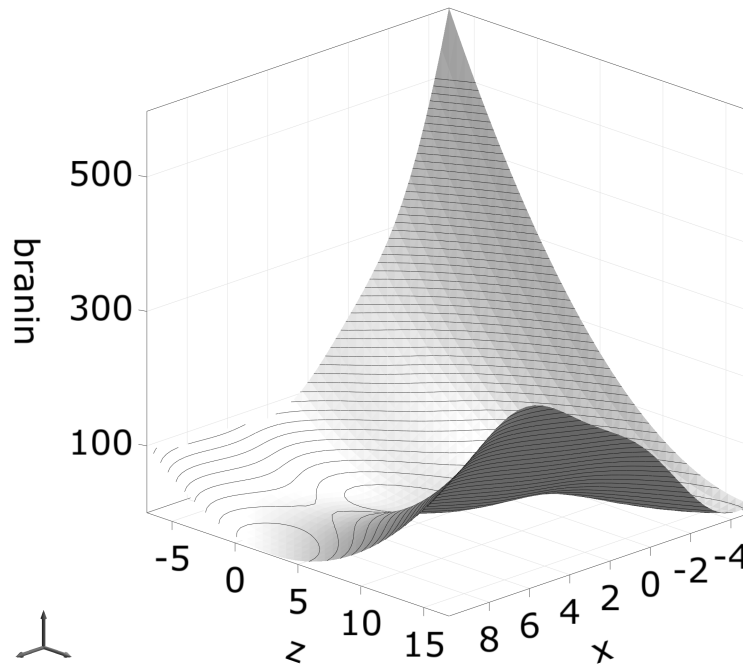


Abbildung 5.1: Branin-Funktion

Die mathematische Beschreibung der Braninfunktion im zweidimensionalen Raum lautet [20, 45]:

$$f(x, z) = \left(z - \frac{5.1}{4\pi^2}x^2 + \frac{5}{\pi}x - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos(x) + 10 \quad (5.1)$$

Mit

$$-5 \leq x \leq 10 \quad (5.2)$$

$$z \sim N(5, 2)$$

$$\delta_{qbranin}(x) = \mu(f(x)) + \sigma(f(x)) \rightarrow \min$$

Entsprechend der oben genannten Referenz wird x als deterministischer Optimierungsparameter gewählt. Der Parameter z stellt hier die stochastische Komponente dar. Er streut normalverteilt mit einem Mittelwert $\mu = 5$ und einer Standardabweichung $\sigma = 2$. Das zu minimierende Robustheitskriterium ergibt sich aus der Summe des Mittelwertes und der zugehörigen Standardabweichung. Das analytische Optimum liegt bei $x = 10$ und damit am Rand des Variationsbereiches.

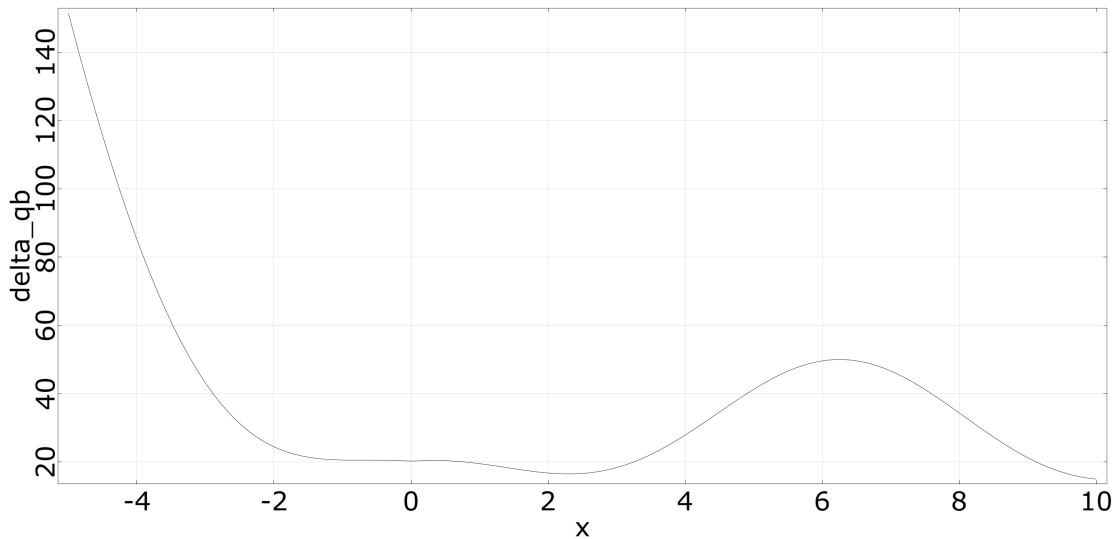


Abbildung 5.2: Robustheitsmaß

In [83] wird zur Lösung der Aufgabenstellung die Strategie der erwarteten Verbesserungen angewendet. Diese wurde dazu speziell auf die Ansprüche der RDO angepasst. Die stochastische Auswertung erfolgt in der genannten Referenz anhand von 1000 Plain Monte Carlo Stichproben. Das initiale Stützstellenset des adaptiven Versuchsplans umfasst 10 Latin Hypercube Designs im Gesamtraum. Für das iterative Verfeinern des Stützstellensets werden 7 zusätzliche Evaluationen benötigt. Der Gesamtaufwand beträgt demzufolge 17 Designauswertungen. Den Darstellungen in [83] ist zu entnehmen, dass die zusätzlichen Stützstellen in der Mitte und den Rändern des deterministischen Subraums liegen. Inwieweit damit eine Berücksichtigung des lokalen Minimums möglich ist, kann an dieser Stelle nicht bewertet werden. Das robuste Optimum wird bei $x = 10$ gefunden. Das entspricht der analytischen Lösung.

Optimierung mit Adaptiven Antwortflächen

Zunächst wird zur Vergleichbarkeit der Algorithmen mittels Adaptiver Antwortflächen (ARSM) [126] optimiert. Die stochastische Auswertung erfolgt anhand von 1000 Plain Monte Carlo Stichproben [83]. Die klassische Doppelschleife benötigt 610 Systemantworten. Der Berechnungsaufwand mit **SampleRecycling** inklusive initialer 6 Designs (Koshal-Quadratic-DOE) beträgt 15 Funktionsauswertungen. Abbildung 5.3 zeigt den zugehörigen Verlauf der abgefragten Systemantworten und der tatsächlich notwendigen Evaluationen. Das analytische Optimum bei $x = 10$ wird gefunden. Das Optimum

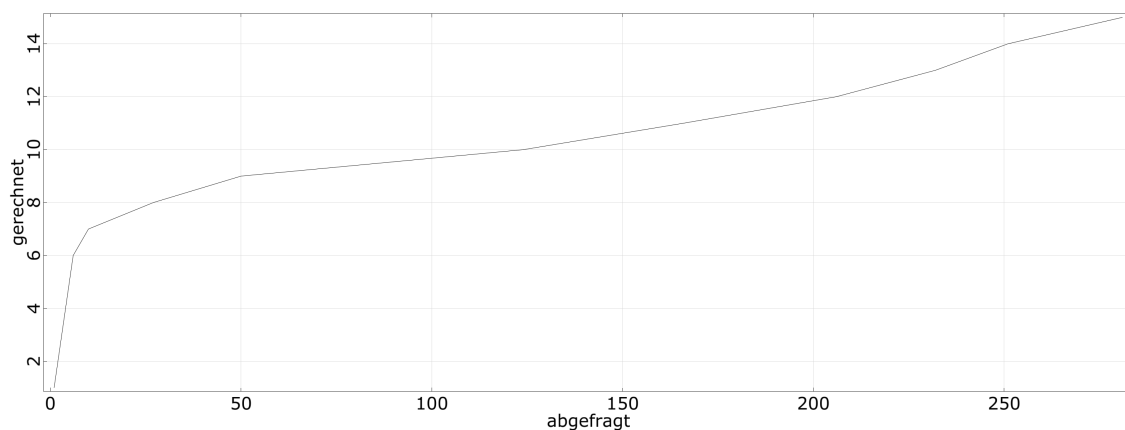


Abbildung 5.3: Abgefragte Antworten und reale Evaluationen der Braninfunktion

liegt direkt an der Grenze des Parameterraumes. Aus diesem Grund kann das Beispiel durch gute Wahl der Einstellungen für die ARSM effizient gelöst werden (siehe Abb. 5.2). In Abbildung 5.4 ist ersichtlich, dass die abgefragten Stützstellen und damit die realen Evaluationen in der Mitte und den Rändern des Parameterraumes liegen. Werden andere Einstellungen gewählt, so findet der Optimierer nur das lokale Optimum oder muss größeren Aufwand zum Finden des globalen Optimums betreiben.

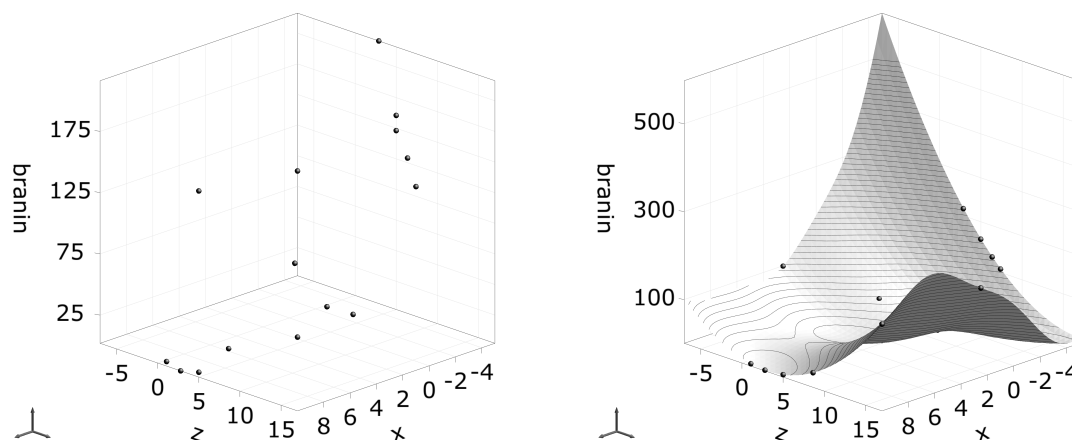


Abbildung 5.4: Gerechnete Stützstellen für die Braninfunktion (ARSM)

Optimierung mit Evolutionärem Algorithmus

Um eine realistische Betrachtung des Modells vorzunehmen, wird ein Evolutionärer Algorithmus (EA) zur Optimierung genutzt [126]. Dieser verwendet 10 Generationen mit einer maximalen Populationsgröße von 10. Das Robustheitsmaß ermittelt sich aus 50 Latin Hypercube Designs. Der Optimierer bricht mit Erreichen der maximalen Generationsanzahl ab. Von abgefragten 3300 Systemantworten werden 19 tatsächliche Evaluationen gestartet. Inklusive initialer 6 Designs (s.o.) beträgt der Gesamtaufwand 25 Berechnungen. Das Stützstellenset ist im Anhang A.3 wiedergegeben. Das Optimum wird bei $x = 10$ gefunden. Das entspricht dem analytischen Optimum.

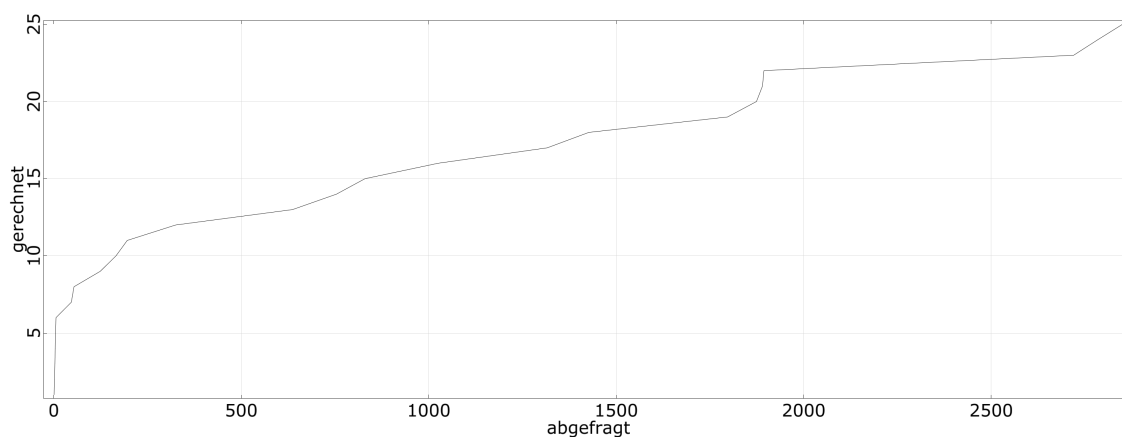


Abbildung 5.5: Abgefragte Antworten und reale Evaluationen der Braninfunktion

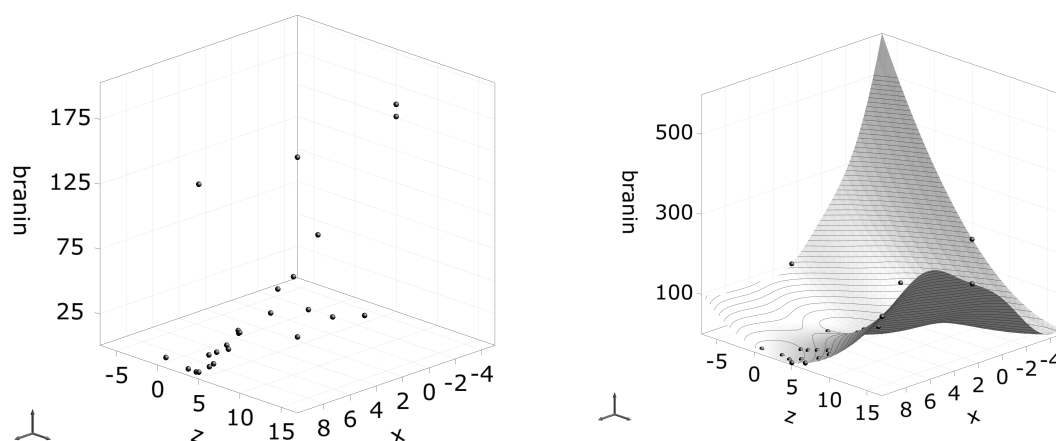


Abbildung 5.6: Gerechnete Stützstellen für die Braninfunktion (EA)

Durch Abbildung 5.7 wird ersichtlich, dass einige Robustheitswerte mit hohem Fehler behaftet sind. Dabei handelt es sich um die ersten Optimierungsdesigns. Zu diesem Zeitpunkt ergeben sich höhere Approximationsfehler beim Abfragen der Datenbasis. Mit fortschreitender Optimierung wird die Datenbank gefüllt. Die Approximationsgüte

steigt. Wird das beste Design zu Beginn der Optimierung detektiert, so ist es zu hinterfragen. Im Allgemeinen kann dies durch nochmaliges Ausführen der Optimierung auf der Antwortfläche geschehen. In diesem Fall werden die Qualitätsanforderungen so gering gewählt, dass keine reale Evaluation gestartet wird. Weil alle Systemantworten auf dem Metamodell berechnet werden, entsteht in der Regel kein unwirtschaftlicher Mehraufwand.

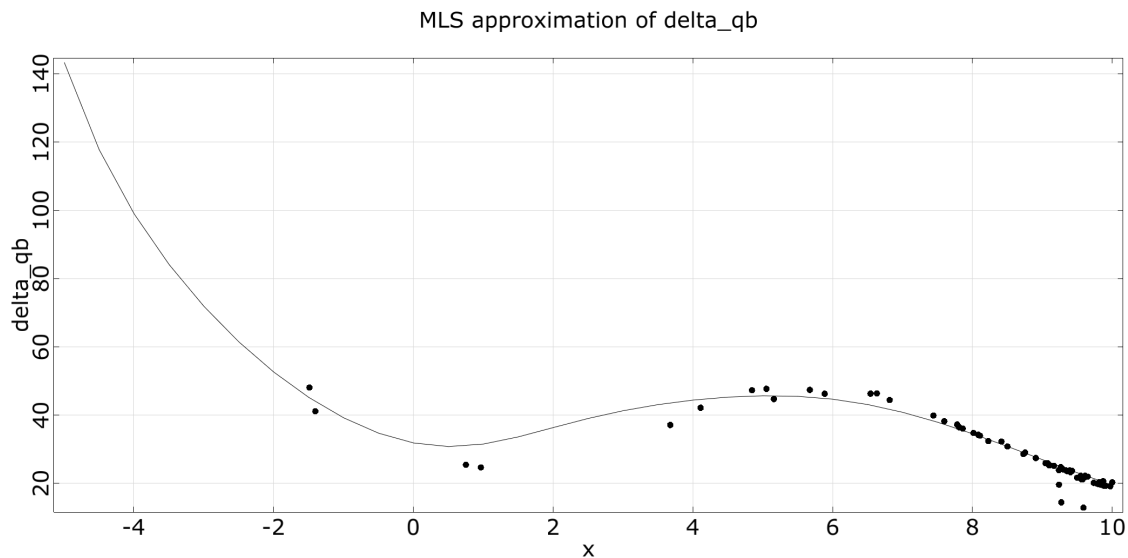


Abbildung 5.7: MLS - Approximation der ermittelten Robustheitswerte

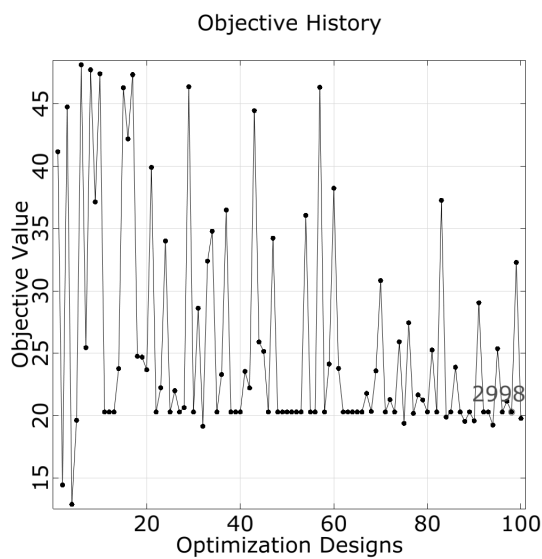


Abbildung 5.8: Verlauf der Zielfunktion

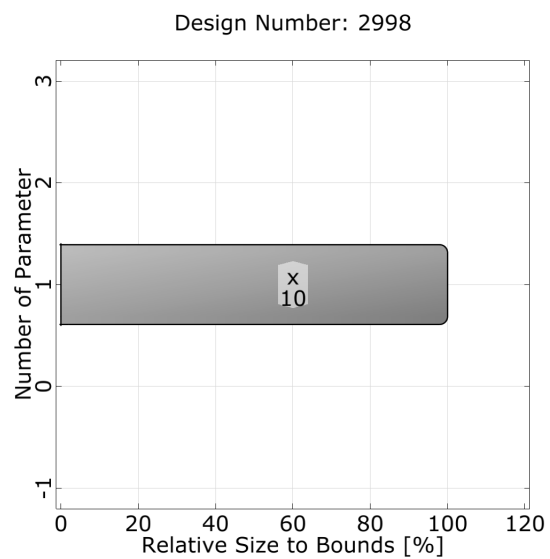


Abbildung 5.9: Bestes Design

Erweiterung um unwichtige Parameter

In vielen realen Aufgaben treten in den Problemstellungen Parameter auf, welche keinen Einfluss auf die Systemantwort haben. Da sie unwichtig sind, vergrößern sie ohne Mehrwert den Inputparameterraum. Klassische, deterministische Versuchspläne sind in diesem Fall sehr ineffektiv, da die Komplexität die Dimension der Problembeschreibung oftmals im Exponenten trägt. Stochastische Samplingstrategien und teilfaktorische Ansätze sind weniger sensitiv. Wenn unwichtige Parameter keinen Einfluss auf die Systemantwort haben, so wird angenommen, dass dies ebenfalls für die Kreuzvalidierung gilt. Um diese These zu bestätigen, wird das oben beschriebene Beispiel um zwei unwichtige Designvariablen erweitert. Zusätzlich wird der stochastische Subraum um zwei für die Systemantwort irrelevanten Dimensionen erweitert.

