

# Modellprädiktive Temperaturregelung eines horizontalen Bandglühofens

## DIPLOMARBEIT

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

Univ.-Prof. Dr. techn. A. Kugi  
Dr. techn. M. Niederer

eingereicht an der

Technischen Universität Wien  
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

von

Aleksandar Nikolic  
Matrikelnummer 0627535  
Laxenburgerstrasse 5  
2351 Wr. Neudorf  
Österreich

Wr. Neudorf, November 2019

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der modellprädiktiven Temperaturregelung eines horizontalen Bandglühofens. Das Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, an dem diese Arbeit entstand, stellte das mathematische Modell des Bandglühofens aus der Diplomarbeit [1] zur Verfügung.

Bedanken möchte ich mich bei Dr. techn. Stephan Strommer und Dr. techn. Andreas Steinböck für Ihre hervorragende fachliche Kompetenz und Ihre Unterstützung in allen Bereichen der Diplomarbeit. Im Besonderen möchte ich mich bei Dr. techn. Martin Niederer bedanken, für seine wertvollen Hilfestellungen in technischen Belangen und die ausgezeichnete Betreuung der Diplomarbeit. Des Weiteren bedanke ich mich bei Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas Kugi für die Zuteilung dieses Diplomarbeitsthemas sowie für seine sehr lehrreichen Vorlesungen während des Studiums.

Ein besonderer Dank gilt auch meiner Familie, die mich unterstützt und die erfolgreiche Absolvierung des Studiums ermöglicht hat. Zu großen Dank bin ich auch meiner Freundin verpflichtet, die mich in den letzten Jahren geduldig begleitet und mir stets einen großen Rückhalt gegeben hat.

Wr. Neudorf, November 2019

# Abstract

In the steel industry, annealing furnaces are used for the heat treatment of strip products. A high-performance temperature control of the furnace should help to improve the product quality and should minimize the energy consumption.

In this thesis, a nonlinear model predictive temperature controller for the strip temperature in a horizontal annealing furnace is designed. The strip temperature at the end of the furnace should reach its desired temperature and should always be within the desired temperature limits. A tailored mathematical furnace model according to [1] serves as the basis for the controller design. In the control algorithm, a dynamic optimization problem with equality constraints is numerically solved using the Levenberg-Marquardt method. The required gradient and the approximate Hessian of the objective function are analytically computed using an adjoint based approach.

The capabilities of the proposed control concept are demonstrated in a software-based simulation environment with process data from the real plant.

# Kurzzusammenfassung

In der Stahlindustrie werden zur Wärmebehandlung von Bandprodukten Glühöfen verwendet. Durch eine geeignete Temperaturregelung solcher Öfen soll die Produktqualität gesteigert sowie der spezifische Energieverbrauch und der Ausschuss reduziert werden. In dieser Arbeit wird für einen horizontalen Bandglühofen eine nichtlineare modellprädiktive Regelung für die Bandtemperatur entworfen. Die Bandtemperatur soll am Ende des Ofens eine bestimmte Solltemperatur erreichen und immer in den erlaubten Temperaturgrenzen bleiben. Die Basis dafür ist ein maßgeschneidertes mathematisches Ofenmodell [1]. Im modellprädiktiven Regler wird das dynamische Optimierungsproblem numerisch mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren gelöst. Der notwendige Gradient und die approximierten Hessematrix werden analytisch mit Hilfe adjungierter Variablen berechnet. Als Stellgrößen verwendet der Regler die Brennstoffmassenströme in die Heizzonen des Ofens. Die Funktionalität und die Leistungsfähigkeit des entwickelten Temperaturreglers werden in einer Software-basierten Simulationsumgebung mit Prozessdaten der realen Anlage nachgewiesen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Horizontaler Bandglühofen . . . . .	1
1.2	Problemstellung . . . . .	2
1.3	Stand der Technik . . . . .	2
1.4	Motivation und Ziel der Arbeit . . . . .	3
1.5	Lösungsweg und Struktur der Arbeit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Mathematisches Ofenmodell</b>	<b>5</b>
2.1	Abgas . . . . .	5
2.2	Wand . . . . .	7
2.3	Rollen . . . . .	9
2.4	Band . . . . .	12
2.5	Strahlung und Konvektion . . . . .	13
2.5.1	Konvektion . . . . .	13
2.5.2	Strahlung . . . . .	14
2.6	Gesamtmodell . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Modellprädiktive Temperaturregelung</b>	<b>17</b>
3.1	Hierarchisches Automatisierungskonzept . . . . .	17
3.2	Zustandsbeobachter . . . . .	18
3.3	Funktionsprinzip der MPC . . . . .	19
3.4	Regelungsziele . . . . .	21
3.5	Formulierung des Opt.-Problems . . . . .	22
3.6	Numerischer Lösungsalgorithmus . . . . .	25
3.7	Konvergenzverhalten des LM-Ver. . . . .	31
<b>4</b>	<b>Industrielles Anwendungsbeispiel</b>	<b>34</b>
4.1	Simulationsumgebungen . . . . .	34
4.2	Implementierter Regler . . . . .	35
4.3	Numerische Ergebnisse . . . . .	37
4.3.1	Simulationsumgebung 1 . . . . .	39
4.3.2	Simulationsumgebung 2 . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>44</b>
5.1	Zusammenfassung . . . . .	44
5.2	Ausblick . . . . .	45

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung des Glühofens [1]. . . . .	1
2.1	Diskretisierung des Ofens in $N_v$ Kontrollvolumen [1]. . . . .	5
2.2	Geschichtete Wand mit 3 Schichten [1]. . . . .	7
2.3	Aufbau einer geschichteten Rolle in Zylinderkoordinaten [1]. . . . .	10
2.4	Bandaufbau [1]. . . . .	12
3.1	Hierarchisches Regelungskonzept. . . . .	17
3.2	Verlauf der Bandemissivität über die Heizzonen [1]. . . . .	18
3.3	Prädiktionshorizont $i$ . . . . .	20
3.4	Prädiktionshorizont $i + 1$ . . . . .	20
3.5	Bandbezogene Zieltemperaturen $T_s^{des}$ und Beschränkungen $T_s^{\pm}$ an der Pyrometerposition $z_P$ . . . . .	22
3.6	Eingangstranformation der Brennstoffmassenströme $u_k$ . . . . .	23
3.7	Ansatz $r(\xi_k) = \left\  \max(0, \xi_k^- + \Delta - \xi_k, \xi_k - \xi_k^+ + \Delta) \right\ $ für eine skalare Größe $\xi$ . . . . .	24
3.8	Struktur von (3.24) und (3.25). . . . .	28
3.9	Darstellung des Zieltemperaturverlaufes $T_s^{des}$ und des Isttemperaturverlaufes $T_P = T_s(z_P, t)$ . . . . .	31
3.10	Konvergenzverhalten des LM-Verfahrens. . . . .	32
3.11	Lösung des LM-Verfahrens nach 1, 2, 5 und 10 Iterationen. . . . .	33
4.1	Simulationsumgebung 1: Idealisiertes hierarchisches Regelungskonzept . . . . .	34
4.2	Simulationsumgebung 2: Erweitertes hierarchisches Regelungskonzept . . . . .	35
4.3	Steuerungs- und Prädiktionshorizont. . . . .	36
4.4	Banddicke, Zieltemperatur und Schranken für den Anwendungsfall. . . . .	38
4.5	Prädiktion der Bandtemperatur für $t = 6$ min 35s, $t = 7$ min 52s und $t = 9$ min. . . . .	40
4.6	Simulationsergebnisse des modellprädiktiven Regelungskonzepts in der Simulationsumgebung 1. . . . .	41
4.7	Simulationsergebnisse des modellprädiktiven Regelungskonzepts in der Simulationsumgebung 2. . . . .	43

# Tabellenverzeichnis

4.1	Vergleich zwischen dem vollständigen Modell [1] und dem reduzierten Modell (2.36). . . . .	37
4.2	Definition der Parameter für die Simulationsstudie. . . . .	37
4.3	Banddicken $d_s$ , Temperaturschranken $T_s^\pm$ und Zieltemperaturen $T_s^{des}$ sowie die zugehörigen Zeitbereiche. . . . .	38

# 1 Einleitung

Die Wärmebehandlung von Stahlbändern ist für die Materialeigenschaften der jeweiligen Endprodukte von großer Bedeutung. Es werden dazu häufig Bandglühöfen benutzt. Um einen kontinuierlichen Betrieb dieser Öfen zu gewährleisten, werden Stahlbänder mit unterschiedlichen Dicken, Breiten und Materialeigenschaften zusammenschweißt und als Endlosband durch den Ofen transportiert. In dieser Arbeit wird für einen horizontalen Bandglühofen ein modellbasiertes Regelungskonzept für die Wärmebehandlung von Stahlbändern entwickelt. Dieses Regelungskonzept basiert auf einem bestehenden und mit Messdaten validierten Ofenmodell [1]. Der Aufbau und die grundsätzliche Funktionsweise des betrachteten Ofens wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

## 1.1 Horizontaler Bandglühofen

Der betrachtete direkt befeuerte, horizontale Bandglühofen ist 80 m lang und für Bänder mit einer maximalen Breite von 2 m und einer maximalen Dicke von 2.5 mm ausgelegt. Abhängig von der Bandgeometrie variiert die Bandgeschwindigkeit im Bereich von 0.5 m/s bis 1.5 m/s.

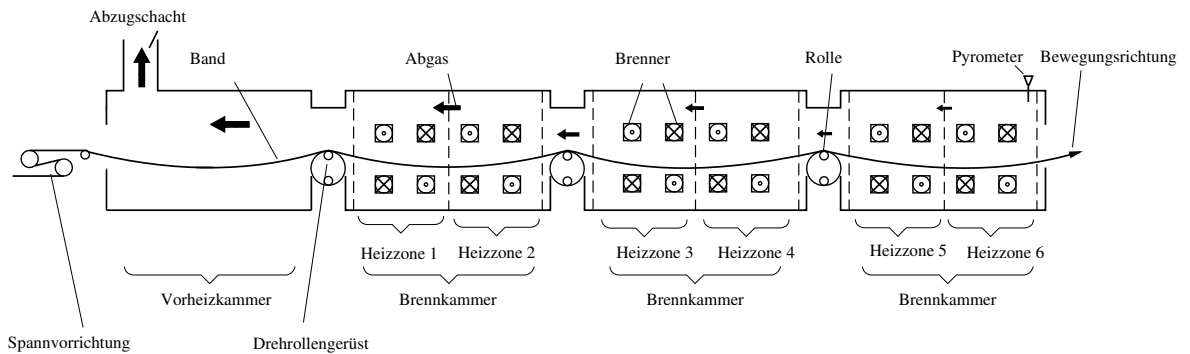


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Glühofens [1].

Wie in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt, besteht der betrachtete Glühofen aus einer Vorheizkammer am Ofeneingang und drei nachfolgenden Brennkammern. Zwischen jeder Kammer sind Drehrollengerüste für den Bandtransport verbaut. Die Rollen dieser Gerüste werden zum Schutz vor Überhitzung durch eine externe Kühlung auf einer festen Temperatur gehalten. Jede Brennkammer wird in zwei Heizzonen unterteilt, in denen quer zum Band Gasbrenner installiert sind. Durch eine überstöchiometrische Verbrennung von Erdgas entsteht das Abgas. Dieses Abgas strömt entgegen der Bandlaufrichtung aus den



Heizzonen in die Vorheizkammer. Am Beginn der Vorheizkammer ist ein Kamin installiert, durch den das Abgas entweichen kann. Durch die hohen Temperaturen des Abgases ist thermische Strahlung hauptverantwortlich für die Erwärmung des Bandes. Die Wärme, die nicht zur Erwärmung des Bandes verwendet wird, verlässt den Ofen entweder mit dem Abgas durch den Kamin oder durch die Ofenwand. Um die Verluste durch die Wand möglichst gering zu halten, besteht die Ofenwand aus mehreren Schichten aus feuerfesten Material.

## 1.2 Problemstellung

Um die gewünschte Produktqualität gewährleisten zu können, muss das Stahlband möglichst genau entsprechend einem definierten Temperaturverlauf erwärmt werden. Durch die immer größer werdende Produktvielfalt stellt sich zunehmend ein transienter Betrieb des Glühofens ein. Dieser Betrieb erschwert aufgrund der großen thermischen Trägheit des Ofens nicht nur das Erreichen der gewünschten Zieltemperaturen sondern auch das Einhalten von definierten Temperaturschranken, insbesondere in den Übergangsbereichen zweier Bänder mit unterschiedlichen Geometrien und unterschiedlichen Eigenschaften. Neben der Produktqualität gibt es auch noch weitere Anforderungen an den Ofenbetrieb wie z.B. optimierter Energieverbrauch. Die Anforderungen können somit wie folgt zusammengefasst werden:

- Die Bandtemperatur soll im stationären und im transienten Betrieb möglichst genau der Zielvorgabe folgen bzw. immer in den definierten Temperaturschranken bleiben.
- Der Primärenergieverbrauch soll minimiert werden.

Zur Realisierung dieser Anforderungen stehen die Volumenströme des Brennstoffes in die einzelnen Heizzonen als Stellgrößen zur Verfügung. Die Bandtemperatur kann im Ofen nur am Ende mit Hilfe eines Strahlungs-pyrometers gemessen werden, d.h. der Temperaturverlauf des Bandes entlang des Ofens steht messtechnisch nicht zur Verfügung.

## 1.3 Stand der Technik

In der Literatur finden sich verschiedenste Konzepte zur Temperaturregelung. Eines davon basiert auf klassischen PID-Reglern. Dieses Konzept erfordert kein mathematisches Ofenmodell und liefert für einen stationären Ofenbetrieb im Allgemeinen akzeptable Ergebnisse. Ein modifiziertes PID-Regelungskonzept ist in [2] beschrieben. In diesem Konzept werden die Reglerparameter durch Lösen einer Optimierungsaufgabe berechnet. Neuere Regelungskonzepte verwenden mathematische Modelle um eine genaue Prozessführung zu gewährleisten. In [3] wird z.B. eine Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur vorgestellt, die eine auf einem mathematischen Modell basierende Vorsteuerung mit einem PID Regler kombiniert. Ein weiteres Regelungskonzept, das mathematische Modelle verwendet, ist die modellprädiktive Regelung (Englisch MPC - Model Predictive Control). Mit diesem Regelungskonzept können bekannte zukünftige Störungen wie z.B. Bandübergänge systematisch berücksichtigt werden. In [4–6] werden lineare Modelle zur Temperaturregelung

verwendet. Ein lineares Modell erleichtert die Umsetzung eines MPC-Konzeptes erheblich, bildet jedoch die nichtlinearen Effekte wie z.B. thermische Strahlung nur unzureichend ab. Dieser Umstand kann gegebenenfalls zu einer verminderten Leistungsfähigkeit des MPC-Konzeptes führen. In [7, 8] werden modellprädiktive Temperaturregler (NMPC) basierend auf nichtlinearen Modellen vorgestellt. Ein Nachteil der MPC ist der bei der numerischen Lösung des zugrundeliegenden Optimierungsproblems auftretende hohe Rechenaufwand. Dieser Umstand erfordert einen effizienten Lösungsalgorithmus. Im Allgemeinen benötigt man zur numerischen Lösung den Gradienten und gegebenenfalls die (approximierte) Hessematrix der in der MPC verwendeten Kostenfunktion. In [9, 10] wird das Gauß-Newton-Verfahren für die Lösung nichtlinearer Least-Squares Probleme vorgeschlagen. Das Gauß-Newton-Verfahren fordert, dass die Kostenfunktion aus einer Summe quadratischer Funktionswerte besteht und vernachlässigt bei der Berechnung einer approximierten Hessematrix die zweite Ableitung der Kostenfunktion. Eine weitere Möglichkeit zur Lösung eines nichtlinearen Least-Squares Problems ist das *Levenberg-Marquardt*-Verfahren [10, 11].

## 1.4 Motivation und Ziel der Arbeit

Aufgrund der hohen thermischen Trägheit des Ofens und der Tatsache, dass nur eine Messung der Temperatur zur Verfügung steht, ist ein nichtlineares modellprädiktives Regelungskonzept zielführend. Die MPC ermöglicht die Regelung komplexer nichtlinearer Mehrgrößensysteme. Darüber hinaus erlaubt das Konzept die Einbeziehung mehrerer Regelungsziele, sowie die systematische Berücksichtigung von Beschränkungen und zukünftigen Störungen. Die meisten in der Literatur vorgestellten modellprädiktiven Regelungskonzepte basieren auf linearen Modellen. Da bei hohen Temperaturen die nichtlinearen Effekte der strahlungsbedingten Wärmeübertragung dominieren, ist es zielführend, diese nichtlinearen Effekte systematisch im Regelungskonzept zu berücksichtigen. Basierend auf dem existierenden (nichtlinearen) mathematischen Modell [1] des betrachteten Bandglühofens soll ein MPC-Konzept für folgende Ziele entwickelt werden:

- Genaue Bandtemperaturregelung
- Minimierung des spezifischen Energiebedarfs

Als Stellgrößen stehen der MPC die Brennstoffmassenströme in die Heizzonen zur Verfügung. An der realen Anlage ist sowohl der Absolutwert als auch die Änderungsrate der Stellgröße beschränkt.

## 1.5 Lösungsweg und Struktur der Arbeit

Das in dieser Arbeit verwendete Modell des direkt befeuerten Bandglühofens wird aus [1] übernommen. Das Modell umfasst Teilmodelle für das Abgas, die Wand, das Band und die Rollen. In Kapitel 2 werden die Teilmodelle, welche auf Stoffmengen-, Massen- und Enthalpiebilanzen sowie Konstitutivgleichungen basieren, kurz zusammengefasst. Dieses Ofenmodell bildet die Grundlage für den Reglerentwurf. In Kapitel 3 wird der modellprädiktive Temperaturregler entwickelt. Die Lösung der zugrundeliegenden Optimierungsaufgabe

erfolgt mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren. In Kapitel 4 wird die entwickelte MPC in einer Simulationsumgebung getestet. Diese verwendet ein detailliertes mit Messdaten der realen Anlage validiertes Ofenmodell [1] des betrachteten Bandglühofens. In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst. Weiterhin wird ein Ausblick auf weitere Arbeiten gegeben.

## 2 Mathematisches Ofenmodell

In diesem Kapitel wird das für die modellprädiktive Regelung des betrachteten Bandglühofens verwendete reduzierte Ofenmodell [1] zusammengefasst. Das Ofenmodell basiert auf Stoffmengen- und Enthalpiebilanzen sowie Konstitutivgleichungen und besteht aus Teilmodellen für Abgas, Wand, Rollen und Band. Diese Teilmodelle sind über die Wärmeübertragungsmechanismen Konvektion und Strahlung miteinander gekoppelt.

### 2.1 Abgas

Das Band wird hauptsächlich durch das in Gegenrichtung strömende Abgas erwärmt. Das Abgas entsteht durch die überstöchiometrische Verbrennung von Erdgas in den einzelnen Heizzonen. Dieser überstöchiometrische Verbrennungsprozess ist durch eine Luftüberschusszahl  $\lambda > 1$  gekennzeichnet. Im Weiteren wird angenommen, dass das Erdgas rein aus Methan ( $CH_4$ ) besteht. Das Abgas besteht aus den bei der Verbrennung von Methan resultierenden Komponenten Kohlendioxid, Sauerstoff, Wasserdampf sowie Stickstoff und ist charakterisiert durch seine Temperatur und Masse. Die Abkürzungen der Abgaskomponenten werden in der Menge  $S_\nu = \{CO_2, O_2, H_2O, N_2\}$  zusammengefasst. Für die Modellierung des Abgases wird der Ofenraum in Längsrichtung in  $N_\nu$  Kontrollvolumen aufgeteilt, vgl. Abbildung 2.1. Es wird angenommen, dass jedes Kontrollvolumen  $i$ ,  $i = 1, \dots, N_\nu$ , als eigenständiger Rührkessel betrachtet werden kann, d.h. im Kontrollvolumen herrscht eine konstante Abgastemperatur  $T_{v,i}$ . Im Hinblick auf ein recheneffizientes Modell für die Bandtemperatur wird weiterhin angenommen, dass die Abgasdynamik quasi-stationär betrachtet werden kann.

