



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna | Austria

Diplomarbeit

Einfluss eines Konturkrümmungssprunges auf die Grenzschichtströmung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing. oder DI), eingereicht an der TU Wien, Fakultät für
Maschinenwesen und Betriebswissenschaften, von

Felix Enichlmayr

Matr.Nr.: 00926236

unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr.techn. Stefan Braun
Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung, E322

Wien, September 2020

Ich nehme zur Kenntnis, dass ich zur Drucklegung dieser Arbeit nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen, sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

Datum und Stadt

Unterschrift

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr.techn. Stefan Braun, der mir stets mit Ratschlägen und Lösungsansätzen zur Seite gestanden ist und mir dadurch letztendlich geholfen hat dieses schwierige Thema bearbeiten zu können.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Ausgangslage	3
2.1	Dimensionslose Größen	3
2.2	Dickenfunktion	4
3	Potentialströmungen	6
3.1	Potentialtheorie für ebene Strömung	6
3.2	Profiltheorie	6
3.3	Geschwindigkeitsverteilung	8
4	Grenzschichtgleichungen	13
4.1	Problemstellung	13
4.2	Viskose Subgrenzschicht	18
5	Schlussfolgerung	26
5.1	Zusammenfassung der Probleme	26
5.2	Ausblick	26

Abstract

The goal of this thesis is to determine when of a given body contour with a variable curvature which is described by a parameter at which the value of this parameter the flow starts to separate from the body surface at the rear end. At first the equations for the velocity and the pressure of the inviscid region of the outer flow are formulated. The singularity in the pressure gradient causes the boundary layer to split into two regions, a viscous near-wall sublayer and the main part of the boundary layer. After that the velocity and the pressure for these two layers are formulated as asymptotic series. In the last step these equations should be matched in the viscous/inviscid interaction zone of the tripe deck. During this procedure it turned out that this does not lead to any results. It is obvious that a different approach is needed for this case.

Kurzfassung

Das Ziel in dieser Diplomarbeit ist es für einen gegebenen Körper mit variabler Krümmung zu bestimmen, ab welchem Wert für den Krümmungsparameter am hinteren Ende Strömungsablösung auftritt. Als erstes werden die Gleichungen für den Druck und die Geschwindigkeit in der Außenströmung aufgestellt. Das singuläre Verhalten des Druckgradienten an der zu betrachtenden Stelle erfordert eine Aufteilung der Grenzschicht in eine Hauptschicht sowie eine viskose Unterschicht. Anschließend werden für diese zwei Schichten die Geschwindigkeit sowie der Druck als asymptotische Reihe aufgestellt. Im letzten Schritt sollten diese im triple deck aufgrund der dort vorliegenden starken Wechselwirkung miteinander „gematcht“ werden. Im Laufe dieses Verfahrens stellte sich heraus, dass dies nicht zum Ziel führt. Es ist offensichtlich, dass für diesen Fall eine andere Vorgehensweise vonnöten ist.

1 Einleitung

Strömungsablösung ist ein Verhalten strömender Fluide, deren Untersuchung in unserem täglichen Leben von ziemlich großer Bedeutung ist. Mit zu den bedeutendsten Anwendungen gehört die Erforschung und Bestimmung eines Strömungsabrisses an Tragflügeln, da das Auftreten eines solchen ein Flugzeug zum Absturz bringen kann. Aber auch in anderen Bereichen, wie dem Automobilbau, wird untersucht ob und in welcher Form Ablöseerscheinungen auftreten.

Diese Diplomarbeit ist eine Fortführung der Diplomarbeit von Jarmila Vodinská unter dem Namen „Classical Boundary Layer Behavior in the Vicinity of a Curvature Jump of the Wall Contour“ aus dem Jahr 2014. Der in dieser Arbeit verwendete Körper wird durch eine mathematische Funktion beschrieben, welcher eine durch einen Parameter ε veränderliche Krümmung aufweist. Dies sorgt dafür, dass am Ende des Körpers ein Krümmungssprung auftritt, welcher ab einer gewissen Größe zur Strömungsablösung führen wird. In meiner Diplomarbeit versuche ich herauszufinden, welchen Wert ε aufweisen muss um eine Ablösung hervorzurufen, da bereits in anderen Arbeiten¹ gezeigt wurde, dass ein Krümmungssprung nicht automatisch zur Strömungsablösung führt. Der Krümmungssprung kann durch ε so variiert werden, dass dieser bei einem der beiden Extremfälle verschwindet und die Kontur damit einen kontinuierlichen Krümmungsverlauf besitzt, sowie im anderen Extremfall eine Ecke und somit einen unendlich großen Krümmungssprung aufweist. Bei Letzterem handelt es sich im Grunde um die Strömung um eine Ecke². Der erste Extremfall, wenn die Krümmung stufenlos verläuft, hat Ähnlichkeiten mit der Strömung um einen Zylinder³, allerdings mit dem Unterschied, dass die Dicke des Zylinders die Größenordnung 1 besitzt, während die in diesem Fall verwendete Kontur sehr dünn ist. Dennoch kann man annehmen, dass der aktuell zu behandelnde Fall „irgendwo dazwischen“ liegt. Dementsprechend ist es naheliegend, dass die Vorgehensweise Ähnlichkeiten zu diesen beiden behandelten Fällen aufweist.

Die mathematische Beschreibung des Körpers und der veränderlichen Krümmung erfolgt in Kapitel 2. Auch werden dort die dimensionslosen Größen sowie die im späteren Verlauf wichtigen Navier-Stokes Gleichungen eingeführt. Im dritten Kapitel wird die Geschwindigkeitsverteilung entlang der Körperoberfläche beschrieben und hergeleitet. Dabei werden die Methoden der Potentialtheorie verwendet, bei der Reibungseinflüsse vernachlässigt werden. Dabei erhält man genau das Geschwindigkeitsprofil, das sich einstellen würde,

¹Vgl. Messiter, A. F., Hu, J. J., *Laminar Boundary Layer At a Discontinuity in wall curvature*, Quarterly of applied mathematics, 1975.

²Vgl. Ruban, A. I., *Fluid Dynamics Part 3: Boundary Layers*, Chapter 4.

³Vgl. Ruban, A. I., *Fluid Dynamics Part 3: Boundary Layers*, Chapter 3.2.

gäbe es keine Grenzschicht. Dies trifft auch für die Strömung zu, die sich nicht in unmittelbarer Nähe zur Körperoberfläche befindet. In Kapitel 4 wird dann das Strömungsverhalten in der Grenzschicht untersucht. Auf Basis der in Kapitel 3 erlangten Ergebnisse werden die Geschwindigkeitskomponenten in der Strömung mit Hilfe asymptotischer Reihen aufgestellt. Es zeigt sich dabei relativ schnell, dass die klassische Grenzschichttheorie nicht mehr ausreicht und man die Grenzschicht in eine Hauptschicht und eine viskose Unterschicht unterteilen muss. Ziel ist die entsprechenden Gleichungen für die Geschwindigkeit und den Druck in den jeweiligen Schichten aufzustellen und diese im triple deck entsprechend zu „matchen“. Allerdings treten im Verlauf dieses Versuchs einige Probleme auf, die diesen Versuch unmöglich machen und dafür sorgen, dass diese Arbeit kein abschließendes Ergebnis aufweist.

Im fünften und letzten Kapitel werden all die Probleme noch einmal rekapituliert, die zu einem Versagen dieser Vorgehensweise führen. Abschließend wird ein Ansatz aufgezeigt, bei dem der Druckgradient noch einmal genau betrachtet wird und in einer nachfolgenden Arbeit vielleicht zum gewünschten Ergebnis führen könnte.

2 Ausgangslage

2.1 Dimensionslose Größen

Für diese Untersuchung wird ein Körper angeströmt, dessen Dicke \tilde{H} im Verhältnis zu seiner Länge \tilde{L} als sehr klein angenommen wird. Es gilt $\tilde{L} \gg \tilde{H}$.

