



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN



Institut für Analysis und  
Scientific Computing

---

## DIPLOMARBEIT

# Analyse nichtlinearer Regelkreise mittels computerunterstützter Methoden

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
Diplom-Ingenieur/in (Dipl.-Ing.)

im Rahmen des Studiums

Technische Mathematik

unter der Leitung von

Dr.techn. Andreas Körner  
und  
Dipl.-Ing. Markus Gurtner

eingereicht an der

Technischen Universität Wien  
Fakultät für Mathematik und Geoinformation  
Institut für Analysis und Scientific Computing

von

Cornelia Geischläger  
Matrikelnummer 1426301

Wien, im Februar 2023



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit mit dem Titel *Analyse nichtlinearer Regelkreise mittels computerunterstützter Methoden* entstand in der Forschungsgruppe Mathematik in Simulation und Ausbildung des Instituts für Analysis und Scientific Computing und in Zusammenarbeit mit dem Institut für Automatisierung- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien. Verfasst wurde die Arbeit im Zuge eines sechsmonatigen Praktikums an der AIT Austrian Institute of Technology GmbH.

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Dr.techn. Andreas Körner für die kompetente Betreuung bedanken, die maßgeblich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen hat.

Weiters gebührt Herrn Dipl.-Ing. Markus Gurtner mein Dank für die umfangreiche Betreuung meiner Arbeit am AIT sowie für seine Ideen, seine Geduld und seine andauernde Hilfsbereitschaft.

Großer Dank gilt ebenfalls meiner Familie, insbesondere meinen Eltern Gabi und Herbert und meiner Schwester Nicki, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt und begleitet haben.

Abschließend danke ich besonders meinem Freund Stefan, der mir durch seinen persönlichen Beistand in allen Phasen des Verfassens dieser Arbeit eine große Stütze war.

Wien, im Februar 2023



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Abstract

This thesis deals with the development of a randomized trajectory generator to create varying and independent test scenarios for the simulation of nonlinear closed-loop systems. Uncertain parameters can sometimes lead to restrictions concerning statements about stability, or even to their loss of validity. Parameter uncertainties appear e.g. in mass production due to manufacturing tolerances or through aging in a long-term operation. After reviewing literature about stability and robustness of dynamical systems and evaluating existing methods to generate random signals, a concept for the trajectory generator was developed and implemented in MATLAB. Then, the assumptions concerning the generator were precisely analyzed. This characterization shows that, not from the beginning but from a later point in time, an amount of signals tends to fulfill the requirements of a stationary random process. Finally, the proposed randomized trajectory generator was tested on a spring mass system with static friction. In conclusion, a statistical evaluation shows that testing nonlinear closed-loop systems with only one kind of reference signals is not enough for a sufficient statement about the performance or stability of the system.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Kurzzusammenfassung

Diese Diplomarbeit behandelt die Entwicklung eines zufallsbasierten Trajektoriengenerators, um unterschiedliche und unabhängige Testszenarien für die Simulation geschlossener, nichtlinearer Regelkreise mit Parameterunsicherheiten zu erhalten. Parameterunsicherheiten führen dazu, dass die erarbeiteten Stabilitätsaussagen oft deutlich eingeschränkt werden oder sogar ihre Gültigkeit verlieren. In der Industrie treten Parameterunsicherheiten beispielsweise bei hohen Stückzahlen in der Serienproduktion oder durch Alterungseffekte im langzeitigen Betrieb von Sonderanlagen auf. Basierend auf einer Literaturstudie zur Stabilität und Robustheit dynamischer Systeme und einer Literaturstudie zur Generierung zufälliger Signale wird ein Konzept für einen zufallsbasierten Trajektoriengenerator erstellt und in MATLAB implementiert. Es folgt eine intensive Analyse und Charakterisierung der für den Generator getroffenen Annahmen. Diese zeigt, dass man zwar nicht ab dem Startzeitpunkt, aber ab einem späteren Zeitpunkt von Stationarität im Sinne eines Zufallsprozesses bezogen auf die Signalschar sprechen kann. Anhand eines einfachen Simulationsbeispiels in Form eines Feder-Masse-Systems mit Haftreibung wird schließlich der Trajektoriengenerator getestet. Eine statistische Bewertung kommt zu dem Ergebnis, dass ein einzelnes Signal als Sollgröße nicht genügt, um eine hinreichend genaue Aussage über die Performance bzw. Stabilität des Systems zu treffen.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Ziele . . . . .	1
1.2	Grundlagen und Notation . . . . .	1
1.3	Literaturstudie zur Stabilität und Robustheit . . . . .	4
1.4	Aufbau der Arbeit . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Generierung zufälliger Signale</b>	<b>9</b>
2.1	Signalanforderungen . . . . .	9
2.2	Literaturstudie zur Generierung zufälliger Signale . . . . .	10
2.3	Konzept des zufallsbasierten Trajektoriengenerators . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Analyse des Trajektoriengenerators</b>	<b>17</b>
3.1	Verteilung der Endzeiten . . . . .	17
3.2	Verteilung der Endwerte . . . . .	21
3.3	Verifizierung der Anteile der Signalbereiche . . . . .	23
3.4	Zeitabhängige Verteilung . . . . .	26
3.5	Verteilung der Ableitungen . . . . .	34
3.6	Spektrale Analyse . . . . .	35
3.7	Relativer Anteil der Signalbereiche . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Bewertung eines nichtlinearen Regelkreises</b>	<b>41</b>
4.1	Beschreibung des Simulationsmodells . . . . .	41
4.2	Statistische Bewertung . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>51</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellung eines dynamischen Systems. . . . .	2
1.2	Allgemeines Blockschaltbild eines geschlossenen Regelkreises. . . . .	3
2.1	Generierung einer zufälligen Trajektorie zwischen zwei Endpunkten. . . .	11
2.2	Zustandsgraph als Modell des zufallsbasierten Trajektoriengenerators. . .	12
2.3	Elementare Bausteine $b$ für die dynamischen Bereiche. . . . .	13
2.4	Zufällige Signale mit stationärem Beginn, $N = 4$ und $r = 0.5$ . . . . .	14
2.5	Zehn zufällige Signale mit festem $N$ , freier Endzeit und stationärem Beginn.	14
3.1	Verteilung der Endzeiten mit $r = 0.3$ . . . . .	17
3.2	Verteilung der Endzeiten mit $r = 0.7$ . . . . .	18
3.3	Verteilung der Endzeiten mit $r = 0.9$ . . . . .	19
3.4	Verteilung der Endzeiten für gerades $N$ , gemäß Zusammenhang (3.1). . .	20
3.5	Verteilung der Endwerte mit freier Endzeit. . . . .	21
3.6	Verteilung der Endwerte mit fester Endzeit. . . . .	21
3.7	Verteilung der Endwerte mit fester Endzeit, gemäß Zusammenhang (3.1).	22
3.8	Verteilung der berechneten Werte $r$ zufällig generierter Signale mit freier Endzeit gemäß Zusammenhang (2.2). . . . .	23
3.9	Verteilung der berechneten Werte $r$ zufällig generierter Signale mit freier Endzeit gemäß Zusammenhang (3.1). . . . .	24
3.10	Fallunterscheidung zur Erwartung des beobachteten Verhältnisses $\hat{r}_u$ für ungerades $N$ , wobei $d$ einen dynamischen und $s$ einen stationären Bereich bezeichnet. . . . .	24
3.11	Verteilung der berechneten Werte $r$ zufällig generierter Signale mit fester Endzeit gemäß Zusammenhang (2.2). . . . .	25
3.12	Verteilung der berechneten Werte $r$ zufällig generierter Signale mit fester Endzeit gemäß Zusammenhang (3.1). . . . .	26
3.13	Zeitabhängige Verteilung zufällig generierter Signale mit fester Endzeit und stationärem Beginn. . . . .	26
3.14	Zeitabhängige Verteilung zufällig generierter Signale mit fester Endzeit und zufälligem Beginn. . . . .	28
3.15	Zeitabhängige Verteilung zufällig generierter Signale mit fester Endzeit, stationärem Beginn und höherem $N$ . . . . .	28
3.16	Zeitabhängige Verteilung zufällig generierter Signale mit fester Endzeit, zufälligem Beginn und höherem $N$ . . . . .	29
3.17	Zeitabhängige Verteilung mit fester Endzeit, zufälligem Beginn, und ver- schiedenen $r$ . . . . .	30
3.18	Zeitabhängige Verteilung mit fester Endzeit, zufälligem Beginn und $N = 100$ .	31

3.19	Kriterium (3.5), aufgeteilt auf 5 Intervalle. . . . .	32
3.20	Graphische Darstellung des Abstandsmaßes (3.6) für jeweils $10^4$ , $3 \cdot 10^4$ und $5 \cdot 10^4$ Signale. . . . .	33
3.21	Verteilung der Ableitungen mit fester Endzeit und zufälligem Beginn. . .	34
3.22	Verteilung der Ableitungen mit fester Endzeit, zufälligem Beginn und höherem $N$ . . . . .	35
3.23	Frequenzspektrum von 200 Signalen mit fester Endzeit, $N = 30$ und zufälligem Beginn. . . . .	36
3.24	Histogramm zum Frequenzspektrum von 200 Signalen mit fester Endzeit, $N = 30$ und zufälligem Beginn. . . . .	36
3.25	Approximation von $r$ bei $10^4$ Signalen mit fester Endzeit und zufälligem Beginn. . . . .	38
4.1	Feder-Masse-System mit Haftreibung. . . . .	41
4.2	Sprungantworten für den Regler $\mathcal{R}_{tz}$ (links) und für den Regler $\mathcal{R}_{fr}$ (rechts). . . . .	45
4.3	MA Fehler bei 1000 generierten Signalen, basierend auf einem nichtlinearen System. Links mit dem Regler $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler $\mathcal{R}_{fr}$ . . . . .	46
4.4	MA Fehler außerhalb der toten Zone bei 1000 generierten Signalen, basierend auf einem nichtlinearen System. Links mit dem Regler $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler $\mathcal{R}_{fr}$ . . . . .	46
4.5	RMSE bei 1000 generierten Signalen, basierend auf einem nichtlinearen System. Links mit dem Regler $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler $\mathcal{R}_{fr}$ . . . . .	47
4.6	RMSE außerhalb der toten Zone bei 1000 generierten Signalen, basierend auf einem nichtlinearen System. Links mit dem Regler $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler $\mathcal{R}_{fr}$ . . . . .	48
4.7	Simulation der Trajektorien mit dem größten Fehler als Sollgröße, basierend auf einem nichtlinearen System, links mit dem Regler $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler $\mathcal{R}_{fr}$ . . . . .	49

# Tabellenverzeichnis

1.1	Übersicht der Stabilitäts- und Robustheitsbegriffe. . . . .	4
2.1	Auflistung der Bausteine zur Konstruktion eines dynamischen Bereichs. . .	12
3.1	Vergleich der Erwartungswerte der Endzeiten für $N = 10$ . . . . .	19
3.2	Ergebnisse zur Berechnung einer Annäherung von $r$ . . . . .	39
4.1	Übersicht der Parameter für das mechanische System. . . . .	42
4.2	Auflistung der Verstärkungsfaktoren $k_P$ und $k_I$ sowie der Art der Fehlermaniplation für die unterschiedlichen Regler $\mathcal{R}_{tz}$ und $\mathcal{R}_{fr}$ . . . . .	43



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Ziele

Üblicherweise, wie auch in [1], werden mathematische Modelle verwendet, um die Stabilität nichtlinearer Regelkreise nachzuweisen. Jedoch entspricht ein Modell nie vollständig der Realität und beruht auf verschiedenen Annahmen und Vereinfachungen. Das mindert deutlich die praktische Aussagekraft eines formalen Stabilitätsnachweises. Typische Ursachen für Abweichungen zwischen mathematischen Modellen und realen Systemen sind beispielsweise bei Serienprodukten vor allem Fertigungs- oder Materialtoleranzen. Für großindustrielle Anlagen, welche Unikate sind, existieren häufig hochgenaue Modelle, welche jedoch mit fortschreitender Einsatzdauer auf Grund von Alterungseffekten in den einzelnen Komponenten ebenso Abweichungen aufweisen können. Diese Modellabweichungen führen zufolge von Parameterunsicherheiten zu einer signifikanten Einschränkung der getätigten Stabilitätsaussagen über die gesamte Einsatzdauer des Regelkreises. Im schlechtesten Fall verlieren diese sogar ihre Gültigkeit.

Im Rahmen dieser Arbeit werden geschlossene, nichtlineare Regelkreise mit Parameterunsicherheiten anhand numerischer Methoden charakterisiert und analysiert. Dafür wird zunächst eine Literaturrecherche den aktuellen Stand der Wissenschaft zu bereits vorhandenen Stabilitäts- und Robustheitskriterien für unterschiedliche Systeme aufzeigen. Der weitere Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Entwicklung eines flexiblen, zufallsbasierten Trajektoriengenerators zur Generierung unabhängiger Testszenarien. Dieser ist nach diversen Gesichtspunkten statistisch zu bewerten und anhand eines dynamischen Simulationsbeispiels zu testen.

## 1.2 Grundlagen und Notation

Wenn in dieser Arbeit der Begriff *System* verwendet wird, ist damit die Verbindung verschiedener Komponenten gemeint, die miteinander interagieren und den Zweck haben, bestimmte Aufgaben zu erfüllen, siehe [1]. Wesentlich in diesem Zusammenhang sind die Eingangs- und Ausgangsgrößen, über welche die Wechselwirkung zwischen System und Systemumgebung, also der Umwelt, passiert. *Eingangsgrößen*, meistens beschrieben durch  $u_1, \dots, u_r$ , wirken von der Systemumgebung auf das System ein. Man unterscheidet zwei Arten: Stellgrößen, womit das System gezielt beeinflusst werden kann und Störgrößen, welche nicht unserer Kontrolle unterliegen. Im Gegensatz dazu werden *Ausgangsgrößen*, meistens durch  $y_1, \dots, y_s$  beschrieben, vom System generiert und wirken auf die Systemumgebung ein, wie in Abbildung 1.1 dargestellt.

Wenn in einem System die Ausgangsgrößen nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängig sind, nennt man das System statisch, hängen sie zusätzlich von der Vergangenheit

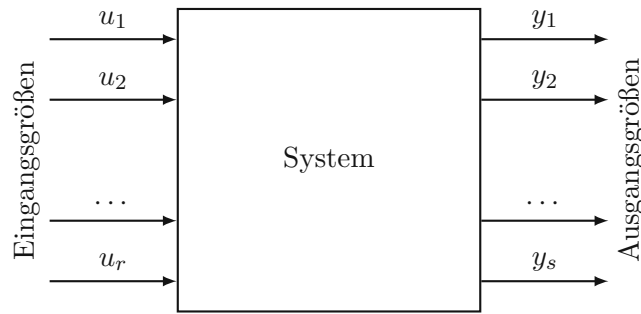


Abbildung 1.1: Darstellung eines dynamischen Systems.

der Eingangsgrößen ab, so nennt man das System dynamisch. Mit  $x_1, \dots, x_n$  werden oft die sogenannten *Zustandsgrößen* eines dynamischen Systems bezeichnet. Diese besitzen dann die Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  durch den Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), \dots, u_r(\tau)$  auf dem Intervall  $t_0 \leq \tau \leq t$  und den Werten von  $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$  für ein beliebiges  $t_0$  festgelegt sind. Ist der Zustand  $\mathbf{x}$  Element eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes, so heißt dieser auch Zustandsraum. Als *Trajektorie* bezeichnet man die Kurve aller Punkte, also alle Zustände eines Systems zum Zeitpunkt  $t$ , für veränderliche Zeit  $t$  in einem Zeitintervall.

Die mathematische Darstellung eines dynamischen Systems mit einer endlichen Anzahl  $n$  von Zustandsgrößen erfolgt in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen. Dies führt zur allgemeinen und kompakten Schreibweise

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.1b)$$

mit

$$\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r)^T \in \mathbb{R}^r,$$

$$\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_s)^T \in \mathbb{R}^s,$$

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei bezeichnet man (1.1a) als Zustandsdifferentialgleichungen mit Anfangsbedingungen, (1.1b) als Ausgangsgleichungen,  $\mathbf{u}$  als Eingang,  $\mathbf{y}$  als Ausgang und  $\mathbf{x}$  als Zustand des dynamischen Systems. Hängt das dynamische System (1.1) nicht von der Zeit  $t$  ab, so nennt man es *zeitinvariant*. Verschwindet die Abhängigkeit vom Eingang  $\mathbf{u}$  oder ist der zeitliche Verlauf der Eingangsgrößen festgelegt, so nennt man es *frei*. Ein zeitinvariantes und freies System heißt *autonom*. Die besonders relevante Systemklasse der linearen, zeitinvarianten (LTI) Systeme erhält man, wenn sich (1.1) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned}$$



mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{s \times n}$  und  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{s \times r}$ , darstellen lässt. Aufgrund des Superpositionsgesetzes fallen bei linearen, zeitinvarianten Systemen lokale und globale Eigenschaften zusammen. Bei nichtlinearen (dynamischen) Systemen ist das jedoch nicht der Fall, weshalb sich die Analyse der Systemeigenschaften deutlich anspruchsvoller gestaltet. Ist man im Nichtlinearen lediglich an der Untersuchung lokaler Eigenschaften interessiert, kann die Linearisierung der Systemgleichungen Abhilfe schaffen. Linearisierungen werden typischerweise um eine Trajektorie oder Ruhelage bzw. einen Arbeitspunkt durchgeführt. Man spricht von einer Ruhelage  $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^n$  des System  $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , falls die Bedingung  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_R) = \mathbf{0}$ ,  $\forall t \geq 0$  gilt. Mit dem Begriff Arbeitspunkt ist das Paar  $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$  gemeint, das  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0}$  für ein festgelegtes konstantes  $\mathbf{u}_R$  löst.

Da in der Praxis Modelle nie perfekt die reale Welt abbilden können, ist es von besonderem Interesse Modell-Abweichungen in Form von Parameterunsicherheiten beschreiben zu können. Ein nichtlineares, dynamisches System mit Parameterunsicherheiten hat die Form

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \Delta), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \Delta), \quad (1.2b)$$

wobei  $\Delta$  den Vektor der Unsicherheiten bezeichnet.

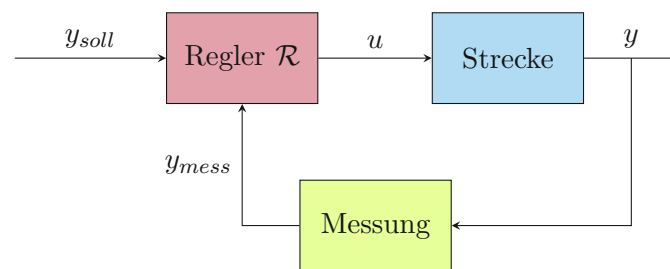


Abbildung 1.2: Allgemeines Blockschaltbild eines geschlossenen Regelkreises.

In der Regelungstechnik kommen nichtlineare, dynamische Systeme vor allem während des Reglerentwurfs zum Einsatz. Typischerweise dienen dabei Systembeschreibungen der Form (1.2) als Modell für das dynamische Verhalten der zu regelnden Strecke. Abbildung 1.2 zeigt ein Blockschaltbild eines geschlossenen Regelkreises. Die Aufgabe des Reglers ist es nun auf Basis des Soll- bzw. Referenzsignals  $y_{soll}$  und des gemessenen Systemausgangs  $y_{mess}$  die Stellgröße  $u$  so zu bestimmen, dass der tatsächliche Ausgang  $y$  dem Sollsinal folgt. Je nach Komplexität der Strecke bzw. Anforderung an den geschlossenen Regelkreis variiert der Komplexitätsgrad des Reglers über eine breite Spanne. Besonders einfache Regler (P-Regler) lassen sich sicher sogar mittels statischer Abbildungen beschreiben. Für die Beschreibung der industriell besonders häufig eingesetzten PID-Regler eignet sich ebenso die zuvor eingeführte Zustandsdarstellung. Sogar Regler am entgegengesetzten Ende der Komplexitätsskala, beispielsweise modellprädiktive Regler, welche unterlagert ein dynamisches Optimierungsproblem lösen um stets die optimale Stellgröße  $u$  zu finden, lassen sich auf diese Art und Weise beschreiben. Für eine realitätsnahe Modellierung des geschlossenen Regelkreises trägt auch, je nach Messsystem bzw. Änderungsrate des

Ausganges, ein entsprechendes Modell der Messung wesentlich zu einer hinreichend zuverlässigen Beschreibung des Gesamtsystems bei. Da ein Gesamtsystem auch aus gekoppelten Teilsystemen zusammengesetzt werden kann, folgt, dass auch der gesamte Regelkreis als ein dynamisches System betrachtet werden kann.

### 1.3 Literaturstudie zur Stabilität und Robustheit

Für die in Abschnitt 1.2 diskutierten dynamischen Systeme finden sich in der Literatur mehrere Stabilitäts- und Robustheitsbegriffe, welche in Tabelle 1.1 gruppiert sind und im Anschluss diskutiert werden.

Begriff	Linearität	zeit-	Systemeingang	Parameter
BIBO [2]	linear	invariant	nicht frei	bekannt
Lyapunov [2], [3]	nichtlinear	(in)variant	frei	bekannt
asymptotisch [3], [4]	nichtlinear	(in)variant	frei	bekannt
global asymptotisch [4]	nichtlinear	invariant	frei	bekannt
gleichmäßig [3]	nichtlinear	variant	frei	bekannt
gleichmäßig asymptotisch [3]	nichtlinear	variant	frei	bekannt
exponentiell [3]	nichtlinear	variant	frei	bekannt
intern [5]	linear	invariant	nicht frei	unsicher, $M$ - $\Delta$ -Modell
robust [5]	linear	invariant	nicht frei	unsicher, $M$ - $\Delta$ -Modell
quadratisch [5]	linear	invariant	frei	unsicher
absolut [5]	linear	invariant	nicht frei	unsicher
probabilistisch robust [5]	nichtlinear	(in)variant	(nicht) frei	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Tabelle 1.1: Übersicht der Stabilitäts- und Robustheitsbegriffe.

