



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN



AUTOMATION & CONTROL INSTITUTE
INSTITUT FÜR AUTOMATISIERUNGS-
& REGELUNGSTECHNIK

Optimale Trajektorienplanung für Manipulatoren mit elastischen Elementen

DIPLOMARBEIT

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

Assoc. Prof. Dr.-Ing. W. Kemmentmüller
Dipl.-Ing. M. Meiringer

eingereicht an der

Technischen Universität Wien
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

von

Christoph Unger
Matrikelnummer 01125791
Wienerstraße 70
2304 Orth/Donau
Österreich

Wien, im Jänner 2020

Vorwort

Mein Interesse an der Untersuchung von elastisch mechanischen Systemen sowie an der Entwicklung modellprädiktiver Steuerungs-/Regelungskonzepte waren die Entscheidungsgrundlagen für die Auswahl dieser Diplomarbeit. Außerdem gilt mein Interesse der Umsetzung von Online-Verfahren für die optimale modellprädiktive Planung, um damit das dynamische Verhalten eines realen Systems maßgeblich verbessern zu können.

Ich möchte mich nun bei all jenen bedanken, die maßgeblich durch ihre fachliche sowie tatkräftige persönliche Unterstützung zum Entstehen dieser Masterarbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Wolfgang Kemmettmüller sowie Herrn Dipl. Ing. Martin Meiringer die meine Masterarbeit betreut und beurteilt haben. Herzlich bedanke ich mich für die vielen hilfreichen Anregungen sowie für die konstruktive Kritik während der Erstellung dieser Arbeit. Die persönlichen Gespräche auf intellektueller Ebene stellten immer eine Motivation für mich dar.

Dankbar und tief verbunden bin ich meiner Freundin, Alexandra Tichi, die mich durch ihre zuvorkommende Art stets unterstützt und motiviert hat. Zusätzlich danke ich ihr für die zahlreichen Stunden des Korrekturlesens und die vielen konstruktiven Anmerkungen zu meiner Arbeit.

Zum Schluss möchte ich mich bei meiner gesamten Familie bedanken, die mir durch ihre Unterstützung mein Studium ermöglicht haben. Hierbei gilt mein besonderer Dank meiner Mutter, Angelika Unger, die stets ein offenes Ohr für mich hatte.

Wien, im Jänner 2020

Abstract

Operation of large-scale manipulators within restricted spaces is a difficult task. This work proposes the design of a moving horizon trajectory planning for a large-scale manipulator, which will be able to perform automated tasks. The optimal trajectory planning is based on a physical model of the flexible manipulator. Mainly the purpose of this algorithm is to suppress the mechanical oscillations of the structure during a point to point motion of the end effectors. Hence the model considers torsion along the longitudinal axis as well as the bending in two directions of the elastic manipulator beams. The system of partial differential equations (PDE) is derived by the Hamilton Principle based on the energies of the physical system. A description of the manipulator's elastic kinematic is given to derive the kinetic, potential and external energies. By using the Ritz-Method, the PDE-System of a two-armed manipulator is approximated by local approach functions. To do so, the static solution of the Saint-Venant torsion and the Euler-Bernoulli bending of a beam are investigated within this work. Two different approximation approaches of the distributed parametric model are compared to each other in terms of their dynamical behaviour and the computational complexity. Depending on this research a reduced approximated model is proposed. In addition, this model describes the physical behavior of the system. This mathematical description is used to perform the optimal trajectory planning over a moving horizon. To suppress the parameter variations within the model as well as modelling errors, a concept with two degrees of freedom control is used. The proposed control concept leads to a suppression of the excited mechanical vibrations of the structure. With the suggested control system, a smooth point to point motion and the planning of automated tasks for the manipulator can be achieved.

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Entwurf einer optimalen Trajektorienplanung für Großraummanipulatoren mit elastischen Elementen. Das Ziel ist es für Geräte, z. B. Betonpumpen, den automatisierten Betrieb zu ermöglichen und im selben Zuge die auftretenden Schwingungen zu minimieren. Für die modellprädiktive Planung der Trajektorie ist es notwendig eine mathematische Modellierung des Großraummanipulators durchzuführen. Dieses Modell soll die realen Bewegungen des elastischen Manipulators möglichst genau abbilden. Aus diesem Grund werden in der Modellierung sowohl die Verbiegungen in zwei Raumrichtung als auch die Torsion um die Längsachse der einzelnen Balken berücksichtigt. Für die Modellierung erfolgt zuerst die kinematische Beschreibung eines Großraummanipulators mit N elastischen Elementen. Durch die Formulierung der kinematischen Kette ist es möglich die kinetischen, potentiellen sowie inneren Energien des Manipulators anzugeben. Im Anschluss wird mittels Hamilton-Prinzip ein System aus partiellen Differentialgleichungen abgeleitet, welches das dynamische Verhalten des Manipulators beschreibt. In weiterer Folge wird eine örtliche Approximation des verteilt-parametrischen Systems durchgeführt. Für eine geeignete Wahl an örtlichen Ansatzfunktionen erfolgt die Untersuchung der statischen Verhältnisse der Torsion sowie der Verbiegung eines Euler-Bernoulli-Balkens. Daraus lässt sich im Anschluss eine örtlich approximierete mathematische Beschreibung für einen Manipulator mit zwei Auslegern angeben.

Des Weiteren werden die Auswirkungen unterschiedlicher örtlicher Ansatzfunktionen auf das dynamische Systemverhalten untersucht. Es wird der Einfluss der Ansatzfunktion auf die Komplexität der entstehenden Systeme aus gewöhnlichen Differentialgleichungen analysiert. Anhand der Modellanalyse kann ein reduziertes Modell des Großraummanipulators mit zwei elastischen Elementen abgeleitet werden. Dieses eignet sich wiederum für die Planung einer optimalen Trajektorie der Eingangsgrößen des Systems, d.h. den Momenten in den Gelenken. Die Berechnung dieser Trajektorie wird in Form eines optimalen Steuerungsproblems auf sich bewegenden Zeithorizonten formuliert. Das Steuerungs- und Regelungskonzept wird auf Robustheit und Stabilität untersucht, wobei ein Arbeitspunktwechsel des Manipulators durchgeführt wird. Zuletzt wird die Unterdrückung der Schwingungen durch eine angepasste Planung der Steuertrajektorie untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Modellierung	4
2.1	Systemkonfiguration	4
2.2	Modellierung der elastischen Verschiebungen	6
2.2.1	Torsion um die Längsachse	6
2.2.2	Verbiegung in horizontaler und vertikaler Richtung	7
2.3	Kinematische Beschreibung	8
2.3.1	Rotationen	8
2.3.2	Kinematische Kette	11
	Modellvereinfachungen	12
2.4	Kinetische Energie des Systems	13
2.4.1	Vektoren der beschreibenden Systemgrößen des Systems	14
2.4.2	Manipulator-Jacobimatrix	15
2.4.3	Kinetische Energie T_{s_i} eines Auslegers s_i	16
2.4.4	Kinetische Energie T_{m_i} einer Masse am Ende eines Auslegers	18
2.5	Verzerrungsenergie des Systems	19
2.6	Potentielle Energie zufolge der Gravitation	23
2.7	Externe Kräfte und Momente	24
2.7.1	Antriebsmomente	24
2.8	Dämpfungen	26
2.9	Bewegungsgleichungen des Systems	26
2.10	Zusammenfassung der Modellierung	30
3	Örtliche Approximation	31
3.1	Approximationsansätze	31
3.2	Statische Untersuchung der Torsion	36
3.3	Statische Untersuchung der Biegung	37
3.4	Approximation mittels Legendre-Polynome	40
4	Modellanalyse	42
4.1	Analyse des dynamischen Verhaltens	43
4.1.1	Einfluss der Ansatzfunktionen	43
4.1.2	Einfluss der Corioliskraft	52
4.2	Analyse der Energien	53
4.3	Zusammenfassung	55
5	Trajektorien Planung und Regelung	57
5.1	Optimale Endkonfiguration	57

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	V
5.2 Dynamische Optimierung	59
5.3 Bewegte Horizonte	63
5.4 Regelungskonzept	67
6 Simulationsergebnisse	69
6.1 Vergleich der Planungsvarianten	70
6.2 Schwingungsdämpfung	76
7 Zusammenfassung	78
A Parameter	80

Abbildungsverzeichnis

2.1	Aufbau der zu untersuchenden Systemkonfiguration eines Großraummanipulators.	5
2.2	Lokale Koordinatensysteme und Winkel eines elastischen Auslegerelementes s_i	10
2.3	Torsionswiderstand J_{Ts_2} des zweiten Auslegers und dessen Linearisierung.	23
3.1	Torsionswinkel bei homogenen $\alpha_{Ts_1}(x_{1,s_1})$ und inhomogenen $\alpha_{Ts_2}(x_{1,s_2})$ Balkenquerschnitt unter einer Belastung von $M_T = 1$ kN m.	37
3.2	Verbiegungen $u_{B3s_1}(x_{1,s_1})$ (homogener Querschnitt) und $u_{B3s_2}(x_{1,s_2})$ (linear verjüngender Querschnitt) des Balkens in x_{3,s_i} -Richtung unter der Gravitations- und Biegebelastung.	39
4.1	Eingeprägte Eingangsmomente im Szenario 1.	46
4.2	Gelenkwinkel und Deformationen der Auslegerenden der beiden Modellvarianten im Szenario 1.	47
4.3	Verbiegungen der Auslegerenden $u_{B3s_i,L}$ in x_{3,s_i} -Richtung im Szenario 1.	47
4.4	Eingeprägte Eingangsmomente im Szenario 2.	48
4.5	Gelenkwinkel und Deformation der Auslegerenden der beiden Modellvarianten im Szenario 2.	49
4.6	Torsion $\alpha_{Ts_i,L}$ der Auslegerenden im Szenario 2.	50
4.7	Verbiegungen der Auslegerenden $u_{B2s_i,L}$ in x_{2,s_i} -Richtung im Szenario 2.	50
4.8	Verbiegung $u_{B3s_1,1}(x_{1,s_1})$ der Modellvariante 1 in der Ruhelage und Verbiegung $u_{B3s_1,2}(x_{1,s_1})$ als Lösung der Randwertaufgabe.	51
4.9	Vergleich des Systemverhaltens der ersten Modellvariante mit und ohne Corioliskraft im Szenario 2.	53
4.10	Kinetischen Energieanteile des Auslegers s_1 und s_2 im Szenario 1 und 2.	54
4.11	Abweichungen der Schwerpunkte der starren Ausleger zum Schwerpunkt der deformierten Ausleger.	56
5.1	Exemplarische Darstellung der Stellgröße $v(t)$ für die Veranschaulichung der Horizonte und Signale bei der Planung auf bewegten Horizonten.	64
5.2	Zwei-Freiheitsgrad Regelkreis für einen Großraummanipulator mit elastischen Elementen.	67
6.1	Gelenkmomente M_i der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei stationären Sollwert.	71
6.2	Gelenkwinkel φ_i und Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei stationären Sollwert.	72

6.3	Gelenkmomente M_i der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei veränderlichen Sollwert.	73
6.4	Gelenkwinkel φ_i und Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei veränderlichen Sollwert.	74
6.5	Deformationen $\alpha_{Ts_{1,L}}$, $u_{B2s_{1,L}}$ und $u_{B3s_{1,L}}$ der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei veränderlichen Sollwert.	75
6.6	Deformationen $\alpha_{Ts_{1,L}}$, $u_{B2s_{1,L}}$ und $u_{B3s_{1,L}}$ bei einem sprungförmigen Arbeitspunktwechsels mit und ohne Strukturdämpfung.	76
6.7	Gelenkmomente M_i bei einem sprungförmigen Arbeitspunktwechsel mit und ohne Strukturdämpfungsanteil.	77

Tabellenverzeichnis

4.1	Modellvarianten für die Untersuchung der Rechenkomplexität.	44
4.2	Analyse der Modellkomplexität: Anzahl benötigter Operation der verschiedenen Modellvarianten.	45
4.3	Maximaler Anteil der Corioliskraft.	52
4.4	Modellkomplexität in Form der Anzahl benötigter Operationen der verschiedenen Modellvarianten.	55
6.1	Verwendete Zeitintervalle für die Umsetzung der Regelung sowie der Berechnung der Steuerung	70
A.1	Geometrische Abmessungen der Ausleger	80
A.2	Stoffparameter der Ausleger	80
A.3	Dämpfungen des Großraummanipulators	81
A.4	Polynomkoeffizienten der örtlichen Ansatzfunktionen des Auslegers s_1 . .	81
A.5	Polynomkoeffizienten der örtlichen Ansatzfunktionen des Auslegers s_2 . .	82
A.6	Arbeitsbereich des Manipulators mit zwei Auslegern	82
A.7	Beschränkungen für die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten sowie für die Momente	83
A.8	Gewichtungsfaktoren der Offline- und Online Trajektorienplanung	83
A.9	Parameter der PI-Regelung	83

1 Einleitung

Der effektive Einsatz von Großraummanipulatoren, wie Autobetonpumpen, wird durch den häufig geringen zu Verfügung stehenden Raum auf Baustellen sehr stark erschwert. Durch den Platzmangel kommt es zu beschränkten Möglichkeiten für die Abstützung des Manipulators, welche aber für die Standsicherheit dringend benötigt werden. Zusätzlich besteht das Bestreben einen immer größer werdenden Arbeitsbereich erschließen zu können, wodurch sich ganz neue Einsatzmöglichkeiten ergeben sollen. Dazu zählen zum Beispiel der automatisierte 3D-Druck von gesamten Gebäudeteilen. Deshalb muss eine Leichtbauweise für die Mastelemente eingesetzt werden, damit die notwendigen Flächen zur Abstützung verringert werden können und die Anforderungen an das Fahrzeug gering sind. Durch die Leichtbauweise und die damit verbundenen verwendeten Materialien eines Manipulators treten elastische Schwingung innerhalb der Mastelemente auf. Diese haben zur Folge, dass es zu einer hohen Belastung der Materialien kommt und zusätzlich stellen sie ein Sicherheitsrisiko bei der Bedienung dar. Werden durch die Bewegungen des Manipulators die Resonanzfrequenzen der Mastelemente angeregt, so kann dies zu sehr großen Schwingungsamplituden des Endeffektors führen. Dadurch kommt es zu einer Gefährdung der Personen in der unmittelbaren Umgebung der Gerätschaft. Natürlich kann es auch zu einer Beschädigung von Objekten im Umfeld des Manipulators oder zur Beschädigung des teuren Manipulators selbst kommen. Aufgrund dieser Probleme muss eine Anregung von großen Amplituden der Schwingungen unbedingt im realen Umfeld verhindert werden. Bei der manuellen Steuerung solcher Gerätschaften ist dazu ein hohes Maß an Feingefühl vonnöten, wobei dieses nur durch ein erfahrenes und geschultes Personal erreicht werden kann. Zusätzlich können die Schwingungen auch durch äußere Einflüsse wie Wind oder durch das Fördern von Materie (Pumpvorgänge) angeregt werden.

Der effiziente und sichere Einsatz solcher Gerätschaften kann durch die Entwicklung eines Regelungskonzeptes, welches stationäre Genauigkeit ermöglicht sowie eine Unterdrückung von Schwingungen erlaubt, erreicht werden. Der Entwurf einer solchen Regelungsstrategie erfordert die Beschreibung der Bewegung des Endeffektors durch ein mathematisches Modell, in dem die zu unterdrückenden physikalischen Effekte möglichst genau abgebildet werden. Des Weiteren ist für eine möglichst effiziente und sichere Durchführung von autonomen Aufgaben eine echtzeitfähige Planung der Bewegung des Werkzeugendeffektors unabdinglich. An die Planung der Endeffektortrajektorie wird die Anforderung gestellt, dass während der Bewegung eine geringe Anregung der elastischen Schwingungen entsteht. Zusätzlich sollen aber die vorgegeben Endpunkte schnellstmöglich erreicht werden. Das entwickelte Konzept soll robust gegenüber äußere Störeinflüsse und Parameterschwankungen sein. Eine einfache Kalibrierung für neue Geräte ist eine weitere erstrebenswerte Eigenschaft für das zu entwickelnde Konzept.

In der Literatur existieren zur Modellierung von eingelenkigen flexiblen Rotoren und Strukturen bereits eine Vielzahl an Arbeiten, siehe z. B. [1], [2], wobei hier meist nur

die Biegung in Richtung der wirkenden Gravitation berücksichtigt wird. Einen guten Überblick über Methoden für die Modellierung von flexiblen Manipulatoren mit einem elastischen Freiheitsgrad wird z. B. in [3], [4] gegeben. Darin werden ebenfalls Methoden zur Diskretisierung der verteilt parametrischen Beschreibung behandelt, wie auch Strategien zur Steuerung solcher Manipulatoren vorgestellt. Die Modellierung, Regelung und Betrachtung von unterschiedlichen Gelenkreibungsmodellen für flexible, mehrgelenkige Manipulatoren wurden in der Doktorarbeit [5] behandelt. In dieser Arbeit wurde ebenfalls nur ein elastischer Freiheitsgrad (Balkendurchbiegung) in der Beschreibung eines Auslegers berücksichtigt.

Als Gelenke werden hierbei meist elektromagnetische Antriebe betrachtet. In der Praxis sind die Gelenke jedoch oftmals aus hydraulischen Aktuatoren zusammengesetzt, da diese den Vorteil der kompakteren und leichteren Bauweise für die benötigte Leistungsdichte besitzen. In den Arbeiten [6], [7], [8] wird ein mathematisches Modell für eine hydraulisch aktuierte Autobetonpumpe sowie ein Konzept zur aktiven Strukturdämpfung einer solchen Maschine vorgestellt. Weitere Konzepte können den Arbeiten [9], [10] entnommen werden. Diese unterscheiden sich durch die mathematische Darstellung des örtlich diskretisierten Systems sowie dem entworfenen Regelungskonzept. In der Arbeit [11] wird ein Überblick für den Entwurf von verschiedenen Regelungsstrategien für flexible Manipulatoren gegeben. Eine Vielzahl an klassischen Methoden für die Planung der Trajektorie für Roboter werden in den Arbeiten [12], [13] vorgestellt. In den Arbeiten [14], [15] wird ein Ansatz für die Trajektorienplanung für mobile Manipulatoren mit flexiblen Gelenken und elastischen Balken mit je einem Freiheitsgrad vorgestellt. Die örtliche Diskretisierung der verteilt-parametrischen Beschreibungen erfolgt darin meistens mit den Eigenfunktionen eines Balkens. Die Trajektorienberechnung für eine Punkt zu Punkt Bewegung wird durch die Formulierung einer dynamischen Optimierungsaufgabe durchgeführt. Die Planung von Bewegungstrajektorien mit dem Ziel die Strukturschwingungen von einem flexiblen Roboter zu minimieren wird in der Arbeit [16] thematisiert. Als Objekte werden Roboter betrachtet, welche für die Darstellung von lebendigen Bewegungen der Charaktere in der Animationsindustrie eingesetzt werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein Konzept zur echtzeitfähigen Trajektorienplanung für einen Großraummanipulator mit zwei langen, relativ dünnen Auslegern und drei unabhängigen Gelenken zu entwerfen. Die Auslegerelemente sind aus den beschriebenen Gründen mit relativ geringer Masse ausgeführt. Es wird angenommen, dass die Ausleger mittels Gelenke gekoppelt sind. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Momente der Gelenkantriebe direkt vorgegeben werden können. Diese stellen die Eingangsgrößen des Manipulators dar und dienen zu Steuerung und Regelung des Manipulators. Das zu entwickelnde Konzept soll dazu dienen, automatisierte Trajektorien für Punkt-zu-Punkt-Bewegungen des Endeffektor in Echtzeit zu planen. Bei der Planung soll der Fokus auf eine geringe Anregung der Schwingungen sowie auf das schnellst mögliche Erreichen des gewünschten Endpunktes gelegt werden. Hierbei ist zu beachten, dass ein gewisser Kompromiss zwischen dem quasi-zeitoptimalen Erreichen des Punktes und der minimalen Anregung von Schwingungen notwendig ist. Die Anregung von Resonanzen soll durch Berücksichtigung eines elastischen Modells des Manipulators innerhalb der Trajektorienplanung verhindert werden. Des Weiteren wird die Anforderung gestellt, dass das Konzept möglichst einfach auf Maschinen mit mehr als zwei Auslegern erweitert

werden kann.

Die allgemeine mathematische Beschreibung für einen elastischen Großraummanipulator mit N Auslegern erfolgt im Kapitel 2. In der Modellierung werden die elastischen Effekte der Verbiegungen in zwei Raumrichtungen sowie die Torsion jedes Auslegers berücksichtigt. Durch die notwendige Einführung von ortsabhängigen elastischen Freiheitsgraden entsteht am Ende ein System aus partiellen Differentialgleichungen. Dieses dient der mathematischen Abbildung der in der Realität auftretenden elastischen Effekte, die durch die Leichtbauweise entstehen. Durch örtliche Approximation wird im Kapitel 3 ein Simulationsmodell aus gewöhnlichen Differentialgleichungen abgeleitet, welches sich zur Untersuchung der im System auftretenden Energien sowie dessen dynamischen Verhaltens eignet. Hierfür erfolgt eine statische Untersuchung der elastischen Verformungen eines Auslegers, um eine geeignete Wahl für die örtliche Approximation treffen zu können. Im Kapitel 4 wird das dynamische Verhalten sowie die Modellkomplexität des örtlich approximierten Simulationsmodell untersucht. Es werden für diese Zwecke geeignete Szenarien ausgewählt, um die Eigenschaften des Systems in den Simulationen zu analysieren. Anhand dieser Untersuchungen wird ein reduziertes Systemmodell abgeleitet, mit dessen Hilfe im Anschluss ein echtzeitfähiges Konzept zur Trajektorienplanung entwickelt wird. Dieses wird im Kapitel 5 vorgestellt und erlaubt den automatisierten Einsatz eines flexiblen Manipulators. Die Planung wird hierbei auf einem bewegten Horizont durchgeführt, was den Vorteil von kürzeren Planungshorizonten und den damit verbundenen geringeren Rechenaufwand mit sich bringt. Des Weiteren wird ein unterlagertes Regelungskonzept vorgestellt, welches stationäre Abweichungen vom geplanten Endwert verhindert.

2 Modellierung

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der mathematischen Modellierung eines Großraummanipulators in seiner allgemeinen Form. Das Ziel ist es, mittels eines mathematischen Modells die realen Bewegungen eines Großraummanipulators mit elastischen Elementen möglichst genau abzubilden. Die physikalische mathematische Beschreibung wird dafür systematisch auf der Basis der Energien des Manipulators abgeleitet. Das daraus abgeleitete Modell soll in weiterer Folge zur Planung einer optimalen Trajektorie der Endeffektorposition dienen. Im Abschnitt 2.1 wird zuerst die Konfiguration des zugrundeliegenden Systems vorgestellt. Im Abschnitt 2.2 wird der verwendete Ansatz für die Verschiebungen eingeführt, der für die Beschreibung der Verzerrungen eines Elementes benötigt wird. Anschließend folgt im Abschnitt 2.3 die Darstellung der kinematischen Kette eines Großraummanipulators mit einer beliebigen Anzahl an elastischen Auslegern. Als Ergebnis dieses Abschnittes stehen dann alle Werkzeuge zur Verfügung, um die gesamten Energien des Systems aufzustellen. Im Abschnitt 2.4 wird die kinetische Energie für einen allgemeinen flexiblen Manipulator angegeben. Der darauffolgende Abschnitt 2.5 beschäftigt sich mit der Beschreibung der Verformungsenergie innerhalb eines elastischen Elementes. Der Einfluss der Gravitation auf die Bewegung des Manipulator wird im Abschnitt 2.6 beschrieben. Damit alle Effekte des zugrundeliegenden Systems abgedeckt sind, werden die angenommen äußeren Einflüsse im Abschnitt 2.7 angegeben. Das gewählte Reibungsmodell wird im Abschnitt 2.8 diskutiert. Am Ende des Kapitels wird im Abschnitt 2.9 mit Hilfe des Hamilton-Prinzips ein System aus partiellen Differentialgleichungen abgeleitet, welches das dynamische Verhalten eines Großraummanipulators mit beliebig vielen elastischen Elementen modelliert.

2.1 Systemkonfiguration

Dieser Abschnitt soll die zugrundeliegende Systemkonfiguration des betrachteten Großraummanipulators und dessen physikalischen Rahmenbedingungen festlegen. Der betrachtete Manipulator besteht aus einem Drehwerk an dem zwei oder mehrere Mastelemente in Form einer seriellen kinematischen Kette befestigt sind. Dabei sind die Drehachsen der verbindenden Gelenke parallel. In dieser Arbeit wird einfachheitshalber von direkten Drehantrieben in den Gelenksachsen ausgegangen. Die angesprochenen Drehantriebe erlauben eine Verdrehung des Manipulators um seine Hochachse sowie eine separate Verstellung der relativen Winkel zwischen zwei Auslegerelementen. Als Stelleingänge des Systems sollen die Drehmomente der einzelnen Antriebe dienen. In der Praxis sind die Gelenke von Großraummanipulatoren oft in Form von Linearzylindern und entsprechender Kinematik ausgeführt. Durch die vereinfachte Gelenkstruktur entfällt die kinematische Berücksichtigung dieser komplexen Kinematik in der Modellbildung des Manipulators.

Beliebige Gelenkstrukturen können dennoch relativ einfach in den vorgestellten Formalismus integriert werden, indem sie in der kinematischen Kette berücksichtigt werden. Die Gelenkwinkel, die Gelenkgeschwindigkeiten sowie die Stellmomente werden als beschränkt angenommen, wodurch der Arbeitsbereich des Großraummanipulators festgelegt ist. Im Weiteren wird von einer gedämpften Struktur sowie von gedämpften Gelenken, verursacht durch die Reibung innerhalb der Gelenke, ausgegangen. Wie bereits erwähnt, soll in diesem Kapitel ein allgemeiner Formalismus für die systematische Ableitung der partiellen Systemdifferentialgleichungen von einer beliebigen Anzahl an Auslegern vorgestellt werden. Mit Hilfe dieses Formalismus wird ein Simulationsmodell für die Bewegung eines Manipulators mit zwei elastischen Auslegern abgeleitet.

Die Abbildung 2.1 zeigt die Systemkonfiguration eines Manipulators mit zwei elastischen Auslegern. Der Ursprung des ortsfesten 0-Koordinatensystem sitzt im Schnittpunkt der

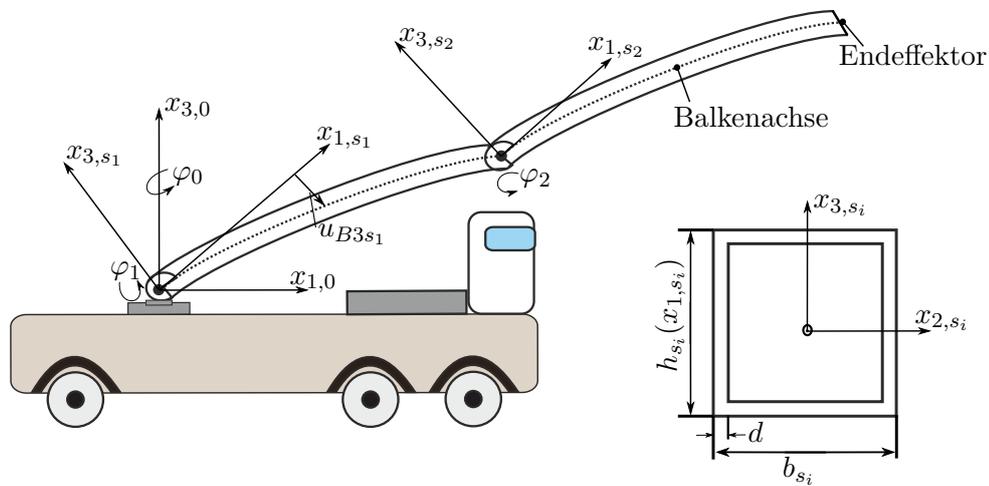


Abbildung 2.1: Aufbau der zu untersuchenden Systemkonfiguration eines Großraummanipulators.

Drehachsen des Drehwerks und des ersten horizontalen Drehgelenks. Die $x_{1,0}$ -Achse zeigt in Richtung des Fahrerhauses die $x_{3,0}$ -Achse senkrecht nach oben. Zusätzlich wurden noch zwei Koordinatensysteme eingeführt, welche fest mit den jeweiligen Auslegern verbunden sind. Die Koordinatensystemachsen eines Mastelementes i sind mit x_{1,s_i} , x_{2,s_i} und x_{3,s_i} definiert. Die Verdrehung durch das Drehwerk wird mit φ_0 bezeichnet. Mit φ_i wird der Gelenkwinkel zwischen den Mastelementen $i - 1$ und i bezeichnet. Der Torsionswinkel um die x_{1,s_i} -Achse des Auslegers i wird mit $\alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i})$ bezeichnet. Die Koordinatensysteme, welche fest mit dem Ausleger verbunden sind, wurden in das vordere Gelenk des jeweiligen Auslegers gelegt.

Die Abbildung 2.1 zeigt ebenfalls den Querschnitt eines Auslegers mit der Flächennormalen in Richtung der Auslegerachse. Es wird von einem dünnwandigen hohlen Kastenquerschnitt ausgegangen. Eine solche Art von Querschnitten ist oftmals bei der Leichtbauweise von Großraummanipulatoren vorzufinden. Damit lassen sich stabile Ausleger mit geringer Masse konstruieren. Der Querschnitt des zweiten Auslegers wird als inhomogen angenommen, wobei dieser linear verjüngend ist.

2.2 Modellierung der elastischen Verschiebungen

In diesem Abschnitt werden nun die verwendeten Ansätze für die infinitesimalen Verschiebungen innerhalb eines Auslegers s_i angegeben. Die bei einem Belastungsfall auftretenden elastischen Effekte stellen hierbei die Torsion um die Längsachse sowie die Verbiegungen in horizontaler und vertikaler Richtung eines Elementes des Manipulators dar. Die Ansätze werden jeweils im auslegerfesten Koordinatensystem angegeben.

2.2.1 Torsion um die Längsachse

Es wird der gewählte Ansatz für die Verschiebungen aufgrund der Torsion innerhalb eines elastischen Elementes i näher betrachtet. Dabei wurde die sogenannte Methode von Saint-Venant für die Modellierung der Torsionsbelastung verwendet, wobei die Annahmen hierfür in [17], [18], [19] und [20] näher erläutert werden. Bei diesen Annahmen wird vorausgesetzt, dass die Verwölbung ungehindert zugelassen wird und sich die Form der Stabquerschnitte durch die Verwölbung entlang der Stabachse nicht ändert. Eine solche Art der Torsion würde durch die Wölbkrafttorsion beschrieben werden. In der gegebenen Systemkonfiguration treffen die Annahmen nicht zur Gänze zu, da durch die einseitige Einspannung bzw. durch den inhomogenen Stabquerschnitt des zweiten Balkens die Annahmen verletzt sind. Durch die einseitige Einspannung wird an der Einspannstelle die Verwölbung nicht ungehindert zugelassen und es entsteht eine geringe Normalspannung entlang der Stabachse. Da aber sehr lange dünnwandige Elemente betrachtet werden und aufgrund der Geometrie der Querschnitte nur eine geringe Verwölbung entlang der Stabachse stattfindet, soll in dieser Arbeit dennoch die Saint-Venant Torsion angewandt werden.

Es wird nun die Variable $\alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i})$ für die Verdrehung des Auslegerquerschnittes entlang der Stabachse x_{1,s_i} gegenüber dem unbelasteten Zustand eingeführt. Die Verschiebung $\mathbf{u}_{T_{s_i}}(t, \mathbf{x}_{s_i})$ aufgrund der Torsion eines Querschnittes kann in der Form,

$$\mathbf{u}_{T_{s_i}}(t, \mathbf{x}_{s_i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \Phi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i}) \\ -x_{3,s_i} \alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i}) \\ x_{2,s_i} \alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i}) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

angegeben werden [17], [18]. Hierbei bezeichnet $\alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i})$ den Torsionswinkel, der positiv um die x_{1,s_i} -Achse des jeweiligen elastischen Elementes i definiert ist. Aufgrund der Verdrehung der Querschnitte kommt es zur einer Verwölbung, welche mit der allgemeinen Verwölbungsfunktion $\Phi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})$ beschrieben wird. Es wird dabei angenommen, dass die Verwölbung entlang der Stabachse dieselbe Form besitzt. Diese ist abhängig von der Geometrie des betrachteten Körpers, wobei sie unabhängig von der Stabachse x_{1,s_i} ist. Die Verschiebungen in x_{2,s_i} bzw. x_{3,s_i} -Richtung sind unter den getroffenen Annahmen nur vom Torsionswinkel abhängig. Es wurde hierbei implizit eine Kleinwinkelnäherung der Form

$$\cos(\alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i})) \approx 1 \quad (2.2a)$$

$$\sin(\alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i})) \approx \alpha_{T_{s_i}}(t, x_{1,s_i}) \quad (2.2b)$$

verwendet.

2.2.2 Verbiegung in horizontaler und vertikaler Richtung

In diesem Abschnitt werden die Ansätze der Verbiegungen eines elastischen Elementes i näher diskutiert, welche im weiteren Verlauf der Arbeit für die Beschreibung der Energien benötigt werden. Die Ansätze der Verbiegungen werden unter der Annahme festgelegt, dass die Ausleger die Eigenschaften eines Euler-Bernoulli-Balkens besitzen. Diese sind aufgrund der Geometrie des Auslegers erfüllt, welcher sich durch die sehr lange aber nur relativ dünne Form auszeichnet. Die elastischen Auslegerelemente werden als schubstarr modelliert. Weiterhin wird angenommen, dass Querschnitte, die normal zur Balkenachse sind, auch nach der Deformation normal zur deformierten Achse sind. Schließlich gilt, dass die Querschnitte auch nach der Deformation eben bleiben. Elastische Balkenelemente bei denen diese Annahmen nicht zu treffen können beispielsweise mit der Theorie nach Timoshenko behandelt werden. Eine Untersuchung der statischen Lösung der Randwertaufgaben für Balken mit unterschiedlichen Eigenschaften und daraus resultierenden Verschiebungsansätzen ist in [17] zu finden. Der aufgrund einer Biegebelastung resultierende Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_{Bsi}(t, \mathbf{x}_{s_i})$ ergibt sich zu [17], [19]

$$\mathbf{u}_{Bsi}(t, \mathbf{x}_{s_i}) = \begin{bmatrix} -x_{2,s_i}\beta_{B2s_i}(t, x_{1,s_i}) - x_{3,s_i}\beta_{B3s_i}(t, x_{1,s_i}) \\ u_{B2s_i}(t, x_{1,s_i}) \\ u_{B3s_i}(t, x_{1,s_i}) \end{bmatrix} \quad (2.3a)$$

$$\beta_{B2s_i}(t, x_{1,s_i}) = \frac{\partial u_{B2s_i}(t, x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \quad (2.3b)$$

$$\beta_{B3s_i}(t, x_{1,s_i}) = \frac{\partial u_{B3s_i}(t, x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}}. \quad (2.3c)$$

Dabei bezeichnet $u_{B2s_i}(t, x_{1,s_i})$ die Verschiebung in x_{2,s_i} -Richtung und $u_{B3s_i}(t, x_{1,s_i})$ die Verschiebung in x_{3,s_i} -Richtung. Der Winkel $\beta_{B2s_i}(t, x_{1,s_i})$ bzw. $\beta_{B3s_i}(t, x_{1,s_i})$ beschreibt die Verdrehung um die x_{3,s_i} -Achse bzw. die Verdrehung um die x_{2,s_i} -Achse des Auslegers s_i aufgrund der vorherrschenden Belastung. Der Winkel $\beta_{B2s_i}(t, x_{1,s_i})$ ist dabei positiv um die x_{3,s_i} -Achse definiert, wohingegen der Winkel $\beta_{B3s_i}(t, x_{1,s_i})$ negativ um die x_{2,s_i} -Achse definiert wurde. Diese Winkel lassen sich aufgrund der Euler-Bernoulli-Annahmen durch die partielle Ableitung der lokalen Verschiebungen $u_{B2s_i}(t, x_{1,s_i})$ und $u_{B3s_i}(t, x_{1,s_i})$ entlang der Auslegerachse x_{1,s_i} approximieren. Die Kleinwinkelnäherung

$$\cos(\beta_{B2s_i}(t, x_{1,s_i})) \approx 1 \quad (2.4a)$$

$$\sin(\beta_{B2s_i}(t, x_{1,s_i})) \approx \beta_{B2s_i}(t, x_{1,s_i}) \quad (2.4b)$$

$$\cos(\beta_{B3s_i}(t, x_{1,s_i})) \approx 1 \quad (2.4c)$$

$$\sin(\beta_{B3s_i}(t, x_{1,s_i})) \approx \beta_{B3s_i}(t, x_{1,s_i}) \quad (2.4d)$$

wurde hier implizit verwendet, da nur sehr kleine Winkel aufgrund der Verbiegungen zu erwarten sind.

Die gesamte Verschiebung eines Massenpunktes innerhalb eines Auslegers aufgrund der Deformationen kann nun auf Basis der getroffenen Annahmen als

$$\mathbf{u}_{s_i} = \mathbf{u}_{Ts_i} + \mathbf{u}_{Bsi} \quad (2.5)$$

eingeführt werden. Durch Einführung der elastischen Freiheitsgrade $\alpha_{T s_i}(t, x_{1, s_i})$, $u_{B 2 s_i}(t, x_{1, s_i})$ und $u_{B 3 s_i}(t, x_{1, s_i})$, sowie der Wölbfunktion $\Phi(x_{2, s_i}, x_{3, s_i})$ eines Elementes i des Manipulators kann nun in weiterer Folge die kinematische Beschreibung des gesamten Manipulators angegeben werden.

2.3 Kinematische Beschreibung

In diesem Abschnitt wird die kinematische Beschreibung eines Großraummanipulators mit beliebig vielen elastischen Elementen angegeben. Es werden exemplarisch die kinematischen Ketten für einen Manipulator mit zwei Auslegern dargestellt. Des Weiteren werden Vereinfachungen für die Rotationsmatrizen sowie Annahmen für die Längenänderung der Balken diskutiert. Durch diese lässt sich die resultierende Systemkomplexität ohne maßgebliche Einbußen in der Modellgenauigkeit verringern. Es sei dabei erwähnt, dass im folgenden die Zeitabhängigkeit der Variablen aufgrund der Lesbarkeit nicht explizit angeführt wird.