In Kapitel 4 werden die Navier-Stokes Gleichungen eine wichtige Rolle einnehmen. Für stationäre und inkompressible Strömungen ohne Berücksichtigung externer Kräfte, wie z.B. der Gewichtskraft, lauten diese

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\nu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right), \quad (2.1a)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\nu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right), \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0. \quad (2.1c)$$

Im Folgenden werden die dimensionslosen Variablen x, y, u, v, p, ρ eingeführt.

$$x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}}, \quad u = \frac{\tilde{U}}{\tilde{U}_\infty}, \quad v = \frac{\tilde{V}}{\tilde{U}_\infty}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_\infty}, \quad p = \frac{\tilde{p} - \tilde{p}_\infty}{\frac{1}{2} \tilde{\rho}_\infty \tilde{U}_\infty^2} \quad (2.2)$$

$\tilde{U}_\infty, \tilde{p}_\infty, \tilde{\rho}_\infty$ und $\tilde{\nu}_\infty$ sind die Geschwindigkeit, der Druck, die Dichte und die kinematische Viskosität der ungestörten Außenströmung. Zusätzlich wird noch die Reynoldszahl Re eingeführt.

$$Re = \frac{\tilde{U}_\infty \tilde{L}}{\tilde{\nu}_\infty} \quad (2.3)$$

Daraus ergeben sich dann die Navier-Stokes Gleichungen in dimensionsloser Form

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.4a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.4c)$$

Die Reynoldszahl ist eine wichtige dimensionslose Kennzahl in der Strömungsmechanik. Sie ist definiert als das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften. Für alle weiteren

Rechenschritte wird die Reynoldszahl als sehr groß angenommen, $Re \gg 1$.

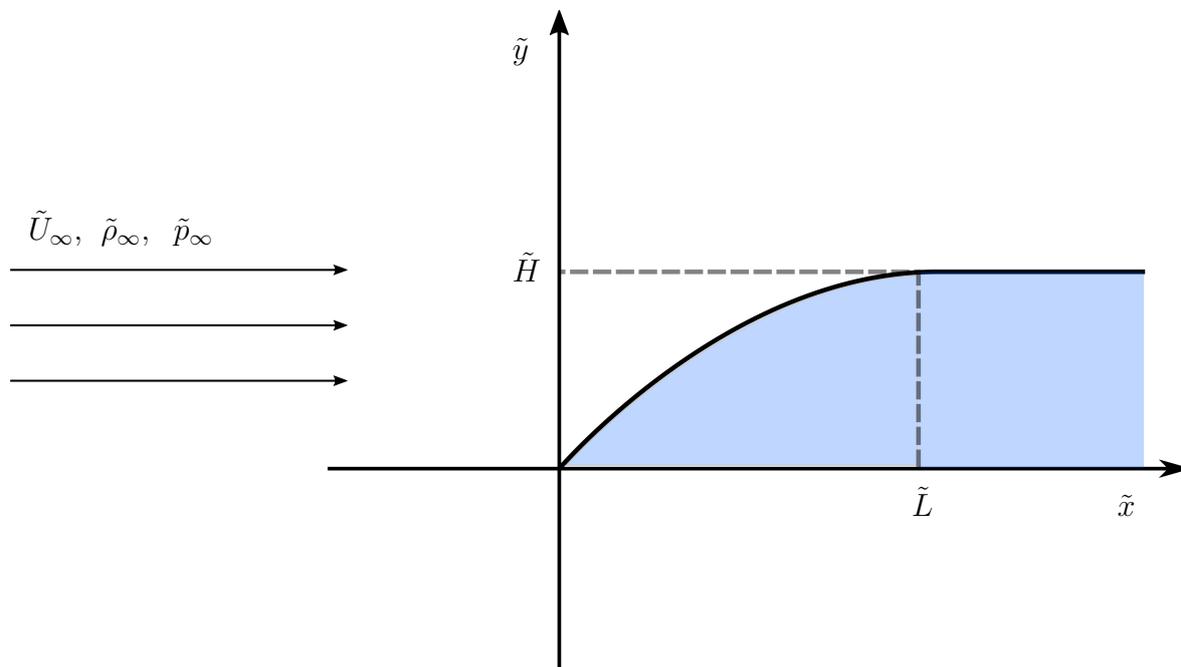


Abbildung 1: Geometrische Form der Kontur

2.2 Dickenfunktion

Der umströmte Körper ist durch die Funktion $y = \pm \tau T(x)$ gegeben. τ ist der Dickenparameter des Körpers, $T(x)$ ist die auf die Länge 1 normierte Dickenfunktion des Körpers mit

$$T(x) = \varepsilon [1 - (1 - x)^3] + (1 - \varepsilon) \frac{x [2\varepsilon - (\varepsilon + 1)x + 1]}{(\varepsilon - x + 1)}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (2.5)$$

Der Parameter ε beschreibt die Krümmung der Funktion, er ist gegeben als

$$\varepsilon(k) = \frac{k}{4} + \frac{\sqrt{16 + k^2}}{4}. \quad (2.6)$$

Der Krümmungsparameter k ist definiert als die Krümmung an der Stelle $x = 1$, also

$$k := T''(x = 1). \quad (2.7)$$

Es gilt: $\varepsilon(0) = 1$ und $\lim_{k \rightarrow -\infty} \varepsilon(k) = 0$. Abbildung 2 zeigt die Funktion für verschiedene Werte für k .

