



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

---

Diplomarbeit

# Robuste Regelung eines magnetgelagerten unterkritisch laufenden Rotors

Ausgeführt zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Schrödl  
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Markus Hutterer BSc

eingereicht am

Institut für Energiesysteme und Elektrische Anlagen (E370)  
der Technischen Universität Wien

durch

Fabio Schöck, BSc  
Matrikelnummer: 1125036

Wien, am 28. Februar 2018

---

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Dipl.-Ing. Markus Hutterer, BSc bedanken, der mich während der Durchführung dieser Arbeit auf exzellente Weise betreut hat. Er hat sich gerne Zeit genommen um komplexe Zusammenhänge anschaulich zu erklären und ist mir mit unterstützendem Rat zur Seite gestanden. Des Weiteren möchte ich mich bei O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Schrödl bedanken, der es erst ermöglichte diese Arbeit an seinem Institut durchzuführen.

Meinen ganz persönlichen Dank möchte ich meiner Familie ausdrücken, welche mich während meiner Studienzzeit sehr unterstützt hat und mir dieses Studium erst ermöglichte.

Ein weiterer Dank geht an meine sehr geschätzten Studienkollegen, welche meine Studienzzeit nicht nur zu einer sehr lehrreichen, sondern auch sehr schönen Zeit machten.

# Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt den Entwurf und Vergleich robuster Positionsregelungen unterschiedlicher Strukturen für magnetgelagerte unterkritisch laufende Rotoren. Dazu wurde in einem ersten Schritt ein mathematisches Modell hergeleitet, um das dynamische Verhalten eines durch aktive Magnetlager stabilisierten Rotors analysieren zu können. Um dem gyrokopischen Effekt und der damit einhergehenden Aufspaltung der Eigenmoden des Rotors entgegenzuwirken, wurde eine Reglerstruktur bestehend aus dezentralen PID-Reglern und Querkopplungselementen entwickelt, für deren Elemente drei unterschiedliche Ansätze untersucht wurden. Für die Querkopplungen wurden PD-Regler als auch eine geeignete Kombination aus Tief- und Hochpassfiltern eingesetzt. Die Querkopplung ermöglicht die Anordnung an zwei unterschiedlichen Stellen im Regelkreis, wodurch auf unterschiedliche Art und Weise auf die Eigenmoden des Rotors eingewirkt werden kann, um somit hohe Rotordrehzahlen zu ermöglichen. Um einen möglichst robusten Regler zu generieren, wurde zur Bestimmung der Parameter die sogenannte  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglersynthese verwendet. In Simulationen wurden die unterschiedlichen Methoden analysiert und in Hinblick auf die Robustheit des Regelkreises untersucht. Aufbauend auf den theoretischen Ergebnissen wurden die Regler auf einem vorhandenen Magnetlagersystem implementiert und experimentell analysiert.

# Abstract

The present diploma thesis deals with the design of a robust controller for a magnetically suspended rotor at under critical speeds. To study the dynamic behavior of a magnetically levitating rotor, a mathematical model of the magnetic bearing and the rigid body of the rotor has been derived. The gyroscopic effect of a rigid rotor rotating at a very high angular velocity leads to spreading eigenmodes of the rotor. A control structure based on decentralized PID controller and so called cross coupling elements has been developed, to partially counteract the gyroscopic effect. Within the control strategy, three different approaches have been subsequently studied. PD controller as well as a variation of a suitable combination of high- and lowpass filter are used for the cross coupling elements. The cross coupling elements enable the positioning at two different locations within the control scheme. Through the variation of the positioning, different counteracting effects on the gyroscopic effect and the spreading eigenmodes can be observed, which leads to higher angular velocities. In order to obtain a robust controller, the parameter of the chosen structure are determined with the so called  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis. The presented strategies have been implemented in simulations in order to examine the robustness of the control loop. Based on the theoretical results, the three control strategies have been implemented and experimentally analyzed on an existing magnetic bearing system.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung . . . . .	1
1.2	Struktur der vorliegenden Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Magnetlager</b>	<b>3</b>
2.1	Arten von Magnetlagern . . . . .	3
2.2	Kraftwirkung im Magnetlager . . . . .	4
2.3	Prinzip des „Differential Driving Modes“ . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Modellbildung</b>	<b>10</b>
3.1	Dynamik eines starren Rotors . . . . .	10
3.1.1	Euler-Lagrange Gleichungen . . . . .	10
3.1.2	Winkelgeschwindigkeiten . . . . .	11
3.1.3	Bewegungsgleichungen . . . . .	14
3.2	Verhalten eines elastisch gelagerten Rotors . . . . .	16
3.3	Unwucht . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Grundlagen der <math>\mathcal{H}_\infty</math> Regelung</b>	<b>21</b>
4.1	Begriff der Robustheit . . . . .	21
4.1.1	Eingrößensysteme . . . . .	22
4.1.2	Mehrgrößensysteme . . . . .	23
4.2	Verallgemeinerte Regelkreisstruktur . . . . .	24
4.3	$\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf . . . . .	26
4.4	Normierung des Modells . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Regelungsentwurf ohne Strukturvorgabe</b>	<b>30</b>
5.1	Mixed-Sensitivity $\mathcal{H}_\infty$ Control . . . . .	30
5.2	Gewichtung . . . . .	32
5.3	Reglerentwurf mit der MATLAB Robust Control Toolbox . . . . .	35
5.3.1	Reglerentwurf im Stillstand . . . . .	36
5.3.2	Hankel Modellordnungsreduktion . . . . .	38
5.3.3	Reglerentwurf für diskrete Drehzahlen . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Regelungsentwurf mit Strukturvorgabe</b>	<b>42</b>
6.1	Struktur der Regelung . . . . .	42
6.2	Entwurf der Diagonalelemente . . . . .	44

6.3	PD-Regelung als Querkopplung . . . . .	48
6.4	Hochpass/Tiefpass-Kombination als Querkopplung . . . . .	54
6.4.1	Serielle Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination . . . . .	56
6.4.2	Parallele Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination . . . . .	60
6.5	Vergleich der vorgestellten Methoden . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Messergebnisse</b>	<b>67</b>
7.1	Versuchsaufbau und Implementierung . . . . .	67
7.2	Berücksichtigung des elastischen Verhaltens des Rotors . . . . .	69
7.3	Compliance . . . . .	72
7.4	Sensitivität im Stillstand . . . . .	74
7.5	Sensitivität in Abhängigkeit der Drehzahl . . . . .	76
7.6	Messungen am Magnetlagersystem 2 . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>84</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	84
8.2	Ausblick . . . . .	85

# 1 Einleitung

## 1.1 Einführung

Die Lagerung von Rotorwellen ist für die Effizienz von hochdrehenden Anwendungen von fundamentaler Bedeutung. Rillenkugellager stellen eine gängige Lösung zur Ermöglichung einer reibungsarmen Lagerung dar, welche im Gegensatz zu einfachen Gleitlagern den Reibungswiderstand über rollende Körper reduzieren. Zur Aufrechterhaltung der Funktionalität ist auch bei sogenannten Wälzlagern eine Schmierung der rollenden Körper notwendig. Die aktive Schmierung beschränkt sich zwar auf das Lager selbst, Rückstände können jedoch in andere Maschinenteile gelangen und zu Verunreinigungen führen. Wird an die Anwendung die Anforderung einer sehr hohen Reinheit gestellt, eignen sich Magnetlager als gute Alternative. Magnetlager ermöglichen die kontaktlose Stabilisierung der rotierenden Welle und sind somit nicht auf Schmiermittel angewiesen. Durch (Elektro-) Magnete im Stator erfährt der magnetisch leitfähige Rotor eine Kraftwirkung, auf der die kontaktlose Lagerung basiert. Neben der kontaktlosen und somit fast reibungsfreien Lagerung bieten Magnetlager aber noch andere Vorteile. Zum einen lassen sich durch das Wegfallen des physikalischen Kontakts des Stators und einer sich drehenden Welle sehr hohe Rotordrehzahlen erreichen. Zum anderen können Systemparameter wie die Steifigkeit oder die Dämpfung im Betrieb auf die aktuelle Situation angepasst werden. Da die Vakuumtechnik hohe Anforderungen an den Reinheitsgrad sowie die Drehzahl stellt, werden oft Magnetlager eingesetzt. Ein weiteres Anwendungsgebiet sind Schwungräder zur Energiespeicherung, da hier die reibungsarme Lagerung und sehr hohe Drehzahlen von vorrangiger Bedeutung sind.

Im Vergleich zu konventionellen Kugellagern ist der Aufbau von Magnetlagern ungleich umfangreicher. Zur Aufrechterhaltung der kontaktlosen Stabilisierung der Welle sind aktiv geregelte Elektromagneten notwendig, die wiederum Leistungselektronik zur Ansteuerung sowie Datenverarbeitung benötigen und somit die Entwicklungskosten von Magnetlagern deutlich erhöhen. Die Regelung der Welle stützt sich auf die Messung der Position des Rotors. Durch die kontaktlose Lagerung und die damit verbundene freie Bewegung der Welle im Lager ergeben sich zusätzliche Effekte, welche in der Regelungsstrategie berücksichtigt werden müssen. Dazu zählen der gyroskopische Effekt sowie Unwuchten, welche zu Pendelbewegungen des Rotors führen. Des Weiteren sind diese Effekte nichtlinear an die Rotordrehzahl gebunden und erhöhen somit die Anforderungen an die Regelung. Zusätzlich unterliegen die Systemparameter aufgrund von Erwärmung durch den Stromfluss oftmals starken Schwankungen. Hieraus ist ersichtlich, dass die Robustheit der Regelung von äußerster Wichtigkeit ist. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, solch einen robusten Reglerentwurf durchzuführen, wobei unter-

schiedliche Methoden verglichen und simulativ getestet werden. Zur Einhaltung vorgegebener Robustheitsanforderungen erfolgt der Reglerentwurf nach der sogenannten  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese, dessen Ziel die Maximierung der Robustheit der Regelung darstellt. Darauf aufbauend werden die untersuchten Methoden auf einem bestehenden Magnetlagersystem angewandt.

Bei dem bestehenden Magnetlagersystem handelt es sich um eine sogenannte Turbomolekularpumpe, welche über eine sehr hoch drehende Schaufelturbine eine molekulare Strömung erzeugt, um somit Gasmoleküle abzusaugen.

### 1.2 Struktur der vorliegenden Arbeit

Zu Beginn werden die Grundlagen des magnetischen Kreises beschrieben um einen Einblick in die Wirkungsweise der vom Magnetlager ausgehenden Kräfte zu erhalten. Aufbauend auf der magnetischen Kraft wird die Dynamik eines starren, unterkritisch<sup>1</sup> rotierenden Rotors untersucht um die Bewegungsgleichungen des Systems aufstellen zu können. Nach der Analyse des Verhaltens eines elastisch gelagerten Rotors werden die Grundlagen des  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurfs dargestellt. Der Entwurf wird nach zwei sehr unterschiedlichen Vorgehensweisen durchgeführt, einerseits wird die Reglerstruktur vollkommen offen belassen und andererseits a priori Wissen über das System verwendet, um eine geeignete Reglerstruktur zu wählen. Innerhalb des Reglerentwurfs werden drei unterschiedliche Strukturen untersucht und auf Basis des mathematischen Modells simulativ verglichen. Anschließend werden diese drei Methoden am Prüfstand implementiert und experimentell analysiert.

---

<sup>1</sup> In diesem Zusammenhang bedeutet unterkritisch, dass die Drehzahl des Rotors unter der Resonanzfrequenz der ersten Biegemode liegt.

## 2 Grundlagen der Magnetlager

Zu Beginn dieser Arbeit werden die Grundlagen der Magnetlager erörtert. Im ersten Schritt werden die unterschiedlichen Realisierungsformen von Magnetlagern dargestellt. Hierbei liegt der Fokus auf aktiv geregelten radialen Reluktanzmagnetlagern, da der nachfolgende Reglerentwurf für solche radiale Magnetlager erfolgt. Im nächsten Schritt wird die Kraftwirkung im magnetischen Feld beschrieben, da diese die physikalische Grundlage der Magnetlager darstellt. Abschließend wird das Funktionsprinzip des verwendeten Magnetlagers weiter beschrieben um eine bidirektionale resultierende Kraftwirkung in der Ebene zu ermöglichen.

### 2.1 Arten von Magnetlagern

Grundsätzlich werden Magnetlager in zwei Kategorien unterteilt, wobei nach dem physikalischen Effekt des Magnetfeldes unterschieden wird. In der ersten Kategorie basiert die elektromagnetische Kraftwirkung auf der sogenannten Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_{Lorentz} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \quad (2.1)$$

welche auf ein geladenes Teilchen wirkt. Hierbei bezeichnet  $q$  die Ladung des Teilchens,  $\mathbf{v}$  den Geschwindigkeitsvektor des Teilchens,  $\mathbf{B}$  die magnetische Flussdichte und  $\mathbf{E}$  das elektrische Feld, in dem sich das geladene Teilchen bewegt. Ein geladenes Teilchen erfährt demnach eine Kraft, die in eine elektrische  $q\mathbf{E}$  und eine magnetische Komponente  $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  zerlegt werden kann. Für makroskopische Anwendungen ist laut [1] die Energiedichte des magnetischen Feldes  $\mathbf{B}$  um ca. 100 größer als die Energiedichte des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$ , woraufhin für die folgenden Betrachtungen die elektrische Komponente vernachlässigt wird. Nimmt man an, dass während eines Zeitabschnittes  $t$  die Ladung  $q = it$  in einem Linienleiter über die Strecke  $l$  transportiert wird, so gilt mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \frac{l}{t}\mathbf{e}_l$

$$\mathbf{F}_{Lorentz} = i l \mathbf{e}_l \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

Für die magnetische Kraftwirkung nach dem Lorentzprinzip ist somit eine Wechselwirkung aus elektrischem Strom  $i$  und Magnetfeld  $\mathbf{B}$  notwendig. Für das ideal angenommene Modell (Gl. 2.2), weisen Aktuatoren nach dem Lorentzprinzip den Vorteil keiner Steifigkeit auf (vgl. [2]).

Die Mehrzahl an industriell eingesetzten Magnetlagern ist nach dem Prinzip der Reluktanzkraft realisiert (vgl. [1]), wobei man zwischen aktiven und passiven Magnetlagern unterscheiden kann. Der Begriff *aktiv* bezieht sich darauf, dass die Lagerkräfte aktiv geregelt werden. Hierfür werden Elektromagnete, eine geeignete Regelungsstrategie, Sensoren und Aktuatoren benötigt. Im Gegensatz dazu, werden die Lagerkräfte bei passiven Magnetlagern einzig durch Permanentmagnete erzeugt. Für praktische Anwendungen werden nach [1] aktive Magnetlager deutlich bevorzugt, da sie einige herausragende Vorteile gegenüber passiven Magnetlagern aufweisen.

Aktive Magnetlager bieten die Möglichkeit, Lagereigenschaften wie Steifigkeit, Dämpfung oder die aktive Vibrationsunterdrückung im Betrieb anpassen zu können. Demgegenüber sind passive Magnetlager auf einen Arbeitspunkt eingestellt. Da keinerlei Eingriff durch eine Stellgröße möglich ist, unterliegen passive Magnetlager einer kraftabhängigen Positionsabweichung, sowie geringer Dämpfung von Vibrationen. Ein Vorteil wäre hingegen die Unabhängigkeit einer Stromquelle zur Aufrechterhaltung der Schwebeposition. Des Weiteren sei erwähnt, dass es nach dem Earnshaw-Theorem nicht möglich ist, durch ein statisches Magnetfeld alle Freiheitsgrade eines Körpers zu stabilisieren [3].

Aktive Magnetlager benötigen für den Betrieb Positionsinformationen über den Rotor, die durch eine geeignete Regelungsstrategie einen stabilen Betrieb des Lagers ermöglichen. Aufgrund der notwendigen Positionssensoren, Leistungselektronik zur Datenverarbeitung sowie Ansteuerung der Elektromagneten ist die Komplexität aktiver Magnetlager ungleich größer als jene von passiven Magnetlagern.

## 2.2 Kraftwirkung im Magnetlager

Zur Veranschaulichung des Aufbaus von reluktanzkraftbasierten Magnetlagern ist in Abbildung 2.1 eine Prinzipdarstellung eines Magnetlagers in Längsschnitt dargestellt.

Das betrachtete Koordinatensystem liegt im Schwerpunkt des Rotors, von dem aus die Abstände zum Lager A sowie B mit den Konstanten  $a$  und  $b$  bemessen werden. Die Konstanten  $c$  und  $d$  bezeichnen die Abstände vom Schwerpunkt zu den Sensoren A und B. Das axiale Lager in Kombination mit dem axialen Sensor ermöglicht das Schweben des Rotors in  $\mathbf{e}_z$ -Richtung die mit der Längsachse des Rotors zusammenfällt. An der Ober- sowie Unterseite der beiden Lager ist jeweils ein Elektromagnet angeordnet, der eine Kraft auf den Rotor aufbringt. Die Lager der  $\mathbf{e}_y$ -Achse sind aufgrund der gewählten Ansicht nicht dargestellt, wirken jedoch auf analoge Weise in  $\mathbf{e}_y$ -Richtung. Damit der Rotor stabil in Schwebelage verbleibt ist die Positionserfassung des Rotors notwendig. Diese erfolgt mittels der dargestellten Sensoren an jeweils zwei Stellen in  $x$ - und  $y$ -Richtung.

Es zeigt sich somit, dass die Spulen der Elektromagneten eine Reluktanzkraft auf den Rotor ausüben. Die Grundlage dieser Kraftwirkung basiert auf den Maxwell-Gleichungen. Alleine

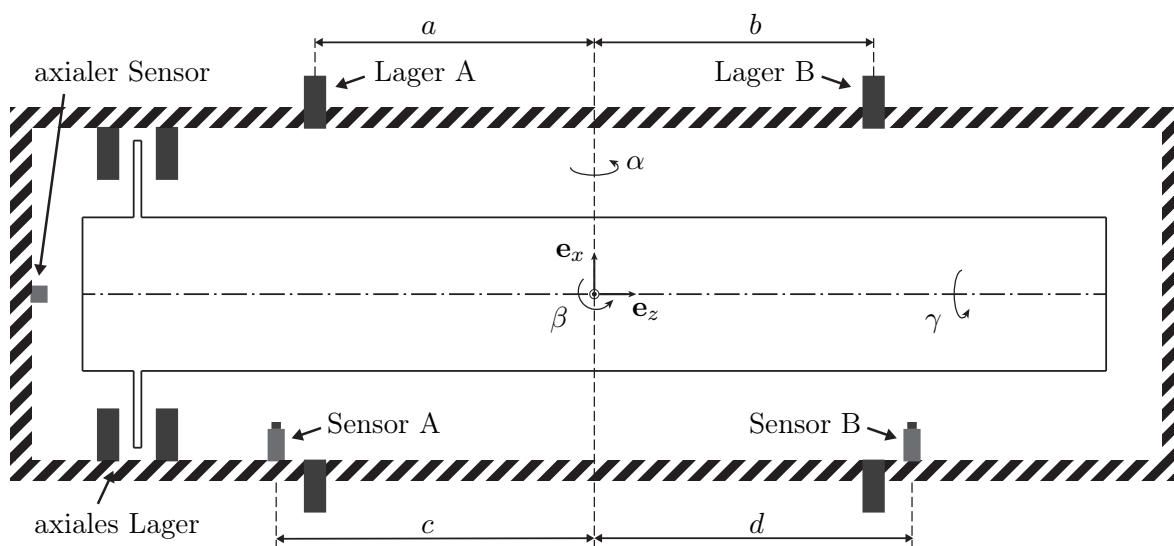


Abbildung 2.1: Prinzipdarstellung eines Magnetlagers in Längsschnitt

durch die elektrischen und magnetischen Feldgrößen an einer Hülle  $\partial V$  kann die resultierende elektromagnetische Kraft berechnet werden. Nach [4] darf die Hüllfläche nur im luftleeren Raum verlaufen und nur den betrachteten Körper umschließen. Eine schematische Darstellung solch einer Hüllfläche ist in Abbildung 2.2 (rechts) dargestellt. Unter Verwendung des Maxwell'schen Spannungsvektors, einer allgemeinen Flussdichte  $\mathbf{B}$  und einem allgemeinen Normalvektor  $\mathbf{n}$  kann die Kraft

$$\mathbf{F}_R = \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} \left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{n} \right) dA \quad (2.3)$$

auf ein bewegliches Teil angegeben werden. In Abbildung 2.2 (links) ist der schematische Aufbau eines Elektromagneten dargestellt. Hierbei ist ein Draht, der den Strom  $I$  führt,  $N$ -mal um das Joch gewickelt und erzeugt somit die Durchflutung  $\Theta = NI$ .

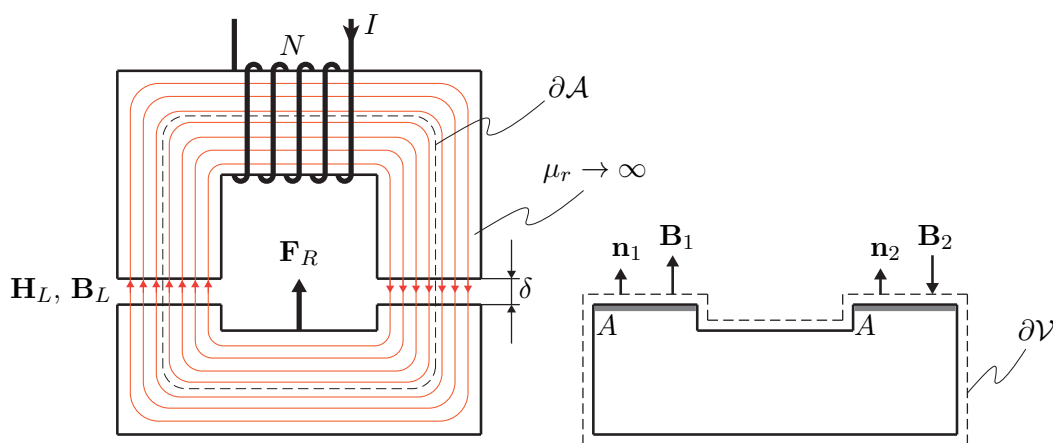


Abbildung 2.2: Magnetkreis (links) mit beweglichem Teil (rechts)

Die Anwendung des Durchflutungssatzes auf die geschlossene Kurve  $\partial A$  liefert

$$NI = \oint_{\partial A} \mathbf{H} \, ds = 2\delta H_\delta + l_{Fe} H_{Fe} . \quad (2.4)$$

Berücksichtigt man in Gleichung 2.4 die Materialgleichung  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ , kann diese durch die magnetische Flussdichte ausgedrückt werden

$$NI = 2\delta \frac{B}{\mu_0} + l_{Fe} \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \quad \text{mit} \quad B = |\mathbf{B}| . \quad (2.5)$$

Vereinfachend wird angenommen, dass das bewegliche Teil, sowie das Joch aus magnetisch ideal leitendem Material ( $\mu_r \rightarrow \infty$ ) besteht und sich somit die Führung des Flusses vollständig im Eisen konzentriert, wodurch sich Gleichung 2.5 zu

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\delta} \quad (2.6)$$

vereinfacht. Einzig an den beiden Luftspalten tritt der Fluss normal in das bewegliche Teil über. Anhand der Abbildung 2.2 (rechts) können die lokalen Flussdichten an den beiden Luftspalten

$$\mathbf{B}_1 = |\mathbf{B}| \mathbf{n}_1 , \quad \mathbf{B}_2 = -|\mathbf{B}| \mathbf{n}_2 = -|\mathbf{B}| \mathbf{n}_1 \quad (2.7)$$

angegeben werden. Unter der Annahme eines räumlich konstanten Magnetfeldes über der Fläche  $A$ , berechnet sich die Kraftwirkung auf das bewegliche Teil als Summe der beiden Teilkräfte, resultierend aus den Flussdichten  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$

$$\mathbf{F}_{ges} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{n}_1 \, dA = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 A \mathbf{n}_1 \quad (2.8)$$

dessen Betrag unter Berücksichtigung von Gleichung 2.6

$$|\mathbf{F}_{ges}| = F_{ges} = \frac{1}{4} \mu_0 A \frac{(NI)^2}{\delta^2} \quad (2.9)$$

lautet. Wird wie in Abbildung 2.3 eine abgeschrägte Eisenfläche berücksichtigt lautet der Betrag der resultierenden Kraft

$$F_{ges} = \frac{1}{4} \mu_0 A \frac{(NI)^2}{\delta^2} \cos(\alpha) = k \frac{I^2}{\delta^2} \quad (2.10)$$

mit  $k = \frac{1}{4} \mu_0 A N^2 \cos(\alpha)$ , in dem der Winkel  $\alpha$  der Schrägung miteinfließt.

Gleichung 2.9 sowie 2.10 für den Betrag der resultierenden Reluktanzkraft ermöglichen die Wahl eines Arbeitspunktes

$$\delta = \delta_0 \quad \text{und} \quad I = i_0 . \quad (2.11)$$

Hierfür kann beispielsweise der Punkt der vektoriellen Auslöschung der Magnetkraft und der Gewichtskraft herangezogen werden. Alternativ kann für den Rotor die Position, mittig

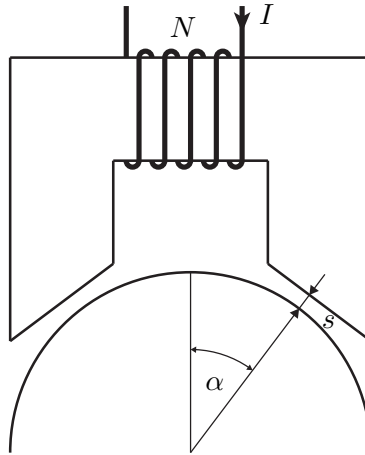


Abbildung 2.3: Joch mit abgeschrägten Flächen und zylindrischem Rotor im Querschnitt

zwischen den beiden Lagern gewählt werden. Durch Linearisierung der Gleichung 2.10 um den Arbeitspunkt  $(i_0, \delta_0)$  kann eine lineare Gleichung für die Kraft gewonnen werden. Hält man jeweils eine Variable konstant, während nach der anderen abgeleitet wird, ergibt sich

$$F_{ges} = k_i i_{\Delta} + k_s x \quad (2.12)$$

wobei  $i_{\Delta} = I - i_0$  und  $x = \delta_0 - \delta$  gewählt wurde. Die beiden Koeffizienten

$$k_i = 2k \frac{i_0}{\delta_0^2} \quad \text{und} \quad k_s = 2k \frac{i_0^2}{\delta_0^3} \quad (2.13)$$

werden als Kraft-Strom-Verhältnis und Kraft-Verschiebungs-Verhältnis bezeichnet. Abbildung 2.4 zeigt die schematischen Verläufe der beiden Koeffizienten. Es ist ersichtlich, dass mit immer kleiner werdendem Luftspalt die Reluktanzkraft ansteigt. Unter Vernachlässigung der Eisensättigung würde die Reluktanzkraft für  $\delta = 0$  unendlich groß werden.

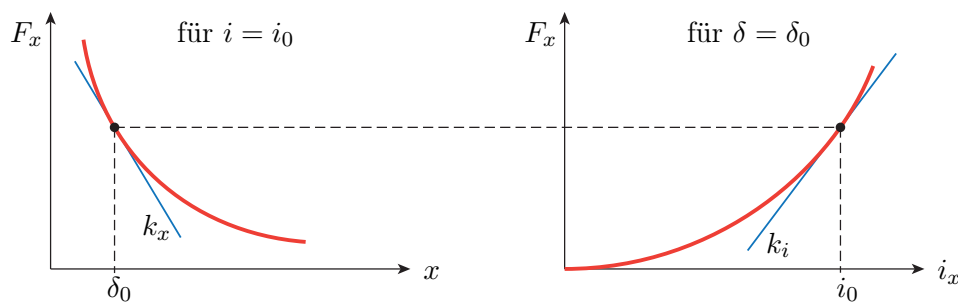


Abbildung 2.4: Kraft-Verschiebungs-Verhältnis (links) und Kraft-Strom-Verhältnis (rechts)

Betrachtet man das Verhalten einer mechanischen Feder  $F_f = -k x_f$  mit der mechanischen Steifigkeit  $k > 0$ , so wirkt die Kraft  $F_f$  der Position  $x_f$  entgegen und ändert dabei sogar ihr Vorzeichen, es liegt ein abstoßendes Verhalten vor. Im Gegensatz dazu, steigt die Reluktanzkraft  $F_{ges}$  mit kleiner werdendem Luftspalt  $\delta$  weiter an. Die Reluktanzkraftwirkung zeigt ein anziehendes Verhalten. Aufgrund dieser Analogie wird der Koeffizient  $k_s$  als negative Steifigkeit des Magnetlagers bezeichnet. Hieraus ist auch die instabile Natur von aktiven

Magnetlagern zu erkennen.

### 2.3 Prinzip des „Differential Driving Modes“

Um auf ein bewegliches Teil positive sowie negative Kräfte aufzubringen, werden zwei Elektromagnete pro Freiheitsgrad benötigt, deren Kraftwirkung in entgegengesetzte Richtungen erfolgt. Hierfür werden zwei Elektromagnete mit den Strömen  $I_1$  und  $I_2$  aus separaten Verstärkern gespeist. Ein wichtiger Aspekt für die Magnetlagerauslegung sowie die darauf aufbauende Regelung ist eine möglichst lineare Charakteristik der Kraftwirkung des Magnetlagers zu erreichen. Der sogenannte „Differential Driving Mode“ ist hierfür eine weit verbreitete Topologie für die Aktuatorspulen [1].

Für die Ansteuerung der beiden Aktuatoren wird eine Aufteilung in Biasstrom  $i_0$  und Steuerstrom  $i_x$  vorgenommen. Ein Aktuator wird mit  $(i_0 + i_x)$  gespeist und der komplementäre mit  $(i_0 - i_x)$ . Die Verschiebungen lauten  $(\delta_0 - x)$  sowie  $(\delta_0 + x)$ . Abbildung 2.5 illustriert einen Aktuator im „Differential Driving Mode“, der die Auslenkung eines Rotors in die  $x$ - sowie  $y$ -Achse zulässt.

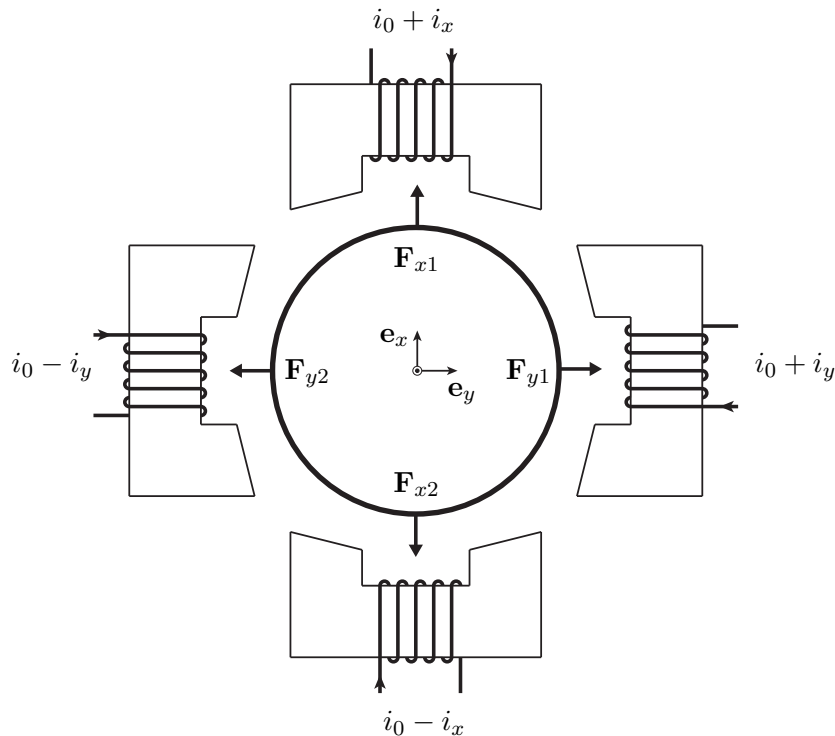


Abbildung 2.5: Querschnittsdarstellung des Magnetlagers in „Differential Driving Mode“

Für die Summenkraft in der  $x$ -Achse gilt

$$F_x \mathbf{e}_x = F_{x1} \mathbf{e}_x - F_{x2} \mathbf{e}_x = k \left( \frac{(i_0 + i_x)^2}{(\delta_0 - x)^2} - \frac{(i_0 - i_x)^2}{(\delta_0 + x)^2} \right) \mathbf{e}_x \quad (2.14)$$

wobei durch Umformung dieses Ausdrucks für  $x = 0$

$$F_x = k \frac{(i_o + i_x)^2 - (i_o - i_x)^2}{\delta_0^2} = k \frac{i_0^2 + 2i_0i_x + i_x^2 - i_0^2 + 2i_0i_x - i_x^2}{\delta_0^2} = \frac{4ki_0}{\delta_0^2} i_x \quad (2.15)$$

folgt. Hieraus ist ein bedeutender Vorteil des „Differential Driving Modes“ zu erkennen. Durch die Aufspaltung der Aktuatorströme in Bias- sowie Steuerstrom ist es möglich, im Mittelpunkt ( $x = 0$ ) eine lineare Kraft-Strom-Charakteristik zu erreichen.

Um erneut einen linearen Kraftausdruck für den Arbeitspunkt  $(i_0, \delta_0)$  zu erhalten wird die Kraftgleichung unter der Annahme  $x \ll \delta_0$  linearisiert, wobei

$$F_x \mathbf{e}_x = (k_{i,x} i_x + k_{s,x} x) \mathbf{e}_x \quad (2.16)$$

gilt und zum Kraft-Strom-Verhältnis sowie Kraft-Verschiebungs-Verhältnis

$$k_{i,x} = \frac{4ki_0}{\delta_0^2} \cos(\alpha), \quad k_{s,x} = \frac{4ki_0^2}{\delta_0^3} \cos(\alpha), \quad (2.17)$$

führt, für deren Berechnung abgeschrägte Eisenflächen unter dem Winkel  $\alpha$  berücksichtigt wurden. Die analoge Vorgehensweise führt zu einem linearen Kraftausdruck

$$F_y \mathbf{e}_y = (k_{i,y} i_y + k_{s,y} y) \mathbf{e}_y \quad (2.18)$$

in der  $y$ -Achse mit dem Kraft-Strom und Kraft-Verschiebungs-Verhältnis

$$k_{i,y} = \frac{4ki_0}{s_0^2} \cos(\alpha), \quad k_{s,y} = \frac{4ki_0^2}{s_0^3} \cos(\alpha). \quad (2.19)$$

Unter der Annahme eines symmetrischen Querschnitts gilt

$$k_{i,y} = k_{i,x} \quad \text{und} \quad k_{s,y} = k_{s,x}. \quad (2.20)$$

Für die in Abbildung 2.1 dargestellte Magnetlageranordnung wird für das Lager A sowie B ein „Differential Driving Mode“ Aktuator für die  $x$ - als auch  $y$ -Achse verwendet. Im Allgemeinen sind die beiden Lager mit unterschiedlichen Elektromagneten ausgeführt. Daher wird im Lager A das Kraft-Strom-Verhältnis mit  $k_{i,A}$  und das Kraft-Verschiebungs-Verhältnis mit  $k_{x,A}$  bezeichnet. Für das Lager B werden die Bezeichnungen  $k_{i,B}$  und  $k_{x,B}$  gewählt.

## 3 Modellbildung

Das Ziel dieser Arbeit ist der Entwurf eines robusten Positionsreglers für einen magnetgelagerten Rotor. Da für die Positionsregelung des Rotors dessen Dynamik eine entscheidende Rolle spielt, werden in diesem Kapitel die Bewegungsgleichungen eines starren Rotors hergeleitet. Zur Vereinfachung der Herleitung wird der Rotor als rotationssymmetrisch und starr betrachtet. Als ausgedehnter Starrkörper weist der Rotor sechs Freiheitsgrade auf, die in drei translatorische und drei rotatorische Freiheitsgrade aufgeteilt werden können.

An geeigneten Stellen der Herleitung der Bewegungsgleichungen werden vereinfachende Annahmen getroffen, damit bei hinreichender Exaktheit die Übersichtlichkeit der Systemgleichungen bewahrt wird, um einen Einblick in die Systemdynamik zu ermöglichen.

### 3.1 Dynamik eines starren Rotors

#### 3.1.1 Euler-Lagrange Gleichungen

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen werden die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = \tau_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

verwendet, wobei  $n$  die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems darstellt, mit  $\tau_j$  werden die verallgemeinerten Kräfte bezeichnet und  $L$  beschreibt die Lagrange-Funktion. Der Euler-Lagrange-Formalismus basiert auf der Berechnung der Energien des Systems, wobei sich die Lagrange-Funktion

$$L = T - V \quad (3.2)$$

als Differenz der kinetischen Energie  $T$  und der potentiellen Energie  $V$  darstellt. Der starre Rotor lässt sich durch die drei Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sowie die Verschiebungen des Schwerpunktes aus der Ruhelage  $x$ ,  $y$  und  $z$  charakterisieren, die zu den generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{q}^T = [ \beta \ x \ \alpha \ y \ \gamma \ z ] \quad (3.3)$$

zusammengefasst werden. Die potentielle Energie des Systems wird durch die Gewichtskraft

bestimmt. Diese wirkt auf den Rotor in Richtung der  $y$ -Achse

$$V = mgy \quad (3.4)$$

wobei  $m$  die Masse des Rotors angibt. Mit  $y$  wird die Auslenkung aus der Ruhelage bezeichnet, somit wird der Nullpunkt der potentiellen Energie zu  $y = 0$  gewählt. Die kinetische Energie setzt sich aus einem translatorischen und rotatorischen Anteil  $T = E_t + E_r$  zusammen. Nach dem Schwerpunktsatz [5] verhält sich ein Starrkörper der aus beliebig vielen Punktmassen besteht gleich, als wenn die Masse aller einzelner Punktmassen im Schwerpunkt des ausgedehnten Körpers konzentriert aufgefasst werden würde und sämtliche Kräfte auf diesen wirken. Somit kann der translatorische Anteil der kinetischen Energie durch die Verschiebung des Massenschwerpunkts des Rotors

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T m \mathbf{v} \quad (3.5)$$

beschrieben werden. Mit  $\mathbf{v}$  wird die zeitliche Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{r}_{0S,I}$  vom Nullpunkt des Inertialsystems ( $I$ ) zum Schwerpunkt  $S$  des Rotors bezeichnet

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{0S,I} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Für die Berechnung des rotatorischen Anteils ist es hilfreich ein körperfestes Koordinatensystem ( $K$ ) in den Schwerpunkt ( $S$ ) des Rotors zu legen, dessen  $\mathbf{e}_z$ -Richtung mit der geometrischen Achse des Rotors zusammenfällt. Die Rotationsenergie kann durch die Drehung des körperfesten Koordinatensystems

$$E_r = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{K,K})^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{K,K} \quad (3.7)$$

berechnet werden, wobei  $\mathbf{I}$  die Trägheitsmatrix des Rotors darstellt und  $\boldsymbol{\omega}_{K,K}$  den Vektor der Winkelgeschwindigkeiten des körperfesten Koordinatensystems ( $K$ ) beschreibt. Hierfür wird das körperfeste Koordinatensystem ( $K$ ) gewählt, da sich die Trägheitshauptachsen im Schwerpunkt schneiden und die Trägheitsmatrix somit eine Diagonalstruktur aufweist.