2.3.1 Rotationen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Formulierung der Rotationsmatrizen für die geschlossene Darstellung der Kinematik des elastischen Manipulators. Die Rotation durch das Drehwerk ist mit dem Gelenkwinkel φ_0 durch

$$\mathbf{R}_0^{s_0} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & -\sin(\varphi_0) & 0 \\ \sin(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

gegeben. Diese beschreibt die positive Drehung des Auslegers um die $x_{3,0}$ -Achse des Manipulators. Der Winkel φ_i eines der parallelen Gelenke erlaubt die Verdrehung um die x_{2, s_i} -Achse des Auslegers s_i . Die Rotationsmatrix für diese Verdrehung ist mit

$$\mathbf{R}_{s_{i-1}, L}^{s_i} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i) & 0 & -\sin(\varphi_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_i) & 0 & \cos(\varphi_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

beschrieben. Die Winkel sind dabei negativ um die x_{2, s_i} -Achse des Auslegers s_i definiert. Die Rotationsmatrix $\mathbf{R}_{s_{i-1}, L}^{s_i}$ beschreibt die Transformation eines im Koordinatensystem s_i angegebenen Punktes in das Koordinatensystem des vorherigen Auslegers s_{i-1}, L , wobei sich dieses am Ende des elastischen Balkens s_{i-1} befindet. Das Koordinatensystem s_{i-1}, L ist also fest mit dem Ende des verzerrten Auslegers s_{i-1} verbunden. Die Matrix soll für $i = 1$ in der Form $\mathbf{R}_{s_{0, L}}^{s_1} = \mathbf{R}_{s_0}^{s_1}$ bezeichnet werden, da sich vor dem ersten Element nur das Gelenk für die Drehung um die Hochachse befindet. Die Verdrehung der Auslegerquerschnitte

aufgrund der Torsion kann mit Hilfe einer ortsabhängigen Rotationsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{s_i}^{uT s_i}(x_{1,s_i}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_{T s_i}(x_{1,s_i})) & -\sin(\alpha_{T s_i}(x_{1,s_i})) \\ 0 & \sin(\alpha_{T s_i}(x_{1,s_i})) & \cos(\alpha_{T s_i}(x_{1,s_i})) \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_{T s_i}(x_{1,s_i}) \\ 0 & \alpha_{T s_i}(x_{1,s_i}) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

beschrieben werden. Die Transformation eines in diesem Koordinatensystem beschriebenen Punktes ist entlang der Balkenachse x_{1,s_i} durch den Torsionsfreiheitsgrad $\alpha_{T s_i}(x_{1,s_i})$ bestimmt. Es wurde hierbei die Kleinwinkelnäherungen aus (2.2) verwendet. Die Rotation zwischen dem tordierten Koordinatensystem des ersten Auslegers und dem ortsfesten Koordinatensystem, ist durch

$$\mathbf{R}_0^{uT s_1}(x_{1,s_1}) = \mathbf{R}_0^{s_0} \mathbf{R}_{s_0}^{s_1} \mathbf{R}_{s_1}^{uT s_1}(x_{1,s_1}) \quad (2.9)$$

gegeben, wobei mit $\mathbf{R}_{s_0}^{s_1}$ die Rotation des ersten Knickgelenkes beschrieben ist. Die kombinierte Rotation des Balkenendes $s_{i,L}$ aufgrund der auftretenden Deformationen, lässt sich mit Hilfe der einzelnen Rotationen aus Torsion, der Verdrehung, verursacht durch die Biegung in x_{3,s_i} -Richtung sowie der Verdrehung verursacht durch die Biegung in x_{2,s_i} -Richtung in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{s_i}^{uT s_{i,L}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_{T s_{i,L}}) & -\sin(\alpha_{T s_{i,L}}) \\ 0 & \sin(\alpha_{T s_{i,L}}) & \cos(\alpha_{T s_{i,L}}) \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_{T s_{i,L}} \\ 0 & \alpha_{T s_{i,L}} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{s_i}^{uB 3 s_{i,L}} &= \begin{bmatrix} \cos(\beta_{B 3 s_{i,L}}) & 0 & -\sin(\beta_{B 3 s_{i,L}}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta_{B 3 s_{i,L}}) & 0 & \cos(\beta_{B 3 s_{i,L}}) \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_{B 3 s_{i,L}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta_{B 3 s_{i,L}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{s_i}^{uB 2 s_{i,L}} &= \begin{bmatrix} \cos(\beta_{B 2 s_{i,L}}) & -\sin(\beta_{B 2 s_{i,L}}) & 0 \\ \sin(\beta_{B 2 s_{i,L}}) & \cos(\beta_{B 2 s_{i,L}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{B 2 s_{i,L}} & 0 \\ \beta_{B 2 s_{i,L}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10c)$$

beschreiben. Die durch die Torsion verursachte Verdrehung des Auslegerendes ist mit der Matrix $\mathbf{R}_{s_i}^{uT s_{i,L}}$ gegeben. Die Verbiegungen des Stabendes s_i verursachen eine Verdrehung,

welche mit Hilfe von $\mathbf{R}_{s_i}^{u_{B3s_i,L}}$ sowie $\mathbf{R}_{s_i}^{u_{B2s_i,L}}$ definiert sind. Diese Rotationsmatrizen lassen sich ebenfalls mittels Kleinwinkelnäherungen der Form (2.2) und (2.4) vereinfachen. Die Winkel sind jeweils um die Achse des Koordinatensystems eines nicht deformierten Auslegerendes beschrieben. Die Abbildung 2.2 zeigt die angenommenen Koordinatensysteme sowie die Definitionsrichtung der elastischen Winkel. Die elastischen Winkel $\alpha_{T s_i,L}$ und $\beta_{B2s_i,L}$ wurden dabei positiv um die jeweilige Achse definiert. Der Winkel $\beta_{B3s_i,L}$ hingegen ist in negativer Drehrichtung um die x_{2,s_i} -Achse festgelegt, wobei dies bereits in der Drehmatrix $\mathbf{R}_{s_i}^{u_{B3s_i,L}}$ berücksichtigt wurde.

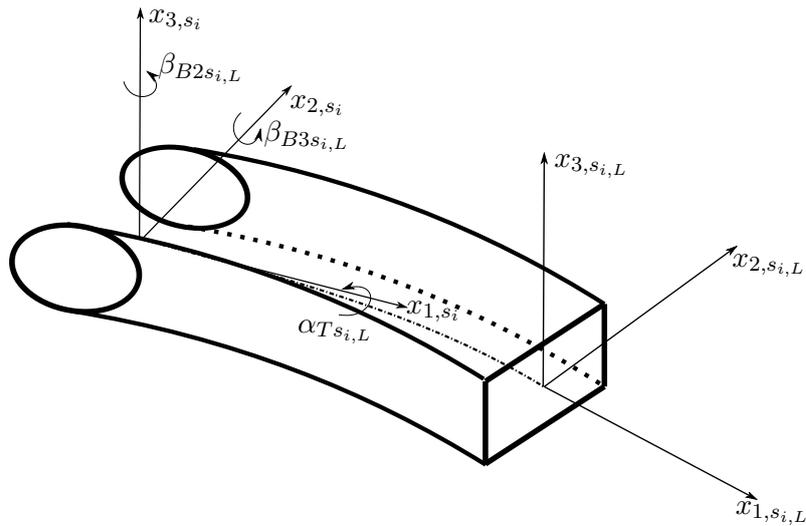


Abbildung 2.2: Lokale Koordinatensysteme und Winkel eines elastischen Auslegerelementes s_i .

Die gesamte Rotationsmatrix der Verdrehung des Balkenendes s_i kann nun als Kombination der einzelnen Drehung (2.10) als

$$\mathbf{R}_{s_i}^{s_i,L} = \mathbf{R}_{s_i}^{u_{T s_i,L}} \mathbf{R}_{s_i}^{u_{B3s_i,L}} \mathbf{R}_{s_i}^{u_{B2s_i,L}} \quad (2.11)$$

definiert werden. Es sei hierbei erwähnt, dass auch eine andere Parametrierung der kombinierten Rotation $\mathbf{R}_{s_i}^{s_i,L}$ zulässig wäre. Nun ergibt sich die für die kinematische Beschreibung notwendige Rotationsmatrix $\mathbf{R}_0^{s_i}$ zu

$$\mathbf{R}_0^{s_i} = \mathbf{R}_0^{s_0} \mathbf{R}_{s_0}^{s_1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\mathbf{R}_{s_j}^{s_{j+1}} \mathbf{R}_{s_j}^{s_{j+1}} \right), \quad (2.12)$$

wobei diese die Verdrehung des Auslegeranfanges s_i gegenüber dem ortsfesten Koordinatensystem beschreibt. Die Verdrehungen eines Massenpunktes im Element s_i aufgrund der Torsion $\alpha_{T s_i}$ und der Verbiegungen, u_{B2s_i} und u_{B3s_i} , werden implizit im Verschiebungsvektor (2.5) berücksichtigt. Durch diese Formulierung lassen sich alle Rotationen für die kinematische Beschreibung eines Massepunktes in einem beliebigen Balken des Manipulators angeben. Mit $\mathbf{R}_{s_{i-1,L}}^{s_i}$ wird die durch das Knickgelenk s_i verursachte Rotation

bezeichnet, welches sich am Ende des Auslegers s_{i-1} befindet. Die Verdrehung des Koordinatensystems am Ende eines Auslegers i gegenüber dem ortsfesten Koordinatensystem wird nun mit $\mathbf{R}_0^{s_i,L}$ bezeichnet und ist gegeben durch

$$\mathbf{R}_0^{s_i,L} = \mathbf{R}_0^{s_0} \mathbf{R}_{s_0}^{s_1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\mathbf{R}_{s_j}^{s_{j+1,L}} \mathbf{R}_{s_{j+1,L}}^{s_j} \right) \mathbf{R}_{s_i}^{s_i,L} . \quad (2.13)$$

Die Rotation des ersten Auslegerendes gegenüber dem ortsfesten Koordinatensystem ergibt sich somit zu

$$\mathbf{R}_0^{s_1,L} = \mathbf{R}_0^{s_0} \mathbf{R}_{s_0}^{s_1} \mathbf{R}_{s_1}^{s_1,L} \quad (2.14)$$

und die des zweiten Endes in der Form

$$\mathbf{R}_0^{s_2,L} = \mathbf{R}_0^{s_1,L} \mathbf{R}_{s_1,L}^{s_2} \mathbf{R}_{s_2}^{s_2,L} . \quad (2.15)$$

Durch die Definition der Rotationsmatrizen aus diesem Abschnitt kann nun in weiterer Folge die vollständige kinematische Kette eines Großraummanipulators mit N elastischen Elementen angegeben werden.

2.3.2 Kinematische Kette

Mit Hilfe der Verschiebungsansätze der Torsion und der Verbiegungen aus dem Abschnitt 2.2 sowie durch die Beschreibung der Rotationsmatrizen aus dem vorherigen Abschnitt 2.3.1 lässt sich nun die Bewegung eines Massenpartikels \mathbf{p}_{0,s_i} des elastischen Elements s_i im ortsfesten Koordinatensystem angeben. Das körperfeste Koordinatensystem wird hierbei in das Gelenk des Balkenelementes gelegt. Der Schwerpunkt eines Auslegers ohne das Auftreten von Deformationen errechnet sich durch

$$\mathbf{p}_{C,s_i} = \frac{1}{m_{s_i}} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{x}_{s_i} dV_{s_i} \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{x}_{s_i}^T = \begin{bmatrix} x_{1,s_i} & x_{2,s_i} & x_{3,s_i} \end{bmatrix} , \quad (2.16b)$$

wobei an dieser Stelle die konkrete Auswertung des Integrals sehr einfach möglich ist. Es wird bei der Berechnung des Schwerpunktes die Tatsache vernachlässigt, dass dieser aufgrund der Deformation eine geringfügige Verschiebung erfährt. Durch die getroffenen Annahmen ist davon auszugehen, dass dieser nur sehr minimale Verschiebungen erfährt. Die Bewegung eines Massenpartikels ist nun in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{0,s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) &= \mathbf{R}_0^{s_i} (\mathbf{x}_{s_i} + \mathbf{u}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i})) + \mathbf{p}_{E0,s_{i-1}} \\ &= \mathbf{R}_0^{s_i} (\mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) + \mathbf{u}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i})) + \mathbf{d}_0^{s_i} , \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{d}_0^{s_i} = \mathbf{p}_{E0,s_{i-1}} + \mathbf{R}_0^{s_i} \mathbf{p}_{C,s_i} \quad (2.17b)$$

gegeben, wobei \mathbf{x}_{s_i} dem Ortsvektor zu einem Partikel des nicht deformierten Körpers entspricht und $\mathbf{u}_{s_i}(x_{1,s_1})$ die lokale Verschiebung des Partikels bezeichnet. Beide Vektoren sind im körperfesten Koordinatensystem definiert. Der Vektor $\mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i})$ wird in der Form

$$\mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) = [x_{1,s_i} \ x_{2,s_i} \ x_{3,s_i}]^T - \mathbf{p}_{C,s_i} \quad (2.18)$$

eingeführt. Die kinematische Beschreibung $\mathbf{p}_{0,s_i}(\mathbf{x}_{s_i})$ der Bewegung eines Partikels ist im ortsfesten Koordinatensystem dargestellt. Der Vektor $\mathbf{p}_{E0,s_{i-1}}$ zeigt zum Ende des vorangegangenen Auslegers s_{i-1} und ist definiert durch

$$\mathbf{p}_{E0,s_{i-1}} = \mathbf{p}_{0,s_{i-1}}(\mathbf{x}_{s_{i-1},L}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{s_{i-1},L} = \begin{bmatrix} l_{s_{i-1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{p}_{E0,s_0} = \mathbf{0}, \quad (2.19b)$$

wobei dieser ebenfalls im ortsfesten Koordinatensystem definiert ist. Die kinematische Kette beschreibt nun die Lage beliebiger Punkte der Auslegerelemente (z. B. dem Endeffektor) im Inertialkoordinatensystem 0 in Abhängigkeit der Gelenkkordinaten φ_i und den elastischen Freiheitsgraden. Dies bildet nun die Grundlage für die Angabe der Energien im folgenden Abschnitt. Als nächstes werden jedoch noch einige Annahmen getroffen, durch die sich eine Vereinfachung der kinematischen Kette ergibt.

Modellvereinfachungen

Aufgrund der Erwartung von relativ kleinen Verschiebungen ist es möglich Vereinfachungen der kinematischen Beschreibung durchzuführen. Hierzu wird angenommen, dass nur sehr kleine lokale Verdrehungen aufgrund der Torsion sowie der Biegebelastung innerhalb eines Körpers auftreten. Damit lässt sich die Kleinwinkelnäherung für die Verdrehungen aufgrund der Deformationen innerhalb eines Balkens in der Form von (2.2) und (2.4) verwenden. Dadurch ergeben sich die vereinfachten Rotationsmatrizen (2.8) und (2.10) aufgrund der Verdrehungen durch die Deformationen. Durch die getroffenen Annahmen werden die kinematischen Beschreibungen der einzelnen Ausleger deutlich vereinfacht. Es lassen sich dadurch die Auswertungen von nichtlinearen Funktionen in der Kinematik einsparen, da die Cosinus- und Sinus-Terme entfallen. Dies hat den Vorteil, dass es zu einer Verringerung der Simulationszeit kommt. Des Weiteren werden dadurch die Näherungen für die Winkelprodukte

$$\alpha_{T s_j,L} \beta_{B 2 s_k,L} \approx 0 \quad (2.20a)$$

$$\alpha_{T s_j,L} \beta_{B 3 s_k,L} \approx 0 \quad (2.20b)$$

$$\beta_{B 3 s_j,L} \beta_{B 2 s_k,L} \approx 0 \quad (2.20c)$$

$$\alpha_{T s_j,L} \alpha_{T s_k,L} \approx 0 \quad (2.20d)$$

$$\beta_{B 2 s_j,L} \beta_{B 2 s_k,L} \approx 0 \quad (2.20e)$$

$$\beta_{B 3 s_j,L} \beta_{B 3 s_k,L} \approx 0 \quad (2.20f)$$

für alle k und j angewendet. Diese sind wiederum durch die Annahme von nur sehr kleinen auftretenden Verschiebungen gerechtfertigt. Treten Produkte von Winkelfunktionen höherer Ordnung auf, werden diese ebenfalls vernachlässigt.

In der nachfolgenden Modellierung der kinetischen Energie eines Auslegers, wird der Anteil der Längendehnung $\mathbf{u}_{T s_i}$ aufgrund der Torsion vernachlässigt indem die Wölbfunktion zu Null gesetzt wird. Diese Vernachlässigung wird deshalb getroffen, da die Wölbfunktion

unbekannt ist und deren Einfluss nur sehr gering ist. Bei der Ableitung der inneren Energie wird diese jedoch näherungsweise mit Hilfe eines semi-empirischen Ersatzparameters berücksichtigt. Die Längsdehnung verursacht nur einen vernachlässigbar kleinen Beitrag zur Gesamtenergie des Systems, da nur geringe Verwindungen der Querschnitte zu erwarten sind. Die zu erwartende geringe Torsion ist deshalb begründet, da von einer in der Realität nur sehr kleinen Torsionsbelastung der Ausleger ausgegangen wird. Dies lässt sich durch die Geometrie des Systems sowie durch die beschränkten Verfahrensgeschwindigkeiten und Momente begründen. Dadurch kommt es zu einer wesentlichen Vereinfachung des Gesamtmodells, sodass die relevanten Aspekte der Realität genügend genau vom mathematischen Modell erfasst werden. Zusätzlich wird in der kinematischen Beschreibung die Längenänderung aufgrund der Verbiegungen eines Auslegers vernachlässigt indem die lokalen Biegewinkel $\beta_{B2s_i}(t, x_{1,s_i})$ und $\beta_{B3s_i}(t, x_{1,s_i})$ aus (2.3) Null gesetzt werden. Dies ist wiederum dadurch begründet, da nur sehr kleine Biegewinkel innerhalb eines Auslegers zu erwarten sind.

Durch die angenommenen Vernachlässigungen lässt sich nun die vereinfachte Form der kinematischen Kette des Vektors \mathbf{p}_{0,s_i} zu

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{0,s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) &= \mathbf{R}_0^{s_i}(x_{1,s_i})\mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) + \mathbf{d}_0^{s_i}(x_{1,s_i}) \\ \mathbf{d}_0^{s_i}(x_{1,s_i}) &= \mathbf{p}_{E0,s_{i-1}} + \mathbf{R}_0^{s_i}(x_{1,s_i})\mathbf{p}_{C,s_i} + \mathbf{R}_0^{s_i}(x_{1,s_i}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_{s_i,2}(x_{1,s_i}) \\ \mathbf{u}_{s_i,3}(x_{1,s_i}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

angeben, wobei diese Beschreibung im weiteren Verlauf der Arbeit für die Ableitung der Energien im System verwendet wird. Diese Beschreibung ergibt sich durch das Einsetzen von (2.20) in (2.17) sowie durch das Vernachlässigen der Längsdehnungen von \mathbf{u}_{s_i} in Richtung x_{1,s_i} . Die Drehmatrizen in (2.21) stellen dabei die mit den Winkelnäherungen vereinfachten Drehungen dar. Da nun die vollständige kinematische Kette eines Großraummanipulators definiert wurde, kann im nächsten Kapitel die gesamte kinetische Energie des Systems angegeben werden.

2.4 Kinetische Energie des Systems

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Herleitung der gesamten kinetischen Energie eines Manipulators mit elastischen Mastelementen. Im Allgemeinen ist die kinetische Energie eines Körpers gegeben durch

$$T(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{p}}^T(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{z}) dV , \quad (2.22)$$

wobei $\mathbf{p}(\mathbf{z})$ den Vektor vom Inertialkoordinatensystem zu einem Massenpartikel innerhalb des Körpers bezeichnet. Mit \mathbf{z} wird ein Vektor bezeichnet, welcher die Koordinaten des Systems sowie notwendige Ortsableitungen zusammenfasst. Dieser wird im folgenden Abschnitt 2.4.1 genauer beschrieben. Er setzt sich aus den Gelenkwinkeln, den Torsionswinkeln sowie den Biegungen der elastischen Balken zusammen. Die gesamte kinematische Energie des Manipulators aus N Auslegern und N Punktmassen lässt sich durch die

Teilenergien der einzelnen Körper beschreiben

$$T_{ges}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \sum_{i=1}^N (T_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) + T_{m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})) . \quad (2.23)$$

Mit T_{s_i} wird die kinetische Energie eines Auslegers s_i bezeichnet und T_{m_i} gibt die kinetische Energie einer Masse am Ende des Auslegers s_i an. Die Punktmassen dienen als Ersatzgrößen für die diskontinuierliche Massenverteilung, welche durch die Gelenkantriebe entsteht. Der Endeffektor des Manipulators wird als Punktmasse modelliert und besitzt zusätzlich noch ein Trägheitsmoment. Bei der Modellierung der anderen Ersatzmassen wird dieses Trägheitsmoment vernachlässigt. Bei der Beschreibung der gesamten kinetischen Energie ist drauf zu achten, dass alle Teilenergien auf das Inertialkoordinatensystem bezogen sind. Dazu wird in dieser Arbeit das ortsfeste Koordinatensystem des Manipulators verwendet. Es wird nun näher erläutert, wie sich der Vektor \mathbf{z} zusammensetzt.

2.4.1 Vektoren der beschreibenden Systemgrößen des Systems

In diesem Abschnitt werden die Vektoren angegeben, die für die Herleitung der Bewegungsgleichungen notwendig sind. Es wird darauf geachtet, dass eine einfache Formulierung möglich ist und sich eine einfache Darstellung des örtlich diskretisierten Systems aus gewöhnlichen Differentialgleichungen ergibt. Der Vektor $\mathbf{z}_{s_i}(x_{1,s_i})$, welcher sich aufgrund der Deformation eines Auslegers ergibt, wird nun zu

$$\mathbf{z}_{s_i}(x_{1,s_i}) = \begin{bmatrix} \alpha_{T s_i}(x_{1,s_i}) \\ \frac{\partial \alpha_{T s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \\ u_{B2s_i}(x_{1,s_i}) \\ \frac{\partial^2 u_{B2s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \\ u_{B3s_i}(x_{1,s_i}) \\ \frac{\partial^2 u_{B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

definiert. Dabei wird mit $\alpha_{T s_i}(x_{1,s_i})$ der lokale Torsionswinkel, mit $u_{B2s_i}(x_{1,s_i})$ die lokale Verbiegung in Richtung x_{2,s_i} und mit $u_{B3s_i}(x_{1,s_i})$ die lokale Verbiegung in Richtung x_{3,s_i} innerhalb eines Auslegers s_i bezeichnet. Die in \mathbf{z}_{s_i} beinhaltenden örtlichen Ableitungen dienen für eine einfache Darstellung der Verzerrungsenergie des Systems.

Im Weiteren werden noch als Systemgrößen die Verschiebungen sowie die Winkel am Ende eines Auslegers im Vektor $\mathbf{z}_{L s_i}$

$$\mathbf{z}_{L s_i} = \begin{bmatrix} \alpha_{T s_i,L} \\ u_{B2s_i,L} \\ \beta_{B2s_i,L} \\ u_{B3s_i,L} \\ \beta_{B3s_i,L} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

zusammengefasst. Diese sind rein zeitabhängige Größen und geben die Deformation des Auslegerendes s_i an. Der Winkel $\alpha_{T s_i,L} = \alpha_{T s_i}(l_{s_i})$ entspricht der Torsion des Auslegerendes. Hierbei ist mit $\beta_{B2s_i,L} = \partial_{x_{1,s_i}} u_{B2s_i}(x_{1,s_i})|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}}$ der Winkel aufgrund der

Verbiegung in x_{2,s_i} -Richtung und mit $\beta_{B3s_i,L} = \partial_{x_{1,s_i}} u_{B3s_i}(x_{1,s_i})|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}}$ wird der Winkel aufgrund der Verbiegung in x_{3,s_i} -Richtung am Ende eines Auslegers bezeichnet. Mit diesem lässt sich im Weiteren der Einfluss der Deformation des Elementes s_i auf den darauffolgenden Ausleger s_{i+1} beschreiben.

Die Freiheitsgrade durch die Starrkörpergelenke eines Aufbaus mit N Auslegern werden im Vektor

$$\mathbf{z}_{st} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

zusammengefasst. Nun kann der Vektor $\mathbf{z}(x_{1,s_1}, \dots, x_{1,s_N})$ für das gesamte System wie folgt

$$\mathbf{z}(x_{1,s_1}, \dots, x_{1,s_N}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{s_1}(x_{1,s_1}) \\ \mathbf{z}_{Ls_1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{s_N}(x_{1,s_N}) \\ \mathbf{z}_{Ls_N} \\ \mathbf{z}_{st} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

definiert werden, wobei die Verschiebungsparameter jeweils im körperfesten Koordinatensystem des zugehörigen Auslegers s_i definiert sind. Zusätzlich wird noch der Vektor $\bar{\mathbf{z}}$

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{Ls_1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{Ls_N} \\ \mathbf{z}_{st} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

eingeführt, der im späteren Verlauf der Arbeit verwendet wird.

Für einen Großraummanipulator mit zwei Auslegern ergibt sich der Vektor \mathbf{z} zu

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{s_1}(x_{1,s_1}) \\ \mathbf{z}_{Ls_1} \\ \mathbf{z}_{s_2}(x_{1,s_2}) \\ \mathbf{z}_{Ls_2} \\ \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Als nächstes werden die Vektoren der translatorischen Geschwindigkeiten sowie der Winkelgeschwindigkeiten in Abhängigkeit des ortsabhängigen Vektors \mathbf{z} eingeführt

2.4.2 Manipulator-Jacobimatrix

Die Beschreibung der lokalen translatorischen Geschwindigkeiten sowie der lokalen Winkelgeschwindigkeiten eines Massedichtepunktes des Teilkörpers in Abhängigkeit des Vektors \mathbf{z} wird in diesem Teilabschnitt diskutiert. Damit können die kinetischen Energien in Matrixschreibweise angegeben werden. Zusätzlich lassen sich damit die externen Kräfte

beschreiben, die auf die einzelnen Teilkörper des Manipulators wirken. Die translatorischen Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeiten müssen in Abhängigkeit von \mathbf{z} und $\dot{\mathbf{z}}$ dargestellt werden. Dies lässt sich unter Zuhilfenahme der Manipulator-Jacobi-Matrizen sehr elegant bewerkstelligen, wie z. B. in [21] für den Starrkörperfall gezeigt wird. Im weiteren Verlauf der Arbeit ist der Anteil der Manipulator-Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_v)_X^Y$ für die Darstellung des Vektors der translatorischen Geschwindigkeiten \mathbf{v}_X^Y eines Massepunktes in der Form

$$\mathbf{v}_X^Y(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = (\mathbf{J}_v)_X^Y(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} \quad (2.30)$$

definiert. Dabei ist der Geschwindigkeitsvektor im Koordinatensystem X dargestellt, wobei es sich um die Geschwindigkeit eines Massenpartikels im elastischen Element Y handelt. Die Matrix $(\mathbf{J}_\omega)_X^Y$ wird zur Beschreibung des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{\omega}_X^Y$ verwendet. Durch $\boldsymbol{\omega}_X^Y$ wird die Winkelgeschwindigkeit des Koordinatensystems Y beschrieben, wobei der Vektor im Koordinatensystem X dargestellt ist. Der Vektor wird in Form von

$$\boldsymbol{\omega}_X^Y(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = (\mathbf{J}_\omega)_X^Y(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} \quad (2.31)$$

angeschrieben. Es ist dadurch möglich, den Winkelgeschwindigkeitsvektor in Abhängigkeit des eingeführten Vektors \mathbf{z} und $\dot{\mathbf{z}}$ darzustellen. Mit \mathbf{z} und den Manipulator-Jacobi-Matrizen kann nun die kinetische Energie angegeben werden, welche im weiteren Verlauf für das Hamilton-Prinzip benötigt wird.

2.4.3 Kinetische Energie T_{s_i} eines Auslegers s_i

Die gesamte kinetische Energie T_{s_i} eines Auslegers s_i ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\mathbf{p}}_{0,s_i}^T(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{p}}_{0,s_i}(\mathbf{z}) dV_{s_i} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{ls_i} \int_{\mathcal{A}} \rho \left(\dot{\mathbf{R}}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) + \dot{\mathbf{d}}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \right)^T \\ & \left(\dot{\mathbf{R}}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) + \dot{\mathbf{d}}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \right) dA_{s_i} dx_{1,s_i} = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^{ls_i} \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})) \mathbf{R}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) + \dot{\mathbf{d}}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \right)^T \\ & \left(\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})) \mathbf{R}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i}) + \dot{\mathbf{d}}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \right) dA_{s_i} dx_{1,s_i} , \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei der Vektor $\mathbf{p}_{s_i}(\mathbf{x}_{s_i})$ in (2.18) definiert ist. Mit $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_X^Y)$ wurde die schiefsymmetrische Matrix des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{\omega}_X^Y$ eingeführt, die sich in der Form

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_X^Y) = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_X^Y[3] & \boldsymbol{\omega}_X^Y[2] \\ \boldsymbol{\omega}_X^Y[3] & 0 & -\boldsymbol{\omega}_X^Y[1] \\ -\boldsymbol{\omega}_X^Y[2] & \boldsymbol{\omega}_X^Y[1] & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

angeben lässt. Die kinetische Energie eines Auslegers s_i ist von \mathbf{z}_{s_i} , den Gelenkwinkeln $(\varphi_0, \dots, \varphi_i)$, den Vektoren $(\mathbf{z}_{s_{1,L}}, \dots, \mathbf{z}_{s_{i-1,L}})$ sowie deren zeitlichen Ableitungen abhängig. Nun lässt sich durch ein paar einfache Umformungen die kinetische Energie in die folgenden

drei Anteile T_{R,s_i} , T_{t,s_i} sowie T_{k,s_i} aufspalten. Die notwendigen Umformungen sind in [21] dargestellt.

Der rotatorische Anteil $T_{s_i,R}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ der kinetischen Energie wird mit

$$\begin{aligned} T_{R,s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\omega}_0^{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}))^T \mathbf{I}_{0,As_i}(\mathbf{z}) \boldsymbol{\omega}_0^{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) dV_{s_i} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l_{s_i}} \dot{\mathbf{z}}^T ((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_i}(\mathbf{z}))^T \mathbf{I}_{0,As_i}(\mathbf{z}) (\mathbf{J}_\omega)_0^{s_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} dx_{1,s_i} \end{aligned} \quad (2.34)$$

bezeichnet. In der kinetischen Energie (2.34) wird durch $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_i}$ die Jacobi-Manipulator-Matrix des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{\omega}_0^{s_i}$ bezeichnet. Mit $\mathbf{I}_{0,As_i}(\mathbf{z})$ wird die Flächenträgheitsmatrix eines Auslegers definiert, die im ortsfesten Koordinatensystem beschrieben ist. Sie lässt sich durch

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{0,As_i}(\mathbf{z}) &= \mathbf{R}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \mathbf{I}_{As_i}(x_{1,s_i}) (\mathbf{R}_0^{s_i}(\mathbf{z}))^T \\ \mathbf{I}_{As_i}(x_{1,s_i}) &= \int_{\mathcal{A}} \rho \begin{bmatrix} x_{2,s_i}^2 + x_{3,s_i}^2 & -(x_{1,s_i} - \mathbf{p}_{Cs_i,1})x_{2,s_i} & -(x_{1,s_i} - \mathbf{p}_{Cs_i,1})x_{3,s_i} \\ -(x_{1,s_i} - \mathbf{p}_{Cs_i,1})x_{2,s_i} & (x_{1,s_i} - \mathbf{p}_{Cs_i,1})^2 + x_{3,s_i}^2 & -x_{2,s_i}x_{3,s_i} \\ -(x_{1,s_i} - \mathbf{p}_{Cs_i,1})x_{3,s_i} & -x_{2,s_i}x_{3,s_i} & (x_{1,s_i} - \mathbf{p}_{Cs_i,1})^2 + x_{2,s_i}^2 \end{bmatrix} dA_{s_i} \end{aligned} \quad (2.35)$$

berechnen. Darin bezeichnet $\mathbf{p}_{Cs_i,1}$ den ersten Eintrag des Schwerpunktvektors (2.16), der im körperfesten Koordinatensystem s_i definiert ist. Die Einträge $\mathbf{p}_{Cs_i,2}$ und $\mathbf{p}_{Cs_i,3}$ ergeben sich für den angenommenen Querschnitt und die Wahl der Koordinatensysteme zu Null.

Eine Variante das Flächenintegral in (2.35) für einen rechteckförmigen Hohlquerschnitt zu berechnen ist eine Zerlegung der gesamten Fläche in 4 Teilabschnitte, wobei zwei jeweils identisch sind. Die konkrete Ausführung für ein Auslegerelement ist durch

$$\int_{\mathcal{A}} (\cdot) dA_{s_i} = 2 \int_{-\frac{h_{s_i}(x_{1,s_i})}{2}}^{\frac{h_{s_i}(x_{1,s_i})}{2}} \int_{b_{s_i}-d}^{b_{s_i}} (\cdot) dx_{2,s_i} dx_{3,s_i} + 2 \int_{\frac{h_{s_i}(x_{1,s_i})}{2}-d}^{\frac{h_{s_i}(x_{1,s_i})}{2}} \int_{-b_{s_i}+d}^{b_{s_i}-d} (\cdot) dx_{2,s_i} dx_{3,s_i} \quad (2.36)$$

gegebenen, wobei die Abhängigkeit der Höhe $h_{s_i}(x_{1,s_i})$ von x_{1,s_i} durch die Annahme eines linear kleiner werdenden Querschnittes des zweiten Mastelementes herrührt. Diese lineare Funktion der Höhe lässt sich der in Form

$$h_{s_i}(x_{1,s_i}) = \frac{h_{s_i,2} - h_{s_i,1}}{l_{s_i}} x_{1,s_i} + h_{s_i,1} \quad (2.37)$$

angeben. Die Flächenträgheitsmatrix ist daher explizit abhängig vom Ort x_{1,s_i} .

Der translatorische Anteil $T_{s_i,t}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ der kinetischen Energie ergibt sich zu

$$\begin{aligned} T_{t,s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho (\dot{\mathbf{d}}_0^{s_i}(\mathbf{z}))^T \dot{\mathbf{d}}_0^{s_i}(\mathbf{z}) dV_{s_i} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l_{s_i}} \tilde{m}_{s_i}(x_{1,s_i}) \dot{\mathbf{z}}^T ((\mathbf{J}_v)_0^{s_i}(\mathbf{z}))^T (\mathbf{J}_v)_0^{s_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} dx_{1,s_i}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

wobei mit $\tilde{m}_{s_i}(x_{1,s_i})$ die Linienmassendichte des Elements s_i bezeichnet wird. Die Jacobi-Manipulator-Matrix der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0^{s_i}$ ist dabei mit $(\mathbf{J}_v)_0^{s_i}$ definiert worden.

Der dritte Term der kinetischen Energie entsteht aus der Tatsache, dass es aufgrund der Deformation zu einer Verschiebung des Schwerpunktes kommt. Dieser Anteil $T_{k,s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ der Energie ist gegeben durch

$$T_{k,s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \rho \int_V (\dot{\mathbf{d}}_0^{s_i}(\mathbf{z}))^T \mathbf{S}(\omega_0^{s_i}(t, x_{1,s_i})) \mathbf{R}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \begin{pmatrix} x_{1,s_i} \\ x_{2,s_i} \\ x_{3,s_i} \end{pmatrix} - \mathbf{p}_{C_{s_i}}) dV_{s_i}, \quad (2.39)$$

worin nur bereits bekannte Größen vorkommen. Dieser Anteil würde sich bei einem reinen Starrkörper identisch zu Null ergeben, da das körperfeste Koordinatensystem in den Masseschwerpunkt $\mathbf{p}_{C_{s_i}}$ des unverzerrten Körpers gelegt wurde. Dieser Term der Energie wird nun im weiteren Verlauf der Arbeit vernachlässigt, da er nur einen sehr geringfügigen Beitrag zur gesamten kinetischen Energie (2.32) eines Auslegers liefert. Es kann nun die kinetische Energie mit Hilfe der Massenbelagsmatrix $\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}$ eines Auslegers s_i in der Form

$$T_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \int_0^{l_{s_i}} \dot{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} dx_{1,s_i} \quad (2.40a)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) = \tilde{m}_{s_i}(x_{1,s_i}) ((\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_i}(\mathbf{z}))^T (\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_i}(\mathbf{z}) + ((\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_i}(\mathbf{z}))^T \mathbf{I}_{0,As_i} (\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_i}(\mathbf{z}) \quad (2.40b)$$

beschrieben werden, wobei der Term aus (2.39) vernachlässigt wurde.

2.4.4 Kinetische Energie T_{m_i} einer Masse am Ende eines Auslegers

In diesem Teil der Arbeit wird der kinetische Energieanteil einer Masse am Ende eines elastischen Elementes hergeleitet. Diese Ersatzgröße dient zur Modellierung der Gelenkantriebe des Systems. Darüber hinaus erlaubt es die Berücksichtigung des Endeffektors im mathematischen Modell des Manipulators. Damit dieser Energiebeitrag angegeben werden kann, wird die kinematische Beschreibung des Auslegerendes \mathbf{p}_{E0,s_i} aus (2.19) benötigt. Der translatorische Anteil der Energie $T_{t,m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ der Masse m_i ist durch

$$T_{t,m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{p}}_{E0,s_i}^T(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{p}}_{E0,s_i}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{z}}^T \left((\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_i,L}(\mathbf{z}) \right)^T (\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_i,L}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} \quad (2.41)$$

gegeben. Dieser Anteil hängt nur von den Deformationen des vorhergehenden und des eigenen Balkenendes ($\mathbf{z}_{L_{s_1}}, \dots, \mathbf{z}_{L_{s_i}}$) und dessen Zeitableitungen ($\dot{\mathbf{z}}_{L_{s_1}}, \dots, \dot{\mathbf{z}}_{L_{s_i}}$) ab. Zusätzlich besteht natürlich noch die Abhängigkeit von den Stellungen und Geschwindigkeiten der vorangegangenen Gelenke (ϕ_0, \dots, ϕ_i). Als nächstes lässt sich der rotatorische Anteil der Energie $T_{R,m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ mit Hilfe einer Trägheitsmatrix \mathbf{I}_{m_i} der Ersatzmasse m_i in der Form

$$T_{R,m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \left(\omega_0^{s_i,L}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \right)^T \mathbf{R}_0^{s_i,L}(\mathbf{z}) \mathbf{I}_{m_i} \left(\mathbf{R}_0^{s_i,L}(\mathbf{z}) \right)^T \omega_0^{s_i,L}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \left((\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_i,L}(\mathbf{z}) \right)^T \mathbf{R}_0^{s_i,L}(\mathbf{z}) \mathbf{I}_{m_i} \left(\mathbf{R}_0^{s_i,L}(\mathbf{z}) \right)^T (\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_i,L}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} \quad (2.42)$$

angeben. In dieser Arbeit wird die rotatorische Trägheit der Auslegerantriebe vernachlässigt, weil diese nur einen vernachlässigbar kleinen Beitrag der gesamten Energie des

Systems ausmacht. Es lässt sich nun auch die gesamte kinetische Energie einer Ersatzmasse mithilfe der Massenmatrix \mathbf{D}_{m_i} beschreiben. Diese Darstellung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} T_{m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= T_{t,m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) + T_{R,m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \left(m_i \left((\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_i,L} \right)^T (\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_i} + \left((\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_i,L} \right)^T \mathbf{R}_0^{s_i,L} I_{m_i} \left(\mathbf{R}_0^{s_i,L} \right)^T \mathbf{J}_{\omega}_0^{s_i,L} \right) \dot{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{D}_{m_i}(\mathbf{z}_{Ls_1}, \dots, \mathbf{z}_{Ls_i}, \mathbf{z}_{st}) \dot{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

die im weiteren Verlauf für die Herleitung der Systemdifferentialgleichungen verwendet wird. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der Herleitung der Verzerrungsenergiedichte eines deformierbaren Körpers, der eine Torsion sowie Verbiegungen in zwei Raumrichtungen erfährt.