Die neue Beschreibung enthält 6 Parameter.

$$f(\{x_i\}, \{z_i\}) = \left(z_1 - \frac{5.1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5}{\pi} x_1 - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos(x_1) + 10 \quad (5.3)$$

Mit

$$\begin{aligned} -5 &\leq x_i \leq 10 \\ z_i &\sim N(5, 2) \\ \delta_{qbranin}(\{x_i\}) &= \mu(f(\{x_i\})) + \sigma(f(\{x_i\})) \rightarrow \min \\ i &= 1 \dots 3 \end{aligned} \quad (5.4)$$

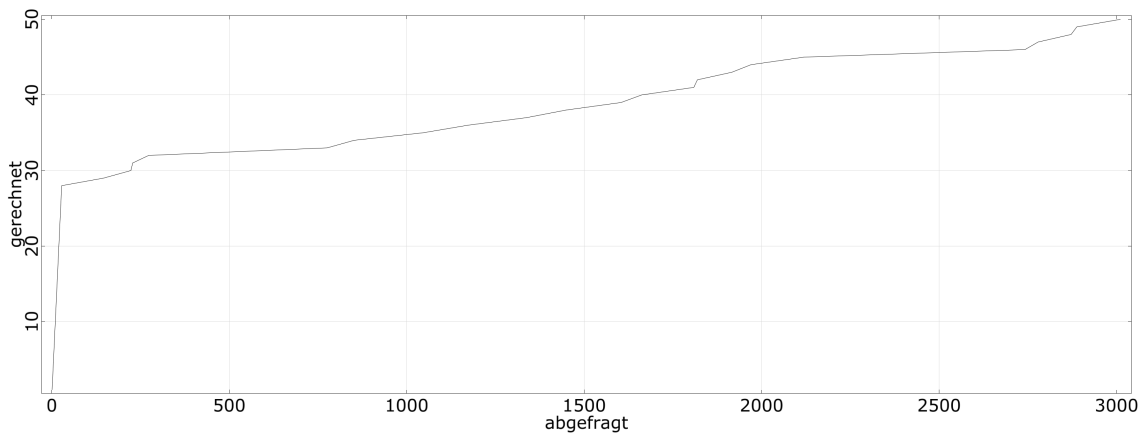


Abbildung 5.10: Abgefragte Antworten und reale Evaluationen der erweiterten Branin-funktion

Das initiale Stützstellenset ist abhängig von der Parameteranzahl. Seine Größe beträgt 28 Versuche (Koshal-Quadratic-DOE). Um realistische Bedingungen zu simulieren, wird die stochastische Auswertung mit 25 Latin Hypercube Designs vorgenommen. Die Einstellungen für den Optimierer bleiben gleich. Die verwendeten Verfahren EA und LHS sind im Wesentlichen unabhängig von der Dimensionalität des Problems.

Deshalb ist die Zahl abgefragter Systemantworten mit 2550 ähnlich zum Aufwand des ursprünglichen Problems. Tatsächlich werden 22 weitere Designs berechnet (Abb. 5.10). Das gefundene Optimum liegt bei $x_1 = 10$. Die Werte der anderen Parameter sind, wie beschrieben, unwichtig (Abb. 5.13). Zu beachten ist, dass die Approximation das Er-

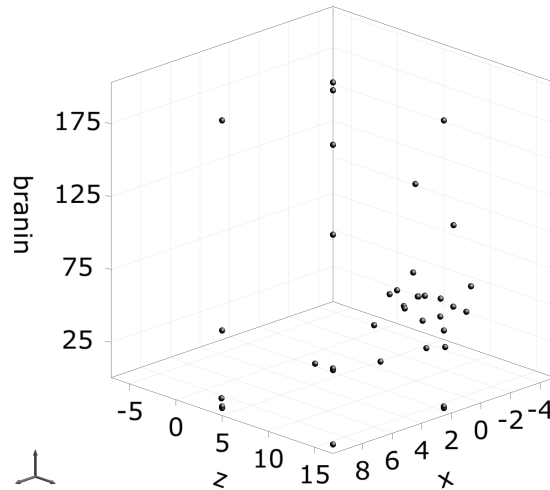


Abbildung 5.11: Gerechnete Stützstellen der erweiterten Braninfunktion (Projektion)

gebnis in den ersten Generationen unterschätzt. Im weiteren Verlauf verbessert sich die Approximationsgüte (Abb. 5.12). Folglich konvergiert der Optimierer in einem höheren Wertebereich. Durch nochmaliges Ausführen der Optimierung kann das Ergebnis bestätigt werden. Ein hoher Anteil der gerechneten Designs liegt im Bereich des lokalen Minimums. Die späte Konvergenz wird somit auch in Abbildung 5.11 ersichtlich.

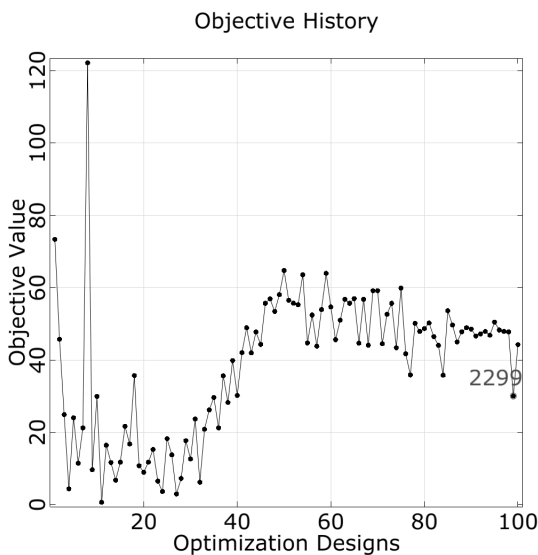


Abbildung 5.12: Verlauf der Zielfunktion

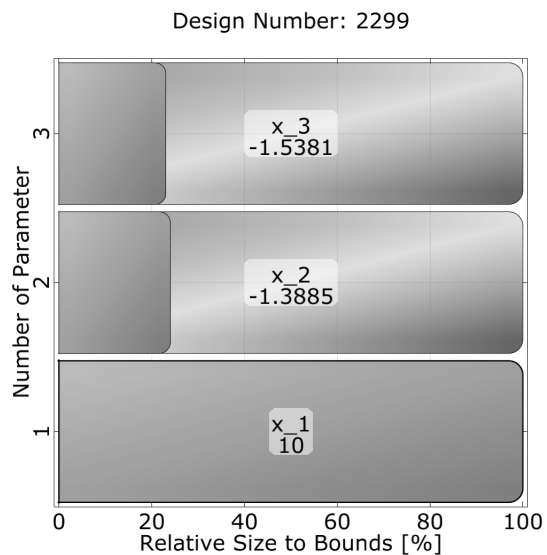


Abbildung 5.13: Bestes Design

5.2 Balken unter dynamischer Last

Als weiteres Beispiel wird ein Balken unter dynamischer Last ausgewählt (Abb. 5.14). Die erste Anwendung als RDO-Problem findet sich in [23]. Das Optimierungsziel ist die Minimierung der Masse. Nebenbedingung ist das Einhalten der Versagenswahrscheinlichkeit hinsichtlich der maximalen Verformung. Seit der ersten Veröffentlichung sind viele Verfahren anhand dieses Beispiels getestet und einige Verbesserungen erreicht worden. Die klassische Methode benötigt 1060 Berechnungen [154]. Das robuste Optimum liegt demnach bei $d = 0.08\text{m} / h = 1.00\text{m}$.

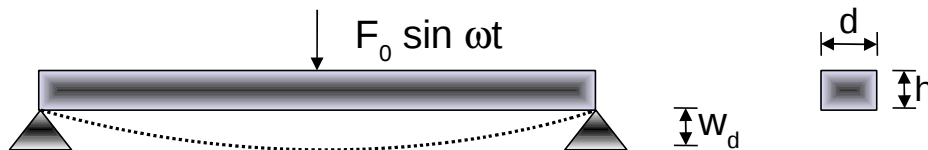


Abbildung 5.14: Prinzipskizze

Die Problembeschreibung nach [145] lautet wie folgt:

$$d \cdot h \rightarrow \min \quad (5.5)$$

mit

$$P[w_d > 0.005\text{m}] \leq 0.01$$

und

$$0 \leq d, h \leq 1[\text{m}]$$

$$F_0 \sim N(2 \cdot 10^5, 2 \cdot 10^4)[\text{N}] \quad ; \quad \omega \sim N(60, 6) \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Mit den physikalischen Rahmenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Dichte} \quad \rho &= 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \text{E-Modul} \quad E &= 3.0 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ \text{Querdehnzahl} \quad \nu &= 0.2 \\ \text{Länge} \quad L &= 10\text{m} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Aufgabe enthält damit zwei Optimierungs- und zwei stochastische Parameter. Um eine faire Vergleichbarkeit mit vorangegangenen Veröffentlichungen [145] zu gewährleisten, wird das Problem mit ARSM für die Optimierung und Adaptive Sampling on ARSM für die stochastische Auswertung gelöst (ARSM/ASonARSM) [146]. Als Startpunkt wird das deterministische Optimum ($d = 0.06\text{m} / h = 1.00\text{m}$) gewählt [145]. Wie bereits beschrieben, ist dies bei zuverlässigkeitsbasierten Aufgabenstellungen ein probates Mittel um den Aufwand zu minimieren. Ein Verschieben dieses Punktes durch Sicherheitsbeiwerte wird aus Vergleichbarkeitsgründen unterlassen. Die mögliche Dimensionsreduktion durch Setzen der Balkenhöhe auf den Maximalwert wird nicht wahrgenommen. Durch Verwendung des deterministischen Optimums als Startwert kann der

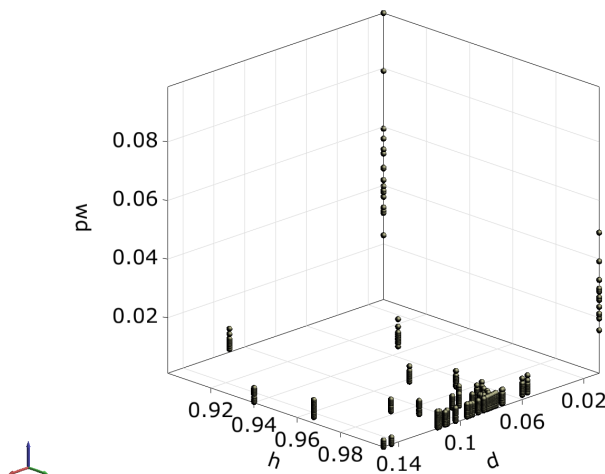


Abbildung 5.15: Berechnungen der klassischen Methode (1060 Designauswertungen)

Variationsbereich des initialen Versuchsplanes im deterministischen Subraum reduziert werden. Die Reduzierung kann vorgenommen werden, da das robuste (zuverlässige) Optimum mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Nähe des deterministischen Optimums liegt. Sollte dies nicht der Fall sein und der Optimierer andere Subräume abfragen, so wächst die Information des Stützstellensets in diesen Regionen. Das erste Füllen der Datenbasis geschieht mit 10 Latin Hypercube und 5 Koshal-Linear Designs. Damit soll gezeigt werden, dass das SampleRecycling im Gegensatz zum Beispiel in Abschnitt 5.1 auch stochastische DOEs zum initialen Füllen verwendet werden können. Um die Möglichkeit des iterativen Steigerns der Qualitätsanforderungen nachzuweisen, wird die RDO-Aufgabenstellungen in drei Stufen gelöst. Dabei werden die Parameter der Kriterien jeweils halbiert. Die Datenbasis der vorangegangenen Stufen wird wiederverwendet.

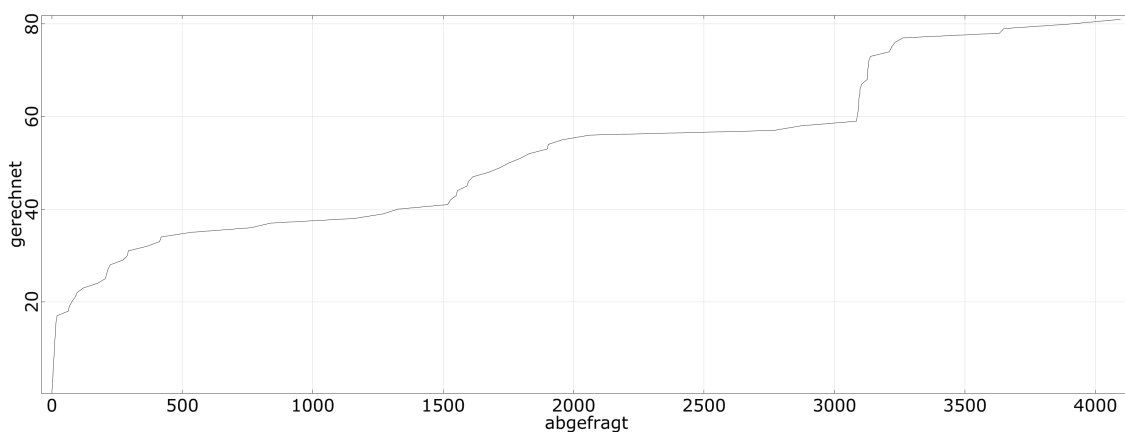


Abbildung 5.16: Abgefragte Antworten und reale Evaluationen des Balkenbeispiels ($P_f \leq 0.01$) über drei Stufen

Auf den folgenden Seiten befinden sich Abbildungen zu den ausgeführten Stufen. Zu sehen sind die Ergebnisse der Evaluationen mit steigenden Qualitätsanforderungen an das **SampleRecycling**. Dazu dienen verschiedene Elemente. Diese sollen kurz erläutert werden.

Tabelle

Die Tabelle zeigt die wichtigsten Ergebnisse des jeweiligen Schrittes. Dargestellt sind die Position des erreichten robusten Optimums, sein geschätztes Robustheitsmaß und die für das Ergebnis tatsächlich benötigten Designauswertungen.

Gerechnete Stützstellen

Mit dem Cloudplot wird eine Projektion aller ausgeführten Designauswertungen auf den deterministischen Subraum abgebildet. Da zwei Optimierungsparameter vorhanden sind, erfolgt die Projektion in die $(x - y)$ Ebene. Die Höhe eines Punktes ergibt sich aus der jeweiligen Systemantwort. Sind mehrere Punkte übereinander, bedeutet dies, dass für ein deterministisches Design verschiedene Evaluationen im stochastischen Subraum nötig waren. Es entstehen die beschriebenen Hyperlinien.

Bestes Design

Die Abbildung zeigt die Einstellungen der Inputparameter des erreichten Optimums. Die Darstellung erfolgt als Balkendiagramm. Dazu sind die Werte basierend auf den Grenzen des Optimierungsproblems zwischen 0% und 100% normiert. Zu sehen ist damit die Lage des Optimums und inwieweit die gesetzten Limits ausgenutzt werden. In einem Ingenieurproblem kann beispielsweise das Erreichen von 0% oder 100% zum Überdenken der Randbedingungen führen.

Systemantworten

In dieser Darstellung sind die Systemantworten des robusten Optimums zu sehen. Zusätzlich wird das Qualitätsmaß dieses Designs angegeben. Ähnlich zu den Abbildungen des besten Designs ist das Balkendiagramm zwischen 0% und 100%, bezogen auf die durch alle (abgefragten) Evaluationen beschriebenen Grenzen, normiert. Als Optimierungsverfahren wurde ARSM verwendet. Daher sind die Resultate der Approximation den abgefragten Ergebnissen gegenübergestellt. Im Allgemeinen sind diese Werte bei der klassischen Vorgehensweise nach Konvergenz des Verfahrens (fast) gleich.

Auswertung

Die Ergebnisse eines mehrstufigen Prozesses müssen in ihrer Entwicklung betrachtet werden. Laut den Annahmen in Kapitel 4 verfeinert sich das Stützstellenset im untersuchten Bereich. Dadurch wird eine höhere Approximationsgüte in diesem Teilraum erzielt. Die Ergebnisse nähern sich durch die iterative Steigerung der Qualitätsanforderungen mit jedem Schritt an die Resultate der klassischen Vorgehensweise an. Die Gültigkeit der Thesen kann somit überprüft werden.

1. Stufe

Balkenbreite d	0.083 m
Balkenhöhe h	0.995 m
Versagenswahrscheinlichkeit P_f	0.008
Designauswertungen zusätzlich	25
Designauswertungen gesamt	<u>40</u>

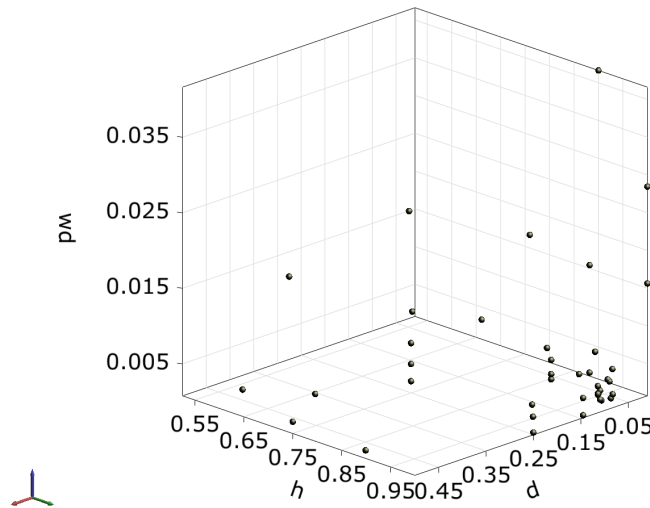


Abbildung 5.17: Gerechnete Stützstellen des Balkenbeispiels $P_f \leq 0.01$ (1. Stufe)

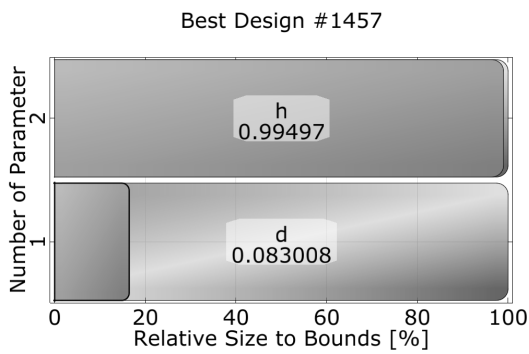


Abbildung 5.18: Bestes Design

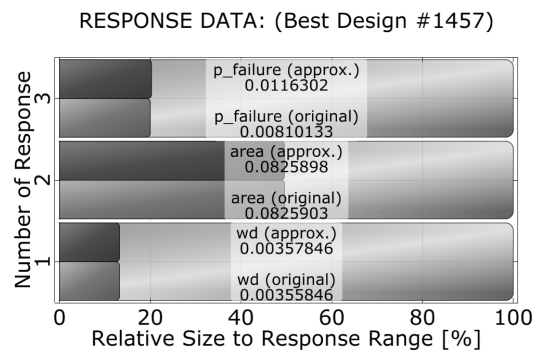


Abbildung 5.19: Systemantworten

2. Stufe

Balkenbreite d	0.081 m
Balkenhöhe h	1.0 m
Versagenswahrscheinlichkeit P_f	0.0097
Designauswertungen zusätzlich	18
Designauswertungen gesamt	<u>58</u>

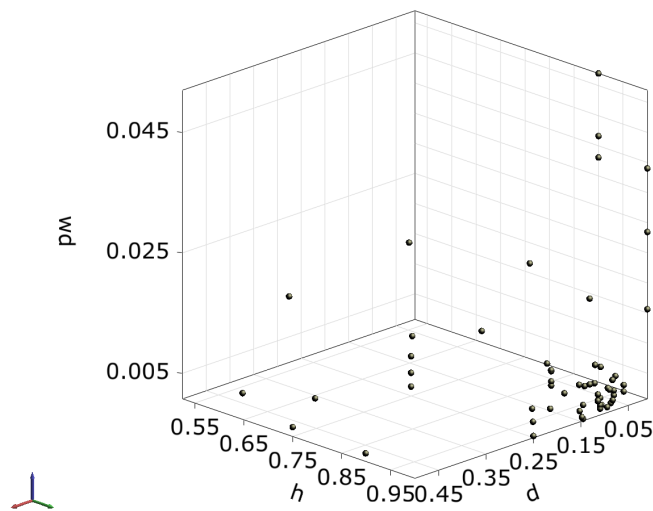
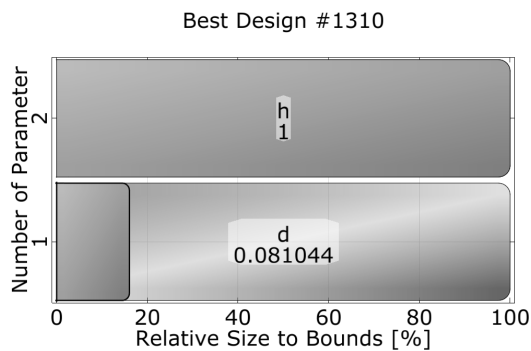
Abbildung 5.20: Gerechnete Stützstellen des Balkenbeispiels $P_f \leq 0.01$ (2. Stufe)

