



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN



DIPLOMARBEIT

**Gemeinsame Schätzung von
B-Spline-Kontrollpunkten
und -Kurvenparametern unter Berücksichtigung
von Ungleichungsrestriktionen**

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Geodäsie und Geoinformation

eingereicht von

Jakob Raschhofer BSc

Matrikelnummer 01426606

ausgeführt am Department für Geodäsie und Geoinformation
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation
der Technischen Universität Wien

Betreuung

Univ.Prof. Dr.-Ing. Hans-Berndt Neuner

Univ.Ass. Corinna Harmening MSc

Wien, am 1. Juni 2020

(Unterschrift Verfasser)

(Unterschrift Betreuer)



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die, den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 1. Juni 2020

(Jakob Raschhofer)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit und im gesamten Studium unterstützt haben.

Ein herzliches Danke gilt Herrn Univ.Prof. Dr.-Ing. Hans-Berndt Neuner, der mir diese Arbeit ermöglicht hat und mich mit hilfreichen Anregungen maßgeblich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützte.

Mein Dank gebührt auch Frau Corinna Harmening MSc, die mit ihrer fachlichen Kompetenz zu jeder Zeit, selbst in der Endphase ihrer eigenen Doktorarbeit, eine direkte Ansprechperson in allen Belangen dieser Arbeit für mich war.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Eltern und Großeltern, die mir durch ihre Unterstützung und Förderung meinen Bildungsweg ermöglicht haben.

Ein Danke möchte ich auch meiner Freundin Sarah sagen, die mich während der gesamte Studienzeit begleitet hat.

Diese Arbeit präsentiert Ergebnisse, welche im Rahmen des Forschungsprojekts „Integrierte raum-zeitliche Modellierung unter Nutzung korrelierter Messgrößen zur Ableitung von Aufnahmeconfigurationen und Beschreibung von Deformationsvorgängen (IMKAD II)“, finanziert vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF), gewonnen wurden.

Kurzfassung

Bedingt durch die Einführung von terrestrischen Laserscannern ändern sich die Auswertestrategien in der Ingenieurgeodäsie von punktwisen zu flächenhaften Ansätzen. Freiformflächen wie B-Splines haben sich als geeignetes Werkzeug zur Modellierung von Laserscanner-Punktwolken erwiesen. Sie bilden die Grundlage für eine flächenhafte Datenanalyse, insbesondere die flächenhafte Deformationsanalyse.

Eine Modellierung einzelner Punktwolken mit Hilfe von B-Spline-Flächen wurde bereits von Harmening und Neuner (2015) durchgeführt. Jedoch stellen Harmening und Neuner (2017) fest, dass die dort berechneten Parameter der Beobachtungen (Flächenparameter) die geschätzte B-Spline-Fläche wesentlich beeinflussen. Sie folgern, dass, um einen statistischen Vergleich zwischen zwei B-Spline-Flächen möglich zu machen, eine konsistente Parametrisierung der Flächen notwendig sei.

Die Bestimmung von vergleichbaren B-Spline-Flächen soll mit Hilfe einer gemeinsamen Schätzung von Kontrollpunkten und Flächenparametern erfolgen. Um erste Erkenntnisse einer solchen Ausgleichung zu gewinnen, ist das Ziel dieser Arbeit dieses Verfahren zuerst auf die mathematisch einfachere B-Spline-Kurve anzuwenden.

Die gemeinsame Ausgleichung führt dazu, dass Ungleichungsrestriktionen für die Kurvenparameter eingeführt werden müssen, um deren Eigenschaft der Monotonie beizubehalten, sowie diese in ihrem Definitionsbereich $[0, 1]$ zu halten. Die Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen kann in ein lineares Komplementaritätsproblem übergeführt und gelöst werden.

Zur Verifikation wird der neu entwickelte Algorithmus auf simulierte Kurven-Datensätze angewandt und mit dem Standardverfahren der Approximation von Kurven (Bureick et al., 2016) und der intrinsischen Parametrisierung (Hoschek, 1988) auf Basis von zwei eingeführten Vergleichswerten verglichen. Ein statistischer Vergleich der Verfahren ist aufgrund mehrfacher Realisierungen einer Kurve möglich.

Der neue Algorithmus zeigt eine deutliche Verbesserung des Approximationsergebnisses gegenüber dem Standardverfahren. Meist erweist sich der neu entwickelte Algorithmus auch besser als die Methode der intrinsischen Parametrisierung, insbesondere auf die Güte der geschätzten Kurvenparameter und die kürzere Rechenzeit. Weiter kann festgestellt werden, dass sich durch Hinzunahme von Beobachtungen das Ergebnis einer Kurven-Approximation für den neuen Algorithmus deutlich verbessert.

Abschließend kann durch Änderung der verwendeten Diskretisierungsmethode gefolgert werden, dass die Güte der Näherungswerte der Kontrollpunkte und Kurvenparameter wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis einer Approximation hat.

Abstract

Due to the development of terrestrial laser scanners, the evaluation strategies in engineering geodesy are changing from pointwise approaches to area-based ones. Freeform surfaces such as B-splines have proven to be a suitable tool for modelling laser scanner point clouds. They form the basis for areal data analysis, especially areal deformation analysis.

A modeling of single point clouds using B-spline surfaces has already been performed by Harmening und Neuner (2015). However, Harmening und Neuner (2017) found out that the parameters of the observations (surface parameters) calculated there have a significant influence on the estimated B-spline surface. They conclude that in order to make a statistical comparison between two B-spline surfaces possible, a consistent parameterization of the surfaces is necessary.

The determination of comparable B-spline surfaces should be realized by a joint adjustment of control points and surface parameters. In order to gain first insights of such an adjustment, the aim of this thesis is to apply such a procedure first to the mathematically simpler B-spline curve.

The joint adjustment leads to the need to introduce inequality restrictions for the curve parameters in order to maintain their monotony property and to keep them within their $[0, 1]$ definition range. The adjustment with inequality restrictions can be transformed into a linear complementarity problem and solved.

For verification, the newly developed algorithm is applied to simulated curve data sets and compared with the standard procedure of approximation of curves (Bureick et al., 2016) and intrinsic parameterization (Hoschek, 1988) on the basis of two introduced comparison values. A statistical comparison of the methods is possible due to multiple realizations of a curve.

The new algorithm shows a significant improvement of the approximation results compared to the standard method. In most cases, the newly developed algorithm also proves to be better than the method of intrinsic parameterization, especially with regard to the quality of the estimated curve parameters and the shorter calculation time. Furthermore, it can be stated that the result of a curve approximation is significantly improved by the addition of observations for the new algorithm.

Finally, changing the discretization method used, it can be concluded that the quality of the approximate values of the control points and curve parameters have a significant influence on the result of an approximation.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Methodische Grundlagen	4
2.1	B-Spline-Kurven	4
2.1.1	Definition von B-Spline-Kurven	4
2.1.2	B-Spline-Basisfunktionen	5
2.1.3	Ableitung von B-Spline-Kurven nach dem Kurvenparameter u . . .	6
2.1.4	Approximation von B-Spline-Kurven nach kleinsten Quadraten . . .	6
2.1.4.1	Parametrisierung von Datenpunkten	7
2.1.4.2	Ermittlung des Knotenvektors	8
2.1.4.3	Kontrollpunkt Schätzung	9
2.1.5	Intrinsische Parametrisierung (nach Hoschek)	11
2.2	Mathematischen Optimierung	12
2.2.1	Lineares Komplementaritätsproblem	13
2.2.1.1	Lösen eines Linearen Komplementaritätsproblems	13
2.2.1.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	14
2.2.2	Quadratische Programmierung	15
2.2.3	Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Ungleichungs- restriktionen	17
2.2.4	Von der Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen zum LCP . . .	18
3	Datensätze	21
4	Gemeinsame Schätzung von Kurvenparametern und Kontrollpunkten mit Hilfe des LCP	23
4.1	Kleinste Quadrate Ausgleich mit Kontrollpunkten und Kurvenparametern als Unbekannte	24
4.2	Hinzunahme von Ungleichungsrestriktionen in die Ausgleichung	27
4.2.1	Aufstellen von Ungleichungsrestriktionen	27
4.2.2	Problematik der Ungleichungsrestriktionen	32
4.3	Übergang von der Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen zum LCP .	33
5	Ergebnisse und Diskussion	35
5.1	Bewertung einer Kurven-Approximation	35
5.1.1	Summe der Normalabstände zur <i>Soll</i> -Kurve	35
5.1.2	Vergleich ausgeglichener Kurvenparameter mit <i>Soll</i> -Kurvenparameter	36
5.2	Einflüsse auf das Ergebnis für die Approximationsmethode mit dem LCP .	36

5.2.1	Wahl der Parametrisierungsmethode für die Näherungswerte der Kurvenparameter	37
5.2.2	Wahl des Parameters ε	41
5.2.3	Wahl des Parameters d	44
5.3	Vergleich unterschiedlicher Kurven-Approximationsmethoden	46
5.3.1	Vergleich Konvergenz	47
5.3.2	Statistischer Vergleich	49
5.3.2.1	Statistischer Vergleich der Kurve 1	49
5.3.2.2	Statistischer Vergleich der Kurve 2	56
5.3.2.3	Statistischer Vergleich der Kurve 3	57
5.3.2.4	Statistischer Vergleich der Kurve 4	65
5.3.3	Gegenüberstellung der statistischen Untersuchungen aller Kurven	71
5.4	Veränderung der Diskretisierungsmethode	74
6	Fazit und Ausblick	81
	Literatur	84
A	Anhang	88
A.1	Parameter der Kurven	88
A.2	Komplette Ergebnisse der Wahl des Parameters ε	89
A.3	Komplette Ergebnisse der Wahl des Parameters d	92
A.4	Komplette Ergebnisse des statistischen Vergleichs der Kurve 2	95
A.5	Komplette Ergebnisse zur Veränderung der Diskretisierungsmethode	97

1 Einführung

Die Entwicklung von terrestrischen Laserscannern (*TLS*) hat die Bedeutung von flächenhaften Aufnahmeverfahren, welche eine raumkontinuierliche geometrische Erfassungen von Objekten ermöglichen, wesentlich gesteigert. Aufgrund der kontaktlosen und schnellen Datenerfassung sowie der hohen Punktdichte bieten Laserscan-Punktwolken eine neue Möglichkeit in Bezug auf die ingenieurgeodätische Kernaufgabe der Deformationsanalyse. Anstelle von herkömmlichen punktbasierten Ansätzen treten flächenhafte Auswertemethoden in der Ingenieurgeodäsie in den Fokus (Holst & Kuhlmann, 2016).

H.-B. Neuner (2019) formuliert auf Basis der Arbeiten von Wunderlich et al. (2019) und Kuhlmann und Holst (2017) das Ziel, eine statistisch begründete Aussage bezüglich geometrischer Veränderungen an gemessenen Objekten basierend auf *TLS*-Punktwolken zu treffen. Herausfordernd dabei ist in erster Linie die fehlende Reproduzierbarkeit von gemessenen Punkten, welche die Schaffung von reproduzierbaren geometrischen Merkmalen aus den Messungen notwendig macht (H.-B. Neuner, 2019).

H.-B. Neuner (2019) beschreibt drei mögliche Lösungsansätze, das genannte Ziel zu erreichen. Die geometriefreie Methode umgeht die fehlende Reproduzierbarkeit mit Hilfe eines zeitlich starren Gitters um das Messobjekt (Wujanz, 2016). Das Zentrum des Gitters dient als markantes geometrisches Merkmal und kann aus den in Epochen gemessenen Punktwolken extrahiert werden. Deformationen innerhalb der Datensätze werden durch den Vergleich von Transformationsvektoren identifiziert.

Der zweite Ansatz verbindet Zusatzsensoriken wie Kameras mit dem terrestrischen Laserscanner, um reproduzierbare Punkte zu gewinnen. Unter Einsatz von Bildverarbeitungsalgorithmen können Punkte mit deren statistisch belegten Genauigkeitsmaßen in unterschiedlichen Epochen detektiert und in eine strenge Deformationsanalyse übergeführt werden (Wunderlich et al., 2019).

Bei geometrieorientierten Ansätzen kommt es zu einer epochenbezogenen Approximation der Punktwolken anhand von Flächen. Die Reproduzierbarkeit der gemessenen Punkte wird hier implizit über die Flächenparameter hergestellt (H.-B. Neuner, 2019). Eine Voraussetzung geometrieorientierter Ansätze ist, um die Information und den Mehrwert aus raumkontinuierlichen Geometrien zu erhalten, die Entwicklung geeigneter Modelle. Solche Modelle sind kontinuierliche mathematische Funktionen, welche die Messungen in Zusammenhang mit den interessierenden Parametern bringen. Die *Soll*-Form eines Messobjektes (Kuhlmann & Holst, 2017) oder besonders flexible Funktionsstrukturen dienen dem Erlangen von Modellen, welche das vorliegende abgetastete Objekt beschreiben. Harmening und Neuner (2016b) verwenden Freiformflächen, die auf Freiformkurven basieren, um die Punktwolken durch Flächen zu approximieren. Mittels einer Ausgleichung kann eine Flächen-Approximation durchgeführt werden. B-Spline-Flächen sind häufig

verwendete Freiformflächen, mit denen es möglich ist, komplexe Formen zu modellieren. B-Splines bieten zudem die Möglichkeit, Punktwolken mit Datenlücken, scharfen Kanten, Sprüngen, Höcker und variierender Punktdichte zu behandeln. All diese aufgezählten Eigenschaften können aus einer *TLS*-Aufnahme resultieren (Bureick et al., 2016). Solch eine Modellierung einer Fläche bildet die Grundlage für eine statistisch fundierte Identifikation und Beschreibung möglicher Deformationen, welche zwischen zwei Messeperioden aufgetreten sind (H.-B. Neuner, 2018).

Harmening und Neuner (2017) verdeutlichen, dass die Flächenparameter der Beobachtungen die Approximation einer Fläche wesentlich beeinflussen. Harmening und Neuner (2016b) skizzieren die Datumsproblematik für B-Spline-Fläche, welche aus der Aufnahme von zwei unterschiedlichen Punktwolken resultiert. Das Datum einer B-Spline-Fläche wird durch die Randkurven der B-Spline-Fläche definiert. Sind die Randkurven der beiden Flächen nicht identisch und als Folge auch die Parameterlinien, kommt es zu einem unterschiedlichen Datum der Flächen. Die Parameterlinien definieren die Orientierung des Gitters von Kontrollpunkten relativ zur Oberfläche. Ein akzeptabler Vergleich von B-Spline-Objekten ist laut Harmening und Neuner (2017) nur möglich, wenn diese auf einer einheitlichen Parametrisierung beruhen. Die folgenden Arbeiten haben bereits Deformationen bzw. Starrkörperbewegungen auf Basis von B-Spline-Flächen bestimmt.

Zhou et al. (2011) ermitteln Deformationen aus Punktwolken mittels nicht-uniforme rationale B-Splines (*NURBS*). Sie stellen eine Verbindung zwischen den gemessenen Punkten zweier Epochen mittels der Flächenparameter, welche durch Standardparametrisierungsmethoden gewonnen werden, her. Jedoch vernachlässigen sie dabei die notwendige einheitliche Parametrisierung der beiden Punktwolken.

Zhao et al. (2018) definieren eine Deformation zweier approximierter B-Spline-Flächen aus Punktwolken als Differenz der approximierten *Z*-Koordinate der zwei Epochen. Die B-Spline-Flächen werden dabei mittels eines linearen Gauß-Markov-Modell geschätzt, wobei die Flächenparameter mit Standardparametrisierungsmethoden bestimmt werden. Da es jedoch nicht möglich ist, eine genaue gegenseitige räumliche Referenzierung von Punkten in den verschiedenen Epochen zu erhalten, werden die Punktwolken mittels des Blockmittelwert-Ansatzes von Paffenholz et al. (2008) verglichen. Dieser Ansatz bildet Blöcke, welche mehrere Punkte beinhalten, wobei der Median der *Z*-Koordinaten anschließend als Vergleichswert dient.

Eine Herleitung einer Starrkörperbewegung aus den Parametern einer B-Spline-Fläche wird von Harmening und Neuner (2016b) durchgeführt. Die Flächenparameter für die Beobachtungen werden in dieser Arbeit mittels Projektion auf ein *Coons patch* ermittelt und iterativ mit zusätzlichen Bedingungen verbessert (Harmening & Neuner, 2015). Die Approximation der Flächen wird anschließend mittels eines linearen Gauß-Markov-Modell berechnet, welches die Kontrollpunkte als Unbekannte führt. Es wird gezeigt, dass die

Starrkörperbewegung aus einer Ähnlichkeitstransformation der Kontrollpunkte gewonnen werden kann.

Alle oben genannten Arbeiten stoßen dabei auf die Problematik des B-Spline-Datums, welche entweder vernachlässigt oder mittels anderen Methoden umgangen wird.

Die Bestimmung von vergleichbaren B-Spline-Flächen mit Hilfe einer gemeinsamen Ausgleichung von Kontrollpunkten und Flächenparametern, welche die innere Geometrie der Fläche definieren, bietet die Möglichkeit der Überführung in ein gemeinsames B-Spline-Datum. Auch hat diese Ausgleichung den Zweck, dass die Residuen normal auf die geschätzte Fläche stehen. Bislang wird für die Approximation von B-Spline-Flächen meist ein Gauß-Markov-Modell verwendet, wobei nur die Kontrollpunkte bei der Schätzung als Unbekannte geführt werden (Bureick et al., 2016).

Um das Verhalten von B-Spline-Objekten in einer solchen Ausgleichung vorerst zu verifizieren und erste Erkenntnisse zu sammeln, wird in dieser Arbeit die mathematisch einfachere B-Spline-Kurve untersucht. Ziel ist es, ein gemeinsames Ausgleichungsverfahren von Kontrollpunkten und Kurvenparametern zu entwickeln, welches vergleichbare B-Spline-Kurven approximiert, um einen statistischen Vergleich der Geometrie möglich zu machen. Es soll dadurch eine optimale Parametrisierung für eine B-Spline-Kurve gefunden werden.

Dazu wird in Kapitel 2 auf die Parameter und Eigenschaften von B-Spline-Kurven eingegangen. Weiter wird die gängige Praxis der Approximation von Datenpunkten durch B-Spline-Kurven beschrieben. Ein weiterer Schwerpunkt dieses Kapitels sind die mathematischen Grundlagen zur Überführung einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Ungleichungsrestriktionen auf ein lineares Komplementaritätsproblem.

In Kapitel 3 werden die verwendeten Daten und deren Eigenschaften angeführt.

Die Integration der Kurvenparameter und Kontrollpunkte in eine gemeinsame Ausgleichung zur Approximation von B-Spline-Kurven führt zu einem nicht-linearen Modell, was eine Linearisierung und die Einführung von Näherungswerten erfordert. Kapitel 4 behandelt die Problematik solch eines Ausgleichs und zeigt, wie dieser durch Einführen von Ungleichungsrestriktionen behoben und anschließend in ein lineares Komplementaritätsproblem übergeführt werden kann.

In Kapitel 5 werden einzelne Parameter der neuen Methode diskutiert und Approximationen von B-Spline-Kurven mit der bestehenden Kontrollpunktschätzung (Bureick et al., 2016) und dem Algorithmus der intrinsischen Parametrisierung nach Hoschek (1988) verglichen. Zusätzlich werden die Auswirkungen der Änderung der Diskretisierungsmethode auf den neu entwickelten Algorithmus aufgezeigt.

Kapitel 6 fasst die erhaltenen Resultate dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere aufbauende Fragestellungen.

2 Methodische Grundlagen

2.1 B-Spline-Kurven

2.1.1 Definition von B-Spline-Kurven

Ein Kurvenpunkt $\mathbf{C}(u)$ einer B-Spline-Kurve des Grades p ist nach Piegel und Tiller (1995) für den zweidimensionalen Fall allgemein definiert durch

$$\mathbf{C}(u) = \begin{pmatrix} C_x(u) \\ C_y(u) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad a \leq u \leq b, \quad (2.1)$$

wobei $\mathbf{P}_i = (P_{xi}, P_{yi})^T$, $i = 0, \dots, n$ Kontrollpunkte der Dimension des Kurvenpunktes und $N_{i,p}(u)$ die B-Spline-Basisfunktionen des Grades p sind. Oft wird die Annahme getroffen, dass $a = 0$ und $b = 1$ annehmen, womit der Parameterraum definiert ist. Gleichung (2.1) ist für den dreidimensionalen Fall gleichermaßen gültig. Ein Kurvenpunkt $\mathbf{C}(u)$, dessen Position auf der Kurve durch den Kurvenparameter u bestimmt ist, resultiert folglich aus einer Linearkombination der Kontrollpunkte \mathbf{P}_i mit den zugehörigen B-Spline-Basisfunktionen $N_{i,p}(u)$ als jeweilige Gewichte.

Das Polygon, welches von den Kontrollpunkten gebildet wird, nennt man Kontrollpolygon. Die Komplexität einer B-Spline-Kurve wird hauptsächlich durch die Anzahl der Kontrollpunkte ($n + 1$) bestimmt.

Der Grad der Kurve p ist für B-Spline-Kurven frei wählbar und wird nicht von der Anzahl der Kontrollpunkte vorgegeben (Bureick et al., 2016).

Die B-Spline-Basisfunktionen (siehe Kap. 2.1.2) werden vom Knotenvektor $\mathbf{U} = [u_0, \dots, u_r]$ beeinflusst. Der Knotenvektor teilt die Kurve in Knotenintervalle und dessen Elemente besitzen eine aufsteigende Reihenfolge. In dieser Arbeit werden eingespannte B-Spline-Kurven verwendet, deren Knotenvektor U so definiert ist, dass die Kurve den ersten und den letzten Kontrollpunkt interpoliert. Das bedeutet, dass der Knotenvektor die Form

$$\mathbf{U} = [\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}]$$

im Intervall $[0, 1]$ besitzt. Die ersten $p + 1$ Knoten in \mathbf{U} erhalten den Wert null, die letzten $p + 1$ Knoten den Wert 1. Die ersten $p + 1$ und die letzten $p + 1$ Knoten werden externe Knoten genannt, alle anderen interne Knoten.

Piegl und Tiller (1995) geben für die Anzahl der Kontrollpunkte $n + 1$, den Grad der Kurve p und der Anzahl der Knoten $r + 1$ des Knotenvektors \mathbf{U} folgende Bedingung vor:

$$r = n + p + 1 \quad (2.2)$$

Von diesen drei Parametern sind also zwei frei wählbar, folgend ist der dritte Parameter von diesen abhängig.

2.1.2 B-Spline-Basisfunktionen

Wie in Kapitel 2.1.1 angeführt, werden vorab B-Spline-Basisfunktionen benötigt, um eine B-Spline-Kurve darstellen zu können. Piegl und Tiller (1995) beschreiben diese als stückweise Polynomfunktionen, die rekursiv nach dem Grad p der Splines definiert sind und mittels des Cox-de Boor-Algorithmus (Cox, 1972; De Boor, 1972) berechnet werden können. Die B-Spline Basisfunktionen $N_{i,p}(u)$ werden auch als zugehörige Gewichte zu den Kontrollpunkten \mathbf{P}_i gedeutet (Harmening & Neuner, 2015).

Die Berechnung einer Basisfunktion erfolgt mit Hilfe des Knotenvektors $\mathbf{U} = [u_0, \dots, u_r]$ mit $r + 1$ Knoten, des Kurvenparameters u eines gewünschten Kurvenpunktes und dem Grad der Spline p . Unter Verwendung dieser Parameter folgt nun die rekursive Darstellung der i -ten Basisfunktion $N_{i,p}(u)$ mittels des Cox-de Boor-Algorithmus:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Die Basisfunktion $N_{i,p}(u)$ wird als Linearkombination der beiden Basisfunktionen $N_{i,p-1}(u)$ und $N_{i+1,p-1}(u)$ gebildet.

Piegl und Tiller (1995) zeigen, dass nur in $p + 1$ Knotenintervallen die Basisfunktion $N_{i,p}(u)$ ungleich null ist. Daraus folgt, dass auch nur $p + 1$ Kontrollpunkte Einfluss auf den Kurvenpunkt nehmen. Bei einer Änderung eines Kontrollpunktes werden daher nur Kurvenpunkte in der lokalen Umgebung davon beeinflusst. Wird der Grad der B-Spline-Kurve p verändert, ändert sich auch die Anzahl der Basisfunktionen und Kontrollpunkte, welche ungleich null sind und somit auch das Aussehen einer Kurve (Piegl & Tiller, 1995).

2.1.3 Ableitung von B-Spline-Kurven nach dem Kurvenparameter u

Ableitungen von B-Spline-Kurven können nach Piegel und Tiller (1995) folgend berechnet werden:

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \mathbf{Q}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_i = p \frac{\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \quad (2.4)$$

Dabei erhalten wir einen Knotenvektor \mathbf{U}' indem der erste und letzte Knoten von U entfernt wurden.

$$\mathbf{U}' = [\underbrace{0, \dots, 0}_p, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_p]$$

Die Basisfunktionen $N_{i,p-1}(u)$, welche mit dem Knotenvektor \mathbf{U}' berechnet werden, stellen nun gemeinsam mit den neuen Kontrollpunkten \mathbf{Q}_i die B-Spline-Kurve $\mathbf{C}'(u)$ vom Grad $(p - 1)$ dar.

Weiter wird von Piegel und Tiller (1995) eine rekursive Ableitungsrechnung vorgestellt, welche aber im Vergleich mit der oben angeführten Methode wesentlich aufwendiger ist.

2.1.4 Approximation von B-Spline-Kurven nach kleinsten Quadraten

Soll eine Menge an beobachteten Punkten, \mathbf{L}_k , $k = 0, \dots, M$ durch eine B-Spline-Kurve vom Grad p approximiert werden, so werden meist die Kontrollpunkte \mathbf{P}_i in einem linearen Ausgleichungsmodell geschätzt (Bureick et al., 2016). Die beobachteten Punkte \mathbf{L}_k sind aufgrund des Aufnahmeverfahrens (z.B.: Terrestrischer Laserscanner) mit einem Rauschen belegt.

Für solch eine Approximation einer B-Spline-Kurve müssen die Anzahl der Kontrollpunkte $n + 1$, der Knotenvektor \mathbf{U} sowie der Grad der Kurve p a priori festgelegt werden.

Harmening und Neuner (2016a) beschäftigen sich mit der Wahl der optimalen Anzahl an Kontrollpunkten für eine B-Spline-Kurve. Sie zeigen, dass eine zu geringe Anzahl an Kontrollpunkten zu einer Unteranpassung der Daten führt und bei einer zu großen Anzahl an Kontrollpunkten eine Überanpassung der Daten stattfindet, da das Rauschen mit modelliert wird.

Harmening und Neuner (2015) geben die Wahl des Grades der Kurve als nicht kritisch an, meist werden kubische B-Splines verwendet ($p = 3$).

Vor der Schätzung einer Kurve müssen auch passende Kurvenparameter u_k den Beobachtungen zugeteilt werden (siehe Kap. 2.1.4.1). Diese Parameter werden für die Berechnung der Basisfunktionen benötigt (siehe Kap. 2.1.2), mit denen es möglich ist Kurvenpunkte zu gewinnen.

2.1.4.1 Parametrisierung von Datenpunkten

Die Parametrisierung von Datenpunkten \mathbf{L}_k , $k = 0, \dots, M$ dient zu Bestimmung des jeweiligen Kurvenparameters u_k , welcher die Position auf der Kurve repräsentiert. Dieser Schritt ist für eine Approximation an eine B-Spline-Kurve nötig. Zur Parametrisierung von erfassten Datenpunkten \mathbf{L}_k einer Kurve, welche kettenartig angeordnet sind, beschreiben Lee (1989), Ma und Kruth (1995) folgende Methoden: *uniforme*-, *kumulative Sehnenlängen*- (auch *chord length*), *zentripetale*- und *exponentielle*-Parametrisierung.

$$u_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ u_{k-1} + \frac{|\mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{k-1}|^e}{\sum_{k=1}^M |\mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{k-1}|^e}, & k > 0 \\ 1, & k = M \end{cases} \quad (2.5)$$

Gleichung (2.5) zeigt die *exponentielle* Methode, welche durch die Wahl des Parameters e in die weiteren Parametrisierungsmethoden übergeführt werden kann. Für $e = 0$ folgt die *uniforme* Parametrisierung und für $e = 1$ wird die Gleichung (2.5) zur *kumulative Sehnenlängen* Parametrisierung. Die Methode der *uniformen* Parametrisierung ist manchmal nicht zufriedenstellend, da die Verteilung der Beobachtungen nicht berücksichtigt wird. Sie teilt den Beobachtungen nur Parameterwerte in Abhängigkeit von der Anzahl der Beobachtungen zu. Für ungleichmäßig verteilte Datenpunkte ist die *kumulative Sehnenlängen* Parametrisierung eine bessere Wahl (Ma & Kruth, 1995). Folglich werden hier die erforderlichen Kurvenparameter anhand des euklidischen Abstands zwischen benachbarten Beobachtungen bestimmt. Die *zentripetale* Parametrisierung besitzt den Exponenten $e = 0.5$ und gibt gute Ergebnisse, sobald die Datenpunkte ein plötzliches Wendeverhalten aufweisen (Lee, 1989).

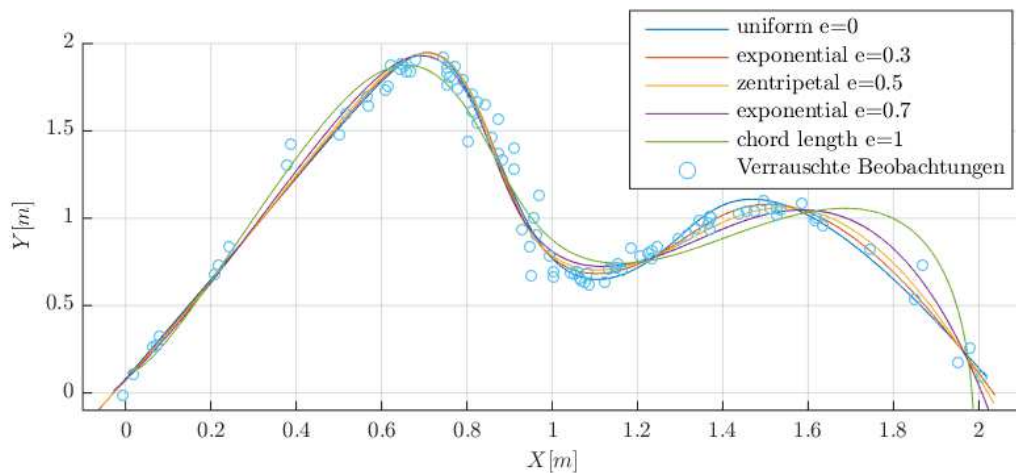


Abb. 2.1: Einfluss unterschiedlicher Parametrisierungsmethoden auf die Approximation von Datenpunkten durch eine B-Spline-Kurve

In Abbildung 2.1 sind die Auswirkungen unterschiedlicher Parametrisierungsmethoden auf eine Kurven-Approximation, welche in Kapitel 2.1.4.3 behandelt wird, anhand einer Kurve mit 100 beobachteten Punkten dargestellt. Es sind deutliche Unterschiede der approximierten Kurven ersichtlich, welcher den Einfluss der Parametrisierung der Beobachtungen verdeutlicht.

Bildet man den Normalabstand der ausgeglichenen Beobachtung aus den Kurvenschätzungen der unterschiedlichen Parametrisierungen zu der *Soll*-Kurve, so kann eine quantitative Beurteilung des Ergebnisses vorgenommen werden. Der Normalabstand bildet sich aus dem minimalen Abstand einer ausgeglichenen Beobachtung zu der approximierten Kurve (siehe Kap. 5.1.1). Summiert man die einzelnen Abstände einer Realisierung auf, ergibt sich für die in Abbildung 2.1 approximierten Kurven, folgendes Ergebnis in Tabelle 2.1:

e -Parameter	0.0	0.3	0.5	0.7	1.0
summierte Distanzen [m]	1.98	1.60	2.15	2.93	3.96

Tab. 2.1: Vergleich der aufsummierten Normalabstände von ausgeglichenen Beobachtungen mit unterschiedlichen Parametrisierungen zur *Soll*-Kurve

Tabelle 2.1 zeigt, dass mit der exponentiellen Parametrisierung ($e = 0.3$) das beste Ergebnis für die gegebenen Beobachtungen realisiert werden kann. Jedoch ist zu beachten, dass für jede beliebige beobachtete Kurve eine andere Parametrisierung minimale Ergebnisse liefern kann.

Allgemein ist zu betonen, dass bei allen Parametrisierungsmethoden der erste Datenpunkt \mathbf{L}_0 immer den Kurvenparameter $u_0 = 0$ erhält, sowie der letzte Datenpunkt \mathbf{L}_M den Parameter $u_M = 1$. Weiter folgen die Kurvenparameter aller Parametrisierungsmethoden einer strengen Monotonie.

Auch ist die Parametrisierung der Datenpunkte bei der Kurvenschätzung unabhängig von der Orientierung der Kurve im Raum. Ist ein Knotenvektor \mathbf{U} a priori festgelegt, sollte es auch einen Satz optimaler Kurvenparameter für die gemessenen Punkte geben, die ein optimales Anpassungsergebnis ergeben (Ma & Kruth, 1995).

2.1.4.2 Ermittlung des Knotenvektors

Unter Verwendung der Kurvenparameterwerte u_k der Beobachtungen \mathbf{L}_k kann ein Knotenvektor \mathbf{U} gebildet werden. Aufgrund der in Kapitel 2.1.4 aufgestellten Forderungen über das a priori Definieren der Anzahl der Kontrollpunkte und des Grades der Kurve p , ist daher, um der Gleichung (2.2) zu genügen, auch die Anzahl der Knoten festgelegt. Der Knotenvektor \mathbf{U} kann unter anderem mit dem Algorithmus von Piegler und Tiller (1995) bestimmt werden. Dieser fügt Knotenpunkte an Positionen ein, an welchen sich

viele Kurvenparameter der Beobachtungen befinden. Auch stellt dieser Algorithmus fest, dass sich in jedem Knotenabschnitt mindestens ein Kurvenparameter u_k befinden, um Singularitäten in der Ausgleichung zu vermeiden.

Weitere Methoden den Knotenvektor \mathbf{U} zu berechnen, findet man in Bureick et al. (2019), Foley und Nielson (1989), Lee (1989), Park und Lee (2007), Razdan (1999). Schmitt und Neuner (2015) zeigen eine verbesserte Methode, den Knotenvektor zu schätzen.

Der Einfluss des Knotenvektors \mathbf{U} auf die Schätzung der Kurve wird an dieser Stelle nicht weiter diskutiert.

2.1.4.3 Kontrollpunkt Schätzung

Sind nun die oben genannten Annahmen getroffen, führt das zu einem linearen Zusammenhang zwischen den Beobachtungen \mathbf{L}_k , $k = 0, \dots, M$ und den unbekanntem Kontrollpunkten \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, n$. Meist ist die Anzahl der Kontrollpunkte $n + 1$ kleiner als die Anzahl der Beobachtungen $M + 1$. Dies führt zu einem Minimierungsproblem.

Durch Hinzunahme eines Verbesserungsterms \mathbf{v}_k ergibt sich das funktionale Modell im zweidimensionalen Fall für jede Beobachtung:

$$\mathbf{C}(u_k) = \mathbf{L}_k + \mathbf{v}_k = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u_k) \hat{\mathbf{P}}_i = \begin{pmatrix} \varphi_{kx}(\hat{P}_{xi}) \\ \varphi_{ky}(\hat{P}_{yi}) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k = 0, \dots, M, \quad (2.6)$$

wobei $\mathbf{C}(u_k)$ die approximierten Kurvenpunkte und $\hat{\mathbf{P}}_i$ die ausgeglichenen Kontrollpunkte sind. Die Gleichung (2.6) kann je nach räumlicher Dimension in zwei Beobachtungsgleichungen (2D) mit X- und Y-Komponenten (φ_{kx} , φ_{ky}) oder in drei Beobachtungsgleichungen (3D) mit einer zusätzlichen Z-Komponente (φ_{kx} , φ_{ky} , φ_{kz}) unterteilt werden. Wichtig zu betonen ist, dass die Ausgleichung koordinatenweise erfolgt. Dies bedeutet, dass sich die Beobachtungen \mathbf{L}_k sowie die zu schätzenden Kontrollpunkte \mathbf{P}_i in der Form folgender Vektoren bilden:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{x0} \\ L_{y0} \\ L_{x1} \\ L_{y1} \\ \vdots \\ L_{xM} \\ L_{yM} \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{x0} \\ P_{y0} \\ P_{x1} \\ P_{y1} \\ \vdots \\ P_{xn} \\ P_{yn} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Aus den komponentenweisen Beobachtungsgleichungen lässt sich durch partielles Ableiten nach den zu schätzenden Parametern die Designmatrix \mathbf{A} für den 2D-Fall aufstellen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial P_{x0}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial P_{y0}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial P_{xn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial P_{yn}}\right) \\ \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial P_{x0}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial P_{y0}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial P_{xn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial P_{yn}}\right) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial P_{x0}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial P_{y0}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial P_{xn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial P_{yn}}\right) \\ \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial P_{x0}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial P_{y0}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial P_{xn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial P_{yn}}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

wobei P_{xi} , P_{yi} , $i = 0, \dots, n$ die jeweilige Komponenten des i -ten unbekanntem Kontrollpunktes sind und die Matrix \mathbf{A} eine Form von $[(M + 1) \cdot \dim \times (n + 1) \cdot \dim]$ hat ($\dim =$ Dimension der Punkte). Bureick et al. (2016) zeigen, dass die Designmatrix \mathbf{A} aufgrund der Ableitungen aus den B-Spline Basisfunktionen besteht:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} N_{0,p}(u_0) & 0 & \cdots & N_{n,p}(u_0) & 0 \\ 0 & N_{0,p}(u_0) & \cdots & 0 & N_{n,p}(u_0) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ N_{0,p}(u_M) & 0 & \cdots & N_{n,p}(u_M) & 0 \\ 0 & N_{0,p}(u_M) & \cdots & 0 & N_{n,p}(u_M) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Die Approximation wird optimal, wenn die kürzeste Distanz zwischen den $M + 1$ Beobachtungen \mathbf{L}_k und den approximierten Kurvenpunkten $\mathbf{C}(u_k)$ minimal wird. Der Verbesserungsterm \mathbf{v}_k ergibt sich nun zu folgender Gleichung:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{C}(u_k) - \mathbf{L}_k \quad (2.10)$$

Die gesuchten Kontrollpunkte \mathbf{P}_i sollen nun so bestimmt werden, sodass die Verbesserungsquadratsumme minimiert wird. Die Matrix \mathbf{Q}_{LL}^{-1} stellt hier die Gewichte der Beobachtungen dar. Es wird angenommen, dass mit unkorrelierten Punkten mit identischen Genauigkeiten gearbeitet wird und somit die Matrix \mathbf{Q}_{LL}^{-1} durch die Einheitsmatrix gegeben ist. Kauker und Schwieger (2017) geben eine Möglichkeit an, mit einer vollbesetzten Kovarianz-Matrix zu arbeiten, in Bezug auf terrestrisches Laserscannen. Die Zielfunktion $f(\hat{\mathbf{P}})$ bildet sich demnach:

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{P}}) &= \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{LL}^{-1} \mathbf{v} = \sum_{k=0}^M (\mathbf{C}(u_k) - \mathbf{L}_k)^2 \rightarrow \min \\ &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{L})^T \mathbf{Q}_{LL}^{-1} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{L}) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei $\hat{\mathbf{P}}$ der Vektor der ausgeglichenen Kontrollpunkte ist und an dieser Stelle an koordinatenweise Betrachtung erinnert werden muss.