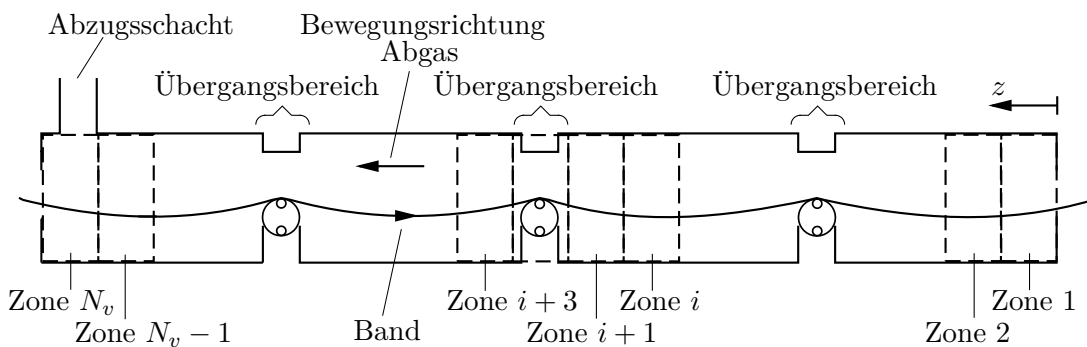
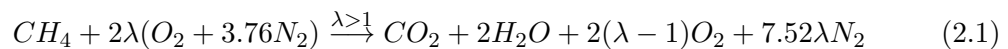


Abbildung 2.1: Diskretisierung des Ofens in  $N_\nu$  Kontrollvolumen [1].

Ausgehend von der stationären Reaktionsgleichung der überstöchiometrischen Verbrennung



können für ein Kontrollvolumen  $i$  die austretenden Stoffmengenströme  $\dot{n}_i^\nu$  mit  $\nu \in S_\nu$  aus

$$\begin{aligned} \dot{n}_{i-1}^{CO_2} CO_2 + \dot{n}_{i-1}^{H_2O} H_2O + \dot{n}_{i-1}^{O_2} O_2 + \dot{n}_{i-1}^{N_2} N_2 + \dot{n}_i^{b,CH_4} (CH_4 + 2\lambda_i O_2 + 7.52\lambda_i N_2) \\ \longrightarrow \dot{n}_i^{CO_2} CO_2 + \dot{n}_i^{H_2O} H_2O + \dot{n}_i^{O_2} O_2 + \dot{n}_i^{N_2} N_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

ermittelt werden. Dabei bezeichnet  $\dot{n}_i^{b,CH_4}$  den durch die Brenner eingebrachten Stoffmengenstrom von  $CH_4$  und  $\dot{n}_{i-1}^\nu$  den eintretenden Stoffmengenstrom der Komponente  $\nu \in S_\nu$  aus dem vorhergehenden Kontrollvolumen  $i - 1$ . Der Zusammenhang zwischen Stoffmengenstrom  $\dot{n}_i^\nu$  und Massenstrom  $\dot{M}_i^\nu$  ist durch die Beziehung

$$\dot{n}_i^\nu = \frac{\dot{M}_i^\nu}{\bar{M}^\nu}, \quad (2.3)$$

mit der molaren Masse  $\bar{M}$  gegeben. Da aufgrund der Massenerhaltung die Stoffmengenanteile auf beiden Seiten von (2.2) ident sein müssen, können aus den Mol-Bilanzen

$$N : 2\dot{n}_{i-1}^{N_2} + 15.04\lambda_i \dot{n}_i^{b,CH_4} = 2\dot{n}_i^{N_2} \quad (2.4a)$$

$$O : 2\dot{n}_{i-1}^{CO_2} + \dot{n}_{i-1}^{H_2O} + 2\dot{n}_{i-1}^{O_2} + 4\lambda_i \dot{n}_i^{b,CH_4} = 2\dot{n}_i^{CO_2} + \dot{n}_i^{H_2O} + 2\dot{n}_i^{O_2} \quad (2.4b)$$

$$H : 2\dot{n}_{i-1}^{H_2O} + 4\dot{n}_i^{b,CH_4} = 2\dot{n}_i^{H_2O} \quad (2.4c)$$

$$C : \dot{n}_{i-1}^{CO_2} + \dot{n}_i^{b,CH_4} = \dot{n}_i^{CO_2} \quad (2.4d)$$

für Kohlenstoff  $C$ , Sauerstoff  $O$ , Wasserstoff  $H$  und Stickstoff  $N$  die Stoffmengenströme  $\dot{n}_i^\nu$  mit  $\nu \in S_\nu$  bestimmt werden. Somit ergibt sich für bekannte Stoffmengenströme  $\dot{n}_i^{b,CH_4}$  in die entsprechenden Kontrollvolumen  $i$  und für bekannte Stoffmengenströme  $\dot{n}_0^\nu$  ein lineares Gleichungssystem mit den  $4N_\nu$  unbekanntem Stoffmengenströmen  $\dot{n}_i^\nu$ , mit  $i = 1, \dots, N_\nu$  und  $\nu \in S_\nu$ , das numerisch effizient gelöst werden kann. Mit den berechneten Stoffmengenströmen  $\dot{n}_i^\nu$  können im weiterer Folge die Abgastemperaturen mit Hilfe stationärer Enthalpiebilanzen bestimmt werden. Die Enthalpiebilanz für ein Kontrollvolumen  $i$  ergibt sich unter der Annahme eines idealen Gasgemisches zu

$$0 = \sum_{\nu \in S_\nu} \dot{n}_{i-1}^\nu \bar{M}^\nu h^\nu(T_{v,i-1}) + \dot{n}_i^{b,CH_4} \sum_{\kappa \in S_\kappa} \chi_\kappa \bar{M}^\kappa h^\kappa(T_i^{b,\kappa}) - \sum_{\nu \in S_\nu} \dot{n}_i^\nu \bar{M}^\nu h^\nu(T_{v,i}) + \dot{Q} \quad (2.5)$$

mit der spezifischen Enthalpie  $h^\nu(T)$  sowie  $(\kappa, \chi_\kappa) = \{(CH_4, 1), (O_2, 2\lambda), (N_2, 7.52\lambda)\}$  und  $S_\kappa = \{CH_4, O_2, N_2\}$ . Die ersten beiden Terme in (2.5) beschreiben aus dem Kontrollvolumen  $i - 1$  den eintretenden Enthalpiestrom und den Enthalpiestrom zufolge des in das Volumen  $i$  eingebrachten Brennstoffs und Verbrennungsluft. Der dritte Term beschreibt den austretenden Enthalpiestrom aus dem Kontrollvolumen  $i$  und der vierte Term beschreibt den Wärmestrom  $\dot{Q}$  in das Kontrollvolumen, welcher durch die Wechselwirkung des Abgases mit der Umgebung durch Strahlung und Konvektion resultiert. Wird (2.5) für alle  $N_\nu$  Kontrollvolumen angeschrieben, so ergibt sich ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der Abgastemperaturen  $T_{v,i}$  mit  $i = 1, \dots, N_\nu$ .

## 2.2 Wand

Im Ofen bestehen die Wand-, Decken- und Bodenelemente aus unterschiedlichen Schichten. Abbildung 2.2 zeigt schematisch ein Wandelement, das aus drei (homogenen) Isolierschich-

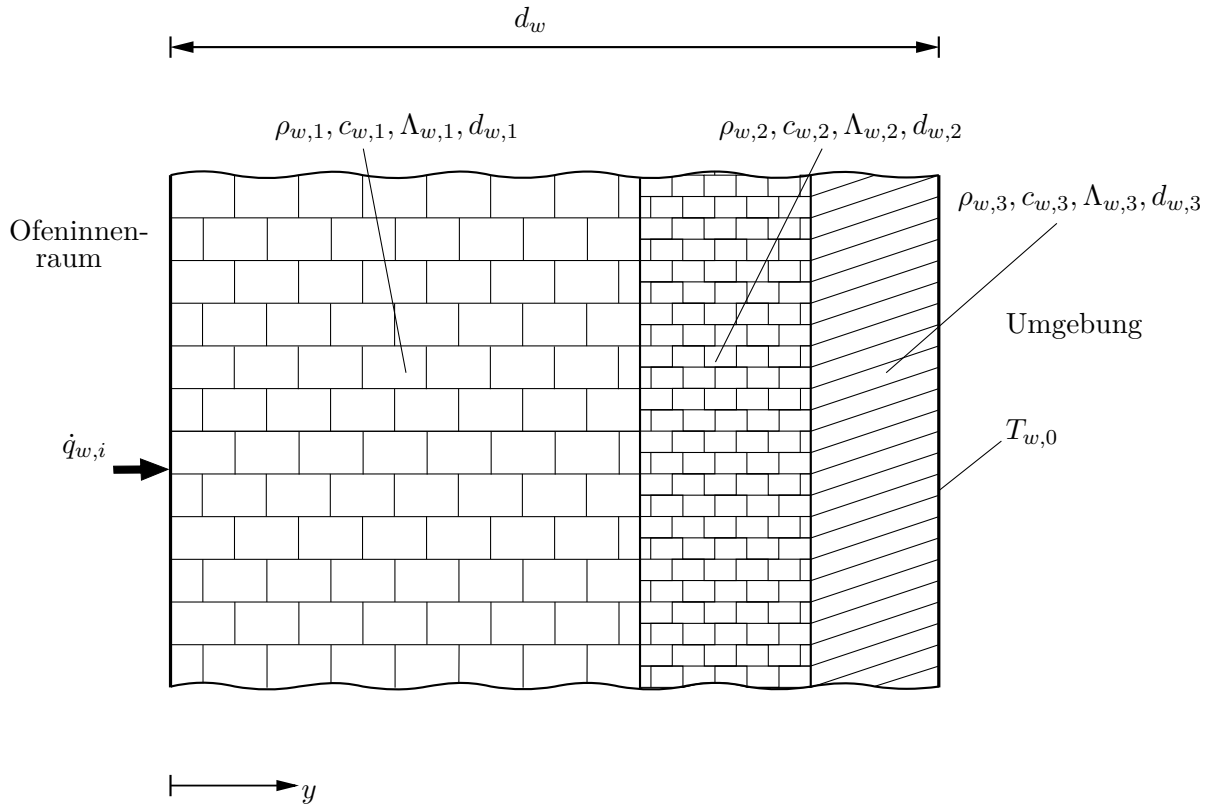


Abbildung 2.2: Geschichtete Wand mit 3 Schichten [1].

ten besteht. Jede Isolierschicht  $i$  wird durch die Materialparameter Dichte  $\rho_{w,i}$ , spezifische Wärmekapazität  $c_{w,i}$  und Wärmeleitfähigkeit  $\Lambda_{w,i}$  sowie die Dicke  $d_{w,i}$  charakterisiert. Für das Wandmodell werden die Materialparameter in jeder Schicht temperaturunabhängig angenommen.

Im Allgemeinen ist der Temperaturgradient in Dickenrichtung aufgrund des großen Temperaturunterschiedes zwischen Ofeninnenraum und Umgebung signifikant größer als in einer Ebene parallel zur Wand. Daher wird in weiterer Folge eine 1-dimensionale Wärmeleitung angenommen. Mit dem Temperaturprofil  $\Theta_{w,i}(y, t)$  lautet die 1-dimensionale Wärmeleitgleichung in Dickenrichtung  $y$  für ein Wandelement  $i$

$$\rho_w(y)c_w(y)\frac{\partial\Theta_{w,i}(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\Lambda_w(y)\frac{\partial\Theta_{w,i}(y,t)}{\partial y}\right), \quad y \in (0, d_w), \quad t > t_0, \quad (2.6a)$$

mit der *Neumann* Randbedingung

$$\Lambda_w(0) \frac{\partial \Theta_{w,i}(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \dot{q}_{w,i} = 0, \quad t > t_0, \quad (2.6b)$$

und der *Dirichlet* Randbedingung

$$\Theta_{w,i}(d_w, t) - T_{w0} = 0, \quad t > t_0, \quad (2.6c)$$

sowie der Anfangsbedingung

$$\Theta_{w,i}(y, t_0) = \Theta_{w,i,0}(y), \quad y \in (0, d_w). \quad (2.6d)$$

Dabei bezeichnet  $T_{w,0}$  die konstante Außenwandtemperatur und  $\dot{q}_{w,i}$  bezeichnet die Wärmestromdichte zufolge des Wärmeaustausches zwischen der Wand und dem Innenraum des Ofens durch Strahlung und Konvektion. Gleichung (2.6) wird als starke Formulierung des Wärmeleitproblems bezeichnet. Eine approximative Lösung des Wärmeleitproblems (2.6) kann mit Hilfe der Galerkin-Methode gefunden werden. Dabei wird für das Temperaturprofil  $\Theta_w(y, t)$  die Approximation

$$\hat{\Theta}_{w,i}(y, t) = \sum_{k=1}^{N_G} \phi_k(y) T_{w,i}^k(t) + \phi_0(y) T_{w0}, \quad (2.7)$$

mit geeignet gewählten Ansatzfunktionen  $\phi_k$ , und den sogenannten Galerkin-Koeffizienten  $T_{w,i}^k$  verwendet, vgl.[1]. Auf Basis der schwachen Formulierung des Wärmeleitproblems (2.6) sowie der Verwendung von (2.7) und der entsprechenden Ansatzfunktionen  $\phi_k$  kann aus den resultierenden  $N_G$  Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^{d_w} \phi_k(y) \rho_w(y) c_w(y) \frac{\partial \hat{\Theta}_{w,i}(y,t)}{\partial t} dy - \phi_k(d_w) \Lambda_w(d_w) \frac{\partial \hat{\Theta}_{w,i}(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=d_w} \\ & + \phi_k(0) \Lambda_w(0) \frac{\partial \hat{\Theta}_{w,i}(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=0} + \int_0^{d_w} \frac{d\phi_k(y)}{dy} \Lambda_w(y) \frac{\partial \hat{\Theta}_{w,i}(y,t)}{\partial y} dy \\ & - \phi_1(0) \Lambda_w(0) \frac{\partial \hat{\Theta}_{w,i}(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \phi_1(0) \dot{q}_{w,i} + \phi_0(d_w) \hat{\Theta}_{w,i}(d_w, t) \\ & - \phi_0(d_w) T_{w0}, \quad k = 1, \dots, N_G \end{aligned} \quad (2.8)$$

ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die unbekanntenen Galerkin-Koeffizienten  $\mathbf{T}_{w,i} = [T_{w,i}^k]_{k=1, \dots, N_G}$  zur Beschreibung der Wärmeleitung durch das Wandelement  $i$  in der Form [1]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{w,i} = \mathbf{D}_i^{-1} (\mathbf{B}_i \mathbf{T}_{w,i} + T_{w0} \mathbf{C}_i + \dot{q}_{w,i} \mathbf{G}_i), \quad (2.9)$$

mit den Matrizen  $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{N_G \times N_G}$  und  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{N_G \times N_G}$  sowie den Vektoren  $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{N_G \times 1}$  und  $\mathbf{G}_i \in \mathbb{R}^{N_G \times 1}$  abgeleitet werden. Die Matrix  $\mathbf{D}_i$  hat vollen Rang. Die Einträge von  $\mathbf{D}_i$  und  $\mathbf{B}_i$  berechnen sich zu [1]

$$D_{i,\ell k} = \int_0^{d_w} \phi_\ell(y) \rho_w(y) c_w(y) \phi_k(y) dy, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} B_{i,\ell k} = & - \int_0^{d_w} \frac{d\phi_\ell}{dy} \Lambda_w(y) \frac{d\phi_k}{dy} dy + \phi_\ell(d_w) \Lambda_w(d_w) \frac{d\phi_k}{dy} \Big|_{y=d_w} \\ & - \phi_\ell(0) \Lambda_w(0) \frac{d\phi_k}{dy} \Big|_{y=0} + \phi_1(0) \Lambda_w(0) \frac{d\phi_k}{dy} \Big|_{y=0} \\ & - \phi_0(d_w) \phi_k(d_w). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Einträge von  $\mathbf{C}_i$  und  $\mathbf{G}_i$  berechnen sich zu [1]

$$\begin{aligned} C_{i,\ell} = & - \int_0^{d_w} \frac{d\phi_\ell}{dy} \Lambda_w(y) \frac{d\phi_0}{dy} dy + \phi_\ell(d_w) \Lambda_w(d_w) \frac{d\phi_0}{dy} \Big|_{y=d_w} \\ & - \phi_\ell(0) \Lambda_w(0) \frac{d\phi_0}{dy} \Big|_{y=0} + \phi_1(0) \Lambda_w(0) \frac{d\phi_0}{dy} \Big|_{y=0} \\ & - \phi_0(d_w) (\phi_0(d_w) - 1), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$G_{i,\ell} = \phi_1(0) \quad (2.13)$$

mit  $l = 1, \dots, N_G$  und  $k = 1, \dots, N_G$ .

## 2.3 Rollen

Die wassergekühlten zylinderförmigen Rollen sind zwischen den einzelnen Kammern installiert, vgl. Abbildung 2.1, und befördern das Band durch den Ofen. Eine einzelne Rolle besteht aus  $N$  Schichten. Eine Schicht  $j$  ist dabei durch die Materialparameter Dichte  $\rho_{r,j}$ , spezifische Wärmekapazität  $c_{r,j}$  und Wärmeleitfähigkeit  $\Lambda_{r,j}$  sowie durch die Dicke  $d_{\varrho,j}$  charakterisiert. Die Dicke  $d_{\varrho,j}$  einer Schicht  $j$  folgt dabei aus der Differenz von Außen- und Innenradius, d.h.  $d_{\varrho,j} = \varrho_j - \varrho_{j-1}$ . Jede Schicht wird dabei als homogen und rotations-symmetrisch angenommen. Die Temperatur  $T_F$  des Wassers im Kühlkreislauf im Inneren der Rolle wird als konstant vorausgesetzt. Weiterhin wird die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter vernachlässigt.



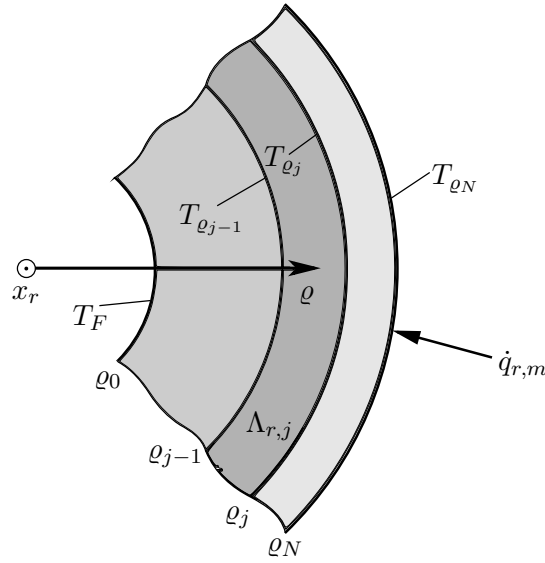


Abbildung 2.3: Aufbau einer geschichteten Rolle in Zylinderkoordinaten [1].