### 3.1.2 Winkelgeschwindigkeiten

Zur Berechnung des Vektors der Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_{K,K}$  wird die Transformationsvorschrift des Rotors vom körperfesten Koordinatensystem ( $K$ ) ins Inertialsystem ( $I$ ) benötigt. Diese Transformationsvorschrift erlaubt die Berechnung der Winkelgeschwindigkeiten im Inertialsystem ( $I$ ) welche anschließend in das körperfeste Koordinatensystem ( $K$ ) transformiert werden, da sich hier die Trägheitsmatrix  $\mathbf{I}$  des Rotors in Diagonalstruktur darstellt. Der Rotor wird mittels drei aufeinander folgender Drehungen um jeweils eine Achse vom körperfesten Koordinatensystem ( $K$ ) ins Inertialsystem ( $I$ ) gedreht. Für die Parametrierung der Drehung

werden die Kardanwinkel verwendet, wobei der Reihe nach um die momentanen Achsen gedreht wird, siehe Abbildung 3.1. Die Transformation erfolgt durch die folgenden Schritte:

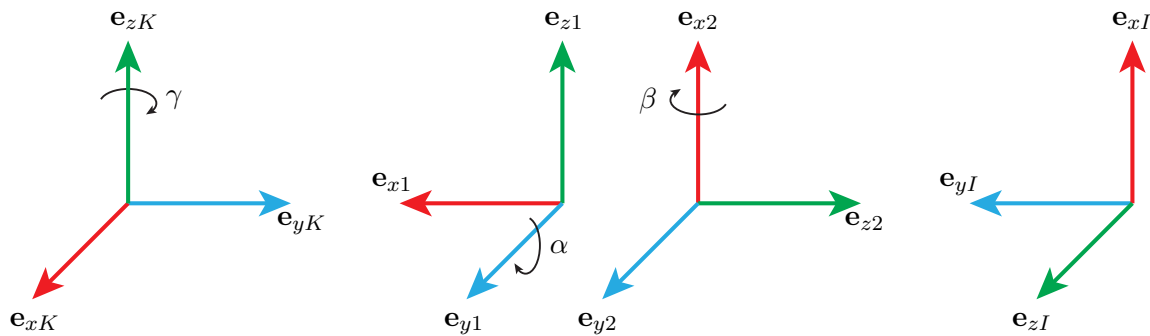


Abbildung 3.1: Drehungen in Kardanwinkel

1. Zuerst erfolgt eine Drehung um den Winkel  $\gamma$  um die  $\mathbf{e}_{z,K}$ -Achse des körperfesten Koordinatensystems ( $K$ ) in das Koordinatensystem (1).
2. Im nächsten Schritt erfolgt eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  um die momentane  $\mathbf{e}_{y,1}$ -Achse in das Koordinatensystem (2).
3. Abschließend erfolgt eine Drehung um den Winkel  $\beta$  um die momentane  $\mathbf{e}_{x,2}$ -Achse in das Inertialsystem ( $I$ ).

Die Drehungen werden mathematisch durch die elementaren Drehmatrizen

$$\mathbf{R}_1^K = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.8b)$$

$$\mathbf{R}_I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.8c)$$

beschrieben, wobei der hochgestellte Index das momentane und der tiefgestellte Index das Ziel-Koordinatensystem bezeichnet. Zur vollständigen Charakterisierung der Bewegung des Rotors wird neben der rotatorischen Bewegung noch der translatorische Anteil benötigt. Hierfür betrachtet man zwei zueinander nicht gedrehte Koordinatensysteme, deren Nullpunkte durch den Vektor  $\mathbf{r}_{0S,I}$  (vgl. Gl. 3.6) verbunden sind. Die Transformationsvorschrift für einen beliebigen Ortsvektor  $\mathbf{r}_{SP,K}$  im körperfesten Koordinatensystem ( $K$ ) ins Inertialsystem ( $I$ ) lautet

$$\mathbf{r}_{0P,I} = \mathbf{r}_{0S,I} + \mathbf{R}_I^2 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^K \mathbf{r}_{SP,K} = \mathbf{r}_{0S,I} + \mathbf{R}_I^K \mathbf{r}_{SP,K} \quad (3.9)$$

wobei die hintereinander ausgeführten Drehungen zu einer Drehmatrix

$$\mathbf{R}_I^K = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

zusammengefasst werden können. Zur übersichtlicheren Darstellung der Drehmatrix aus Gleichung 3.10 wurden die sin und cos-Operatoren mit s bzw. c abgekürzt und der jeweilige Winkel als tiefgestellter Index verwendet. Betrachtet man die zeitliche Ableitung des Punktes  $\mathbf{r}_{0P,I}$ , was einer allgemeinen Relativbewegung des Punktes  $P$  bezüglich des Inertialsystems ( $I$ ) gleich kommt, ergibt sich

$$\dot{\mathbf{r}}_{0P,I} = \dot{\mathbf{r}}_{0S,I} + \dot{\mathbf{R}}_I^K \mathbf{r}_{SP,K} + \mathbf{R}_I^K \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_{SP,K}}_{=0} . \quad (3.11)$$

Durch die Annahme eines starren Rotors und die damit verbundene, nicht zulässige Verschiebung eines Massenpunktes ( $P$ ) innerhalb der Starrkörpers, gilt in der vorangegangenen Gleichung 3.11,  $\dot{\mathbf{r}}_{SP,K} = \mathbf{0}$ . Die Elemente der Drehmatrix (Gl. 3.10) sind Funktionen der Drehwinkel die wiederum im Allgemeinen Zeitfunktionen darstellen. Zur Erleichterung der Berechnung der totalen Zeitableitung der Drehmatrix  $\mathbf{R}_I^K$  überzeugt man sich leicht, dass aufgrund der Orthogonalität der Drehmatrix  $\mathbf{R}$  mit  $\mathbf{E}$  als Einheitsmatrix folgende Bedingungen

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

gelten. Des Weiteren zeigt sich, dass

$$\mathbf{S} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

eine schiefsymmetrische Matrix darstellt, welche die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  und  $\omega_z$  um die Koordinatenachsen enthält und

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{E} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{S}\mathbf{R} \quad (3.14)$$

gilt. Hieraus ergibt sich

$$\dot{\mathbf{r}}_{0P,I} = \dot{\mathbf{r}}_{0S,I} + \dot{\mathbf{R}}_I^K \mathbf{r}_{SP,K} = \dot{\mathbf{r}}_{0S,I} + \mathbf{S}_I^K \mathbf{R}_I^K \mathbf{r}_{SP,K} \quad (3.15)$$

mit der schiefsymmetrischen Matrix der Winkelgeschwindigkeiten

$$\mathbf{S}_I^K = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{K,I}^z & \omega_{K,I}^y \\ \omega_{K,I}^z & 0 & -\omega_{K,I}^x \\ -\omega_{K,I}^y & \omega_{K,I}^x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

welche die Winkelgeschwindigkeiten des sich mit dem Rotor drehenden Koordinatensystems ( $K$ ) im Inertialsystem ( $I$ ) enthält. Es gilt

$$\boldsymbol{\omega}_{K,I} = \begin{bmatrix} \omega_{K,I}^x \\ \omega_{K,I}^y \\ \omega_{K,I}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} + \sin(\beta)\dot{\gamma} \\ \cos(\alpha)\dot{\beta} - \sin(\alpha)\cos(\beta)\dot{\gamma} \\ \sin(\alpha)\dot{\beta} + \cos(\alpha)\cos(\beta)\dot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Um die Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_{K,K}$  zu erhalten, werden die Winkelgeschwindigkeiten mit der Inversen der Drehmatrix  $\mathbf{R}_I^K$  ins körperfesten Koordinatensystem ( $K$ ) transformiert:

$$\boldsymbol{\omega}_{K,K} = (\mathbf{R}_I^K)^{-1} \boldsymbol{\omega}_{K,I} = \begin{bmatrix} \omega_{K,K}^x \\ \omega_{K,K}^y \\ \omega_{K,K}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\gamma)\dot{\beta} + \cos(\gamma)\cos(\beta)\dot{\alpha} \\ \cos(\gamma)\dot{\beta} - \sin(\gamma)\cos(\beta)\dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} + \sin(\beta)\dot{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Der in Gleichung 3.9 eingeführte translatorische Anteil  $\mathbf{r}_{0,S,I}$  der Transformationsvorschrift wurde bereits in Abschnitt 3.1.1 für die Berechnung des translatorischen Anteils der kinetischen Energie verwendet (siehe Gl. 3.5 und 3.6), somit ist dieser für die vorangegangene Berechnung der Winkelgeschwindigkeiten nicht weiter von Bedeutung. Würde man die Trennung der kinetischen Energie in einen translatorischen und rotatorischen Anteil fallen lassen, müssten die translatorische Verschiebung und die Drehung der Koordinatensysteme gemeinsam betrachtet werden.

### 3.1.3 Bewegungsgleichungen

Führt man nun die Winkelgeschwindigkeiten aus Gleichung 3.18 mit der allgemeinen Berechnungsvorschrift nach Gleichung 3.7 zusammen, kann der rotatorische Anteil  $E_r$  der kinetischen Energie bestimmt werden. Darauf aufbauend können mittels Gleichung 3.1 die Bewegungsgleichungen des starren Rotors in Form von Differentialgleichungen 2. Ordnung berechnet werden, wofür die folgenden Annahmen getroffen wurden:

- Das Einwirken der Schwerkraft auf den Rotor wird vernachlässigt.
- Die Neigung des Rotors ( $\mathbf{e}_{z,K}$ -Achse) sei vernachlässigbar klein, wodurch die Ausdrücke  $\cos(\cdot)$  zu Eins und  $\sin(\cdot)$  zu Null werden.
- Die Änderung  $\dot{\gamma}$  der Winkelgeschwindigkeit um die  $z$ -Achse wird als konstant angenommen und entspricht der Rotordrehfrequenz  $\Omega$ .
- Die axiale ( $z$  und  $\gamma$ ) und radiale Bewegung des Rotors wird als voneinander entkoppelt betrachtet. Für die folgende Herleitung ergeben sich somit die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [\beta \quad x \quad \alpha \quad y]^T$ .

Für die Berechnung der Bewegungsgleichungen im ortfesten Inertialsystem ( $I$ ) wurde die Trägheitsmatrix  $\mathbf{I}$  als Diagonalmatrix angenommen. Dies führt dazu, dass die geometrische

Achse des Rotors mit einer der Hauptträgheitsachsen zusammenfällt. Es gilt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_z \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_z \Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_x \\ F_x \\ M_y \\ F_y \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}} \quad (3.19)$$

wobei  $\boldsymbol{\tau}$  den Vektor der verallgemeinerten Kräfte beschreibt, der jene Momente und Kräfte beinhaltet, die auf die einzelnen Zustände des Systems wirken. Mit  $\mathbf{M}$  wird die Massenmatrix bezeichnet und  $\mathbf{G}$  stellt die Matrix des gyroskopischen Effekts dar, welcher die beiden rotatorischen Zustände  $\alpha$  und  $\beta$  über die Drehfrequenz des Rotors  $\Omega$  miteinander koppelt. Mit Blick auf die allgemeine Magnetlageranordnung aus Abbildung 2.1 können die Einträge von  $\boldsymbol{\tau}$  aus den Lagerkräften  $F_{x,A}$  und  $F_{x,B}$  sowie  $F_{y,A}$  und  $F_{y,B}$  gewonnen werden

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -aF_{x,A} + bF_{x,B} \\ F_{x,A} + F_{x,B} \\ aF_{y,A} - bF_{y,B} \\ F_{y,A} + F_{y,B} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_K} \underbrace{\begin{bmatrix} F_{x,A} \\ F_{x,B} \\ F_{y,A} \\ F_{y,B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}. \quad (3.20)$$

Aufgrund der Linearität lässt sich eine Aufspaltung in die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_K$  und den Vektor der Lagerkräfte  $\mathbf{F}$  treffen. In Kapitel 2 wurde ein Modell für die Magnetlagerkraft  $\mathbf{F}$  im sogenannten „Differential Driving Mode“ hergeleitet, welches eine lineare Abhängigkeit vom Lagerstrom  $i$  und dem Abstand  $x$  zeigt. Mit Hilfe der Kraft-Strom-Verhältnisse  $k_{i,A}$  und  $k_{i,B}$  sowie den Kraft-Verschiebungs-Verhältnissen  $k_{x,A}$  und  $k_{x,B}$  gilt für den Vektor der Lagerkräfte

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_s \mathbf{x} + \mathbf{K}_i \mathbf{i} = \begin{bmatrix} k_{s,A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{s,A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{s,A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{s,B} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} k_{i,A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{i,A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{i,A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{i,B} \end{bmatrix} \mathbf{i}, \quad (3.21)$$

mit den Lagerströmen  $\mathbf{i} = [i_{x,A} \ i_{x,B} \ i_{y,A} \ i_{y,B}]^T$  und den Auslenkungen des Rotors in den Lagern  $\mathbf{x} = [x_A \ x_B \ y_A \ y_B]^T$ . Damit die Bewegungsgleichungen in einer geschlossenen Form angegeben werden können, müssen die Auslenkungen des Rotors in den Lagern  $\mathbf{x}$  in die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  umgerechnet werden. Nach [1] gilt hierfür  $\mathbf{x} = \mathbf{B}_K^T \mathbf{q}$ , wodurch sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}_K \mathbf{K}_i \mathbf{i} + \underbrace{\mathbf{B}_K \mathbf{K}_s \mathbf{B}_K^T}_{=\mathbf{K}_{ss}} \mathbf{q} \quad (3.22)$$

ergeben. Die nachfolgenden Reglerentwürfe werden abschließend auf zwei Prüfmaschinen implementiert und getestet. Die simulativ verwendeten Parameter, der soeben hergeleiteten Bewegungsgleichungen beider Prüfstände sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Parameter	Bezeichnung	Maschine 1	Maschine 2
$m$	Masse des Rotors	4.4 kg	10.4 kg
$I_x = I_y$	axiales Trägheitsmoment	0.0237 kgm <sup>2</sup>	0.0701 kgm <sup>2</sup>
$I_z$	polares Trägheitsmoment	0.008 75 kgm <sup>2</sup>	0.0480 kgm <sup>2</sup>
$a$	Distanz Schwerpunkt - Lager A	98.9 mm	118.3 mm
$b$	Distanz Schwerpunkt - Lager B	-19.9 mm	-29.3 mm
$c$	Distanz Schwerpunkt - Sensor A	116.6 mm	142.3 mm
$d$	Distanz Schwerpunkt - Sensor B	2.35 mm	-3.3 mm
$k_{s,A}$	Verschiebungs-Kraft-Verhältnis Lager A	29 500 N/m	66 000 N/m
$k_{s,B}$	Verschiebungs-Kraft-Verhältnis Lager B	66 000 N/m	106 000 N/m
$k_{i,A}$	Verschiebungs-Strom-Verhältnis Lager A	24 N/A	51 N/A
$k_{i,B}$	Verschiebungs-Strom-Verhältnis Lager B	53 N/A	93 N/A

Tabelle 3.1: Parameter der verwendeten Magnetlagersysteme

### 3.2 Verhalten eines elastisch gelagerten Rotors

Um das dynamische Verhalten des Rotors besser verstehen zu können, ist es von Vorteil, die Lagerkräfte mittels mechanischer Federn zu modellieren und den Rotor als elastisch gelagert zu betrachten. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.2 schematisch abgebildet.

Die allgemeine Vorschrift des Vektors der verallgemeinerten Kräfte  $\tau$  kann aus Gleichung 3.20

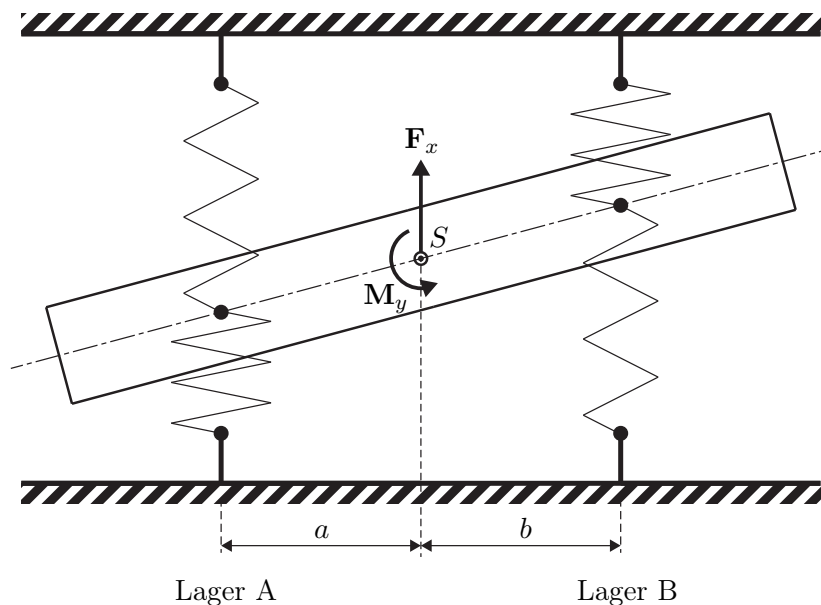


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung eines elastisch gelagerten Rotors

übernommen werden, wobei sich die Lagerkräfte  $\mathbf{F}$  für diese Betrachtung zu

$$\mathbf{F} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ y_A \\ y_B \end{bmatrix} = -\mathbf{K} \mathbf{x} = -\mathbf{K} \mathbf{B}_K^T \mathbf{q} \quad (3.23)$$

ergeben. Die diagonal angeordneten Einträge der Matrix  $\mathbf{K}$  werden positiv angenommen. Mit der Diagonalmatrix  $\mathbf{K}$  der Federsteifigkeiten, lautet der geschlossene Kreis

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_K \mathbf{K} \mathbf{B}_K^T \mathbf{q} = \mathbf{0} . \quad (3.24)$$

Das betrachtete Differentialgleichungssystem (Gl. 3.24) weist die Ordnung 4 auf, dessen Lösung mittels vier Eigenfrequenzen charakterisiert werden kann. Für einen freien Rotor ( $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ) ist aufgrund der speziellen Struktur der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Gyroskopmatrix  $\mathbf{G}$  die rotatorische und translatorische Bewegung des Rotors voneinander entkoppelt, wobei drei der vier Eigenfrequenzen den Wert Null annehmen. Die vierte Eigenfrequenz wird als Nutations-Eigenmode bezeichnet und nimmt nach [1] die Frequenz

$$\omega_N = \Omega \frac{I_{z,0}}{I_{x,0}} \quad (3.25)$$

an. Die Eigenfrequenzen dieser Moden werden auch Starrkörper Eigenfrequenzen genannt. Ist der Rotor mittels mechanischer Federn gelagert, ergibt sich für den Ausdruck  $\mathbf{B}_K \mathbf{K} \mathbf{B}_K^T = \mathbf{K}_f$  eine Matrix in Blockdiagonalform

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

deren Diagonale mit quadratischen  $2 \times 2$  Matrizen besetzt ist. Für die weiteren Betrachtungen wurde keine einheitliche Federsteifigkeit verwendet, sondern die Werte der Kraft-Verschiebungs-Verhältnisse  $k_{s,A}$  sowie  $k_{s,B}$  als Federsteifigkeiten herangezogen. Aus dieser Annahme heraus ergeben sich die Diagonalelemente von  $\mathbf{K}_f$  zu

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} a^2 k_{s,A} + b^2 k_{s,B} & -a k_{s,A} + b k_{s,B} \\ -a k_{s,A} + b k_{s,B} & k_{s,A} + k_{s,B} \end{bmatrix} \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} a^2 k_{s,A} + b^2 k_{s,B} & a k_{s,A} - b k_{s,B} \\ a k_{s,A} - b k_{s,B} & k_{s,A} + k_{s,B} \end{bmatrix} . \quad (3.27b)$$

Für einen ruhenden Rotor ( $\Omega = 0$ ) degeneriert die Matrix  $\mathbf{G}$  des gyroskopischen Effekts zur Nullmatrix und das System zerfällt in zwei Teilsysteme. Das Schwingungsverhalten in der  $xz$ -Ebene sowie der  $yz$ -Ebene ist vollständig entkoppelt und ident. Von der Kopplung der Zustände  $\beta$  und  $x$  sowie  $\alpha$  und  $y$  durch die Matrix der Federsteifigkeiten  $\mathbf{K}_f$  kann man sich

durch die folgenden Gleichungen leicht überzeugen:

$$\begin{aligned}
 I_x \ddot{\beta} + (a^2 k_{s,A} + b^2 k_{s,B}) \beta + (-ak_{s,A} + bk_{s,B}) x &= 0 \\
 m \ddot{x} + (-ak_{s,A} + bk_{s,B}) \beta + (k_{s,A} + k_{s,B}) x &= 0 \\
 I_x \ddot{\alpha} + (a^2 k_{s,A} + b^2 k_{s,B}) \alpha + (ak_{s,A} - bk_{s,B}) y &= 0 \\
 m \ddot{y} + (ak_{s,A} - bk_{s,B}) \alpha + (k_{s,A} + k_{s,B}) y &= 0
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Des Weiteren ist die vollständige Entkopplung der rotatorischen Zustände  $\beta$  und  $\alpha$  zu erkennen.

Nimmt der Rotor eine Drehzahl ungleich Null an, so werden diese beiden Ebenen durch den gyroskopischen Effekt miteinander verkoppelt, wobei die Rotorachse einer Wirbelbewegung unterliegt. Um diesen Sachverhalt besser darstellen zu können ist in der folgenden Abbildung 3.3 der charakteristische Verlauf der Eigenfrequenzen über der Drehzahl  $\Omega$  abgebildet.

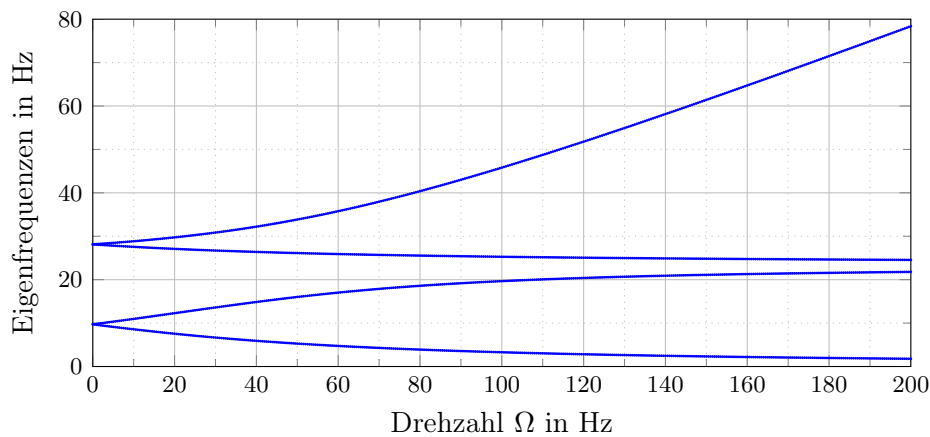


Abbildung 3.3: Schematischer Verlauf der Eigenfrequenzen des elastisch gelagerten Rotors in Abhängigkeit der Drehzahl  $\Omega$

Die auftretenden vier Resonanzfrequenzen können wie folgt unterteilt werden:

- Rotatorische Schwingung deren Frequenz mit der Drehzahl  $\Omega$  ansteigt und in Drehrichtung schwingt wird als Nutation des Rotors bezeichnet.
- Rotatorische Schwingung deren Frequenz mit der Drehzahl  $\Omega$  abflacht und gegen die Drehrichtung schwingt wird als Präzession des Rotors bezeichnet.
- Translatorische Schwingung deren Frequenz nur sehr schwach mit der Drehzahl  $\Omega$  ansteigt und in Drehrichtung eine Pendelbewegung ausführt.
- Translatorische Schwingung deren Frequenz nur sehr schwach mit der Drehzahl  $\Omega$  abflacht und gegen die Drehrichtung eine Pendelbewegung ausführt.

Jene Resonanzfrequenzen, die nur eine sehr geringe Abhängigkeit von der Drehzahl  $\Omega$  aufweisen entstehen dadurch, dass der gyroskopische Effekt nicht alle Freiheitsgrade des Systems gleichermaßen beeinflusst. Auch wenn die Lagerkräfte für diese Betrachtungen passiv mittels

Federn modelliert wurden, sind dieser Erkenntnisse auch für aktiv geregelte Magnetlager gültig.

### 3.3 Unwucht

Der vorangegangene Abschnitt beschäftigte sich mit dem Verhalten der Resonanzfrequenzen eines sich drehenden Rotors. Für das betrachtete System gibt es eine Vielzahl an möglichen Anregungen des Rotors, welche zu sogenannten Resonanzphänomenen führen können. Diese Phänomene treten auf, wenn die Anregungsfrequenzen in speziellen Verhältnissen zu gewissen Eigenfrequenzen stehen. Quelle dieser Anregungen kann der Rotor mit seiner möglichen Unwucht selbst sein, ein industrieller Prozess für den der Rotor benötigt wird oder auch strukturelle Asymmetrien. Da technisch gefertigte Rotoren immer kleine Fertigungsfehler aufweisen, ist im Hinblick auf die Implementierung der Regelung auf einem bestehenden Turbomolekularpumpensystem die Unwucht des Rotors als Schwingungsquelle am dominantesten. Hierbei unterscheidet man statische und dynamische Unwuchten.

Statische Unwuchten können durch einseitiges Hinzufügen von Massenelementen  $m_u$  modelliert werden und führen zu einer Verschiebung des Schwerpunktes, weg von der Drehachse. Bei einer Drehung um eine feste Achse wird somit das System durch eine radial nach außen gerichtete Kraft belastet, welche sich im körperfesten Koordinatensystem ( $K$ ) zu

$$F_x = m_u e_x \Omega^2 \quad (3.29a)$$

$$F_y = m_u e_y \Omega^2 \quad (3.29b)$$

berechnet, wobei  $\Omega$  die Drehzahl des Rotors beschreibt und  $e_x$  und  $e_y$  die Verschiebung des Schwerpunktes angibt.

Dynamische Unwuchten können durch diagonal angeordnetes Hinzufügen von Massenelementen  $m_u$  modelliert werden und führen zu einer Drehung der Rotationsachse um einen konstanten Winkel. Eine dynamische Unwucht belastet das System durch ein Moment, welches sich im körperfesten Koordinatensystem ( $K$ ) mittels der Deviationsmomente zu

$$M_x = -I_{yz} \Omega^2 \quad (3.30a)$$

$$M_y = I_{xz} \Omega^2 \quad (3.30b)$$

berechnet. Nach [1] kann die Unwucht des Rotors als zusätzlicher Störeingang  $\mathbf{U}_s$  des Systems

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}_K \mathbf{K}_s \mathbf{B}_K^T \mathbf{q} = \mathbf{B}_K \mathbf{K}_i \mathbf{i} + \mathbf{U}_s \quad (3.31)$$

mit

$$\mathbf{U} = \Omega^2 \begin{bmatrix} -I_{yz} & I_{zx} \\ -m_u e_y & m_u e_x \\ -I_{zx} & -I_{yz} \\ m_u e_x & m_u e_y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

modelliert werden. Über die Störeingangsmatrix  $\mathbf{U}$  werden die beiden Schwingungen  $\sin(\Omega t)$  und  $\cos(\Omega t)$  gewichtet addiert und erzeugen eine neue Schwingung derselben Frequenz, die anschließend auf das System aufgeschaltet wird. Des Weiteren nimmt die Amplitude der Unwucht mit dem Quadrat der Drehzahl  $\Omega$  zu. Für den Reglerentwurf ist es nun wichtig, eine ausreichende Dämpfung im Bereich der Eigenfrequenzen zu garantieren um die Resonanzschwingungen nicht unkontrolliert ansteigen zu lassen.

Da jeder technisch gefertigte Rotor eine mehr oder weniger aufgeprägte Unwucht aufweist, ist für sehr hoch drehende Rotoren eine Unwuchtkompensation unumgänglich. Hierbei können zwei Ziele verfolgt werden. Einerseits kann die Unwucht aus den Positionssignalen herausgefiltert werden, damit die Stromregler nicht auf die Unwucht reagieren und der Rotor um seine Hauptträgheitsachse rotieren kann. Diese Methode wird als „Current Nulling“ bezeichnet und wird zur Reduzierung der Strombelastung der Aktuatoren eingesetzt. Andererseits kann durch „Vibration Nulling“ die Unwuchtbewegung des Rotors in den Positionssignalen unterdrückt werden, wobei deutlich höhere Ströme notwendig sind.

Da bei guter Auslegung der Unwuchtkompensation der Regler entkoppelt von der Unwucht ausgelegt werden kann und solch eine Unwuchtkompensation am Prüfstand implementiert ist, wird die Unwucht für die weiteren Betrachtungen vernachlässigt.

## 4 Grundlagen der $\mathcal{H}_\infty$ Regelung

Wie bereits im Titel angedeutet, soll in dieser Arbeit eine robuste Regelung für einen magnetgelagerten Rotor entworfen werden. Da eine robuste Regelung zum Teil ein unterschiedliches Ziel verfolgt als andere Entwurfsmethoden, wie zum Beispiel das Frequenzkennlinienverfahren in dem direkt Performanceziele vorgegeben werden, wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels auf den Begriff der Robustheit eingegangen. In der Literatur ist eine Vielzahl an sogenannten robusten Reglerentwurfsmethoden zu finden. Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit wurde hier die  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung ausgewählt. Bevor in den weiteren Kapiteln auf den eigentlichen Reglerentwurf eingegangen werden kann, werden nun die mathematischen Grundlagen für die  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung dargestellt.

### 4.1 Begriff der Robustheit

Die folgende Abbildung 4.1 stellt den Standardregelkreis dar, indem  $\mathbf{r}(t)$  die Führungsgröße,  $\mathbf{e}(t)$  den Regelfehler,  $\mathbf{u}(t)$  die Stellgröße,  $\mathbf{d}(t)$  die Ausgangsstörung,  $\mathbf{n}(t)$  das Messrauschen und  $\mathbf{y}(t)$  die Ausgangsgröße der Strecke bezeichnet.

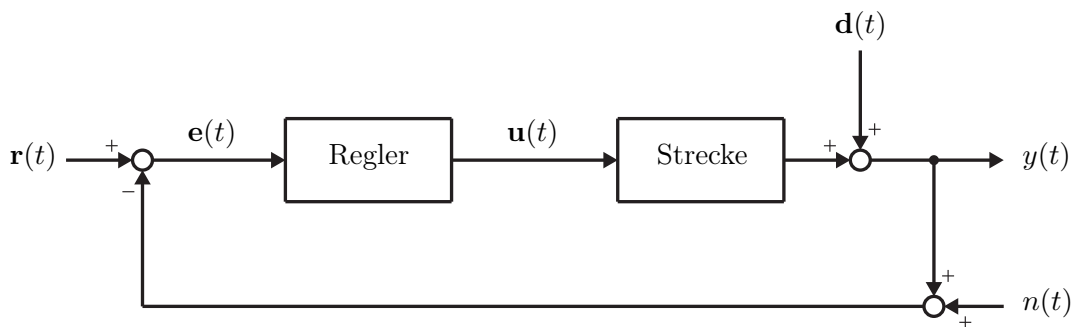


Abbildung 4.1: Blockschaltbild des Standardregelkreises

Wählt man eine allgemeine Übertragungsmatrix  $\mathbf{C}(s)$  für den Regler und  $\mathbf{G}(s)$  für die Strecke, so erhält man für den Ausgang  $\mathbf{y}(s)$  in *Laplace* Notation folgendes Ergebnis:

$$\mathbf{y}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{GC})^{-1}(\mathbf{GC})\mathbf{r}(s) + (\mathbf{I} + \mathbf{GC})^{-1}\mathbf{d}(s) - (\mathbf{I} + \mathbf{GC})^{-1}(\mathbf{GC})\mathbf{n}(s). \quad (4.1)$$

Gleichung 4.1 enthält zwei wichtige Übertragungsmatrizen, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix dar-

stellt. Die *Führungsübertragungsmatrix*

$$\mathbf{T}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{GC})^{-1}(\mathbf{GC}) \quad (4.2)$$

beschreibt das Verhalten der Führungsgröße  $\mathbf{r}(t)$  sowie des Messrauschen  $\mathbf{n}(t)$  auf den Ausgang  $\mathbf{y}(t)$ . Es ist somit zu erkennen, dass ein gutes Führungsverhalten in der Regel mit einer guten Rauschunterdrückung konkurriert, bzw. sich beide Eigenschaften nur in unterschiedlichen Frequenzbereichen realisieren lassen. Die *Ausgangssensitivität*

$$\mathbf{S}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{GC})^{-1} \quad (4.3)$$

gibt an, wie sich die Störgröße  $\mathbf{d}(t)$  auf den Ausgang  $\mathbf{y}(t)$  auswirkt und somit inwiefern das geregelte System in der Lage ist, Störungen zu unterdrücken. Im Idealfall sollte  $\mathbf{S}$  den Wert Null annehmen, bzw. in einer etwas realistischeren Betrachtung klein sein. Wegen

$$\mathbf{S} + \mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{GC})^{-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{GC})^{-1}\mathbf{GC} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{I} \quad (4.5)$$

wird  $T$  als *komplementäre Sensitivitätsfunktion* bezeichnet.

#### 4.1.1 Eingrößensysteme

Für ein sogenanntes SISO System (Single Input Single Output) der Form  $y = Gu$ , hängt die Verstärkung vom Eingang  $u$  zum Ausgang  $y$

$$\frac{|y(j\omega)|}{|u(j\omega)|} = \frac{|G(j\omega)u(j\omega)|}{|u(j\omega)|} = |G(j\omega)| \quad (4.6)$$

von der Frequenz  $\omega$  ab und ist wie in Gleichung 4.6 zu sehen, unabhängig von der Amplitude des Eingangs  $|u(j\omega)|$ . Für skalare Übertragungssysteme stimmen somit die Amplitudenverstärkung mit dem Betrag des Frequenzganges überein, woraus abgeleitet werden kann, dass es strebsam ist, den Betrag der Sensitivitätsfunktion hinreichend klein zu halten. Führungs- und Störverhalten ist in erster Linie für niedrigere Frequenzen interessant, es gilt somit

$$\omega \ll : \quad |T(j\omega)| \approx 1, \quad |S(j\omega)| \ll 1 \quad \iff \quad |L(j\omega)| \gg 1 \quad (4.7)$$

wobei  $L(j\omega)$  den offenen Kreis  $G(j\omega)C(j\omega)$  repräsentiert. Messrauschen ist in der Regel hochfrequent, somit wird für hohe Frequenzen folgendes Verhalten angestrebt

$$\omega \gg : \quad |T(j\omega)| \ll 1, \quad |S(j\omega)| \approx 1 \quad \iff \quad |L(j\omega)| \ll 1. \quad (4.8)$$

Mittels der Gleichungen 4.7 und 4.8 können die Betragsbedingungen für  $S$  und  $T$  in äquivalente Bedingungen für den offenen Kreis  $L$  umgeschrieben werden. Umgekehrt kann durch geeignete Wahl des offenen Kreises bzw. des Reglers, die Führungs- sowie die Sensitivitätsfunktion

gezielt beeinflusst werden. In Abbildung 4.2 ist das mittels Gleichung 4.7 und 4.8 beschriebene gewünschte Verhalten für ein einfach rückgekoppeltes PT2-Glied dargestellt.

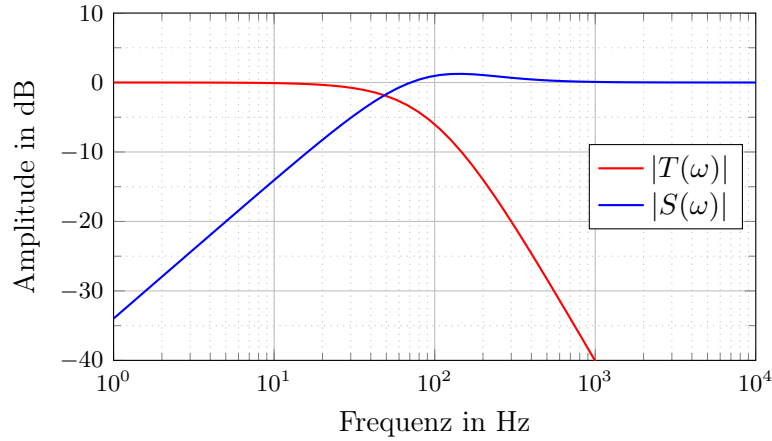


Abbildung 4.2: Gewünschter Amplitudenverlauf von  $|S(\omega)|$  und  $|T(\omega)|$

#### 4.1.2 Mehrgrößensysteme

Im Falle eines MIMO Systems (Multiple Input Multiple Output), handelt es sich sowohl beim Eingang  $\mathbf{u}$  als auch beim Ausgang  $\mathbf{y}$  um Vektoren. Im skalaren Fall gibt der Quotient der Beträge des Eingangs und des Ausgangs die Amplitudenverstärkung an. Für alle nichtverschwindenden Eingänge stimmt dies mit dem Betrag von  $G$  überein. Diese Vorgehensweise kann für den MIMO-Fall analog übernommen werden, sofern die Beträge von  $u$  und  $y$  durch eine Vektornorm ersetzt werden. Im weiteren Verlauf wird hierfür die Euklidische Norm verwendet

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} \quad (4.9)$$

wodurch sich für die Amplitudenverstärkung im MIMO-Fall folgender Ausdruck ergibt:

$$\frac{\|\mathbf{y}(j\omega)\|_2}{\|\mathbf{u}(j\omega)\|_2} = \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}(j\omega)\|_2}{\|\mathbf{u}(j\omega)\|_2} = \frac{\sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}}{\sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2 + \dots}} \quad (4.10)$$

Wie für das SISO System hängt die Verstärkung von der Frequenz  $\omega$  ab. Zusätzlich gibt es eine Abhängigkeit durch die Richtung des Eingangsvektors  $\mathbf{u}$ . Als Richtung wird der normierte Einheitsvektor  $\mathbf{e}_\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$  bezeichnet. Von besonderem Interesse ist die maximale Verstärkung zwischen Eingangs- und Ausgangsvektor, welche nach [6] über alle möglichen Richtungen mit dem maximalen Singulärwert von  $\mathbf{G}(j\omega)$  angegeben werden kann

$$\max_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}(j\omega)\|_2}{\|\mathbf{u}(j\omega)\|_2} = \max_{\|\mathbf{u}\|_2=1} \|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}(j\omega)\|_2 = \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)) \quad (4.11)$$

In Gleichung 4.11 bezeichnet  $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$  den maximalen Singulärwert von  $\mathbf{G}(j\omega)$ . Analog dazu würde  $\underline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$  den minimalen Singulärwert von  $\mathbf{G}(j\omega)$  angeben, der für die aktuelle Betrachtung jedoch nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Zur Bestimmung der Singulärwerte einer allgemeinen komplexen  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{G}$  kann die sogenannte Singulärwertzerlegung durchgeführt werden. Hierfür wird die Matrix  $\mathbf{G}$  in die Form

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (4.12)$$

gebracht, wobei  $\mathbf{U}$  eine unitäre  $m \times m$  Matrix,  $\mathbf{V}$  die Adjunkte einer unitären  $n \times n$  Matrix und  $\mathbf{\Sigma}$  eine reelle  $m \times n$  Diagonalmatrix beschreibt. Die Diagonalelemente  $\sigma_1$  bis  $\sigma_r$  der Matrix  $\mathbf{\Sigma}$  werden als die Singulärwerte der Matrix  $\mathbf{G}$  bezeichnet, wobei der Index  $r$  für den Rang der Matrix  $\mathbf{G}$  steht.

Da der maximale Singulärwert einer Übertragungsmatrix die Amplitudenverstärkungen zwischen Ein- und Ausgang angibt, ist es für einen robusten Regler von außerordentlicher Bedeutung, den maximalen Singulärwert der Sensitivitätsfunktion  $\mathbf{S}$  möglichst niedrig zu halten. Diese Erkenntnisse, vor allem Gleichung 4.11 stellt die Basis für den  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf dar.

## 4.2 Verallgemeinerte Regelkreisstruktur

Für den  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf wird eine allgemeinere Struktur als jene in Abbildung 4.1 dargestellt, verwendet. Die verallgemeinerte Regelkreisstruktur wurde in [7] eingeführt und wird in Abbildung 4.3 veranschaulicht. Hierbei bezeichnen  $\mathbf{w}(t)$  die exogenen Eingangsgrößen,  $\mathbf{u}(t)$  die Stellgrößen des Reglers,  $\mathbf{v}(t)$  die messbaren Ausgänge und  $\mathbf{z}(t)$  die gewichteten exogenen Ausgänge.