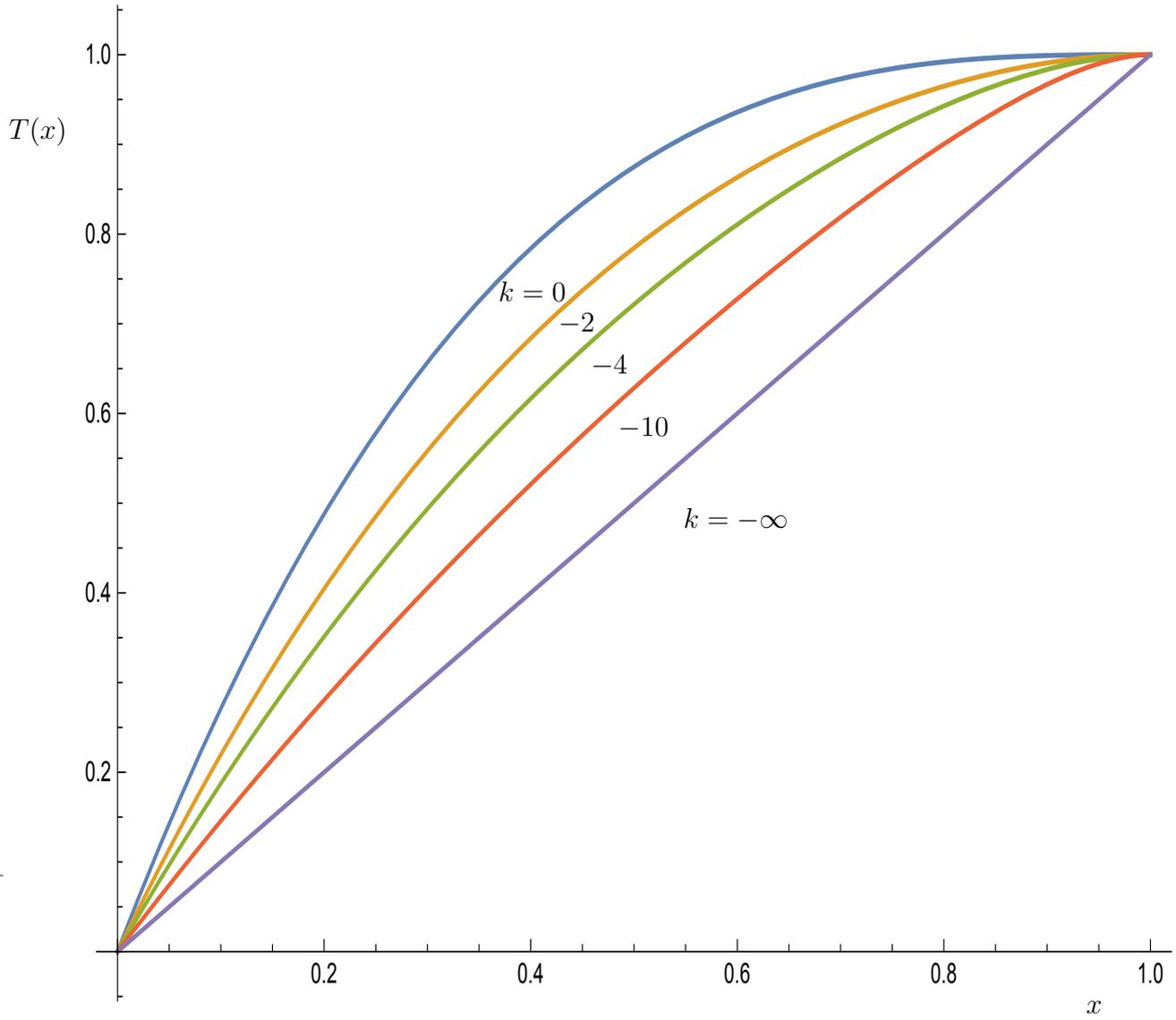


Abbildung 2: Dickenfunktion für verschiedene Werte von k

3 Potentialströmungen

3.1 Potentialtheorie für ebene Strömung

Die Annahme einer Potentialströmung ist möglich, wenn wir davon ausgehen, dass die Strömung rotationsfrei ist. In diesem Fall existiert ein Geschwindigkeitspotential ϕ für das gilt $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ mit \vec{u} als dem Geschwindigkeitsfeld. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (2.4c) erhält man die Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = 0. \quad (3.1)$$

Im vorliegenden Fall eines halb-unendlich ausgedehnten Körpers, benötigen wir für die Lösung der Laplace-Gleichung noch 2 Randbedingungen, nämlich die der ungestörten Außenströmung im Fernfeld sowie der Tangentialbedingung an der Körperoberfläche:

$$\text{ungestörte Außenströmung:} \quad \phi \sim x + o(1) \quad \text{für } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

$$\text{Tangentialbedingung:} \quad \frac{\phi_y}{\phi_x} = \tau T'(x) \quad \text{für } y = \pm\tau T(x) \quad (3.3)$$

3.2 Profiltheorie

Zunächst interessiert uns die Geschwindigkeit an der Oberfläche des umströmten Körpers um damit einen Ansatz für die Geschwindigkeit in der Grenzschicht zu erlangen. In diesem Abschnitt werden Reibungseffekte vernachlässigt und die Geschwindigkeit durch die Profiltheorie bestimmt. Diese kann dann verwendet werden, wenn der umströmte Körper „schlank“ ist, seine Dicke also wesentlich kleiner als seine Länge ist. Da diese Bedingung im vorliegenden Fall erfüllt ist, kann man das Geschwindigkeitspotential als Summe des Potentials der ungestörten Parallelströmung und einer Reihe von Störpotentialen ansprechen:

$$\phi = x + \tau\phi_1 + \tau^2\phi_2 \dots \quad (3.4)$$

Die entsprechenden Ableitungen an der Profileroberseite lauten

$$\phi_x = u = 1 + \tau\phi_{1x} + \tau^2\phi_{2x} \dots \quad (3.5a)$$

$$\phi_y = v = \tau\phi_{1y} + \tau^2\phi_{2y} \dots \quad (3.5b)$$

Im nächsten Schritt werden wir diesen Ansatz auf die Tangentialbedingung anwenden. Dazu werden wir (3.5) in eine Taylorreihe entwickeln und in (3.3) einsetzen. In beiden

Fällen wird nach $y = \tau T \ll 1$ entwickelt.

$$\begin{aligned} \phi_x(x, \tau T(x)) &\sim 1 + \tau [\phi_{1x}(x, 0) + \phi_{1xy}(x, 0) \tau T(x) + \frac{1}{2} \phi_{1xyy}(x, 0) (\tau T(x))^2 + \dots] \\ &\quad + \tau^2 [\phi_{2x}(x, 0) + \phi_{2xy}(x, 0) \tau T(x) + \frac{1}{2} \phi_{2xyy}(x, 0) (\tau T(x))^2 + \dots] + \dots \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} \phi_y(x, \tau T(x)) &\sim \tau [\phi_{1y}(x, 0) + \phi_{1yy}(x, 0) \tau T(x) + \frac{1}{2} \phi_{1yyy}(x, 0) (\tau T(x))^2 + \dots] \\ &\quad + \tau^2 [\phi_{2y}(x, 0) + \phi_{2yy}(x, 0) \tau T(x) + \frac{1}{2} \phi_{2yyy}(x, 0) (\tau T(x))^2 + \dots] + \dots \end{aligned} \quad (3.6b)$$

Umgeformt nach den Potenzen von τ erhält man

$$\phi_x(x, \tau T(x)) \sim 1 + \tau \phi_{1x}(x, 0) + \tau^2 [\phi_{1xy}(x, 0) T(x) + \phi_{2x}(x, 0)] + \dots \quad (3.7a)$$

$$\phi_y(x, \tau T(x)) \sim \tau \phi_{1y}(x, 0) + \tau^2 [\phi_{1yy}(x, 0) T(x) + \phi_{2y}(x, 0)] + \dots \quad (3.7b)$$

Nach Einsetzen von (3.7) in (3.3) erhalten wir

$$T'(x) = \frac{\phi_{1y}(x, 0) + \tau [\phi_{1yy}(x, 0) T(x) + \phi_{2y}(x, 0)] + \dots}{1 + \tau \phi_{1x}(x, 0) + \tau^2 [\phi_{1xy}(x, 0) T(x) + \phi_{2x}(x, 0)] + \dots} \quad (3.8)$$

Gleichung (3.8) ergibt nach einer erneuten Taylorreihenentwicklung für kleine τ

$$\begin{aligned} T'(x) &= [\phi_{1y}(x, 0) + \tau (\phi_{1yy}(x, 0) T(x) + \phi_{2y}(x, 0)) + O(\tau^2)] [1 - \tau \phi_{1x}(x, 0) + O(\tau^2)] \\ &= \phi_{1y}(x, 0) + \tau [\phi_{1yy}(x, 0) T(x) + \phi_{2y}(x, 0) - \phi_{1y}(x, 0) \phi_{1x}(x, 0)] + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Als nächstes berechnen wir die y-Ableitung der Störpotentiale ϕ_{ny} . Dies wird erreicht indem von der Laplace-Gleichung, der Bedingung für die ungestörte Außenströmung sowie für die Tangentialbedingung die Potenzen von τ einzeln berechnet werden. Man erhält daraus:

Ordnung τ^0

$$\phi_{1xx} + \phi_{1yy} = 0, \quad (3.10a)$$

$$x^2 + y^2 \rightarrow \infty : \quad \phi_1 \rightarrow 0, \quad (3.10b)$$

$$y = 0 : \quad \phi_{1y}(x, 0) = T'(x) = T'_1(x). \quad (3.10c)$$

Ordnung τ^1

$$\phi_{2xx} + \phi_{2yy} = 0, \quad (3.11a)$$

$$x^2 + y^2 \rightarrow \infty : \quad \phi_2 \rightarrow 0, \quad (3.11b)$$

$$y = 0 : \quad \frac{\phi_{1yy}(x, 0) T(x) + \phi_{2y}(x, 0)}{\phi_{1x}(x, 0)} = T'(x)$$

$$\phi_{2y}(x, 0) = T'(x) \phi_{1x}(x, 0) - T(x) \phi_{1yy}(x, 0)$$

$$\phi_{2y}(x, 0) = T'(x) \phi_{1x}(x, 0) + T(x) \phi_{1xx}(x, 0)$$

$$\phi_{2y}(x, 0) = [T(x) \phi_{1x}(x, 0)]' = T'_2(x) \quad (3.11c)$$

Dies kann für höhere Potenzen von τ fortgeführt werden. Man erkennt sofort, dass die entsprechenden Ableitungen von höheren Störpotentialen nach y nicht mehr von der Rampenfunktion $T(x)$ selbst anhängen, sondern von einer entsprechend modifizierten Version der Rampenfunktion $T'_n(x)$.