Man spricht von Stabilität, wenn sich zeigen lässt, dass beschränkte Abweichungen im Anfangszustand des dynamischen Systems stets zu beschränkten Abweichungen im Ausgang bzw. in der Lösung des dynamischen Systems führen. Erweitert man die Betrachtung eines abgeschlossenen Systems um äußere Faktoren, wie Störungen, oder Parameterunsicherheiten, dann ist das System robust gegenüber diesen Einflüssen, wenn die Stabilität weiterhin erhalten bleibt. Die bekanntesten Begriffe wie BIBO-Stabilität [2] stammen dabei aus dem Bereich der LTI-Systeme. Ob ein System BIBO-stabil ist, kann man unter anderem anhand der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  bewerten. Die Begriffe Lyapunov-stabil, asymptotisch stabil, global asymptotisch stabil, gleichmäßig stabil, gleichmäßig asymptotisch stabil und exponentiell stabil beziehen sich alle auf die Stabilität einer Ruhelage  $\mathbf{x}_R$ , meistens  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ . Lyapunov-Stabilität [2, 3] kann man auf zwei Arten zeigen: entweder direkt indem

man für das nichtlineare System eine Lyapunovfunktion findet, wobei man als geeigneten Kandidaten oft die im System gespeicherte Energie heranziehen kann, oder indirekt indem man das System um die Ruhelage linearisiert und diese Linearisierung analysiert. Man spricht von asymptotischer Stabilität [3, 4], wenn die Ruhelage Lyapunov-stabil und anziehend ist. Stabilität im Sinne von Lyapunov bedeutet, dass der Zustand des Systems für alle Zeiten in einer beschränkten Umgebung verbleibt, also  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ , so lang der Anfangszustand ebenso in einer beschränkten Umgebung liegt, das heißt  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$ . Asymptotische Stabilität stellt sicher, dass sich das System wieder der Ruhelage annähert, so lange der Anfangszustand in einer beschränkten Umgebung startet. Sowohl für die Lyapunov-Stabilität als auch für die asymptotische Stabilität existieren Bedingungen für zeitvariante und zeitinvariante Systeme, wie in der Tabelle 1.1 angedeutet. Auch global asymptotische Stabilität [4] lässt sich anhand der Lyapunovfunktion und deren Ableitung untersuchen. Hier darf der Anfangszustand im gesamten Zustandsraum liegen, also  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Für zeitvariante Systeme untersucht man die gleichmäßige Stabilität [3]. Dabei muss die nun zeitvariante Lyapunovfunktion und deren Ableitung durch Ungleichungen beschränkt werden. Gleichmäßige asymptotische Stabilität [3] stellt hier restriktivere Anforderungen an die Ableitung der Lyapunovfunktion. Exponentielle Stabilität [3] lässt sich auf ähnliche Art und Weise prüfen, wobei hier Funktionen konstruiert werden müssen, die Ungleichungen in Exponentialform genügen.

Neben den Stabilitätsbegriffen für Systeme ohne Parameterunsicherheiten finden sich in Tabelle 1.1 auch Robustheitsbegriffe für Systeme mit Parameterunsicherheiten. Mit einem  $M$ - $\Delta$ -Modell ist ein Modell gemeint, bei dem  $M$  der bekannte Teil des Systems ist, also die Übertragungsfunktion, und  $\Delta$  der unbekannte ist, also der die Unsicherheiten beinhaltet. Interne [5] und robuste Stabilität [5] garantieren, dass die Signale des Systems beschränkt bleiben, unter der Annahme, dass das Eingangssignal beschränkt ist. Diese Aussage ist ähnlich zur BIBO-Stabilität für LTI-Systeme. Für robuste Stabilität erlaubt man nur Unsicherheitsmatrizen  $\Delta$ , die in der Norm durch eine Konstante beschränkt sind. Quadratische Stabilität [5] ist definiert für ein lineares System, dessen Unsicherheitsmatrix  $\Delta$  in der Norm durch 1 beschränkt ist. Eine Folgerung daraus ist, dass  $\mathbf{x}(t)$  gegen  $\mathbf{0}$  konvergiert, für jede Anfangsbedingung  $\mathbf{x}_0$  und jedes zulässige  $\Delta(t)$ . Eine Erweiterung dieses Stabilitätsbegriffs ist jener der absoluten Stabilität [5]. Für dessen Untersuchung wird ein lineares System, dessen Unsicherheitsmatrix  $\Delta$  eine integrale quadratische Beschränkung im Zeitbereich (time domain integral quadratic constraint, IQC) erfüllt, vorausgesetzt. Der letzte Begriff in Tabelle 1.1, der Robustheitsbegriff probabilistisch robust [5], bezieht sich auf ein allgemeines nichtlineares System ohne weitere Einschränkungen bzw. Annahmen. Dieser Begriff ist am generellsten und somit von besonderer Bedeutung für diese Arbeit. Im folgenden Abschnitt wird darauf genauer eingegangen.

Bevor der Nachweis der probabilistischen Robustheit diskutiert wird, wenden wir uns den Unsicherheiten  $\Delta$  zu. Für eine detaillierte Diskussion sei beispielsweise auf [6] verwiesen.

Eine Unsicherheit  $\Delta$  ist hier ein Element der Menge

$$\mathbb{D} = \{\Delta \in \mathbb{F}^{r,c} : \Delta = \text{bdiag}(q_1 I_{m_1}, \dots, q_l I_{m_l}, \Delta_1, \dots, \Delta_b)\},$$

bzw. falls die Matrix  $\Delta$  durch die Größe  $\rho$  beschränkt sein soll, eine Element der Menge

$$\mathcal{B}_{\mathbb{D}}(\rho) = \{\Delta \in \mathbb{D} : \|q\|_p \leq \rho, \bar{\sigma}(\Delta_i) \leq \rho, i = 1, \dots, b\}.$$

Dabei bezeichnet die Menge  $\mathbb{F}$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ,  $q_1, \dots, q_l$  reelle oder komplexe unsichere Parameter, die je nach Vielfachheit  $m_1, \dots, m_l$  öfter auftreten können und  $\Delta_1, \dots, \Delta_b$  Blockmatrizen mit passenden Dimensionen.  $\bar{\sigma}(\Delta_i)$  steht für den größten Singulärwert von  $\Delta_i$ .

Um die Stabilität bzw. Robustheit des Systems zu untersuchen, wird eine Performance-Funktion eingeführt. Man definiert eine messbare Funktion

$$J(\Delta) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

und dazugehörig das Performance-Level  $\gamma$ . Ein gegebenes System ist nun stabil bzw. robust, wenn  $J(\Delta) \leq \gamma$  für alle  $\Delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{D}}$ . Probabilistisch gesehen übersetzt sich dieses Problem in die Berechnung der Wahrscheinlichkeit

$$p(\gamma) := \mathbb{P}\{J(\Delta) \leq \gamma\},$$

wobei angenommen wird, dass  $\Delta$  eine Zufallsmatrix mit Dichtefunktion  $f_{\Delta}(\Delta)$  und Träger  $\mathcal{B}_{\mathbb{D}}$  ist.

Interessiert man sich für die Worst-Case Performance, also für jenes  $\gamma_{wc}$ , sodass  $J(\Delta) \leq \gamma_{wc}$  für alle  $\Delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{D}}$  gilt, so muss

$$\gamma_{wc} := \sup_{\Delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{D}}} J(\Delta)$$

bestimmt werden. Für das probabilistische Gegenstück dazu trifft man wieder die Annahme, dass  $\Delta$  eine Zufallsmatrix mit Dichtefunktion  $f_{\Delta}(\Delta)$  und Träger  $\mathcal{B}_{\mathbb{D}}$  ist. Man erhält nun die probabilistische Worst-Case Performance  $\bar{\gamma}$  mit dem Wahrscheinlichkeitslevel  $\epsilon \in (0, 1)$ , sodass

$$\bar{\gamma} \leq \gamma_{wc} = \sup_{\Delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{D}}} J(\Delta),$$

und

$$\mathbb{P}\{J(\Delta) \leq \bar{\gamma}\} \geq 1 - \epsilon.$$

Ist man an der Berechnung von

$$p(\gamma) = \mathbb{P}\{J(\Delta) \leq \gamma\} = \int_{\mathcal{B}_G} f_{\Delta}(\Delta) d\Delta$$

interessiert, wobei  $\mathcal{B}_G := \{\Delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{D}} : J(\Delta) \leq \gamma\}$ , so muss ein multiples Integral gelöst werden. Die exakte analytische Lösung davon ist bereits für einfache Systeme sehr schwierig, weshalb sich eine numerische Approximation anbietet. Dafür empfiehlt die Literatur, beispielsweise [6], einen Monte-Carlo Ansatz. Dazu werden  $M$  unabhängig und identische verteilte Stichproben

$$\Delta^{1, \dots, M} := \{\Delta^1, \dots, \Delta^M\}$$

aus der Menge  $\mathcal{B}_{\mathbb{D}}$  gezogen, welche gemäß der gegebenen Dichtefunktion  $f_{\Delta}(\Delta)$  verteilt sind. Die empirische Wahrscheinlichkeit der Stabilität ist nun definiert als

$$\hat{p}_R(\gamma) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\mathcal{B}_G}(\Delta^i)$$

mit der Indikatorfunktion

$$\mathbb{1}_{\mathcal{B}_G}(\Delta^i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \Delta^i \in \mathcal{B}_G. \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Genauigkeit dieser empirischen Wahrscheinlichkeit lässt sich mit Hilfe der Chernoff-Ungleichung abschätzen. Diese besagt, dass für jede Genauigkeit  $\epsilon \in (0, 1)$  und jede Konfidenz  $\delta \in (0, 1)$ , falls

$$M \geq \frac{1}{2\epsilon^2} \log \frac{2}{\delta},$$

mit Wahrscheinlichkeit größer als  $1 - \delta$  gilt

$$|\hat{p}_M(\gamma) - p(\gamma)| < \epsilon.$$

Ebenso lässt sich die empirische Worst-Case Performance durch die Approximation

$$\bar{\gamma}_M := \max_{i=1, \dots, M} J(\Delta^i)$$

bestimmen. Analog zur Chernoff-Ungleichung gilt für jede Genauigkeit  $\epsilon \in (0, 1)$  und jedes  $\delta \in (0, 1)$  mit

$$M \geq \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\log \frac{1}{1-\epsilon}},$$

falls die Wahrscheinlichkeit größer als  $1 - \delta$ , dass

$$\mathbb{P}\{J(\Delta) \leq \bar{\gamma}_M\} \geq 1 - \epsilon.$$

In der Literatur findet dieser Ansatz vor allem für freie Systeme Anwendung [7]. Herausfordernder ist die Untersuchung von nicht freien System, also jenen mit noch nicht festgelegtem Systemeingang. Im Gegensatz zum Linearen fallen im Nichtlinearen lokale und globale Eigenschaften nicht mehr zusammen. Durch den Ansatz mit der Monte-Carlo Simulation, angewandt auf ein nichtlineares, nicht freies System, ändern sich nur die Modellparameter, was bedeutet, dass nur lokal die Robustheit geprüft wird. Die Folgerung ist, dass zufällige dynamische Signale generiert werden müssen, um auch den Sollgrößenverlauf zu variieren und damit die Robustheit für verschiedene Eingangssignale numerisch zu bewerten.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Dieser Abschnitt beschreibt die Struktur der Arbeit und die wesentlichen Inhalte der einzelnen Kapitel.

In Kapitel 2 werden zunächst die Anforderungen an das Signal, das der zufällige Trajektoriengenerator erzeugen soll, formuliert. Darauf aufbauend folgt eine Literaturstudie zu bereits vorhandenen Methoden zur Generierung zufälliger Signale, wobei die zuvor formulierten Anforderungen mitberücksichtigt werden. Anschließend wird ein Konzept für einen zufallsbasierten Trajektoriengenerator erarbeitet.

Kapitel 3 widmet sich der Analyse und Charakterisierung des Trajektoriengenerators. Konkret wird das Ziel verfolgt die in Kapitel 2 getroffenen Entwurfsannahmen anhand spezifischer numerischer Simulationsstudien zu verifizieren. Neben der Verteilung der Endzeiten und der Endwerte sowie der zeitabhängigen Verteilung der Signalwerte wird auch das Verhalten der Ableitungen der zufällig generierten Signale untersucht. Weiters wird auf zwei verschiedene Arten evaluiert, ob man die Annahmen bezüglich der stationären und dynamischen Anteile der Signaltbereiche in den Simulationsergebnissen bestätigen kann. Eine spektrale Analyse liefert die Antwort auf die Frage, ob die zufällig generierten Signale auch zur Systemidentifikation geeignet sind. Die anwendungsorientierten Fragestellungen werden ergänzt durch eine theoretische Betrachtung der generierten Signale. Weiters wird untersucht, ob die generierte Signalschar einem stationären Zufallsprozess entspricht.

Anhand eines kompakten dynamischen Simulationsbeispiels eines geschlossenen, nichtlinearen Regelkreises wird in Kapitel 4 die Anwendung des zufallsbasierten Trajektoriengenerators getestet. Bei dem Simulationsmodell handelt es sich um ein Feder-Masse-System mit Haftreibung. Das Verhalten des geschlossenen Regelkreises wird unter Anwendung der probabilistischen Robustheit qualitativ und quantitativ untersucht. Zur Einordnung der Ergebnisse der probabilistischen Bewertung anhand unterschiedlicher Metriken wird die Sprungantwort als Vergleich herangezogen. Diese Betrachtungen werden sowohl für eine Linearisierung des Systems als auch für den nichtlinearen Regelkreis aufgestellt und diskutiert.

## 2 Generierung zufälliger Signale

Dieses Kapitel widmet sich dem Entwurf eines Generators für zufällige dynamische Signale. Basierend auf repräsentativen Anwendungsfällen aus der Regelungstechnik werden zuerst die Anforderungen an den Generator spezifiziert. Darauf aufbauend werden die Ergebnisse einer spezifischen Literaturstudie zusammengefasst und mit Bezug auf das Ziel dieser Arbeit bewertet. Basierend auf diesen Erkenntnissen bildet der Entwurf eines problemangepassten, zufallsbasierten Trajektoriengenerators den Abschluss dieses Kapitels. Dabei wird ein besonderer Fokus auf die einzelnen Bereiche einer Trajektorie sowie auf ihre Wechselzeitpunkte gelegt.

### 2.1 Signalanforderungen

Wie am Ende von Abschnitt 1.3 indiziert wurde, soll das generierte Signal eine Eingangsgröße für ein dynamisches System, im Speziellen eine Sollgröße für einen nichtlinearen Regelkreis, sein. Darauf aufbauend lassen sich folgende Anforderungen ableiten:

- Für das Signal  $x$  gilt

$$x(t) : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

es ist also skalar. Die Festlegung des Definitions- und Zielbereichs auf das Intervall  $[0, 1]$  ist im Allgemeinen keine Einschränkung, da durch die Transformation

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = x_1 + (x_2 - x_1)x\left(\frac{\tilde{t}}{t_E}\right)$$

beliebige Definitionsbereiche  $\tilde{t} \in [0, t_E]$  mit der Endzeit  $t_E$  und beliebige Zielbereiche  $\tilde{x} \in [x_1, x_2]$  realisiert werden können.

- Es wird Stetigkeit vom Signal gefordert, da sich Ausgänge von dynamischen Systemen auf Grund der internen Zustandsdynamik nur kontinuierlich verändern können.
- Das Signal besteht aus einer Aneinanderreihung von stationären und dynamischen Bereichen. Die dynamischen Abschnitte sollen dabei repräsentativ für Arbeitspunktwechsel sein. Ein dynamischer Bereich stellt die Verbindung zwischen zwei stationären Bereichen dar, wobei diese Übergänge, wie im vorherigen Punkt gefordert, stetig sein müssen.
- Das Signal beginnt immer stationär. Zum einen entspricht es einem typischen Testszenario, dass man von einem konstanten Arbeitspunkt weg startet. Andererseits vereinfacht sich damit die korrekte Initialisierung komplexer Simulationen mit mehreren dynamischen Subsystemen.

## 2.2 Literaturstudie zur Generierung zufälliger Signale

Eine der frühesten und einfachsten Methoden zur Modellierung und Erzeugung zufälliger, zeitdiskreter, dynamischer Signale bzw. Zeitreihen basiert auf dem Wiener-Prozess [8]. Der Wiener-Prozess findet unter anderem in der Beschreibung der Brown'schen Bewegung von Partikeln in Gasen und Flüssigkeiten Anwendung. Er beschreibt ein stochastisches dynamisches Bewegungsmodell der Form

$$\frac{d}{dt}x = \epsilon(t), \quad (2.1)$$

mit weißem Rauschem  $\epsilon$ . Wenn man von weißem Rauschen spricht, ist damit ein stochastischer Prozess  $X_t$  gemeint, der gemäß

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= 0 \\ \text{Var}(X_t) &= c \end{aligned}$$

beschrieben werden kann, wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine Konstante ist. Weißes Rauschen ist also mittelwertfrei und besitzt eine endliche Varianz. Es tritt üblicherweise mit einer Normalverteilung auf. Aus einem physikalischen Blickwinkel betrachtet, handelt es sich bei (2.1) um eine Bewegung in  $x(t)$  mit der zufälligen Geschwindigkeit  $\epsilon(t)$ . Ist es das Ziel im Modell nur kontinuierlich veränderliche Geschwindigkeiten zu erhalten, so bietet es sich an, auf ein Random Walk Modell zweiter Stufe [9] gemäß

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \epsilon(t)$$

zurückzugreifen. Hier tritt das zufällige Rauschsignal  $\epsilon(t)$  als Beschleunigungsterm auf. Eine Erweiterung auf höhere Modellordnungen oder vektorielle Signale ist ohne weiteres direkt möglich. Im Rahmen dieser Arbeit ist solch ein Modell nicht geeignet, da die Bewegungen völlig ungerichtet sind und keinen zeitlich konstanten Abschnitt enthalten.

Eine Methode zur zufälligen Verbindung zweier Punkte  $A$  und  $B$  in der Ebene findet sich in [10], ist dem Wiener-Prozess durchaus ähnlich und ist in Abbildung 2.1 zusammengefasst. Dabei wird ein Kreis um den Ursprungspunkt  $A$  mit festem Radius gezeichnet und dieser wird verschoben, sodass  $A_1$  sein neuer Mittelpunkt ist. Der Punkt  $A_1$  liegt dabei in der Schnittmenge des Kreises um  $A$  und des größten Kreises um  $B$ . Diese Methode wird mit einem immer kleineren Kreis um  $B$  fortgeführt. Wie man in Abbildung 2.1 sehen kann, wird diese Vorgehensweise so lange weitergeführt, bis  $B$  erreicht wurde.

In [11] findet sich eine Weiterentwicklung des Algorithmus und dieser wird spezieller, indem er nun durch Wahrscheinlichkeiten die Charakteristiken des sich bewegenden Objekts berücksichtigt. Konkret wird unter anderem die mögliche Änderung in der Bewegungsrichtung limitiert. Dadurch wird im Schnitt der beiden Kreise jene Fläche verkleinert, woraus der nächste Punkt gewählt wird. Getestet wurde der Algorithmus anhand von Vögeln mit GPS-Tags. Generell erinnert die Anwendung an Bewegungen in der Ebene. Das Ziel dieser Arbeit ist es nicht, dass das Signal zwei Punkte in der Ebene verbinden soll. Deshalb scheint der Einsatz für skalare Signale, wie in den Anforderungen aus Abschnitt 2.1 erwähnt, nicht vielsprechend.



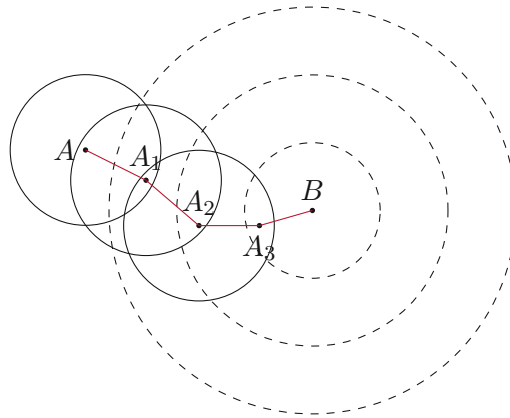


Abbildung 2.1: Methode zur Generierung einer zufälligen Trajektorie zwischen zwei Endpunkten.

Der Untersuchung und Modellierung von stochastischen Zeitreihen widmet sich auch [12]. Darin werden Observable Operator Models (OOMs) bzw. Hidden Markov Models (HMMs) verwendet, um die beobachteten Signale nachzubilden. Die Ergebnisse lassen sich gut für stochastische Zeitreihen verwenden. Da in dieser Arbeit aber nicht durch Wahrscheinlichkeiten zwischen stationären und dynamischen Bereichen gewechselt wird, helfen die erwähnten Modelle nicht weiter.

In der Regelungstechnik treten zufällige Signale gelegentlich als Störungen auf. Wie zufällige Signale für die Bewertung geschlossener Regelkreise eingesetzt werden können, wird in [13] diskutiert. Dabei bilden speziell konstruierte Filter die elementaren Bausteine, welche durch zufällige Signale angeregt werden, die in Amplitude und Zeitpunkt variieren. Exemplarisch werden Rampen und Schwingungen modelliert. Hier gezielt Übergänge zwischen dynamischen und stationären Signalen zu realisieren, ist nicht direkt möglich, da dafür zwei exakt gegengleiche Stöße auftreten müssten.

Übergänge bzw. Transitionen in Bewegungsabläufen werden in der Robotik oft mittels Motion Primitives beschrieben, wie auch in [14]. Dort werden Motion Primitives vor allem in der Planung eingesetzt, um den Lösungsraum einzuschränken. Im Sinne der Anforderungen aus Abschnitt 2.1 ist es damit möglich den Übergang zwischen dynamischen und stationären Signalen zu modellieren.

## 2.3 Konzept des zufallsbasierten Trajektoriengenerators

Angelehnt an die Anforderungen aus Abschnitt 2.1 wird nun ein Konzept für einen zufallsbasierten Trajektoriengenerator entwickelt. Wie am Ende des vorherigen Unterkapitels beschrieben, kann mit Hilfe von Motion Primitives der Wechsel zwischen stationären und dynamischen Bereichen eines Signales modelliert werden. Abbildung 2.2 zeigt dieses Modell, visualisiert durch einen Graphen.

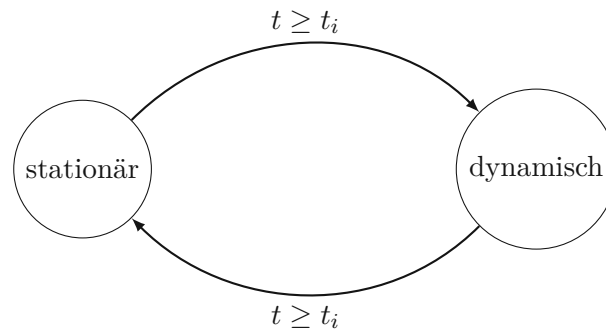


Abbildung 2.2: Zustandsgraph als Modell des zufallsbasierten Trajektoriengenerators.

Weiterhin muss nun festgelegt werden, wann Transitionen zwischen den Zuständen eintreten und wie das Signal in jeweiligen Zustand, stationär oder dynamisch, generiert wird. Beginnen wir mit der Erstellung der Signale. In den stationären Bereichen gilt  $\frac{dx}{dt} = 0$  bzw.  $x = c$ ,  $c$  konstant. Das bedeutet, das Signal ist über den Startwert  $x_0$  und die Dauer  $\Delta t_i$  bereits vollständig beschrieben.