Diese Voraussetzungen führen zu einem Ausgleich im Gauß-Markov-Modell (Niemeier, 2008), welches die Position der Kontrollpunkte \mathbf{P}_i als unbekannt führt und die Beobachtungen gemessene und verrauschte Kurvenpunkte \mathbf{L}_k sind.

Die ausgeglichenen Kontrollpunkte $\hat{\mathbf{P}}$ bilden sich wie folgt:

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{LL}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{LL}^{-1} \mathbf{L} \quad (2.12)$$

Die ausgeglichenen Beobachtungen $\mathbf{C}(u_k)$, welche ebenso wie in Gleichung (2.7) in einem Vektor \mathbf{C} zusammengefasst werden können, lassen sich folgend ausdrücken:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{L} + \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{L} \quad (2.13)$$

Diese Ausgleichung wird von Piegler und Tiller (1995) ausführlich beschrieben und gilt als Standardmethode, B-Spline-Kurven zu approximieren.

2.1.5 Intrinsische Parametrisierung (nach Hoschek)

Hoschek (1988) zeigt, dass die Verbesserungsvektoren einer Beobachtung \mathbf{v}_k in Gleichung (2.10) nicht orthogonal auf die approximierten Kurve stehen. Obwohl ein lineares Problem vorliegt, wird nicht die kürzeste Distanz zwischen den Beobachtungen \mathbf{L}_k und der approximierten Kurve minimiert. Grund dafür ist die koordinatenweise Betrachtung des Ausgleichs, welcher jeder Koordinate der Beobachtung \mathbf{L}_k einen Verbesserungsterm aufaddiert.

Eine optimale Minimierung kann unter anderem über geeignete Änderungen der Kurvenparameter u_k erreicht werden, wobei iterativ die Parameterwerte solange verändert werden, bis die Verbesserungsvektoren \mathbf{v}_k senkrecht zur approximierten Kurve stehen, wie in Abbildung 2.2 ersichtlich ist (Hoschek & Lasser, 1989). Solch ein Algorithmus wird von Hoschek und Lasser (1989) und Hoschek (1988) beschrieben.

Zuerst wird, wie in Kapitel 2.1.4.3 erklärt, eine Kurve durch die gemessenen Beobachtungen \mathbf{L}_k approximiert. Eine Beobachtung \mathbf{L}_k wird dann auf die Tangente im Kurvenpunkt $\mathbf{C}(u_k)$ projiziert. Es lässt sich nun der Abstand Δc_k vom Lotfußpunkt \mathbf{F}_k und dem approximierten Kurvenpunkt $\mathbf{C}(u_k)$ folgend berechnen:

$$\Delta c_k = (\mathbf{L}_k - \mathbf{C}(u_k)) \frac{\mathbf{C}'(u_k)}{|\mathbf{C}'(u_k)|}, \quad (2.14)$$

wobei die Ableitungen $\mathbf{C}'(u_k)$ der B-Spline-Kurve wie in Kapitel 2.1.3 berechnet werden. Der Abstand Δc_k ist eine Näherung für die notwendige Parameteränderung, um den Fehlervektor \mathbf{v}_k (siehe Gleichung (2.10)) in eine zur approximierten Kurve orthogonale Lage überzuführen. Die Länge der Kurve μ wird mit Hilfe eines Polygonzuges approximiert.

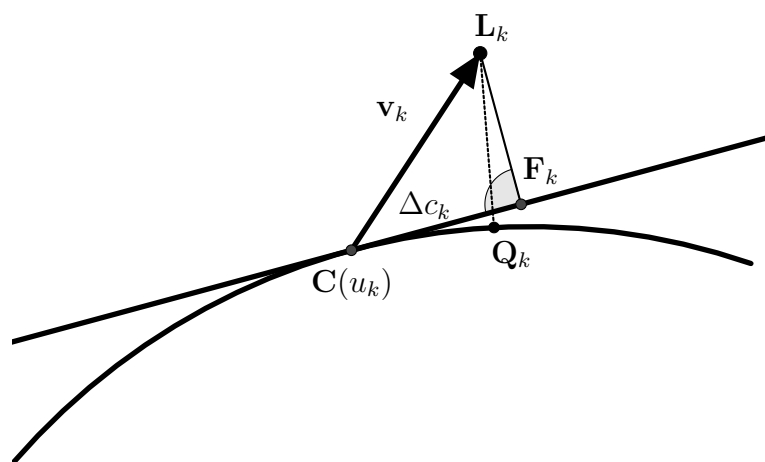


Abb. 2.2: Projektion des Verbesserungsvektors \mathbf{v}_k auf Kurventangente (Hoschek (1988))

Somit ergibt sich für einen verbesserten Kurvenparameter \tilde{u}_k folgende Form (Hoschek, 1988):

$$\tilde{u}_k = u_k + \Delta c_k \frac{b-a}{\mu} \quad \text{mit} \quad a \leq u_k \leq b, \quad (2.15)$$

wobei $[a, b]$ das Gesamtparameterintervall ist und die Grenzen $a = 0$ und $b = 1$ gesetzt werden.

Mit den neu gewonnenen Parametern \tilde{u}_k wird nun die Ausgleichung, wie in Kapitel 2.1.4.3 beschrieben, erneut durchgeführt. Dieses Verfahren wird nun solange iterativ angewandt bis ein a priori definiertes Abbruchkriterium erfüllt ist. Hoschek (1988) definiert die Abbruchkriterien mit einer vorgegebenen maximalen Anzahl von Iterationen oder einem Winkel α , der das Erreichen der orthogonalen Lage (90°) kontrolliert. Hoschek und Lasser (1989) geben diesen Winkel α mit $\pm 0.1^\circ$ an.

Hoschek und Lasser (1989) erwähnen, dass die Konvergenz des Verfahrens von der anfänglichen Parametrisierung, welche mit Methoden aus Kapitel 2.1.4.1 durchgeführt werden kann, abhängt, da im Allgemeinen nur lokale Extrema ermittelt werden.

Saux und Daniel (2003) entwickelten eine verbesserte intrinsische Parametrisierung basierend auf dem Algorithmus von Hoschek (1988), welche motiviert ist, die Konvergenzrate zu erhöhen und die Approximationsfehler der Datenpunkte zu reduzieren.

2.2 Mathematischen Optimierung

In Kapitel 1 wird erwähnt, dass eine Integration der Flächenparameter bzw. Kurvenparameter in die Ausgleichung, wie sie in Kapitel 2.1.4.3 beschrieben wird, zur Lösung der Datumsproblematik von B-Spline-Objekten und in weiterer Folge zu einem möglichen statistischen Vergleich führen kann.

Der gemeinsame Ausgleich führt zu einem nicht-linearen Modell, da die Kurvenparameter nicht linear in den Beobachtungsgleichungen enthalten sind. Es tritt die Problematik auf, dass die Kurvenparameter aus ihrem vordefinierten Bereich $[0, 1]$ geraten. Aus diesem Grund sind Ungleichungsrestriktionen einzuführen, welche dies verhindern sollen. Die Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen kann auf ein quadratisches Programm bzw. auf ein lineares Komplementaritätsproblem zurückgeführt und damit gelöst werden. Die benötigten mathematischen Grundlagen werden in den folgende Kapiteln dargestellt.

2.2.1 Lineares Komplementaritätsproblem

Cottle et al. (1992) beschreiben das lineare Komplementaritätsproblem (*LCP*) als Problem, einen Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ zu finden, der folgende Bedingungen erfüllt

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{q} + \mathbf{Mz} \geq \mathbf{0} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{z}^T(\mathbf{q} + \mathbf{Mz}) = 0 \quad (2.18)$$

oder die Existenz eines solchen Vektors zu widerlegen. Dabei ist $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ein reeller Vektor.

In einigen Publikationen (Cottle & Dantzig, 1970; Schäfer, 2008) wird ein Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ eingeführt, welcher das *LCP* folgend umformt und sich somit auf das Auffinden zweier Vektoren, \mathbf{z} und \mathbf{w} , erweitert:

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{z}^T \mathbf{w} = 0 \quad (2.20)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz}, \quad (2.21)$$

wobei zu beachten ist, dass in Gleichung (2.19) die $\mathbf{0}$ den Nullvektor darstellt. Ein zulässiger Vektor \mathbf{z} erfüllt die Gleichung (2.18), wenn die Gleichung (2.20) gilt. Die jeweils zugehörigen Elemente der Vektoren \mathbf{z} und \mathbf{w} werden komplementäres Paar genannt. Die Gleichungen (2.19) und (2.20) lassen schließen, ist ein Element \mathbf{z}_i oder \mathbf{w}_i , $i = 1, \dots, n$ größer null, muss das komplementäre Element verschwinden, also null werden. Jedoch dürfen nie die beiden Elemente eines komplementären Paares gleichzeitig null werden.

2.2.1.1 Lösen eines Linearen Komplementaritätsproblems

Das *LCP* mit den Gleichungen (2.19) - (2.21) stellt also ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und $2n$ Unbekannten (Schäfer, 2008) dar, wobei

von den Unbekannten eine Anzahl von n , den Nichtbasisvariablen, null sein müssen. Die weiteren Unbekannten der Anzahl n müssen größer null sein und werden Basisvariablen genannt.

Solche unterbestimmten Systeme können von einer Vielzahl von Algorithmen gelöst werden. Murty (1988) gibt einen Überblick von Algorithmen, ein LCP zu lösen. In dieser Arbeit wird der Algorithmus von Lemke (1968) verwendet, welcher von Schäfer (2008) als der am häufigsten angewandte Algorithmus zum Lösen eines LCP genannt wird. Zudem existiert davon ein öffentlich zugänglicher *MATLAB*-Code (Almqvist, 2020).

Es sei betont, dass der Lemke-Algorithmus sich damit begnügt, eine Lösung des LCP zu finden (Schäfer, 2008). In Kapitel 2.2.1.2 wird beschrieben, wann ein LCP genau eine eindeutige Lösung besitzt. In dieser Arbeit wird mit Matrizen gearbeitet, wie sie in Kapitel 2.2.1.2 erläutert sind. Schäfer (2008) merkt an, dass prinzipiell das Gleichungssystem (2.21) gelöst werden kann, indem es mit Hilfe des Gauß-Jordan'schen Eliminationsverfahren so umgestellt wird, sodass nach einer endlichen Anzahl von Schritten die Nichtbasisvariablen Null sind und der Vektor \mathbf{q} nur noch positive Elemente besitzt. Dieser Algorithmus wird in Schäfer (2008) beispielhaft durchgeführt. Ist der Vektor $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, so entspricht $\mathbf{w} := \mathbf{q}$ und somit ist $\mathbf{z} := \mathbf{0}$ eine triviale Lösung der Gleichung (2.21).

Ausgangspunkt des Lemke-Algorithmus ist die Hinzunahme einer künstlichen Variable z_0 mit $z_0 \geq 0$ zum linearen Gleichungssystem (2.21) (Lemke, 1968):

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz} + z_0\mathbf{e}, \quad (2.22)$$

wobei \mathbf{e} den Einheitsvektor darstellt und $\mathbf{q} \not\geq \mathbf{0}$ ist. Der Lemke-Algorithmus sucht zuerst das minimale Element q_{min} des Vektors \mathbf{q} , welches für eine nicht triviale Lösung negativ sein muss. Die Variable z_0 wird zu $-q_{min}$ gesetzt und wird dadurch positiv. Folglich werden alle Summen der Elemente von den Vektoren \mathbf{q} und $z_0\mathbf{e}$ positiv. Die Gleichung (2.22) wird nun so umgeformt, sodass z_0 verschwindet und der Vektor \mathbf{q} positiv bleibt. Details des Lemke-Algorithmus und zu dessen Arbeitsschritte sind unter anderem in Lüthi (1976) und Schäfer (2008) angeführt.

2.2.1.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Die Beurteilung der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines LCP soll hier vor allem auf Hinblick der Matrix \mathbf{M} erfolgen. Gehört die \mathbf{M} der Klasse der P -Matrix an, so hat das LCP für jeden Vektor \mathbf{q} genau eine eindeutige Lösung. P -Matrizen sind so definiert, dass sie für jede Hauptuntermatrix eine positive Determinante (Hauptminoren) besitzt. Jede positiv definite Matrix ist eine P -Matrix und besitzt daher eine eindeutige Lösung für ein LCP -Verfahren. Allerdings ist nicht jede P -Matrix positiv definit (Schäfer, 2008).

Schäfer (2008) spricht davon, dass ein *LCP* mit positiv semidefiniten Matrizen vor allem bei quadratischen Programmen entsteht. Positiv semidefinite Matrizen gehören der Klasse der *Copositive-Plus-Matrizen* an. Cottle und Dantzig (1968) erwähnen zum ersten Mal den Begriff *Copositive-Plus-Matrizen* in Bezug mit dem *LCP*-Verfahren. Eine Matrix \mathbf{M} ist *copositiv-plus*, wenn diese folgende zwei Bedingungen erfüllt:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} \geq 0 \quad \forall \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad (2.23)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{wenn} \quad \mathbf{u} \mathbf{M} \mathbf{u}^T = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (2.24)$$

Ist demnach \mathbf{M} eine *Copositive-Plus-Matrix* und führen die Bedingungen in Gleichung (2.19) und Gleichung (2.20) eine zulässige Lösung, so verfügt das *LCP* über eine eindeutige Lösung. Endet das *LCP* mit einer *Copositive-Plus-Matrix* durch *Ray-Termination* besitzt es keine eindeutige Lösung (Cottle & Dantzig, 1968). Eine *Ray-Termination* bedeutet hier speziell, dass es einen Vektor $\mathbf{z}^h \in \mathbb{R}^n > \mathbf{0}$ gibt, welcher folgende Bedingung erfüllt:

$$\mathbf{z}_i^h (\mathbf{M} \mathbf{z}^h)_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

2.2.2 Quadratische Programmierung

Murty (1988), Marti und Gröger (2013) und Boyd und Vandenberghe (2004) beschreiben das Problem der quadratischen Programme (*QP*) in der Form

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} + \mathbf{c}^T \mathbf{y} \rightarrow \min \quad (2.26)$$

unter Berücksichtigung der linearen Nebenbedingungen

$$\mathbf{B} \mathbf{y} \leq \mathbf{b} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

wobei Matrix \mathbf{B} eine Dimension von $(r \times u)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{c}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^u$ und \mathbf{D} eine symmetrische $(u \times u)$ -Matrix sind. Eine weitere Voraussetzung ist, dass $r \leq u$ ist und die Matrix \mathbf{B} vollen Zeilenrang besitzt. Ist die Matrix \mathbf{D} eine positive semidefinite Matrix, dann wird die Zielfunktion $f(\mathbf{y})$ konvex und \mathbf{y} zu einer globalen Lösung der Aufgabe (Fletscher, 2000).

Die Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^r$ werden eingesetzt. Auch werden Schlupfvariablen $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ eingeführt, welche die Ungleichung (2.27) in die Form $\mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{b}$ bringt (Jungnickel, 2014). $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{v} sowie \mathbf{s} werden als weiter unbekannte Parameter betrachtet.

Es wird nun die Lagrange-Funktion \mathcal{L} für das beschriebene quadratische Problem gebildet (Marti & Gröger, 2013):

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} + \mathbf{c}^T \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{s} - \mathbf{b}) - \mathbf{v}^T \mathbf{y} \quad (2.29)$$

Die Ableitungen nach den Unbekannten der Lagrange-Funktion \mathcal{L} lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{D} \mathbf{y} + \mathbf{c} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{v}^T = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{s} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} &= \mathbf{v}^T \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Daraus lassen sich die Kuhn-Tucker-Bedingungen (*KKT*) (Kuhn & Tucker, 1951) ableiten, welche eine Verallgemeinerung der Optimalitätsbedingung erster Ordnung von unrestringierten Optimierungsaufgaben darstellen. (Geiger & Kanzowe, 2002). Diese sind in den Gleichungen (2.31) - (2.33) angegeben.

$$\mathbf{D} \mathbf{y} + \mathbf{c} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{v}^T = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{s} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

Marti und Gröger (2013) definieren einen Punkt $\hat{\mathbf{y}}^* \in \mathbb{R}^u$ als eine globale Lösung des Problems, wenn Vektoren von Lagrange-Multiplikatoren $\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^r$ existiert, welcher die oben definierten Bedingungen erfüllt.

Jungnickel (2014) zeigt, dass sich durch diese *KKT*-Bedingungen ein *LCP* definiert. Es können nun folgende Matrix und Vektoren gebildet werden:

$$\mathbf{M} \hat{=} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} \hat{=} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} \hat{=} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} \hat{=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Die *KKT*-Bedingungen der Gleichungen (2.31) - (2.33) lassen sich somit zu einem *LCP* der Form der Gleichungen (2.19) - (2.21) bilden.

$$\mathbf{w} - \mathbf{M} \mathbf{z} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{w}^T \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (2.35)$$

2.2.3 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Ungleichungsrestriktionen

A. Koch (2007) beschreibt das Problem der Ausgleichung nach vermittelten Beobachtungen mit linearen Ungleichungsrestriktionen und erläutert in seiner Arbeit einen Algorithmus mit Einbindung des *LCP*-Verfahrens. Im folgenden Kapitel wird nun diese Methode beschrieben.

Zu beachten ist, dass oftmals in der Ausgleichung keine lineare Beziehung zwischen den Beobachtungen und den zu schätzenden Parametern vorausgesetzt ist. Deshalb ist eine Linearisierung durchzuführen und Näherungswerte \mathbf{X}_0 für die unbekannt Parameter erforderlich, welche durch Addition mit den Unbekanntenzuschlägen $\hat{\mathbf{x}}$ die ausgeglichenen Parameter $\hat{\mathbf{X}}$ darstellt. Durch Einsetzen der Werte des Vektors \mathbf{X}_0 in ein funktionales Modell, welches die Beobachtungen \mathbf{L} als Funktion der zu schätzenden Parameter darstellt, lässt sich ein genäherter Beobachtungsvektor \mathbf{L}_0 berechnen. Der daraus abgeleitete gekürzte Beobachtungsvektor ergibt $\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0$ (Niemeier, 2008).

Es soll nun eine Zielfunktion eines Ausgleichs nach vermittelten Beobachtungen unter Berücksichtigung von linearen Ungleichungsrestriktionen minimiert werden. Die Zielfunktion ist hier angegeben:

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{v} \rightarrow \min \\ &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{l})^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{l}) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (2.36)$$

wobei \mathbf{A} die Designmatrix und \mathbf{v} der Verbesserungsvektor sind. Die Kofaktormatrix \mathbf{Q}_{ll}^{-1} wird auch hier zu einer Einheitsmatrix, da mit unkorrelierten Punkten mit identischen Genauigkeiten gearbeitet wird. Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}^*$ soll verdeutlichen, dass sich die Unbekanntenzuschläge der geschätzten Parameter von der Ausgleichung ohne Restriktionen von denen mit Restriktionen in der Regel unterscheiden. Die Ungleichungsrestriktionen haben die Form:

$$\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^* \leq \mathbf{b} \quad (2.37)$$

Die Matrix \mathbf{H} beinhaltet die partiellen Ableitung der Bedingungen nach den zu schätzenden Parametern und der Vektor \mathbf{b} die Absolutglieder. Es wird deutlich, dass die Unbekanntenzuschläge $\hat{\mathbf{x}}^*$ linear in den Bedingungen enthalten sein müssen. Dieses Problem lässt auf ein quadratisches Programm schließen, welches in Kapitel 2.2.2 behandelt wird (Cottle et al., 1992).

Aus der Zielfunktion, Gleichung (2.36), lässt sich dies durch Ausmultiplizieren leicht erkenntlich machen:

$$\begin{aligned}
 f(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{v} \\
 &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{1})^T \mathbf{Q}_u^{-1} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{1}) \\
 &= \hat{\mathbf{x}}^{*T} \mathbf{N} \hat{\mathbf{x}}^* - 2\hat{\mathbf{x}}^{*T} \mathbf{n} + \mathbf{1}^T \mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{1} \\
 &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}^{*T} \mathbf{N} \hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}^{*T} \mathbf{n} + \frac{1}{2} \mathbf{1}^T \mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{1},
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

wobei sich die Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{A}$ und der Absolutgliedvektor $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{1}$ bilden. In Gleichung (2.38) ergibt sich außerdem ein dritter konstanter Term, der nicht von $\hat{\mathbf{x}}^*$ abhängig ist und deshalb das quadratische Problem nicht weiter beeinflusst. Gleichung (2.37) bildet die erste Nebenbedingung des quadratischen Programms in Gleichung (2.27). A. Koch (2007) gibt an, auf die Nichtnegativitätsbedingung (2.28) zu verzichten. Der Vektor \mathbf{y} in Gleichung (2.28) stellt hier die Unbekanntenzuschläge $\hat{\mathbf{x}}^*$ dar. Bei einer Ausgleichung ist es jedoch nötig, dass diese positive oder negative Werte annehmen können und nicht auf positive Werte beschränkt sind. In Kapitel 2.2.2 ist bereits erwähnt, dass ein quadratisches Programm durch Bildung und Umformung der *KKT*-Bedingungen in ein *LCP* transferiert werden kann, jedoch ist dabei noch die Gleichung (2.28) beinhaltet.

Das Kapitel 2.2.4 zeigt, wie ohne der Nichtnegativitätsbedingung (2.28) von einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtung auf ein *LCP* übergegangen werden kann.

2.2.4 Von der Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen zum LCP

Es werden nun Schlupfvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ eingeführt, welche die Ungleichung (2.37) in eine Gleichung überführt und zusätzliche zu schätzende Parameter in der Ausgleichung darstellen. Außerdem gilt eine Nichtnegativitätsbeschränkungen für die Variablen $\hat{\mathbf{s}}$ (Boyd & Vandenberghe, 2004).

$$\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^* + \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{s}} \geq \mathbf{0} \tag{2.39}$$

Mit der Zielfunktion (2.38) und den Restriktionen (2.39) bildet sich nun die Lagrange-Funktion \mathcal{L} , welche zur Überführung eines Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen in ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen dient:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}^*, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\mathbf{s}}) &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{1})^T \mathbf{Q}_u^{-1} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{1}) + 2\hat{\boldsymbol{\lambda}}^T (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^* + \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{b}) \\
 &= \hat{\mathbf{x}}^{*T} \mathbf{N} \hat{\mathbf{x}}^* - 2\hat{\mathbf{x}}^{*T} \mathbf{n} + \mathbf{1}^T \mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{1} + 2\hat{\boldsymbol{\lambda}}^T (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^* + \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{b}),
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ die Lagrange Multiplikatoren, \mathbf{N} die Normalgleichungsmatrix und \mathbf{n} der Absolutvektor der Normalgleichungen sind.

Zur Bildung der Kuhn-Tucker-Bedingungen wird die Lagrange-Hilfsfunktion \mathcal{L} nach den Unbekannten partiell abgeleitet.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{n} + \mathbf{H}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^* + \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

Die Vektoren $\hat{\mathbf{x}}^*$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ und $\hat{\mathbf{s}}$ stellen Extremstellen der Lagrange-Hilfsfunktion \mathcal{L} dar und sind somit Lösungen der Ausgleichung.

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen führen nun mit einigen Umformungsschritten zu einem linearen Komplementaritätsproblem (siehe Kap. 2.2.1). Die Umformung von Gleichung (2.41) führt zur Bestimmungsgleichung der zu schätzenden Parameter $\hat{\mathbf{x}}^*$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{n} - \mathbf{H}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \\ &= \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}$, die Unbekanntenzuschläge aus einer Ausgleichung ohne Restriktionen (siehe Gleichung (4.4)), bestimmt werden kann. Die Schlupfvariablen $\hat{\mathbf{s}}$ ergeben sich aus Gleichung (2.42):

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{b} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^* \quad (2.45)$$

Nun wird $\hat{\mathbf{x}}^*$ aus Gleichung (2.44) in die Gleichung (2.45) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \mathbf{b} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \\ &= \mathbf{b} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{H}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{H}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Es folgen nun Substitutionen um ein Gauß-Markov-Modell mit Ungleichungsrestriktionen in ein *LCP* überführen zu können:

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T \quad (2.47)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{b} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} \quad (2.48)$$

Werden die Ausdrücke (2.47) und (2.48) in die Gleichung (2.46) eingesetzt, führt das zur Form eines *LCP* (Gleichung (2.21)):

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{q} + \mathbf{M}\hat{\boldsymbol{\lambda}} \quad (2.49)$$

Die weiteren Bedingungen (2.19) und (2.20) des *LCP* ergeben sich aus Gleichung (2.43):

$$\hat{\mathbf{s}} \geq \mathbf{0} \wedge \hat{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0} \quad (2.50)$$

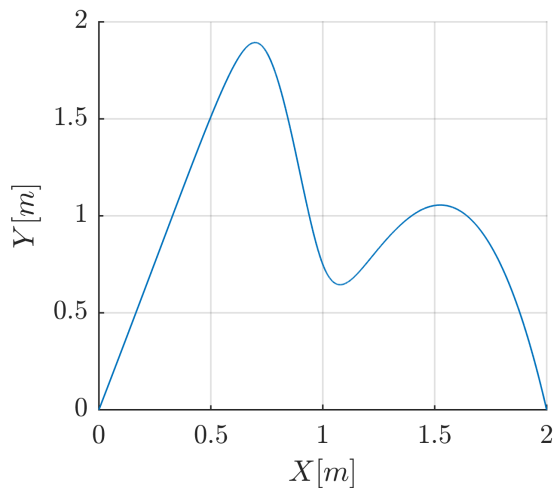
$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \hat{\mathbf{s}} = 0 \quad (2.51)$$

Die aus dem *LCP* ermittelten $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ lassen sich in Gleichung (2.44) einsetzen, um die Zuschlagsparameter $\hat{\mathbf{x}}^*$ zu berechnen.

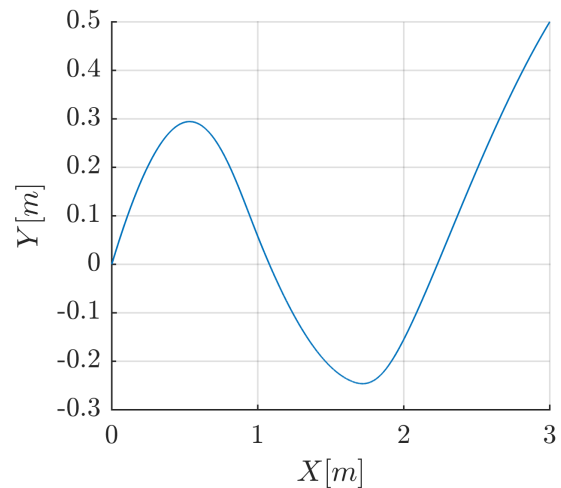
Dieser Vorgang kann iterativ wiederholt werden bis die ausgeglichenen Parameter ein a priori festgelegtes Abbruchkriterium erreichen.

3 Datensätze

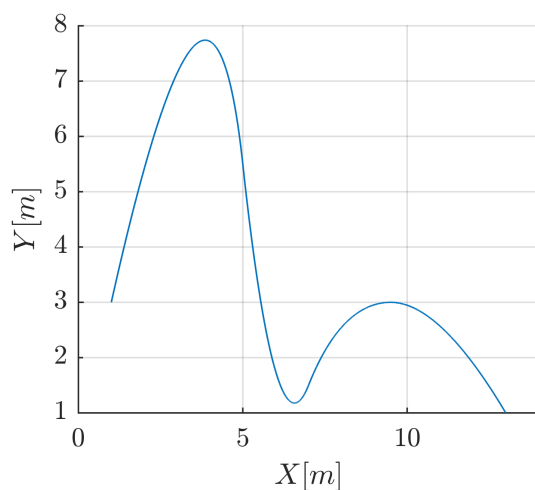
In dieser Arbeit werden vier B-Spline-Kurven-Datensätze verwendet. Diese sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Die abgebildeten Kurven stellen die *Soll*-Kurven dar und sind demnach unverrauscht. Zu beachten sind die unterschiedlichen Skalen.



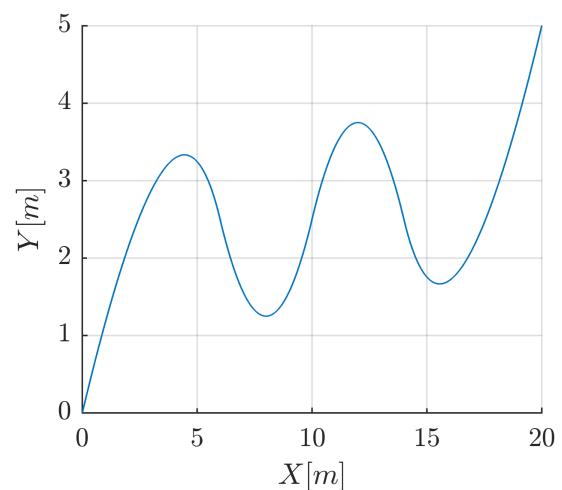
(a) **Kurve 1** (Harmening & Neuner, 2016a)



(b) **Kurve 2** (Grecher, 2016)



(c) **Kurve 3** (Bureick et al., 2019)



(d) **Kurve 4** (Bureick et al., 2019)

Abb. 3.1: Die verwendete unverrauschte B-Spline-*Soll*-Kurven

Es handelt sich hier um vier simulierte Datensätze mit vordefinierten Parametern, sodass Kurvenpunkte berechnet werden können. Die vier B-Spline-Kurven besitzen daher einen vordefinierten Grad p , eine bestimmte Anzahl von Kontrollpunkten und einen Knotenvektor mit vorgegebenen Elementen. Auch sind hier die Kontrollpunkte koordinativ bekannt um nach einer Approximation der Kurven Schlüsse in Bezug auf die *Soll*-Kurve ziehen zu können. *Kurve 1* und *Kurve 2* (siehe Abb. 3.1a und 3.1b) sind kubische Kurven

und besitzt den Grad $p = 3$. *Kurve 3* und *Kurve 4* (siehe Abb. 3.1c und 3.1d) haben den Grad $p = 2$. Die genauen Spezifikationen der einzelnen Kurven sind in Kapitel A.1 ersichtlich.

Kurve 1 und *Kurve 3* zeigen ein ähnliches Verhalten mit einem lokalen Minimum, einem lokalen Maximum und einem globalen Maximum. Sie unterscheiden sich vor allem in der Ausdehnung in x - und y -Richtung. *Kurve 4* besitzt zwei lokale Minima und zwei lokale Maxima. *Kurve 2* weist hingegen ein lokales Maximum und ein globales Minimum auf.

Die Kurven sollen stetig differenzierbar sein, keine Sprünge, Knicke oder Datenlücken besitzen. Grund dafür ist das Erscheinen von Singularitäten während der Kontrollpunkt Schätzung (siehe Kap. 2.1.4.3). Auch sollen die Kurven kein starkes Krümmungsverhalten aufweisen. Eine B-Spline-Kurve ist C^{p-k} -stetig, wobei p der Grad der Kurve und k die Anzahl der internen Knoten mit den gleichen Werten sind. Identische Knoten reduzieren also den Grad der Stetigkeit an einer Position. Zum Beispiel ist eine B-Spline-Kurve mit $p = 3$ und drei identischen Werten in ihrem Knotenvektor \mathbf{U} an dieser Stelle C^0 -stetig. Daher kann dort ein Sprung oder Knick erscheinen. Es benötigt also mehrere Knoten um Sprünge in einer Approximation zu berücksichtigen (Piegl & Tiller, 1995). Bureick et al. (2019) entwickeln in ihrer Arbeit einen Algorithmus zur Berechnung des Knotenvektors, welcher robuster gegenüber Datenlücken ist.

In dieser Arbeit wird jedoch kein Fokus auf den Knotenvektor gelegt und mit dem vordefinierten Knotenvektor einer Kurve gearbeitet. Diese Einschränkungen lassen sich auch über die Anwendung motivieren. In der Ingenieurgeodäsie werden meist Objekte, wie Häuser oder Brücken, beobachtet, welche die oben beschriebenen Eigenschaften nicht besitzen. Bei allen Kurven handelt es sich um Modelle, welche durchaus in der Praxis verwendet werden.

Mit den gegebenen Parametern einer B-Spline-Kurve können Punkte auf einer Kurve generiert werden. Die Kurvenpunkte werden in dieser Arbeit mit einem normalverteilten unkorrelierten Rauschen ($\sigma_x = 3 \text{ mm}$) versehen. In der Realität kann jedoch nicht von unkorrelierten Beobachtungen ausgegangen werden und ist deshalb nur eine gewählte Annahme.

4 Gemeinsame Schätzung von Kurvenparametern und Kontrollpunkten mit Hilfe des LCP

Die in Kapitel 2.1.4.1 erwähnten Parametrisierungsmethoden sind wesentlich entscheidend für das Resultat einer Kurven-Approximation, wie in Kapitel 2.1.4.3 vorgestellt. Da keines dieser Parametrisierungsverfahren aber Kurvenparameter berechnet, welche für eine Kurven-Approximation ein zufriedenstellendes Ergebnis liefert, wird in einigen Publikationen (Hoschek, 1988; Sarkar & Menq, 1991a, 1991b; Saux & Daniel, 2003) eine Parameterkorrektur nachgestellt, um die approximierte Kurve zu verbessern.

Der Ansatz, welcher hier gewählt wird, ist die Integration der Kurvenparameter u_k in eine gemeinsame Ausgleichung mit den Kontrollpunkten \mathbf{P}_i zur Approximation von Kurven. Diese soll, wie in Kapitel 1 erwähnt, die in unterschiedlichen Epochen gemessenen Objekten in ein gemeinsames B-Spline-Datum überführen. Darüber hinaus soll dadurch auch die Problematik der nicht orthogonalen Verbesserungen behoben werden (siehe Kapitel 2.1.5).

Der neu entwickelte Algorithmus geht von einer Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen (siehe Kap. 2.2.3) auf ein lineares Komplementaritätsproblem (siehe Kap. 2.2.1) über. Dieser Schritt wird in Kapitel 2.2.4) beschrieben. Die grundlegenden Schritte des entwickelten Algorithmus sind in Abbildung 4.1 schematisch aufgezeigt und in dem folgenden Kapiteln detailliert beschrieben. In dieser Arbeit werden der Grad der B-Spline-Kurve p , der Knotenvektor \mathbf{U} und dadurch (siehe Gleichung (2.2)) auch die Anzahl der Knotenpunkte $n + 1$ a priori festgelegt.

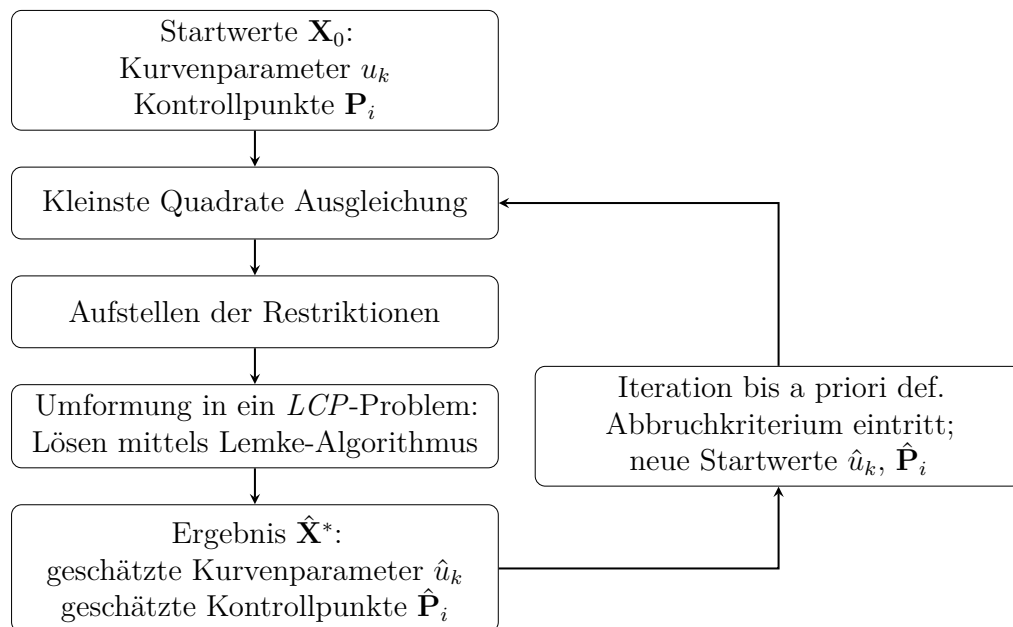


Abb. 4.1: Algorithmus der neu entwickelten Methode der Kurven-Approximation

4.1 Kleinste Quadrate Ausgleich mit Kontrollpunkten und Kurvenparametern als Unbekannte

Eine Integration der Kurvenparameter u als unbekannte Parameter in die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (Niemeier, 2008), welche in Kapitel 2.1.4.3 beschrieben wird, führt zu einem nicht-linearen Modell, da die Kurvenparameter nicht linear in dem funktionalen Modell vorkommen. Das funktionale Modell ergibt sich zu:

$$\mathbf{C}(\hat{u}_k) = \mathbf{L}_k + \mathbf{v}_k = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\hat{u}_k) \hat{\mathbf{P}}_i = \begin{pmatrix} \varphi_{kx}(\hat{P}_{xi}, \hat{u}_k) \\ \varphi_{ky}(\hat{P}_{yi}, \hat{u}_k) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k = 0, \dots, M \quad (4.1)$$

Die einzelnen Beobachtungsgleichungen φ_{kx} und φ_{ky} sind demnach abhängig von den jeweiligen Komponenten der Kontrollpunkte und dem zugehörigen Kurvenparameter einer Beobachtung.