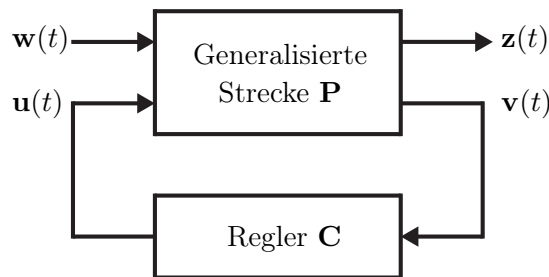


Abbildung 4.3: Blockschaltbild der verallgemeinerten Regelkreisstruktur

Die exogenen Eingänge  $\mathbf{w}(t)$  fassen Referenzsignale  $\mathbf{r}(t)$ , Störgrößen  $\mathbf{d}(t)$  und Messrauschen  $\mathbf{n}(t)$  zusammen. Die exogenen Ausgänge  $\mathbf{z}(t)$  sind sogenannte Fehler-Signale die für jedes System individuell definiert werden und deren Minimierung die eigentliche Reglerobjektive darstellt.

Die verallgemeinerte Regelkreisstruktur, mit der generalisierten Strecke

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

wobei  $\mathbf{P}_{11}$  bis  $\mathbf{P}_{22}$  die Teilübertragungsfunktionen beschreiben, lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}(s) \mathbf{v} . \quad (4.14b)$$

Kombiniert man Gleichung 4.14 mit Gleichung 4.13, so erhält man für

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C}) \mathbf{w} \quad (4.15)$$

die zu minimierende Übertragungsfunktion

$$\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_{21} . \quad (4.16)$$

Um die Regelstruktur von Abbildung 4.1 in die Form von Abbildung 4.3 zu bringen, verbindet man die Eingänge zu

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} , \quad (4.17)$$

als Ausgangsgröße  $v$  wird der messbare Regelfehler  $v = r - y_m = r - y - n$  gewählt und den exogenen Ausgang  $z$  kann man als  $z = y - r$  definieren. Durch die Wahl von  $y - r$  anstelle von  $y_m - r$  wird die tatsächliche Regelabweichung minimiert. Für die somit getroffenen Annahmen gilt

$$z = y - r = Gu + d - r = w_1 - w_2 + Gu \quad (4.18a)$$

$$v = r - y_m = r - Gu - d - n = -w_1 + w_2 - w_3 - Gu \quad (4.18b)$$

womit die generalisierte Strecke in Form von Gleichung 4.13, zu

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & G \\ -I & I & -I & G \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

angeschrieben werden kann. Alternativ lässt sich die generalisierte Strecke  $\mathbf{P}$  in Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

angeben, wobei  $\mathbf{A}$  die Dynamikmatrix des Systems darstellt,  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$  die Eingangsmatrizen,  $\mathbf{C}_1$  und  $\mathbf{C}_2$  die Ausgangsmatrizen und  $\mathbf{D}_{11}$  bis  $\mathbf{D}_{22}$  die Durchgriffsmatrizen der einzelnen Eingänge auf die Ausgänge darstellen.

### 4.3 $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf

Das Ziel des  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurfs ist es, für die verallgemeinerte Regelkreisstruktur in Abbildung 4.3 einen stabilisierenden Regler  $\mathbf{C}(s)$  so zu finden, dass dieser die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm

$$\|\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C})\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C})(j\omega)) \quad (4.21)$$

minimiert. Die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm stellt eine durch die Euklidische Vektornorm (Gl. 4.9) induzierte Matrixnorm dar, welche den maximal auftretenden Singulärwert angibt. Durch die Minimierung der  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm kommt es zu einer Absenkung des maximalen Singulärwertes und somit der maximalen Amplitudenverstärkung. Durch geeignete Wahl der Übertragungsfunktion  $\mathbf{F}_l$  sowie der exogenen Ausgänge  $\mathbf{z}$  kann der Einfluss von Störgrößen sowie Messrauschen auf den Ausgang minimiert werden und erhält einen möglichst robusten Regler.

Laut [6] werden für die Zustandsraumdarstellung nach Gleichung 4.20 folgende Anforderungen getroffen:

(A1)  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  ist stabilisierbar und beobachtbar

(A2)  $\mathbf{D}_{12}$  und  $\mathbf{D}_{21}$  haben vollen Rang

(A3)  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}$  hat vollen Spaltenrang über alle  $\omega$

(A4)  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{31} \end{bmatrix}$  hat vollen Zeilenrang über alle  $\omega$

(A5)  $\mathbf{D}_{11} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$

Hierbei ist Annahme (A1) für die Existenz eines stabilisierenden Reglers  $\mathbf{C}$  notwendig und Annahme (A2) dafür, dass der Regler realisierbar (Englisch. *proper*) ist. Die Annahmen (A3) und (A4) sind dafür zuständig, dass der optimale Regler  $\mathbf{C}$  keine Pole oder Nullstellen auf der imaginären Achse kürzt, um die Stabilität des geschlossenen Kreises zu gewährleisten. Annahme (A5) ist für den  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf nicht unbedingt notwendig, sie erleichtert jedoch signifikant den Lösungsalgorithmus.

Der allgemeine Algorithmus zur Lösung des  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurfs, wie in [7] vorgestellt, basiert nicht darauf den optimalen Regler für das  $\mathcal{H}_\infty$ -Problem zu berechnen, sondern nur einen Suboptimalen. Sei  $\gamma_{min}$  der minimale Wert von  $\|\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C})(j\omega)\|_\infty$  über alle stabilisierenden Regler  $\mathbf{C}(j\omega)$ , so kann für einen vorgegebenen Wert  $\gamma$ , der der Bedingung  $\gamma > \gamma_{min}$  genügt, ein stabilisierender Regler  $\mathbf{C}(j\omega)$  gefunden werden, der

$$\|\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C})(j\omega)\|_\infty < \gamma \quad (4.22)$$

erfüllt. Zur Lösung dieses Problems ist es notwendig, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

(i)  $\mathbf{X}_\infty \geq 0$  ist eine Lösung der algebraischen Riccati Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{X}_\infty = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

so, dass  $\operatorname{Re} \lambda_i[\mathbf{A} + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{X}_\infty] < 0, \quad \forall i$  gilt.

(ii)  $\mathbf{Y}_\infty \geq 0$  ist eine Lösung der algebraischen Riccati Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2) \mathbf{Y}_\infty = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

so, dass  $\operatorname{Re} \lambda_i[\mathbf{A} + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2)] < 0, \quad \forall i$  gilt.

(iii) Der größte Eigenwert des gefundenen  $\mathbf{X}_\infty$  bzw.  $\mathbf{Y}_\infty$  ist kleiner als  $\gamma^2$ .

Der sogenannte zentrale Regler kann daraus in der Form

$$\mathbf{C}(s) = -\mathbf{F}_\infty (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_\infty)^{-1} \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \quad (4.25)$$

angeschrieben werden, wobei die verwendeten Matrizen in Gleichung 4.25 sich wie folgt darstellen:

$$\mathbf{F}_\infty = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{L}_\infty = \mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_2^T \quad (4.26b)$$

$$\mathbf{Z}_\infty = (\mathbf{I} - \gamma^2 \mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty)^{-1} \quad (4.26c)$$

$$\mathbf{A}_\infty = \mathbf{A} + \gamma^2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2 \quad (4.26d)$$

Wird es gefordert, den optimalen Regler  $\mathbf{C}(s)$  zu berechnen, der innerhalb von spezifizierten Toleranzen an den Wert  $\gamma_{min}$  herankommt, kann eine sogenannte  $\gamma$ -Iteration durchgeführt werden. Dabei handelt es sich um ein Bisektionsverfahren, welches das soeben skizzierte Verfahren iterativ wiederholt, um ein möglichst kleines  $\gamma$  zu erhalten.

Für praktische Anwendungen reicht es in der Regel nicht aus, wenn man die exogenen Ausgänge  $z$ , wie in Gleichung 4.18 zu  $z = y - r$  wählt. Um individuell definierte Performance-Ziele erfüllen zu können ist es notwendig, Gewichtungsfunktionen oder im MIMO-Fall Gewichtungsmatrizen einzuführen um Regelfehler, Stellgrößen oder Ausgangsgrößen zu gewichten. Dadurch wird es möglich, unterschiedliche Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises gewichtet zu minimieren. In der Literatur finden sich eine Vielzahl an möglicher Regelstrukturen die Gewichtungsfunktionen beinhalten. Der Begriff Mixed-Sensitivity  $\mathcal{H}_\infty$  Control umfasst eine Reihe von Regelungsstrukturen die es ermöglichen eine beliebige Kombination der Übertragungsmatrizen  $\mathbf{S}(j\omega)$ ,  $\mathbf{T}(j\omega)$  oder  $\mathbf{CS}(j\omega)$  zu gewichten und als Minimierungsfunktion  $\mathbf{F}_l(j\omega)$  zu wählen. Die Übertragungsfunktion  $\mathbf{CS}(j\omega)$  beschreibt unter anderem das Verhalten der Stellgröße  $\mathbf{u}$  in Abhängigkeit der Führungsgröße  $\mathbf{r}$ . Die zu wählende Struktur hängt jedoch vom aktuellen Regelproblem ab, somit wird erst in den beiden weiteren Kapiteln, in denen der Reglerentwurf durchgeführt wird, auf die jeweils verwendete Regelungsstruktur näher ein-

gegangen.

Der allgemeine Lösungsalgorithmus wie in Gleichung 4.22 bis 4.26 vorgestellt muss für praktische Reglerentwürfe nicht explizit angewandt werden. Stützt man den Entwurf auf kommerziell verfügbare Mathematikprogramme, können vorgefertigte Funktionen verwendet werden. In den beiden weiteren Kapiteln wird der Reglerentwurf unter Zuhilfenahme der *Robust Control Toolbox* innerhalb MATLAB/SIMULINK durchgeführt. Diese Toolbox beinhaltet unter anderem zwei Funktionen die für den Reglerentwurf in Kapitel 5 sowie 6 verwendet und anschließende verglichen werden.

## 4.4 Normierung des Modells

In der Literatur wird man darauf aufmerksam gemacht, dass für den  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf die Normierung des Modells von besonderer Bedeutung ist. Amplituden von Störungen, Führungsgrößen und auch Stellgrößen können unterschiedliche Dimensionen und Größenordnungen einnehmen, wodurch die Modellanalyse sowie in weiterer Folge der Reglerentwurf erschwert werden. Für die Bezugswerte können die maximal zulässigen oder zu erwartenden Werte herangezogen werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, für das in Kapitel 3 beschriebene System einen robusten Regler zu entwerfen. Aus diesem Grund müssen die Anforderungen der Norm ISO 14839-3 eingehalten werden. Zur Überprüfung der Robustheit zieht diese Norm die Betragsgänge der Diagonalelemente der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}$  heran. Für ein MIMO System weist der Regler laut ISO genügend Robustheit auf, sofern kein Verlauf der Diagonalelemente den Wert 3 überschreitet.

Im Unterschied zur Anforderung durch die Norm, wird beim  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf die Sensitivität aller Elemente, somit auch der Querelemente, miniert. Handelt es sich bei den einzelnen Ausgängen um Signale unterschiedlicher physikalischer Größen (Position, Winkel, Druck, etc.) ist eine Normierung des Systems notwendig, da es andernfalls durch unterschiedliche Einheiten zu einer Verzerrung kommt.

Wendet man die  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese jedoch auf ein System an, dessen Ausgänge dieselbe Dimension haben und zusätzlich im selben Zahlenbereich rangieren, kann auf die Normierung verzichtet werden. Durch die Wahl der Sensorkoordinaten als Ausgangsgrößen trifft diese Anforderung zu. Soll der Reglerentwurf jedoch für  $\mathbf{y} = \mathbf{q}$  erfolgen, muss eine Normierung durchgeführt werden.

Aufbauend auf den hier dargestellten mathematischen Grundlagen der  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglersynthese werden in den beiden folgenden Kapiteln Regler für das betrachtete System entworfen. Für die Synthese des ersten Reglers wird eine Mixed-Sensitivity Struktur für den Entwurf verwendet. Für den zweiten Ansatz wird a priori Wissen über die mechanischen Eigenschaften des Systems

verwendet um eine Reglerstruktur zu entwickeln, dessen Parameter mit der  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese berechnet werden.

## 5 Regelungsentwurf ohne Strukturvorgabe

Für einfache SISO Systeme oder gering gekoppelte MIMO Systeme kann mittels klassischer Loop-Shaping Methoden, wie zum Beispiel dem Frequenzkennlinienverfahren für PID oder Lead-Lag-Regler, ein stabilisierender Regler gefunden werden. Handelt es sich jedoch um ein stark gekoppeltes MIMO System sind dezentrale Methoden in der Regel nicht mehr ausreichend. Hierfür müssen sogenannte multivariable Reglerentwürfe zum Einsatz kommen.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, solch einen Reglerentwurf für das hergeleitete Modell durchzuführen. Unter den möglichen Entwurfsmethoden wurde die  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung gewählt, die im Grunde darauf basiert, den maximalen Singulärwert einer Übertragungsfunktion zu minimieren, da dieser die Amplitudenverstärkung bestimmt. Durch die geeignete Wahl sogenannter Fehler-Signale und frequenzabhängiger Gewichtungsmatrizen ist es möglich das Verhalten und die Form der Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises zu beeinflussen.

### 5.1 Mixed-Sensitivity $\mathcal{H}_\infty$ Control

In Kapitel 4 wurden die Grundlagen der  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung dargelegt, aus denen ersichtlich ist, dass die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm eine induzierte Matrixnorm darstellt, welche den maximalen Singulärwert angibt. Der maximale Singulärwert einer Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}$  gibt für ein MIMO System die maximale Amplitudenverstärkung vom Eingang zum Ausgang an. Handelt es sich hierbei um die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}$ , welche die Ausgangsstörung  $\mathbf{d}$  mit dem Ausgang  $\mathbf{y}$  verknüpft, kann durch Minimierung der  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm der Einfluss der Störung auf den Ausgang minimiert werden.

Des Weiteren wurde in Kapitel 4 das Problem behandelt, dass es für einen zufriedenstellenden Reglerentwurf in der Regel nicht ausreicht, allein die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm der Sensitivitätsmatrix zu minimieren. Es ist notwendig in die Regelungsstruktur gewisse frequenzabhängige Gewichtungsmatrizen aufzunehmen um zum Beispiel neben der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}$ , ebenfalls die komplementäre Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{T}$  oder die Übertragungsmatrix der Ausgangsstörung auf die Stellgröße  $\mathbf{CS}$  zu gewichten. Mögliche Regelungsschemata werden unter dem Begriff Mixed-Sensitivity  $\mathcal{H}_\infty$  Control zusammengefasst.

In diesem Abschnitt wird nun der Reglerentwurf dargestellt, der auf den folgenden Bedingungen basiert. Um eine hinreichende Performance des geschlossenen Regelkreises zu erhalten,

muss der maximale Singulärwert  $\bar{\sigma}(\mathbf{S})$  minimiert werden. Zur Sicherstellung von ausreichend Robustheit gegenüber Rauschen muss  $\bar{\sigma}(\mathbf{T})$  minimiert werden und zur Vermeidung von zu großen Stellgrößen  $\bar{\sigma}(\mathbf{CS})$ . Diese Anforderungen können zu dem  $\mathcal{H}_\infty$ -Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{C}} \|\mathbf{N}(\mathbf{G}, \mathbf{C})\|_\infty, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s \mathbf{S} \\ \mathbf{W}_u \mathbf{CS} \\ \mathbf{W}_t \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

zusammengefasst werden, wobei  $\mathbf{W}_s$ ,  $\mathbf{W}_u$  und  $\mathbf{W}_t$  die Gewichtungsmatrizen der jeweiligen Übertragungsmatrizen darstellen. Bei dem allgemeinen  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf (Kapitel 4) beschreibt  $\mathbf{N}$  aus Gleichung 5.1 in der verallgemeinerten Regelkreisstruktur die Übertragungsmatrix der exogenen Eingänge  $\mathbf{w}$  auf die Fehler-Signale  $\mathbf{z}$ . Durch die Wahl der exogenen Ausgänge

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{W}_s \mathbf{e} = \mathbf{W}_s \mathbf{w} - \mathbf{W}_s \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (5.2a)$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{W}_u \mathbf{u} \quad (5.2b)$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{W}_t \mathbf{y} = \mathbf{W}_t \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (5.2c)$$

lauten die Einträge der generalisierten Strecke (Vergleich Gl. 4.13)

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} -\mathbf{W}_s \mathbf{G} \\ \mathbf{W}_u \\ \mathbf{W}_t \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{21} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_{22} = -\mathbf{G} \quad (5.3)$$

und führen zu folgender Regelungsstruktur.

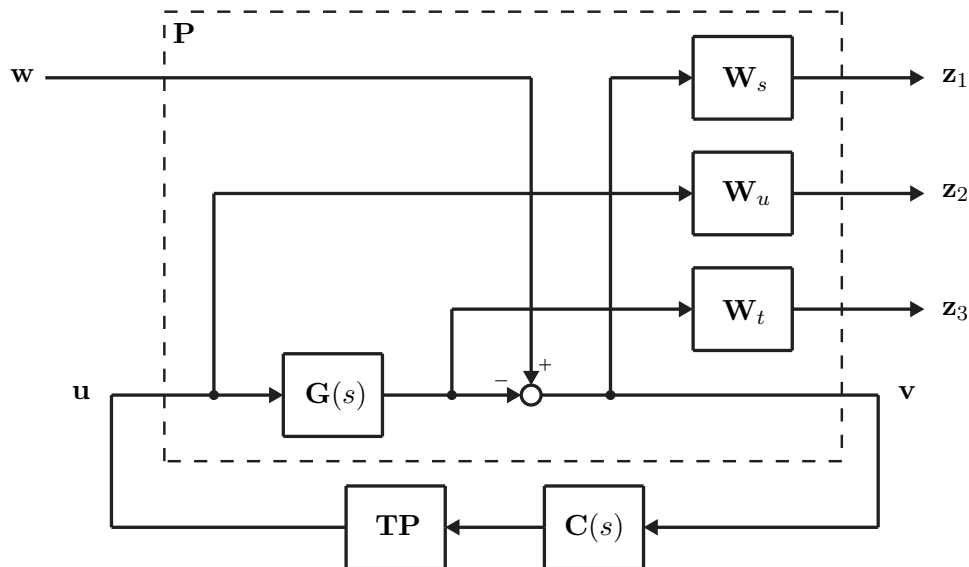


Abbildung 5.1: Blockdiagramm der verwendeten Mixed-Sensitivity Control Struktur

Berechnet man mit diesen Einträgen (Gl. 5.3) die Übertragungsfunktion  $\mathbf{z} = \mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C}) \mathbf{w}$

erhält man

$$\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s\mathbf{S} \\ \mathbf{W}_u\mathbf{C}\mathbf{S} \\ \mathbf{W}_t\mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\mathbf{G}, \mathbf{C}) \quad (5.4)$$

und erfüllt somit die Anforderung aus Gleichung 5.1.

Bei der Herleitung des Modells in Kapitel 3 wurde gezeigt, dass es möglich ist das Starrkörpermodell mittels vier Resonanzfrequenzen zu charakterisieren. Der Rotor stellt jedoch keinen perfekten Starrkörper dar. Nach [1] zeigt sich, dass ein flexibel modellierter Rotor theoretisch unendlich viele Eigenfrequenzen aufweist. Da die Anregung dieser Moden das System destabilisieren könnte, wird nach dem Regler, wie in Abbildung 5.1 dargestellt, ein Tiefpassfilter verwendet. Der Tiefpassfilter erzeugt für hohe Frequenzen eine zusätzliche Phasenverschiebung, die es ermöglicht auf hochfrequente Biegemoden dämpfend zu wirken. An dieser Stelle wurde ein Tiefpassfilter 2. Ordnung mit einer Grenzfrequenz von  $f_c = 550$  Hz und einem Dämpfungskoeffizienten  $D = 0.2$  gewählt.

## 5.2 Gewichtung

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass das Ziel des  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurfs die Minimierung der  $\|\cdot\|_\infty$  bezüglich der Übertragungsmatrix  $\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  darstellt, sodass für ein vorgegebenes  $\gamma$  ein stabilisierender Regler  $\mathbf{C}$  gefunden werden kann, der die Bedingung

$$\|\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C})\|_\infty < \gamma \quad (5.5)$$

erfüllt. Durch die Gewichtung des Regelfehlers  $\mathbf{e}$ , der Stellgröße  $\mathbf{u}$  sowie des Ausgangs  $\mathbf{y}$  ist es möglich, neben der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}$ , die komplementäre Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{T}$  und die Übertragungsmatrix  $\mathbf{C}\mathbf{S}$  in  $\mathbf{F}_l(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  zu berücksichtigen. Betrachtet man ein SISO System, gilt für die gewichtete Sensitivitätsfunktion aus Gleichung 5.4

$$|W_s S| < \gamma. \quad (5.6)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass man über die Vorgabe einer Sollfunktion der Sensitivität  $S$  auf die zugehörige Struktur der Gewichtungsfunktion

$$|W_s| < \frac{\gamma}{|S|} \quad (5.7)$$

schließen kann. Analog gilt diese Betrachtung für die komplementäre Sensitivitätsfunktion  $T$ .

Damit für niedrige Frequenzen ein gutes Führungsverhalten, sowie für hohe Frequenzen eine hinreichende Rauschunterdrückung gewährleistet wird, kann der gewünschte Amplitudenver-

lauf  $|T(\omega)|$  in einfachster Näherung durch ein PT1-Glied mit der Grenzfrequenz  $\omega_c$

$$T_{soll}(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1} \quad (5.8)$$

beschrieben werden. Für die Gewichtungsfunktion  $W_t$  der Führungsübertragungsfunktion  $T$  ergibt sich durch Anwendung der Gleichung 5.7 die allgemeine Struktur

$$W_t(s) = \gamma \frac{s + \omega_c}{\omega_c} \quad (5.9)$$

woraus ersichtlich ist, dass es sich hierbei um keine realisierbare Übertragungsfunktion handelt, da der Zählergrad größer dem Nennergrad ist. Strebt man hingegen die in Abbildung 5.2 dargestellte allgemeine Form der Führungsübertragungsfunktion

$$T_{soll,real}(s) = k_t \frac{\frac{s}{\omega_{t,2}} + 1}{\frac{s}{\omega_{t,1}} + 1} \quad (5.10)$$

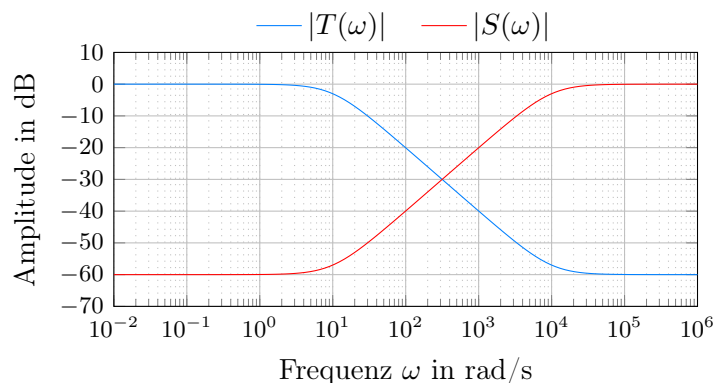


Abbildung 5.2: Bodediagramm der gewünschten Übertragungsfunktionen  $T$  und  $S$

mit  $\omega_{t,1} < \omega_{t,2}$  an, ergibt sich die realisierbare Gewichtungsfunktion

$$W_t(s) = k_{w,t} \frac{\frac{s}{\omega_{t,1}} + 1}{\frac{s}{\omega_{t,2}} + 1}, \quad (5.11)$$

sowie auf analoge Weise die Gewichtung der Sensitivitätsfunktion

$$W_s(s) = k_{w,s} \frac{\frac{s}{\omega_{s,2}} + 1}{\frac{s}{\omega_{s,1}} + 1} \quad (5.12)$$

mit  $\omega_{s,1} < \omega_{s,2}$ . Das vorgegebene Maximum  $\gamma$  für die  $\|\cdot\|_\infty$ , welches in Gleichung 5.9 noch explizit auftritt, wird in den Verstärkungsfaktoren der Gewichtungsfunktionen  $W_t(s)$  und  $W_s(s)$  aus den vorangegangenen Gleichungen berücksichtigt. Die Form der Gewichtungsfunktionen stimmen mit jenen aus [8], [9] näherungsweise überein. Für den folgenden Entwurf wurden die Gewichtungsfunktionen

$$W_s = 10^6 \frac{\frac{s}{10^6} + 1}{\frac{s}{100} + 1} \quad (5.13a)$$

$$W_u = 0.01 \quad (5.13b)$$

$$W_t = 10^{-6} \frac{\frac{s}{100} + 1}{\frac{s}{10^6} + 1} \quad (5.13c)$$

gewählt. Die Bodediagramme der Gewichtungsfunktionen sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Gewichtungsfunktion  $W_u$  dient dazu Stellgrößenbeschränkungen für unterschiedliche Frequenzbereich zu realisieren. Für die vorgenommenen Simulationen lieferte eine Konstante über alle Frequenzen die besten Resultate.

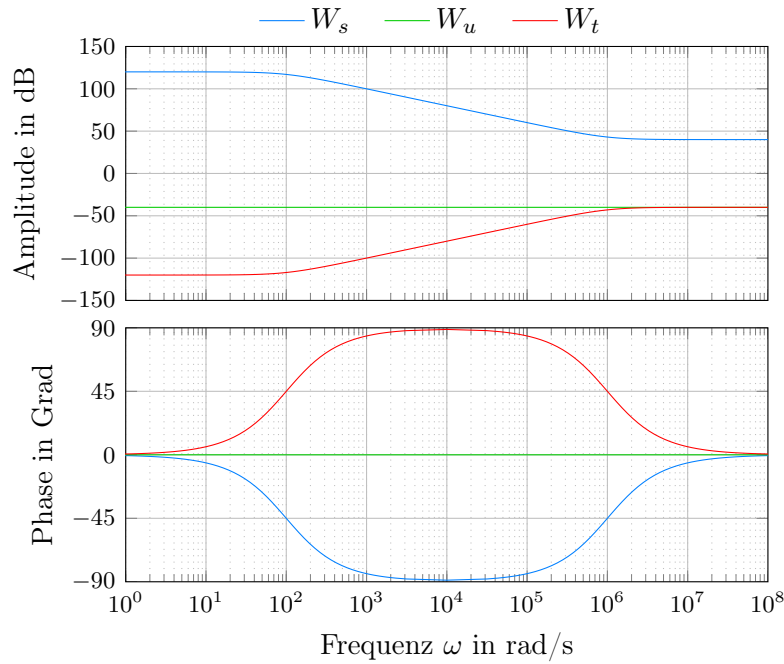


Abbildung 5.3: Bodediagramm der gewählten Gewichtungsfunktionen

Bei dem betrachteten System handelt es sich um ein MIMO System, dessen Gewichtung nach Abbildung 5.1 mit Matrizen erfolgt. Nach [6] ist es ausreichend die Diagonale der Gewichtungsmatrizen mit den Funktionen aus Gleichung 5.13 zu besetzen:

$$\mathbf{W}_s = \begin{bmatrix} W_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_u = \begin{bmatrix} W_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} W_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_t \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

### 5.3 Reglerentwurf mit der Matlab Robust Control Toolbox

Zur Lösung des allgemeinen  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerproblems wurde in Kapitel 4 der Lösungsalgorithmus nach [7] vorgestellt. Für praktische Anwendungen wird man den Reglerentwurf in der Regel auf diverse Mathematikprogramme stützen. Das Programm MATLAB/SIMULINK bietet hierfür die Robust Control Toolbox, die eine Vielzahl vorgefertigter Funktionen bereitstellt. Die Funktion `hinfsyn()` bietet die Möglichkeit für ein lineares zeitinvariantes System einen  $\mathcal{H}_\infty$ -Regler zu berechnen. Der Funktionsaufruf lautet wie folgt:

$$[K, CL, gamma] = hinfsyn(P, nmeas, ncon, gmin, gmax, tol)$$

Die Übergabewerte `nmeas` und `ncon` spezifizieren die Anzahl der Mess- sowie Stellgrößen. Der berechnete Regler `K` stabilisiert somit durch `nmeas` Mess- und `ncon` Stellgrößen die generalisierte Strecke `P`. Mit `gmin` und `gmax` können Grenzen für die zu erreichende  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm vorgegeben werden, dessen finaler Wert über `gamma` zurückgeliefert wird. Zusätzlich erhält man den geschlossenen Kreis via `CL`. Für den Lösungsalgorithmus werden drei Möglichkeiten angeboten. Die erste Methode `'ric'` verwendet den Riccatiformalismus nach [7],[10], wie in Kapitel 4 vorgestellt. Mit `'lmi'` wird die sogenannte *Linear Matrix Inequality* Methode nach [11],[12],[13],[14] angewandt, die am Konzept der konvexen Zustandsraumparametrisierung aufbaut. Wählt man `'maxe'` aus, so wird ein Regler `K` berechnet, der das Entropieintegral

$$\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\det I - \gamma^{-2} T_{y_1 u_1}(j\omega)' T_{y_1 u_1}(j\omega)| \left[ \frac{s_0^2}{s_0^2 + \omega^2} \right] d\omega \quad (5.15)$$

bis zur Frequenz  $s_0$  minimiert. Für alle Methoden gemein wird eine  $\gamma$ -Iteration durchgeführt, die mittels einem Bisektionsverfahren (binäre Suche) den minimalen Wert  $\gamma_{min}$  bestimmt. Die Suche beginnt mit der gewählten oberen Grenze und wird abgebrochen, wenn sich zwei aufeinander folgenden Werte nur mehr um die spezifizierte Toleranz (`'tol'`) unterscheiden.

Zur Bereitstellung der generalisierten Strecke `P` nach Abbildung 4.3 kann das in Gleichung 3.22 dargestellte Modell unter Verwendung von  $\mathbf{x}_q^T = [ \mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T ]$  in die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}_q = \mathbf{A} \mathbf{x}_q + \mathbf{B}_i \mathbf{i}, \quad \mathbf{x}_q(t_0) = \mathbf{x}_{q,0} \quad (5.16a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}_q \quad (5.16b)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_K\mathbf{K}_s\mathbf{B}_K^T & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5.17a)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_K\mathbf{K}_i \end{bmatrix} \quad (5.17b)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17c)$$

gebracht werden. Die  $n$  Differentialgleichungen 2. Ordnung wurden somit in  $2n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung umgewandelt. Die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  führt die Umrechnung der COG-Koordinaten  $\mathbf{q}$  auf Sensorkoordinaten  $\mathbf{y}$  durch.

In einem ersten Schritt wird der Reglerentwurf für den Stillstand des Rotors,  $\Omega = 0$  rad/s, durchgeführt. Da sich das Verhalten der Strecke mit der Drehzahl  $\Omega$  sehr deutlich ändert, wird der geschlossene Kreis im Stillstand sowie bei Rotordrehzahlen ungleich Null überprüft. Es soll herausgefunden werden, ob ein Regler der im Stillstand berechnet wurde, auch für einen sich drehenden Rotor einsetzbar ist und eine hinreichende Robustheit aufweist. Darauf aufbauend wird überprüft, ob der Reglerentwurf auch für diskrete Drehzahlen  $\Omega$  durchgeführt werden kann.

### 5.3.1 Reglerentwurf im Stillstand

Der Reglerentwurf für das ruhende System,  $\Omega = 0$  rad/s, beschrieben durch Gleichung 5.16 mit  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$  und den gewählten Gewichtungsmatrizen (Gl. 5.14) liefert den Regler

$$\dot{\mathbf{x}}_{reg} = \mathbf{A}_{reg} \mathbf{x}_{reg} + \mathbf{B}_{reg} \mathbf{v} \quad (5.18a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_{reg} \mathbf{x}_{reg} + \mathbf{D}_{reg} \mathbf{v} \quad (5.18b)$$

mit der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_{reg} \in \mathbb{R}^{24 \times 24}$ , der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_{reg} \in \mathbb{R}^{24 \times 4}$ , der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}_{reg} \in \mathbb{R}^{4 \times 24}$  und der Durchgriffsmatrix  $\mathbf{D}_{reg} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

Die MATLAB Funktion `hinfsyn()` weist die Eigenschaft auf, dass die berechneten Regler dieselbe Anzahl an Zuständen wie die generalisierte Strecke  $\mathbf{P}$  haben. Zur Berechnung der generalisierten Strecke  $\mathbf{P}$ , werden dem betrachteten System in Gleichung 5.16, welches 8 Zustände aufweist, Gewichtungsmatrizen hinzugefügt, die in Zustandsraumdarstellung weitere 16 Zustände benötigen. Somit handelt es sich bei der Dynamikmatrix des berechneten Reglers um eine  $24 \times 24$ -Matrix. Aus Gründen der Übersichtlichkeit bezüglich der Ausmaße der so-

eben beschriebenen Matrizen (Gl. 5.18), wird hier auf eine detailliertere Darstellung verzichtet.

In Kapitel 4 wurde ausführlich beschrieben, dass der maximale Singulärwert ein Maß für die Robustheit der Regelung ist. Des Weiteren ist in der Norm ISO 14839-3 spezifiziert, dass ein Regler genügend Robustheit aufweist, sofern die maximal auftretende Amplitudenverstärkung der Diagonalelemente der Sensitivitätsmatrix den Wert 3 nicht überschreitet. Zur Überprüfung dieser Anforderung wird der maximale Singulärwert der Sensitivitätsmatrix des geschlossenen Kreises über der Drehzahl  $\Omega$  in Abbildung 5.4 für den Regler aus Gleichung 5.18 dargestellt.

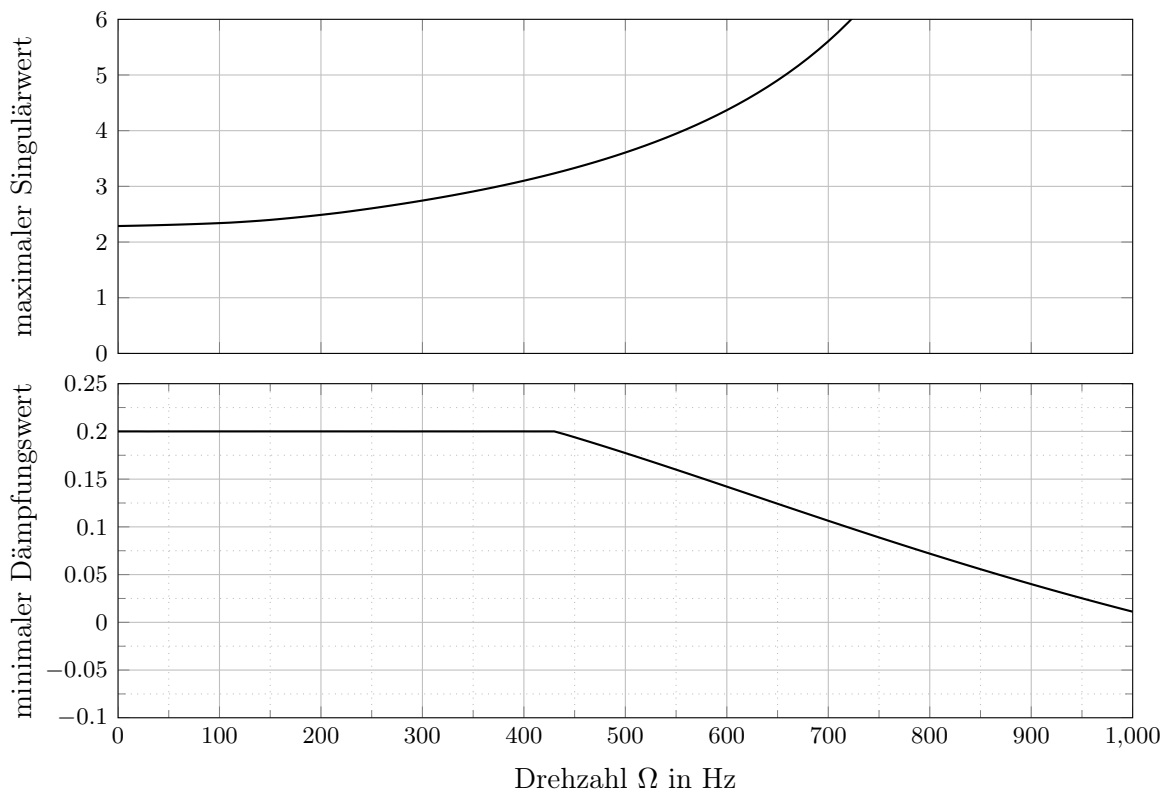


Abbildung 5.4: Verlauf des maximalen Singulärwerts für den Regler nach Gleichung 5.18

Es ist ersichtlich, dass der Regler nur bis ca. 370 Hz ausreichend Robustheit aufweist, jedoch über den vollen Drehzahlbereich als stabil gilt. Für diese Überprüfung ist in Abbildung 5.4 zusätzlich der Verlauf der minimalen Dämpfungswerte des geschlossenen Kreises dargestellt.

Betrachtet man ein quadratisches Polynom in der Form eines Nennerpolynoms eines PT2-Gliedes

$$n(s) = 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega} + \left(\frac{s}{\omega}\right)^2, \quad (5.19)$$

mit der Grenzfrequenz  $\omega$  und dem Dämpfungskoeffizienten  $\zeta$  und bezeichnet man mit  $\lambda = \alpha \pm I\beta$  die zugehörige konjugiert komplexen Nullstelle, ergibt sich über die Beziehung

$$n(s) = (s - \alpha - I\beta)(s - \alpha + I\beta) = \omega^2 + 2\zeta\omega s + s^2 \quad (5.20)$$

folgender Zusammenhang für den Dämpfungskoeffizienten

$$\zeta = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (5.21)$$

Mittels der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises können Aussagen über die Stabilität der Regelung getroffen werden. Eigenwerte die als konjugiert komplexes Paar auftreten, können in der Form  $\lambda = \alpha \pm I\beta$  darstellt werden. Das zugrundeliegende lineare zeitinvariante System ist nach [15] genau dann BIBO-stabil, wenn alle Eigenwerte einen negativen Realteil  $\alpha$  aufweisen. Wendet man nun Gleichung 5.21 auf die Eigenwerte des Systems an, ist ersichtlich, dass ein stabiles System positive Dämpfungskoeffizienten  $\zeta$  besitzt.

In Abbildung 5.4 wird im niedrigeren Drehzahlbereich dieser Wert durch die Regelung, bzw. durch den Dämpfungswert  $D = 0.2$  des verwendeten Tiefpassfilters 2. Ordnung definiert. Im hohen Drehzahlbereich wird dieser Wert zwar sehr klein, bleibt jedoch positiv und der geschlossene Kreis somit stabil.

### 5.3.2 Hankel Modellordnungsreduktion

Aus den vorangegangenen Betrachtungen zeigt sich, dass es sich bei dem entworfenen Regler (Gl. 5.18) zwar um einen stabilisierenden und in gewissen Grenzen robusten Regler handelt, die praktische Anwendbarkeit ist jedoch aufgrund der Dimensionen der Reglermatrizen in Frage zu stellen.

Mittels der Hankel Singulärwerte lässt sich eine Aussage darüber treffen, wie viele Zustände eines Systems für welchen Anteil am Eingangs-Ausgangsverhalten verantwortlich sind. Für ein allgemeines System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (5.22b)$$

lassen sich die Hankel Singulärwerte

$$\sigma_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}(\mathbf{PQ}) \quad (5.23)$$

als Quadratwurzeln der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{PQ}$  berechnen, wobei

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq \sigma_{k+1} \geq \dots \geq \sigma_n \quad (5.24)$$

gilt und  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  die Gramschen Erreichbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen nach [6]

mittels

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (5.25a)$$

$$\mathbf{Q} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (5.25b)$$

berechnet werden. Es kann nun für die Übertragungsfunktion  $\mathbf{G}(s)$ , basierend auf Gleichung 5.22, eine optimale Approximation der Ordnung  $k$ ,  $\mathbf{G}_n^k(s)$  konstruiert werden, dessen Fehler bezüglich der Hankelnorm

$$\left\| \mathbf{G} - \mathbf{G}_n^k \right\|_{\text{H}} = \sigma_{k+1}(\mathbf{G}) \quad (5.26)$$

mit dem  $(k + 1)$ -ten Singulärwert übereinstimmt. Die Herleitung von Gleichung 5.26, sowie die Definition der Hankelnorm können [6] entnommen werden.