Abbildung 5.21: Bestes Design

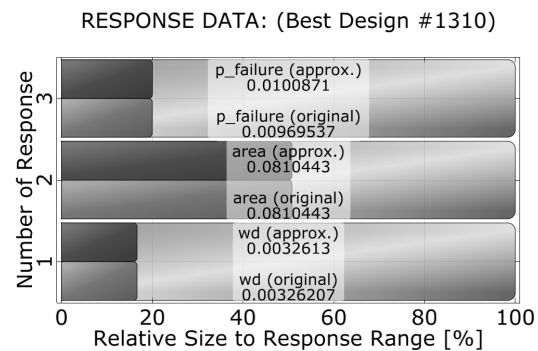


Abbildung 5.22: Systemantworten

3. Stufe

Balkenbreite d	0.080 m
Balkenhöhe h	1.0 m
Versagenswahrscheinlichkeit P_f	0.0096
Designauswertungen zusätzlich	23
Designauswertungen gesamt	<u>81</u>

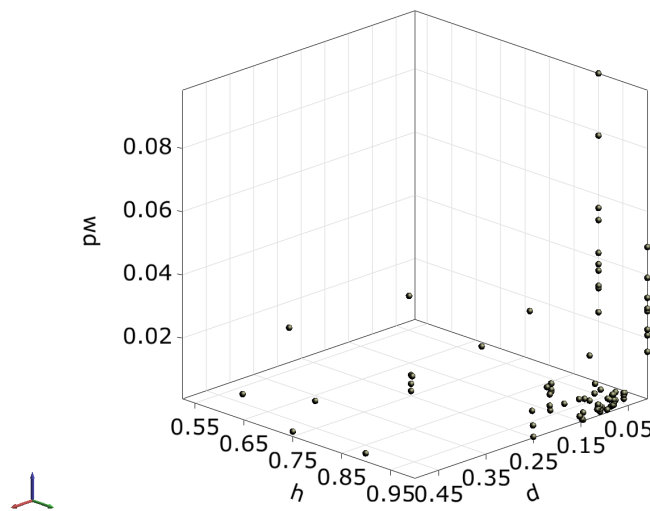


Abbildung 5.23: Gerechnete Stützstellen des Balkenbeispiels $P_f \leq 0.01$ (3. Stufe)

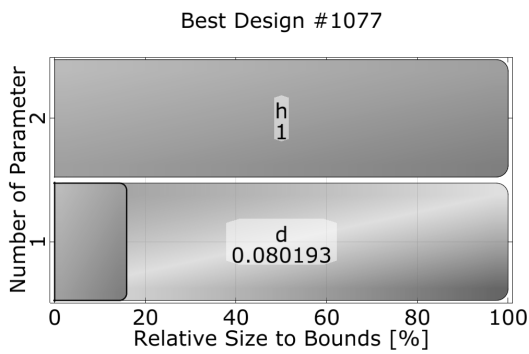


Abbildung 5.24: Bestes Design

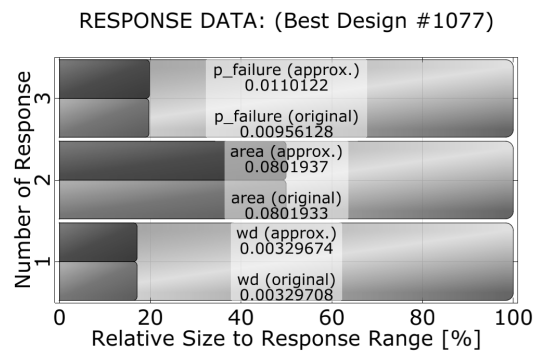


Abbildung 5.25: Systemantworten

Geringe Versagenswahrscheinlichkeit

Um die Anwendbarkeit auf wesentlich geringere Versagenswahrscheinlichkeiten nachzuweisen, wird das selbe Beispiel mit gleicher Einstellung in den gleichen 3 Schritten ausgeführt. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wird die vorhandene Datenbasis aus dem vorangegangenen Beispiel nicht geladen. Es sei hier angemerkt, dass dies möglich gewesen wäre. Erzielbare Synergieeffekte können aus den Tabellen im Anhang (A.4 und A.5) hergeleitet werden. Die Problembeschreibung der Gleichungen 5.5 und 5.6 wird in der Nebenbedingung geändert.

$$P[w_d > 0.005\text{m}] \leq 3.4 \cdot 10^{-6} \quad (5.7)$$

Um realistische Anwendungen zu simulieren, wird nicht von unbegrenzten Ressourcen ausgegangen. Daher gibt das klassische Verfahren keine eindeutige Lösung an. Bei konstanter Höhe (1.00m) schwankt die Breite des robusten Optimums zwischen $d = 0.13\text{m}$ (Abb. 5.28) bis $d = 0.18\text{m}$ (Abb. 5.29). Die Ausfallwahrscheinlichkeiten sind mit Werten zwischen 0 und 10^{-7} beziffert. Die Ursachen sind im Schätzfehler des Zuverlässigkeitsverfahren zu finden. Zudem ist das Schätzen geringer Ausfallwahrscheinlichkeiten mit einem hohen relativen Fehler versehen. Die Anzahl notwendiger Evaluationen lag, in Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens, zwischen 400 und 1000 Designs. Die Unabhängigkeit des Aufwandes (s.o.) vom Sicherheitsniveau ist im Wesentlichen auf das verwendete Zuverlässigkeitsverfahren (ASonARSM) zurückzuführen. Das erste DOE der adaptiven Antwortfläche nimmt dabei die erwartete Ausfallwahrscheinlichkeit als Grundlage für seine Ausdehnung. Die analytische Lösung liegt ungefähr bei $d = 0.15\text{m}$ und $h = 1.00\text{m}$. Die erreichten Werte liegen in deren Toleranzbereich. Die Auswertung erfolgt wie im vorangegangenen Beispiel. Bei der Bewertung der folgenden Ergebnisse müssen Schätzungenauigkeiten der angegebenen Versagenswahrscheinlichkeiten beachtet werden.

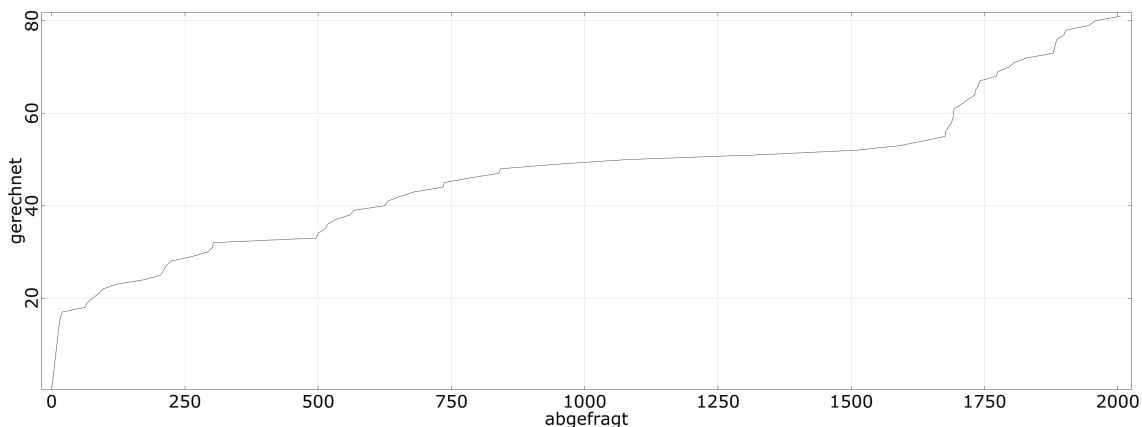


Abbildung 5.26: Abgefragte Antworten und reale Evaluationen des Balkenbeispiels ($P_f \leq 3.4 \cdot 10^{-6}$) über drei Stufen

Klassische Doppelschleife

Balkenbreite d	0.13 - 0.18 m
Balkenhöhe h	1.0 m
Versagenswahrscheinlichkeit P_f	$0.0 - 10^{-7}$
Designauswertungen insgesamt	400 - 1000

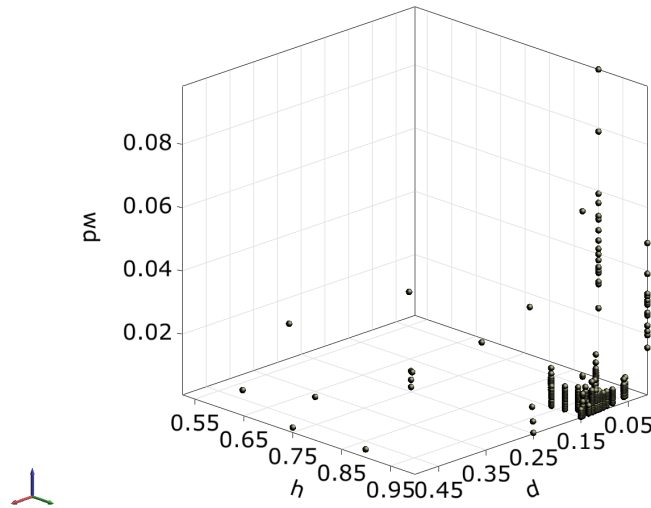


Abbildung 5.27: Gerechnete Stützstellen

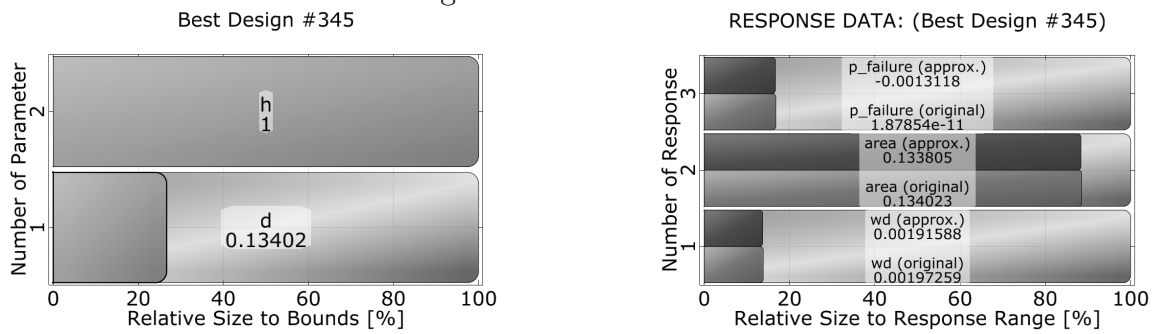


Abbildung 5.28: Bestes Design und Systemantworten klassische Lösung I

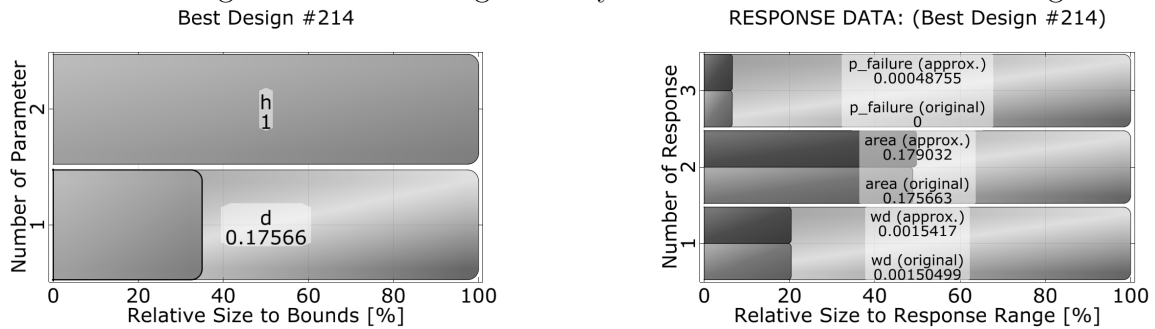


Abbildung 5.29: Bestes Design und Systemantworten klassische Lösung II

1. Stufe

Balkenbreite d	0.129 m
Balkenhöhe h	1.0 m
Versagenswahrscheinlichkeit P_f	1.310^{-9}
Designauswertungen zusätzlich	17
Designauswertungen gesamt	<u>32</u>

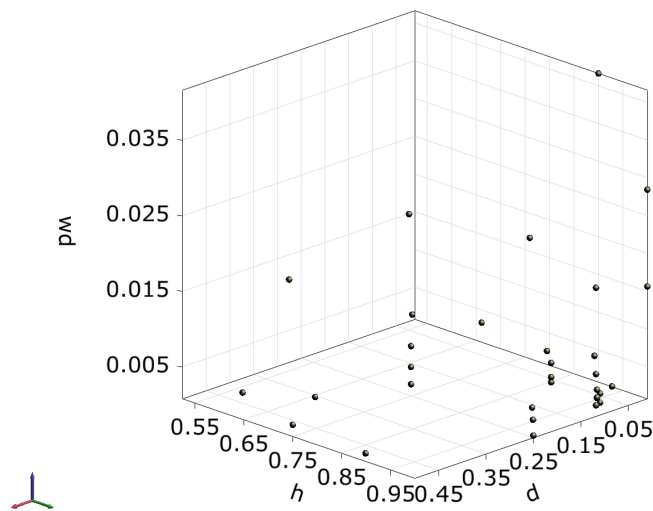
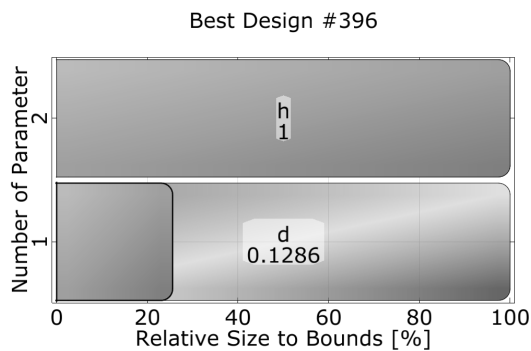
Abbildung 5.30: Gerechnete Stützstellen des Balkenbeispiels $P_f \leq 3.4 \cdot 10^{-6}$ (1. Stufe)

Abbildung 5.31: Bestes Design

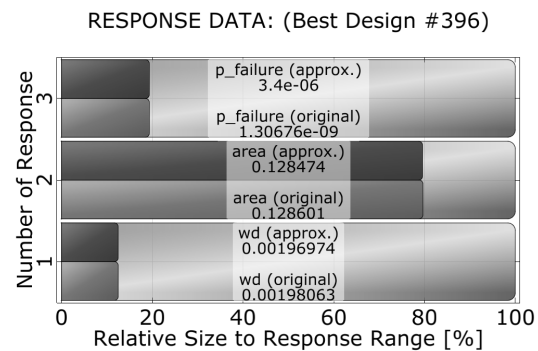


Abbildung 5.32: Systemantworten

2. Stufe

Balkenbreite d	0.109 m
Balkenhöhe h	1.0 m
Versagenswahrscheinlichkeit P_f	$3.88 \cdot 10^{-11}$
Designauswertungen zusätzlich	22
Designauswertungen gesamt	<u>54</u>

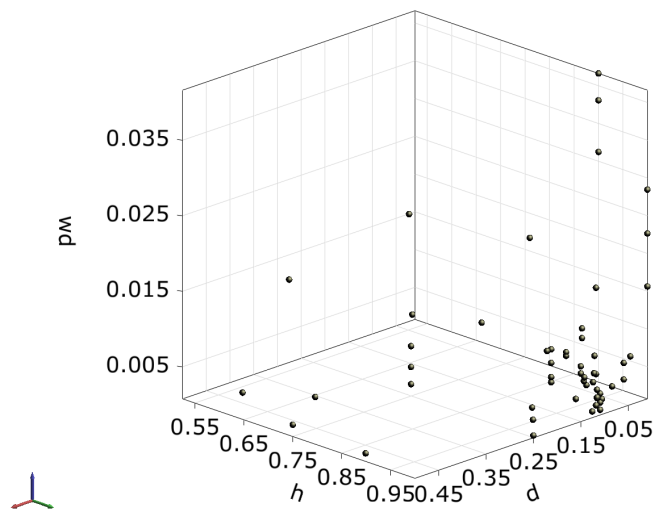
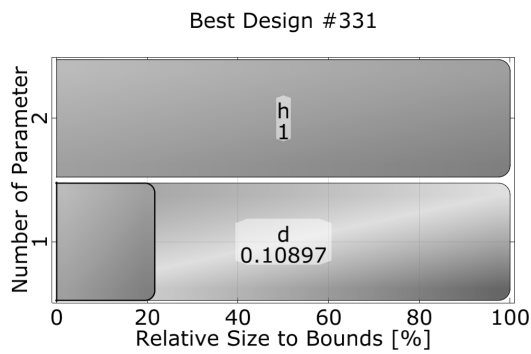
Abbildung 5.33: Gerechnete Stützstellen des Balkenbeispiels $P_f \leq 3.4 \cdot 10^{-6}$ (2. Stufe)

Abbildung 5.34: Bestes Design

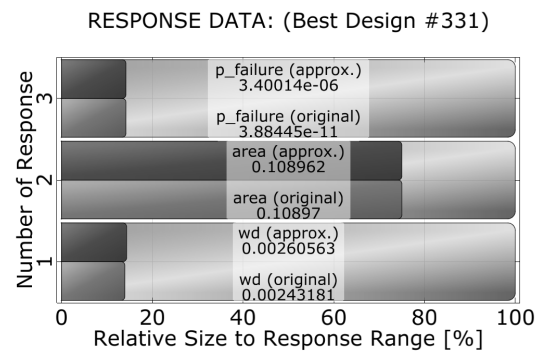


Abbildung 5.35: Systemantworten

3. Stufe

Balkenbreite d	0.158 m
Balkenhöhe h	1.0 m
Versagenswahrscheinlichkeit P_f	0
Designauswertungen zusätzlich	27
Designauswertungen gesamt	<u>81</u>

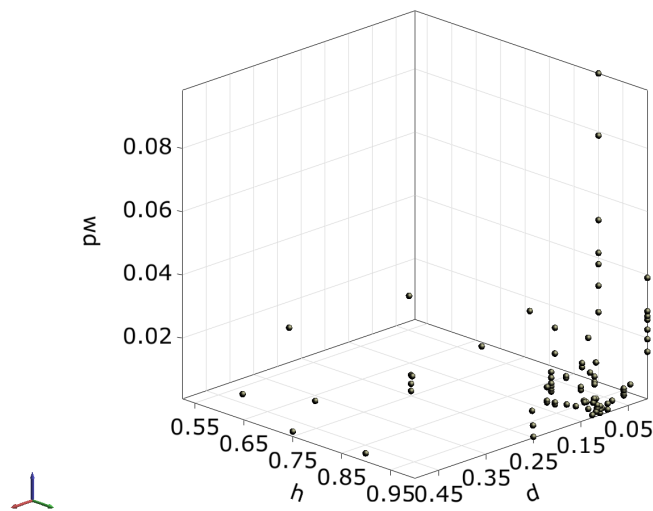
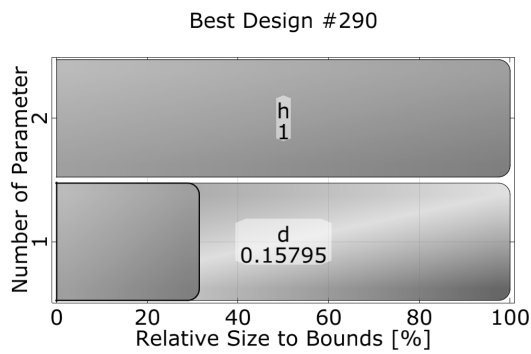
Abbildung 5.36: Gerechnete Stützstellen des Balkenbeispiels $P_f \leq 3.4 \cdot 10^{-6}$ (3. Stufe)

Abbildung 5.37: Bestes Design

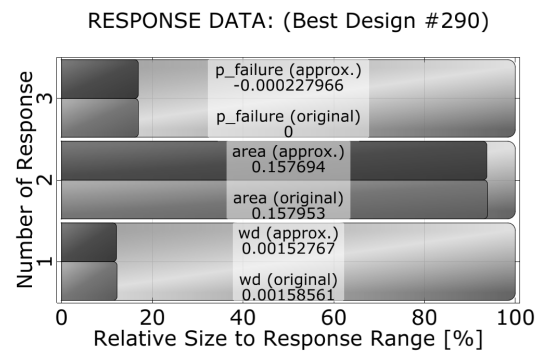


Abbildung 5.38: Systemantworten

5.3 Hochdimensionales analytisches Beispiel

Eine der größten Schwächen von Antwortflächenverfahren besteht in der deutlich schwierigeren Anwendung für Probleme höherer Dimensionalität. Aus diesem Grund wurde ein analytisches Beispiel entwickelt, welche solche Aufgaben repräsentieren soll. Der erste Teil der Aufgabenstellung wird durch die für Benchmarks von Optimierungsverfahren gebräuchliche Rosenbrockfunktion [147] definiert. Ergänzt wird der Ausdruck durch die Formulierung der Hyperebene [126], welche häufig zum Test von Zuverlässigkeitsverfahren verwendet wird. Die Problembeschreibung ergibt sich aus einer Kombination der beiden Anteile. Es gilt die n -dimensionale Rosenbrockfunktion zu minimieren, ohne das eine Versagenswahrscheinlichkeit überschritten wird. Die Versagenswahrscheinlichkeit basiert auf einer Kombination der n -Parameter mit der m -dimensionalen Hyperebene.