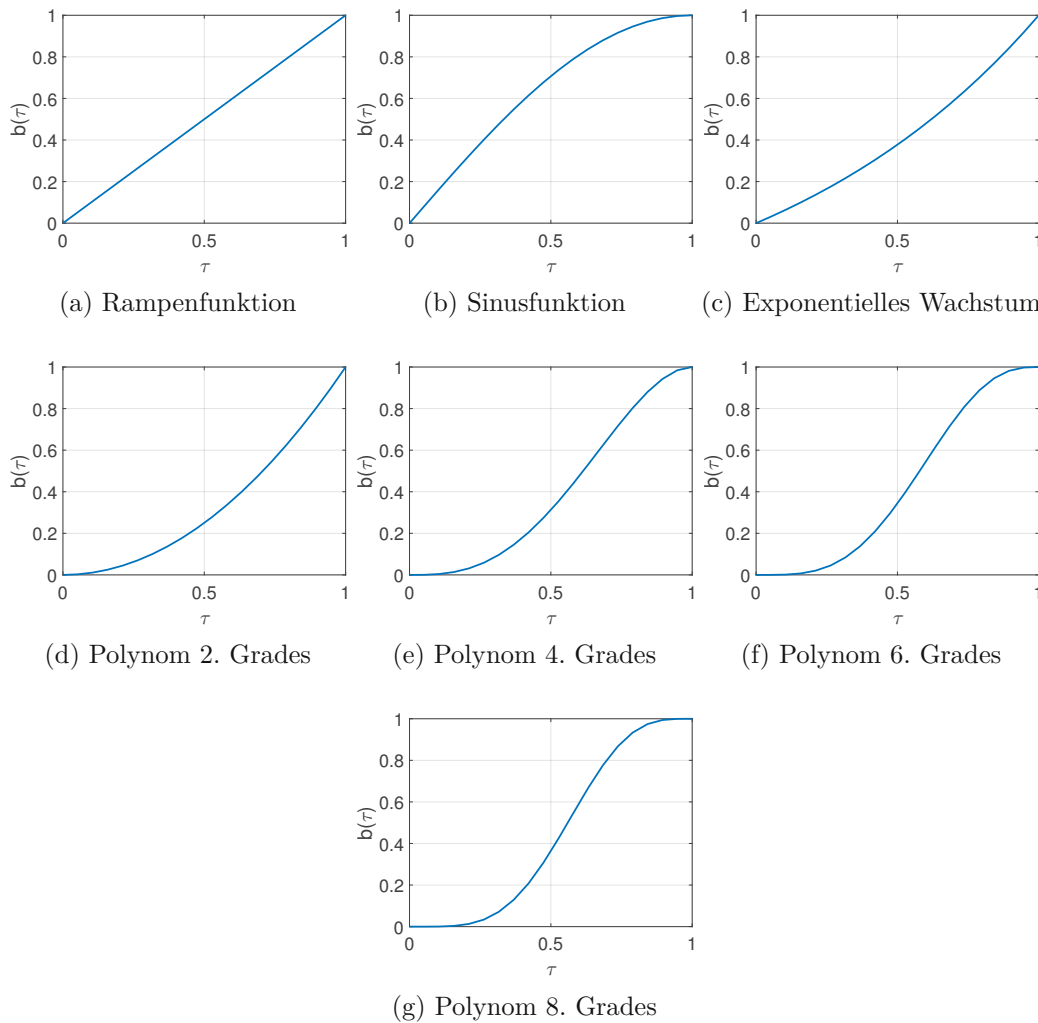
Ein dynamischer Bereich muss hingegen zwei stationäre Bereiche verbinden. Neben dem Startwert  $x_0$  und der Dauer  $\Delta t_i$  wird hier zur eindeutigen Definition des Signals noch die Höhe  $\Delta x_i$  und die Art der Verbindung, im Folgenden als Baustein  $b(\tau)$  bezeichnet, benötigt. Durch  $x_0 + \Delta x_i$  wird festgelegt, wo der dynamische Abschnitt endet. Ein Baustein wird zufällig ausgewählt, wobei zunächst  $b(0) = 0$  und  $b(1) = 1$  gelten muss. Erst danach wird dieser so skaliert, damit er zu den stationären Signalen davor und dahinter passt. Das bedeutet, sowohl am Anfang als auch am Ende eines dynamischen Bereichs ist Stetigkeit gewährleistet. Mathematisch kann dies durch

$$x(t) = x_0 + \Delta x_i b\left(\frac{t - t_i}{\Delta t_i}\right)$$

beschrieben werden. Tabelle 2.1 zeigt eine Übersicht der sieben Bausteine und Abbildung 2.3 eine graphische Darstellung davon. Aufgrund der fehlenden Stetigkeit wird die Sprungfunktion nicht als Baustein verwendet.

Baustein	$b(\tau)$
Rampenfunktion	$\tau$
Sinusfunktion	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$
Exponentielles Wachstum	$\frac{1 - e^{-\tau}}{1 - e^{-1}}$
Polynom 2. Grades	$\tau^2$
Polynom 4. Grades	$-3\tau^4 + 4\tau^3$
Polynom 6. Grades	$10\tau^6 - 24\tau^5 + 15\tau^4$
Polynom 8. Grades	$-35\tau^8 + 120\tau^7 - 140\tau^6 + 56\tau^5$

Tabelle 2.1: Auflistung der Bausteine zur Konstruktion eines dynamischen Bereichs.

Abbildung 2.3: Elementare Bausteine  $b$  für die dynamischen Bereiche.

Es ist nun zu klären, wie die Wechselzeitpunkte festgelegt werden. Eine Möglichkeit dafür ist die Anzahl der Wechsel und die relativen Zeitdauern zu verwenden. Das heißt, für die Erzeugung einer zufälligen Trajektorie wählt man einen Wert  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 0$  und einen Wert  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ .  $N$  steht dabei für die Anzahl der Wechsel zwischen stationären und dynamischen Bereichen und  $r$  für das Verhältnis des Erwartungswertes  $\mu_t^s$  der stationären Zeitpunkte zu dem Erwartungswert  $\mu_t^d$  der dynamischen Zeitpunkte. Die Zusammenhänge

$$r = \frac{\mu_t^s}{\mu_t^d}, \quad (2.2a)$$

$$1 = \frac{N+1}{2}(\mu_t^s + \mu_t^d), \quad (2.2b)$$

erlauben es die beiden Erwartungswerte  $\mu_t^s$  und  $\mu_t^d$  zu ermitteln. Bei einer Anzahl von  $N$  Wechseln zwischen stationären und dynamischen Bereichen gibt es insgesamt  $N+1$  Bereiche.

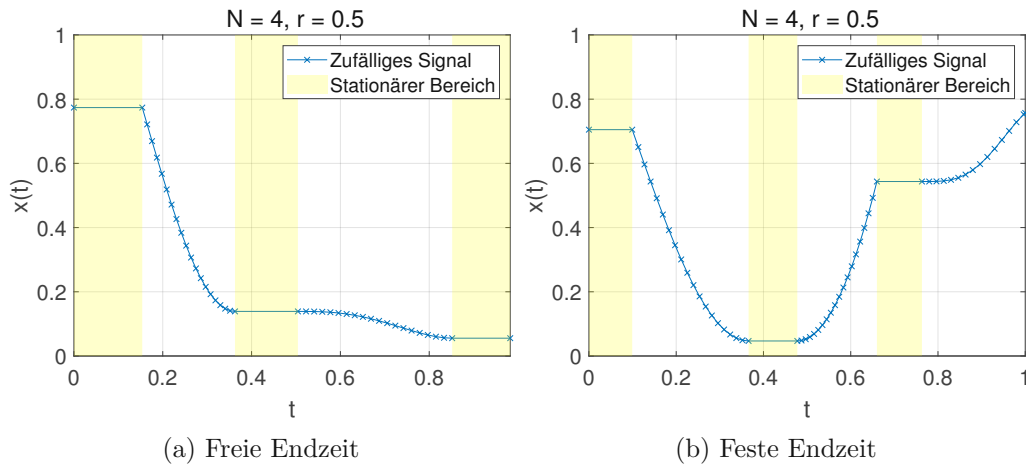


Abbildung 2.4: Zufällige Signale mit stationärem Beginn,  $N = 4$  und  $r = 0.5$ .

Nimmt man nun  $(N + 1)$ -mal die durchschnittliche Länge eines stationären Bereichs und  $(N + 1)$ -mal die durchschnittliche Länge eines dynamischen Bereichs, so erhält man die zweifache Signallänge. Ziel ist es hier, dass die Trajektorie bei  $t = 1$  endet. Genau das stellt Gleichung (2.2b) sicher. Die stationären und dynamischen Endzeitpunkte sind hier gleichverteilt, jeweils mit dem Erwartungswert  $\mu_t^s$  bzw.  $\mu_t^d$ . Der  $x$ -Endwert im dynamischen Bereich sowie der Startwert der Trajektorie unterliegen einer Gleichverteilung im Intervall  $[0, 1]$ . Da es für die praktische Anwendung häufig relevant ist, kann der Startwert auch als optionaler Parameter vorgegeben werden. Basierend auf (2.2) lassen sich nach Vorgabe von  $r$  und  $N$  die Erwartungswerte der stationären und dynamischen Bereiche bestimmen.

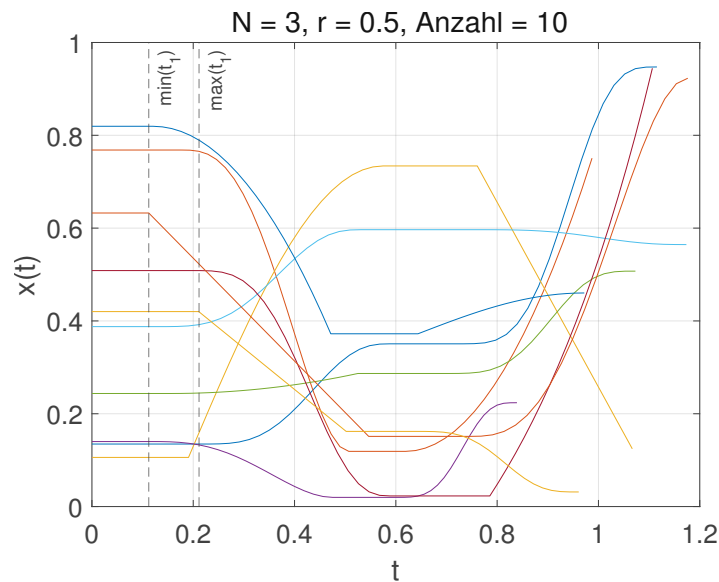


Abbildung 2.5: Zehn zufällige Signale mit festem  $N$ , freier Endzeit und stationärem Beginn.

Wählt man nun die tatsächlichen Zeiten entsprechend dieser Verteilung, so erhält man nach  $N$  Umschaltungen natürlich nur im Mittel Signale der Länge 1. Die Endzeit ist also bei festem  $N$  variabel. Ist man an einer festen Endzeit interessiert, so muss  $N$  frei bleiben, um das Signal zu kürzen bzw. zusätzliche Bereiche hinzufügen zu können.

Abbildung 2.4a zeigt den soeben erwähnten ersten Fall, Abbildung 2.4b den zweiten Fall. Offensichtlich sind hier 5 statt 4 Wechseln zwischen den Bereichen notwendig.

Abbildung 2.5 zeigt 10 zufällige Signale, wobei alle mit festem  $N$  erstellt wurden. Man erkennt in den dynamischen Abschnitten die Verwendung der unterschiedlichen Bausteine aus Abbildung 2.3. Weiter sieht man gut, dass die stationären Anfänge unterschiedlich lange dauern, verdeutlicht durch die beiden vertikalen, strichlierten Linien.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

## 3 Analyse des Trajektoriengenerators

Nachdem im vorangehenden Kapitel ein Generator für zufällige dynamische Signale entwickelt wurde, folgt nun ein Abschnitt, der dessen Analyse und Charakterisierung diskutiert. Der Beginn dieses Kapitels widmet sich intensiv der Verifizierung der in Kapitel 2 getroffenen Annahmen an das Verhalten des Generators. Dabei wird ein Monte-Carlo Ansatz verwendet, um die angenommenen Eigenschaften empirisch mittels numerischer Ergebnisse zu bewerten und einzuordnen. Aufbauend darauf erfolgt eine spektrale Analyse mit dem Ziel, die Anwendbarkeit der Signale für die Identifikation dynamischer System zu bewerten. Abschließend wird ansatzweise untersucht, ob der formulierte Trajektoriengenerator in der Lage ist, eine Signalschar zu erzeugen, welche der Definition eines stationären Zufallsprozesses entspricht.

### 3.1 Verteilung der Endzeiten

In Kapitel 2 wurde diskutiert, dass der entworfene Generator in der Lage sein soll, Zufallssignale mit fester oder freier Endzeit zu generieren. In einem ersten Schritt wird die Konfiguration mit freier Endzeit  $t_{end}$  und festen Wechseln  $N$  untersucht. Konkret ist zu verifizieren, ob die Entwurfsannahme für den Erwartungswert der Endzeit  $t_{end}$  gemäß (2.2b) erfüllt ist, also  $\mathbb{E}(t_{end}) = 1$  gilt. Für die nun folgende Diskussion wurden jeweils  $10^4$  zufällige Signale generiert und bewertet.

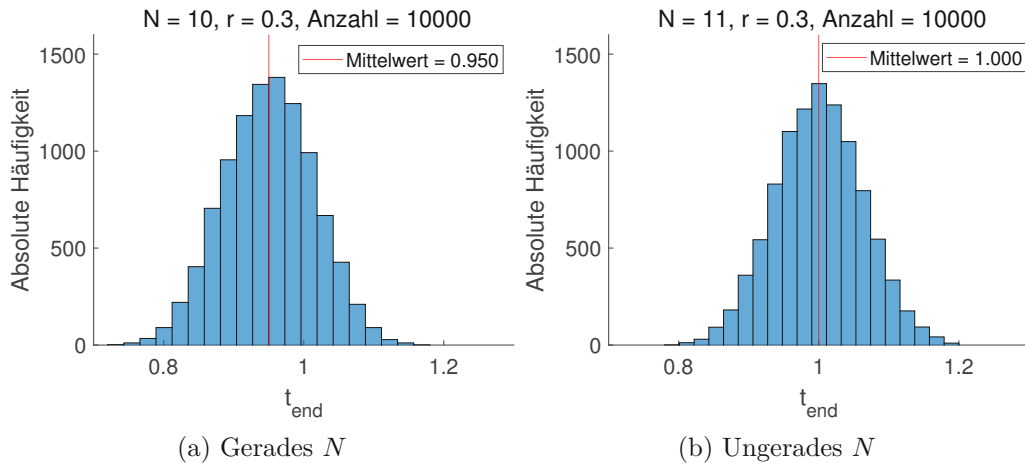


Abbildung 3.1: Verteilung der Endzeiten mit  $r = 0.3$ .

Den Startpunkt der Untersuchungen bilden die beiden Histogramme in Abbildung 3.1. Darin aufgetragen sind die Verteilungen der Endzeiten  $t_{end}$  für ein festes Verhältnis  $r = 0.3$ , einer geraden Anzahl an Bereichswechseln  $N = 10$  (links) und einer ungeraden

Anzahl an Bereichswechseln  $N = 11$  (rechts). Zusätzlich sind die jeweiligen beobachteten Erwartungswerte der Endzeit dargestellt. An dieser Stelle fällt auf, dass für die Signale mit ungeradem  $N$  der Mittelwert in guter Näherung der Vorgabe  $\mathbb{E}(t_{end}) = 1$  entspricht. Für gerades  $N$  tritt eine erhebliche Abweichung auf.

Das offenkundige Unterscheidungsmerkmal beider Konfigurationen ist die Anzahl an Wechsel und damit auch die Art des Endbereiches. Da per Definition der Start stets stationär ausgeführt wird, enden Signale mit geradem (ungeradem)  $N$  immer in einem stationären (dynamischen) Bereich. Somit wird klar, dass für gerades  $N$ , genau  $\frac{N}{2}$  dynamische und  $\frac{N}{2} + 1$  stationäre Bereiche im Signal enthalten sind. Diese entspricht jedoch nicht exakt der ursprünglichen Formulierung gemäß (2.2b). An dieser Stelle ist ebenso von Bedeutung, dass durch die Wahl von  $r = 0.3$  die jeweiligen Erwartungswerte der Bereiche unterschiedlich ausfallen, also  $\mu_t^s \neq \mu_t^d$ . Strebt  $r$  gegen 1, so verringert sich der Einfluss des festgelegten Startbereiches deutlich. Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3 veranschaulichen die Abnahme der Abweichung  $|\mathbb{E}(t_{end}) - 1|$  für  $r \rightarrow 1$ .

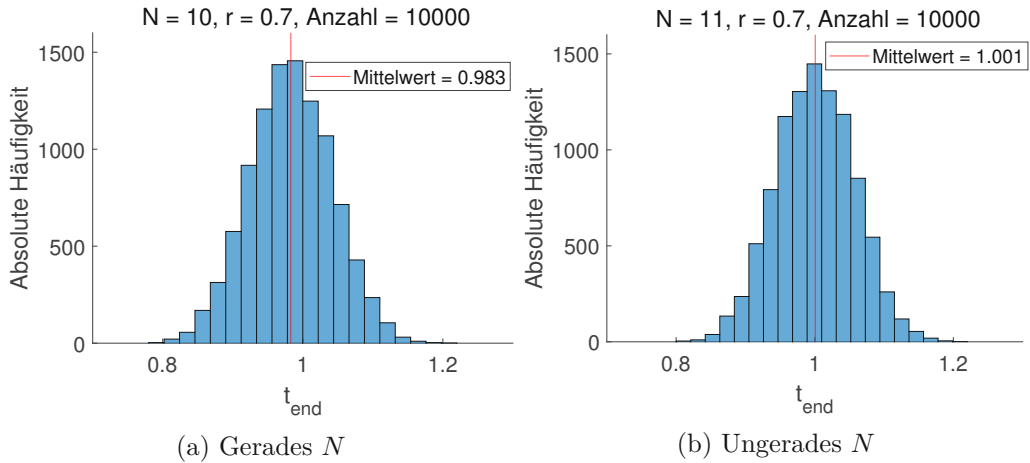


Abbildung 3.2: Verteilung der Endzeiten mit  $r = 0.7$ .

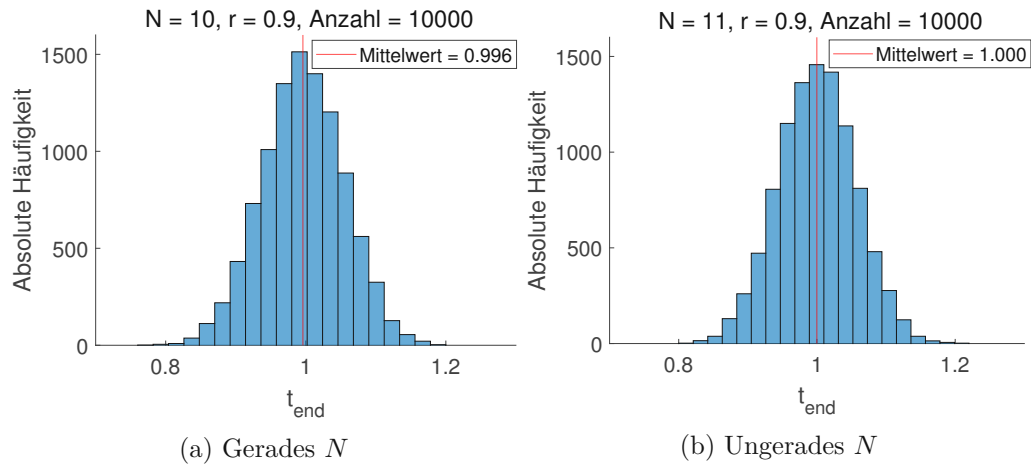
In Abbildung 3.3 wurde  $r = 0.9$  gesetzt. Das bedeutet, alle stationären sind annähernd gleich lang wie alle dynamischen Bereiche. Es lässt sich erkennen, wenn  $r$  gegen 1 strebt, rückt der Mittelwert bei geradem  $N$  immer näher zu 1. Trotzdem ist es auffällig, dass bei geradem  $N$  und kleinem  $r$  der Erwartungswert 1 sehr schlecht angenähert wird. Es sei daran erinnert, dass der erste Bereich einer Trajektorie immer stationär ist. Das Ziel ist nun, die Formulierung des Gleichungssystems zur Ermittlung der Erwartungswerte  $\mu_t^s$  und  $\mu_t^d$  gemäß (2.2) so zu adaptieren, dass sowohl für gerade als auch ungerade  $N$  der Erwartungswert der Endzeiten bei 1 zu liegen kommt. Eine Formulierung gemäß

$$r = \frac{\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil \mu_t^s}{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \mu_t^d}, \quad (3.1a)$$

$$1 = \left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil \mu_t^s + \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \mu_t^d \quad (3.1b)$$

berücksichtigt inhärent mit, dass stets in einem stationären Bereich gestartet wird.



Abbildung 3.3: Verteilung der Endzeiten mit  $r = 0.9$ .

Man erkennt in Abbildung 3.4, dass die Verwendung von (3.1) für alle 3 gezeigten Werte von  $r$  erhebliche Verbesserungen in Bezug auf die Annäherung des Mittelwertes an 1 mit sich bringt. In Tabelle 3.1 ist der Vergleich zwischen Zusammenhang (2.2) und (3.1) nochmal dargestellt und die Verbesserung ist auf einen Blick zu erkennen.

	$r = 0.3$	$r = 0.7$	$r = 0.9$
(2.2)	0.950	0.983	0.996
(3.1)	0.999	1.000	1.001

Tabelle 3.1: Vergleich der Erwartungswerte der Endzeiten für  $N = 10$ .

An dieser Stelle sei angemerkt, dass für große Werte in  $N$  die Gleichungen (3.1) und (2.2) äquivalent sind. Um das zu zeigen, muss

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_t^{s1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_t^{s2} \quad \text{und} \quad (3.2a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_t^{d1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_t^{d2} \quad (3.2b)$$

gelten. Durch Umformen von (2.2) lassen sich  $\mu_t^{s1}$  und  $\mu_t^{d1}$  ausdrücken. Analoges gilt für  $\mu_t^{s2}$  und  $\mu_t^{d2}$  und (3.1). Wir zeigen zunächst (3.2b).