Aufgrund des Verhältnisses  $\varrho_0/\varrho_N = 0,373$  von Innen- zu Außenradius wird die Wärmeleitgleichung in Zylinderkoordinaten formuliert. Die Temperatur einer Rolle  $m$  wird in weiterer Folge mit Hilfe des Temperaturprofils  $\Theta_{r,m}(\varrho, t)$  beschrieben. Diese hängt nur vom Radius  $\varrho$  ab und sei in Axial- und Umfangsrichtung homogen. Damit kann ein 1-dimensionales Wärmeleitproblem in der Form

$$\rho_r(\varrho)c_r(\varrho)\frac{\partial\Theta_{r,m}(\varrho, t)}{\partial t} = \Lambda_r(\varrho)\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Theta_{r,m}(\varrho, t)}{\partial\varrho}\right), \quad \varrho \in (\varrho_0, \varrho_N), \quad t > t_0 \quad (2.14a)$$

mit der *Dirichlet*-Randbedingung

$$\Theta_{r,m}(\varrho_0, t) - T_F = 0, \quad t > t_0 \quad (2.14b)$$

und der *Neumann*-Randbedingung

$$\Lambda_r(\varrho_N)\frac{\partial\Theta_{r,m}(\varrho, t)}{\partial\varrho}\Bigg|_{\varrho=\varrho_N} - \dot{q}_{r,m} = 0, \quad t > t_0 \quad (2.14c)$$

sowie der Anfangsbedingung

$$\Theta_{r,m}(\varrho, t_0) = \Theta_{r,m,0}(\varrho), \quad \varrho \in [\varrho_0, \varrho_N] \quad (2.14d)$$

angegeben werden. Dabei wird angenommen, dass die Rolle zufolge der Wasserkühlung an der Innenseite die konstante Wassertemperatur  $T_F$  annimmt. Die Wärmestromdichte [1]

$$\dot{q}_{r,m} = \frac{A_r^{rad}}{A_r^{rad} + A_r^{cond}}\dot{q}_{r,m}^{rad} + \frac{A_r^{cond}}{A_r^{rad} + A_r^{cond}}\dot{q}_{r,m}^{cond} \quad (2.15)$$

berücksichtigt den Anteil  $\dot{q}_{r,m}^{rad}$  zufolge thermischer Strahlung, siehe Abschnitt 2.5, und den Anteil  $\dot{q}_{r,m}^{cond} = \alpha^{cond}(T_s - T_{r,m})$  mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha^{cond}$  zufolge

der Wärmeleitung zwischen Rolle und Band. In (2.15) bezeichnet  $A_r^{rad}$  die Fläche die an der Strahlung teilnimmt und  $A_r^{cond}$  ist die Kontaktfläche zwischen Rolle und Band. Wie bei der Wand wird auch für das Wärmeleitproblem (2.14) eine approximative Lösung mit Hilfe der Galerkin-Methode und der stationären Lösung von (2.14) gefunden, vgl.[1]. Als Approximation für das Temperaturprofil  $\Theta_{r,m}(\varrho, t)$  wird die Näherung

$$\hat{\Theta}_{r,m}(\varrho, t) = (1 - \phi(\varrho)) T_F + \phi(\varrho) T_{r,m}(t) \quad (2.16)$$

mit dem unbekanntem Galerinkoeffizient  $T_{r,m}(t)$  und der Ansatzfunktion  $\phi(\varrho)$  verwendet. Die Ansatzfunktion  $\phi(\varrho)$  setzt sich aus den abschnittsweise definierten Funktionen [1]

$$\phi_j(\varrho) = \frac{1}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\Lambda_{r,j}} \ln\left(\frac{\varrho_j}{\varrho_{j-1}}\right)} \left( \sum_{\kappa=1}^{j-1} \frac{1}{\Lambda_{r,\kappa}} \ln\left(\frac{\varrho_\kappa}{\varrho_{\kappa-1}}\right) + \frac{1}{\Lambda_{r,j}} \ln\left(\frac{\varrho}{\varrho_{j-1}}\right) \right), \quad \varrho \in [\varrho_{j-1}, \varrho_j] \quad (2.17)$$

zusammen und erfüllt die Bedingungen

$$\phi(\varrho_0) = 0 \quad (2.18)$$

$$\phi(\varrho_N) = 1. \quad (2.19)$$

Unter Verwendung der schwachen Formulierung des Wärmeleitproblems (2.14) in der Form [1]

$$0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho_N} \phi(\varrho) \rho_r(\varrho) c_r(\varrho) \frac{\partial \Theta_{r,m}(\varrho, t)}{\partial t} d\varrho - \int_{\varrho_0}^{\varrho_N} \phi(\varrho) \Lambda_r(\varrho) \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \Theta_{r,m}(\varrho, t)}{\partial \varrho} \right) d\varrho + \phi(\varrho_0) (\Theta_{r,m}(\varrho_0, t) - T_F) + \phi(\varrho_N) \left( \Lambda_r(\varrho_N) \frac{\partial \Theta_{r,m}(\varrho, t)}{\partial \varrho} \Big|_{\varrho=\varrho_N} - \dot{q}_{r,m} \right) \quad (2.20)$$

und unter Verwendung der Ansatzfunktion  $\phi(\varrho)$  kann eine approximative Lösung des Wärmeleitproblems (2.14) in der Form [1]

$$\frac{d}{dt} T_{r,m}(t) = \frac{1}{K_{r1}} \dot{q}_{r,m}(t) - \frac{K_{r2}}{K_{r1}} (T_{r,m}(t) - T_F) \quad (2.21a)$$

mit den Abkürzungen

$$K_{r1} = \int_{\varrho_0}^{\varrho_N} \rho_r(\varrho) c_r(\varrho) \phi^2(\varrho) d\varrho \quad (2.21b)$$

und

$$K_{r2} = \int_{\varrho_0}^{\varrho_N} \Lambda_r(\varrho) \frac{d\phi(\varrho)}{d\varrho} \left( \frac{d\phi(\varrho)}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho} \phi(\varrho) \right) d\varrho \quad (2.21c)$$

angegeben werden.

## 2.4 Band

Die in den Ofen eingebrachte Wärme wird hauptsächlich dazu verwendet, um das Band auf eine definierte Zieltemperatur zu erwärmen. Die Erwärmung des Bandes wird in weiterer Folge in einem Eulerschen Koordinatensystem beschrieben. Das Band wird charakterisiert durch seine Geometrie, d.h. Breite  $b_s$  und Dicke  $d_s$ , und seine Materialparameter, d.h. spezifische Wärmekapazität  $c_s$ , Massendichte  $\rho_s$  und Wärmeleitfähigkeit. Die Materialparameter sind im Allgemeinen temperaturabhängig und können für die unterschiedlichen Bänder variieren. Das Band bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v_s > 0$  in negativer

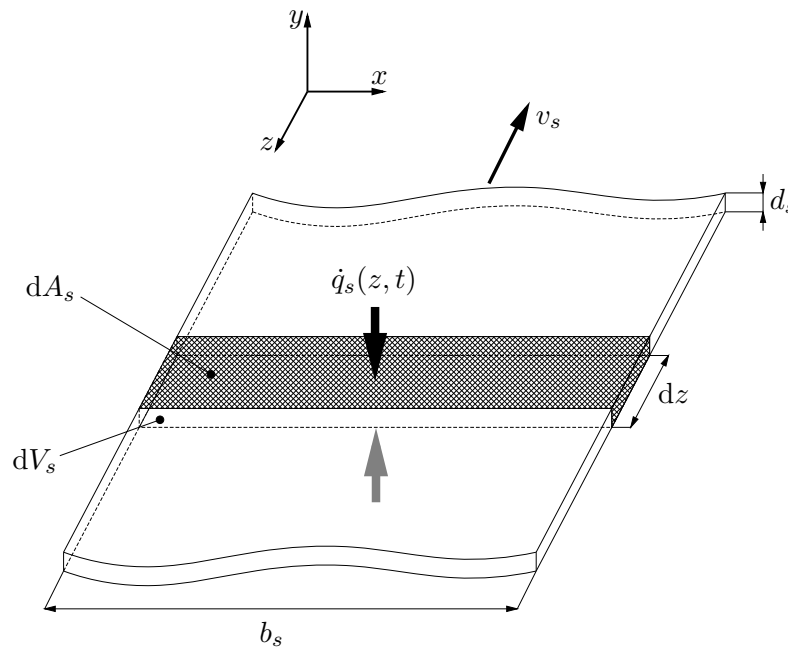


Abbildung 2.4: Bandaufbau [1].

$z$ -Richtung durch den Ofen, vgl. Abbildung 1.1 und Abbildung 2.4. Unter der Annahme einer homogenen Temperatur in Dicken- und Breitenrichtung kann das Temperaturprofil  $T_s(z, t)$  entlang des Ofens unter Verwendung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik für offene Systeme und unter Berücksichtigung von  $d_s \ll b_s$  in Form der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial t} = \frac{2\dot{q}_s(z, t)}{\rho_s c_s(T_s(z, t)) d_s} + v_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z}, \quad z \in [0, L), \quad t > t_0 \quad (2.22a)$$

mit der Randbedingung

$$T_s(L, t) = T_U \quad (2.22b)$$

und der Anfangsbedingung

$$T_s(z, t_0) = T_{s,0}(z) \quad (2.22c)$$

angegeben werden. Dabei bezeichnet  $T_U$  die Bandtemperatur am Ofeneingang  $z = L$ , wobei  $L$  die geometrische Länge des Glühofens und  $\dot{q}_s$  die Wärmestromdichte zufolge thermischer Strahlung, Konvektion und Wärmeleitung bezeichnet. Für das Folgende wird das Band mit Hilfe von  $N_{s+1}$  Knotenpunkten örtlich diskretisiert, d.h. das Band wird in  $z$ -Richtung in  $N_s$  finite Abschnitte mit den zugehörigen Längen  $\Delta z_i$ ,  $i = 1, \dots, N_s$ , unterteilt. Durch die Diskretisierung des Transportterms in Gleichung (2.22) im Sinne des Upwind Verfahrens [12] lautet die Differentialgleichung für die Bandtemperatur  $T_{s,i}(t)$  an einem Knotenpunkt [1]

$$\frac{dT_{s,i}(t)}{dt} = \frac{2\dot{q}_{s,i}(t)}{\rho_s c_s (T_{s,i}(t)) d_s} + v_s \frac{T_{s,i+1}(t) - T_{s,i}(t)}{\Delta z_i}, \quad \forall i = 1, \dots, N_s \quad (2.23)$$

mit  $T_{s,0} = T_U$ . Die Wärmestromdichte

$$\dot{q}_{s,i} = \left(1 - \frac{A_r^{cond}}{2b_s \Delta z_i}\right) (\dot{q}_{s,i}^{rad} + \dot{q}_{s,i}^{conv}) + \frac{A_r^{cond}}{2b_s \Delta z_i} \dot{q}_{s,i}^{cond} \quad (2.24)$$

berücksichtigt mit den Wärmestromdichten  $\dot{q}_s^{rad}$  und  $\dot{q}_s^{conv}$  den Wärmeaustausch des Bandes mit der Umgebung zufolge Strahlung und Konvektion. Die Wärmestromdichte  $\dot{q}_s^{cond}$  bezeichnet den Wärmeaustausch des Bandes mit den Rollen zufolge Wärmeleitung, d.h. die Kontaktfläche  $A_r^{cond}$  des Bandes mit der Rolle ist nur in den Bandabschnitten mit Rollenkontakt ungleich Null.

## 2.5 Strahlung und Konvektion

Die einzelnen Teilmodelle Abgas, Wand, Rollen und Band sind hauptsächlich über die Wärmeübertragungsmechanismen Konvektion und Strahlung verkoppelt. Im Folgenden sind die grundlegenden Zusammenhänge beider Mechanismen zusammengefasst.

### 2.5.1 Konvektion

Im Ofen findet aufgrund der gegensätzlichen Bewegung von Band und Abgas eine Wärmeübertragung durch erzwungene Konvektion statt. Aus dem *Newtonschen Abkühlgesetz* [13] ergibt sich die konvektive Wärmestromdichte  $\dot{q}^{conv}$  zu

$$\dot{q}^{conv} = \alpha^{conv} (T_v - T_s). \quad (2.25)$$

Dabei bezeichnet  $T_v$  die Abgastemperatur,  $T_s$  die Bandtemperatur und  $\alpha^{conv}$  den Wärmeübergangskoeffizienten. Der Wärmeübergangskoeffizient hängt maßgeblich von der Geometrie, dimensionslosen Kennzahlen der Strömungslehre sowie der Abgaszusammensetzung ab, vgl. [1].

Für eine kompakte Notation werden die für jedes Kontrollvolumen  $i$ ,  $i = 1, \dots, N_v$ , berechneten Wärmeübergangskoeffizienten in einem Vektor  $\boldsymbol{\alpha}^{conv} = [\alpha_i^{conv}]_{i=1, \dots, N_v}$  zusammengefasst. Gleichung (2.25) ergibt sich damit zu

$$\dot{\mathbf{q}}^{conv} = \text{diag}\{\boldsymbol{\alpha}^{conv}\} (\mathbf{T}_v - \boldsymbol{\Gamma}_{vs} \mathbf{T}_s) \quad (2.26)$$

mit den Vektoren  $\mathbf{T}_v = [T_{v,i}]_{i=1, \dots, N_v}$  und  $\mathbf{T}_s = [T_{s,i}]_{i=1, \dots, N_s}$  sowie der Abbildungsmatrix  $\boldsymbol{\Gamma}_{vs} \in \mathbb{R}^{N_v \times N_s}$ , die die  $N_s$  Banelemente den entsprechenden  $N_v$  Kontrollvolumen zuweist.

### 2.5.2 Strahlung

Die thermische Strahlung ist aufgrund der hohen Temperaturen der dominante Wärmeübertragungsmechanismus. Da es sich bei dem Abgas aufgrund seiner molekularen Struktur um ein nichttransparentes gasförmiges Medium handelt, muss es bei der Strahlungsberechnung berücksichtigt werden. Eine geeignete Methode zur Beschreibung der Strahlung mit nichttransparenten Medien stellt die Zonenmethode [14–16] dar. Für deren Anwendung muss der Ofenraum in diskrete Volumen und Oberflächen unterteilt werden. Weiterhin muss angenommen werden, dass jede Fläche ein diffuser grauer Strahler ist und jedes Volumen ebenfalls grau strahlt. Jedes Flächenelement  $i$  wird durch seine Fläche  $A_i$ , seinen Emissivitätskoeffizienten  $\varepsilon_i$  und seine homogene Oberflächentemperatur  $T_{\Sigma,i}$  charakterisiert. Ein Kontrollvolumen wird durch sein Volumen  $V_j$ , eine homogene Temperatur  $T_j$  und einen Abklingkoeffizienten  $K_p = 0,5$  beschrieben. Unter Verwendung von Strahlungsenergiebilanzen können die Wärmestromdichten  $\dot{\mathbf{q}}^{rad}$  in den Oberflächen und die Wärmeströme  $\dot{\mathbf{Q}}_v^{rad}$  in die Kontrollvolumen in der Form [1]

$$\dot{\mathbf{q}}^{rad} = \mathbf{P}_{ss} \mathbf{T}_{\Sigma}^4 + \mathbf{P}_{sv} \mathbf{T}_v^4 \quad (2.27a)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_v^{rad} = \mathbf{P}_{vs} \mathbf{T}_{\Sigma}^4 + \mathbf{P}_{vv} \mathbf{T}_v^4 \quad (2.27b)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{P}_{ss} = \sigma \left( \text{diag}\{\varepsilon\} \tilde{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{ss}} - \mathbf{E} \right) \text{diag}\{\varepsilon\}, \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{P}_{sv} = \sigma \text{diag}\{\varepsilon\} \tilde{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{sv}}, \quad (2.28b)$$

$$\mathbf{P}_{vs} = \sigma \overline{\mathbf{vs}} \left[ (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}) \tilde{\mathbf{A}} (\overline{\mathbf{ss}} + \mathbf{E}) \right] \text{diag}\{\varepsilon\}, \quad (2.28c)$$

$$\mathbf{P}_{vv} = \sigma \left[ \overline{\mathbf{vs}} (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}) \tilde{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{sv}} + \overline{\mathbf{vv}} - 4K_p \text{diag}\{\mathbf{V}\} \right] \quad (2.28d)$$

und der Abkürzung

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\text{diag}\{\mathbf{A}\} - \overline{\mathbf{ss}} (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})]^{-1} \quad (2.29)$$

angegeben werden. Hierbei bezeichnet  $\sigma$  die *Stefan-Boltzmann-Konstante* und  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix. Die sogenannten *Direct-Exchange-Areas* [17, 18]  $\overline{\mathbf{ss}}$ ,  $\overline{\mathbf{vs}} = \overline{\mathbf{sv}}^T$  und  $\overline{\mathbf{vv}}$  beschreiben die Strahlungsverhältnisse im betrachteten Ofen [11]. Der Vektor der Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}^{rad}$  setzt sich in der Form

$$\dot{\mathbf{q}}^{rad} = \left[ \left( \dot{\mathbf{q}}_s^{rad} \right)^T \quad \left( \dot{\mathbf{q}}_w^{rad} \right)^T \quad \left( \dot{\mathbf{q}}_r^{rad} \right)^T \right]^T \quad (2.30)$$

mit

$$\dot{\mathbf{q}}_s^{rad} = \left[ \dot{q}_{s,i}^{rad} \right]_{i=1,\dots,N_s}, \quad \dot{\mathbf{q}}_w^{rad} = \left[ \dot{q}_{w,i}^{rad} \right]_{i=1,\dots,N_w}, \quad \dot{\mathbf{q}}_r^{rad} = \left[ \dot{q}_{r,i}^{rad} \right]_{i=1,\dots,N_r}$$

zusammen. Weiterhin werden die Temperaturen der  $N_s$  Bandabschnitte, der  $N_w$  Wandelemente und der  $N_r$  Rollen in dem Vektor

$$\mathbf{T}_{\Sigma} = \left[ \mathbf{T}_s^T \quad (\mathbf{T}_w \mathbf{T}_w)^T \quad \mathbf{T}_r^T \right]^T \quad (2.31)$$

mit

$$\mathbf{T}_s = [T_{s,i}]_{i=1,\dots,N_s}, \quad \mathbf{T}_w = [T_{w,i}]_{i=1,\dots,N_w N_G}, \quad \mathbf{T}_r = [T_{r,i}]_{i=1,\dots,N_r}$$

zusammengefasst. Der Vektor  $\mathbf{\Gamma}_w \mathbf{T}_w$  beschreibt die Oberflächentemperatur der Wandelemente, wobei die Abbildungsmatrix  $\mathbf{\Gamma}_w \in \mathbb{R}^{N_w \times N_G}$  zur Bestimmung der  $N_w$  Oberflächentemperaturen aus den  $N_G N_w$  Wandtemperaturen verwendet wird. Die Emissivitäten werden ebenfalls im Vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_s^T & \boldsymbol{\varepsilon}_w^T & \boldsymbol{\varepsilon}_r^T \end{bmatrix}^T \quad (2.32)$$

mit

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = [\varepsilon_{s,i}]_{i=1,\dots,N_s}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_w = [\varepsilon_{w,i}]_{i=1,\dots,N_w}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r = [\varepsilon_{r,i}]_{i=1,\dots,N_r}$$

zusammengefasst. Die Emissivitäten  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}_w$  werden als konstant angenommen. Die Bandemissivität  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$  wird hingegen über die Lösung einer Optimierungsaufgabe ermittelt, vgl. [1]. Der Vektor  $\mathbf{T}_v = [T_{v,i}]_{i=1,\dots,N_v}$  fasst die Abgastemperaturen der  $N_v$  Kontrollvolumen zusammen und die Vektoren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s^T & \mathbf{A}_w^T & \mathbf{A}_r^T \end{bmatrix}^T \quad (2.33)$$

und

$$\mathbf{V} = [V_j]_{j=1,\dots,N_v} \quad (2.34)$$

beinhalten die vorkommenden Flächen und Volumen.

## 2.6 Gesamtmodell

Die einzelnen Teilmodelle Wand, Abgas, Rollen und Band können unter Verwendung der Wärmeübertragungsmechanismen Strahlung, Konvektion und Wärmeleitung in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}_\Sigma = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{T}_\Sigma, \mathbf{T}_v) \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{T}_\Sigma, \mathbf{T}_v, \mathbf{u}) \quad (2.35b)$$

mit den Brennstoffmassenströmen  $\dot{M}_i^{CH_4}$  zusammengefasst im Eingangsvektor  $\mathbf{u} = [\dot{M}_i^{CH_4}]_{i=1,\dots,N_{HZ}}$  geschrieben werden. Der Vektor  $\mathbf{f}_1 \in \mathbb{R}^{N_s + N_G N_w + N_r \times 1}$  fasst die Dynamiken der Wand (2.9), des Bandes (2.23) sowie der Umlenkrollen (2.21) und der Vektor  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$  die Dynamik des Abgases zusammen. Die Abgastemperatur  $\mathbf{T}_v$  ergibt sich als Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (2.35b). Für die dazu notwendigen Stoffmengenströme muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, vgl. Abschnitt 2.1. Dessen Lösung ist formal bereits in  $\mathbf{f}_2$  enthalten, d.h. die Stoffmengenströme sind nicht mehr explizit in (2.35b) enthalten. Die explizite Zeitabhängigkeit in (2.35) deutet auf die sich ändernden Bandparameter und die variierende Bandgeschwindigkeit hin.

Für die Implementierung auf einem Computer muss der Zeitbereich diskretisiert werden.

Zu diesem Zweck wird eine diskrete Zeitachse mit (nicht notwendigerweise) äquidistanten Zeitpunkten  $t_k, \forall k \in \mathbb{N}$ , und der Abtastzeit  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  definiert. Da für das Ofenmodell (2.35) keine analytische Lösung bestimmt werden kann, wird die zeitdiskrete Darstellung von (2.35) mit Hilfe des 1-stufigen halb-expliziten Runge-Kutta-Verfahren in der Form

$$\mathbf{T}_{\Sigma,k+1} = \mathbf{T}_{\Sigma,k} + \Delta t_k \mathbf{f}_{1,k}(\mathbf{T}_{\Sigma,k}, \mathbf{T}_{v,k}) \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_{2,k}(\mathbf{T}_{\Sigma,k+1}, \mathbf{T}_{v,k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \quad (2.36b)$$

bestimmt. Um numerische Stabilität zu gewährleisten, muss in jedem Zeitschritt zumindest die *Courant-Friedrichs-Levy* (CFL)-Bedingung [19–21]

$$\Delta t_k < \frac{\min_i \Delta z_i}{v_s} \quad (2.37)$$

erfüllt sein. Dabei ist  $\min_i \Delta z_i$  die kleinste Länge eines diskreten Bandabschnittes. Die wichtigste Prozessgröße ist die Bandtemperatur, die mit Hilfe eines Pyrometers am Ende des Ofens gemessen werden kann. Die Ausgangsfunktion

$$T_P = h(\mathbf{T}_{\Sigma,k}) \quad (2.38)$$

liefert die Bandtemperatur an dieser Stelle  $z_P$ . Ein Vergleich des Modells mit Messergebnissen ist in [1] zu finden.