3.3 Geschwindigkeitsverteilung

Als nächstes wollen wir die Geschwindigkeit an der Oberfläche entlang der Kontur bestimmen. Die Linearität der Laplace-Gleichung erlaubt es, elementare Potentiale entlang

des Körpers zu positionieren und diese zu superponieren. Als elementare Störpotentiale verwenden wir eine kontinuierliche Verteilung von Quellen und Senken, die entlang der x -Achse aufgetragen werden. Dazu betrachten wir zunächst eine einzelne Quelle/Senke im Punkt $(x, y) = (\xi, 0)$ mit der infinitesimalen Quellstärke dq . Der entsprechende Betrag des Störpotentials lautet

$$d\phi_n = \frac{dq}{2\pi} \ln(\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}). \quad (3.12)$$

Es ist zweckmäßig die Quellstärkeverteilung durch die Belegungsfunktion $m(\xi)$ auszudrücken. Diese ist definiert durch

$$dq(\xi) = \frac{dq}{d\xi} d\xi = m(\xi) d\xi. \quad (3.13)$$

Integration von $x = 0$ bis $x = 1$ ergibt

$$\phi_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 m(\xi) \ln(\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}) d\xi. \quad (3.14)$$

Partielles Ableiten liefert

$$\phi_{nx}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 m(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \quad (3.15a)$$

$$\phi_{ny}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 m(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (3.15b)$$

Die Belegungsfunktion $m(\xi)$ kann durch die Tangentialbedingung bestimmt werden. Es gilt (vgl. (3.10c),(3.11c))

$$\phi_{ny}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 m(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = T'_n(x). \quad (3.16)$$

Für jedes $x \neq \xi$ verschwindet der Grenzwert. Nur für $x = \xi$ liefert $m(\xi = x)$ einen Betrag zum Integral. Man kann daher die Belegungsfunktion aus dem Integral herausheben.

$$\phi_{ny}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{m(x)}{2\pi} \int_0^1 \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = T'_n(x) \quad (3.17)$$

Mithilfe der Transformation $\sigma = \frac{\xi-x}{y}$, $d\sigma = \frac{d\xi}{y}$ lässt sich das Integral berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{m(x)}{2\pi} \int_{-x/y}^{(1-x)/y} \frac{1}{1+\sigma^2} d\sigma &\stackrel{0 < x < 1}{=} \frac{m(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\sigma^2} d\sigma \\ &= \frac{m(x)}{2\pi} [\arctan(\sigma)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{m(x)}{2} = T'_n(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Daraus folgt

$$\phi_{nx} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{(x-\xi) T'_n(x)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi, \quad (3.19a)$$

$$\phi_{ny} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{y T'_n(x)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (3.19b)$$

Um das Störpotential $\phi_{nx}(x, y)$ an der Oberfläche berechnen zu können muss $y \rightarrow 0+$ gehen. Das Integral ermittelt man über den *Cauchy Hauptwert*. Es gilt

$$\phi_{nx}(x, 0^+) = \int_0^1 \frac{T'_n(x)}{x-\xi} d\xi \quad (3.20)$$

Für die Geschwindigkeit $u_{0w}(x)$ an der Körperoberfläche erhält man

$$u_{0w}(x) = 1 + \tau \phi_{1x}(x, 0^+) + O(\tau^2) \quad (3.21)$$

Beschränkt man sich auf die 1. Ordnung erhält man mit der Rampenfunktion (2.5)

$$\begin{aligned}
\phi_{1x}(x, 0^+) &= \frac{1}{2\pi(x-1-\varepsilon)^2} \left\{ -6(x-1) \left[\left(x - \frac{1}{3}\right) \varepsilon^3 + \left(-2x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{5}{3}\right) \varepsilon^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{5}{3}\right) \varepsilon + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right] (x-1) \ln(|x-1|) + (-2\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2) \right. \\
&\quad \ln(\varepsilon + 1) + 6 \left[\left(x - \frac{1}{3}\right) \varepsilon^3 + \left(-2x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{5}{3}\right) \varepsilon^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{5}{3}\right) \varepsilon + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right] (x-1) \ln(|x|) - 6\varepsilon \left[\left(-\frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{3}\varepsilon\right) \right. \\
&\quad \left. \left. \ln(\varepsilon) + \left[\left(-x + \frac{7}{6}\right) \varepsilon + x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{11}{6} \right] (x-1-\varepsilon) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

In der nachfolgenden Abbildung ist die Geschwindigkeitsverteilung an der Körperoberfläche für verschiedene Krümmungsparameter $\varepsilon(k)$ abgebildet. Für den unendlich großen Krümmungssprung, d.h. Knick bzw. $k = -\infty$ erhält man an der Stelle $x = 1$ ein singuläres Verhalten. Bemerkenswert ist, dass jedes andere $k < 0$ an dieser Stelle eine vertikale Tangente hervorruft. Für den Knick an der Stelle $x = 0$ liefert, wie erwartet, jedes k ein singuläres Verhalten.