Aufgrund des nicht-linearen Modells ist eine Linearisierung durchzuführen und für die unbekanntes Kontrollpunkte \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, n$ und Kurvenparameter u_k , $k = 0, \dots, M$ der Beobachtungen \mathbf{L}_k werden nicht stochastische Näherungswerte benötigt, welche in \mathbf{X}_0 zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= [P_{x0}; P_{y0}; P_{x1}; P_{y1}; \dots; P_{(n-1)x}; P_{(n-1)y}; P_{nx}; P_{ny}; u_0; u_1; \dots; u_{M-1}; u_M]^T \\ &= [\mathbf{X}_{0P}; \mathbf{X}_{0u}]^T \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aus einer ersten linearen Ausgleichung, wie in Kapitel 2.1.4.3 beschrieben, werden die dort ausgeglichenen Kontrollpunkte als erste Näherungswerte verwendet.

Näherungswerte für die Kurvenparameter werden aus einer anfänglichen Parametrisierungsmethode (siehe Kap. 2.1.4.1) gewonnen. Die Wahl der anzuwendenden Methode wird später in Kapitel 5.2.1 diskutiert.

Niemeier (2008) gibt an, dass für die Konvergenz des Ausgleichs hinreichend gute Näherungswerte eine Voraussetzung sind. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, wird iterativ vorgegangen. So werden die ermittelten Parameter als neue Näherungswerte eingeführt, bis ein a priori eingeführtes Abbruchkriterium erfüllt ist.

Durch partielles Ableiten nach den unbekanntes Kurvenparametern sowie Kontrollpunkten des funktionalen Modells (siehe Gleichung (4.1)) ergibt sich eine neue Design-Matrix \mathbf{A} . Ableitungen des funktionalen Modells nach den Kurvenparametern werden mit Hilfe der in Kapitel 2.1.3 beschriebenen Methode durchgeführt.

Die Matrix \mathbf{A} in Gleichung (2.8) erweitert sich zu einer $[(M+1) \cdot dim \times (n+1) \cdot dim + (M+1)]$ Matrix ($dim =$ Dimension der Punkte):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial P_{x0}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial P_{y0}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial P_{xn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial P_{yn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial u_0}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{0X}}{\partial u_{0M}}\right) \\ \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial P_{x0}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial P_{y0}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial P_{xn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial P_{yn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial u_0}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{0Y}}{\partial u_{0M}}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial P_{x0}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial P_{y0}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial P_{xn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial P_{yn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial u_0}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{MX}}{\partial u_{0M}}\right) \\ \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial P_{x0}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial P_{y0}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial P_{xn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial P_{yn}}\right) & \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial u_0}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_{MY}}{\partial u_{0M}}\right) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Damit ein Ausgleichsproblem vorliegt, muss $(M+1) \cdot dim > (n+1) \cdot dim + (M+1)$ gelten.

Auch muss aufgrund des nicht linearen Modells ein gekürzter Beobachtungsvektor $\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0$, wobei \mathbf{L} die Beobachtungen und \mathbf{L}_0 , welche durch einsetzen der Näherungswerte der Kontrollpunkte und Kurvenparameter in Gleichung (4.1) gewonnen werden, eingeführt werden. In Gleichung (2.7) ist die Form dieser Vektoren angegeben.

Zur Vollständigkeit wird auch die allgemeine Form der Zielfunktion eines Ausgleichs vermittelnder Beobachtungen angeführt (Niemeier, 2008):

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{v} \rightarrow \min \\ &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l})^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}) \rightarrow \min \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Gleichung (2.12) wird nun zu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{l} \\ &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}$ die Zuschläge für die Näherungswerte der Unbekannten \mathbf{X}_0 sind und die Gewichtsmatrix \mathbf{Q}_{ll}^{-1} , wie in Kapitel 2.1.4.3 erwähnt, die Einheitsmatrix ist. $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{A}$ wird als Normalgleichungsmatrix bezeichnet und $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{l}$ wird Absolutgliedvektor genannt.

Unter diesen Annahmen ergeben sich für die ausgeglichenen Unbekannten $\hat{\mathbf{X}}$ und den verbesserten Beobachtungen $\mathbf{C}(\hat{u}_k)$, welche in Vektor \mathbf{C} zusammengefasst werden:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \hat{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{X}}_{[1,2(n+1)]} = \hat{\mathbf{X}}_P \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{X}}_{[2(n+1)+1,2(n+1)+M]} = \hat{\mathbf{X}}_u \quad (4.6)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{L} + \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (4.7)$$

Problematik dieser Ausgleichung

Wie in Kapitel 2 eingeführt, sind Punkte auf den B-Spline-Kurven durch den Kurvenparameter u im Intervall $[0, 1]$ definiert. Durch eine erste Ausgleichung, wie in Kapitel 4.1 beschrieben, geraten die geschätzten Kurvenparameter jedoch außerhalb dieses festgelegten Intervalls und die geforderte Monotonie bleibt nicht erhalten. Auch durch Iteration kann dieses Problem nicht behoben werden, da Kurvenparameter außerhalb des Intervalls $[0, 1]$ nicht definiert sind und somit keine Basisfunktionen liefern. Als Beispiel wird die *Soll-Kurve* nach Abbildung 3.1a mit 100 verrauschten Beobachtung realisiert und anschließend Näherungswerte für Kontrollpunkte und Kurvenparameter bestimmt. In einer gemeinsamen Ausgleichung, wie in Kapitel 4.1 beschrieben, ergibt sich nun folgende Abbildung 4.2, welche die Näherungswerte und die geschätzten Kurvenparameter gegenüberstellt. Die Farben der Punkte sind abhängig von dem Kurvenparameter der jeweiligen Beobachtung. Die Farblegende gibt dazu eine Orientierung. Zu beachten ist, dass die Farblegende in Abbildung 4.2a ebenso negative Werte beinhaltet, diese aber in der Abbildung nicht vorkommen. Zum besseren Vergleich mit Abbildung 4.2b sind sie dennoch in beiden Legende dargestellt.

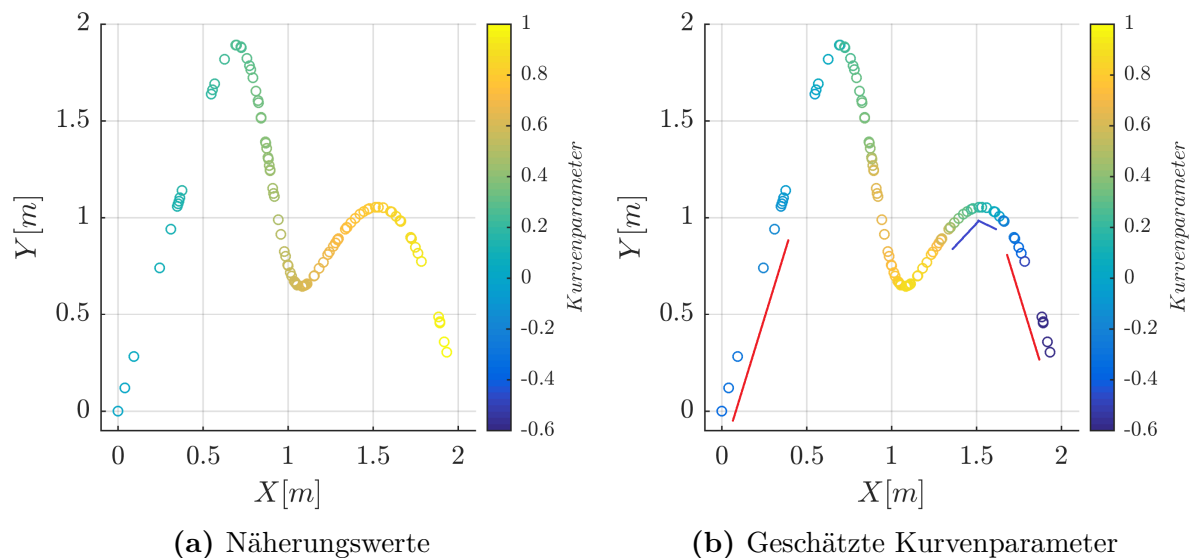


Abb. 4.2: Vergleich: Kurvenparameter der Näherungswerte und geschätzte Kurvenparameter nach erstem Ausgleich aufgetragen auf die nominalen Beobachtungen

In Abbildung 4.2b ist zu erkennen, dass die geschätzten Kurvenparameter an den Punkten in rot unterstrichenen Regionen negative Parameter besitzen und somit den Definitionsbereich $[0, 1]$ verlassen. In dem blau unterstrichenen Bereich der Kurve ist eine Änderung der Monotonie zu erkennen. Aufgrund der kettenartigen Anordnung der Beobachtungen einer Kurve leitet sich daraus eine strenge Monotonie für die Kurvenparameter ab. Diese Voraussetzung bleibt in einer ersten Ausgleichung nicht bestehen. Ziel ist es

nun für die Kurvenparameter Restriktionen aufzustellen, welche diese im vordefinierten Intervall $[0, 1]$ halten und die Monotonie berücksichtigen.

4.2 Hinzunahme von Ungleichungsrestriktionen in die Ausgleichung

Für diese formulierte Aufgabenstellung sind Ungleichungsrestriktionen für die Kurvenparameter in die Ausgleichung einzuführen. Es sei erwähnt, dass die Kontrollpunkte ohne Beschränkung bleiben. Die Ungleichungsrestriktionen sollen einerseits die Kurvenparameter auf das Intervall $[0, 1]$ beschränken, andererseits garantieren, dass die Monotonie der Kurvenparameter beibehalten wird.

Der Vektor \mathbf{X}_0 fasst die Näherungswerte der Kontrollpunkte und der Kurvenparameter zusammen. Die Menge von Einträgen in \mathbf{X}_0 , welche die Kurvenparameter beinhaltet, wird folgend mit \mathbf{X}_{0u} bezeichnet, die Einträge für die Kontrollpunkte \mathbf{X}_{0P} . Die in Klammer stehenden Argumente sollen den Index des Parameters in den jeweiligen Vektoren wiedergeben. Ebenso gilt diese Schreibweise für die Unbekanntenzuschläge $\hat{\mathbf{x}}^*$ und die ausgeglichenen Parameter $\hat{\mathbf{X}}^*$. Zur Verdeutlichung des Unterschiedes der geschätzten Parameter $\hat{\mathbf{x}}$ ohne Restriktion und mit Restriktionen, wird hierfür der eben genannte $\hat{\mathbf{x}}^*$ Vektor eingeführt.

4.2.1 Aufstellen von Ungleichungsrestriktionen

1. Beibehalten der Randpunkte

Da die Randpunkte einer Kurve schon anfänglich durch eine Parametrisierungsmethode (siehe Kap. 2.1.4.1) ihre wahren Werte zugeteilt bekommen haben, sollen diese Kurvenparameter in der Ausgleichung nicht verändert werden. Um anschließend gemeinsam mit weiteren Ungleichungsrestriktionen auf ein *LCP*-Verfahren übergehen zu können, ist es hier nicht möglich Gleichungsrestriktionen zu verwenden. Eine weitere Voraussetzung ist, dass die Unbekanntenzuschläge $\hat{\mathbf{x}}^*$ Bestandteil der Restriktionen sind. Es benötigt deshalb zweiseitige Ungleichungsrestriktionen für die Kurvenparameter der ersten Beobachtung und der letzten Beobachtung, wobei das Argument 0 die erste und M die letzte Beobachtung definieren. Die Ungleichungsrestriktionen für das Beibehalten der Randpunkte ist folgend angeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{0u}(0) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(0) &\leq 0 & \text{und} & & \mathbf{X}_{0u}(0) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(0) &\geq 0 \\ \mathbf{X}_{0u}(M) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(M) &\leq 1 & \text{und} & & \mathbf{X}_{0u}(M) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(M) &\geq 1, \end{aligned} \tag{4.8}$$

2. Beibehalten der Monotonie

Um die Monotonie der Kurvenparameter beizubehalten, ist es notwendig, dass die Reihenfolge der aufeinander folgenden Kurvenparameter auch nach der Ausgleichung in $\hat{\mathbf{X}}_u^*(k)$ mit $k = 0, \dots, M$ bestehen bleibt.

$$\hat{\mathbf{X}}_u^*(k) \leq \hat{\mathbf{X}}_u^*(k+1) \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4.9)$$

Unter Einbeziehung der Unbekanntenzuschläge \hat{x}^* ergibt sich nun folgende Ungleichungsrestriktion:

$$\mathbf{X}_{0u}(k) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(k) \leq \mathbf{X}_{0u}(k+1) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(k+1) \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4.10)$$

In dieser Restriktion ist jedoch eine Gleichheit aufeinander folgender Kurvenparameter möglich, die jedoch aufgrund der strengen Monotonie nicht gewünscht ist. Diese Problematik wird in Kapitel 4.2.2 behandelt.

3. Beibehalten der ungefähren Differenz von aufeinander folgenden Kurvenparametern

Eine weitere Überlegung geht davon aus, dass die anfängliche Parametrisierung hinreichend gut ist und sich die verbesserten Kurvenparameter nur mehr gering bezüglich derer Näherungswerte ändern. Die Differenz aufeinander folgender ausgeglichener Kurvenparameter $\hat{\mathbf{X}}_u^*$ unterscheidet sich nach dieser Überlegung nur mehr gering von der Differenz der anfänglichen Näherungswerte der Kurvenparameter \mathbf{X}_{0u} . Es soll also

$$\hat{\mathbf{X}}_u^*(k+1) - \hat{\mathbf{X}}_u^*(k) \approx \mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k) \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4.11)$$

gelten. Daraus lässt sich eine Ungleichung konstruieren:

$$|(\hat{\mathbf{X}}_u^*(k+1) - \hat{\mathbf{X}}_u^*(k)) - (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k))| \leq d_k, \quad (4.12)$$

wobei d_k ein frei gewählter Parameter ist, welcher die Größe der zugelassenen Änderung der Differenz definiert. Mittels dieses Parameters kann die Annahme der Differenz gesteuert werden. Da die Kurvenparameter nicht alle gleichen Abstandes sind, muss der Parameter d_k dies berücksichtigen und in Abhängigkeit dessen gewählt werden. Die Wahl der Größe von d_k wird in Kapitel 5.2.3 behandelt.

Mit Einbeziehen der Unbekanntenzuschläge $\hat{\mathbf{x}}^*$ und durch Auflösung der Betragsstriche, da die Unbekanntenzuschläge nur linear in den Ungleichungsbedingungen enthalten sein dürfen, erhält man zwei Ungleichungen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_{0u}(k+1) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(k+1)) - (\mathbf{X}_{0u}(k) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(k)) &\leq (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) + d_k \\ (\mathbf{X}_{0u}(k+1) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(k+1)) - (\mathbf{X}_{0u}(k) + \hat{\mathbf{x}}_u^*(k)) &\geq (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) - d_k \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit $0 \leq k \leq M-1$

Die aufgestellten Ungleichungsbedingungen müssen nun in die Form von Gleichung (2.37) gebracht werden. Eine Bedingung mit *Größer-Gleich-Zeichen* lässt sich durch beidseitige Multiplikation mit (-1) einfach in eine Bedingung mit *Kleiner-Gleich-Zeichen* umwandeln. Weiter ist es notwendig, die konstanten Parameter in den Vektor \mathbf{b} der Absolutglieder zusammenzufassen und zu separieren. Für die drei oben angeführten Bedingungen ergeben sich somit folgende Formen.

1. Beibehalten der Randpunkte

Aus Gleichung (4.8) ergeben sich durch Umformungen folgende Restriktionen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_u^*(0) &\leq -\mathbf{X}_{0u}(0) & \text{und} & & -\hat{\mathbf{x}}_u^*(0) &\leq \mathbf{X}_{0u}(0) \\ \hat{\mathbf{x}}_u^*(M) &\leq 1 - \mathbf{X}_{0u}(M) & \text{und} & & -\hat{\mathbf{x}}_u^*(M) &\leq -1 + \mathbf{X}_{0u}(M) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Da voraus gesetzt ist, dass $\mathbf{X}_{0u}(0) = 0$ und $\mathbf{X}_{0u}(M) = 1$, vereinfachen sich die Gleichung (4.14) zu:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_u^*(0) &\leq 0 & \text{und} & & -\hat{\mathbf{x}}_u^*(0) &\leq 0 \\ \hat{\mathbf{x}}_u^*(M) &\leq 0 & \text{und} & & -\hat{\mathbf{x}}_u^*(M) &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

2. Beibehalten der Monotonie

Gleichung (4.10) ergibt:

$$\hat{\mathbf{x}}_u^*(k) - \hat{\mathbf{x}}_u^*(k+1) \leq \mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k) \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4.16)$$

3. Beibehalten der ungefähren Differenz von aufeinander folgenden Kurvenparametern

Die Ungleichungsrestriktionen in Gleichung (4.13) ergeben durch Umformungen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_u^*(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_u^*(k) &\leq d_k \\ \hat{\mathbf{x}}_u^*(k) - \hat{\mathbf{x}}_u^*(k+1) &\leq d_k \end{aligned} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4.17)$$

Die Matrix \mathbf{H} beinhaltet die partiellen Ableitungen nach den unbekanntem Zuschlägen für jede Restriktion, sowohl nach den Kurvenparametern als auch den Kontrollpunkten. Das bedeutet, die Matrix \mathbf{H} weist eine Dimension von $[r \times (n + 1) \cdot dim + (M + 1)]$ auf, wobei r die Anzahl der Bedingungsungleichungen, $n + 1$ die Anzahl der Kontrollpunkte und $M + 1$ die Anzahl der Beobachtungen sind.

Die Bedingungen werden folgend mit deren Aufzählungsnummer bezeichnet. Es werden nun die Bedingungen der Punkte **2.** und **3.** mit der Bedingung **1.** kombiniert, da das Beibehalten der Randpunkte das Verlassen des Definitonsbereichs verhindern soll.

$M + 1$ Beobachtungen liefern für die Bedingungen **1.** und **2.** insgesamt $r = (M + 1) + 3$ Ungleichungsrestriktionen, für Bedingungen **1.** und **3.** ergeben sich $r = (2 \cdot (M + 1) + 2)$ Ungleichungsrestriktionen. Diese werden mit η_l , $l = 1, \dots, r$ bezeichnet und sind die Anzahl der Zeilen der Matrix \mathbf{H} . Eine Matrix \mathbf{H} mit r Bedingungen und $n + 1$ Kontrollpunkten ergibt:

$$\mathbf{H} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \hat{x}_P^{*(0)}} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \hat{x}_P^{*(n)}} \right) & \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \hat{x}_u^{*(0)}} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \hat{x}_u^{*(M)}} \right) \\ \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \hat{x}_P^{*(0)}} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \hat{x}_P^{*(n)}} \right) & \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \hat{x}_u^{*(0)}} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \hat{x}_u^{*(M)}} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \eta_{r-1}}{\partial \hat{x}_P^{*(0)}} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial \eta_{r-1}}{\partial \hat{x}_P^{*(n)}} \right) & \left(\frac{\partial \eta_{r-1}}{\partial \hat{x}_u^{*(0)}} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial \eta_{r-1}}{\partial \hat{x}_u^{*(M)}} \right) \\ \left(\frac{\partial \eta_r}{\partial \hat{x}_P^{*(0)}} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial \eta_r}{\partial \hat{x}_P^{*(n)}} \right) & \left(\frac{\partial \eta_r}{\partial \hat{x}_u^{*(0)}} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial \hat{x}_u^{*(M)}} \right) \end{array} \right) \quad (4.18)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{n+1} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{M+1}$

Da die Zuschläge der Kontrollpunkte \hat{x}_P^* in keiner der Restriktionen vorkommen, wird die zugehörige $[r \times (n + 1)]$ große Untermatrix eine *Null*-Matrix. Die Reihenfolge der Ungleichungsrestriktionen spielt keine Rolle, so werden die Restriktionen für das Beibehalten der Randpunkte (siehe Gleichung (4.15)) für die erste Beobachtung in die ersten beiden und für die letzte Beobachtung in die letzten beiden Zeilen der \mathbf{H} gesetzt. Die Bedingungen der beiden anderen Ansätze werden jeweils zwischen diesen eingefügt.

Eine Matrix \mathbf{H} mit den Restriktionen für das Beibehalten der Monotonie (siehe Gleichung (4.16)) ergibt:

$$\mathbf{H} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & (-1) & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & (-1) & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 1 & (-1) & \vdots \\ & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \vdots & & & 1 & (-1) & 0 \\ & & & & & & \ddots & 1 & (-1) \\ & & & & & & & 0 & (-1) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4.19)$$

Der Vektor \mathbf{b} benötigt demnach r Einträge und ergibt für die in Gleichung (4.19) angeführte Matrix \mathbf{H} folgenden Vektor:

$$\mathbf{b} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \mathbf{X}_{0u}(1) - \mathbf{X}_{0u}(0) \\ \mathbf{X}_{0u}(2) - \mathbf{X}_{0u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{0u}(M-1) - \mathbf{X}_{0u}(M-2) \\ \mathbf{X}_{0u}(M) - \mathbf{X}_{0u}(M-1) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad (4.20)$$

Unter Verwendung der Ungleichungsrestriktionen (4.17) bildet sich die Matrix \mathbf{H} folgend:

$$\mathbf{H} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \dots & 0 & (-1) & 0 & \dots & 0 \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & (-1) & 1 & 0 & \\ & & & 1 & (-1) & 0 & \vdots \\ & & & 0 & (-1) & 1 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 1 & (-1) & \ddots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & \vdots & & \ddots & (-1) & 1 \\ & & & & & 0 & 1 & (-1) \\ & & & & & & 0 & (-1) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4.21)$$

Der dazugehörige Vektor \mathbf{b} kann frei gewählte d -Werte für jedes Restriktionen-Paar der Gleichungen (4.17) annehmen und hat demnach folgende Form:

$$\mathbf{b} = [0; 0; d_0; d_0; d_1; d_1; \dots; d_{M-2}; d_{M-2}; d_{M-1}; d_{M-1}; 0; 0]^T \quad (4.22)$$

4.2.2 Problematik der Ungleichungsrestriktionen

Ungleichungsrestriktionen haben die Eigenschaft, Gleichheit der zu vergleichenden Ausdrücke zuzulassen. Vor allem bei dem Ansatz des Beibehaltens der Monotonie der Kurvenparameter (siehe Gleichung (4.16)) ist dies unerwünscht, da eine strenge Monotonie gefordert wird und einzuhalten ist. Durch Einführung eines neuer Parameter ε wird die Möglichkeit der Gleichheit der beiden Seiten in Gleichung (4.10) umgangen. Die ausgeglichenen Zuschläge $\hat{\mathbf{x}}^*$ werden nach der Optimierung den Näherungswerten \mathbf{X}_0 aufaddiert. Betrachtet wird nun die umgeformte Funktion der Ungleichungsrestriktion Gleichung (4.16). Die Überlegung ist nun, das Intervall aufeinander folgender Näherungswerte der Kurvenparameter zu verringern. Man gibt den Kurvenparametern nach der Optimierung also die Möglichkeit sich nur auf einen gewissen Abstand zu nähern.

Die Ungleichungsrestriktion Gleichung (4.16) wird deshalb zu:

$$\hat{\mathbf{x}}_u^*(k) - \hat{\mathbf{x}}_u^*(k+1) \leq (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot \varepsilon \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq M-1, \quad (4.23)$$

wobei der Parameter ε kleiner eins gesetzt werden muss. In dieser Arbeit werden der Parameter ε aufgrund empirischer Erfahrungen mit 0.90 festgelegt. Die Bestimmung des Parameters wird in Kapitel 5.2.2 behandelt. Folgend muss der \mathbf{b} -Vektor aus Gleichung (4.20) mit ε multipliziert werden. Bei den Ungleichsrestriktionen zum Beibehalten der ungefähren

Differenz von aufeinander folgenden Kurvenparametern (siehe Gleichung (4.17)) ist das Beibehalten der Monotonie bei einem beliebig gewählten Parameter d_k nicht gesichert. Dies soll das folgende Zahlenbeispiel verdeutlichen:

Folgende Näherungswerte und Parameter werden festgelegt:

$$\mathbf{X}_{0u}(k) = 0.45 \quad \mathbf{X}_{0u}(k+1) = 0.55 \quad d_k = 0.12$$

Aus der Optimierung ergeben sich beispielhaft folgende Verbesserungszuschläge:

$$\hat{\mathbf{x}}_u^*(k) = 0.05 \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{x}}_u^*(k+1) = -0.06$$

Die Ungleichungsrestriktionen (Gleichung (4.17)) werden eingehalten und führen zu:

$$-0.06 - 0.05 \leq 0.12 \quad \text{und} \quad 0.05 + 0.06 \leq 0.12$$

Die Addition mit den Näherungswerten führt zu:

$$\hat{\mathbf{X}}_u^*(k) = 0.45 + 0.05 = 0.5 \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{X}}_u^*(k+1) = 0.55 - 0.06 = 0.49$$

Es gibt also die Möglichkeit, dass die anfängliche Monotonie der Kurvenparameter nach einer ersten Ausgleichung nicht beibehalten wird. Es benötigt eine Verbindung mit der Restriktion des Beibehalten der Monotonie. Wird d_k zu $\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)$ gesetzt, führt das für die zweite Bedingung in Gleichung (4.17) zur Gleichung (4.16). Dies bedeutet, dass die Bedingung der Monotonie auch das Beibehalten der ungefähren Differenz von aufeinander folgenden Kurvenparametern berücksichtigt. Zu berücksichtigen ist dadurch ebenso die Problematik der Gleichheit der Ungleichungsrestriktionen, welche zuvor in diesem Kapitel behandelt wird. Welche Auswirkung die Wahl des Parameters d_k aufgrund der zweiten Restriktion auf das Approximationsergebnis hat, wird in Kapitel 5.2.3 behandelt.

4.3 Übergang von der Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen zum LCP

Mit einer der in Kapitel 4.2, aufgestellten Matrix \mathbf{H} und dem dazugehörigen Vektor \mathbf{b} sind nun alle Objekte der Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen für die B-Spline-Approximation bestimmt. Somit können mit dem in Kapitel 2.2.4 erläuterten Verfahren die Vektoren und Matrizen der Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen in ein *LCP* übergeführt werden. Mit Hilfe des Lemke-Algorithmus (siehe Kap. 2.2.1.1) kann das Gleichungssystem gelöst werden. Als Lösung gewinnt man ausgeglichene Kontrollpunktskoordinaten und Kurvenparameter, welche in $\hat{\mathbf{X}}^*$ zusammengefasst sind. Ergebnis der ersten Iteration sind demnach die Unbekanntenzuschläge für die Kontrollpunkte und Kurvenparameter, welche durch Addition mit den Näherungswerten die Näherungswerte der nachfolgenden Iteration ergeben. Dies wird solange durchgeführt, bis ein dafür a priori

festgelegtes Abbruchkriterium eintritt. Gewählt wird das sogenannte Parameterkriterium.

$$10^{-6} \geq \begin{cases} \sum_{a=1}^j |\hat{\mathbf{X}}_1^*(a) - \mathbf{X}_0(a)| \cdot \mathbf{g}(a), & t = 1 \\ \sum_{a=1}^j |\hat{\mathbf{X}}_t^*(a) - \hat{\mathbf{X}}_{t-1}^*(a)| \cdot \mathbf{g}(a), & t > 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

mit $\mathbf{g} = \underbrace{[1; 1; \dots; 1]}_{2(n+1)}; \underbrace{[100; 100; \dots; 100]}_{M+1}]^T$,

wobei $j = 2(n + 1) + (M + 1)$ die Anzahl der Elemente eines Vektors $\hat{\mathbf{X}}^*$ sind und mit t die Anzahl der Iterationen beschrieben wird. Dieses überprüft die Summe der Absolutbeträge der Differenz der ausgeglichenen Parameter zweier aufeinander folgenden Iterationen. Zu beachten ist auch, dass die Parameter in der Ausgleichung unterschiedliche Einheiten besitzen. So werden die Kontrollpunkte in Meter [m] angegeben, die Kurvenparameter sind dimensionslos. Deshalb wird für die Kurvenparameter ein Gewicht von 100 eingeführt, welche im Vektor \mathbf{g} ersichtlich sind, um einen Vergleich der Parameter auf einer gleichwertigen Basis möglich zu machen. In dieser Arbeit wird der vorgegebene Grenzwert auf 10^{-6} gesetzt, welcher unterschritten werden muss.

Ausschlaggebend für die Lösbarkeit des *LCP* und somit der Lösbarkeit des Optimierungsverfahrens ist die \mathbf{M} -Matrix (siehe Kap. 2.2.1.2). Die Matrix \mathbf{M} wird nach Gleichung (2.47) aus der Inversen der quadratischen Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} und der Matrix \mathbf{H} , welche die Ableitungen nach den Restriktionen besitzt, gebildet. Damit \mathbf{N} invertierbar ist, muss diese regulär sein, d.h. der Rang muss voll sein und die Determinante größer null. Hat eine quadratische Matrix vollen Rang, so ist diese positiv definit. Auch die Inverse einer positiv definiten Matrix ist positiv definit (K.-R. Koch, 2004).

Die Matrix \mathbf{H} besitzt in beiden Fällen linear abhängige Zeilen aufgrund der Bedingungen (4.15), welche in jeder Matrix \mathbf{H} beinhaltet sind. Auch die Bedingungen (4.17) führen zu linear abhängigen Zeilen. Deshalb besitzt keine der beiden Matrizen \mathbf{H} vollen Zeilenrang. K.-R. Koch (2004) definiert den Satz, ist eine quadratische $n \times n$ Matrix \mathbf{M} positiv definit und hat eine $m \times n$ Matrix \mathbf{H} beliebigen Zeilenrang so ist $\mathbf{H}\mathbf{N}\mathbf{H}^T$ positiv definit oder positiv semidefinit. Für eine Matrix \mathbf{M} im *LCP*-Verfahren folgt, dass diese solche Eigenschaften besitzt. Somit ist sichergestellt, dass die Matrix \mathbf{M} der Klasse der *P*-Matrizen angehört oder eine *copositiv-plus*-Matrix ist und demnach eine eindeutige komplementäre Lösung besitzt (siehe Kap. 2.2.1.2).

5 Ergebnisse und Diskussion

Die beiden Ansätze der neu entwickelten Methode aus Kapitel 4 werden in Kapitel 5 mit bestehenden Methoden der Kurven-Approximation verglichen und bewertet.

Dazu werden nötige Vergleichswerte eingeführt. Es folgt eine Diskussion bezüglich des Einflusses auf das Ergebnis einer Kurven-Approximation der frei wählbaren Parameter der beiden entwickelten Ansätze, welche in Gleichung (4.23) und (4.17) angeführt sind, sowie der zu verwendeten Parametrisierungsmethode (siehe Kap. 2.1.4.1).

Anschließend wird der Vergleich der Approximationsmethoden basierend auf den eingeführten Vergleichswerten durchgeführt. Dazu wird die Kontrollpunktschätzung (siehe Kap. 2.1.4.3), der Algorithmus der intrinsischen Parametrisierung (siehe Kap. 2.1.5) und die neu entwickelte Methode verwendet.

Abschließend der neu entwickelte Algorithmus auf in Anlehnung an einen *TLS*-Messvorgang diskretisierte Beobachtungen angewandt und die dort entstehende Problematik aufgezeigt.

5.1 Bewertung einer Kurven-Approximation

Mittels einer Kurven-Approximation soll eine B-Spline-Kurve durch gemessene Punkte (Beobachtungen), welche in dieser Arbeit durch verrauschte Punkte realisiert sind, gelegt werden. Um unterschiedliche Methoden der Kurven-Approximation bewerten und untereinander vergleichen zu können, wird ein Vergleichswert benötigt. Da in dieser Arbeit die Parameter der *Soll*-Kurven bekannt sind, können Punkte auf den *Soll*-Kurven bestimmt werden. Ebenso kann von dem Wissen der nominalen Kurvenparameter der Beobachtungen ausgegangen werden.

5.1.1 Summe der Normalabstände zur *Soll*-Kurve

Mit den verbesserten Beobachtungen, die aus einer Kurven-Approximation hervorgehen, lässt sich ein Normalabstand zu der *Soll*-Kurve ermitteln. Der Normalabstand berechnet sich aus der minimalen Distanz der verbesserten Beobachtungen zu der *Soll*-Kurve. In dieser Arbeit wird der Normalabstand durch das Generieren von 500 000 Punkten auf der *Soll*-Kurve und das Aufsuchen der minimalen Distanz einer verbesserten Beobachtung zu einem dieser Punkte angenähert. Die Summe der Absolutbeträge der einzelnen Normalabstände wird hier als Vergleichswert von Kurven-Approximationen gewählt und mit *dist_sum* abgekürzt. Der Vergleichswert *dist_sum* besitzt die Einheit Meter [*m*].

5.1.2 Vergleich ausgeglichener Kurvenparameter mit *Soll*-Kurvenparameter

In Kapitel 1 wird die Wichtigkeit der konsistenten Parametrisierung der Randkurven von B-Spline-Flächen in Bezug auf das Datum der B-Splines beschrieben. Harmening und Neuner (2017) geben an, dass für einen Vergleich von B-Splines die berechneten Flächen- bzw. Kurvenparameter nicht um mehr als 0.001 von den nominalen Werte abweichen dürfen. Dasselbe Problem tritt auch bei einem Vergleich von in zwei Epochen gemessenen Realisierungen eines Objektes auf.

Als Vergleichswert bezüglich der Kurvenparameter dient die Summe der mittleren absoluten Abweichungen der geschätzten Kurvenparameter zu den zugehörigen nominalen Kurvenparametern:

$$\vartheta = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M |\hat{\mathbf{X}}_u^*(k) - \bar{\mathbf{u}}_k|, \quad (5.1)$$

wobei die $M+1$ nominalen Kurvenparameter mit $\bar{\mathbf{u}}_k$ bezeichnet werden und die geschätzten Kurvenparameter $\hat{\mathbf{X}}_u^*(k)_u$ sind. Dieser Vergleichswert kann auch für die Approximation zweier Realisierungen einer Kurve verwendet werden, wobei geschätzte Kurvenparameter einer Epochen als Referenz dienen. Da die Kurvenparameter dimensionslos sind, ist auch der Vergleichswert ϑ dimensionslos.

5.2 Einflüsse auf das Ergebnis für die Approximationsmethode mit dem LCP

Für die folgenden Auswertungen und Berechnungen werden mit dem nun beschriebenen Vorgehen verrauschte Beobachtungen auf einer Kurve ermittelt. Mittels gleichmäßig verteilten Pseudozufallszahlen in dem Definitionsbereich der Kurvenparameter von $[0, 1]$ wird eine Anzahl von 500 Kurvenparametern generiert. Zu beachten ist, dass die Randpunkte mit den Kurvenparameter $u_0 = 0$ und $u_M = 1$ beinhaltet sind, um einen anschließenden Vergleich mit der *Soll*-Kurve möglich zu machen, da die Parametrisierungsmethoden (siehe Gleichung (2.5)) den Datenpunkten immer Kurvenparameter von 0 bis 1 zuteilen. Dies stellt sicher, dass die Randpunkte immer identisch sind und somit die gesamte Kurve abgedeckt ist. Die so generierten Kurvenparameter werden anschließend als nominale Kurvenparameter angesehen. Mit den verbliebenen B-Spline-Parametern der *Soll*-Kurven aus Kapitel A.1 und den generierten nominalen Kurvenparametern werden 500 Kurvenpunkte auf den *Soll*-Kurven berechnet. In Kapitel 3 sind die *Soll*-Kurven zu sehen. Die daraus gewonnen Kurvenpunkte werden koordinatenweise mit einem normalverteilten unkorrelierten ($\sigma_x = 3 \text{ mm}$) Rauschen belegt. Während eines realen Messvorgangs kommt es für die Beobachtungen in der Regel zu Korrelationen. Die Annahme von unkorrelierten Beobachtungen dient für eine erste Untersuchung als vereinfachtes Rauschmodell.

Ein Datensatz von verrauschten Beobachtungen wird Realisierung einer Kurve genannt.

5.2.1 Wahl der Parametrisierungsmethode für die Näherungswerte der Kurvenparameter

Wie in Kapitel 2.1.4.1 erwähnt, spielt die Parametrisierungsmethode eine wesentliche Rolle in Bezug auf die Approximation einer Kurve. Daher ist es notwendig, die Kurvenparameter in einen Optimierungsprozess miteinzubeziehen. Dadurch kommt es, wie in Kapitel 4.1 beschrieben, zu einem nicht linearen Modell, welches aufgrund der notwendigen Linearisierung Näherungswerte für die Unbekannten, unter anderem den Kurvenparametern, benötigt.

Für die Näherungswerte der Kurvenparameter können die Parametrisierungsmethoden aus Kapitel 2.1.4.1 heran gezogen werden. Es ist jedoch zu untersuchen, welche der Methoden für eine Approximation einer gewissen Realisierung einer Kurve mit dem neu entwickelten Algorithmus am besten geeignet ist.