## 3 Modellprädiktive Temperaturregelung

Zunächst wird auf die verwendete hierarchische Struktur des Automatisierungssystems des Ofens und auf die Schätzung nicht messbarer Prozessgrößen im Ofen eingegangen. Dann wird das Grundprinzip der modellprädiktiven Regelung skizziert und die quantitativen Regelungsziele definiert. Schließlich wird das Optimierungsproblem definiert und ein numerischer Lösungsalgorithmus vorgestellt.

### 3.1 Hierarchisches Automatisierungskonzept

Das Automatisierungskonzept der Anlage ist Abbildung 3.1 zu entnehmen. Das Prozesslei-

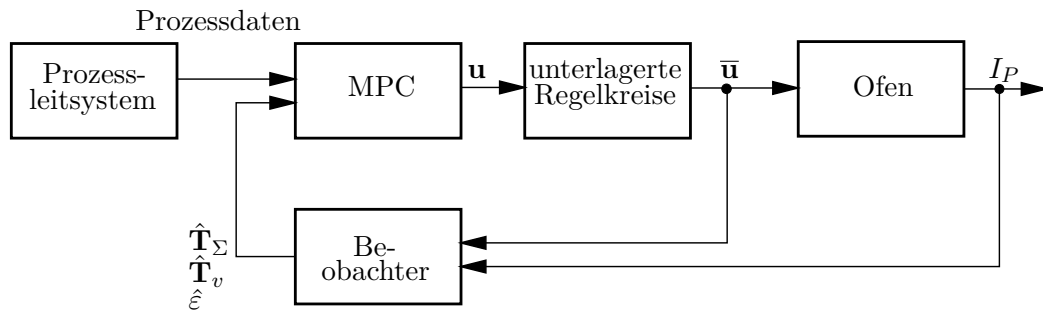


Abbildung 3.1: Hierarchisches Regelungskonzept.

tsystem ist für die Planung der Produktreihenfolge zuständig und stellt die charakteristischen Geometrie- und Materialdaten der zu bearbeitenden Bänder sowie die entsprechenden Zieltemperaturen und Temperaturbeschränkungen für einen zukünftigen Zeithorizont zur Verfügung. Diese Prozessdaten werden sowohl vom modellprädiktiven Regler (MPC) als auch vom Beobachter verwendet. Eine detaillierte Beschreibung der Funktionsweise der modellprädiktiven Regelung erfolgt im Abschnitt 3.3. Der modellprädiktive Regler benötigt in regelmäßigen Zeitabschnitten den gesamten aktuellen Systemzustand, d.h. die Temperaturen  $\mathbf{T}_\Sigma$  und  $\mathbf{T}_v$  als Anfangsbedingung für das im Regler verwendete Ofenmodell. Da dieser Systemzustand messtechnisch nicht vollständig erfasst werden kann, wird dieser mit einem Zustandsbeobachter geschätzt, siehe Abschnitt 3.2. Der Beobachter verwendet neben den Eingangsgrößen  $\bar{\mathbf{u}}$  auch die vom Pyrometer gemessene Intensität  $I_P$ . Neben den Temperaturen schätzt der Beobachter eine Änderung der Bandemissivität. Sowohl der Beobachter als auch der modellprädiktive Regler basieren auf dem mathematischen Modell (2.36). Das Konzept in Abbildung 3.1 setzt sich aus einer überlagerten Temperaturregelung und unterlagerten Regelkreisen für die Medienversorgung zusammen. Die unterlagerten Regelkreise realisieren die gewünschten Brennstoff- und Brennluftmassenströme, vgl. [11].



## 3.2 Zustandsbeobachter

Der modellprädiktive Regler braucht zu regelmäßigen Zeitpunkten den aktuellen Systemzustand als Anfangsbedingung für das Ofenmodell. Im Bandglühofen werden einzelne Wand-, Rollen- und Abgastemperaturen mit Hilfe von Thermoelementen gemessen. Die Bandtemperatur am Ende des Ofens wird mit Hilfe eines Strahlungs-pyrometers an der Stelle  $z_P$  bestimmt. Aus der gemessenen Strahlungsintensität  $I_P$  wird die Bandtemperatur im Allgemeinen über den Zusammenhang

$$I_P = \sigma \varepsilon_P T_P^4 \quad (3.1)$$

mit der konstanten Emissivität des Pyrometers  $\varepsilon_P$  ermittelt. Der gesamte Systemzustand kann mit den zur Verfügung stehenden Messungen nicht vollständig bestimmt werden. Aus diesem Grund wird ein Zustandsbeobachter verwendet, der die notwendigen Zustandsgrößen schätzt. In diesem Zusammenhang spielt die Bandemissivität eine wichtige Rolle. Aufgrund von z.B. Änderungen der Materialeigenschaften kann sich die Bandemissivität  $\varepsilon_s$  während des Ofendurchlaufs stark ändern. Da die Bandemissivität durch die thermische Strahlung einen maßgeblichen Einfluss auf die Temperaturen im Ofen hat, wird auch die Änderung der Bandemissivität geschätzt. In [1] wird für den örtlichen Verlauf der Bandemissivität im Ofen eine hyperbolische Tangensfunktion verwendet, d.h.  $\varepsilon_s(z) = \vartheta(\varepsilon_s^-, \varepsilon_s^+, z^*, z)$ . Dabei ist  $\varepsilon_s^\pm$  die obere bzw. untere Schranke und  $z^*$  die Verschiebung der Funktion in ihrem Wendepunkt. Ein typischer Emissivitätsverlauf ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Der in [1] entwickelte Zustandsbeobachter nutzt neben

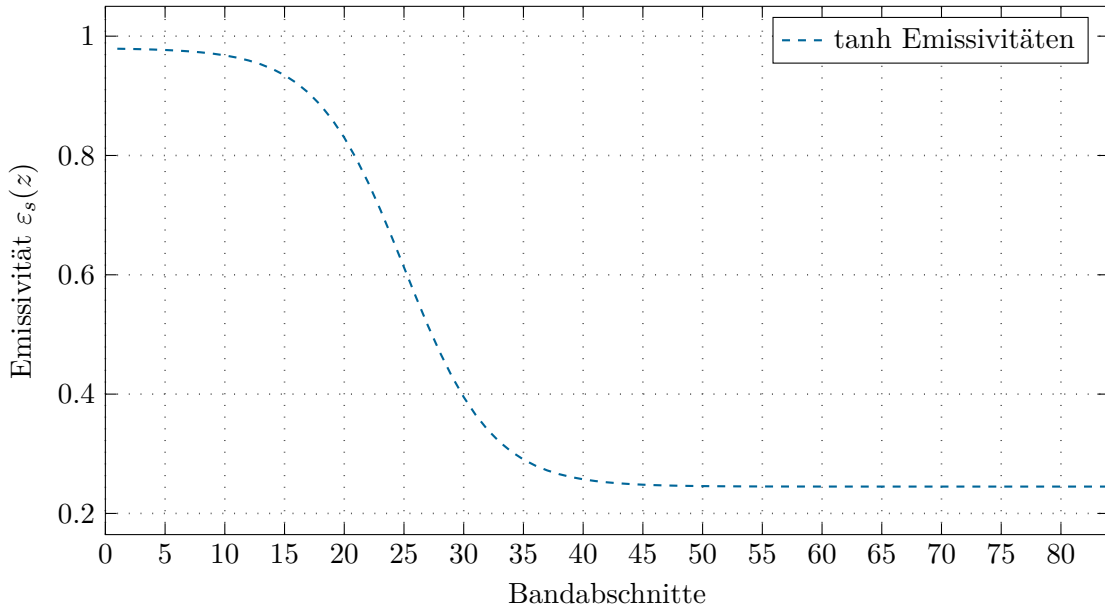


Abbildung 3.2: Verlauf der Bandemissivität über die Heizzonen [1].

dem bekannten Eingang  $\mathbf{u}$  die Messung  $I_P$  zur Schätzung der Temperaturen  $\mathbf{T}_\Sigma$  und  $\mathbf{T}_v$  sowie einer Emissivitätsänderung durch Adaption von  $\varepsilon_s^+$ . Dementsprechend ergibt sich

der Zustandsbeobachter in der Form

$$\hat{\mathbf{T}}_{\Sigma,k+1} = \hat{\mathbf{T}}_{\Sigma,k} + \Delta t_k \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{T}}_{\Sigma,k}, \hat{\mathbf{T}}_{v,k}) \quad (3.2a)$$

$$\Delta \hat{\varepsilon}_{s,k+1}^+ = \Delta \hat{\varepsilon}_{s,k}^+ + \Delta t_k \gamma_\varepsilon (I_P - \hat{I}_P) \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{T}}_{\Sigma,k+1}, \hat{\mathbf{T}}_{v,k+1}, \mathbf{u}_k) \quad (3.2c)$$

mit der geschätzten Intensität

$$\hat{I}_P = \sigma \vartheta(\varepsilon_s^-, \varepsilon_s^+ + \Delta \hat{\varepsilon}_s^+, z^*, z_P) (h(\mathbf{T}_\Sigma))^4. \quad (3.3)$$

Zu beachten ist, dass die Änderung  $\Delta \hat{\varepsilon}_{s,k}^+$  über die thermische Strahlung einen Einfluss auf die Temperatur  $\mathbf{T}_\Sigma$  und  $\mathbf{T}_v$  hat, vgl. Abschnitt 2.5. In Gleichung (3.2a) und (3.2c) ist diese Abhängigkeit nicht explizit angeführt.

Mit jeder neuen Schätzung  $\Delta \hat{\varepsilon}_{s,k}^+$  müssen die Strahlungsmatrizen  $\mathbf{P}_i$ , mit  $i \in \{ss, vv, sv, vs\}$ , gemäß (2.28) neu berechnet werden. Für eine effiziente Implementierung werden die Strahlungsmatrizen um einen nominellen Wert  $\varepsilon_s^+$  linearisiert und die resultierenden Matrizen vorab gespeichert. Damit können die strahlungsbedingten Wärmeströme bei (kleinen) Änderungen  $\Delta \varepsilon_s^+$  mit geringem numerischen Aufwand berechnet werden, vgl. [1].

### 3.3 Funktionsprinzip der MPC

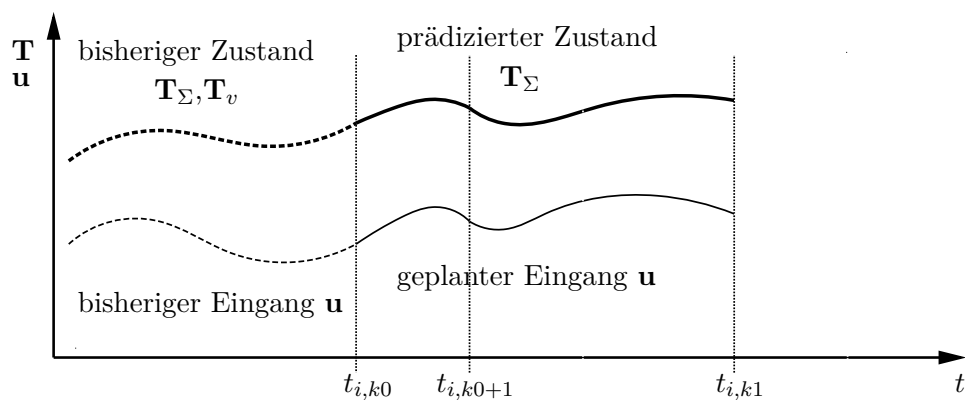
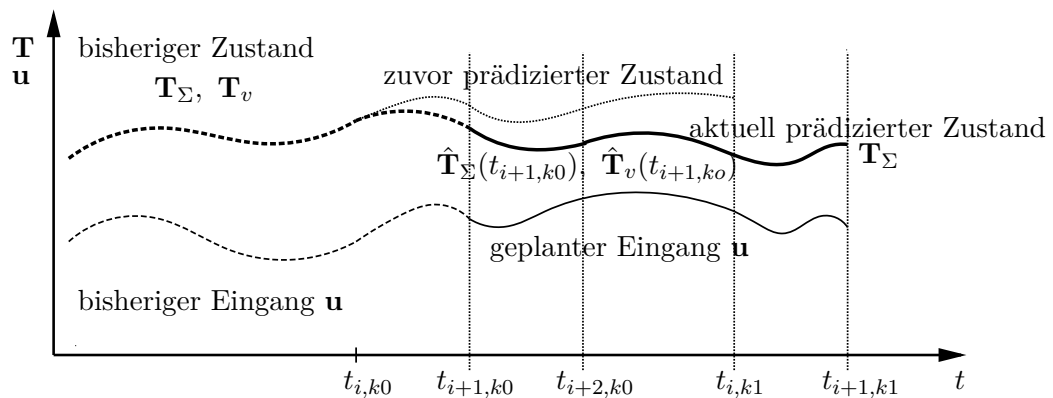
Das Prinzip der MPC kann mit Hilfe von Abbildung 3.3 und Abbildung 3.4 wie folgt zusammengefasst werden:

- Zum aktuellen Zeitpunkt  $t_{i,k0}$  werden die vom Beobachter geschätzten Temperaturen  $\hat{\mathbf{T}}_\Sigma(t_{i,k0})$  und  $\hat{\mathbf{T}}_v(t_{i,k0})$  sowie die geschätzte Emissivitätsänderung  $\Delta \hat{\varepsilon}_s(t_{i,k0})$  verwendet, um das zukünftige Verhalten des realen Ofens auf Basis des Ofenmodells (2.36) für den sogenannten Prädiktionshorizont  $(t_{i,k0}, t_{i,k1}]$  zu präzisieren. Dabei hängt die Prädiktion von der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  und bekannten zukünftigen Bandübergängen sowie Störungen innerhalb des Prädiktionshorizontes ab.
- Der Eingang  $\mathbf{u}(t)$  wird durch Lösen einer dynamischen Optimierungsaufgabe bestimmt. Dabei wird der Eingang über dem Prädiktionshorizont  $(t_{i,k0}, t_{i,k1}]$  so bestimmt, dass die zukünftigen Temperaturen  $\mathbf{T}_\Sigma$  und  $\mathbf{T}_v$  im Sinne einer Kostenfunktion möglichst exakt den Zieltemperaturen entsprechen.
- Auf das reale System wird nur der Teil des optimalen Einganges  $\mathbf{u}$  aufgeschaltet, der im Steuerungshorizont  $[t_{i,k0}, t_{i+1,k0}]$  liegt. Die berechneten Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  im Intervall  $[t_{i+1,k0}, t_{i,k1}]$  werden nicht weiter berücksichtigt. Diese können jedoch als neue Startlösung für den nächsten Prädiktionshorizont  $i+1$  verwendet werden.
- Der Vorgang startet zum Zeitpunkt  $t_{i+1,k0}$  wieder von Neuem.

Die Länge sowohl des Prädiktions- als auch des Steuerungshorizontes sind wesentliche Parameter für die Güte und das Störverhalten des Reglers. Die MPC soll möglichst effizient auf Änderungen im System reagieren, d.h. bei Änderungen der Zieltemperaturen,

Beschränkungen oder bei Störungen des Systems. Daher ist ein möglichst kurzer Steuerungshorizont zu wählen. Weiterhin wird das zugrunde liegende Optimierungsproblem, das über den Prädiktionshorizont definiert ist, innerhalb des Steuerungshorizontes gelöst. Infolge dessen ist die Länge des Steuerungshorizontes zumindest durch die Berechnung der (optimalen) Variablen und Anwendung auf das System begrenzt. Der numerische Aufwand kann durch einen kurzen Prädiktionshorizont sowie durch die Berechnung einer nur suboptimalen Lösung des Optimierungsproblems reduziert werden. Jedoch müssen innerhalb des Prädiktionshorizontes die wesentlichen Dynamiken des Systems abgebildet werden.

Die Wahl der Horizonte ist damit vom Anwendungsfall abhängig und sollte hinsichtlich Genauigkeit und zeitlicher Effizienz der gewünschten Regelungsziele vernünftig gewählt werden.

Abbildung 3.3: Prädiktionshorizont  $i$ .Abbildung 3.4: Prädiktionshorizont  $i + 1$ .

Die wichtigsten Vorteile der modellprädiktiven Regelung können wie folgt zusammengefasst werden. Mit der modellprädiktiven Regelung können

- mehrere Regelungsziele gleichzeitig berücksichtigt,
- Mehrgrößensysteme geregelt,
- Eingangs- und Zustandsbeschränkungen sowie Beschränkungen der Änderungsraten der Eingänge und Zustände systematisch berücksichtigt und
- zukünftige bekannte Störungen und Verläufe systematisch berücksichtigt werden.

Ein Nachteil der modellprädiktiven Regelung ist der im Allgemeinen hohe Rechenaufwand für die numerische Lösung des der modellprädiktiven Regelung zugrunde liegenden Optimierungsproblems. Der Steuerhorizont definiert die Zeit, die für das Lösen des Optimierungsproblems zur Verfügung steht. Weiterhin beeinflusst der Prädiktionshorizont wesentlich den Rechenaufwand. Für einen gegebenen Steuerungshorizont ist daher ein numerisch effizienter Lösungsalgorithmus wünschenswert. Damit kann ein möglichst langer Prädiktionshorizont gewählt werden. Ein effizienter numerischer Lösungsalgorithmus für das Optimierungsproblem wird in Abschnitt 3.6 vorgestellt.

### 3.4 Regelungsziele

Im Bandglühofen soll das durchlaufende Band bis zur Pyrometermesstelle  $z_P$  am Ende des Ofens auf eine definierte Zieltemperatur  $T_s^{des}$  erwärmt werden. Insbesondere im transienten Betrieb, d.h. wenn mehrere aneinandergeschweißte Bänder mit unterschiedlichen Material- und Geometrieparametern sowie unterschiedlichen Zieltemperaturen  $T_s^{des}$  durch den Ofen befördert werden, ist das eine anspruchsvolle Aufgabe. Wie in Abbildung 3.5 angedeutet, kann die realisierte Bandtemperatur im Bereich der Schweißnaht nicht gleichzeitig die Zieltemperaturen beider Bänder erfüllen. Die Bandtemperatur soll an der Pyrometermesstelle jedoch immer innerhalb der Temperaturschranken  $T_s^\pm$  sein, vgl. Abbildung 3.5. Die Bandtemperatur an der Pyrometermesstelle  $z_P$  muss daher immer die Beschränkung

$$T_{s,k}^- \leq h(\mathbf{T}_{\Sigma,k}) \leq T_{s,k}^+ \quad (3.4)$$

erfüllen. Dabei sind  $T_{s,k}^\pm$  die in das ortsfeste Koordinatensystem transformierten bandbezogenen Beschränkungen. Ein weiteres Ziel ist es, den spezifischen Energiebedarf, d.h. den Brennstoffbedarf pro Einheit produziertem Stahlband, zu reduzieren.

Die zur Realisierung der gewünschten Zieltemperatur zur Verfügung stehenden Stellgrößen, d.h. die Brennstoffmassenströme in die Heizzonen, sind sowohl im Absolutwert als auch in den Änderungsraten beschränkt. Dementsprechend muss der Eingang  $\mathbf{u}$  die Bedingungen

$$\mathbf{u}^- \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}^+ \quad (3.5)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^- \leq \frac{\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}}{\Delta t_k} \leq \dot{\mathbf{u}}^+ \quad (3.6)$$

mit konstanten Werten für  $\mathbf{u}^\pm$  und  $\dot{\mathbf{u}}^\pm$  erfüllen. Dabei wurde die Änderungsrate der Eingangsgröße durch einen Differenzenquotienten approximiert.

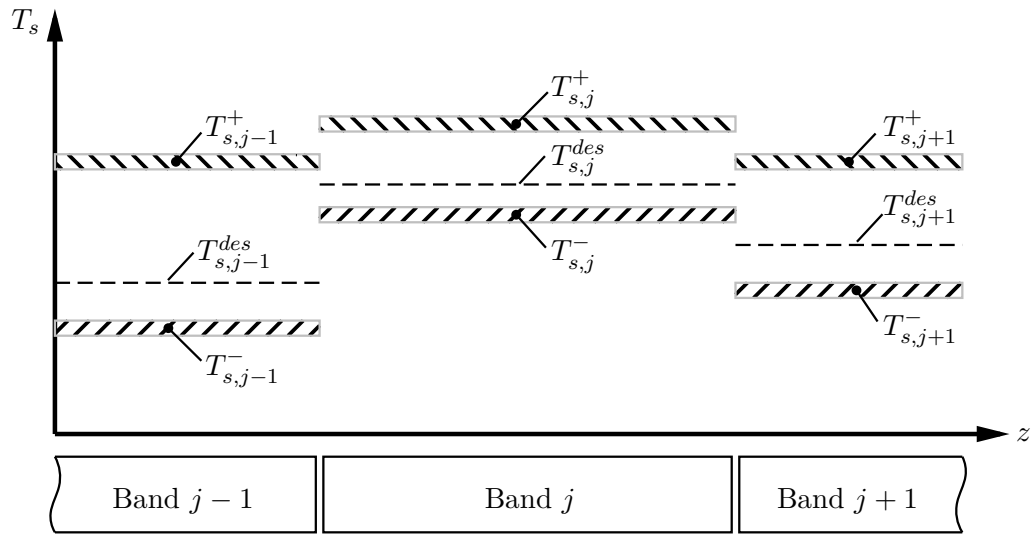


Abbildung 3.5: Bandbezogene Zieltemperaturen  $T_s^{des}$  und Beschränkungen  $T_s^{\pm}$  an der Pyrometerposition  $z_P$ .