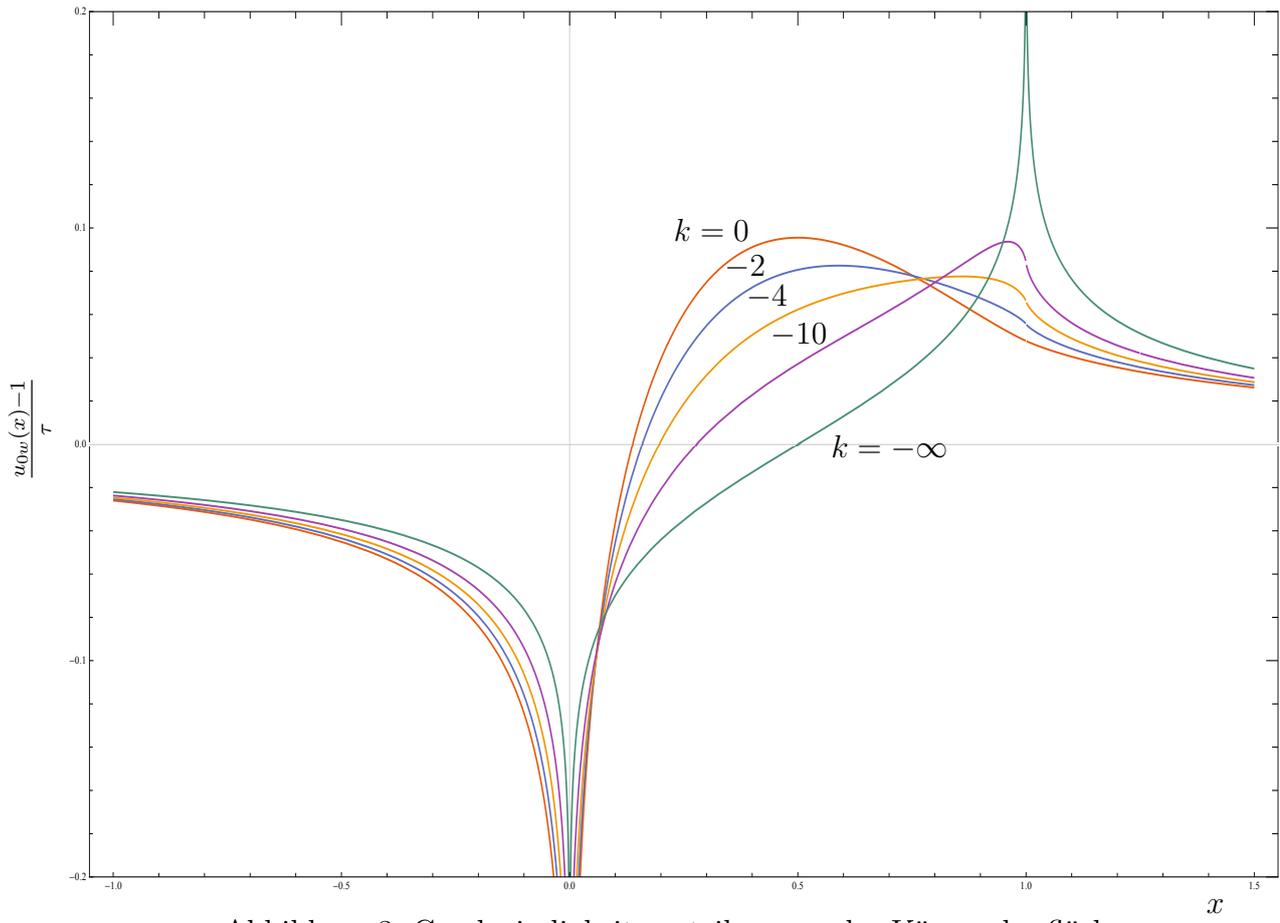


Abbildung 3: Geschwindigkeitsverteilung an der Körperoberfläche

4 Grenzschichtgleichungen

4.1 Problemstellung

In diesem Abschnitt werden die Grenzschichtgleichungen hergeleitet, deren Lösungen Aufschluss darüber geben werden für welche Parameter ε die Strömung abreißt. Die Gleichungen, die wir am Ende dieses Abschnitts erhalten, werden im Anschluss mit speziellen numerischen Verfahren gelöst werden.

Für den vorliegenden Fall wird ausschließlich von einer inkompressiblen Unterschallströmung ausgegangen ($M_\infty < 1$).

Die Bestimmung der Grenzschichtgleichungen erfolgt mittels der Methoden asymptotischer Reihen. Asymptotische Reihen zeichnen sich dadurch aus, dass jedes nachfolgende Glied um mindestens eine Ordnung kleiner ist als das vorhergehende, siehe Gl. (3.4).

Die Dicke der Rampe ist durch τ gegeben. Diese ist allerdings nicht konstant, sondern hängt von ε sowie der Reynoldszahl ab. Es gilt:

$$\tau = \tau_0 \gamma(Re) \quad (4.1)$$

Es ist zu beachten, dass τ_0 von der Größenordnung 1 und $\gamma(Re) \ll 1$ ist.

Region 1

Als erstes werden wir die reibungsfreie Außenströmung betrachten. Für das Limit, das für die Navier-Stokes Gleichungen verwendet wird, gilt:

$$x = O(1), \quad y = O(1), \quad Re \rightarrow \infty$$

In Region 1 wird die Strömung nur von der Kontur des Körpers beeinflusst, Verdrängungseffekte aufgrund der Grenzschicht finden nicht statt. Für die folgende Analyse gelten die Bedingungen

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad p_0 = 0 \quad (4.2)$$

Die entsprechende asymptotische Reihe sieht folgendermaßen aus:

$$u(x, y, Re) = 1 + \gamma u_1 + \dots \quad (4.3a)$$

$$v(x, y, Re) = \gamma v_1 + \dots \quad (4.3b)$$

$$p(x, y, Re) = \gamma p_1 + \dots \quad (4.3c)$$

Diesen Ansatz setzen wir in die Navier-Stokes Gleichungen (2.4) ein. Daraus erhält man

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (\text{x-Bewegungsgleichung}) \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} \quad (\text{y-Bewegungsgleichung}) \quad (4.4b)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}) \quad (4.4c)$$

Integration der x-Bewegungsgleichung (4.4a) unter Berücksichtigung der Bedingungen für die ungestörte Außenströmung

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \rightarrow 0 \\ p_1 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad \text{für } x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

ergibt

$$u_1 = -p_1. \quad (4.5)$$

(4.4c) in (4.4a) eingesetzt und (4.4b) ergeben

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Hierbei handelt es sich um die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen, welche die Bedingungen für den Ansatz

$$f(z) = p_1(x, y) + iv_1(x, y) \quad (4.7)$$

liefern. $f(z)$ ist eine analytische Funktion mit der komplexen Variablen

$$z = x + iy.$$

Im Folgenden wird für x stattdessen die Koordinate s verwendet mit der Eigenschaft $s = x - 1$. Unter der Bedingung, dass die Strömung entweder anliegt oder nur lokal innerhalb

eines kleinen Bereichs ablöst, verwenden wir die Bedingung für die Undurchlässigkeit

$$\left. \frac{v}{u} \right|_{y=y_w(s)} = \frac{dy_w}{ds}. \quad (4.8)$$

Im vorliegenden Fall gilt

$$y_w(s) = \begin{cases} \tau T(s) & \text{für } s < 0, \\ \tau & \text{für } s > 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Wenn man (4.9) in (4.8) einsetzt und dabei (4.1) berücksichtigt erhält man

$$v_1 = \begin{cases} \tau_0 T'(s) & \text{für } s < 0, \\ 0 & \text{für } s > 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Zur Bestimmung von $f(z)$ wird der Ansatz

$$f(z) = p_1 + i v_1 = (C_r + i C_i) \cdot \ln(z) + i D + \dots \quad \text{für } z \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

gewählt. Es folgt

$$\varphi = 0 : C_r \cdot 0 + C_i \cdot \ln(r) + D = 0$$

$$C_i = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\varphi = \pi : C_r = \tau_0 \cdot T'(s)$$

$$C_r = \frac{\tau_0}{\pi} \cdot T'(s)$$

Zur Vereinfachung wird $T'(s)$ in eine Taylorreihe entwickelt. Man erhält somit

$$T'(s) \approx 2 \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \cdot s + \dots \quad (4.12)$$

Es ist anzumerken, dass die Taylorreihenentwicklung versagt, wenn ε zu kleine Werte annimmt. Als grobe Orientierung kann man sagen, dass ε um eine Zehnerpotenz größer als s sein muss. An dieser Stelle sei bereits vorweggenommen, dass gilt $x = O(Re^{-3/8})$. Daraus ergibt sich $\varepsilon \geq Re^{-3/8}$. Somit kann man ε als Funktion der Reynoldszahl ($\varepsilon(Re)$) darstellen.

Für die Funktion $f(z)$ erhält man letztendlich

$$f(z) = \frac{2\tau_0}{\pi} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} s \ln(z) + \dots \quad (4.13)$$

Für den Druck p_1 und die vertikale Geschwindigkeit v_1 ergeben sich somit

$$p_1(s, y) = \frac{2\tau_0}{\pi} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} s \ln(\sqrt{s^2 + y^2}) + \dots \quad (4.14a)$$

$$v_1(s, y) = \frac{2\tau_0}{\pi} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} s \arctan\left(\frac{y}{s}\right) + \dots \quad (4.14b)$$

Region 2

In diesem Abschnitt wird das Strömungsverhalten in der reibungsbehafteten Grenzschicht untersucht. Dazu werden zuerst einmal die Navier-Stokes Gleichungen in den Koordinaten

$$x = O(1), \quad Y = Re^{1/2}y = O(1), \quad Re \rightarrow \infty \quad (4.15)$$

aufgestellt. Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit sowie der Druck werden durch folgende asymptotische Reihen wiedergegeben.

$$u(x, y, Re) = U_0(x, Y) + \gamma U_1(x, Y) + \dots$$

$$v(x, y, Re) = Re^{-1/2}V_0(x, Y) + \gamma Re^{-1/2}V_1(x, Y) + \dots \quad (4.16)$$

$$p(x, y, Re) = \gamma P_1(x, Y) + \dots$$

Durch Einsetzen von (4.16) in (2.4) sowie dem Ersetzen der Koordinate x durch s erhalten wir für die Größenordnung γ