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_t^{d1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{(N+1)(r+1)} = 0 \quad (3.3a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_t^{d2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(r+1) \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} = 0 \quad (3.3b)$$

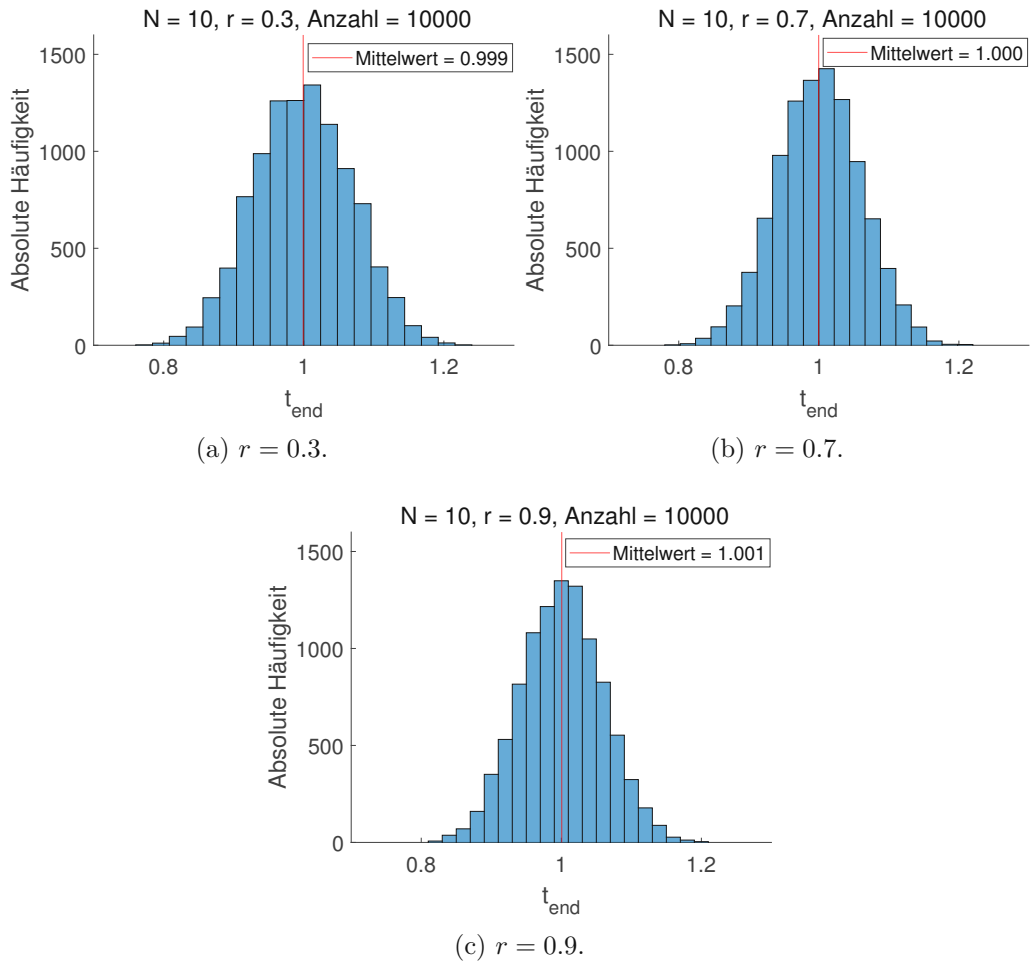


Abbildung 3.4: Verteilung der Endzeiten für gerades  $N$ , gemäß Zusammenhang (3.1).

Um (3.2a) zu verifizieren, wird zwischen ungeraden und geraden  $N$  unterschieden.

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_t^{s_1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} r \mu_t^{d_1} \stackrel{(3.3a)}{=} 0 \\
 \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_t^{s_2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r \mu_t^{d_2} \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil}{\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil} = \\
 &= \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r \mu_t^{d_2} \left( \frac{N+1}{2} \right)}{\frac{N+1}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} r \mu_t^{d_2} \stackrel{(3.3b)}{=} 0, & N \text{ gerade,} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r \mu_t^{d_2} \left( \frac{N}{2} \right)}{\frac{N+2}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r \mu_t^{d_2} N}{N+2} = \lim_{N \rightarrow \infty} r \mu_t^{d_2} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2}{N}}}_{\rightarrow 1} \stackrel{(3.3b)}{=} 0, & N \text{ ungerade.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend kommt man zu der Erkenntnis, dass es für große  $N$  keinen Unterschied macht, ob zur Berechnung der Erwartungswerte (2.2) oder (3.1) verwendet wird. Da in der Praxis nur eine endliche Anzahl an Wechsel auftritt, ist trotz der soeben gezeigten Äquivalenz die angepasste Formulierung gemäß (3.1) vorzuziehen.

### 3.2 Verteilung der Endwerte

Weiter ist zu prüfen, ob die Verteilung der Endwerte der Trajektorien im Intervall  $[0, 1]$  annähernd einer Gleichverteilung entspricht. Erneut werden  $10^4$  Signale für die Untersuchung herangezogen. Gemäß der Entwurfskriterien ist das erwartete Ergebnis hier eine Gleichverteilung.

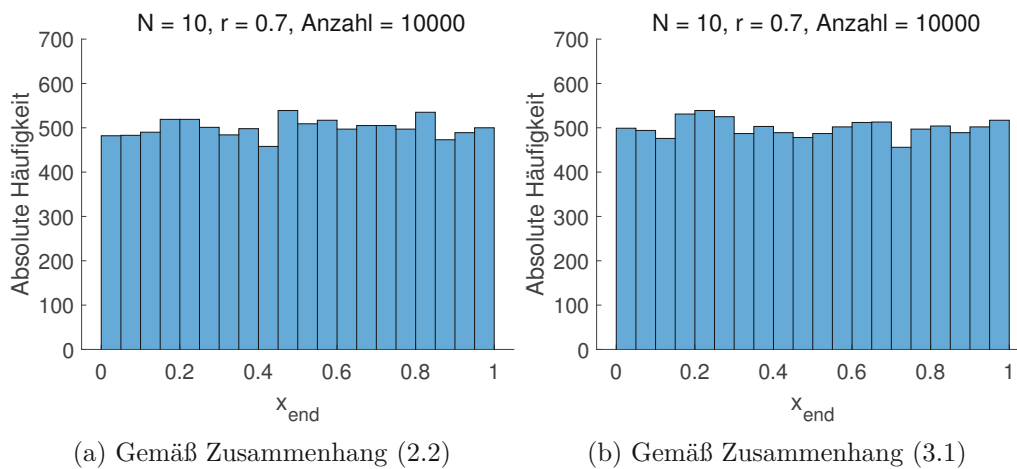


Abbildung 3.5: Verteilung der Endwerte mit freier Endzeit.

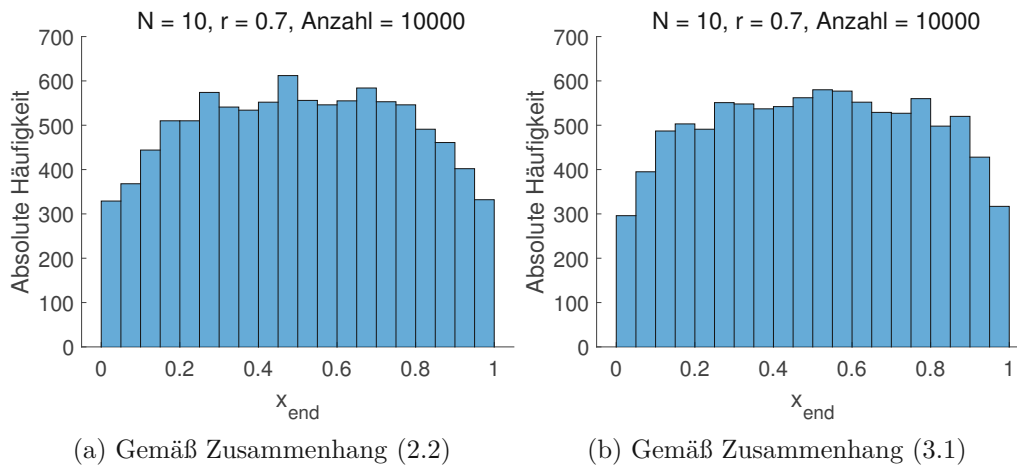


Abbildung 3.6: Verteilung der Endwerte mit fester Endzeit.

Da für eine freie Endzeit, bei festem  $N$ , der Endwert eines stationären Bereichs per Definition dem Endwert des vorhergehenden dynamischen Bereiches entsprechen muss,

fällt diese Untersuchung im Wesentlichen auf die Bewertung der Verteilung der Endwerte des letzten dynamischen Bereichs zurück. Abbildung 3.5 zeigt zwei Histogramme zu den Verteilungen für  $N = 10$ ,  $r = 0.7$  und freie Endzeit. Es ist zu erkennen, dass die Verteilung sowohl für die Erwartungswerte gemäß (2.2) als auch (3.1) in guter Näherung einer Gleichverteilung entspricht.

Wesentlich interessanter ist die Verteilung der Endwerte für eine feste Endzeit und somit freies  $N$ . Abbildung 3.6 zeigt eine deutliche Abweichung zur vorher beobachteten Gleichverteilung. Der Ursprung dieser Abweichung ist vor allem in den dynamischen Bereichen zu suchen, da bei fester Endzeit die Signale auch an einer beliebigen Stelle im dynamischen Bereich enden können. Da die dynamischen Bereiche zwei gleichverteilte Punkte verbinden, nimmt die Häufung an den Rändern ( $x = 0$  und  $x = 1$ ) ab und konzentriert sich um  $x = 0.5$ . Das relative Verhältnis zwischen dynamischen und stationären Bereichen beeinflusst nun deutlich die Form der Verteilung und kann über die Wahl von  $r$  gesteuert werden.

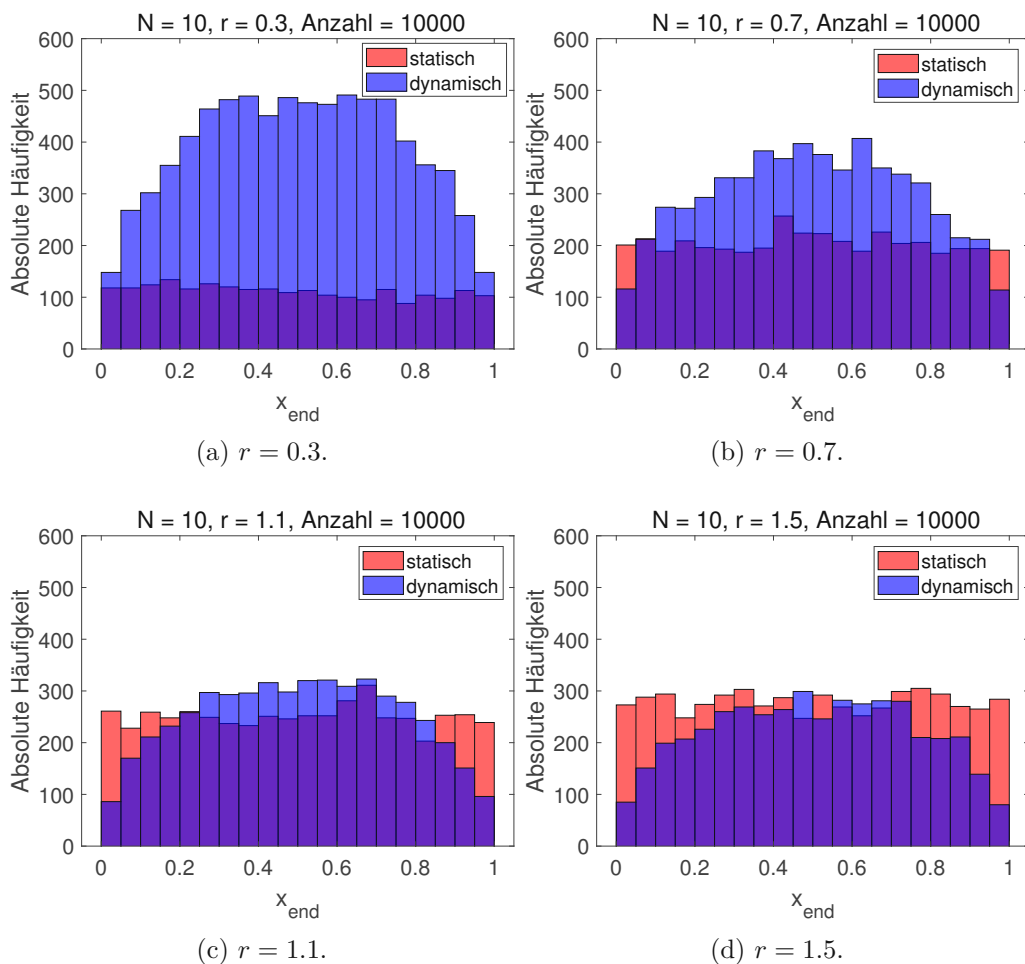


Abbildung 3.7: Verteilung der Endwerte mit fester Endzeit, gemäß Zusammenhang (3.1).

Abbildung 3.7 zeigt die sich ändernden Verteilungen für verschiedene Werte von  $r$ . Für steigendes  $r$  bleibt die Verteilung der Endwerte eines stationären Bereichs eine Approximation der Gleichverteilung, nur die absolute Häufigkeit nimmt klarerweise zu. Die Form der Verteilung der Endwerte eines dynamischen Bereichs bleibt annähernd gleich, aber die Häufigkeiten nehmen ab, umso größer  $r$  wird.

### 3.3 Verifizierung der Anteile der Signalbereiche

Der dritte Anhaltspunkt zur Analyse des Trajektoriengenerators ist die Verifizierung der Anteile der Signalbereiche mit Hilfe von  $r$ . Dabei ist interessant, ob das vorgegebene  $r$ , also das Verhältnis des Erwartungswertes  $\mu_t^s$  der stationären Zeitpunkte zu dem Erwartungswert  $\mu_t^d$  der dynamischen Zeitpunkte, tatsächlich dem Verhältnis der addierten Längen der stationären Bereiche zu den addierten Längen der dynamischen Bereiche analytisch entspricht. Wie auch in Abschnitt 3.2 ähneln sich hier ebenfalls die Ergebnisse für verschiedene Werte von  $r$  und  $N$ , weshalb lediglich ein repräsentatives Histogramm präsentiert wird.

Für das Histogramm in Abbildung 3.8 wurden  $10^4$  Signale mit festem  $N$  und variabler Endzeit gemäß Zusammenhang (2.2) erzeugt. Der Mittelwert der berechneten  $r$  der Signale mit ungeradem  $N$  entspricht in guter Näherung dem vorgegebenen Verhältnis. Für gerades  $N$  sind deutliche Abweichungen zu erkennen. Dieses Verhalten, also dass Signale mit ungeradem  $N$  besser der Vorgabe entsprechen als jene mit geradem  $N$ , erinnert an die Beobachtungen aus Abschnitt 3.1. Deshalb soll in weiterer Folge überprüft werden, ob eine Vorgabe von  $r$  gemäß (3.1) hier ebenso zu einer Verbesserung führt.

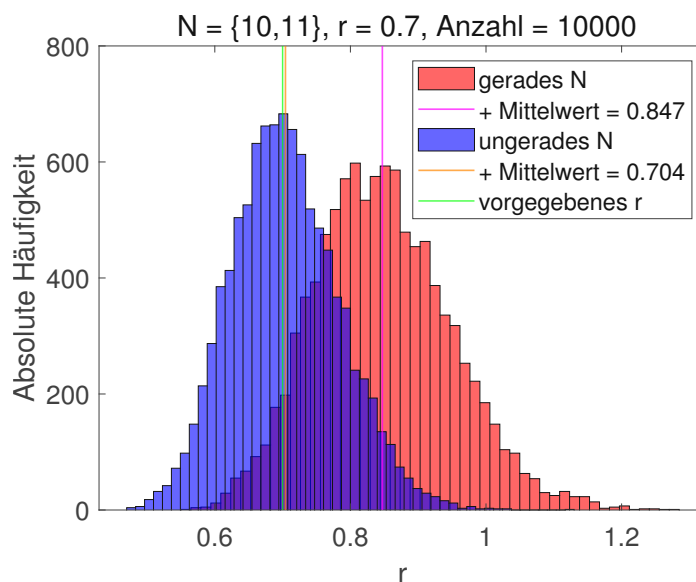


Abbildung 3.8: Verteilung der berechneten Werte  $r$  zufällig generierter Signale mit freier Endzeit gemäß Zusammenhang (2.2).

In Abbildung 3.9 lässt sich klar erkennen, dass die Verwendung des neueren Zusammenhangs von  $r$  und  $N$  (3.1) zu einer höheren Übereinstimmung der beiden Verteilungen führt. Sowohl für gerades als auch ungerades  $N$  liegt das beobachtete Verhältnis bei  $\hat{r}_g \approx 0.706$  bzw.  $\hat{r}_u = 0.705$  hinreichend nahe an der Vorgabe  $r = 0.7$ .

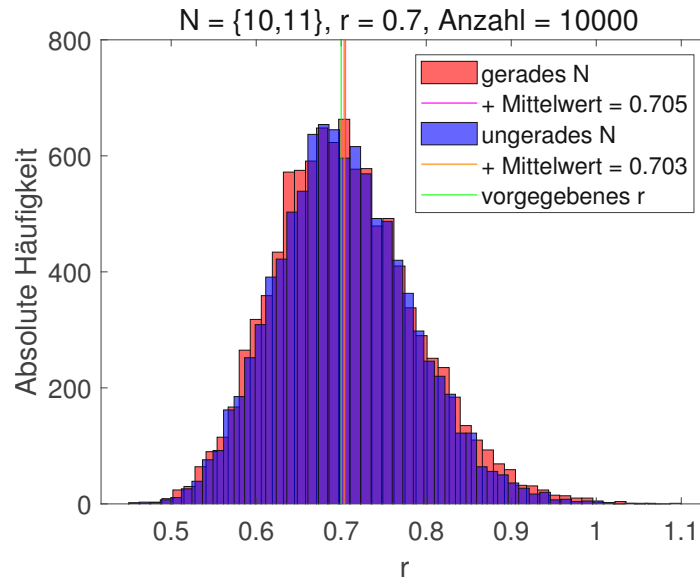


Abbildung 3.9: Verteilung der berechneten Werte  $r$  zufällig generierter Signale mit freier Endzeit gemäß Zusammenhang (3.1).

Genauso wie die Untersuchungen für Signale mit freier Endzeit durchgeführt wurde, soll das Verhalten auch für Signale mit fester Endzeit  $t_{end} = 1$  analysiert werden. Im Gegensatz zu dem Fall mit freier Endzeit, ist die Erwartungshaltung die Ergebnisse betreffend jetzt eine andere. Abbildung 3.10 stellt diese für ungerades  $N$  graphisch dar und soll erklären, wo man das beobachtete Verhältnis  $\hat{r}_u$  vermutet.

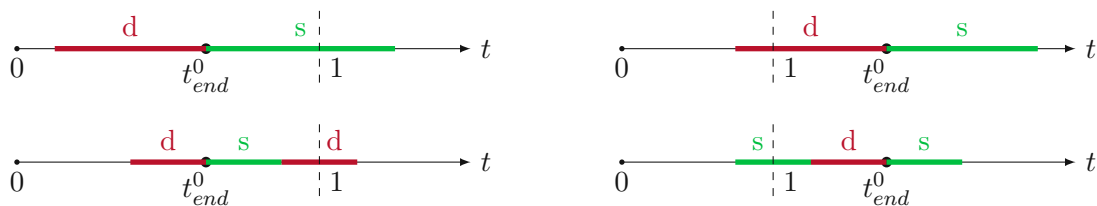


Abbildung 3.10: Fallunterscheidung zur Erwartung des beobachteten Verhältnisses  $\hat{r}_u$  für ungerades  $N$ , wobei d einen dynamischen und s einen stationären Bereich bezeichnet.

Ein ungerades  $N$  bedeutet, dass bei  $N + 1$  Bereichen und stationärem Beginn der letzte Bereich dynamisch ist. Ist nun der Zeitpunkt  $t = t_{end}^0$ , zu dem das Verhältnis  $r$  korrekt ist, vor dem Zeitpunkt  $t = 1$  (die beiden Zeitstrahlen links), so muss entweder ein Teil eines stationären Bereichs oder ein ganzer stationärer und ein Teil eines dynamischen

Bereichs zu  $r$  angefügt werden, um ein Signalende bei  $t = 1$  zu erhalten. Das führt zu einer Vergrößerung von  $r$ . In den beiden rechten Zeitstrahlen liegt der Zeitpunkt  $t = t_{end}^0$  hinter der vorgegebenen Endzeit,  $t_{end}^0 > 1$ . Dadurch wird entweder ein Teil eines dynamischen Bereichs oder ein ganzer dynamischer und ein Teil eines stationären Bereichs abgeschnitten, was  $r$  ebenfalls vergrößert. Würde zwischen den Zeitpunkten  $t = t_{end}^0$  und  $t = 1$  noch ein kompletter stationärer und dynamischer Bereich liegen, so kompensiert der eine den anderen im Mittel und  $r$  bleibt gleich. Es folgt die Annahme, dass bei ungeradem  $N$  der Wert  $\hat{r}_u$  größer als das vorgegebene  $r$  sein muss. Analoge Überlegungen kann man für gerades  $N$  durchführen und kommt zu der Erkenntnis, dass  $\hat{r}_g$  kleiner als das vorgegebene  $r$  sein muss. Zusammengefasst liegt die Vermutung nahe, dass

$$\hat{r}_g < r < \hat{r}_u \quad (3.4)$$

gilt.

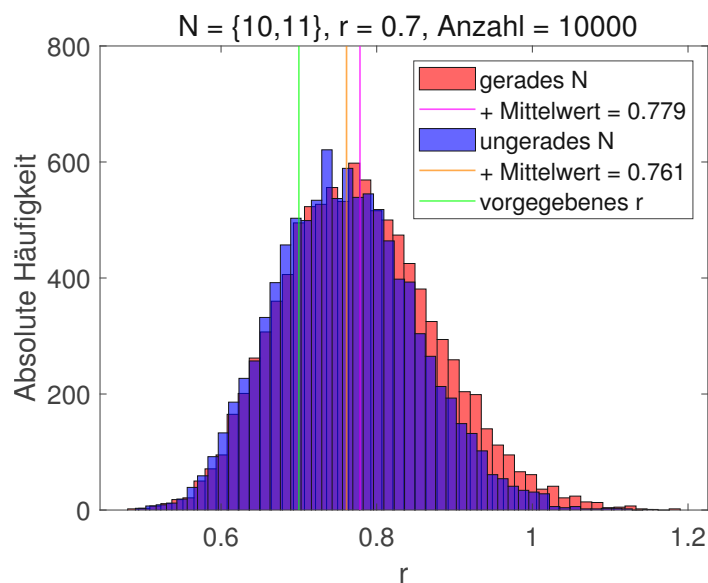


Abbildung 3.11: Verteilung der berechneten Werte  $r$  zufällig generierter Signale mit fester Endzeit gemäß Zusammenhang (2.2).

Für Abbildung 3.11 wurden  $10^4$  Signale mit fester Endzeit gemäß Zusammenhang (2.2) erzeugt. Das beobachtete Verhältnis  $\hat{r}_u$  ist für ungerades  $N$  gemäß den Erwartungen höher als das vorgegebene  $r$ . Auch für das beobachtete Verhältnis für gerades  $N$  gilt  $r < \hat{r}_g$ , was nicht den Erwartungen entspricht. Eine Erklärung der Abweichung zu (3.4) ist, dass der Zusammenhang (2.2) nicht systematisch die stationären Anfänge mitnimmt. Wie im Fall für Signale mit freier Endzeit wird infolgedessen ein weiteres Histogramm unter Verwendung von Zusammenhang (3.1) erstellt.

Abbildung 3.12 bestätigt nun die Erwartungen und spiegelt (3.4) mit  $\hat{r}_g = 0.649$  und  $\hat{r}_u = 0.761$  wider.

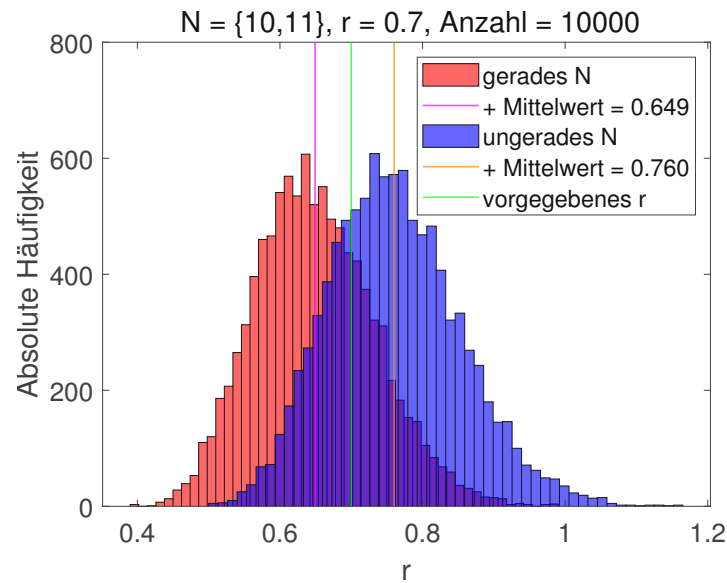


Abbildung 3.12: Verteilung der berechneten Werte  $r$  zufällig generierter Signale mit fester Endzeit gemäß Zusammenhang (3.1).