### 3.5 Formulierung des Optimierungsproblems

Das der MPC zugrunde liegende dynamische Optimierungsproblem wird für einen Prädiktionshorizont  $(t_{k_0}, t_{k_1}]$  definiert. Die im Abschnitt 3.4 festgelegten Regelungsziele werden mit Hilfe der Kostenfunktion mit

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|r_{1,k}(h(\mathbf{T}_{\Sigma,k}))\|_{\mathbf{W}_1} + \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{W}_2} \quad (3.7a)$$

$$r_{1,k}(h(\mathbf{T}_{\Sigma,k})) = [T_{s,k}^{des} - h(\mathbf{T}_{\Sigma,k})] \quad (3.7b)$$

realisiert. Dabei bedeutet  $\|\xi\|_{\mathbf{W}} = \xi^T \mathbf{W} \xi$  eine quadratische Form mit der positiv semi-definiten Matrix  $\mathbf{W}$ . Der erste Term der Kostenfunktion bestraft den Regelfehler, d.h. die Abweichung der Bandtemperatur von der gewünschten Zieltemperatur an der Pyrometerposition  $z_P$ . Der zweite Term bestraft einen hohen Brennstoffbedarf. Damit wird eine Minimierung des spezifischen Energiebedarfs realisiert. Mit der Kostenfunktion (3.7), dem Ofenmodell (2.36) sowie den Beschränkungen (3.4), (3.5) und (3.6) kann das dynamische

Optimierungsproblem in der Form

$$\min_{\substack{\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{N_{HZ}} \\ \forall k \in K}} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|r_{1,k}(h(\mathbf{T}_{\Sigma,k}))\|_{W_1} + \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{W}_u} \quad (3.8a)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{T}_{\Sigma,k} = \mathbf{T}_{\Sigma,k-1} + \Delta t_{k-1} \mathbf{f}_{1,k-1}(\mathbf{T}_{\Sigma,k-1}, \mathbf{T}_{v,k-1}), \quad \forall k \in K \quad (3.8b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_{2,k}(\mathbf{T}_{\Sigma,k}, \mathbf{T}_{v,k}, \mathbf{u}_k), \quad \forall k \in K \quad (3.8c)$$

$$\mathbf{u}^- \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}^+, \quad \forall k \in K \quad (3.8d)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^- \leq \frac{\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}}{\Delta t_k} \leq \dot{\mathbf{u}}^+, \quad \forall k \in K \quad (3.8e)$$

$$T_{s,k}^- \leq h(\mathbf{T}_{\Sigma,k}) \leq T_{s,k}^+, \quad \forall k \in K \quad (3.8f)$$

$$\mathbf{T}_{\Sigma,k_0} = \mathbf{T}_{\Sigma,0}, \quad \mathbf{T}_{v,k_0} = \mathbf{T}_{v,0}, \quad \mathbf{u}_{k_0} = \mathbf{u}_0 \quad (3.8g)$$

mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{T}_{\Sigma,0}$ ,  $\mathbf{T}_{v,0}$ ,  $\mathbf{u}_0$  und der Abkürzung  $K = \{k_0 + 1, \dots, k_1\}$  formuliert werden. Im Allgemeinen ist die numerische Lösung von Optimierungsaufgaben mit Ungleichungsbeschränkungen mit mehr Rechenaufwand verbunden als Optimierungsaufgaben mit reinen Gleichungsbeschränkungen, siehe z.B. [22] und [9]. Aus diesem Grund wird das Problem (3.8) in weiterer Folge in ein Optimierungsproblem nur mit Gleichungsbeschränkungen überführt. In einem ersten Schritt werden die Beschränkungen (3.8d) durch eine nichtlineare Eingangstransformation berücksichtigt. Dazu wird die nichtlineare Abbildung

$$\phi(\mathbf{v}_k) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \tanh(2\mathbf{v}_k)) \quad (3.9)$$

verwendet. Wie in Abbildung 3.6 für eine skalare Größe dargestellt, werden die unbe-

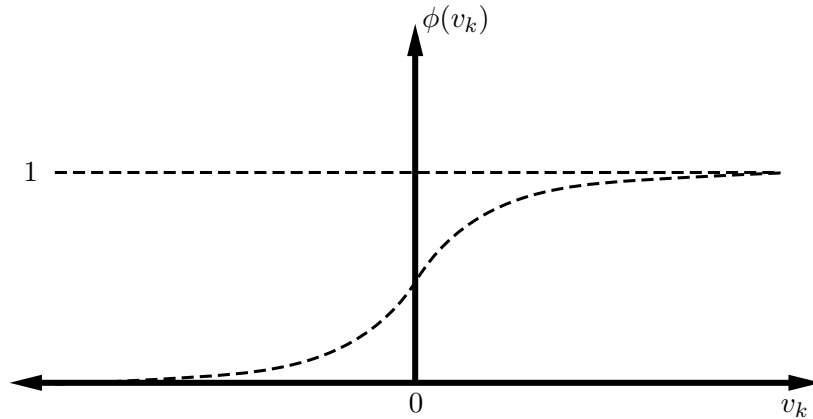


Abbildung 3.6: Eingangstransformation der Brennstoffmassenströme  $u_k$ .

schränkten Größen  $\mathbf{v}_k$  durch die Abbildung (3.9) auf den Bereich  $(0, 1)$  begrenzt. Damit lässt sich die nichtlineare Eingangstransformation unter Verwendung von (3.9) in der Form

$$\mathbf{u}_k = \Psi(\mathbf{v}_k) = \text{diag}\{\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-\} \phi(\mathbf{v}_k) + \mathbf{u}^- \quad (3.10)$$

angeben. Durch die Eingangstransformation (3.10) ist die Ungleichungsbedingung (3.8d) automatisch erfüllt. Man beachte, dass durch die Eingangstransformation (3.10) die Optimierungsvariablen nicht mehr die beschränkte Größe  $\mathbf{u}_k$  sondern die unbeschränkte Größe  $\mathbf{v}_k$  sind. Die verbleibenden Ungleichungen (3.8e) und (3.8f) werden in der Kostenfunktion mit Hilfe von Straffunktionen in der Form

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|r_{2,k}(\mathbf{T}_{\Sigma,k})\|_{W_2} + \|\mathbf{r}_3(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1})\|_{W_3} \quad (3.11a)$$

mit

$$r_{2,k}(\mathbf{T}_{\Sigma,k}) = \max(0, T_{s,k}^- + \Delta_T - h(\mathbf{T}_{\Sigma,k}), h(\mathbf{T}_{\Sigma,k}) - T_{s,k}^+ + \Delta_T) \quad (3.11b)$$

und

$$\mathbf{r}_3(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}) = \max(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{u}}^- + \Delta_u - \frac{\Psi(\mathbf{v}_k) - \Psi(\mathbf{v}_{k+1})}{\Delta \mathbf{t}_k}, \frac{\Psi(\mathbf{v}_k) - \Psi(\mathbf{v}_{k+1})}{\Delta \mathbf{t}_k} - \dot{\mathbf{u}}^+ + \Delta_u) \quad (3.11c)$$

berücksichtigt. Diese Straffunktionen bestrafen Verletzungen der Temperatur und der Stellgrößenänderung in Abhängigkeit von den frei wählbaren Werten  $\Delta_T > 0$  und  $\Delta_u > 0$ . In Abbildung 3.7 ist die verwendete Straffunktion für eine skalare Größe dargestellt.

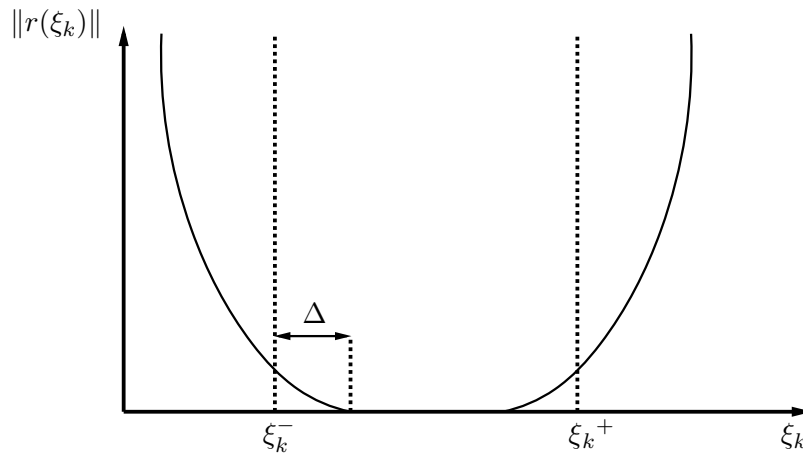


Abbildung 3.7: Ansatz  $r(\xi_k) = \left\| \max(0, \xi_k^- + \Delta - \xi_k, \xi_k - \xi_k^+ + \Delta) \right\|$  für eine skalare Größe  $\xi$ .

Erweitert man die Kostenfunktion (3.7) um die Strafterme (3.11) und verwendet man die Eingangstransformation (3.10), dann kann das ursprüngliche Optimierungsproblem (3.8)

in ein gleichungsbeschränktes Optimierungsproblem der Form

$$\min_{\substack{\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{NHZ} \\ k \in K}} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|r_{1,k}(h(\mathbf{T}_{\Sigma,k}))\|_{W_1} + \|\Psi(\mathbf{v}_k)\|_{\mathbf{W}_u} + \|r_{2,k}(\mathbf{T}_{\Sigma,k})\|_{W_2} + \|\mathbf{r}_3(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-1})\|_{\mathbf{W}_3} \quad (3.12a)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{T}_{\Sigma,k} = \mathbf{T}_{\Sigma,k-1} + \Delta t_{k-1} \mathbf{f}_{1,k-1}(\mathbf{T}_{\Sigma,k-1}, \mathbf{T}_{v,k-1}), \quad \forall k \in K \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_{2,k}(\mathbf{T}_{\Sigma,k}, \mathbf{T}_{v,k}, \Psi(\mathbf{v}_k)), \quad \forall k \in K \quad (3.12c)$$

$$\mathbf{T}_{\Sigma,k_0} = \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{T}_{v,k_0} = \mathbf{T}_{v,0}, \quad \Psi(\mathbf{v}_{k_0}) = \mathbf{u}_0 \quad (3.12d)$$

mit

$$K = \{k_0 + 1, \dots, k_1\}$$

transformiert werden. Für dieses Optimierungsproblem nur mit Gleichungsbeschränkungen existiert immer eine Lösung.

### 3.6 Numerischer Lösungsalgorithmus

Für die numerische Lösung des Optimierungsproblems (3.12) gibt es in der Literatur verschiedene Ansätze wie z.B. das Gradientenverfahren [23], das Newton-Verfahren [24] oder das Gauß-Newton (GN)-Verfahren. In der Arbeit [11] wird letzteres verwendet, da damit superlineare Konvergenz erzielt und der numerische Rechenaufwand gering gehalten werden kann. Die Suchrichtung wird mit Hilfe des (reduzierten) Gradienten und einer approximierten Hessematrix der Kostenfunktion bestimmt. Die (optimale) Schrittweite wird mit Hilfe einer quadratischen Approximation des zugrunde liegenden skalaren Optimierungsproblems berechnet.

Im Folgenden wird das Levenberg-Marquardt (LM)-Verfahren [9, 10] für die numerische Lösung von (3.12) verwendet. Das LM-Verfahren kombiniert das GN-Verfahren mit einer Regularisierungstechnik, die sinkende Funktionswerte der Kostenfunktion erzwingt. In einem ersten Schritt werden im Sinne des GN-Verfahrens der Gradient  $\mathbf{g}$  und die approximierte Hessematrix  $\mathbf{H}$  berechnet. Für eine kompakte Darstellung werden dazu die Vektoren

$$\mathbf{c}_1(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} r_{1,k}(h(\mathbf{M}_T \mathbf{T}_k)) \\ r_{2,k}(\mathbf{M}_T \mathbf{T}_k) \end{bmatrix}_{k=k_0+1, \dots, k_1} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{c}_2(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{v}_k) \\ \mathbf{r}_3(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-1}) \end{bmatrix}_{k=k_0+1, \dots, k_1} \quad (3.14)$$

und die Diagonalmatrizen

$$\mathbf{W}_{c_1} = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_{k=k_0+1, \dots, k_1} \right\} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{W}_{c_2} = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{W}_u \\ \mathbf{W}_3 \end{bmatrix}_{k=k_0+1, \dots, k_1} \right\} \quad (3.16)$$



mit  $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_k]_{k=k_0+1, \dots, k_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\Sigma, k} \\ \mathbf{T}_{v, k} \end{bmatrix}_{k=k_0+1, \dots, k_1}$  und  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_k]_{k=k_0+1, \dots, k_1}$  sowie der dünn besetzten Abbildungsmatrix  $\mathbf{M}_T$  mit  $\mathbf{T}_{\Sigma, k} = \mathbf{M}_T \mathbf{T}_k$  definiert. Damit ergibt sich die Kostenfunktion (3.12a) zu

$$C(\mathbf{T}, \mathbf{v}) = C_1(\mathbf{T}) + C_2(\mathbf{v}) = \|\mathbf{c}_1(\mathbf{T})\|_{\mathbf{W}_{c_1}} + \|\mathbf{c}_2(\mathbf{v})\|_{\mathbf{W}_{c_2}} \quad (3.17)$$

und die Optimierungsaufgabe (3.12) kann in der Form

$$\min_{\mathbf{v}} C(\mathbf{T}, \mathbf{v}) \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{v}) \quad (3.18b)$$

mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{v}) = [\mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_{k-1}, \Psi(\mathbf{v}_k))]_{k=k_0+1, \dots, k_1} \quad (3.19)$$

und

$$\mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_{k-1}, \Psi(\mathbf{v}_k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\Sigma, k} - \mathbf{T}_{\Sigma, k-1} - \Delta t_{k-1} f_{1, k-1}(\mathbf{T}_{\Sigma, k-1}, \mathbf{T}_{v, k-1}) \\ \mathbf{f}_{2, k}(\mathbf{T}_{\Sigma, k}, \mathbf{T}_{v, k}, \Psi(\mathbf{v}_k)) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

angegeben werden. Der Gradient  $\mathbf{g}$  und die approximierte Hessematrix können in der Form

$$\mathbf{g} = \left( \frac{dC}{d\mathbf{v}} \right)^T = 2 \left( \frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}} \right)^T \mathbf{W}_{c_1} \mathbf{c}_1 + 2 \left( \frac{d\mathbf{c}_2}{d\mathbf{v}} \right)^T \mathbf{W}_{c_2} \mathbf{c}_2 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & 2 \left( \frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}} \right)^T \mathbf{W}_{c_1} \frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}} + \underbrace{2\mathbf{c}_1^T \mathbf{W}_{c_1} \frac{d^2\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}^2}}_{\approx 0} \\ & + 2 \left( \frac{d\mathbf{c}_2}{d\mathbf{v}} \right)^T \mathbf{W}_{c_2} \frac{d\mathbf{c}_2}{d\mathbf{v}} + \underbrace{2\mathbf{c}_2^T \mathbf{W}_{c_2} \frac{d^2\mathbf{c}_2}{d\mathbf{v}^2}}_{\approx 0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

angegeben werden. In Vorbereitung darauf wurde die Kostenfunktion als Summe quadratischer Terme gewählt. Wie in (3.22) angedeutet, werden für die Berechnung der approximierten Hessematrix  $\mathbf{H}$  im Sinne des GN-Verfahrens die zweiten Ableitungen der Funktionswerte vernachlässigt. Dazu müssen die Funktionswerte (zumindest in der Nähe des Optimums) entweder klein oder beinahe affin bezüglich der Optimierungsvariablen sein [9, 11]. Da  $\mathbf{c}_2(\mathbf{v})$  nicht von  $\mathbf{T}$  abhängt, ist eine analytische Berechnung  $\frac{d\mathbf{c}_2}{d\mathbf{v}}$  und  $\frac{d^2\mathbf{c}_2}{d\mathbf{v}^2}$  einfach möglich. In weiterer Folge soll die analytische Berechnung von  $\frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}}$  erklärt werden. Dazu wird die vektorwertige *Lagrangefunktion*

$$\mathbf{L} = \mathbf{c}_1(\mathbf{T}) + \Lambda \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{v}) \quad (3.23)$$

mit einer noch zu bestimmenden unteren Block-Dreiecksmatrix  $\Lambda$  definiert. Die Berechnung der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}}$  erfolgt mit Hilfe der in der Matrix  $\Lambda$  zusammengefassten

adjungierten Variablen in der Form [11]

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{c}_1(\mathbf{T})}{d\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{L}}{d\mathbf{v}} = \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{c}_1(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{T}} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{v}) \quad (3.26)$$

Im Prinzip können  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{\Lambda}$  aus (3.26) und (3.25) ermittelt und anschließend in (3.24) zur Berechnung von  $\frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}}$  verwendet werden. Dabei ist die Berechnung der Matrix  $\mathbf{\Lambda}$  mittels Invertierung von  $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{T}}$ , d.h. in

$$\mathbf{\Lambda} = -\frac{\partial \mathbf{c}_1(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \left( \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{T}} \right)^{-1} \quad (3.27)$$

aus Gründen des hohen numerischen Aufwandes nicht zielführend. Stattdessen werden  $\mathbf{\Lambda}$  und  $\frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}}$  wie folgt berechnet: Zuerst wird für den Prädiktionshorizont  $[t_{k_0}, t_{k_1}]$  die Zustandstrajektorie  $\mathbf{T}_k$  aus  $\mathbf{0} = \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_{k-1}, \Psi(\mathbf{v}_k))$  für  $k = k_0 + 1, \dots, k_1$  mit  $\mathbf{T}_{k_0} = \mathbf{T}_0$  und  $\Psi(\mathbf{v}_{k_0}) = \mathbf{u}_0$  für ansteigende Zeitindizes  $k$  gelöst. Die dünnbesetzte Struktur der entsprechenden Matrizen in (3.24) und (3.25) erlauben eine sukzessive und gleichzeitige Berechnung der Matrizen  $\mathbf{\Lambda}_{i,j}$  und  $\mathbf{J}_{i,j}$ , vgl. Abbildung 3.8. Beginnend beim höchsten Zeitindex  $k_1$  wird zunächst die Matrix  $\mathbf{\Lambda}_{k_1-1, k_1}$  berechnet. Mit den partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \mathbf{c}_{1, k_1}}{\partial \mathbf{T}_{k_1}}$  und  $\frac{\partial \mathbf{F}_{k_1-1}}{\partial \mathbf{T}_{k_1}}$  ergibt sich diese zu [11]

$$\mathbf{\Lambda}_{k_1-1, k_1} = -\frac{\partial \mathbf{c}_{1, k_1}}{\partial \mathbf{T}_{k_1}} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{k_1-1}}{\partial \mathbf{T}_{k_1}} \right)^{-1}. \quad (3.28)$$

Mit diesem Ergebnis kann der einzige Eintrag  $i = k_1 - 1$  in der Blockspalte  $\mathbf{J}_{i, k_1}$  von  $\frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{v}}$  in der Form [11]

$$\mathbf{J}_{k_1-1, k_1} = \mathbf{\Lambda}_{k_1-1, k_1} \frac{\partial \mathbf{F}_{k_1-1}}{\partial \mathbf{v}_{k_1}} \quad (3.29)$$

berechnet werden, vgl. Abbildung 3.8. Für die nächsten Zeitindizes  $k = k_1 - 1, k_1 - 2, \dots, k_0 + 1$  können die Matrizen der zugehörigen Blockspalten von  $\mathbf{\Lambda}$  in der Form [11]

$$\mathbf{\Lambda}_{i, k} = \begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{c}_{1, k}}{\partial \mathbf{T}_k} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{k-1}}{\partial \mathbf{T}_k} \right)^{-1} & \text{für } i = k - 1 \\ -\mathbf{\Lambda}_{i, k+1} \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{T}_k} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{k-1}}{\partial \mathbf{T}_k} \right)^{-1} & \text{für } i \geq k \\ \mathbf{0} & \text{für } i < k - 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

und die Matrizen der zugehörigen Blockspalten in  $\mathbf{J}$  in der Form

$$\mathbf{J}_{i, k} = \begin{cases} \mathbf{\Lambda}_{i, k} \frac{\partial \mathbf{F}_{k-1}}{\partial \mathbf{v}_k} & \text{für } i = k - 1 \\ \mathbf{\Lambda}_{i, k} \frac{\partial \mathbf{F}_{k-1}}{\partial \mathbf{v}_k} + \mathbf{\Lambda}_{i, k+1} \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{v}_k} & \text{für } i \geq k \\ \mathbf{0} & \text{für } i < k - 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

berechnet werden. Mit dieser Vorgangswiese muss nicht die gesamte Matrix  $\mathbf{\Lambda}$  gespeichert werden, sondern immer nur die aktuelle Blockspalte. Weiterhin wird der numerische Aufwand reduziert, da nur Matrizen mit wesentlich kleinerer Dimension als  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{T}}$  invertiert werden müssen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial c_{1,k_0+1}}{\partial \mathbf{T}_{k_0+1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial c_{1,k_0+2}}{\partial \mathbf{T}_{k_0+2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \frac{\partial c_{1,k_1}}{\partial \mathbf{T}_{k_1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_{k_0,k_0+1} & 0 & \dots & 0 \\ \Lambda_{k_0+1,k_0+1} & \Lambda_{k_0+1,k_0+2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \Lambda_{k_1-1,k_0+1} & \Lambda_{k_1-1,k_0+2} & \dots & \Lambda_{k_1-1,k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0}}{\partial \mathbf{T}_{k_0+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0+1}}{\partial \mathbf{T}_{k_0+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0+1}}{\partial \mathbf{T}_{k_0+2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \frac{d\mathbf{c}_1(\mathbf{T})}{d\mathbf{v}} = \mathbf{J} &= \left[ \mathbf{J}_{i,j} \right]_{\substack{i=k_0, \dots, k_1-1 \\ j=k_0+1, \dots, k_1}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{k_0,k_0+1} & 0 & \dots & 0 \\ \Lambda_{k_0+1,k_0+1} & \Lambda_{k_0+1,k_0+2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \Lambda_{k_1-1,k_0+1} & \Lambda_{k_1-1,k_0+2} & \dots & \Lambda_{k_1-1,k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0}}{\partial \mathbf{v}_{k_0+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0+1}}{\partial \mathbf{v}_{k_0+2}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0+1}}{\partial \mathbf{v}_{k_0+3}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0+1}}{\partial \mathbf{T}_{k_0+2}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0+1}}{\partial \mathbf{T}_{k_0+3}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{k_0+2}}{\partial \mathbf{T}_{k_0+3}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F}_{k_1-1}}{\partial \mathbf{T}_{k_1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \mathbf{F}_{k_1-1}}{\partial \mathbf{T}_{k_1}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.8: Struktur von (3.24) und (3.25).