Zur Abschätzung der möglichen Approximationsordnung des berechneten Reglers (Gl. 5.18) sind in Abbildung 5.5 die Hankel Singulärwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_{reg}$  dargestellt, woraus zu erkennen ist, dass ab der Systemordnung 20 der Zugewinn am Eingangs-Ausgangsverhalten rapide absinkt. Hieraus kann gefolgert werden, dass im Vergleich zum vollständigen Regler, eine Approximation des Reglers mit der Ordnung 20 zu einer vernachlässigbar kleinen Veränderung des Eingangs-Ausgangsverhalten des Reglers führen wird.

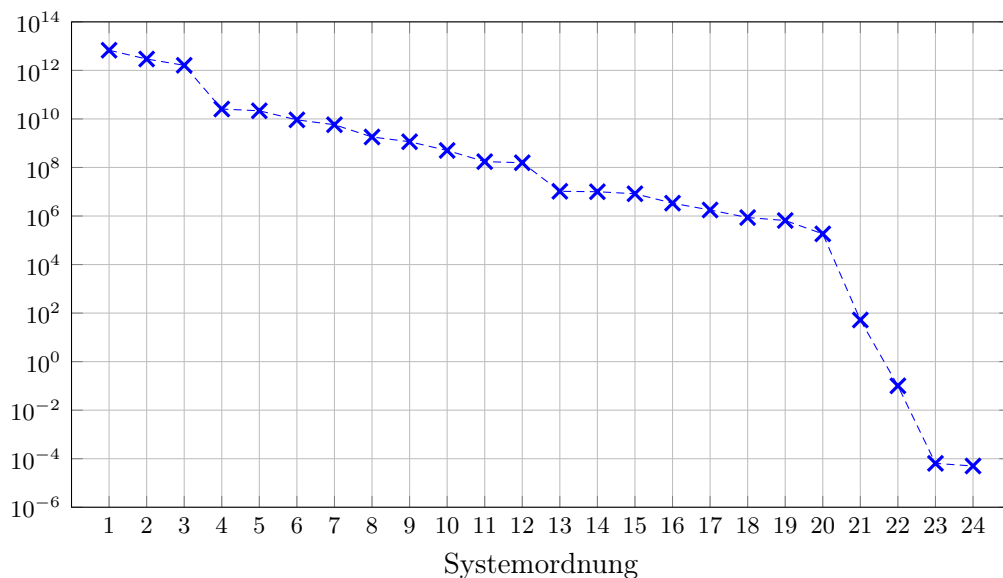


Abbildung 5.5: Hankel Singulärwerte des Reglerentwurfs im Stillstand

Der auf Ordnung 20 reduzierte Regler zeigt keinerlei sichtliche Unterschiede im Verlauf der maximalen Singulärwerte, somit wird an dieser Stelle auf eine zusätzliche Darstellung verzichtet.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Reduzierung der Systemordnung ohne eine große Veränderung der Systemdynamik möglich ist, jedoch nur in sehr geringem Ausmaß, da auch ein Regler der Systemordnung 20 eine hohe Anforderung bezüglich der Rechenleistung stellt. Eine weitere Absenkung der Systemordnung führt zu deutlich abweichendem Verhalten und sollte daher nicht durchgeführt werden.

### 5.3.3 Reglerentwurf für diskrete Drehzahlen

Im vorangegangenen Abschnitt konnte gezeigt werden, dass der für den Stillstand entworfene Regler nur bis zur Drehzahl von etwa 370 Hz genügend Robustheit aufweist. Aus diesem Grund wird nun untersucht, ob es möglich ist, einen Reglerentwurf bei einer Drehzahl ungleich Null durchzuführen um somit den Bereich in dem genügend Robustheit vorliegt, zu vergrößern.

Das System besitzt in Zustandsraumdarstellung (Gl. 5.16) die Systemordnung 8 und somit auch acht Eigenwerte. Im Stillstand weist das System rein reelle Eigenwerte auf, wobei zwei Eigenwertpaare einen positiven Betrag besitzen, worin die Instabilität des unregulierten Magnetlagers begründet ist. Im Stillstand sind die Beträge der Eigenwerte in der linken Halbebene mit den Eigenwerten der rechten Halbebene ident. Ab der Drehzahl  $\Omega > 0$  stellen sich die Eigenwerte als konjugiert komplexe Paare dar, wobei zwei der Paare einen positiven Realteil beibehalten. Unter Verwendung der Simulationsparameter aus Tabelle 3.1 für das Magnetlagersystem 1, bleibt die Symmetrie aller Eigenwertpaare für Drehzahlen unter 70 Hz erhalten. Zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare zeigen dabei eine deutliche Abhängigkeit von der Drehzahl, wodurch die Zuordnung zu den rotatorischen Zuständen erfolgt. Die restlichen beiden Paare zeigen nur eine sehr geringe Drehzahlabhängigkeit und können somit den translatorischen Zuständen zugeordnet werden. Mit zunehmender Drehzahl nähern sich die beiden Eigenwertpaare, welche den rotatorischen Zuständen zugeschrieben werden können, der imaginären Achse. Zwischen 70 Hz und 80 Hz erfolgt der Übergang auf rein imaginäre Werte. Sind die Beträge der beiden konjugiert komplexen Eigenwerte bei ca. 70 Hz noch annähernd ident, unterscheiden sie sich bei 80 Hz bereits deutlich und führen dieses Verhalten mit ansteigender Drehzahl weiter fort.

Bezieht man den Betrag der Eigenwerte auf  $2\pi$ , erhält man die Eigenfrequenzen und kann somit das Verhalten des Rotors in der Frequenzdomäne beschreiben. Die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte der rotatorischen Zustände beschreiben zwei Eigenmoden des starren Rotors. Jene Mode dessen Frequenz mit steigender Drehzahl anwächst wird Nutation genannt, jene die mit steigender Drehzahl absinkt, Präzession. Dieses Verhalten wurde bereits in Abschnitt 3.2 durch Abbildung 3.3 beschrieben.

Zur Illustrierung einer limitierenden Eigenschaft des  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurfs, ist in Abbildung 5.6 der Singulärwertverlauf der Strecke für unterschiedliche Drehzahlen dargestellt. Hier lässt sich das soeben beschriebene Verhalten der Eigenwerte bzw. Eigenmoden des Rotors wieder-

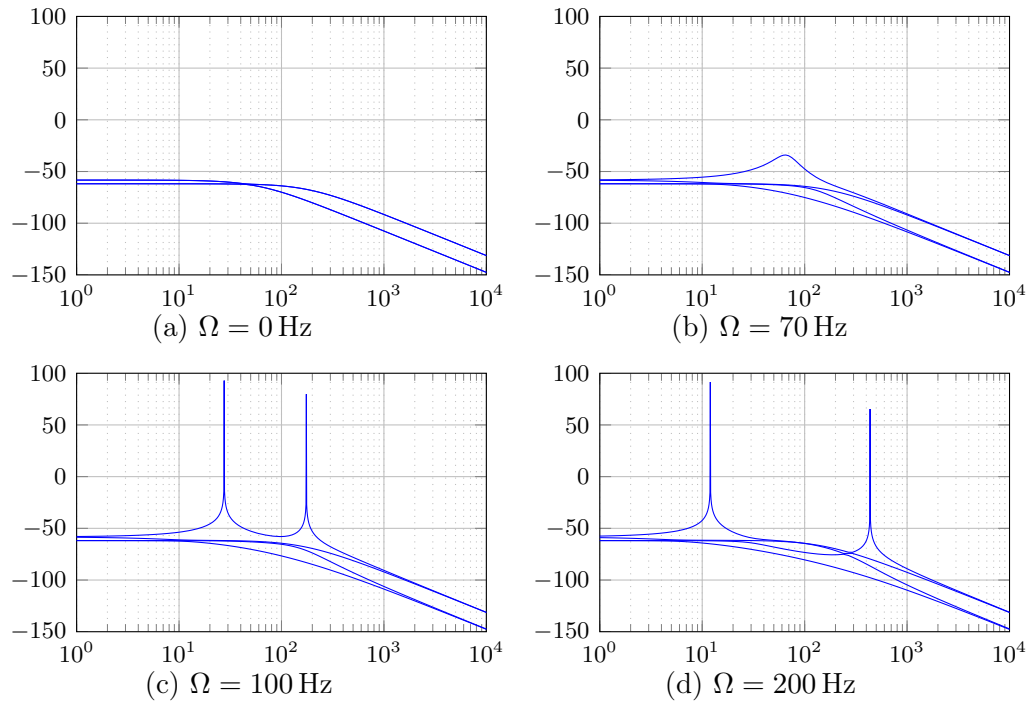


Abbildung 5.6: Singulärwertverlauf der Strecke bei unterschiedlichen Werten der Drehzahl  $\Omega$

finden. Beim Übergang der beiden Eigenwertpaare auf die imaginäre Achse, bilden sich im Singulärwertverlauf (Übergang Abb. 5.6 (b) auf (c)) zwei ungedämpfte Pole aus. Die drehzahlabhängige Aufspaltung dieser beiden Eigenwertpaare kann auch im Singulärwertverlauf, durch das Auseinanderdriften der Resonanzfrequenzen der ungedämpften Pole beobachtet werden. Wird der Reglerentwurf für eine diskrete Drehzahl  $\Omega$  durchgeführt, bei der die ungedämpften Pole wie in Abbildung 5.6 (c) oder (d) bereits ausgebildet sind, werden die Anforderungen (A3) und (A4) (Kapitel 4.3) nicht mehr erfüllt und die Pole auf der imaginären Achse durch den Lösungsalgorithmus gekürzt. Aus Gründen der internen Stabilität (vgl. [15]) ist dies nicht zulässig.

Die Thematik der Pol/Nullstellenkürzung für die  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglersynthese wird ausführlich in [16],[17] beschrieben. Eine einfache Methode die Pol/Nullstellen-Kürzung im SISO Fall zu umgehen besteht darin die Pole auf der imaginären Achse geringfügig in die linke Halbebene zu verschieben. Da drehzahlabhängige Nullstellen auf der imaginären Achse ebenfalls zu Problemen dieser Art führen, werden auch die Nullstellen verschoben. Durch diese Maßnahme wäre es zumindest für den SISO Fall möglich einen Regler für eine Rotordrehzahl ungleich Null zu entwerfen. Im MIMO Fall kommt erschwerend hinzu, dass die Nullstellen des multivariablen Systems in keiner Beziehung zu den Nullstellen der einzelnen Übertragungsfunktionen stehen [6].

Würde sich die Problematik mit der Pol/Nullstellen-Kürzung auch umgehen lassen, steht man immer noch vor dem Problem der hohen Systemordnung. Somit wäre die Implementierung der Regelung auch in diesem Fall äußerst komplex.

## 6 Regelungsentwurf mit Strukturvorgabe

Für praktische Anwendungen sind strukturierte Regler wie PID- oder Lead-Lag-Regler vorteilhaft, da sie einfach zu implementieren und zu interpretieren sind, sowie auf veränderte Streckenbedingungen leicht adaptiert werden können. Im Gegensatz dazu sind Regler modernerer Entwurfsmethoden oft hoher Ordnung, komplex in der Implementierung und oft schwer im laufenden Betrieb anzupassen. Das Ziel dieses Kapitels ist es nun, die Stärken beider Strategien zu vereinen und einen robusten und für praktische Anwendungen geeigneten Regler zu entwerfen.

Wie bereits beim Reglerentwurf in Kapitel 5 wird auch hier die MATLAB Robust Control Toolbox verwendet. Hierbei kommt eine Funktion zum Einsatz, die es ermöglicht, eine Reglerstruktur vorzugeben um anschließend die Parameter dieser Struktur mittels der  $\mathcal{H}_\infty$  Synthese zu ermitteln. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird auf die verwendete Reglerstruktur eingegangen und in den darauf folgenden Abschnitten auf die damit entworfene Regelung.

### 6.1 Struktur der Regelung

Die in diesem Kapitel verwendete Regelungsstruktur lehnt sich an die in [18] vorgestellte Struktur an. Hier werden die gemessenen Positionssignale  $\mathbf{y}$  durch eine Eingangstransformation in die sogenannten *Center Of Gravity*-Koordinaten  $\mathbf{q}$  (kurz COG) umgerechnet. Mittels einer Ausgangstransformation wird eine fiktive Stellgröße, welche einen vereinfachten Eingriff in das System zulässt, in die eigentliche Stellgröße  $\mathbf{i}$  überführt. Durch das Kürzen des Terms  $\mathbf{B}_K \mathbf{K}_s \mathbf{B}_K^T$  in Gleichung 3.22 erfolgt die Kompensation der Magnetlagersteifigkeiten. Zusätzlich wird der gyroskopische Effekt anteilweise kompensiert, wodurch es näherungsweise möglich ist, sowohl die Steifigkeit als auch die Dämpfung des Systems vorzugeben.

Da zur Kompensation der Magnetlagersteifigkeiten, sowie des gyroskopischen Effekts Modellparameter benötigt werden, die im laufenden Betrieb großen Schwankungen aufgrund von Erwärmung unterliegen, wird an dieser Stelle auf die Kompensation verzichtet. Die Umrechnung der Sensorkoordinaten  $\mathbf{y}$  mittels der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{\text{in}} = \mathbf{C}^{-1}$  (siehe Gl. 5.17c) auf COG-Koordinaten  $\mathbf{q}$ , sowie die Transformation der Stellgröße  $\mathbf{i}$  durch die Matrix  $\mathbf{T}_{\text{out}} = (\mathbf{B}_K \mathbf{K}_i)^{-1}$  (siehe Gl. 3.22) wird übernommen.

Der zu entwerfende Regler kann allgemein in *Laplace* Notation als eine  $4 \times 4$  Übertragungsmatrix angesehen werden. Aufgrund der in [18] durchgeführten Kompensationen wurde das System als näherungsweise entkoppelt betrachtet und dezentrale PD-Regler in der Diagonale der Übertragungsmatrix gewählt. Im nun dargestellten Reglerentwurf werden diese Kompensationen nicht durchgeführt. Aus diesem Grund liegt kein entkoppeltes System vor, dennoch werden dezentrale Regler in der Diagonale der Reglermatrix verwendet. Im weiteren Verlauf werden hierfür PID-Regler eingesetzt.

Der gyroskopische Effekt, der durch die Matrix  $\mathbf{G}$  im Modell repräsentiert wird, verkoppelt die beiden rotatorischen Zustände  $\alpha$  und  $\beta$ . Um diese Kopplung zu berücksichtigen, wird die Regler-Übertragungsmatrix um Querkopplungsanteile erweitert. Für die COG-Koordinaten

$$\mathbf{q} = [\beta \quad x \quad \alpha \quad y]^T \quad (6.1)$$

stellt sich die gewählte Reglerstruktur wie folgt dar:

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} \text{PID}_{11}(s) & 0 & G_{13}(s) & 0 \\ 0 & \text{PID}_{22}(s) & 0 & 0 \\ G_{31}(s) & 0 & \text{PID}_{33}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{PID}_{44}(s) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Die vorerst allgemein gehaltenen Querkopplungselemente  $G_{13}(s)$  und  $G_{31}(s)$  werden in den nachgestellten Abschnitten weiter spezifiziert.

Um die Anregung von Eigenmoden des Rotors zu unterbinden, wird wie bereits in Kapitel 5 ein Tiefpassfilter nach dem Regler angebracht. An dieser Stelle wurde ein Tiefpassfilter 2. Ordnung mit einer Grenzfrequenz von  $f_c = 550$  Hz und einem Dämpfungskoeffizienten  $D = 0.2$  gewählt. Da ein Tiefpassfilter zu einer zusätzliche Phasenverschiebung führt, wird dieser in den  $\mathcal{H}_\infty$  Optimierungsprozess mit aufgenommen, wodurch sich die folgende schematische Regelkreisstruktur ergibt:

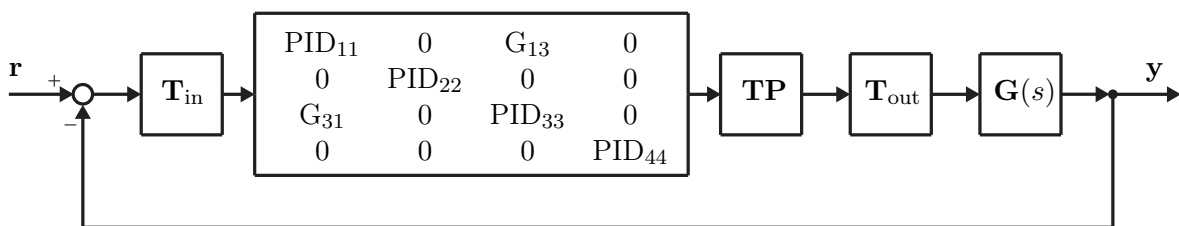


Abbildung 6.1: Blockschaltbild der allgemeinen Regelungsstruktur

Der gyroskopische Effekt und die somit entstehende Verkopplung zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  ist abhängig von der Drehzahl des Rotors und im Stillstand bei  $\Omega = 0$  rad/s nicht wirksam. Daher werden die Diagonalelemente des Reglers  $\mathbf{C}(s)$  aus Gleichung 6.2 für den Stillstand ausgelegt.

## 6.2 Entwurf der Diagonalelemente

Wie in Kapitel 4 erwähnt, ist es für praktische Anwendung unumgänglich Gewichtungsma-trizen einzuführen um mittels der  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese einen geeigneten Regler zu erhalten. Nun gibt es eine Vielzahl möglicher Strukturen um dies zu realisieren. Für den hier vorliegenden Reglerentwurf wurde das sogenannte  $\mathcal{H}_\infty$  Loop-Shaping nach [19] verwendet, dessen Struktur in Abbildung 6.2 dargestellt ist.

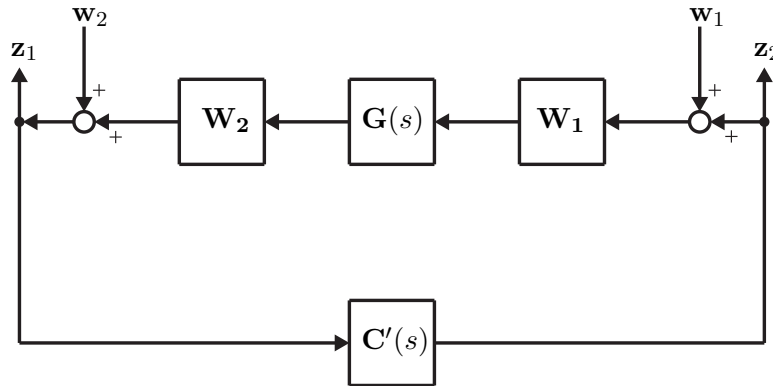


Abbildung 6.2: PID Loop-Shaping  $\mathcal{H}_\infty$  Design Struktur nach [19]

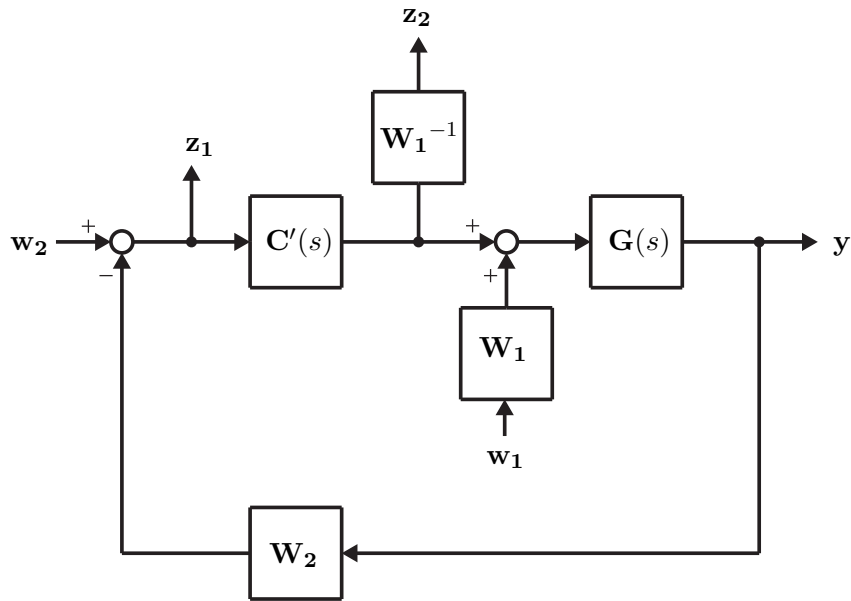
Es ist zu erkennen, dass jeweils vor als auch nach der Strecke  $\mathbf{G}(s)$  eine Gewichtung ange-bracht ist. Das Ziel dieser Struktur ist es, dass die gewichtete Strecke  $\mathbf{W}_2\mathbf{G}\mathbf{W}_1$  eine große Verstärkung bei niedrigen Frequenzen aufweist, um eine hinreichende Performance zu erlan-gen und eine sehr geringe Verstärkung bei hohen Frequenzen, um hochfrequentes Rauschen zu unterdrücken. Die Wahl der Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{W}_1$  und  $\mathbf{W}_2$  stellt somit einen Kom-promiss zwischen Performance und Robustheit dar.

Für die in Abbildung 6.2 gewählte Struktur wird die Reglerstruktur aus Gleichung 6.2 mit den Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}_{in}$  und  $\mathbf{T}_{out}$  sowie dem Tiefpassfilter 2. Ordnung zu  $\mathbf{C}'(s)$  zusammengefasst. Unter der Annahme einer invertierbaren Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W}_1$  kann die Loop-Shaping Struktur aus Abbildung 6.2 um arrangiert werden um sie der Struktur aus Abbildung 6.1 anzunähern. Die Darstellung der verwendeten Loop-Shaping Struktur erfolgt in Abbildung 6.3.

Für die Berechnung der Parameter der diagonal angeordneten PID-Regler wurden die Ge-wichtungsmatrizen

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} w_{1,\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{1,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{1,\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{1,y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

mit

Abbildung 6.3: Verwendete  $\mathcal{H}_\infty$  Loop-Shaping Struktur

$$w_{1,\beta} = w_{1,\alpha} = 10^7 \cdot \frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)} \quad (6.4a)$$

$$w_{1,x} = w_{1,y} = 10^7 \cdot \frac{\left(\frac{s}{95} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)} \quad (6.4b)$$

$$w_2 = \frac{1}{\left(\frac{s}{2\pi \cdot 200} + 1\right)} \quad (6.4c)$$

verwendet. Aufgrund der vorhandenen Symmetrie im Modell wurden für  $\beta$  und  $\alpha$  sowie  $x$  und  $y$  dieselben Gewichtungen in  $\mathbf{W}_1$  gewählt, wodurch die PID-Regler für die rotatorischen und transversalen Zustände ident sind. Zur Limitierung der Verstärkung der gewichteten Strecke bei hohen Frequenzen, wurde für alle Zustände dieselbe Funktion  $w_2$  verwendet.

Für die  $\mathcal{H}_\infty$  Synthese der Regler werden PIDT1-Regler der Form

$$K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{s T_f + 1} \quad (6.5)$$

verwendet. Hierbei beschreiben  $K_p$ ,  $K_i$  und  $K_d$  die Koeffizienten der einzelnen Stellgrößenanteile und  $T_f$  die Realisierungszeitkonstante des Differentiators. Mittels der Realisierungszeitkonstante kann die Bandbreite des Differentialanteils im Frequenzbereich limitiert werden. Diese wurde vorgegeben und vom Optimierungsprozess ausgenommen. Für den weiteren Entwurf wurde für die obere Bandbreitengrenze 200 Hz gewählt, wodurch sich die Realisierungszeitkonstante zu

$$T_f = \frac{1}{2\pi \cdot 200 \text{ Hz}} = 0.796 \text{ ms} \quad (6.6)$$

ergibt. Die  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese der PIDT1-Regler für den Stillstand mit den oben angeführten Gewichtungsmatrizen nach Gleichung 6.3 und 6.4, sowie der Regelungsstruktur nach Abbildung

6.3 erfolgt mit der MATLAB Funktion `hinfstruct()` und liefert die folgenden Reglerkoeffizienten:

$K_{p,tilt} = 3154.35$	$K_{i,tilt} = 18\,942.92$	$K_{d,tilt} = 13.65$
$K_{p,trans} = 540\,224.88$	$K_{i,trans} = 9\,203\,673.96$	$K_{d,trans} = 2004.48$

Tabelle 6.1: Reglerparameter der diagonal angeordneten PIDT1-Regler für den Stillstand

In Tabelle 6.1 beziehen sich die Parameter mit dem Index *tilt* auf die rotatorischen Zustände  $\beta$  und  $\alpha$  und jene mit *trans* auf die transversalen  $x$  und  $y$ .

In Abbildung 6.4 ist das Bodediagramm der beiden PIDT1-Regler dargestellt, aus dem ersichtlich ist, dass der Differentiatoranteil der Stellgröße bei der gewünschten Frequenz von 200 Hz deaktiviert wird. Mittels der soeben berechneten Reglerparameter können zusätzlich die Frequenzen berechnet werden, bei denen die Bandbreite der Differentiatoranteile beginnt. Die Frequenz liegt für den rotatorischen PIDT1-Regler bei  $f_{act,D,tilt} = 36.8$  Hz und für den translatorischen bei  $f_{act,D,trans} = 42.9$  Hz.

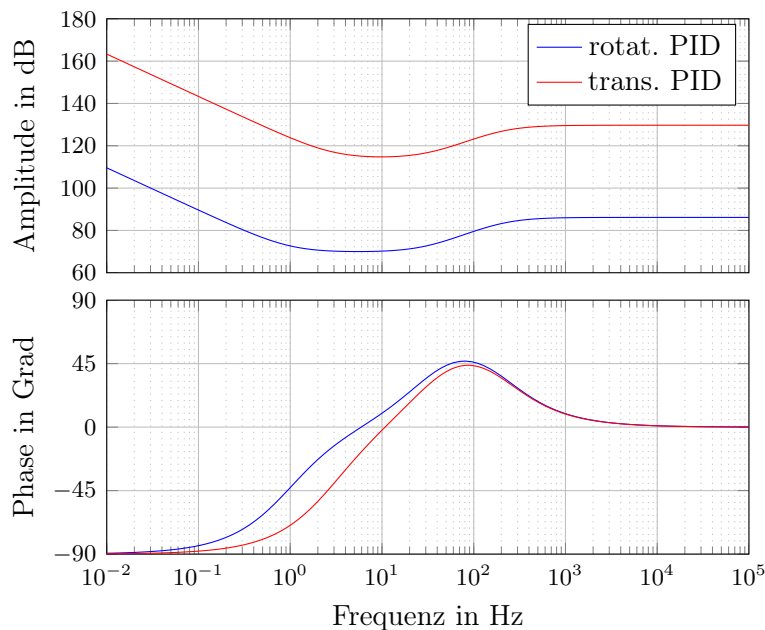


Abbildung 6.4: Bodediagramm der rotatorischen und translatorischen PIDT1-Regler

Zur Überprüfung des zeitlichen Verhaltens der entworfenen Regler ist in Abbildung 6.5 das Einschwingverhalten des geschlossenen Regelkreises für eine vorgegebene Startposition des Rotors dargestellt. Die Simulation erfolgt im Stillstand ( $\Omega = 0$  Hz) aus der Anfangsposition

$$\mathbf{q}(0) = [0.1 \text{ mrad}, \quad 10 \mu\text{m}, \quad -0.1 \text{ mrad}, \quad -15 \mu\text{m}]^T \quad (6.7)$$

wobei zu erkennen ist, dass der Regler beim Einschwingvorgang ein Überschwingen von ca. 30 bis 40% erzeugt und in 15 ms bis 20 ms in die Ruhelage  $\mathbf{q}_{RL} = \mathbf{0}$  übergeht.

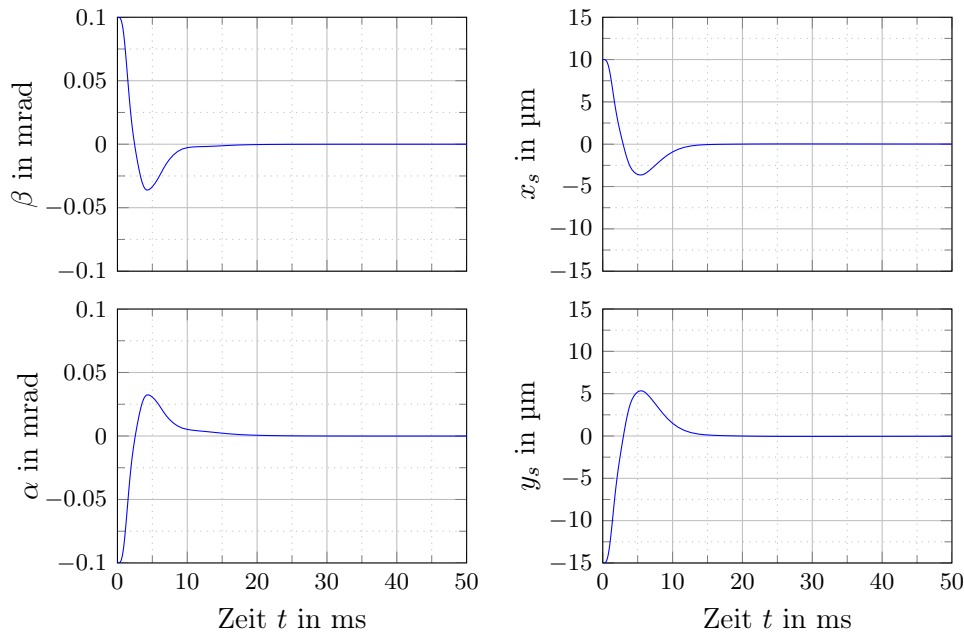


Abbildung 6.5: Einschwingverhalten der COG-Koordinaten aus einer vorgegebenen Startposition

In Kapitel 4 wurde dargestellt, dass der maximale Singulärwert ein Maß für die Robustheit der Regelung ist. In der Norm ISO 14839-3 ist des Weiteren spezifiziert, dass ein Regler genügend Robustheit aufweist, sofern die maximale Amplitudenverstärkung der Diagonalelemente der Sensitivitätsmatrix den Wert 3 nicht überschreitet. Zur Überprüfung dieser Anforderung ist in Abbildung 6.6 der maximale Singulärwert der Sensitivitätsfunktion des geschlossenen Kreises über der Drehzahl  $\Omega$  für die PIDT1-Regler dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass die Anforderung, gegeben durch Norm ISO 14839-3 für den Stillstand erfüllt ist, die Grenze von 3 wird jedoch noch vor der Drehzahl von 300 Hz überschritten und steigt danach steil an. Somit zeigt sich, dass ein Regler nur aus Diagonalelementen bestehend nicht ausreichend ist, um über den vollen Drehzahlbereich als robust zu gelten.

Durch das Hinzufügen weiterer Reglerelemente in der Übertragungsmatrix  $\mathbf{C}(s)$  nach Gleichung 6.2, wird nun für die folgenden Reglerentwürfe versucht, auf die vorhandene Kopplung der COG-Koordinaten  $\mathbf{q}$  besser einzugehen und einen robusteren Regler zu entwickeln. Hierbei wird das Ziel verfolgt, die Diagonalelemente wie sie in diesem Abschnitt berechnet wurden, beizubehalten und die Querkopplungselemente  $G_{13}(s)$  und  $G_{31}(s)$  abhängig von der Drehzahl  $\Omega$  zu optimieren. Durch diese drehzahlabhängigen zusätzlichen Stellgrößenanteile soll es möglich sein, die Robustheitsbedingung über den vollen Drehzahlbereich zu erfüllen.

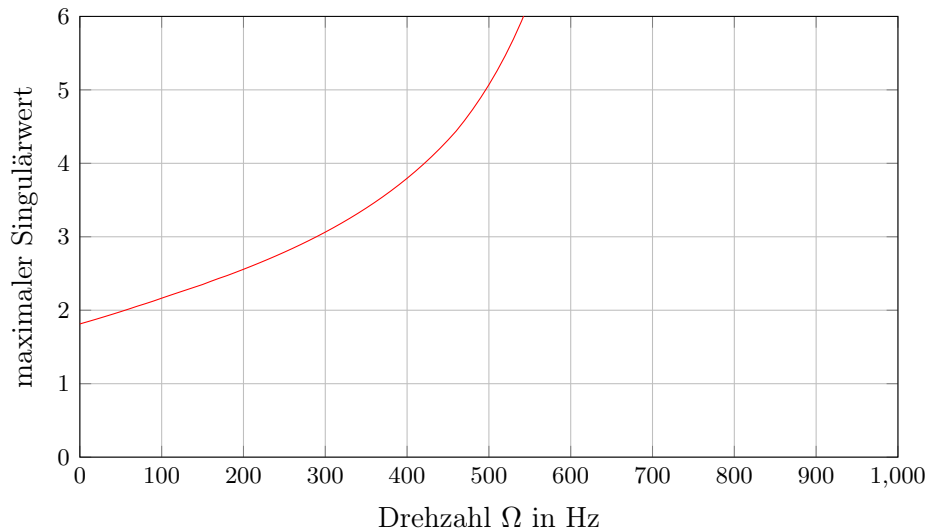


Abbildung 6.6: Verlauf des maximalen Singulärwerts der diagonal angeordneten PIDT1-Regler

### 6.3 PD-Regelung als Querkopplung

Aus dem vorangegangenen Abschnitt ist ersichtlich, dass für einen robusten Reglerentwurf die Diagonalelemente der Reglerübertragungsmatrix nach Gleichung 6.2 nicht ausreichen. Die hier gewählte Lösung dieses Problems ist es, Querkopplungsterme einzufügen, die es ermöglichen, durch neue Stellgrößenanteile eine Anhängigkeit der beiden rotatorischen Zustände zu erlangen, um so die Kopplung durch den gyroskopischen Effekt zu berücksichtigen.

Für die in Gleichung 6.2 noch allgemein angegebenen Querkopplungen  $G_{13}(s)$  und  $G_{31}(s)$  werden in diesem Abschnitt PDT1-Regler eingesetzt. Die Vorgehensweise lautet nun wie folgt. Die in Abschnitt 6.2 entworfenen Diagonalelemente werden beibehalten und für unterschiedlichen Drehzahlen  $\Omega$  die verkoppelten P- und D-Anteile berechnet. Hierbei lassen sich bessere Resultate erzielen, wenn die Berechnung der Regleranteile sequentiell erfolgt. Im ersten Syntheseschritt wird der Proportionalanteil bestimmt, dieser für den zweiten Schritt konstant gehalten und der Differentiatoranteil des PDT1-Reglers berechnet.

Wie bereits für die  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese der Diagonalelemente der Reglermatrix wird auch hier die Struktur nach Abbildung 6.3 verwendet. Die Gewichtungsmatrizen werden in Diagonalstruktur gewählt, da somit die besten Ergebnisse erzielt wurden:

$$\mathbf{W}_{1,PD} = \begin{bmatrix} w_{1,PD} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{1,PD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{1,PD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{1,PD} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{2,PD} = \begin{bmatrix} w_{2,PD} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{2,PD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{2,PD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{2,PD} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Für den ersten  $\mathcal{H}_\infty$ -Syntheseschritt der Proportionalanteile werden die Gewichtungen

$$w_{1,PD} = w_{1,p} = 10^8 \cdot \frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.01} + 1\right)} \quad \text{und} \quad w_{2,PD} = w_{2,p} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_p} + 1} \quad (6.9)$$

gewählt, wobei die Gewichtungsfunktion  $w_{1,p}$  für alle Drehzahlen  $\Omega$  gleich bleibt, hingegen die Frequenz  $\omega_p$  für die Gewichtung  $w_{2,p}$  abhängig von der gewählten Drehzahl  $\Omega$  im Bereich von 6000 bis 15 000 rad/s variiert wird.

Für den zweiten Syntheseschritt der Differentiatoren werden die selben Gewichtungsmatrizen (Gl. 6.8) wie für den ersten Schritt benutzt, jedoch mit den Gewichtungsfunktionen

$$w_{1,PD} = w_{1,d} = 10^7 \cdot \frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.001} + 1\right)} \quad \text{und} \quad w_{2,PD} = w_{2,d} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_d} + 1}. \quad (6.10)$$

Auch für diesen Schritt wird die Gewichtung  $w_{1,d}$  für alle Entwurfsdrehzahlen konstant gehalten und die Frequenz  $\omega_d$  in Abhängigkeit der Drehzahl  $\Omega$  im Bereich von 1000 bis 7500 rad/s variiert.

Für die zu entwerfenden Regler wurden 100 Hz-Schritt im Intervall von 100 bis 500 Hz für die Drehzahl  $\Omega$  angenommen. Der Reglerentwurf erfolgt erneut mittels der MATLAB Funktion `hinfstruct()` und liefert die in Tabelle 6.2 dargestellten Reglerparameter.

$K_{p,13,100Hz} = -1716.1$	$K_{d,13,100Hz} = 4.38$	$T_{f,13,100Hz} = 1.4 \text{ ms}$
$K_{p,13,200Hz} = -1694.4$	$K_{d,13,200Hz} = 6.88$	$T_{f,13,200Hz} = 1.6 \text{ ms}$
$K_{p,13,300Hz} = -1734.5$	$K_{d,13,300Hz} = 4.40$	$T_{f,13,300Hz} = 0.84 \text{ ms}$
$K_{p,13,400Hz} = -1769.8$	$K_{d,13,400Hz} = 5.97$	$T_{f,13,400Hz} = 0.91 \text{ ms}$
$K_{p,13,500Hz} = -1299.1$	$K_{d,13,500Hz} = 4.21$	$T_{f,13,500Hz} = 0.51 \text{ ms}$
$K_{p,31,100Hz} = 1716.1$	$K_{d,31,100Hz} = -4.18$	$T_{f,31,100Hz} = 1.4 \text{ ms}$
$K_{p,31,200Hz} = 1694.4$	$K_{d,31,200Hz} = -5.88$	$T_{f,31,200Hz} = 1.4 \text{ ms}$
$K_{p,31,300Hz} = 1734.5$	$K_{d,31,300Hz} = -7.99$	$T_{f,31,300Hz} = 1.5 \text{ ms}$
$K_{p,31,400Hz} = 1769.8$	$K_{d,31,400Hz} = -5.01$	$T_{f,31,400Hz} = 0.75 \text{ ms}$
$K_{p,31,500Hz} = 1299.1$	$K_{d,31,500Hz} = -5.38$	$T_{f,31,500Hz} = 0.69 \text{ ms}$

Tabelle 6.2: Parameter der Reglerelemente  $G_{13}(s)$  und  $G_{31}(s)$  für PD-Querkopplung

Durch die Vorzeichenstruktur der soeben berechneten Parameter, ergibt sich ein Verhalten, das sich von herkömmlichen PDT1-Reglern, mit jeweils positiven Koeffizienten, deutlich unterscheidet. Das Bodediagramm beider Querkopplungen ist in Abbildung 6.7 exemplarisch für die Drehzahl  $\Omega = 300 \text{ Hz}$  dargestellt. Der Betragsgang der beiden Übertragungsfunktionen weist einen sehr ähnlichen Verlauf auf, deutliche Unterschiede zeigen sich jedoch in den Phasengängen. Durch den Optimierungsprozess wurden die Vorzeichen der Reglerkoeffizienten so bestimmt, dass für die Querkopplung  $G_{13}$  die Phase für kleine Frequenzen bei  $180^\circ$  und bei großen Frequenzen bei  $0^\circ$  liegt. Aufgrund der Vorzeichen der Elemente der Gyroskopmatrix  $\mathbf{G}$  in Gleichung 3.19, ist der Phasengang der Querkopplung  $G_{31}$  um  $180^\circ$  verschoben. Dieses Verhalten deckt sich mit den Erkenntnissen in [20], worin gezeigt wird, dass ein Quer-

kopplungselement mit der Phase  $0^\circ$  auf die Nutationseigenmode dämpfend wirkt und mit der Phase  $\pm 180^\circ$  auf die Präzessionseigenmode. Die Stärke der Dämpfung, ausgehend von den Querkopplungselementen auf die Eigenmoden kann aufgrund der gewählten Struktur nur für den niedrigen Frequenzbereich, durch den Proportionalanteil, unabhängig gewählt werden. Die Verstärkung im hohen Frequenzbereich, in dem auf die komplementäre Eigenmode gewirkt wird, stellt sich als Funktion der übrigen Parameter ein.