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial s} + U_1 \frac{\partial U_0}{\partial s} + V_0 \frac{\partial U_1}{\partial Y} + V_1 \frac{\partial U_0}{\partial Y} = -\frac{\partial P_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} \quad (4.17a)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial Y} = 0 \quad (4.17b)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial s} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0 \quad (4.17c)$$

Gleichung (4.17b) offenbart uns, dass der Druck P_1 nicht von der Höhe (Y) abhängt. Man erhält ihn, indem wir in Gleichung (4.14a) $y = 0$ setzen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 P_1(s) = p_1(s, y = 0) &= \frac{2\tau_0 \varepsilon^2 - 1}{\pi \varepsilon} s \ln \sqrt{s^2} + \dots \\
 &= -\frac{2\tau_0 \varepsilon^2 - 1}{\pi \varepsilon} (-s) \ln(-s) + \dots, \quad s \rightarrow 0-
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

Für den Druckgradienten erhalten wir somit

$$\frac{dP_1(s)}{ds} = \frac{2\tau_0 \varepsilon^2 - 1}{\pi \varepsilon} \cdot \ln(-s) + \dots, \quad s \rightarrow 0-
 \tag{4.19}$$

Im Bereich $s = 0$ entsteht im Druckgradienten eine Singularität, sodass es notwendig ist die Grenzschicht in eine viskose Subgrenzschicht in der Nähe der Oberfläche sowie eine Hauptgrenzschicht aufzuteilen.

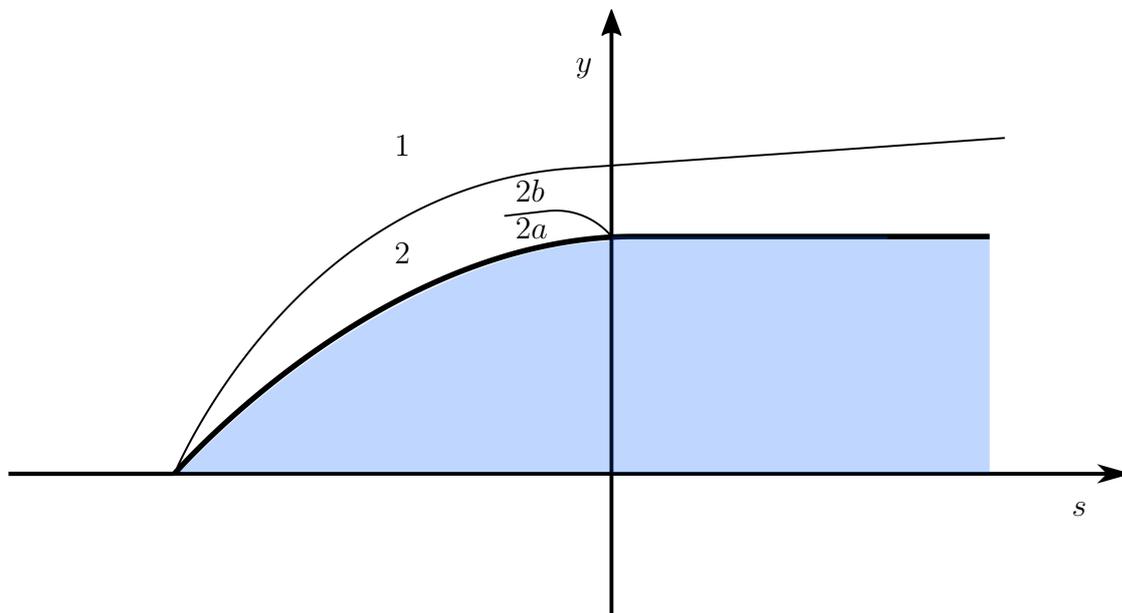


Abbildung 4: Grenzschichten

4.2 Viskose Subgrenzschicht

Um eine Abschätzung über die Größenordnung der Geschwindigkeitsterme zu bekommen, reicht es aus die einzelnen Terme der x -Bewegungsgleichung (4.17a) zu vergleichen. Dabei gilt

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial s} \sim \frac{\partial P_1}{\partial s} \sim \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} U_0(s, Y) &= U_{00}(Y) + sU_{01}(Y) + \dots, \\ V_0(s, Y) &= V_{00}(Y) + sV_{01}(Y) + \dots \end{aligned} \right\} \text{für } s \rightarrow 0. \quad (4.21)$$

In Körperrnähe zeigen die Terme der führenden Ordnung in Gleichung (4.21) folgendes Verhalten

$$\left. \begin{aligned} U_{00}(Y) &= \lambda Y + \dots, \\ V_{00}(Y) &= O(Y^2) + \dots \end{aligned} \right\} \text{für } Y \rightarrow 0. \quad (4.22)$$

Nach Einsetzen von (4.22) und (4.21) in (4.20) erhält man

$$Y \frac{\partial U_1}{\partial s} \sim \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2}. \quad (4.23)$$

Umformuliert in Finite Differenzen ergibt sich

$$Y \frac{\Delta U_1}{\Delta s} \sim \frac{\Delta U_1}{Y^2}. \quad (4.24)$$

Damit erhält man eine Abschätzung für die Größenordnung von Y , nämlich

$$Y \sim (-s)^{1/3}. \quad (4.25)$$

Um eine Abschätzung für U_1 zu erhalten setzen wir (4.25) und (4.19) in (4.20) ein:

$$U_1 \sim (-s)^{2/3} - (-s)^{2/3} \ln(-s). \quad (4.26)$$

Die Kontinuitätsgleichung (4.17c) ermöglicht es uns die Stromfunktion $\Psi_1(x, Y)$ einzuführen, die der folgenden Definition genügt:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} = -V_1, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = U_1 \quad (4.27)$$

Integration der rechten Seite von (4.27) liefert

$$\Psi_1 \sim U_1 Y. \quad (4.28)$$

(4.26) und (4.25) eingesetzt in (4.28) liefert

$$\Psi_1 = O[(-s) - (-s) \ln(-s)]. \quad (4.29)$$

Als nächstes bringen wir Ψ_1 in die Form

$$\Psi_1(s, Y) = [(-s) - (-s) \ln(-s)] g_1(\xi) + \dots \quad \text{für } s \rightarrow 0-, \quad (4.30a)$$

$$\xi = \frac{Y}{(-s)^{1/3}}. \quad (4.30b)$$

U_0 und V_0 werden durch die Gleichungen (4.22) und (4.21) bestimmt, U_1 und V_1 erhält man durch Einsetzen von (4.30a) in (4.27).

$$\begin{aligned} U_0 &= \lambda Y + \dots = \lambda(-s)^{1/3} \xi + \dots \\ V_0 &= O[(-s)^{2/3}] \\ U_1 &= [(-s)^{2/3} - (-s)^{2/3} \ln(-s)] g_1'(\xi) + \dots, \\ V_1 &= -\ln(-s) g_1(\xi) - \frac{1}{3} \xi [1 - \ln(-s)] g_1'(\xi) + \dots \end{aligned} \quad (4.31)$$

Einsetzen von (4.31) und (4.19) in (4.17a) führt auf

$$g_1'''(\xi) - \frac{1}{3} \lambda \xi^2 g_1''(\xi) + \lambda \xi g_1'(\xi) - \lambda g_1(\xi) = -2 \frac{\tau_0}{\pi} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}. \quad (4.32)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten.