Die beschriebene Vorgehensweise erlaubt eine numerisch effiziente Berechnung der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J} = \frac{dc_1(\mathbf{T})}{d\mathbf{v}}$ , des Gradienten  $\mathbf{g}$  gemäß (3.21) und der Hesse-Matrix  $\mathbf{H}$  gemäß (3.22). Das LM-Verfahren sowie das GN-Verfahren werden im Allgemeinen zum Lösen nichtlinearer Regressionsprobleme verwendet. Beim GN-Verfahren wird ausgehend von der quadratischen Approximation der Kostenfunktion

$$C(\mathbf{T}, \mathbf{v} + \mathbf{d}) \approx C(\mathbf{v}) + \mathbf{d}^T \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (3.32)$$

die Suchrichtung  $\mathbf{d}$  durch Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{H} \mathbf{d} = -\mathbf{g} \quad (3.33)$$

ermittelt. Im Allgemeinen muss beim GN-Verfahren noch ein skalares Optimierungsproblem zur Bestimmung einer zulässigen Schrittweite gelöst werden, vgl. [9, 11]. Im Gegensatz dazu wird beim LM-Verfahren [10] die Suchrichtung  $\mathbf{d}$  durch Lösen des Gleichungssystems

$$(\mathbf{H} + \mu \mathbf{E}) \mathbf{d} = -\mathbf{g} \quad (3.34)$$

mit dem Dämpfungsparameter  $\mu > 0$  und der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  berechnet. Aufgrund von  $\mu$  wird das LM-Verfahren auch als gedämpfte Version des GN-Verfahrens bezeichnet [10].

Für  $\mu \gg$  nähert sich das LM-Verfahren der Gradientenmethode an, d.h.  $\mathbf{d} \approx -\frac{1}{\mu} \mathbf{g}$  und für

$\mu \ll$  nähert sich die LM-Methode der GN-Methode an, d.h.  $\mathbf{d} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}$ .

Der Parameter  $\mu$  wird nach der Methode der Vertrauensbereiche adaptiert. Die Adaption von  $\mu$  erfolgt auf Basis des Verhältnisses

$$\rho = \frac{C(\mathbf{T}, \mathbf{v}) - C(\mathbf{T}, \mathbf{v} + \mathbf{d})}{-\mathbf{d}^T \mathbf{g} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d}} = \frac{C(\mathbf{T}, \mathbf{v}) - C(\mathbf{T}, \mathbf{v} + \mathbf{d})}{\frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mu \mathbf{d} - \mathbf{g})}, \quad (3.35)$$

welches die Übereinstimmung der quadratischen Approximation mit der originalen Kostenfunktion überprüft. Dabei beschreibt der Zählerterm die Änderung der tatsächlichen Kostenfunktion während der Nennerterm die Änderung zufolge der quadratischen Approximation wiedergibt. Der Nennerterm ist immer positiv ( $-\mathbf{d}^T \mathbf{g} > 0$ ). In (3.35) wurde der Zusammenhang

$$-\mathbf{d}^T \mathbf{g} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} = -\frac{1}{2} \mathbf{d}^T (2\mathbf{g} + \underbrace{(\mathbf{H} + \mu \mathbf{E}) \mathbf{d}}_{-\mathbf{g}} - \mu \mathbf{d}) = -\frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{g} - \mu \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mu \mathbf{d} - \mathbf{g}) \quad (3.36)$$

verwendet. Auf Basis des Verhältnisses  $\rho$  können die folgenden Rückschlüsse auf die Suchrichtung gezogen werden:

- Für  $\rho < 1$  wird der Vertrauensbereich im nächsten Schritt verkleinert, d.h. der Parameter  $\mu$  wird vergrößert.

- Für  $\rho < 0$  ist der Kostenfunktionswert  $C(\mathbf{T}, \mathbf{v} + \mathbf{d})$  größer als  $C(\mathbf{T}, \mathbf{v})$ , d.h. die Suchrichtung führt zu keiner Reduktion der Kostenfunktion. In diesem Fall wird die aktuelle Suchrichtung verworfen und mit einem adaptierten vergrößerten  $\mu$  eine neue Suchrichtung berechnet bis gilt  $\rho > 0$ .
- $\rho \approx 1$  kennzeichnet eine gute quadratische Approximation und der Parameter  $\mu$  kann verkleinert werden.

Eine zielführende Strategie für die Adaption von  $\mu$  kann in der Form

$$\mu = \mu \max\left(\frac{1}{3}, 1 - (2\rho - 1)^3\right) \quad (3.37)$$

angegeben werden. Nachfolgend werden die wichtigsten Schritte des LM-Verfahrens zur iterativen numerischen Lösung des Optimierungsproblems (3.12) in Form einer Pseudocode Darstellung angegeben.

```

begin
   $k := 0; v := 2; \mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ 
  compute  $\mathbf{g}$  and  $\mathbf{H}$ 
   $\mu := \mu_0 \max\{h_{ii}\};$  {Initialisierung}
  while ( $k < k_{max}$ )
    solve  $(\mathbf{H} + \mu\mathbf{E}) \mathbf{d} = -\mathbf{g}$ 
     $\mathbf{v}_{new} := \mathbf{v} + \mathbf{d}$ 
    compute  $\rho := (3.35)$ 
    if  $\rho > 0$  {akzeptabler Schritt}
       $k := k + 1$ 
       $\mathbf{v} := \mathbf{v}_{new}$ 
      compute  $\mathbf{g}$  and  $\mathbf{H}$ 
       $\mu := \mu \max\left\{\frac{1}{3}, 1 - (2\rho - 1)^3\right\}; v := 2$ 
    else
       $\mu := \mu v; v := 2 v$ 
    end
  end

```

Am Anfang des Algorithmus werden der Parameter  $v$  und die Optimierungsvariablen  $\mathbf{v}$  initialisiert. Der Parameter  $k_{max}$  definiert die maximale Anzahl an Iterationen und wird als Abbruchbedingung für das LM-Verfahren verwendet. Im Abschnitt 3.7 wird die Qualität der Lösung in Abhängigkeit der Iterationen  $k$  des LM-Verfahrens analysiert. Weiterhin wird beim Start des LM-Verfahrens der Parameter  $\mu$  initialisiert [10]. Der Parameter  $v$  dient zur Adaption des Parameters  $\mu$  bei Werten  $\rho < 0$  [10]. Als Startlösungen  $\mathbf{v}_0$  für die Optimierungsvariablen  $\mathbf{v}$  kann z.B. die (optimale) Lösung zu einem vorhergehenden Abtastzeitpunkt der MPC verwendet werden. Mit den Startlösungen  $\mathbf{v}_0$  und den geschätzten Zustandsgrößen  $\hat{\mathbf{T}}_0$  werden die Hessematrix  $\mathbf{H}$  und der Gradient  $\mathbf{g}$  nach (3.22) und (3.21) berechnet. In dieser Arbeit wird der Algorithmus nach  $k_{max} = 1$  zulässigen Iterationen, d.h. Iterationen die zu einer verringerten Kostenfunktion führen, abgebrochen. Der vorgeschlagene numerische Lösungsalgorithmus erfüllt stets die Gleichungsnebenbedingungen (3.12c) und (3.12b). Dies ist selbst dann der Fall, wenn der Algorithmus das Optimierungsproblem (3.12) nur auf suboptimale Weise löst.

### 3.7 Konvergenzverhalten des LM-Verfahrens

In diesem Abschnitt wird das Konvergenzverhalten des LM-Verfahrens untersucht. Eine große Herausforderung bei der Realisierung einer MPC ist es, einen recheneffizienten numerischen Lösungsalgorithmus für die Lösung des zugrunde liegenden Optimierungsproblems (3.12) zu implementieren. Eine Maßnahme den Rechenaufwand zu vermindern ist, die Anzahl an Iterationen im Lösungsalgorithmus zu reduzieren, d.h.  $k_{max}$  klein zu wählen. Zur Bewertung des Konvergenzverhaltens wird die in Abbildung 3.9 dargestellte Betriebs-

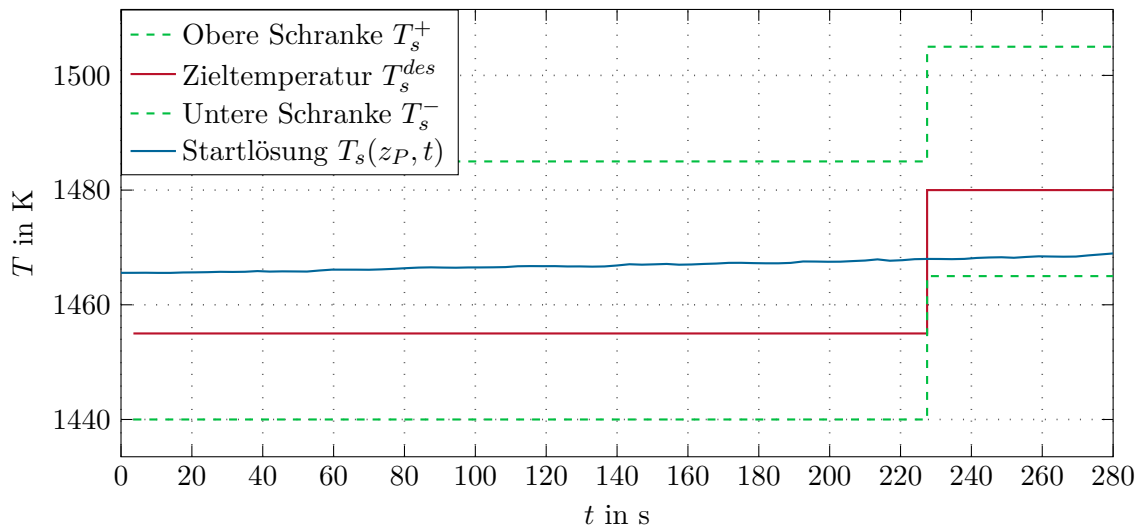


Abbildung 3.9: Darstellung des Zieltemperaturverlaufes  $T_s^{des}$  und des Isttemperaturverlaufes  $T_P = T_s(z_P, t)$ .

situation für einen Prädiktionshorizont  $t_{k_1} - t_{k_0} = 280$ s betrachtet. Die Bandtemperatur  $T_P = T_s(z_P, t)$  an der Pyrometermessstelle soll immer zwischen den Temperaturgrenzen

$T_s^\pm$  liegen. Innerhalb des Prädiktionshorizontes werden 2 Bänder berücksichtigt. Zum Zeitpunkt  $t = 227,5\text{s}$  passiert die Schweißnaht die Position  $z_P$ . Dementsprechend ändern sich zu diesem Zeitpunkt sowohl die Zieltemperaturen  $T_s^{des}$  als auch die Temperaturgrenzen  $T_s^\pm$ . Ausgehend von einer Startlösung  $\mathbf{v}_0$ , die die in Abbildung 3.9 gezeigte Bandtemperatur  $T_P = T_s(z_P, t)$  zur Folge hat, wird das Konvergenzverhalten des LM-Verfahrens analysiert.

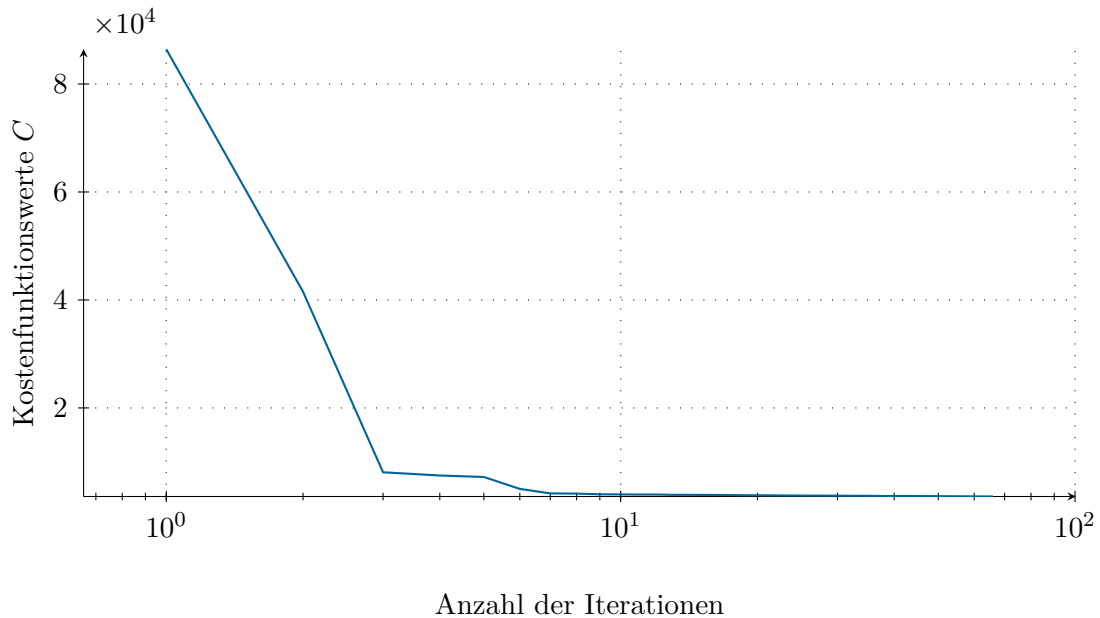


Abbildung 3.10: Konvergenzverhalten des LM-Verfahrens.

In Abbildung 3.10 werden die Kostenfunktionswerte in Abhängigkeit der Iterationen dargestellt. Dabei entspricht der Wert der Kostenfunktion bei der ersten Iteration dem Startwert. Nach den ersten beiden Iterationen wird bereits der fast optimale Wert der Kostenfunktion erreicht. Die erste Iteration halbiert den Kostenfunktionswert. Nach spätestens 10 Iterationen ist keine Verbesserung der Kostenfunktion mehr erkennbar. In Abbildung 3.11 wird die Entwicklung der Bandtemperatur  $T_P = T_s(z_P, t)$  ausgehend von der Startlösung, vgl. Abbildung 3.9, für 1, 2, 5 und 10 LM-Iterationen dargestellt. Durch eine Verringerung der Iterationen wird lediglich eine suboptimale Lösung berechnet, vgl. Abbildungen 3.10 und 3.11. In dieser Arbeit wird das LM-Verfahren nach nur einer gültigen Iteration abgebrochen, d.h.  $k_{max} = 1$ . Die Möglichkeit der Reduktion der Iterationen im numerischen Lösungsalgorithmus und die damit einhergehende suboptimale Lösung des Optimierungsproblems muss für jeden Anwendungsfall überprüft werden. Diese Wahl von  $k_{max} = 1$  ist in unserem Fall durch die signifikante Reduktion der Kostenfunktion gemäß Abbildung 3.10 nach nur 1 Iteration gerechtfertigt. Weiterhin wird mit einer geringen Anzahl an Iterationen Rechenzeit gespart, sodass auch ein kürzerer Steuerungshorizont ermöglicht wird.

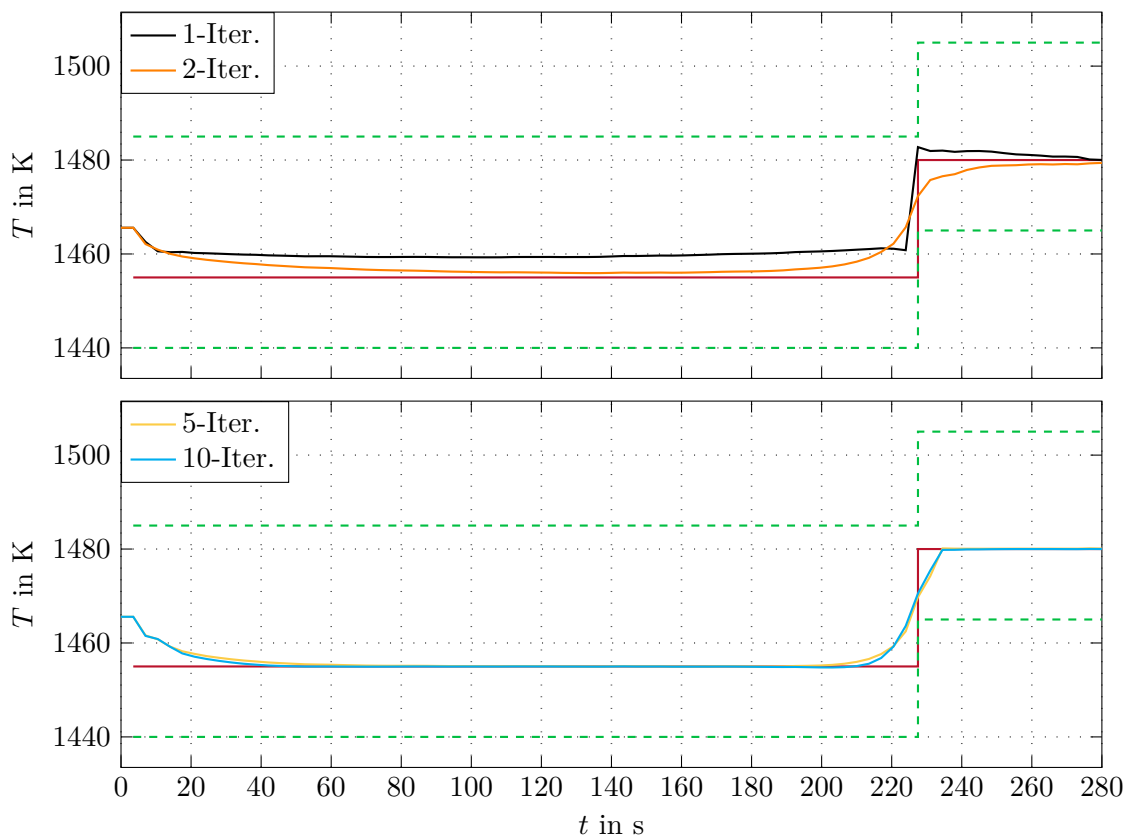


Abbildung 3.11: Lösung des LM-Verfahrens nach 1, 2, 5 und 10 Iterationen.



## 4 Industrielles Anwendungsbeispiel

In diesem Kapitel wird die Leistungsfähigkeit des entwickelten Temperaturreglers in einer Simulationsumgebung unter realistischen Bedingungen analysiert. Zunächst wird jedoch der Regler unter idealisierten Voraussetzungen hinsichtlich wichtiger Kenngrößen wie z.B. die Länge des Prädiktionshorizontes, die Anzahl an Iterationen des *Levenberg-Marquardt*-Verfahrens oder die Gewichtungsfaktoren in der Kostenfunktion untersucht. Basierend auf diesen Untersuchungen wird der Temperaturregler in der im Kapitel 3 beschriebenen hierarchischen Struktur implementiert. Die erzielten Ergebnisse des idealisierten und realen Betriebs werden miteinander verglichen.