2.5 Verzerrungsenergie des Systems

In diesem Abschnitt erfolgt die Festlegung der elastischen Materialeigenschaften, wodurch die innere Verzerrungsenergiedichte angegeben werden kann. Im Allgemeinen ist die Verzerrungsenergiedichte innerhalb eines elastischen Materials durch

$$\pi = \int_0^\epsilon \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) : d\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.44)$$

definiert. Mit $\boldsymbol{\epsilon}$ wird der Verzerrungstensor zweiter Stufe bezeichnet und mit $\boldsymbol{\sigma}$ der Cauchy-Spannungstensor, wie er z. B. in [17], [18], [19] definiert ist. Um die Verzerrungsenergie explizit anschreiben zu können, muss im Folgenden noch eine Materialbeziehung festgelegt werden. Diese gibt den Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Spannungen innerhalb eines Materials an. Für nähere Details zu unterschiedlichen Materialmodellen sei auf [17], [18], [19] verwiesen. In dieser Arbeit wird immer von einer geometrischen Linearisierung der Verzerrungen ausgegangen. Dadurch entfällt die Unterscheidung zwischen Momentan- und Referenzkonfiguration, wodurch die Beschreibung der Energien um einiges erleichtert wird. Die Näherung ist deshalb erlaubt, da von relativ kleinen Deformationen ausgegangen wird. Die Beziehung für ein homogenes, linear-elastisches Material ergibt sich in der Einsteinschen Summenkonvention zu

$$\sigma_{ab} = C_{abcd} \epsilon_{cd} \quad (2.45)$$

mit den Komponenten des Steifigkeitstensor \mathbf{C} des Materials. Diese Gleichung wird in der Literatur auch als das Hooke'sche Gesetz bezeichnet. Im weiteren Verlauf der Arbeit ist wichtig, dass sich die Verzerrungsenergiedichte in der Form

$$\pi = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \epsilon_{ab} = \frac{1}{2} C_{abcd} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} \quad (2.46a)$$

anschreiben lässt. Der symmetrische Steifigkeitstensor für ein isotropes Material lässt sich durch eine skalare Dekompensation in

$$C_{abcd} = \lambda \delta_{ab} \delta_{cd} + G(\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{cb}) \quad (2.47)$$

zerlegen, wobei mit λ und G die sogenannten Lamé'schen Konstanten eingeführt werden. Darin stellt δ_{ab} das Kronecker-Delta-Symbol dar. Die zweite Lamé'sche-Konstante G wird oftmals auch als Schubmodul bezeichnet. λ und G lassen sich mit Hilfe des Elastizitätsmoduls E sowie der Querkontraktionszahl ν wie folgt

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.48a)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.48b)$$

ausdrücken. Es ist nun im Weiteren möglich, die Energieanteile der Verzerrungsenergie aufgrund der Torsion sowie der Biegungen eines Auslegers herzuleiten. Die Verschiebungen aufgrund der Torsion werden hierbei durch den Ansatz aus (2.1) beschrieben. Die lokalen Verschiebungen entlang der Auslegerachse aufgrund der Verbiegungen in x_{2,s_i} - und x_{3,s_i} -Richtung sind durch den Ansatz (2.3) gegeben. Die gesamte Verschiebung aufgrund der Verzerrung innerhalb des Auslegers ist durch die Summe der lokalen Deformationen definiert. Aufgrund der Annahme, dass nur infinitesimale Verschiebungen auftreten, lassen sich alle kinematischen Größen der Kontinuumsmechanik durch den Gradienten des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} ausdrücken. Hierbei ergibt sich der infinitesimale Verzerrungstensor ϵ zu

$$\epsilon_{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_b}{\partial x_a} + \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right). \quad (2.49)$$

Mit der Materialbeziehung (2.45) und dem Steifigkeitstensor (2.47) lassen sich nun auch die Komponenten des infinitesimalen Spannungstensors angeben. Wie nun einfach ersichtlich ist ergeben sich die Komponenten σ_{22} , σ_{33} , und σ_{23} des Spannungstensors zu

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= 2G\epsilon_{22} + \lambda\epsilon_{22} \\ \sigma_{33} &= 2G\epsilon_{33} + \lambda\epsilon_{33} \\ \sigma_{23} &= 2G\epsilon_{23}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Für das angenommene Verschiebungsfeld (2.5) verschwinden die Verzerrungen $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{23} = 0$. Die auftretenden Normalspannungen σ_{22} , σ_{33} sowie die Schubspannung σ_{23} liefern keinen Beitrag zur gesamten Verzerrungsenergie dichte. Die Normalspannung σ_{11} an einer Schnittfläche, mit der Normalen in Richtung der Stabachse, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2G\epsilon_{11} + \lambda\epsilon_{11} \\ &= \tilde{E} \left(\frac{\partial^2 \alpha_T(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \Phi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i}) - x_{2,s_i} \frac{\partial^2 u_{B2}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} - x_{3,s_i} \frac{\partial^2 u_{B3}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

für das betrachtete Materialmodell, wobei

$$\tilde{E} = 2G + \lambda = E \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.52)$$

eingeführt wurde. Für Stahl gilt $\nu = 0.2 - 0.3$, womit $\tilde{E} = 1.1E - 1.3E$ folgt. Da die Änderung der Verwindung $\partial_{x_{1,s_i}} \alpha_T(x_{1,s_i})$ entlang der Stabachse verschwindend gering ist, kann

dieser Beitrag zur gesamten Verzerrungsenergie in weiterer Folge vernachlässigt werden. Dies liegt hauptsächlich an den zugrundeliegenden Geometrien des in dieser Arbeit betrachteten Manipulators. Damit ergibt sich der erste Anteil an der Verzerrungsenergiedichte π_{Bs_i} zu

$$\begin{aligned} \pi_{Bs_i} = & \frac{1}{2} \tilde{E} x_{2,s_i}^2 \left(\frac{\partial^2 u_{B2}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right)^2 - \tilde{E} x_{2,s_i} x_{3,s_i} \frac{\partial^2 u_{B2}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \frac{\partial^2 u_{B3}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} + \\ & + \frac{1}{2} \tilde{E} x_{3,s_i}^2 \left(\frac{\partial^2 u_{B3}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

welcher rein von den Verbiegungen eines elastischen Elements abhängig ist. Die Spannungen $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ bzw. $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ sind durch

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & G \frac{\partial \alpha_T(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \left(\frac{\partial \Phi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})}{\partial x_{2,s_i}} - x_{3,s_i} \right) = G \frac{\partial \alpha_T(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \frac{\partial \psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})}{\partial x_{3,s_i}} \\ \sigma_{13} = & G \frac{\partial \alpha_T(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \left(\frac{\partial \Phi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})}{\partial x_{3,s_i}} + x_{2,s_i} \right) = -G \frac{\partial \alpha_T(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \frac{\partial \psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})}{\partial x_{2,s_i}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

gegeben, wobei $\psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})$ die Prandtlsche Spannungsfunktion bezeichnet [17],[18], [19]. Es ist möglich, diese aus den Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen, welche durch Anwendung auf eine Poisson-Gleichung führen. Die Lösung dieser erfordert noch zusätzliche Annahmen an die Spannungsvektoren an den Mantelflächen. Es wird in dieser Arbeit nicht näher auf die Lösung dieser Gleichung eingegangen. Es wird an der Stelle ein Ersatzparameter eingeführt, wie in [17], für welchen die semi-empirische Lösung aus der Literatur [22], [23] verwendet wird. Damit lässt sich der zweite Anteil der Verzerrungsenergiedichte mit

$$\begin{aligned} \pi_{Ts_i} = & \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial \alpha_T(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial \psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})}{\partial x_{3,s_i}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})}{\partial x_{2,s_i}} \right)^2 \right) \\ = & \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial \alpha_T(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \right)^2 (\nabla \psi)^T (\nabla \psi) \end{aligned} \quad (2.55)$$

beschreiben, wobei diese nur mehr rein von der Torsion eines Auslegers abhängig ist. Die gesamte Verzerrungsenergiedichte eines Auslegers ergibt sich aus der Summe des Anteils verursacht durch die Verbiegungen (2.53) sowie dem Anteil der Torsion (2.55). In den weiteren Betrachtungen wird anstatt der Verzerrungsenergiedichte die Verzerrungsenergie selbst benötigt. Diese ergibt sich durch Integration über das Volumen eines Auslegers zu

$$\Pi_{s_i} = \int_{\mathcal{V}} \pi_{Bs_i} + \pi_{Ts_i} dV. \quad (2.56)$$

Die Verzerrungsenergie Π_{Bs_i} der Verbiegungen kann nun weiter vereinfacht angeschrieben werden

$$\begin{aligned}
\Pi_{Bs_i} &= \int_{\mathcal{V}} \pi_{Bs_i} dV = \int_0^{ls_i} \left(\frac{1}{2} \tilde{E} \int_{\mathcal{A}} x_{2,s_i}^2 dA(x_{1,s_i}) \left(\frac{\partial^2 u_{B2}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \tilde{E} \int_{\mathcal{A}} x_{2,s_i} x_{3,s_i} dA(x_{1,s_i}) \frac{\partial^2 u_{B2}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \frac{\partial^2 u_{B3}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \tilde{E} \int_{\mathcal{A}} x_{3,s_i}^2 dA(x_{1,s_i}) \left(\frac{\partial^2 u_{B3}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right)^2 \right) dx_{1,s_i} \\
&= \frac{1}{2} \tilde{E} \int_0^{ls_i} \left(I_{B22}(x_{1,s_i}) \left(\frac{\partial^2 u_{B2}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right)^2 + I_{B33}(x_{1,s_i}) \left(\frac{\partial^2 u_{B3}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right)^2 \right) dx_{1,s_i} .
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Mit $I_{B22}(x_{1,s_i})$ und $I_{B33}(x_{1,s_i})$ werden hier die Flächenträgheitsmomente eingeführt. Das Deviationsmoment $I_{B23}(x_{1,s_i})$ ergibt sich identisch zu Null für das gewählte Koordinatensystem.

Die Verzerrungsenergie Π_{Ts_i} aufgrund der Torsion ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\Pi_{Ts_i} &= \int_{\mathcal{V}} \pi_{Ts_i} dV \\
&= \int_0^{ls_i} \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial \alpha_{Ts_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \right)^2 \int_{\mathcal{A}} (\nabla \psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i}))^T (\nabla \psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})) dA(x_{1,s_i}) dx_{1,s_i} = \\
&\int_0^{ls_i} \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial \alpha_{Ts_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \right)^2 J_T(x_{1,s_i}) dx_{1,s_i}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

mit

$$J_T = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i}))^T (\nabla \psi(x_{2,s_i}, x_{3,s_i})) dA(x_{1,s_i}) , \tag{2.59}$$

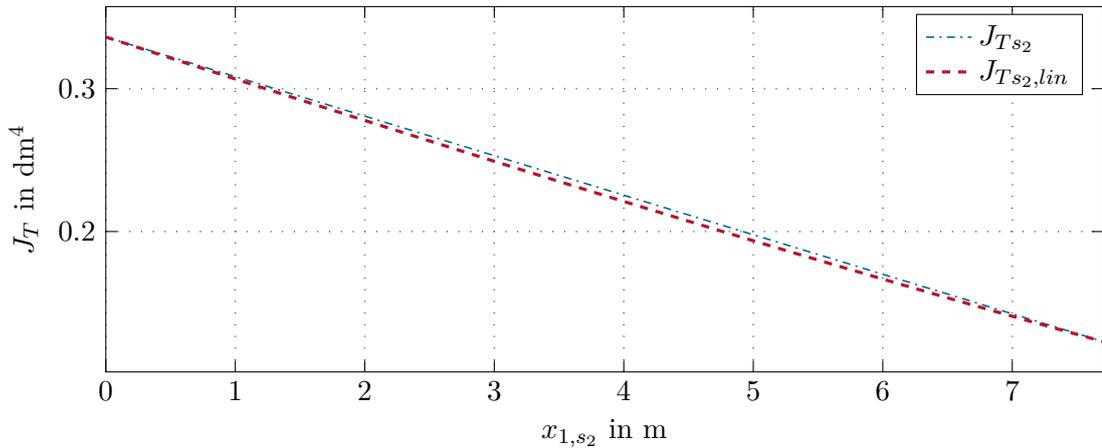
worin der Drillwiderstand $J_T(x_{1,s_i})$ eingeführt wird. Die Lösung dieses Integrals in (2.59) kann aus der Literatur [23] für den betrachteten Kastenquerschnitt entnommen werden

$$J_{Ts_i}(x_{1,s_i}) = \frac{2d^2(b_{s_i}(x_{1,s_i}) - d)^2(h_{s_i}(x_{1,s_i}) - d)^2}{(b_{s_i}(x_{1,s_i})d + h_{s_i}(x_{1,s_i})d - 2d^2)} , \tag{2.60}$$

wobei eine semi-empirische Lösung für die Prandtl'sche Spannungsfunktion eines dünnwandigen rechteckförmigen Kastenquerschnittes verwendet wird. Die Arbeit [22] zeigt die Ableitung der im Folgenden verwendeten semi-empirischen Lösung. Für einen Ausleger mit konstantem Querschnitt ergibt sich der Drillwiderstand J_{Ts_i} zu

$$J_{Ts_i} = \frac{2d^2(b_{s_i} - d)^2(h_{s_i} - d)^2}{(b_{s_i}d + h_{s_i}d - 2d^2)} . \tag{2.61}$$

Bei Auslegern mit variablem Querschnitt wird nun ein linearer Verlauf des Widerstandes

Abbildung 2.3: Torsionswiderstand $J_{T_{s_2}}$ des zweiten Auslegers und dessen Linearisierung.

in der Form

$$\begin{aligned}
 J_{T_{s_i,L}} &= k_{J_{T_{s_i}}} x_{1,s_i} + d_{J_{T_{s_i}}} \\
 k_{J_{T_{s_i}}} &= \frac{J_T(l_{s_i}) - J_T(0)}{l_{s_i}} \\
 d_{J_{T_{s_i}}} &= J_T(0)
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

verwendet.

In der Abbildung 2.3 ist der Verlauf des nichtlinearen und des linearisierten Drillwiderstandes des zweiten Auslegers entlang seiner Stabachse x_{1,s_2} dargestellt. Hierbei ist zu erkennen, dass nur minimale Unterschiede zwischen dem exakten und dem linearen Verlauf für die angenommenen geometrischen Abmessungen existieren. Aus diesem Grund wird für die weiteren Betrachtungen der Drillwiderstand aus (2.62) für einen inhomogenen Balkenquerschnitt verwendet.

2.6 Potentielle Energie zufolge der Gravitation

Die durch das Erdgravitationsfeld resultierende potentielle Energie W_{pot,s_i} eines Körpers s_i aufgrund der Erdbeschleunigung g lässt sich als

$$W_{pot,s_i}(\mathbf{z}) = \int_V [0 \quad 0 \quad \rho_{s_i} g] \mathbf{p}_{0,s_i}(\mathbf{z}) dV_{s_i} \tag{2.63}$$

beschreiben. Dabei ist ρ_{s_i} die Massendichte des Körpers. Die gesamte gespeicherte potentielle Energie $W_{pot,A}$ in den elastischen Auslegern ergibt sich zu

$$W_{pot,A}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N W_{pot,s_i}(\mathbf{z}) . \tag{2.64}$$

Die potentielle Energie W_{pot,m_i} der Massen an den Auslegerenden bzw. des Endeffektors sind analog durch

$$W_{pot,m_i}(\mathbf{z}) = [0 \quad 0 \quad m_i g] \mathbf{p}_{Esi_0}(\mathbf{z}) \tag{2.65}$$

definiert, wobei m_i der Masse der Gelenkantriebe bzw. des Endeffektors entspricht. Die Energie $W_{pot,m}$

$$W_{pot,m}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N W_{pot,m_i}(\mathbf{z}) \quad (2.66)$$

stellt die gesamte gespeicherte potentielle Energie der Ersatzmassen dar.

2.7 Externe Kräfte und Momente

Die externen Kräfte und Momente in Abhängigkeit der Systemgrößen \mathbf{z} des Großraummanipulators werden folgend angeführt. Es wirken die externen Momente durch die Gelenkantriebe auf das System. Weiters werden externe Störkräfte mit punktförmigem Eingriff an den Auslegerenden bzw. an der Endeffektorposition angenommen. Dadurch können etwa impulsartige Störungen, wie sie beispielsweise beim Fördern von Frischbeton auftreten können, simuliert werden. Die punktförmigen Eingriffe werden in dieser Arbeit für die statischen Untersuchungen der Torsion und der Verbiegungen eines Auslegers genutzt.

2.7.1 Antriebsmomente

Die generalisierte Kraft $\boldsymbol{\tau}_0$ zufolge des externen Moments M_0 ergibt sich zu

$$\boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{z}) = ((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_0}(\mathbf{z}))^T \mathbf{R}_0^{s_0}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Dabei bezeichnet $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_0}$ die Jacobi-Manipulator-Matrix des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{\omega}_0^{s_0}$, die sich aus der Rotationsmatrix $\mathbf{R}_0^{s_0}$ errechnet. Der Momentenvektor wurde im körperfesten Koordinatensystem s_0 beschrieben und muss deshalb mittels der Rotationsmatrix in das ortsfeste Koordinatensystem transformiert werden.

Auf den Ausleger s_i wirkt aufgrund des Schnittprinzips das negative Moment M_i sowie das Moment M_{i+1} . Somit ergeben sich die generalisierten externen Momente $\boldsymbol{\tau}_i$ zu

$$\boldsymbol{\tau}_i(\mathbf{z}) = ((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_i}(\mathbf{z}))^T \mathbf{R}_0^{s_i}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} 0 \\ -M_i \\ 0 \end{bmatrix} + ((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_i,L}(\mathbf{z}))^T \mathbf{R}_0^{s_{i+1}}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} 0 \\ M_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

wobei für die Berechnung die beiden Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_i}$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_i,L}$ benötigt werden. Diese können durch die partielle Ableitung des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{\omega}_0^{s_i}$ des Auslegeranfangs bzw. seines Endes $\boldsymbol{\omega}_0^{s_i,L}$ nach $\dot{\mathbf{z}}$ bestimmt werden.

Der letzte Ausleger N stellt für die Beschreibung eine Ausnahme dar, da auf diesen nur das Moment M_N des N -ten Gelenkantriebes wirkt. Dadurch ergibt sich der Vektor des generalisierten externen Momentes $\boldsymbol{\tau}_N$ zu

$$\boldsymbol{\tau}_N(\mathbf{z}) = ((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_N}(\mathbf{z}))^T \mathbf{R}_0^{s_N} \begin{bmatrix} 0 \\ -M_N \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Das gesamte verallgemeinerte externe Moment $\boldsymbol{\tau}_{st}$ aufgrund der Gelenkmomente lässt sich als Summe der einzelnen Momente in der Form

$$\boldsymbol{\tau}_{st} = \sum_{i=0}^N \boldsymbol{\tau}_i \quad (2.70)$$

formulieren. Die externen Momente M_i dienen dabei als Eingangsgrößen für das Steuerungs- und Regelungskonzept der Trajektorienplanung.

Im Falle eines Großraummanipulators mit zwei Mastelementen ergibt sich der Vektor des verallgemeinerten Momentes $\boldsymbol{\tau}_{st}$ zu

$$\boldsymbol{\tau}_{st} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{22 \times 1} \\ M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Die Momente M_0 , M_1 und M_2 wirken, wie zu erwarten, direkt auf die Beschleunigungen $\ddot{\varphi}_0$, $\ddot{\varphi}_1$ und $\ddot{\varphi}_2$ der Starrkörperbewegung. Des Weiteren ist zu erkennen, dass keine direkte Koppelung zwischen den externen Momenten und den Deformationen auftritt.

Das generalisierte Moment aufgrund der externen Torsionsmomente M_{T,s_i} ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{M_T}(\mathbf{z}) = & \left((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_{1,L}}(\mathbf{z}) \right)^T \mathbf{R}_0^{s_{1,L}}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} M_{T,s_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{i=2}^N \left((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_i} \right)^T \mathbf{R}_0^{s_{i-1,L}}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} -M_{T,s_{i-1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_{i,L}}(\mathbf{z}) \right)^T \mathbf{R}_0^{s_{i,L}}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} M_{T,s_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.72)$$

und die generalisierte Kraft $\boldsymbol{\tau}_{F_B}$ aufgrund der externen Biegekräfte F_{B2,s_i} und F_{B3,s_i} ergibt in der Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{F_B}(\mathbf{z}) = & \left((\mathbf{J}_v)_0^{s_{1,L}}(\mathbf{z}) \right)^T \mathbf{R}_0^{s_{1,L}}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} 0 \\ F_{B2,s_1} \\ F_{B3,s_1} \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{i=2}^N \left((\mathbf{J}_v)_0^{s_i} \right)^T \mathbf{R}_0^{s_{i-1,L}}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{B2,s_{i-1}} \\ -F_{B3,s_{i-1}} \end{bmatrix} + \left((\mathbf{J}_v)_0^{s_{i,L}}(\mathbf{z}) \right)^T \mathbf{R}_0^{s_{i,L}}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} 0 \\ F_{B2,s_i} \\ F_{B3,s_i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Das Torsionsmoment M_{T,s_i} wirkt dabei auf um die x_{1,s_i} -Achse am Auslegerende s_i . Die Biegekräfte F_{B2,s_i} und F_{B3,s_i} besitzen ihren Angriffspunkt am Anlegerende und wirken in die x_{2,s_i} bzw. x_{3,s_i} -Richtung. Damit ergibt sich die gesamte generalisierte Störkraft $\boldsymbol{\tau}_{dis}(\mathbf{z})$ zu

$$\boldsymbol{\tau}_{dis}(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\tau}_{M_T}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\tau}_{F_B}(\mathbf{z}). \quad (2.74)$$

2.8 Dämpfungen

In diesem Abschnitt wird erläutert, welche Art von Gelenk- und Strukturdämpfung im weiteren Verlauf in der Modellierung berücksichtigt wird. Als Ansatz für die Gelenkdämpfung wird eine geschwindigkeitsproportionale viskose Dämpfung gewählt. Es ist zu erwähnen, dass es sich bei den Reibungskräften um nicht-konservative Kräfte handelt. Diese können aber ebenfalls über die virtuell verrichtete Arbeit im Hamilton-Prinzip berücksichtigt werden. Die durch die Gelenkreibungen verursachte generalisierte Kraft lässt sich mithilfe der Rayleighschen Dissipationsfunktion

$$R_{st}(\dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N d_{st,i} \dot{\varphi}_i^2 = \sum_{i=1}^N R_{st,i}(\dot{\mathbf{z}}) \quad (2.75)$$

ableiten. Dabei wird mit $d_{st,i}$ der viskose Dämpfungsfaktor bezeichnet. Die dadurch verursachte generalisierte Kraft lässt sich nun durch

$$\boldsymbol{\tau}_{R,st}(\dot{\mathbf{z}}) = - \left(\frac{\partial R_{st}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right)^T \quad (2.76)$$

ableiten.

Für die Strukturdämpfung wurde ebenfalls ein viskoser Ansatz gewählt. Hierfür wird wieder eine Rayleighsche Dissipationsfunktion der Art

$$\tilde{R}_{s_i}(\dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \left(\tilde{d}_{T,s_i} \dot{\alpha}_{T,s_i}^2 + \tilde{d}_{B3s_i} \dot{u}_{B2s_i}^2 + \tilde{d}_{B3s_i} \dot{u}_{B3s_i}^2 \right) \quad (2.77)$$

angegeben, wobei mit \tilde{d}_{T,s_i} , \tilde{d}_{B2s_i} und \tilde{d}_{B3s_i} die ortsbezogenen Dämpfungskonstanten der jeweiligen Verschiebungsgeschwindigkeit bezeichnet sind. Die Dissipationsfunktion ist als Dämpfungsleistung pro Längeneinheit zu verstehen, da die Dämpfungskonstanten auf die jeweilige Stabsachse bezogen sind. Die dissipierte Leistung setzt sich aus den Anteilen zufolge der Torsion, der Verbiegung in x_{2,s_i} -Richtung sowie der Verbiegung in x_{3,s_i} -Richtung zusammen. Die auf die Stabachse bezogene generalisierte Kraft $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{R,s_i}$ errechnet sich zu

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{R,s_i}(\dot{\mathbf{z}}) = - \left(\frac{\partial \tilde{R}_{s_i}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right)^T . \quad (2.78)$$

Mit dieser lässt sich die längenbezogene verrichtete virtuelle Arbeit \tilde{w}_{R,s_i} definieren, die im nächsten Abschnitt benötigt wird. Diese Art des Ansatzes stellt eine einfache Art dar, um die Dämpfungen der elastischen Strukturen zu beschreiben. Die genauere Beschreibung der Dämpfung im Material könnte in einem erweiterten Ansatz, wie z. B. dem Voigt-Kelvin Modell [24] erfolgen.

2.9 Bewegungsgleichungen des Systems

Die Ableitung der Bewegungsgleichungen in der schwachen Form erfolgt über das Hamilton-Prinzip. Um dieses zu nutzen, werden die Energien und generalisierten Kräfte des vorherigen Kapitels benötigt. Die Lagrange-Funktion $L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ für den Großraummanipulator mit

N Auslegern ist definiert als

$$L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \sum_{i=1}^N T_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) - \Pi_{s_i}(\mathbf{z}) - W_{pot,s_i}(\mathbf{z}) + \quad (2.79)$$

$$+ T_m(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) - W_{pot,m}(\mathbf{z}) ,$$

wobei $T_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ die kinetische Energien des elastischen Elements s_i bezeichnet und $\Pi_{s_i}(\mathbf{z})$ dessen inneren Energie entspricht. Die potentielle Energie eines Auslegers ist mit $W_{pot,s_i}(\mathbf{z})$ gegeben. Die kinetische Energie der Massen an den Auslegerenden ist mit $T_m(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ beschrieben. Die übrigen Energien sind die potentielle Energien $W_{pot,m}(\mathbf{z})$ der Massen an den Enden. Das Variationsprinzip besagt, dass

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^N \left(\delta T_{s_i}(\tilde{\mathbf{z}}, \dot{\tilde{\mathbf{z}}}) - \delta \Pi_{s_i}(\tilde{\mathbf{z}}) - \delta W_{pot,s_i}(\tilde{\mathbf{z}}) + \delta W_{R,s_i}(\tilde{\mathbf{z}}, \dot{\tilde{\mathbf{z}}}) \right) + \right. \quad (2.80)$$

$$\left. + \delta T_m(\tilde{\mathbf{z}}, \dot{\tilde{\mathbf{z}}}) - \delta W_{pot,m}(\tilde{\mathbf{z}}) + \delta W_M(\tilde{\mathbf{z}}) + \delta W_{R,st}(\tilde{\mathbf{z}}, \dot{\tilde{\mathbf{z}}}) \right) dt = 0$$

gilt, wobei $\tilde{\mathbf{z}}$ die Trajektorie der Lösung des im Hamilton-Prinzip vorkommenden Minimierungsproblems bezeichnet. Darin wird mit $\delta(\cdot)$ als der Operator für die Variation der jeweiligen Energie nach den Variablen \mathbf{z} sowie $\dot{\mathbf{z}}$ verwendet. Die durch die generalisierten externen Kräfte verrichtete virtuelle Arbeit wird mit $\delta W_M(\mathbf{z})$ bezeichnet. Die virtuelle Arbeit aufgrund der Gelenkdämpfung ist in der Form $\delta W_{R,st}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ definiert. Aufgrund der Strukturdämpfungen wird die virtuelle Arbeit $\delta W_{R,s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ verrichtet. Es kann angenommen werden, dass für den Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ gilt und der Endzeitpunkt wird mit t_1 festgelegt. In weiterer Folge werden die Variationen der Energien nach den Systemgrößen \mathbf{z} und deren zeitlichen Ableitungen benötigt. Zunächst wird die Variation der vereinfachten kinetischen Energien eines Auslegers (2.40) sowie der Ersatzmassen (2.43) betrachtet. Die Variation der kinetischen Energie des Auslegers s_i nach $\delta \mathbf{z}$ ergibt sich zu

$$\delta T_{s_i,1}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}; \delta \mathbf{z}) = \left. \frac{\partial T_{s_i}(\mathbf{z} + \eta \delta \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (2.81)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})}{\partial z_0} \dot{\mathbf{z}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{z}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} dx_{1,s_i} ,$$

wobei $n = \dim(\mathbf{z})$ gilt. An dieser Stelle sei erwähnt, dass sich für den Ausleger s_i natürlich alle partiellen Ableitungen der Massenmatrix $\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}$ nach den Vektoren $(\mathbf{z}_{s_i+1}, \dots, \mathbf{z}_{s_N})$ der darauffolgenden Stäbe zu Null ergeben. Die längenbezogene Massenmatrix $\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}$ besitzt nur Abhängigkeiten von den Deformationen der vorhergehenden Auslegerenden, den lokalen Deformationen im Ausleger sowie den Gelenkwinkel der vorhergehenden Gelenke. Variiert man die kinetische Energie T_{s_i} nach $\dot{\mathbf{z}}$ erhält man mit

$$\delta T_{s_i,2}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}; \delta \dot{\mathbf{z}}) = \left. \frac{\partial T_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}} + \eta \delta \dot{\mathbf{z}})}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \int_0^{l_{s_i}} \delta \dot{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} dx_{1,s_i} \quad (2.82)$$

den zweiten Anteil $\delta T_{s_i,2}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}; \delta \mathbf{z})$ der benötigten gesamten Variation $\delta T_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}; \delta \mathbf{z}, \delta \dot{\mathbf{z}})$. Die beiden Variationen lassen sich nun weiter vereinfachen, indem die zeitliche Integration ihrer Summe in (2.80) betrachtet wird. Die partielle Integration von (2.82) erlaubt es die Variation der kinetischen Energien δT_{s_i} in der Form

$$\begin{aligned} \delta T_{s_i} &= \int_{t_0}^{t_1} \delta T_{s_i,1} + \delta T_{s_i,2} dt = \\ &= \int_0^{l_{s_i}} \left(\left(\delta \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} \right) \Big|_{t=t_1} - \left(\delta \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} \right) \Big|_{t=t_0} \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathbf{z}^T \left(\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})}{\partial z_0} \dot{\mathbf{z}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{z}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \frac{d\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}}}{dt} \right) dt \right) dx_{1,s_i} \end{aligned} \quad (2.83)$$

anzugeben. Da die Anfangs- und Endbedingungen für die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{z}}$ beliebig sein können, muss für die Variation $\delta \mathbf{z}$ die Bedingungen $(\delta \mathbf{z})^T(t_0) = (\delta \mathbf{z})^T(t_1) = 0$ gelten. Nur dann bewegt sich das System entlang der minimalen Wirkung. Durch weiteres Anwenden der Kettenregel gilt

$$\frac{d\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})}{\partial z_j} \dot{z}_j \right) \dot{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} \quad (2.84)$$

wodurch sich (2.83) zu

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{z}^T \left(\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})}{\partial z_0} \dot{\mathbf{z}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{z}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})}{\partial z_j} \dot{z}_j \dot{\mathbf{z}} \right) - \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} \right) dx_{1,s_i} dt = \\ &\int_{t_0}^{t_1} \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{z}^T \left(\tilde{\mathbf{C}}_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) - \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} \right) dx_{1,s_i} dt \end{aligned} \quad (2.85)$$

ergibt. Dabei bezeichnet $\tilde{\mathbf{C}}_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ den von x_{1,s_i} abhängigen Anteil der Corioliskraft. Die Variation der kinetischen Energien der Ersatzmassen m_i besitzt dieselbe Darstellung wie (2.85) nur dass hierbei die von x_{s_i} abhängige Massenmatrix $\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}$ durch die Massenmatrix \mathbf{D}_{m_i} und der ortsabhängige Term der Corioliskraft $\tilde{\mathbf{C}}_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ durch $\mathbf{C}_{m_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ substituiert wird. Ebenfalls entfällt die Integration über den Ort x_{1,s_i} , da diese in der Beschreibung der kinetischen Energie (2.82) nicht vorkommt.

Im nächsten Schritt wird die Variation der inneren Energie $\delta \Pi_{s_i}$ eines Auslegers s_i

betrachtet. Diese ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{s_i}(\mathbf{z}; \delta \mathbf{z}) &= \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{z}^T \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11(i-1) \times 1} \\ 0 \\ G J_{T, s_i}(x_{1, s_i}) \frac{\partial \alpha_{T, s_i}(x_{1, s_i})}{\partial x_{1, s_i}} \\ 0 \\ E I_{B22, s_i}(x_{1, s_i}) \frac{\partial^2 u_{B2, s_i}(x_{1, s_i})}{\partial x_{1, s_i}^2} \\ 0 \\ E I_{B33, s_i}(x_{1, s_i}) \frac{\partial^2 u_{B3, s_i}(x_{1, s_i})}{\partial x_{1, s_i}^2} \\ \mathbf{0}_{(11(N-i)+(N+1)+5) \times 1} \end{pmatrix} dx_{1, s_i} \\ &= \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{z}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{s_i}(\mathbf{z}) dx_{1, s_i} \end{aligned} \quad (2.86)$$

mit dem eingeführten Vektor $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{s_i}$. Die Nullvektoren in $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{s_i}$ folgen daraus, da die innere Energie Π_{s_i} des Auslegers s_i nur von den lokalen Ableitungen der Deformationen $\partial \alpha_{T, s_i}$, $\partial^2 u_{B2, s_i}$ und $\partial^2 u_{B3, s_i}$ abhängig ist.

Als nächstes wird die Variation der potentiellen Energien zu Folge der wirkenden Erdbeschleunigung betrachtet. Die Variation dieser Energien ist durch

$$\begin{aligned} \delta W_{pot, s_i}(\mathbf{z}; \delta \mathbf{z}) &= \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{z}^T \int_{\mathcal{A}_{s_i}(x_{1, s_i})} \frac{\partial W_{pot, s_i}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} dA_{s_i} dx_{1, s_i} \\ &= \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{z}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{pot, s_i}(\mathbf{z}) dx_{1, s_i} \end{aligned} \quad (2.87a)$$

$$\delta W_{pot, m}(\mathbf{z}; \delta \mathbf{z}) = \delta \mathbf{z}^T \frac{\partial W_{pot, m}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \delta \mathbf{z}^T \boldsymbol{\tau}_{pot, m}(\mathbf{z}) \quad (2.87b)$$

gegeben. Hierbei wird der durch die Erdbeschleunigung verursachte generalisierte Linienkraftvektor $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{pot, s_i}$ eingeführt. Die auf die Massen am Ende der Ausleger wirkende generalisierte Gravitationskraft ist mit $\boldsymbol{\tau}_{pot, m}$ bezeichnet. Die durch die externen Kräfte und Momente verrichteten virtuellen Arbeiten lassen sich in der Form

$$\delta W_{R, s_i} = \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{z}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{R, s_i}(\dot{\mathbf{z}}) dx_{1, s_i} \quad (2.88a)$$

$$\delta W_{R, st} = \delta \mathbf{z}^T \boldsymbol{\tau}_{R, st}(\dot{\mathbf{z}}) \quad (2.88b)$$

$$\delta W_M = \delta \mathbf{z}^T (\boldsymbol{\tau}_{st}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\tau}_{dis}(\mathbf{z})) \quad (2.88c)$$

anschreiben. Nun kann die Formulierung (2.80) des Hamilton-Prinzips als Summe der Variationen der einzelnen Terme

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^{l_{s_i}} (\delta \mathbf{z})^T \left(-\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{C}}_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{s_i}(\mathbf{z}) - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{pot, s_i}(\mathbf{z}) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{R, s_i}(\dot{\mathbf{z}}) \right) dx_{1, s_i} + \right. \\ \left. (\delta \mathbf{z})^T \left(-\mathbf{D}_m(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_m(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) - \boldsymbol{\tau}_{pot, m}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\tau}_{st} + \boldsymbol{\tau}_{R, st}(\dot{\mathbf{z}}) \right) \right) dt = \mathbf{0} \quad (2.89)$$

angegeben werden. Die punktförmigen Störkräfte $\boldsymbol{\tau}_{dis}(\mathbf{z})$ werden, wenn nichts anders erwähnt, zu Null angenommen, da diese unbekannt sind. Es muss nun gelten, dass

aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung für alle Variationen $\delta \mathbf{z}$ das Integral über die Zeit in (2.89) verschwindet. Daraus folgt, dass die Trajektorie des Systems $\bar{\mathbf{z}}$ durch Lösen

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \int_0^{l_{s_i}} \left(-\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{z})\ddot{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{C}}_{s_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{s_i}(\mathbf{z}) - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{pot,s_i}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \tilde{R}_{s_i}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}(\dot{\mathbf{z}}) \right) dx_{1,s_i} + \\ \left(-\mathbf{D}_m(\mathbf{z})\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_m(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) - \boldsymbol{\tau}_{pot,m}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\tau}_{st} - \frac{\partial R_{st}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}(\dot{\mathbf{z}}) \right) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.90)$$

bestimmt werden kann. Zusätzlich werden noch Randbedingungen für die partiellen Differentialgleichungen benötigt. Für den Torsionswinkel α_{T,s_i} des Elementes wird die Randbedingung

$$\alpha_{T,s_i}(0) = 0 \quad (2.91)$$

formuliert.

Für die Verbiegungen gilt, dass an dem Gelenk sowohl die Verschiebung $u_{B_{s_i}}$ als auch die Biegewinkel Null sind. Dadurch ergeben sich die Randbedingungen für die Verbiegungen $u_{B_{2s_i}}$ und $u_{B_{3s_i}}$ zu

$$u_{B_{2s_i}}(0) = 0 \quad (2.92a)$$

$$u_{B_{3s_i}}(0) = 0 \quad (2.92b)$$

$$\left. \frac{\partial u_{B_{2s_i}}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \right|_{x_{1,s_i}=0} = 0 \quad (2.92c)$$

$$\left. \frac{\partial u_{B_{3s_i}}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \right|_{x_{1,s_i}=0} = 0 . \quad (2.92d)$$

2.10 Zusammenfassung der Modellierung

In diesem Kapitel wurde zuerst die kinematische Kette für einen Großraummanipulator mit N elastischen Elementen abgeleitet. Damit konnten die kinetischen Energien und potentiellen Energien der elastischen Ausleger sowie der Ersatzmassen angegeben werden. Des Weiteren konnten die generalisierten externen Kräfte angegeben werden. Die generalisierten Kräfte wurden für die Beschreibung der verrichteten Arbeit benötigt. Die Anwendung des Hamilton-Prinzips führte auf ein System aus partiellen Differentialgleichungen, das die Dynamik des Großraummanipulators beschreibt. Da eine Lösung für das System aus partiellen Differentialgleichungen in geschlossener analytischer Form nicht bekannt ist, wird im nächsten Kapitel eine geeignete Methode für die örtliche Diskretisierung diskutiert. Hiermit kann im Anschluss ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen abgeleitet werden, das in weiterer Folge für den Entwurf einer Trajektorienplanung verwendet wird.

3 Örtliche Approximation

Dieses Kapitel der Arbeit behandelt die örtliche Approximation des Systems der Bewegungsgleichungen (2.90)-(2.92). Im ersten Abschnitt 3.1 wird die verwendete Methodik zur Approximation mit Hilfe des Ritz-Ansatzes erläutert. Im weiteren Verlauf werden die generalisierten Koordinaten des approximierten Systems eingeführt, wodurch letztendlich eine Formulierung der Bewegungsgleichungen des Systems in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen möglich ist. Der Abschnitt 3.2 befasst sich mit der Untersuchung von geeigneten Ansatzfunktionen für die örtliche Approximation der Torsion. Die statische Torsion eines rechteckförmigen hohlen Balkens mit homogenen sowie inhomogenen Querschnitt wird hierfür näher betrachtet. Die Wahl der Ansatzfunktionen für die Verbiegungen werden im Abschnitt 3.3 betrachtet. Dafür werden die statischen Verhältnisse der Verbiegung eines Euler-Bernoulli-Balkens genauer untersucht.