Rosenbrockfunktion:

$$\text{rosenB}(d_1, \dots, d_n) = \sum_{i=1}^{n-1} [(1 - d_i)^2 + 100(d_{i+1} - d_i^2)^2] \quad (5.8)$$

$$-2.4 \leq d_i \leq 2.4$$

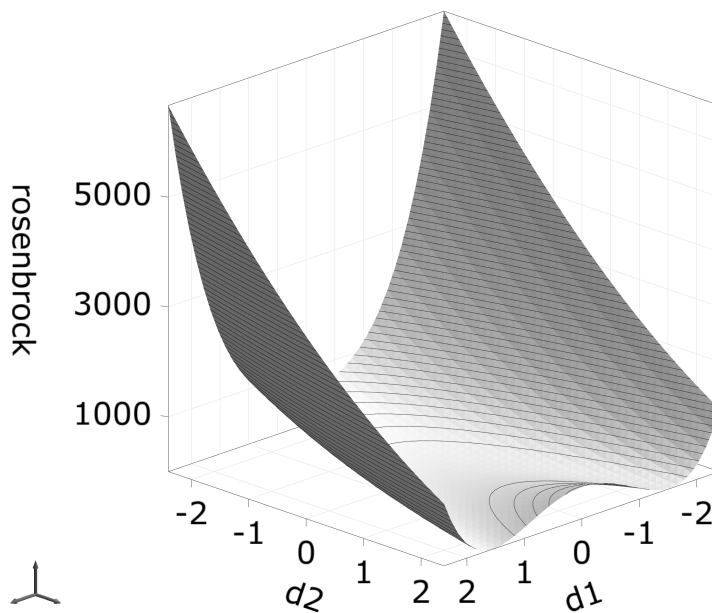


Abbildung 5.39: Rosenbrockfunktion

Das globale Optimum liegt bei $d_i = 1; \quad i = 1 \dots n$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist 0. Ein lokales Minimum befindet sich bei $d_1 = -1, \quad d_i = 1; \quad i = 2 \dots n$. Da sich in einem RDO-Problem die Aufwände für Optimierung und stochastische Auswertung multiplizieren, kann der Optimierer nicht mit den üblichen Ressourcen arbeiten. Somit ist nicht zu erwarten, dass das globale Minimum mit hoher Genauigkeit erreicht werden kann.

Hyperebene:

$$\text{hyper}P(\beta, p_1, \dots, p_m) = \beta\sqrt{m} - \sum_{i=1}^m p_i \quad (5.9)$$

$$p_i \sim N(0, 1)$$

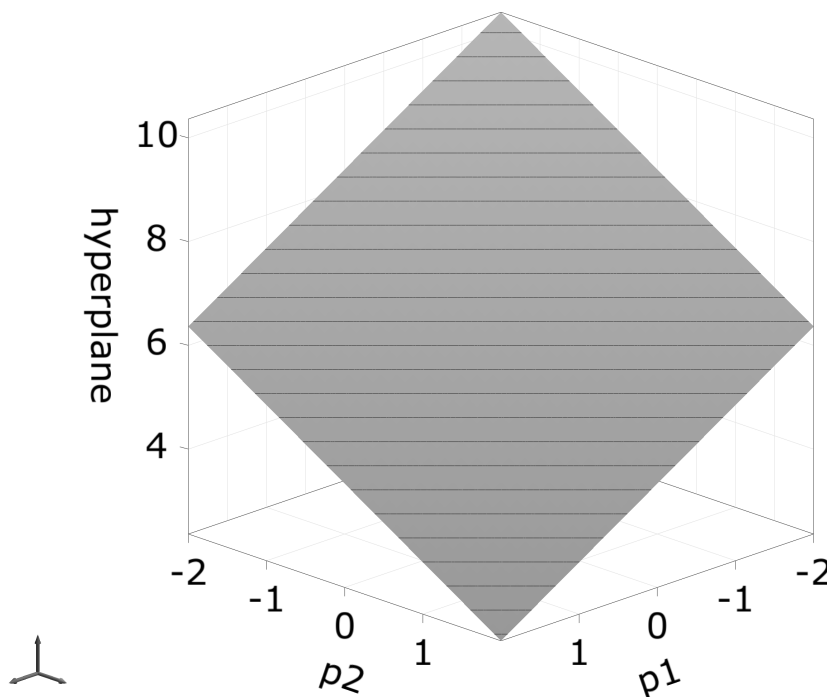


Abbildung 5.40: Hyperebene

Daraus ergibt sich die analytische Versagenswahrscheinlichkeit:

$$P[\text{hyper}P(\beta, p_1, \dots, p_m) < 0] = \Phi^{-1}(-\beta) \quad (5.10)$$

Die RDO-Aufgabenstellung definiert sich wie folgt:

$$\text{rosen}B(d_1, \dots, d_n) \rightarrow \min \quad (5.11)$$

$$P[\text{hyper}P(\beta, p_1, \dots, p_m) + \sqrt{m}(d_1) < 0] \leq 3.4 \cdot 10^{-6} \approx \Phi^{-1}(-4.5) \quad (5.12)$$

und

$$\begin{aligned} \beta &= 3.6 \\ -2.4 &\leq d_i \leq 2.4 \\ p_i &\sim N(0, 1) \\ m &= n = 5 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Als Folge der Kopplung wird die Formulierung der Hyperebene um einen Korrekturwert verschoben. Durch Umstellen von Gleichung 5.9 folgt:

$$(\beta + d_1)\sqrt{m} - \sum_{i=1}^m p_i \quad (5.14)$$

Mit Gleichung 5.10 ergibt sich dadurch:

$$P[\text{hyper}P(\beta, p_1, \dots, p_m) + \sqrt{m}(d_1) < 0] = \Phi^{-1}(-\beta - d_1) \quad (5.15)$$

Die exemplarische Problembeschreibung enthält somit 5 deterministische und 5 stochastische Parameter, der Gesamttraum ist 10-dimensional. Mit den für die Aufgabenstellung geltenden Werten sind das deterministische und das robuste Optimum an der selben Stelle zu finden. Die analytische Ausfallwahrscheinlichkeit liegt für diesen Punkt bei $2.12 \cdot 10^{-6}$. Der Suchraum wird durch die Nebenbedingung lediglich eingeschränkt. Auch aus diesem Grund wird die Optimierung nicht im Minimum einer deterministischen Suche gestartet. Ein weiterer Grund ist der Aufwand für die Suche dieses Punktes und das verwendete Optimierungsverfahren. Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt ähnlich dem Beispiel in Abschnitt 5.2 (Seite 105).

Klassische Optimierung ohne SampleRecycling

Die Optimierung wird mit einer Doppelschleife ausgeführt. Als Optimierer wird ein Evolutionärer Algorithmus (EA) [126] mit maximaler Populationsgröße 10 und maximal 40 Generationen verwendet. Die stochastische Auswertung erfolgt über Adaptive Sampling on ARSM. Nach 12935 Auswertungen stoppt der Optimierer in diesem Beispiel. Wie Abb. 5.41 zeigt, ist das Ergebnis der stochastischen Auswertung mit einem

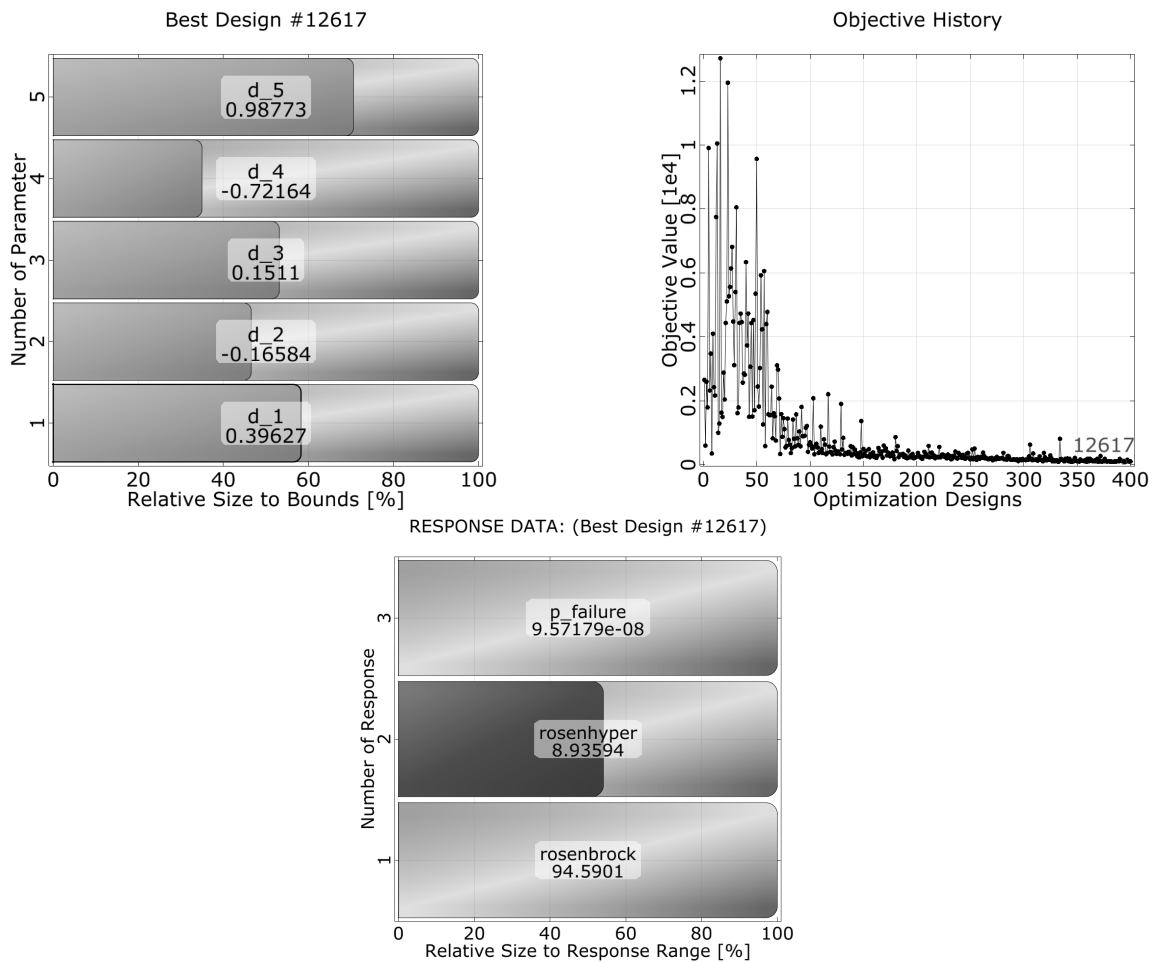


Abbildung 5.41: Ergebnisse der Optimierung

hohen Schätzfehler behaftet. Die analytische Versagenswahrscheinlichkeit für den angegebenen Punkt ist $3.3 \cdot 10^{-5}$. Das erhaltene Design ist damit um eine Zehnerpotenz unsicherer als gefordert. In der klassischen Zuverlässigkeitsanalyse gilt dies als akzeptabel. Mit den verwendeten Verfahren ist eine höhere Genauigkeit als die erzielte nur durch nicht vertretbaren Umfang zu realisieren. Methoden, welche optimal zum linearen Verlauf der Grenzzustandsfunktion passen, können bessere Ergebnisse mit geringerem Aufwand liefern. Dieses Wissen ist jedoch im Allgemeinen a priori nicht vorhanden. Deshalb werden praktisch relevante Methoden und Einstellungen gewählt. Bei der Bewertung der folgenden Ergebnisse müssen Ungenauigkeiten der Versagenswahrscheinlichkeitsschätzung beachtet werden.

Optimierung mit SampleRecycling

Die RDO-Aufgabenstellung wird mit den gleichen Einstellungen gelöst. Dabei werden die Qualitätsanforderungen in 5 Stufen gesteigert. Unter Wiederverwendung der Datenbasis vorangegangener Stufen werden die Parameter der Entscheidungskriterien halbiert. Die Anzahl abgefragter Systemantworten beläuft sich in diesem Beispiel für 5 Stufen insgesamt auf ≈ 50000 . Mit einem initialen Stützstellen set von 50 Latin Hypercube Designs werden 311 tatsächliche Evaluationen benötigt. Das Konvergieren gegen eine Gerade (Abb. 5.42) mit Anstieg $\neq 0$ resultiert aus dem Redundanzkriterium.

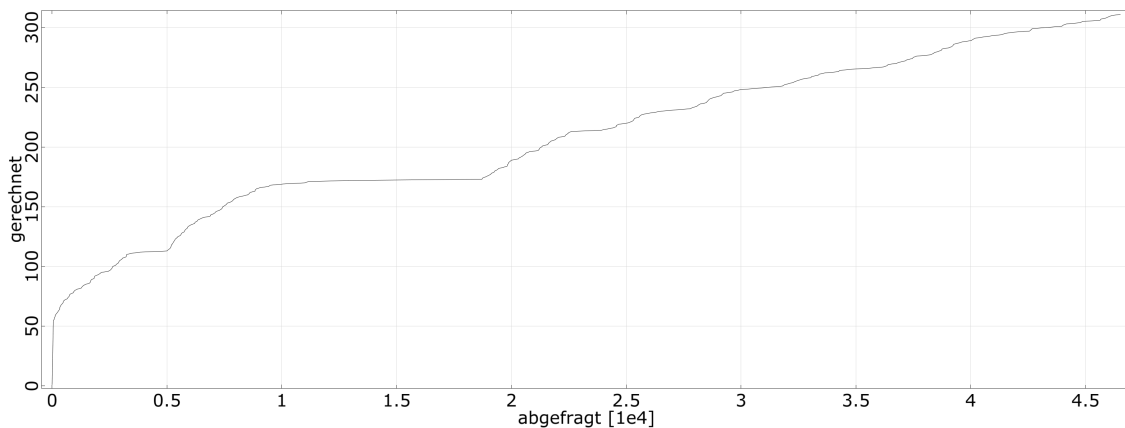


Abbildung 5.42: Abgefragte Antworten und reale Evaluationen über 5 Stufen

1. Stufe

Designauswertungen	zusätzlich / angefordert	62 / 4725
Designauswertungen	insgesamt	112

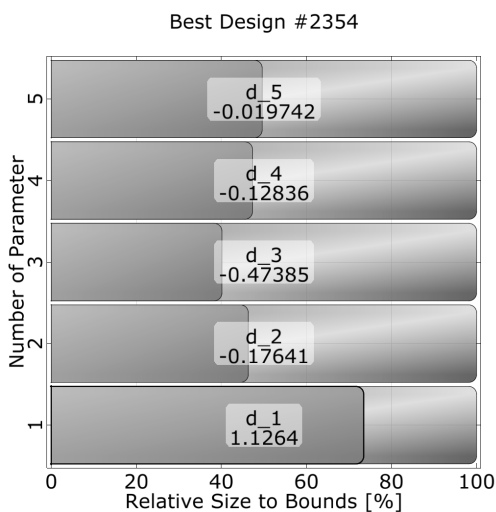


Abbildung 5.43: Bestes Design

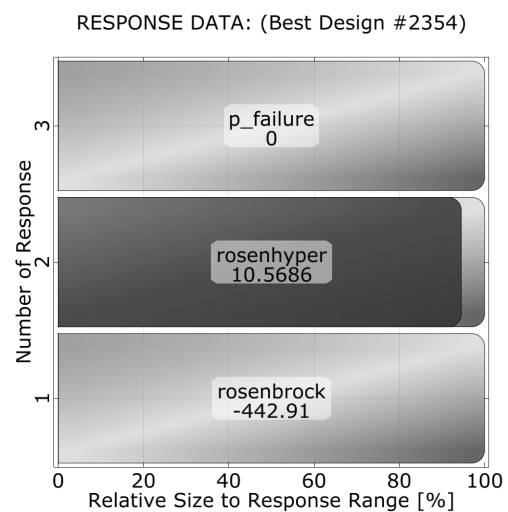


Abbildung 5.44: Systemantworten

2. Stufe

Designauswertungen	zusätzlich / angefordert	60 / 13592
Designauswertungen	insgesamt	<u>172</u>

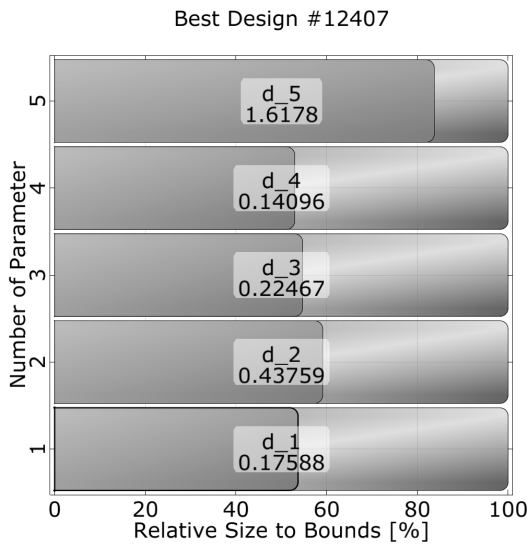


Abbildung 5.45: Bestes Design

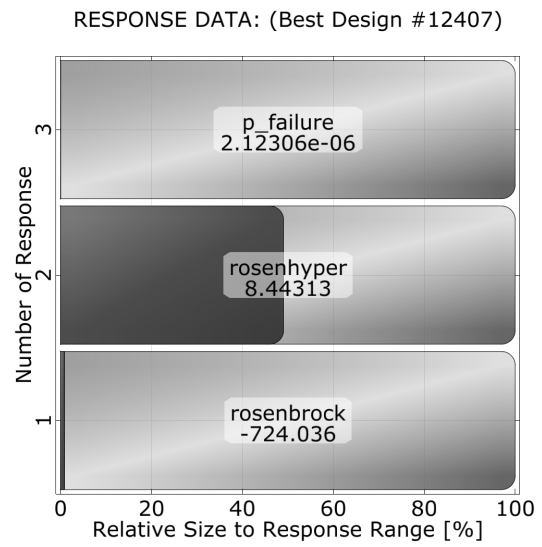


Abbildung 5.46: Systemantworten

3. Stufe

Designauswertungen	zusätzlich / angefordert	40 / 5016
Designauswertungen	insgesamt	<u>212</u>

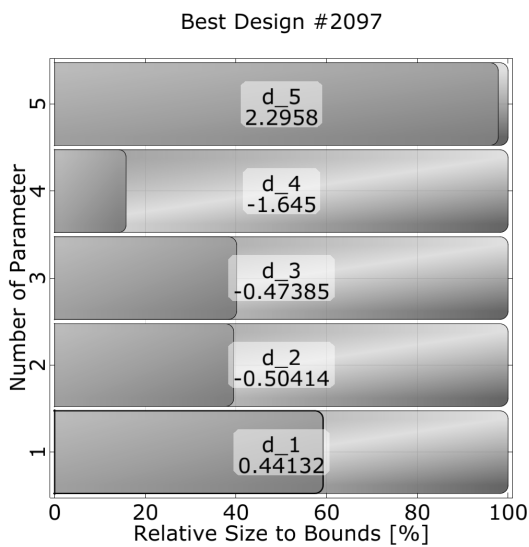


Abbildung 5.47: Bestes Design

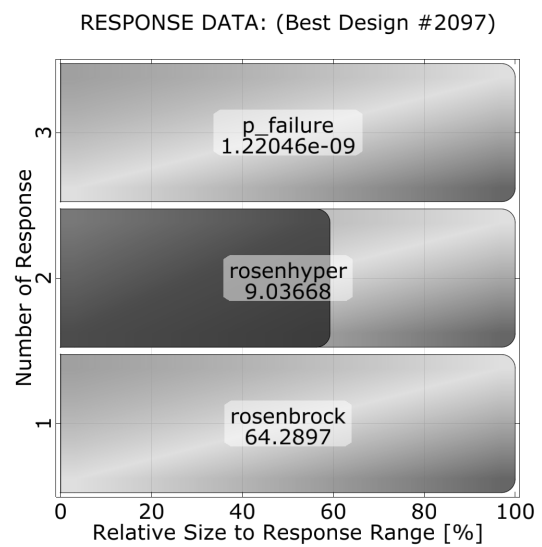


Abbildung 5.48: Systemantworten

4. Stufe

Designauswertungen	zusätzlich / angefordert	53 / 12527
Designauswertungen	insgesamt	<u>265</u>