### 3.4 Zeitabhängige Verteilung

Weiters interessant ist die Verteilung der  $x$ -Werte in Abhängigkeit der Zeit. Es sollen also ergänzend zu den Verteilungen der Endwerte  $x(t=1)$  die Verteilung der Signalwerte  $x(t)$  zu allen Zeiten  $0 \leq t \leq 1$  untersucht werden. Zur anschaulicheren Darstellung werden in diesem Abschnitt lediglich Signale mit fester Endzeit  $t_{end} = 1$  diskutiert. Im Folgenden wird immer ein 2D-Histogramm mit  $10^4$  Signalen erzeugt, wobei auf der Abszisse die  $t$ -Werte, auf der Ordinate die  $x$ -Werte und auf der Applikate die absolute Häufigkeit aufgetragen ist.

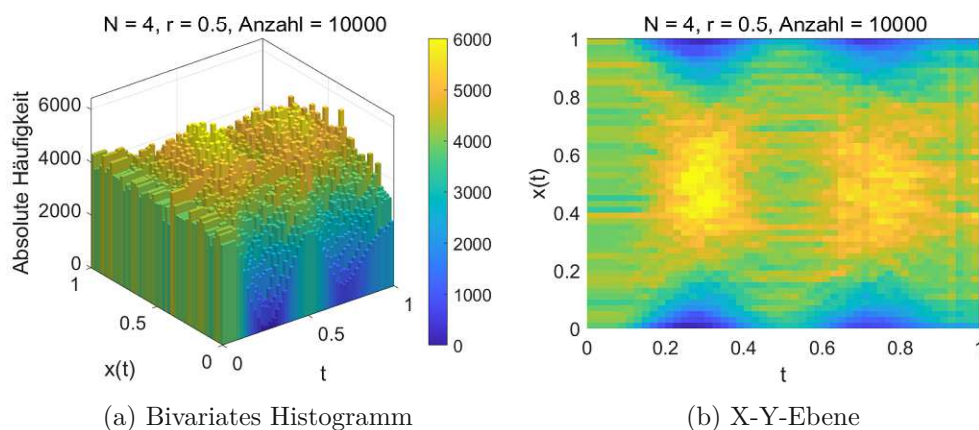


Abbildung 3.13: Zeitabhängige Verteilung zufällig generierter Signale mit fester Endzeit und stationärem Beginn.



In Abbildung 3.13b erkennt man den Verlauf der absoluten Häufigkeiten bei  $10^4$  erzeugten Signalen. Da der erste Bereich stationär ist, verläuft das Signal hier konstant. Daher sind die Werte zu Beginn annähernd gleichverteilt und liegen bei einer Häufigkeit zwischen 3000 und 5000. Im Anschluss erkennt man den Wechsel in den ersten dynamischen Bereich. Hier gibt es weniger Randwerte, dafür eine Häufung im Bereich von ungefähr  $0.3 < x < 0.7$ . In Abbildung 3.13b wird diese Häufung bei  $t \approx 0.3$  besonders deutlich sichtbar. Die Erklärung dazu ist identisch zu jener zu Abbildung 3.6. Durch die Bereichswechsel entsteht, wie man in Abbildung 3.13a sieht, eine Welligkeit in diesem Bereich. Es folgt erneut ein stationärer Bereich. Auch den zweiten dynamischen Bereich kann man deutlich wahrnehmen, jedoch mit weicheren Rändern und einer reduzierten Höhe der Häufungen. Es gibt also weniger Werte im hellgelben Bereich, dafür mehr im orangen. Die Häufigkeit der Werte am Rand hat zugenommen. Das lässt vermuten, dass die Bereiche immer mehr ineinander übergehen und ein stationärer, stochastischer Prozess [15] entstehen könnte. Dazu die folgende

**Definition.** Unter einem *stochastischen Prozess* oder auch *Zufallsprozess* versteht man die Abbildung

$$X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}, (e, t) \rightarrow X_t(e),$$

wobei  $\Omega$  den Ergebnisraum, also die meist nicht abzählbare Menge aller Ereignisse (im Kontext dieser Arbeit Signale)  $e$  und  $T$  die Menge der betrachteten Zeitpunkte darstellt. Durch

$$X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow X_t(e)$$

kann man einen Zeitpunkt  $t_1$  fixieren und erhält mit  $X_{t_1}(e)$  die Werte der Realisierungen des Zufallsprozesses. Man nennt man einen stochastischen Prozess *stationär*, wenn die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

- $f(x, t) = f(x, t + \tau)$ . Verschiebt man die Dichte  $f(x, t)$  um die Zeit  $\tau$ , bleibt ihr Wert gleich, sieht ist also zeitunabhängig.
- $f(x_1, x_2, t_1, t_2) = f(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau)$ . Die Werte der Dichtefunktion zweiter Ordnung können nur von Zeitdifferenz  $t = t_2 - t_1$  abhängen.

Im ersten Schritt soll nun lediglich über die Interpretation von Histogrammen Schlüsse über eine mögliche Stationarität im Sinne eines Zufallsprozesses gezogen werden. Es gibt nun zwei Anpassungsmöglichkeiten, welche dazu führen könnten, dass ein stationärer Prozess entsteht, denn in Abbildung 3.13 ist dieser zumindest am Anfang (noch) nicht zu erkennen. Zunächst soll auch der erste Bereich zufällig sein, also stationär oder dynamisch.

Im Gegensatz zu Abbildung 3.13 wurde in Abbildung 3.14 nun der erste Bereich von stationär zu zufällig geändert. Vergleicht man Abbildung 3.13b und Abbildung 3.14b, so sind auch bei zufälligem Beginn die einzelnen Bereiche bzw. die Wechsel als wiederkehrende Muster klar erkennbar. Deutliche Unterschiede erkennt man vor allem im Anfangsbereich. Der Teil, der eine Gleichverteilung approximiert, ist kürzer, was klarerweise zur Wahl eines zufälligen Beginns passt.

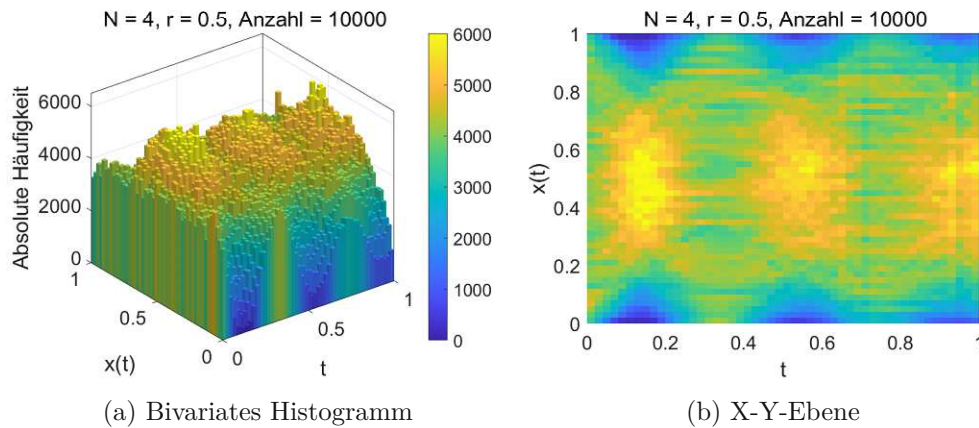


Abbildung 3.14: Zeitabhängige Verteilung zufällig generierter Signale mit fester Endzeit und zufälligem Beginn.

Für eine bessere Vergleichbarkeit wurden die Farbskalen für die Abbildungen 3.13 und 3.14 sowie für die weiteren Abbildungen dieses Abschnittes identisch gewählt.

Die zweite Adaption ist die Erhöhung der Anzahl der Wechsel zwischen stationären und dynamischen Bereichen. Dies ist motiviert durch die Beobachtung aus Abbildung 3.13, wo der zweite dynamische Bereich breiter wurde, und soll zu einem Verschwinden der Bereiche führen. Für die Erstellung von Abbildung 3.15 wurde  $N = 30$  statt  $N = 4$  verwendet. Der erste Bereich wurde jedoch erneut stationär gewählt. Vor allem gegen Ende der Signalschar ist eine klare Verbesserung, was das mögliche Erreichen eines stationären Prozesses betrifft, ersichtlich. Von  $t = 0$  bis zu  $t \approx 0.1$ , sind die verschiedenen Bereiche als wiederkehrende Muster im Histogramm weiterhin eindeutig zu erkennen. Mit fortschreitender Zeit nehmen die erkennbaren Muster deutlich ab. Ab  $t \approx 0.4$  ist eine Unterscheidung mit freiem Auge nicht mehr möglich. Im Gegensatz zu Abbildung 3.14 sind die Randwerte in Abbildung 3.15 erkennbar gleichmäßiger verteilt.

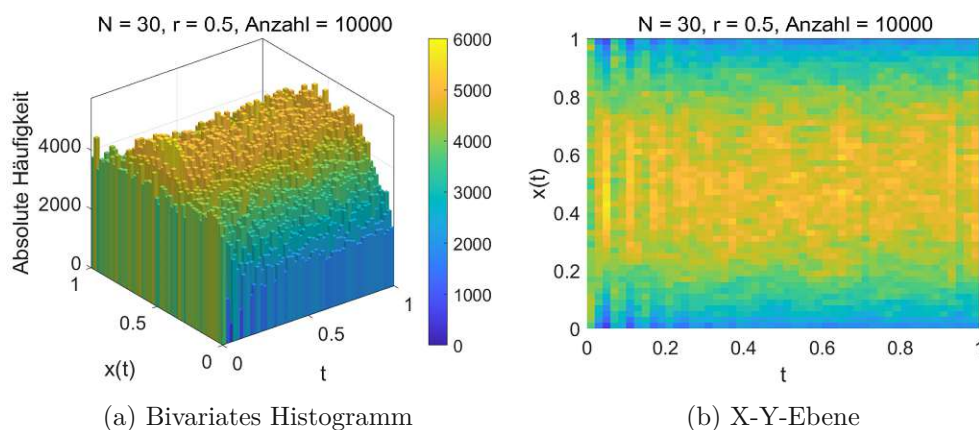


Abbildung 3.15: Zeitabhängige Verteilung zufällig generierter Signale mit fester Endzeit, stationärem Beginn und höherem  $N$ .

Abbildung 3.16 verbindet nun beide Ansätze. Das bedeutet, der Beginn ist zufällig und mit  $N = 30$  wird eine höhere Anzahl an Wechseln verwendet. Vergleicht man den Abschnitt bei  $t = 0$  von Abbildung 3.16a mit dem von Abbildung 3.15a, bemerkt man, dass sich die Form davon von einer annähernden Gleichverteilung zu einer Kurvenform verändert. Das bedeutet, ist der Start zufällig, bekommt man aus dem Histogramm den Eindruck, dass die Dichte am Anfang den weiteren Dichten für  $t \in [0, 1]$  entsprechen könnte, was für einen stationären, stochastischen Prozess erfüllt sein muss, wie in der Definition auf Seite 27 angeführt. Ist hingegen der Start ein stationärer Bereich, liest man heraus, dass erst nach einer gewissen Zeit ein stationärer Prozess entstehen kann.

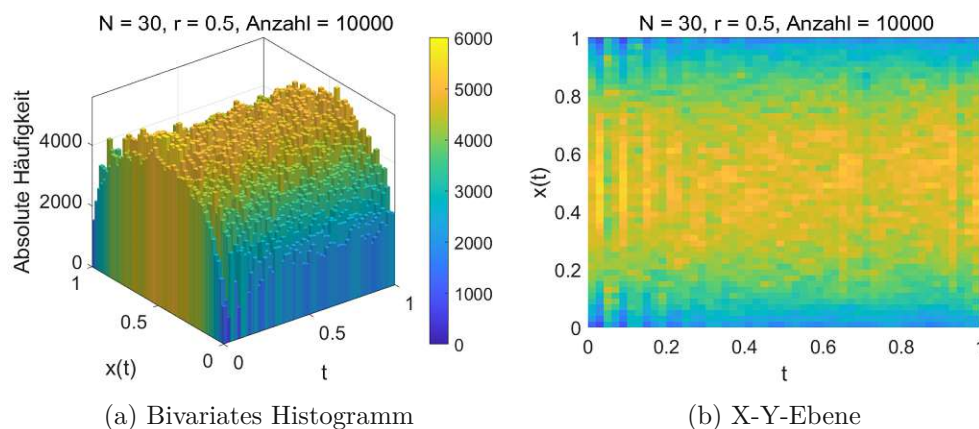


Abbildung 3.16: Zeitabhängige Verteilung zufällig generierter Signale mit fester Endzeit, zufälligem Beginn und höherem  $N$ .

Aktuell nicht berücksichtigt wurde der Wert des Verhältnisses  $r$  des Erwartungswertes  $\mu_t^s$  der stationären Zeitpunkte zu dem Erwartungswert  $\mu_t^d$  der dynamischen Zeitpunkte. Alle bisherigen Abbildungen in Abschnitt 3.4 wurden mit  $r = 0.5$  erzeugt, das heißt, alle dynamischen Bereiche sind doppelt so lang wie alle stationären zusammen.

In jeder der vier Grafiken in Abbildung 3.17 sieht man die Erzeugung von  $10^4$  Signalen mit fester Endzeit 1, zufälligem Beginn und  $N = 4$ . Das Verhältnis  $r$  variiert und nimmt die Werte 0.3, 0.9, 1.3 und 1.8 an. Für  $r > 1$  sind alle stationären Bereiche insgesamt länger als alle dynamischen insgesamt. Bei  $r = 0.3$  gibt es dementsprechend mehr dynamische Bereiche als bei  $r = 0.5$ . Eine höhere Anzahl an dynamischen Bereichen führt die Dichte betreffend zu einer ausgeprägteren Krümmung, siehe Abbildung 3.13a. Erhöht man auf den Wert  $r = 0.9$ , wie in Abbildung 3.17b, so führt das dazu, dass alle stationären Bereiche zusammen fast so lang sind wie alle dynamischen zusammen. Dadurch gibt es überall, also sowohl am Rand als auch im Zentrum, mehr Werte aus den mittleren hellblauen und grünen Wertebereichen und weniger Werte aus den gelben und dunkelblauen Randbereichen der Häufigkeiten. In den Abbildungen 3.17c und 3.17d, in denen die Anzahl an Werten aus den mittleren Bereichen (grün) jeweils zunimmt, zeigt sich eindeutig das erhöhte Verhältnis  $r$ . Es finden sich nur mehr sehr kleine Bereiche, in denen die Dichte eine ausgeprägte Krümmung aufweist. Insgesamt erkennt man in allen vier Grafiken von Abbildung 3.17 deutlich, wie der Anteil an stationären Bereichen stetig steigt. In Bezug auf Stationarität

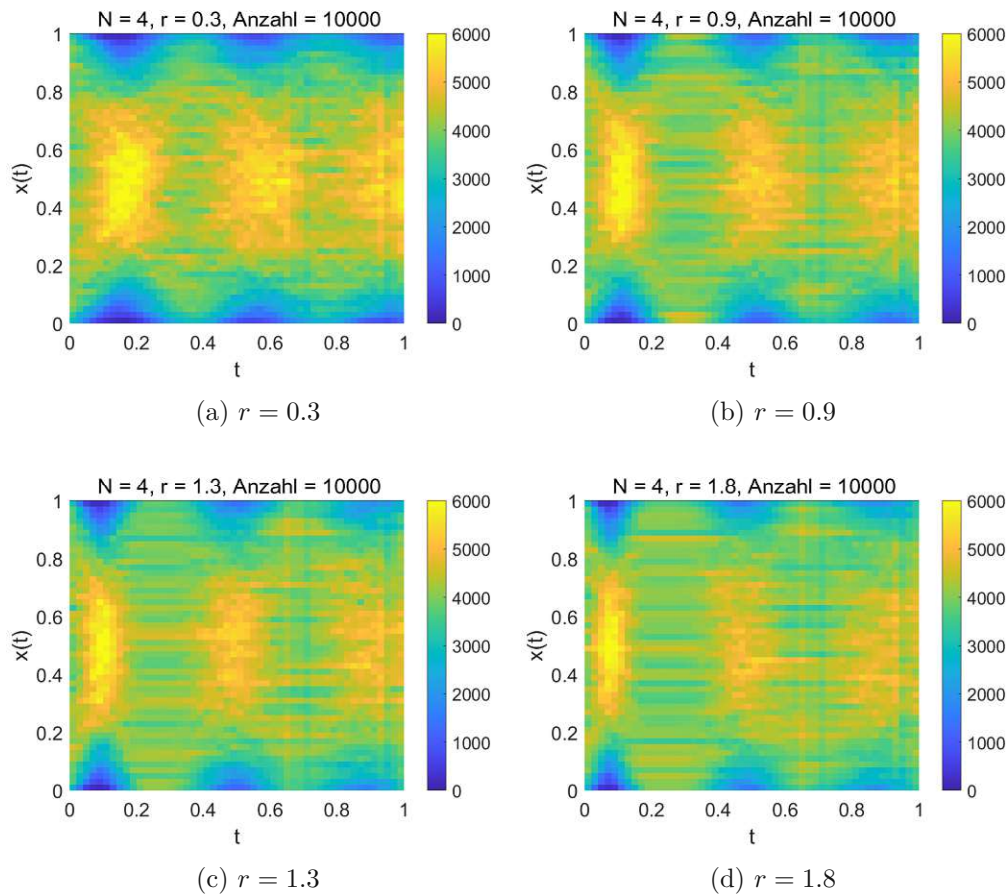


Abbildung 3.17: Zeitabhängige Verteilung mit fester Endzeit, zufälligem Beginn, und verschiedenen  $r$ .

eines Zufallsprozesses, ist die Gleichmäßigkeit der Dichten, wie in Abbildung 3.16, das Ziel. Wie man bereits festgestellt hat, beeinflusst die Wahl von  $N$  und  $r$  dies signifikant.

Im zweiten Schritt liegt der Fokus auf der ersten der beiden Eigenschaften eines stationären Zufallsprozesses und es wird versucht, diese numerisch zu bewerten. Um  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$  zu überprüfen, wird zunächst in Abbildung 3.18 wie in Abbildung 3.16a ein Histogramm erzeugt, mit dem Unterschied, dass die Anzahl  $N$  der Wechsel auf 100 erhöht wird und dass auf der Applikate nicht mehr die absoluten Häufigkeiten, sondern das Verhältnis

$$\frac{\text{Anzahl an Beobachtungen in einer Klasse}}{\text{Gesamtanzahl an Beobachtungen} \cdot \text{Volumen der Klasse}}$$

aufgetragen ist.

Da  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$  numerisch nicht exakt geprüft werden kann, wird nun eine Approximation dieser Bedingung vorgenommen. Ziel ist es, eine Referenzdichte zu ermitteln und einen davon abhängigen Gültigkeitsbereich einzuführen, worin annähernd die Bedingung  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$  erfüllt ist. Tendenziell ändern sich in den Bereichen nahe

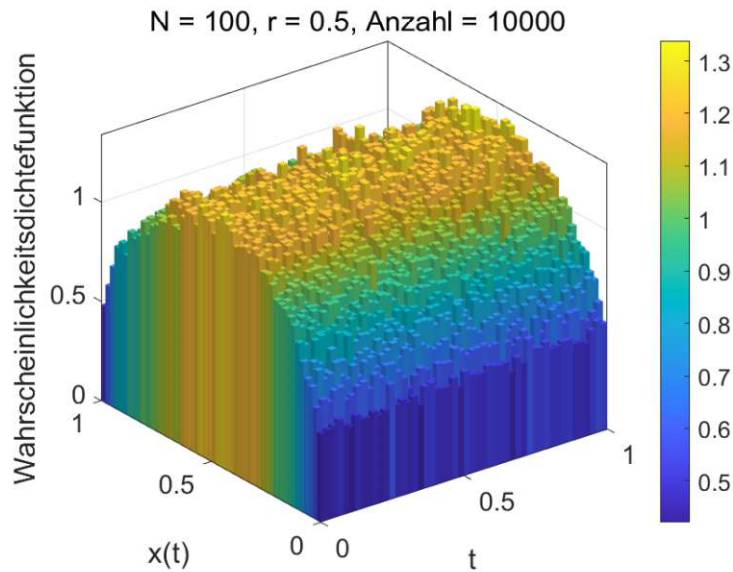


Abbildung 3.18: Zeitabhängige Verteilung mit fester Endzeit, zufälligem Beginn und  $N = 100$ .

bei  $t = 1$  die Dichten weniger, weshalb die Zeitachse in 5 gleich große Intervalle unterteilt und der letzte Abschnitt zwischen  $t = 0.8$  und  $t = 1$  betrachtet wird. Mit den Werten aus diesem Bereich werden die zeitlichen Mittelwerte und ihre Standardabweichungen berechnet. Die mittlere Dichte  $f_\mu(x)$  ist dann durch

$$f_\mu(x_i) = \frac{1}{B_O} \sum_{j=1}^{B_O} f(x_i, t_j), \quad \forall x_i \in [0.8, 1],$$

definiert, wobei  $B_O$  die Anzahl der Klassen entlang der Ordinate bezeichnet. Die Funktion der Standardabweichungen  $f_\sigma(x)$  ist gegeben durch

$$f_\sigma(x_i) = \sqrt{\frac{1}{B_O - 1} \sum_{j=1}^{B_O} |f(x_i, t_j) - f_\mu(x_i)|^2}, \quad \forall x_i \in [0.8, 1].$$

Unter Verwendung dieser beiden Funktionen wird nun einen Bereich mit der unteren Grenze  $f_\mu(x) - 3f_\sigma(x)$  und der oberen Grenze  $f_\mu(x) + 3f_\sigma(x)$  konstruiert. Das Kriterium

$$f_\mu(x) - 3f_\sigma(x) \leq f(x, t) \leq f_\mu(x) + 3f_\sigma(x) \quad (3.5)$$

sei nun die erwähnte Approximation zur ersten Eigenschaft eines stationären Zufallsprozesses,  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$ . Der Bereich, in dem sich  $f(x, t)$  in (3.5) befindet, ist in Abbildung 3.19 gelb hinterlegt. Für alle 5 Grafiken dieser Abbildung gilt, dass in rot eine Dichte vom Anfang, in grün eine aus der Mitte und in blau eine vom Ende des jeweiligen Intervalls eingezeichnet ist, wie auch durch die Legende angedeutet.