Um den Einfluss der Näherungswerte der Kurvenparameter auf die approximierende Kurve zu untersuchen, werden diese auf unterschiedliche Art berechnet und die Ergebnisse mit einander verglichen. Um unterschiedliche Startwerte von Näherungswerten zu erhalten, wird der Parameter e in der Gleichung (2.5) von 0 beginnend in 0.1 Schritten erhöht, bis der Parameter den maximalen Wert 1 annimmt. Es ist nun möglich, eine Realisierung einer Kurve mit mehreren Näherungswerten der Kurvenparameter zu approximieren. Einen Vergleichswert stellt der in Kapitel 5.1.1 vorgestellte Wert $dist_sum$ dar. Die Abbildung 5.1 zeigt die Auswirkung der Parametrisierung auf eine Kurven-Approximation mit dem neuen Algorithmus. Es wird hier eine Kurven-Approximation mit den Ungleichungsrestriktionen **1.** und **2.** durchgeführt und der Parameter der Ungleichungsrestriktion $\varepsilon = 0.9$ (siehe Gleichung (4.23)) gesetzt. Zum besseren visuellen Vergleich wird in Abbildung 5.2 der in rot markierte Bereich dargestellt. Es zeigt sich in Abbildung 5.1, dass sich die approximierten Kurven mit einem kleinen Parameter e wesentlich besser an die *Soll*-Kurve anpassen. Ein optischer Vergleich ist für die approximierten Kurven mit geringem e -Parameter kaum mehr möglich. Mit Hilfe des Vergleichswertes $dist_sum$ können diese in Tabelle 5.1 miteinander verglichen werden.

Es zeigt sich, dass für die hier verwendeten verrauschten Kurvenpunkte die Approximation mit dem geringsten Parameter e , die geringste Summe der Normalabstände der verbesserten Beobachtungen zu der *Soll*-Kurve besitzt. Diese Aussage kann auch getroffen werden, wenn man die Spalte mit dem Parameter $\varepsilon = 0.9$ in Tabelle 5.3 betrachtet. Diese beinhaltet den Mittelwert 50 solcher Realisierungen. Für die weiteren Kurven ist das Ergebnis sehr ähnlich und zeigt sich in den Tabellen in Kapitel A.2 bei Betrachtung der Spalten. Ein Parameter $e \leq 0.1$ führt bei allen Kurven zu den besten Ergebnissen.

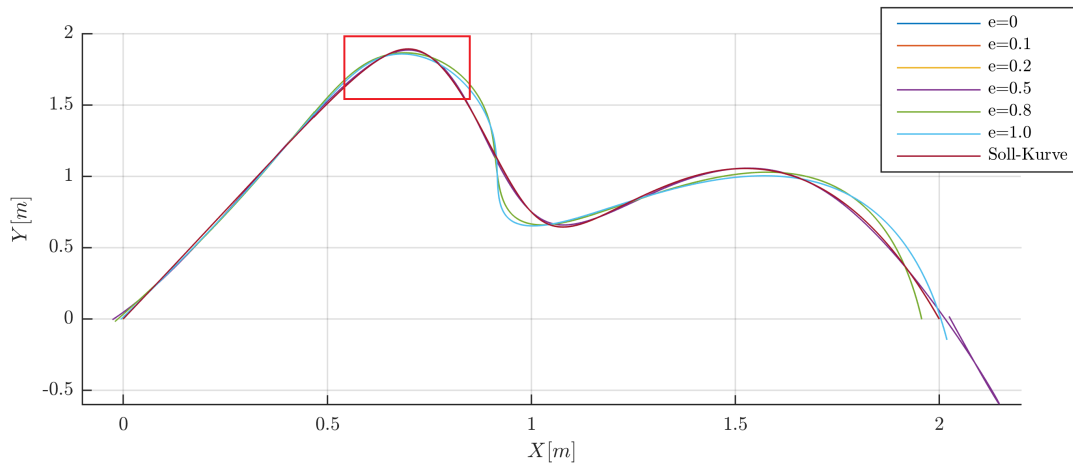


Abb. 5.1: Vergleich von approximierten Kurven mit den Ungleichungsrestriktionen **1.** und **2.** der *Kurve 1* in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e ($\varepsilon = 0.9$)

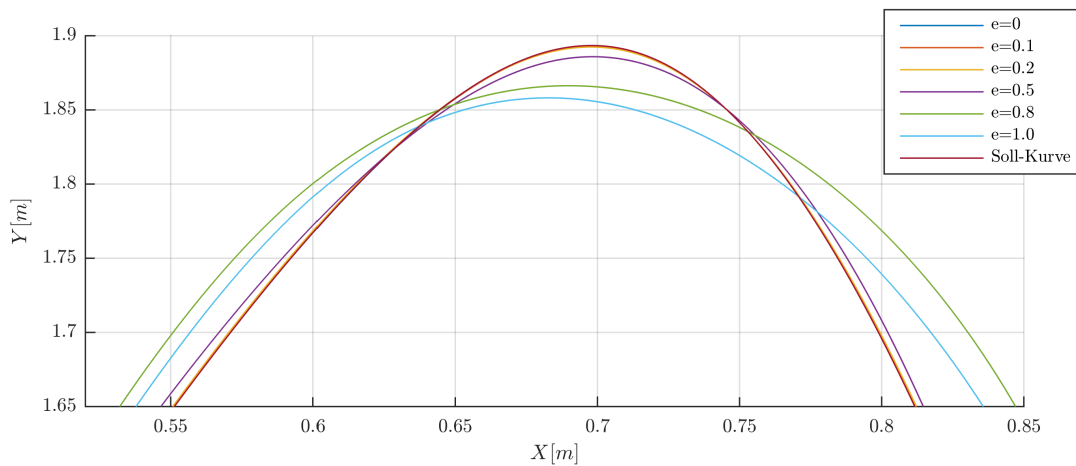


Abb. 5.2: Rot markierter Bereich von Abb. 5.1

e -Para.	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$dist_sum$ [m]	0.037	0.054	0.143	0.723	1.958	2.327
e -Para.	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
$dist_sum$ [m]	3.024	4.391	10.558	11.025	12.467	

Tab. 5.1: Vergleich von $dist_sum$ -Werten von Kurven-Approximationen mit den Ungleichungsrestriktionen **1.** und **2.** der *Kurve 1* in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e ($\varepsilon = 0.9$)

Das Ergebnis in Tabelle 5.1 lässt sich durch einen Vergleich der verwendeten Näherungswerte der Kurvenparameter mit den dazugehörigen nominalen Kurvenparametern erklären. Bildet man den Vergleichswert ϑ für die nominalen und anfänglichen Kurvenparameter ergeben sich die Ergebnisse der Tabelle 5.2, wobei dieser Vergleichswerte mit $\bar{\vartheta}$ bezeichnet wird.

<i>e</i> -Para.	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\bar{\vartheta}$ []	0.010	0.012	0.018	0.26	0.035	0.045
<i>e</i> -Para.	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
$\bar{\vartheta}$ []	0.055	0.065	0.075	0.086	0.102	

Tab. 5.2: Vergleich von $\bar{\vartheta}$ -Werten in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter *e* (*Kurve 1*)

Je kleiner die mittlere absolute Differenz der Näherungswerte der Kurvenparameter zu deren nominalen Werten ist, desto besser erweist sich das Ergebnis einer Approximation mittels des *LCP*-Verfahrens.

Die Parametrisierungsmethode mit dem Parameter $e = 0$ wird *uniforme* Parametrisierungsmethode genannt (siehe Kap. 2.1.4.1). Diese Methode liefert eine gute Parametrisierung sobald die Beobachtungen gleichabständig sind. Die hier verwendete Diskretisierungsmethode berechnet Beobachtungen anhand gleichmäßig verteilter Pseudozufallszahlen für die nominalen Kurvenparameter, welche anschließend zu *Soll*-Kurvenpunkten führen und diese mit einem Rauschen belegt werden. Offensichtlich beinhaltet diese Diskretisierung eine Menge von gleichabständigen Beobachtungen, welche zu dem Ergebnis der Tabelle 5.2 führen. Abbildung 5.3 soll einerseits die Anordnung der Beobachtungen wiedergeben, andererseits bietet sie die Möglichkeit die nominalen Kurvenparameter mit den beiden Parametrisierungsmethoden ($e = 0$ und $e = 1$) visuell zu vergleichen.

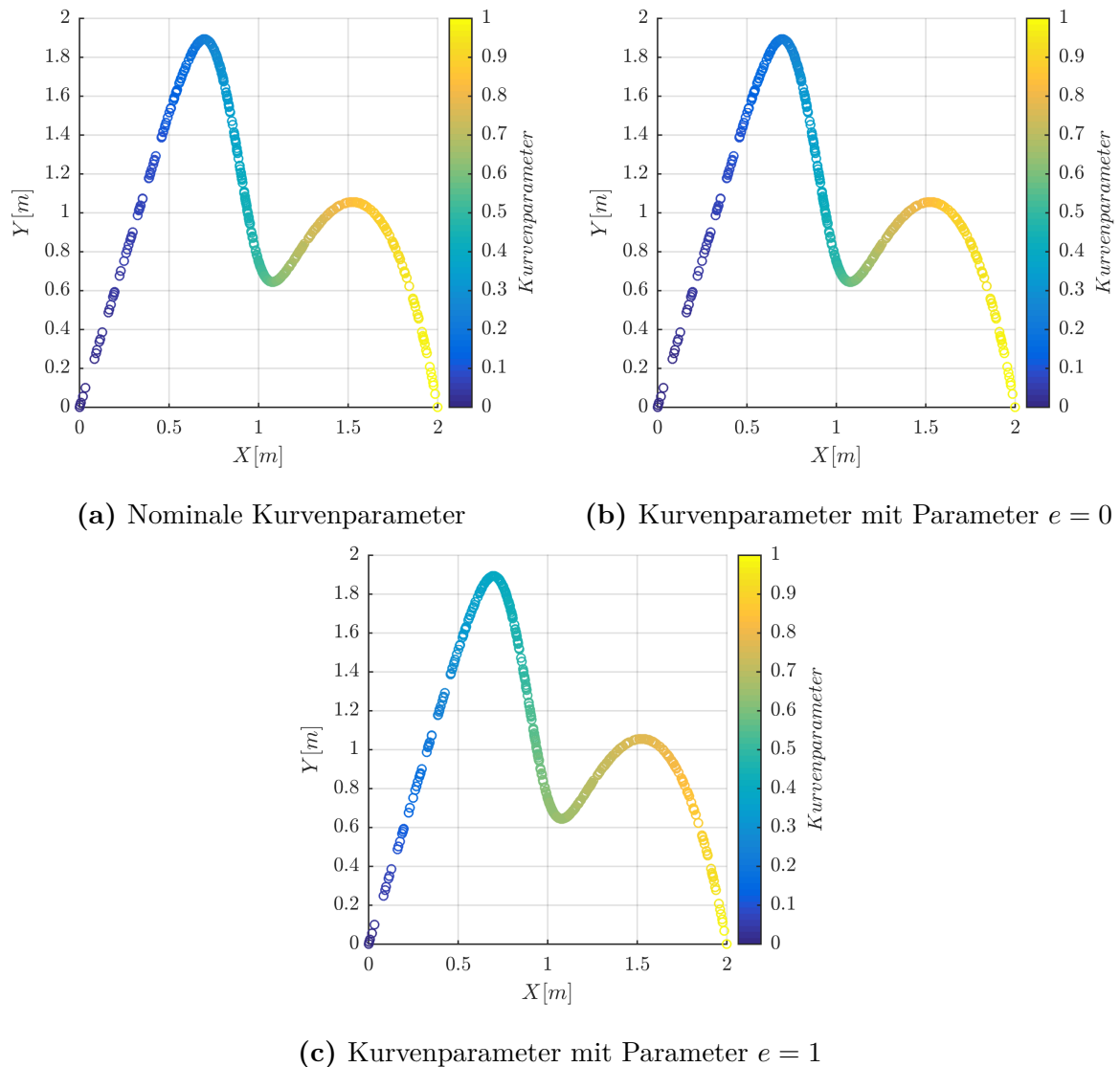
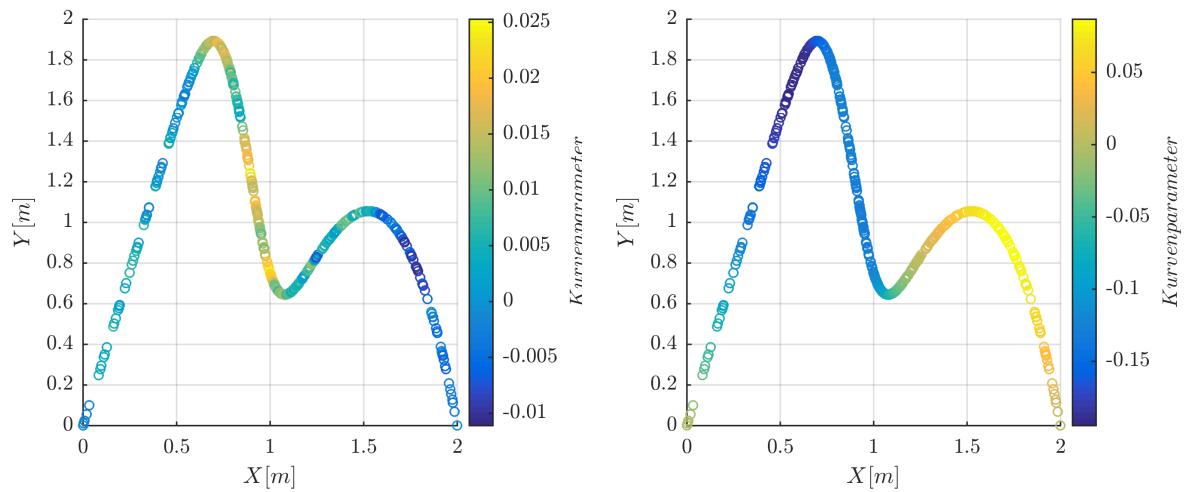


Abb. 5.3: Vergleich der nominalen Kurvenparametern mit den Kurvenparameter aus den Parametrisierungsmethoden $e = 0$ und $e = 1$ (*Kurve 1*)

Bezüglich der Verteilung der Beobachtung ist vor allem an den geraden Stellen zu erkennen, dass diese größtenteils keiner gleichabständigen Anordnung folgen. Zwischen den Abbildungen 5.3a und 5.3b ist visuell kein Unterschied auszumachen, was auf gute Näherungswerte hinweist und durch die Tabelle 5.2 bestätigt wird. Eine deutliche Abweichung ist hingegen zwischen den Abbildungen 5.3a und 5.3c im Bereich des ersten Maximums zu erkennen.

Ein visuell deutlich besserer Vergleich macht die Bildung der Differenzen der parametrisierten Beobachtungen mit den nominalen Kurvenparameter. In Abbildung 5.4 sind die Größen der Differenzen farblich dargestellt. Zu beachten sind die unterschiedlichen Farblegenden.



(a) Nominale Kurvenp. - Kurvenp. $e = 0$ (b) Nominale Kurvenp. - Kurvenp. $e = 1$

Abb. 5.4: Vergleich der Differenzen der nominalen Kurvenparametern mit den Kurvenparameter aus den Parametrisierungsmethoden $e = 0$ und $e = 1$ (*Kurve 1*)

Allgemein ist festzustellen, dass die Näherungswerte der Kurvenparameter einen wesentlichen Einfluss bei der gemeinsamen Schätzung von Kurvenparametern und Kontrollpunkten mit dem *LCP* aufweisen. Jedoch muss ebenso die Wahl der frei wählbaren Parameter ε und d_k beachtet werden, das in den folgenden beiden Kapiteln behandelt wird.

5.2.2 Wahl des Parameters ε

Die Möglichkeit der Gleichheit in den Ungleichungen wird in Kapitel 4.2.2 behandelt und der daraus resultierende Parameter ε eingeführt. Der Parameter ε dient als Multiplikator der Differenz aufeinander folgender Näherungswerte der Kurvenparameter und muss kleiner eins sein. Der Parameter ε wird in dieser Arbeit empirisch ermittelt.

Dazu werden 50 Realisierungen einer Kurve generiert und diese mit unterschiedlichen ε -Parametern mittels des neuen Schätzalgorithmus mit den Ungleichungsrestriktionen **1.** und **2.** approximiert. Der Parameter ε wird für jede Realisierung beginnend von 0.1 in 0.1-Schritten bis 0.9 erhöht. Um einen Zusammenhang mit den anfänglichen Näherungswerten der Kurvenparameter aufdecken zu können, wird zur Gewinnung unterschiedlicher Näherungswerte der Parameter e (siehe Gleichung (2.5)) variiert. Es lässt sich für jede Approximation ein *dist_sum*-Wert ermitteln, welcher in Kapitel 5.1.1 eingeführt wird. Verglichen werden die *dist_sum*-Mittelwerte, welche sich aus den 50 Approximationen mit dem selben Parameter ε und e bilden. Beispielhaft ist das Ergebnis der Berechnungen für die *Kurve 1* in Tabelle 5.3 zu sehen.

Um eine Bestätigung des Parameters ε zu bekommen, wird das oben beschriebene Verfahren auch auf alle in Kapitel 3 erwähnten Kurven angewandt. Die weiteren drei Kurven

		dist_sum-Mittelwerte in [m]									
		ε -Parameter									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$G. - M.$
e-Parameter	0	1.78	1.01	0.68	0.54	0.42	0.32	0.24	0.20	0.17	3.96
	0.1	2.02	1.20	0.82	0.66	0.54	0.43	0.34	0.28	0.25	4.40
	0.2	2.62	1.46	0.96	0.77	0.67	0.60	0.52	0.47	0.43	6.12
	0.3	3.58	1.89	1.28	1.02	1.09	1.14	1.42	1.76	2.74	8.68
	0.4	5.09	2.72	1.92	1.64	1.84	2.02	2.11	2.70	3.39	11.84
	0.5	7.75	4.04	2.87	2.46	2.58	2.75	2.92	2.83	3.62	15.79
	0.6	11.55	5.76	3.96	3.38	3.26	3.19	3.55	3.66	3.76	20.31
	0.7	16.10	8.35	5.22	4.46	4.28	4.01	4.08	4.99	4.66	25.10
	0.8	20.78	12.82	7.96	6.88	6.60	6.75	7.01	6.83	10.49	29.91
	0.9	25.46	17.98	12.33	10.51	10.46	10.36	10.68	11.83	16.45	34.55
1	29.47	22.56	17.68	15.02	14.78	14.02	13.34	12.51	17.32	37.87	

Tab. 5.3: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte von Approximationen der *Kurve 1* realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e (mit G.-M. wird vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung angegeben)

stützen die Wahl der Größe des Parameters ε , die Ergebnisse sind in Kapitel A.2 zu finden. Jedoch sind unterschiedliche Größenordnungen der *dist_sum*-Mittelwerte festzustellen, welche sich durch die unterschiedlichen Längen der Kurven und der daraus resultierenden Punktdichte sowie der Form der Kurve erklären lassen.

Die letzte Spalte gibt die *dist_sum*-Mittelwerte für eine Kurven-Approximation nach dem Gauß-Markov-Modell wieder (siehe Kap. 2.1.4.3). In dieser Spalte werden also nur die Kontrollpunkte geschätzt. Die niedrigsten und somit gute Werte ergeben sich für eine Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell, wenn der Parameter $e \leq 0.2$ ist. Da die Kurvenparameter in einer solchen Ausgleichung direkt in die Berechnung der Kurvenpunkte einfließen, lässt sich daraus schließen, dass Parametrisierungsmethoden mit $e \leq 0.2$ gute Näherungswerte der Kurvenparameter der verrauschten Beobachtungen liefern.

Betrachtet man die Tabelle 5.3 fällt auf, dass in allen Spalten, welche sich durch den Parameter e unterscheiden, strenge Monotonie herrscht. Da die Spalten sich nur von den Näherungswerten der Kurvenparameter unterscheiden, ist deren Einwirkung zu untersuchen. Der Vergleich der Näherungswerte der Kurvenparameter und deren nominalen Werte ist beispielhaft für eine Realisierung in der Tabelle 5.2 angeführt. Dort zeigt sich, dass bei einem kleinen Parameter e die minimalen absoluten Differenzen auftreten. Die Genauigkeit der Näherungswerte der Kurvenparameter spielt demnach eine wesentliche Rolle für die Ergebnisse der Approximation.

In den Zeilen, welche durch die Wahl des Parameters ε unterschieden werden, tritt die Monotonie nur in den Zeilen $e \leq 0.2$ auf. Bei den Zeilen $e > 0.2$ ist eine Bauchung zu erkennen.

Tabelle 5.4 zeigt die Standardabweichungen der Werte in Tabelle 5.3. Aufgrund dieser lassen sich die vorhin erwähnten Bauchungen erklären. Für die Zeilen $e > 0.2$ treten an den Rändern große Standardabweichungen auf, die auf Ausreißer der jeweiligen Datenmenge hinweisen. Diese Ausreißer beeinflussen die Mittelwertbildung wesentlich und führen somit zu den in Tabelle 5.3 angeführten Werten. Für die *Kurve 1* lässt sich die Aussage treffen, dass je kleiner der Parameter ε und je größer der Parameter e (ab $e = 0.3$) desto stabiler sind die Approximationen über die Realisierungen. Diese Aussage ist aber nicht für alle Kurven gültig (siehe Anhang A.2).

Die Tabellen der übrigen Kurven mit den zugehörigen Standardabweichungen sind in Kapitel A.2 zu finden und dienen zur Interpretation des Verhaltens derer *dist_sum*-Tabellen.

		dist_sum-Standardabweichungen in [m]								
		ε -Parameter								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
e-Parameter	0	0.779	0.423	0.244	0.257	0.188	0.164	0.137	0.117	0.097
	0.1	0.839	0.472	0.264	0.229	0.209	0.196	0.189	0.184	0.178
	0.2	1.087	0.582	0.339	0.342	0.317	0.295	0.293	0.287	0.280
	0.3	1.480	0.767	0.478	0.453	0.731	0.908	1.492	2.471	4.196
	0.4	1.750	1.083	0.625	0.534	0.886	0.894	0.948	1.999	3.352
	0.5	1.722	1.314	0.769	0.653	0.738	0.771	1.106	0.887	2.612
	0.6	1.759	1.140	0.829	0.595	0.488	0.685	0.983	0.844	1.154
	0.7	1.583	1.177	0.571	0.463	0.631	0.883	0.982	3.501	1.029
	0.8	1.396	1.469	0.955	0.892	1.152	1.671	2.511	3.125	6.629
	0.9	1.319	1.131	0.757	0.753	1.122	1.051	0.703	2.407	10.411
1	1.354	1.258	1.026	0.947	1.012	1.236	0.956	3.268	9.987	

Tab. 5.4: Vergleich der *dist_sum*-Standardabweichungen von Approximationen der *Kurve 1* realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e

Der Vergleich der Parameter ε in den Zeilen $e \leq 0.2$ zeigt, dass die *dist_sum*-Werte bei einem $\varepsilon = 0.9$ in absoluten Zahlen am geringsten sind. Daher wird für die weiteren Kurven-Approximationen mit dem *LCP*-Algorithmus dieser Wert gewählt. Mit einem Parameter $\varepsilon = 0.9$ ist auch sichergestellt, dass die Kurvenparameter sich in der Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen weitestgehend frei bewegen können.

5.2.3 Wahl des Parameters d

Der Parameter d definiert die erlaubte Differenz aufeinander folgender Kurvenparameter nach der Optimierung mit deren zugehörigen Näherungswerten (siehe Gleichung (4.10)).

In Kapitel 4.2.2 wird angeführt, dass es nötig ist, die Ungleichungsbedingungen aus Gleichung (4.17) mit den Ungleichungsrestriktion aus (4.16), dem Beibehalten der Monotonie, in Verbindung zu setzen. Dies wird mit der Wahl des Parameters d_k zu $(\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot \varepsilon$ realisiert. Kapitel 5.2.2 diskutiert die Wahl der Größe des Parameters ε der Gleichung (4.23), d.h. die Wahl der rechten Seite der Ungleichung. Die Schlussfolgerung ist, dass mit $\varepsilon = 0.9$ ein eher großer Betrag gewählt wird. Es lässt vermuten, dass mit dem Parameter $d_k = (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot \varepsilon$ gute Ergebnisse erzielt werden können. Da durch die getroffene Wahl des Parameters d_k eine Ungleichung der beiden Ungleichungen in der Gleichung (4.17) zu der Bedingung aus Gleichung (4.15) übergeführt wird, ist nun die Auswirkung der zweiten Ungleichung festzustellen und zu interpretieren.

Wie in Kapitel 5.2.2 werden 50 Realisierungen einer Kurve generiert und diese mit unterschiedlichen d_k -Parametern mittels des neuen Schätzalgorithmus mit den Ungleichungsrestriktionen **1.** und **3.** approximiert. Die unterschiedlichen Parameter d_k werden durch Änderung des Parameter ε in 0.1-Schritten generiert. Um einen Zusammenhang mit den anfänglichen Näherungswerten der Kurvenparameter aufdecken zu können, wird zur Gewinnung unterschiedlicher Näherungswerte ebenso der Parameter e variiert. In Tabelle 5.5 werden nun die *dist_sum*-Mittelwerte der Approximationen mit gleichem Parameter ε in der d_k Berechnung und gleichem Parameter e gebildet.

In Tabelle 5.5 bestätigt sich, dass bei großem Wert des Parameter ε , welcher den Parameter d_k bestimmt, die minimalen *dist_sum*-Mittelwerte erscheinen. Das bedeutet auch, dass größere d_k -Beträge bessere Ergebnisse für Kurven-Approximationen in Hinblick auf den Mittelwert von *dist_sum* liefern. Wie auch in Tabelle 5.3 sind die minimalen *dist_sum*-Mittelwerte bei einem Parameter $e \leq 0.2$ zu finden. Der Parameter e ändert sich jedoch für die *Kurve 1* auf den Wert 0.1.

Die Ergebnisse der drei weiteren Kurven aus Kapitel 3 sind in Kapitel A.3 zu finden und stützt die getroffene Aussage.

Die Bauchungen in den Zeilen und die beinahe Monotonie in den Spalten wird auch hier, wie in Kapitel 5.2.2 argumentiert, auf die Standardabweichungen zurückgeführt.

Geht man davon aus, dass die anfängliche Parametrisierung der Beobachtungen und somit die Näherungswerte sehr gut bestimmt worden sind, wären die einzelnen Parameter d_k , $k = 0, \dots, M$ klein zu wählen. Diese Annahme bestätigt sich aber in in dieser Arbeit nicht und man muss davon ausgehen, dass die Näherungswerte der Kurvenparameter in der Schätzung größere Verbesserungszuschläge benötigen. Aufgrund des Ergebnisses in Tabelle 5.3 werden die einzelnen Parameter d_k zu $(\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot 0.9$ gesetzt um den Verbesserungen der Kurvenparameter einen gewissen Spielraum zu lassen.

dist_sum-Mittelwerte in [m]											
d-Parameter											
mit $d_k = (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot \varepsilon$											
e-Parameter	ε	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	G. - M.
	0	2.08	1.15	0.80	0.59	0.53	0.51	0.50	0.47	0.45	3.96
	0.1	2.28	1.17	0.78	0.61	0.46	0.43	0.40	0.39	0.32	4.40
	0.2	3.19	1.51	1.01	0.81	0.68	0.65	0.62	0.62	0.61	6.12
	0.3	4.73	2.46	1.42	1.14	1.09	0.99	0.85	1.08	1.45	8.68
	0.4	6.93	4.01	2.42	1.69	1.59	1.62	1.72	2.58	2.98	11.84
	0.5	10.31	6.33	4.22	2.94	2.41	2.49	2.64	2.84	3.18	15.79
	0.6	14.72	9.84	7.04	5.34	4.20	3.66	3.35	3.43	3.85	20.31
	0.7	19.50	14.12	10.77	8.50	6.99	5.91	5.04	4.48	4.46	25.10
	0.8	24.43	18.58	14.58	11.89	10.17	9.16	8.47	8.01	7.59	29.91
	0.9	29.35	23.60	18.52	14.86	13.16	12.66	12.93	11.83	10.87	34.55
	1	32.25	27.89	22.59	18.56	17.45	16.68	14.86	12.78	11.98	37.87

Tab. 5.5: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte von Kurven-Approximationen der *Kurve 1* realisiert mit unterschiedlichen *d*- und *e*-Parametern (G.-M. = Kontrollpunktschätzung)

dist_sum-Standardabweichungen in [m]										
d-Parameter										
mit $d_k = (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot \varepsilon$										
e-Parameter	ε	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	0	0.426	0.416	0.361	0.342	0.336	0.321	0.305	0.259	0.241
	0.1	0.826	0.310	0.278	0.283	0.242	0.218	0.207	0.198	0.192
	0.2	1.402	0.612	0.552	0.535	0.523	0.511	0.504	0.505	0.499
	0.3	1.763	0.994	0.462	0.421	0.626	0.687	0.700	0.865	1.054
	0.4	2.039	1.453	0.859	0.544	0.721	0.839	0.839	1.457	2.247
	0.5	1.976	1.697	1.367	0.934	0.788	0.641	0.525	0.865	1.293
	0.6	1.824	1.674	1.335	1.148	1.001	0.593	0.431	0.599	0.983
	0.7	1.816	1.104	1.448	1.101	0.958	0.832	0.698	0.562	0.608
	0.8	1.501	1.661	1.729	1.377	0.720	0.625	0.494	0.871	1.922
	0.9	1.085	1.262	1.376	1.142	0.999	0.489	0.872	1.758	3.195
	1	1.002	1.257	1.221	1.200	1.098	0.698	0.895	1.228	3.987

Tab. 5.6: Vergleich der *dist_sum*-Standardabweichungen von Approximationen der *Kurve 1* realisiert mit unterschiedlichen Parametern d_k und e

Der Vergleich der absoluten minimalen $dist_sum$ -Mittelwerte aus Tabelle 5.3 und 5.5 zeigt, dass der minimale Wert aus den Approximationen mit den Ungleichungsrestriktionen **1.** und **3.** fast doppelt so groß ist wie mit den Ungleichungsrestriktionen **1.** und **2.**. Dies lässt schließen, dass die zusätzliche Bedingungsgleichung aus Gleichung (4.17) keinen positiven Einfluss auf das Ergebnis einer Kurven-Approximation hat.

5.3 Vergleich unterschiedlicher Kurven-Approximationsmethoden

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse unterschiedlicher Methoden zur Approximation von B-Spline-Kurven verglichen um den neu entwickelten Algorithmus der gemeinsamen Schätzung der Kontrollpunkte und Kurvenparameter mit Hilfe des LCP zu verifizieren. Als Vergleichswerte dienen dazu die in Kapitel 5.1.1 und Kapitel 5.1.2 eingeführten Vergleichsparameter $dist_sum$ und ϑ . Einerseits soll durch den Parameter $dist_sum$ gezeigt werden wie gut sich die verbesserten verrauschten Beobachtungen an die *Soll*-Kurve annähern, andererseits gibt der Parameter ϑ den mittleren Fehler der geschätzten Kurvenparameter zu deren nominalen Werten wieder. Der Parameter ϑ hat eine wesentliche Bedeutung um eine Aussage über eine konsistente Parametrisierung zu treffen, welche für einen geometrischen Vergleich zweier Objekte relevant ist.

Es werden die neu in Kapitel 4 entwickelte Methode der gemeinsamen Schätzung von Kurvenparametern und Kontrollpunkten mit Hilfe des LCP , die Standardmethode (siehe Kapitel 2.1.4.3), welche mittels des Gauß-Markov-Modells die Kontrollpunkte schätzt, und der iterative Ansatz der intrinsischen Parametrisierung nach Hoschek (siehe Kap. 2.1.5) verwendet.

In den folgenden Kapiteln wird die Approximation einer Kurve mittels Schätzung der Kontrollpunkte mit „*G.-M.*“ abgekürzt. Der neu entwickelte Algorithmus der gemeinsamen Schätzung der Kurvenparameter und der Kontrollpunkte mit dem LCP wird „ LCP “ genannt. Auch wird zwischen den verwendeten Ungleichungsrestriktionen unterschieden. $LCP_{1,2}$ verwendete die Ungleichungsrestriktionen **1.** und **2.** und $LCP_{1,3}$ die Ungleichungsrestriktionen **1.** und **3.**. Der Hoschek-Algorithmus wird mit „*Hoschek*“ benannt.

In Kapitel 5.2.3 wird bereits festgestellt, dass die $LCP_{1,3}$ -Methode mit dem Parameter d_k keine Verbesserung gegenüber der $LCP_{1,2}$ -Methode feststellen lässt. Um dies auf Basis einer größeren Menge von Realisierungen zu bestätigen, wird die $LCP_{1,3}$ -Methode in den folgenden Kapiteln weiter verwendet.

5.3.1 Vergleich Konvergenz

In Hinblick auf die Konvergenz der iterativen Verfahren, der neu entwickelten Methode der gemeinsamen Schätzung von Kurvenparametern und Kontrollpunkten mit dem *LCP* sowie des Algorithmus von *Hoschek*, ist ein wesentlicher Unterschied bei allen vier verwendeten Kurven zu erkennen. Da sich das Konvergenzverhalten der *LCP*_{1,3}-Methode dem Verhalten der *LCP*_{1,2}-Methode sehr ähnelt und kein optischer Unterschied auszumachen ist, wird in der Abbildung 5.5 darauf verzichtet. In Abbildung 5.5 sind die Konvergenzverhalten der beiden Methoden für die vier verwendeten Kurven dargestellt. Das Konvergenzverhalten bildet sich aus dem Parameterunterschied in Abhängigkeit des Iterationsschrittes.

Für die Berechnung des Parameterunterschiedes werden sowohl die Kurvenparameter als auch die Kontrollpunkte herangezogen. Diese erhalten, wie in Gleichung (4.24) eingeführt, unterschiedliche Gewichte. Dieser Wert wird in Abbildung 5.5 auf der *Y*-Achse aufgetragen und mit $Norm(\mathbf{X}_0 - \mathbf{X})$ dargestellt, wobei \mathbf{X}_0 die jeweiligen Näherungswerte eines Iterationsschrittes und \mathbf{X} die ausgeglichenen Parameter sind. Zu beachten ist, dass die Skala der *Y*-Achse logarithmisch aufgebaut ist. Auf der *X*-Achse ist die Anzahl der Iterationen angegeben. Für alle Kurve werden Näherungswerte der Kurvenparameter mit einem Parameter $e = 0.0$ und für die *LCP*_{1,2}-Methode ein $\varepsilon = 0.9$ verwendet.

Stellvertretend für die gemeinsame Schätzung der Kurvenparameter und Kontrollpunkte mit dem *LCP* wird die *LCP*_{1,2}-Methode mit „Schätzung mit *LCP*“ bezeichnet. Es werden Realisierungen der Kurven mit 500 verrauschten Beobachtungen verwendet.

Während die gemeinsame Schätzung mit dem *LCP* das in Gleichung (4.24) eingeführte Abbruchkriterium ($< 10^{-6}$) nach wenigen Iterationen erreicht, ist dies für den *Hoschek*-Algorithmus nicht der Fall. In den Abbildungen 5.5a, 5.5b und 5.5c scheint die *Hoschek*-Methode gegen 10^{-2} zu konvergieren. Hingegen unterschreitet der *Hoschek*-Algorithmus für die *Kurve 4* in Abbildung 5.5d nach 200 Iterationen den Wert 10^{-2} und scheint den Grenzwert 10^{-3} zu besitzen.

Aus Gründen der Laufzeit wird der *Hoschek*-Algorithmus auf maximal 200 Iterationen beschränkt, da nach weiteren Iterationsschritten keine deutliche Verbesserung der absoluten Beträge der Differenz der Näherungswerte und der daraus folgenden ausgeglichenen Parametern eintritt.