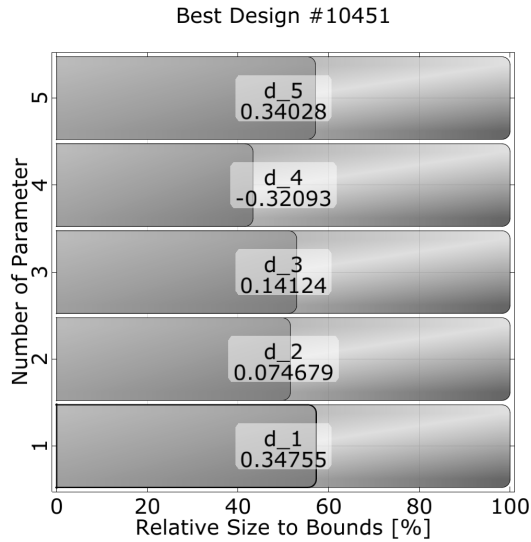


Abbildung 5.49: Bestes Design

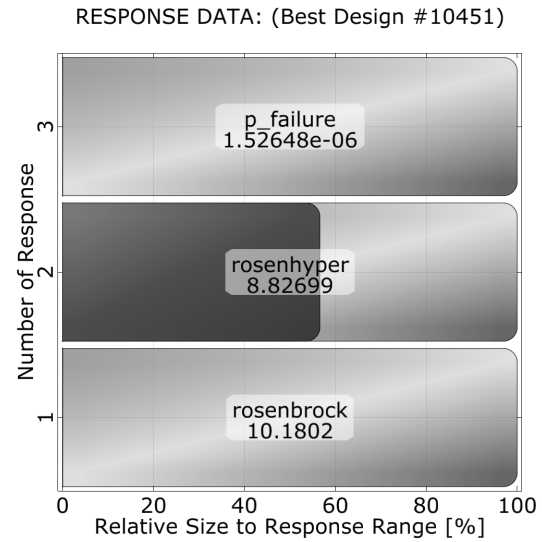


Abbildung 5.50: Systemantworten

5. Stufe

Designauswertungen	zusätzlich / angefordert	46 / 12716
Designauswertungen	insgesamt	<u>311</u>

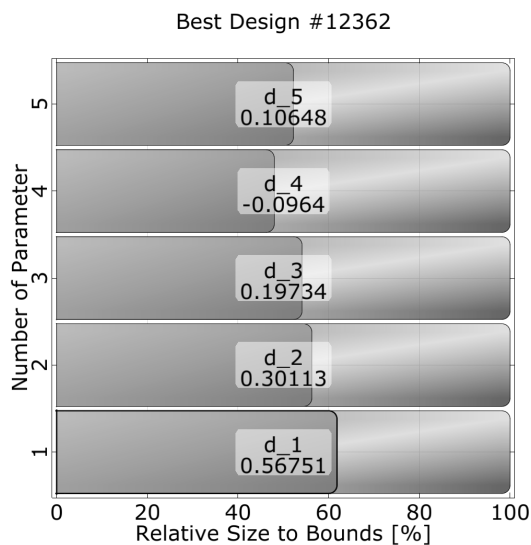


Abbildung 5.51: Bestes Design

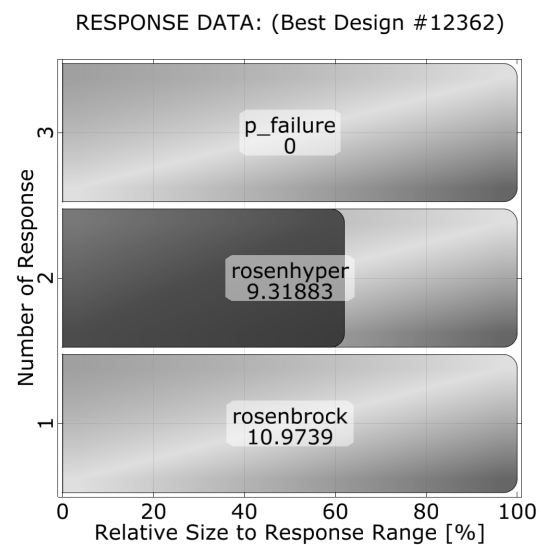


Abbildung 5.52: Systemantworten

5.4 Falltest

Die Funktionsfähigkeit der vorgestellten Methodik wird schließlich anhand eines praktischen Beispiels validiert. Dazu wird der Falltest eines realen Produktes simuliert. Da aber die Simulation für ein Grobmodell mit herkömmlichen expliziten Solvern und gewöhnlicher Hardware zu zeitaufwendig und für feine Netze nahezu unmöglich ist, kommt eine speziell für diese Anwendung entwickelte Software zum Einsatz. Diese reduziert durch modale Projektion den Rechenaufwand erheblich, wobei die entscheidenden Deformationsbilder ausreichend genau abgebildet werden [22]. So wird es möglich, die Berechnungen in einem angemessenen Zeitrahmen zu realisieren. Mit der beschriebenen Reduktion geht ein (Meta-) Modellierungsfehler einher. Untersuchungen haben gezeigt, dass das Solverrauschen für ermittelte Spannungen und Verformungen nahezu konstante Amplituden aufweist. Bei der Untersuchung von Versagenszuständen sind nur maximale Spannungen von Interesse. Der relative Fehler für kritische Zustände ist daher gering, die Modellbildung gilt als akzeptabel. Weil das Strukturverhalten während des Falltests (hochgradig) nichtlinear ist und Solverrauschen auftritt, kann dieses Beispiel als Test für die vorgestellte Methodik verwendet werden.

Suche einer kritischen Fallposition

Zunächst wird eine kritische Fallsituation für die Struktur gesucht. Dazu wird die Maximalspannung innerhalb der Struktur in Abhängigkeit von der Fallposition maximiert. Diese Beschreibung enthält drei Komponenten des Rotationsvektors und einen Wert für den Drehwinkel. Zur Reduktion des Parameterraumes wird sie in eine dreidimensionale Beschreibung umgewandelt. Diese nutzt lediglich die drei Eulerwinkel r_x, r_y, r_z .

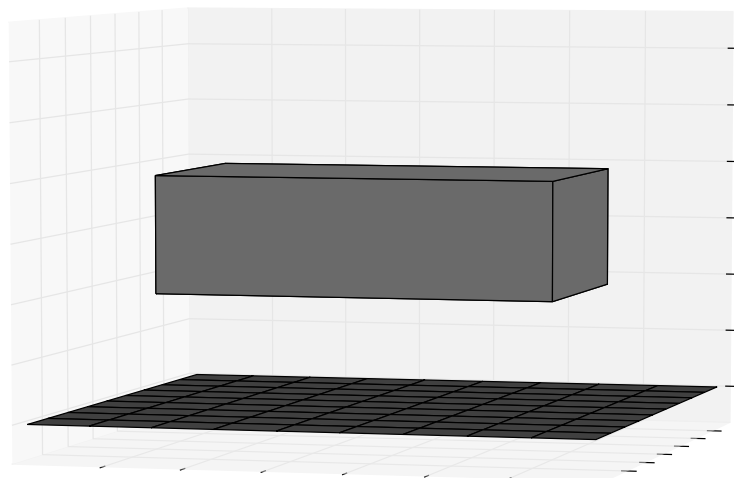


Abbildung 5.53: Prinzipskizze Fallsituation - Nulllage

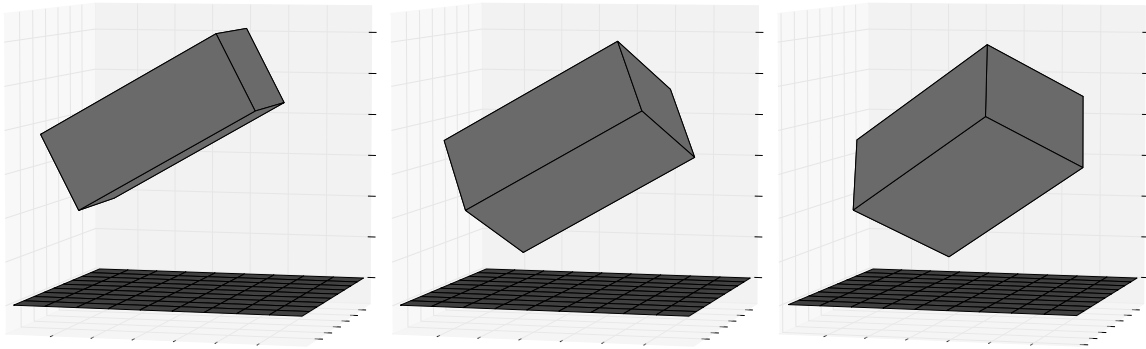


Abbildung 5.54: Sequentielles Drehen um die X-,Y- und Z-Achse mit r_x, r_y, r_z

Die Optimierungsaufgabe definiert sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \max(\sigma_{mises}) &\rightarrow \max & (5.16) \\ \text{mit} & & \\ & 0 \leq r_x \leq 2\pi & \\ & 0 \leq r_y \leq 2\pi & \\ & 0 \leq r_z \leq 2\pi & \end{aligned}$$

Die auftretende Redundanz in der Problembeschreibung wird zur Überprüfung des Solvers genutzt. Zur Lösung der Aufgabenstellung dient ein Latin Hypercube Sampling mit 50 Stichproben. Durch spezielle Vereinfachung, welche durch den verwendeten Solver möglich ist, kann eine Berechnung in ≈ 30 Minuten ausgeführt werden. Abbildung 5.55 zeigt die Position aller gerechneten Designs.

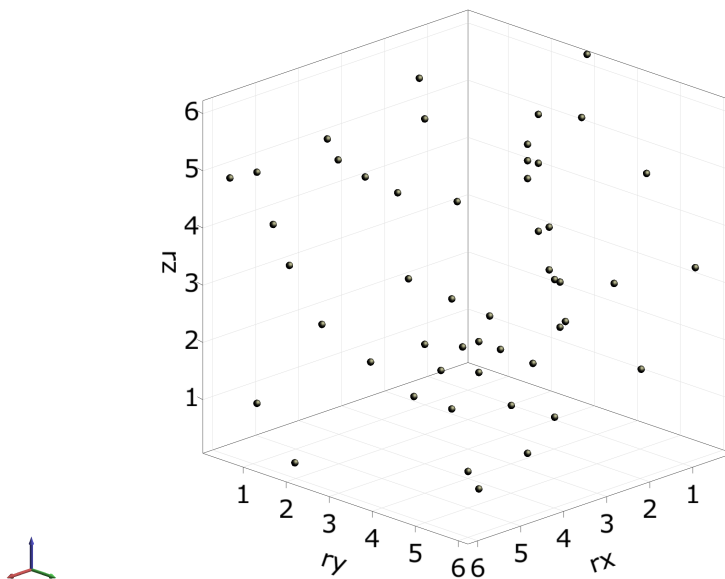


Abbildung 5.55: Cloudplot der untersuchten Varianten (LHS)

Die gesamte Evaluationszeit beträgt ≈ 26 Stunden auf einer herkömmlichen Workstation. Der Aufbau einer Antwortfläche im Anschluss ist nur bedingt möglich. Gründe dafür sind in der komplexen Parametrik eines Falltests zu finden. Die Ergebnisse des Versuchsplanes mussten einzeln betrachtet und bewertet werden. Die kritische Fallposition befindet sich demnach bei:

$$\begin{aligned} r_x &= 1.06 \\ r_y &= 1.32 \\ r_z &= 3.46 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Bei den globalen Untersuchungen traten Systemantworten auf, welche physikalisch nicht sinnvoll waren. Diese wurden nach Betrachtung der Ergebnisse durch Ingenieurwissen aussortiert. Gründe dafür können beispielsweise in der Detektion des Kontaktes liegen. Für lokale Ereignisse ließen sich Einstellungen finden, welche einen stabileren Charakter der Resultate lieferten. Abbildung 5.56 stellt das Prinzip der kritischen Fallsituation dar. Die unterschiedlichen Graustufen sollen dabei die Verteilung einer beobachteten Systemantwort (z.B. Spannungsverteilung) über die Struktur repräsentieren.

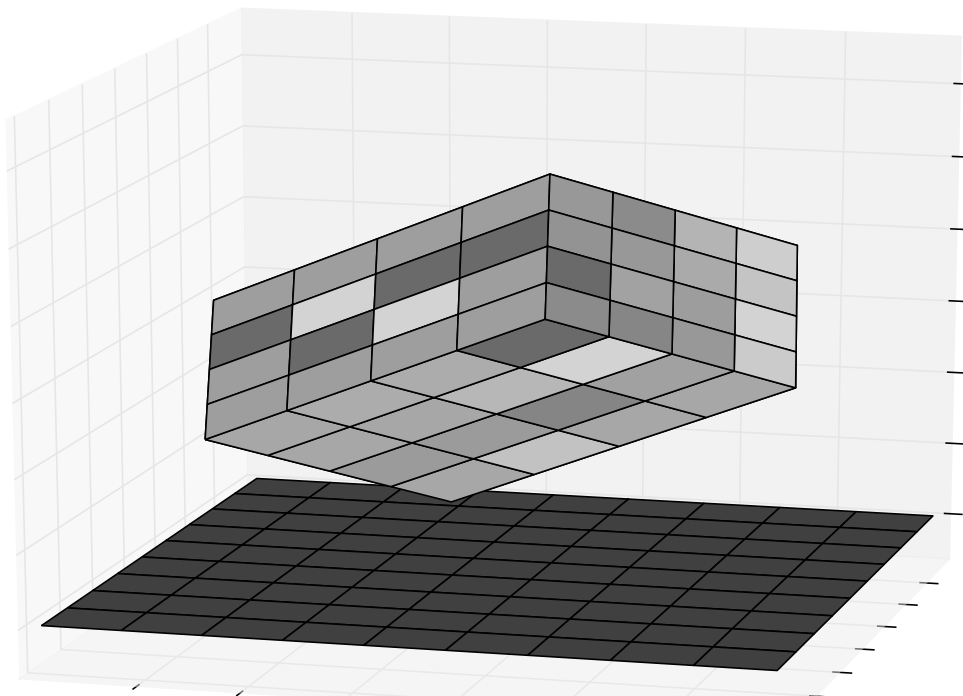


Abbildung 5.56: Prinzipskizze der kritischen Fallsituation

Optimierung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten

Bei der vorangegangenen Untersuchung stellte sich heraus, dass die höchsten Spannungen in drei Teilbereichen auftraten. Andere Teilbereiche konnten aufgrund ihrer physikalischen Eigenschaften als unkritisch betrachtet werden. Die zugehörigen E-Moduln können im gegebenen Rahmen variiert werden, um ein zuverlässigeres Produkt zu entwerfen. Dazu werden die maximalen (von Mises) Spannungen minimiert. In weichen Strukturen treten geringere Spannungen aber auch die größten Verformungen auf. Daraus resultiert die Begrenzung der maximalen Verformung, um die Gebrauchstauglichkeit des Produktes garantieren zu können. Die Problembeschreibung lautet nach Normierung der dynamischen Eigenschaften, Verformungen und Spannungen in einen Bereich $0 \dots 1000$:

$$\max(\mu_{\sigma_{mises_i}} + 3\sigma_{\sigma_{mises_i}}) \rightarrow \min \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.18)$$

mit

$$\max(|u|) \leq 1000 \quad (5.19)$$

und

$$100 \leq E_i \leq 1000 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.20)$$

$$r_x \sim N\left(1.06, \frac{\pi}{12}\right)$$

$$r_y \sim N\left(1.32, \frac{\pi}{12}\right)$$

$$r_z \sim N\left(3.46, \frac{\pi}{12}\right)$$

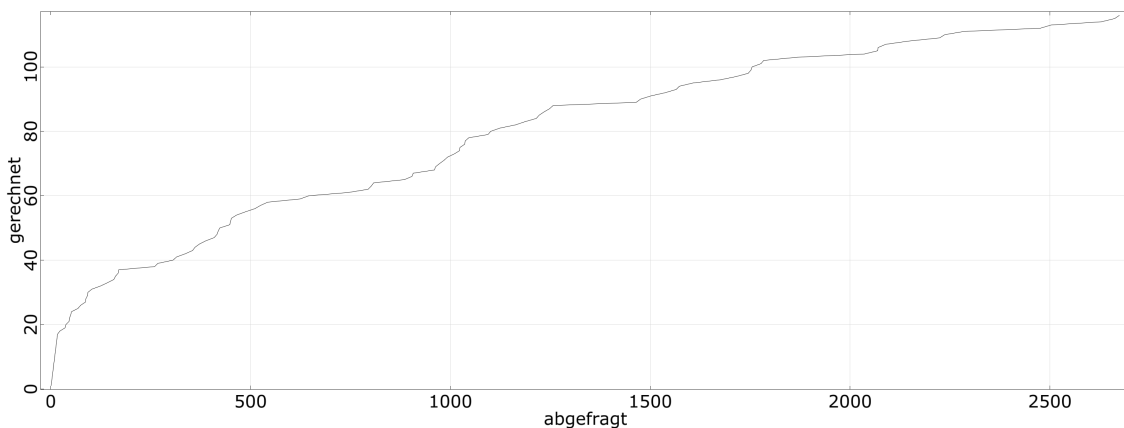


Abbildung 5.57: Abgefragte Antworten und reale Evaluationen des Falltests

Die Rotationen werden normalverteilt um die ermittelte kritische Fallsituation angenommen. Auf eine Anwendung der, üblicherweise für zyklische Ereignisse zum Einsatz

kommenden, von Mises Verteilung wird verzichtet, da die Wahrscheinlichkeit, einen Zyklus zu beschreiben, gegen 0 geht. Aufgrund der Erfahrungen aus den vorangegangenen Beispielen umfasst das initiale Stützstellenset 10 Latin Hypercube und 7 Koshal-linear Designs. Die Doppelschleife nutzt ARSM als Optimierer und 25 Latin Hypercube Stichproben zur Gewinnung des Robustheitsmaßes. Mit diesen Einstellungen werden 2681 Systemantworten abgefragt. Das Konvergenzverhalten des Optimierers hinsichtlich der Zielfunktion wird in Abbildung 5.58 gezeigt.

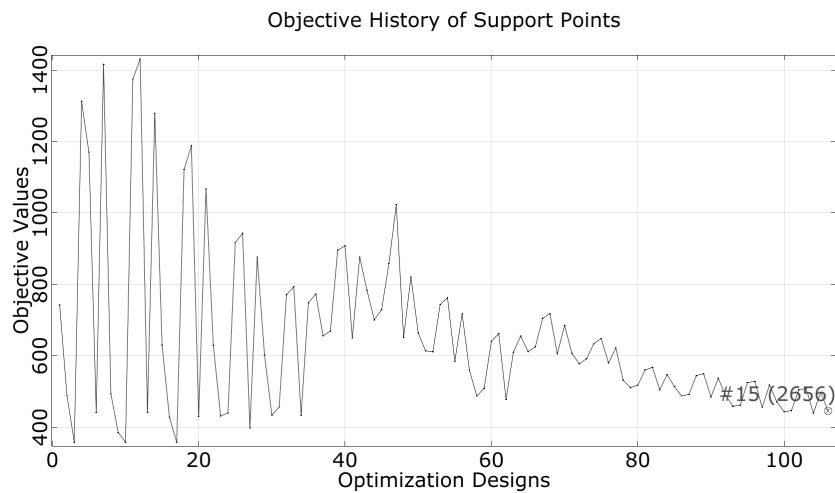


Abbildung 5.58: Systemantworten

Tatsächlich werden zusätzlich 99 Designs gerechnet. Die gesamte Berechnungszeit beläuft sich auf $(17 + 99) \text{ runs} \times 1.5 \frac{h}{\text{run}} = 174$ Stunden. Das Resultat ist physikalisch plausibel und deckt sich mit anderen, vorangegangenen Untersuchungen. Bereiche, welche höhere Maximalspannungswerte erhielten, benötigen demnach weichere Materialien. Teile mit eher geringeren Spannungen werden fester gewählt (siehe Abb. 5.59). Dadurch wird die Einhaltung der maximalen Verformung garantiert.