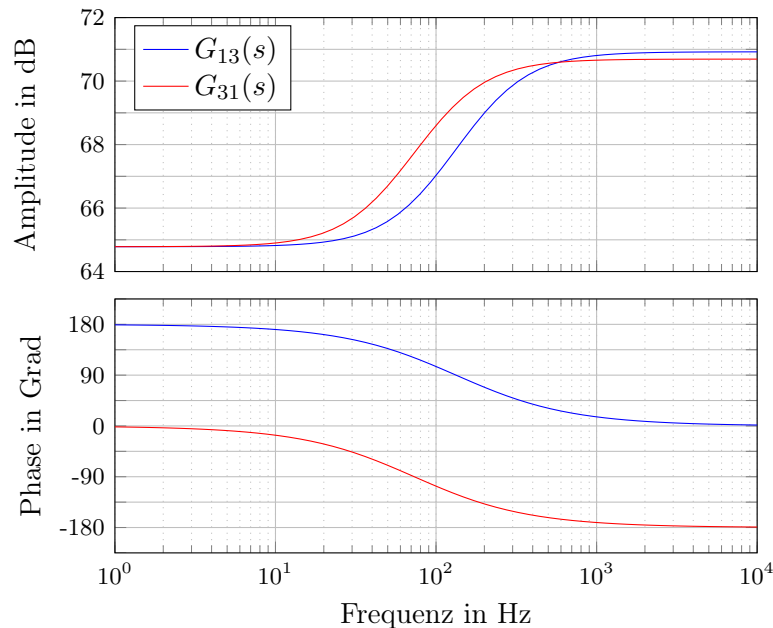


Abbildung 6.7: Bodediagramm der Querkopplungs-PDT1-Regler für  $\Omega = 300$  Hz

Zur Überprüfung der Robustheitsbedingung gegeben durch die ISO Norm 14839-3 wird erneut der Verlauf der maximalen Singulärwerte über der Drehzahl  $\Omega$ , der in Tabelle 6.2 angeführten Regler dargestellt. Hierfür werden die Regler mit Querkopplungselementen mit dem Regler aus Abschnitt 6.2 verglichen. Die Darstellung erfolgt in Abbildung 6.8 aus der ersichtlich ist, dass trotz der verwendeten Querkopplungselemente, für sich gesehen, keiner der entworfenen Regler die Robustheitsbedingung erfüllt.

Die zu diskreten Drehzahlen berechneten Regler liefern bezüglich des maximal auftretenden Singulärwertes in unterschiedlichen Drehzahlgebieten jedoch ein unterschiedlich gutes Ergebnis. Der für die Drehzahl  $\Omega = 500$  Hz berechnete Regler überschreitet die Grenze bei einer viel höheren Drehzahl als jener Regler der bei  $\Omega = 100$  Hz berechnet wurde. Im Gegensatz dazu zeigt dieser Regler bei kleineren Drehzahlen einen deutlich niedrigeren Verlauf. Somit wird durch sequenzielles Umschalten der Querkopplungselemente in Abhängigkeit der Drehzahl  $\Omega$  ein parametervarianter Regler erzeugt.

Wünscht man das Umschalten zu diskreten Drehzahlen zu vermeiden, werden hierfür die Querkopplungen erst bei  $\Omega = 100$  Hz aktiviert und anschließend die Parameter stückweise linearisiert. Erreicht die Drehzahl die obere Approximationsgrenze, werden die Parameter

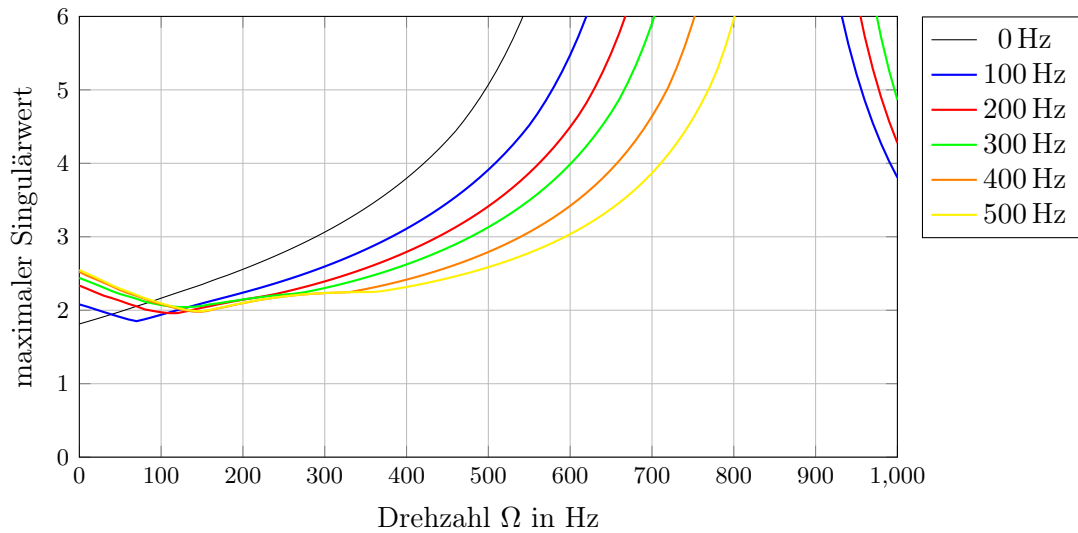


Abbildung 6.8: Verlauf des maximalen Singulärwerts für die berechneten Regler der PD-Querkopplung

dieses Punktes beibehalten. Im ersten Schritt werden für die Approximation die Parameterpaare der Reglerentwürfe bei  $\Omega = 100$  Hz sowie  $\Omega = 500$  Hz herangezogen. Wählt man den Punkt in dem die Umschaltung zwischen linearer Approximation und dem Konstanthalten der Reglerparameter erfolgt, nicht bereits bei  $\Omega = 500$  Hz, sondern lässt die Approximation bis  $\Omega = 700$  Hz aktiv, kann ein noch besseres Ergebnis erzielt werden. Der so zustande kommende Verlauf der verwendeten Parameter, sowie die mit „x“ markierten Punkte der tatsächlich berechneten Parameter (Tabelle 6.2), sind in Abbildung 6.9 dargestellt.

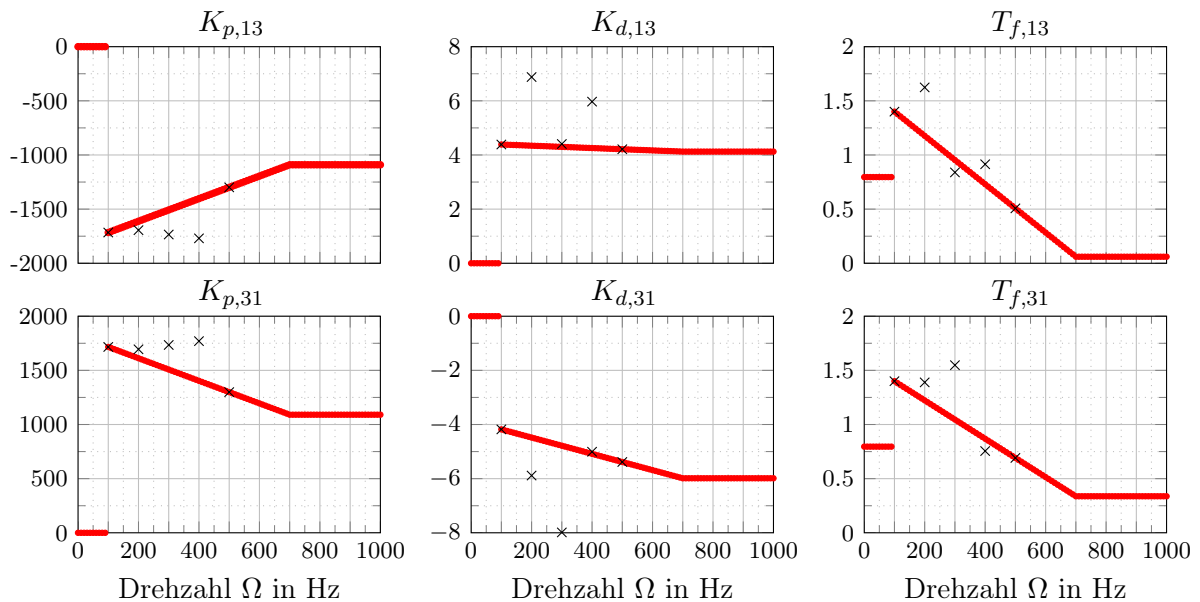


Abbildung 6.9: Approximierte Parameter der PD-Querkopplung

Der somit generierte parametervariante Regler, wie auch der Regler für sequenzielles Umschalten der Querkopplungselemente sind in der folgenden Abbildung 6.10 dargestellt. Hierfür

wurde erneut der Verlauf der maximalen Singulärwerte gewählt. Zusätzlich wurde die Abbildung um den Verlauf der minimalen Dämpfungswerte erweitert.

Wie aus Abbildung 6.10 ersichtlich, gilt weder der parametervariante Regler noch der Regler für sequenzielles Umschalten über den vollen simulierten Drehzahlbereich als ausreichend robust. Es sei jedoch anzumerken, dass durch die Verlängerung der linearen Approximation bis  $\Omega = 700$  Hz die Drehzahl bis zu der der Regler als ausreichend robust gilt, von 590 Hz, wie es für den Regler mittels sequenziellem Umschalten der Fall ist, auf ca. 800 Hz erhöht werden konnte. Ein weiterer Unterschied zeigt sich im Verlauf der minimalen Dämpfungswerte. Hier weist der Regler mit lineare approximierten Querkopplungsparametern einen gleichmäßigeren Verlauf auf. Anhand der minimalen Dämpfungswerte kann gefolgert werden, dass der Diagonalregler aus Abschnitt 6.2, über den hier simulierten Drehzahlbereich weder ausreichend Robustheit noch Stabilität aufweist. Ab einer Drehzahl von ca. 750 Hz weist der geschlossene Regelkreis negative Dämpfungskoeffizienten auf und verletzt somit die Stabilitätsbedingung. Auch der Regler mit sequenzieller Umschaltung der Querkopplungen verlässt bei ca. 925 Hz den stabilen Bereich. Alleine der Regler mit linear approximierten Querkopplungsparameter ist über den vollen Drehzahlbereich BIBO-stabil.

Zur Überprüfung des zeitlichen Verhaltens der COG-Koordinaten  $\mathbf{q}$  bei Drehzahlen ungleich Null, wird dem System eine Abfolge von Sollwertsprüngen aufgeschaltet. Hierfür wird auf den

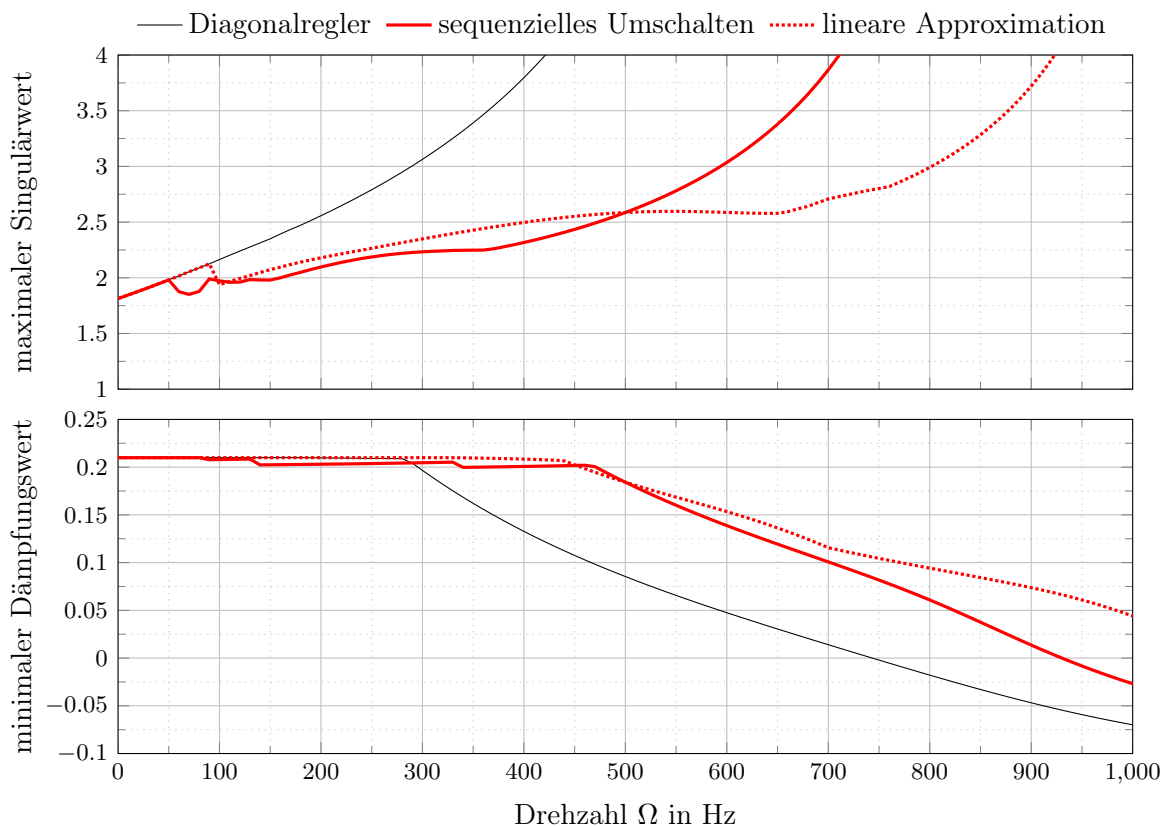


Abbildung 6.10: Verlauf der maximalen Singulärwerte und minimalen Dämpfungskoeffizienten für die PD-Querkopplung

Zustand  $\beta$  und  $\alpha$  bei  $t = 0.1$  s bzw.  $t = 0.6$  s ein Führungsgrößensprung der Höhe 0.1 mrad aufgeschaltet. In Abbildung 6.11 ist die Führungsgröße, die COG-Koordinaten für die Regelung nach Abschnitt 6.2 sowie die COG-Koordinaten für die aktuelle Regelung mit Querkopplungselementen dargestellt.

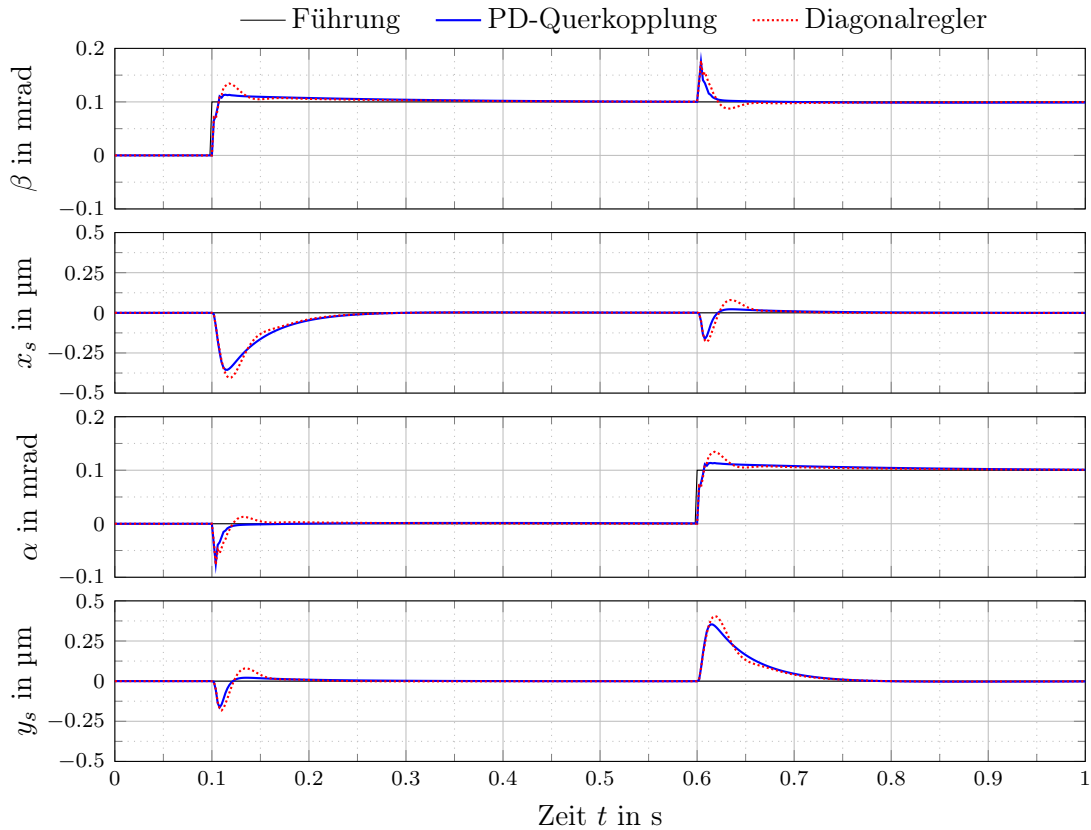


Abbildung 6.11: Verlauf der COG-Koordinaten  $\mathbf{q}$  für eine Abfolge von Sollwertsprüngen bei  $\Omega = 300$  Hz

Da die maximalen Singulärwerte (Abb. 6.10) der beiden Regleransätze (hierbei wird auf den Regler mit sequenzieller Umschaltung der Querkopplungselemente und den Regler mit linear approximierten Querkopplungsparametern Bezug genommen) bei der Drehzahl  $\Omega = 300$  Hz nur geringe Unterschiede aufweisen, wurde für die Simulation des zeitlichen Verlaufs (Abb. 6.11) der Regleransatz mit linear approximierten Querkopplungsparametern ausgewählt. Es ist zu erkennen, dass die reine Diagonalregelung zu etwas höherem Überschwingen und längeren Einschwingzeiten führt. Die Ausprägtheit der Ausschläge von  $\beta$  sowie  $\alpha$  bei den Sollwertsprüngen der jeweils komplementären Koordinaten, hervorgerufen durch den gyroskopischen Effekt, ist jedoch bei beiden Reglern nahezu ident. Des Weiteren ist ersichtlich, dass die Kopplung zwischen  $\beta$  und  $x$  sowie  $\alpha$  und  $y$  hervorgerufen durch die Magnetlagersteifigkeiten, deutlich kleiner als die Kopplung durch den gyroskopischen Effekt ist, da die Ausschläge der translatorischen Zustände hier unter einem halben Mikrometer bleiben.

Wie sich in diesem Abschnitt gezeigt hat, ist es möglich mittels PD-Reglern in den Querkopplungselementen der Reglermatrix einen Regler zu entwerfen, der bezüglich des maximalen Singulärwertes zwar ein deutlich besseres Ergebnis liefert, als jener Regler in reiner Diago-

nalstruktur, dieser dennoch nicht über den vollen simulierten Drehzahlbereich als robust gilt. Die Nenndrehzahl der Turbomolekularpumpe 1 liegt bei 35 000 U/min (583 Hz) und somit deutlich unter der dargestellten maximalen Drehzahl von 60 000 U/min (1000 Hz). Die Robustheitsbedingung nach ISO Norm 14839-3 wird somit für die Nenndrehzahl knapp erfüllt. Da es gewünscht ist, diese Bedingung über den vollen Drehzahlbereich zu erfüllen, wird im nächsten Abschnitt ein anderer Ansatz für die Querkopplungselemente untersucht, der dieser Anforderung gerecht werden soll.

## 6.4 Hochpass/Tiefpass-Kombination als Querkopplung

Aus dem vorangegangenen Abschnitt ist ersichtlich, dass es möglich ist, mittels zusätzlicher Stellgrößenanteile einen Regler aufzubauen, der bis zur Nenndrehzahl genügend Robustheit aufweist. Möchte man diesen Bereich jedoch bis zur maximalen Drehzahl erweitern, ist dies mit PD-Reglern als Querkopplungselemente nicht möglich. In [20] wird eine Struktur vorgeschlagen, welche aus Hoch- und Tiefpassfiltern aufgebaut ist, die es im Gegensatz zur PD-Regler-Querkopplung aus Abschnitt 6.3 ermöglichen soll, jeweils optimal auf die Nutations- als auch die Präzessionseigenmode zu wirken.

Aus Gründen der Anschaulichkeit ist es sinnvoll die Reglerstruktur aus Gleichung 6.2 für die Betrachtungen in diesem Abschnitt anzupassen. Es werden die Diagonalelemente und die Querelemente voneinander getrennt betrachtet

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} \text{PID}_{11}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{PID}_{22}(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{PID}_{33}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{PID}_{44}(s) \end{bmatrix} \quad (6.11a)$$

$$\mathbf{Q}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_{13}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11b)$$

da es für die verwendete Struktur zwei Stellen gibt, an denen die Querkopplung  $\mathbf{Q}(s)$  im Regelkreis angebracht werden kann. Dabei kann man unterscheiden, ob die Querkopplung  $\mathbf{Q}(s)$  seriell oder parallel zum Tiefpassfilter angeordnet wird. Das prinzipielle Anordnungsschema ist in Abbildung 6.12 dargestellt.

In der Anordnung 1, welche in weiterer Folge als serielle Anordnung bezeichnet wird, werden die Stellgrößenanteile des Diagonalreglers  $\mathbf{C}(s)$  mit den Querkopplungsanteilen  $\mathbf{Q}(s)$  addiert, bevor diese den Tiefpass 2. Ordnung durchlaufen. Somit werden beide Anteile mit demselben Tiefpass gefiltert. Die für die serielle Anordnung zu wählende Struktur ist in Abbildung 6.13

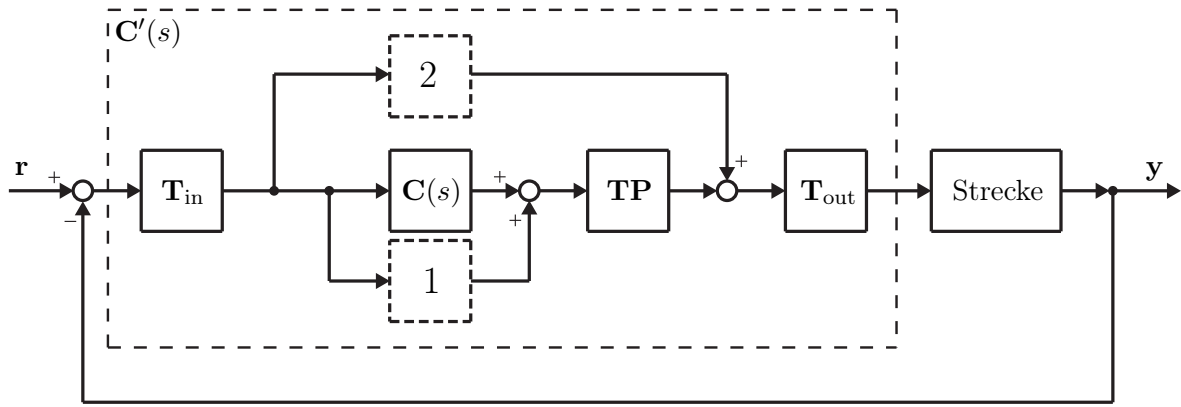


Abbildung 6.12: Blockschaltbild der Regelkreisstruktur für die Hochpass/Tiefpass-Kombination als Querkopplung an zwei möglichen Stellen

dargestellt. Es handelt sich hierbei um allgemeine Filter n-ter Ordnung.

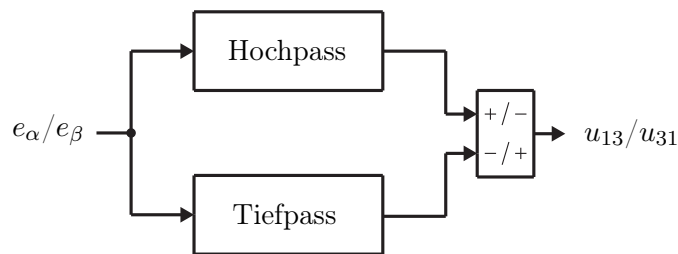


Abbildung 6.13: Prinzipielles Strukturschaltbild für die serielle Anordnung

Aus Abbildung 6.12 ist des Weiteren ersichtlich, dass in Anordnung 2, welche in weiterer Folge als parallele Anordnung bezeichnet wird, nur die Stellgrößenanteile des Diagonalreglers den Tiefpassfilter durchlaufen. Damit der für hohe Frequenzen wirksame Hochpassfilter nicht unendlich hohe Frequenzen verstärkt, wird nach dem Hochpassfilter ein Tiefpass angeordnet. Des Weiteren wird der Tiefpassfilter dazu verwendet, dass die Phase der Querkopplungselemente in einem Bereich liegt, sodass diese dämpfend auf die Biegemoden wirkt. Die so entstandene Struktur für die parallele Anordnung ist in Abbildung 6.14 dargestellt. Die Reglerentwürfe nach den beiden hier vorgestellten Strukturen werden in den folgenden Abschnitten abgehandelt.

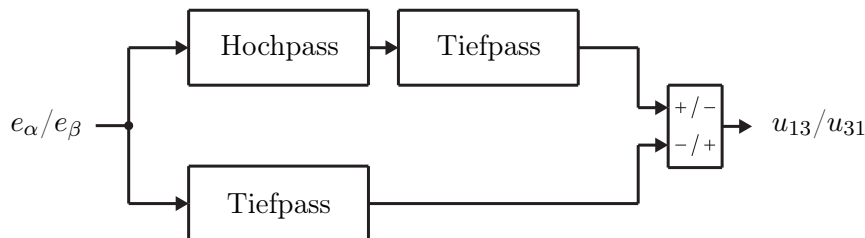


Abbildung 6.14: Prinzipielles Strukturschaltbild für die parallele Anordnung

### 6.4.1 Serielle Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, für die in Abbildung 6.13 vorgestellte Struktur der Querkopplung einen Regler zu entwerfen der über den vollen Drehzahlbereich genügend Robustheit aufweist. Hierfür wird wie bereits in Abschnitt 6.3 die für den Stillstand ausgelegten Diagonalelemente verwendet. Darauf aufbauend werden für diskrete Werte der Drehzahl die Parameter der Hochpass/Tiefpass-Kombination berechnet um in weiterer Folge einen einzelnen Regler daraus zu generieren.

Für die Querkopplungselemente  $G_{13}(s)$  und  $G_{31}(s)$  der Struktur aus Abbildung 6.13 werden Filter 1. Ordnung angenommen wodurch die Übertragungsfunktionen

$$G_{13}(s) = \frac{k_{HP,13} \frac{s}{\omega_{HP,13}}}{\frac{s}{\omega_{HP,13}} + 1} - \frac{k_{TP,13}}{\frac{s}{\omega_{TP,13}} + 1} \quad (6.12a)$$

$$G_{31}(s) = \frac{k_{TP,31}}{\frac{s}{\omega_{TP,31}} + 1} - \frac{k_{HP,31} \frac{s}{\omega_{HP,31}}}{\frac{s}{\omega_{HP,31}} + 1} \quad (6.12b)$$

lauten. In einem ersten Schritt wurden die Grenzfrequenzen der Hoch- sowie Tiefpassfilter fixiert und nur die Verstärkungsfaktoren  $k$  für den Optimierungsprozess frei gelassen. Hierfür wurden die Frequenzen  $\omega_{TP,13} = \omega_{TP,31} = 2\pi 40$  Hz und  $\omega_{HP,13} = \omega_{HP,31} = 2\pi 400$  Hz gewählt. Aus den zu diskreten Drehzahlen berechneten Filterparametern, wurde wie zuvor in Abschnitt 6.3, ein Regler generiert, dessen Querkopplungselemente sequenziell mit der Drehzahl umgeschaltet werden und ein parametervarianter Regler dessen Querkopplungsparameter stückweise linearisiert wurden. Da beide Ansätze in Bezug auf den Verlauf der maximalen Singulärwerte nur marginal bessere Ergebnisse liefern als jene Regler mit PD-Querkopplungen, werden im nun dargestellten Reglerentwurf die Verstärkungsfaktoren  $k$  als auch die Grenzfrequenzen  $\omega$  im  $\mathcal{H}_\infty$ -Syntheseprozess bestimmt. Es stellt sich jedoch als sinnvoll heraus, gewisse Grenzen für die zu berechnenden Parameter vorzugeben.

Wie bereits für die vorangegangenen Reglerentwürfe wurde auch hier die in Abbildung 6.3 dargestellte Struktur für die  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese verwendet. Hierfür werden alle für den Regler relevanten Blöcke aus Abbildung 6.12 zu  $\mathbf{C}'(s)$  zusammengefasst. Für die Einträge der Gewichtungsmatrizen

$$\mathbf{W}_{1,HT} = \begin{bmatrix} w_{1,HT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{1,HT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{1,HT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{1,HT} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{2,HT} = \begin{bmatrix} w_{2,HT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{2,HT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{2,HT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{2,HT} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

wurden idente Diagonalelemente gewählt

$$w_{1,HT} = w_{1,ser} = 10^8 \cdot \frac{\left(\frac{s}{1} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.001} + 1\right)} \quad \text{und} \quad w_{2,HT} = w_{2,ser} = \frac{1}{\frac{s}{2\pi \cdot 200 \text{ Hz}} + 1}. \quad (6.14)$$

Für die zu entwerfenden Regler wurden diskrete Werte der Drehzahl in 100-Hz-Schritten im Intervall von 100 Hz bis 600 Hz gewählt, wobei im Unterschied zu den vorangegangenen Entwürfen hier beide Gewichtungsfunktionen über die Drehzahl konstant gehalten werden. Die einzelnen Reglerentwürfe erfolgten mittels der MATLAB Funktion `hinfstruct()` und liefern die in Tabelle 6.3 dargestellten Parameter. Für die Darstellung wurden die Kreisfrequenzen  $\omega$  aus Gleichung 6.12 in Frequenzen der Einheit Hz umgerechnet.

$k_{T,13,100Hz} = 1846$	$f_{T,13,100Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,13,100Hz} = 1818$	$f_{H,13,100Hz} = 156.2 \text{ Hz}$
$k_{T,13,200Hz} = 1247$	$f_{T,13,200Hz} = 49.5 \text{ Hz}$	$k_{H,13,200Hz} = 2557$	$f_{H,13,200Hz} = 142.1 \text{ Hz}$
$k_{T,13,300Hz} = 1595$	$f_{T,13,300Hz} = 44.4 \text{ Hz}$	$k_{H,13,300Hz} = 6021$	$f_{H,13,300Hz} = 184.5 \text{ Hz}$
$k_{T,13,400Hz} = 1678$	$f_{T,13,400Hz} = 59.4 \text{ Hz}$	$k_{H,13,400Hz} = 10\,392$	$f_{H,13,400Hz} = 215.9 \text{ Hz}$
$k_{T,13,500Hz} = 2259$	$f_{T,13,500Hz} = 27.4 \text{ Hz}$	$k_{H,13,500Hz} = 20\,871$	$f_{H,13,500Hz} = 495.2 \text{ Hz}$
$k_{T,13,600Hz} = 1624$	$f_{T,13,600Hz} = 42.9 \text{ Hz}$	$k_{H,13,600Hz} = 37\,489$	$f_{H,13,600Hz} = 823.4 \text{ Hz}$
$k_{T,31,100Hz} = 1842$	$f_{T,31,100Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,31,100Hz} = 1817$	$f_{H,31,100Hz} = 155.0 \text{ Hz}$
$k_{T,31,200Hz} = 1216$	$f_{T,31,200Hz} = 51.5 \text{ Hz}$	$k_{H,31,200Hz} = 2626$	$f_{H,31,200Hz} = 162.9 \text{ Hz}$
$k_{T,31,300Hz} = 1592$	$f_{T,31,300Hz} = 44.5 \text{ Hz}$	$k_{H,31,300Hz} = 6034$	$f_{H,31,300Hz} = 185.3 \text{ Hz}$
$k_{T,31,400Hz} = 2435$	$f_{T,31,400Hz} = 39.7 \text{ Hz}$	$k_{H,31,400Hz} = 9023$	$f_{H,31,400Hz} = 187.2 \text{ Hz}$
$k_{T,31,500Hz} = 2956$	$f_{T,31,500Hz} = 34.0 \text{ Hz}$	$k_{H,31,500Hz} = 14\,280$	$f_{H,31,500Hz} = 298.0 \text{ Hz}$
$k_{T,31,600Hz} = 4167$	$f_{T,31,600Hz} = 24.0 \text{ Hz}$	$k_{H,31,600Hz} = 34\,726$	$f_{H,31,600Hz} = 861.0 \text{ Hz}$

Tabelle 6.3: Parameter der Reglerelemente  $G_{13}(s)$  und  $G_{31}(s)$  für die serielle Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination

Es ist zu erkennen, dass die Grenzfrequenzen der Tiefpassfilter mit der Drehzahl  $\Omega$  abnehmen, sowie die Grenzfrequenzen der Hochpassfilter zunehmen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass mit steigender Drehzahl  $\Omega$  die Frequenz der Präzessionseigenmode des Rotors abnimmt (vgl. Abb. 3.3). Somit muss auch die Grenzfrequenz der Tiefpassfilter abgesenkt werden um die Frequenz der Eigenmode wieder anheben zu können. Analog nimmt die Frequenz der Nutationseigenmode mit der Drehzahl  $\Omega$  zu, wodurch auch die Grenzfrequenz der Hochpassfilter angehoben werden muss um die Nutationseigenmode in ihrer Frequenz absenken zu können.

Des Weiteren ist zu erkennen, dass vor allem bei höheren Drehzahlen die Verstärkungsfaktoren der Hochpassfilter deutlich größer sind als jene der Tiefpassfilter. Durch die Diagonalelemente der Reglerübertragungsmatrix (Abschnitt 6.2) wurden die Eigenfrequenzen des geschlossenen Regelkreises im Stillstand auf ca. 50 Hz gelegt. Beginnend bei dieser Frequenz driften wie in Abschnitt 3.2 schematisch dargestellt, die Präzessions- und Nutationseigenmode auseinander, wobei die Eigenfrequenz der Nutation des Rotors deutlich stärker ansteigt, als die Frequenz der Präzession abflacht. Aufgrund dieses Verhältnisses sind auch die Verstärkungsfaktoren der

Hochpassfilter größer als jene der Tiefpassfilter.

Zusätzlich zeigt sich, vorallem im Vergleich zwischen den Parametern  $f_{T,13}$  und  $f_{T,31}$  eine deutliche Varianz in  $f_{T,13}$ . Für die Berechnung der Parameterwerte wird der Optimierungsprozess fünf mal, mit jeweils zufällig gewählten Startpunkten ausgeführt. Teilweise wird die Varianz in den berechneten Parametern durch die Wahl der Startpunkte beeinflusst, da die Fähigkeit des Optimierungsalgorithmus, das globale Minimum zu detektieren stark von der Wahl dieser Punkte abhängt.

In Abbildung 6.15 sind wiederum die Verläufe des maximalen Singulärwerte aller soeben entworfenen Regler dargestellt. Da keiner der dargestellten Regler für sich die Robustheitsbedingung nach Norm ISO 14839-3 über den vollen Drehzahlbereich erfüllt, können wie bereits in Abschnitt 6.3 daraus zwei Regler generiert werden. Es ist jedoch ersichtlich, dass der Reglerentwurf bei  $\Omega = 600$  Hz zwar erst ab 100 Hz unter der Grenze von 3 liegt, danach aber über den restlichen Drehzahlbereich die Grenze nicht wieder überschreitet. Somit kann aus den soeben berechneten Parametern ein Regler synthetisiert werden, der erstmals über den vollen Drehzahlbereich genügend Robustheit aufweist.

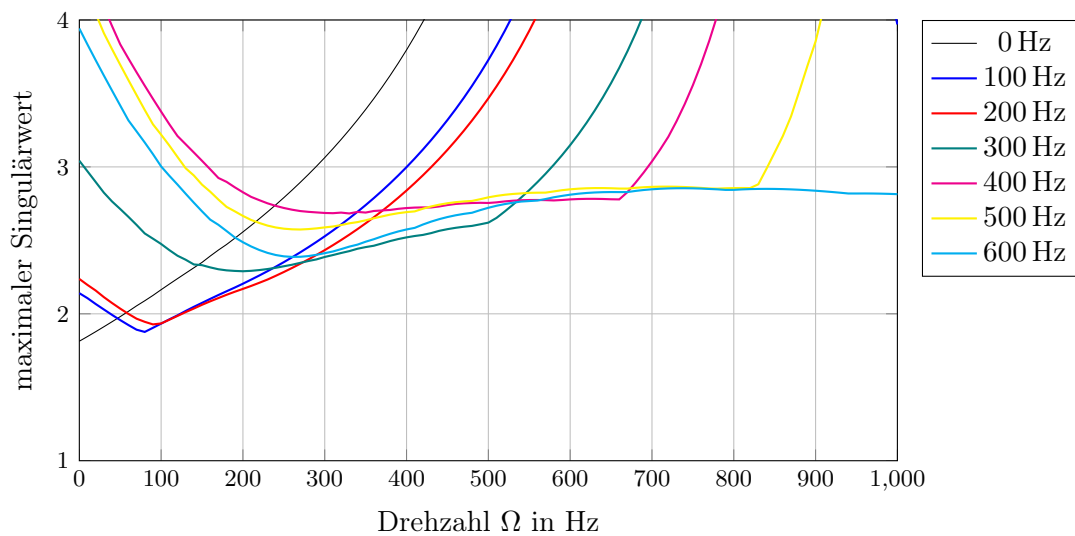


Abbildung 6.15: Verlauf des maximalen Singulärwerts für die berechneten Regler der seriellen Hochpass/Tiefpass-Kombination

Für den ersten Ansatz werden aus Abbildung 6.15 die passenden Umschaltunkte abgelesen an denen die Parameter der Querkopplung von einem Parameterpaar zum nächsten weitergeschaltet werden können. Um das sechsmalige Umschalten umgehen zu können, wird für den zweiten Regler der Ansatz wie in Abschnitt 6.3 gewählt. Hierbei werden die Parameter der Querkopplungselemente zwischen zwei Punkten linear approximiert. Wird die obere Grenze erreicht, werden die Parameter aus diesem Punkt für darüber liegende Drehzahlen konstant gehalten. Die somit zustande kommenden Verläufe der Querkopplungsparameter sind in Abbildung 6.16 dargestellt. Im Parameterverlauf der Hochpassfrequenz  $f_{HP,31}$  ist beispielsweise zu erkennen, dass die Werte aus den ersten fünf Berechnungen einem klar erkennbaren Trend

folgen, der Wert bei 600 Hz jedoch deutlich abseits liegt. Für die bestmögliche Realisierung dieses Ansatzes ist es dennoch förderlich, diesen Punkt als zweiten Stützpunkt der Linearisierung zu wählen. In Hinblick auf den Verlauf „600 Hz“ aus Abbildung 6.15 zeigt sich, dass es nur durch die Wahl dieses zweiten Parameterpaars für die Linearisierung möglich ist, über den vollen simulierten Drehzahlbereich als ausreichend robust zu gelten.

Im Unterschied zur Realisierung in Abschnitt 6.3 wird zusätzlich vor Beginn der linearen Approximation im Drehzahlbereich zwischen 40 und 100 Hz bereits die 100 Hz-Parameter verwendet. Dies führt zu einer zusätzlichen Verringerung des maximalen Singulärwertes in diesem Drehzahlbereich.