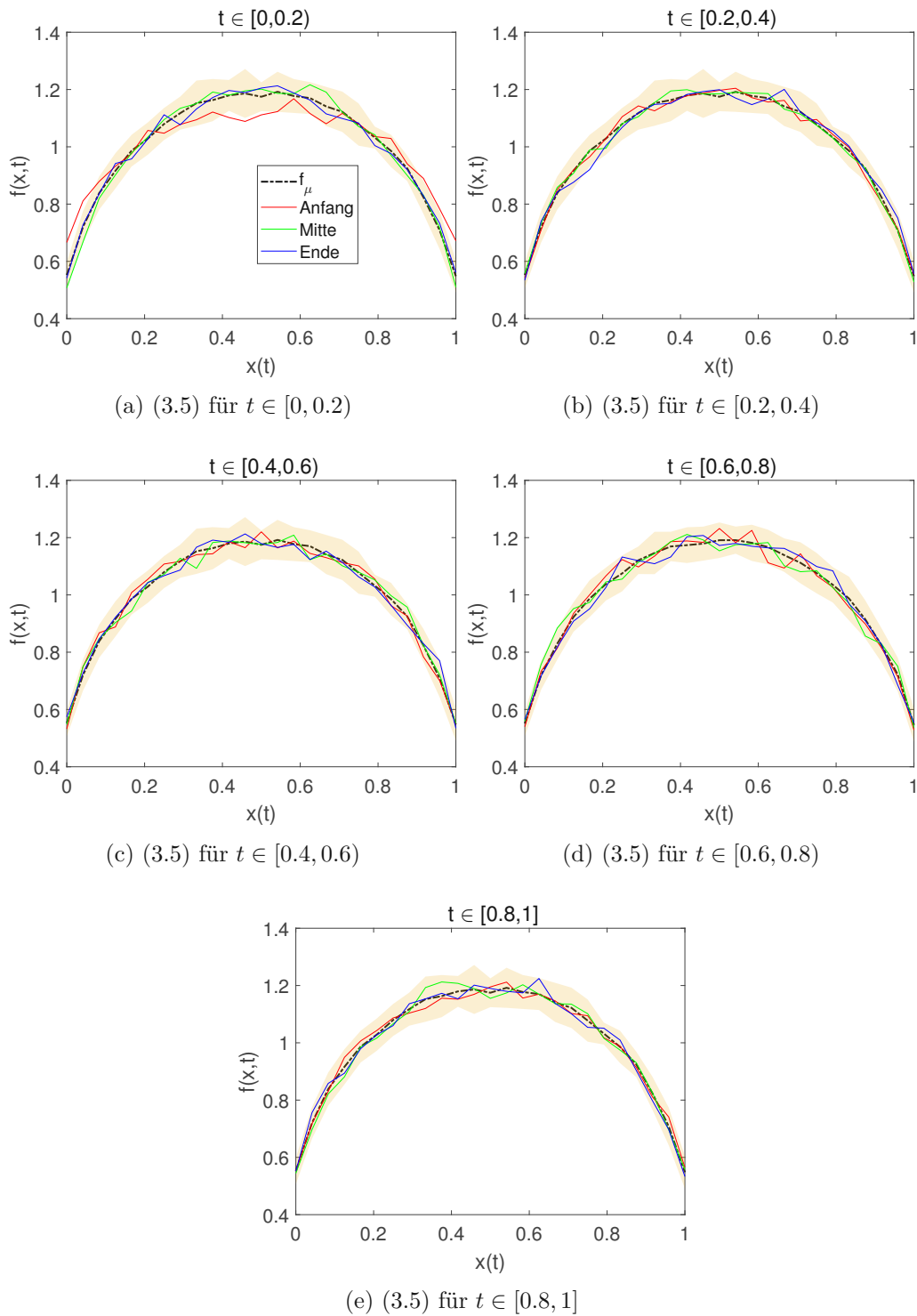


Abbildung 3.19: Kriterium (3.5), aufgeteilt auf 5 Intervalle.

In Abbildung 3.19a und Abbildung 3.19b liegen einzelne Abschnitte der betrachteten Dichten nicht in dem gelben Bereich. Für  $t \geq 0.4$  ist das eingeführte Kriterium (3.5) aber erfüllt und damit auch näherungsweise die Eigenschaft  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$  für  $t \geq 0.4$ .

Eine weitere Möglichkeit zur Approximation der ersten Eigenschaft eines stationären Zufallsprozesses,  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$ , ist es, die Fläche zwischen der mittleren Dichte  $f_\mu(x)$  und alle anderen Dichten  $f(x, t)$  zu messen, also

$$\int_0^1 |f_\mu(x_i) - f(x_i, t_j)| dx_i \quad \forall t_j \in [0, 1].$$

Wird diese Fläche, als Maß der Abweichung, exakt 0, so ist  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$  erfüllt. Da hier keine kontinuierlichen sondern diskrete Signale vorliegen, muss eine geeignete diskrete Approximation der Flächenberechnung gewählt werden. Das Abstandsmaß sei nun die Summe der Beträge der Abstände, also

$$a(t_j) = \sum_{i=1}^{B_O} |f_\mu(x_i) - f(x_i, t_j)|, \quad \forall t_j \in [0, 1], \quad (3.6)$$

wobei  $a(t_j)$  ein Maß der Abweichung zum Zeitpunkt  $t_j$  ist.

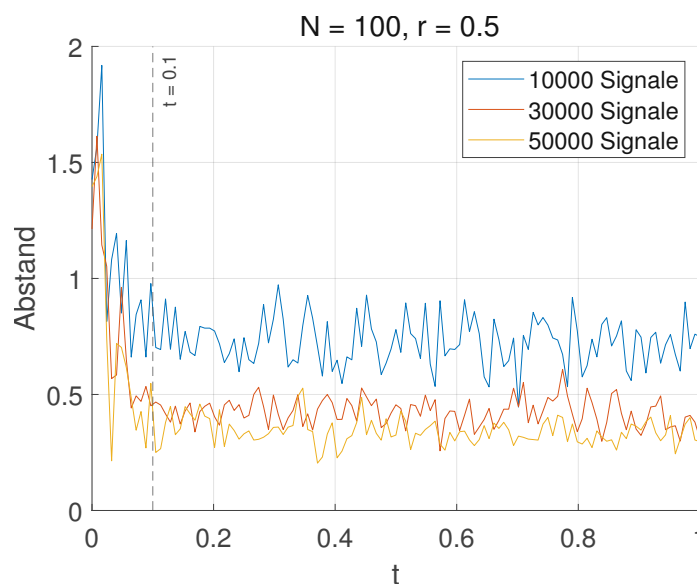


Abbildung 3.20: Graphische Darstellung des Abstandsmaßes (3.6) für jeweils  $10^4$ ,  $3 \cdot 10^4$  und  $5 \cdot 10^4$  Signale.

Abbildung 3.20 zeigt das Abstandsmaß (3.6) für verschiedene Anzahlen an Signalen. In allen drei Fällen ist der Abstand zu Beginn größer, was zu erwarten war, da die Anfangswerte der zufällig generierten Signale gleichverteilt sind. Ab  $t = 0.01$  liegt der Abstand für  $10^4$  Signale unter 1, für  $3 \cdot 10^4$  Signale unter 0.7 und für  $5 \cdot 10^4$  Signale unter 0.6. Die Abweichungen gehen also nicht exakt gegen 0, aber sie nehmen ab und bleiben annähernd konstant. Generell lässt sich feststellen, dass umso mehr Signale verwendet

werden, umso näher rückt das Abstandsmaß zu 0. Der Grund dafür ist, dass es sich hier lediglich um empirische Dichtefunktionen handelt und dass durch die Verwendung einer höheren Anzahl an Signalen die analytische Dichte genauer approximiert werden kann.

### 3.5 Verteilung der Ableitungen

Auf die gleiche Art und Weise wie in Abschnitt 3.4 die zeitabhängige Verteilung behandelt wurde, wird nun die Verteilung der Ableitungen der erzeugten Signale diskutiert. Dies ist interessant, da auch Regelungsstrategien existieren, bei denen die Änderungsrate der Sollgröße relevant ist. Erneut wird mit Hilfe von  $10^4$  generierten Signalen empirisch die Verteilung anhand eines 2D-Histogramms untersucht. Auf der Abszisse sind die  $t$ -Werte, auf der Ordinate die numerisch differenzierten  $x$ -Werte und auf der Applikate ist die absolute Häufigkeit aufgetragen. Alle betrachteten Signale wurden für eine feste Endzeit und mit zufälligem Startbereich generiert. Die Ableitung wird über den Differenzenquotient  $\Delta x$  gemäß

$$\Delta x(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad i = 1, \dots, \xi - 1$$

angenähert, wobei  $\xi$  die Länge des Zeitvektors beschreibt, da es sich hier um ein diskretes Signal handelt und somit auch Differenzierbarkeit nicht gefordert werden muss.

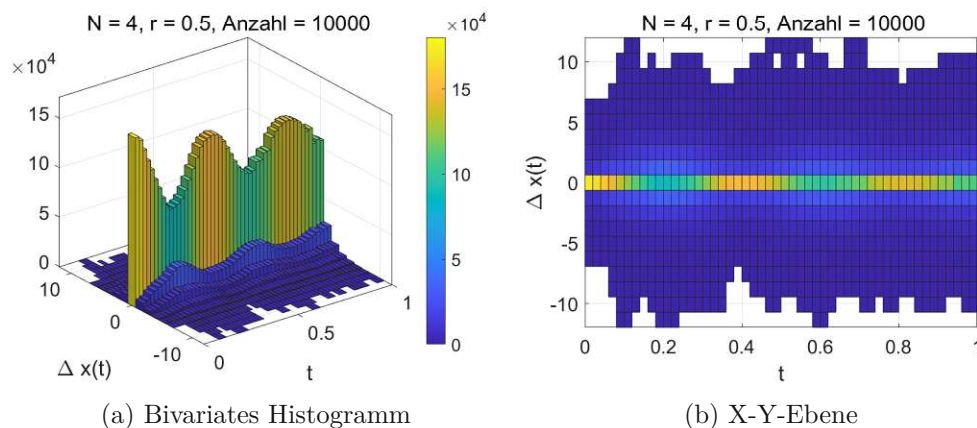


Abbildung 3.21: Verteilung der Ableitungen mit fester Endzeit und zufälligem Beginn.

Für Abbildung 3.21 wurde  $N = 4$  gewählt. Es war zu erwarten, dass es viele Werte um 0 auftreten, da das Signal in einem stationären Bereich konstant verläuft, also  $\Delta x(t_i) = 0$  gilt. Man erkennt, wie auch in Abbildung 3.14, bei einer geringen Anzahl an Wechslen zwischen stationären und dynamischen Bereichen die einzelnen Abschnitte sehr gut. Vor allem die dynamischen Bereiche lassen sich durch die seltener beobachteten Werte bei  $\Delta x(t_i) \approx 0$  deutlich erkennen. Hier verteilen sich die relativen Häufigkeiten auch auf die angrenzenden Regionen im Histogramm.



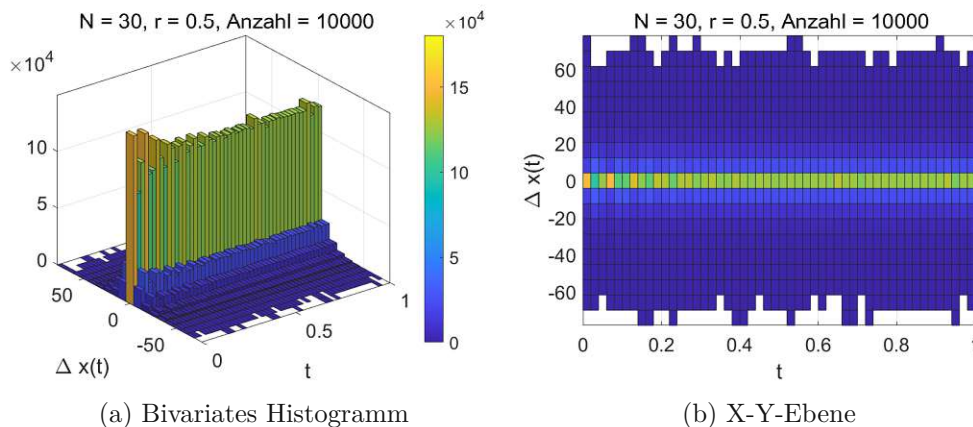


Abbildung 3.22: Verteilung der Ableitungen mit fester Endzeit, zufälligem Beginn und höherem  $N$ .

Eine Erhöhung der Wechsel auf  $N = 30$  resultiert auch in der Verteilung der Ableitungen in einer deutlichen Veränderung, siehe Abbildung 3.22. Lediglich für kleine Zeiten  $t < 0.2$  lassen sich stationäre und dynamische Bereiche unterscheiden. Für  $t \geq 0.2$  sind deutlich weniger Veränderungen in den Häufigkeiten zu erkennen und es hat den Anschein, als würde sich eine gleichbleibende Verteilung einstellen.

### 3.6 Spektrale Analyse

Eine ergänzende Möglichkeit zur Analyse des Trajektoriengenerators ist es, die Spektren der Zufallssignale zu vergleichen. Dazu werden zunächst 200 Trajektorien untersucht, wobei zufällige Signale mit fester Endzeit,  $N = 30$  und  $r = 0.5$  erstellt wurden. Da pro Signal nur eine endliche Menge diskreter Werte zur Verfügung steht und keine kontinuierliche Funktion, wird hier die diskrete, im Speziellen die schnelle Fourier-Transformation (FFT) verwendet. Mit Hilfe der FFT wird ein diskretes, endliches Signal, das periodisch fortgesetzt wird, im Frequenzbereich  $\nu \in [0, L - 1]$  diskret und periodisch abgebildet. Die FFT eines Signals  $x$  ist definiert durch

$$X_k = \sum_{j=0}^{L-1} x_j e^{-\frac{2\pi i j k}{L}}, \quad k = 0, \dots, L - 1,$$

wobei  $L$  die Länge des zu transformierenden Signals ist.

Sowohl die normierte Frequenz  $\nu$  als auch die Signalamplitude  $|X(\nu)|$  in Abbildung 3.23 sind zur Verdeutlichung der Wertebereiche logarithmisch skaliert. Man kann erkennen, dass die Spektren aller erzeugten Signale qualitativ übereinstimmen. Der Start aller Spektren liegt bei einer Amplitude zwischen 0.01 und 0.3. Für alle Signale gilt, dass die Amplitude  $|X(\nu)|$  mit steigender Frequenz  $\nu$  tendenziell abnimmt. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die harmonischen Komponenten mit diesen Einstellungen vor allem bei niedrigen Frequenzen finden lassen. Durch die relativ niedrige Anzahl an Wechslen  $N = 30$  ist dies durchaus naheliegend.

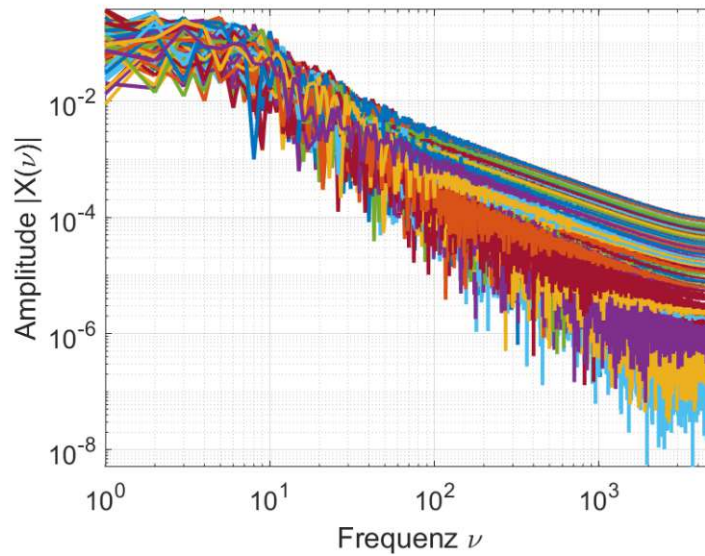


Abbildung 3.23: Frequenzspektrum von 200 Signalen mit fester Endzeit,  $N = 30$  und zufälligem Beginn.

Abbildung 3.24 stellt Abbildung 3.23 in Form eines Histogramms dar, wobei auf der Abszisse die normierte Frequenz  $\nu$ , auf der Ordinate die Amplitude  $|X(\nu)|$  und der Applikate die absolute Häufigkeit abgebildet wird. Die zuvor erwähnten Eigenschaften spiegeln sich auch hier wieder. Zusätzlich kann man im Histogramm deutlich erkennen, dass jeweils bei einer Dekade mehr auf der Frequenz-Achse und einer Dekade weniger auf der Amplituden-Achse die absolute Häufigkeit annähernd konstant bleibt. Nach dieser Beobachtung nehmen die Amplituden im Mittel linear mit der Frequenz ab.

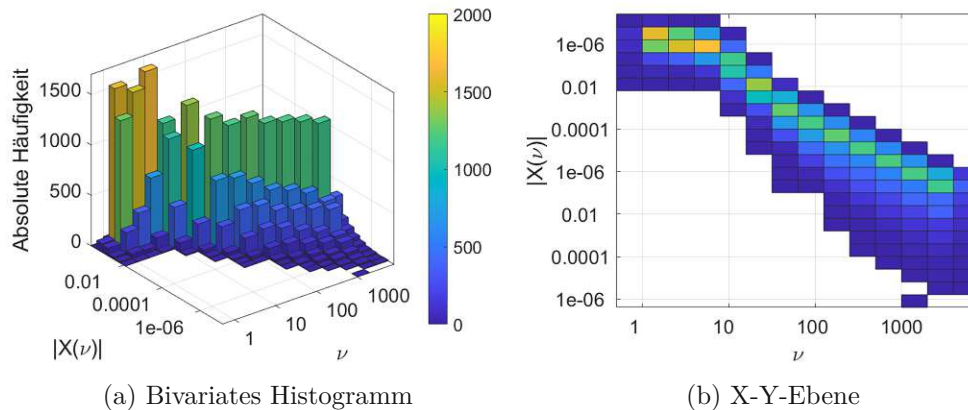


Abbildung 3.24: Histogramm zum Frequenzspektrum von 200 Signalen mit fester Endzeit,  $N = 30$  und zufälligem Beginn.

Diese spektrale Analyse zeigt, dass die zufällig generierten Signale nicht zur Systemidentifikation geeignet sind. Grund dafür sind die fehlenden harmonischen Komponenten bei hoher Frequenz. Für die Identifikation dynamischer Systeme deutlich besser geeignet sind Signalformen, welche eine möglichst gleichbleibende Verteilung der Amplituden  $|X(\nu)|$  aufweisen. Diese Eigenschaft bietet unter anderem das in [16] gezeigte Multi-Sinus Signal.

### 3.7 Relativer Anteil der Signalbereiche

In Abschnitt 3.3 wurde eine Annäherung von  $r$  auf Basis eines einzelnen Signales  $x(t)$  über die gesamte Signaldauer  $t \in [0, 1]$  berechnet und mit dem vorgegebenen  $r$  verglichen. Jetzt soll eine Approximation von  $r$  über alle Signale  $x_i(t)$  für jeden Zeitpunkt erstellt und damit untersucht werden, wie nahe diese an dem vorgegebenen  $r$  ist. Es werden erneut  $10^4$  Trajektorien mit zufälligem Beginn und fester Endzeit generiert. Dabei besteht jede Trajektorie aus der gleichen, endlichen Anzahl an Zeitpunkten  $t \in [0, 1]$ . Es sei

$$s_i(t) = \begin{cases} 0, & \Delta x_i(t) \neq 0, \\ 1, & \Delta x_i(t) = 0, \end{cases}$$

jene Abbildung, die prüft, ob der Zeitpunkt  $t$  in einem stationären oder dynamischen Bereich liegt. Diese wird auf alle Zeitpunkte aller Signale angewandt. Damit kann man zu jedem Zeitpunkt  $t$  bestimmen, wie viele Signale gerade stationär und wie viele dynamisch sind.

$P_s(t)$  gibt jene Anzahl an, wie oft der Zeitpunkt  $t$  bei einer Gesamtanzahl von  $P$  Signalen in einem stationären Bereich liegt,  $P_d(t)$  wie oft dieser in einem dynamischen Bereich liegt. Es gilt für jeden Zeitpunkt  $t$

$$P_s(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t) \quad \text{und} \quad (3.7a)$$

$$P = P_s(t) + P_d(t) \quad (3.7b)$$

sowie in diesem konkreten Fall  $P = 10^4$ . Gemäß (2.2a) ist  $r$  definiert als das Verhältnis des Erwartungswertes  $\mu_t^s$  der stationären Zeitpunkte zu dem Erwartungswert  $\mu_t^d$  der dynamischen Zeitpunkte. Das bedeutet,  $r$  sollte auch zu jedem Zeitpunkt  $t$  durch das Verhältnis der Anzahl der stationären Punkte zur Anzahl der dynamischen Punkte,

$$r(t) = \frac{P_s(t)}{P_d(t)} = \frac{P_s(t)}{P - P_s(t)}. \quad (3.8)$$

angenähert werden können. Aufgrund von (3.8) ist dieses Kriterium nicht für Signale mit stationärem Startbereich geeignet. Denn das würde  $P_s(0) = 10^4$  bedeuten, was zu einer Division durch 0 führt.

Abbildung 3.25 zeigt (3.8) für unterschiedliche Werte von  $N$  und  $r$ . Man kann festhalten, dass das vorgegebene  $r$  in allen vier Fällen hinreichend gut approximiert wird. Jedoch bringt eine Erhöhung von  $N$  und  $r$  Verbesserung in Bezug auf die Näherung. Dies wird durch Tabelle 3.2 verdeutlicht.

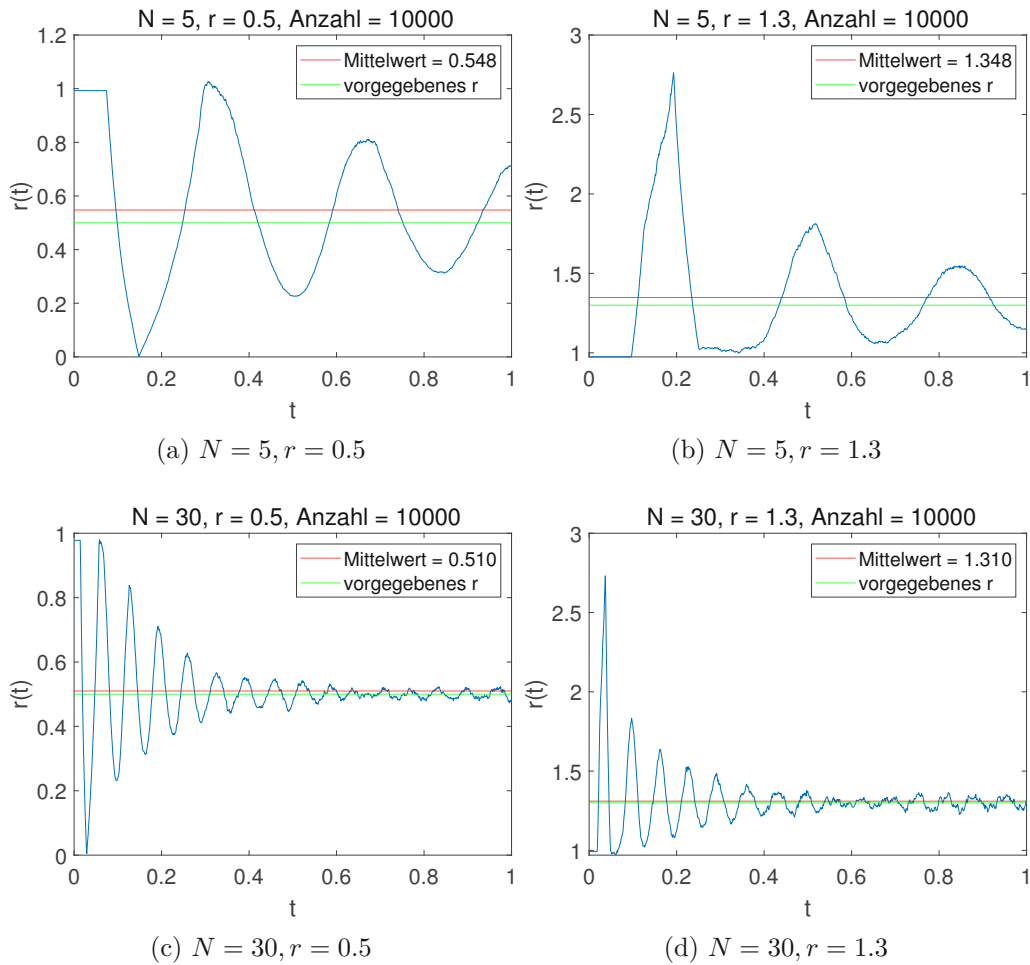


Abbildung 3.25: Approximation von  $r$  bei  $10^4$  Signalen mit fester Endzeit und zufälligem Beginn.