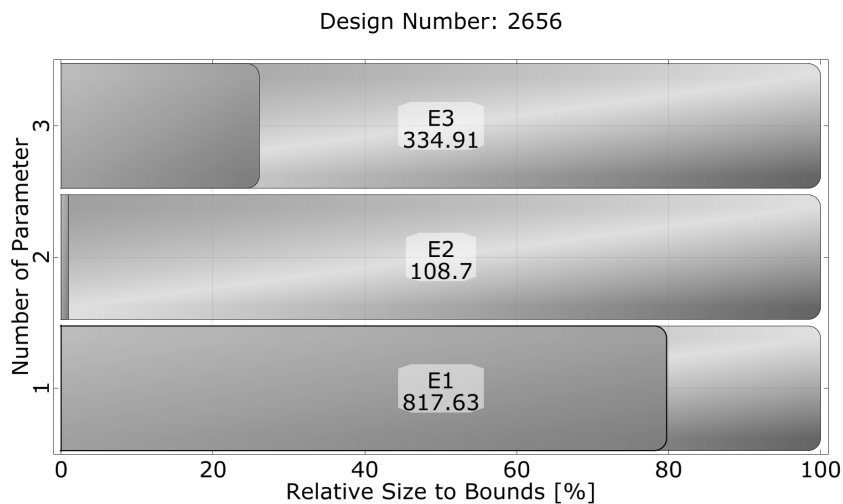


Abbildung 5.59: Bestes Design

5.5 Auswertung

In diesem Kapitel wurde die vorgeschlagene Methodik mittels verschiedener Beispiele validiert. Im Allgemeinen konnten die Ergebnisse der klassischen Verfahrensweise ohne nennenswerten Genauigkeitsverlust reproduziert werden. Im Vergleich zur traditionellen Herangehensweise war dabei nur ein Bruchteil an tatsächlichen Funktionsauswertungen notwendig. Dabei erfordern die Resultate der zuverlässigkeitsbasierten Optimierung noch weitergehende Analysen. Zwar wurden hier ähnliche Ergebnisse wie mit der klassischen Methodik erzielt, jedoch sind diese mit einem sehr hohen Schätzfehler behaftet. Im Bereich hoher Wahrscheinlichkeiten sind die Schätzfehler gering. Bei derartigen Aufgabenstellungen konnten die analytischen Optima erzielt werden. Zu Überprüfen bleibt, ob die inhärente Glättung der Daten zu einem Unterschätzen der Versagenswahrscheinlichkeit führt. Ein Einfluss von unwichtigen Parametern auf die Anzahl zu rechnender Systemantworten bleibt vorhanden. Er kann jedoch durch die vorgeschlagene Methodik in hohem Maß reduziert werden. Im praktischen Beispiel wurde gezeigt, dass das SampleRecycling auch bei Solverrauschen seine Funktionsfähigkeit beibehält. Die Methode wird in den Beispielen teilweise unter Berücksichtigung mehrerer Systemantworten ausgeführt. Dabei wird die Möglichkeit der Approximation dann angenommen, wenn alle Ersatzmodelle ausreichende Qualitätskriterien erreichen.

Die Forderungen an ein zu entwickelndes Verfahren zum adaptiven Aufbau von Versuchsplänen wurden in Kapitel 4 formuliert. Durch das mehrstufige Ausführen mit steigenden Qualitätsanforderungen wurde aufgezeigt, dass es möglich ist, einmal gewonnene Ergebnisse weiterzuverwenden. Desweiteren ist es möglich unterschiedliche Niveaus der Approximationsqualität einzustellen. Die Datenbasis approximiert die Ergebnisse im Allgemeinen mit dem Moving Least Squares Verfahren. Durch die interne Optimierung des Metamodells wurden unterschiedliche Wichtungsfunktionen benutzt. In einem ersten Schritt soll die Verwendung für verschiedene Approximationsmethoden daher als möglich betrachtet werden. Der Test mit anderen, höheren Verfahren steht aus. Fügt man diese Verfahren als weitere Option dem internen Optimierer zu, so ist zu erwarten, dass die Approximationsgüte steigt. Die Anzahl der tatsächlich zu rechnenden Designs kann dadurch weiter reduziert werden. Die Unterstützung der Konvergenz abfragender Algorithmen kann durch die gezeigten Cloudplots und den Tabellen im Anhang nachvollzogen werden. Unterschiedliche Qualitätsmaße für die Antwortfläche wurden vorgestellt. Die Beispiele nutzten eine Kombination von Distanz- und approximiertem Leave-One-Out Kriterium. Desweiteren wurde, je nach Anzahl der zu erwartenden abgefragten Systemantworten, die Möglichkeit wahrgenommen, Redundanz zu schaffen. Die Beispiele wurden mit verschiedenen abfragenden Algorithmen ausgeführt. Dazu wurden sowohl deterministische als auch stochastische Optimierungsverfahren verwendet. Gleiches gilt für die Methoden zur Gewinnung der Robustheitsmaße. So wurden Aufgabenstellungen unterschiedlicher Dimensionalität und Wahrscheinlichkeitsniveaus gelöst. Die Unabhängigkeit vom abfragenden Algorithmus sollte somit hinreichend belegt worden sein. Die Annahmen konnten bestätigt und die Forderungen erfüllt werden.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Weil es einen entscheidenden Wettbewerbsvorteil darstellt, Produkte mit der geforderten Qualität zu liefern, basieren viele Entscheidungskriterien im Produktentwicklungsprozess auf Qualitätsaussagen. Der Grad möglicher Einflussnahme sinkt, je mehr dieser Prozess fortschreitet. Gleichzeitig steigen die Kosten für Änderungen am Design. Deshalb sind qualitätskritische Entscheidungen so früh wie möglich zu treffen. Hohe Aufmerksamkeit und die größten Ressourcen müssen in den frühen Entwicklungsphasen angesiedelt werden. Aus diesen Gründen kommen in den betreffenden Zeiträumen oftmals numerische Modelle zur Entwicklung der Produkte zum Einsatz. Wie in Kapitel 1 beschrieben, werden beispielsweise in der Optimierung mehrere Berechnungen des Modells nötig.

Da die Kapazitäten für die Evaluation der Modelle nicht unbegrenzt sind, werden Ersatzmodelle verwendet. Diese zeichnen sich in der Regel durch einen wesentlich geringeren numerischen Aufwand aus. Aufwendige (reale) Berechnungen werden dabei durch die Abfrage des Surrogats ersetzt. Ein oft gewählter Ansatz ist dabei die Approximation aufgrund vorhandener Beobachtungen. Einige Möglichkeiten zur effizienten Gewinnung der erforderlichen Daten wurden in Kapitel 2 vorgestellt. Daneben wurden Metamodellierungsverfahren beschrieben und Möglichkeiten der Validierung genannt. Statische Versuchsanordnungen können im Allgemeinen wichtige lokale Ereignisse nur mit sehr hohem Aufwand darstellen. Aus diesem Grund bildete die Erläuterung einiger adaptiver Verfahren zum Aufbau von Ersatzmodellen den Abschluß dieses Kapitels. Die Schwächen dieser Ansätze liegen hauptsächlich in der festen Bindung an den abfragenden Algorithmus oder das darunterliegende Metamodell. Sie sind dadurch nicht umfassend einsetzbar. Die Verwendung von Informationen, welche bereits durch andere Untersuchungen vorhanden sind, wird meist nur unzureichend adressiert. Dies führt zum Verlust von brauchbaren Daten und damit zu Mehraufwand.

Kapitel 3 beschreibt mögliche Methoden zur Optimierung der Qualität. Die Verbesserung ist jedoch nur möglich, wenn der Zielwert beziehungsweise die Randbedingungen gemessen werden können. Deshalb wurden einige Maße vorgestellt, welche die Qualität

quantifizieren können. Diese Quantifizierung erfordert Auswertungen des Verhaltens eines Produktes unter schwankenden (stochastischen) Randbedingungen. Im Fall der klassischen Herangehensweise wird in der Optimierung der Qualität für jedes deterministische Optimierungsdesign eine stochastische Analyse ausgeführt. Diese Robustheitsmaße sind im Allgemeinen das Ergebnis eines Schätzverfahrens. Die Antworten im deterministischen Subraum sind somit verrauscht. Der verwendete Optimierer muss diesen Umstand berücksichtigen. In der klassischen Methode der Doppelschleife multiplizieren sich die Aufwände von Optimierung und stochastischer Auswertung. Verfahren welche den Aufwand minimieren sind oftmals an verwendete Qualitätsmaße gebunden. Eine Sonderstellung nehmen dabei zuverlässigkeitsbasierte Optimierungsalgorithmen ein. Aufgrund ihrer Spezialisierung können sie jedoch nicht flexibel eingesetzt werden. Methoden, welche die Auswertungen in unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsbereichen vornehmen, existieren kaum. Es müssen Strategien zur effizienten Ausführung des Doppelschleifenverfahrens gefunden werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Methode zur Senkung des numerischen Berechnungsaufwandes entwickelt und vorgestellt. **SampleRecycling** reduziert die Kosten durch Wiederverwendung erhaltener Ergebnisse und Approximation. Grundidee ist die Entscheidung, ob es vertrauenswürdig ist, eine Systemantwort zu approximieren, oder ob eine aufwendige Simulation notwendig ist. Sie wird innerhalb einer Schicht getroffen, welche zwischen abfragendem Algorithmus und Simulationsmodell eingefügt wird. Ist eine reale Evaluation nötig, wird die Datenbasis mit der resultierenden Systemantwort gefüllt. Somit steigt die Informationsdichte im untersuchten Bereich. Sind Approximationen möglich, so geschieht dies auf Basis der Datenbank. Dabei können alle Informationen, welche durch vorangegangene Untersuchungen vorhanden sind, wiederverwendet werden. Mit jeder real berechneten, zusätzlichen Designvariante wächst die Datenbasis. Durch die Vererbung von Informationen wächst die Dichte im untersuchten Bereich - der Approximationsfehler sinkt. Sind soviel Stützstellen berechnet, dass das Approximationsverfahren die Simulation ausreichend abbilden kann, werden keine neuen realen Berechnungen notwendig.

Einfache Entscheidungskriterien, mit denen bestimmt werden kann, inwieweit eine Vorhersage möglich ist, wurden vorgestellt. Sie basieren auf unscharfen Definitionen und ermöglichen zusätzlich die Erzeugung von Redundanz zur Absicherung der Entscheidungen. Die Definition der nötigen Parameter ist einfach gehalten, um einen breiten Einsatz der Methodik zu ermöglichen. Die Vereinigung mehrerer Kriterien zur robusteren Entscheidungsfindung wurde vorgestellt. Dazu werden verschiedene Qualitätsmaße zur Bewertung der Approximationsgüte im abgefragten Bereich verwendet. Durch die Logik bedingter Wahrscheinlichkeiten werden globale und lokale Verbesserungen der Vorhersagegenauigkeit erreicht. Iteratives Steigern der Qualitätsanforderungen ermöglicht es, die Approximationsgüte anzupassen, während der numerische Aufwand unter Kontrolle bleibt. Somit können Strukturen untersucht werden, deren Verhalten weitestgehend unbekannt ist.

Das Verfahren ist vollkommen unabhängig vom abfragenden Algorithmus einsetzbar. Damit kann es für die Optimierung sämtlicher Robustheitsmaße verwendet werden. Die beschriebenen Einschränkungen der in der Literatur zu findenden Verfahren gelten

nicht. Der Einsatz in weiteren Anwendungsgebieten ist möglich, wurde aber in der Arbeit nicht explizit adressiert. Durch das spezielle Verhalten von Optimierungen unter Berücksichtigung von Unsicherheiten ist das Verfahren sehr effizient. Die Besonderheit erklärt sich durch das konvergierende Verhalten des Optimierers mit gleichbleibender Abfrageintensität des Verfahrens zur statistischen Auswertung. Damit wird in einem kleinen Teilraum der Gesamtproblembeschreibung eine hohe Informationsdichte generiert. Wenn eine ausreichende Approximationsgüte in dieser Region erreicht ist, so wird keine reale Evaluation mehr nötig.

Die Validierung der vorgestellten Methodik geschah anhand verschiedener Beispiele. Es wurde gezeigt, dass die Herangehensweise die an sie gestellten Forderungen im Wesentlichen erfüllt. Dabei kommen verschiedene Ersatzmodelle mit einstellbaren Anforderungen an die Approximationsqualität zum Einsatz. Darüber hinaus konnten unterschiedliche abfragende Algorithmen und Robustheitsmaße verwendet werden. Die Möglichkeit der Wiederverwendung von Ergebnissen vorangegangener Untersuchungen wird durch mehrstufiges Ausführen aufgezeigt. Die Benutzung der Methode unter Berücksichtigung mehrerer Systemantworten wird dabei nicht vernachlässigt. Desweiteren kann der vorgeschlagene Algorithmus bei Solverrauschen eingesetzt werden. Es konnte festgestellt werden, dass die Strategie robust gegenüber unwichtigen Parametern angewendet werden kann. Der Gebrauch der Strategie erfolgt ohne Verlust von Genauigkeit im Vergleich zur klassischen Vorgehensweise. Der numerische Aufwand kann jedoch deutlich reduziert werden.

Ausblick

Die folgenden Punkte stellen aus der Sicht des Autors interessante Erweiterungen und Entwicklungen dar:

1. **Parallelisierung:** Die Nettoberechnungszeit kann durch gleichzeitiges Ausführen von Einzelsimulationen drastisch reduziert werden. Das ist beispielsweise für eine Generation eines biologischen Optimierers oder ein Latin Hypercube Sampling möglich. Eine Parallelisierung der Abfrage der Entscheidungskriterien für verschiedene Punkte im Raum ist prinzipiell machbar. Zunächst muss der abfragende Algorithmus dazu parallel ablaufen können. Es müssen Vorgehensweisen entwickelt werden, welche Redundanz beim Berechnen neuer Stützstellen verhindern. Ein wichtiges zu lösendes Problem ist dabei die Behandlung von Stützstellen deren reale Evaluation läuft, während in einer relevanten Distanz Abfragen der Datenbasis stattfinden. Eine Herangehensweise ist die Bewertung der Relevanz durch inverse Wichtung der Distanzen. Desweiteren können bei paralleler Abfrage der Datenbasis die Punkte ausgewählt werden, welche die schlechtesten Vertrauenswerte ergeben, Häufungen (*cluster*) sind zu vermeiden. Ein Ansatz dafür sind die bekannten Optimalitätskriterien für Versuchspläne.

2. **Solverrauschen:** Aus verschiedenen Gründen kann die Evaluation ein verrauschtes Ergebnis liefern. Das heißt, mehrere Berechnungen mit den gleichen Parametereinstellungen liefern abweichende Resultate. Einige Antwortflächenverfahren können mit diesem Umstand umgehen, andere nicht. Die Entscheidungskriterien sind dahingehend weiterzuentwickeln, dass sie robust unter dieser Randbedingung arbeiten. Hauptaugenmerk ist eine Kopplung von Validierungsverfahren des Metamodells wie beispielsweise *resampling* mit den Parametereinstellungen der Kriterien. In diesem Zusammenhang muss die Problematik der Überanpassung beziehungsweise der Unterstützung des Rauschens untersucht werden. Erste Versuche haben gezeigt, dass sich das Abstandskriterium an dieser Stelle als praktisch erweist.
3. **Gewinnung der Robustheitsmaße:** Die Robustheitsmaße sind im Allgemeinen Resultate von Schätzverfahren. Damit treten verrauschte Antworten im deterministischen Subraum auf. In den meisten Ingenieurproblemstellungen werden durch diesen Effekt unterschätzte Versagenswahrscheinlichkeiten beziehungsweise Schwankungen bevorzugt. Das führt zu zwei Überlegungen. Zum einen bleibt es zu untersuchen, inwieweit es mit Hilfe der vorgestellten Methodik möglich ist, höhere Genauigkeiten zu erzielen. Die Anzahl realer Evaluationen sollte im Vergleich nur gering steigen, wenn die stochastische Auswertung mehr Abfragen im untersuchten Bereich vornimmt. Zum anderen haben Versuche gezeigt, dass bei diskreten Systemantworten Unzulänglichkeiten der Approximation, welche durch Aufhockerungseffekte entstehen, durch höhere Abfragezahlen ausgeglichen werden können. Es wurde beobachtet, dass speziell bei Samplingverfahren robustere Schätzungen möglich sind. Der Mehraufwand kann durch iteratives Steigern der Qualitätsanforderungen gesenkt werden.
4. **Optimales Metamodell:** Im Rahmen der Arbeit hat sich herausgestellt, dass die Suche nach optimalen Parametern für die verwendeten Metamodelle numerisch aufwendig ist. Die Ausdehnung um weitere mögliche Verfahren potenziert diesen Aufwand. Die Optimierung neigt dazu, sensitive Resultate zu liefern. Zusätzlich zeigen die erhaltenen Modelle Tendenzen der Überanpassung. Es sind Verfahren zu entwickeln, welche diese Problematik auflösen. Erste, in der Literatur zu findende Ansätze wurden in dieser Arbeit genannt.
5. **Weitere Validierung der Methodik:** Anspruch des vorgestellten Verfahrens ist es, in praktischen Anwendungen eingesetzt zu werden. Die Arbeitsweise der kompletten Methodik wurde an einem praktischen Beispiel nachgewiesen. Die breite Anwendung der entwickelten Entscheidungsverfahren steht aus. Es bleibt zu überprüfen, welche Komplexität der Entscheidungskriterien für einen Anwender des Verfahrens sinnvoll ist. Weiteres Ziel kann die Automatisierung des iterativen Steigerns der Qualitätsanforderungen darstellen.

Literaturverzeichnis

- [1] ABSPOEL, S. J. ; ETMAN, L. F. P. ; VERVOORT, J. ; ROOIJ, R. A. ; SCHOOF, A. J. G. ; ROODA, J. E.: Simulation based optimization of stochastic systems with integer design variables by sequential multipoint linear approximation. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 22 (1996), S. 125–138
- [2] AGARWAL, H. : *Reliability based design optimization: Formulations and methodologies*. Dissertation. University of Notre Dam, Indiana, 2004
- [3] AGARWAL, H. ; RENAUD, J. E.: Reliability based design optimization for multidisciplinary systems using response surfaces. In: *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, 2002, S. 2002–1755
- [4] ALDRICH, J. : RA Fisher and the making of maximum likelihood 1912-1922. In: *Statistical Science* 12 (1997), Nr. 3, S. 162–176
- [5] ALVAREZ, L. F.: *Design optimization based on genetic programming*. Dissertation. University of Bradford, UK, 2000
- [6] AUDZE, P. ; EGLAIS, V. : New approach to planning out of experiments. In: *Problems of dynamics and strength* 35 (1977), S. 104–107
- [7] BAMBERG, G. ; COENENBERG, A. G. ; KRAPP, M. : *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*. Vahlen, 2008
- [8] BARTHELEMY, J. F. M. ; HAFTKA, R. T.: Approximation concepts for optimum structural design a review. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 5 (1993), Nr. 3, S. 129–144
- [9] BARTLETT, M. S.: *An introduction to stochastic processes, with special reference to methods and applications*. Cambridge Univ Pr, 1978
- [10] BATES, S. J. ; SIENZ, J. ; TOROPOV, V. V.: Formulation of the optimal Latin hypercube design of experiments using a permutation genetic algorithm. In: *AIAA 2004 2011* (2004), S. 1–7
- [11] BECK, K. ; ANDRES, C. : *Extreme programming explained: embrace change*. Addison-Wesley Professional, 2004

- [12] BELLMAN, R. E.: *Introduction to the mathematical theory of control processes*. Academic press, 1971
- [13] BISHOP, C. : *Neural networks for pattern recognition*. Oxford Univ Pr, 2005
- [14] BOEHM, B. W.: *Software Engineering Economics*. Englewood Cliffs, N.J. - Prentice-Hall, 1981
- [15] BOURGUND, U. ; BUCHER, C. G.: Importance sampling procedure using design point. In: *Research Rep. of University of Innsbruck* (1986), S. 35–74
- [16] BOX, G. E. P. ; COX, D. R.: An analysis of transformations. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 26 (1964), Nr. 2, S. 211–252
- [17] BOX, G. E. P. ; DRAPER, N. R.: *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. Bd. 1. Wiley, New York, 1987
- [18] BOX, G. E. P. ; DRAPER, N. R.: *Response surfaces, mixtures, and ridge analyses*. John Wiley and Sons, 2007
- [19] BOX, G. E. P. ; WILSON, K. B.: On the experimental attainment of optimum conditions. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 13 (1951), Nr. 1, S. 1–45
- [20] BRANIN, F. H.: Widely convergent method for finding multiple solutions of simultaneous nonlinear equations. In: *IBM J. Res. Develop* 16 (1972), Nr. 5, S. 504–522
- [21] BRENT, R. P.: *Algorithms for minimization without derivatives*. Dover Pubns, 2002
- [22] BUCHER, C. : Stabilization of explicit time integration by modal reduction. In: *Proceedings, Trends in Computational Mechanics. Barcelona: CINME* (2001)
- [23] BUCHER, C. : Stochastic Analysis in Structural Optimization. In: *Weimarer Optimierungs- und Stochastik Tage* (2005)
- [24] BUCHER, C. : *Computational Analysis of Randomness in Structural Mechanics*. CRC Press - Balkema - Taylor & Francis, 2009
- [25] BUCHER, C. G.: Adaptive sampling - an iterative fast Monte Carlo procedure. In: *Structural Safety* 5 (1988), Nr. 2, S. 119–126
- [26] BUZZELL, R. ; GALE, B. : The PIMS Principles: Linking Strategy to Performance. In: *Free Press, New York* (1987)
- [27] BYRNE, D. M. ; TAGUCHI, G. : The Taguchi Approach to Parameter Design. In: *40th Annual Quality Congress Transactions*. Milwaukee, Wisconsin : American Society for Quality Control, 1987, S. 19 – 26
- [28] ČERNÝ, V. : Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 45 (1985), Nr. 1, S. 41–51