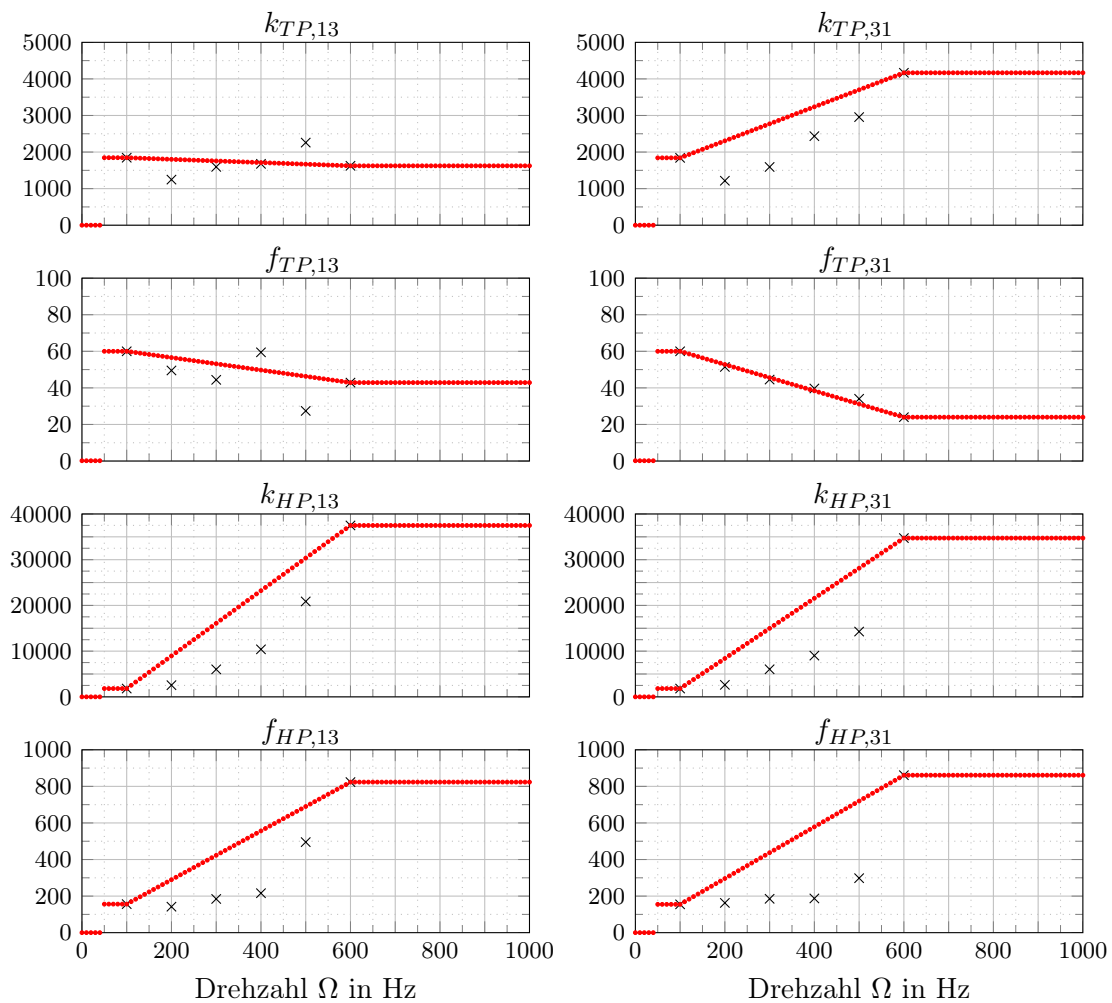


Abbildung 6.16: Approximierte Parameter der seriellen Hochpass/Tiefpass Querkopplung

Zur Überprüfung ob die Regler genügend Robustheit aufweisen sind in Abbildung 6.17 die maximalen Singulärwerte der beiden soeben beschriebenen Regleransätze dargestellt. Hieraus ist klar ersichtlich, dass beide Ansätze einen sehr ähnlichen Verlauf zeigen und über den vollen Drehzahlbereich genügen Robustheit aufweisen.

Zusätzlich zum Verlauf der maximalen Singulärwerte wurden in Abbildung 6.17, zur Überprüfung der BIBO-Stabilität, die Verläufe der minimalen Dämpfungswerte dargestellt, wobei

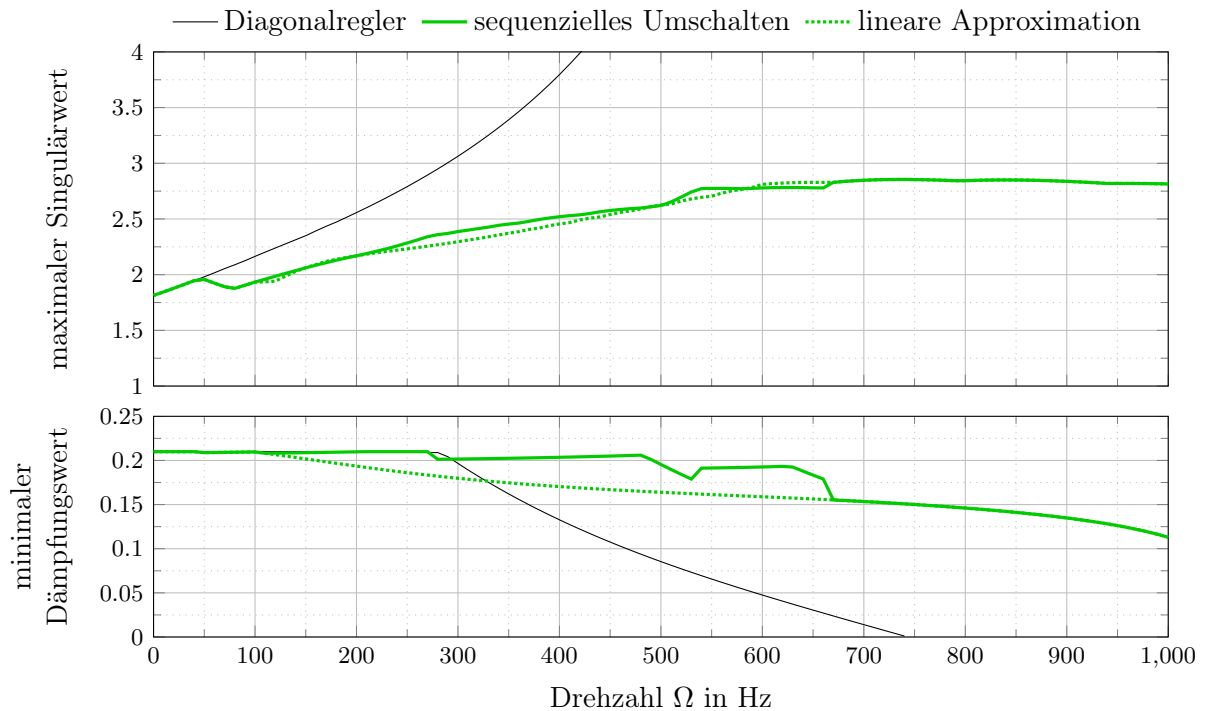


Abbildung 6.17: Verlauf des maximalen Singulärwerts und der minimalen Dämpfungswerte für die serielle Hochpass/Tiefpass Querkopplung

sich hier ein deutlicher Unterschied der beiden Regleransätze zeigt. Beide Ansätze gelten über den vollen Drehzahlbereich als BIBO-stabil, der Ansatz der sequenziellen Umschaltung führt jedoch zu deutlichen Unstetigkeitsstellen im Verlauf.

Wie zu Beginn von Abschnitt 6.4 erwähnt, gibt es für die Hochpass/Tiefpass-Kombination zwei mögliche Anordnungspunkte im Regelkreis. Im nun folgenden Abschnitt wird der Reglerentwurf für die parallele Anordnung dargestellt.

#### 6.4.2 Parallele Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination

Das verfolgte Ziel dieses Abschnittes ist mit jenem aus dem vorangegangenen ident, mit dem Unterschied der verwendeten Struktur der Querkopplungselemente (Abb. 6.14). Es werden die in Abschnitt 6.2 für den Stillstand ausgelegten Regler für die Diagonalelemente verwendet und für diskrete Werte der Drehzahl die Parameterpaare der Hochpass/Tiefpass-Kombination berechnet. Daraus werden in weiterer Folge zwei parametervariante Regler, nach den bereits bekannten Ansätzen, erzeugt.

Aufgrund dessen, dass die Stellgrößenanteile der Querkopplungselemente mit den Stellgrößen der Diagonalelemente erst nach der Tiefpassfilterung addiert werden (vgl. Abb. 6.12), müssen die Hochpassfilter der Querkopplungselemente um je einen zusätzlichen Tiefpassfilter erweitert werden. Dies sorgt dafür, dass zu hohe Frequenzen die sonst durch den Hochpassfilter

verstärkt werden würden, gedämpft werden und somit keine Eigenmoden des Rotors anregen. Des Weiteren ist die Phasenverschiebung des Tiefpassfilters bei hohen Frequenzen zur Stabilisierung hochfrequenter Biegemoden notwendig. Für den weiteren Verlauf wurde hierfür ein Tiefpassfilter 2. Ordnung

$$G_{TP,damp}(s) = \frac{1}{\frac{1}{(2\pi f_{damp})^2} s^2 + \frac{2D_{damp}}{2\pi f_{damp}} s + 1} \quad (6.15)$$

mit der Grenzfrequenz  $f_{damp} = 700$  Hz und einem Dämpfungskoeffizienten von  $D_{damp} = 0.2$  gewählt. Da es sich hier lediglich um die Filterung der Querkopplungselemente handelt, konnte die Grenzfrequenz  $f_{damp}$  geringfügig höher als die Grenzfrequenz  $f_c = 550$  Hz der Tiefpassfilterung der Diagonalelemente gewählt werden.

Die  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese erfolgt erneut mittels der Loop-Shaping Struktur aus Abbildung 6.3 wobei die selbe Struktur für die Gewichtungsmatrizen verwendet wurde wie in den vorangegangenen Reglerentwürfen, mit identen Einträgen in den Diagonalen. Für die bei diskreten Werten der Drehzahl  $\Omega$  zu berechnenden Parameter wurden erneut 100 Hz-Schritte im Intervall von 100 Hz bis 700 Hz gewählt. Die Gewichtungsfunktionen

$$w_{1,HT} = w_{1,par} = 10^9 \cdot \frac{\left(\frac{s}{1} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.001} + 1\right)} \quad \text{und} \quad w_{2,HT} = w_{2,par} = \frac{1}{\frac{s}{2\pi \cdot 200 \text{ Hz}} + 1}. \quad (6.16)$$

wurden für alle Entwurfsdrehzahlen konstant gehalten. Die Berechnung der einzelnen Parameterpaare wurde mittels der MATLAB Funktion `hinfstruct()` durchgeführt und sind in Tabelle 6.4 aufgeführt.

Es ist erneut zu erkennen, dass die Verstärkungsfaktoren der Hochpassfilter deutlich größer sind als jene der Tiefpässe, die Grenzfrequenzen der Hochpässe mit der Drehzahl ansteigen und jene der Tiefpässe absinken. Für die  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese wurden wiederum Intervalle für die Grenzfrequenzen von 0 bis 60 Hz für die Tiefpassfilter und 100 bis 1000 Hz für die Hochpassfilter verwendet. Abbildung 6.18 stellt die Verläufe der maximalen Singulärwerte der soeben berechneten Regler dar. Es ist zu erkennen, dass es aufgrund des Verlaufs „700 Hz“ möglich sein wird, mittels der beiden parametervarianten Ansätze einen Regler zu generieren, der bis zur maximal simulierten Drehzahl genügend Robustheit aufweist.

Für den ersten Ansatz werden aus Abbildung 6.18 jene Punkte abgelesen, an denen von einem Parameterpaar zum nächsten umgeschaltet wird. Hierbei wird immer jener Parametersatz verwendet, dessen maximale Singulärwerte am niedrigsten liegen. Für den zweiten Regler werden die Parameterpaare die bei 100 sowie 700 Hz berechnet wurden dazu verwendet um eine lineare Funktion in  $\Omega$  für sämtliche Querkopplungsparameter zu erstellen. Oberhalb von 700 Hz werden die Parameter, bestimmt durch diese Grenze, konstant gehalten. Wie bereits für die serielle Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination werden zwischen 50 und 100 Hz bereits die Parameter der unteren Grenze verwendet. In Abbildung 6.19 sind die Verläufe der

$k_{T,13,100Hz} = 1828$	$f_{T,13,100Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,13,100Hz} = 1699$	$f_{H,13,100Hz} = 128.3 \text{ Hz}$
$k_{T,13,200Hz} = 3179$	$f_{T,13,200Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,13,200Hz} = 3269$	$f_{H,13,200Hz} = 400.4 \text{ Hz}$
$k_{T,13,300Hz} = 3191$	$f_{T,13,300Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,13,300Hz} = 6590$	$f_{H,13,300Hz} = 297.0 \text{ Hz}$
$k_{T,13,400Hz} = 2613$	$f_{T,13,400Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,13,400Hz} = 14\,597$	$f_{H,13,400Hz} = 440.2 \text{ Hz}$
$k_{T,13,500Hz} = 2773$	$f_{T,13,500Hz} = 49.2 \text{ Hz}$	$k_{H,13,500Hz} = 16\,135$	$f_{H,13,500Hz} = 366.0 \text{ Hz}$
$k_{T,13,600Hz} = 3223$	$f_{T,13,600Hz} = 34.0 \text{ Hz}$	$k_{H,13,600Hz} = 24\,772$	$f_{H,13,600Hz} = 498.5 \text{ Hz}$
$k_{T,13,700Hz} = 2708$	$f_{T,13,700Hz} = 41.6 \text{ Hz}$	$k_{H,13,700Hz} = 51\,293$	$f_{H,13,700Hz} = 971.2 \text{ Hz}$
$k_{T,31,100Hz} = 2074$	$f_{T,31,100Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,31,100Hz} = 1716$	$f_{H,31,100Hz} = 122.1 \text{ Hz}$
$k_{T,31,200Hz} = 3203$	$f_{T,31,200Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,31,200Hz} = 3265$	$f_{H,31,200Hz} = 404.3 \text{ Hz}$
$k_{T,31,300Hz} = 3196$	$f_{T,31,300Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,31,300Hz} = 6345$	$f_{H,31,300Hz} = 280.3 \text{ Hz}$
$k_{T,31,400Hz} = 2581$	$f_{T,31,400Hz} = 60.0 \text{ Hz}$	$k_{H,31,400Hz} = 23\,704$	$f_{H,31,400Hz} = 777.2 \text{ Hz}$
$k_{T,31,500Hz} = 2849$	$f_{T,31,500Hz} = 46.3 \text{ Hz}$	$k_{H,31,500Hz} = 16\,162$	$f_{H,31,500Hz} = 354.2 \text{ Hz}$
$k_{T,31,600Hz} = 3266$	$f_{T,31,600Hz} = 33.5 \text{ Hz}$	$k_{H,31,600Hz} = 24\,772$	$f_{H,31,600Hz} = 500.2 \text{ Hz}$
$k_{T,31,700Hz} = 4810$	$f_{T,31,700Hz} = 22.9 \text{ Hz}$	$k_{H,31,700Hz} = 39\,777$	$f_{H,31,700Hz} = 825.5 \text{ Hz}$

Tabelle 6.4: Parameter der Reglerelemente  $G_{13}(s)$  und  $G_{31}(s)$  für die parallele Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination

Parameter dargestellt, die sich durch die Wahl dieses Ansatzes ergeben. Hieraus ist zu erkennen, dass sich für diverse Parameter statt einer linearen Approximation eher eine quadratische oder kubische Approximation anbieten würde. Für die Simulationen wäre es ein Einfaches die Ordnung der Approximation anzuheben, aus Gründen der Vergleichbarkeit wurde jedoch für alle Parameter dieselbe Ordnung der Approximation verwendet. Des Weiteren ist eine lineare Approximation für die Implementierung am Prüfstand vorteilhaft, da einerseits weniger Multiplikationen notwendig sind und die Anzahl an zu speichernden Variablen ebenfalls verringert werden kann.

Der Regler dessen Querkopplungselemente sequenziell weitergeschaltet werden, hat den Vor-

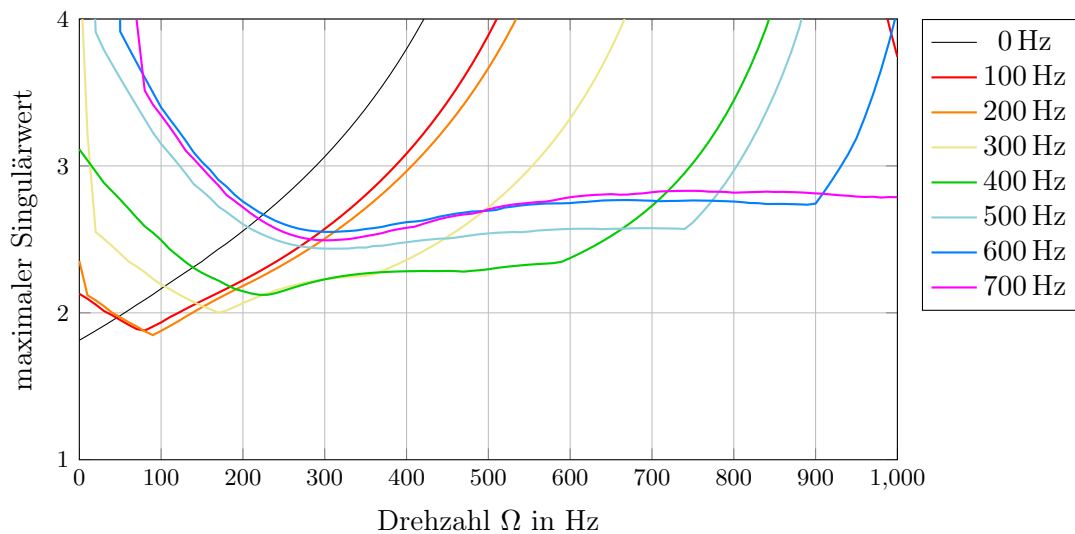


Abbildung 6.18: Verlauf des maximalen Singulärwerts für die berechneten Regler der parallele Hochpass/Tiefpass Querkopplung

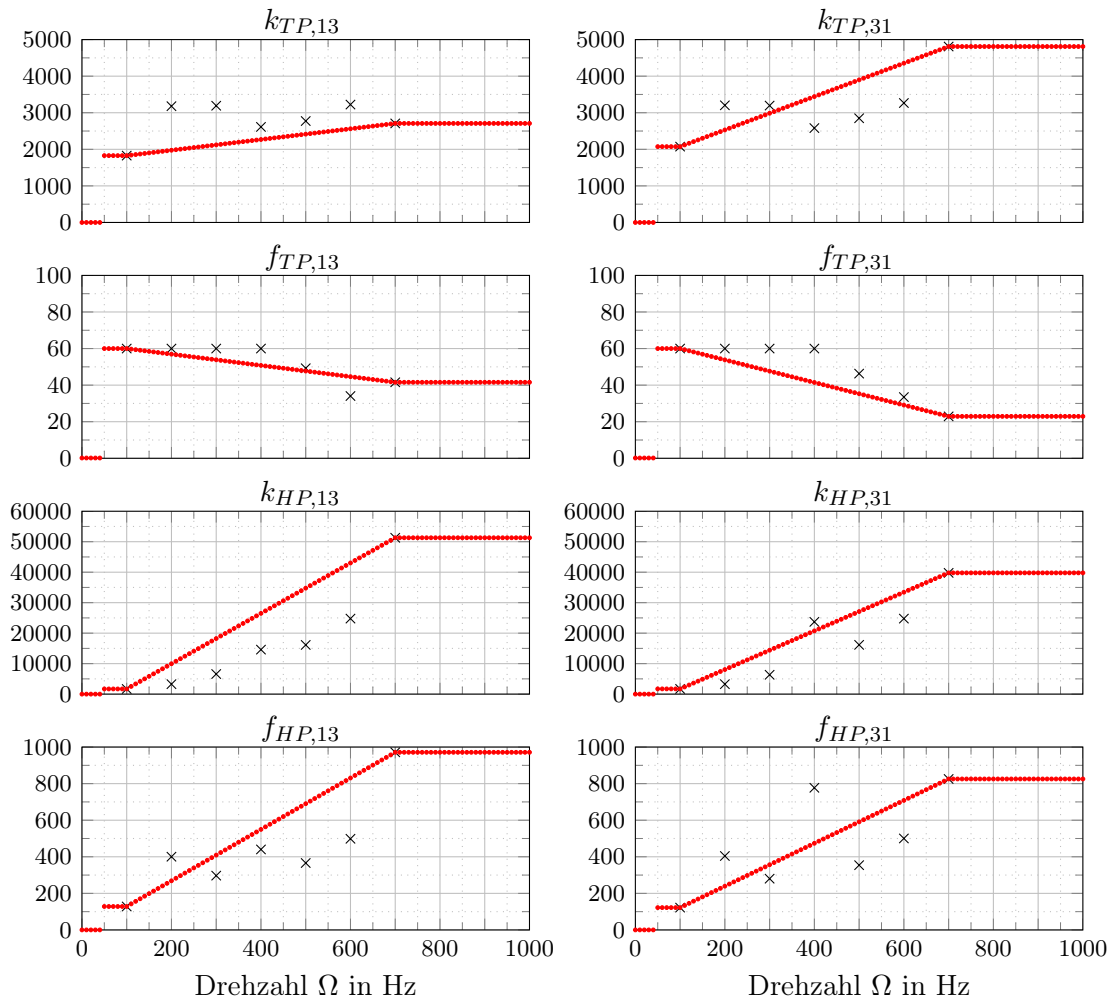


Abbildung 6.19: Approximierte Parameter der parallelen Hochpass/Tiefpass Querkopplung

teil, immer den niedrigsten Verlauf der Singulärwerte einzunehmen. Dem gegenübergestellt hat er jedoch den Nachteil, vor allem im Verlauf der minimalen Dämpfungswerte deutlich ausgeprägte Unstetigkeitsstellen aufzuweisen. Dieser Nachteil lässt sich teilweise durch den Regler mit stückweise linearisierten Parametern umgehen. An den Punkten an denen die Querkopplung aktiviert sowie in weiterer Folge an den Grenzen umgeschaltet wird, kommt es auch hier zu Unstetigkeitsstellen, die Anzahl ist jedoch geringer. Durch die beiden Grenzpunkte der Approximation wird dem Regler bei niedrigen sowie sehr hohen Drehzahlen ein gutes Verhalten eingeprägt. Da zwischen diesen Grenzen jedoch nur eine Approximation stattfindet, die unterschiedlich weit von den tatsächlich berechneten Parameter abweicht, liegt der resultierende Verlauf im mittleren Drehzahlbereich fast ausschließlich über dem sequenziell umschaltenden Regler. Die Darstellung der beiden Regleransätze erfolgt in Abbildung 6.20.

In diesem Abschnitt konnte gezeigt werden, dass es mit der Hochpass/Tiefpass-Kombination als Querkopplung möglich ist einen Regler zu entwerfen der über dem vollen simulierten Drehzahlbereich genügend Robustheit aufweist. Im vorangegangenen Abschnitt der PD-Querkopplung war dies nur bis zur Nenndrehzahl möglich. Im nun folgenden Abschnitt werden alle in diesem Kapitel entworfenen Regler miteinander verglichen.

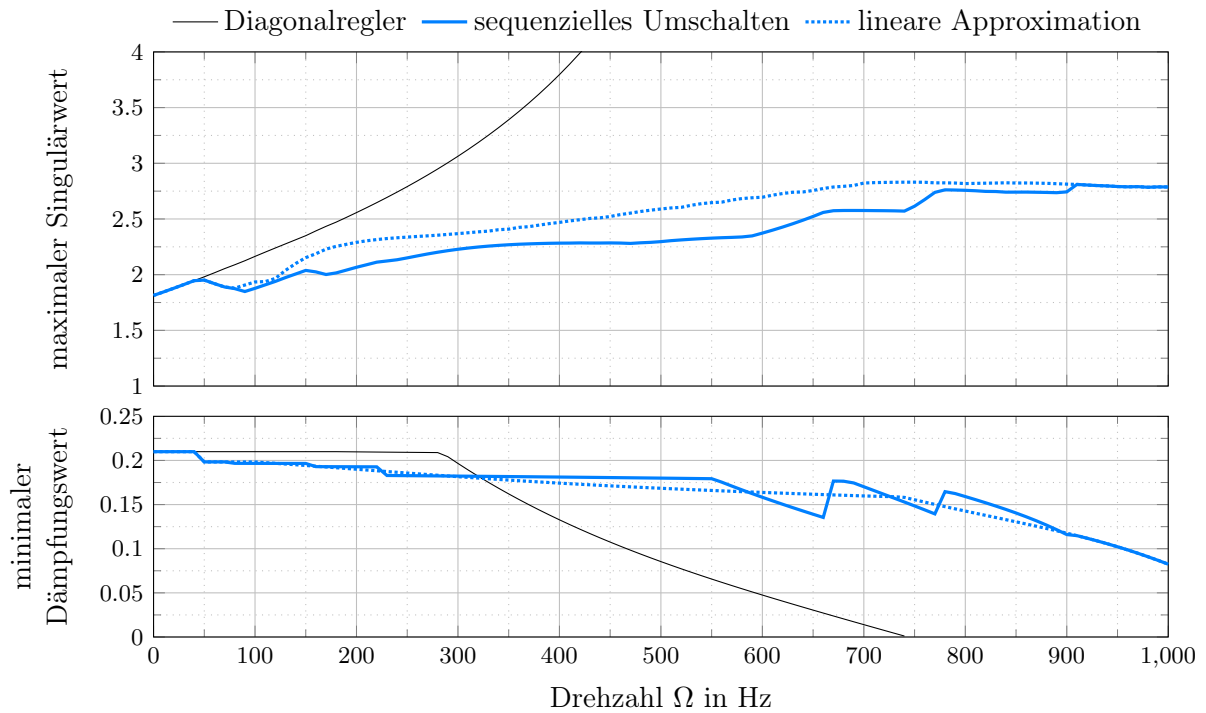


Abbildung 6.20: Verlauf des maximalen Singulärwerts und der minimalen Dämpfungswerte für die parallele Hochpass/Tiefpass Querkopplung

## 6.5 Vergleich der vorgestellten Methoden

Basierend auf der Möglichkeit zur Kompensation der Magnetlagersteifigkeiten sowie anteilmäßig des gyroskopischen Effekts, wurde in [18] die sogenannte decoupled PID Methodik vorgestellt, mit der es möglich ist durch einfache PID-Regler ein näherungsweise entkoppeltes System zu stabilisieren. Aufbauend auf dieser Grundidee wurden die beiden Kompensationen fallen gelassen, die gewählte PID-Reglerstruktur jedoch für eine  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese beibehalten. Es wurde gezeigt, dass auch für das vollständige Modell nach Gleichung 3.22 eine PID-Reglermatrix in Diagonalform entworfen werden kann, die das System stabilisiert. Die Robustheitsanforderung nach Norm ISO 14839-3 ist jedoch nur für sehr niedrige Drehzahlen zu erfüllen.

Um den Bereich in dem der Regler genügend Robustheit aufweist, vergrößern zu können, wurde die Reglermatrix um Querkopplungselemente erweitert. Hierbei stellt die Methode der PD-Querkopplung und die damit einhergehende Erweiterung der P- und D-Matrizen um Querkopplungen, die naheliegendste Lösung dar. Für die diagonal angeordneten PID-Regler ist der I-Anteil von besonderer Bedeutung, da erst dieser dafür sorgt, dass der Rotor mittig im Luftspalt gehalten wird. Im Allgemeinen ist der I-Anteil dafür zuständig, niederfrequente oder stationäre Abweichungen auszuregulieren. Da für die Querkopplungselemente solch eine Anforderung nicht besteht, wurde hier auf den I-Anteil verzichtet. Basierend auf den berechneten

Parametern konnte ein parametervarianter Regler entwickelt werden, der bis zur Nenndrehzahl genügend Robustheit aufweist. Durch die Erhöhung der Linearisierungsgrenze über die berechneten Parameter hinaus, konnte diese Drehzahl weiter erhöht werden. Im Vergleich zu den Methoden der Hochpass/Tiefpass-Kombinationen liefert die PD-Querkopplung simulativ jedoch nur unzureichende Ergebnisse. Sind prinzipiell die Phasengänge der berechneten PD-Querkopplungen und jene der Hochpass/Tiefpass-Kombinationen äußerst ähnlich, so liegt im Betragsgang der PD-Querkopplung ein weitläufiger Nachteil. Mit dem Koeffizienten  $K_{p,13}$  sowie  $K_{p,31}$  kann im Betragsgang nur der Verstärkungswert für niedrige Frequenzen vorgegeben werden, jener für hohe Frequenzen stellt sich als Funktion der übrigen Parameter dar und kann somit nicht frei gewählt werden. Dies stellt den Grund dar, weswegen die PD-Regelung nur jeweils auf die Nutations- oder Präzessionseigenmode optimiert werden kann.

Mit der speziellen Kombination der Hoch- und Tiefpassfilter konnten die Eigenschaften des Phasengangs der PD-Regelung beibehalten werden und gleichzeitig die Eingriffsmöglichkeit auf den Betragsgang verbessert werden. Für die serielle als auch die parallele Hochpass/Tiefpass-Kombination ist es möglich die Verstärkungsfaktoren für niedrige sowie hohe Frequenzen eigenständig vorzugeben und somit auf beide Eigenmoden des Rotors wirken zu können. Dies zeigt sich auch in den durchgängig besseren Ergebnissen gegenüber der PD-Querkopplung.

Zum abschließenden Vergleich sind in Abbildung 6.21, jeweils der sequenziell umschaltende Regler und der Regler mit stückweise linearisierten Parametern für die drei vorgestellten Methoden, sowie ein methodenübergreifender Vergleich dargestellt. Hieraus ist ersichtlich, dass im Hinblick auf den maximalen Singulärwert die parallele Hochpass/Tiefpass-Kombination die besten Ergebnisse liefert. Abschließend sei erwähnt, dass die Grenzfrequenz in Abstimmung mit den mechanischen Eigenschaften der zugrundeliegenden Struktur gewählt werden muss und sich erst daraus die favorisierende Methode ergibt.

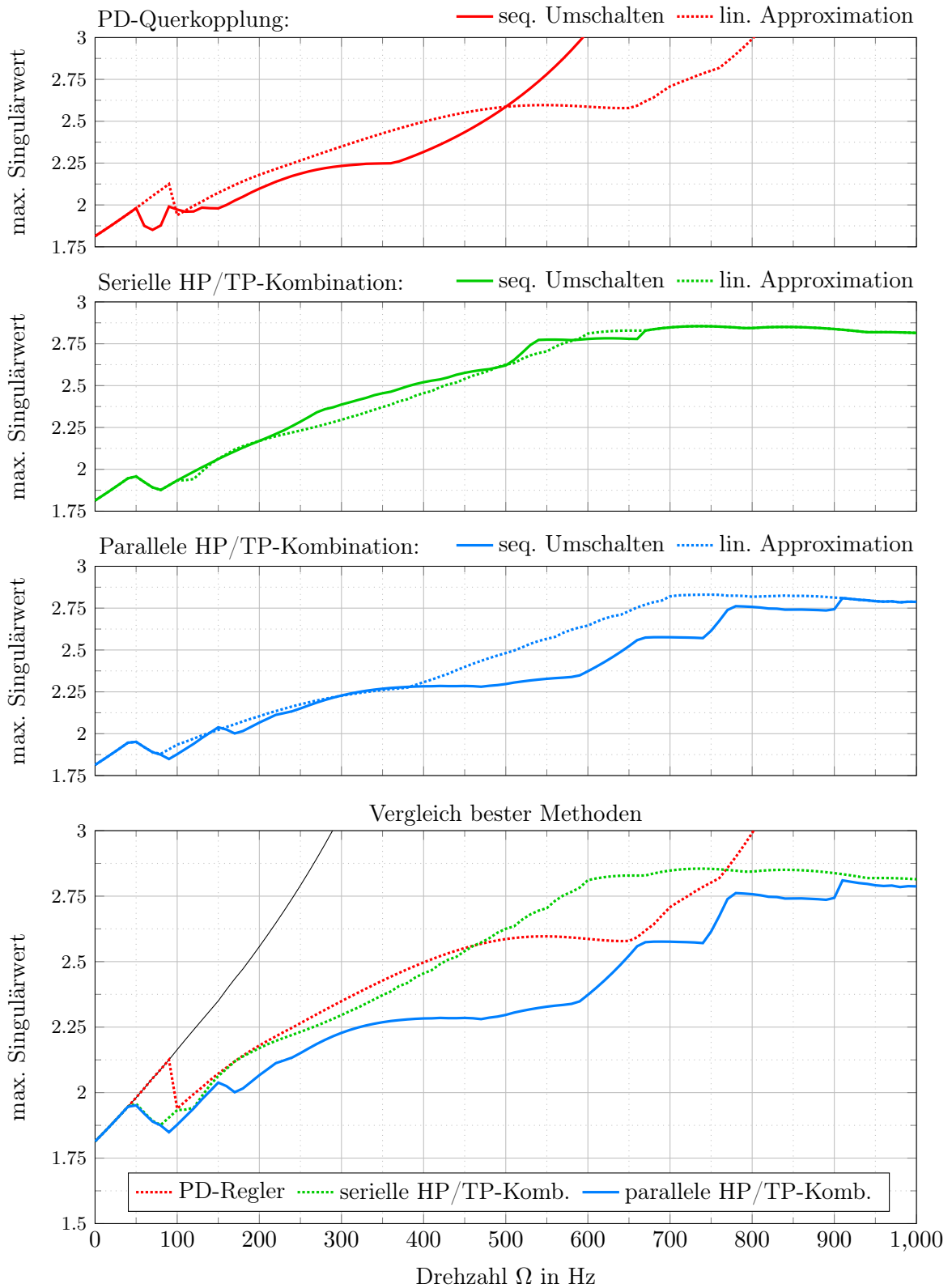


Abbildung 6.21: Vergleich der maximalen Singulärwerte der unterschiedlichen Querkopplungs-Methoden

## 7 Messergebnisse

Dieses Kapitel dient zur Darstellung der Messergebnisse, auf deren Basis der Nachweis zur Erfüllung der gegebenen Anforderungen an die Regelung erfolgt. Hierfür wurden unterschiedliche Messungen am Prüfstand durchgeführt, die in den folgenden Abschnitten zusammengefasst werden. Im vorangegangenen Kapitel wurde aus den für unterschiedliche Drehzahlen berechneten Parametern jeweils zwei parametervariante Regler generiert. Ein Regler dessen Querkopplungsparameter mit der Drehzahl sequenziell umgeschaltet werden und ein Regler dessen Querkopplungsparameter linear mit der Drehzahl verknüpft sind.

Die Regelung wurde mittels einem digitalen Signalprozessor (kurz DSP) mit einer Abtastzeit von  $T_a = 0.0001$  s realisiert. Die Entwicklung der Regelung erfolgte im zeitkontinuierlichen Bereich, somit wird vor der Darstellung der Messergebnisse, im ersten Abschnitt auf den Versuchsaufbau und die Implementierung eingegangen.

### 7.1 Versuchsaufbau und Implementierung

Die Drehzahlinformation ist für die Funktionalität der Regelung wie sie in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellt wurde, von fundamentaler Bedeutung. Zum einen werden die zusätzlichen Querkopplungsterme abhängig von der Drehzahl ein- sowie ausgeschaltet. Zum anderen sind Reglerparameter stückweise linearisiert und stehen in affiner Beziehung mit der Drehzahl. Für die durchgeführten Messungen stand die Drehzahlinformation über den Motorcontroller sowie einen im DSP implementierten Drehzahlbeobachter zur Verfügung. Diese beiden Quellen unterscheiden sich lediglich im sehr niedrigen Drehzahlbereich in ihrer Genauigkeit. Für die durchzuführenden Messungen wurde die Drehzahlinformation vom Beobachter verwendet, da dieser auch bei unterbrochener Kommunikation zwischen DSP und Motorcontroller die Drehzahlinformation zur Verfügung stellt.

Die Auslegung der Regelung erfolgte durchgängig im zeitkontinuierlichen Bereich, gekennzeichnet durch die *Laplace Variable*  $s$ . Da die Regelung am Prüfstand in einem digitalen Signalprozessor mit einer Abtastrate von 10 kHz erfolgt, müssen die zeitkontinuierlichen Regler diskretisiert werden. Die Diskretisierung eines zeitkontinuierlichen Systems führt dazu, dass stabile Pole welche in der linken, abgeschlossenen Halbebene zu liegen kommen in das Innere des Einheitskreises der komplexen  $z$ -Ebene abgebildet werden. In [15] findet sich die

*Bilineartransformation nach Tustin*

$$q = \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1}, \quad (7.1)$$

welche die Eigenschaft aufweist, die Punkte innerhalb des Einheitskreises der komplexen  $z$ -Ebene auf die linke, abgeschlossene Halbebene des  $q$ -Koordinatensystems abzubilden, wodurch sich ähnlich dem zeitkontinuierlichen Fall, rationale Übertragungsfunktionen in  $q$  ergeben. Die Umkehrtransformation, für den Übergang von der  $z$ -Ebene auf die  $q$ -Ebene errechnet sich zu

$$z = \frac{1 + \frac{T_a}{2}q}{1 - \frac{T_a}{2}q}. \quad (7.2)$$

Im Grenzfall  $T_a \rightarrow 0$  geht die  $q$ -Übertragungsfunktion eines Abtastsystems in die zugehörige kontinuierliche Übertragungsfunktion  $G(s)$  über. Auf Basis dieser Näherung kann ein vereinfachter Digitalreglerentwurf durchgeführt werden. Die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  kann mittels der Tustin-Näherung

$$G(z) \approx G(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1}} \quad (7.3)$$

berechnet werden. Um die Implementierung der Regelung zu vereinfachen, ist es zweckmäßig, alle Übertragungsfunktionen als *Infinite Impulse Response*-Filters (kurz IIR) aufzufassen und in die Form

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (7.4)$$

zu bringen. Durch die Festlegung des Parameters  $a_0 = 1$  lautet die auf Gleichung 7.4 basierende Differenzgleichung für den aktuellen Ausgang

$$y[k] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_n u[k-n] - a_1 y[k-1] - \dots - a_n y[k-n] \quad (7.5)$$

wobei die Ausdrücke  $[k-1]$  bis  $[k-n]$  auf die vorangegangenen Abtastwerte des Ein- sowie Ausgangs verweisen. Mit der Wahl dieser Implementierung ist es möglich alle Übertragungsfunktionen der Regelung, sei es ein PID-Regler, Hoch- oder Tiefpässe mit einer einheitlichen Struktur abzubilden.

Würde man ausgehend vom zeitkontinuierlichen Bereich die Differentialgleichungen anstelle der Übertragungsfunktionen diskretisieren, so stellt die Tustin-Näherung nach Gleichung 7.3 das *Heun-Verfahren* dar. Hierbei handelt es sich um ein Einschrittverfahren der Runge-Kutta-Klasse welches im Gegensatz zum bekannten expliziten *Euler-Verfahren* ein Trapez anstelle eines einfachen Rechtecks zur Approximation der Lösung des zugrundeliegenden Differentialgleichungssystems verwendet.

## 7.2 Berücksichtigung des elastischen Verhaltens des Rotors

Im Laufe der experimentellen Untersuchungen hat sich herausgestellt, dass zur Sicherstellung der Funktionsweise der berechneten Regler diverse Änderungen in den getroffenen Annahmen erfolgen müssen. In [21] wird beschrieben, dass die Biegemoden im hohen Frequenzbereich nicht nur durch eine positive Phase der Reglerübertragungsfunktion  $G_r(s)$  stabilisiert werden kann, sondern auch über den negativen Phasenbereich. In Abbildung 7.1 sind die stabilisierenden und destabilisierenden Phasenquadranten der Reglerübertragungsfunktion dargestellt. Die Projektion der Reglerübertragungsfunktion  $G_r(j\omega)$  auf die imaginäre Achse entspricht einer Phasenverschiebung von  $90^\circ$  und stellt im Allgemeinen einen dämpfenden Effekt dar.