3.1 Approximationsansätze

Es wird nun die Wahl der örtlichen Ansatzfunktion und die mögliche Formulierung des approximierten Systems in diesem Abschnitt betrachtet. Dazu wird die Ritz-Methode für die örtliche Approximation des Systems aus partiellen Differentialgleichungen verwendet. Andere Methoden zur Approximation sind die Finite-Elemente-Methode sowie die Finite-Volumen-Methode. Beide Methodiken besitzen den Nachteil, dass eine relative große Anzahl an örtlichen Diskretisierungsstellen notwendig ist, um eine hohe Modellgenauigkeit zu erzielen. Durch Betrachtung der statischen Lösungen der Deformationen lässt sich ein approximiertes Modell mit relativ geringer Modellordnung mit der Ritz-Methode ableiten. Bei den anderen Methoden ist zu erwarten, dass eine weitaus höhere Ordnung für das resultierende System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen notwendig wäre um dieselbe Modellgenauigkeit zu erzielen. Die Ritz-Methode zeichnet sich dadurch aus, dass die örtlichen und zeitlichen Deformationen durch Produkte aus örtlichen Basisfunktion und zeitvarianten Koeffizienten ersetzt werden. Die Ansätze werden anschließend in das System aus partiellen Differenzialgleichungen (2.90) eingesetzt, wodurch sich ein Simulationsmodell ergibt.

Die Ansätze für die Verzerrungszustände eines elastischen Elementes s_i werden im

Weiteren mit

$$\alpha_{T s_i}(t, x_{1, s_i}) = \sum_{j=1}^{N_{T s_i}} a_{j, T s_i}(t) \Psi_{j, T s_i}(x_{1, s_i}) \quad (3.1a)$$

$$u_{B 2 s_i}(t, x_{1, s_i}) = \sum_{j=1}^{N_{B 2 s_i}} a_{j, B 2 s_i}(t) \Psi_{j, B 2 s_i}(x_{1, s_i}) \quad (3.1b)$$

$$u_{B 3 s_i}(t, x_{1, s_i}) = \sum_{j=1}^{N_{B 3 s_i}} a_{j, B 3 s_i}(t) \Psi_{j, B 3 s_i}(x_{1, s_i}) \quad (3.1c)$$

bezeichnet, mit den zeitvarianten Koeffizienten $a_{j, T s_i}(t)$, $a_{j, B 2 s_i}(t)$ und $a_{j, B 3 s_i}(t)$ des jeweiligen Ersatzparameters der Deformation. Die örtlichen Ansatzfunktionen $\Psi_{j, T s_i}(x_{1, s_i})$, $\Psi_{j, B 2 s_i}(x_{1, s_i})$ und $\Psi_{j, B 3 s_i}(x_{1, s_i})$ können z. B. als Polynome in x_{1, s_i} angegeben werden. Eine andere Möglichkeit bietet die Wahl als Summe von Sinus- und Cosinusfunktion der Eigenfrequenzen. Die sich dadurch ergebenden Zustände werden als modale Zustände bezeichnet. Die geeignete Wahl der Ordnungen $N_{T s_i}$, $N_{B 2 s_i}$, $N_{B 3 s_i}$ sowie der Ansatzfunktion kann je nach elastischen Auslegertyp und Zustand individuell variieren. Die Festlegung erfolgt unter der Berücksichtigung der zu modellierenden Effekte, wie z. B. eines inhomogenen Querschnittes. Die gewählten Ansatzfunktionen müssen dabei die Randbedingungen aus (2.91)-(2.92) erfüllen, damit diese eine zulässige Basis des Funktionenraumes bilden. Die Konvergenz sowie die Komplexität des approximierten Simulationsmodells ist unmittelbar mit der Wahl der Ansatzfunktionen verbunden.

Im nächsten Schritt wird der Vektor der generalisierten Koordination \mathbf{q}_{s_i} aufgrund der Deformationen durch

$$\mathbf{q}_{T s_i} = \begin{bmatrix} a_{1, T s_i}(t) \\ \vdots \\ a_{N_{T s_i}, T s_i}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{q}_{B 2 s_i} = \begin{bmatrix} a_{1, B 2 s_i}(t) \\ \vdots \\ a_{N_{B 2 s_i}, B 2 s_i}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{q}_{B 3 s_i} = \begin{bmatrix} a_{1, B 3 s_i}(t) \\ \vdots \\ a_{N_{B 3 s_i}, B 3 s_i}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2c)$$

$$\mathbf{q}_{s_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{T s_i} \\ \mathbf{q}_{B 2 s_i} \\ \mathbf{q}_{B 3 s_i} \end{bmatrix} \quad (3.2d)$$

eingeführt, sowie der Vektor der generalisierten Koordinaten \mathbf{q}_{st} der Starrkörperfreiheitsgrade

$$\mathbf{q}_{st} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

des elastischen Manipulators definiert. Darin bezeichnen $\mathbf{q}_{T s_i}$ die generalisierten Koordinaten aufgrund der Torsion, der Vektor $\mathbf{q}_{B 2 s_i}$ jene der Biegung in x_{2, s_i} -Richtung und mit $\mathbf{q}_{B 3 s_i}$ ist der Koordinatenvektor aufgrund der Biegung in x_{3, s_i} -Richtung eines Auslegerelementes s_i definiert. Die Vektoren aller N Auslegerelemente lassen sich nun in einem Vektor der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} in der Form

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{s_1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{s_N} \\ \mathbf{q}_{st} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

zusammenfassen. Durch diesen sind nun die Freiheitsgrade des örtlich diskretisierten elastischen Systems definiert. Die ortsabhängige Transformation $\mathbf{A}(x_{1, s_i})$ zwischen dem Vektor \mathbf{z} und den zeitabhängigen generalisierten Koordinaten \mathbf{q} ist durch

$$\mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{q} \quad (3.5)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s_1} \\ \mathbf{A}_{s_1, L} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{s_N} \\ \mathbf{A}_{s_N, L} \\ \left[\mathbf{0}_{N_u \times \bar{N}} \quad \mathbf{E}_{\bar{N} \times \bar{N}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.6a)$$

$$N_u = \sum_{j=1}^N (N_{T s_j} + N_{B 2 s_j} + N_{B 3 s_j}) \quad (3.6b)$$

gegeben. Die Anzahl der Deformationsfreiheitsgrade des Manipulators ist durch N_u beschrieben. Die Anzahl der Freiheitsgrade durch die Gelenke sind mit $\bar{N} = N + 1$ festgelegt. Die Transformation \mathbf{A}_{s_i} lässt sich in drei Teilmatrizen $\mathbf{A}_{T s_i}$, $\mathbf{A}_{B 2 s_i}$ und $\mathbf{A}_{B 3 s_i}$

$$\mathbf{A}_{s_i}(x_{1, s_i}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{T s_i}(x_{1, s_i}) \\ \mathbf{A}_{B 2 s_i}(x_{1, s_i}) \\ \mathbf{A}_{B 3 s_i}(x_{1, s_i}) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

aufspalten. Diese Matrix (3.7) definiert die Transformation zwischen dem Vektor $\mathbf{z}_{s_i}(t, x_{1, s_i})$ und den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} . Die sehr dünn besetzten Teilmatrizen (3.7) können

einfach durch die Ansatzfunktionen aus (3.1)

$$\mathbf{A}_{Ts_i}(x_{1,s_i}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times N_{s_i-1}} & \Psi_{1,Ts_i}(x_{1,s_i}) & \cdots & \Psi_{N_{Ts_i},Ts_i}(x_{1,s_i}) & \mathbf{0}_{1 \times N_{T_i,E}} \\ \mathbf{0}_{1 \times N_{s_i-1}} & \frac{\partial \Psi_{1,Ts_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{N_{Ts_i},Ts_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} & \mathbf{0}_{1 \times N_{T_i,E}} \end{bmatrix} \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{A}_{B2s_i}(x_{1,s_i}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times N_{B2_i}} & \Psi_{1,B2s_i}(x_{1,s_i}) & \cdots & \Psi_{N_{B2s_i},B2s_i}(x_{1,s_i}) & \mathbf{0}_{1 \times N_{B2_i,E}} \\ \mathbf{0}_{1 \times N_{B2_i}} & \frac{\partial^2 \Psi_{1,B2s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Psi_{N_{B2s_i},B2s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} & \mathbf{0}_{1 \times N_{B2_i,E}} \end{bmatrix} \quad (3.8b)$$

$$\mathbf{A}_{B3s_i}(x_{1,s_i}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times N_{B3_i}} & \Psi_{1,B3s_i}(x_{1,s_i}) & \cdots & \Psi_{N_{B3s_i},B3s_i}(x_{1,s_i}) & \mathbf{0}_{1 \times N_{B3_i,E}} \\ \mathbf{0}_{1 \times N_{B3_i}} & \frac{\partial^2 \Psi_{1,B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Psi_{N_{B3s_i},B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} & \mathbf{0}_{1 \times N_{B3_i,E}} \end{bmatrix} \quad (3.8c)$$

$$N_{s_i} = \sum_{j=1}^i (N_{Ts_j} + N_{B2s_j} + N_{B3s_j}) \quad (3.8d)$$

$$N_{B2_i} = N_{s_{i-1}} + N_{Ts_i} \quad (3.8e)$$

$$N_{B3_i} = N_{s_{i-1}} + N_{Ts_i} + N_{B2s_i} \quad (3.8f)$$

$$N_{T_i,E} = \bar{N} + N_u - N_{Ts_i} - N_{s_{i-1}} \quad (3.8g)$$

$$N_{B2_i,E} = \bar{N} + N_u - N_{Ts_i} - N_{B2s_i} - N_{s_{i-1}} \quad (3.8h)$$

$$N_{B3_i,E} = \bar{N} + N_u - N_{s_i} \quad (3.8i)$$

angegeben werden. Darin sind zusätzlich zu den Basisfunktionen auch deren Ableitungen notwendig. Der ortsunabhängige Anteil $\mathbf{A}_{s_i,L}$ ist mit den Teilmatrizen

$$\mathbf{A}_{Ts_i,L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times N_{s_i-1}} & \Psi_{1,Ts_i}(l_{s_i}) & \cdots & \Psi_{N_{Ts_i},Ts_i}(l_{s_i}) & \mathbf{0}_{1 \times N_{T_i,E}} \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{A}_{B2s_i,L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times N_{B2_i}} & \Psi_{1,B2s_i}(l_{s_i}) & \cdots & \Psi_{N_{B2s_i},B2s_i}(l_{s_i}) & \mathbf{0}_{1 \times N_{B2_i,E}} \\ \mathbf{0}_{1 \times N_{B2_i}} & \frac{\partial \Psi_{1,B2s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \Big|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{N_{B2s_i},B2s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \Big|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}} & \mathbf{0}_{1 \times N_{B2_i,E}} \end{bmatrix} \quad (3.9b)$$

$$\mathbf{A}_{B3s_i,L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times N_{B3_i}} & \Psi_{1,B3s_i}(l_{s_i}) & \cdots & \Psi_{N_{B3s_i},B3s_i}(l_{s_i}) & \mathbf{0}_{1 \times N_{B3_i,E}} \\ \mathbf{0}_{1 \times N_{B3_i}} & \frac{\partial \Psi_{1,B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \Big|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{N_{B3s_i},B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \Big|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}} & \mathbf{0}_{1 \times N_{B3_i,E}} \end{bmatrix} \quad (3.9c)$$

$$(3.9d)$$

in der Form

$$\mathbf{A}_{s_i,L} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Ts_i,L} \\ \mathbf{A}_{B2s_i,L} \\ \mathbf{A}_{B3s_i,L} \end{bmatrix} \quad (3.10a)$$

gegeben.

Es wurden nun alle notwendigen Bausteine für die Angabe des Systems aus gewöhnlichen Differenzialgleichungen definiert. Durch das Einsetzen von (3.5) in die Gleichung (2.89)

erhält man

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^{l_{s_i}} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{A}^T \left(-\tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}}_{s_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}) - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{s_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{pot,s_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{R,s_i}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}) \right) dx_{1,s_i} + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{A}^T \left(-\mathbf{D}_{m_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{m_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_{pot,m_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_i(\mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{v}) + \boldsymbol{\tau}_{st}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}) \right) \right) dt = \mathbf{0} , \quad (3.11)$$

für das dynamische Verhalten eines Großraummanipulators mit N elastischen Auslegern und $N + 1$ Gelenken beschreibt. Das System aus gewöhnlichen Differenzialgleichungen folgt nun durch explizite Auswertung der Integrale zu

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q}) - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{v}) + \bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} , \quad (3.12)$$

wodurch das Simulationsmodell beschrieben ist. Die Ableitung kann direkt aus der Gleichung (3.11) erfolgen. Die Massenmatrix $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$, der Vektor der Corioliskraft $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, der Vektor der generalisierten potenziellen Kräfte $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q})$ sowie jener der externen Kräfte $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{v})$ lassen sich durch

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N \int_0^{l_{s_i}} \left(\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{D}}_{s_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) \mathbf{A} \right) dx_{1,s_i} + \mathbf{A}^T \mathbf{D}_{m_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) \mathbf{A} \quad (3.13a)$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^N \int_0^{l_{s_i}} \left(\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{C}}_{s_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}) \right) dx_{1,s_i} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{m_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.13b)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \int_0^{l_{s_i}} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \left(\frac{\partial \tilde{R}_{s_i}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{A}\mathbf{q}} \right)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} dx_{1,s_i} + \frac{\partial \left(\frac{\partial R_{st}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{A}\mathbf{q}} \right)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (3.13c)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\tau}_{st}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i(\mathbf{A}\mathbf{q}, \mathbf{v}) \quad (3.13d)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^{l_{s_i}} -\mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{s_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) - \mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{pot,s_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) dx_{1,s_i} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\tau}_{pot,m_i}(\mathbf{A}\mathbf{q}) \right) \quad (3.13e)$$

$$(3.13f)$$

berechnen. Durch die explizite Auswertung der Integrale erhält man Vektoren und Matrizen die nun unabhängig von der Ortsvariable x_{1,s_i} sind. Der Vektor \mathbf{v} fasst die Momente M_i der Gelenkantriebe zusammen, welche die Stellgrößen des Manipulators darstellen. Die Dynamik des Systems lässt sich nun in der Zustandsraumdarstellung angeben und ist in der Form

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (3.14)$$

mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})^{-1} \left(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{v}) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q}) - \bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{q}} \right) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

definiert, wobei $\mathbf{w} = [\mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}}]^T$ dem Zustand des Systems entspricht. Die Dimension des Zustandsraumes hängt von der Wahl der Approximationsfunktionen ab und ist durch $\dim(\mathbf{w}) = 2(N_u + \bar{N})$ gegeben, wobei N_u in (3.5) definiert wurde. Damit eine sinnvolle Wahl der Ansatzfunktionen für die Torsion getroffen werden kann wird im folgenden Abschnitt 3.2 die statische Torsion eines Balkens mit konstantem sowie linear verjüngenden Querschnitt untersucht.

3.2 Statische Untersuchung der Torsion

Eine Forderung an das mathematische Modell des Großraummanipulators ist, dass die statischen Verhältnisse der Deformationen durch die Modellierung möglichst genau abgebildet werden. Aus diesem Grund werden die statischen Torsionsverhältnisse eines einseitig eingespannten Balkens mit homogenen bzw. inhomogenen rechteckförmigen Hohlquerschnitt näher untersucht. Die Berechnung des Torsionswinkels entlang der Stabachse erfordert die Lösung der Randwertaufgabe

$$-\frac{\partial^2 \alpha_{T s_i}}{\partial x_{1,s_i}^2} G J_T(x_{1,s_i}) - \frac{\partial \alpha_{T s_i}}{\partial x_{1,s_i}} G \frac{\partial J_T(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} = 0 \quad (3.16a)$$

$$\alpha_{T s_i}(0) = 0 \quad (3.16b)$$

$$-\left(\frac{\partial \alpha_{T s_i}}{\partial x_{1,s_i}} G J_T(x_{1,s_i}) \right) \Big|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}} + M_T = 0 . \quad (3.16c)$$

Diese beschreibt die statischen Verhältnisse eines einseitig eingespannten Balkens unter der Torsionsbelastung M_T . Das Randwertproblem kann direkt über das Hamilton-Prinzip abgeleitet werden, wobei nur die innere Energie der Torsion benötigt wird [17].

Die Lösungen kann mithilfe der Funktion `bvp4c` in MATLAB berechnet werden, wobei ein äquidistantes Raster von 20 Punkten gewählt wurde. Die Ergebnisse für den Torsionswinkel entlang der Stabachse sind in der Abbildung 3.1 für den homogenen und inhomogenen Fall zu sehen. Die gewählten Geometrien der Ausleger sowie die Materialparameter sind der Tabelle A.1 und der Tabelle A.2 aus dem Anhang A zu entnehmen. Der Stab s_1 wurde hierfür an der Stelle $x_{1,s_1} = l_{s_1} = 7.5$ m mit einem Torsionsmoment M_T von 5 kN m um die Balkenachse belastet. Der Stab s_2 wurde an der Stelle $x_{1,s_2} = l_{s_2} = 7.7$ m mit dem selben Torsionsmoment belastet. Hierbei ist zu erkennen, dass für die Beschreibung der statischen Torsion eines Balkens mit homogenen Querschnitt, bezeichnet mit $\alpha_{T s_1}$ in der Abbildung 3.1, ein lineares Polynom für die Ansatzfunktion genügt. Im inhomogenen Fall wird der Verlauf des Torsionswinkels $\alpha_{T s_2}$ entlang der Balkenachse durch eine quadratische Funktion genau approximiert. Es wurde hierbei nicht der linearisierte Ansatz für den Drillwiderstand verwendet, sondern jener aus (2.61) mit variabler Höhe $h_{s_i}(x_{1,s_i})$.

Unter der Berücksichtigung dieser Untersuchung kann nun die Frage nach der Wahl einer sinnvollen Ansatzfunktion beantwortet werden. Damit die statischen Verhältnisse genau abgebildet sind wird für den Fall des homogenen Querschnittes ein lineares Polynom

$$\Psi_{1,T s_i}(x_{1,s_i}) = a_{1,T s_i} x_{1,s_i} \quad (3.17)$$

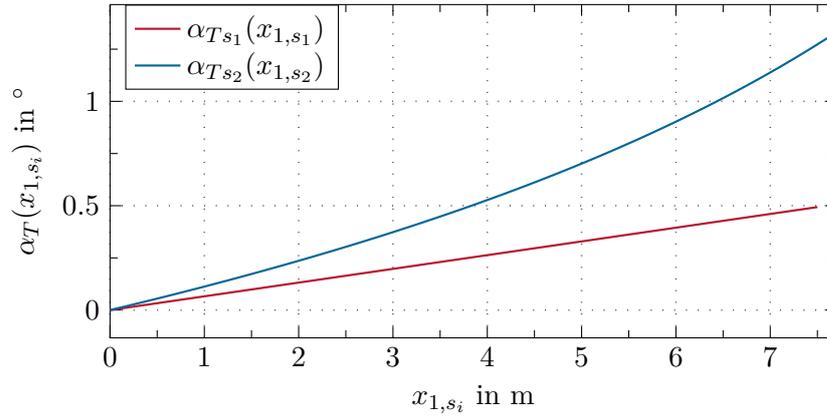


Abbildung 3.1: Torsionswinkel bei homogenen $\alpha_{T_{s_1}}(x_{1,s_1})$ und inhomogenen $\alpha_{T_{s_2}}(x_{1,s_2})$ Balkenquerschnitt unter einer Belastung von $M_T = 1$ kN m.

für die erste Ansatzfunktion $\Psi_{1,T_{s_i}}(x_{1,s_i})$ aus (3.1) gewählt. Ein quadratisches Polynom der Form

$$\Psi_{1,T_{s_i}}(x_{1,s_i}) = a_{2,T_{s_i}}x_{1,s_i}^2 + a_{1,T_{s_i}}x_{1,s_i} \quad (3.18)$$

wird im weiteren Verlauf der Arbeit als Ansatzfunktion für der inhomogenen Fall dienen. Die Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Torsion durch das Modell kann dadurch verbessert werden, indem eine gewisse Anzahl von orthogonalen Polynomen $\Psi_{j,T_{s_i}}(x_{1,s_i})$, $j = 2, \dots, N_{T_{s_i}}$, gewählt wird. Dies erlaubt die näherungsweise Berücksichtigung von Moden höherer Ordnung innerhalb des Simulationsmodells. Es wird dazu ein weiteres Polynom $\Psi_{2,T_{s_i}}(x_{1,s_i})$ der Form

$$\Psi_{2,T_{s_i}}(x_{1,s_i}) = (x_{1,s_i})^2 + n_{T_{s_i}}x_{1,s_i} \quad (\text{homogener Fall}) \quad (3.19a)$$

$$\Psi_{2,T_{s_i}}(x_{1,s_i}) = (x_{1,s_i})^3 + n_{T_{s_i}}(x_{1,s_i})^2 \quad (\text{inhomogener Fall}) \quad (3.19b)$$

definiert. Der Koeffizient $n_{T_{s_i}}$ wird so gewählt, dass die resultierenden Polynome $\Psi_{1,T_{s_i}}(x_{1,s_i})$ und $\Psi_{2,T_{s_i}}(x_{1,s_i})$ orthogonal zueinander sind, d.h. die Bedingung

$$\int_0^{l_{s_i}} \Psi_{j,T_{s_i}} \Psi_{k,T_{s_i}} dx_{1,s_i} = 0, \quad \forall k, j | k \neq j \quad (3.20a)$$

erfüllt ist. Die Notwendigkeit eines weiteren Polynoms wird im weiteren Verlauf der Arbeit in Kapitel 4 näher untersucht. Dies erfolgt deshalb, um die etwaigen Anregungen höherer Moden unter der Berücksichtigung der angenommenen Systembeschränkungen abschätzen zu können.

3.3 Statische Untersuchung der Biegung

Da die statisch auftretenden Verbiegungen der Ausleger zu nicht vernachlässigbaren Verschiebungen des Endeffektors führen, wird hier die statische Deformation eines einseitig

eingespannten Balkens untersucht. Die statische Deformationen eines Euler-Bernoulli Balkens lassen sich durch eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung beschreiben. Diese ist mit

$$-\frac{\partial^2 \left(EI_{B33}(x_{1,s_i}) \frac{\partial^2 u_{B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right)}{\partial x_{1,s_i}^2} + \rho g A(x_{1,s_i}) = 0 \quad (3.21)$$

$$(3.22)$$

mit den Randbedingungen

$$u_{B3s_i}(0) = 0 \quad (3.23a)$$

$$\left. \frac{\partial u_{B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}} \right|_{x_{1,s_i}=0} = 0 \quad (3.23b)$$

$$-\left. \frac{\partial^2 u_{B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}} = 0 \quad (3.23c)$$

$$\left. \frac{\partial \left(EI_{B33}(x_{1,s_i}) \frac{\partial^2 u_{B3s_i}(x_{1,s_i})}{\partial x_{1,s_i}^2} \right)}{\partial x_{1,s_i}} \right|_{x_{1,s_i}=l_{s_i}} + F_B = 0 \quad (3.23d)$$

gegeben und kann aus der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli über das Variationsprinzip abgeleitet werden. Die statische Deformation u_{B2s_i} in x_{2,s_i} -Richtung besitzt abgesehen vom nicht existenten Term $\rho g A(x_{1,s_i})$ dieselbe Form wie (3.21). Daher wird nachfolgend nur die Verbiegung in x_{3,s_i} -Richtung betrachtet. Dabei bezeichnet $A(x_{1,s_i})$ die inhomogene Querschnittsfläche des Balkens und $I_{B33}(x_{1,s_i})$ gibt das inhomogene Flächenträgheitsmoment aus (2.57) an. Der Term $\rho g A(x_{1,s_i})$ in (3.21) beschreibt die auf den Balken verteilt wirkende Gravitationskraft entlang der Stabachse. Durch die Randbedingungen (3.23a), (3.23b) wird die Einspannung $x_{1,s_i} = 0$ des Balkens definiert. An der Stelle $x_{1,s_i} = l_{s_i}$ wird der Balken mit einer Biegekraft F_B belastet. Die Randbedingungen am Ende des Balkens $x_{1,s_i} = l_{s_i}$ sind in (3.23c), (3.23d) definiert. Die Biegekraft steht repräsentativ für die Belastung des Balkens durch eine Kopplung von mehreren elastischen Auslegern. Diese üben unter dem Einfluss der Gravitation eine Biegekraft sowie einen Biegemoment auf den vorigen Ausleger aus.

Die Lösung dieser Randwertaufgabe für die Biegungen in x_{3,s_i} -Richtung eines Balkens mit homogenen Querschnitt $u_{B3s_1}(x_{1,s_1})$ sowie mit inhomogenen Querschnitt $u_{B3s_2}(x_{1,s_2})$ ist in Abbildung 3.2 zu sehen. Die Lösungen wurden mithilfe von MATLAB berechnet, wobei wieder die geometrischen Abmessungen für die Ausleger aus dem Anhang A verwendet wurden. Der Balken ist durch die Erdgravitation entlang der x_{1,s_i} -Achse belastet. Zusätzlich wurde eine Biegekraft von $F_B = 5.95 \text{ kN}$ und das Biegemoment mit Null angenommen. Das Biegemoment könnten über die Randbedingung (3.23c) berücksichtigt werden. Die Kraft wurde so gewählt, dass sie der Belastung des ersten Auslegers bei $\varphi_2 = 0^\circ$ durch die Ersatzmassen und den zweiten Ausleger entspricht. Es wurde für die Ersatzmassen die Parameter aus dem Anhang A verwendet und die Masse des zweiten Auslegers ($m_{s_2} = 206 \text{ kg}$) lässt sich aus den Geometriedaten sowie der Dichte berechnen. In Abbildung 3.2

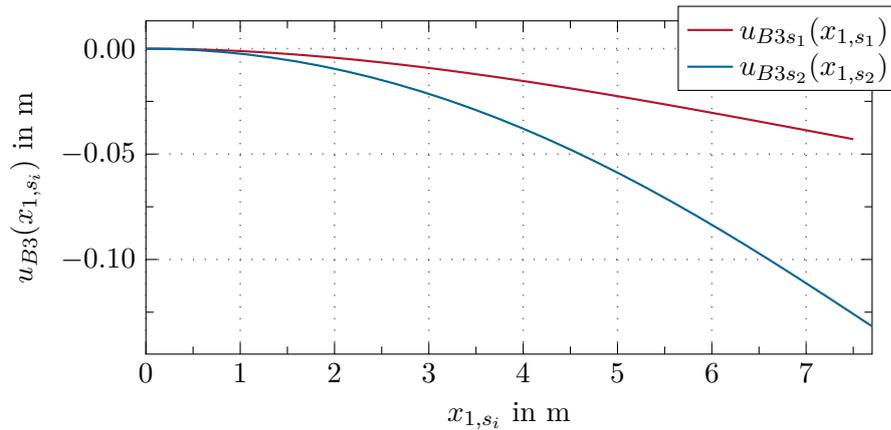


Abbildung 3.2: Verbiegungen $u_{B3s_1}(x_{1,s_1})$ (homogener Querschnitt) und $u_{B3s_2}(x_{1,s_2})$ (linear verjüngender Querschnitt) des Balkens in x_{3,s_i} -Richtung unter der Gravitations- und Biegebelastung.

ist ebenfalls zu erkennen, dass für die Approximation der Biegelinie sowohl im homogenen $u_{B3s_1}(x_{1,s_1})$ wie auch im inhomogenen Fall $u_{B3s_2}(x_{1,s_2})$ Polynome höherer Ordnung notwendig sind. Die Biegelinie aufgrund einer Veränderung der Belastung F_B würde ihre Form nicht ändern und kann somit durch Änderung der Polynomkoeffizienten beschrieben werden.

Durch eine Regressionsanalyse kann festgestellt werden, dass für die Darstellung der Biegelinie im homogenen Fall ein Polynom dritter Ordnung ausreichend ist und im inhomogenen Fall ein Polynom der vierten Ordnung die statischen Verhältnisse gut approximiert. Diese sind durch

$$\Psi_{1,Bjs_i}(x_{1,s_i}) = a_{2,Bjs_i}x_{1,s_i}^3 + a_{1,Bjs_i}x_{1,s_i}^2 \quad (\text{homogener Fall}) \quad (3.24a)$$

$$\Psi_{1,Bjs_i}(x_{1,s_i}) = a_{3,Bjs_i}x_{1,s_i}^4 + a_{2,Bjs_i}x_{1,s_i}^3 + a_{1,Bjs_i}x_{1,s_i}^2 \quad (\text{inhomogener Fall}) \quad (3.24b)$$

beschrieben und stellen die erste Ansatzfunktion $\Psi_{1,Bjs_i}(x_{1,s_i})$ der Biegung in x_{3,s_i} -Richtung aus der Gleichung (3.1) des Ritz-Ansatzes dar. Die Polynome erfüllen die Randbedingungen eines einseitig eingespannten Elementes, da sowohl $\Psi_{1,Bjs_i}(0) = 0$ als auch $\partial_{x_{1,s_i}}\Psi_{1,Bjs_i}(x_{1,s_i})|_{x_{1,s_i}=0} = 0$ gilt. Dieser Ansatz bietet eine hinreichend gute Approximation der statischen Biegelinie bei einem waagrecht stehenden Balken. In der Realität ist die Belastung natürlich von der Stellung der Gelenke abhängig, wobei sich die Intensität der Belastung nicht aber die grundlegende Form der Biegelinie verändert.

Die Verbiegungen in x_{2,s_i} -Richtung können auf dieselbe Art und Weise untersucht werden. Für die Approximation der Verbiegung der Balkenachse in x_{2,s_i} -Richtung wird daher ebenfalls ein Polynom dritter Ordnung als Ansatzfunktion $\Psi_{1,B2s_1}(x_{1,s_1})$ für den ersten Ausleger verwendet. Die Ansatzfunktion $\Psi_{1,B2s_2}(x_{1,s_2})$ für den zweiten Ausleger mit inhomogen Querschnitt wird durch ein Polynom der vierten Ordnung beschrieben. Beide Ordnungen wurden durch Regressionsanalyse der statischen Lösungen der Verbiegungen in x_{2,s_i} -Richtung festgelegt. Die Berücksichtigung höherer Moden in der Dynamik der Verbiegungen kann auch hier wieder durch Wahl eines orthogonalen Polynoms für die

zweite Ansatzfunktion $\Psi_{2,Bjs_i}(x_{1,s_i})$ näherungsweise erreicht werden. Für die Balken mit homogenen Querschnitt und inhomogenen Querschnitt kann das Polynom

$$\Psi_{2,Bjs_i}(x_{1,s_i}) = x_{1,s_i}^3 + n_{Bjs_i} x_{1,s_i}^2 \quad (3.25)$$

verwendet werden. Der Koeffizient n_{Bjs_i} errechnet sich wieder aus der Orthogonalitätsbedingung (3.20) der Polynome Ψ_{1,Bjs_i} und Ψ_{2,Bjs_i} .

Die verwendeten Polynomkoeffizienten für die Ansatzfunktionen (3.17), (3.19), (3.24) und (3.25) des ersten und zweiten Auslegers sind in den Tabellen A.4 bis A.5 im Anhang A zu finden. Der Ritz-Ansatz und die Wahl der Ansatzfunktion erlaubt die Auswertung der Integrale aus (3.13), wodurch sich das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (3.12) vollständig bestimmen lässt. Die Massenmatrix sowie die generalisierten Kraftterme können explizit für die gewählten Ansatzfunktionen angegeben werden.

3.4 Approximation mittels Legendre-Polynome

In diesem Abschnitt soll zur Vergleichbarkeit der örtlichen Approximation eine weitere Möglichkeit zur örtlichen Diskretisierung diskutiert werden. Für die örtliche Approximation werden hierbei die sogenannten Legendre-Polynom als Ansatzfunktionen verwendet. Die verwendeten Polynome ergeben sich daraus, wenn in den Ansätzen für die Deformationen (3.1) die Funktionen $\Psi_{j,Ts_i}(x_{1,s_i})$, $\Psi_{j,B2s_i}(x_{1,s_i})$ bzw. $\Psi_{j,B3s_i}(x_{1,s_i})$ durch x_{1,s_i}^j ersetzt werden. Die Ansätze für die Deformationen lassen sich damit in der Form

$$\alpha_{Ts_i}(t, x_{1,s_i}) = \sum_{j=1}^{N_{Ts_i}} a_{j,Ts_i}(t) x_{1,s_i}^j \quad (3.26a)$$

$$u_{B2s_i}(t, x_{1,s_i}) = \sum_{j=1}^{N_{B2s_i}} a_{j,B2s_i}(t) x_{1,s_i}^{j+1} \quad (3.26b)$$

$$u_{B3s_i}(t, x_{1,s_i}) = \sum_{j=1}^{N_{B3s_i}} a_{j,B3s_i}(t) x_{1,s_i}^{j+1} \quad (3.26c)$$

angeben. Die Randbedingungen aus (2.91), (2.92) werden durch die erste vorkommende Potenz der örtlichen Variable x_{1,s_i} in (3.26) implizit berücksichtigt. Die Koeffizienten der im Ansatz (3.1) entstehenden Polynome bilden hierbei die zeitvarianten Koeffizienten $a_{j,Ts_i}(t)$, $a_{j,B2s_i}(t)$ und $a_{j,B3s_i}(t)$. Die Ordnung der Legendre-Ansätze werden für die beiden Ausleger in der Form $N_{Ts_1} = 1$, $N_{B2s_1} = 3$, $N_{B3s_1} = 3$ und $N_{Ts_2} = 2$, $N_{B2s_2} = 4$, $N_{B3s_2} = 4$ festgelegt. Die gewählten Ordnungen der Ansätze entsprechen jenen Ordnungen der Polynome aus (3.17), (3.18), (3.24) sowie der polynomialen Approximation für die statische Verbiegung in x_{2,s_i} -Richtung. Damit lassen sich mit diesem Ansatz die statischen Verhältnisse mit der selben Güte in den örtlich approximierten Bewegungsgleichungen abbilden.

In den nächsten Kapiteln der Arbeit wird von einem Großraummanipulator mit zwei elastischen Auslegern und drei Drehgelenken ausgegangen, siehe Abschnitt 2.1. Das örtlich approximierte System aus partiellen Differentialgleichungen wird im folgenden

Kapitel einer Analyse des Systemverhaltens unterzogen. Dabei wird der Einfluss der örtlichen Ansatzfunktionen auf die Systemdynamik sowie auf die Systemkomplexität des resultierenden mathematischen Modells untersucht. Zusätzlich wird der Beitrag der Corioliskraft zum dynamischen Verhalten des Manipulators analysiert.

4 Modellanalyse

In diesem Kapitel wird die Untersuchung des dynamischen Verhaltens für unterschiedliche örtliche Approximationsansätze behandelt. Weiterhin wird eine Diskussion unterschiedlicher Möglichkeiten das mathematische Modell für die Trajektorienplanung zu vereinfachen durchgeführt. Die Güte der unterschiedlichen Approximationsansätze wird im erstem Abschnitt 4.1 analysiert. Zusätzlich wird in diesem Abschnitt die Vernachlässigung der Corioliskraft und dessen Auswirkung auf das dynamische Verhalten näher untersucht. Die Auswirkung der Vernachlässigung des kinetischen Energieanteils T_{k,s_i} aus (2.39) wird im Abschnitt 4.2 diskutiert.

Nachfolgend werden zwei verschiedene Szenarien vorgestellt. Diese Simulationen werden unter Aufschaltung einer Gravitationskompensation durchgeführt, wobei die notwendigen Gelenkmomente $M_{i,grav}$ in \mathbf{v}_{grav} zusammengefasst werden. Die Momente lassen sich mittels des generalisierten Kraftvektors $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{grav} &= \begin{bmatrix} M_{0,grav} & M_{1,grav} & M_{2,grav} \end{bmatrix}^T \\
 &= - \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot,N_u+1}(\mathbf{q}) & \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot,N_u+2}(\mathbf{q}) & \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot,N_u+3}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{4.1a}$$

bestimmen. Die Einträge $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot,N_u+1}(\mathbf{q})$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot,N_u+2}(\mathbf{q})$ und $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot,N_u+3}(\mathbf{q})$ des Kraftvektors $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}$ entsprechen jenen, die den generalisierten Koordinaten \mathbf{q}_{st} (3.3) der Gelenke zugeordnet sind. Dies ermöglicht das System stabil im Arbeitsbereich zu simulieren. Der im weiteren Verlauf der Arbeit untersuchte Manipulator besteht aus zwei elastischen Auslegeelementen sowie zwei Ersatzmassen. Das Trägheitsmoment der ersten Ersatzmasse wird vernachlässigt und die zweite Ersatzmasse stellt mit ihrem Trägheitsmoment repräsentativ für die Belastung durch weitere Auslegeelemente dar. Des Weiteren kann diese Masse als Endeffektor aufgefasst werden.

Im Szenario 1 wird eine planare Bewegung in der $x_{1,0}, x_{3,0}$ -Ebene durchgeführt, um die Anregung der Verbiegungen in x_{3,s_i} -Richtung zu analysieren. Die Stellungen der Gelenke wird dabei so gewählt, dass eine möglichst maximale Biegebelastung im beschränkten Arbeitsbereich auftritt. Dies kann erreicht werden, indem sich zu Beginn die Winkel des ersten Gelenkes $\varphi_1(t_0)$ und des zweiten Gelenkes $\varphi_2(t_0)$ in der Nullposition befinden. Die Momente $M_1(t=0) = M_{1,grav}(0)$ und $M_2(t=0) = M_{2,grav}(0)$ werden so berechnet, dass die auf das System wirkende Gravitation kompensiert wird. In der Simulation des Szenarios werden zum Zeitpunkt $t_0 = 0.5\text{s}$ die Momentensprünge $M_1 = M_{1,grav} + \Delta M_1$, $M_2 = M_{2,grav} + \Delta M_2$ in das erste und zweite Gelenk eingebracht. Die Sprunghöhen werden dabei zu $\Delta M_1 = 0.05M_{1,ub}$ bzw. $\Delta M_2 = 0.05M_{2,ub}$ gewählt, wobei $M_{1,ub}$ und $M_{2,ub}$ die maximal zulässigen Momente bezeichnen. Die festgelegten Beschränkungen für den Arbeitsbereich, die Winkelgeschwindigkeiten und die Eingangsmomente sind in der Tabelle A.7 des Anhang A definiert. Die aufgeschalteten Momente werden für eine Dauer

von 2 s konstant gehalten und am Ende des Intervalls sprunghöförmig abgeschaltet. Im Anhang A sind alle verwendeten Systemparameter zu finden, die in den nachfolgenden Simulationen verwendet wurden.