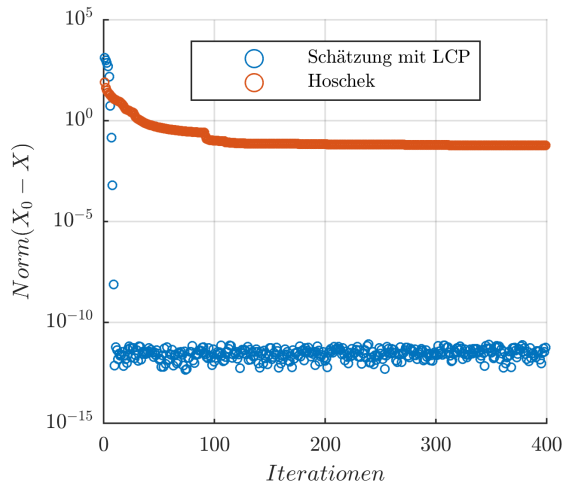
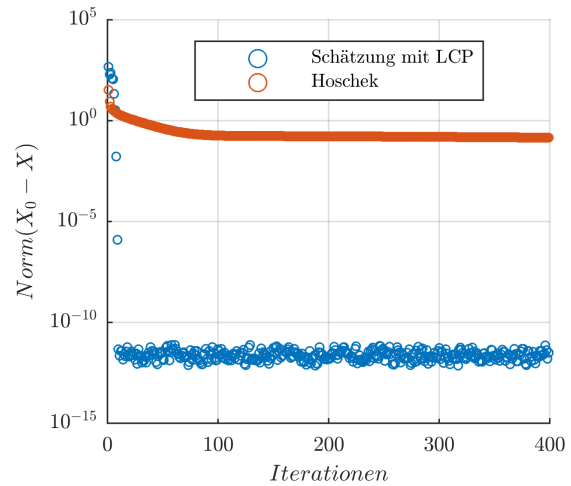
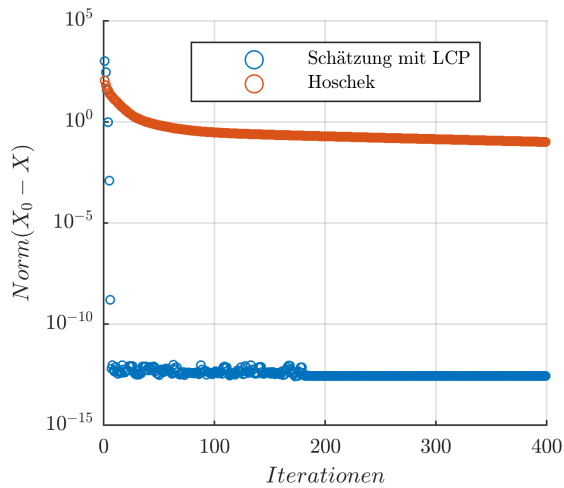
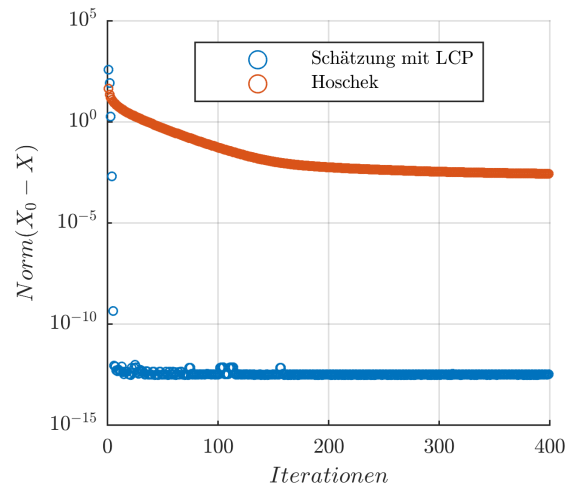
(a) Vergleich von *Kurve 1* (Abb. 3.1a)(b) Vergleich von *Kurve 2* (Abb. 3.1b)(c) Vergleich von *Kurve 3* (Abb. 3.1c)(d) Vergleich von *Kurve 4* (Abb. 3.1d)

Abb. 5.5: Vergleich des Konvergenzverhaltens einer Approximation der beiden iterativen Verfahren (Schätzung mit *LCP* & *Hoschek*-Algorithmus)

5.3.2 Statistischer Vergleich

Um ein aussagekräftiges Ergebnis des statistischen Vergleiches der Approximationsverfahren zu erlangen, werden für jede der vier Kurven 500 Realisierungen generiert und anschließend die erwähnten Kurven-Approximationen durchgeführt. Wie eine Realisierung gewonnen wird, ist in Kapitel 5.2 beschrieben, sie besitzt 500 verrauschte Beobachtungen. Dabei wird der Parameter e , welcher die anfängliche Parametrisierung der Näherungswerte beeinflusst (siehe Gleichung (2.5)), variiert um dessen Einfluss auch für den *Hoschek*-Algorithmus feststellen zu können. Aus den Erkenntnissen der Kapitel 5.2.1 und Kapitel 5.2.2 führt ein kleiner Parameter e bei der gemeinsamen Schätzung der Parameter mit dem *LCP* zu den besten Ergebnissen in Hinblick auf den Vergleichswert $dist_sum$.

Es können nun der arithmetische Mittelwert, der Median und die empirische Standardabweichung s für $dist_sum$ und ϑ der 500 approximierten Kurven berechnet werden. Diese werden mit dem Begriff Kenngrößen zusammen gefasst. Ein Eintrag in einer Datenmenge wird durch die Approximationsmethode sowie dem anfänglichen Parameter e der Parametrisierungsmethode der Näherungswerte definiert.

Die folgenden Kapitel präsentieren nun für jede Kurve aus Kapitel 3 die Ergebnisse der statistischen Vergleiche anhand der Vergleichsparameter. In Kapitel 5.3.3 werden abschließend die Resultate der einzelnen Kurven gegenübergestellt und diskutiert.

In den folgenden Tabellen sind meist nicht die gesamten Ergebnisse der Approximationen mit dem jeweiligen Parameter e angegeben, da bei den fehlenden Spalten allgemein keine Verbesserung auftritt sowie keine Information für die Interpretation verloren geht.

Allgemein weisen die weißen Spalten der Tabellen darauf hin, dass die geringsten Werte einer Approximationsmethode dort beinhaltet sind. Die fett geschriebene Einträge zeigen die minimalen Werte einer Zeile und die in grün hinterlegten Werte zeigen den Minimalwert einer der drei Kenngrößen.

5.3.2.1 Statistischer Vergleich der Kurve 1

In diesem Kapitel werden die Approximationen der *Kurve 1* (siehe Abb. 3.1a) verglichen.

Abbildung 5.6 zeigt beispielhaft einen Vergleich der verbesserten Beobachtungen einer Kurven-Approximation mit dem *G.-M.-* und *LCP*_{1,2}-Verfahren. Als Referenz dient die *Soll*-Kurve. Die roten Rechtecke weisen auf Bereiche hin, in denen die verbesserten Beobachtungen große Abstände zu der *Soll*-Kurve aufweisen. Diese Bereiche sind vor allem an Stellen zu finden, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert. Die Abstände zur *Soll*-Kurve beeinflussen das Ergebnis des Vergleichswertes $dist_sum$. Es ist ersichtlich, dass sich in Abbildung 5.6b die verbesserten Beobachtungen des *LCP*_{1,2}-Verfahrens im Vergleich zu den verbesserten Beobachtungen in Abbildung 5.6a wesentlich besser an die *Soll*-Kurve annähern.

Beim $LCP_{1,2}$ -Verfahren werden die Kurvenparameter in der Approximation gemeinsam mit den Kontrollpunkten mit Hilfe von Ungleichungsrestriktionen geschätzt. Wie sich eine gemeinsame Ausgleichung ohne Restriktionen auf die Approximation einer Kurve auswirkt, wird in Abbildung 4.2 gezeigt. Die eingeführten Ungleichungsrestriktionen lösen die Problematik der Ausgleichung ohne Restriktionen und halten die Kurvenparameter im Definitionsbereich $[0, 1]$, sowie bleibt die Monotonie der Kurvenparameter erhalten. Dies wird in Abbildung 5.6b deutlich bei Betrachtung der verbesserten Beobachtungen und dessen Farbgebung. Wie sich die geschätzten Kurvenparameter von den nominalen Kurvenparametern unterscheiden, wird in Tabelle 5.9 behandelt. In Abbildung 5.6a sind die Kurvenparameter abgebildet, welche für das $G.-M.$ -Verfahren als bekannte Größen eingehen und für das $LCP_{1,2}$ -Verfahren als Näherungswerte dienen.

Auch unterscheiden sich die verbesserten Beobachtungen durch ihre Anordnung. Während in Abbildung 5.6a die verbesserten Beobachtungen regelmäßig angeordnet sind, zeigen die verbesserten Beobachtungen in Abbildung 5.6b eine unregelmäßige Anordnung. Diese Anordnung spiegelt jedoch die auf der *Soll-Kurve* generierten Beobachtungen wieder. Aufgrund der gemeinsamen Schätzung der Kurvenparameter und Kontrollpunkte mit dem $LCP_{1,2}$ -Algorithmus stehen die Verbesserungen der Beobachtungen annähernd normal auf die Kurve und die verbesserten Beobachtungen behalten deshalb eine ähnliche Anordnung.

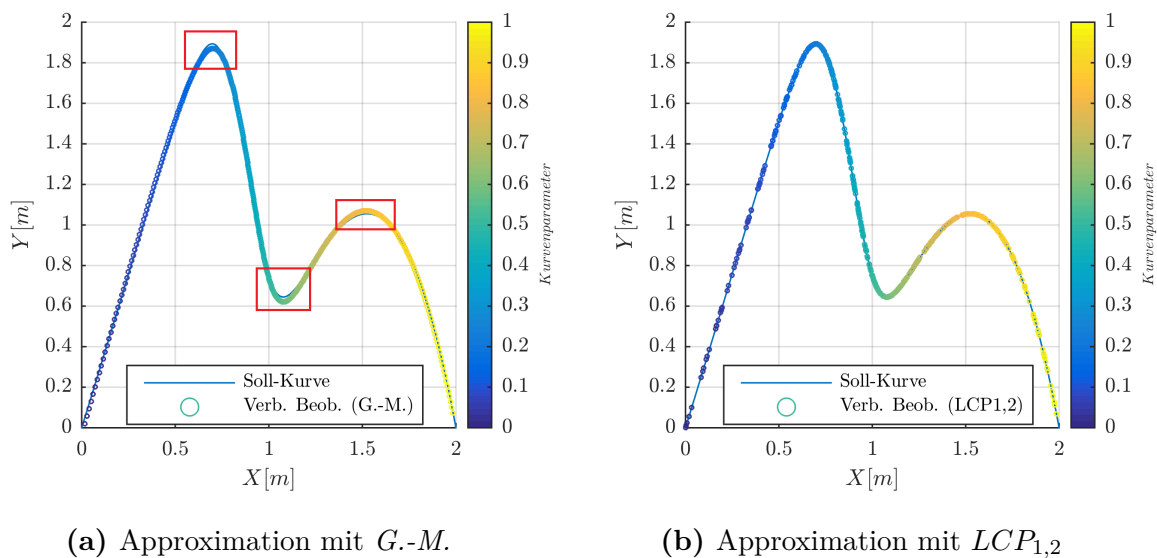


Abb. 5.6: Vergleich der verbesserten Beobachtungen zur *Soll-Kurve* (*Kurve 1*) mit den dazugehörigen Kurvenparametern, dargestellt mittels der Farbskala

Um einen bessern optischen Vergleich der beiden Approximationsmethoden mögliche zu machen, sind in Abbildung 5.8 zwei Ausschnitt vergrößert dargestellt. Einerseits soll in Abbildung 5.7a die unterschiedliche Verteilung der verbesserten Beobachtungen kenntlich gemacht werden, andererseits soll die Abbildung 5.7b die Schwäche der G - M -Methode in Regionen der Krümmungsänderung aufzeigen. Dafür wird das mittlere rote Rechteck der Abbildung 5.6a herangezogen.

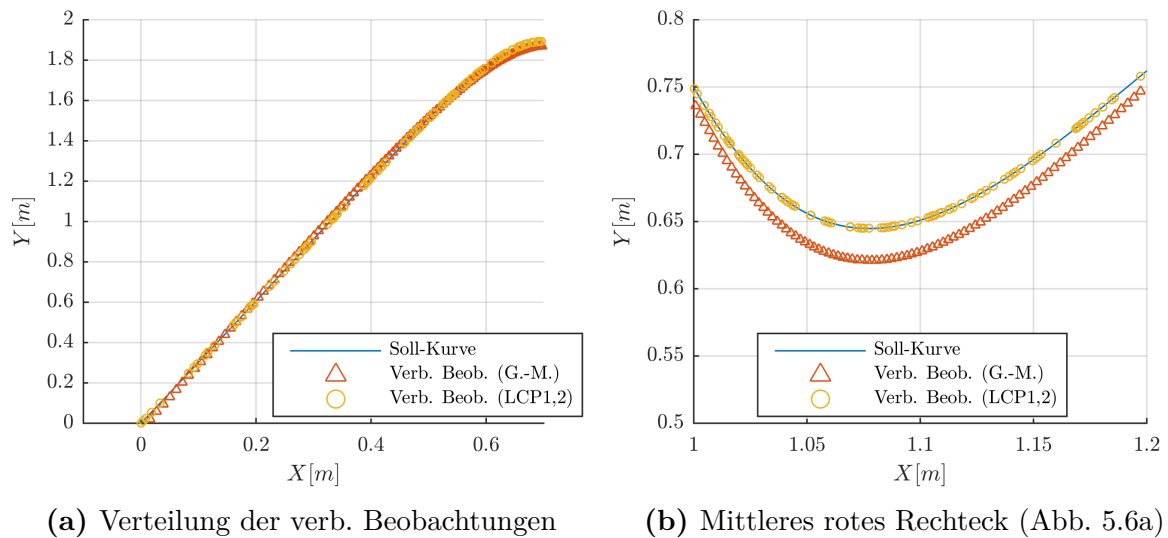


Abb. 5.7: Gegenüberstellung der verbesserten Beobachtungen der Methoden G - M und $LCP_{1,2}$ zur $Soll$ -Kurve ($Kurve\ 1$) mit den dazugehörigen Kurvenparametern

Abbildung 5.8 ermöglicht einen Vergleich der approximierten Kurven aus dem G - M - und $LCP_{1,2}$ -Verfahren zur $Soll$ -Kurve. Die mit roten Rechtecken markierten Bereiche sollen hier große Diskrepanzen zwischen der approximierten Kurve und der $Soll$ -Kurve hervorheben. Große optische Abweichungen zur $Soll$ -Kurve sind in Abbildung 5.8a vor allem an Stellen zu finden, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert. In Abbildung 5.8b ist visuell kein Unterschied zwischen der approximierten Kurve mit $LCP_{1,2}$ und der $Soll$ -Kurve auszumachen. Dies deutet auf eine gute Approximation der Kurve hin.

Ähnliche Abbildungen mit den Algorithmen von $LCP_{1,3}$ und $Hoschek$ bieten keinen optischen Vergleich zu dem $LCP_{1,2}$ -Verfahren und sind aus diesem Grund in dieser Arbeit nicht angeführt. Ein quantitativer Vergleich lässt sich deshalb nur über die Vergleichsparameter bilden.

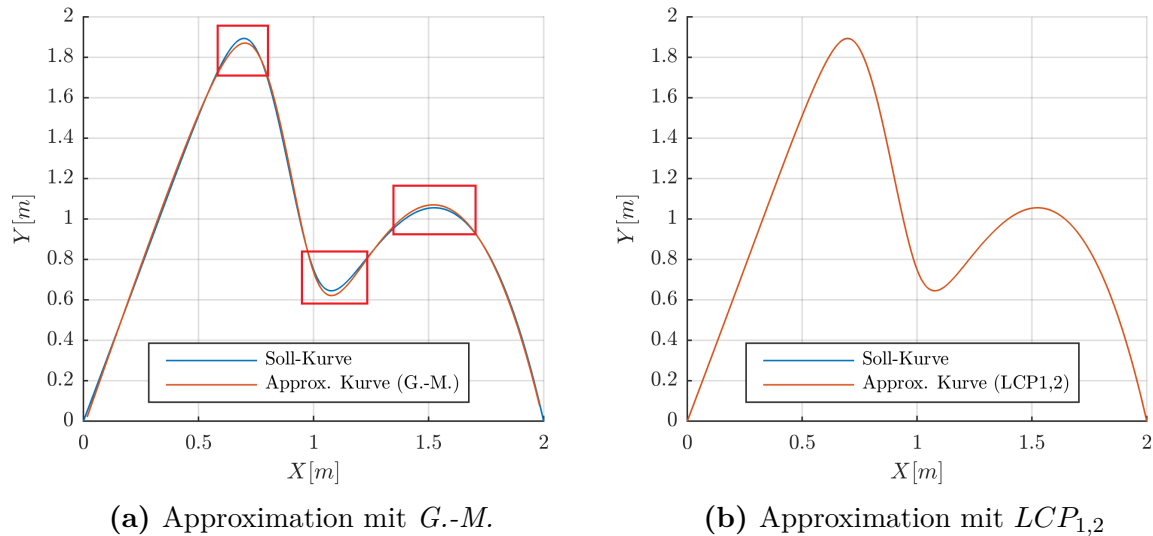


Abb. 5.8: Vergleich der approximierten *Kurve 1* mit der *Soll-Kurve*

Die Tabelle 5.7 zeigt die statistischen Kenngrößen des Vergleichswertes $dist_sum$ (siehe Kap. 5.1) der unterschiedlichen Kurven-Approximationsmethoden.

Ein minimaler Mittelwert, sowie minimaler Median ist bei der Approximationsmethode $LCP_{1,2}$ und einem Parameter $e = 0$ zu finden. Allgemein ist erkennbar, dass bis auf die $LCP_{1,3}$ -Methode alle Approximationsalgorithmen bei einem Parameter $e = 0$ die minimalen Mittelwerte und Mediane aufweisen. Bei $LCP_{1,3}$ ist dies bei einem Parameterwert $e = 0.1$ der Fall. In absoluten Zahlen ist für die *Kurve 1* das Approximationsverfahren $LCP_{1,2}$ besser als die anderen Verfahren. Die Standardabweichungen sind in Relation zu den jeweiligen Mittelwerten groß, was auf eine instabile Datenmenge und Ausreißer hinweist. Aus diesem Grund wird eine Untersuchung auf signifikante Unterschiede der Mittelwerte als nicht sinnvoll und aussagekräftig erachtet.

Der Vergleich mit der als Standardverfahren klassifizierten $G-M$ -Methode und den iterativen Verfahren zeigt allgemein eine deutliche Verbesserung in Bezug auf die $dist_sum$ -Kenngrößen.

Würde man den minimalen $dist_sum$ -Mittelwert des $LCP_{1,2}$ auf die 500 Beobachtungen aufteilen, so würde jede davon einen Betrag von 0.436 mm zugeteilt bekommen. Im Vergleich mit dem angebrachten normalverteilten Rauschen $\sigma_x = 3$ mm kann dies als positives Ergebnis, des $LCP_{1,2}$ -Verfahrens gedeutet werden.

Minimale $dist_sum$ -Werte können für unterschiedliche Realisierungen mit anderen Parametern e gewonnen werden. Die Tabelle 5.8 zeigt die jeweilige Anzahl an minimalen $dist_sum$ -Werte der 500 Realisierungen in Abhängigkeit des zugehörigen anfänglichen Parameters e . Tabelle 5.8 soll verdeutlichen, dass bei einer Mittelwertbildung nicht nur minimale $dist_sum$ -Werte einer Realisierung Einfluss nehmen.

		dist_sum-Werte in [m]							
e-Param.		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Mittelwert	G.-M.	4.427	4.725	6.113	8.407	11.49	15.41	19.97	24.82
	$LCP_{1,2}$	0.218	0.293	0.663	1.396	2.614	3.177	4.36	5.659
	$LCP_{1,3}$	0.487	0.390	0.538	1.139	2.120	2.930	3.845	5.301
	Hoschek	0.469	0.577	0.826	1.133	1.455	1.783	2.117	2.515
Median	G.-M.	4.102	4.461	5.905	8.332	11.38	15.45	19.99	24.80
	$LCP_{1,2}$	0.168	0.202	0.354	0.690	2.230	2.700	3.576	4.471
	$LCP_{1,3}$	0.437	0.310	0.333	0.623	2.145	2.863	3.740	4.784
	Hoschek	0.430	0.524	0.783	1.089	1.400	1.736	2.087	2.524
Stdabw. s	G.-M.	1.642	1.760	1.998	2.043	2.076	2.066	1.873	3.331
	$LCP_{1,2}$	0.177	0.300	1.149	1.733	3.077	1.847	3.331	3.683
	$LCP_{1,3}$	0.288	0.330	0.706	1.071	1.199	0.876	0.878	1.843
	Hoschek	0.269	0.319	0.356	0.361	0.359	0.356	0.341	0.350

Tab. 5.7: Vergleich mittels $dist_sum$ der Kurven-Approximationsalgorithmen realisiert mit unterschiedlichen e -Parametern (*Kurve 1*)

Bei der Methode $LCP_{1,2}$ und *Hoschek* haben etwa 70% der 500 Realisierungen ihren minimalen $dist_sum$ -Wert bei einer Approximation mit dem Parameter $e = 0$. Für das $LCP_{1,3}$ -Verfahren sind die minimalen $dist_sum$ -Werte mehr auf die Parameter e aufgeteilt, der größte Prozentsatz von etwa 36% ist bei einem Parameter $e = 0.1$ zu finden.

e-Para.	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	Gesamtanzahl
G.-M.	324	129	43	4	0	500
$LCP_{1,2}$	357	119	22	1	1	500
$LCP_{1,3}$	111	181	161	43	4	500
Hoschek	348	119	30	3	0	500

Tab. 5.8: Anzahl der minimalen $dist_sum$ -Werte der Kurven-Approximationsalgorithmen in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e (*Kurve 1*)

Die Tabelle 5.9 zeigt die statistischen Kenngrößen des Vergleichswertes ϑ (siehe Kap. 5.1.2). Minimale Kenngrößen befinden sich in Tabelle 5.9 bei den Approximation mit $LCP_{1,2}$ und *Hoschek*, welche einen Parameter $e = 0$ bei der anfänglichen Parametrisierung der vorauschten Beobachtungen besitzen. Für das $LCP_{1,3}$ -Verfahren liegen die minimalen Werte des Mittelwerts und des Medians bei einem Parameter $e = 0.1$, die Standardabweichung ist bei einem Parameter $e = 0$ am geringsten.

Vergleicht man die absoluten Zahlen sind die statistischen Größen aus dem $LCP_{1,2}$ -Verfahren mit dem Parameter $e = 0$ die minimalen Werte in der Tabelle 5.9 und somit die beste Methode zur Schätzung der Kurvenparameter der *Kurve 1*. Bei der $LCP_{1,2}$ -Methode nähern sich die Kurvenparameter also am besten den nominalen Kurvenparameter an.

Auch für die ϑ -Werte sind die Standardabweichungen im Verhältnis zu den dazugehörigen Mittelwerten sehr groß. Deshalb wird auch hier auf eine Untersuchung der Signifikanz der Mittelwerte verzichtet, da dieser nicht aussagekräftig wäre.

		ϑ -Werte in []							
e -Param.		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Mittelw.	$LCP_{1,2}$	0.004	0.006	0.012	0.025	0.044	0.056	0.062	0.066
	$LCP_{1,3}$	0.013	0.010	0.013	0.027	0.047	0.059	0.066	0.071
	Hoschek	0.011	0.012	0.016	0.020	0.024	0.029	0.033	0.039
Median	$LCP_{1,2}$	0.003	0.004	0.007	0.015	0.051	0.057	0.062	0.065
	$LCP_{1,3}$	0.010	0.007	0.007	0.014	0.052	0.061	0.066	0.069
	Hoschek	0.010	0.011	0.015	0.019	0.022	0.026	0.030	0.036
Stdabw. s	$LCP_{1,2}$	0.003	0.007	0.014	0.021	0.022	0.015	0.016	0.021
	$LCP_{1,3}$	0.009	0.011	0.019	0.027	0.019	0.015	0.011	0.016
	Hoschek	0.006	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.009	0.012

Tab. 5.9: Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 1* realisiert mit unterschiedlichen Parameter e

Harmening und Neuner (2017) geben an, dass für einen Vergleich von B-Spline-Objekten eine Genauigkeit für die Kurvenparameter von < 0.001 erreicht werden muss, um die Kurven in ein annähernd gemeinsames B-Spline-Datum zu bringen. Hier werden die nominalen Kurvenparameter mit den geschätzten Kurvenparametern der Approximationsmethoden verglichen. Die Mittelwerte und Mediane in Tabelle 5.9 unterschreiten diese Schranke nicht.

Die Tabelle 5.10 zeigt, wie viele der 500 ϑ -Werte aus den Realisierungen mit einem anfänglichen Parameter e sich unter einer gewissen Schranke befinden. Die Tabelle 5.10 vergleicht die Approximationsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e mit dem eine minimaler Mittelwert erreicht werden konnte. Mit der $LCP_{1,2}$ -Methode und dem Parameter $e = 0$ unterschreiten etwa 14% der 500 Realisierungen die Schranke von $\vartheta < 0.001$ und fast 90% der ϑ -Werte sind < 0.01 . Im Vergleich mit den beiden anderen Verfahren weist die $LCP_{1,2}$ -Methode die größten Anzahlen je Schranke auf.

ϑ	< 0.001	< 0.01	< 0.1
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.0$	72	448	500
$LCP_{1,3}$ mit $e = 0.1$	14	343	499
<i>Hoschek</i> mit $e = 0.0$	4	257	500

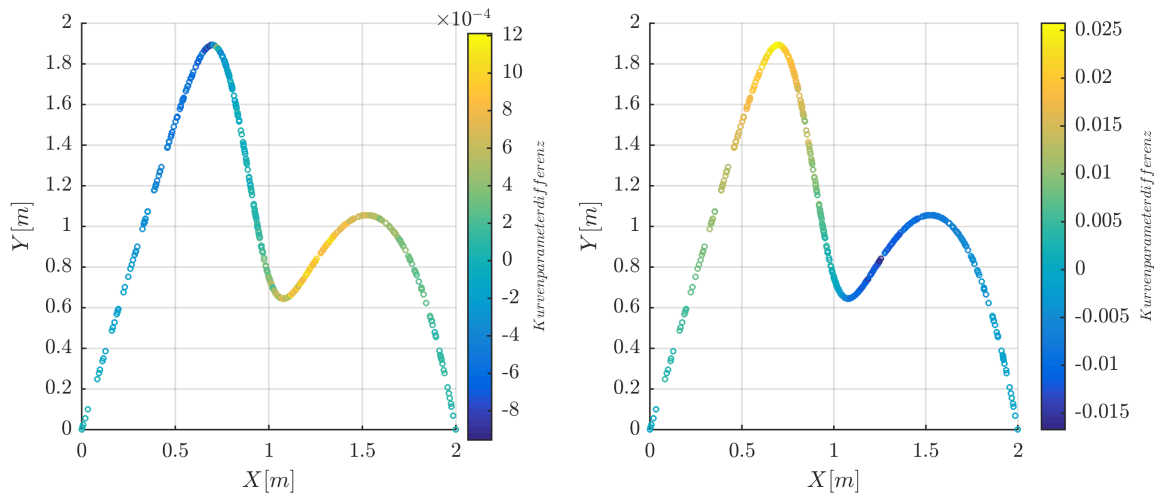
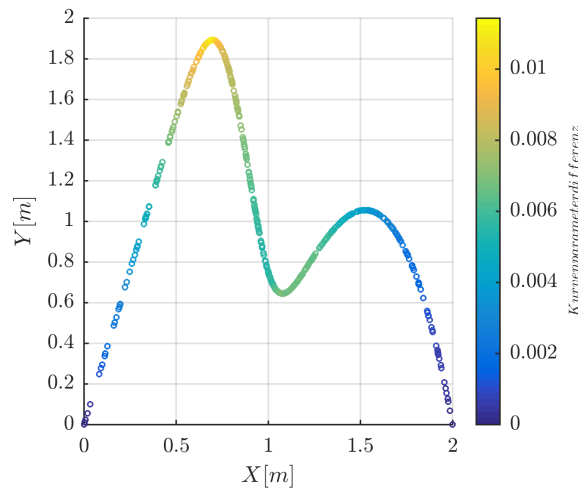
Tab. 5.10: Anzahl der ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts, die eine gewisse Schranke nicht überschreiten (*Kurve 1*)

In der folgenden Abbildung 5.9 wird gezeigt, welche Größe die einzelnen Differenzen der geschätzten Kurvenparameter der unterschiedlichen Approximationsmethoden zu den nominalen Kurvenparametern aufweisen und an welcher Stelle sie sich befinden. Dies wird beispielhaft für eine Realisierung durchgeführt, welche mit dem Parameter $e = 0$ approximiert wurde. Die Differenzen sind in Abbildung 5.9 anhand der Farben auf den unverrauschten Beobachtungen abgebildet. Zu beachten sind die unterschiedlichen Skalen der Farblegenden.

Vergleicht man die Abbildung 5.9a und 5.9b ist festzustellen, dass bei der $LCP_{1,3}$ -Methode positive Differenzen an Stellen auftreten an denen die $LCP_{1,2}$ -Methode negative Differenzen aufweist und vice versa, wobei wiederum die Farblegende zu beachten ist. Da sich die beiden Methoden nur aufgrund ihrer Ungleichungsrestriktionen unterscheiden, ist dort die Begründung für diesen Effekt zu finden. In der Abbildung 5.9c sind keine negativen Differenzen zu finden. Generell scheint die Krümmungsänderung für alle Methoden eine Rolle bezüglich der Differenz zu den nominalen Kurvenparametern zu spielen, da dort die betragsmäßig größten Abweichung auftreten. Allgemein fällt auf, dass für alle Methoden an den Rändern die geringsten Differenzen vorkommen.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus Tabelle 5.7 und Tabelle 5.9 zeigt, dass die minimalen $dist_sum$ -Kenngrößen sowie die minimalen ϑ -Kenngrößen bei dem $LCP_{1,2}$ -Verfahren mit dem selben Parameter e auftreten. Ein geringer Abstand zu der *Soll*-Kurve führt demnach bei der *Kurve 1* zu einer geringen Differenz der Kurvenparameter zu den nominalen Kurvenparametern.

Aufgrund der Ergebnisse liefert für die *Kurve 1* mit 500 verrauschten Beobachtungen die $LCP_{1,2}$ -Methode die besten Resultate. Vergleicht man noch dazu die Rechenzeit einer Approximation der $LCP_{1,2}$ -Methode von rund 4 s mit jener der *Hoschek*-Methode von etwa 90 s, so gibt dies einen weiteres positiven Argument.

(a) Approximation mit $LCP_{1,2}$ -Methode(b) Approximation mit $LCP_{1,3}$ -Methode(c) Approximation mit *Hoschek*-Methode**Abb. 5.9:** Differenz der geschätzten mit den nominalen Kurvenparametern der *Kurve 1*

5.3.2.2 Statistischer Vergleich der Kurve 2

Mit den Ergebnissen der *Kurve 2* (siehe Abb. 3.1b) lassen sich die Aussagen und Erkenntnisse der Approximationsmethoden aus dem Kapitel 5.3.2.1, dem statistischen Vergleich der *Kurve 1*, bestätigen. Begründen lässt sich dies, dass sich beide Kurven in ihren Ausdehnungen (siehe Kap. 3) nur gering unterscheiden und somit die Punktdichte mit 500 Beobachtungen für beide Kurven in einem annähernd ähnlichen Verhältnis steht. Auch besitzen beide den B-Spline-Kurven Grad $p = 3$ und sieben Kontrollpunkte (siehe Anhang A.1). Die Ergebnisse des Vergleiches der Approximationsmethoden für die *Kurve 2* sind in den Tabellen im Anhang A.4 zu sehen. Zusammenfassend liefert für die *Kurve 2* die $LCP_{1,2}$ -Methode die besten Ergebnisse für eine Kurven-Approximation in Bezug auf die statistischen Kenngrößen der Vergleichswerte $dist_sum$ und ϑ .

5.3.2.3 Statistischer Vergleich der Kurve 3

Die *Kurve 3* (siehe Abb. 3.1c) unterscheidet sich von den beiden oben angeführten Kurven vor allem durch ihr Ausdehnung im Raum (siehe Kap. 3), sowie mit dem Grad der B-Spline-Kurve $p = 2$ und der Anzahl der Kontrollpunkte, welche sechs beträgt. Durch die größere Ausdehnung im Raum wird die *Kurve 3* mit einer wesentlich geringeren Punktdichte abgedeckt. Das Verhalten der *Kurve 3* im Bezug auf die lokalen Extremwertstellen ähnelt der *Kurve 1*.

In Tabelle 5.11 sind die statistischen Kenngrößen des Vergleichswertes $dist_sum$ der *Kurve 3* für die vier Approximationsmethoden angegeben. Die minimalen Kenngrößen sind für alle Approximationsmethoden bei einem Parameter $e = 0$ zu finden. Der minimale Mittelwert wird mit dem *Hoschek*-Verfahren erreicht. Der Vergleich der drei iterativen Verfahren mit dem Standardverfahren, der *G.-M.*-Methode, zeigt eine eindeutige Verbesserung in Bezug auf den $dist_sum$ -Vergleichswert, quantifiziert betragen die Mittelwerte der iterativen Verfahren in etwa 5% des *G.-M.*-Mittelwerts.

		dist_sum-Werte in [m]							
$e - Para.$		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Mittelwert	G.-M.	36.54	40.35	61.18	87.33	111.4	130.8	144.0	149.5
	$LCP_{1,2}$	1.907	2.234	4.397	8.819	15.31	20.85	24.41	27.65
	$LCP_{1,3}$	2.024	2.337	4.552	8.911	15.95	21.85	24.12	27.92
	Hoschek	1.721	1.856	2.506	4.079	7.729	13.57	18.20	20.25
Median	G.-M.	32.90	36.73	61.27	88.81	113.0	131.3	143.2	148.9
	$LCP_{1,2}$	1.094	1.132	2.594	8.407	16.56	19.84	24.25	27.61
	$LCP_{1,3}$	1.187	1.368	2.335	8.106	16.83	21.37	23.28	24.82
	Hoschek	1.377	1.507	2.018	3.512	6.398	16.47	18.28	20.35
Stdabw. s	G.-M.	18.36	21.12	24.49	21.54	16.90	12.58	9.252	7.280
	$LCP_{1,2}$	2.171	2.853	4.669	5.953	5.256	4.245	4.342	1.981
	$LCP_{1,3}$	2.285	3.005	5.167	6.090	5.384	4.105	3.751	2.319
	Hoschek	1.321	1.528	2.215	3.321	4.947	4.997	1.696	1.461

Tab. 5.11: Vergleich mittels $dist_sum$ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 3* realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)

Auffallend ist, dass die $LCP_{1,2}$ -Methode den minimalen Median beinhaltet, welcher sich in Bezug auf den dazugehörigen Mittelwert um etwa 43% verringert. Ebenso gilt dieser Effekt für die $LCP_{1,3}$ -Methode. Dies bedeutet, dass sich einige Ausreißer in den $dist_sum$ -Werten des $LCP_{1,2}$ und $LCP_{1,3}$ mit dem Parameter $e = 0$ befinden. Mittels einer Untersuchung mit der 3σ -Regel können 26 der 500 $dist_sum$ -Werte des $LCP_{1,2}$ als

Ausreißer deklariert werden, welche einen gemittelten $dist_sum$ -Wert von 8.844 aufweisen, für $LCP_{1,3}$ sind es 28 mit einem Mittelwert von 9.435. Die Ausreißer haben der Tabelle 5.11 nach einen wesentlichen Einfluss auf den jeweiligen Mittelwert.

Die minimale Standardabweichung ist bei der *Hoschek*-Methode zu finden. Damit streuen die $dist_sum$ -Werte bei der *Hoschek*-Methode am geringsten. Jedoch sind die Standardabweichungen ähnlich groß wie die Mittelwerte, was auf Ausreißer hindeutet. Eine Aussage über signifikante Unterschiede der Mittelwerte der Methoden kann daher nicht getroffen werden.

Tabelle 5.12 gibt einen Überblick mit welchem Parameter e , der für die Gewinnung von Näherungswerten der Kurvenparameter benötigt wird, für eine Realisierung der minimale $dist_sum$ -Wert aus den Approximationsmethoden gewonnen werden kann. Für alle vier Approximationsmethoden liefert eine Parametrisierung mit $e = 0$ die meisten minimalen Werte. Allgemein lässt die Tabelle 5.12 darauf schließen, dass für eine Realisierung mehrere Approximation mit unterschiedlichen Näherungswerten der Kurvenparameter durchgeführt werden muss, um sicher zu stellen, den minimalen $dist_sum$ -Wert zu berechnen.

$e - Para.$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	Gesamtanzahl
G.-M.	305	154	41	0	0	0	500
$LCP_{1,2}$	275	151	64	10	0	0	500
$LCP_{1,3}$	250	160	80	10	0	0	500
Hoschek	285	77	81	46	9	2	500

Tab. 5.12: Anzahl minimaler $dist_sum$ -Werte der Kurven-Approximationsalgorithmen in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e (*Kurve 3* mit 500 Beobachtungen)

Die Tabelle 5.13 fasst die statistischen Kenngrößen des Vergleichswertes ϑ (siehe Kap. 5.1.2) zusammen. Für jede Approximationsmethode liegt der minimale Mittelwert bei einer anfänglichen Parametrisierung mit dem Parameter $e = 0$. Die absoluten minimalen Kenngrößen sind bei dem $LCP_{1,2}$ -Verfahren zu finden. Auch die ϑ -Standardabweichungen sind auffallend groß in Bezug auf deren Mittelwerte. Die Approximationsverfahren scheinen in ihren Ergebnissen eine deutliche Streuung zu beinhalten.

Wie auch schon in den obigen Kapiteln erwähnt, geben Harmening und Neuner (2017) die Schranke von < 0.001 an, welche bei einem Vergleich von B-Spline-Objekten nicht überschritten werden soll, um diese miteinander vergleichen zu können. In dieser Arbeit werden die nominalen Kurvenparameter mit den geschätzten Kurvenparametern in Relation gesetzt werden. Die Abnahme der Mediane in Bezug auf der Mittelwerte in Tabelle 5.13 weisen darauf hin, dass Approximationen diese Schranke unterschreiten.

		ϑ -Werte in []							
e-Param.		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Mittelw.	$LCP_{1,2}$	0.003	0.004	0.008	0.017	0.036	0.057	0.065	0.085
	$LCP_{1,3}$	0.009	0.010	0.019	0.040	0.081	0.146	0.207	0.235
	Hoschek	0.004	0.004	0.006	0.010	0.020	0.045	0.075	0.092
Median	$LCP_{1,2}$	0.001	0.002	0.004	0.014	0.030	0.060	0.063	0.087
	$LCP_{1,3}$	0.005	0.004	0.009	0.031	0.078	0.151	0.211	0.235
	Hoschek	0.003	0.003	0.004	0.008	0.014	0.053	0.078	0.092
Stdabw. s	$LCP_{1,2}$	0.003	0.005	0.010	0.015	0.021	0.015	0.010	0.012
	$LCP_{1,3}$	0.010	0.013	0.024	0.035	0.044	0.049	0.019	0.016
	Hoschek	0.003	0.003	0.005	0.010	0.018	0.025	0.013	0.006

Tab. 5.13: Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 3* realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)

Die Tabelle 5.14 zeigt die ϑ -Werte einer Approximationsmethode in Abhängigkeit eines Parameters e , welche eine gewisse Schranke nicht überschreiten. Gewählt wird die Approximationsmethode mit dem Parameter e , welcher den geringsten Mittelwert von ϑ aufweist. Mit dem $LCP_{1,2}$ -Verfahren konnte für 43% der 500 Realisierungen ein $\vartheta < 0.001$ erreicht werden. Dies stützt auch das Ergebnis in Tabelle 5.13, in der die $LCP_{1,2}$ -Methode die geringsten Kenngrößen aufweist.

Die minimalen Kenngrößen der Vergleichswerte $dist_sum$ und ϑ sind für die *Kurve 3* nicht bei den selben Approximationsmethoden zu finden. Dies bedeutet, dass die verbesserten Beobachtungen der *Hoschek*-Methode sich besser der *Soll*-Kurve annähern, jedoch die verbesserten Beobachtungen der $LCP_{1,2}$ -Methode sich besser den nominalen Punkten auf der *Soll*-Kurve angleichen.