Aus der Haftbedingung ($U_1 = 0, V_1 = 0$) folgt

$$g_1(0) = 0, \quad g_1'(0) = 0. \quad (4.33)$$

Die dritte Randbedingung besteht aus der Forderung, dass $g_1(\xi)$ kein exponentielles Wachstum aufweisen darf, da sich ansonsten die Gebiete 2a und 2b nicht mehr

„matchen“ lassen. Außerdem erhält man aus $\xi = 0$ in Gleichung (4.32)

$$g_1'''(0) = -2 \frac{\tau_0 \varepsilon^2 - 1}{\pi \varepsilon}. \quad (4.34)$$

Als nächstes differenzieren wir (4.32) nach ξ . Daraus folgt

$$g_1^{(4)}(\xi) - \frac{1}{3} \lambda \xi^2 g_1'''(\xi) + \frac{1}{3} \lambda \xi g_1''(\xi) = 0. \quad (4.35)$$

Durch Substitution von $g_1''(\xi) = h_1(\xi)$ erhält man

$$h_1''(\xi) - \frac{1}{3} \lambda \xi^2 h_1'(\xi) + \frac{1}{3} \lambda \xi h_1(\xi) = 0. \quad (4.36)$$

Eine weitere Substitution mit der Variablen $z = \frac{1}{9} \lambda \xi^3$ führt auf

$$z \frac{d^2 h_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{2}{3} - z \right) \frac{dh_1(z)}{dz} + \frac{1}{3} h_1(z) = 0. \quad (4.37)$$

Dies ist eine „Confluente Hypergeometrische Differentialgleichung“. Diese hat die allgemeine Form

$$z \frac{d^2 h_1(z)}{dz^2} + (b - z) \frac{dh_1(z)}{dz} - ah_1(z) = 0. \quad (4.38)$$

Die Gleichung (4.34) nimmt die Form

$$\frac{dh_1}{dz} = -2 \frac{\tau_0 \varepsilon^2 - 1}{\pi \varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{3\lambda}} z^{-2/3}, \quad \text{für } z \rightarrow 0 \quad (4.39)$$

an. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung (4.38) ist eine Linearkombination aus der Kummer-Funktion $M(a, b; z)$ und der Tricomi-Funktion $U(a, b; z)$.

$$h_1 = C_1 M(a, b; z) + C_2 U(a, b; z) \quad (4.40)$$

Die Kummer-Funktion ist im Punkt $z = 0$ regulär, besitzt aber für $z \rightarrow \infty$ ein exponentielles Wachstum, weshalb $C_1 = 0$ gesetzt werden muss. Die Tricomi-Funktion weist dagegen ein algebraisches Verhalten bei großen Werten von z auf:

$$U(a, b; z) = z^{-a} [1 + O(z^{-1})] \quad \text{für } z \rightarrow \infty \quad (4.41)$$

In der Nähe von $z = 0$ kann die Funktion durch folgende asymptotische Reihe repräsentiert werden:

$$U(a, b; z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + O(z) \quad \text{für } z \rightarrow 0 \quad (4.42)$$

Γ steht hier für die Eulersche Gammafunktion.

Ein Vergleich von (4.38) mit (4.37) ergibt:

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3} \quad (4.43)$$

(4.43), (4.42) und (4.40) ergeben

$$\begin{aligned} h_1 &= C_2 \left[\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(0)} + \frac{\Gamma(-1/3)}{\Gamma(-1/3)} z^{1/3} + O(z) \right] \\ &= C_2 z^{1/3}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Wenn man (4.44) in (4.39) einsetzt, erhält man

$$C_2 = 6 \frac{\tau_0}{\pi} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{3\lambda}}. \quad (4.45)$$

Einsetzen von (4.45) in (4.40) liefert

$$h_1(\xi) = g_1''(\xi) = \frac{6\tau_0(\varepsilon^2 - 1)}{\pi\varepsilon\sqrt[3]{3\lambda}} U\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{\lambda}{9}\xi^3\right). \quad (4.46)$$

Um das Verhalten von $g_1(\xi)$ für große Werte von ξ bestimmen zu können setzen wir (4.41) in (4.46) ein. Wir erhalten

$$g_1''(\xi) = \frac{6\tau_0(\varepsilon^2 - 1)}{\pi\varepsilon\sqrt[3]{3\lambda}} \left(\frac{\lambda}{9}\right)^{1/3} \xi + \dots, \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty. \quad (4.47)$$

Abschließend wird (4.47) von (4.46) subtrahiert und sofort wieder addiert. Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (4.33) liefert

$$\begin{aligned} g_1'(\xi) &= \frac{6\tau_0(\varepsilon^2 - 1)}{\pi\varepsilon\sqrt[3]{3\lambda}} \left(\int_0^\xi U\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{\lambda}{9}\xi^3\right) - \left(\frac{\lambda}{9}\right)^{1/3} \right) d\xi \\ &\quad + \frac{\tau_0(\varepsilon^2 - 1)}{\pi\varepsilon} \xi^2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Für große Werte von ξ können wir $g_1'(\xi)$ als asymptotische Reihe formulieren.

$$g_1'(\xi) = A_0 \xi^2 + A_1 + \dots, \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty \quad (4.49)$$

Für die 2 Konstanten gilt

$$A_0 = \frac{\tau_0(\varepsilon^2 - 1)}{\pi\varepsilon},$$

$$A_1 = \frac{6\tau_0(\varepsilon^2 - 1)}{\pi\varepsilon\sqrt[3]{3\lambda}} \left(\int_0^\infty U\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{\lambda}{9}\xi^3\right) - \left(\frac{\lambda}{9}\right)^{1/3} \right) d\xi. \quad (4.50)$$

Erneute Integration liefert

$$g_1(\xi) = \frac{A_0}{3}\xi^3 + A_1\xi + \dots \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty. \quad (4.51)$$

Rechnet man A_1 aus erhält man einen Wert, der gegen Unendlich strebt. Um ein sinnvolles Ergebnis für $g_1(\xi)$ zu erhalten muss man A_1 dementsprechend weglassen und man erhält als Ergebnis

$$g_1(\xi) = \frac{A_0}{3}\xi^3 \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty. \quad (4.52)$$

Die Bestimmung von (4.32) mittels Mathematica™ liefert dasselbe Ergebnis.

Hauptgrenzschicht

Einsetzen von (4.52) und (4.49) in (4.31) liefert

$$U_1 = [(-s)^{2/3} - (-s)^{2/3} \ln(-s)] A_0 \xi^2 + \dots,$$

$$V_1 = -\frac{A_0}{3} \xi^3 + \dots \quad (4.53)$$

Gleichung (4.53) ist im Überlappungsbereich zwischen Region 2a und 2b gültig. Wenn man (4.30b) in (4.53) einsetzt erhält man

$$U_1 = -A_0 Y^2 \ln(-s) + \dots,$$

$$V_1 = -\frac{1}{3} (-s)^{-1} A_0 Y^3 + \dots \quad (4.54)$$

Diese Gleichungen können auch folgendermaßen formuliert werden

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \ln(-s) U_{11}(Y) + \dots, \\ V_1 &= (-s)^{-1} V_{11}(Y) + \dots \end{aligned} \right\} \text{für } s \rightarrow 0-. \quad (4.55)$$

Vergleicht man Gleichung (4.54) und (4.55) folgt daraus

$$\left. \begin{aligned} U_{11}(Y) &= -A_0 Y^2 + \dots, \\ V_{11}(Y) &= -\frac{1}{3} A_0 Y^3 + \dots \end{aligned} \right\} \text{für } Y \rightarrow 0. \quad (4.56)$$

Einsetzen von (4.55), (4.21) und (4.19) in (4.17) liefert

$$U_{00} U_{11} + V_{11} U'_{00} = 0 \quad \text{x-Bewegungsgleichung} \quad (4.57a)$$

$$U_{11} + V'_{11} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (4.57b)$$

Die Kontinuitätsgleichung (4.57b) liefert $U_{11} = V'_{11}$. Setzt man dies in die x-Bewegungsgleichung (4.57a) ein, erhält man

$$U_{00} V'_{11} - U'_{00} V_{11} = 0,$$

$$\frac{V'_{11}}{U_{00}} - \frac{V_{11}}{U_{00}^2} U'_{00} = 0,$$

$$\frac{d}{dY} \left(\frac{V_{11}}{U_{00}} \right) = 0.$$

Daraus resultiert, dass das Verhältnis V_{11}/U_{00} innerhalb der Region $2b$ konstant bleibt:

$$\frac{V_{11}}{U_{00}} = \textit{konst.} \quad (4.58)$$

Gleichung (4.22) und (4.56) in (4.58) eingesetzt ergibt

$$\textit{konst.} = -\frac{A_0}{3\lambda} Y^2 \quad (4.59)$$

Dies führt auf ein widersprüchliches Ergebnis, da der Ausdruck $\frac{V_{11}}{U_{00}} = -\frac{A_0}{3\lambda} Y^2$ eindeutig eine Funktion von Y darstellt und dementsprechend nicht konstant ist.