Beim Szenario 2 wird eine positive Drehung der Ausleger um die ortsfeste $x_{1,0}$ -Achse durchgeführt. Die Anfangskonfiguration wird so gewählt, dass der erste Ausleger senkrecht nach oben steht und der zweite Ausleger waagrecht in der Ebene liegt $\varphi_1(0) = 90^\circ$, $\varphi_2(0) = -90^\circ$. Dadurch erfolgt eine starke Anregung der Torsion $\alpha_{T_{s_1}}$ des ersten Mastes und zusätzlich kommt es zu einer Anregung der Biegungen in x_{2,s_i} -Richtung. Die Simulation für das zweite Szenario wird so ausgeführt, dass zum Zeitpunkt $t_0 = 0.5\text{s}$ ein Momentensprung in das Drehwerk φ_0 des Systems eingebracht wird. Für die gesamte Dauer der Simulation werden für die beiden anderen Gelenke nur die Momente der Gravitationskompensation eingepreßt. Die Sprunghöhe für das Moment M_0 entspricht dem maximalen Wert $M_{0,ub}$. Durch die sprunghöförmigen Änderungen der Eingangsgrößen kann erreicht werden, dass es zu einer möglichst großen Anregung der Eigenfrequenzen des elastischen Systems kommt. Damit wird die Güte der einzelnen Approximationsansätze verglichen und die für die Planung relevanten dynamischen Effekte analysiert.

4.1 Analyse des dynamischen Verhaltens

Die Analyse der Auswirkungen unterschiedlicher Ansatzfunktionen auf das dynamische Systemverhalten sowie auf die Modellkomplexität erfolgt in diesem Abschnitt. Der Großraummanipulator mit zwei Auslegern bildet dabei das zugrundeliegende physikalische System, wobei der zweite Ausleger einen inhomogenen Querschnitt aufweist. Die Komplexität der resultierenden mathematischen Gleichungen von drei verschiedenen örtlichen Approximationen wird nachfolgend verglichen. Weiterhin wird das dynamische Verhalten zweier Modellvarianten im Rahmen der vorgestellten Simulationsszenarien untersucht. Basierend auf dieser Analyse wird eine geeignete örtliche Approximation des Systems aus partiellen Differentialgleichungen abgeleitet.

An das Modell wird die Anforderung gestellt, dass es eine geringe Rechenkomplexität aufweist aber trotzdem alle für die Regelung relevanten dynamischen sowie statischen Eigenschaften des Manipulators hinreichend genau abbildet. Insbesondere wird der Einfluss der Corioliskraft auf die Systemdynamik untersucht. Dies ist deshalb interessant, da die Auswertung der Corioliskraft im Integrationsverfahren mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist. Hierfür wird der maximale Anteil der Corioliskraft an der gesamten Beschleunigungskraft ausgewertet.

4.1.1 Einfluss der Ansatzfunktionen

Die Wahl der Ansatzfunktionen und deren Einfluss auf die Systemkomplexität sowie Systemdynamik wird im nachfolgenden Teil der Arbeit behandelt. Die Modellvariante 1 ergibt sich dadurch, dass je Deformation eine örtliche Ansatzfunktion im Ritz-Ansatz (3.1) verwendet wird. Die Wahl für die örtliche Funktion der Torsion sowie für jene der Verbiegungen fällt auf die entsprechende polynomielle Näherung der statischen Lösungen von (3.16), (3.21), wie sie durch (3.17), (3.18) und (3.24) beschrieben ist. Das mathemati-

sche Modell kann in der Zustandsraumdarstellung (3.14) angegeben werden, wobei der Systemzustand 18 Variablen aufweist ($\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^9$).

Im zweiten Modell wird zusätzlich näherungsweise der Beitrag von Moden höherer Ordnung berücksichtigt. Dies erfolgt dadurch, dass die örtlichen Approximationen der Deformationen um orthogonale Polynome (3.19), (3.25) erweitert werden. Es werden damit zwei örtliche Ansatzfunktionen pro Deformation verwendet. Dadurch entsteht ein System aus 30 Zuständen ($\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{15}$), was einen beträchtlichen Mehraufwand für die Simulation des Modells vermuten lässt.

Das dritte Modell entsteht dadurch, dass Legendre-Polynome für den Ritz-Ansatz verwendet werden. Die hierfür verwendeten Ansätze sind in Abschnitt 3.4 dargestellt. Dadurch ergibt sich eine Approximation des Systems aus partiellen Differentialgleichungen mit 17 generalisierten Koordinaten. Dies entspricht in Zustandsraumdarstellungen einer Dimension von 34 Systemzuständen ($\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{17}$).

Eine Zusammenfassung der unterschiedlichen Modellvarianten ist in der Tabelle 4.1 angegeben.

Modellvariante	Typ Ansatz	Anzahl der Ansatzfunktionen	Anzahl der Dyn. Zustände
1	Polynome der statischen Lösung	6	18
2	Polynome der statischen Lösung + orthogonales Polynom	12	30
3	Legendre-Polynome	17	34

Tabelle 4.1: Modellvarianten für die Untersuchung der Rechenkomplexität.

In den Tabellen 4.2a bis 4.2c ist die Gesamtanzahl an Operationen für die Auswertung der Massenmatrix $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$, der Corioliskraft $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, sowie der generalisierten Kraftvektoren $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{q}, \mathbf{v})$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q})$ der drei Varianten der Approximation zu sehen. Die Auswertungen wurden mit Hilfe von MAPLE durchgeführt, wo die benötigten Operationen des generierten optimierten MATLAB-Codes analysiert wurden. Die Auswertung wurde so durchgeführt, dass jede Massenmatrix und jeder Term der Corioliskräfte aus (3.13) getrennt ausgewertet wurde. Die Summe aller benötigten Operationen für die Auswertung der Matrix $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$ bzw. der Kraft $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ kann den Tabellen 4.2a bis 4.2c entnommen werden.

Die benötigten Operationen für die Corioliskraft stehen in direkter Relation zur Massenmatrix sowie zur Gesamtanzahl an generalisierten Koordinaten des jeweiligen Systems. In der Tabelle 4.2a sind die Rechenoperationen für das System mit einer örtlichen Ansatzfunktion pro Deformationsfreiheitsgrad zu sehen. Vergleicht man die Rechenkomplexität mit jener aus der Tabelle 4.2b so ist zu erkennen, dass sich die Anzahl der Operationen für die Berechnung der Systemdynamik des zweiten Modells mehr als verdoppelt hat. Die Rechenkomplexität der Modellvariante 3 ist in der Tabelle 4.2c dargestellt. Die Modellgüte der letzten Variante ist annähernd mit jener der ersten vergleichbar, da die örtlichen Approximationen durch Polynome der selben Ordnung erfolgen. Die Variante 1 ist gegenüber der Letzten, wegen des weitaus geringeren Simulationsaufwands sowie durch die genauere Abbildung der statischen Verhältnisse, zu bevorzugen. Die Anzahl der Multiplikationen für die Auswertung ist bei der Modellvariante 3 nicht signifikant größer als jene bei der Modellvariante 1. Ein signifikanter Unterschied lässt sich bei der Anzahl der benötigten Addition feststellen. Der Aufwand für die Integration der Systemdynamik der Modellvariante 3 erhöht sich dadurch, da diese annähernd die doppelt soviel Zustände

Modell 1				
Bezeichnung	Addition	Multiplikation	Division	Funktionsauswertungen
$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$	3507	6772	0	16
$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	32608	52698	0	16
$\bar{\tau}_{pot}(\mathbf{q})$	254	639	4	4

(a) Rechenkomplexität der Modellvariante 1 (Polynome der statischen Lösung).

Modell 2				
Bezeichnung	Addition	Multiplikation	Division	Funktionsauswertungen
$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$	8506	15575	13	16
$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	110140	192985	14	16
$\bar{\tau}_{pot}(\mathbf{q})$	1490	2795	23	4

(b) Rechenkomplexität der Modellvariante 2 (zwei Ansatzfunktion pro Deformation).

Modell 3				
Bezeichnung	Addition	Multiplikation	Division	Funktionsauswertungen
$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$	4303	8621	8	16
$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	79582	50364	8	16
$\bar{\tau}_{pot}(\mathbf{q})$	204	486	7	11

(c) Rechenkomplexität der Modellvariante 3 (Ansatzfunktionen als Legendre-Polynome).

Tabelle 4.2: Analyse der Modellkomplexität: Anzahl benötigter Operation der verschiedenen Modellvarianten.

besitzt als die Modellvariante 1.

Als nächster Schritt erfolgt die Analyse der Simulationsergebnisse der zuvor definierten Szenarien. Es werden nur die Simulationsergebnisse für die Modellvariante 1 und 2 betrachtet. Am Beginn der Simulationen befinden sich die Systeme in einer Ruhelage, die sich aus den vorgegebenen Gelenkstellungen ergibt. Damit sich das System in der Ruhelage befindet, müssen die dafür notwendigen Eingangsmomente sowie die Anfangsdeformationen für die jeweilige Gelenkwinkelkonfiguration zum Zeitpunkt Null berechnet werden. Durch Lösen des nichtlinearen Gleichungssystem $\mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, das sich ergibt, wenn in der Gleichung (3.12) die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ und die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}}$ null gesetzt werden, erhält man die Ruhelage des Systems sowie die notwendigen Eingangsmomente. Die Lösung kann z. B. mittels der Funktion `fsolve` in MATLAB erfolgen.

Zu Beginn des Szenarios 1 befindet sich der Endeffektor an der Position $\mathbf{p}_{E0,s_2}(0) = [15.2 \ 0 \ -0.18]^T$ m. Es wird nun das Verhalten des Manipulators untersucht, wenn eine Bewegung in der $x_{2,0}, x_{3,0}$ -Ebene durchgeführt wird. Dies wird mit den Eingangsgrößen aus Abbildung 4.1 erreicht. Dabei ist M_0 identisch null und die Momente der Gravitationskompensation werden mit den sprungförmigen Momenten überlagert. Das resultierende Verhalten der beiden Modellvarianten kann der Abbildung 4.2 entnommen werden.

Der Gelenkwinkel φ_0 in Abbildung 4.2a bleibt für die Dauer der Simulation konstant Null. Die gewünschte Anhebung des Endeffektors ist in den Winkel φ_1 und φ_2 in den Abbildungen 4.2b und 4.2c zu sehen. Bei der Betrachtung der Verläufe kann zwischen den beiden Modellvarianten kaum ein Unterschied festgestellt werden.

Die Torsion des ersten Stabendes sowie die Torsion des zweiten Stabendes ist für die gesamte Dauer der Simulation identisch null. Dies kann in der Abbildung 4.2d und 4.2g

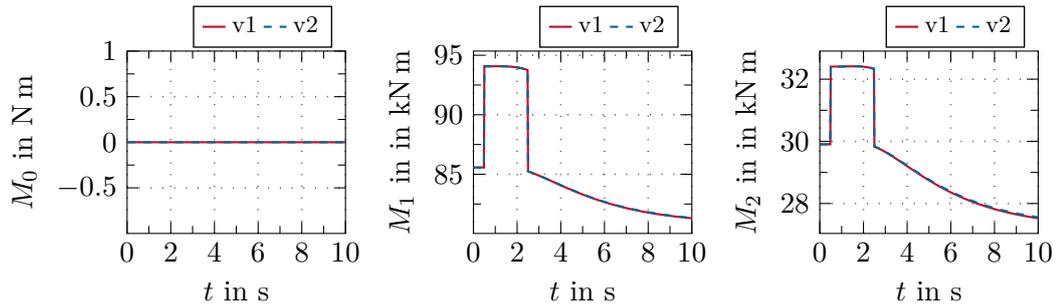


Abbildung 4.1: Eingeprägte Eingangsmomente im Szenario 1.

festgestellt werden. Die Verbiegung $u_{B2s_i,L}$ in x_2 -Richtung des jeweiligen Auslegerendes ist ebenfalls während der gesamten Bewegung null, da es zu keiner Anregung kommt. Dieser Sachverhalt kann den Abbildungen 4.2e und 4.2h erkannt werden. Die Anhebung der beiden Mastenden hat zufolge, dass es zu einer Anregung von Schwingungen der Verbiegung $u_{B3s_{1,L}}$ und $u_{B3s_{2,L}}$ kommt. Das dynamische Verhalten der Verbiegungen der beiden Mastenden ist in den Abbildungen 4.2f und 4.2i dargestellt.

Es kann beim Vergleich der dynamischen Verläufe festgestellt werden, dass es bei der Modellvariante 2 zu einer minimalen Anregung der Moden höherer Ordnungen kommt. Damit dies besser zu sehen ist sind die Verbiegungen $u_{B3s_{1,L}}$ und $u_{B3s_{2,L}}$ der Balkenenden in Abbildung 4.3 vergrößert dargestellt. Diese Anregung kann unmittelbar in der Nähe der Momentensprünge beobachtet werden. Der geringe Offset zwischen den Verläufen ist durch die leicht unterschiedlichen Anfangszustände der beiden Modellvarianten zu erklären.

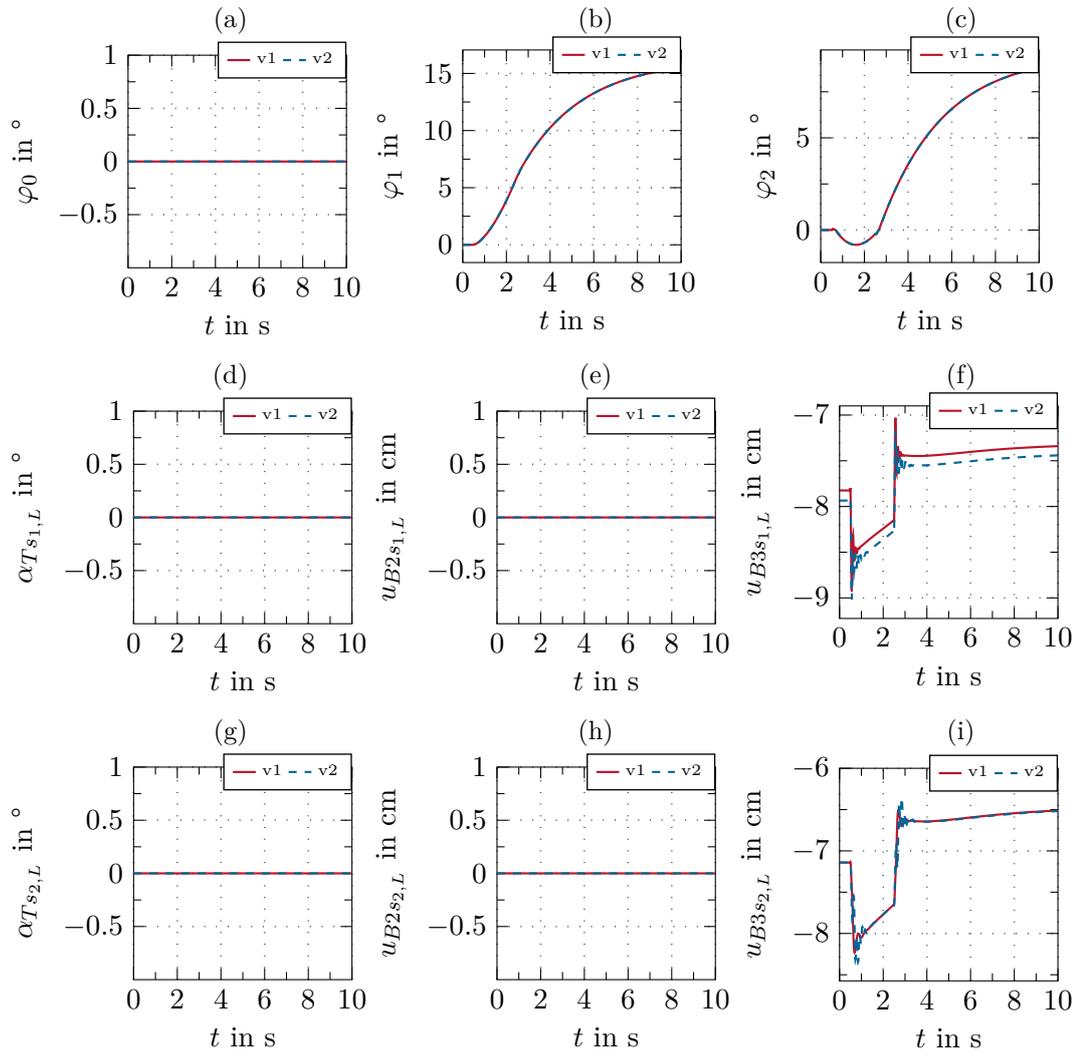


Abbildung 4.2: Gelenkwinkel und Deformationen der Auslegerenden der beiden Modellvarianten im Szenario 1.

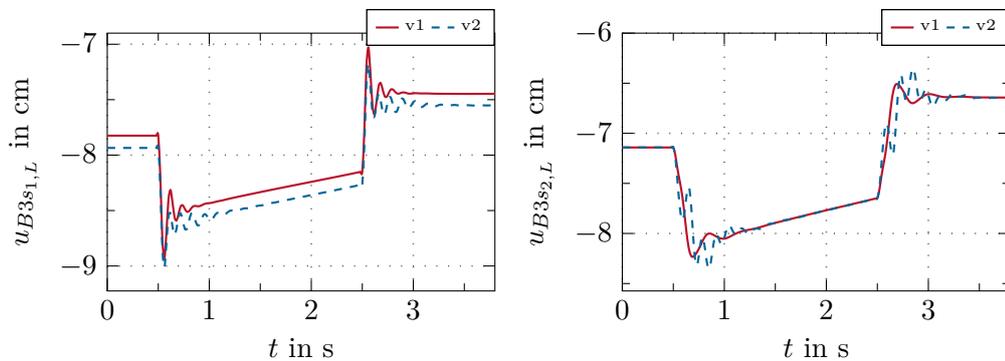


Abbildung 4.3: Verbiegungen der Auslegerenden $u_{B3_{s_i,L}}$ in x_{3,s_i} -Richtung im Szenario 1.

Im Szenario 2 befindet sich der Endeffektor aufgrund der Gelenkwinkelstellungen sowie der Verbiegung in x_{3,s_i} -Richtung auf der Position $\mathbf{p}_{E0,s_2}(0) = [7.7 \ 0 \ 7.43]^T \text{m}$. Die Eingangsgrößen, die in diesem Szenario auf das System aufgeschaltet werden, sind in der Abbildung 4.4 dargestellt. Für das Moment M_0 ist das sprungförmige Profil zu sehen, welches eine Drehung der Mastelemente um die x_{3,s_0} -Achse bewirkt. Die anderen beiden Momente M_1 und M_2 ergeben sich aufgrund der implementierten Gravitationskompensation. Die zu den Momenten zugehörigen Verläufe der Gelenkwinkel sowie der Deformationen der Auslegerenden ($x_{1,s_i} = l_{s_i}$) beider Modellvarianten sind der Abbildung 4.5 zu entnehmen.

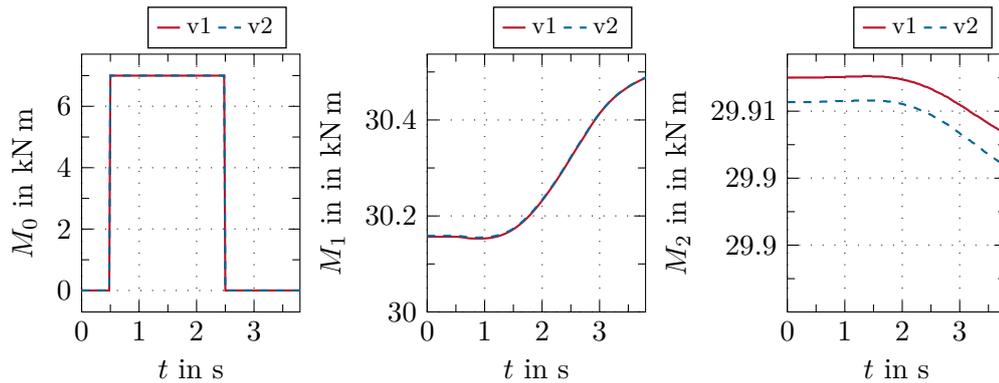


Abbildung 4.4: Eingeprägte Eingangsmomente im Szenario 2.

Bei der Betrachtung der Abbildungen 4.5a-4.5c kann kaum ein Unterschied im dynamischen Verhalten der Gelenkwinkel der beiden Modellvarianten festgestellt werden. Dies lässt auf einen geringen Einfluss der Deformationen auf die Dynamik der Gelenkwinkel schließen. Es kann lediglich ein minimaler Unterschied im Verlauf des Gelenkwinkels φ_2 festgestellt werden. Die Drehung um die Hochachse kann in der Abbildung 4.5b erkannt werden. Die zwei Winkel φ_1 und φ_2 der parallelen Gelenke erfahren aufgrund der auftretenden Torsion eine minimale Auslenkung ihrer Anfangsposition. Diese Auslenkung ist bedingt durch die Kopplungen der Deformationen und erklärt zudem die Verläufe der Momente in der Abbildung 4.5.

Die Anregung der Deformationen des ersten Auslegerendes sind in den Abbildungen 4.5d-4.5f zu sehen. Die Deformationen des zweiten Auslegerendes können den Abbildungen 4.5g-4.5i entnommen werden. Betrachtet man die Torsion der Auslegerenden in den Abbildungen 4.5d und 4.5g so ist zu erkennen, dass eine Anregung aufgrund der Drehung um die $x_{1,0}$ -Achse und der definierten Gelenkconfiguration erfolgt. Dabei erfährt der erste Stab eine starke Torsion aufgrund der gewählten Gelenkstellung φ_2 des zweiten Auslegers und des Momentes M_0 . Die Stellung des zweiten Gelenkes maximiert dabei das effektiv wirkende Trägheitsmoment für die Torsion des ersten Stabes. Es kann dabei ein maximaler Wert von -0.8° festgestellt werden, was in etwa einer Verschiebung des Endeffektors um 10.8cm entspricht im Vergleich zu einem Manipulator, bei dem keine Torsion auftritt. Dieser Wert würde sich zusätzlich vergrößern, falls weitere Auslegerelemente hinzugefügt werden. Das würde die effektive Reichweite des Manipulators erhöhen, womit die Torsion des ersten Auslegers einen größeren Einfluss auf die Verschiebung des Endeffektors besitzt.

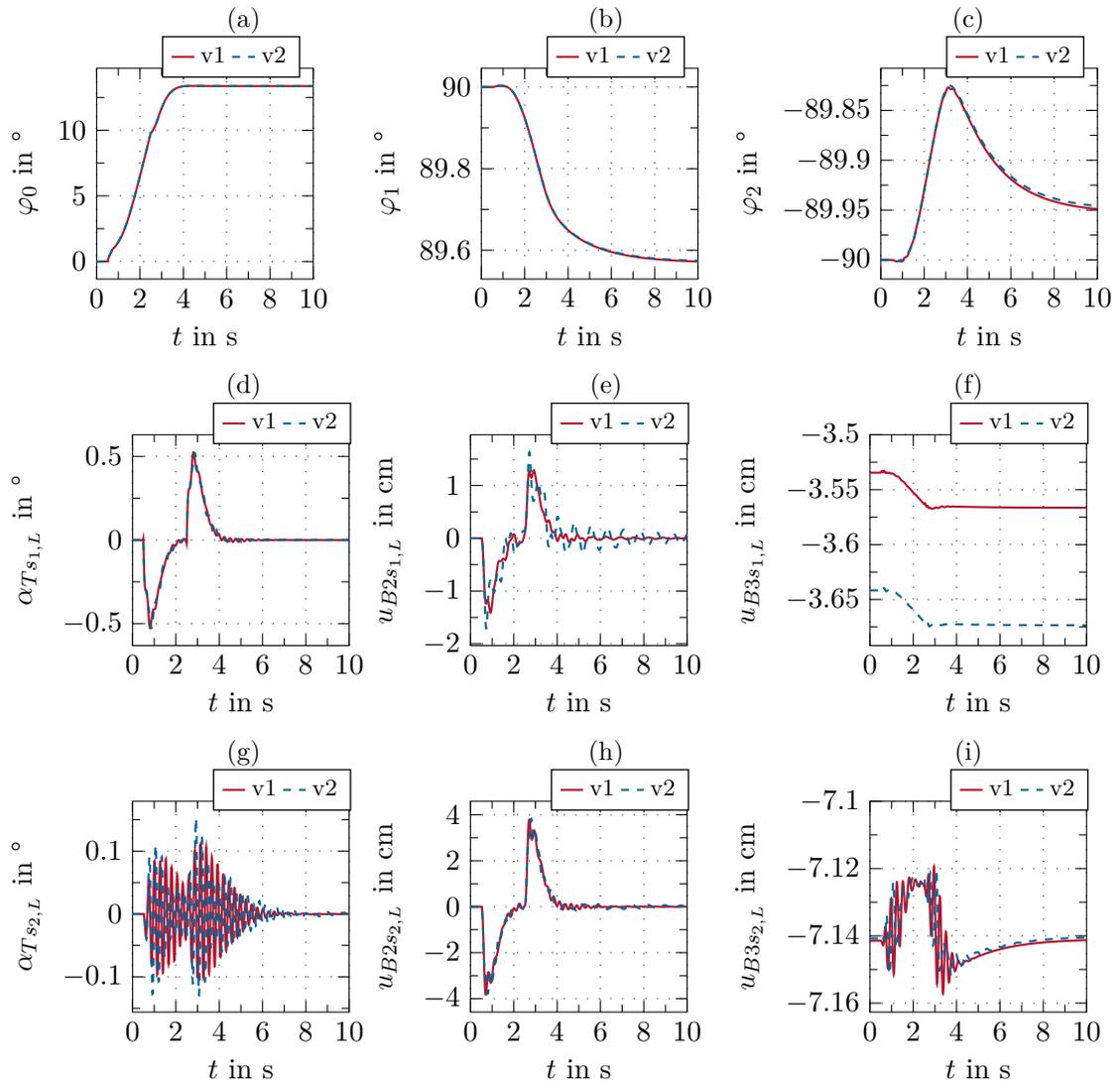
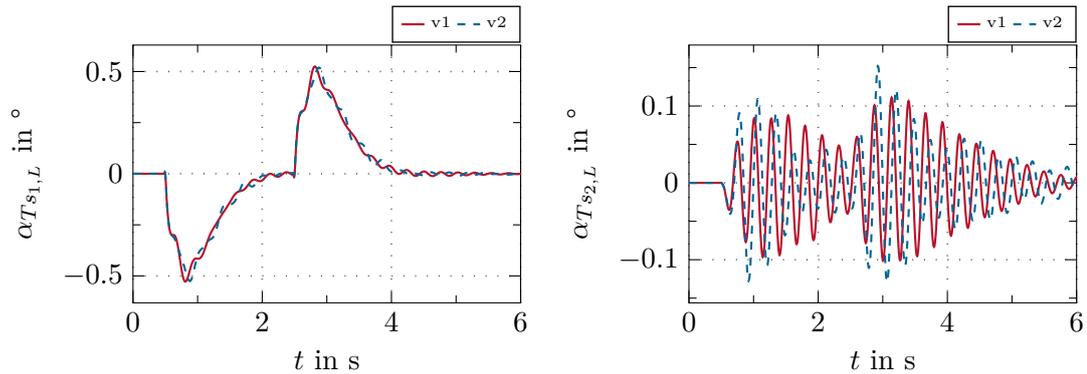


Abbildung 4.5: Gelenkwinkel und Deformation der Auslegerenden der beiden Modellvarianten im Szenario 2.

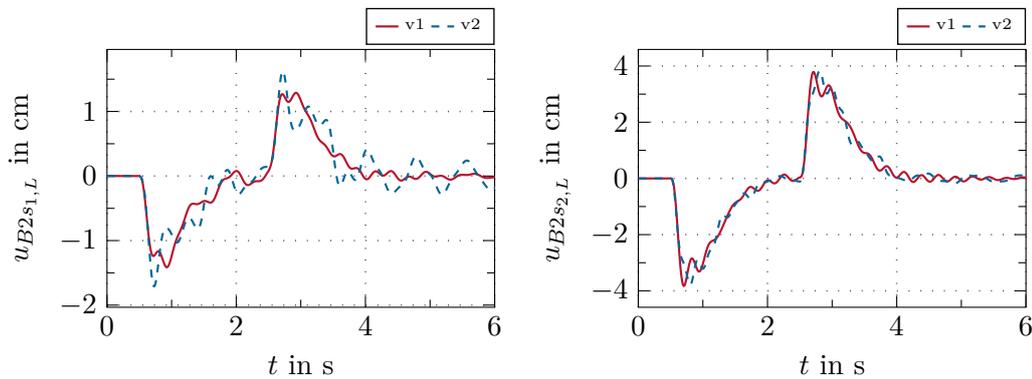
Vergleicht man die Verläufe der beiden Modellvarianten so ist zu erkennen, dass sich diese hauptsächlich kurz nach der abrupten Änderung der Eingangsgröße voneinander unterscheiden. Dafür sind die Torsionen $\alpha_{T_{s_i,L}}$ der Auslegerenden in vergrößerter Form in der Abbildung 4.6 dargestellt.

Die Unterschiede in der Höhe der maximal auftretenden Torsion sind hierbei nur marginal wie auch jene der Biegungen. In der Modellvariante 2 können zusätzliche Schwingungsanteile aufgrund von Moden höherer Ordnung beobachtet werden. Die Beobachtungen gelten für die Torsion des ersten und des zweiten Auslegerelementes.

In den Abbildungen 4.5e, 4.5h sind die Simulationsergebnisse für die Verbiegungen in x_{2,s_i} -Richtung der beiden Auslegerenden dargestellt. Während der Beschleunigung

Abbildung 4.6: Torsion $\alpha_{T_{s_i,L}}$ der Auslegerenden im Szenario 2.

der Drehung ist zu erwarten, dass sich nach Abklingen aller Ausgleichsvorgänge, eine konstante Verbiegung der Ausleger einstellt. Die Verbiegung ergibt sich nach Abschalten des Momentes M_0 wieder zu Null nachdem die Ausgleichsvorgänge abgeschlossen sind. Bei den Verläufen der Verbiegungen des ersten Auslegers können größere Unterschiede zwischen den beiden Modellvarianten als bei jenen des zweiten Auslegers festgestellt werden. Zu diesem Zwecke sind die Verbiegungen $u_{B2s_i,L}$ der Auslegerenden in vergrößerter Form in der Abbildung 4.7 zu sehen.

Abbildung 4.7: Verbiegungen der Auslegerenden $u_{B2s_i,L}$ in x_{2,s_i} -Richtung im Szenario 2.

Diese Unterschiede sind sowohl im maximal auftretenden Wert sowie im Schwingungsverhalten festzustellen. Im Allgemeinen kann davon ausgegangen werden, dass im zweiten Modell das Schwingungsverhalten genauer abgebildet wird. Gesamt gesehen sind auch hier die Differenzen zwischen den beiden Modellen nicht sehr groß, da die Moden niedrigerer Ordnung der Strukturdeformation dominierend sind.

In den beiden Abbildungen 4.5f, 4.5i sind die Verbiegungen der Auslegerenden in x_{3,s_i} -Richtung für das Szenario 2 dargestellt. Aufgrund der Gelenkstellung erfährt der erste Ausleger eine geringe Deformation in x_{3,s_i} -Richtung, wobei der zweite Ausleger seine maximal zu erwartende Deformation besitzt. Bei der Verbiegung des ersten Stabes kann in der Modellvariante 2 die leichte Anregung von höheren Moden beobachtet werden.

Die Verbiegungen des zweiten Stabes ändern sich während der Simulation kaum. Der Endwert der Verbiegungen ist bei beiden Varianten annähernd gleich.

Aufgrund der sehr unterschiedlichen Modellkomplexitäten beider Varianten wird im weiteren Verlauf für den Entwurf des Regelungs- und Steuerungskonzeptes die Systemvariante 1 mit jeweils nur einer Ansatzfunktion herangezogen. Diese ist deshalb der Variante 2 vorzuziehen, da beim Vergleich der Deformation nur sehr geringe dynamische Unterschiede festgestellt werden konnten. Der größte Unterschied beim dynamischen Verhalten war im Verlauf der Verbiegung in x_{2,s_i} -Richtung zu beobachten. Durch Verwendung der Variante 1 ergibt sich eine geringe Dimension des Zustandsraumes. Dies verringert zusätzlich die Komplexität der Optimierungsaufgabe. Der dadurch begangene Modellfehler wird mithilfe einer Fehlerregelung kompensiert.

Es wird nun die Annahme verifiziert, dass die statische Durchbiegungen nicht ihre Form ändern sondern nur die Koeffizienten variieren. Es werden dafür die vorherrschenden Biegekräften verändert, damit eine andere Belastung der elastischen Ausleger als in Abschnitt 3.3 angenommen vorherrscht. Die statische Verbiegung in x_{3,s_1} -Richtung des ersten Auslegers wird im weiteren betrachtet. Die Gelenke sind in den Positionen $\varphi_1 = 45^\circ$ und $\varphi_2 = 0^\circ$ fixiert. Auf den ersten Ausleger wirkt in diesem Fall die verteilte Gravitationskraft $f_g = -\rho g \cos(\frac{\pi}{4})$ sowie die Biegekraft $F_B = -(m_1 + m_2 + m_{s_2})g \cos(\frac{\pi}{4})$ am Ende. Diese ist bedingt durch die Gravitationskraft, die auf die Masse m_1 am Ende des ersten Auslegers, die Masse m_{s_2} des Auslegers s_2 sowie auf die Masse m_2 am Ende des zweiten Auslegers wirkt. Die Masse m_2 und der Ausleger s_2 bewirken zusätzlich ein Biegemoment am Auslegerende $s_{1,L}$ aufgrund der Gravitation. In der Abbildung 4.8 ist die Verschiebung $u_{B3s_1,1}(0, x_{1,s_1})$ der Stabachse als Ergebnis der statischen Optimierung für die gewählte Gelenkwinkelstellung zu sehen. Zusätzlich wurde die Lösung $u_{B3s_1,2}(x_{1,s_1})$ des Randwertproblems (3.3) der statischen Verbiegung eines Balkens in die Abbildung eingezeichnet, wobei für die Belastungen die zuvor erwähnten Kräfte verwendet wurden. Die Lösung des Randwertproblems erfolgt wieder mithilfe von MATLAB (bvp4c), wobei 40 äquidistante Stützstellen zur Approximation herangezogen werden. Bei der Betrachtung der Abbildung 4.8 ist ersichtlich, dass sich die Biegelinien unter anderer angenommener Belastung nur marginal voneinander unterscheiden. Dies bestätigt die zuvor getroffene Annahme, dass die Biegelinie der statischen Lösung auch in einer anderen Konfiguration ihre Form behält und nur eine Skalierung in Abhängigkeit der Belastung erfährt.

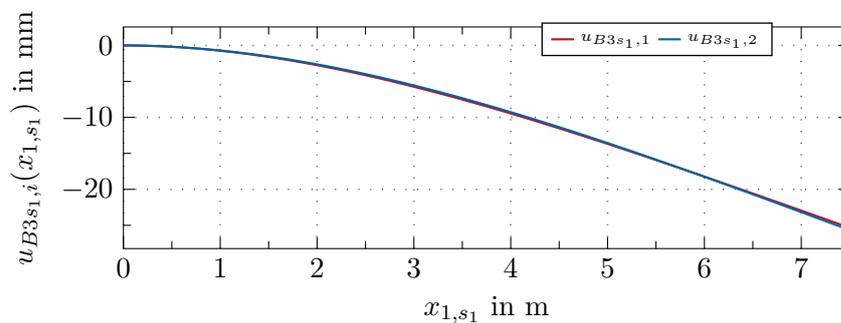


Abbildung 4.8: Verbiegung $u_{B3s_1,1}(x_{1,s_1})$ der Modellvariante 1 in der Ruhelage und Verbiegung $u_{B3s_1,2}(x_{1,s_1})$ als Lösung der Randwertaufgabe.

4.1.2 Einfluss der Corioliskraft

Aufgrund des sehr hohen Berechnungsaufwandes für die Corioliskraft wird ihr Einfluss auf die Systemdynamik in diesem Abschnitt untersucht. Die Coriolisterme sind abhängig von der Konfiguration des Manipulators und haben einen umso größeren Einfluss, je schneller sich die Konfiguration des Systems verändert. Es wird unter den gegebenen Systembeschränkungen der prozentuale Anteil des auftretenden Corioliskraftvektors in Bezug auf die gesamt wirkenden Kräfte betrachtet. Dies erfolgt im Rahmen der zuvor definierten Szenarien, wobei der größte Beitrag über die gesamte Simulationszeit erfasst wird. Der prozentuale Anteil an der gesamt auftretenden beschleunigenden Kraft über die Simulationsdauer $T = t_1 - t_0$ lässt sich mathematisch in der Form von

$$CP = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \frac{\|\bar{\mathbf{C}}(t)\|_\infty}{\|\mathbf{F}(t)\|_\infty} \quad (4.2)$$

beschreiben, wobei der Vektor \mathbf{F} in der Form

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{v}) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q}) - \bar{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.3)$$

definiert ist. Mit $\|\cdot\|_\infty$ wird die Maximumsnorm der Vektoren bezeichnet. Der Vektor \mathbf{F} entspricht der Summe aller beschleunigenden Kräfte aus der Differentialgleichung (3.12). Der Vektor $\bar{\mathbf{C}}$ entspricht dem Coriolis term aus (3.12). In der Tabelle 4.3 ist der beobachtete maximal auftretende Anteil für die einzelnen Szenarien sowie für die unterschiedlichen Modellvarianten zu sehen. Bei der Modellvariante 1 kann der Maximalwert im Szenario 2 beobachtet werden, wobei sein Beitrag zur Beschleunigung des Zustandes $\varphi_2(t)$ am größten ist. Bei der Modellvariante 2 beträgt der maximal auftretende Anteil nur 0.15%, welcher im Anteil der Beschleunigungskraft des Zustandes $a_{2,B2s_1}(t)$ auftritt. Beim Szenario 1 ist der prozentuale Anteil für beide Varianten nur äußerst gering. Dies kann dadurch erklärt werden, da sich in diesem Fall die Konfiguration des Manipulators nicht wesentlich ändert. Die maximalen Werte können jeweils unmittelbar nach Ein- bzw. Abschalten der eingepprägten Momente beobachtet werden. Aus den Werten der Tabelle und den Beobachtungen kann nun geschlossen werden, dass der prozentuale Anteil der Corioliskraft an der gesamten Beschleunigung im Allgemeinen nur sehr gering ist und keinen maßgeblichen Beitrag am dynamischen Systemverhalten besitzt. Dies liegt vor allem daran, dass die maximalen Werte nur sehr kurz und unmittelbar nach ruckartigen Änderungen der eingepprägten Momente auftreten. Diese ruckartigen Änderungen werden im Weiteren durch eine optimale Planung der Steuerung verhindert. Im weiteren Verlauf der Arbeit

System	Szenario Nr.	Anteil
Modell Variante 1	1	0.013%
Modell Variante 2	1	0.017 %
Modell Variante 1	2	2 %
Modell Variante 2	2	0.15 %

Tabelle 4.3: Maximaler Anteil der Corioliskraft.