### 4.1 Simulationsumgebungen

Für die Verifikation des entwickelten modellprädiktiven Temperaturreglers wird in MATLAB eine Simulationsumgebung entwickelt, die an die im Kapitel 3 dargestellte hierarchische Struktur angelehnt ist. In einem ersten Schritt wird der Temperaturregler jedoch unter idealisierten Bedingungen getestet, vgl. Abbildung 4.1. Dabei wird der reale Ofen

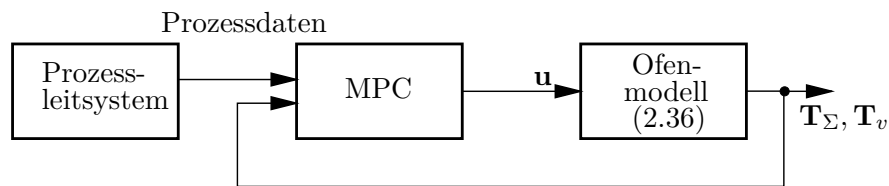


Abbildung 4.1: Simulationsumgebung 1: Idealisiertes hierarchisches Regelungskonzept

durch das im Regler verwendete Ofenmodell (2.36) nachgebildet, d.h. es tritt kein Modellfehler auf. Weiterhin wird angenommen, dass dem Temperaturregler alle Systemzustände messtechnisch zur Verfügung stehen. Erst in einem zweiten Schritt wird der Temperaturregler unter realistischen Bedingungen getestet, vgl. Abbildung 4.2. Dabei wird die Simulationsumgebung um einen Funktionsblock zur Beschränkung der Änderungsraten und der Maximalwerte der Massenströme erweitert. Damit wird sichergestellt, dass die Stellgrößen, die auf den Ofen aufgeschaltet werden, die Steigungsbeschränkungen erfüllen und den zulässigen Stellgrößenbereich einhalten. Mit Hilfe dieses Funktionsblocks kann der Einfluss eines Modellfehlers (z.B. unbekannte zulässige Steigungsbeschränkungen) auf die Regelgüte der entwickelten MPC analysiert werden. Grundsätzlich sind die zulässigen Änderungsraten  $\dot{\mathbf{u}}$  des Brennstoffes in der Kostenfunktion des Optimierungsproblems (3.12) berücksichtigt. Durch die Berücksichtigung in Form von Straftermen ist jedoch eine geringfügige Verletzung der zulässigen Änderungsraten möglich. Im Gegensatz zu der Simulationsumgebung 1 aus Abbildung 4.1 wird der Ofen in der Simulationsumgebung

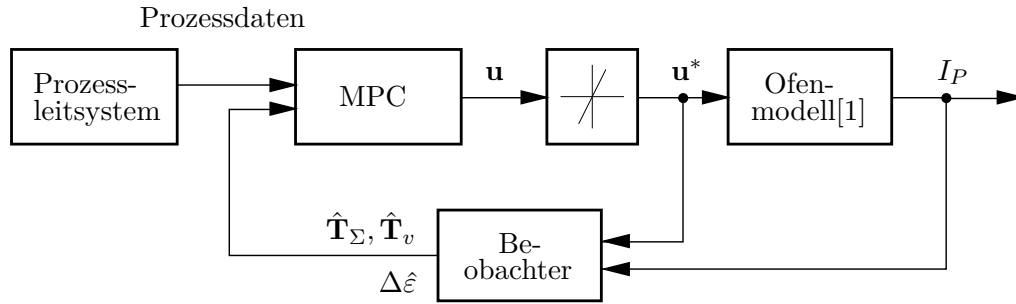


Abbildung 4.2: Simulationsumgebung 2: Erweitertes hierarchisches Regelungskonzept

2 mit dem vollständigen mathematischen Modell [1] mit einer zeitlichen Abtastzeit von 500ms ersetzt. Der modellprädiktive Regler nutzt nach wie vor das Ofenmodell (2.36). Dementsprechend wird ein Modellfehler zwischen den verwendeten Ofenmodellen berücksichtigt. Weiterhin sind die Eingangsgrößen des Beobachters zum einen die realisierten Massenströme  $\mathbf{u}^*$  und zum anderen die Strahlungsintensität  $I_P$  des Pyrometers an der Position  $z_P$ . Die Intensität  $I_P$  berechnet sich unter Verwendung der Ausgangsfunktion (2.38) sowie der Emissivität  $\varepsilon_s(z_P, t)$  zu

$$I_P = \sigma \varepsilon_s(z_P, t) (h(\mathbf{T}_\Sigma(t)))^4. \quad (4.1)$$

Der Beobachter verwendet wie der MPC das Ofenmodell (2.36), vgl. Kapitel 3. Die vom Beobachter geschätzte Emissivitätsänderung  $\Delta \hat{\varepsilon}^+$  wird in der MPC über den Prädiktionshorizont konstant gehalten. Die geschätzten Temperaturen  $\hat{\mathbf{T}}_\Sigma$  und  $\hat{\mathbf{T}}_v$  werden in der MPC als Anfangsbedingungen im Ofenmodell verwendet. Die in den beiden Simulationsumgebungen, vgl. Abbildungen 4.1 und 4.2, verwendeten Prozessdaten umfassen die in der MPC benötigten zukünftigen Bandparameter und gewünschte Solltemperaturverläufe sowie Temperaturbeschränkungen.

## 4.2 Implementierter Regler

Der modellprädiktive Temperaturregler stellt in regelmäßigen Abständen neue zukünftige Stellgrößentrajektorien zur Verfügung. In Abbildung 4.3 wird die prinzipielle Funktionsweise dargestellt. In dieser Arbeit wird für die MPC eine Abtastzeit von

$$\Delta t_C = t_{i+1,k} - t_{i,k} = 3.5 \text{ s} \quad (4.2)$$

verwendet, d.h. innerhalb von  $\Delta t_C$  muss das Optimierungsproblem gelöst und eine neue Stellgrößentrajektorie zur Verfügung gestellt werden. Wie in Abbildung 4.3 dargestellt, überlappen sich die einzelnen Prädiktionshorizonte. Daher ist es naheliegend, die entsprechenden Optimierungsvariablen mit der (optimalen) Lösung des vorhergehenden Optimierungsproblems zu initialisieren. Die verbleibenden Optimierungsvariablen am Ende des Horizontes werden mit dem Wert am Ende des vorherigen Horizontes initialisiert. Durch diese Vorgangsweise steht für die MPC immer eine gute Startlösung zur Verfügung.

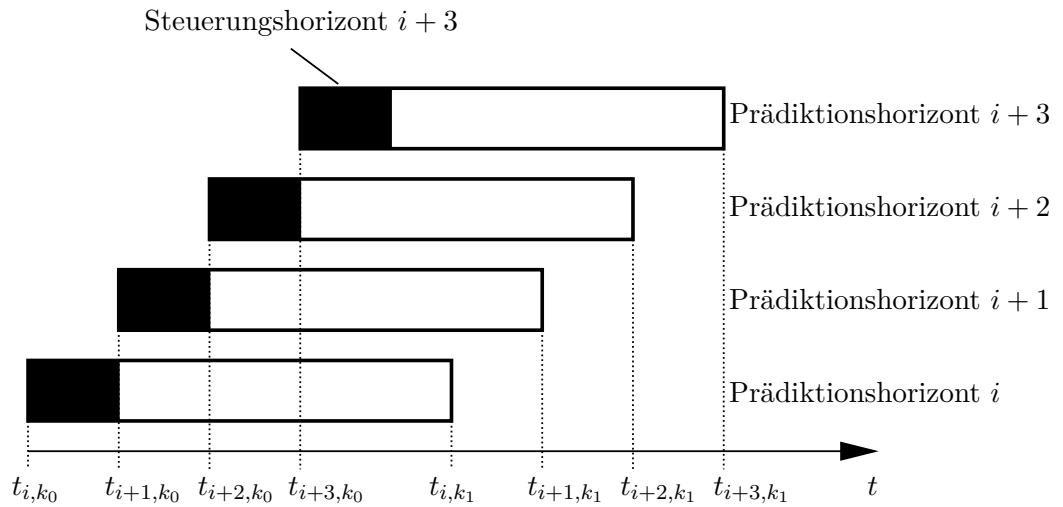


Abbildung 4.3: Steuerungs- und Prädiktionshorizont.

Wie in Abbildung 4.3 angedeutet, wird zu jedem Abtastzeitpunkt der MPC der aktuelle Prädiktionshorizont um den Steuerungshorizont verschoben. Für den Prädiktionshorizont wird immer ein Zeitbereich von

$$t_{i,k_1} - t_{i,k_0} = 280 \text{ s } \forall i \in \mathbb{N} \quad (4.3)$$

betrachtet. Die Länge des Prädiktionshorizontes ist so gewählt, dass die wesentlichen Dynamiken des Ofens abgebildet werden. Dies entspricht bei einer durchschnittlichen Bandgeschwindigkeit von  $v_s = 1 \text{ m/s}$  ungefähr dem 3.5-fachen der Bandlänge im Ofen. Die in der Kostenfunktion des Optimierungsproblems (3.8) verwendeten Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{W}_{c_1}$  und  $\mathbf{W}_{c_2}$  werden in Abhängigkeit der auftretenden Betriebsszenarien verändert. Für den Fall, dass nur ein Band im Prädiktionshorizont ist, wird eine konstante Gewichtung für den Temperaturfehler verwendet. Für den Fall, dass zwei Bänder im betrachteten Horizont sind, wird ein größerer Temperaturfehler im Bereich der Schweißnaht zugelassen. Sobald die Schweißnaht nicht mehr im Prädiktionshorizont ist, wird wieder die ursprüngliche Gewichtung gewählt. Ein Überblick über die Dimension und die Rechenzeiten der verwendeten Ofenmodelle ist in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

	Vollständiges Modell [1]	Reduziertes Modell (2.36)
Band-Zustände	84	16
Wand-Zustände	495	46
Rollen-Zustände	3	3
Abgas-Zustände	84	22
Abtastzeit	0.5 s	3.5 s
Simulationszeit für 1 h Ofenbetrieb	20 min	43 s

Tabelle 4.1: Vergleich zwischen dem vollständigen Modell [1] und dem reduzierten Modell (2.36).

### 4.3 Numerische Ergebnisse

Die in den Simulationsstudien gewählten Parameter sowie die verwendeten Prozessdaten, d.h. Banddaten, Zieltemperaturen und Temperaturschranken, sind im Einklang mit realen Betriebsszenarien in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Lediglich die verwendete Bandlänge wurde für die Simulationen wesentlich kürzer als in der Realität angenommen.

Prozessgröße\Parameter	max	min
Anzahl an LM-Iterationen	1	1
Steuerungshorizontintervall in [s]	3.5	0
Prädiktionshorizontintervall in [s]	280	0
Bandtemperatursprünge in [K]	+50	-50
Banddicke in [mm]	0.85	0.68
Bandbreite in [m]	1.24	1.24
Bandgeschwindigkeit in [m/s]	1.5	0.5
Absolutwerte der Massenströme in [kg/s]	0.085	0.001
Zeitliche Änderungsrate der Massenströme in [kg/s <sup>2</sup> ]	0.0028	-0.0028

Tabelle 4.2: Definition der Parameter für die Simulationsstudie.

Die Validierung des entwickelten Temperaturreglers wird in den Simulationsumgebungen 1 und 2 anhand eines realistischen Anwendungsfalls mit mehreren Bändern mit konstanter Breite  $b_s = 1.24$  m aber unterschiedlichen Dicken  $d_s$  durchgeführt. Für jedes der betrachteten Bänder sind die Zieltemperaturen  $T_s^{des}$  sowie die Temperaturschranken  $T_s^{\pm}$  definiert. Der zeitliche Verlauf dieser Größen an der Pyrometermessstelle  $z_P$  ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

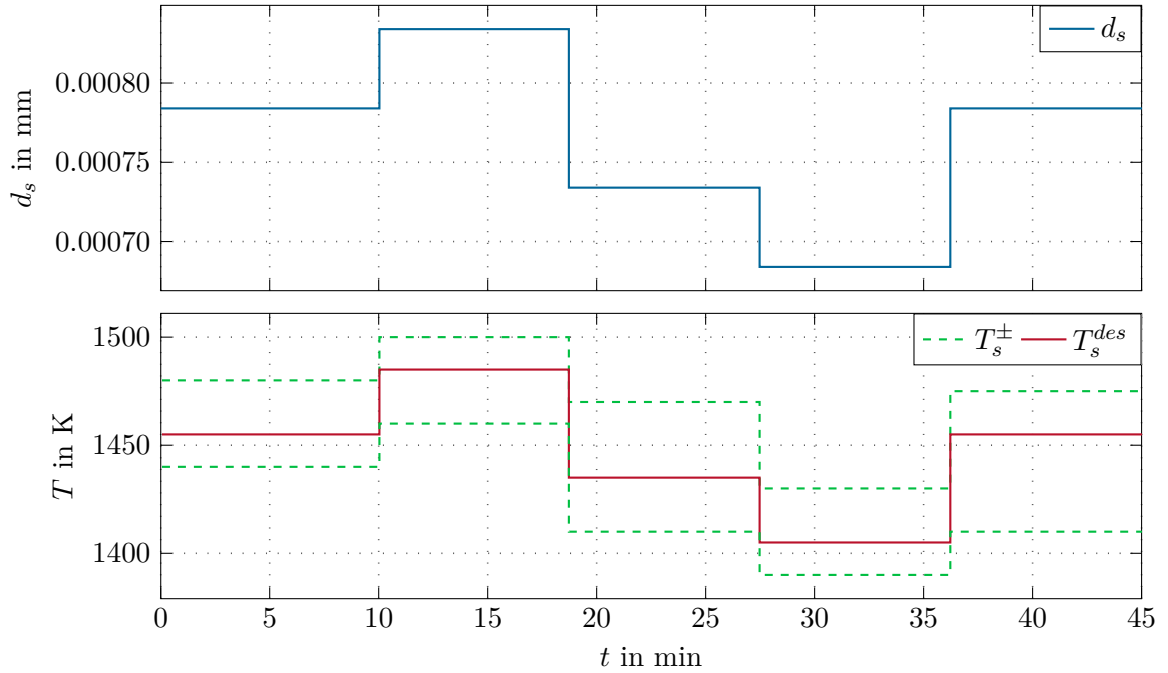


Abbildung 4.4: Banddicke, Zieltemperatur und Schranken für den Anwendungsfall.

Wie in Abbildung 4.4 dargestellt, sind Bandwechsel mit verschiedenen Banddicken  $d_s$ , Zieltemperaturen  $T_s^{des}$  und Temperaturschranken  $T_s^\pm$  geplant. In Tabelle 4.3 werden diese Daten zusammengefasst. Die in Abbildung 4.4 gezeigten Verläufe sind auch in Tabelle 4.3 zusammengefasst. Das primäre Ziel des Temperaturreglers ist, die Bandtemperatur auf

Zeitpunkt $t$ in min	$d_s$ in mm	$T_s^+$ in K	$T_s^{des}$ in K	$T_s^-$ in K
0 – 10	0,784	1480	1455	1440
10 – 18,7	0,834	1500	1485	1460
18,7 – 27,4	0,734	1470	1435	1410
27,4 – 36,2	0,684	1430	1405	1390
36,2 – 45	0,784	1475	1455	1410

Tabelle 4.3: Banddicken  $d_s$ , Temperaturschranken  $T_s^\pm$  und Zieltemperaturen  $T_s^{des}$  sowie die zugehörigen Zeitbereiche.

die gewünschte Zieltemperatur zu erwärmen und dabei die Beschränkungen, vgl. (3.4), (3.5) und (3.6), einzuhalten. Neben der Temperaturregelung ist das nachrangige Ziel die Minimierung des Brennstoffes, d.h. die Bandtemperatur soll der Vorgabe entsprechen und der Brennstoffbedarf soll minimal sein.

### 4.3.1 Simulationsumgebung 1

Abbildung 4.6 zeigt die Ergebnisse der MPC für die Simulationsumgebung 1 gemäß Abbildung 4.1. Die gewünschten Zieltemperaturen werden unter Einhaltung der entsprechenden Temperaturbeschränkungen erreicht. Auch die Änderungsraten der Massenströme bleiben zu jedem Zeitpunkt in den definierten Schranken, insbesondere im Bereich der Schweißnähte. Wie aus Abbildung 4.6 ersichtlich, werden Änderungen der Bandtemperatur vorwiegend durch Änderungen der Massenströme in die Heizzonen 5 und 6 realisiert. Das ist insofern physikalisch plausibel als das resultierende Abgas entgegen der Bewegungsrichtung des Bandes beginnend in der Heizzone 6 durch den Ofen strömt und somit ein hoher Wirkungsgrad erreicht wird. Durch entsprechende Gewichtung der Massenströme in der Kostenfunktion könnte der Einfluss der einzelnen Heizzonen geändert werden.

In Abbildung 4.5 wird das Konvergenzverhalten des modellprädiktiven Temperaturreglers anhand des Bandüberganges zum Zeitpunkt  $t = 10$  min dargestellt. Für die Zeitpunkte  $t = 6$  min 35s,  $t = 7$  min 52s und  $t = 9$  min werden die Bandtemperaturen an der Pyrometermessstelle innerhalb der zugehörigen Prädiktionshorizonte abgebildet. Die Bandtemperaturverläufe in Abbildung 4.5 zeigen, dass mit der berechneten suboptimalen Lösung, vgl. Abschnitt 3.7, die geforderten Solltemperaturen rechtzeitig erreicht und die entsprechenden Temperaturschranken eingehalten werden. Weiterhin wird in Abbildung 4.6 das vorausschauende Verhalten des Temperaturreglers ersichtlich, siehe z.B. den Zeitpunkt  $t = 16$  min. Die Bandtemperatur wird bereits reduziert, obwohl die Änderung der Solltemperatur noch nicht an der Position  $z_P$  des Strahlungs-pyrometers sichtbar ist. Des Weiteren zeigt Abbildung 4.6, dass sowohl für steigende als auch für fallende Zieltemperaturen der gewählte Prädiktionshorizont ausreichend ist.

Die Bandtemperatur folgt sehr genau der Zieltemperatur und weist nur in den Übergangsbereichen zwischen zwei Bändern größere Temperaturabweichungen auf. Im stationären Fall ist der Temperaturfehler unter 0.5K. Die Ergebnisse dieser Simulationsstudie in der Simulationsumgebung 1 zeigen, dass im idealen Fall Bandübergänge mit unterschiedlichen Zieltemperaturen von bis zu 50K mit dem entwickelten modellprädiktiven Temperaturregler rechtzeitig erkannt und geregelt werden können.

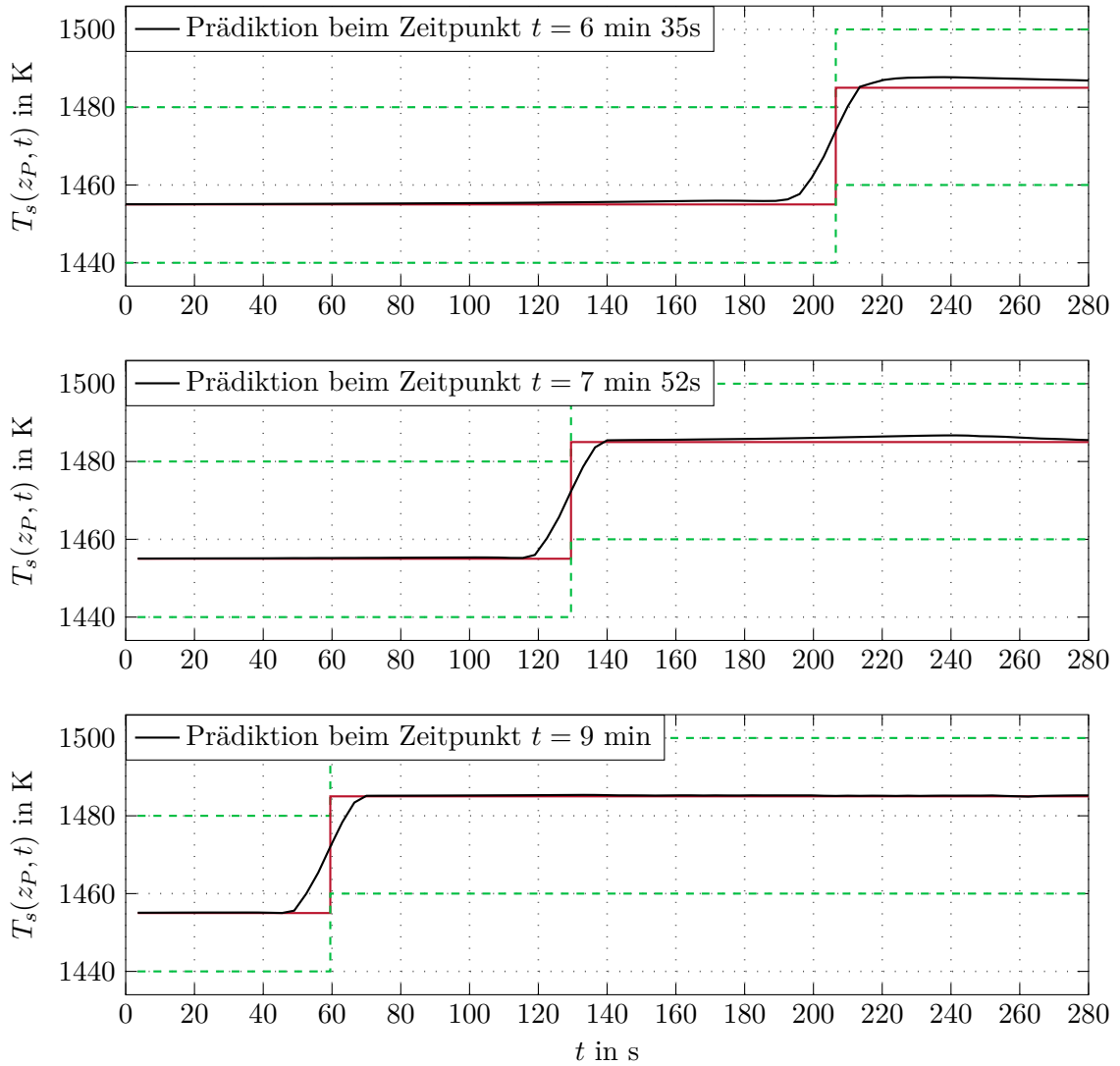


Abbildung 4.5: Prädiktion der Bandtemperatur für  $t = 6 \text{ min } 35\text{s}$ ,  $t = 7 \text{ min } 52\text{s}$  und  $t = 9 \text{ min}$ .