- [29] CHANG, S. E. ; SHINOZUKA, M. : Life-cycle cost analysis with natural hazard risk. In: *Journal of Infrastructure Systems* 2 (1996), Nr. 3, S. 118–126
- [30] CHOI, K. K. ; YOUN, B. D. ; YANG, R. J.: Moving least square method for reliability-based design optimization. In: *Proceedings of the Fourth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001
- [31] COELLO, C. A. C. ; LECHUGA, M. S.: MOPSO: A proposal for multiple objective particle swarm optimization. In: *Congress on Evolutionary Computation* Bd. 2, 2002, S. 1051–1056
- [32] COOK, R. D. ; NACHTSHEIM, C. J.: A comparison of algorithms for constructing exact D-optimal designs. In: *Technometrics* 22 (1980), Nr. 3, S. 315–324
- [33] CORMEN, T. H. ; LEISERSON, C. E. ; RIVEST, R. L. ; STEIN, C. : *Introduction to algorithms*. The MIT press, 2001
- [34] CORNELL, C. A.: A Probability-Based Structural Code*. In: *ACI Journal Proceedings* Bd. 66, 1969
- [35] CRESSIE, N. A. C.: *Statistics for spatial data*. John Wiley & Sons, New York, 1993
- [36] CROSBY, P. B.: *Quality is free*. ISBN 0451625854 : McGrawHill, 1979
- [37] DAKIN, R. J.: A tree-search algorithm for mixed integer programming problems. In: *The Computer Journal* 8 (1965), Nr. 3, S. 250
- [38] DALE, B. G. ; PLUNKETT, J. J.: *Quality costing*. Gower Publishing Company, Limited, 1999
- [39] DANTZIG, G. B.: *Linear programming and extensions*. Princeton Univ Pr, 1947
- [40] DEAK, I. : Three digit accurate multiple normal probabilities. In: *Numerische Mathematik* 35 (1980), Nr. 4, S. 369–380
- [41] DEN HERTOOG, D. ; KLEIJNEN, J. P. C. ; SIEM, A. Y. D.: The correct Kriging variance estimated by bootstrapping. In: *Journal of the Operational Research Society* 57 (2006), Nr. 4, S. 400–409
- [42] DIN, E. : 9001: Qualitätsmanagementsysteme–Anforderungen. In: *Deutsches Institut für Normung eV, Berlin* (2000)
- [43] DIN, E. : 1055: Einwirkungen auf Tragwerke. In: *Deutsches Institut für Normung eV, Berlin* (2002)
- [44] DITLEVSEN, O. ; BJERAGER, P. ; OLESEN, R. ; HASOFER, A. M.: Directional simulation in Gaussian processes. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 3 (1988), S. 207–217
- [45] DIXON, L. C. W. ; SZEGO, G. P.: The global optimization problem: an introduction. In: *Towards Global Optimization* 2 (1978), S. 1–15

- [46] DORIGO, M. : *Optimization, learning and natural algorithms*. Dissertation. (Italian) Politecnico di Milano, Milan, Italy, 1992
- [47] DRAPER, N. R. ; FARAGGI, D. : Role of the Papadakis estimator in one-and two-dimensional field trials. In: *Biometrika* 72 (1985), Nr. 1, S. 223–226
- [48] DUBOIS, D. ; PRADE, H. : Possibilistic logic. In: *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming* (1994)
- [49] DYKSTRA JR., O. : The augmentation of experimental data to maximize—XX— . In: *Technometrics* 13 (1971), Nr. 3, S. 682–688
- [50] EFRON, B. : Bootstrap methods: another look at the jackknife. In: *The Annals of Statistics* 7 (1979), Nr. 1, S. 1–26
- [51] EFRON, B. ; GONG, G. : A leisurely look at the bootstrap, the jackknife, and cross-validation. In: *The American Statistician* 37 (1983), Nr. 1, S. 36–48
- [52] EGOROV, I. N. ; KRETININ, G. V. ; LESHCHENKO, I. A.: Robust Design Optimization Strategy of IOSO Technology. In: *Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Vienna, Austria, July 7-12 2002
- [53] ELDERED, M. S. ; AGARWAL, H. ; PEREZ, V. M. ; WOJTKIEWICZ, S. F. ; RENAUD, J. E.: Investigation of reliability method formulations in DAKOTA/UQ. In: *Structure and Infrastructure Engineering* 3 (2007), Nr. 3, S. 199–214
- [54] ENGELUND, S. ; RACKWITZ, R. : A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability. In: *Structural Safety* 12 (1993), Nr. 4, S. 255–276
- [55] ETMAN, L. F. P. ; ADRIAENS, J. ; SLAGMAAT, M. T. P. ; SCHOOF, A. J. G.: Crashworthiness Design Optimization using Multipoint Sequential Linear Programming. In: *Structural Optimization* 12 (1996), S. 222–228
- [56] FATHI, Y. ; POONTHANOMSOOK, C. : A Quartic Quality Loss Function and its Properties. In: *Journal of Industrial and Systems Engineering* Vol. 1, No. 1 (2007), S. 8 – 22
- [57] FEIGENBAUM, A. V.: *Quality Control: Principles, Practice and Administration*. McGraw-Hill, 1951
- [58] FISCHLER, M. A. ; BOLLES, R. C.: Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. In: *Communications of the ACM* 24 (1981), S. 6
- [59] FISHER, R. A.: On an absolute criterion for fitting frequency curves. In: *Messenger of Mathematics* 41 (1912), S. 155–160
- [60] FISHER, R. A.: Design of Experiments. In: *British Medical Journal* 1 (1936), Nr. 3923, S. 554

- [61] FLETCHER, R. ; REEVES, C. M.: Function minimization by conjugate gradients. In: *The computer journal* 7 (1964), Nr. 2, S. 149–154
- [62] FODOR, I. K.: A survey of dimension reduction techniques. In: *Center for Applied Scientific Computing, Lawrence Livermore National Laboratory* (2002)
- [63] FRANGOPOL, D. M. ; MAUTE, K. : Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. In: *Computers and Structures* 81 (2003), Nr. 7, S. 397–410
- [64] FREUDENTHAL, A. M.: The statistical aspect of fatigue of materials. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 187 (1946), Nr. 1011, S. 416–429
- [65] FREUDENTHAL, A. M. ; GUMBEL, E. J.: On the statistical interpretation of fatigue tests. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 216 (1953), Nr. 1126, S. 309–332
- [66] GANDIN, L. S.: *Objective Analysis of Meteorological Fields. Gidrometeorologicheskoe Izdatel'stvo, Leningrad.* 1963. – 242 ff. S.
- [67] GARVIN, D. : What does product quality really mean. In: *Sloan Management Review* 26 (1984), Nr. 1, S. 25–43
- [68] GAUSS, C. : *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium (Theorie der Bewegung der Himmelskörper: welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen).* Sumtibus F. Perthes et IH Besser, 1809
- [69] GORISSEN, D. ; DE TOMMASI, L. ; CROMBECQ, K. ; DHAENE, T. : Sequential modeling of a low noise amplifier with neural networks and active learning. In: *Neural Computing & Applications* 18 (2009), Nr. 5, S. 485–494
- [70] GORISSEN, D. ; DHAENE, T. ; DE TURCK, F. : Evolutionary Model Type Selection for Global Surrogate Modeling. In: *Journal of Machine Learning Research* 10 (2009), S. 2039–2078
- [71] HASOFER, A. M. ; LIND, N. C.: Exact and invariant second-moment code format. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 100 (1974), Nr. 1, S. 111–121
- [72] HASTINGS, W. K.: Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. In: *Biometrika* (1970), S. 97–109
- [73] HÄUSSLER-COMBE, U. : *Elementfreie Galerkin-Verfahren: Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten zur Berechnung von Stahlbetontragwerken.* Habilitation. Inst. für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruhe, 2001
- [74] HESTENES, M. R. ; STIEFEL, E. : Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 49 (1952), Nr. 6
- [75] HILL, T. ; LEWICKI, P. : *STATISTICS Methods and Applications.* StatSoft, Tulsa, OK, 2007

- [76] HOHENBICHLER, M. ; RACKWITZ, R. : Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling. In: *Journal of Engineering Mechanics* 114 (1988), Nr. 12, S. 2195–2199
- [77] IMAN, R. L. ; CONOVER, W. : A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables. In: *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 11 (1982), Nr. 3, S. 311–334
- [78] JOHNSON, M. E. ; NACHTSHEIM, C. J.: Some guidelines for constructing exact D-optimal designs on convex design spaces. In: *Technometrics* (1983), S. 271–277
- [79] JONES, D. ; SCHONLAU, M. ; WELCH, W. : Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions. In: *Journal of Global Optimization* Vol. 13 (1998), S. 455–492
- [80] JONES, D. R.: The DIRECT global optimization algorithm. In: *Encyclopedia of optimization* (2001), S. 431–440
- [81] JUNG, H. : *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. Oldenbourg Verlag, 2001
- [82] JURAN, J. M.: The economics of quality. In: *Quality control handbook, McGraw Hill* (1988)
- [83] JURECKA, F. : *Robust Design Optimization Based on Metamodeling Techniques*. Dissertation. Department of Civil Engineering and Geodesy, Technical University of Munich, 2007
- [84] KENNEDY, J. ; EBERHART, R. C. u. a.: Particle swarm optimization. In: *Proceedings of IEEE international conference on neural networks* Bd. 4 Piscataway, NJ: IEEE, 1995, S. 1942–1948
- [85] KHARMANDA, G. ; MOHAMED, A. ; LEMAIRE, M. : Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 24 (2002), S. 233 – 245
- [86] KIRKPATRICK, S. ; GELATT JR, C. D. ; VECCHI, M. P.: Optimization by Simulated Annealing. In: *Science* 220 (1983), S. 671–680
- [87] KLEIN, B. : *Versuchsplanung-DOE: Einführung in die Taguchi/Shainin-methodik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2007
- [88] KLOTZ, P. ; BARTOLI, N. ; CORNEZ, L. ; SAMUELIDES, M. ; VILLEDIEU, P. : Database enrichment for optimization with artificial neural networks. In: *Second International Workshop on Surrogate Modeling and Space Mapping for Engineering Optimization (SMSMO-06), Technical University of Denmark* (2006)
- [89] KNOWLES, J. ; HUGHES, E. J.: Multiobjective optimization on a budget of 250 evaluations. In: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Third International Conference, EMO* (2005), S. 176 – 190

- [90] KOHAVI, R. : A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection. In: *International Joint Conference on artificial intelligence* Bd. 14, 1995, S. 1137–1145
- [91] KOZA, J. R.: *Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection*. The MIT press, 1992
- [92] KRIGE, D. G.: A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. In: *J. of Chem., Metal. and Mining Soc. of South Africa* 52 (1951), S. 119–139
- [93] KURTARAN, H. ; ESKANDARIAN, A. ; MARZOUGUI, D. ; BEDEWI, N. E.: Crashworthiness design optimization using successive response surface approximations. In: *Computational Mechanics* 29 (2002), S. 409–421
- [94] KUSCHEL, N. ; RACKWITZ, R. U.: Structural optimization under time-variant reliability constraints. In: *Reliability and Optimization of Structural Systems: Proceedings* Springer-Verlag, 1998, S. 27
- [95] LANCASTER, P. ; SALKAUSKAS, K. : Surfaces generated by moving least squares methods. In: *Mathematics of computation* 37 (1981), Nr. 155, S. 141–158
- [96] LAND, A. H. ; DOIG, A. G.: An automatic method of solving discrete programming problems. In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1960), S. 497–520
- [97] LASDON, L. S. ; WARREN, A. D. ; JAIN, A. ; RATNER, M. : Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming. In: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 4 (1978), Nr. 1, S. 34–50
- [98] LEE, K. H. ; J., P. G. ; JOO, W. S.: A global robust optimization using the Kriging approximation model. In: *6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro* (2005)
- [99] LEE, K. Y. ; EL-SHARKAWI, M. A.: *Modern heuristic optimization techniques: Theory and applications to power systems*. Wiley-IEEE Press, 2007
- [100] LEE, T. H. ; JUNG, J. J.: A sampling technique enhancing accuracy and efficiency of metamodel-based RBDO: Constraint boundary sampling. In: *Computers and Structures* 86 (2008), Nr. 13-14, S. 1463–1476
- [101] LEGENDRE, A. M.: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes (Anhang): Sur la Méthode des moindres carrés* . F. Didot, 1805
- [102] LI, F. ; WU, T. : d-RBDO: A Deterministic Approach for Reliability Based Design Optimization / Department of Industrial Engineering, Arizona State University. Tempe, Arizona, 2008. – Report
- [103] LI, G. : *Online and Offline Approximations for Population based Multi-Objective Optimization*. Dissertation. University of Maryland, 2007

- [104] LI, G. ; AUTE, V. ; AZARM, S. : An accumulative error based adaptive design of experiments for offline metamodeling. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2009), S. 1–19
- [105] LIU, H. ; CHEN, W. ; SHENG, J. ; GEA, H. : Application of the sequential optimization and reliability assessment method to structural design problems. In: *ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2003, S. 2–6
- [106] LUNDEVALL, D. M. ; JURAN, J. M.: Quality costs. In: *Quality control handbook, McGraw Hill* (1974), S. 78–85
- [107] MACKE, M. ; RIEDEL, J. : Adaptive response surface method for structural reliability calculation. In: *Structural safety and reliability: proceedings of the 8th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR'01* Taylor & Francis, 2001, S. 178
- [108] MARCZYK, J. : Stochastic multidisciplinary improvement: beyond optimization. In: *Proc. 8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, September, 2000*
- [109] MARCZYK, J. : Does optimal mean best. In: *NAFEMS-Seminar: Einsatz der Stochastik in FEM-Berechnungen* Bd. 7, 2003
- [110] MARKOWITZ, H. : Portfolio selection. In: *The journal of finance* 7 (1952), Nr. 1, S. 77–91
- [111] MARTIN, J. D. ; SIMPSON, T. W.: Use of Kriging models to approximate deterministic computer models. In: *AIAA journal* 43 (2005), Nr. 4, S. 853–863
- [112] MATHERON, G. : *Traité de Géostatistique Appliquée, Tome I, Mémoires du Bureau de Recherches Géologiques et Minières, No. 14.* In: *Editions Technip, Paris* (1962)
- [113] MCCULLOCH, W. S. ; PITTS, W. : A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. In: *Bulletin of Mathematical Biology* 5 (1943), Nr. 4, S. 115–133
- [114] MCKAY, M. D. ; BECKMAN, R. J. ; CONOVER, W. J.: A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. In: *Technometrics* (1979), S. 55–61
- [115] MEAD, R. ; PIKE, D. J.: A Biometrics Invited Paper. A Review of Response Surface Methodology from a Biometric Viewpoint. In: *Biometrics* 31 (1975), Nr. 4, S. 803–851
- [116] METROPOLIS, N. ; ROSENBLUTH, A. W. ; ROSENBLUTH, M. N. ; TELLER, A. H. ; TELLER, E. u. a.: Equation of state calculations by fast computing machines. In: *The journal of chemical physics* 21 (1953), Nr. 6, S. 1087
- [117] MITCHELL, T. J.: Computer construction of D-optimal first-order designs. In: *Technometrics* (1974), S. 211–220

- [118] MITCHELL, T. J. ; MORRIS, M. D.: Bayesian design and analysis of computer experiments: Two examples. In: *Statistica Sinica* 2 (1992), Nr. 2, S. 359–379
- [119] MOST, T. ; BUCHER, C. G.: A Moving Least Squares weighting function for the Element-free Galerkin Method which almost fulfills essential boundary conditions. In: *Structural Engineering and Mechanics* 21 (2005), Nr. 3, S. 315 – 332
- [120] MYERS, D. C. R. H. und Montgomery M. R. H. und Montgomery: *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. John Wiley& Sons Inc, New York, 1995
- [121] MYERS, R. H.: *Response Surface Methodology*. Allyn and Bacon Inc., Boston, USA., 1971
- [122] NAIR, V. N. ; ABRAHAM, B. ; MACKAY, J. ; NELDER, J. A. ; BOX, G. ; PHADKE, M. S. ; KACKER, R. N. ; SACKS, J. ; WELCH, W. J. ; LORENZEN, T. J. u. a.: Taguchi's parameter design: a panel discussion. In: *Technometrics* 34 (1992), Nr. 2, S. 127–161
- [123] NELDER, J. A. ; MEAD, R. : A simplex method for function minimization. In: *The computer journal* 7 (1965), Nr. 4, S. 308
- [124] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S. J.: *Numerical optimization*. Springer, 2006
- [125] ONWUBOLU, G. C. ; BABU, B. V.: *New optimization techniques in engineering*. Springer Verlag, 2004
- [126] OPTISLANG: - *the optimizing structural language - reference manual*. Bd. 3.1. Dynardo - Dynamic Software and Engineering GmbH, 2009
- [127] OTTO, K. ; ANTONSSON, E. : Extensions to the Taguchi Method of Product Design. In: *Journal of Mechanical Design* 115, (1993), S. 5–13
- [128] OWEN, A. B.: Orthogonal arrays for computer experiments, integration and visualization. In: *Statistica Sinica* 2 (1992), Nr. 2, S. 439–452
- [129] PAPADAKIS, J. S.: Methode Statistique Pour des Experiences Sur. Champ. Bull. Inst. In: *Amel. Plantes a Salonique* 23 (1937)
- [130] PAPALAMBROS, P. ; GOOVAERTS, P. ; SASENA, M. J.: Exploration of meta-modeling sampling criteria for constrained global optimization. In: *Engineering Optimization* 34 (2002), Nr. 3, S. 263–278
- [131] PHADKE, M. S.: *Quality Engineering using Robust Design*. New Jersey : Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989
- [132] PICARD, R. R. ; BERK, K. N.: Data splitting. In: *American statistician* (1990), S. 140–147
- [133] PICHENY, V. ; GINSBOURGER, D. ; ROUSTANT, O. ; HAFTKA, R. ; KIM, N. H.: Adaptive Designs of Experiments for Accurate Approximation of Target Regions. In: *hal-00319385, version 1 - 8 Sep 2008* (2008)

- [134] PLACKETT, R. L.: Some generalizations in the multifactorial design. In: *Biometrika* 33 (1946), Nr. 4, S. 328–332
- [135] PLACKETT, R. L. ; BURMAN, J. P.: The design of optimum multifactorial experiments. In: *Biometrika* 33 (1946), Nr. 4, S. 305–325
- [136] PONWEISER, W. ; WAGNER, T. ; VINCZE, M. : Clustered Multiple Generalized Expected Improvement: A Novel Infill Sampling Criterion for Surrogate Models. In: *Congress on Evolutionary Computation*, 2008
- [137] POWELL, M. J. D.: Radial basis functions for multivariable interpolation: A review. In: *Clarendon Press Institute Of Mathematics And Its Applications Conference Series* Clarendon Press New York, NY, USA, 1987, S. 143–167
- [138] QUEIPO, N. V. ; HAFTKA, R. T. ; SHYY, W. ; GOEL, T. ; VAIDYANATHAN, R. ; TUCKER, P. K.: Surrogate-based analysis and optimization. In: *Aerospace Sciences* 41 (2005), S. 1–28
- [139] RACKWITZ, R. ; FIESSLER, B. : Structural reliability under combined random load sequences. In: *Computers & Structures* 9 (1978), Nr. 5, S. 489–494
- [140] RAO, C. R.: *Linear Statistical Interference and Its Applications 2nd ed.* New York:John Wiley, 1973
- [141] RAO, S. S.: Optimum design of structures in a fuzzy environment. In: *AIAA journal* 25 (1987), Nr. 12, S. 1633–1636
- [142] RECHENBERG, I. : Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution. In: *Fromman-Holzboog, Stuttgart* (1973)
- [143] RECHENBERG, I. : *Evolutionsstrategie'94*. Frommann-Holzboog Stuttgart, 1994
- [144] ROOS, D. : *Approximation und Interpolation von Grenzzustandsfunktionen zur Sicherheitsbewertung nichtlinearer Finite-Elemente-Strukturen*. Dissertation. Bauhaus-Universität Weimar, 2002
- [145] ROOS, D. ; ADAM, U. ; BUCHER, C. : Robust Design Optimization. In: *Weimarer Optimierungs- und Stochastik Tage* (2006)
- [146] ROOS, D. ; BUCHER, C. : Adaptive Response Surfaces for Structural Reliability of Nonlinear Finite Element Structures. In: *Proceedings of the NAFEMS Seminar: Use of Stochastics in FEM Analyses*. Wiesbaden, Germany, May 7 – 8 2003
- [147] ROSENBROCK, H. H.: An automatic method for finding the greatest or least value of a function. In: *The Computer Journal* 3 (1960), Nr. 3, S. 175
- [148] ROSS, J. E. ; PERRY, S. : *Total quality management: Text, cases, and readings*. CRC, 1999
- [149] ROSS, P. J.: *Taguchi techniques for quality engineering: loss function, orthogonal experiments, parameter and tolerance design*. McGraw-Hill Professional, 1995