Klarerweise liegt der Startpunkt in den vier Grafiken von Abbildung 3.25 in der Nähe von 1, da nur Signale mit zufälligem Beginn betrachtet werden. Das heißt, es wird zufällig und gleichverteilt ausgewählt, ob der erste Bereich stationär oder dynamisch ist. Das hat zur Folge, dass im Mittel die eine Hälfte aller ersten Bereiche stationär und die andere dynamisch ist, was gleichbedeutend mit  $r(0) = 1$  ist. Man kann auch deutlich die Anzahl  $N$  an Wechsels zwischen den Bereichen in Abbildung 3.25 erkennen. Je näher  $r(t)$  bei 0 liegt, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeitpunkt  $t$  in einem dynamischen Bereich liegt. Es fällt auf, dass in den Abbildungen 3.25a und 3.25c stets  $r(0) \geq r(t)$  gilt. Das bedeutet, dass zu Beginn mit einem Verhältnis von 1:1 die meisten stationären Signalanteile gleichzeitig auftreten. Das lässt sich durch die Wahl von  $r = 0.5$  erklären, wodurch alle dynamischen Bereiche doppelt so lang sind wie alle stationären zusammen. Deshalb sind im Mittel stets mehr dynamische Anteile zu erkennen als stationäre. Das qualitativ gegenteilige Verhalten lässt sich in den Abbildungen 3.25b und 3.25d erkennen. Hier wurde mit  $r = 1.3$  eine Einstellung gewählt, in der die stationären Bereiche länger

$N$	Vorgegebenes $r$	Berechnetes $r$
5	0.5	0.548
30	0.5	0.510
5	1.3	1.348
30	1.3	1.310

Tabelle 3.2: Ergebnisse zur Berechnung einer Annäherung von  $r$ .

sind als die dynamischen.

Die Analyse von Signalen mit freier Endzeit ist hier nicht zielführend. Denn durch die verschiedenen Endzeiten stimmt (3.7b) nur bis zum Ende der kürzesten Trajektorie,  $t \leq \min(t_{end})$ . Danach gilt  $P < 10^4$  und es wäre eine detaillierte Untersuchung mit dem Ausschluss bereits geendeter Signale notwendig.



## 4 Bewertung eines nichtlinearen Regelkreises

Nachdem nun in Kapitel 3 der zufallsbasierte Trajektoriengenerator nach verschiedenen Kriterien analysiert und charakterisiert wurde, soll nun die Eignung für die simulative Bewertung eines geschlossenen Regelkreises, dessen Erklärung in Abschnitt 1.2 zu finden ist, geprüft werden. Zunächst widmet sich dieses Kapitel der Beschreibung eines positions-geregelten Feder-Masse-Systems mit (Haft-)Reibung. Es wird sowohl der lineare Fall ohne Haften als auch der nichtlineare Fall mit Haften untersucht. Bevor die zufälligen Signale als Sollgrößen genutzt werden und das Verhalten des Regelkreises statistisch bewertet wird, dient zuerst die Sprungfunktion als Sollgröße. Dieses Kapitel wird zeigen, dass im nichtlinearen Fall ein einzelnes Signal nicht genügt, um eine hinreichend genaue Aussage über den geschlossenen Regelkreis zu treffen.

### 4.1 Beschreibung des Simulationsmodells

Bei dem in Abbildung 4.1 schematisch dargestellten Simulationbeispiel handelt es sich um die Positionsregelung für ein Feder-Masse-System mit Haftreibung. Dabei ist die Masse  $m$  über eine Feder mit einer starren Wand verbunden. Die Federkraft  $F_F$  wird durch das lineare Modell  $F_F = cx_m$  beschrieben, wobei  $c$  die lineare Federkonstante ist. Auf die Masse wirkt die Eingangskraft  $F_u$ , womit die Position  $x_m$  der Masse  $m$  verändert werden soll. Diese Eingangskraft ist die Stellgröße des Reglers, also  $u = F_u$ . Bei der Positionierung gleitet die bewegliche Masse  $m$  über den Untergrund und erfährt die Reibkraft  $F_R$ . In diesem Kapitel wird zwischen der nichtlinearen Modellierung der Reibkraft inkl. Haftbedingung und deren linearer Approximation unterschieden.

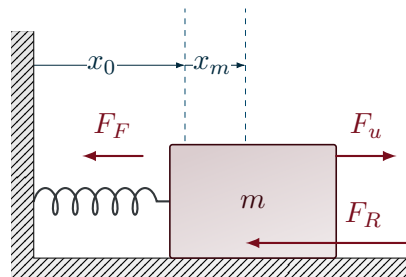


Abbildung 4.1: Feder-Masse-System mit Haftreibung.

Im nichtlinearen Fall setzt sich die Reibkraft  $F_R$  aus einer viskosen Komponente  $r_v v$  mit der Geschwindigkeit der Masse  $v = \frac{d}{dt}x_m$ , einer Coulombschen Komponente  $r_C \operatorname{sgn}(v)$  und der Haftreibungskomponente  $r_H$  zusammen. Zur Beschreibung der Reibkraft kann

das statische Modell

$$F_R = r_v v + r_C \operatorname{sgn}(v) + (r_H - r_C) \exp\left(-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right) \operatorname{sgn}(v) \quad (4.1)$$

verwendet werden, wobei  $v_0$  eine Bezugsgeschwindigkeit ist. Die Ungleichung

$$|F_u - cx_m| \leq r_H \quad (4.2)$$

beschreibt die Haftbedingung. Gilt für die Geschwindigkeit  $v = 0$  und ist die Ungleichung (4.2) erfüllt, so ist der Betrag der gesamt wirkenden Kraft geringer als die Haftkraft  $r_H$  und der Körper verbleibt in Ruhe. Somit erhält man für das Haften das mathematische Modell

$$\frac{d}{dt}x_m = 0, \quad (4.3a)$$

$$m \frac{d}{dt}v = 0. \quad (4.3b)$$

Ist die Ungleichung (4.2) nicht erfüllt oder  $v \neq 0$ , so wird die Bewegung der Masse durch

$$\frac{d}{dt}x_m = v, \quad (4.4a)$$

$$m \frac{d}{dt}v = F_u - F_R - cx_m \quad (4.4b)$$

beschrieben. Die Parameter des soeben diskutierten mechanischen Systems sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Parameter	Formelzeichen	Wert	
Masse	$m$	1	
Federkonstante	$c$	2	
Reibmodell		linear	nichtlinear
Viskose Reibungskomponente	$r_v$	4	
Bezugsgeschwindigkeit	$v_0$	/	0.01
Coulombsche Reibungskomponente	$r_C$	0	1
Haftreibungskomponente	$r_H$	0	2

Tabelle 4.1: Übersicht der Parameter für das mechanische System.

Eine für den Entwurf eines Regelgesetzes gängige Modellvereinfachung ist die Vernachlässigung der durch die Haftreibung verursachten Systemumschaltung gemäß (4.3) bzw. (4.4). Zusätzlich werden die nichtlinearen Komponenten in der Reibkraft vernachlässigt, also  $r_H = r_C = 0$  und lediglich ein (lineares) viskoses Reibmodell angenommen gemäß

$$F_R = r_v v. \quad (4.5)$$



Neben der Regelstrecke tritt im Blockschaltbild 1.2 auch Rauschen auf, genauer gesagt bandbegrenzt weißes Rauschen mit einer Leistung von  $10^{-8}$ .

Zur vollständigen Beschreibung des geschlossenen Regelkreises aus Abbildung 1.2 fehlt noch die Charakterisierung des verwendeten Reglers. Für die Positionierung der Masse kommt ein Proportional-Integral-Regler (PI-Regler) der Form

$$F_u(t) = u(t) = -k_P e(t) - k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.6)$$

zum Einsatz. Dabei ist  $F_u$  die Stellgröße  $u$  und  $e$  der Regelfehler, also die Differenz zwischen Ist- und Sollgröße.  $k_P$  und  $k_I$  sind die Verstärkungsfaktoren des P- und I-Anteils.

Es ist bekannt, dass Haftreibung zu unangenehmen Grenzyklen führen kann. Eine Gegenmaßnahme ist die Einführung einer *toten Zone*. Der Regler  $\mathcal{R}_{tz}$  nutzt diese zur Vermeidung von Grenzyklen im Nichtlinearen. Die tote Zone manipuliert den für den Regler (4.6) sichtbaren Fehler. Dabei ist der manipulierte Fehler  $e_{tz}$  für jeden Zeitpunkt  $t$  definiert durch

$$e_{tz}(t) = \begin{cases} e(t) + d, & e(t) < -d, \\ 0, & -d \leq e(t) \leq d, \\ e(t) - d, & e(t) > d, \end{cases}$$

wobei  $d$  die Größe der toten Zone beschreibt. Im Wesentlichen wird hier der Regler für kleine Fehler  $|e| < d$  deaktiviert, um der Entstehung von Grenzyklen entgegen zu wirken. Somit ändert sich (4.6) zu

$$F_u(t) = -k_P e_{tz}(t) - k_I \int_0^t e_{tz}(\tau) d\tau.$$

Alternativ dazu existieren Ansätze mit *Einfrieren*. Dabei wird nicht der gesamte Regelfehler verändert, sondern lediglich der Integralanteil. Hier ändert sich (4.6) zu

$$F_u(t) = -k_P e(t) - k_I \int_0^t e_{fr}(\tau) d\tau,$$

wobei der manipulierte Fehler  $e_{fr}$  für jeden Zeitpunkt  $t$  durch

$$e_{fr}(t) = \begin{cases} 0, & |e(t)| \leq d, \\ e(t), & |e(t)| > d, \end{cases}$$

definiert ist. Tabelle 4.2 fasst die Parameter für die Verstärkungsfaktoren  $k_P$  und  $k_I$  für die einzelnen Regler zusammen.

Regler	$k_P$	$k_I$	Fehlermanipulation	$d$
$\mathcal{R}_{tz}$	20	20	Tote Zone	0.02
$\mathcal{R}_{fr}$	20	30	Einfrieren	0.02

Tabelle 4.2: Auflistung der Verstärkungsfaktoren  $k_P$  und  $k_I$  sowie der Art der Fehlermanipulation für die unterschiedlichen Regler  $\mathcal{R}_{tz}$  und  $\mathcal{R}_{fr}$ .

Bevor der zufallsbasierte Trajektoriengenerator für die Bewertung der beiden Regler im geschlossenen Regelkreis herangezogen wird, dient zunächst, wie in der linearen Regelungstheorie üblich, die Sprungantwort zur Charakterisierung des geschlossenen Regelkreises. Dabei wird sowohl die Linearisierung der Strecke mit dem viskosen Reibmodell gemäß (4.5) und der nichtlineare Regelkreis mit dem Reibmodell gemäß (4.1) betrachtet. Da die tote Zone Grenzyklen, die aufgrund der Haftreibung auftreten, verhindert, werden im Linearen, wo  $r_H = 0$  gilt, keine besseren Ergebnisse erwartet. Die linearen Resultate dienen lediglich zum Vergleich.

Abbildung 4.2 stellt die Sprungantworten für den Regler mit toter Zone  $\mathcal{R}_{tz}$  (links) und mit Einfrieren  $\mathcal{R}_{fr}$  (rechts) gegenüber. Bei  $t = 1$  erfolgt die Vorgabe eines Sollsprunges, welcher gemeinsam mit den jeweiligen Ist-Verläufen dargestellt ist (oben). Sowohl im linearen (blau) als auch im nichtlinearen (rot) Szenario wird rasch auf die Sollwertänderung reagiert. Bei der Betrachtung der Regelfehler (Mitte) erkennt man sowohl im dynamischen als auch im stationären Verhalten deutliche Unterschiede. Abbildung 4.2c zeigt für  $\mathcal{R}_{tz}$  ein Einschwingverhalten mit 3 Nulldurchgängen im Fehlersignal am linearen Modell, sowie eine deutliche bleibende Regelabweichung nahe dem Rand der toten Zone. Fügt man Haftreibung hinzu scheint sich für diesen Regler der geschlossene Regelkreis zu verbessern. Im Gegensatz dazu zeigt Abbildung 4.2d für  $\mathcal{R}_{fr}$  ein Einschwingverhalten mit  $\approx 5$  Nulldurchgängen und einer deutlich geringeren bleibenden Regelabweichung am linearen Modell. Wird Haftreibung hinzugefügt, so kommt es hier zu einer höheren Abweichung als für  $\mathcal{R}_{tz}$ . Die Unterschiede in der Schwingungsneigung sind auch anhand der Stellgröße  $F_u$  (unten) erkennbar. Zusätzlich wird hier deutlich, dass das Messrauschen lediglich in Abbildung 4.2f, also für  $\mathcal{R}_{fr}$ , bemerkbar ist. Das ist direkt auf die unterschiedliche Handhabung des Fehlers zurückzuführen. Weiters weist  $\mathcal{R}_{tz}$  einen geringeren Stellgrößenbedarf auf, siehe Abbildung 4.2e.

Basierend auf den Sprungantworten, im Besonderen auf der beobachteten stationären Genauigkeit und auf dem geringeren Stellgrößenbedarf, ist  $\mathcal{R}_{tz}$  für den Einsatz zu bevorzugen.

## 4.2 Statistische Bewertung

Um den in dieser Arbeit entwickelten Trajektoriengenerator anhand des Simulationsbeispiels zu testen, wird eine statistische Bewertung mit den zufällig generierten Signalen als Sollgrößen durchgeführt. Der Fokus liegt dabei auf der Bewertung des nichtlinearen Systems. Für die Erzeugung der Trajektorien gilt  $N = 4, r = 1$  bei fester Endzeit und stationärem Beginn. Bei der eingangs diskutierten probabilistischen Robustheitsbewertung für nichtlineare Regelkreise in Abschnitt 1.3 wurde der Begriff der Performance-Funktion  $J$  eingeführt. Die Performance-Funktion ist in der Literatur oft an Fehlermaße angelehnt, beispielsweise in [7] an die Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers (root mean square error, RMSE). In diesem Kapitel wird neben dem RMSE  $J_{rms}$  auch der maximale absolute (MA) Fehler  $J_{ma}$  als Fehlermaß verwendet. Diese sind definiert durch

$$J_{ma}(e) = \max_k (|e(kT_s)|), \quad J_{rms}(e) = \sqrt{\frac{1}{L_e} \sum_{k=0}^{L_e-1} |e(kT_s)|^2},$$

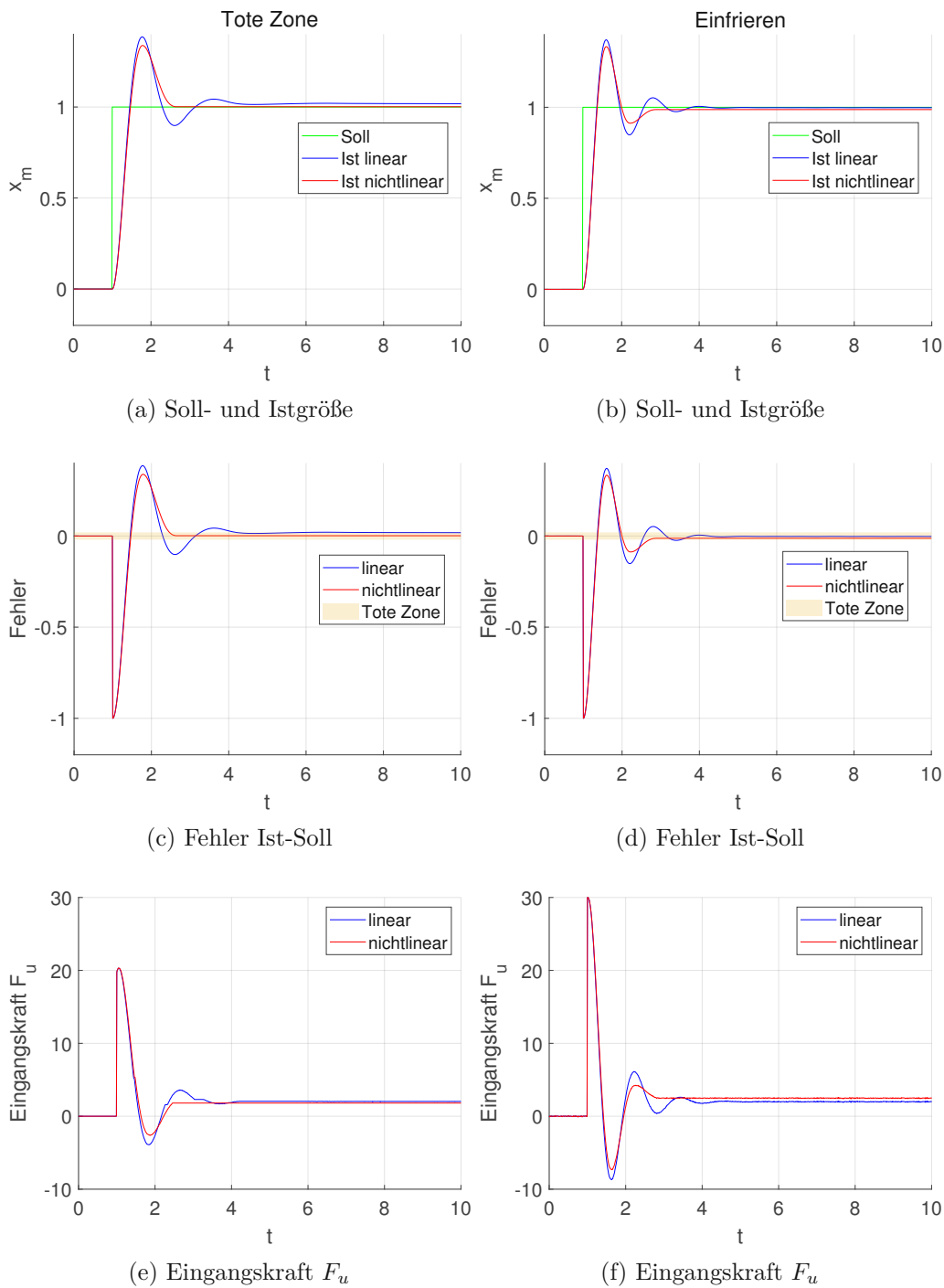


Abbildung 4.2: Sprungantworten für den Regler  $\mathcal{R}_{tz}$  (links) und für den Regler  $\mathcal{R}_{fr}$  (rechts).

wobei  $L_e$  die Anzahl der betrachteten Zeitpunkte bezeichnet. Jedes Histogramm zeigt das Ergebnis für 1000 zufällig generierten Sollsignalen. Für die zeitdiskreten Signale gilt  $t = kT_s$ , wobei eine Abtastzeit  $T_s$  von 10 ms festgelegt ist. Da durch die Einführung einer der toten Zone bzw. des Einfrieren die Regelung für  $|e| < d$  deutlich beeinflusst wird, werden die beiden Fehlermaße  $J_{ma}$  und  $J_{rms}$  auch außerhalb der Zone  $d$  betrachtet.

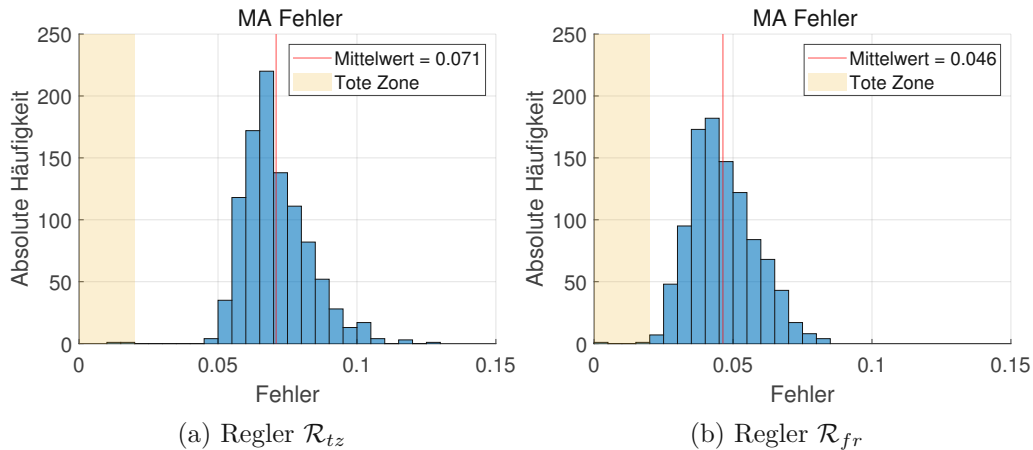


Abbildung 4.3: MA Fehler bei 1000 generierten Signalen, basierend auf einem nichtlinearen System. Links mit dem Regler  $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler  $\mathcal{R}_{fr}$ .

Abbildung 4.3 zeigt die Verteilung des MA Fehlers der beiden Regler  $\mathcal{R}_{tz}$  und  $\mathcal{R}_{fr}$  für das untersuchte nichtlineare System. Während der größte Wert von Abbildung 4.3a bei ungefähr 0,13 liegt, liegt jener von Abbildung 4.3b bei ungefähr 0,08. Auch ein Vergleich der Mittelwerte spricht dafür, dass der Regler  $\mathcal{R}_{fr}$  zu einer geringeren maximalen Abweichung zwischen Ist- und Sollgröße führt.