ϑ	< 0.001	< 0.01	< 0.1
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.0$	215	465	500
$LCP_{1,3}$ mit $e = 0.0$	50	380	500
<i>Hoschek</i> mit $e = 0.0$	89	478	500

Tab. 5.14: Anzahl der ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts, die eine gewisse Schranke nicht überschreiten (*Kurve 3*)

In Tabelle 5.11 verringert sich der *dist_sum*-Median des $LCP_{1,2}$ - bzw. des $LCP_{1,3}$ -Verfahrens in Bezug auf den Mittelwert wesentlich, was auf eine Anzahl von Ausreißern hinweist. Mit einer Vergrößerung der Anzahl an verrauschten Beobachtungen soll untersucht werden, ob sich dadurch die Kenngrößen der Approximationen verbessern und die Approximationsverfahren mit dem LCP stabiler werden. Aufgrund der Erkenntnisse der Tabelle 5.11, dass bei allen der Approximationsalgorithmen keine Verbesserung der statistischen Kenngrößen bei einem Parameter $e > 0.4$ auftreten, werden demnach nicht mehr alle Optionen für den Parameter e berechnet. Die Anzahl der verrauschten Beobachtungen wird auf 1000 verdoppelt und 500 Realisierungen der *Kurve 3* berechnet. Die statistischen Kenngrößen für die *dist_sum* Vergleichsgröße sind in Tabelle 5.15 zu sehen.

		dist_sum-Werte in [m]				
$e - Para.$		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
Mittelwert	G.-M.	51.92	75.73	127.46	180.30	226.95
	$LCP_{1,2}$	1.336	2.470	7.060	18.099	32.099
	$LCP_{1,3}$	1.513	2.483	7.093	18.153	32.637
	Hoschek	2.507	2.745	3.989	7.303	14.831
Median	G.-M.	47.10	67.95	128.03	180.94	224.92
	$LCP_{1,2}$	0.859	1.237	5.238	17.085	33.490
	$LCP_{1,3}$	0.871	1.139	5.249	17.972	33.384
	Hoschek	2.283	2.341	3.908	6.893	12.083
Stdabw. s	G.-M.	27.12	36.75	37.40	30.61	28.81
	$LCP_{1,2}$	1.323	2.659	5.985	9.094	8.188
	$LCP_{1,3}$	1.332	2.660	5.979	8.909	8.115
	Hoschek	1.547	2.094	3.0695	3.882	8.239

Tab. 5.15: Vergleich mittels *dist_sum* von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 3* realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 1000 Beobachtungen)

Die nun folgenden Vergleiche beziehen sich auf die *dist_sum*-Kenngrößen der Tabelle 5.11, in der die Realisierungen 500 Beobachtungen besitzen. Es sei an dieser Stelle noch einmal zu betonen, dass der Vergleichswert *dist_sum* sich aus der Summer der Normalabstände der Beobachtungen zur *Soll*-Kurve bildet (siehe Kap. 5.1.1). Dies muss bei dem Vergleich der Kenngrößen der Tabelle 5.11 und 5.15 berücksichtigt werden. Eine Division der Mittelwerte durch die Anzahl der Beobachtungen macht einen Vergleich möglich und ist in Tabelle 5.16 zu sehen.

Betrachtet man die minimalen Mittelwerte der Approximationsmethoden, so ist für die $LCP_{1,2}$ - und $LCP_{1,3}$ -Methode eine deutliche Verbesserung erkennbar obwohl die Anzahl der

dist_sum-Werte in [m]		
Approximationsmethode	500 Beob.	1000 Beob.
min. Mittelwerte aus	Tab. 5.11	Tab. 5.15
<i>G.-M.</i>	0.0730	0.0519
<i>LCP</i> _{1,2}	0.0038	0.0013
<i>LCP</i> _{1,3}	0.0040	0.0015
<i>Hoschek</i>	0.0034	0.0025

Tab. 5.16: Division der minimalen Mittelwerte durch die Anzahl an Beobachtungen der Realisierungen (*Kurve 3*)

Beobachtungen verdoppelt wurde. Im Gegensatz dazu vergrößert sich der Mittelwert bei der *G.-M.*- und *Hoschek*-Methode durch die Hinzunahme von Beobachtungen. Teilt man die minimalen *dist_sum*-Mittelwerte jedoch auf die Anzahl der Beobachtungen auf, so ist für jede Approximationsmethode eine Verbesserung erkennbar. In der Praxis werden durch z.B.: Laserscanner große Mengen an Beobachtungen produziert, was für den *LCP*-Algorithmus spricht. Allgemein auffallend ist die deutliche Zunahme der *dist_sum*-Mittelwert mit aufsteigendem Parameter e , was die Wichtigkeit der Näherungswerte der Kurvenparameter verdeutlicht. Bei einer Hinzunahme von Beobachtung verbessern sich zwar die minimalen Kenngrößen, jedoch nehmen die *dist_sum*-Kenngrößen bei zunehmendem Parameter e im Verhältnis schlechter Werte an.

In absoluten Zahlen befinden sich die minimalen Kenngrößen bei der *LCP*_{1,2}-Methode mit einem Parameter $e = 0$. Die Standardabweichungen sind im Verhältnis zum jeweiligen Mittelwert noch immer sehr groß und man muss weiter von einer großen Streuung in den Ergebnissen der Approximationen ausgehen. Da sich die Kenngrößen des *LCP*_{1,2} mit denen von *LCP*_{1,3} sehr ähneln, ist diese Aussage auch für *LCP*_{1,3} gültig. Bei Betrachten der Tabelle 5.17 wird dies verdeutlicht. Beinahe 73% der 500 Realisierungen besitzen mit der *LCP*_{1,2}-Methode ihren minimalen *dist_sum*-Wert bei einem Parameter $e = 0$.

$e - Para.$	0.0	0.1	0.2	0.3	Gesamtanzahl
<i>G.-M.</i>	388	103	9	0	500
<i>LCP</i> _{1,2}	363	116	21	0	500
<i>LCP</i> _{1,3}	339	139	22	0	500
<i>Hoschek</i>	291	95	114	0	500

Tab. 5.17: Anzahl minimaler *dist_sum*-Werte der Kurven-Approximationsalgorithmen in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e (*Kurve 3* mit 1000 Beobachtungen)

Abbildung 5.10 soll die Auswirkung einer Hinzunahme von verrauschten Beobachtungen für die *G.-M.*-Methode mit zwei Szenen visualisieren. Allgemein ist zu erkennen, dass sich die verbesserten Beobachtungen bei Verwendung von 1000 Beobachtungen (siehe Abb. 5.10b und 5.10d) besser an die *Soll-Kurve* anpassen. Die Beobachtungen am Rand, wie in Abbildung 5.10b ersichtlich, bewegen sich aus dem Definitionsbereich der *Soll-Kurve*. Die Berechnung des Normalabstandes der verbesserten Beobachtungen zur *Soll-Kurve* wird in dieser Arbeit mit der Berechnung der minimalen Distanz zu einem Kurvenpunkt angenähert. Dadurch entstehen für die Randbeobachtungen große Werte, welche den Vergleichswert *dist_sum* wesentlich beeinflussen (siehe Tab. 5.15). In Abbildung 5.10a decken die Randbeobachtungen zwar nicht den Rand der Kurve ab, jedoch ist es möglich einen realistischen Normalabstand zu berechnen.

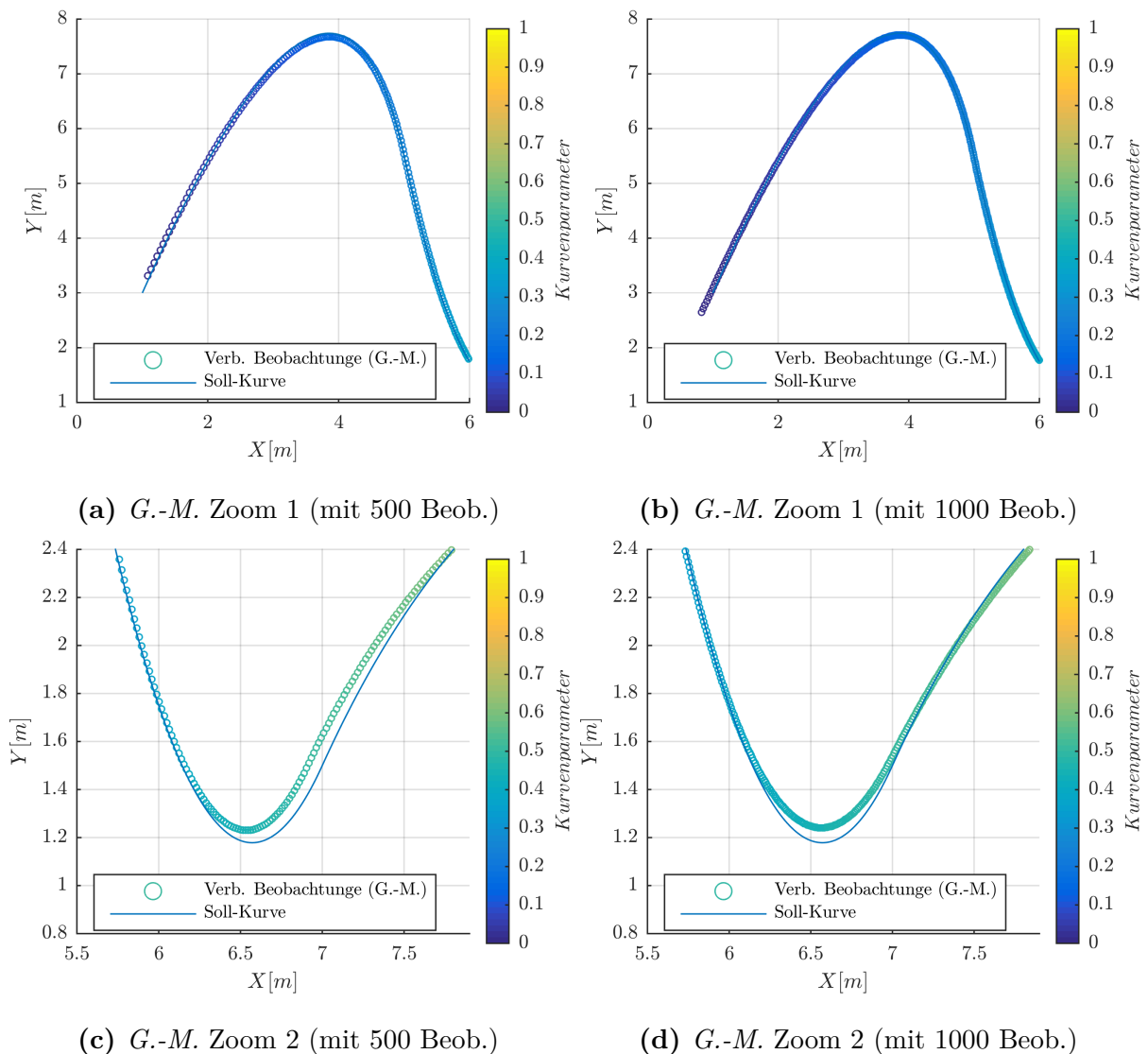


Abb. 5.10: Vergleich der verbesserten Beobachtungen gewonnen mit der *G.-M.*-Methode und unterschiedlicher Anzahl an Beobachtungen zur *Soll-Kurve* (*Kurve 3*)

Ein visueller Vergleich der weiteren Approximationsmethoden ist nicht aussagekräftig, da sich die approximierten Kurven kaum von der *Soll*-Kurve unterscheiden bzw. die verbesserten Beobachtungen keine visuellen Differenzen zur *Soll*-Kurve aufweisen. Allgemein gelten auch für die *Kurve 3* die Aussagen, welche für die *Kurve 1* in Abbildung 5.9 getroffen werden.

Die Tabelle 5.18 zeigt die statistischen Kenngrößen des Vergleichswertes ϑ der Approximationen mit 1000 verrauschten Beobachtungen. Der minimale Mittelwert ist bei der $LCP_{1,2}$ -Methode mit einem Parameter $e = 0$ zu finden. Durch Hinzunahme von Beobachtungen konnte die durchschnittliche Differenz zwischen den nominalen Kurvenparametern sowie den geschätzten Kurvenparametern verringert werden.

Die Anzahl der ϑ -Werte mit denen eine Schranke eines Approximationsverfahrens nicht überschritten wird, ist in Tabelle 5.19 dargestellt. Mit etwa 66% der 500 ϑ -Werte konnte mit dem $LCP_{1,2}$ -Verfahren die Schranke 0.001 unterschritten werden. Diese Schranke ist bedeutend um einen Vergleich von B-Spline-Objekten möglich zu machen.

Allgemein lässt sich durch Vergleich der Tabelle 5.13 mit Tabelle 5.18 feststellen, dass durch die Hinzunahme von Beobachtungen die Kenngrößen des Vergleichswertes ϑ für alle Approximationen verringert werden konnte. Die geschätzten Kurvenparameter nähern sich demnach besser an die nominalen Kurvenparameter an.

		ϑ -Werte in []				
<i>e</i> -Param.		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
Mittelw.	$LCP_{1,2}$	0.0011	0.0021	0.0060	0.0154	0.0328
	$LCP_{1,3}$	0.0012	0.0022	0.0060	0.0157	0.0311
	Hoschek	0.0029	0.0031	0.0045	0.0081	0.0173
Median	$LCP_{1,2}$	0.0006	0.0010	0.0044	0.0153	0.0281
	$LCP_{1,3}$	0.0007	0.0010	0.0044	0.0155	0.0281
	Hoschek	0.0028	0.0029	0.0044	0.0078	0.0137
Stdabw. <i>s</i>	$LCP_{1,2}$	0.0012	0.0025	0.0054	0.0086	0.0143
	$LCP_{1,3}$	0.0013	0.0026	0.0054	0.0086	0.0119
	Hoschek	0.0018	0.0023	0.0053	0.0042	0.0117

Tab. 5.18: Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 3* realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 1000 Beobachtungen)

ϑ	< 0.001	< 0.01	< 0.1
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.0$	328	500	500
$LCP_{1,3}$ mit $e = 0.0$	321	500	500
<i>Hoschek</i> mit $e = 0.0$	71	500	500

Tab. 5.19: Anzahl ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts, die eine Schranke nicht überschreiten (*Kurve 3* mit 1000 Beobachtungen)

In Abbildung 5.11 wird beispielhaft für eine Realisierung die Größe der Differenzen der geschätzten Kurvenparameter der iterativen Approximationsmethoden zu den nominalen Kurvenparametern dargestellt. Die Realisierung der *Kurve 3* wird mit dem Parameter $e = 0$ approximiert mit welchem eine minimale ϑ -Kenngrößen ermittelt werden konnten. Zu beachten sind hier die unterschiedlichen Farbskalen.

Die Approximationsmethoden besitzen in dieser Realisierung vor allem negative Differenzen. Die größten negativen Differenzen treten in dem Bereich des lokalen Maximums der Kurve auf. Beinahe keine Differenzen sind in der ersten Hälfte der Kurve zu finden.

Durch Hinzunahme von Beobachtungen können Verbesserungen für alle Approximationsmethoden in Hinblick auf die minimalen statistischen Kenngrößen der Vergleichswerte *dist_sum* und ϑ erzielt werden. Vor allem die *LCP*-Methoden profitierten dadurch. Die Punktdichte hat demnach einen wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis einer Kurvenapproximation mit den *LCP*-Methoden.

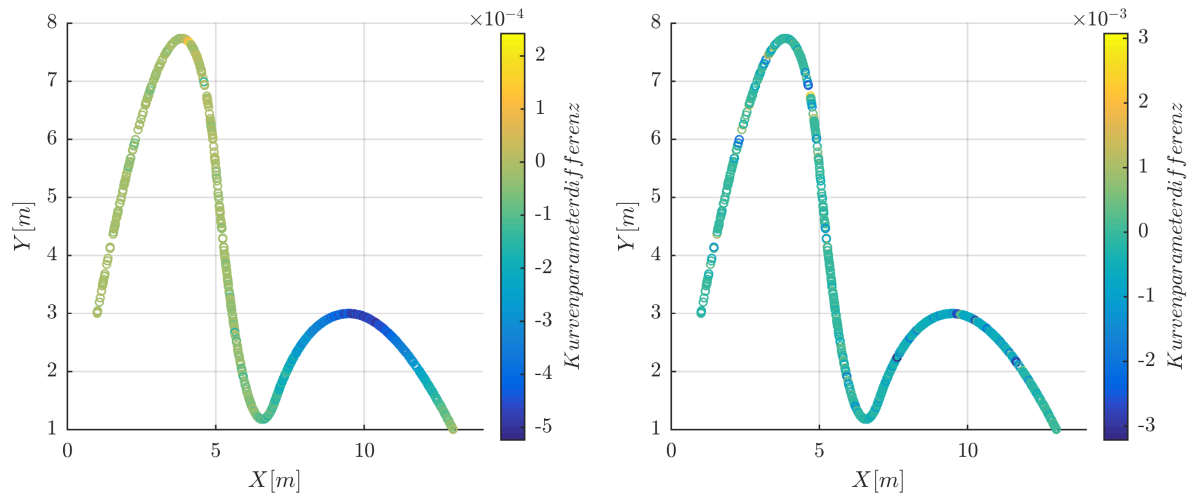
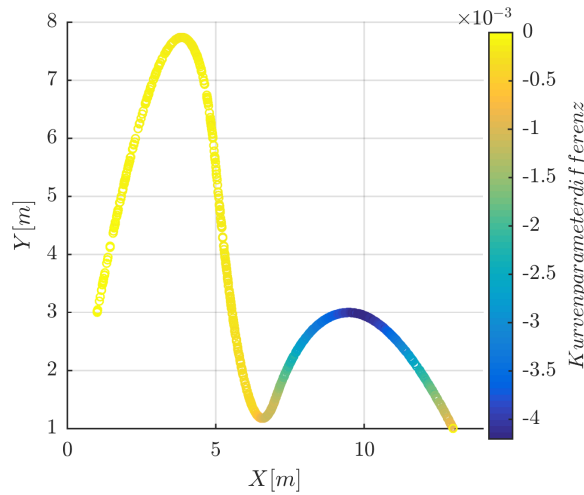
(a) Approximation mit $LCP_{1,2}$ -Methode(b) Approximation mit $LCP_{1,3}$ -Methode(c) Approximation mit *Hoschek*-Methode

Abb. 5.11: Differenz der geschätzten Kurvenparameter mit den nominalen Kurvenparametern der *Kurve 3* mit 1000 verrauschte Beobachtungen je Realisierung

5.3.2.4 Statistischer Vergleich der Kurve 4

Die *Kurve 4* (siehe Abb. 3.1d) unterscheidet sich von den Kurven, welche in den vorherigen Kapiteln behandelt werden, durch ihre räumliche Ausdehnung sowie ihrer Anzahl an lokalen maximalen und minimalen Extremstellen. Generiert man auf der *Kurve 4* 100000 gleichverteilte Kurvenpunkte und approximiert durch die entstehende Polygonlänge die Kurvenlänge, erhält man eine Länge von 24.834 m.

Aufgrund der Erkenntnisse aus den Berechnungen der vorherigen Kurven, wird die $LCP_{1,3}$ -Methode nicht mehr auf die *Kurve 4* angewandt, da für keine der Kurven eine Verbesserung gegenüber dem $LCP_{1,2}$ -Verfahren erzielt werden konnte. Ebenso wird für die Bestimmung der Näherungswerte der Kurvenparameter der Parameter e aufgrund der

Ergebnisse der vorherigen Kapitel nur von 0 bis 0.4 in 0.1-Schritten variiert.

Das Ergebnis des Vergleichs der *dist_sum*-Kenngrößen in Tabelle 5.20 zeigt einen wesentlichen Unterschied zu den vorherigen Kurven auf. Die Kenngrößen der *Hoschek*-Methode unterscheiden sich erheblich von den anderen Methoden, sodass es keine Überprüfung auf signifikante Unterschiede der Mittelwerte benötigt. Die Kenngrößen der *Hoschek*-Methode ändern sich trotz unterschiedlicher Parameter e und somit unterschiedlicher Näherungswerte nur um einen Millimeter oder gar nicht. Zudem bewegen sich die statistischen Kenngrößen in einem Größenbereich von wenigen Zentimetern, welcher bei den vorherig untersuchten Kurven nicht erreicht wird.

Um für diese Ergebnisse Erklärungen zu finden, werden ein Vergleich mit der *Kurve 3* aufgestellt, da diese mit 20.824 m eine ähnliche Länge aufweist und ebenso gleiche B-Spline-Kurven Parameter besitzt (siehe Anhang A.1). Die *Hoschek*-Methode liefert geringere Kenngrößen als die *LCP_{1,2}*-Methode, wenn die Punktdichte auf der Kurve einen geringen Wert besitzt. Die Punktdichte wird hier als das Verhältnis der verrauschten Beobachtungen und der approximierten Länge der Kurve definiert. Ein solches Verhalten konnte für die *Kurve 3* in Tabelle 5.11 festgestellt werden, welche die Ergebnisse der Approximationen der Realisierungen mit 500 verrauschten Beobachtungen wiedergibt. Jedoch ist der Unterschied der Mittelwerte der *Hoschek*- und *LCP_{1,2}*-Methode nicht so enorm und die Kenngrößen des *Hoschek*-Verfahrens bleiben nicht, wie in Tabelle 5.20, beinahe konstant. Dies ist demnach keine zufriedenstellende Erklärung.

Betrachtet man das Konvergenzverhalten der *Hoschek*-Methode für die vier verwendeten Kurven in Abbildung 5.5 fällt auf, dass für die *Kurve 4* nach 200 Iterationen der Unterschied der Näherungswerte und der geschätzten Parameter am geringsten ist, der Wert beträgt 0.0056. Die weiteren Kurven unterschreiten diesen Wert nicht und nähern sich dem Wert 10^{-2} an.

Der *Hoschek*-Algorithmus schafft es offensichtlich bei der geometrischen Form der *Kurve 4* und bei einer Anzahl von 500 Beobachtungen einen niedrigen Grenzwert zu erreichen. Dies führt dazu, dass die geometrisch basierten Verbesserungen die Näherungswerte keinen Einfluss mehr auf das Approximationsergebnis haben und dadurch ein optimales Ergebnis für die Approximation erzielt werden kann. Die gegebenen Voraussetzungen ermöglichen offensichtlich dem *Hoschek*-Algorithmus optimal zu arbeiten.

Die *LCP_{1,2}*-Methode besitzt ihre minimalen Kenngrößen bei einem Parameter $e = 0.1$. Die Größe der Kenngrößen ist im Vergleich zu denen der *Kurve 3* (siehe Tab. 5.11) deutlich niedriger. Auch die *G.-M.*-Methode weist ihren minimalen Mittelwert bei einem Parameter $e = 0.1$ auf.

		dist_sum-Werte in [m]				
<i>e</i> - Para.		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
Mittelw.	G.-M.	40.87	39.77	40.99	44.90	51.18
	$LCP_{1,2}$	1.434	1.219	1.363	1.820	2.534
	Hoschek	0.034	0.034	0.035	0.035	0.035
Median	G.-M.	40.51	39.58	41.56	49.78	61.26
	$LCP_{1,2}$	1.062	0.883	1.217	1.545	2.362
	Hoschek	0.038	0.038	0.038	0.038	0.039
Stdabw. <i>s</i>	G.-M.	30.44	29.34	28.78	29.02	30.52
	$LCP_{1,2}$	1.155	1.183	1.273	1.639	2.090
	Hoschek	0.010	0.010	0.011	0.011	0.011

Tab. 5.20: Vergleich mittels $dist_sum$ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 4* realisiert mit unterschiedlichen *e*-Parametern (500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)

Tabelle 5.21 zeigt die Kenngrößen des Vergleichswertes ϑ . Zu beachten ist der Faktor 10^{-4} , mit dem die Werte multipliziert werden müssen. Zudem ist bei ϑ das selbe Verhalten für die Werte der *Hoschek*-Methode erkennbar, wie bereits für die Tabelle 5.20 diskutiert wurde. Jedoch konnte auch für die $LCP_{1,2}$ -Methode statistische Kenngrößen erreicht werden, die deutlich besser sind im Vergleich mit denen der anderen Kurven. Tabelle 5.22 zeigt, dass 90% der Realisierungen mit dem $LCP_{1,2}$ -Verfahren einen ϑ -Wert unter der Schranke < 0.001 besitzen. Die Bedeutung dieser Schranke wird in den vorherigen Kapiteln erläutert.

		ϑ -Werte in [] - Faktor 10^{-4}				
<i>e</i> -Param.		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
Mittelw.	$LCP_{1,2}$	4.67	4.02	4.55	6.11	8.66
	Hoschek	0.414	0.415	0.415	0.415	0.415
Median	$LCP_{1,2}$	3.45	3.23	4.03	5.67	8.08
	Hoschek	0.126	0.126	0.126	0.126	0.126
Stdabw. <i>s</i>	$LCP_{1,2}$	3.85	2.97	3.17	4.02	4.92
	Hoschek	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488

Tab. 5.21: Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 4* realisiert mit unterschiedlichen Parameter *e* (mit 500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)

ϑ	< 0.001	< 0.01
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.1$	451	500
<i>Hoschek</i> mit $e = 0.0$	500	500

Tab. 5.22: Anzahl der ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts, die eine gewisse Schranke nicht überschreiten (*Kurve 4* mit 500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)

Ein optischer Vergleich der beiden iterativen Verfahren ist in Abbildung 5.12 gegeben. Es ist deutlich zu erkennen, dass es bei einer Approximation mit der *Hoschenk*-Methode in Abbildung 5.12b zu einer Gleichheit der Koordinaten der verbesserten Beobachtungen und der nominalen Kurvenpunkten kommt. Dies begründet die geringen Werte der Vergleichsparameter. Vergleichend dazu ist in Abbildung 5.12a die selbe Situation mit dem $LCP_{1,2}$ -Algorithmus dargestellt.

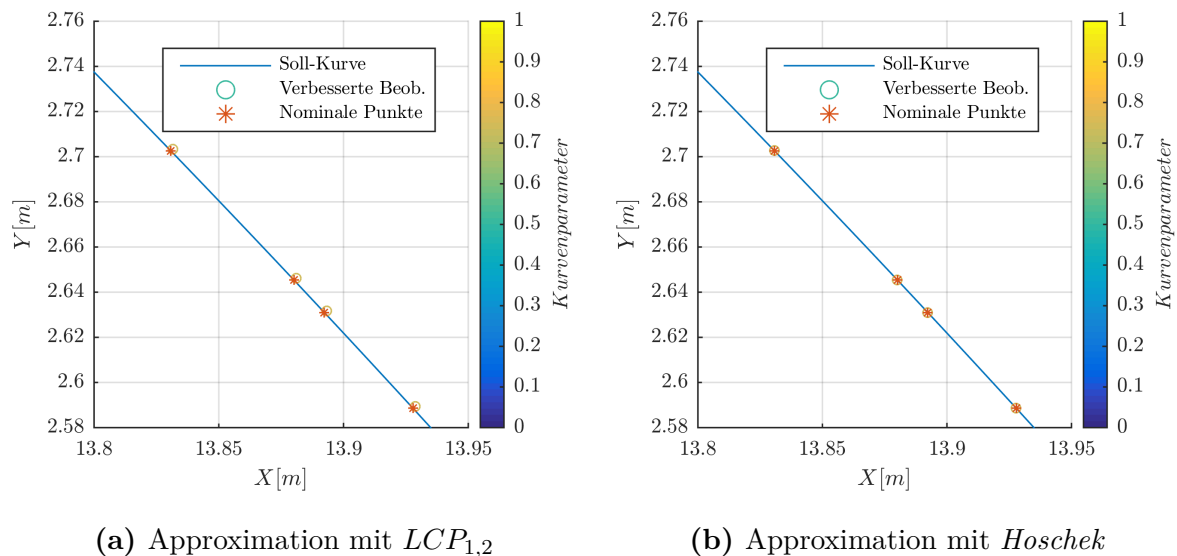


Abb. 5.12: Vergleich der verbesserten Beobachtungen einer Realisierung mit 500 Beobachtungen in Bezug auf die *Soll*-Kurve und der nominalen Punkte auf der *Soll*-Kurve (*Kurve 4*)

Basierend auf den Erkenntnissen aus Kapitel 5.3.2.3, wird für die *Kurve 4* Realisierungen mit 2500 verrauschten Beobachtungen generiert um das Verhalten der Approximationsmethoden bei Hinzunahme von Beobachtungen zu bestimmen. Aufgrund der hohen Rechenzeit der *Hoschek*-Methode werden dafür nur 300 Realisierungen erzeugt.

Obwohl Beobachtungen hinzugefügt worden sind, konnte mit dem $LCP_{1,2}$ -Algorithmus eine Verringerung der *dist_sum*-Kenngrößen erzielt werden. Das bestärkt die Aussage, dass eine höhere Punktdichte einen positiven Effekt auf die $LCP_{1,2}$ -Methode hat. Zudem ändert sich der Parameter e , mit dem die minimalen Kenngrößen erreicht werden konnten

von 0.1 auf 0.0. Die minimalen Kenngrößen sind in der Tabelle 5.23 dennoch bei der *Hoschek*-Methode zu finden.

Um einen direkten Vergleich zwischen den Tabellen 5.20 und 5.23 herstellen zu können wird für jede Approximationsmethode der minimale *dist_sum*-Mittelwert durch Anzahl der Beobachtungen geteilt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.24 gezeigt, wobei zu beachten ist, dass die Einheit in Millimeter beträgt. Deutliche Verbesserungen sind bei der *G.-M.*- und *LCP_{1,2}*-Methode durch die Hinzunahme von Beobachtungen festzustellen. Der auf die Anzahl der Beobachtungen aufgeteilte Mittelwert reduziert sich bei der *LCP_{1,2}*-Methode gar um 90%. Die Hinzunahme von Beobachtungen resultiert für die *Hoschek*-Methode zwar in einer Zunahme des auf die Anzahl von Beobachtungen aufgeteilten Mittelwerts um etwa das Zweieinhalbfache, dennoch bleibt sie als beste Methode in Bezug auf den Vergleichswert *dist_sum* bestehen. Es lässt aber daraus schließen, dass die Punktdichte ebenso einen wesentlichen Einfluss auf das Approximationsergebnis der *Hoschek*-Methode hat.

		dist_sum-Werte in [m]				
<i>e</i> – Para.		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
Mittelw.	G.-M.	105.10	113.74	153.12	210.15	278.21
	<i>LCP_{1,2}</i>	0.735	1.180	2.700	5.572	10.524
	Hoschek	0.454	0.564	0.839	1.164	1.524
Median	G.-M.	104.16	126.67	152.80	220.47	292.65
	<i>LCP_{1,2}</i>	0.666	0.908	2.361	4.821	9.852
	Hoschek	0.436	0.521	0.773	1.079	1.527
Stdabw. <i>s</i>	G.-M.	41.66	43.30	37.02	31.44	27.70
	<i>LCP_{1,2}</i>	0.403	0.967	1.718	2.558	3.416
	Hoschek	0.208	0.234	0.237	0.228	0.239

Tab. 5.23: Vergleich mittels *dist_sum* von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 4* realisiert mit unterschiedlichen *e*-Parametern (mit 2500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)

Die Tabelle 5.25 stellt die statistischen Kenngrößen der Approximationsmethoden des Vergleichswertes ϑ dar, wobei der Faktor 10^{-4} zu beachten ist. Ein Vergleich mit den minimalen Kenngrößen aus Tabelle 5.21 zeigt, dass auch für ϑ -Kenngrößen, berechnet mit der *LCP_{1,2}*-Methode, durch die Hinzunahme von Beobachtungen eine eindeutige Verbesserung erzielt werden konnte. Der minimale Mittelwert verringert sich um etwa 75%. Im Gegensatz dazu vergrößern sich die ϑ -Kenngrößen für die *Hoschek*-Methode wesentlich, der minimale Mittelwert beträgt durch die Hinzunahme von Beobachtungen mehr als das Achtfache.

dist_sum-Werte in [mm]		
Approximationsmethode	500 Beob.	2500 Beob.
min. Mittelwerte aus	Tab. 5.20	Tab. 5.23
<i>G.-M.</i>	81.74	42.20
<i>LCP</i> _{1,2}	2.87	0.29
<i>Hoschek</i>	0.068	0.18

Tab. 5.24: Division der minimalen Mittelwerte durch die Anzahl an Beobachtungen der Realisierungen (*Kurve 4*)

Addiert man zu den Mittelwerten der beiden Methoden die jeweilige siebenfachen Standardabweichung ist dieser Wert geringer als 0.001. Somit liegen beinahe 100% aller ϑ -Mittelwerte der beiden Methoden unter dieser Schranke.

Auffallend ist, dass sich die minimalen Kenngrößen der Vergleichsgrößen *dist_sum* (siehe Tabelle 5.23) und ϑ (siehe Tab. 5.25) nicht bei den selben Methoden befinden. Das bedeutet, dass sich die verbesserten Beobachtungen der *Hoschek*-Methode der *Soll*-Kurve besser annähern und somit eine geringere Summe der Normalabstände bilden. Jedoch werden die verbesserten Beobachtungen durch die geometrische Verbesserung der *Hoschek*-Methode an manchen Stellen nicht optimal zu dem unverrauschten Punkt auf der *Soll*-Kurve angenähert. Dies stellt die Abbildung 5.13 dar.

ϑ -Werte in [] - Faktor 10^{-4}						
e-Param.		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
Mittelw.	<i>LCP</i> _{1,2}	0.502	0.918	2.068	4.224	7.792
	<i>Hoschek</i>	1.727	2.119	3.362	4.833	6.242
Median	<i>LCP</i> _{1,2}	0.348	0.692	1.889	3.736	7.024
	<i>Hoschek</i>	1.638	1.991	3.220	4.662	6.163
Stdabw. s	<i>LCP</i> _{1,2}	0.394	0.859	1.450	1.994	2.557
	<i>Hoschek</i>	1.116	1.159	1.179	1.164	1.137

Tab. 5.25: Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 4* realisiert mit unterschiedlichen Parameter *e* (mit 2500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)

In Abbildung 5.13b liegen die verbesserten Beobachtungen der *Hoschek*-Methode beinahe auf der *Soll*-Kurve, jedoch sind sie weiter von dem *Soll*-Kurvenpunkt entfernt und besitzen deshalb eine größere Differenz bezüglich der nominalen Kurvenparameter. Hingegen sind die verbesserten Beobachtungen des *LCP*_{1,2} in Abbildung 5.13a etwas weiter von der *Soll*-Kurve entfernt, was in eine größere Entfernung zu dieser resultiert und folglich

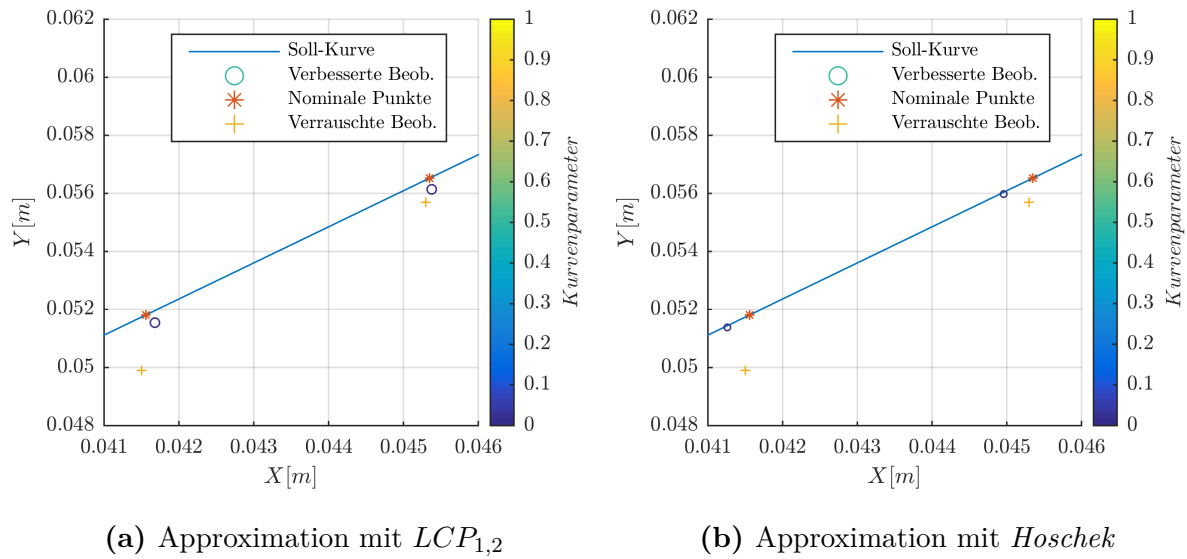


Abb. 5.13: Vergleich der verbesserten Beobachtungen einer Realisierung mit 2500 Beobachtungen in Bezug auf die *Soll-Kurve*, der verrauschten Beobachtungen und der Punkte auf der *Soll-Kurve* (*Kurve 4*)

den Vergleichsparameter $dist_sum$ negativ beeinflusst. Jedoch liegen die verbesserten Beobachtungen näher bei den unverrauschten Kurvenpunkten und liefern somit kleiner Differenzen zwischen den geschätzten und den nominalen Kurvenparametern.

Dies bietet Anlass den Vergleichswert $dist_sum$ kritisch zu hinterfragen und zu bedenken ob ein Vergleich der verbesserten Beobachtungen mit den nominalen Kurvenpunkten in diesem Fall einen aussagekräftigen Vergleich möglich macht. Eine gemeinsame Interpretation der beiden Vergleichswerte $dist_sum$ und ϑ ist daher sinnvoll, um den gezeigten Effekt aufdecken zu können

Abschließend soll auch noch die Rechenzeit der beiden Methoden erwähnt werden, die für eine einzelne Approximation für die *Kurve 4* mit 2500 Beobachtungen benötigt wird. Die $LCP_{1,2}$ -Methode braucht rund 7 min, hingegen beträgt die Dauer bei der *Hoschek*-Methode rund 120 min. Dieser deutliche Unterschied der Berechnungsdauer spricht für den LCP -Algorithmus bei größeren Datenmengen.