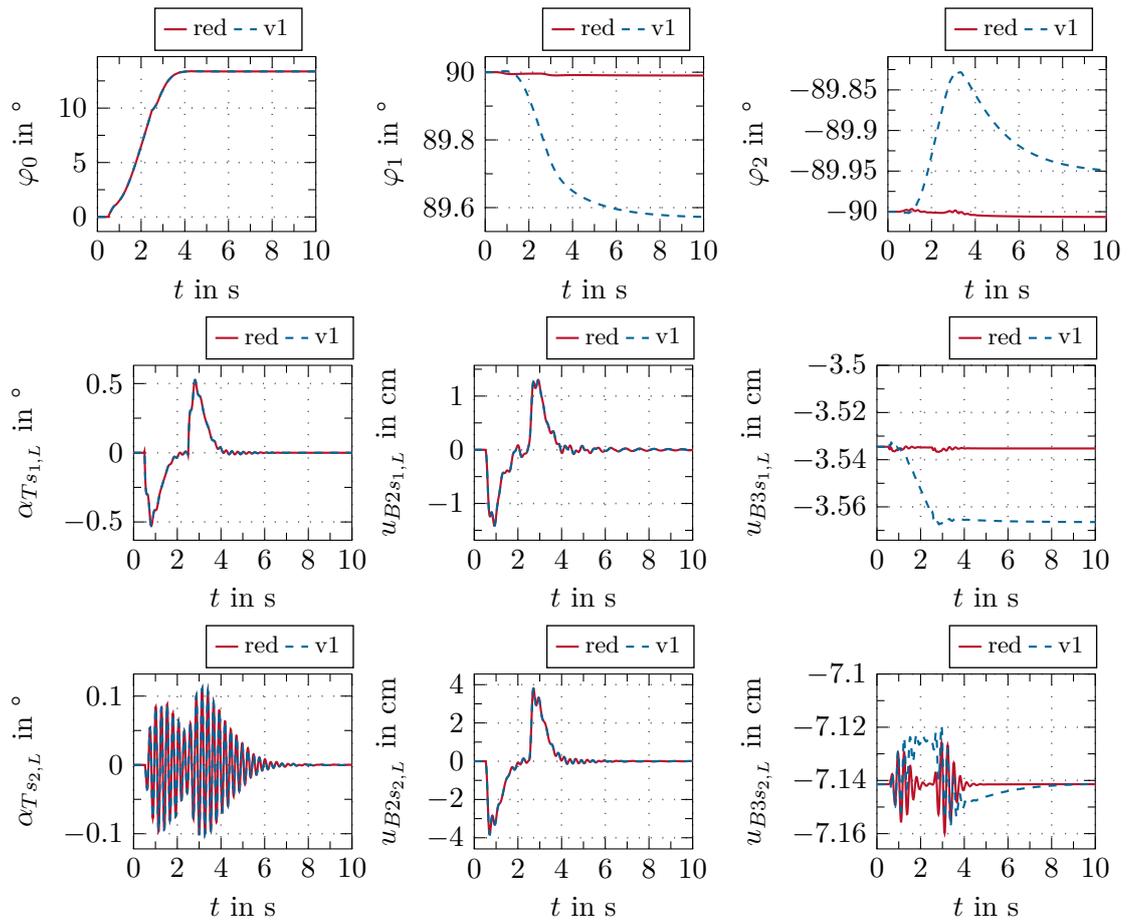


Abbildung 4.9: Vergleich des Systemverhaltens der ersten Modellvariante mit und ohne Corioliskraft im Szenario 2.

wird die Corioliskraft für den Entwurf der Trajektorienplanung daher vernachlässigt. Die Kraft wird daher nur noch im Referenzmodell berücksichtigt.

In der Abbildung 4.9 sind die Verläufe der Gelenkwinkel sowie der Deformationen der Auslegerenden im zweiten Szenario für die Modellvariante 1 mit und ohne Corioliskraft zu sehen. Außer in den Winkeln φ_2 sowie φ_3 kann bei der Betrachtung der Verläufe beider Modellvarianten kein Unterschied beobachtet werden. Der Einfluss der Corioliskraft ist auf die beiden Gelenkwinkel am größten, wobei auch hier dieser nur marginal ist. Dies liegt am geringen Beitrag der Corioliskraft an den gesamt wirkenden Kräften.

4.2 Analyse der Energien

In diesem Abschnitt wird anhand mehrerer Szenarien der geringe Einfluss des vernachlässigten Terms der kinetischen Energien eines Auslegers (2.39) analysiert. Hierbei sind in der Abbildung 4.10 die kinetischen Energien der beiden elastischen Ausleger für die zwei

definierten Szenarien zu sehen.

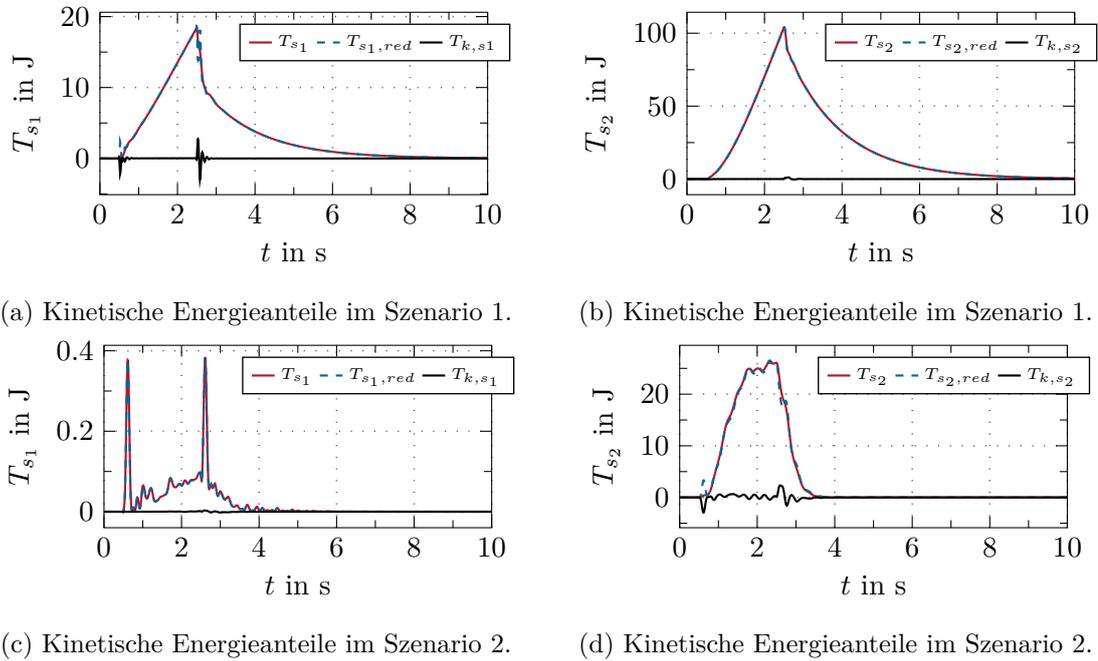


Abbildung 4.10: Kinetischen Energieanteile des Auslegers s_1 und s_2 im Szenario 1 und 2.

Die Abbildungen 4.10a-4.10d zeigen die gesamte kinetische Energie $T_{s_i}(t)$ eines Auslegers s_i , die reduzierte kinetische Energie $T_{s_i,red}(t)$ sowie den Anteil $T_{k,s_i}(t)$ der Energie zufolge einer Schwerpunktänderung des Balkens. In der ersten Spalte sind die Energien des ersten Auslegers s_1 zu sehen. Die zweite Spalte zeigt die Energien des zweiten Auslegers s_2 . Bei der Betrachtung der Energien ist zu erkennen, dass der Anteil der kinetischen Energie aufgrund der Schwerpunktverschiebung nur wenige Prozent der gesamten kinetischen Energie ausmacht. Betrachtet man die Simulationsergebnisse so ist zu erkennen, dass der Einfluss der Schwerpunktverschiebung auf die kinetische Energie des Auslegers s_2 wesentlich geringer ist als jener auf den Ausleger s_1 . Der größte Beitrag tritt bei den abrupten Änderungen der Eingangsgrößen auf. Diese sind für das Szenario 1 in der Abbildung 4.1 und für das Szenario 2 in der Abbildung 4.4 dargestellt. Ein Grund dafür ist, dass es in diesem Fall zu einer starken Anregung der Verzerrungen kommt. Dadurch ist die Geschwindigkeit der Verschiebung des Schwerpunktes zu diesen Zeitpunkten am größten. Zu Beginn befindet sich das System in einer Ruhelage, wodurch alle Geschwindigkeiten gleich Null sind und somit auch die kinetischen Energien verschwinden. In der Tabelle 4.4 ist die Rechenkomplexität des Modells ohne Berücksichtigung der Schwerpunktverschiebungen (Tabelle 4.4a) und die jene des Modells mit Schwerpunktverschiebung (Tabelle 4.4b) angegeben. Es lässt sich ein merklicher Mehraufwand für die Auswertung der Systemdynamik erkennen, wenn die Schwerpunktverschiebung im Modell mitberücksichtigt wird. Damit die kleinen Schwerpunktverschiebungen verifiziert werden können sind diese in der Abbildung 4.11 dargestellt. Dabei sind die Normen der Differenz $\|\Delta \mathbf{p}_{C,s_i}\|_2 = \|\mathbf{p}_{C,s_i} - \tilde{\mathbf{p}}_{C,s_i}\|_2$ zwischen den Schwerpunkt \mathbf{p}_{C,s_i} des starren Auslegers s_i und des Schwerpunktes $\tilde{\mathbf{p}}_{C,s_i}$ des defor-

Modellvariante 1 ohne Kreuzterm in der kin. Energien				
Bezeichnung	Addition	Multiplikation	Division	Funktionsauswertungen
$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$	3507	6772	0	16
$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	32608	52698	0	16

- (a) Rechenkomplexität der ersten Modellvariante ohne Berücksichtigung der Schwerpunktverschiebung

Modellvariante 1 mit Kreuzterm in der kin. Energien				
Bezeichnung	Addition	Multiplikation	Division	Funktionsauswertungen
$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$	4770	9604	1	22
$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	38539	61826	1	22

- (b) Rechenkomplexität der ersten Modellvariante mit Berücksichtigung der Schwerpunktverschiebung.

Tabelle 4.4: Modellkomplexität in Form der Anzahl benötigter Operationen der verschiedenen Modellvarianten.

mierten Auslegers s_i für die beiden Szenarien zu sehen. Es ist zu erkennen, dass in beiden Fällen die Schwerpunktverschiebung für beide Ausleger nur wenige Zentimeter beträgt.

Aus den Untersuchungen folgt, dass die Modellvariante 1 für die weitere Implementierung des Steuerungskonzeptes verwendet wird. Diese Modellvariante bietet den Vorteil des geringen Rechenaufwandes, wobei darin die statischen Verhältnisse des Manipulators bereits sehr gut abgebildet werden. Das dynamische Verhalten der Starrkörperwinkel unterscheidet sich kaum von jenen der Systemvariante 2, in welcher Eigenfrequenzen höherer Ordnungen näherungsweise mitberücksichtigt werden. Der größte Unterschied konnte in den Dynamiken für die Torsion sowie der Verbiegung in x_{2,s_i} -Richtung festgestellt werden. Im nachfolgenden verwendeten Modell für die optimalitätsbasierte Trajektorienplanung wird die Änderung des Schwerpunktes aufgrund der Deformationen eines Auslegers vernachlässigt. Des Weiteren wird die Corioliskraft ebenfalls für die Planung vernachlässigt, da der beobachtete Einfluss auf das Systemverhalten nur minimal ist. Die Validierung des im nächsten Kapitel vorgestellten Steuerungs-/Regelungskonzeptes erfolgt mit Hilfe der Modellvariante 2. Das Ziel ist es, dadurch möglichst realitätsnahe Verhältnisse für die Validierung des vorgestellten Konzeptes zu schaffen.

4.3 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden unterschiedliche Modellvarianten verglichen. Diese haben sich durch die Wahl des Ansatzes für die Approximation der elastischen Deformationen, die Vernachlässigung der Corioliskraft sowie durch die Vernachlässigung der Schwerpunktverschiebung aufgrund der Deformationen voneinander unterschieden. Aus den Ergebnissen konnte das für den Entwurf des Steuerungs-/Regelungskonzept passende approximiert Modell hergeleitet werden. Es werden nachfolgend noch einmal die wesentlichen Eigenschaften der in den nächsten Abschnitten verwendeten Modellvarianten zusammengefasst. Für den Entwurf der Trajektorienplanung wird die Modellvariante 1 verwendet, die sich

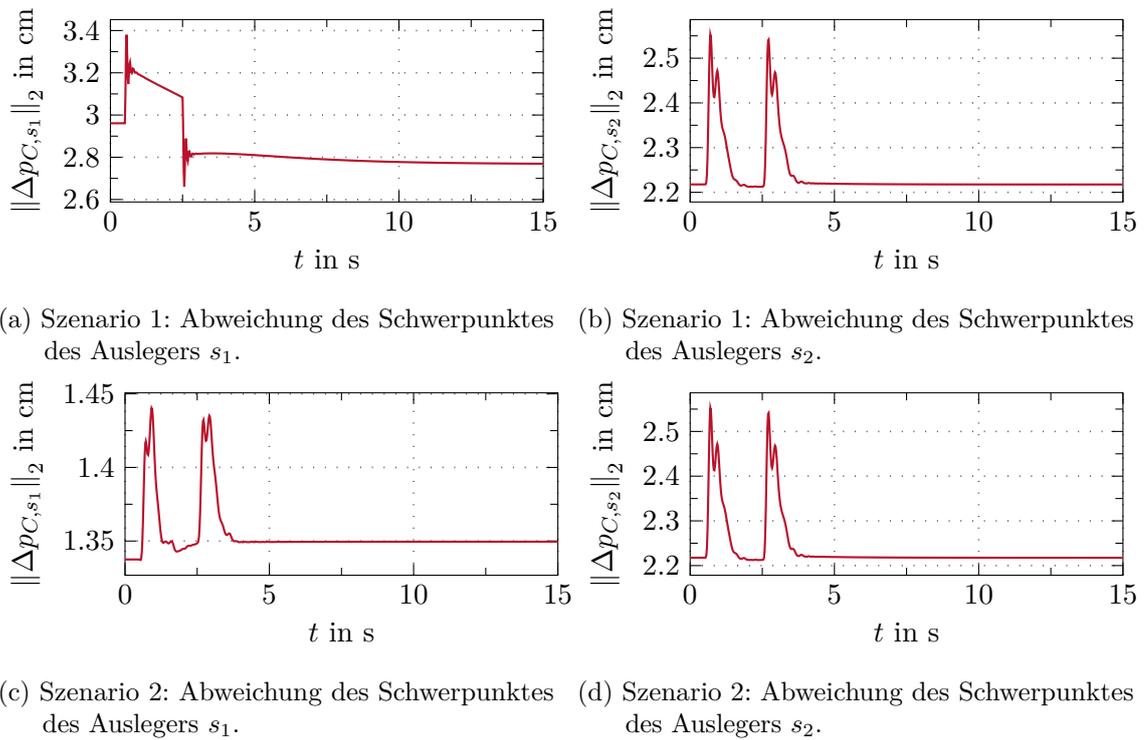


Abbildung 4.11: Abweichungen der Schwerpunkte der starren Ausleger zum Schwerpunkt der deformierten Ausleger.

durch

- eine örtliche Approximation der statischen Lösung mittels eines Polynoms (eine Ansatzfunktion pro Deformationsfreiheitsgrad),
- die Vernachlässigung der Corioliskraft sowie
- durch die Vernachlässigung der Schwerpunktverschiebung

auszeichnet. Die Überprüfung des entworfenen Steuer-/Regelungskonzeptes wird mit Hilfe der zweiten Modellvariante erfolgen. Diese Variante zeichnet sich durch die Eigenschaften einer

- örtlichen Approximation der statischen Lösung mittels eines Polynoms sowie einer dazu orthogonalen Ansatzfunktion (zwei Ansatzfunktionen pro Deformationsfreiheitsgrad),
- der Berücksichtigung der Corioliskraft und
- der Berücksichtigung der Schwerpunktverschiebung

aus.

5 Trajektorien Planung und Regelung

Ein wesentliches Ziel der Arbeit ist es eine optimale Trajektorie so zu entwerfen, dass der Endeffektor des Großraummanipulators eine Punkt-zu-Punkt-Bewegung vollführt. Die Trajektorie ist durch die Verläufe der Eingangsmomente $M_0(t)$, $M_1(t)$ und $M_2(t)$ definiert. Es sollen alle vorgegebenen Systemgrenzen eingehalten werden und zusätzlich soll eine Anregung von Schwingungen vermieden werden. Für den Entwurf einer Steuertrajektorie wird das Prinzip der Moving Horizon Trajectory Planning (MHTP) verwendet. Die Planung der Trajektorie erfolgt in zwei Stufen. Zuerst müssen aus einer gewünschten Sollposition des Endeffektors die Gelenkkoordinaten so bestimmt werden, dass trotz elastischer Deformationen die resultierende Endeffektorposition mit der gewünschten übereinstimmt. Dieses Problem kann in einem unbeschränkten statischen Optimierungsproblem formuliert werden, welches im Abschnitt 5.1 vorgestellt wird. Darauf folgend kann im Abschnitt 5.2 das eigentliche Optimalsteuerungsproblem in den Gelenkkoordinaten als dynamisches Optimierungsproblem formuliert werden. Als Lösung dieser Aufgabe erhält man die optimale Steuertrajektorie über den definierten Zeithorizont.

5.1 Optimale Endkonfiguration

Bevor mit dem Entwurf der Steuerung begonnen werden kann, wird in diesem Abschnitt die verwendete Methodik vorgestellt um beliebige Positionen des Endeffektors $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{p}_{E0,s_2}(\mathbf{q})$ in die entsprechenden generalisierten Koordinaten \mathbf{q} umrechnen zu können. Mit der Formulierung als statisches Optimierungsproblem können die Beschränkungen des gültigen Arbeitsbereiches systematisch berücksichtigt werden. Dadurch erhält man immer eine zulässige Gelenkstellung im Arbeitsbereich des Manipulators auch dann, wenn der vorgegebene Punkt nicht erreichbar ist. Die Optimierungsaufgabe wird so formuliert, dass der nächstmögliche Punkt im Sinne des geometrischen Abstandes erreicht wird. Die Planung der Trajektorie in den generalisierten Koordinaten erleichtert die Aufgabe für die dynamische Optimierung, da die formulierte Problemstellung bessere Konvergenzeigenschaften aufweist. Durch die Formulierung in den Gelenkkoordinaten entfällt die nichtlineare Umrechnung zwischen Koordinaten des Endeffektors und den generalisierten Koordinaten (inverse Kinematik). Die Endeffektorposition lässt sich immer eindeutig aus den generalisierten Koordinaten des örtlich diskretisierten Systems errechnen. Wird ein Manipulator mit 2 Auslegern ohne Deformationen betrachtet, so können die generalisierten Koordinaten \mathbf{q}_{st} der Gelenkwinkel (3.3) durch Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{p}_{E0,s_2}(\mathbf{q}_{s_1}, \mathbf{q}_{s_2}, \mathbf{q}_{st}) \Big|_{\mathbf{q}_{s_1}=\mathbf{0}, \mathbf{q}_{s_2}=\mathbf{0}} = \hat{\mathbf{y}}_0 \quad (5.1)$$

bestimmt werden. Es gilt zu beachten, dass die Endeffektorposition $\hat{\mathbf{y}}_0$ im ortsfesten Koordinatensystem vorgegeben wird. Die Endeffektorposition \mathbf{p}_{E0,s_2} wurde in Gleichung

(2.19) definiert und die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (5.1) wird im weiteren Verlauf mit \mathbf{q}_{st}^* bezeichnet.

Bei einem Aufbau mit Deformationen sowie im Starrkörperfall mit mehr als drei Freiheitsgraden entsteht ein überbestimmtes Gleichungssystem um die Gelenkskoordinaten sowie die Parameter für die Deformationen aus den Koordinaten zu berechnen. Durch die Deformationen entstehen zusätzliche Freiheitsgrade, wodurch eine eindeutige Berechnung nicht möglich ist und zusätzliche Bedingungen gefordert werden müssen. Das entstehende Gleichungssystem kann mit einer statischen unbeschränkten Optimierungsaufgabe gelöst werden, die sich formulieren lässt als

$$\min_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}} c_y J_y(\mathbf{q}) + c_\tau J_\tau(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + c_{Pst} J_{Pst}(\mathbf{q}_{st}) \quad (5.2a)$$

$$J_y(\mathbf{q}) = (\mathbf{p}_{E0,s2}(\mathbf{q}) - \hat{\mathbf{y}}_0)^\top (\mathbf{p}_{E0,s2}(\mathbf{q}) - \hat{\mathbf{y}}_0) \quad (5.2b)$$

$$J_\tau(\mathbf{q}) = (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q}))^\top (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q})) \quad (5.2c)$$

$$J_{Pst}(\mathbf{q}_{st}) = \sum_{i=0}^2 \Psi(\varphi_i, \varphi_{i,lb}, \varphi_{i,ub}) \quad (5.2d)$$

mit der Straffunktion $\Psi(x, x_{lb}, x_{ub})$

$$\Psi(x, x_{lb}, x_{ub}) = \begin{cases} 0 & , x_{lb} \leq x \leq x_{ub} \\ (x - x_{lb})^2 & , x < x_{lb} \\ (x - x_{ub})^2 & , x > x_{ub} \end{cases} \quad (5.3a)$$

$$\Psi(x, x_{lb}, x_{ub}) = \begin{cases} (x - x_{lb})^2 & , x < x_{lb} \\ (x - x_{ub})^2 & , x > x_{ub} \end{cases} \quad (5.3b)$$

$$\Psi(x, x_{lb}, x_{ub}) = \begin{cases} (x - x_{ub})^2 & , x > x_{ub} \end{cases} \quad (5.3c)$$

In (5.2) sind mit c_y , c_τ und c_{Pst} die Gewichtungsfaktoren der jeweiligen Kostenterme definiert. Mit $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^9$ wird die Menge aller zulässigen Systemkonfigurationen bezeichnet und $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ bezeichnet die Menge aller zulässigen Eingangsmomente der Gelenkantriebe. Die Lösung der statischen Optimierungsaufgabe für die generalisierten Koordinaten \mathbf{q} wird im weiteren Verlauf der Arbeit mit \mathbf{q}_0^* bezeichnet und jene für die Eingangsmomente mit $\mathbf{v}_{\hat{T}_s}^*$. In der Formulierung des Optimierungsproblems wird durch den Kostenterm $J_y(\mathbf{q})$ gefordert, dass der Abstand zu dem vorgegebenen Endeffektorpunkt $\hat{\mathbf{y}}_0$ tatsächlich minimal im Optimum \mathbf{q}_0^* ist. Zusätzlich kann erreicht werden, dass sich das System in einer seiner Ruhelagen befindet. Dies erfolgt dadurch, dass der Kostenterm J_τ in der statischen Optimierung eine hohe Gewichtung erfährt.

Jede Abweichung des Optimums \mathbf{q}_0^* von der Ruhelage des Systems liefert einen Beitrag zu den Kosten woraus folgt, dass die Kosten genau dann minimal sind, wenn sich das System in der Ruhelage befindet. Die benötigten Eingangsmomente \mathbf{v}_0^* ergeben sich ebenfalls aus der Optimierung, sodass das System für alle Zeiten im Anfangszustand verharrt. Der beschränkte Arbeitsbereich des Manipulators ist durch den Strafterm $J_{Pst}(\mathbf{q}_{st})$ im Optimierungsproblem mitberücksichtigt worden. Dieser liefert nur dann einen Beitrag zu den Kosten, sobald die generalisierten Koordinaten außerhalb des definierten Arbeitsbereiches zu liegen kommen. Eine weitere Möglichkeit die Eingangsmomente \mathbf{v} sowie die generalisierten Koordinaten \mathbf{q} zu berechnen bietet die Formulierung der Problemstellung als beschränktes statisches Optimierungsproblem. Dafür ist die Gleichgewichtsbedingung in Form von Gleichungsnebenbedingungen

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{ext}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{pot}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

in der Optimierungsaufgabe zu berücksichtigen. Die Strafterme könnten ebenfalls in Form von Ungleichungsnebenbedingungen berücksichtigt werden. Die Gleichungsnebenbedingungen könnten mit Hilfe der Lagragemultiplikatoren direkt in der Gütefunktion berücksichtigt werden, wobei ein Optimierungsproblem höherer Ordnung entsteht als jenes aus (5.2). Der Vorteil im unbeschränkten Fall liegt darin, dass die iterative Lösung der Aufgabe erleichtert wird. Der Nachteil ist, dass die Nebenbedingungen nur näherungsweise erfüllt sind und dadurch eine Überprüfung der Einhaltung erfolgen muss.

Die Lösung der Optimierungsaufgabe (5.2) kann mittels der Funktion `fminunc` in MATLAB bestimmt werden, wobei als Initialwert für das iterative Verfahren die Lösung \mathbf{q}_{st}^* des Gleichungssystems (5.1) für eine starre Konstruktion verwendet wird. Als Algorithmus für die Lösung wurde das SQP-Verfahren eingesetzt. Die Lösung der Gelenkwinkel einer starren Konfiguration sollte bereits in der Nähe der optimalen Lösung des Problems (5.2) liegen, wodurch mit der Initialisierung eine schnelle Konvergenz des Verfahrens zu erwarten ist. Es ist nun möglich die generalisierten Koordinaten für einen beliebigen Punkt des Endeffektors mittels Lösung der statischen Optimierungsaufgabe zu bestimmen.

Im nächsten Abschnitt wird eine Möglichkeit zur Formulierung des Optimalsteuerungsproblems für die Planung einer Punkt-zu-Punkt Bewegung des Endeffektors vorgestellt. Dieses wird als dynamische Optimierungsaufgabe in den generalisierten Koordinaten formuliert. Als Lösung der Optimierungsaufgabe erhält man die optimale Eingangstrajektorie über einen Zeithorizont für die gewünschte Bewegung. Anschließend wird von dieser Formulierung auf die Planung der Trajektorie auf sich bewegenden Horizonten übergegangen.

5.2 Dynamische Optimierung

Die Trajektorie für einen Arbeitspunktwechsel des Manipulators wird in diesem Abschnitt aus der Lösung einer dynamischen Optimierungsaufgabe hervorgehen. Die berechnete optimale Steuerfolge wird dabei so berechnet, dass sich zu Beginn der Endeffektor im Punkt $\mathbf{p}_{E0,s_2}(0) = \hat{\mathbf{y}}_0$ befindet. Durch die Steuerfolge wird erreicht, dass sich der Endeffektor nach der Zeit T_H möglichst nahe, im Sinne des geometrischen Abstandes, an der gewünschte Endposition $\mathbf{p}_{E0,s_2}(T_H) = \hat{\mathbf{y}}_H$ befindet. Der Wechsel des Arbeitspunktes soll dabei möglichst in der Zeit T_H vollführt werden, wobei ein schnelleres Erreichen des Endpunktes erstrebenswert ist. Dennoch sollen dabei alle Systembeschränkungen, unter anderem die maximalen Gelenksgeschwindigkeiten und Momente, eingehalten werden. Im Weiteren wird die Vorgabe berücksichtigt, dass es während des gesamten Arbeitspunktwechsels zu einer minimalen Anregung der Strukturschwingungen kommt.

Damit all diese Ziele bei der Planung der lokalen optimalen Steuerfolge berücksichtigt werden können, muss eine geeignete Kostenfunktion für die dynamische Optimierungsaufgabe formuliert werden. Als Ergebnis dieser Problemformulierung erhält man die optimale Steuerfolge auf dem gesamten Planungshorizont, welche bestmöglich für die Einhaltung der Ziele sorgt. Natürlich ist es aufgrund der Beschränkungen der Geschwindigkeiten und der Momente nicht immer möglich einen beliebigen Punkt in der vorgegebenen Zeit zu erreichen. Die Forderung lautet daher, dass der Endeffektor in der vorgegebenen Zeit so nah wie möglich an die Endposition unter Einhaltung aller Beschränkungen herankommt

und die dabei entstehenden Schwingung der Struktur minimal gehalten wird.

Es kann damit die dynamische Optimierungsaufgabe

$$\min_{\mathbf{v}(\cdot) \in U} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \int_0^{T_H} \ell(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{T_H}^*, \mathbf{q}_{T_H}^*) dt \quad (5.5a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{w}_0 = [\mathbf{q}_0^* \quad \mathbf{0}]^T \quad (5.5b)$$

$$M_{i,lb} \leq M_i \leq M_{i,ub} \quad (5.5c)$$

zur Erfüllung der formulierten Ziele angegeben werden. Es handelt sich bei dieser Optimierungsaufgabe um ein Problem mit fixer Endzeit T_H und Beschränkungen für die Eingangsgröße \mathbf{v} in Form der Ungleichungen (5.5c). Der Endzustand $\mathbf{w}(T_H)$ kommt hierbei nicht explizit in der Formulierung der Kostenfunktion (5.5a) vor und ist somit durch die Systemdynamik, den Anfangszustand und die Eingangsgröße bedingt. Darin bezeichnet \mathbf{w} den Zustandsvektor des Systems und \mathbf{v} den Vektor der Eingangsmomente. Als Nebenbedingung für die Optimierungsaufgabe muss die Systemdynamik $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ des örtlich diskretisierten Systems (3.12) aus partiellen Differentialgleichungen angesetzt werden, um sicherzustellen, dass die optimale Lösung der Systemdynamik genügt. Des Weiteren sollen die maximalen zulässigen Momente der Antriebe eingehalten werden, wobei diese Forderung wieder in Form von Ungleichungsnebenbedingungen wie in (5.5) formuliert wurde. Mit $\mathbf{v}_{T_H}^*$ und $\mathbf{q}_{T_H}^*$ ist das Ergebnis der statischen Optimierungsaufgabe (5.2) für die zu erreichende Sollposition des Endeffektors $\hat{\mathbf{y}}_H$ definiert. Die Lagrange-Dichte ℓ wird durch

$$\ell(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{T_H}^*, \mathbf{q}_{T_H}^*) = \beta_q \ell_q(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{T_H}^*) + \beta_{Pst} \ell_{Pst}(\mathbf{q}_{st}, \dot{\mathbf{q}}_{st}) + \beta_{ap} \ell_{ap} \quad (5.6a)$$

$$\ell_q = (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{T_H}^*)^T \mathbf{Q} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{T_H}^*) \quad (5.6b)$$

$$\ell_{Pst} = \sum_{i=1}^3 \Psi(\varphi_i, \varphi_{i,lb}, \varphi_{i,ub}) + \Psi(\dot{\varphi}_i, \dot{\varphi}_{i,lb}, \dot{\varphi}_{i,ub}) \quad (5.6c)$$

$$\ell_{ap} = \sum_{j=1}^{N_{Ts_1}} \dot{a}_{j,Ts_1}^2 + \sum_{j=1}^{N_{B2s_1}} \dot{a}_{j,B2s_1}^2 + \sum_{j=1}^{N_{B3s_1}} \dot{a}_{j,B3s_1}^2 \quad (5.6d)$$

beschrieben. Darin wurden β_q , β_{Pst} und β_{ap} zur Gewichtung der einzelnen Beiträge am Kostenfunktional der Gesamtdichte genutzt. Das Ergebnis der Optimierung ist der Vektor des optimalen Steuersignals $\mathbf{v}^*(t)$ und die daraus resultierende optimale Zustandstrajektorie $\mathbf{w}^*(t)$.

Der Term ℓ_q dient zum schnellst möglichen Erreichen der Sollposition des Endeffektors $\hat{\mathbf{y}}_H$. Die direkte Gewichtung der Abweichung der generalisierten Koordinaten zu den generalisierten Koordinaten im Endpunkt erlaubt eine gewisse Zeitoptimalität, ohne dass explizit die Länge des Horizontes T_H als Optimierungsvariable mit aufgenommen werden muss. Zusätzlich geht das dynamische System durch diesen Kostenanteil in eine Ruhelage über. Naturgemäß ist in der Ruhelage der Abstand zum Endpunkt über den gesamten Horizont gleich Null, wodurch der Kostenbeitrag ℓ_q des Funktionales minimal ist. Mittels β_q lassen sich Abweichungen zum Endpunkt in den Kosten höher gewichten. Damit der Endeffektor die gewünschte Sollposition schnellstmöglich erreicht, muss der

Faktor β_q groß gegenüber anderen Faktoren β_{Pst} und β_{ap} gewählt werden. Dies kann aber zu starken Verletzungen der Systembeschränkungen führen, da diese in Form des Strafterms (5.6c) berücksichtigt werden. Der Anteil ℓ_{Pst} bestraft somit die Starrkörperwinkel und Winkelgeschwindigkeiten, wenn sich diese außerhalb des zulässigen Bereichs befinden. Dadurch werden systematisch die Systembeschränkungen in der Trajektorienplanung berücksichtigt. Der Faktor β_{Pst} dient zur Gewichtung der Strafkostenterms, um die Einhaltung der Systembeschränkungen in der optimalen Lösung zu erzwingen. Die Anregung der Strukturdeformationen wird mithilfe des Funktionales ℓ_{ap} bestraft, in den die Geschwindigkeiten der Koeffizienten der örtlichen Ansatzfunktionen (3.1) des ersten Auslegers in die Gesamtkosten einfließen. Diese entsprechen den Geschwindigkeiten der elastischen Biegungen bzw. der Rotationsgeschwindigkeit der Torsion.

Eine Lösung der Optimierungsaufgabe lässt sich durch direkte oder indirekte Verfahren berechnen. Ein direktes Verfahren wäre z. B. eine zeitliche Volldiskretisierung auf dem gesamten Horizont. Dadurch kann das dynamische Optimierungsproblem in ein statisches Optimierungsproblem umgewandelt [25], [26]. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, dass gewisse Aufgabenstellungen eine genaue zeitliche Diskretisierung erfordern, womit ein sehr hochdimensionales Problem entstehen kann. Die Dimension wächst des Weiteren stark an, wenn die Planungshorizont sehr lange ist. Die Anzahl an Gitterpunkte wird durch die Systemdynamik sowie dem gewählten Diskretisierungsverfahren bestimmt. Eine weitere Möglichkeit eine optimale Steuerfolge zu berechnen bietet das Gradientenverfahren angewandt auf die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung [25]. Dies stellt ein indirektes Verfahren dar, bei welchem die Lösung der Randwertaufgabe (Optimalitätsbedingungen erster Ordnung) erfolgt. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung können mittels Anwendung des Pontryagin Minimums-Prinzips abgeleitet werden. Wendet man dieses auf das dynamische beschränkte Optimierungsproblem (5.5) an, so lassen sich die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung in der Form

$$H_\ell(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \ell(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (5.7a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H_\ell}{\partial \mathbf{w}} \quad (5.7b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(T_H) = \mathbf{0} \quad (5.7c)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad (5.7d)$$

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \quad (5.7e)$$

$$H_\ell(\mathbf{w}, \mathbf{v}^*, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{v}(\cdot) \in U} H_\ell(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (5.7f)$$

angeben [25]. Darin wird mit H_ℓ die Hamiltonfunktion bezeichnet und mit $\boldsymbol{\lambda}$ der adjungierte Zustandsvektor eingeführt. Aufgrund der Eingangsbeschränkung wird durch (5.7f) gefordert, dass die Hamiltonfunktion unter allen zulässigen Eingangsfunktionen U minimal ist. Aus dieser Forderung lässt sich nun die optimale Eingangstrajektorie ableiten. Für die genaue Herleitung von (5.7a)-(5.7f) sei auf [25] verwiesen, in der ebenfalls die Gradientenmethode als indirektes Lösungsverfahren vorgestellt wird. Jede optimale Lösung $(\mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*)$ der Optimierungsaufgabe (5.5) besitzt nun die Eigenschaft, dass sie das Randwertproblem (5.7a) erfüllen muss. Diese Tatsache kann nun dazu genutzt werden, das

Gradientenverfahren, wie es ebenfalls in der Arbeit [27] für die Modellprädiktive Regelung verwendet wird, in der folgenden algorithmischen Form anzugeben.

Result : $\mathbf{v}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{w}^*$
 Init.: $\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0(0)$;
while $j < M$ $\&\&$ $(\mathcal{L}^j(\mathbf{q}^j, \mathbf{v}^j) - \mathcal{L}^{j-1}(\mathbf{q}^{j-1}, \mathbf{v}^{j-1})) < \varepsilon_{opt}$ **do**
 Vorwärtsintegration von $\dot{\mathbf{w}}^j = \mathbf{f}(\mathbf{w}^j, \mathbf{v}^j)$ $\mathbf{w}_0^j = \mathbf{w}_0^{j-1}$;
 Rückwärtsintegration von $\dot{\boldsymbol{\lambda}}^j = -\frac{\partial H_\ell}{\partial \mathbf{w}}$ $\boldsymbol{\lambda}^j(T_H) = \mathbf{0}$;
 Berechnen des Gradienten $\mathbf{g}^j = \frac{\partial H_\ell}{\partial \mathbf{v}}$;
 Berechnung einer Schrittweite α^{j*} als Lösung des Liniensuchproblems
 $\min_{\alpha^j > 0} \mathcal{L}(\mathbf{q}^j, \mathbf{v}^{j-1} - \alpha^j \mathbf{g}^j)$;
 Update des Vektors der Steuertrajektorie $\mathbf{v}^j = \mathbf{v}^{j-1} - \alpha^j \mathbf{g}^j$ unter
 Berücksichtigung der Beschränkungen des Eingangs $\mathbf{v}_{lb} \leq \mathbf{v}^j \leq \mathbf{v}_{ub}$
end

Algorithmus 1 : Beschreibung des Gradientenverfahrens

Die Implementierung des Algorithmus erfordert eine geeignete zeitliche Diskretisierung der Vorwärtsintegration der Systemdynamik (5.7d) sowie der Rückwärtsintegration der Dynamik (5.7b) des adjungierten Zustandes. Die Komplexität des Verfahrens wird hauptsächlich durch die Wahl der Integrationsverfahren sowie die damit verbundenen gewählten zeitlichen Stützstellen bestimmt. In dieser Arbeit wird das implizite Eulerverfahren mit äquidistanten Stützstellen $t_k = k\Delta T_{a,opt}$ verwendet. Aus den Zeitfunktionen $\mathbf{w}^j, \boldsymbol{\lambda}^j, \mathbf{v}^j$ und \mathbf{g}^j entstehen durch die Diskretisierung die Folgen $\mathbf{w}_k^j, \boldsymbol{\lambda}_k^j, \mathbf{v}_k^j$ und \mathbf{g}_k^j an den Stützstellen $t_k = k\Delta T_{a,opt}$. Diese Wahl des Integrationsverfahrens resultiert aus Untersuchungen der numerischen Stabilität unterschiedlicher Integrationsalgorithmen. Dabei konnte festgestellt werden, dass aufgrund der Steifigkeit des Systems implizite Verfahren bessere Konvergenzeigenschaften aufweisen. Als Konsequenz wird eine kleinere Anzahl an Stützstellen im Integrationsverfahren benötigt. Die Gradienten \mathbf{g}_k^j berechnen sich durch Einsetzen der berechneten Folgen in die partielle Ableitung der Hamiltonfunktion $\partial_{\mathbf{v}} H_\ell$ nach den Eingangsgrößen \mathbf{v} . Zusätzlich muss eine geeignete Methode für die Berechnung der optimalen Schrittweite α^{*j} implementiert werden. Die Lösung des Liniensuchproblems (1) wird hierfür meist approximiert, wobei Ansätze dafür in [27], [28] zu finden sind. In dieser Arbeit wird die Schrittweite α^j in der Form

$$\alpha^j = \sum_{k=2}^{N_H} \frac{(\mathbf{g}_{k-1}^j - \mathbf{g}_{k-1}^{j-1}) \cdot (\mathbf{v}_{k-1}^j - \mathbf{v}_{k-1}^{j-1}) + (\mathbf{g}_k^j - \mathbf{g}_k^{j-1}) \cdot (\mathbf{v}_k^j - \mathbf{v}_k^{j-1})}{(\mathbf{g}_{k-1}^j - \mathbf{g}_{k-1}^{j-1}) \cdot (\mathbf{g}_{k-1}^j - \mathbf{g}_{k-1}^{j-1}) + (\mathbf{g}_k^j - \mathbf{g}_k^{j-1}) \cdot (\mathbf{g}_k^j - \mathbf{g}_k^{j-1})} \quad (5.8a)$$

berechnet, mit $N_H = \lceil \frac{T_H}{\Delta T_{a,opt}} \rceil$ als die Anzahl der zeitlichen Stützstellen über den Horizont. Dies folgt aus der Motivation, dass die Differenz zwischen zwei Updates der Eingangsgrößen bei gleichbleibender Schrittweite minimal ist. Damit wird erreicht, dass in der Nähe der optimalen Lösung nur kleine Schritte in Richtung des Optimums durchgeführt werden. In der Nähe des Optimums lässt sich somit die Konvergenz des Verfahrens bewerkstelligen. Die Formulierung der zu (5.8a) passenden Optimierungsaufgabe sowie ihre approximative Lösung ist in [29],[27] zu finden. Es sei hier so viel erwähnt, dass die Lösung (5.8a) durch Anwendung des Quasi-Newtonverfahrens entsteht und somit eine Zwei-Punkt-Näherung

darstellt. Der Vorteil für die Berechnung der Schrittweite mit (5.8a) besteht darin, dass sich diese Methodik effizient implementieren lässt. Damit eignet sie sich für die Verwendung in echtzeitfähigen Verfahren. Die notwendigen Größen werden implizit bereits im Gradientenverfahren berechnet. Der Nachteil besteht darin, dass zu Beginn des Gradientenverfahrens eine geeignete Initialisierung für die Schrittweite gefunden werden muss. Dies kann z. B. mit Hilfe des Intervallschachtelungsverfahrens erfolgen, welches eine weitere Möglichkeit darstellt die Schrittweite in jedem Iterationsschritt j des Gradientenverfahrens zu bestimmen. Für weitere Möglichkeiten das entstehende Liniensuchproblem zu lösen sei auf [26] verwiesen.