- [150] RUBINSTEIN, R. Y. ; KROESE, D. P.: *Simulation and the Monte Carlo method*. Wiley-Interscience, 2007
- [151] SACKS, J. ; WELCH, W. J. ; MITCHELL, T. J. ; WYNN, H. P.: Design and Analysis of Computer Experiments. In: *Statistical Science* 4 (1989), Nr. 4, S. 409 – 435
- [152] SCHIFFAUEROVA, A. ; THOMSON, V. : A review of research on cost of quality models and best practices. In: *International Journal of Quality an Reliability Management* 23 (2006), S. 647–669
- [153] SCHITTKOWSKI, K. : NLPQL: A FORTRAN subroutine solving constrained nonlinear programming problems. In: *Annals of operations research* 5 (1986), Nr. 1, S. 485–500
- [154] SCHNEIDER, D. ; BUCHER, C. : Efficient RDO using sample recycling. In: *Weimarer Optimierungs- und Stochastik Tage, Präsentation auf CD* (2008)
- [155] SCHNEIDER, J. J. ; KIRKPATRICK, S. : *Stochastic optimization*. Springer Verlag, 2006
- [156] SCHÖNHARDT, M. : *Geostatistische Bearbeitung unsicherer Baugrunddaten zur Berücksichtigung in Sicherheitsnachweisen des Erd- und Grundbaus*. Dissertation. Bauhaus-Universität Weimar, 2005
- [157] SCHUËLLER, G. I. ; JENSEN, H. A.: Computational methods in optimization considering uncertainties—An overview. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2008), Nr. 1, S. 2–13
- [158] SCHWEFEL, H. P.: *Evolution and Optimum Seeking. Sixth-Generation Computer Technology Series*. 1995
- [159] SHAHSAVANI, D. ; GRIMVALL, A. : An adaptive design and interpolation technique for extracting highly nonlinear response surfaces from deterministic models. In: *Reliability Engineering and System Safety* 94 (2009), Nr. 7, S. 1173–1182
- [160] SHANNON, C. E.: A Mathematical Theory of Communication. In: *The Bell System Technical Journal* 27 (1948), S. 623–656
- [161] SHEPARD, D. : A Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly-Spaced Data. In: *Proc. ACM Natl Conf.* 1968, S. 517 – 523
- [162] SHINOZUKA, M. : Basic analysis of structural safety. In: *Journal of Structural Engineering* 109 (1983), S. 721
- [163] SÓBESTER, A. ; LEARY, S. J. ; KEANE, A. J.: A parallel updating scheme for approximating and optimizing high fidelity computer simulations. In: *Structural and multidisciplinary optimization* 27 (2004), Nr. 5, S. 371–383
- [164] SÓBESTER, A. ; LEARY, S. J. ; KEANE, A. J.: On the design of optimization strategies based on global response surface approximation models. In: *Journal of Global Optimization* 33 (2005), Nr. 1, S. 31–59

- [165] STANDER, N. ; BURGER, M. ; ZHU, X. ; MAKER, B. : Springback compensation in sheet metal forming using a successive response surface method. In: *9 th AIAA/ISSMO Symposium and Exhibit on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Atlanta, GA, 2002*
- [166] STANDER, N. ; CRAIG, K. J.: On the robustness of a simple domain reduction scheme for simulation-based optimization. In: *Eng. Comput.* 19 (2002), Nr. 4, S. 431–50
- [167] STONE, M. : The generalized Weierstrass approximation theorem. In: *Mathematics Magazine* (1948), S. 237–254
- [168] STORN, R. ; PRICE, K. : Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. In: *Journal of global optimization* 11 (1997), Nr. 4, S. 341–359
- [169] TAGUCHI, G. : *Introduction to quality engineering*. Asian Productivity Organization Tokyo, 1990
- [170] TAGUCHI, G. ; CLAUSING, D. : Robust quality. In: *Harvard Business Review* 68 (1990), Nr. 1, S. 65–75
- [171] TAGUCHI, G. ; WU, Y. : *Introduction to off-line quality control*. Central Japan Quality Control Assoc., 1985
- [172] TANG, B. : Orthogonal array-based Latin hypercubes. In: *Journal of the American Statistical Association* 88 (1993), Nr. 424, S. 1392–1397
- [173] TEERAVARAPRUG, J. : Integration of Loss Function in Two-Dimensional Deterministic Tolerance Synthesis. In: *Thammasat Int. J. Sc. Tech.* 7 (2002), Nr. 2
- [174] THORNTON, A. C.: Optimism vs. Pessimism: Design Decisions in the Face of Process Capability Uncertainty. In: *Journal of Mechanical Design* 123 (2001), S. 313–321
- [175] TOROPOV, V. V. ; ALVAREZ, L. F.: Development of MARS – Multipoint Approximation Method Based on the Response Surface Fitting / AIAA. 1998. – Forschungsbericht
- [176] TSOMPANAKIS, Y. ; LAGAROS, N. D. ; PAPADRAKAKIS, M. : *Structural design optimization considering uncertainties*. CRC Press - Balkema - Taylor & Francis, 2008
- [177] TU, J. ; CHOI, K. K. ; PARK, Y. H.: A new study on reliability-based design optimization. In: *Journal of Mechanical Design* 121 (1999), S. 557
- [178] VAN GROENIGEN, J. W.: The influence of variogram parameters on optimal sampling schemes for mapping by kriging. In: *Geoderma* 97 (2000), Nr. 3, S. 223–236

- [179] WANG, G. G.: Adaptive response surface method using inherited latin hypercube design points. In: *journal of mechanical design* 125 (2003), Nr. 2, S. 210–220
- [180] WATSON, A. G. ; BARNES, R. J.: Infill sampling criteria to locate extremes. In: *Mathematical Geology* 27 (1995), Nr. 5, S. 589–608
- [181] WEIERSTRASS, K. : Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. In: *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin* (1885), S. 633–639, 789–805
- [182] WELCH, W. J. ; SACKS, J. : A system for quality improvement via computer experiments. In: *Communications in Statistics-Theory and Methods* 20 (1991), Nr. 2, S. 477–495
- [183] WELCH, W. J. ; YU, T. ; KANG, S. M. ; SACKS, J. : Computer experiments for quality control by parameter design. In: *Journal of Quality Technology* 22 (1990), Nr. 1, S. 15–22
- [184] WU, Y. T. ; MILLWATER, H. R. ; CRUSE, T. A.: Advanced probabilistic structural analysis method for implicit performance functions. In: *AIAA Journal* 28 (1990), Nr. 9, S. 1663–1669
- [185] WYNN, H. P.: The sequential generation of D-optimum experimental designs. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 41 (1970), Nr. 5, S. 1655–1664
- [186] YATES, F. : Sir Ronald Fisher and the design of experiments. In: *Biometrics* 20 (1964), Nr. 2, S. 307–321
- [187] YEUN, Y. S. ; KIM, B. J. ; YANG, Y. S. ; RUY, W. S.: Polynomial genetic programming for response surface modeling part 2: adaptive approximate models with probabilistic optimization problems. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 29 (2005), Nr. 1, S. 35–49
- [188] YEUN, Y. S. ; YANG, Y. S. ; RUY, W. S. ; KIM, B. J.: Polynomial genetic programming for response surface modeling Part 1: a methodology. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 29 (2005), Nr. 1, S. 19–34
- [189] YOUN, B. D. ; CHOI, K. K.: A new response surface methodology for reliability-based design optimization. In: *Computers and Structures* 82 (2004), S. 241 – 256
- [190] YOUN, B. D. ; CHOI, K. K. ; PARK, Y. H.: Hybrid Analysis Method for Reliability-Based Design Optimization. In: *Journal of Mechanical Design* 125 (2003), S. 221 – 232
- [191] ZADEH, L. A.: Fuzzy Sets. In: *Information and Control* (1965), Nr. 8, S. 338 – 353
- [192] ZHU, C. ; BYRD, R. H. ; LU, P. ; NOCEDAL, J. : L-BFGS-B: FORTRAN sub-routines for large-scale bound constrained optimization. In: *ACM Trans. Math. Software* 23 (1997), S. 550–560

- [193] ZITZLER, E. ; DEB, K. ; THIELE, L. : Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. In: *Evolutionary computation* 8 (2000), Nr. 2, S. 173–195

Anhang

A.1 Abkürzungen der Optimierungsverfahren

DiRect	...	dividing rectangles
BFGS	...	Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno
L-BFGS	...	limited memory -BFGS
CG	...	conjugate gradients
SQP	...	sequential quadratic programming
GRG	...	generalized reduced gradient
NLPQL	...	non-linear programming by quadratic lagrangian
SA	...	simulated annealing
GA	...	genetic algorithms
PSO	...	particle swarm optimization
ACO	...	ant colony optimization
ES	...	evolutionary strategies
DE	...	differential evolution

A.2 Stützstellen Braninfunktion ARSM

<i>Nr.</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>branin(x, z)</i>
0	2.505	5	7.01452
1	2.505	17	203.243
2	10	5	5.93132
3	2.505	-7	98.7858
4	-4.99	5	160.462
5	10	17	197.86
6	0	0.659819	48.1196
7	0	7.74441	22.6451
8	0	4.5706	21.6453
9	-4.99	6.38062	128.795
10	-4.99	7.40072	107.847
11	-4.99	2.88376	216.401
12	10	8.62382	33.5373
13	10	2.79387	1.98686
14	10	1.08007	5.64063

A.3 Stützstellen Braninfunktion

<i>Nr.</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>branin(x, z)</i>
0	2.505	5	7.01452
1	2.505	17	203.243
2	10	5	5.93132
3	2.505	-7	98.7858
4	-4.99	5	160.462
5	10	17	197.86
6	-1.39914	6.90833	14.1094
7	-1.39914	1.23841	64.0762
8	5.15995	2.04842	14.8298
9	5.15995	5.9917	36.8556
10	9.58847	0.347304	5.6757
11	0.754336	6.47769	19.5725
12	5.15995	8.76159	70.9219
13	9.23841	8.76159	42.0288
14	0.754336	3.52231	18.8215
15	5.67401	7.68151	60.8162
16	9.26423	2.54694	0.563004
17	9.42484	7.68151	27.5051
18	9.97155	6.75579	16.0934
19	8.22751	4.33629	13.7109
20	8.22751	5.55864	21.7716
21	8.22751	3.38716	9.51297
22	9.35774	5.25132	8.4413
23	8.50165	7.45306	36.0914
24	9.57485	4.0083	2.47646

A.4 Stützstellen Balkenbeispiel 1

$Nr.$	d [m]	F [N]	h [m]	ω [rad/s]	w [m]
0	0.22555	23600	0.975	70.8	0.00205102
1	0.42515	9200	0.575	78	0.00106687
2	0.17565	21200	0.925	34.8	0.00148686
3	0.47505	16400	0.875	56.4	0.00074883
4	0.02595	11600	0.775	92.4	0.017424
5	0.37525	18800	0.675	27.6	0.00163879
6	0.32535	30800	0.825	85.2	0.0148053
7	0.07585	14000	0.725	42	0.00615775
8	0.12575	26000	0.625	49.2	0.0193973
9	0.27545	28400	0.525	63.6	0.0117207
10	0.2505	20000	0.75	60	0.00459825
11	0.2505	32000	0.75	60	0.0073572
12	0.2505	20000	0.75	96	0.00231252
13	0.5	20000	0.75	60	0.00230372
14	0.2505	20000	1	60	0.00105538
15	0.0101	20000	0.9	60	0.0416307
16	0.1099	20000	1	60	0.00240557
17	0.1099	15006.8	0.9	74.9796	0.00542983
18	0.1099	15006.8	0.9	60	0.00287075
19	0.1099	20840.2	0.9	55.5308	0.00355839
20	0.0101	15006.8	1	45.0204	0.0156351
21	0.0101	21333.8	1	60.9526	0.028455
22	0.1099	20000	1	74.9796	0.00358643
23	0.1598	20803.6	0.94	85.7576	0.00897441
24	0.114527	15753.8	1	78.74	0.00315341
25	0.114527	17285.1	1	77.2064	0.00324103
26	0.114527	19239.6	1	80.9882	0.0042858
27	0.0833795	24993.2	0.964	74.9796	0.00735833
28	0.0833795	20000	1	45.0204	0.00252409
29	0.145674	15006.8	1	45.0204	0.00108403
30	0.145674	24993.2	1	74.9796	0.0033812
31	0.131894	20823.9	0.9784	83.9688	0.00576066
32	0.131894	24337.8	1	102.3	0.0206765
33	0.131894	24337.8	1	86.0951	0.00643268
34	0.0995748	24993.2	0.98704	45.0204	0.00276585
35	0.0952068	15006.8	0.988759	45.0204	0.00172624
36	0.0866407	20396.5	0.993302	72.4325	0.00440806
37	0.085469	22236.3	0.995607	67.6788	0.00417965
38	0.0838717	24993.2	1	74.9796	0.00587268
39	0.0833789	15006.8	0.996175	45.0204	0.00191972
40	0.06	20000	1	60	0.0044062

<i>Nr.</i>	<i>d</i> [m]	<i>F</i> [N]	<i>h</i> [m]	ω [rad/s]	<i>w</i> [m]
41	0.06	15006.8	1	60	0.00330615
42	0.0101	24993.2	0.9	45.0204	0.0380657
43	0.0101	24993.2	0.9	60	0.0520242
44	0.1099	20607.5	0.9	68.3479	0.00525441
45	0.0101	20000	1	74.9796	0.0390246
46	0.1099	15006.8	1	60	0.00180499
47	0.153131	15006.8	0.94	45.0204	0.0012861
48	0.153131	20000	1	74.9796	0.00257393
49	0.0846146	15006.8	0.964	74.9796	0.00435371
50	0.148275	23064.4	0.964	77.9372	0.0043984
51	0.148275	20000	1	45.0204	0.00141937
52	0.120306	21403.3	0.9784	80.6495	0.00523362
53	0.0776054	24993.2	1	74.9796	0.00634688
54	0.0949711	15006.8	1	45.0204	0.00166276
55	0.108833	23564.3	1	87.8966	0.008722
56	0.0810443	20000	1	60	0.00326207
57	0.0813014	24993.2	1	60	0.00406359
58	0.06	20604.2	1	65.8505	0.00515772
59	0.0101	15006.8	0.9	45.0204	0.022856
60	0.0101	24993.2	0.9	74.9796	0.0984003
61	0.0101	20000	0.9	74.9796	0.0787417
62	0.0101	15006.8	0.9	60	0.0312372
63	0.0101	20000	0.9	45.0204	0.0304609
64	0.0101	20043.1	0.9	68.4525	0.0558564
65	0.0101	17265.3	0.9	60.0922	0.0360314
66	0.1099	24993.2	0.9	45.0204	0.00349831
67	0.0101	15006.8	1	74.9796	0.0292817
68	0.0101	24993.2	1	74.9796	0.0487675
69	0.0101	24993.2	1	60	0.0327104
70	0.0101	20000	1	45.0204	0.0208374
71	0.0101	20007.6	1	51.2763	0.0226112
72	0.0101	18701.8	1	55.6484	0.0226224
73	0.153993	24993.2	0.94	60	0.00279916
74	0.153993	21641.5	0.94	81.8426	0.00635776
75	0.0580336	15006.8	1	74.9796	0.00509611
76	0.11602	24993.2	1	60	0.00284757
77	0.0980138	20000	0.992224	45.0204	0.00220723
78	0.0774554	15006.8	1	74.9796	0.00381827
79	0.0815967	22000.6	1	77.3005	0.00581238
80	0.0813759	15006.8	1	60	0.00243769

A.5 Stützstellen Balkenbeispiel 2

$Nr.$	d [m]	F [N]	h [m]	ω [rad/s]	w [m]
0	0.22555	23600	0.975	70.8	0.00205102
1	0.42515	9200	0.575	78	0.00106687
2	0.17565	21200	0.925	34.8	0.00148686
3	0.47505	16400	0.875	56.4	0.00074883
4	0.02595	11600	0.775	92.4	0.017424
5	0.37525	18800	0.675	27.6	0.00163879
6	0.32535	30800	0.825	85.2	0.0148053
7	0.07585	14000	0.725	42	0.00615775
8	0.12575	26000	0.625	49.2	0.0193973
9	0.27545	28400	0.525	63.6	0.0117207
10	0.2505	20000	0.75	60	0.00459825
11	0.2505	32000	0.75	60	0.0073572
12	0.2505	20000	0.75	96	0.00231252
13	0.5	20000	0.75	60	0.00230372
14	0.2505	20000	1	60	0.00105538
15	0.0101	20000	0.9	60	0.0416307
16	0.1099	20000	1	60	0.00240557
17	0.1099	15006.8	0.9	74.9796	0.00542983
18	0.1099	15006.8	0.9	60	0.00287075
19	0.1099	20840.2	0.9	55.5308	0.00355839
20	0.0101	15006.8	1	45.0204	0.0156351
21	0.0101	21333.8	1	60.9526	0.028455
22	0.1099	20000	1	74.9796	0.00358643
23	0.1598	20803.6	0.94	85.7576	0.00897441
24	0.116341	15687.7	1	79.0744	0.00313799
25	0.116341	17135.1	1	77.5679	0.00321033
26	0.116341	19290.7	1	80.9958	0.00423183
27	0.0846496	24993.2	0.964	74.9796	0.00724791
28	0.0846496	22912.1	1	65.183	0.00400056
29	0.11854	24993.2	1	45.0204	0.00221866
30	0.11854	21241.4	1	102.755	0.0177875
31	0.11854	20562.6	1	86.7763	0.00636917
32	0.06	24993.2	1	45.0204	0.00438334
33	0.06	20000	1	74.9796	0.00656915
34	0.0101	24993.2	0.9	45.0204	0.0380657
35	0.0101	15006.8	0.9	60	0.0312372
36	0.1099	20000	0.9	74.9796	0.0072365
37	0.0101	19995.8	1	51.4448	0.0226529
38	0.1099	15006.8	1	45.0204	0.00143689
39	0.0461727	19970.1	0.901269	51.3469	0.00738351
40	0.0461727	21401.8	0.901269	55.6409	0.00866758

$Nr.$	d [m]	F [N]	h [m]	ω [rad/s]	w [m]
41	0.0461727	24993.2	1	60	0.00715521
42	0.122645	24561.6	1	85.2083	0.00655381
43	0.079967	19480.4	0.901522	66.3692	0.00624565
44	0.079967	20557.3	0.901522	62.4739	0.00576681
45	0.143086	24787.4	1	109.186	0.00644879
46	0.0896449	21686.2	0.940913	69.2146	0.00544468
47	0.0896449	20286.3	0.940913	65.4994	0.00450499
48	0.124381	24993.2	0.964548	45.0204	0.00240359
49	0.106149	15006.8	1	74.9796	0.00278615
50	0.12116	22662.7	0.982986	77.6707	0.00457055
51	0.124661	23476.4	1	83.1769	0.00541604
52	0.126456	21876.4	0.982988	81.6922	0.00521632
53	0.126456	15006.8	1	60	0.00156868
54	0.06	20183.6	1	71.5432	0.00590732
55	0.06	18396.2	1	63.8751	0.00439653
56	0.06	20183.6	1	63.8751	0.00482371
57	0.0101	15006.8	0.9	45.0204	0.022856
58	0.0101	24993.2	0.9	74.9796	0.0984003
59	0.0101	24993.2	0.9	60	0.0520242
60	0.0101	20000	0.9	74.9796	0.0787417
61	0.1099	24993.2	0.9	74.9796	0.00904316
62	0.1099	21552.2	0.9	63.4882	0.00458303
63	0.0101	20000	1	74.9796	0.0390246
64	0.0101	15006.8	1	60	0.0196405
65	0.0101	18701.5	1	64.3929	0.0268667
66	0.0101	21313.9	1	55.6502	0.0257829
67	0.06	24993.2	0.94	45.0204	0.00546663
68	0.06	24993.2	0.94	60	0.00718419
69	0.1598	22094.3	0.94	77.739	0.0046572
70	0.1598	20475.3	0.94	77.0235	0.00413723
71	0.13095	23080.8	1	103.345	0.0152334
72	0.167834	21474.3	0.964	97.7696	0.0212623
73	0.167834	20812.3	0.964	83.8701	0.00517444
74	0.167834	22136.2	0.964	93.1365	0.0293985
75	0.167834	27014.9	0.964	81.9422	0.0057981
76	0.0940654	15006.8	1	45.0204	0.00167877
77	0.0940654	24993.2	1	60	0.00351219
78	0.134872	20483.7	1	101.03	0.0264517
79	0.134872	15995.8	1	85.463	0.0039505
80	0.157953	22160.8	0.9784	84.6806	0.0054044