5.3.3 Gegenüberstellung der statistischen Untersuchungen aller Kurven

In diesem Kapitel werden noch einmal die besten statistischen Kenngrößen der Vergleichsparameter $dist_sum$ (siehe Kap. 5.1.1) und ϑ (siehe Kap. 5.1.2) aller untersuchten Kurven und deren Anzahl von Beobachtungen vergleichend gegenübergestellt. In Erinnerung zu rufen ist an dieser Stelle, dass die Kurven unterschiedliche Längen besitzen und deshalb bei gleicher Anzahl von verrauschten Beobachtungen einen Unterschied in ihrer Punktdichte aufweisen. Der Vergleichswert $dist_sum$ berechnet die Summe der Normalabstände der

verbesserten Beobachtungen zur *Soll*-Kurve. Dies muss bei einem Vergleich der selben Kurve mit unterschiedlicher Anzahl von Beobachtungen berücksichtigt werden.

Die Tabelle 5.26 beinhaltet die Spalten aller *dist_sum*-Tabellen, in welchen der minimale Mittelwert aller verwendeten Approximationsmethoden auftritt. Es ist ersichtlich, dass alle minimalen Kenngrößen bei einem Parameter $e = 0$, welcher die Parametrisierungsmethode der Näherungswerte definiert, auftreten. Diese Parametrisierungsmethode wird *uniforme*-Methode genannt (siehe Kap. 2.1.4.1) und liefert gute Werte, wenn die Beobachtungen gleichabständig sind. Die hohe Punktdichte und die gewählte Diskretisierungsmethode sind Argumente dafür, dass mit der *uniformen*-Parametrisierungsmethode gute Näherungswerte erzielt werden können.

Schon während der Untersuchung der frei wählbaren Parameter ε (siehe Kap. 5.2.2) und d_k (siehe Kap. 5.2.3) kann festgestellt werden, dass die $LCP_{1,3}$ -Methode keine Verbesserung der Approximationsergebnisse in Bezug zum $LCP_{1,2}$ -Verfahren liefert. Dies bestätigt sich auch bei dem statistischen Vergleich aller Kurven, weshalb sie bei *Kurve 4* nicht mehr beachtet wird.

Generell schneiden die iterativen Approximationsmethoden bei allen Kurven deutliche besser ab im Vergleich mit dem als Standardmethode bekannten *G.-M.*-Verfahren (siehe Kap. 2.1.4.3). Für *Kurve 1* und *Kurve 2* liefert die $LCP_{1,2}$ -Methode die besten *dist_sum*-Mittelwerte. Beide Kurven besitzen im Vergleich zu den Kurven 3 und 4 eine geringere Länge und weisen deshalb eine größere Punktdichte auf. Die Auswirkung der Hinzunahme an Beobachtungen ist am Beispiel der *Kurve 3* gut zu erkennen. Diese bewirkt eine deutliche Verbesserung des *dist_sum*-Mittelwerts der beiden Methoden $LCP_{1,2}$ und $LCP_{1,3}$ obwohl Beobachtungen hinzugefügt wurden. Derselbe Effekt tritt auch bei *Kurve 4* ein. Eine Division des Mittelwerts durch die Anzahl der Beobachtungen stellt den Effekt der Hinzunahme von Beobachtungen noch deutlicher dar, die Werte sind in Tabelle 5.16 und Tabelle 5.24 ersichtlich.

Das auffallend gute Abschneiden der *Kurve 4* mit 500 Beobachtungen mit der *Hoschek*-Methode kann möglicherweise auf das Konvergenzverhalten und die Punktdichte zurückgeführt werden. In Kapitel 5.3.2.4 wird darauf tiefer eingegangen.

Allgemein sind die Standardabweichungen in Relation zu den Mittelwerten sehr groß, dies lässt auf stark streuende Ergebnisse der Approximationen schließen. Da sich die Mediane meist stark von den Mittelwerten unterscheiden, beinhalten die Approximationsergebnisse demnach Ausreißer. Eine Untersuchung auf signifikante Unterschiede der Mittelwerte ist aufgrund der großen Standardabweichungen nicht aussagekräftig und deshalb wird darauf in dieser Arbeit verzichtet.

		dist_sum-Werte in [m]					
<i>e</i> – Para.		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Kurve		1	2	3	3	4	4
# Beob.		500	500	500	1000	500	2500
Mittelwert	G.-M.	4.427	2.139	36.54	51.92	40.87	105.10
	$LCP_{1,2}$	0.218	0.115	1.907	1.336	1.434	0.735
	$LCP_{1,3}$	0.487	0.194	2.024	1.513	-	-
	Hoschek	0.468	0.294	1.721	2.057	0.034	0.454
Median	G.-M.	4.102	2.036	32.90	47.10	40.51	104.16
	$LCP_{1,2}$	0.168	0.081	1.094	0.859	1.062	0.666
	$LCP_{1,3}$	0.437	0.166	1.187	0.871	-	-
	Hoschek	0.430	0.268	1.377	2.283	0.038	0.436
Stdabw. <i>s</i>	G.-M.	1.642	0.789	18.36	27.12	30.44	41.66
	$LCP_{1,2}$	0.177	0.146	2.171	1.323	1.155	0.403
	$LCP_{1,3}$	0.288	0.138	2.285	1.332	-	-
	Hoschek	0.269	0.148	1.321	1.547	0.01	0.208

Tab. 5.26: Vergleich der Spalten mit den minimalen $dist_sum$ -Mittelwerten aller untersuchten Kurven und deren Diskretisierungen

Aufgrund der Erkenntnisse aus Abbildung 5.13, sollte der Vergleichswert $dist_sum$ immer in Verbindung mit dem Vergleichswert ϑ interpretiert werden.

Die Tabelle 5.27 beinhaltet die Spalten aller ϑ -Tabellen, in welchen der minimale Mittelwert aller verwendeten Approximationsmethoden auftritt. Deutlich erkennbar ist, dass das $LCP_{1,2}$ -Verfahren beim Vergleich der mittleren absoluten Differenzen der geschätzten zu deren nominalen Kurvenparameter bei beinahe allen Realisierungen die besten Werte liefert. Auch wenn bei der *Kurve 4* mit 500 Beobachtungen die *Hoschek*-Methode die minimalen Kenngrößen aufweist, liefert die $LCP_{1,2}$ -Methode im Vergleich zu den Ergebnissen der anderen Kurven einen sehr kleinen und daher guten Wert. Zurückzuführen ist dieses Verhalten möglicherweise auf die Form der *Kurve 4*.

Die Standardabweichungen aller Realisierungen sind im Vergleich zu deren Mittelwerten auch für den Vergleichswert ϑ sehr groß, was eine Vergleich der Mittelwerte auf signifikante Unterschiede nicht aussagekräftig macht.

Allgemein kann durch die Hinzunahme von Beobachtungen eine deutliche Verbesserung der ϑ -Kenngrößen gewonnen werden.

		ϑ -Werte in []					
<i>e</i> – Para.		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Kurve		1	2	3	3	4	4
# Beob.		500	500	500	1000	500	2500
Mittelw.	$LCP_{1,2}$	0.004	0.008	0.003	0.0011	$4.67 \cdot 10^{-4}$	$0.502 \cdot 10^{-4}$
	$LCP_{1,3}$	0.013	0.033	0.009	0.0012	-	-
	Hoschek	0.011	0.010	0.004	0.0029	$0.414 \cdot 10^{-4}$	$1.727 \cdot 10^{-4}$
Median	$LCP_{1,2}$	0.003	0.005	0.001	0.0006	$3.45 \cdot 10^{-4}$	$0.348 \cdot 10^{-4}$
	$LCP_{1,3}$	0.010	0.026	0.005	0.0007	-	-
	Hoschek	0.010	0.009	0.003	0.0028	$0.126 \cdot 10^{-4}$	$1.638 \cdot 10^{-4}$
Stdabw. <i>s</i>	$LCP_{1,2}$	0.005	0.008	0.003	0.0012	$3.85 \cdot 10^{-4}$	$0.394 \cdot 10^{-4}$
	$LCP_{1,3}$	0.009	0.009	0.010	0.0013	-	-
	Hoschek	0.006	0.030	0.003	0.0018	$0.488 \cdot 10^{-4}$	$1.116 \cdot 10^{-4}$

Tab. 5.27: Vergleich der Spalten mit den minimalen ϑ -Mittelwerten aller untersuchten Kurven und deren Diskretisierungen

Zusammenfassend kann unter Berücksichtigung der Vergleichswerte $dist_sum$ und ϑ geschlossen werden, dass mit der Verwendung der $LCP_{1,2}$ -Methode sich die verbesserten Beobachtungen zwar nicht für alle Kurven der *Soll*-Kurve am besten annähern, jedoch gelingt es mit der $LCP_{1,2}$ am häufigsten die geschätzten Kurvenparameter den nominalen Kurvenparameter am ehesten anzugleichen.

Zudem kann die Aussage getroffen werden, dass durch Hinzunahme von Beobachtungen eine Verbesserung der Vergleichswerte für die $LCP_{1,2}$ -Methode erzielt werden kann. Unter realen Bedingungen, z.B.: durch eine Messung mit einem terrestrischen Laserscanner, werden sehr viele Punkte generiert, was für den $LCP_{1,2}$ -Algorithmus spricht.

5.4 Veränderung der Diskretisierungsmethode

In Kapitel 5.2 wird die Gewinnung von verrauschten Datenpunkten erläutert. Die daraus entstandene Punktmenge besitzt jedoch nicht die Eigenschaften einer Aufnahme mit einem terrestrischen Laserscanner. Ein Ziel ist allerdings, den neu entwickelten Algorithmus auf mit in der Praxis verwendeten Punktwolken bzw. Punktprofilen anzuwenden. Eine durch mehrere Beobachtungen abgetastete Kurve kann hier als profilhafter Laserscan gedeutet werden.

Terrestrische Laserscanner haben die Eigenschaft mit einem konstanten Winkel eine Oberfläche abzutasten und spannen somit ein gleichabständiges horizontales und vertikales Winkelraster auf (Holst, 2019). Dies hat zur Folge, dass die Position sowie die Orientierung

von Kurvenabschnitten in Bezug auf den Standpunkt des Scanners, Einfluss auf die Punktdichte des Kurvenabschnittes haben. Abbildung 5.14 soll dieses Verhalten visuell darstellen. Hier wird ein Standpunkt in einer Entfernung von etwa 10 m mittig vom Objekt gewählt und die Kurve mit einem konstanten Winkel abgetastet. Die Strahlen sollen einen Beobachtungsstrahl symbolisieren. Gut erkennbar ist, dass die Punktdichte bei starker Neigung ($X = 5$) deutlich abnimmt.

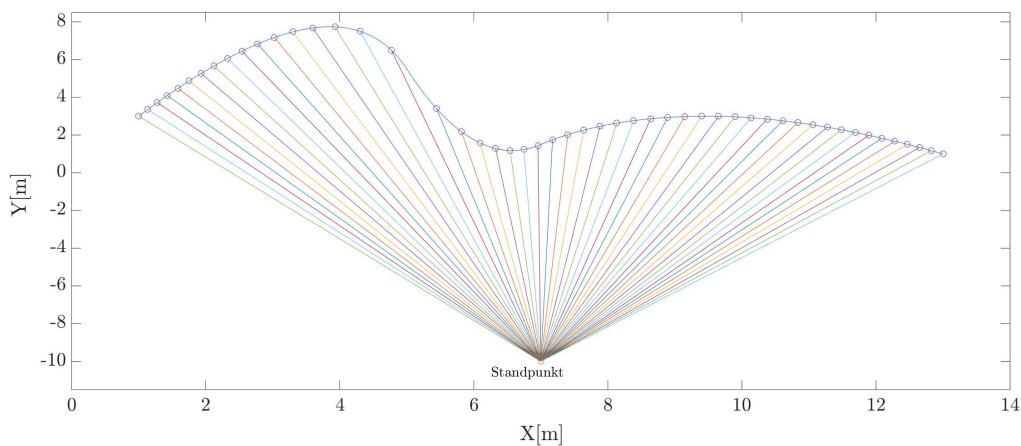


Abb. 5.14: Einfluss der Diskretisierungsmethode in Anlehnung an den TLS-Messvorgang

Um den neu entwickelten Algorithmus auf Kurven mit derartigen Realisierungen zu untersuchen, werden angenäherte *TLS*-Datensätze für die Kurven generiert. Dabei wird ein Abtastwinkel von 10 mgon verwendet und der Standpunkt mittig in 10 m Entfernung platziert. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Kurven folgende Anzahl an Beobachtungen, welche in Tabelle 5.28 angeführt sind.

Kurve	Anzahl von Beobachtungen	Approximierte Kurvenlänge [m]
<i>Kurve 1</i>	1270	5.202
<i>Kurve 2</i>	1852	3.448
<i>Kurve 3</i>	5933	20.824
<i>Kurve 4</i>	8744	24.834

Tab. 5.28: Anzahl der Beobachtungen mit einem Abtastwinkel von 10 mgon und einer Entfernung des Standpunkts von etwa 10 m

Zur Gewinnung von Punktprofilen werden die *Soll*-Kurven mit einem Beobachtungsstrahl geschnitten und ein Kurvenpunkt auf dieser berechnet sowie der dazugehörige Kurvenparameter gespeichert. Um einen Messvorgang zu simulieren, werden die Kurvenpunkte anschließend koordinatenweise mit einem normalverteilten unkorrelierten Rauschen ($\sigma_x = 3 \text{ mm}$) belegt.

Es wird nun der $LCP_{1,2}$ -Algorithmus mit einem Parameter $\varepsilon = 0.9$ auf die verrauschten Beobachtungen zur Approximation einer Kurve angewandt. Die Wahl der $LCP_{1,2}$ -Methode mit dem dazugehörige Parameter $\varepsilon = 0.9$, wird aufgrund der Erkenntnisse der vorherigen Kapitel als bester Ansatz bewertet und daher ausgewählt. Die dabei auftretende Problematik wird folgend anhand der *Kurve 1* erläutert.

Zum Vergleich werden auch Realisierungen (D_2) von verrauschten Beobachtungen der gleichen Anzahl (siehe Tab. 5.28) mit der vorherigen Diskretisierungsmethode hergestellt und mit der $LCP_{1,2}$ -Methode approximiert. Um den Einfluss der Näherungswerte der Kurvenparameter feststellen zu können, wird auch hier der Parameter e für jede Realisierung variiert. Die *TLS*-Realisierungen werden mit D_1 zusammengefasst. In Tabelle 5.29 werden die minimalen *dist_sum*-Mittelwerte von 50 Realisierungen der beiden Diskretisierungsmethoden verglichen. Eine Gegenüberstellung statistischer Kenngrößen ist streng genommen nicht aussagekräftig, da für eine Realisierung eines *TLS*-Messvorgangs immer von den gleichen nominalen Kurvenpunkten ausgegangen wird. Diese Realisierungen unterscheiden sich demnach nur aufgrund des Rauschens einer Beobachtung.

Der Vergleich in Tabelle 5.29 soll ein Gefühl der Dimension des Unterschiedes geben. Um den Einfluss des Parameters e feststellen zu können, sind in Tabelle 5.29 Mittelwerte ausgewählter Parameter e aufgelistet. Die minimalen *dist_sum*-Mittelwerte sind für beide Diskretisierungsmethoden bei einem Parameter $e = 0$ zu finden.

dist_sum-Mittelwerte in [m]		
	D_1	D_2
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.0$	13.687	0.220
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.3$	15.089	3.859
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.5$	18.228	8.239
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.7$	23.158	17.484
$LCP_{1,2}$ mit $e = 1.0$	32.047	53.443

Tab. 5.29: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e berechnet mit $LCP_{1,2}$ -Methode (*Kurve 1*)

Das Ergebnis in Tabelle 5.29 zeigt aufgrund des sehr kleinen Mittelwerts von D_2 bei einem Parameter $e = 0$, dass die $LCP_{1,2}$ -Methode mit einer solchen Anzahl von Beobachtungen gut umgehen kann. Jedoch spielt offensichtlich die Anordnung der Beobachtungen eine wesentliche Rolle, was der große *dist_sum*-Mittelwert von D_1 verdeutlicht. Je größer der Parameter e wird, desto größer sind auch die ermittelten Mittelwerte.

Der Grund für dieses Ergebnis lässt sich in den Näherungswerten der Kurvenparameter der jeweiligen Diskretisierungsmethode finden, da die weiteren Parameter der B-Spline-Kurve wie etwa der Knotenvektor, der Grad der Kurve oder die Anzahl der

Kontrollpunkte bereits a priori durch die Angaben der *Soll*-Kurve definiert sind. Bildet man einen Vergleichsparameter für die nominalen Kurvenparameter und die verwendeten Näherungswerte der Kurvenparameter für eine Approximation nach Kapitel 5.1.2 und berechnet den Mittelwert kann ein deutlicher Unterschied in Tabelle 5.30 zwischen den beiden Diskretisierungsmethoden festgestellt werden. Dieser Vergleichsparameter wird mit $\bar{\vartheta}$ bezeichnet. Tabelle 5.30 und die folgenden Tabellen zeigen beispielhaft die Ergebnisse mit fünf ausgewählten Parametern e .

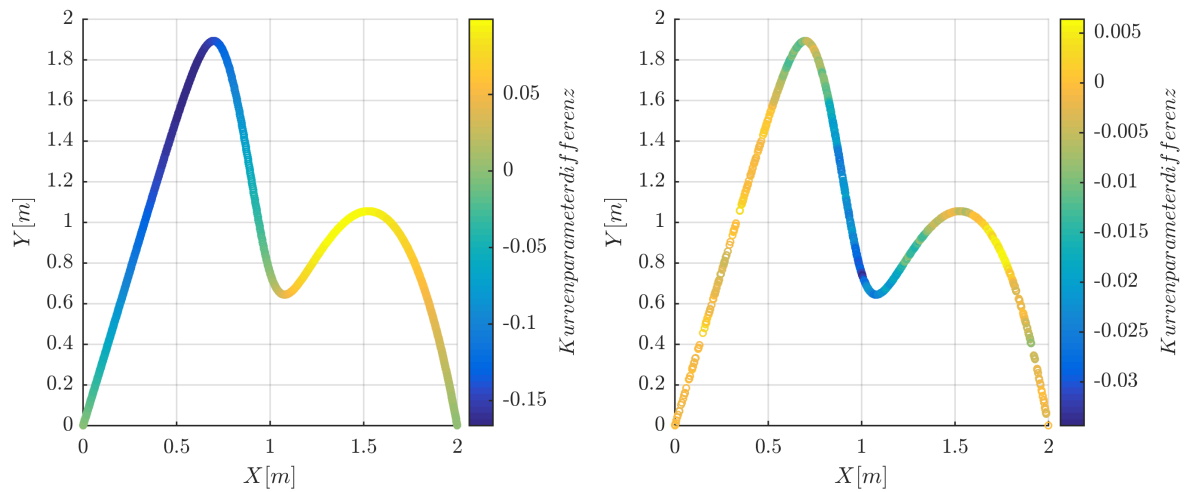
Es bestätigt sich in Bezug auf die Tabelle 5.29, dass die Genauigkeit der Näherungswerte zu den nominalen Kurvenparametern einen wesentlichen Einfluss auf das Approximationsergebnis hat. Die Standardparametrisierungsmethode mit dem Parameter $e = 0$ findet der Tabelle 5.30 nach die besten Näherungswerte für die beiden Diskretisierungsmethoden, mit dem Unterschied, dass der Mittelwert für die *TLS*-Realisierungen D_1 etwa achtmal so groß ist.

	$\bar{\vartheta}$ -Mittelwerte in []	
	D_1	D_2
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.0$	0.0830	0.0109
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.3$	0.0847	0.0277
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.5$	0.0868	0.0412
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.7$	0.0871	0.0636
$LCP_{1,2}$ mit $e = 1.0$	0.0883	0.0930

Tab. 5.30: Vergleich der $\bar{\vartheta}$ -Mittelwerte unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e (*Kurve 1*)

Die Abbildung 5.15 soll zeigen, in welchen Regionen der Kurve große Differenzen zwischen den Näherungswerten und deren nominalen Werte liegen. Die Kurvenparameterdifferenzen werden auf den nominalen Kurvenpunkten der jeweiligen Diskretisierung abgebildet. Ein Unterschied der Verteilung der Kurvenpunkte ist visuell vor allem an den Rändern zu erkennen. Zu beachten sind die unterschiedlich skalierten Farblegenden der beiden Abbildungen 5.15a und 5.15b. Die Differenzen werden mittels $u_n - u_0$ berechnet, wobei u_n die nominalen und u_0 die Näherungswerte der Kurvenparameter sind. Negative Differenzen (blaue Farbgebung) entstehen demnach, wenn die Näherungswerte größer sind als die nominalen Werte. In Abbildung 5.15a überholen die Näherungswerte die nominalen Kurvenparameter wortwörtlich im Anfangsbereich der Kurve bis sich dieses Verhalten umdreht und am Ende der Kurve bei einer beinahe Differenz von 0 endet.

Abbildung 5.15a zeigt die größten Differenzen im mittleren Bereich der Kurve, wo es visuell eine hohe Punktdichte gibt.

(a) Diskretisierung in Anlehnung an *TLS*

(b) Herkömmliche Diskretisierung

Abb. 5.15: Vergleich der Differenzen der nominalen Kurvenparameter mit den Näherungswerten mit einem Parameter $e = 0$ für die beiden verwendeten Diskretisierungsmethoden

Die Näherungswerte der Kurvenparameter spielen auch eine wesentliche Rolle bei der Gewinnung der Näherungswerte der Kontrollpunkte, welche mit der *G.-M.*-Methode geschätzt werden. Diese fließen direkt in die Berechnung der B-Spline-Basisfunktionen ein und haben somit einen direkten Effekt auf das Ergebnis der Kurven-Approximation. Dies soll die Tabelle 5.31 mit den *dist_sum*-Mittelwerten der *G.-M.*-Methode zeigen.

dist_sum-Mittelwerte in [m]		
	D_1	D_2
<i>G.-M.</i> mit $e = 0.0$	60.811	7.020
<i>G.-M.</i> mit $e = 0.3$	76.309	19.223
<i>G.-M.</i> mit $e = 0.5$	81.596	22.852
<i>G.-M.</i> mit $e = 0.7$	89.063	55.562
<i>G.-M.</i> mit $e = 1.0$	92.473	94.758

Tab. 5.31: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e berechnet mit der *G.-M.*-Methode (*Kurve 1*)

Ausschlaggebend für die Güte der *LCP*_{1,2}-Methode sind neben den Näherungswerten der Kurvenparameter auch die geschätzten Kontrollpunkte der *G.-M.*-Methode, die eben als Näherungswerte der Kontrollpunkte eingehen. Der Abstand der geschätzten Kontrollpunkte zu dem jeweiligen zugehörigen nominalen Kontrollpunkt soll die Genauigkeit der Kontrollpunktschätzung verifizieren. Die Summe dieser Abstände wird in der Tabelle 5.32 mit ψ bezeichnet.

ψ -Mittelwerte in [m]		
	D_1	D_2
G .- M . mit $e = 0.0$	3.867	0.616
G .- M . mit $e = 0.3$	3.970	1.303
G .- M . mit $e = 0.5$	4.026	1.962
G .- M . mit $e = 0.7$	4.222	3.396
G .- M . mit $e = 1.0$	4.568	5.044

Tab. 5.32: Vergleich der ψ -Mittelwerte (*Kurve 1*)

Der Vergleich mit Tabelle 5.30, zeigt dass die Genauigkeit der parametrisierten Beobachtungen auch eine wesentliche Rolle für die Güte des Ergebnisses der Kontrollpunktschätzung spielt. Gemeinsam mit den Ergebnissen aus Tabelle 5.30 belegen die Werte der Tabelle 5.32, dass die Näherungswerte für die Approximation mit dem $LCP_{1,2}$ für die Realisierungen der Diskretisierungsmethode in Anlehnung an den TLS -Messvorgang D_1 wesentlich schlechter bestimmt werden können. Diese ermittelten Näherungswerte führen anschließend zu den ermittelten $dist_sum$ -Werten in Tabelle 5.29.

Das Verhalten der geschätzten Kontrollpunkte mit der G .- M .-Methode (Parameter $e = 0$) für Realisierungen in Anlehnung an einen TLS -Messvorgang ist in Abbildung 5.16 vergleichend mit den nominalen Kontrollpunkten dargestellt. Die daraus approximierte Kurve wird ebenso der *Soll*-Kurve gegenübergestellt. Vor allem im linken Bereich der Abbildung sind wesentliche Unterschiede der Kontrollpunkte sowie der daraus resultierende Kurve ersichtlich. Vor allem der geschätzte Kontrollpunkte bei $[0.18, -0.48]$ weist eine große Diskrepanz zu seinem zugehörigen nominalen Kontrollpunkt auf.

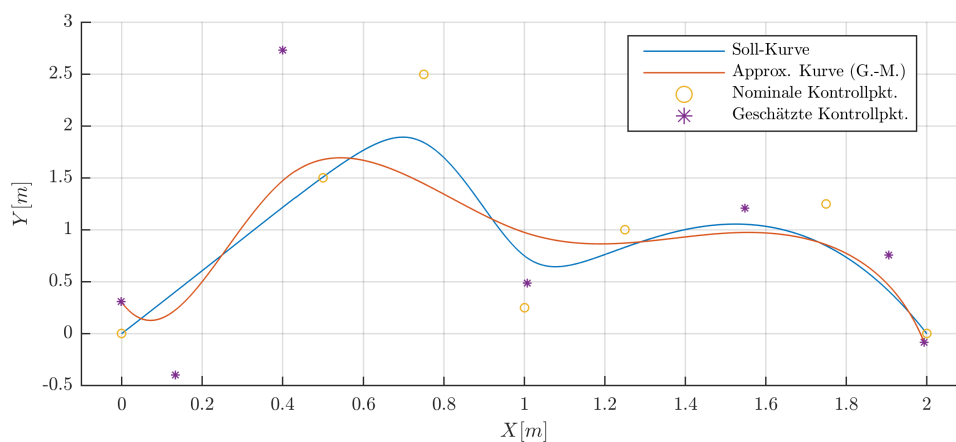


Abb. 5.16: Vergleich der *Soll*-Kurve mit der approximierten Kurve mit G .- M .-Methode und den dazugehörigen nominalen und geschätzten Kontrollpunkten (*Kurve 1*)

Es ist daher nicht verwunderlich, dass der $LCP_{1,2}$ -Algorithmus mit derartigen Näherungswerten für die Kontrollpunkte zu keinem guten Approximationsergebnis führt.

Zudem die Überlegung den Knotenvektor nicht mit den nominalen Werten festzusetzen sondern mit dem Algorithmus von Piegl und Tiller (1995) (siehe Kap. 2.1.4.2) zu berechnen, führte zu keiner Verbesserung.

Die Diskretisierungsmethode in Anlehnung an den TLS -Messvorgang zeigt, dass für die gemeinsame Schätzung der Kontrollpunkte und Kurvenparameter hinreichend gute Näherungswerte der zu schätzenden Parameter benötigt werden, um ein gutes Approximationsergebnis zu erhalten. Vor allem die Näherungswerte der Kurvenparameter spielen eine wichtige Rolle, da sie auch für die Gewinnung der Näherungswerte der Kontrollpunkte benötigt werden und folglich dessen Güte beeinflusst.

Die getroffenen Aussagen und Erkenntnisse sind ebenso für die *Kurve 2* gültig. Zum Vergleich ist in Kapitel A.5 eine Tabelle nach Tabelle 5.29 gegeben.

Werden auf der *Kurven 3* und *4* mittels der TLS -Diskretisierung Beobachtungen generiert, so wirken sich die gewonnenen Näherungswerte der Kurvenparameter derart negativ auf die Schätzung der Kontrollpunkte aus, dass sich keine realistischen Ergebnisse mit dem $LCP_{1,2}$ zeigen.

Die Abbildung 5.17 gibt einen visuellen Vergleich anhand der *Kurve 4* der geschätzten Kontrollpunkte mittels der $G.-M.$ -Methode mit den nominalen Kontrollpunkten wieder. Die Diskrepanzen liegen in der Größenordnung von einem Meter, welche unrealistischen Ergebnisse hervorrufen.

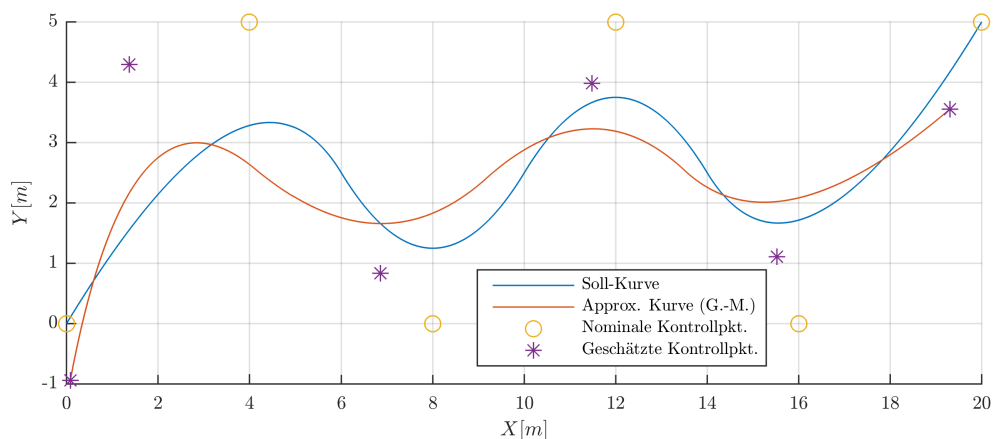


Abb. 5.17: Vergleich der *Soll-Kurve* mit der approximierten Kurve mit $G.-M.$ -Methode und den dazugehörigen nominalen und geschätzten Kontrollpunkten (*Kurve 4*)

6 Fazit und Ausblick

B-Spline-Flächen haben sich als mächtiges Werkzeug zur Approximation von Punktwolken etabliert. Eine Herausforderung dabei ist passende Flächenparameter für die Beobachtungen der Punktwolke zu finden. Diese Parameter spielen jedoch eine wesentliche Rolle in Bezug auf den Vergleich zweier B-Spline-Flächen, welche die Problematik des Datums von B-Spline-Flächen aufzeigen. Nach Harmening und Neuner (2017) ist ein Vergleich von B-Spline-Objekten auf Basis derer Kontrollpunkte nur dann möglich, wenn sie auf einer einheitlichen Parametrisierung beruhen.

Ziel dieser Arbeit war es, basierend auf der mathematisch einfacheren B-Spline-Kurve, eine gemeinsame Ausgleichung der Kontrollpunkte und Kurvenparameter zur Bestimmung von vergleichbaren B-Spline-Kurven zu entwickeln und zu untersuchen. Da die Kurvenparameter nicht linear in dem funktionalen Modell der B-Spline-Kurve vorkommen, ist eine Linearisierung für eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen durchzuführen (Niemeier, 2008). Folgend wird ebenso eine Bestimmung von Näherungswerten der zu schätzenden Parameter nötig.

Die Näherungswerte der Kontrollpunkte werden aus einer linearen Kontrollpunktschätzung (siehe Kap. 2.1.4.3), die der Kurvenparameter aus herkömmlichen Parametrisierungsmethoden (siehe Kap. 2.1.4.1) gewonnen.

In dieser Arbeit wird die Erkenntnis gewonnen, dass die Kurvenparameter bei einer gemeinsamen Ausgleichung ihren Definitionsbereich von $[0, 1]$ verlassen und die vorgegebene strenge Monotonie dieser nicht einhalten. Deshalb ist es notwendig Restriktionen für die Kurvenparameter einzuführen. Diese Restriktionen resultieren in Ungleichungsrestriktionen, welche die aufgetretenen Problematiken beheben. Die Ausgleichung mit Ungleichungsrestriktionen kann in ein lineares Komplementaritätsproblem umgeformt und mit dessen Hilfe gelöst werden.

In dieser Arbeit werden drei mögliche Ansätze für die Ungleichungsrestriktionen formuliert, die das Beibehalten der Randpunkte, das Beibehalten der Monotonie von Kurvenparametern und das Beibehalten der ungefähren Differenz von aufeinander folgenden Kurvenparametern sicher stellen sollen. Ersterer wurde jeweils mit den beiden weiteren kombiniert. Die zwei entstandenen Methoden beinhalten einen frei wählbaren Parameter, welcher in dieser Arbeit aufgrund empirischer Untersuchungen festgelegt wird.

Die beiden Methoden des neu entwickelte Algorithmus werden anschließend auf vier simulierte Datensätze zu Verifikation angewandt und mit dem Standardverfahren der Schätzung von B-Spline-Kurven (siehe Kap. 2.1.4.3) und der Methode der intrinsischen Parametrisierung Kapitel 2.1.5 verglichen. Als Vergleichsparameter dienen einerseits die Summe der Normabstände der verbesserten Beobachtungen zu der *Soll*-Kurve und andererseits die mittlere Abweichung der geschätzten zu den zugehörigen nominalen

Kurvenparameter. Um eine statistische Aussage treffen zu können werden mehrere Realisierungen einer Kurve und anschließend die statistischen Kenngrößen gebildet.

Der Vergleich der beiden Methoden des neu entwickelten Algorithmus zeigt bessere Ergebnisse für die Kurven-Approximation mit den beiden Ungleichungsrestriktionen des Beibehaltens der Randpunkte und der Monotonie der Kurvenparameter.

Der neue Algorithmus liefert auch eine deutliche Verbesserung gegenüber dem Standardverfahren. Meist erweist sich der neu entwickelte Algorithmus auch besser als die Methode der intrinsischen Parametrisierung, vor allem was die Güte der geschätzten Kurvenparameter betrifft. Eine Untersuchung auf signifikante Unterschiede der Mittelwerte der Vergleichsparameter ist jedoch nicht sinnvoll, da allgemein die Standardabweichungen der Vergleichswerte in Bezug auf deren Mittelwert für alle untersuchten Kurven sehr groß sind. Dies weist auf eine starke Streuung der Approximationsergebnisse hin.

Eine aussagekräftige Methode der Signifikanzbewertung zu bestimmen wäre ein weiterführender Gedanke, um die Methoden nicht nur auf Basis von absoluten Werten zu vergleichen. Ein erster Schritt wäre eine Untersuchung der Approximationsergebnisse mit Hilfe der bekannten 3σ -Regel um Ausreißer feststellen zu können.

Im Zuge dieser Arbeit kann auch die Erkenntnis gewonnen werden, dass sich durch Hinzunahme von Beobachtungen das Ergebnis einer Kurven-Approximation mit dem neuen Algorithmus deutlich verbessert. Die kürzere Rechenzeit durch Verwendung des neuen Algorithmus verglichen mit der der intrinsischen Parametrisierung zeigt einen weiteren Vorteil.

Die Änderung der Diskretisierungsmethode in Anlehnung an einen *TLS*-Messvorgang bestärkt die Annahme, dass die Güte der Näherungswerte der Kontrollpunkte und Kurvenparameter wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis einer Approximation mit dem neuen Approximationsverfahren hat. Um für einen *TLS*-Messvorgang gute Approximationsergebnisse zu erzielen, bedarf es wesentlich besserer Näherungswerte der zu schätzenden Parameter. Ziel weiterer Forschung kann das Gewinnen genauerer Näherungswerte sein.

Mit den Erkenntnissen dieser Arbeit kann der neu entwickelte Algorithmus der gemeinsamen Schätzung der Kontrollpunkte und Kurvenparameter als geeignetes Approximationsverfahren deklariert werden. Zusätzlich ist es durch den neuen Algorithmus möglich, empirische Kovarianzwerte aller geschätzten Parameter zu gewinnen. Ein Vergleich gleicher Punkte von approximierten Kurven, welche über einen gleichen Kurvenparameter definiert sind, lässt sich somit mit einer stochastischen Vorinformation durchführen. Diese Voraussetzung kann als *weiche Lagerung* interpretiert werden (Niemeier, 2008). Diese Möglichkeit bietet die intrinsische Parametrisierung nicht, da die Kurvenparameter aufgrund geometrischer Verbesserungen ihre Zuschläge erhalten.

In dieser Arbeit wird die Annahme von unkorrelierten verrauschten Beobachtungen getroffen. In der Realität ist dies jedoch nicht gegeben, was das Interesse der Auswirkung

der Hinzunahme stochastischer Eigenschaften der Beobachtungen auf den neu entwickelten Algorithmus hervorhebt.

Schlussendlich muss es das Ziel sein den entwickelten Algorithmus auf die B-Spline-Flächen zu übertragen und mit den so gewonnen Flächen eine Deformationsanalyse durchzuführen.

Literatur

- Almqvist, A. (2020). *A pivoting algorithm solving linear complementarity problems*. Verfügbar 12. Februar 2020 unter <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/41485-a-pivoting-algorithm-solving-linear-complementarity-problems>
- Boyd, S. & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Bureick, J., Neuner, H., Harmening, C. & Neumann, I. (2016). Curve and surface approximation of 3D point clouds. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, 123(11–12), 315–327.
- Bureick, J., Alkhatib, H. & Neumann, I. (2019). Fast converging elitist genetic algorithm for knot adjustment in B-spline curve approximation. *Journal of Applied Geodesy*, 13(4), 317–328.
- Cottle, R. W. & Dantzig, G. B. (1968). Complementarity pivot theory of mathematical programming. *Linear Algebra, Appl.* 1, 103–125.
- Cottle, R. W. & Dantzig, G. B. (1970). A generalization of the linear complementarity problem. *Journal of Combinatorial Theory*, 8(1), 79–90.
- Cottle, R. W., Pang, J.-S. & Stone, R. E. (1992). *The linear complementarity problem* (Bd. 60). Siam.
- Cox, M. G. (1972). The numerical evaluation of B-splines. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 10(2), 134–149.
- De Boor, C. (1972). On calculating with B-splines. *Journal of Approximation theory*, 6(1), 50–62.
- Fletscher, R. (2000). *Practical methods of optimization* (Bd. 2.). Chichester, Wiley. -436 Seiten.
- Foley, T. A. & Nielson, G. M. (1989). Knot selection for parametric spline interpolation. In *Mathematical methods in computer aided geometric design* (261–CP4). Elsevier.
- Geiger, C. & Kanzowe, C. (2002). *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer Berlin Heidelberg.
- Grecher, M. (2016). *Methoden zur Knotenschätzung von B-Spline-Kurven für die Modellierung profilhafter Laserscanndaten*. Technische Universität Wien | Fakultät für Mathematik und Geoinformation | Department für Geodäsie und Geoinformation | E120.
- Harmening, C. & Neuner, H. (2015). A constraint-based parameterization technique for B-spline surfaces. *Journal of Applied Geodesy*, 9(3), 143–161.