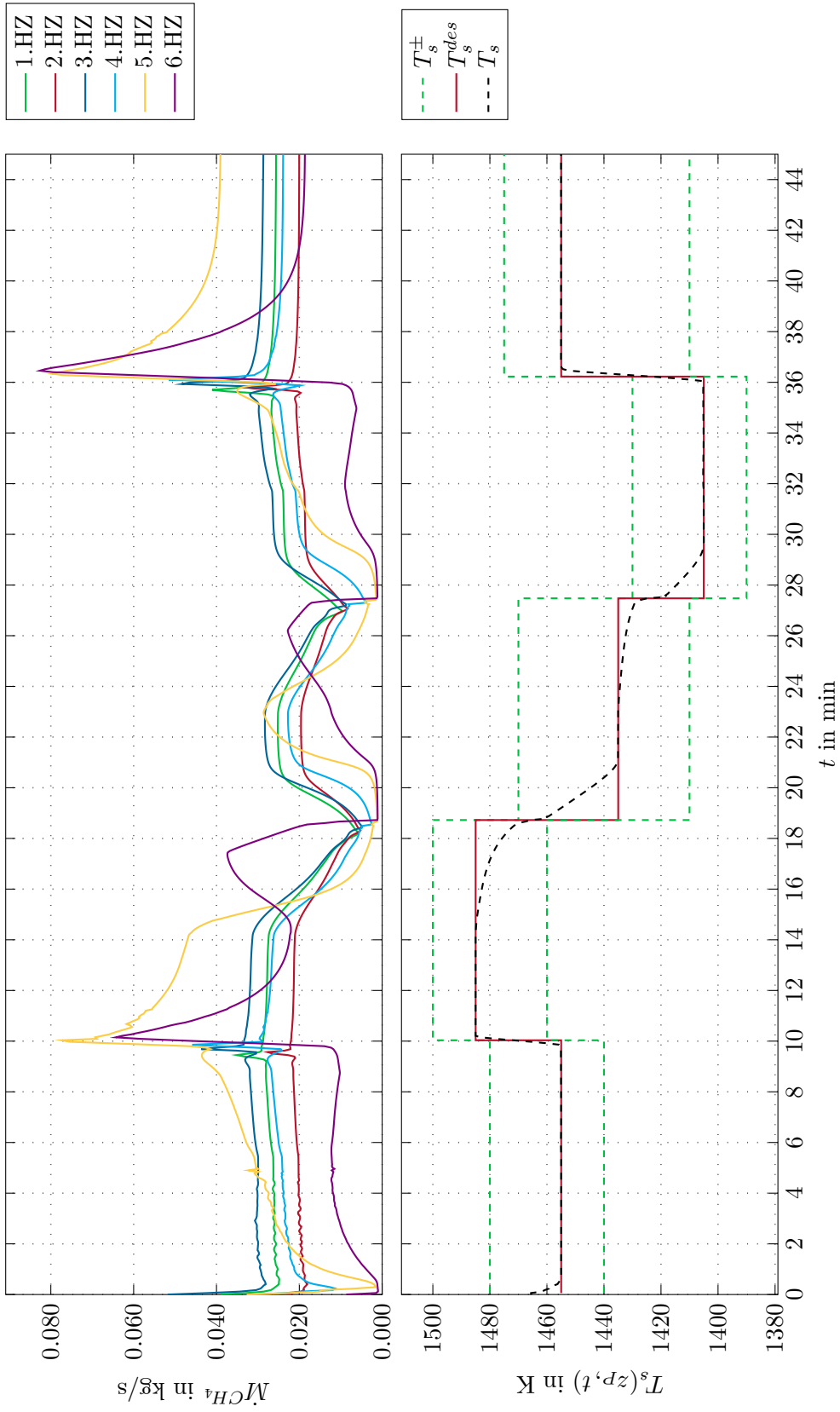


Abbildung 4.6: Simulationsergebnisse des modellprädiktiven Regelungskonzepts in der Simulationsumgebung 1.



### 4.3.2 Simulationsumgebung 2

Der entwickelte Temperaturregler wird auch für die realitätsnähere Simulationsumgebung 2 gemäß Abbildung 4.2 mit den definierten Parametern aus Tabelle 4.2 getestet. Auch in diesem Fall kann der entwickelte Temperaturregler sehr genau die gewünschte Zieltemperatur unter Einhaltung der Temperaturschranken realisieren. Im Vergleich zu den Ergebnissen in der Simulationsumgebung 1 treten hier jedoch insbesondere im transienten Bereich, d.h. im Bereich der Bandübergänge, größere Abweichungen von der Zieltemperatur auf, im Speziellen das Unter- bzw. Überschwingen der Bandtemperatur von der Zieltemperatur. Das kann vor allem auf die Unterschiede zwischen den verwendeten Ofenmodellen, d.h. den Modellfehler zwischen dem im Regler verwendeten Modell (2.36) und dem vollständigen Modell [1], zurückgeführt werden.

Darüber hinaus werden in der MPC die Beschränkungen bezüglich der zeitlichen Änderungen der Massenströme immer eingehalten. Im stationären Fall stellt sich ein Temperaturfehler von 1K ein.

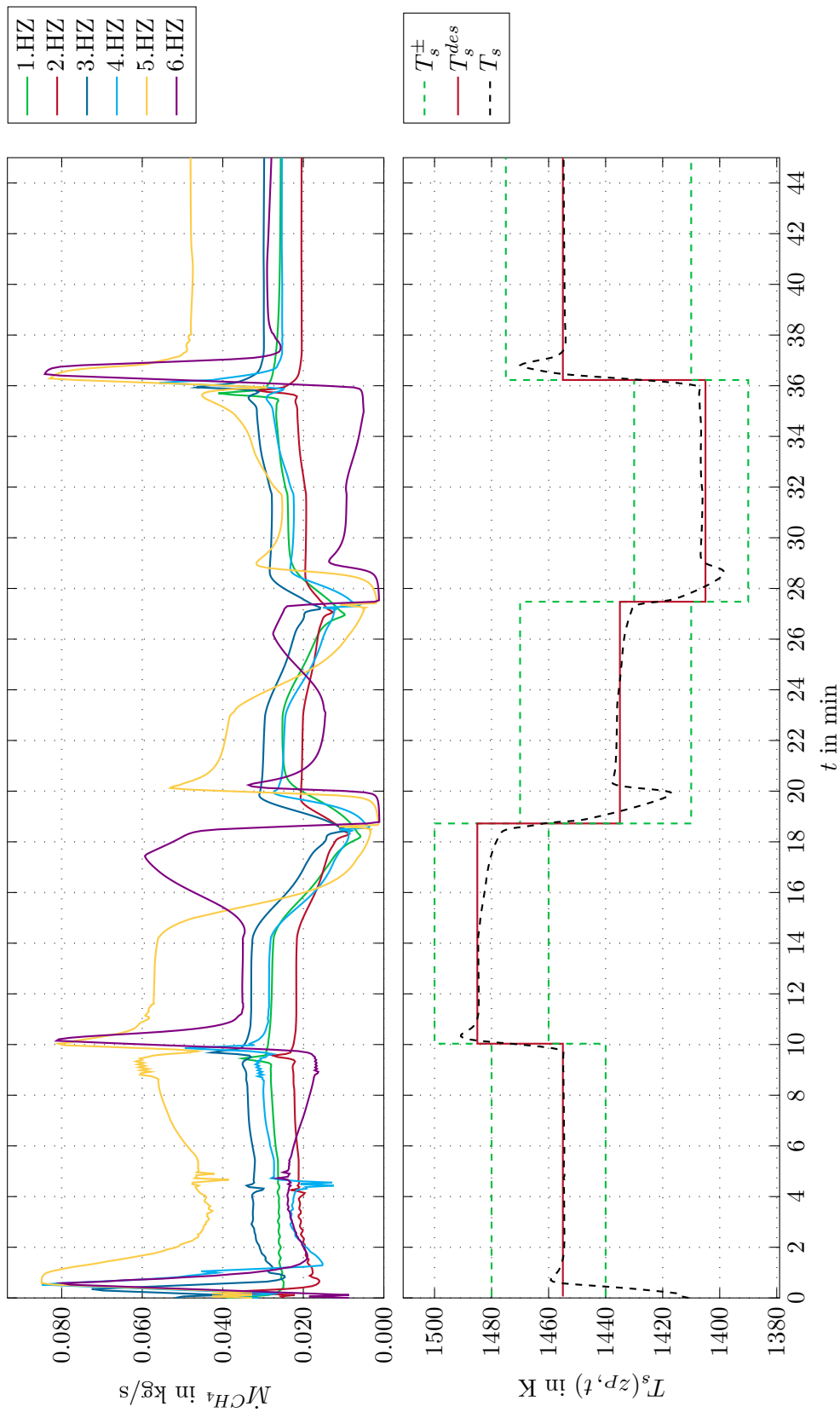


Abbildung 4.7: Simulationsergebnisse des modellprädiktiven Regelungskonzepts in der Simulationsumgebung 2.

# 5 Zusammenfassung und Ausblick

## 5.1 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer modellprädiktiven Temperaturregelung für die Bandtemperatur in einem horizontalen Bandglühofen. Die Temperaturregelung soll an der realen Anlage in allen Betriebssituationen eine genaue Regelung der Bandtemperatur sowie die Minimierung des spezifischen Energieverbrauchs sicherstellen. Als Eingangsgrößen dienen dazu die Brennstoffmassenströme in die Heizzonen.

Das im modellprädiktiven Regler verwendete reduzierte Ofenmodell wurde aus [1] übernommen und in dieser Arbeit kurz zusammengefasst. Es besteht aus den einzelnen Teilmodellen Band, Wand, Rolle und Abgas. Diese Teilmodelle sind thermisch durch die Wärmetransportmechanismen Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung gekoppelt. Des Weiteren wird das in der Arbeit [1] vorgestellte vollständige Ofenmodell anstelle des realen Ofens in den entsprechenden Simulationsumgebungen verwendet. Zur Schätzung nicht messbarer Prozessgrößen sowie zur Schätzung von Emissivitätsänderungen wurde der Beobachter aus [1] übernommen. Dieser nutzt die Brennstoffmassenströme sowie die Intensitätsmessung des installierten Strahlungspyrometers, um die aktuelle Zustandsschätzung zu verbessern. Zur Lösung des dynamischen Optimierungsproblems wurde ein maßgeschneiderter numerischer Lösungsalgorithmus verwendet. Im Optimierungsproblem wurden die Regelungsziele in einer geeigneten Kostenfunktion abgebildet. Die Kostenfunktion besteht aus einer Summe von quadratischen Termen. Beschränkungen der Eingangsgrößen und der Systemzustände wurden mit Hilfe einer Eingangstransformation und in Form von Straftermen in der Kostenfunktion berücksichtigt. Für die iterative Lösung des Optimierungsproblems wurde das Levenberg-Marquardt Verfahren verwendet. Der notwendige Gradient und die approximierte Hessematrix der Kostenfunktion werden analytisch unter Verwendung adjungierter Variablen berechnet. Die gefundene Lösung des Optimierungsproblems wird als Anfangslösung im nachfolgenden Prädiktionshorizont verwendet.

Für die modellprädiktive Regelung wird das dynamische Optimierungsproblem wiederkehrend für finite überlappende Prädiktionshorizonte gelöst und das Ergebnis im kurzen Steuerungshorizont auf das reale System aufgeschaltet. Zu Beginn eines jeden Prädiktionshorizonts muss der vom Beobachter geschätzte aktuelle Systemzustand als Anfangszustand im Optimierungsproblem verwendet werden. Die Funktionalität des modellprädiktiven Temperaturreglers wurde in einer Simulationsumgebung getestet. Der Betrieb des realen Ofens wurde in dieser Simulationsumgebung mit dem validierten vollständigen Ofenmodell aus [1] simuliert. Das betrachtete Simulationsszenario basiert auf Prozessdaten der realen Anlage. Die numerischen Ergebnisse bestätigen die Funktionalität und die Leistungsfähigkeit des entwickelten modellprädiktiven Temperaturreglers zur Realisierung der definierten Ziele, d.h. genaue Bandtemperaturregelung und Minimierung des spezifischen Brennstoffbedarfs für den betrachteten Bandglühofen.

## 5.2 Ausblick

Der verwendete modellprädiktive Temperaturregler kann hinsichtlich Recheneffizienz in einigen Punkten verbessert werden. Eine Verringerung der Anzahl der Optimierungsvariablen durch eine alternative Eingangsparametrierung, vgl. [11, 25], reduziert den numerische Aufwand. Weiterhin kann der Prädiktionshorizont des Optimierungsproblems mit Hilfe einer von der Bandgeschwindigkeit abhängigen Zeittransformation normiert werden. Damit wird im Prädiktionshorizont immer eine konstante Bandlänge betrachtet. Für den Fall, dass die Bandgeschwindigkeit ebenfalls eine Stellgröße darstellt, müssen die auf die entsprechenden Bänder bezogenen Gewichtungsmatrizen in der Kostenfunktion bei einer Änderung der Geschwindigkeit nicht neu berechnet werden.

Weiterhin kann eine Zwei-Freiheitsgrad-Regelungsstruktur bestehend aus einer modellbasierten Vorsteuerung und einer Ausgangsregelung zur genauen Regelung der Medienversorgung verwendet werden, vgl. [26–28]. Mit diesen Regelungsstrukturen ist die genaue Einhaltung eines definierten Brennstoff-Luft-Verhältnisses in den Heizzonen auch bei schnellen Änderungen des geforderten Brennstoffmassenstroms möglich. Dadurch können letztendlich auch weniger strikte Beschränkungen hinsichtlich der Änderungsraten der Brennstoffmassenströme im entwickelten modellbasierten Temperaturregler berücksichtigt und somit das Potential zur Erfüllung der definierten Regelungsziele gesteigert werden [11].

## Literatur

- [1] F. Maislinger, „Mathematische Modellierung eines horizontalen Bandglühofens“, Diplomarbeit, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, 2015.
- [2] X.-B. Li, D. Li, S.-B. Jian und J.-X. Guo, „Intelligent PID control system for vacuum annealing furnace workpieces temperature“, in *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Shanghai, China, 2004, S. 934–940.
- [3] L. Bitschnau, S. Jakubek und M. Kozek, „Constrained model predictive control of a continuous annealing furnace“, in *Proceedings of the ASME 2010 Dynamic Systems and Control Conference (DSCC)*, Cambridge, USA, 2010, S. 285–292.
- [4] L. Bitschnau und M. Kozek, „Modeling and control of an industrial continuous furnace“, in *Proceedings of the International Conference on Computational Intelligence, Modelling and Simulation (CIMSIM)*, Brno, Czech Republic, 2009, S. 231–236.
- [5] H. Wu, R. Speets, F. Heeremans, O. B. Driss und R. van Buren, „Nonlinear model predictive control of throughput and strip temperature for continuous annealing line“, in *Ironmaking & Steelmaking*, Bd. 42, 2014, S. 570–578.
- [6] D. Lewis, D. Sandoz, P.-O. Norberg und K. Warwick, „The application of predictive control to steel annealing“, in *Proceedings of the International Conference on Control*, Bd. 1, Coventry, UK, 1994, S. 692–698.
- [7] A. Steinböck, D. Wild und A. Kugi, „Nonlinear model predictive control of a continuous slab reheating furnace“, in *Control Engineering Practice*, Bd. 21, 2013, S. 495–508.
- [8] A. Steinböck, K. Graichen und A. Kugi, „Dynamic optimization of a slab reheating furnace with consistent approximation of control variables“, in *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Bd. 16, 2011, S. 1444–1456.
- [9] J. Nocedal und S. Wright, *Numerical Optimization (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering)*. Springer, New York, 2000.
- [10] K. Madsen, H. Nielsen und O. Tingleff, „Methods for Non-Linear Least Squares Problems“, in *Informatics and Mathematical Modelling (IMM)*, Technical University of Denmark (DTU), Bd. 2, Lyngby, 2004.
- [11] M. Niederer, „Nichtlineare modellprädiktive Regelung der Bandtemperatur in einem Glühofen“, in *der Serie Modellierung und Regelung komplexer dynamischer Systeme*, Bd. 38, Aachen: Shaker, 2018.

- [12] R. Courant, E. Isaacson und M. Rees, „On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences“, New York: A Wiley Company, 1952, S. 243–255.
- [13] F. Incropera, D. DeWitt, T. Bergmann und A. Lavine, „Introduction to Heat Transfer“, New Jersey: John Wiley & Sons, 2011.
- [14] M. F. Modest, „Radiative Heat Transfer“, 2. Aufl. San Diego: Academic Press, 2003.
- [15] H. Hottel, „Radiative Heat Transfer“, in *Heat Transmission*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1954.
- [16] J. Noble, „The zone method: Explicit matrix relations for total exchange areas“, in *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Bd. 18, 1975, S. 261–269.
- [17] R. Siegel und J. Howell, „Thermal Radiation Heat Transfer“, 4. Aufl., London: Taylor & Francis, 2002.
- [18] J. M. Goyheneche und J. Sacadura, „The zone method: A new explicit matrix relation to calculate the total exchange areas in anisotropically scattering medium bounded by anisotropically reflecting walls“, in *SME Journal of Heat Transfer* 124, 2002, S. 696–703.
- [19] J. Strikwerda, „Finite difference schemes and partial differential equations“, 2, Society for Industrial und Applied Mathematics (SIAM), 2004.
- [20] R. LeVeque, „Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems“, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [21] —, „Numerical Methods for Conservation Laws“, Bd. 2, Zürich: Birkhäuser, 2008.
- [22] D. Bertsekas, „Nonlinear Programming“, 2. Aufl. Massachusetts: Athena Scientific, 1999.
- [23] H. Curry, „The method of steepest descent for non-linear minimization problems“, in *Quarterly of Applied Mathematics*, Bd. 2, 1999, S. 258–261.
- [24] C. G. Broyden, „The convergence of a class of double-rank minimization algorithms: General considerations“, in *Journal of Applied Mathematics*, Bd. 12, 1970, S. 76–90.
- [25] M. Niederer, S. Strommer, A. Steinböck und A. Kugi, „Nonlinear model predictive control of the strip temperature in an annealing furnace“, in *Journal of Process Control*, Bd. 48, 2016, S. 1–13.
- [26] C. Fröhlich, „Media supply of gas burners of a direct-fired furnace“, Diplomarbeit, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, 2015.
- [27] S. Strommer, A. Steinböck, A. Begle, M. Niederer und A. Kugi, „Modeling and Control of Gas Supply for Burners in Gas-Fired Industrial Furnaces“, in *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. Antibes, France, 2014, S. 210–215.
- [28] C. Fröhlich, S. Strommer, A. Steinböck, M. Niederer und A. Kugi, „Modeling of the media-supply of gas burners of an industrial furnace“, in *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2016, S. 2664–2672.

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit gemäß dem Code of Conduct – Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis (in der aktuellen Fassung des jeweiligen Mitteilungsblattes der TU Wien), insbesondere ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel, angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, November 2019

---

Aleksandar Nikolic