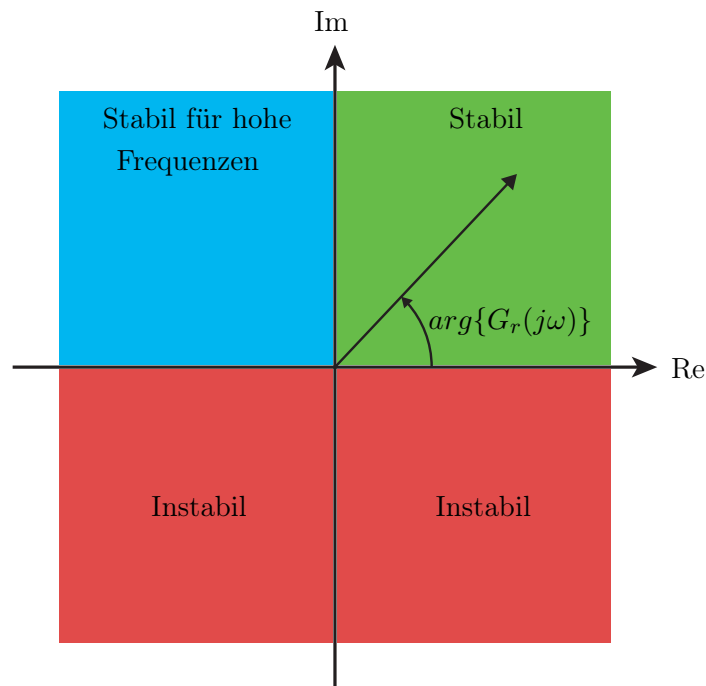


Abbildung 7.1: Stabilisierende Wirkung des Reglers auf die Biegemoden

Wie in den vorangegangenen Kapiteln ausführlich erörtert, weist ein flexibler Rotor im Gegensatz zu einem starr modellierten, theoretisch unendlich viele Eigenmoden auf. Die Annahme eines starren Rotors wurde getroffen, da die Modellierung eines flexiblen Rotors ungleich komplexer ist. Die Frequenzen der Biegemoden sind durch herstellerseitige Messungen bekannt und in Abbildung 7.2 dargestellt. Da zwischen den Frequenzen des Starrkörpers (vgl. Abb. 3.3) und den flexiblen Eigenfrequenzen ein hinreichend großer Frequenzabstand vorliegt, kann die Stabilisierung des Starrkörpers getrennt von der Stabilisierung der flexiblen Moden erfolgen. Damit die Phasenverschiebung der Reglerübertragungsfunktionen bei den auftretenden Resonanzfrequenzen im richtigen Phasenquadranten liegt und eine hinreichende Dämpfung der Biegemoden erfolgt, wird der bereits erwähnte Tiefpassfilter 2. Ordnung verwendet.

Wie erstmals in Kapitel 3 erwähnt, wurden die vorangegangenen Regelungsstrategien an zwei verschiedenen Turbomolekularpumpen analysiert. Aufgrund der unterschiedlichen Abmessungen der beiden Maschinen sind bei der zweiten Pumpe zusätzlich zu den flexiblen Biegemoden

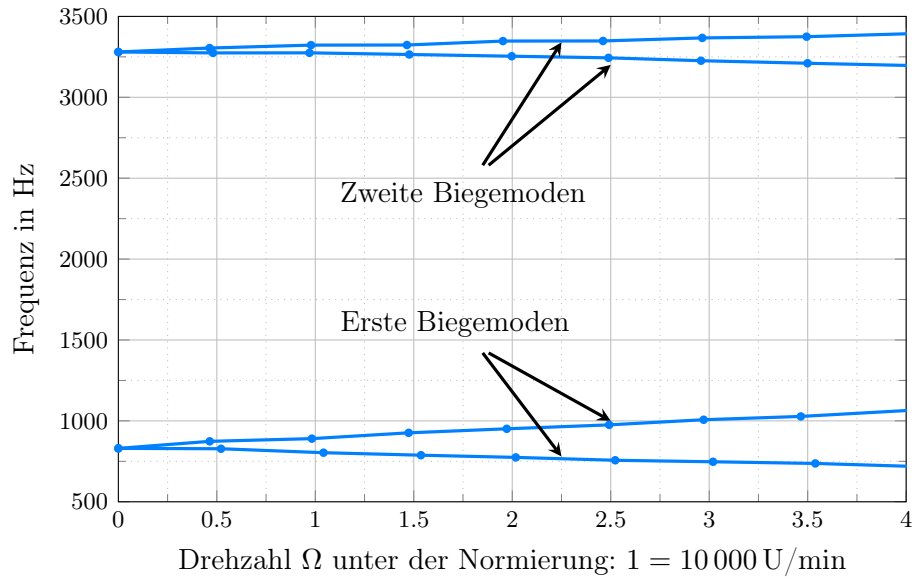


Abbildung 7.2: Herstellerseitige Messung der Eigenfrequenzen der Turbomolekularpumpe 1

Resonanzfrequenzen bedingt durch das Schaufelrad zu berücksichtigen. Diese liegen im Frequenzbereich unterhalb der ersten Biegemode und sind in Abbildung 7.3 dargestellt. Da die Schaufelfrequenzen für Rotoren desselben Typus variieren, handelt es sich um eine Schar von Frequenzverläufen.

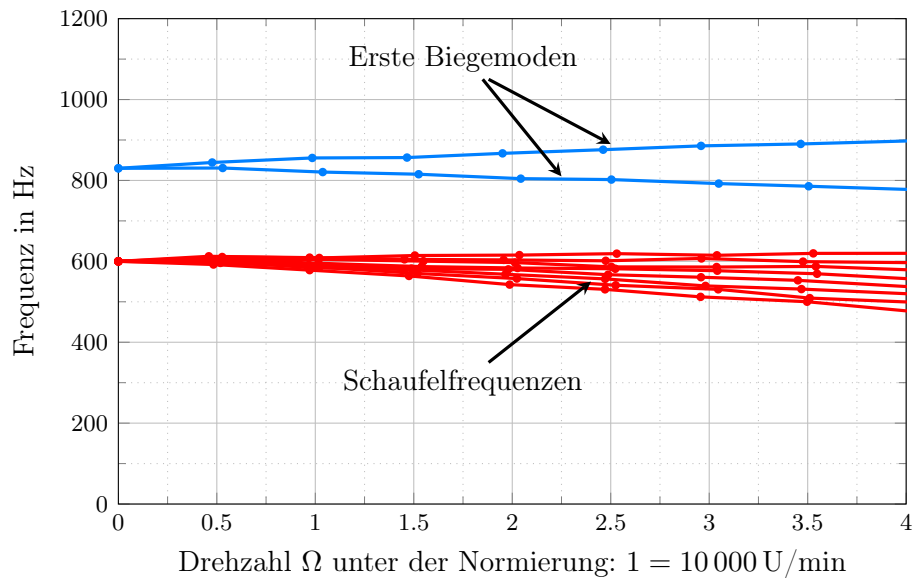


Abbildung 7.3: Herstellerseitige Messung der Eigenfrequenzen der Turbomolekularpumpe 2

Durch die Wahl der Grenzfrequenz  $f_c = 550$  Hz des Tiefpassfilters 2. Ordnung für die erste Turbomolekularpumpe liegt eine ausreichende Dämpfungsbandbreite der Biegemoden vor. Zusätzlich ist der Abstand der Eigenfrequenzen des Starrkörpers und des flexiblen Körpers groß genug, damit das Filter die Stabilisierung des Starrkörpers nicht beeinflusst. Wie aus Abbildung 7.3 ersichtlich, liegen die Eigenfrequenzen der zweiten Turbomolekularpumpe deutlich

niedriger, wodurch die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters auf  $f_c = 400$  Hz abgesenkt wurde. Aufgrund des geringeren Abstands zwischen den Starrkörper- und den flexiblen Eigenfrequenzen, kann es zu einer gewissen Beeinflussung der Regelung des Starrkörpers kommen. Für die Auslegung der Regelung eines solchen Systems erweist sich eine Kombination aus FEM und dynamischer Regelkreissimulation als hilfreich.

Zur Bereitstellung einer hinreichenden Dämpfung der Eigenfrequenzen, muss dafür gesorgt werden, dass im Frequenzbereich in dem die Eigenmoden auftreten, die Phase der Reglerübertragungsfunktion im stabilisierenden Bereich zu liegen kommt. Für die Drehung in den negativen Phasenbereich, um stabilisierend bei hohen Frequenzen zu wirken, dient zum einen der Tiefpassfilter 2. Ordnung. Zur Sicherstellung einer ausreichenden Phasenverschiebung wurde ein Lead-Lag Glied der Form

$$LL(s) = \frac{\frac{1}{(2\pi f_{Lead})^2} s^2 + \frac{2D_{Lead}}{2\pi f_{Lead}} s + 1}{\frac{1}{(2\pi f_{Lag})^2} s^2 + \frac{2D_{Lag}}{2\pi f_{Lag}} s + 1} \quad (7.6)$$

nach dem Tiefpassfilter 2. Ordnung hinzugefügt, welches eine zusätzliche negative Phasendrehung bereitstellt. Des Weiteren musste für die implementierten Methoden die Grenzfrequenz  $f_c$  und der Dämpfungskoeffizient  $D$  des Tiefpassfilters sowie die Frequenzen des Lead-Lag-Gliedes individuell angepasst werden.

Die verwendeten Parameter der Filter für beide Maschinen sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Für die Methode der PD-Querkopplung konnten die in Kapitel 6 gewählten nominellen Werte für den Tiefpass 2. Ordnung verwendet werden, welche auch in der  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese berücksichtigt wurden. Für die serielle Hochpass/Tiefpass-Kombination wurde die Grenzfrequenz  $f_c$  und der Dämpfungskoeffizient  $D$  verringert, damit die Drehung der Phase in den negativen Bereich schneller erfolgt, um sowohl die rückwärts als auch vorwärts drehende Biegemode zu stabilisieren.

Aufgrund der gewählten Struktur der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination, wirkt das verwendete Lead-Lag-Glied nur im Zweig der diagonal angeordneten PIDT1-Regler. Für die Reglerübertragungsfunktionen  $G_{13}(s)$  sowie  $G_{31}(s)$  erfolgt somit keine zusätzliche negative Phasendrehung. Sei nun die Drehung der Phase durch den Hochpassfilter sowie des nachgeschalteten Tiefpassfilters 2. Ordnung bei den Frequenzen der Biegemoden vollständig abgeschlossen, wäre diese, auch durch die zusätzliche Phasenverschiebung der Abtastung, nur sehr knapp im stabilen Bereich (vergl. blauer Bereich in Abb. 7.1). Aus diesem Grund wurde für die Realisierung der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination der Ansatz gewählt, die Phase nicht in den negativen Bereich zu schieben, sondern im positiven Phasenbereich zu verweilen (vergl. grüner Bereich in Abb. 7.1). Für die Umsetzung dieser Vorgehensweise wurden bei der Turbomolekularpumpe 1 die Frequenzen der Hochpassfilter auf  $\omega_{HP,13} = \omega_{HP,31} = 2\pi \cdot 1300$  rad/s fixiert und der zusätzliche Tiefpassfilter mit  $f_{damp} = 2000$  Hz und  $D_{damp} = 0.8$  parametrisiert. Der Tiefpassfilter im Zweig der diagonal angeordneten PIDT1-Regler konnte nahe der nominellen Werte belassen werden.

## Turbomolekularpumpe 1

PD-Querkopplung:	$f_c = 550$ Hz	$D = 0.20$
	$f_{Lag} = 560$ Hz	$D_{Lag} = 0.20$
	$f_{Lead} = 780$ Hz	$D_{Lead} = 0.20$
serielle HP/TP-Kombination:	$f_c = 480$ Hz	$D = 0.15$
	$f_{Lag} = 540$ Hz	$D_{Lag} = 0.20$
	$f_{Lead} = 720$ Hz	$D_{Lead} = 0.20$
parallele HP/TP-Kombination:	$f_c = 525$ Hz	$D = 0.15$
	$f_{Lag} = 560$ Hz	$D_{Lag} = 0.20$
	$f_{Lead} = 780$ Hz	$D_{Lead} = 0.20$

## Turbomolekularpumpe 2

PD-Querkopplung:	$f_c = 420$ Hz	$D = 0.12$
	$f_{Lag} = 413$ Hz	$D_{Lag} = 0.40$
	$f_{Lead} = 550$ Hz	$D_{Lead} = 0.40$
serielle HP/TP-Kombination:	$f_c = 400$ Hz	$D = 0.20$
	$f_{Lag} = 410$ Hz	$D_{Lag} = 0.60$
	$f_{Lead} = 650$ Hz	$D_{Lead} = 0.60$
parallele HP/TP-Kombination:	$f_c = 400$ Hz	$D = 0.20$
	$f_{Lag} = 410$ Hz	$D_{Lag} = 0.60$
	$f_{Lead} = 650$ Hz	$D_{Lead} = 0.60$

Tabelle 7.1: Gewählte Filterparameter für die Implementierung

Für die Implementierung der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination auf der zweiten Turbomolekularpumpe wurde die selbe Vorgehensweise gewählt, wobei die Frequenzen der Hochpassfilter auf  $\omega_{HP,13} = \omega_{HP,31} = 2\pi \cdot 1300$  rad/s fixiert wurden und für den zusätzlichen Tiefpassfilter  $f_{damp} = 1800$  Hz und  $D_{damp} = 0.8$  gewählt wurde.

Die Darstellungen in den folgenden Abschnitten 7.3 und 7.4 beziehen sich vollständig auf Messungen des Magnetlagersystems 1. Die Messergebnisse des zweiten Systems sind in Abschnitt 7.6 zusammengefasst.

### 7.3 Compliance

Der Begriff *Compliance* kommt aus dem mechanischen Bereich, stellt ein Maß für die Dehnbarkeit von Körperstrukturen dar und dient zur Quantifizierung der Elastizität. Unter einer regelungstechnischen Betrachtung stellt die Compliance-Funktion das frequenzabhängige Ver-

hältnis der anregenden Stellgröße zur Auslenkung des Ausgangs dar und ermöglicht somit die Beurteilung der dynamischen Steifigkeit. Es wird damit die sogenannte frequenzabhängige Nachgiebigkeit des Systems bestimmt.

Die Compliance-Funktion wurde in der Regelungsstrategie nicht berücksichtigt, somit sind die Verläufe bei den unterschiedlichen Methoden näherungsweise gleich. Aus diesem Grund ist in der folgenden Abbildung 7.4 exemplarisch die Compliance-Funktion eines rotatorischen Freiheitsgrades dargestellt.

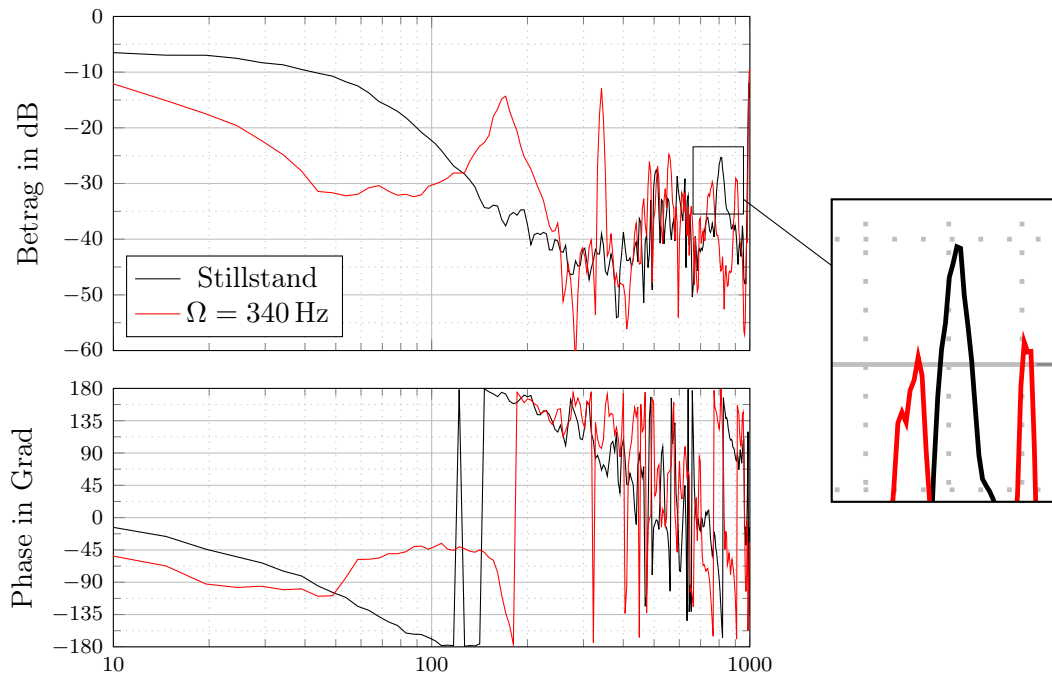


Abbildung 7.4: Compliance-Funktion für den rotatorischen Zustand  $\beta$  mit stückweise linearisierter PD-Querkopplung

Wie zu erkennen ist, besteht ein deutlicher Unterschied zwischen der Compliance-Funktion im Stillstand und bei höheren Drehzahl. Dies ist auf den gyroskopischen Effekt zurückzuführen, der das Verhalten der rotatorischen Zustände für Drehzahlen ungleich Null deutlich beeinflusst. Würde man wie in [18] vorgeschlagen, den gyroskopischen Effekt teilweise kompensieren, würde sich der Verlauf für  $\Omega = 340$  Hz jenem des Stillstands annähern. Im Phasengang können die Frequenzen der Eigenmoden abgelesen werden, wobei es sich um die Punkte handelt, an denen die Phase eine Drehung von  $-90^\circ$  annimmt. Im Stillstand kann eine Eigenmode bei ca. 41 Hz identifiziert werden. Diese teilt sich bei Drehzahl auf zwei Starrkörpermoden der Frequenz 19 Hz und 180 Hz auf. Des Weiteren ist im Betragsgang bei 340 Hz eine deutliche Spitze ersichtlich, welche mit der Drehzahl des Rotors zusammenfällt und unter dem Einfluss der Unwucht auf die Positionen entsteht. Zur Identifizierung der Biegemoden ist ein Bereich des Betragsgangs vergrößert dargestellt. Im Stillstand zeigt sich eine Biegemode bei ca. 800 Hz, welche sich ebenfalls mit der Drehzahl aufspaltet. Bei einer Drehzahl von  $\Omega = 340$  Hz liegen diese bei ca. 900 Hz und 760 Hz.

In Abbildung 7.5 ist exemplarisch die Compliance-Funktion eines transversalen Freiheitsgrades dargestellt. Im Gegensatz zum rotatorischen Freiheitsgrad bleibt für den transversalen Freiheitsgrad der Verlauf der Compliance-Funktion, im Vergleich zum Stillstand, mit der Drehzahl fast unverändert. Über die Matrix der Magnetlagersteifigkeiten  $\mathbf{B}_K \mathbf{K}_s \mathbf{B}_K^T$  besteht eine Kopplung zwischen  $\beta$  und  $x$  sowie zwischen  $\alpha$  und  $y$ . Da diese im Vergleich zur Kopplung der rotatorischen Freiheitsgrade durch den gyroskopischen Effekt jedoch vernachlässigbar kleiner ist, zeigt sich dieses fast drehzahlunabhängige Verhalten. Der einzige Unterschied stellt sich in der Spitze bedingt durch die Unwucht dar. Des Weiteren lässt sich nur eine Starrkörpermode bei ca. 50 Hz identifizieren, welche sich ebenfalls nicht mit der Drehzahl verändert. Ein weiterer Unterschied besteht in den hohen Frequenzen des Betragsgangs, wobei sich keine Biegemode identifizieren lässt. Grund dafür, dass sich die Biegemode nur in den rotatorischen Zuständen identifizieren lässt, ist die Form der Biegemode des hier verwendeten Rotors in Kombination mit der Anordnung der Sensoren.

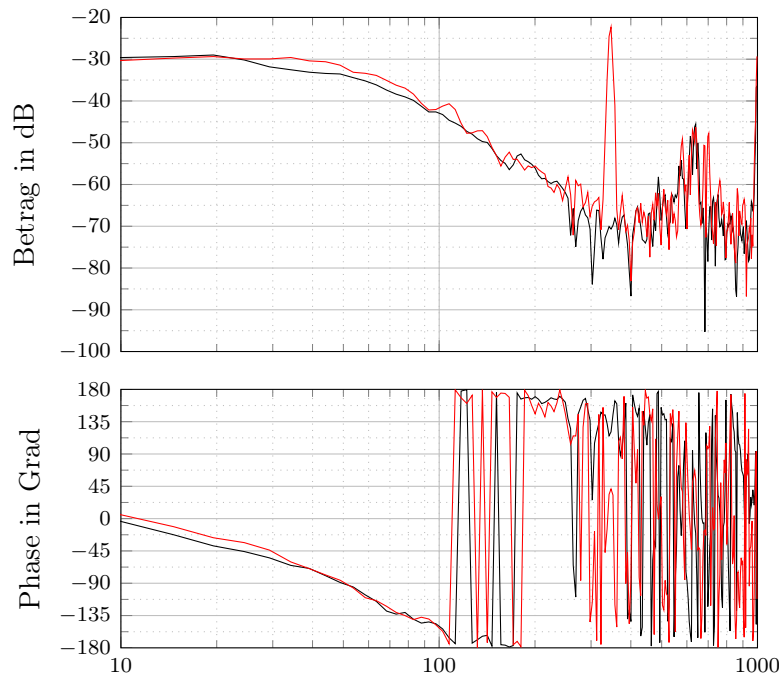


Abbildung 7.5: Compliance-Funktion für den transversalen Zustand  $x$  mit stückweise linearisierter PD-Querkopplung

## 7.4 Sensitivität im Stillstand

Nach der Norm ISO 14839-3 sind die Betragsgänge der Sensitivitätsmatrix von vorrangiger Bedeutung zur Beurteilung der Robustheit einer Regelung. Aufgrund der Systemdimension handelt es sich bei der Sensitivitätsmatrix um eine  $4 \times 4$ -Matrix, wobei nach der Norm ISO 14839-3 die Diagonalelemente  $S_{\beta\beta}$ ,  $S_{xx}$ ,  $S_{\alpha\alpha}$  und  $S_{yy}$  ausreichend sind. Aus [20] ist ersichtlich, dass zusätzlich die verkoppelten Sensitivitäten  $S_{\beta\alpha}$  und  $S_{\alpha\beta}$  der rotatorischen Zustände von großer Bedeutung für die Robustheit der Regelung sind. Für die soeben genannten ver-

koppelten Sensitivitäten beschreibt der erste Index die anregende Größe und der zweite die gemessene.

Für den Vergleich der drei implementierten Methoden wurden Sensitivitätsmessungen bei unterschiedlichen Drehzahlen durchgeführt. Zu Beginn sind in Abbildung 7.6 die Sensitivitäten im Stillstand dargestellt. Der gyroskopische Effekt verkoppelt die rotatorischen Zustände erst bei einem sich drehenden Rotor, somit sind im Stillstand die verkoppelten Sensitivitäten vernachlässigbar. Daher sind nur die Diagonalelemente der Sensitivitätsmatrix dargestellt.

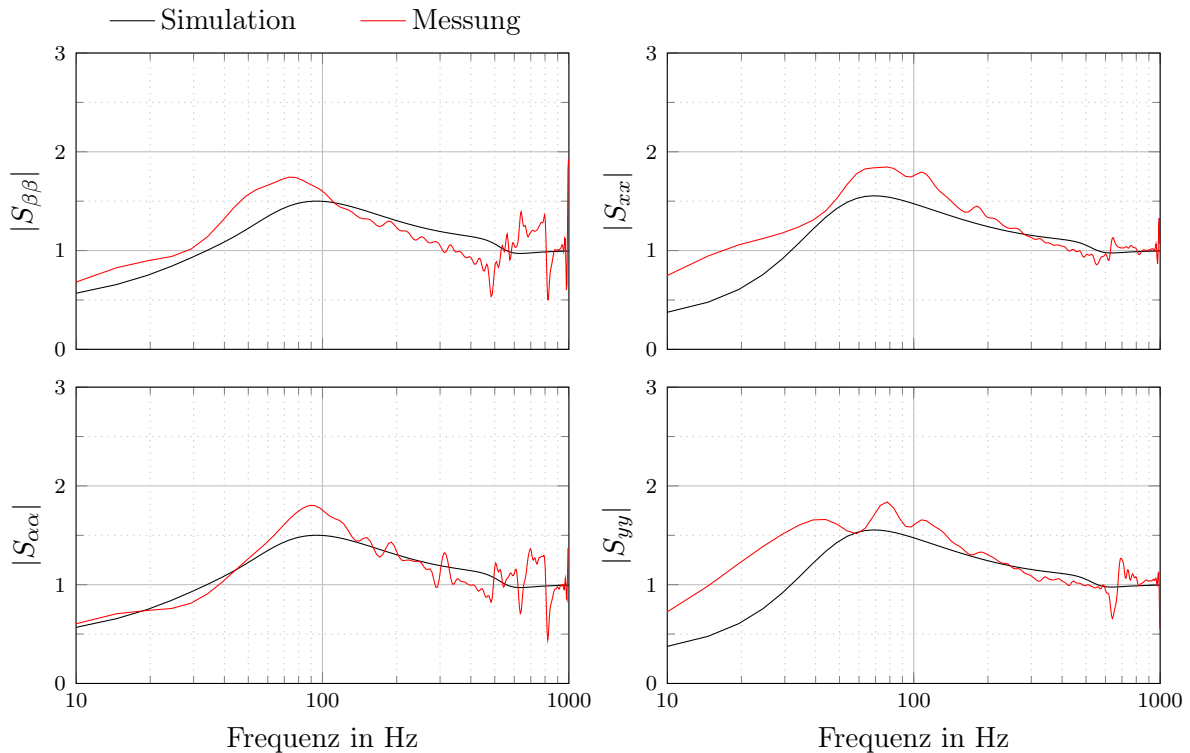


Abbildung 7.6: Diagonalelemente des Betragsgangs der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}$  im Stillstand

Die Abweichungen zwischen Messung und Simulation im Bereich höherer Frequenzen (400 Hz und aufwärts) ergeben sich durch die Vernachlässigungen diverser nichtlinearer Effekte. Diese nichtlinearen Effekte wurden im Modell nicht berücksichtigt und können somit nicht mit den Messungen abgeglichen werden. Des Weiteren sind gewisse Abweichungen im niederfrequenten Bereich zu erkennen. Die Frequenz sowie die Höhe des Sensitivitäts-Peaks hängt stark von den Werten der Kraft-Verschiebungs- und Kraft-Strom-Verhältnissen ab. Diese unterliegen im laufenden Betrieb, aufgrund von Erwärmung großen Schwankungen, wodurch die Messungen nur in gewissem Grad mit den Simulationen übereinstimmen. Der maximal auftretende Sensitivitätswert kann mit 1.89 abgelesen werden, wodurch die gestellten Robustheitsanforderungen für den Stillstand eingehalten werden.

Um nun die vorgestellten Methoden untereinander vergleichen zu können, sind in den folgenden Abbildungen die Sensitivitätsfunktionen aller Methoden für unterschiedliche Drehzahlen

dargestellt.

## 7.5 Sensitivität in Abhängigkeit der Drehzahl

Abbildung 7.7 zeigt die gemessenen Sensitivitätsfunktionen der drei implementierten Methoden für eine Drehzahl  $\Omega = 340$  Hz. Wie bereits bei den Darstellungen der Compliance-Funktionen in Abschnitt 7.3 sind an der Frequenz, welche mit der momentanen Rotordrehzahl  $\Omega$  übereinstimmt scharfe Spitzen zu erkennen. Diese ergeben sich durch den Einfluss der Unwucht auf die Messgrößen und sind für die Beurteilung der Robustheit vernachlässigbar.

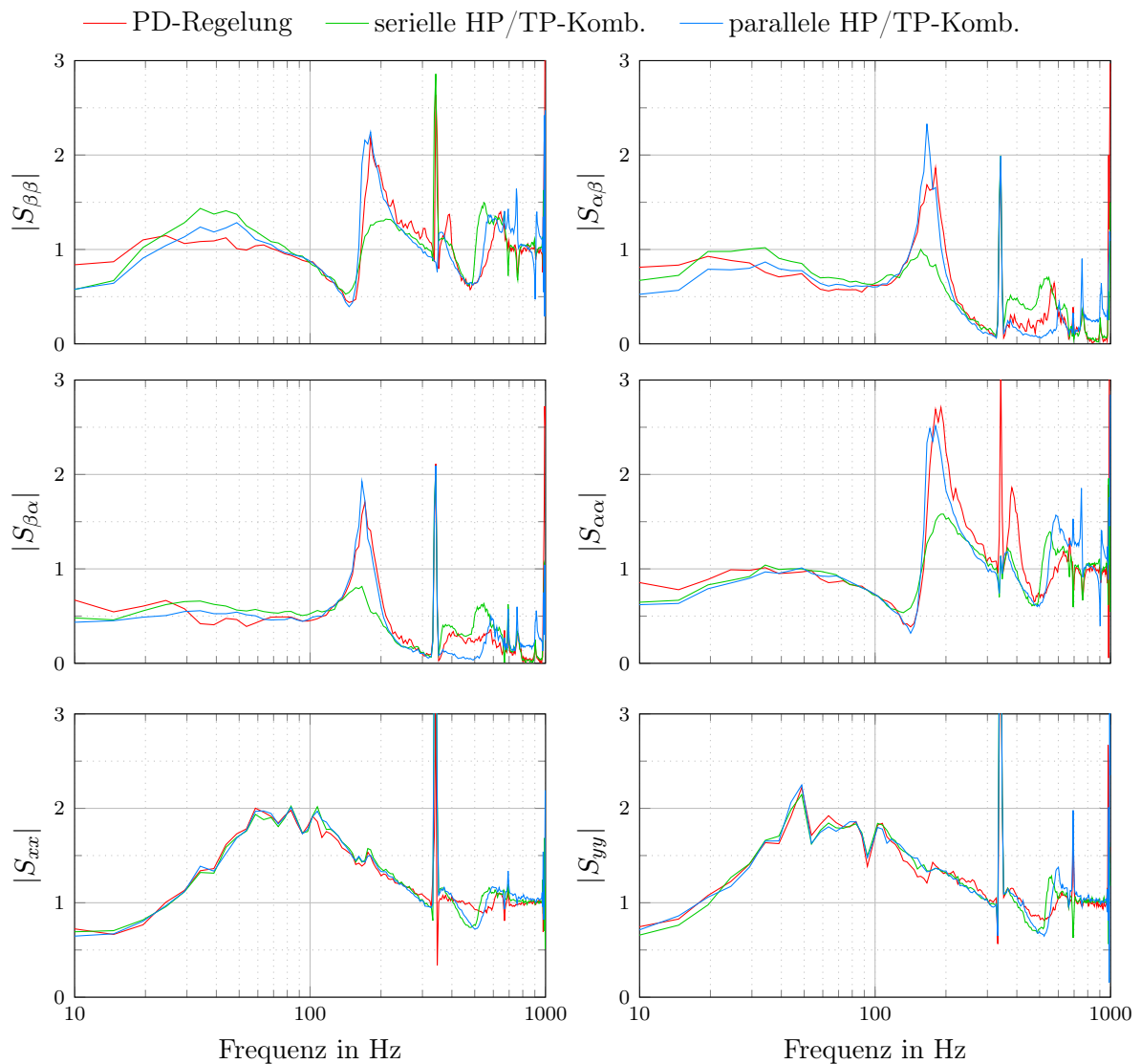


Abbildung 7.7: Gemessene Sensitivitätsfunktionen bei  $\Omega = 340$  Hz

Durch die Wahl der Querkopplungselemente  $G_{13}(s)$  und  $G_{31}(s)$ , welche nur auf die rotatorischen Zustände wirken, verbleiben für die Regelung der translatorischen Zustände  $x$  und  $y$

nur die beiden PID-Regler in der Diagonale der Reglermatrix nach Gleichung 6.2. Diese sind für alle drei Methoden ident, somit unterscheiden sich auch die Sensitivitätsfunktionen dieser Zustände kaum.

Abgesehen davon, dass der maximale Sensitivitätswert der seriellen Hochpass/Tiefpass-Kombination durch die translatorischen Sensitivitäten bestimmt wird, weisen die beiden anderen Methoden in den rotatorischen Zuständen deutlich ausgeprägtere Sensitivitäts-Peaks auf. Durch die Möglichkeit der Hochpass/Tiefpass-Kombinationen, auf die Präzessions- sowie die Nutationseigenmode des Rotors optimal Einfluss zu nehmen, kann die Sensitivität in den rotatorischen Zuständen besser minimiert werden. Diese Eigenschaft trifft auch auf die parallele Hochpass/Tiefpass-Kombination zu, hier kommt jedoch hinzu, dass es dieser Methode in der gegebenen Implementierung nicht möglich ist, die Biegemoden ausreichend zu dämpfen. Trotz der sehr deutlichen Anhebung und Fixierung der Grenzfrequenzen der Hochpassfilter auf 1300 Hz und der nachgeschalteten Tiefpassfilter auf 2000 Hz wird die Phase in den negativen Bereich gedreht und wirkt nicht ausreichend dämpfend. Zu dieser Drehung trägt die Phasenverschiebung durch die Abtastung sowie die Limitierung der Bandbreite der Aktuatoren bei. Die unzureichend gedämpfte Biegemode kann im Betragsgang  $|S_{\alpha\beta}|$  bei ca. 750 Hz identifiziert werden. Der Peak kann in allen rotatorischen Zuständen beobachtet werden, die Ausprägtheit unterscheidet sich jedoch aufgrund von Messungenauigkeiten. Durch die notwendigen Anpassungen der Hoch- und Tiefpasskoeffizienten in der parallelen Variante um näherungsweise im stabilisierenden Phasenbereich zu bleiben, verändert sich zusätzlich die Stabilisierungsfähigkeit der Starrkörpermoden. Aus diesem Grund sind zwischen der seriellen und parallelen Variante im Frequenzbereich zwischen 100 Hz und 200 Hz deutliche Unterschiede zu erkennen. Eine weitere Möglichkeit zur Identifizierung der instabilen Biegemoden bietet das Frequenzspektrum. Hierfür ist in Abbildung 7.8 das gemessene Frequenzspektrum des Zustandes  $\beta$  dargestellt.

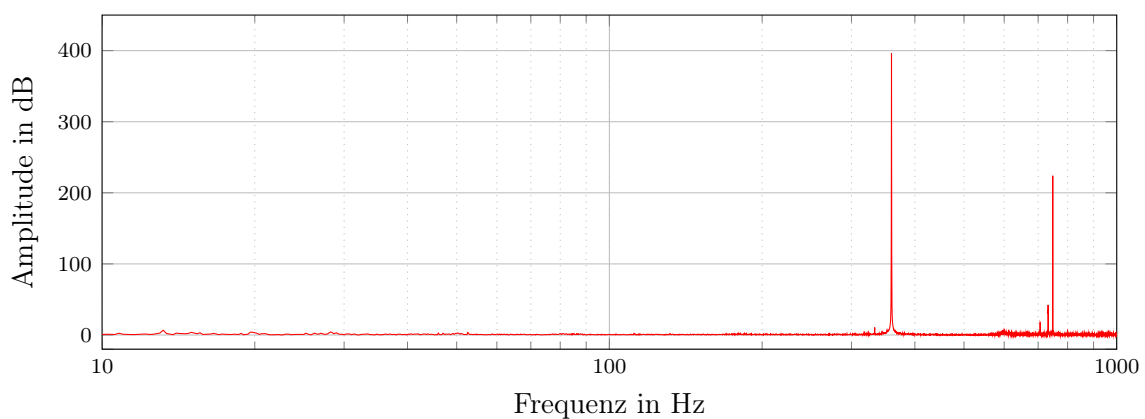


Abbildung 7.8: FFT des gemessenen Zustandes  $\beta$  bei paralleler Hochpass/Tiefpass-Kombination

Neben dem Peak bedingt durch die Unwucht ist wie bereits in den Sensitivitätsfunktionen ein weiterer Peak bei ca. 750 Hz zu erkennen. Diese Frequenz kann der rückwärts schwingenden Biegemode zugeordnet werden. Für die Drehzahl  $\Omega = 340$  Hz ist die Frequenz der Biegemode

zwar bereits deutlich zu erkennen, betraglich ist jedoch die Unwucht dominierend. Erhöht man die Drehzahl auch nur geringfügig, schwingt dieses Verhalten um und die Amplitude der Biegemode steigt deutlich an und destabilisiert das System.

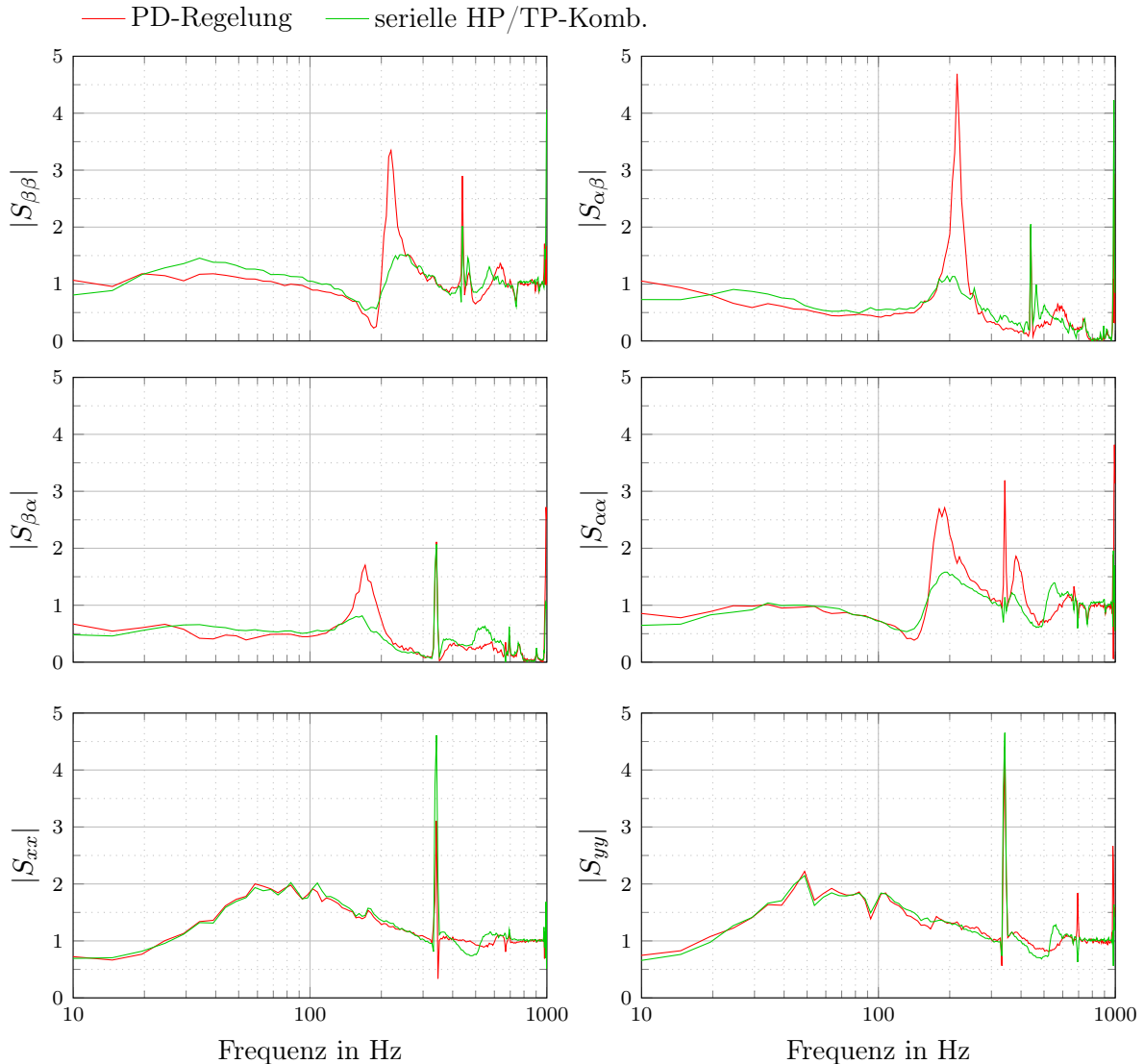


Abbildung 7.9: Gemessene Sensitivitätsfunktionen bei  $\Omega = 440$  Hz

Bei der Drehzahl  $\Omega = 440$  Hz konnte somit die Sensitivität nur noch für die Methode der PD-Querkopplung sowie der seriellen Hochpass/Tiefpass-Kombination gemessen werden, deren Darstellung in Abbildung 7.9 erfolgt. Bereits bei der vorangegangenen Messung aus Abbildung 7.7 konnten für die PD-Querkopplung, ähnlich der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination deutliche Spitzen in den Sensitivitätsfunktionen erkannt werden. Mit der gesteigerten Drehzahl sind diese deutlich angewachsen und überschreiten im Verlauf der Sensitivitätsfunktion  $S_{\alpha\beta}$  bereits den Wert 4.5. Mit zunehmender Drehzahl entfernen sich die Frequenzen der Präzessions- und Nutationseigenmode immer weiter voneinander. Durch die Einschränkung der PD-Regelung, nur auf eine der beiden Moden optimal wirken zu können, verfügt diese Methode nicht über die Fähigkeit die beiden Moden in ihren Frequenzen wieder zusammen-

zuführen, wodurch der Sensitivitäts-Peak kontinuierlich ansteigt. Für die Beurteilung der Robustheit durch die Norm ISO 14839-3 würden die Diagonalelemente ausreichen, in Abbildung 7.9 ist jedoch zu erkennen, dass vor allem die Querkopplungselemente die Sensitivität des Gesamtsystems dominieren.