- Harmening, C. & Neuner, H. (2016a). Choosing the optimal number of B-spline control points (Part 1: Methodology and approximation of curves). *Journal of Applied Geodesy*, 10(3), 139–157.
- Harmening, C. & Neuner, H. (2016b). Detecting rigid body movements from TLS-based areal deformation measurements. *Proceedings of the FIG Working Week 2016*.
- Harmening, C. & Neuner, H. (2017). Choosing the optimal number of B-spline control points (Part 2: Approximation of surfaces and applications). *Journal of Applied Geodesy*, 11(1), 43–52.
- Holst, C. (2019). Terrestrisches Laserscanning 2019: Von großen Chancen, großen Herausforderungen und großen Radioteleskopen. *ZfV-Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, (zfv 2/2019).
- Holst, C. & Kuhlmann, H. (2016). Challenges and present fields of action at laser scanner based deformation analyses. *Journal of applied geodesy*, 10(1), 17–25.
- Hoschek, J. (1988). Intrinsic parametrization for approximation. *Computer Aided Geometric Design*, 5(1), 27–31.
- Hoschek, J. & Lasser, D. (1989). *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B.G. Teubner.
- Jungnickel, D. (2014). *Optimierungsmethoden: Eine Einführung*. Springer-Verlag.
- Kauker, S. & Schwieger, V. (2017). A synthetic covariance matrix for monitoring by terrestrial laser scanning. *Journal of Applied Geodesy*, 11(2), 77–87.
- Koch, A. (2007). Semantische Integration von zweidimensionalen GIS-Daten und Digitalen Geländemodellen. *DKG Reihe C, Heft Nr. 601, Dissertation*.
- Koch, K.-R. (2004). Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. 4., bearbeitete Auflage. Bonn: <http://www.geod.uni-bonn.de/index.html> (ehemals Ferd. Dummlers Verlag).
- Kuhlmann, H. & Holst, C. (2017). Flächenhafte Abtastung mit Laserscanning. In Schwarz, W. (Hrsg.): *Ingenieurgeodäsie* (S. 167–212). Springer.
- Kuhn, H. W. & Tucker, A. W. (1951). Nonlinear programming, in (j. neyman, ed.) proceedings of the second berkeley symposium on mathematical statistics and probability. University of California Press, Berkeley.
- Lee, E. T. (1989). Choosing nodes in parametric curve interpolation. *Computer-Aided Design*, 21(6), 363–370.

- Lemke, C. E. (1968). On Complementary Pivot Theory, Mathematics of the Decision Sciences, Edited by GB Dantzig and AF Veinott, Jr. *American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1.*
- Lüthi, H.-J. (1976). *Komplementaritäts-und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie.* Springer.
- Ma, W. & Kruth, J.-P. (1995). Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces. *Computer-Aided Design, 27(9), 663–675.*
- Marti, K. & Gröger, D. (2013). *Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung.* Springer-Verlag.
- Murty, K. (1988). *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming* (Bd. Sigma series in applied mathematics). Heldermann.
- Neuner, H.-B. (2018). *Integrierte raum-zeitliche Modellierung von Deformationen, Abstract.* Verfügbar 12. März 2020 unter https://pf.fwf.ac.at/project_pdfs/pdf_abstracts/i3869d.pdf
- Neuner, H.-B. (2019). Vom Punkt zur Fläche - und zurück? [invited]. *Geonews, Software-Magazin für Vermessung und Geoinformation, 1(1), 6–7.* https://publik.tuwien.ac.at/files/publik_280622.pdf
- Niemeier, W. (2008). *Ausgleichsrechnung: Statistische Auswertemethoden.* Walter de Gruyter.
- Paffenholz, J.-A., Vennegeerts, H. & Kutterer, H. (2008). High frequency terrestrial laser scans for monitoring kinematic processes. *Proceedings of the INGEO.*
- Park, H. & Lee, J.-H. (2007). B-spline curve fitting based on adaptive curve refinement using dominant points. *Computer-Aided Design, 39(6), 439–451.*
- Piegl, L. A. & Tiller, W. (1995). *The NURBS book.* Springer.
- Razdan, A. (1999). Knot placement for B-spline curve approximation. *Tempe, AZ: Arizona State University, 1(7), 8.*
- Sarkar, B. & Menq, C.-H. (1991a). Parameter optimization in approximating curves and surfaces to measurement data. *Computer Aided Geometric Design, 8(4), 267–290.*
- Sarkar, B. & Menq, C.-H. (1991b). Smooth-surface approximation and reverse engineering. *Computer-Aided Design, 23(9), 623–628.*
- Saux, E. & Daniel, M. (2003). An improved Hoschek intrinsic parametrization. *Computer Aided Geometric Design, 20(8-9), 513–521.*

- Schäfer, U. (2008). *Das lineare Komplementaritätsproblem: Eine Einführung*. Springer-Verlag.
- Schmitt, C. & Neuner, H. (2015). Knot estimation on B-Spline curves. *Österreichische Zeitschrift für Vermessung & Geoinformation*, 103(2), 3.
- Wujanz, D. (2016). Terrestrial laser scanning for geodetic deformation monitoring. *DKG Reihe C, Heft Nr. 755, Dissertation*.
- Wunderlich, T., Raffl, L. & Wiedemann, W. (2019). Wiedererkennung–zwei Lösungen für die strenge Deformationsanalyse flächenhafter Beobachtungen der Ingenieurgeodäsie, In 20. Internationale Geodätische Woche Obergurgl 2019, “Arbeitskreis Rutschung, Setzung, Deformation”.
- Zhao, X., Kargoll, B., Omidalizarandi, M., Xu, X. & Alkhatib, H. (2018). Model selection for parametric surfaces approximating 3D point clouds for deformation analysis. *Remote Sensing*, 10(4), 634.
- Zhou, B. X., Yue, J. P. & Jia, K. Y. (2011). Automatic deformation acquisition using terrestrial laser scanner, In *Applied mechanics and materials*. Trans Tech Publ.

A Anhang

A.1 Parameter der Kurven

1. Kurve 1

nach Harmening und Neuner (2016a)

- Grad der B-Spline-Kurve $p = 3$
- Anzahl der Knoten $n + 1 = 7$
- Kontrollpunkte $P = [0 \ 0; 0.5 \ 1.5; 0.75 \ 2.5; 1 \ 0.25; 1.25 \ 1; 1.75 \ 1.25; 2 \ 0]$
- Ordnung der Kurve $p + 1 = 4$
- Knotenvektor $U = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

2. Kurve 2

nach Grecher (2016)

- Grad der B-Spline-Kurve $p = 3$
- Anzahl der Knoten $n + 1 = 7$
- Kontrollpunkte $P = [0 \ 0; 0.5 \ 0.5; 1 \ 0; 1.5 \ -0.25; 2 \ -0.25; 2.5 \ 0.25; 3 \ 0.5]$
- Ordnung der Kurve $p + 1 = 4$
- Knotenvektor $U = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.7 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

3. Kurve 3

nach Bureick et al. (2019)

- Grad der B-Spline-Kurve $p = 2$
- Anzahl der Knoten $n + 1 = 6$
- Koordinaten der Kontrollpunkte $P = [1 \ 3; 4 \ 11; 6 \ 0; 8 \ 3; 11 \ 3; 13 \ 1]$
- Ordnung der Kurve $p + 1 = 3$
- Knotenvektor $U = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1]$

4. Kurve 4

nach Bureick et al. (2019)

- Grad der B-Spline-Kurve $p = 2$
- Anzahl der Knoten $n + 1 = 6$
- Koordinaten der Kontrollpunkte $P = [0 \ 0; 4 \ 5; 8 \ 0; 12 \ 5; 16 \ 0; 20 \ 5]$
- Ordnung der Kurve $p + 1 = 3$
- Knotenvektor $U = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1]$

A.2 Komplette Ergebnisse der Wahl des Parameters ε

		dist_sum-Mittelwerte in [m]									$G. - M.$
		ε -Parameter									
e-Parameter		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
	0	0.86	0.55	0.39	0.28	0.19	0.15	0.12	0.10	0.08	2.09
	0.1	0.91	0.58	0.41	0.29	0.20	0.15	0.13	0.11	0.09	2.10
	0.2	0.98	0.61	0.43	0.31	0.23	0.19	0.17	0.14	0.14	2.15
	0.3	1.05	0.65	0.47	0.35	0.29	0.27	0.24	0.24	0.24	2.28
	0.4	1.11	0.71	0.54	0.42	0.37	0.35	0.34	0.34	0.38	2.46
	0.5	1.21	0.81	0.63	0.52	0.55	0.56	0.58	0.69	0.71	2.69
	0.6	1.36	0.94	0.75	0.77	0.78	0.77	0.98	0.92	0.94	2.92
	0.7	1.49	1.08	0.97	0.99	0.99	1.04	1.20	1.29	1.68	3.12
	0.8	1.57	1.17	1.10	1.11	1.07	1.09	1.23	1.39	1.92	3.29
0.9	1.61	1.21	1.16	1.21	1.23	1.25	1.31	1.44	2.03	3.39	
1	1.71	1.29	1.20	1.22	1.24	1.27	1.36	1.51	2.15	3.71	

Tab. A.1: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte von Kurven-Approximation der *Kurve 2* realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e (mit G.-M. vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)

		dist_sum-Standardabweichungen in [m]								
		ε -Parameter								
e-Parameter		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	0	0.388	0.219	0.209	0.182	0.129	0.106	0.095	0.075	0.046
	0.1	0.421	0.240	0.238	0.200	0.160	0.140	0.128	0.127	0.061
	0.2	0.452	0.274	0.269	0.223	0.195	0.180	0.159	0.105	0.092
	0.3	0.491	0.319	0.308	0.262	0.240	0.231	0.201	0.192	0.186
	0.4	0.517	0.362	0.358	0.331	0.316	0.303	0.305	0.310	0.381
	0.5	0.479	0.367	0.390	0.380	0.575	0.541	0.593	0.510	0.681
	0.6	0.371	0.297	0.344	0.572	0.696	0.701	1.064	0.819	0.980
	0.7	0.249	0.197	0.297	0.556	0.701	0.764	1.087	1.474	1.578
	0.8	0.148	0.129	0.144	0.219	0.380	0.656	0.987	1.059	1.289
0.9	0.090	0.063	0.085	0.118	0.20	0.313	0.403	0.499	1.931	

Tab. A.2: *dist_sum*-Standardabweichungen der Tabelle A.1

		dist_sum-Mittelwerte in [m]									
		ε -Parameter									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$G. - M.$
e-Parameter	0	12.17	5.44	3.47	2.58	2.12	1.90	1.82	1.78	1.76	38.53
	0.1	18.00	7.37	4.49	3.51	3.05	2.84	2.74	2.70	2.68	52.26
	0.2	33.37	12.63	8.13	6.65	6.12	5.97	5.89	5.85	5.83	76.55
	0.3	51.90	21.58	14.93	13.05	11.89	11.32	11.12	11.08	11.06	99.91
	0.4	67.12	30.22	20.15	18.32	17.68	17.14	16.88	16.98	17.11	121.1
	0.5	79.76	37.63	24.54	21.39	20.86	21.24	22.09	22.67	23.07	137.9
	0.6	88.48	41.39	28.73	25.48	24.41	24.36	24.92	25.86	26.72	148.8
	0.7	90.86	40.71	29.29	28.05	27.71	27.68	27.82	27.89	27.90	152.2
	0.8	83.95	35.57	28.75	28.50	28.62	28.64	28.63	28.63	28.62	147.7
	0.9	68.71	39.62	32.37	30.78	30.27	30.24	30.23	30.22	30.21	135.5
1	67.25	40.58	34.58	31.76	30.99	30.78	30.36	30.31	30.18	131.9	

Tab. A.3: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte von Kurven-Approximation der *Kurve 3* realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e (mit G.-M. vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)

		dist_sum-Standardabweichungen in [m]								
		ε -Parameter								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
e-Parameter	0	8.014	3.866	2.798	2.532	2.462	2.451	2.446	2.450	2.102
	0.1	10.778	5.667	4.288	3.989	3.707	3.450	3.300	3.252	3.232
	0.2	13.355	6.925	5.279	4.706	4.762	4.802	4.000	4.788	4.773
	0.3	14.245	5.192	5.428	5.312	5.057	5.000	5.029	5.016	5.019
	0.4	12.154	6.591	1.682	1.783	2.270	3.004	3.383	3.468	5.578
	0.5	11.635	7.836	3.508	2.512	2.621	2.878	3.329	4.133	4.804
	0.6	10.000	6.815	3.992	4.418	4.206	4.254	4.435	4.502	4.854
	0.7	7.218	4.424	1.550	2.328	2.258	1.855	1.673	1.618	1.598
	0.8	4.786	1.960	1.381	1.191	1.086	1.091	1.090	1.089	1.089
	0.9	2.236	2.047	1.411	0.893	0.779	0.776	0.773	0.772	0.771
1	1.954	1.558	1.226	0.847	0.771	0.769	0.771	0.773	0.762	

Tab. A.4: *dist_sum*-Standardabweichungen der Tabelle A.3

		dist_sum-Mittelwerte in [m]									G. – M.
		ε-Parameter									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
e-Parameter	0	10.09	4.56	2.70	2.09	1.87	1.80	1.77	1.75	1.75	45.14
	0.1	9.53	3.81	2.24	1.65	1.42	1.34	1.31	1.30	1.28	43.15
	0.2	10.18	3.99	2.27	1.66	1.42	1.35	1.32	1.32	1.32	44.45
	0.3	13.27	5.04	2.82	2.13	1.87	1.81	1.79	1.79	1.78	49.78
	0.4	18.83	7.25	3.95	3.06	2.81	2.76	2.75	2.74	2.74	59.15
	0.5	26.44	10.69	5.60	4.49	4.25	4.20	4.19	4.19	4.19	71.38
	0.6	35.70	15.41	7.99	6.51	6.28	6.25	6.24	6.24	6.24	85.45
	0.7	46.20	20.94	11.34	9.26	9.07	9.06	9.05	9.05	9.04	100.8
	0.8	58.77	26.63	15.87	12.99	12.88	12.87	12.86	12.86	12.86	116.8
	0.9	73.54	33.08	21.70	18.06	18.03	18.03	18.03	18.02	18.02	133.3
1	82.54	27.59	24.58	22.04	20.14	19.45	19.44	19.32	19.09	147.8	

Tab. A.5: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte von Kurven-Approximation der *Kurve 4* realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e (mit G.-M. vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)

		dist_sum-Standardabweichungen in [m]								
		ε-Parameter								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
e-Parameter	0	4.589	2.123	1.631	1.795	1.904	1.225	1.221	1.126	1.124
	0.1	3.629	1.019	0.806	0.910	0.979	0.996	0.999	0.805	0.798
	0.2	4.072	1.479	0.955	0.881	0.827	0.814	0.808	0.801	0.811
	0.3	5.357	2.713	1.300	1.227	1.167	1.163	1.162	1.163	1.163
	0.4	5.945	3.756	1.598	1.487	1.460	1.466	1.466	1.466	1.466
	0.5	5.772	4.625	1.865	1.550	1.576	1.584	1.583	1.583	1.582
	0.6	5.731	4.871	2.042	1.508	1.584	1.591	1.590	1.589	1.588
	0.7	5.791	4.405	2.330	1.448	1.542	1.545	1.543	1.542	1.541
	0.8	5.273	3.321	2.484	1.365	1.426	1.425	1.425	1.424	1.423
	0.9	3.993	2.272	2.104	1.211	1.212	1.211	1.211	1.210	1.210

Tab. A.6: *dist_sum*-Standardabweichungen der Tabelle A.5

A.3 Komplette Ergebnisse der Wahl des Parameters d

		dist_sum-Mittelwerte in [m]									
		d-Parameter									
		mit $d_k = (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot \varepsilon$									
ε		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	G. - M.
e-Parameter	0	1.47	0.90	0.55	0.39	0.31	0.26	0.24	0.23	0.22	2.25
	0.1	1.33	0.80	0.45	0.31	0.26	0.23	0.21	0.19	0.17	2.09
	0.2	1.32	0.80	0.48	0.31	0.25	0.23	0.20	0.19	0.18	2.11
	0.3	1.43	0.91	0.59	0.39	0.28	0.26	0.28	0.27	0.25	2.21
	0.4	1.65	1.08	0.74	0.54	0.41	0.43	0.42	0.42	0.36	2.43
	0.5	1.88	1.23	0.90	0.70	0.54	0.44	0.45	0.58	0.71	2.74
	0.6	2.08	1.37	1.04	0.85	0.72	0.67	0.78	1.26	1.87	3.03
	0.7	2.26	1.46	1.13	1.01	0.94	0.90	0.97	1.52	2.59	3.24
	0.8	2.40	1.51	1.22	1.14	1.14	1.14	1.17	1.68	2.62	3.38
	0.9	2.52	1.56	1.22	1.21	1.22	1.40	1.39	1.70	2.71	3.44
1	2.64	1.61	1.26	1.22	1.23	1.42	1.40	1.75	2.81	3.53	

Tab. A.7: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte von Kurven-Approximation der *Kurve 2* realisiert mit unterschiedlichen Parametern d und e (mit G.-M. vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)

		dist_sum-Standardabweichungen in [m]								
		ε-Parameter								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
e-Parameter	0	0.516	0.358	0.242	0.104	0.036	0.061	0.068	0.058	0.058
	0.1	0.509	0.262	0.1455	0.088	0.054	0.069	0.073	0.073	0.076
	0.2	0.594	0.328	0.195	0.123	0.086	0.089	0.106	0.117	0.122
	0.3	0.667	0.370	0.252	0.192	0.147	0.185	0.231	0.240	0.216
	0.4	0.638	0.359	0.286	0.270	0.272	0.370	0.377	0.398	0.967
	0.5	0.582	0.303	0.262	0.251	0.230	0.258	0.361	0.521	0.623
	0.6	0.497	0.227	0.227	0.203	0.228	0.331	0.728	1.252	1.752
	0.7	0.383	0.161	0.176	0.197	0.218	0.316	0.372	0.538	1.059
	0.8	0.261	0.115	0.063	0.118	0.212	0.325	0.364	0.393	1.316
	0.9	0.148	0.070	0.050	0.123	0.171	0.299	0.274	0.354	0.845

Tab. A.8: *dist_sum*-Standardabweichungen der Tabelle A.7

		dist_sum-Mittelwerte in [m]									
		d-Parameter									
		mit $d_k = (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot \varepsilon$									
e-Parameter	ε	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	G. - M.
	0	14.42	6.89	4.50	3.42	2.84	2.56	2.45	2.39	2.37	36.37
	0.1	19.35	9.31	6.04	4.78	4.17	3.89	3.75	3.70	3.69	56.52
	0.2	35.17	14.31	9.89	8.31	7.69	7.56	7.50	7.46	7.44	79.28
	0.3	53.66	22.16	16.61	14.96	13.83	13.14	12.83	12.75	12.70	101.1
	0.4	66.80	29.08	20.00	18.55	17.85	17.55	17.54	17.77	17.99	120.8
	0.5	78.66	36.25	24.03	21.28	20.93	21.39	22.21	22.97	23.41	136.6
	0.6	86.63	39.58	28.23	25.41	24.49	24.50	24.90	25.57	26.12	146.6
	0.7	88.92	38.92	28.58	27.31	26.99	26.97	27.14	27.19	27.22	149.7
	0.8	82.18	35.09	28.63	28.25	28.38	28.41	28.40	28.40	28.39	145.4
	0.9	68.02	39.88	32.40	30.73	30.25	30.22	30.21	30.20	30.20	133.9
	1	67.25	40.58	34.58	31.76	30.99	30.78	30.36	30.31	30.18	129.6

Tab. A.9: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte von Kurven-Approximation der *Kurve 3* realisiert mit unterschiedlichen Parametern d und e (mit G.-M. vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)

		dist_sum-Standardabweichungen in [m]								
		ε-Parameter								
e-Parameter		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	0	8.169	4.168	2.578	1.957	1.784	1.268	1.237	1.178	1.156
	0.1	15.721	6.196	4.166	2.818	2.581	2.577	2.321	1.951	1.569
	0.2	20.981	7.584	6.023	4.475	4.395	4.219	4.126	4.006	3.889
	0.3	33.879	11.927	8.382	7.382	6.059	5.572	4.713	4.610	4.411
	0.4	30.761	19.150	11.400	9.390	8.364	7.909	6.316	5.729	5.987
	0.5	45.338	32.593	25.234	21.140	17.605	14.488	12.378	11.095	9.804
	0.6	47.796	31.778	22.240	16.686	13.720	13.071	14.495	14.522	11.833
	0.7	46.702	28.148	17.300	12.616	12.315	12.127	11.506	11.397	11.488
	0.8	41.882	23.290	16.049	13.526	12.745	12.506	12.478	12.516	12.606
	0.9	35.571	23.089	17.817	15.197	13.853	13.594	13.608	13.640	13.657

Tab. A.10: *dist_sum*-Standardabweichungen der Tabelle A.9

dist_sum-Mittelwerte in [m]											
d-Parameter											
mit $d_k = (\mathbf{X}_{0u}(k+1) - \mathbf{X}_{0u}(k)) \cdot \varepsilon$											
ε	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$G. - M.$	
e-Parameter	0	17.03	8.79	4.73	3.09	2.36	1.97	1.81	1.72	1.67	48.68
	0.1	16.26	7.78	3.77	2.47	1.93	1.69	1.58	1.53	1.50	48.21
	0.2	18.63	8.04	3.75	2.41	1.96	1.80	1.73	1.72	1.71	51.92
	0.3	23.60	9.65	4.44	2.90	2.58	2.51	2.49	2.48	2.48	59.12
	0.4	30.59	12.47	5.54	3.88	3.65	3.63	3.62	3.63	3.63	69.16
	0.5	39.83	16.89	7.14	5.31	5.23	5.22	5.23	5.23	5.23	81.22
	0.6	51.80	23.44	9.50	7.21	7.32	7.34	7.34	7.35	7.35	94.25
	0.7	65.15	34.16	13.66	9.28	10.05	10.12	10.13	10.14	10.14	107.87
	0.8	79.03	47.25	22.06	11.69	13.31	13.73	13.76	13.76	13.76	121.96
	0.9	92.95	61.27	34.61	16.63	16.06	18.34	18.51	18.51	18.51	136.46

Tab. A.11: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte von Kurven-Approximation der *Kurve 4* realisiert mit unterschiedlichen Parametern d und e (mit G.-M. vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)

dist_sum-Standardabweichungen in [m]										
ε-Parameter										
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
e-Parameter	0	5.355	3.242	2.372	1.689	1.274	1.208	1.228	1.248	1.222
	0.1	3.126	2.477	2.482	1.740	1.196	0.957	0.923	0.936	0.947
	0.2	8.147	3.869	2.310	1.846	1.720	1.750	1.767	1.773	1.773
	0.3	10.304	4.691	2.341	2.061	2.111	2.135	2.140	2.143	2.147
	0.4	11.414	5.724	2.800	2.395	2.505	2.506	2.509	2.508	2.509
	0.5	11.763	6.465	3.308	2.728	2.725	2.735	2.739	2.739	2.739
	0.6	10.654	7.803	3.469	2.717	2.782	2.796	2.802	2.804	2.806
	0.7	8.559	7.745	3.536	2.296	2.580	2.605	2.614	2.618	2.618
	0.8	6.257	6.145	4.763	1.477	1.879	2.134	2.149	2.153	2.154
	0.9	4.327	4.236	3.877	2.296	0.972	1.281	1.423	1.425	1.425

Tab. A.12: *dist_sum*-Standardabweichungen der Tabelle A.1

A.4 Komplette Ergebnisse des statistischen Vergleichs der Kurve 2

		dist_sum-Werte in [m]							
$e - Para.$		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Mittelw.	G.-M.	2.139	2.035	2.049	2.189	2.430	2.715	2.986	3.206
	LCP_1	0.115	0.123	0.150	0.278	0.426	0.945	1.908	2.876
	LCP_2	0.194	0.167	0.179	0.199	0.349	0.761	1.635	2.619
	Hoschek	0.294	0.306	0.380	0.510	0.662	0.806	0.919	0.985
Median	G.-M.	2.036	1.938	1.987	2.167	2.424	2.709	2.976	3.198
	LCP_1	0.081	0.086	0.096	0.136	0.197	0.446	1.054	1.868
	LCP_2	0.166	0.128	0.118	0.137	0.190	0.410	1.031	2.094
	Hoschek	0.268	0.280	0.363	0.509	0.675	0.821	0.926	0.984
Stdabw.	G.-M.	0.789	0.738	0.724	0.716	0.679	0.608	0.523	0.433
	LCP_1	0.146	0.243	0.250	0.928	0.982	1.955	3.178	3.550
	LCP_2	0.138	0.144	0.189	0.208	0.560	1.015	1.717	2.039
	Hoschek	0.148	0.163	0.202	0.220	0.211	0.192	0.174	0.153

Tab. A.13: Vergleich mittels $dist_sum$ der Kurven-Approximationsalgorithmen realisiert mit unterschiedlichen e -Parametern (*Kurve 2*)

$e - Para.$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
G.-M.	182	86	107	78	30	9	4	1
LCP_1	218	111	103	45	21	1	1	0
LCP_2	73	148	140	32	2	7	2	0
Hoschek	292	104	71	29	4	0	0	0

Tab. A.14: Anzahl der minimalen $dist_sum$ -Werte einer Realisierung unterschiedlicher Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 2* in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e

e -Param.		ϑ -Werte in []							
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Mittelw.	LCP_1	0.008	0.010	0.014	0.021	0.028	0.039	0.057	0.074
	LCP_2	0.033	0.032	0.040	0.047	0.070	0.096	0.152	0.214
	Hoschek	0.010	0.010	0.011	0.014	0.017	0.020	0.025	0.029
Median	LCP_1	0.005	0.007	0.010	0.018	0.024	0.029	0.042	0.061
	LCP_2	0.026	0.023	0.024	0.040	0.065	0.081	0.116	0.183
	Hoschek	0.009	0.010	0.011	0.013	0.016	0.020	0.025	0.029
Stdabw.	LCP_1	0.008	0.011	0.014	0.018	0.022	0.033	0.045	0.055
	LCP_2	0.009	0.011	0.014	0.018	0.022	0.033	0.045	0.055
	Hoschek	0.030	0.032	0.037	0.038	0.051	0.075	0.110	0.124

Tab. A.15: Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der *Kurve 2* realisiert mit unterschiedlichen Parametern e

ϑ	< 0.001	< 0.01	< 0.1
LCP_1 mit $e = 0.0$	46	343	500
LCP_2 mit $e = 0.1$	0	123	480
Hoschek mit $e = 0.0$	2	272	500

Tab. A.16: Anzahl der ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts bzw. Medians, die eine gewisse Schranke nicht überschreiten (*Kurve 2*)

A.5 Komplette Ergebnisse zur Veränderung der Diskretisierungsmethode

dist_sum-Mittelwerte in [m]		
	D_1	D_2
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.0$	40.651	0.040
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.3$	37.415	0.372
$LCP_{1,2}$ mit $e = 0.7$	40.456	9.329
$LCP_{1,2}$ mit $e = 1.0$	46.691	3.971

Tab. A.17: Vergleich der *dist_sum*-Mittelwerte unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e berechnet mit der $LCP_{1,2}$ -Methode (*Kurve 2*)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Einfluss unterschiedlicher Parametrisierungsmethoden auf die Approximation von Datenpunkten durch eine B-Spline-Kurve	7
2.2	Projektion des Verbesserungsvektors \mathbf{v}_k auf Kurventangente (Hoschek (1988))	12
3.1	Die verwendete unverrauschte B-Spline- <i>Soll</i> -Kurven	21
4.1	Algorithmus der neu entwickelten Methode der Kurven-Approximation . .	23
4.2	Vergleich: Kurvenparameter der Näherungswerte und geschätzte Kurvenparameter nach erstem Ausgleich aufgetragen auf die nominalen Beobachtungen	26
5.1	Vergleich von approximierten Kurven mit den Ungleichungsrestriktionen 1. und 2. der <i>Kurve 1</i> in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e ($\varepsilon = 0.9$)	38
5.2	Rot markierter Bereich von Abb. 5.1	38
5.3	Vergleich der nominalen Kurvenparametern mit den Kurvenparameter aus den Parametrisierungsmethoden $e = 0$ und $e = 1$ (<i>Kurve 1</i>)	40
5.4	Vergleich der Differenzen der nominalen Kurvenparametern mit den Kurvenparameter aus den Parametrisierungsmethoden $e = 0$ und $e = 1$ (<i>Kurve 1</i>)	41
5.5	Vergleich des Konvergenzverhaltens einer Approximation der beiden iterativen Verfahren (Schätzung mit <i>LCP</i> & <i>Hoschek</i> -Algorithmus)	48
5.6	Vergleich der verbesserten Beobachtungen zur <i>Soll</i> -Kurve (<i>Kurve 1</i>) mit den dazugehörigen Kurvenparametern, dargestellt mittels der Farbskala . .	50
5.7	Gegenüberstellung der verbesserten Beobachtungen der Methoden <i>G.-M.</i> und <i>LCP</i> _{1,2} zur <i>Soll</i> -Kurve (<i>Kurve 1</i>) mit den dazugehörigen Kurvenparametern	51
5.8	Vergleich der approximierten <i>Kurve 1</i> mit der <i>Soll</i> -Kurve	52
5.9	Differenz der geschätzten mit den nominalen Kurvenparametern der <i>Kurve 1</i>	56
5.10	Vergleich der verbesserten Beobachtungen gewonnen mit der <i>G.-M.</i> -Methode und unterschiedlicher Anzahl an Beobachtungen zur <i>Soll</i> -Kurve (<i>Kurve 3</i>)	62
5.11	Differenz der geschätzten Kurvenparameter mit den nominalen Kurvenparametern der <i>Kurve 3</i> mit 1000 verrauschte Beobachtungen je Realisierung	65
5.12	Vergleich der verbesserten Beobachtungen einer Realisierung mit 500 Beobachtungen in Bezug auf die <i>Soll</i> -Kurve und der nominalen Punkte auf der <i>Soll</i> -Kurve (<i>Kurve 4</i>)	68
5.13	Vergleich der verbesserten Beobachtungen einer Realisierung mit 2500 Beobachtungen in Bezug auf die <i>Soll</i> -Kurve, der verrauschten Beobachtungen und der Punkte auf der <i>Soll</i> -Kurve (<i>Kurve 4</i>)	71
5.14	Einfluss der Diskretisierungsmethode in Anlehnung an den TLS-Messvorgang	75

5.15 Vergleich der Differenzen der nominalen Kurvenparameter mit den Näherungswerten mit einem Parameter $e = 0$ für die beiden verwendeten Diskretisierungsmethoden	78
5.16 Vergleich der <i>Soll</i> -Kurve mit der approximierten Kurve mit <i>G.-M.</i> -Methode und den dazugehörigen nominalen und geschätzten Kontrollpunkten (<i>Kurve 1</i>)	79
5.17 Vergleich der <i>Soll</i> -Kurve mit der approximierten Kurve mit <i>G.-M.</i> -Methode und den dazugehörigen nominalen und geschätzten Kontrollpunkten (<i>Kurve 4</i>)	80

Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich der aufsummierten Normalabstände von ausgeglichenen Beobachtungen mit unterschiedlichen Parametrisierungen zur <i>Soll</i> -Kurve	8
5.1	Vergleich von <i>dist_sum</i> -Werten von Kurven-Approximationen mit den Ungleichungsrestriktionen 1. und 2. der <i>Kurve 1</i> in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e ($\varepsilon = 0.9$)	38
5.2	Vergleich von $\bar{\vartheta}$ -Werten in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e (<i>Kurve 1</i>)	39
5.3	Vergleich der <i>dist_sum</i> -Mittelwerte von Approximationen der <i>Kurve 1</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e (mit G.-M. wird vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung angegeben)	42
5.4	Vergleich der <i>dist_sum</i> -Standardabweichungen von Approximationen der <i>Kurve 1</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e	43
5.5	Vergleich der <i>dist_sum</i> -Mittelwerte von Kurven-Approximationen der <i>Kurve 1</i> realisiert mit unterschiedlichen d - und e -Parametern (G.-M. = Kontrollpunktschätzung)	45
5.6	Vergleich der <i>dist_sum</i> -Standardabweichungen von Approximationen der <i>Kurve 1</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern d_k und e	45
5.7	Vergleich mittels <i>dist_sum</i> der Kurven-Approximationsalgorithmen realisiert mit unterschiedlichen e -Parametern (<i>Kurve 1</i>)	53
5.8	Anzahl der minimalen <i>dist_sum</i> -Werte der Kurven-Approximationsalgorithmen in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e (<i>Kurve 1</i>)	53
5.9	Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 1</i> realisiert mit unterschiedlichen Parameter e	54
5.10	Anzahl der ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts, die eine gewisse Schranke nicht überschreiten (<i>Kurve 1</i>)	55
5.11	Vergleich mittels <i>dist_sum</i> von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 3</i> realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 500 vertauschte Beobachtungen je Realisierung)	57
5.12	Anzahl minimaler <i>dist_sum</i> -Werte der Kurven-Approximationsalgorithmen in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e (<i>Kurve 3</i> mit 500 Beobachtungen)	58
5.13	Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 3</i> realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 500 vertauschte Beobachtungen je Realisierung)	59

5.14	Anzahl der ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts, die eine gewisse Schranke nicht überschreiten (<i>Kurve 3</i>)	59
5.15	Vergleich mittels <i>dist_sum</i> von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 3</i> realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 1000 Beobachtungen)	60
5.16	Division der minimalen Mittelwerte durch die Anzahl an Beobachtungen der Realisierungen (<i>Kurve 3</i>)	61
5.17	Anzahl minimaler <i>dist_sum</i> -Werte der Kurven-Approximationsalgorithmen in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e (<i>Kurve 3</i> mit 1000 Beobachtungen)	61
5.18	Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 3</i> realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 1000 Beobachtungen)	63
5.19	Anzahl ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts, die eine Schranke nicht überschreiten (<i>Kurve 3</i> mit 1000 Beobachtungen)	64
5.20	Vergleich mittels <i>dist_sum</i> von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 4</i> realisiert mit unterschiedlichen e -Parametern (500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)	67
5.21	Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 4</i> realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)	67
5.22	Anzahl der ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts, die eine gewisse Schranke nicht überschreiten (<i>Kurve 4</i> mit 500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)	68
5.23	Vergleich mittels <i>dist_sum</i> von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 4</i> realisiert mit unterschiedlichen e -Parametern (mit 2500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)	69
5.24	Division der minimalen Mittelwerte durch die Anzahl an Beobachtungen der Realisierungen (<i>Kurve 4</i>)	70
5.25	Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 4</i> realisiert mit unterschiedlichen Parameter e (mit 2500 verrauschte Beobachtungen je Realisierung)	70
5.26	Vergleich der Spalten mit den minimalen <i>dist_sum</i> -Mittelwerten aller untersuchten Kurven und deren Diskretisierungen	73
5.27	Vergleich der Spalten mit den minimalen ϑ -Mittelwerten aller untersuchten Kurven und deren Diskretisierungen	74

5.28	Anzahl der Beobachtungen mit einem Abtastwinkel von 10 mgon und einer Entfernung des Standpunkts von etwa 10 m	75
5.29	Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e berechnet mit $LCP_{1,2}$ -Methode (<i>Kurve 1</i>)	76
5.30	Vergleich der $\bar{\vartheta}$ -Mittelwerte unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e (<i>Kurve 1</i>)	77
5.31	Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e berechnet mit der G - M -Methode (<i>Kurve 1</i>)	78
5.32	Vergleich der ψ -Mittelwerte (<i>Kurve 1</i>)	79
A.1	Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte von Kurven-Approximation der <i>Kurve 2</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e (mit G - M vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)	89
A.2	$dist_sum$ -Standardabweichungen der Tabelle A.1	89
A.3	Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte von Kurven-Approximation der <i>Kurve 3</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e (mit G - M vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)	90
A.4	$dist_sum$ -Standardabweichungen der Tabelle A.3	90
A.5	Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte von Kurven-Approximation der <i>Kurve 4</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern ε und e (mit G - M vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)	91
A.6	$dist_sum$ -Standardabweichungen der Tabelle A.5	91
A.7	Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte von Kurven-Approximation der <i>Kurve 2</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern d und e (mit G - M vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)	92
A.8	$dist_sum$ -Standardabweichungen der Tabelle A.7	92
A.9	Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte von Kurven-Approximation der <i>Kurve 3</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern d und e (mit G - M vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)	93
A.10	$dist_sum$ -Standardabweichungen der Tabelle A.9	93
A.11	Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte von Kurven-Approximation der <i>Kurve 4</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern d und e (mit G - M vergleichend das Ergebnis der Kontrollpunktschätzung)	94
A.12	$dist_sum$ -Standardabweichungen der Tabelle A.1	94
A.13	Vergleich mittels $dist_sum$ der Kurven-Approximationsalgorithmen realisiert mit unterschiedlichen e -Parametern (<i>Kurve 2</i>)	95

A.14 Anzahl der minimalen $dist_sum$ -Werte einer Realisierung unterschiedlicher Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 2</i> in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameter e	95
A.15 Vergleich mittels ϑ von unterschiedlichen Kurven-Approximationsalgorithmen der <i>Kurve 2</i> realisiert mit unterschiedlichen Parametern e	96
A.16 Anzahl der ϑ -Werte der Approximationen mit dem Parameter e des geringsten Mittelwerts bzw. Medians, die eine gewisse Schranke nicht überschreiten (<i>Kurve 2</i>)	96
A.17 Vergleich der $dist_sum$ -Mittelwerte unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden in Abhängigkeit des Parameters e berechnet mit der $LC P_{1,2}$ -Methode (<i>Kurve 2</i>)	97