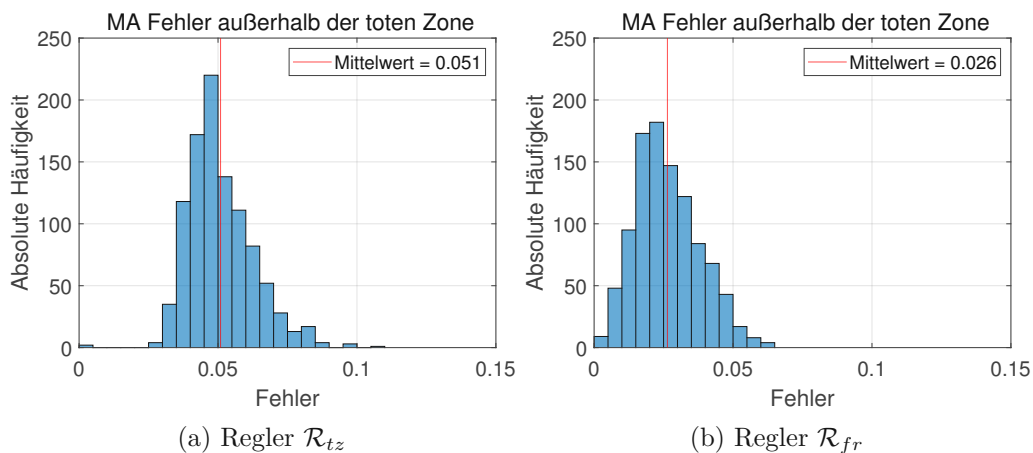


Abbildung 4.4: MA Fehler außerhalb der toten Zone bei 1000 generierten Signalen, basierend auf einem nichtlinearen System. Links mit dem Regler  $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler  $\mathcal{R}_{fr}$ .

Die Verteilung des MA-Fehlers außerhalb der toten Zone ist in Abbildung 4.4 zu sehen. Die Histogramme der Abbildungen 4.3a und 4.4a besitzen, bis auf die Werte, die kleiner als 0.02 sind, die gleiche Form, wobei zweiteres um die Größe der toten Zone nach links verschoben ist. Gleiches gilt für die Histogramme der Abbildungen 4.3b und 4.4b. Das bedeutet, betrachtet man als Fehlermaße den MA Fehler und den MA Fehler außerhalb der toten Zone und vergleicht die maximalen Werte und die Mittelwerte, so liefert der Regler  $\mathcal{R}_{fr}$  bessere Ergebnisse als der Regler  $\mathcal{R}_{tz}$ . Nun stellt sich die Frage, ob der RMSE sowie der RMSE außerhalb der toten Zone dieses erste Ergebnis der probabilistischen Bewertung bestätigen.

Auf den ersten Blick fallen zunächst die stark unterschiedlichen Verteilungen der einzelnen Regler in Abbildung 4.5 auf. Während die Verteilung in Abbildung 4.5a sehr breit und flach ist, ist jene in Abbildung 4.5b deutlich schmaler und höher. Dies spricht für die Robustheit bzw. gleichbleibende Performance des Reglers  $\mathcal{R}_{fr}$ , da die angenommenen Werte des RMSE nur geringfügig variieren. Betrachtet man hier den maximalen RMSE sowie den Mittelwert des RMSE, so führt die Verwendung des Reglers  $\mathcal{R}_{fr}$  zu kleineren Werten als die Verwendung des Reglers  $\mathcal{R}_{tz}$ .

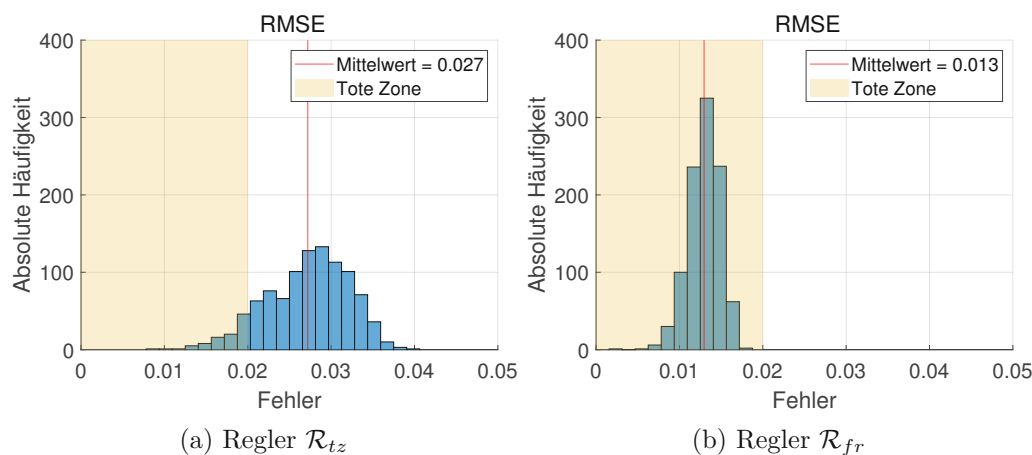


Abbildung 4.5: RMSE bei 1000 generierten Signalen, basierend auf einem nichtlinearen System. Links mit dem Regler  $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler  $\mathcal{R}_{fr}$ .

Betrachtet man die Verteilungen außerhalb der toten Zone in Abbildung 4.6, so sind auch hier die Unterschiede bezüglich der Form der Verteilungen zu erkennen. Die Beobachtung, dass die Werte des maximalen RMSE und des Mittelwertes des RMSE des Reglers  $\mathcal{R}_{fr}$  kleiner sind als jene des Reglers  $\mathcal{R}_{tz}$ , bleibt auch außerhalb der toten Zone bestehen. Das bringt zusammenfassend für alle vier präsentierten Fehlermaße beim Vergleich des maximalen Wertes und des Mittelwertes die Erkenntnis, dass der Regler  $\mathcal{R}_{fr}$  zu einem genaueren Folgeverhalten der Istgröße an die Sollgröße führt. Im Gegensatz dazu zeigen die Sprungantworten aus Abschnitt 4.1, dass im Nichtlinearen der Regler  $\mathcal{R}_{tz}$  in der Lage ist, bei einem geringeren Stellgrößenbedarf und weniger Überschwingen eine niedrigere stationäre Abweichung zu erreichen. Es lässt sich also folgern, dass es im nichtlinearen Fall von Bedeutung ist, nicht nur eine Sollgröße sondern mehrere Varianten zu betrachten, um qualitativ hochwertige Aussagen über den geschlossenen Regelkreis zu treffen. Ein Bewerten

des geschlossenen Regelkreises anhand der Sprungantwort ist also nicht ausreichend. Um dies zu verdeutlichen seien nun jene Sollgrößen dargestellt, aus denen die größten Abweichungen im Sinne der gewählten Performance-Funktionen resultieren.

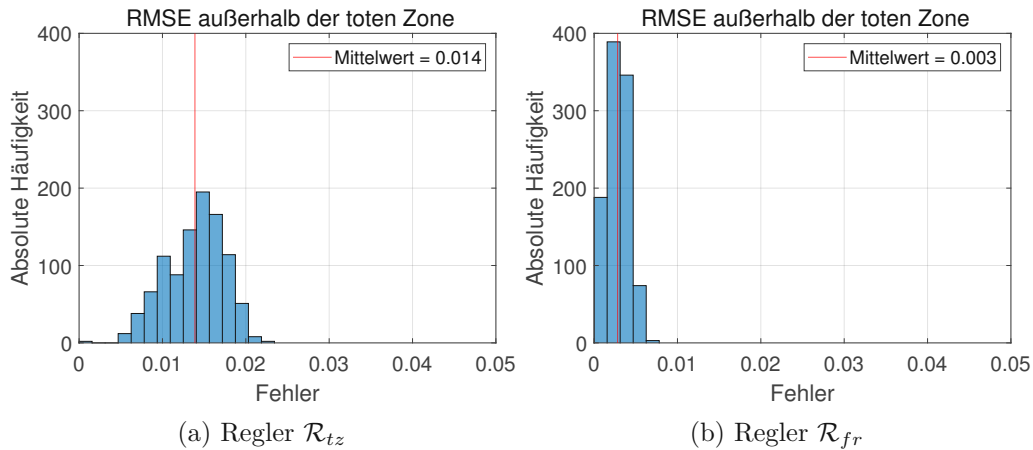


Abbildung 4.6: RMSE außerhalb der toten Zone bei 1000 generierten Signalen, basierend auf einem nichtlinearen System. Links mit dem Regler  $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler  $\mathcal{R}_{fr}$ .

Abbildung 4.7 stellt erneut das Verhalten von  $\mathcal{R}_{tz}$  (links) und  $\mathcal{R}_{fr}$  (rechts) gegenüber, wobei nun beide Regler jeweils mit den herausforderndsten Sollgrößen simuliert werden. Diskutiert werden die Soll- und Istverläufe (oben), die Abweichung zwischen beiden Größen (Mitte) und der Verlauf der Stellgröße (unten).

Bei der Betrachtung der Sollgröße mit dem höchsten maximalen absoluten Fehler (blau) fällt auf, dass für beide Regler die größten Abweichungen am Beginn eines dynamischen Bereichs beim Losbrechen aus der Haftreibung auftreten. Beide Sollsignale nutzen den zur Verfügung stehenden Wertebereich  $x \in [0, 1]$  zu einem hohen Grad aus. Entsprechend der Bewertung gemäß der zuvor diskutierten Histogramme ist  $\mathcal{R}_{fr}$  hier in der Lage für einen geringeren maximalen Fehler zu sorgen als  $\mathcal{R}_{tz}$ .

Ist hingegen das Szenario interessant mit dem maximalen RMSE, so zeigt sich, dass beide Testszenarien dynamische Bereiche mit nur geringen Werteänderungen enthalten. Vor allem für  $\mathcal{R}_{tz}$  führt dies zu ausgeprägten Grenzyklen. Auch mit diesem Bewertungsmaß wird der Regler  $\mathcal{R}_{fr}$  besser eingestuft. Vor allem bei der Betrachtung der Fehler in den Abbildung 4.7c und 4.7d scheint es offensichtlich, dass  $\mathcal{R}_{fr}$  zu bevorzugen ist.

Nichtsdestotrotz ist bei genauer Betrachtung der Stellgröße in Abbildung 4.7f zu betonen, dass auf Basis dieser Analyse auch für  $\mathcal{R}_{fr}$  Grenzyklen mit deutlich geringer Ausprägung auftreten können.

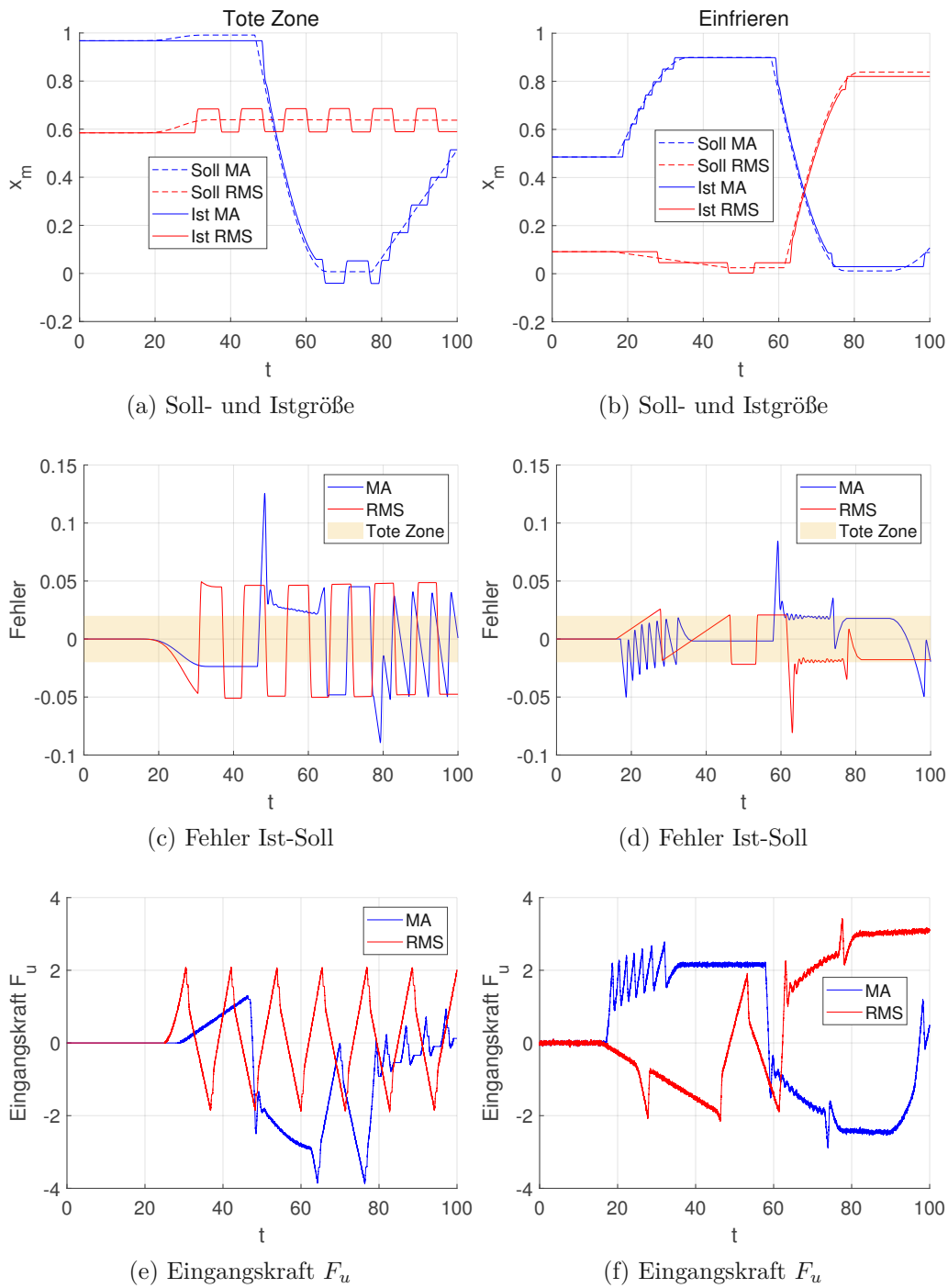


Abbildung 4.7: Simulation der Trajektorien mit dem größten Fehler als Sollgröße, basierend auf einem nichtlinearen System, links mit dem Regler  $\mathcal{R}_{tz}$ , rechts mit dem Regler  $\mathcal{R}_{fr}$ .





## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit beschäftigte sich mit der Entwicklung und Anwendung eines zufallsbasierten Trajektoriengenerators, um damit variantenreiche Testszenarien für einen nichtlinearen Regelkreis zu erzeugen. Der entwickelte Trajektoriengenerator wurde anhand unterschiedlicher Anhaltspunkte analysiert und bewertet. Zum Einstieg in das Thema diente neben einer Beschreibung des Ziels dieser Arbeit auch die Erläuterung wichtiger Begriffe aus der Regelungstechnik und eine Literaturrecherche zu bereits vorhandenen Stabilitäts- und Robustheitsbegriffen.

In Kapitel 2 wurden zunächst die Anforderungen an die Sollgröße eines nichtlinearen Regelkreis identifiziert. Danach zeigte eine spezifische Literaturstudie, welche Methoden zur Generierung zufälliger Signale nach aktuellem Stand der Technik existieren. Diese wurden gemäß ihrer Relevanz und Anwendbarkeit für die Ziele dieser Arbeit bewertet. Im Zuge dieser Erhebung zeigte sich eine klare, wissenschaftliche Lücke. Inspiriert durch Motion Primitives gelang es, ein Konzept für einen zufallsbasierten Trajektoriengenerator zu formulieren. Dieser erzeugt zufällige Signale, welche aus einer alternierenden Aneinanderreihung von stationären und dynamischen Bereichen bestehen. Dabei besteht ein dynamischer Bereich aus einem zufällig gewählten, elementaren Baustein. Dieser Baustein ist zunächst auf das Intervall  $[0, 1]$  definiert und wird anschließend gemäß seiner Randbedingungen skaliert. Die in dieser Arbeit eingesetzten Bausteine, welche die Generierung stetiger Signale garantieren, sind die Rampenfunktion, die Sinusfunktion, exponentielles Wachstum oder ein Polynom 2., 4., 6. oder 8. Grades. Ein anschließender stationärer Bereich hingegen verläuft stets konstant. Schließlich wurden die Wechselzeitpunkte zwischen den Bereichen anhand der Anzahl der erwarteten Umschaltungen und der relativen Dauern der Signalbereiche abgeleitet. Mit dem stochastischen Hintergrund erhält man so direkt zufällige Signale unterschiedlicher Länge, wobei ergänzend die Endzeit ebenso fixiert werden kann.

Kapitel 3 widmete sich der Analyse des Trajektoriengenerators. Anhand verschiedener Gesichtspunkte wurde geprüft, ob die in Kapitel 2 getroffenen Annahmen eingehalten werden. Begonnen wurde mit der Verteilung der Endzeiten für Signale mit einer fixen Anzahl an Wechseln. In einer ersten Variante waren große Unterschiede zwischen einer geraden und einer ungeraden Anzahl an Wechseln erkennbar. Deshalb wurde der Zusammenhang zwischen den erwarteten Umschaltungen und relativen Dauern eines Signals, woraus sich die Wechselzeitpunkte berechnen lassen, entsprechend angepasst. Das führte dazu, dass schlussendlich auch Trajektorien mit geradem  $N$  im Mittel die Endzeit 1 erreichen. Bei der Analyse der Verteilung der Endwerte zeigte sich, dass sich für freie Endzeit in guter Näherung eine Gleichverteilung einstellt. Das frühzeitige Abschneiden bzw. das Auffüllen bei Signalen mit fester Länge bewirkt eine deutlich erkennbare Veränderung der Verteilung hin zum Zentrum des Wertebereichs. Im darauffolgenden Unterkapitel gelang die Verifizierung der Anteile der Signalbereiche für Signale mit variabler Endzeit über das Verhältnis

der addierten Längen der stationären Bereiche zu den addierten Längen der dynamischen Bereiche. Anspruchsvoll gestaltete sich die Verifizierung der Anteile der Signalbereiche für Signale mit fester Endzeit, da es hier eine andere Erwartungshaltung gab. Grafisch wurde diskutiert, dass bei ungerader Anzahl an Wechseln das beobachtete Verhältnis größer und bei gerader Anzahl an Wechseln kleiner als das vorgegebene Verhältnis sein sollte. Eine Analyse mit Hilfe von Histogrammen bestätigte diese Erwartung. Das vierte Unterkapitel beschäftigte sich mit der zeitabhängigen Verteilung der Signalwerte, welche bei der Untersuchung von  $10^4$  Signalen zu Beginn viel Veränderung und gegen Ende mehr Gleichmäßigkeit zeigte. Diese Erkenntnisse führten zur Einführung des Begriffs eines stationären Zufallsprozesses. Die Frage kam auf, ob eine durch den Trajektoriengenerator erzeugte Signalschar die Eigenschaften eines stationären Zufallsprozesses erfüllt. Dafür wurde zunächst nur optisch bzw. über die Interpretation der Histogramme und danach auch numerisch überprüft, ob die erste Eigenschaft der Definition eines stationären Zufallsprozesses erfüllt ist. Das erweckte den Anschein, dass man nicht ab  $t = 0$ , aber ab einem späteren Zeitpunkt von Stationarität im Sinne eines Zufallsprozesses sprechen kann. Für eine genauere Aussage ist noch die Untersuchung der Dichtefunktion zweiter Ordnung bzw. der zweiten Eigenschaft vonnöten, was aber den zeitlichen Rahmen dieser Arbeit gesprengt hätte. Weiters besteht zum Erreichen eines stationären Zufallsprozesses für alle Zeiten die Idee, die Signale am Anfang abzuschneiden und den Startzeitpunkt der Signale nach hinten zu verschieben. Mit Hilfe der spektralen Analyse zeigte sich, dass sich die zufällig generierten Signale aufgrund der fehlenden harmonischen Komponenten bei hoher Frequenz nicht zur Systemidentifikation eignen.

Anhand eines dynamischen Simulationsbeispiels wurde in Kapitel 4 der zufällige Trajektoriengenerator getestet. Es handelt sich um ein Feder-Masse-System mit (Haft-)Reibung, wobei zwischen einem linearen, also rein viskosen und einem nichtlinearen Reibmodell mit Haftbedingung unterschieden wird. Für die Positionierung der Masse kam ein Proportional-Integral-Regler zum Einsatz. Der Fehler, den der Regler sieht, wurde durch die Einführung einer toten Zone auf zwei verschiedene Arten manipuliert und damit die beiden Regler  $\mathcal{R}_{tz}$  und  $\mathcal{R}_{fr}$  definiert. Zunächst wurde die Sprungantwort zur Charakterisierung des geschlossenen Regelkreises herangezogen. Ein Vergleich der beiden Regler zeigte, dass basierend auf der beobachteten stationären Genauigkeit und auf dem geringeren Stellgrößenbedarf,  $\mathcal{R}_{tz}$  für den Einsatz im nichtlinearen Fall bevorzugt werden kann. Anschließend wurde eine statistische Bewertung mit den zufälligen Signalen als Sollgrößen durchgeführt. Durch die Einführung von zwei Fehlermaßen kam man bei einer Gegenüberstellung der Mittelwerte und der maximalen Werte der beiden Regler im Nichtlinearen zu der Erkenntnis, dass der Regler  $\mathcal{R}_{fr}$  zu einem genaueren Folgeverhalten der Istgröße an die Sollgröße führt. Damit ist gezeigt, dass für eine umfangreiche Simulation eine statistische Bewertung mit mehreren unterschiedlichen, zufällig generierten Signalen sinnvoll ist.

## Literatur

- [1] T. Frey und M. Bossert, *Signal- und Systemtheorie*. Vieweg+Teubner, 2009.
- [2] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [3] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [4] J.-J. E. Slotine und W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [5] I. R. Petersen und R. Tempo, „Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments“, *Automatica*, S. 1315–1335, 2014.
- [6] R. Tempo, G. Calafiore und F. Dabbene, *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems*. Springer London, 2013.
- [7] B. Karg, T. Alamo und S. Lucia, „Probabilistic performance validation of deep learning based robust NMPC controllers“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, S. 8855–8876, 2021.
- [8] D. S. Johnson, J. M. London, M.-A. Lea und J. W. Durban, „Continuous-time correlated random walk model for animal telemetry data“, *Ecology*, S. 1208–1215, 2008.
- [9] F. Lindgren und H. Rue, „On the Second-Order Random Walk Model for Irregular Locations“, *Scandinavian Journal of Statistics*, S. 691–700, 2008.
- [10] G. Technitis und R. Weibel, „An algorithm for random trajectory generation between two endpoints, honoring time and speed constraints“, in *GIScience 2014: Eighth International Conference on Geographic Information Science*, Vienna, 2014, S. 88–92.
- [11] G. Technitis, R. Weibel, B. Kranstauber und K. Safi, „An Algorithm for Empirically Informed Random Trajectory Generation Between Two Endpoints“, in *GIScience 2016: Ninth International Conference on Geographic Information Science*, Montreal, 2016, S. 292–295.
- [12] H. Jaeger, „Observable Operator Models for Discrete Stochastic Time Series“, *Neural Computation*, S. 1371–1398, 2000.
- [13] B. Huang und S. L. Shah, *Performance Assessment of Control Loops*. Springer London, 1999.
- [14] S. Akella, N. M. Amato, W. H. Huang und B. Mishra, *Algorithmic Foundation of Robotics VII*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [15] R. Scheithauer, *Signale und Systeme*. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 1998.
- [16] M. Schroeder, „Synthesis of low-peak-factor signals and binary sequences with low autocorrelation (Corresp.)“, *IEEE Transactions on Information Theory*, S. 85–89, 1970.



# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit gemäß dem Code of Conduct – Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis (in der aktuellen Fassung des jeweiligen Mitteilungsblattes der TU Wien), insbesondere ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel, angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, im Februar 2023

---

Cornelia Geiszläger