Des Weiteren ist eine deutliche Anisotropie der Lager durch die Zustände  $\beta$  und  $\alpha$  zu erkennen. Diese Abweichungen sind auf Unterschiede der Aktuatoren sowie Stromregler zurückzuführen. Aufgrund der Überschreitung der Sensitivitätsgrenze wurden für die PD-Querkopplung keine Messungen bei höheren Drehzahlen durchgeführt.

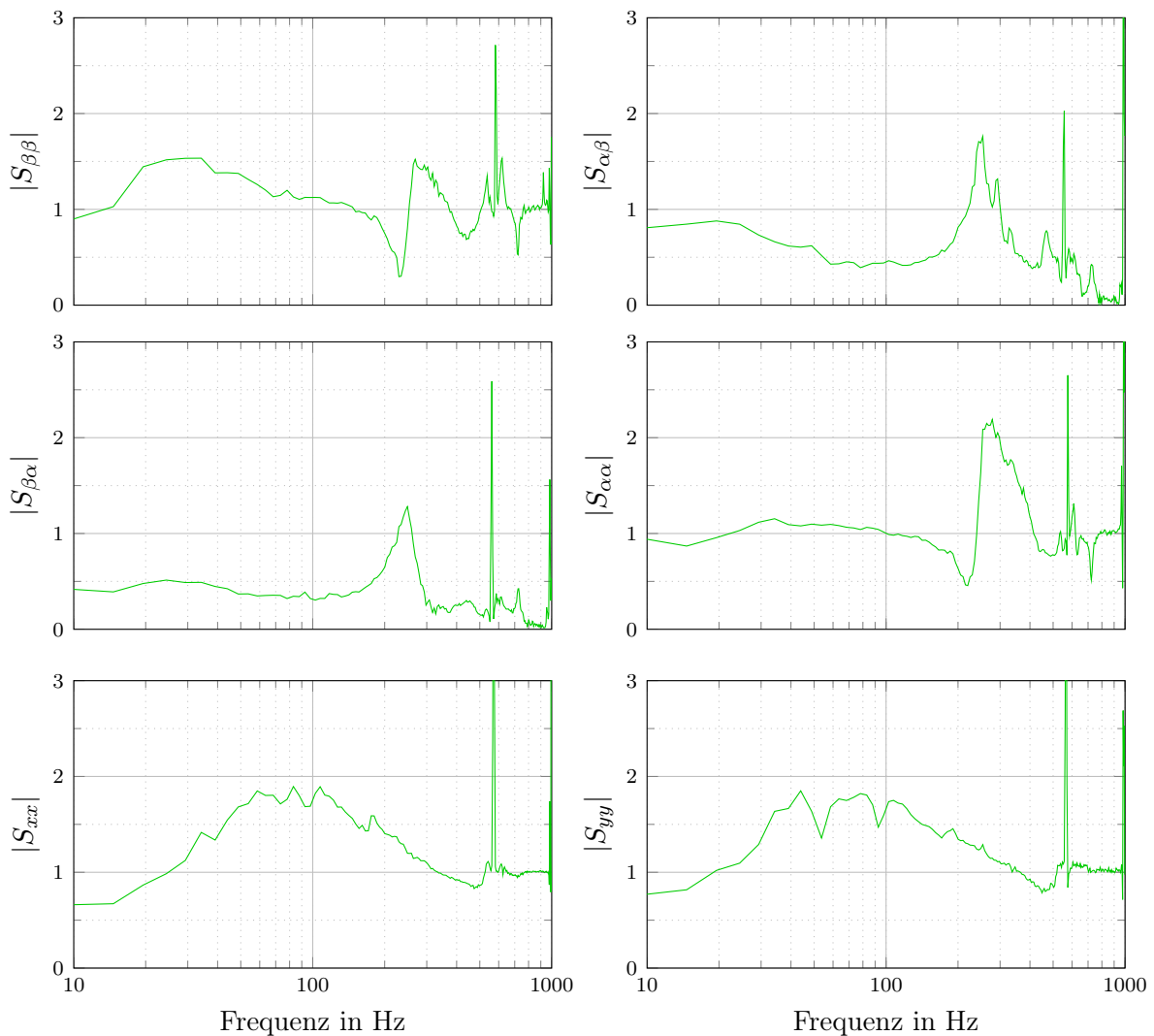


Abbildung 7.10: Gemessene Sensitivitätsfunktionen bei Nenndrehzahl (583 Hz)

Für die serielle Hochpass/Tiefpass-Kombination sind durch die Drehzahlerhöhung kaum Unterschiede zu erkennen. Der maximale Sensitivitätswert wird abermals durch die transversalen Zustände bestimmt. In den rotatorischen Zuständen liegen die maximalen Werte jedoch nur im Bereich um 1.5. Aufgrund der vorangegangenen Erkenntnisse der Limitierungen der PD-Querkopplung sowie der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination konnte bei Nenndrehzahl

nur noch Sensitivitäten der seriellen Variante gemessen werden. Die Messergebnisse sind in Abbildung 7.10 dargestellt. Erstmals wird der maximale Sensitivitätswert durch einen rotatorischen Zustand definiert, der jedoch nur geringfügig über 2 zu liegen kommt. Erneut ist ein sehr anisotropes Verhalten der Lager zu erkennen, wobei sich einerseits die maximalen Werte der beiden rotatorischen Zustände um 0.7 unterscheiden und auch im Frequenzbereich unter 100 Hz deutliche Unterschiede erkennbar sind. Nach der Beurteilung durch die Norm ISO 14839-3 weist die serielle Hochpass/Tiefpass-Kombination bei Nenndrehzahl ausreichend Robustheit auf. Der Betrieb bei höheren Drehzahlen wäre somit in Bezug auf den Regler möglich, hier ist jedoch eine fundierte Beurteilung der mechanischen Eigenschaften vorrangig.

Für die Beurteilung der Robustheit wurden in den Simulationen nicht die maximalen Werte der Betragsgänge der Sensitivitätsmatrix herangezogen, sondern die maximalen Singulärwerte. Um einen Vergleich der maximalen Singulärwerte auf Basis der Messungen mit jenen der Simulationen darstellen zu können, wurden die Messdaten gefiltert um diese anschließend durch Übertragungsfunktionen approximieren zu können. Die einzelnen Übertragungsfunktionen der Sensitivitätsmessungen wurden zur Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}$  zusammengefügt und der maximale Singulärwerte ermittelt. Die somit berechneten Werte der gemessenen Sensitivitätsfunktionen sind in Tabelle 7.2 dargestellt.

$\Omega$	PD-Querkopplung	serielle HP/TP-Kombination	parallele HP/TP-Kombination
340 Hz:	3.80	2.15	3.97
440 Hz:	6.39	2.32	-
580 Hz:	-	2.97	-

Tabelle 7.2: Berechnete maximale Singulärwerte aus den gemessenen Sensitivitäten bei unterschiedlichen Werten der Drehzahl

Es ist ersichtlich, dass die beiden Methoden, welche den Betrieb bei Nenndrehzahl nicht ermöglichen, deutliche Abweichungen aufweisen. Demgegenüber stimmen die berechneten Werte für die serielle Hochpass/Tiefpass-Kombination in guter Näherung mit den simulativen Ergebnissen überein.

## 7.6 Messungen am Magnetlagersystem 2

In Abschnitt 7.2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Regler nach den vorangegangenen Methoden auf zwei Prüfständen implementiert wurden. Das Magnetlagersystem des zweiten Prüfstands weist deutlich größere Abmessungen auf, was zu Eigenmoden in niedrigeren Frequenzbereichen führt. Für die Implementierung und die Sicherstellung der richtigen Phasenverschiebung der Reglerübertragungsfunktion  $G_r(s)$  wurden erneut Lead-Lag-Glieder in die Regelung integriert. Die Parameter wurden individuell abgestimmt und sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Das Hauptaugenmerk der Validierung der Regler am zweiten Prüfstand

galt nicht dem Vergleich der unterschiedlichen Methoden für diskrete Drehzahlen, sondern der maximal möglichen Drehzahl. Somit sind in den folgenden Abbildungen die gemessenen Sensitivitäten der einzelnen Methoden für deren maximal erreichbare Drehzahl dargestellt.

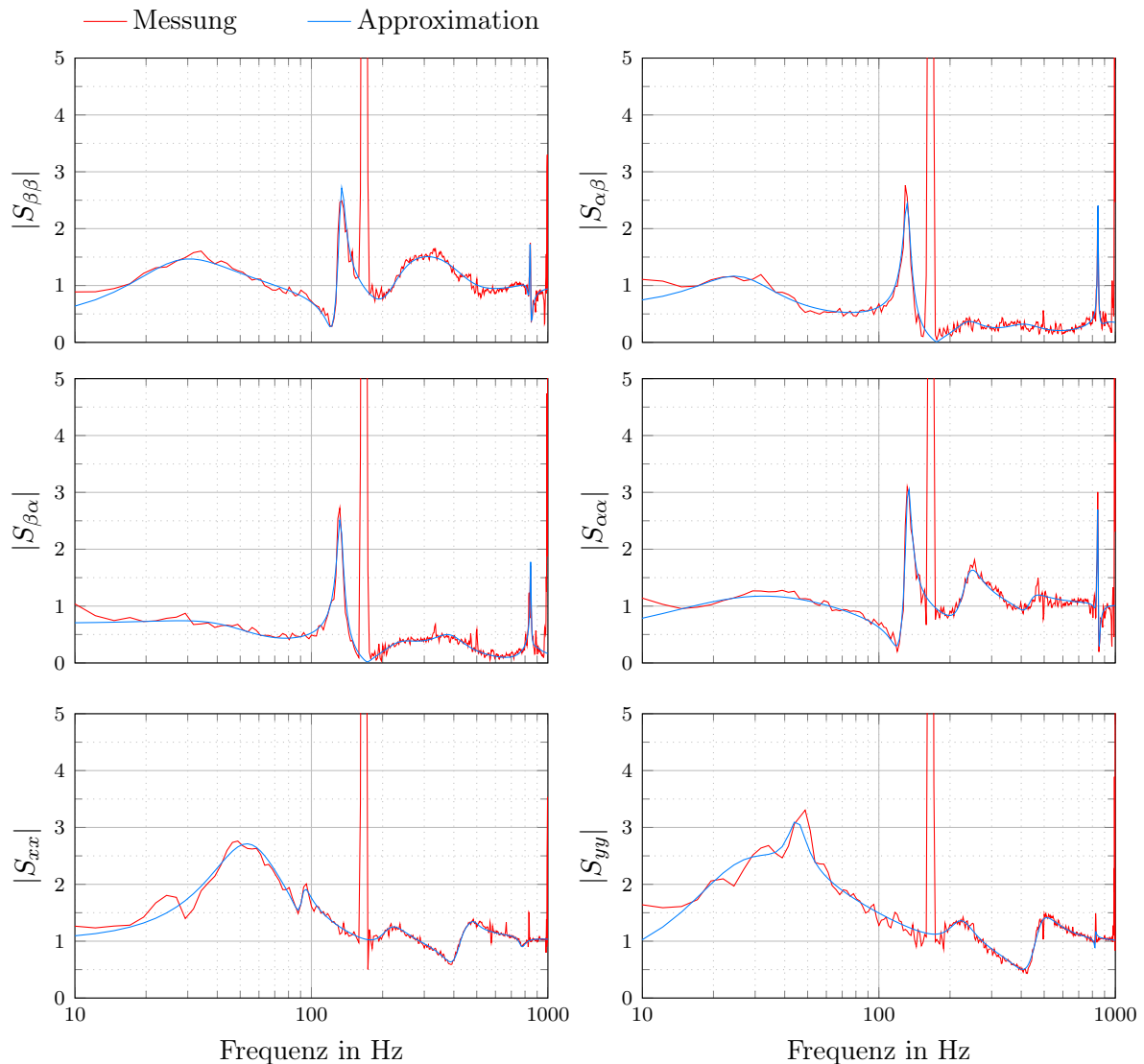


Abbildung 7.11: Gemessene Sensitivitätsfunktionen der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination bei  $\Omega = 166 \text{ Hz} = 10\,000 \text{ U/min}$

Die Methode, welche die geringste Drehzahl zulässt, ist auch für das zweite Magnetlagersystem die parallele Variante der Hochpass/Tiefpass-Querkopplung. Die Amplitude der Anregung zur Messung der Sensitivitäten musste für den zweiten Prüfstand reduziert werden, wodurch die Spitzen, bedingt durch die Unwucht deutlich größer ausfallen. Diese Tatsache ist für die Beurteilung der Robustheit jedoch vernachlässigbar. In Abbildung 7.11 sind die gemessenen Sensitivitätsfunktionen der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination für die Drehzahl  $\Omega = 166 \text{ Hz}$  dargestellt. Trotz der relativ niedrigen Drehzahl überschreiten die Sensitivitäten  $S_{\alpha\alpha}$  sowie  $S_{yy}$  die Grenze von 3. Zusätzlich ist dominierend in den rotatorischen Zuständen, eine weitere Spitze bei einer Frequenz von ca. 850 Hz zu identifizieren. Der Ausschlag zu dieser Frequenz deutet die unzureichende Dämpfung der vorwärtsdrehenden ersten Biegemode

des Rotors an. Durch weitere Erhöhung der Rotordrehzahl nimmt dieses Verhalten zu und destabilisiert das System, wodurch die maximale Drehzahl limitiert wird. Des Weiteren ist anzumerken, dass die Maxima der translatorischen Zustände ebenfalls deutlich größer ausfallen als am ersten Prüfstand. Die Ausbildung der unzureichend gedämpften ersten Biegemode fällt in den translatorischen Zuständen, aufgrund der speziellen Form der flexiblen Mode und der Sensoranordnung, deutlich geringer aus.

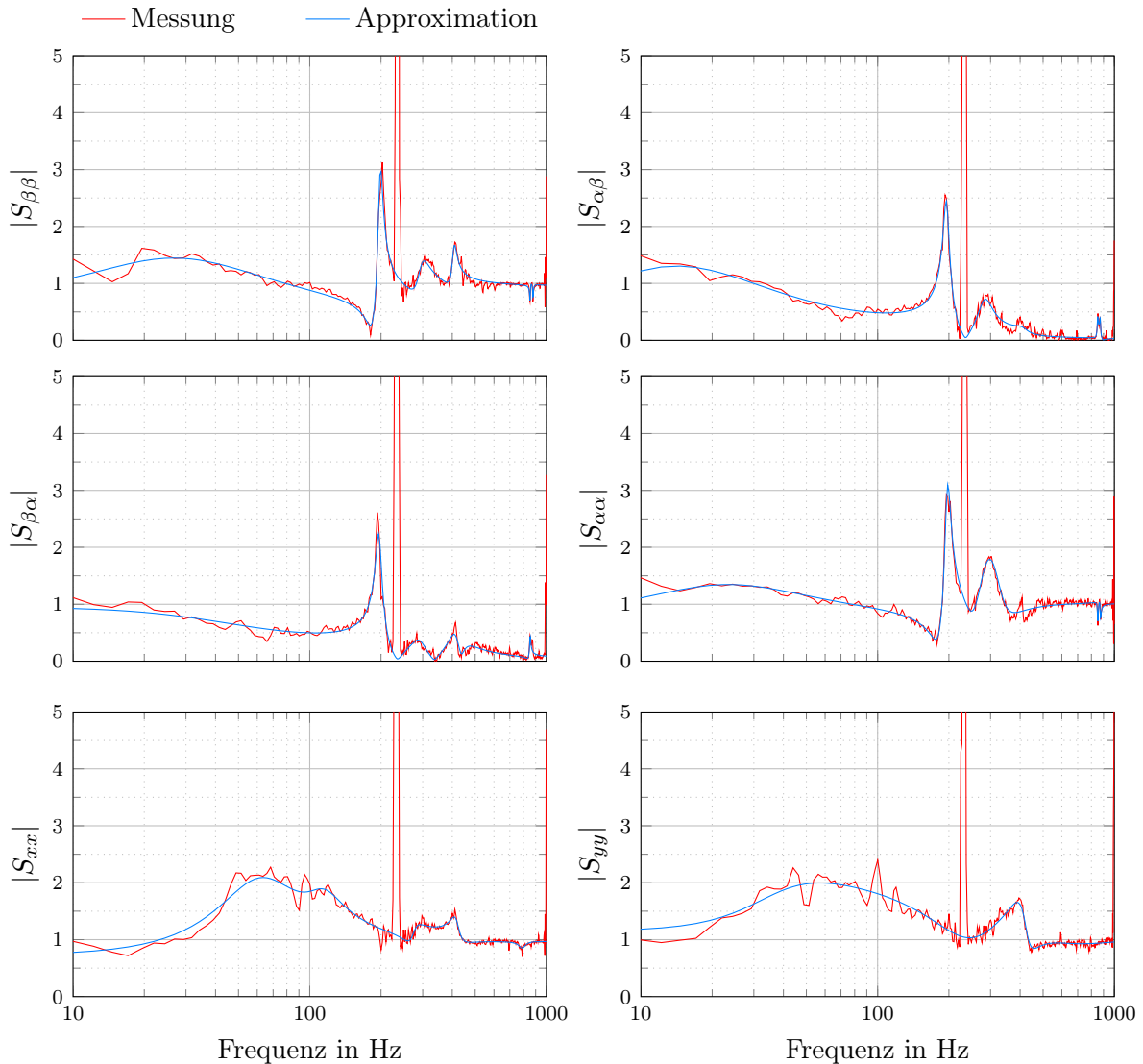


Abbildung 7.12: Gemessene Sensitivitätsfunktionen der PD-Querkopplung bei  $\Omega = 233 \text{ Hz} = 14000 \text{ U/min}$

In Abbildung 7.12 sind die gemessenen Sensitivitätsfunktionen der PD-Querkopplung für die Drehzahl  $\Omega = 233 \text{ Hz}$  dargestellt. Im Vergleich zur vorangegangenen Messung, liegen die Maxima der translatorischen Zustände deutlich unterhalb von 3. Die Regelung der translatorischen Zustände erfolgt methodenübergreifend mit denselben PID-Reglern, durch die Variation der Tiefpass- sowie Lead-Lag-Parameter kommt es jedoch zu gewissen Unterschieden. Die Robustheit wird durch die beiden rotatorischen Zustände begrenzt, da sowohl  $S_{\beta\beta}$  als auch  $S_{\alpha\alpha}$  die Grenze überschreiten.

Die Nenndrehzahl der zweiten Turbomolekularpumpe liegt bei 24 000 U/min. Die höchste gefahrene Drehzahl wurde mit der seriellen Hochpass/Tiefpass-Kombination erreicht und liegt bei 316 Hz oder 19 000 U/min. Die dabei gemessenen Sensitivitätsfunktionen sind in Abbildung 7.13 dargestellt. Erneut ist eine deutliche Asymmetrie der Lager durch die Zustände  $\alpha$  und  $\beta$  zu erkennen. Beide Verläufe überschreiten die Robustheitsgrenze jedoch deutlich, wodurch die Drehzahl limitiert wird.

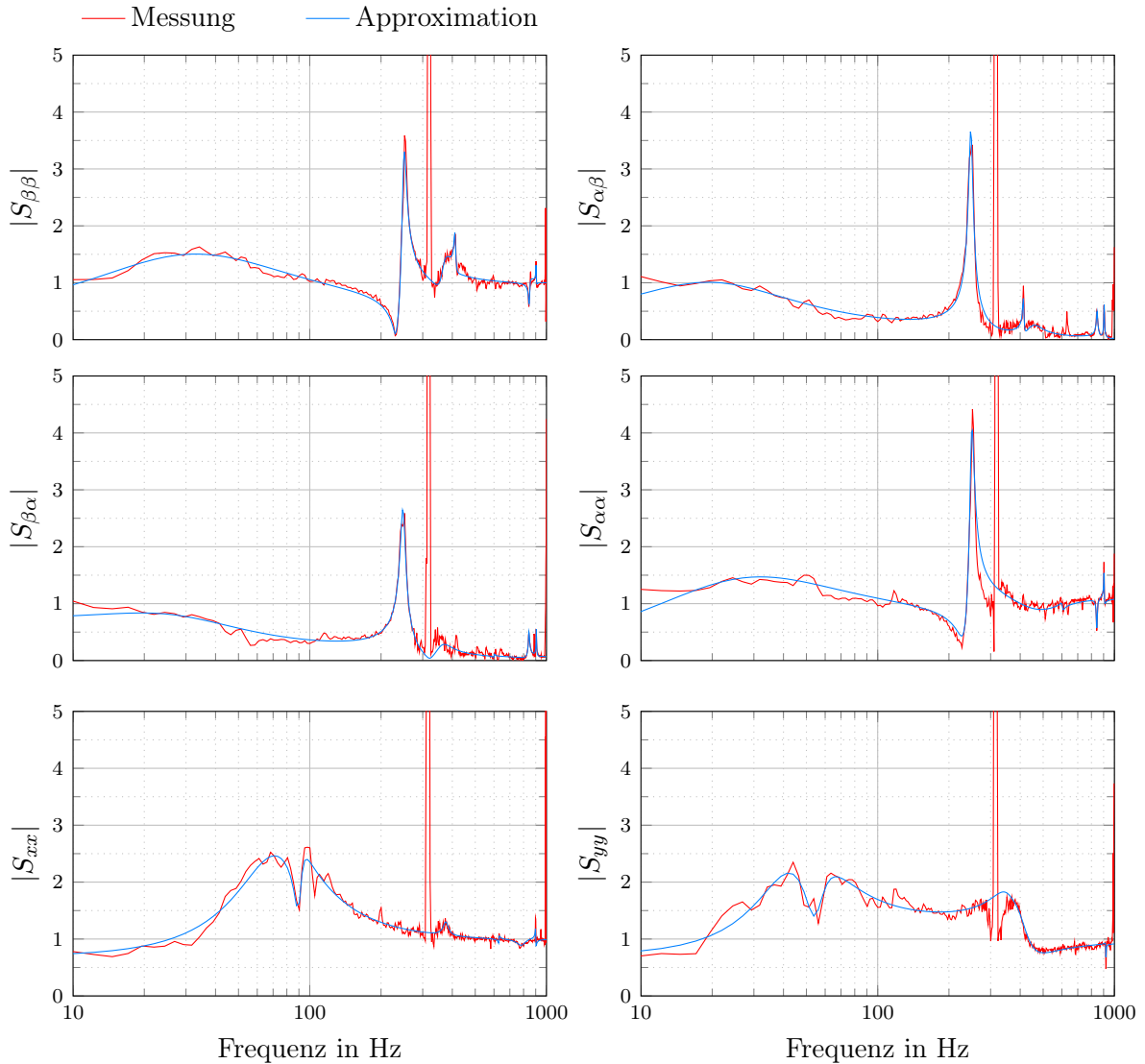


Abbildung 7.13: Gemessene Sensitivitätsfunktionen der seriellen Hochpass/Tiefpass-Kombination bei  $\Omega = 316 \text{ Hz} = 19\,000 \text{ U/min}$

Zusammenfassend konnte gezeigt werden, dass die serielle Variante der Hochpass/Tiefpass-Kombination durchgängig die besten Ergebnisse liefert. Es wurde nachgewiesen, dass zumindest am Magnetlagersystem 1 der robuste Betrieb bei Nenndrehzahl möglich ist. Die Resultate der PD-Querkopplung bestätigten die simulativen Beobachtungen, die durch den unzureichenden dämpfenden Einfluss nur mittlere Drehzahlen zuließ. Die parallele Hochpass/Tiefpass-Kombination überzeugte in den Simulationen, konnte dies in den Messungen jedoch nicht bestätigen und bedarf tiefgreifender Anpassungen um höhere Drehzahlen zu ermöglichen.

# 8 Zusammenfassung und Ausblick

## 8.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich mit dem Entwurf einer robusten Regelung eines magnetgelagerten Rotors. In einem ersten Schritt wurde hierfür basierend auf den magnetischen Grundlagen ein mathematisches Modell eines starren Rotors hergeleitet. Das Modell wurde anschließend in MATLAB/SIMULINK implementiert um es ausführlich zu analysieren. Zur Vertiefung des Verständnis über einen in Schwebelage befindlichen Rotors wurde das dynamische Verhalten erörtert.

Für den Entwurf der robusten Regelung wurde die sogenannte  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglersynthese gewählt, welche auf Basis eines linearen Modells versucht die Robustheit des Regelkreises zu maximieren. Die Reglersynthese erlaubt eine weite Auswahl an möglichen Regelungsstrukturen, wobei in einem ersten Schritt der Entwurf eines vollkommen unspezifizierten Reglers untersucht wurde. Die Resultate dieses Entwurfs lieferten bereits simulativ nur mäßig zufriedenstellende Ergebnisse, wobei zusätzlich die praktische Anwendbarkeit aufgrund der Dimensionen des Reglers nicht gegeben war. In einem zweiten Schritt wurde versucht a priori Wissen über die mechanischen Eigenschaften in den Reglerentwurf einfließen zu lassen und dennoch die Vorteile eines optimierungsbasierten Entwurfs zu nutzen.

Durch vorangegangene Arbeiten konnte die Funktionalität der sogenannten decoupled PID Methode nachgewiesen werden, welche die Grundlage für den durchgeführten Reglerentwurf darstellt. Die Kompensationen wurden fallen gelassen, dafür die Reglermatrix um zusätzliche Einträge erweitert, wobei drei unterschiedliche Methoden simulativ untersucht wurden. Für diese Querkopplungsterme wurden unter anderem PD-Regler eingesetzt, welche eine akzeptable Robustheit lieferten, dies aber nicht über den vollen Drehzahlbereich. Eine weitere Methode ersetzte die PD-Regler durch eine geeignete Kombination aus Hoch- und Tiefpassfiltern, welche es ermöglichten besser auf die Eigenmoden des Rotors Einfluss zu nehmen. Hierbei konnte man zwischen zwei Stellen unterscheiden, an denen die Querkopplung in der Regelkreisstruktur angebracht wird, wobei beide Varianten simulativ zufriedenstellende Ergebnisse lieferten.

Zur Verifizierung der theoretischen Ergebnisse wurden alle drei Methoden auf einem bestehenden Magnetlagersystem implementiert. Es zeigte sich, dass durch die Vernachlässigung der flexiblen Eigenschaften des Rotors in der Modellierung, nachträglich Anpassungen gewisser Parameter der Regelung erfolgen mussten. Mit der Methode der seriellen Hochpass/Tiefpass-

Kombination konnten die höchsten Drehzahlen erreicht werden und bestätigte somit die simulativen Ergebnisse. Für die zweite Anordnungsvariante, der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination konnte dies nicht nachgewiesen werden. Es konnten nur geringe Drehzahlen erreicht werden, da mit Erhöhung der Rotordrehzahl die Dämpfung gewisser Eigenmoden nicht ausreichend war. Die Methode der PD-Querkopplung bestätigte ebenfalls die simulativen Ergebnisse, welche durch den unzureichenden Einfluss auf die Eigenmoden ebenfalls nur geringere Drehzahlen ermöglichte.

Abschließend wurden die Regler nach den dargestellten Entwurfsmethoden an einer zweiten Turbomolekularpumpe implementiert um zu überprüfen, ob die gewählte Regelungsstruktur auf weitere Maschinen eines ähnlichen Typus übertragen werden können. Es zeigte sich, dass die Implementierung der vorhandenen Regelungsstrategien möglich ist, aufgrund der anspruchsvolleren mechanischen Gegebenheiten, jedoch weitere Verbesserungen benötigt werden, um die Nenndrehzahl zu erreichen.

## 8.2 Ausblick

Aufbauend auf den Ergebnissen dieser Diplomarbeit können noch weiterführende Untersuchungen durchgeführt werden:

- In Bezug auf die simulativen Ergebnisse lieferte die parallele Hochpass/Tiefpass-Kombination die besten Resultate. Dies konnte in der implementierten Konfiguration nicht nachgewiesen werden. Eine weiterführende Arbeit könnte sich somit der tieferen Analyse dieser Methode widmen.
- Aufgrund der niedrigeren Resonanzfrequenzen der Eigenmoden des zweiten Magnetlagersystems, stellte sich die Implementierung hier deutlich komplexer dar. Es könnte untersucht werden, durch welche zusätzlichen Maßnahmen sich die Regelungsstruktur für dieses System verbessern lässt um auf die Eigenmoden, bedingt durch die Turbinenschaufeln, besser Rücksicht zu nehmen.
- Da die Eigenmoden für die Implementierung generell eine zusätzliche Herausforderung darstellten, könnte der  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf mit dem Modell des flexiblen Rotors verbunden werden. Somit könnten flexible Eigenmoden bereits im Entwurf berücksichtigt werden.

## Literatur

- [1] G. Schweitzer, E. H. Maslen u. a. *Magnetic Bearings - Theory, Design, and Application to Rotating Machinery*. Springer Verlag, 2009.
- [2] Georg Schitter u. a. *The Design of High Performance Mechatronics: High-Tech Functionality by Multidisciplinary System Integration*. 2nd ed. IOS Press, 2014.
- [3] S. Earnshaw. *On the Nature of the Molecular Forces which Regulate the Constitution of the Luminiferous Ether*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1842.
- [4] A. Prechtl. *Vorlesung über Elektrodynamik*. TU Wien, 2010.
- [5] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik: Klassische Mechanik*. 10th ed. Springer Verlag, 2013.
- [6] S. Skogestad und I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control - Analysis and Design*. 2nd ed. John Wiley und Sons Ltd, 2005.
- [7] J. Doyle, K. Glover u. a. „State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems“. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 34. No. 8. 1989, S. 831–847.
- [8] A. Bansal und V. Sharma. „Design and Analysis of Robust  $H_\infty$  Controller“. *Control Theory and Informatics*. Vol. 3. No. 2. 2013, S. 7–14.
- [9] S. S. Nair, M. V. Vaidyan und M. L. Joy. „Generalized design and disturbance analysis of robust  $H_\infty$  control of active magnetic bearings“. In *Proceedings of 2009 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. 2009, S. 1124–1129.
- [10] J. Doyle und K. Glover. „State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers that Satisfy an  $H_\infty$  Norm Bound and Relations to Risk-Sensitivity“. *Systems and Control Letters*. Vol. 11. No. 3. 1988, S. 167–172.
- [11] A. Packard u. a. „Optimal, constant I/O similarity scaling for full-information and state-feedback control problems“. *Systems and Control Letters*. Vol. 19. No. 4. 1992, S. 271–280.

- [12] P. Gahinet und P. Apkarian. „A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control“. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Vol. 4. No. 4. 1994, S. 421–448.
- [13] T. Iwasaki und R.E. Skelton. „All controllers for the general  $H_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas“. *Automatica*. Vol. 30. No. 8. 1994, S. 1307–1317.
- [14] P. Gahinet. „A convex parametrization of  $H_\infty$  suboptimal controllers“. In *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. 1992, S. 937–942.
- [15] A. Kugi. *Automatisierung - Vorlesung und Übung - Wintersemester 2017/2018*. TU Wien, 2017.
- [16] S. Miyamoto und S. Arinaga. „Relationship between availability of states and pole/zero cancellations in  $H_\infty$  control“. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 39. No. 2. 1994, S. 379–381.
- [17] H. H. Niemann und O. Jannerup. „An analysis of pole/zero cancellation in LTR-based feedback design“. In *Proceedings of the 1990 American Control Conference*. 1990, S. 848–853.
- [18] M. Hutterer, M. Hofer und M. Schrödl. „Decoupled control of an active magnetic bearing system for a high gyroscopic rotor“. In *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*. 2015, S. 210–215.
- [19] P. Apkarian, V. Bompard und D. Noll. „Non-smooth structured control design with application to PID loop-shaping of a process“. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Vol. 17. No. 14. 2007, S. 1320–1342.
- [20] M. Hutterer. *Regelung von magnetgelagerten Rotoren für den Einsatz in Turbomolekularpumpen*. TU Wien, 2018.
- [21] J. Schmied und A. Kosenkov. „Practical Controller Design for Rotors on Magnetic Bearings by Means of an Efficient Simulation Tool“. In *Proceedings of the 10th International Conference on Vibrations in Rotating Machines*. 2000.

## Tabellenverzeichnis

3.1	Parameter der verwendeten Magnetlagersysteme . . . . .	16
6.1	Reglerparameter der diagonal angeordneten PIDT1-Regler für den Stillstand .	46
6.2	Parameter der Reglerelemente $G_{13}(s)$ und $G_{31}(s)$ für PD-Querkopplung . . .	49
6.3	Parameter der Reglerelemente $G_{13}(s)$ und $G_{31}(s)$ für die serielle Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination . . . . .	57
6.4	Parameter der Reglerelemente $G_{13}(s)$ und $G_{31}(s)$ für die parallele Anordnung der Hochpass/Tiefpass-Kombination . . . . .	62
7.1	Gewählte Filterparameter für die Implementierung . . . . .	72
7.2	Berechnete maximale Singulärwerte aus den gemessenen Sensitivitäten bei un- terschiedlichen Werten der Drehzahl . . . . .	80

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Prinzipdarstellung eines Magnetlagers in Längsschnitt . . . . .	5
2.2	Magnetkreis (links) mit beweglichem Teil (rechts) . . . . .	5
2.3	Joch mit abgeschrägten Flächen und zylindrischem Rotor im Querschnitt . . .	7
2.4	Kraft-Verschiebungs-Verhältnis (links) und Kraft-Strom-Verhältnis (rechts) .	7
2.5	Querschnittsdarstellung des Magnetlagers in „Differential Driving Mode“ . . .	8
3.1	Drehungen in Kardanwinkel . . . . .	12
3.2	Schematische Darstellung eines elastisch gelagerten Rotors . . . . .	16
3.3	Schematischer Verlauf der Eigenfrequenzen des elastisch gelagerten Rotors in Abhängigkeit der Drehzahl $\Omega$ . . . . .	18
4.1	Blockschaltbild des Standardregelkreises . . . . .	21
4.2	Gewünschter Amplitudenverlauf von $ S(\omega) $ und $ T(\omega) $ . . . . .	23
4.3	Blockschaltbild der verallgemeinerten Regelkreisstruktur . . . . .	24
5.1	Blockdiagramm der verwendeten Mixed-Sensitivity Control Struktur . . . . .	31
5.2	Bodediagramm der gewünschten Übertragungsfunktionen $T$ und $S$ . . . . .	33
5.3	Bodediagramm der gewählten Gewichtungsfunktionen . . . . .	34
5.4	Verlauf des maximalen Singulärwerts für den Regler nach Gleichung 5.18 . . .	37
5.5	Hankel Singulärwerte des Reglerentwurfs im Stillstand . . . . .	39
5.6	Singulärwertverlauf der Strecke bei unterschiedlichen Werten der Drehzahl $\Omega$	41
6.1	Blockschaltbild der allgemeinen Regelungsstruktur . . . . .	43
6.2	PID Loop-Shaping $\mathcal{H}_\infty$ Design Struktur nach [19] . . . . .	44
6.3	Verwendete $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping Struktur . . . . .	45
6.4	Bodediagramm der rotatorischen und translatorischen PIDT1-Regler . . . . .	46
6.5	Einschwingverhalten der COG-Koordinaten aus einer vorgegebenen Startposi- tion . . . . .	47
6.6	Verlauf des maximalen Singulärwerts der diagonal angeordneten PIDT1-Regler	48
6.7	Bodediagramm der Querkopplungs-PDT1-Regler für $\Omega = 300$ Hz . . . . .	50
6.8	Verlauf des maximalen Singulärwerts für die berechneten Regler der PD-Quer- kopplung . . . . .	51
6.9	Approximierte Parameter der PD-Querkopplung . . . . .	51
6.10	Verlauf der maximalen Singulärwerte und minimalen Dämpfungskoeffizienten für die PD-Querkopplung . . . . .	52

6.11	Verlauf der COG-Koordinaten $\mathbf{q}$ für eine Abfolge von Sollwertsprüngen bei $\Omega = 300$ Hz . . . . .	53
6.12	Blockschaltbild der Regelkreisstruktur für die Hochpass/Tiefpass-Kombination als Querkopplung an zwei möglichen Stellen . . . . .	55
6.13	Prinzipielles Strukturschaltbild für die serielle Anordnung . . . . .	55
6.14	Prinzipielles Strukturschaltbild für die parallele Anordnung . . . . .	55
6.15	Verlauf des maximalen Singulärwerts für die berechneten Regler der seriellen Hochpass/Tiefpass-Kombination . . . . .	58
6.16	Approximierte Parameter der seriellen Hochpass/Tiefpass Querkopplung . . . . .	59
6.17	Verlauf des maximalen Singulärwerts und der minimalen Dämpfungswerte für die serielle Hochpass/Tiefpass Querkopplung . . . . .	60
6.18	Verlauf des maximalen Singulärwerts für die berechneten Regler der parallele Hochpass/Tiefpass Querkopplung . . . . .	62
6.19	Approximierte Parameter der parallelen Hochpass/Tiefpass Querkopplung . . . . .	63
6.20	Verlauf des maximalen Singulärwerts und der minimalen Dämpfungswerte für die parallele Hochpass/Tiefpass Querkopplung . . . . .	64
6.21	Vergleich der maximalen Singulärwerte der unterschiedlichen Querkopplungs-Methoden . . . . .	66
7.1	Stabilisierende Wirkung des Reglers auf die Biegemoden . . . . .	69
7.2	Herstellerseitige Messung der Eigenfrequenzen der Turbomolekularpumpe 1 . . . . .	70
7.3	Herstellerseitige Messung der Eigenfrequenzen der Turbomolekularpumpe 2 . . . . .	70
7.4	Compliance-Funktion für den rotatorischen Zustand $\beta$ mit stückweise linearisierter PD-Querkopplung . . . . .	73
7.5	Compliance-Funktion für den transversalen Zustand $x$ mit stückweise linearisierter PD-Querkopplung . . . . .	74
7.6	Diagonalelemente des Betragsgangs der Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S}$ im Stillstand . . . . .	75
7.7	Gemessene Sensitivitätsfunktionen bei $\Omega = 340$ Hz . . . . .	76
7.8	FFT des gemessenen Zustandes $\beta$ bei paralleler Hochpass/Tiefpass-Kombination . . . . .	77
7.9	Gemessene Sensitivitätsfunktionen bei $\Omega = 440$ Hz . . . . .	78
7.10	Gemessene Sensitivitätsfunktionen bei Nenndrehzahl (583 Hz) . . . . .	79
7.11	Gemessene Sensitivitätsfunktionen der parallelen Hochpass/Tiefpass-Kombination bei $\Omega = 166$ Hz = 10 000 U/min . . . . .	81
7.12	Gemessene Sensitivitätsfunktionen der PD-Querkopplung bei $\Omega = 233$ Hz = 14 000 U/min . . . . .	82
7.13	Gemessene Sensitivitätsfunktionen der seriellen Hochpass/Tiefpass-Kombination bei $\Omega = 316$ Hz = 19 000 U/min . . . . .	83

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, am 28. Februar 2018

---

Schöck Fabio, BSc