Aufgrund der Online-Implementierbarkeit der Methode ist eines der Abbruchkriterien die maximale Anzahl der durchgeführten Stellgrößenupdates M . Dies führt auf eine suboptimale Lösung der Optimierungsaufgabe (5.5), wobei bei geeigneter Initialisierung \mathbf{v}_k^0 oft schon wenige Iterationen ausreichend sind damit die Lösung hinreichend nahe an der optimalen Lösung zu liegen kommt. Die Bedingung $\mathcal{L}^j(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathcal{L}^{j-1}(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ liefert ein Abbruchkriterium falls nur eine minimale Verbesserung im Schritt j erreicht wird. Je größer ε_{opt} gewählt wird desto weiter ist die suboptimale Lösung von der optimalen entfernt. Für die echtzeitfähige Implementierung muss ein Kompromiss zwischen Genauigkeit der Lösung im Sinne der Optimalität und der Rechenzeit getroffen werden.

Der Übergang der Trajektorienplanung auf bewegten Horizonten wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Dabei kann die berechnete suboptimale Lösung in gewissen Zeitabständen weiter verbessert werden. Die dadurch möglichen kürzeren Planungshorizonte und das wiederholte Ausführen der Trajektorienplanung zu einem nahe in der Zukunft liegenden Zeitpunkt erlaubt in weiterer Folge eine echtzeitfähige Implementierung des Algorithmus. Auf den bewegten Horizonten der Planung kann die suboptimale Lösung durch die wiederholte Ausführung des Gradientenverfahrens immer weiter verbessert werden.

5.3 Bewegte Horizonte

Als nächstes erfolgt der Übergang von der Planung der Steuerfolge über einen langen fixierten Zeithorizont zu der Planung auf bewegte Zeithorizonte (Moving Horizon, MH). Der Vorteil liegt bei dieser Formulierung darin, dass im Gradientenverfahren die Berechnung der optimalen Trajektorie frühzeitig abgebrochen werden kann. Dabei wird in Kauf genommen, dass nur eine suboptimale Lösung gefunden wurde. Durch die wiederholte Planung auf den bewegenden Horizonten kann die bereits gefundene suboptimale Lösung innerhalb der überlappenden Planungsbereiche weiter verbessert werden.

Die Abbildung 5.1 dient der Veranschaulichung der definierten Zeitabschnitte sowie deren Zeitpunkte, die in der Realisierung des MH-Konzeptes verwendet werden. Es sind dafür exemplarisch die berechneten Verläufe einer eindimensionalen Eingangsgröße $v(t)$ eingezeichnet. Dabei bezeichnet \tilde{v}^j die suboptimale Folge, die im Planungsabschnitt j berechnet wurde. Die optimale Trajektorie des Steuersignals ist mit $v^*(t)$ gegeben. Mit $t_i = iT_a$ sind die diskreten Zeitpunkte definiert, zu denen eine neue Eingangsgröße auf das System aufgeschaltet werden kann. Dazwischen wird der Wert mittels eines Zero-Order-Hold-Gliedes konstant gehalten. Der Abstand zwischen zwei Zeitpunkten wird äquidistant

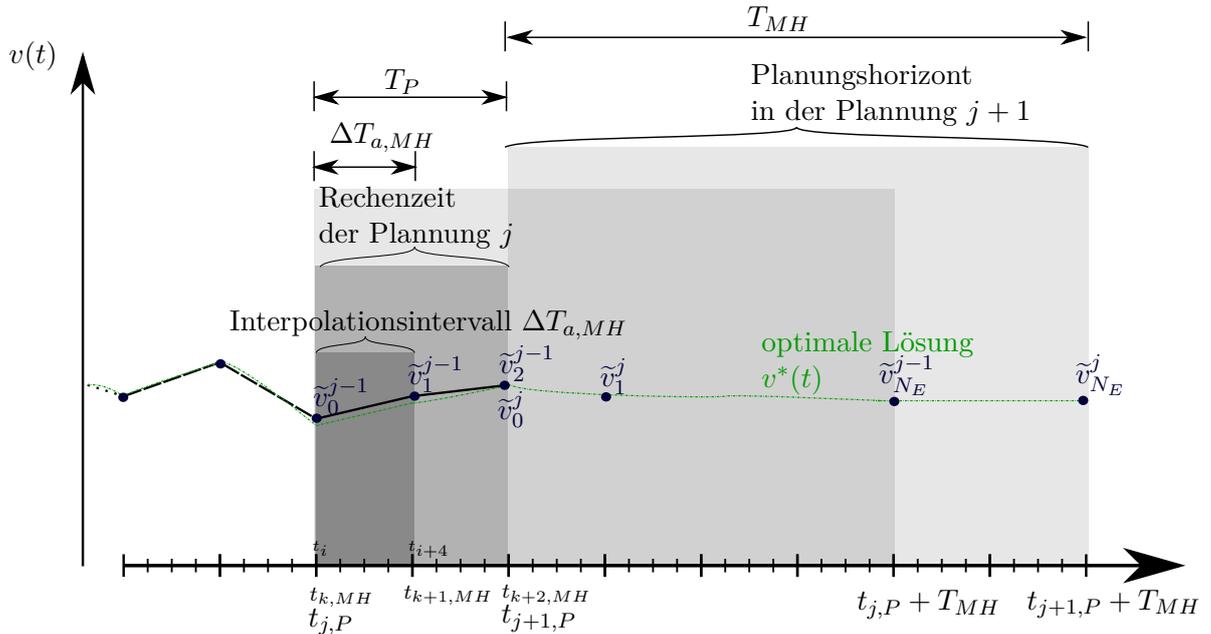


Abbildung 5.1: Exemplarische Darstellung der Stellgröße $v(t)$ für die Veranschaulichung der Horizonte und Signale bei der Planung auf bewegten Horizonten.

gewählt und durch $\Delta T_{a,opt}$ angegeben. Der Abbildung 5.1 ist zu entnehmen, dass die Abtastzeit T_a nicht mit der Abtastzeit $\Delta T_{a,opt}$ der Integration übereinstimmen muss. Es wird hingegen eine lineare Interpolation zwischen den zwei Folgewerten \tilde{v}_k^{j-1} und \tilde{v}_{k+1}^{j-1} durchgeführt. Durch die lineare Interpolation zwischen den Punkten $t_k < t_i < t_{k+1}$ ergibt sich ein glatterer Verlauf der Stellgröße. Dies unterstützt eine minimale Anregung von Schwingungen in den elastischen Strukturen. Die Folge der Planungszeitpunkte wird im weiteren Verlauf mit $t_{j,P}$ bezeichnet und die benötigte Zeit einer Planung mit T_P . Die neue suboptimale Lösung der Steuerfolge \tilde{v}^j wird zum erst möglichen Zeitpunkt $t_{j+1,P}$ auf das System aufgeschaltet. Die zeitliche Folge an den Gitterpunkten der Diskretisierung für die Dynamik der Zustände sowie für die zu berechnende Steuerfolge im Gradientenverfahren der MH-Planung wird durch $t_{k,opt} = k\Delta T_{a,opt}$ definiert. Das Intervall $\Delta T_{a,opt}$ für die Stützstellen der Integration wird als ganzzahliges Vielfaches der gewählten Abtastzeit T_a festgelegt. In dieser Arbeit besitzen die Horizonte eine fixe Länge T_H . Diese Methodik der Trajektorienplanung erlaubt es eine echtzeitfähige Implementierung der Steuerung zu realisieren, da die Planungen stets auf einem kurzen Horizont ausgeführt werden. Dadurch kann eine individuelle Anpassung an die verfügbare Rechenzeit erfolgen. Es ist natürlich nicht möglich den bewegten Horizont beliebig klein zu machen, da dieser in Relation zur gewählten Abtastzeit sowie zum dynamischen Verhalten des Systems steht.

Die Planung auf einem fixen Zeitraum erfordert einen langen Zeithorizont und vor allem eine große Anzahl an Iteration des Gradientenverfahrens, um eine Lösung zu finden, die sehr nahe an der optimalen Lösung ist. In der MH-Planung hingegen können die Zeithorizonte verkürzt werden. Aufgrund der wiederholten Ausführung des Gradientenverfahrens zu jedem Planungszeitpunkt kann eine geringere Anzahl an Iteration durchgeführt werden, da

ein Teil der bereits gefundenen Lösung weiter verbessert wird. Steht innerhalb der Abtastzeit T_a der Regelung/Steuerung nicht genug Zeit für die Berechnung einer neuen Steuerfolge $\tilde{\mathbf{v}}_k^j$ zur Verfügung, so lässt sich einfach das Ergebnis der vorhergehenden Optimierung verwenden.

Durch diese Vorgangsweise ist zu erwarten, dass die Kosten der berechneten suboptimalen Lösung durch die MH-Trajektorienplanung in jedem Planungsabschnitt j kleiner werden bzw. zu mindestens gleichbleiben wenn die gewünschte Endeffektorposition konstant bleibt. Daher ist eine Verbesserung des Systemverhaltens durch die Steuerung mittels MH-Trajektorienplanung hinsichtlich der formulierten dynamischen Optimierungsaufgabe (5.5) zu erwarten.

Die entstehende Folge an Optimierungsaufgaben für die Berechnung der Steuerfolge ist in der Form

$$\min_{\mathbf{z}^j} \mathcal{L}(\mathbf{z}^j) = \quad (5.9a)$$

$$\int_{t_{j,P}}^{t_{j,P}+T_H} \ell^j \left(\mathbf{w}^j, \mathbf{v}^j, \mathbf{v}_{T_H}^*, \left(\mathbf{q}_{T_H}^* \right)^j \right) + \left(\boldsymbol{\lambda}^j \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{w}^j, \mathbf{v}^j) dt \quad (5.9b)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{w}_0^j = \tilde{\mathbf{w}}^{j-1}(t_{j,P}) \quad (5.9c)$$

$$M_{i,lb} \leq M_i \leq M_{i,ub} \quad (5.9d)$$

$$(5.9e)$$

gegeben, wobei jedes Element der Folge eine beschränkte dynamische Optimierungsaufgabe im Planungshorizont j darstellt. Der Kostenterm ℓ^j ist wie in (5.6a) definiert, wobei die Gewichtungsfaktoren β_q , β_v und β_{Pst} für jede Planung j identisch angenommen werden. Die Integration im Gradientenverfahren der Systemdynamik sowie des adjungierten Zustandes erfolgt wieder durch das implizite Euler-Verfahren entlang eines äquidistanten Zeitgitters mit N_H Stützstellen. Der Anfangszustand \mathbf{w}_0^j wird mit der Lösung des Gradientenverfahrens $\tilde{\mathbf{w}}^{j-1}$ der vorangegangenen Planung $j-1$ initialisiert. Mit $\tilde{\mathbf{z}}^j = \left[\tilde{\mathbf{w}}^j \quad \tilde{\mathbf{v}}^j \right]^T$ ist der suboptimale Lösungsvektor des Gradientenverfahrens zum Planungszeitpunkt j bezeichnet, wobei dieser die Dimension $N_z = N_H(3\bar{N} + 2N_u)$ besitzt. Der Vektor setzt sich aus den Vektoren der suboptimalen Zustandsfolge $\tilde{\mathbf{w}}_k^j$ und aus den Vektoren der suboptimalen Steuerfolge $\tilde{\mathbf{v}}_k^j$ an den Zeitpunkten $t_{k,opt}^j$ zusammen.

Bei der erstmaligen Ausführung der MH-Trajektorienplanung wird als Anfangszustand im Gradientenverfahren die Lösung der statischen Optimierung (5.2) verwendet, d.h. $\mathbf{q}_0^0 = \mathbf{q}_0^*$, $\dot{\mathbf{q}}_0^0 = \mathbf{0}$. Anschließend erfolgt die Initialisierung mittels der suboptimalen Lösung des vorherigen Planungszeitpunktes. Im Weiteren erfolgt bei der erstmaligen Planung die Initialisierung des iterativen Verfahrens mithilfe einer linearen Interpolation zwischen den Eingangsgrößen \mathbf{v}_0^* am Anfang und den Solleingangsgrößen $\mathbf{v}_{T_H}^*$ am Ende des Intervalls. In jedem weiteren Planungshorizont j ist die Initialisierung durch den überlappenden Teil des vorherigen Horizontes gegeben.

Für die Folgenwerte des neu hinzukommenden Zeitabschnittes kann entweder eine Extrapolation durchgeführt werden, die Lösung $\mathbf{v}_{N_{MH}}^{j-1}$ herangezogen werden oder die gewünschten Sollwerte für die Eingangsgrößen $\mathbf{v}_{T_H}^*$ verwendet werden. In dieser Arbeit wird die Lösung der vorhergehenden Optimierungsaufgabe $\tilde{\mathbf{z}}^{j-1}$ des Abschnittes $j-1$ für

die Initialisierung des hinzukommenden Abschnittes genutzt. Es gilt für die komplette Initialisierung

$$\mathbf{z}_{k,0}^j = \tilde{\mathbf{z}}_{k+N_P,0}^{j-1} \quad k = 0, \dots, N_H - N_P \quad (5.10a)$$

$$\mathbf{z}_{N_{MH}-N_P+k,0}^j = \tilde{\mathbf{z}}_{N_{MH},0}^{j-1} \quad k = N_H - N_P + 1, \dots, N_H, \quad (5.10b)$$

wobei einfachheitshalber der am Ende hinzukommende Wert auf den letzten berechneten Wert des vorhergehenden Intervalls gesetzt wird. Der Vorteil ist die einfache Umsetzung dieser Initialisierung, da keine Extrapolation der Lösung notwendig ist. Der Nachteil besteht darin, dass in der Regel die initiale Lösung weiter von der optimalen Lösung entfernt sein wird als wie bei einer vernünftigen Extrapolation der Lösung des vorherigen Planungsabschnittes. Durch die Formulierung der Trajektorienplanung auf bewegten Horizonten soll erreicht werden, dass die Kosten $\mathcal{L}(\mathbf{z}_0^j, \dots, \mathbf{z}_{N_j}^j)$ für jede neu berechnete suboptimale Steuerfolge kleiner werden oder zumindest konstant bleiben falls der gewünschte Sollwert sich nicht ändert.

Diese Art der Trajektorienplanung ermöglicht es auf einen sich veränderlichen Endwert zu reagieren. Der Endwert wird einfach bei der Planung der Trajektorie im Horizontabschnitt j durch den Kostenterm berücksichtigt. Im Gegensatz zur einmaligen Planung pro Zeithorizont ist bei der Planung auf bewegten Horizonten eine interaktive Änderung der Planungsziele möglich, wodurch auf Änderungen des gewünschten Endwertes reagiert werden kann.

Das Verfahren ist ähnlich zu einer Modellprädiktiven Regelung mit dem Unterschied, dass bei der Modellprädiktiven Regelung der messtechnisch erfasste oder geschätzte Systemzustand als Anfangszustand verwendet wird. Es lässt sich auf der Grundlage der Steuerung sehr einfach eine Regelung implementieren, sobald die Messungen der Winkel bzw. der Deformation systematisch zu jedem Planungszeitpunkt im Gradientenverfahren in Form der Initialisierung berücksichtigt werden. Die Rückkoppelung dieser Information kann jedoch zu Stabilitätsproblemen des geschlossenen Kreises führen, weswegen eine Untersuchung der Stabilität notwendig ist. In [30] werden Verfahren für die Moving Horizon Control sowie für die Moving Horizon Estimation vorgestellt. Hier sind ebenfalls Methoden zum Nachweis der Stabilität unter bestimmten Annahmen zu finden. Der größte Nachteil dieser Methodik ist der schwierige formelle Nachweis der Stabilität des entstehenden Regel-/Steuerungskreises.

Als weiterer Nachteil kann der hohe Berechnungsaufwand genannt werden, da zu jedem Abtastzeitpunkt eine Optimierungsaufgabe über den Zeithorizonte T_H gelöst werden muss. Dieser Nachteil lässt sich dadurch entschärfen, indem in der Planung nicht zu jedem Abtastzeitpunkt t_i eine neue Berechnung der Trajektorie durchgeführt wird. Vielmehr wird der Planungsabstand T_P als ganzzahliges Vielfaches N_P des Intervalls der Diskretisierung $\Delta T_{a,opt}$ gewählt.

Im nächsten Abschnitt wird das unterlagerte Regelungskonzept vorgestellt. Dieses erlaubt Modellfehler sowie Störeinflüsse in einem gewissen Rahmen zu unterdrücken.

5.4 Regelungskonzept

Das komplette Regelungskonzept für einen Großraummanipulator mit flexiblen Auslegern wird in diesem Abschnitt diskutiert. Dafür ist in Abbildung 5.2 das Strukturschaltbild des verwendeten Regelkreises zu sehen. Dieses stellt eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung dar mit einer Vorsteuerung sowie einer dazu unterlagerten Trajektorienfolgeregelung. Die Trajektorienplanung liefert hierbei die suboptimale Steuerfolge $\tilde{\mathbf{v}}_i$ sowie die suboptimale Zustandstrajektorie $\tilde{\mathbf{w}}_i$ zu den Zeitpunkten $t_i = i\Delta T_{a,opt}$. Diese durch die MHTP errechneten Werte müssen für die Trajektorienfolgeregelung an die Abtastzeit $t_k = kT_a$ durch Interpolation angepasst werden. Für die Abtastzeit der Regelung T_a und jene

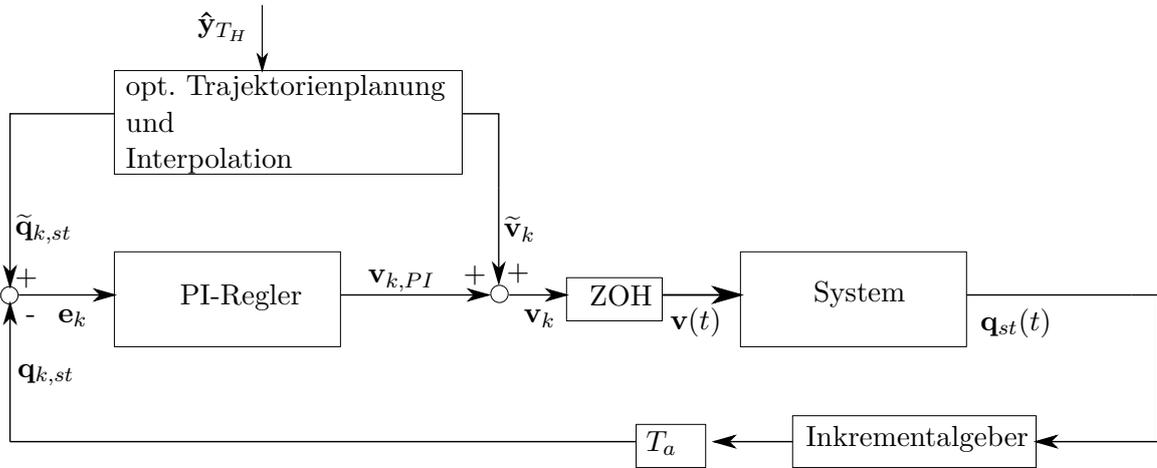


Abbildung 5.2: Zwei-Freiheitsgrad Regelkreis für einen Großraummanipulator mit elastischen Elementen.

der Berechnungsintervalle der MH-Trajektorienplanung gilt die Beziehung $T_a < \Delta T_{a,opt}$. Unterlagert zur Trajektorienplanung wird eine Trajektorienfolgeregelung implementiert, welche Modellfehler sowie Störungen ausgleicht. Für die Regelung wird angenommen, dass die Gelenkwinkel mittels Inkrementalgeber messtechnisch erfasst werden können. Diese besitzen eine Auflösung von $360^\circ/4096$. Die Trajektorienfehlersysteme der Gelenke ergeben sich zum Zeitpunkt $t_k = kT_a$ in der Form

$$\mathbf{e}_k = \tilde{\mathbf{q}}_{k,st} - \mathbf{q}_{k,st} \quad (5.11)$$

mit den an die Abtastzeit der Regelung angepassten Gelenkwinkel $\tilde{\mathbf{q}}_{k,st}$ der Trajektorienplanung auf bewegten Horizonten sowie dem Messwert des Gelenkwinkels $\mathbf{q}_{k,st}$. Das PI-Regelgesetz für den Trajektorienfehler \mathbf{e}_k lässt sich mit

$$\mathbf{v}_{k,PI} = \mathbf{x}_{Ie_k} + \text{diag}(kP_0, kP_1, kP_2)\mathbf{e}_k \quad (5.12)$$

$$\mathbf{x}_{Ie_{k+1}} = \mathbf{x}_{Ie_k} + T_a \text{diag}(kI_0, kI_1, kI_2)\mathbf{e}_k \quad (5.13)$$

angeben. Es wurde dabei der Integralzustand \mathbf{x}_{Ie_k} für die Winkel φ_i eingeführt und mit $\mathbf{v}_{k,PI}$ ist die Folge der resultierenden Momente für das jeweilige Gelenk. Der Verstärkungsfaktor des integralen Anteils des jeweiligen Gelenkwinkels ist mit kI_i definiert und

jener des proportionalen Anteils durch kP_i . Durch die Planung der Trajektorie anhand des Systemmodells werden sich die Größen des realen Systems bereits nahe an den geplanten Werten befinden. Im Idealfall muss die Regelung daher nur mehr die Fehler der Vernachlässigungen in der Modellierung sowie die Störeinflüsse (Parameterabweichungen, Betonpumpvorgang) ausgleichen.

Die Regelung könnte zusätzlich noch um einen Anteil $\mathbf{v}_{k,damp}$ erweitert werden, der zur Schwingungsdämpfung der Verbiegungen der Balken dient. In [7] ist ein Beweis für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu finden, wenn die Dämpfung durch Rückführung der Balkenkrümmungen $\varepsilon_{Bjs_i}(l_{s_i}, t)$ erfolgt.

Im nächsten Kapitel werden nun durch Simulation die unterschiedlichen Teilkonzepte des Steuerungs-/Regelungskonzeptes untersucht. Des Weiteren erfolgt die Analyse der Robustheit des Regelkreises indem im Simulationsmodell die Dämpfungsparameter kleiner angenommen werden als jene des Modells der Planung. Zusätzlich werden die zurückgeführten Winkel quantisiert.

6 Simulationsergebnisse

Die Untersuchung des im vorherigen Kapitel vorgestellten Regelungs- und Steuerungskonzeptes auf dessen Stabilität und Robustheit wird im Folgenden anhand von Simulationen durchgeführt. Im Abschnitt 6.1 wird das Systemverhalten betrachtet, wenn die Steuerung durch die einmalige Planung auf einem festen Zeitabschnitt erfolgt. Des Weiteren wird der Arbeitspunktwechsel mittels der suboptimalen Steuertrajektorie der Planung auf bewegten Horizonten durchgeführt. Die beiden Ergebnisse werden anschließend miteinander verglichen. Es werden zwei verschiedene Arten eines Arbeitspunktwechsels betrachtet. Im ersten Szenario wird den beiden Planungen ein stationärer Endwert $\mathbf{p}_{E0,s2}$ vorgegeben. Dieser wird zuvor in die generalisierten Koordinaten \mathbf{q} umgerechnet. Hierbei werden die Sollwerte der Zustände im Endpunkt des Wechsels sprunghaft den Optimierungsaufgaben vorgegeben. Im Weiteren wird die erzielte Performance der Planungen bei einem veränderlichen Sollwert analysiert. Im zweiten Szenario wird eine lineare Interpolation zwischen den Sollwerten im Anfangspunkt und Endpunkt durchgeführt. Der zeitliche Verlauf der Sollwerte für die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}_{T_H}^*$ ist durch

$$\mathbf{q}_{T_H}^*(t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{q}_y^* - \mathbf{q}_0^*}{T_y} t + \mathbf{q}_0^* & 0 \leq t < T_y \\ \mathbf{q}_y^* & t \geq T_y \end{cases} \quad (6.1)$$

gegeben, wobei mit \mathbf{q}_y^* die generalisierten Koordinaten im vorgegeben Endpunkt $\hat{\mathbf{y}}$ bezeichnet sind und \mathbf{q}_0^* die generalisierten Koordinaten zum Beginn der Simulation sind. Sie werden beide mittels des statischen Optimierungsproblems (5.2) aus der Vorgabe für die Endeffektorposition bestimmt. Das erste Szenario dient dazu, um die tatsächlich benötigte Zeit bis zum Erreichen des Sollwertes beider Optimierungsvarianten zu vergleichen. Das zweite Szenario des Arbeitspunktwechsels soll hingegen das Folgeverhalten der Konzepte untersuchen. Die Gelenkmomente zum Anfangszeitpunkt sind mit \mathbf{v}_0^* gegeben. T_y gibt den Zeitpunkt an, zu dem die vorgegebene Endeffektorposition $\hat{\mathbf{y}}$ erreicht werden soll. Der vorgegebene Arbeitspunktwechsel soll innerhalb von $T_y = 5$ s erfolgen. Die in der Formulierung der Optimierungsaufgabe gewünschte Vermeidung der Schwingungsanregungen wird anschließend im Abschnitt 6.2 behandelt. Hierfür werden die Deformationen des ersten Mastelementes bei einer Trajektorienplanung mit und ohne Schwingungsvermeidung betrachtet.

Zu Beginn der Simulationen befindet sich der Endeffektor an der Position $\mathbf{y}_0(0) = [13 \ 0 \ 5.3]^T$ m, was einer Gelenkwinkelstellung von $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 45.3^\circ$, $\varphi_3 = -44.1^\circ$ entspricht. Die Änderung der Endeffektorposition beträgt $\Delta \mathbf{p}_{E0,s2} = [-0.5 \ 1 \ 0.6]^T$ m. Dies entspricht einer effektiven Weglänge des Arbeitspunktwechsels von 1.27m. Als Simulationsmodell wird in allen Simulationen die Modellvariante 2 aus Kapitel 4 genutzt. Damit die Robustheit des Konzeptes überprüft werden kann, werden die Dämpfungsparameter

des Simulationsmodells auf zwei Drittel der Dämpfungen aus der Tabelle A.3 gesetzt. Es wird davon ausgegangen, dass die Gelenkwinkel mittels eines Drehgebers erfasst werden, welche die gemessenen Winkel des Simulationsmodells mit 12 Bit quantisieren.

Die in den folgenden Abschnitten verwendeten Abtastzeiten, Berechnungsintervalle sowie die Längen der Horizonte der Optimierung sind in der Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Länge der Horizonte wurde so definiert, dass sich eine realistische Rechenzeit für die Trajektorienplanung auf bewegten Horizonten ergibt. Die benötigte Rechenzeit ist zusätzlich von der Anzahl an Iteration im Gradientenverfahren abhängig. Das Gradientenverfahren wird nach $M = 5$ Iterationen im Falle der Planung auf bewegten Horizonten bzw. nach $M = 20$ Iterationen im Falle der Planung am Ende jedes Horizontes abgebrochen. Die Festlegung der Abtastzeit der Regelung und Steuerung erfolgt so, dass sich ein stabiles Systemverhalten des geschlossenen Kreises ergibt. Für den Abstand der zeitlichen Stützstellen in der Integration der Dynamiken (5.7b) und (5.7d) wurde eine Stabilitätsuntersuchung des gewählten Integrationsverfahrens durchgeführt. Die Zeit bis eine erneute Planung der Trajektorie über die bewegten Horizonte erfolgt wurde so definiert, als würde der Planung genau diese Rechenzeit zur Verfügung stehen. Die Gewichtungsfaktoren der Planung sind der Tabelle A.8 zu entnehmen.

Bezeichnung	Beschreibung	Wert	Einheit
T_H	Länge des Horizonts in der Optimierung	2	s
T_a	Abtastzeit der Regelung	1	ms
$\Delta T_{a,opt}$	Abstand der zeitlichen Stützstellen für die Online/Offline-Trajektorienplanung	100	ms
T_P	Der Trajektorienplanung auf bewegten Horizonten	300	ms

Tabelle 6.1: Verwendete Zeitintervalle für die Umsetzung der Regelung sowie der Berechnung der Steuerung

6.1 Vergleich der Planungsvarianten

Das dynamische Verhalten des Großraummanipulators mit zwei elastischen Auslegern bei der Aussteuerung durch die Trajektorienplanungen wird in diesem Abschnitt untersucht. Der Term für die Schwingungsunterdrückung im Kostenfunktional (5.6a) wird hierbei vernachlässigt, indem dieser mit dem Parameter β_{ap} auf null gesetzt wird. Als Simulationsmodell dient jeweils die Modellvariante 2, wobei für dessen Integration der `ode45` - Solver aus MATLAB verwendet wird. Die Planung ohne bewegten Horizonten wird stets am Ende eines Horizontes $T_H = 2$ s erneut durchgeführt. Dahingegen erfolgt bei der Planung auf bewegten Horizonten die erneute Berechnung auf den verschobenen Horizont in einem Abstand von $T_P = 300$ ms. Dies entspricht der angenommenen zur Verfügung stehenden Rechenzeit.

Die Verläufe der Eingangsmomente bei einer sprungförmigen Änderung des Sollwertes sind in der Abbildung 6.1 zu sehen. Es ist die Summe aus dem berechneten Wert der optimalitätsbasierten Trajektorienplanung und dem Anteil der Trajektorienfolgeregelung dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass die Eingangsmomente $M_{i,MH}$ bei der Planung auf bewegten Horizonten einen glatteren Verlauf aufweisen als jene bei der Planung

am Ende eines Zeitabschnittes. Die Annäherung an den Sollwert erfolgt bei der Trajektorienplanung auf bewegten Horizonten annähernd exponentiell, wohingegen bei der einmaligen Planung in einem Zeitabschnitt starke Schwankungen um den Sollwert zu beobachten sind. In der Abbildung 6.2 sind die Verläufe der drei Gelenkwinkel und der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten abgebildet.

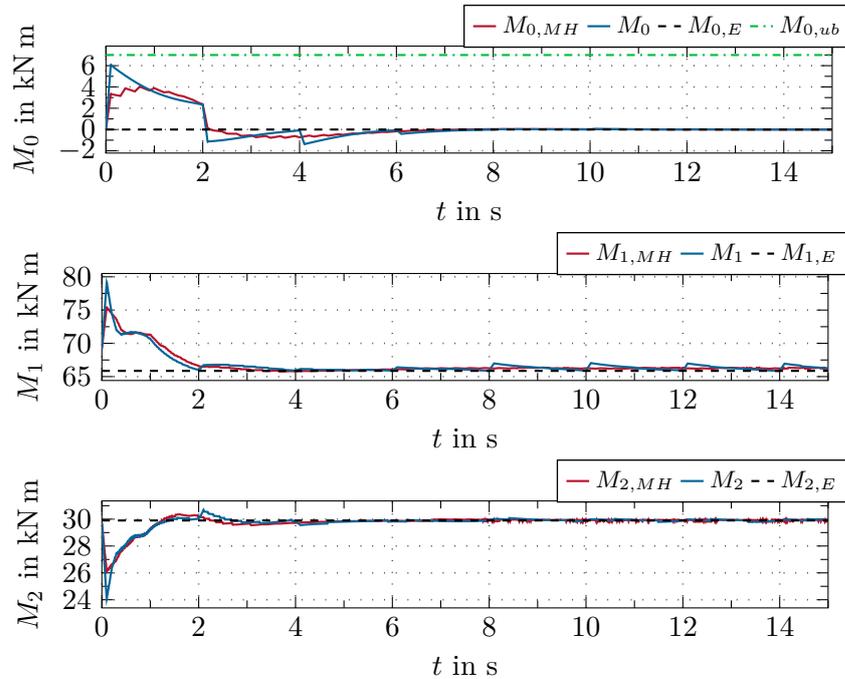


Abbildung 6.1: Gelenkmomente M_i der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei stationären Sollwert.

Die Gelenkwinkel und Winkelgeschwindigkeiten des Simulationsmodells sind in den Abbildungen mit $\varphi_{i,MH}$ bzw. φ_i bezeichnet. Die durch die Trajektorienplanungen berechneten Winkel sind als $\tilde{\varphi}_{i,MH}$ bzw. $\tilde{\varphi}_i$ in den Abbildungen gekennzeichnet. Beim Vergleich zwischen den Verläufen des Simulationsmodells und jenen der Trajektorienplanung sind für beide Planungsvarianten leichte Abweichungen zu erkennen. Die Geschwindigkeitsbeschränkungen werden bei beiden Varianten leicht verletzt, wobei bei der Planung auf bewegten Horizonten eine längere Verletzung der Beschränkungen festgestellt werden kann. Dies kann dadurch erklärt werden, da das Gradientenverfahren bei der Planung auf bewegten Horizonten früher abgebrochen wird. Dadurch ist die gefundene suboptimale Lösung weiter von der optimalen Lösung entfernt. Dahingegen kommt es bei der Planung auf bewegten Horizonten zu einem geringen Überschwingen der Gelenkwinkel. Sowohl beim Gelenkwinkel φ_1 als auch beim Winkel φ_2 kann festgestellt werden, dass der berechnete Endwert der Gelenkwinkel $\tilde{\varphi}_{i,MH}$ durch die Trajektorienplanung nie exakt den gewünschten Sollwert entspricht. Dies liegt vor allem an der Numerik des Gradientenverfahrens sowie dessen frühzeitigen Abbruch nach M Iterationen.

Als nächstes wird das Verhalten des Systems untersucht, wenn sich der Sollwert für die

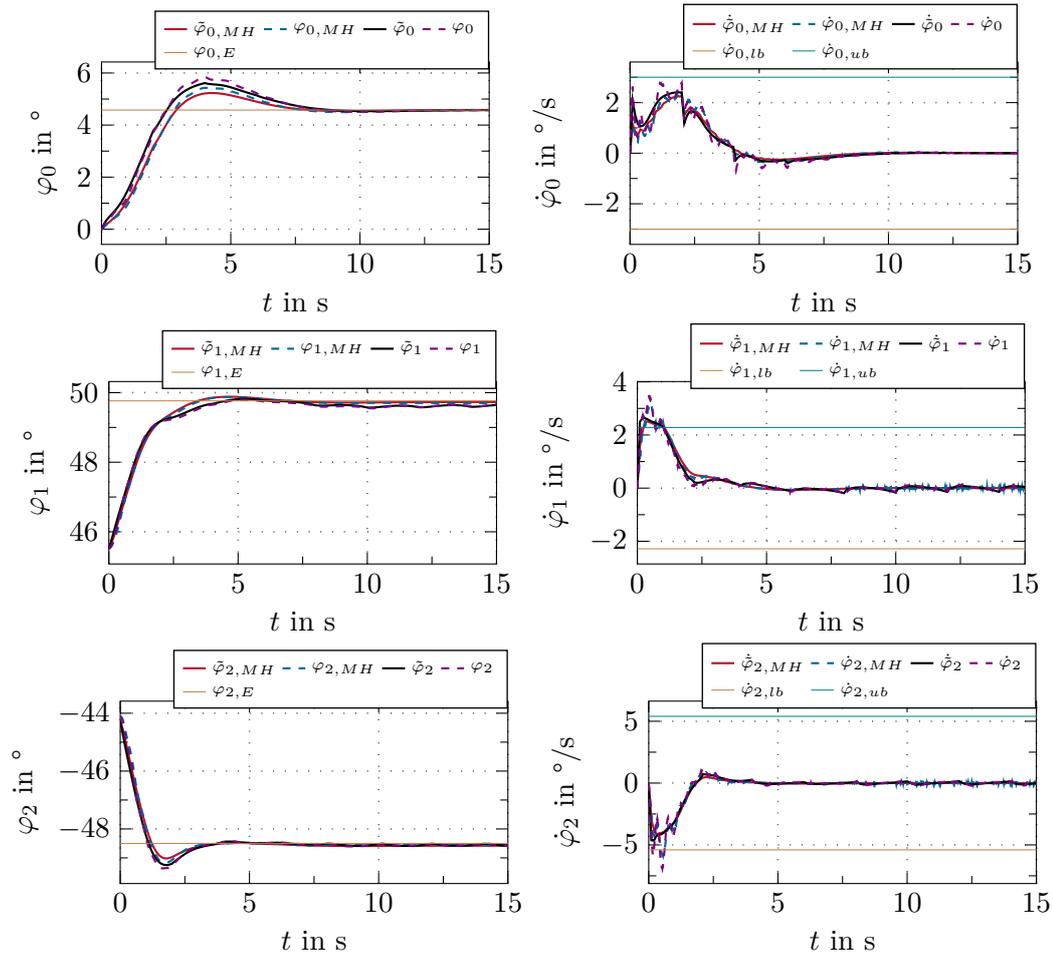


Abbildung 6.2: Gelenkwinkel φ_i und Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei stationären Sollwert.

Planung linear ändert. Die Eingangsmomente sind in der Abbildung 6.3 zu sehen. Zusätzlich sind die Simulationsergebnisse für die Gelenkwinkel und Winkelgeschwindigkeiten in der Abbildung 6.4 dargestellt. Beim Vergleich der Winkel fällt auf, dass die Planung auf bewegten Horizonten ein besseres Folgeverhalten aufweist als die einmalige Planung pro Zeitabschnitt. Das liegt daran, dass die Trajektorienplanung am Ende des Horizontes erst viel später auf die Änderung des Sollwertes reagieren kann. Bei der Betrachtung der Geschwindigkeitsprofile ist zu erkennen, dass bei der MHTP über den gesamten Zeitverlauf nur eine geringere Verfahrensgeschwindigkeit notwendig ist.

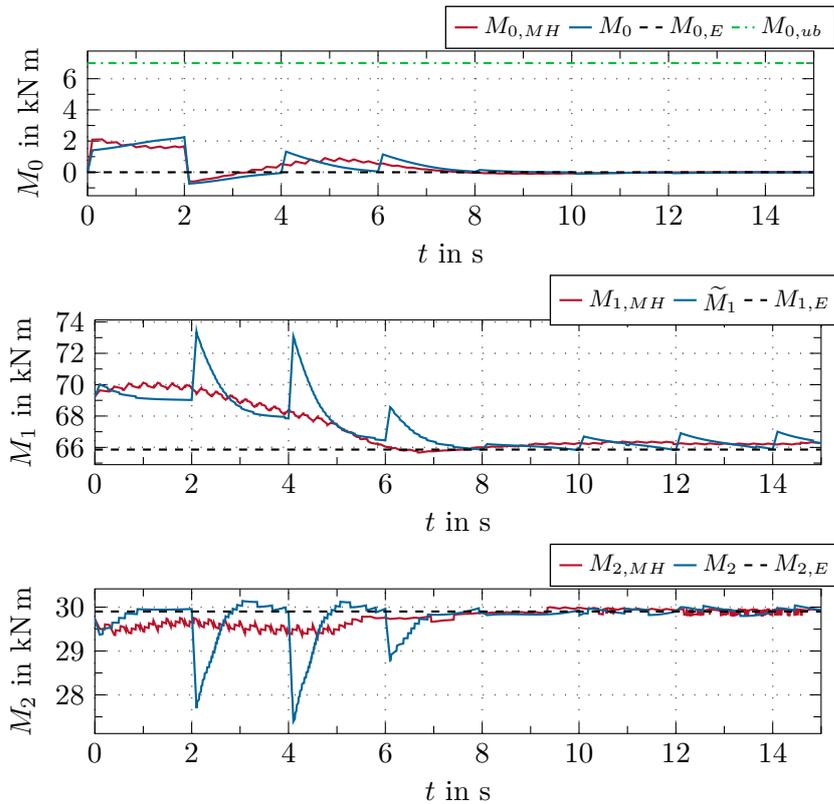


Abbildung 6.3: Gelenkmomente M_i der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei veränderlichen Sollwert.

Ein Arbeitspunktwechsel mit geringen Verfahrensgeschwindigkeit begünstigt die Unterdrückung von auftretenden Strukturschwingungen ohne diese explizit in der Optimierung zu berücksichtigen. Dies ist in der Abbildung 6.5 zu sehen. Es sind die Deformationen des Auslegerendes beim Arbeitspunktwechsel mit veränderlichen Sollwert beider Planungsvarianten zu sehen. Dabei sind die Größen des Simulationsmodells dargestellt.

Bei der einmaligen Planung auf einem Zeitabschnitt kommt es vor allem am Anfang eines neuen Planungsabschnittes zu abrupten Geschwindigkeitsänderungen. Dies hat zur Folge, dass zu diesen Zeitpunkten eine stärkere Anregung der Strukturschwingungen auftritt. Bei der Betrachtung der Eingangsgrößen in der Abbildung Abbildung 6.1 fällt ebenfalls auf, dass es zu steileren Anstiegen in den Verläufen der Momente durch die einmalige Planung pro Horizont kommt.

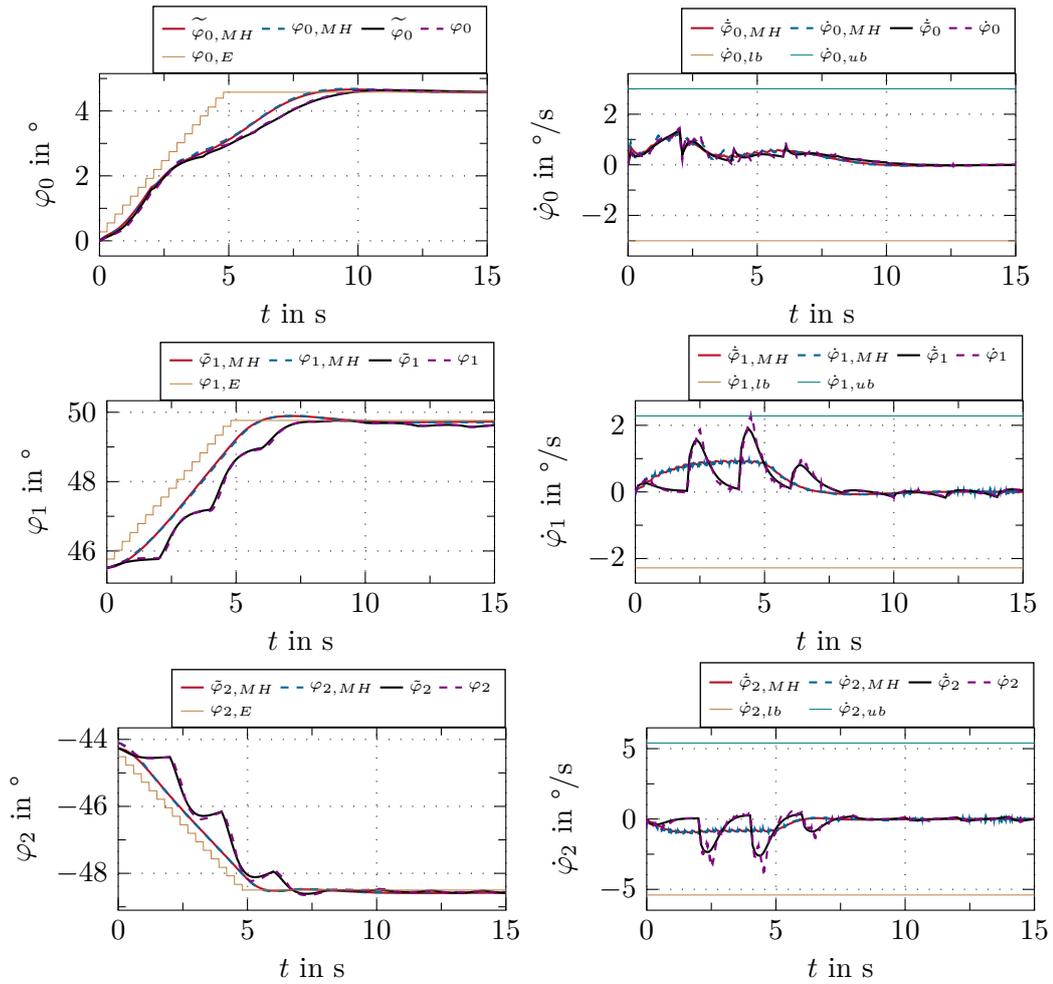


Abbildung 6.4: Gelenkwinkel φ_i und Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei veränderlichen Sollwert.

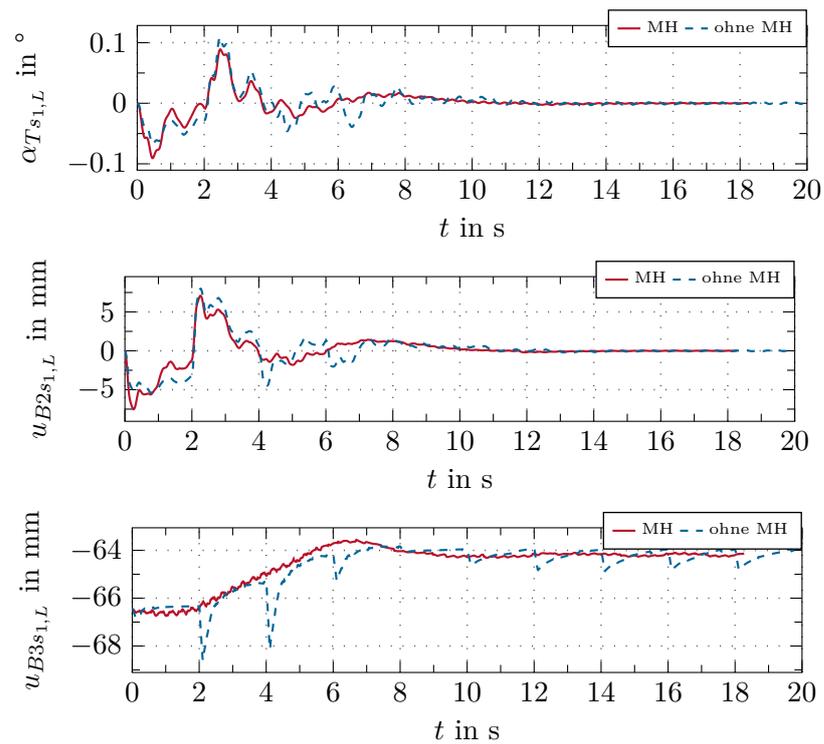


Abbildung 6.5: Deformationen $\alpha_{Ts_{1,L}}$, $u_{B2s_{1,L}}$ und $u_{B3s_{1,L}}$ der Planung auf bewegten Horizonten sowie der einmaligen Planung pro Zeitabschnitt bei veränderlichen Sollwert.

6.2 Schwingungsdämpfung

Die bei einem Arbeitspunktwechsel auftretenden Strukturschwingungen werden durch das Hinzufügen des Kostenanteils ℓ_{ap} in der Lagrange-Dichte (5.6a) minimiert. Durch die lineare Interpolation der durch die Trajektorienplanung berechneten Eingangsmomente wird bereits erreicht, dass es zu einer geringen Anregung der Moden höherer Ordnung kommt. Die elastischen Zustände des Simulationsmodells mit und ohne Schwingungsunterdrückung durch die Trajektorienplanung auf bewegten Horizonten dienen zur Verifizierung des vorgestellten Konzeptes. Zu diesem Zweck ist die Torsion $\alpha_{T_{s_1,L}}$, die Biegung $u_{B_{2s_1,L}}$ in x_{2,s_1} -Richtung sowie die Biegung $u_{B_{3s_1,L}}$ in x_{3,s_1} -Richtung des ersten Mastendes in der Abbildung 6.6 dargestellt. Die dazugehörigen Verläufe der Eingangsmomente sind der Abbildung 6.7 zu entnehmen.

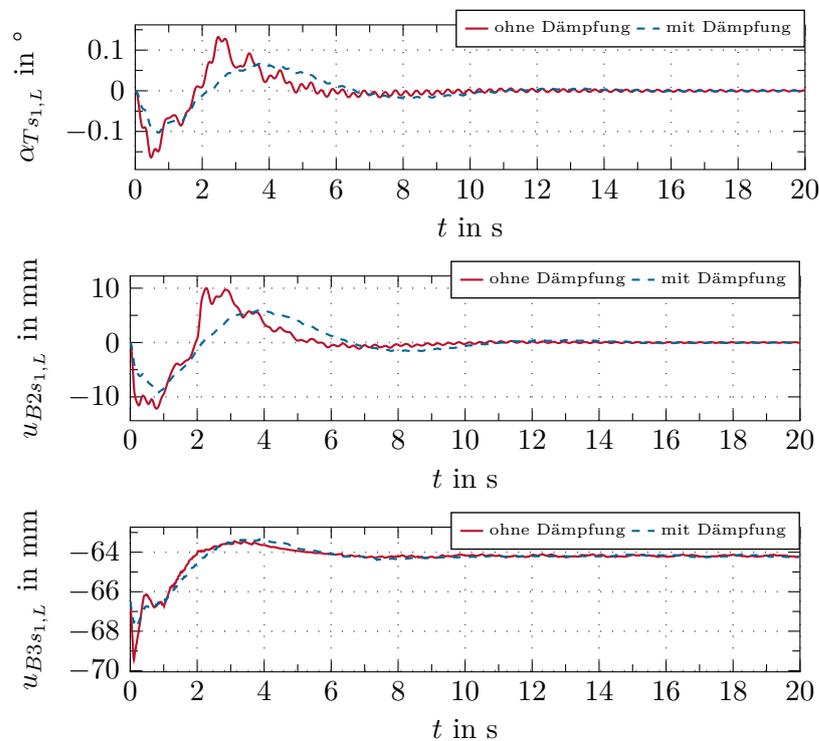


Abbildung 6.6: Deformationen $\alpha_{T_{s_1,L}}$, $u_{B_{2s_1,L}}$ und $u_{B_{3s_1,L}}$ bei einem sprunghaftigen Arbeitspunktwechsels mit und ohne Strukturdämpfung.

Im zeitlichen Verlauf des Torsionswinkels kann die Auswirkung der aktiven Berücksichtigung der Schwingungen während der Optimierung beobachtet werden. Der Torsionswinkel $\alpha_{T_{s_1,L,D}}$ weist einen sanfteren Verlauf auf als jener Winkel $\alpha_{T_{s_1,L}}$ ohne Schwingungsdämpfung. Durch den glatteren Verlauf des Eingangsmoments $M_{0,D}$ wird dieses Verhalten erreicht. Ähnliches kann für die Verbiegung $u_{B_{2s_1,L}}$ des ersten Mastendes in x_{2,s_1} -Richtung festgestellt werden. Dabei lässt sich eine starke Ähnlichkeit zwischen den Verläufen der Torsion und jener der Verbiegungen erkennen. Es wird ebenfalls durch die Berücksichtigung der Deformationsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_{s_1}$ ein gedämpfter Verlauf $u_{B_{2s_1,L,D}}$ der Verbiegung

erreicht. Die Verbiegung $u_{B3s_{1,L}}$ in x_{3,s_1} -Richtung zeigt ebenfalls den Einfluss der gewünschten Schwingungsunterdrückung durch die optimale Planung der Eingangsmomente. Der Nachteil, der sich durch die Schwingungsunterdrückung ergibt, ist, dass der gewünschte Sollwert etwas später erreicht wird als bei der Planung der Trajektorie ohne Berücksichtigung der elastischen Freiheitsgrade.

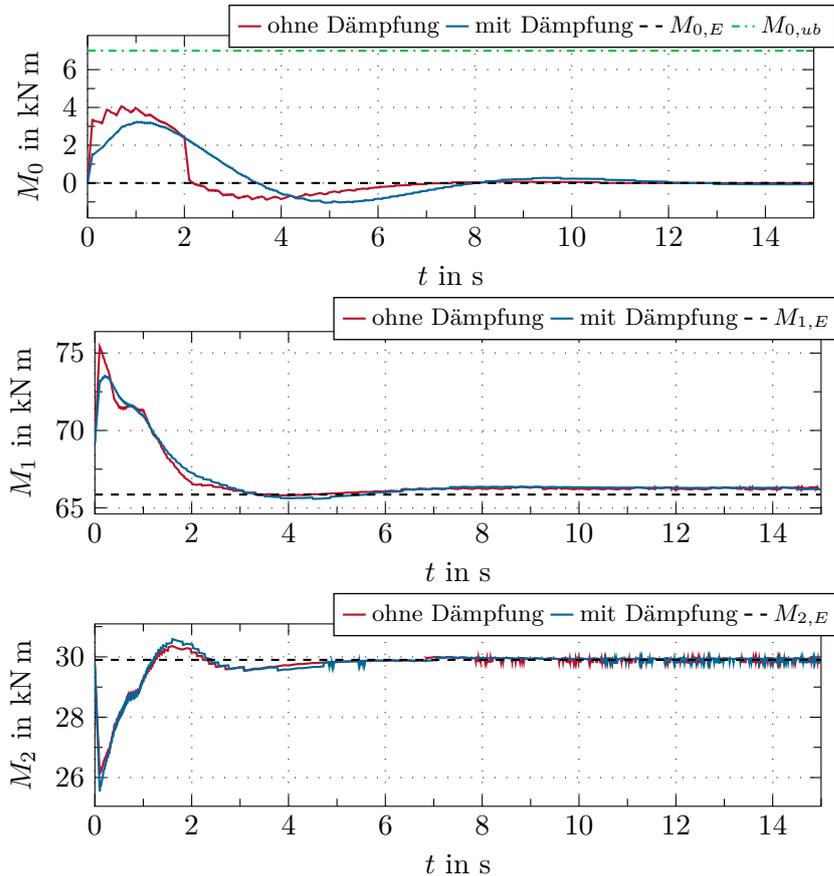


Abbildung 6.7: Gelenkmomente M_i bei einem sprungförmigen Arbeitspunktwechsel mit und ohne Strukturdämpfungsanteil.

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde gezeigt, wie anhand eines mathematischen Modells eines Großraummanipulators mit zwei elastischen Auslegern eine optimale Online-Planung für die Steuertrajektorie entworfen werden kann. Das Ziel der Planung wurde dabei so formuliert, dass die vorgegebene Sollposition des Endeffektors schnellstmöglich erreicht wird. Dies geschah unter Berücksichtigung aller Systembeschränkungen sowie der Dynamik des Manipulators. Außerdem wurde eine glatte Steuertrajektorie erreicht, so dass es nur zu geringen Anregungen der Deformation innerhalb eines Auslegers kommt.

Der erste Teil der Arbeit war der mathematischen Modellierung gewidmet. Die Herleitung des Modells wurde mittels des Hamilton-Prinzips durchgeführt. Bei der Modellierung wurde angenommen, dass jeder elastische Ausleger eine Verbiegung in zwei Raumrichtungen sowie eine Torsion um die Längsachse erfährt. Die Verbiegungen wurden mit der Theorie nach Euler-Bernoulli beschrieben und die Torsionen mittels der Theorie nach Saint-Venant.

Die Annahmen ermöglichten im Anschluss die kinematische Beschreibung des elastischen Manipulators und darauf basierend die Beschreibung der gesamten kinetischen Energie. Des Weiteren wurde die potentielle Energie des Manipulators sowie die externen Kräfte, die auf den Manipulator einwirken, ermittelt. Die Momente der Gelenke wurden dafür als die Stelleingänge des Systems definiert. Als Dämpfung der Gelenke sowie für die Strukturdämpfung wurde ein geschwindigkeitsproportionales Dämpfungsmodell eingeführt. Mittels Hamilton-Prinzip wurde das System aus partiellen Differentialgleichungen angegeben, welches das dynamische Verhalten des Manipulators beschreibt. Im nächsten Schritt wurde das System aus partiellen Differentialgleichungen in ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen durch örtliche Approximation überführt. Für die Ansatzfunktionen wurden die statischen Lösungen der Torsion und des Euler-Bernoulli-Balkens betrachtet.

Es wurden darauf basierend drei Modellvarianten untersucht. Bei der ersten Variante wurde die statische Lösung der jeweiligen Deformationen verwendet. Die zweite Variante verwendete zusätzlich eine weitere Ansatzfunktion, welche orthogonal zu der ersten Ansatzfunktion ist. Die dritte Approximation wurde mittels Legendre-Polynome durchgeführt. Die drei Varianten wurden anschließend einer Analyse der Modellkomplexität unterzogen. Dabei stellte sich heraus, dass das erste System die geringste Rechenkomplexität aufwies.

Das dynamische Verhalten der ersten und zweiten Variante wurde im Anschluss in zwei verschiedenen Szenarien untersucht. Es konnte festgestellt werden, dass sich das dynamische Verhalten der beiden Varianten nicht wesentlich unterscheidet. Der Einfluss der Vernachlässigung der Corioliskraft sowie die Verschiebungen der Schwerpunkte aufgrund der Deformationen wurde im weiteren Verlauf analysiert. Dabei konnte festgestellt werden, dass beide Vernachlässigungen keinen merkwürdigen Beitrag zur Systemdynamik liefern.

In der Planung der Trajektorie wurde das reduzierte Modell verwendet. Die Planung erfolgte in zwei Schritten: zuerst wurde die Sollwertvorgabe der Endeffektorposition mittels statischer Optimierungsaufgabe von der Position des Endeffektor in die generalisierten

Koordinaten umgewandelt. Anschließend wurde eine dynamische Optimierungsaufgabe formuliert, mit der ein Arbeitspunktwechsel möglich ist. In der Formulierung der Optimierungsaufgabe wurden die Systembeschränkungen mittels Straffunktion berücksichtigt und die Systemdynamik als Nebenbedingung formuliert. Die Lösung des dynamischen Optimierungsproblems erfolgte mittels Gradientenverfahren. Die Schrittweitensteuerung innerhalb des Verfahrens wurde durch eine approximative Lösung des entstandenen Liniensuchproblems durchgeführt. Durch Anwendung des Quasi-Newtonverfahrens auf das Liniensuchproblem konnte eine Iterationsvorschrift für die Schrittweite angegeben werden. Anschließend wurde die Trajektorienplanung auf bewegte Zeithorizonte erweitert. Zusätzlich zur Steuerung wurde eine unterlagerte PI-Regelung für die Gelenkwinkel entworfen die zur Kompensation der Abweichungen und Störungen dient. Zuletzt erfolgte eine Analyse des Steuerungs- und Regelungskonzeptes auf dessen Stabilität und Robustheit. Es wurde die Planung auf dem bewegten Zeithorizont mit der einmaligen Planung der Steuertrajektorie pro Horizont verglichen. Dabei konnte festgestellt werden, dass mit der Planung auf bewegte Horizonte eine bessere Systemperformance erzielt werden kann. Dieses weist außerdem ein besseres Führungsverhalten bei einem sich veränderlichen Sollwert auf.

Die Möglichkeit die Schwingungen durch die Planung zu unterdrücken konnte ebenfalls nachgewiesen werden. Dafür wurde die Kostenfunktion des dynamischen Optimierungsproblems um die generalisierten Geschwindigkeiten der Deformationen des ersten Auslegers erweitert. Dadurch haben sich im allgemeinen glattere Verläufe für die Eingangsmomente ergeben, wodurch die Anregung von Schwingungen minimiert wurde.

A Parameter

Die nachfolgende Tabelle A.1 fasst die geometrischen Abmessungen der betrachteten Ausleger zusammen. In der Tabelle A.2 sind die Stoffparameter der Ausleger, die angenommenen

Bezeichnung	Beschreibung	Wert	Einheit
l_{s_1}	Länge des ersten Auslegers	7.5	m
b_{s_1}	Breite des ersten Auslegers	150	mm
h_{s_1}	Höhe des ersten Auslegers	370	mm
l_{s_2}	Länge des zweiten Auslegers	7.7	m
b_{s_2}	Breite des zweiten Auslegers	140	mm
$h_{s_2,1}$	Höhe des zweiten Auslegers am Beginn	280	mm
$h_{s_2,2}$	Höhe des zweiten Auslegers am Ende	140	mm

Tabelle A.1: Geometrische Abmessungen der Ausleger

Massen sowie deren Trägheitsmomente zu finden.

Bezeichnung	Beschreibung	Wert	Einheit
E	Elastizitätsmodul	260e9	N/m ²
G	Schubmodul	79.3e9	N/m ²
ν	Poissonzahl	0.25	-
ρ	Dichte (Stahl)	7870	kg/m ³
m_1	Masse am Ende des Auslegers s_1	100	kg
m_2	Masse am Ende des Auslegers s_2	300	kg
$\mathbf{I}_{m_2}[1, 1]$	Trägheitsmomente der Masse am Ende des Auslegers s_2	0.4	kgm ²
$\mathbf{I}_{m_2}[2, 2]$	Trägheitsmomente der Masse am Ende des Auslegers s_2	10	kgm ²
$\mathbf{I}_{m_2}[3, 3]$	Trägheitsmomente der Masse am Ende des Auslegers s_2	10	kgm ²

Tabelle A.2: Stoffparameter der Ausleger

Für die Wahl der Parameter der Dämpfung wurde das Schwingungsverhalten der beiden Ausleger untersucht. Die elastischen Elemente des Manipulators sind dafür in unterschiedlichen Stellungen für die Simulationen fixiert worden. Die Schwingung des gewünschten Zustandes wurde dann simulativ mittels externer Kraft angeregt. Es wurde dabei immer nur der zu untersuchende Freiheitsgrad der Konstruktion aus zwei Balken zugelassen. Die Dämpfung des Gelenkes φ_1 wurde so festgelegt, dass die durch eine zweisekündige Beschleunigung mit dem maximalen Moment verursachte Bewegung nach etwa 10 Sekunden

vollständig abgeklungen ist. Bei der Untersuchung der Strukturdämpfungen wurden die beiden Ausleger in die Waagrechte gesetzt ($\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 0^\circ$) und am Ende des zweiten Auslegers wurde eine impulsförmige Störgröße aufgeschaltet. Die Dämpfungskonstanten für die Torsionen (d_{T,s_1} , d_{T,s_2}) der beiden Ausleger wurden so festgelegt, dass die angeregte Schwingung nach 10 Sekunden zu 90% abgeklungen ist. Die Dämpfung der Verbiegungen (d_{B2,s_1} , d_{B2,s_2} , d_{B3,s_1} , d_{B3,s_2}) wurde so eingestellt, dass sie nach 9-10 Schwingungsperioden ($T = 1 - 2$ s) fast vollständig abgeklungen ist. In der Tabelle A.3 sind die Parameter der Dämpfungen zusammengefasst.

Bezeichnung	Beschreibung	Wert	Einheit
$d_{st,0}$	Dämpfung des ersten Gelenkes	6e4	kgm ² /s
$d_{st,1}$	Dämpfung des zweiten Gelenkes	6e4	kgm ² /s
$d_{st,2}$	Dämpfung des dritten Gelenkes	3e4	kgm ² /s
$\tilde{d}_{T s_1}$	Dämpfung der Torsion des ersten Auslegers	44.09	kg m/s
$\tilde{d}_{T s_2}$	Dämpfung der Torsion des zweiten Auslegers	46.47	kg m/s
$\tilde{d}_{B 2 s_1}$	Dämpfung der Biegung $u_{B 2 s_1}$	121.78	kg/(m s)
$\tilde{d}_{B 3 s_1}$	Dämpfung der Biegung $u_{B 3 s_1}$	58.45	kg/(m s)
$\tilde{d}_{B 2 s_2}$	Dämpfung der Biegung $u_{B 2 s_2}$	40.01	kg/(m s)
$\tilde{d}_{B 3 s_2}$	Dämpfung der Biegung $u_{B 3 s_2}$	40.01	kg/(m s)

Tabelle A.3: Dämpfungen des Großraummanipulators

Die Polynomkoeffizienten der Ansatzfunktionen (3.17), (3.19), (3.24) und (3.25) für die örtliche Diskretisierung der Deformationen des ersten Auslegers sind in der Tabelle A.4 zusammengefasst. Für den zweiten Ausleger sind die Koeffizienten der örtlichen Diskretisierung der Deformationsparameter in Tabelle A.5 zu finden. Die Koeffizienten wurden durch Regressionsanalyse der statischen Deformation berechnet. In der Tabelle A.6 ist

Bezeichnung	Beschreibung	Wert
$a_{1,T s_1}$	Erster Koeffizient der statischen Torsion	1.15e-3
$n_{T s_1}$	Koeffizient des orthogonalen Polynoms der Torsion $u_{T s_1}$	-5.63
$a_{1,B 2 s_1}$	Erster Koeffizient der statischen Biegung in x_{2,s_1} -Richtung	-6.14e-3
$a_{2,B 2 s_1}$	Zweiter Koeffizient der statischen Biegung in x_{2,s_1} -Richtung	2.87e-4
$n_{B 2 s_1}$	Koeffizient des orthogonalen Polynoms der Biegung $u_{B 2 s_1}$	-6.18
$a_{1,B 3 s_1}$	Erster Koeffizient der statischen Biegung in x_{3,s_1} -Richtung	-1.5e-3
$a_{2,B 3 s_1}$	Zweiter Koeffizient der statischen Biegung in x_{3,s_1} -Richtung	7.03e-5
$n_{B 3 s_1}$	Koeffizient des orthogonalen Polynoms der Biegung $u_{B 3 s_1}$	-6.18

Tabelle A.4: Polynomkoeffizienten der örtlichen Ansatzfunktionen des Auslegers s_1

der Arbeitsbereich des Großraummanipulators angegeben. Dieser ergibt sich durch die Beschränkungen der Gelenkwinkel. Die Beschränkungen für die Eingangsgrößen des Systems

Bezeichnung	Beschreibung	Wert
a_{1,Ts_2}	Erster Koeffizient der statischen Torsion	1.95e-3
a_{2,Ts_2}	Zweiter Koeffizient der statischen Torsion	2.96e-5
a_{3,Ts_2}	Dritter Koeffizient der statischen Torsion	1.39e-5
n_{Ts_2}	Koeffizient des orthogonalen Polynoms der Torsion u_{Ts_2}	-5.63
$a_{1,B2s_2}$	Erster Koeffizient der statischen Biegung in x_{2,s_2} -Richtung	-8.92e-3
$a_{2,B2s_2}$	Zweiter Koeffizient der statischen Biegung in x_{2,s_2} -Richtung	2.37e-4
$a_{3,B2s_2}$	Dritter Koeffizient der statischen Biegung in x_{2,s_2} -Richtung	8.84e-6
n_{B2s_2}	Koeffizient des orthogonalen Polynoms der Biegung u_{B2s_2}	-6.36
$a_{1,B3s_2}$	Erster Koeffizient der statischen Biegung in x_{3,s_2} -Richtung	-2.94e-3
$a_{2,B3s_2}$	Zweiter Koeffizient der statischen Biegung in x_{3,s_2} -Richtung	-7.3e-5
$a_{3,B3s_2}$	Dritter Koeffizient der statischen Biegung in x_{3,s_2} -Richtung	1.04e-5
n_{B3s_2}	Koeffizient des orthogonalen Polynoms der Biegung u_{B3s_2}	-6.4

Tabelle A.5: Polynomkoeffizienten der örtlichen Ansatzfunktionen des Auslegers s_2

sind in der Tabelle A.7 zu finden. In dieser Tabelle sind ebenfalls die Beschränkungen für die Winkelgeschwindigkeiten zu finden, welche sich in der Realität durch die beschränkten Verfahrensgeschwindigkeiten der hydraulischen Zylinder ergeben.

Bezeichnung	Beschreibung	Wert	Einheit
$\varphi_{0,lb}$	Untere Begrenzung des Winkel φ_0	180	°
$\varphi_{0,ub}$	Obere Begrenzung des Winkel φ_0	180	°
$\varphi_{1,lb}$	Untere Begrenzung des Winkel φ_1	0	°
$\varphi_{1,ub}$	Obere Begrenzung des Winkel φ_1	90	°
$\varphi_{2,lb}$	Untere Begrenzung des Winkel φ_2	20	°
$\varphi_{2,ub}$	Obere Begrenzung des Winkel φ_2	180	°

Tabelle A.6: Arbeitsbereich des Manipulators mit zwei Auslegern

Die Gewichtungsfaktoren innerhalb des Gütefunktionales des optimal Steuerungsproblems sind in der Tabelle A.8 zusammengefasst. Die Matrix \mathbf{Q} wird in der Arbeit als Diagonalmatrix verwendet, wobei die Diagonaleinträge mit $q_{ii}, i = 1..9$ bezeichnet werden. Die Gewichtungen $q_{ii}, i = 1..6$ für die elastischen Freiheitsgrade des Modells wurden auf null gesetzt. Die elastischen Freiheitsgrade werden mit Hilfe des Parameters β_{ap} in der Optimierungsaufgabe berücksichtigt. Die verwendeten Parameter der PI-Regelung sind in der Tabelle A.9.

Bezeichnung	Beschreibung	Wert	Einheit
$\dot{\varphi}_{0,lb}$	Untere Begrenzung des Winkelgeschw. $\dot{\varphi}_0$	-0.5	U/min
$\dot{\varphi}_{0,ub}$	Obere Begrenzung des Winkelgeschw. $\dot{\varphi}_0$	0.5	U/min
$\dot{\varphi}_{1,lb}$	Untere Begrenzung des Winkelgeschw. $\dot{\varphi}_1$	-0.38	U/min
$\dot{\varphi}_{1,ub}$	Obere Begrenzung des Winkelgeschw. $\dot{\varphi}_1$	0.38	U/min
$\dot{\varphi}_{2,lb}$	Untere Begrenzung des Winkelgeschw. $\dot{\varphi}_2$	-0.9	U/min
$\dot{\varphi}_{2,ub}$	Obere Begrenzung des Winkelgeschw. $\dot{\varphi}_2$	0.9	U/min
$M_{0,lb}$	Untere Begrenzung des Momentes M_0	-7	kN m
$M_{0,ub}$	Obere Begrenzung des Momentes M_0	7	kN m
$M_{1,lb}$	Untere Begrenzung des Momentes M_1	-170	kN m
$M_{1,ub}$	Obere Begrenzung des Momentes M_1	170	kN m
$M_{2,lb}$	Untere Begrenzung des Momentes M_2	-50	kN m
$M_{2,ub}$	Obere Begrenzung des Momentes M_2	50	kN m

Tabelle A.7: Beschränkungen für die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten sowie für die Momente

Bezeichnung	Beschreibung	Wert
q_{77}	Gewichtung des Gelenkwinkels φ_0	300
q_{88}	Gewichtung des Gelenkwinkels φ_1	10.5
q_{99}	Gewichtung des Gelenkwinkels φ_2	65.5
β_q	Gewichtung der generalisierten Koordinaten \mathbf{q}	15
β_{Pst}	Gewichtung der Beschränkungen	28
β_{ap}	Gewichtung der Geschwindigkeit der Deformationsfreiheitsgrade	15

Tabelle A.8: Gewichtungsfaktoren der Offline- und Online Trajektorienplanung

Bezeichnung	Beschreibung	Wert
kP_0	Proportionalanteil der Regelung des Winkels φ_0	500
kP_1	Proportionalanteil der Regelung des Winkels φ_1	1000
kP_2	Proportionalanteil der Regelung des Winkels φ_2	1300
kI_0	Integralanteil der Regelung des Winkels φ_0	15
kI_1	Integralanteil der Regelung des Winkels φ_1	15
kI_2	Integralanteil der Regelung des Winkels φ_2	15

Tabelle A.9: Parameter der PI-Regelung

Literatur

- [1] A. de Luca und B. Siciliano, „Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots“, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, Jg. 21, Nr. 4, S. 826–839, 1991.
- [2] J. Yang, L. Jiang und D. Chen, „Dynamic modelling and control of a rotating Euler-Bernoulli Beam“, *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 274, Nr. 3, S. 863–875, 2004.
- [3] J. Martins, Z. Mohamed, M. Tokhi, J. da Costa und M. Ayala Botto, „Approaches for dynamic modelling of flexible manipulator systems“, *Control Theory and Applications, IEEE Proceedings*, Jg. 150, S. 401–411, 2003.
- [4] S. K. Dwivedy und P. Eberhard, „Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review“, *Mechanism and Machine Theory*, Jg. 41, Nr. 7, S. 749–777, 2006.
- [5] M. J. Reiner, „Modellierung und Steuerung von strukturelastischen Robotern“, Dissertation, Technischen Universität München, 2010.
- [6] J. Henikl, W. Kemmetmüller und A. Kugi, „Modeling and Simulation of Large-Scale Manipulators with Hydraulic Actuation“, *IFAC Proceedings Volumes*, Jg. 45, Nr. 2, S. 780–785, 2012.
- [7] J. Henikl, „Regelungstrategien für den Ausleger einer Autobetonpumpe“, Dissertation, Technischen Universität Wien, 2015.
- [8] J. Henikl, W. Kemmetmüller und A. Kugi, „Estimation and control of the tool center point of a mobile concrete pump“, *Automation in Construction*, Jg. 61, S. 112–123, 2016.
- [9] R. W. Krauss, „An Improved Technique for Modeling and Control of Flexible Structures“, Dissertation, Georgia Institute of Technology, 2006.
- [10] S. Moberg, „Modelling and Control of Flexible Manipulators“, Dissertation, Linköping University, 2010.
- [11] M. Benosman und G. le Vey, „Control of Flexible Manipulators: A Survey“, *Robotica*, Jg. 22, Nr. 5, S. 533–545, 2004.
- [12] J.-C. Latombe, *Robot Motion Planning*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1991.
- [13] K. Gupta und A. P. del Pobil, *Practical Motion Planning in Robotics: Current Approaches and Future Directions*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1998, ISBN: 047198163X.
- [14] M. H. Korayem, A. Nikoobin und V. Azimirad, „Trajectory optimization of flexible link manipulators in point-to-point motion“, *Robotica*, Jg. 27, Nr. 6, S. 825–840, 2009.

- [15] M. H. Korayem, H. Rahimi und A. Nikoobin, „Mathematical modeling and trajectory planning of mobile manipulators with flexible links and joints“, *Applied Mathematical Modelling*, Jg. 36, Nr. 7, S. 3229–3244, 2012.
- [16] S. Hoshyari, H. Xu, E. Knoop, S. Coros und M. Bächer, „Vibration-minimizing Motion Retargeting for Robotic Characters“, *ACM Trans. Graph.*, Jg. 38, Nr. 4, 102:1–102:14, 2019.
- [17] T. Glück, W. Kemmetmüller und A. Steinböck, *Fortgeschrittene Methoden der Modellbildung, Skriptum zur Vorlesung*, <https://www.acin.tuwien.ac.at/master/fortgeschrittene-methoden-der-modellbildung/>, Aufgerufen am 2019-08-02, 2018.
- [18] H. Altenbach, *Kontinuumsmechanik*. Springer Vieweg, 2015.
- [19] P. Haupt, *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, 2000.
- [20] M. Linke und E. Nast, *Festigkeitslehre für den Leichtbau: Ein Lehrbuch zur Technischen Mechanik*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015.
- [21] A. Kugi und T. Glück, *Automatisierungs- und Regelungstechnik, Skriptum zur Vorlesung*, <https://www.acin.tuwien.ac.at/bachelor/fachvertiefung-automatisierungs-und-regelungstechnik/>, Aufgerufen am 2019-09-14, 2018.
- [22] G. W. Trayer und H. W. March, „The Torsion of Members Having Sections Common in Aircraft Construction“, *NACA Technical Report 334*, 1930.
- [23] W. Young, R. Roark und R. Budynas, *Roark's formulas for stress and strain*. New York: McGraw-Hill, 2002, ISBN: 9780070725423.
- [24] J. Lemaitre, „Introduction to Elasticity and Viscoelasticity“, in *Handbook of Materials Behavior Models*, Burlington: Academic Press, 2001, S. 71–74.
- [25] K. Graichen, *Methoden der Optimierung und Optimalen Steuerung, Skriptum zur Vorlesung*, https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/iui.inst.110/Downloads/Vorlesung/Optimierung/Skript/Skript_MOOS_WS1718.pdf, Aufgerufen am 2019-08-14, 2017.
- [26] A. Steinböck, *Optimierung, Skriptum zur Vorlesung*, <https://www.acin.tuwien.ac.at/master/optimierung/>, Aufgerufen am 2020-01-09, 2019.
- [27] B. Käpernick und K. Graichen, „The gradient based nonlinear model predictive control software GRAMPC“, in *European Control Conference (ECC)*, Strasbourg, 2014, S. 1170–1175.
- [28] F. Gritschneider, K. Graichen und K. Dietmayer, „Fast Trajectory Planning for Automated Vehicles Using Gradient-Based Nonlinear Model Predictive Control“, *Proc. der IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, S. 7369–7374, 2018.
- [29] J. Barzilai und J. M. Borwein, „Two-Point Step Size Gradient Methods“, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Jg. 8, S. 141–148, 1988.

- [30] T. Glück, A. Kugi und A. Steinböck, *Fortgeschrittene Methoden der nichtlinearen Regelung, Skriptum zur Vorlesung*, <https://www.acin.tuwien.ac.at/master/fortgeschrittene-methoden-der-nichtlinearen-regelung/>, Aufgerufen am 2019-09-14, 2019.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit gemäß dem Code of Conduct – Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis (in der aktuellen Fassung des jeweiligen Mitteilungsblattes der TU Wien), insbesondere ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel, angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, im November 2019

Christoph Unger