Bestimmung der Schichtstruktur des triple decks

Im Folgenden wird die Schichtstruktur des triple decks bestimmt. Der Winkel der Stromlinie entlang der Grenzschicht beträgt

$$\vartheta = \arctan \frac{v}{u}. \quad (4.60)$$

Einsetzen von (4.16) unter Berücksichtigung kleiner Werte von $\frac{v}{u}$ liefert

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{Re^{-1/2} V_0 + \gamma Re^{-1/2} V_1 + \dots}{U_0 + \gamma U_1 + \dots} \\ &= Re^{-1/2} \left[\frac{V_0}{U_0} + \gamma \left(\frac{V_1}{U_0} - \frac{V_0}{U_0^2} U_1 \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.61)$$

Da nur der zweite Term die Interaktion zwischen der reibungsfreien Außenströmung und der viskosen Grenzschicht auslösen kann, hat der erste Term keine Bedeutung. Dementsprechend gilt

$$\vartheta = \gamma Re^{-1/2} \left(\frac{V_1}{U_0} - \frac{V_0}{U_0^2} U_1 \right) + \dots \quad (4.62)$$

Am äußeren Rand der viskosen Unterschicht (Region 2a) gelten die Gleichungen (4.31). Setzt man diese in (4.62) ein bei gleichzeitigem Grenzübergang $s \rightarrow 0-$ so bekommt man

$$\vartheta = \gamma Re^{-1/2} \left(-\frac{1}{\lambda Y} \ln(-s) g_1(\xi) - \frac{1}{3\lambda Y} \xi [1 - \ln(-s)] g_1'(\xi) \right) + \dots \quad (4.63)$$

An der Körperoberfläche gelten die Randbedingungen $g_1(0) = 0$, $g_1'(0) = 0$, siehe (4.33). Dementsprechend gilt $\vartheta = 0$. Am oberen Ende von Region 2a nehmen g_1 und g_1' die Werte in Gleichung (4.49) und (4.52) an. Daraus folgt

$$\vartheta = -\gamma Re^{-1/2} \frac{A_0}{3} (-s)^{-1} Y^2 + \dots \quad (4.64)$$

Anschließend bleibt ϑ im Bereich der Hauptgrenzschicht (Region 2b) konstant. Setzt man für diese Schicht die Werte von U_0 , V_0 , U_1 und V_1 , siehe Gleichung (4.21) und (4.55), in (4.62) ein erhält man

$$\vartheta = \gamma Re^{-1/2} \left[(-s)^{-1} \cdot \frac{V_{11}}{U_{00}} \right] + \dots, \quad (4.65)$$

was mit Gleichung (4.64) und (4.59) übereinstimmt.

Vor der Einführung der viskosen Unterschicht führte die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung für den Druckgradienten auf Gleichung (4.19). In direkter Nähe des Ablösepunktes führt

der Verdrängungseffekt der Grenzschicht zu einer starken starken Störung des Druckgradienten. Die Tragflügeltheorie liefert mittels Gleichung (4.65), die das Verhalten von ϑ am „Boden“ der ungestörten Außenströmung beschreibt, die Störung des Drucks in der Form ⁴

$$p \sim \gamma Re^{-1/2} (-s)^{-1}. \quad (4.66)$$

Der Druckgradient lautet dementsprechend

$$\frac{dp}{ds} \sim \gamma Re^{-1/2} (-s)^{-2}. \quad (4.67)$$

Vergleicht man dies mit Gleichung (4.19) erhält man

$$\ln(-s) (-s)^2 = Re^{-1/2}. \quad (4.68)$$

Daraus folgt

$$|s| = O(e^{0,5W(2Re^{-1/2})}). \quad (4.69)$$

W beschreibt die Lambertsche W-Funktion $W(x)$, sie ist die Umkehrfunktion von $f : x \mapsto xe^x$.

Für $Re \rightarrow \infty$ nimmt s die Größenordnung 1 an. Dies ist ein direkter Widerspruch, da vorausgesetzt wurde, dass s sehr klein ist. Die Theorie des triple decks kann an dieser Stelle nicht angewendet werden, da diese nur für kleine Längen gültig ist.

⁴Vgl. Ruban A. I., *Fluid Dynamics Part 3: Boundary Layers*, S.290.

5 Schlussfolgerung

5.1 Zusammenfassung der Probleme

Wider Erwarten führte die obige Vorgehensweise zum Scheitern bei der Beantwortung der Frage, für welchen Krümmungsparameter ε Strömungsablösung auftritt. Mit dafür verantwortlich ist der logarithmische Druckgradient, siehe (4.19). Dieser sorgte dafür, dass der Term für die horizontale Geschwindigkeit U_1 ebenfalls ein logarithmisches Verhalten aufweist. Zusätzlich sorgt er dafür, dass die Länge des triple decks die Größenordnung 1 erhält, was der gängigen Theorie des triple decks widerspricht, die nur kleine Abmessungen vorsieht. In vielen Fällen weist das triple deck die Größenordnung $Re^{-1/3}$ auf, was dafür verwendet wurde, um eine für Gleichung (4.12) verwendete untere Schranke für ε zu definieren um die Taylorreihe zu erfüllen. Ebenso spielte die Lösung der Differentialgleichung für $g_1(\xi)$, (4.32), eine Rolle. Die hohe Potenz von ξ sorgt dafür, dass die Gleichung (4.58) nicht erfüllt werden kann.

Letztendlich hat sich gezeigt, dass der hier gewählte Ansatz für dieses Problem nicht zum Erfolg führt, obwohl die Eckströmung, die einen der zwei Grenzfälle darstellt, auf diese Weise behandelt werden kann und es daher logisch erschien, dass dies auch für den allgemeineren Fall mit einem endlichen Krümmungssprung gelten sollte.

5.2 Ausblick

Im letzten Abschnitt wurden Probleme aufgezeigt, die es im Rahmen der vorliegenden Arbeit unmöglich machen, die ursprüngliche Fragestellung, für welchen Wert von k Strömungsablösung auftritt, zu beantworten. Zum Abschluss möchte ich an dieser Stelle noch einen Ansatz aufzeigen, der zur entsprechenden Lösung führen könnte.

Mithilfe der Bernoulli-Gleichung erhält man im Gebiet der Außenströmung für den Druck an der Körperoberfläche

$$p_{0w} = \frac{1 - u_{0w}^2}{2}. \quad (5.1)$$

p_{0w} und u_{0w} sind der Druck bzw. die Geschwindigkeit an der Körperoberfläche. Differentiation nach x liefert

$$p'_{0w} = -u_{0w} u'_{0w}. \quad (5.2)$$

Setzt man (3.21) in (5.2) ein, ersetzt ε durch $\delta = 1 - \varepsilon \ll 1$, sowie x durch $x = s + 1$ und führt eine doppelte Entwicklung für τ und δ durch, erhält man

$$p'_{0w}(s) = \tau \left\{ \frac{3}{\pi} - \left(\frac{8}{\pi} + \frac{\ln(256)}{2\pi} + \frac{4 \ln(|s|)}{\pi} \right) \delta + \left[\frac{3}{\pi} + \frac{6 \ln(|s|)}{\pi} - \left(\frac{3}{\pi} + \frac{\ln(4096)}{\pi} + \frac{18 \ln(|s|)}{\pi} \right) \delta \right] s \right\}. \quad (5.3)$$

Abbildung 5 zeigt den graphischen Verlauf von p'_{0w} für $\tau = 0,1$.

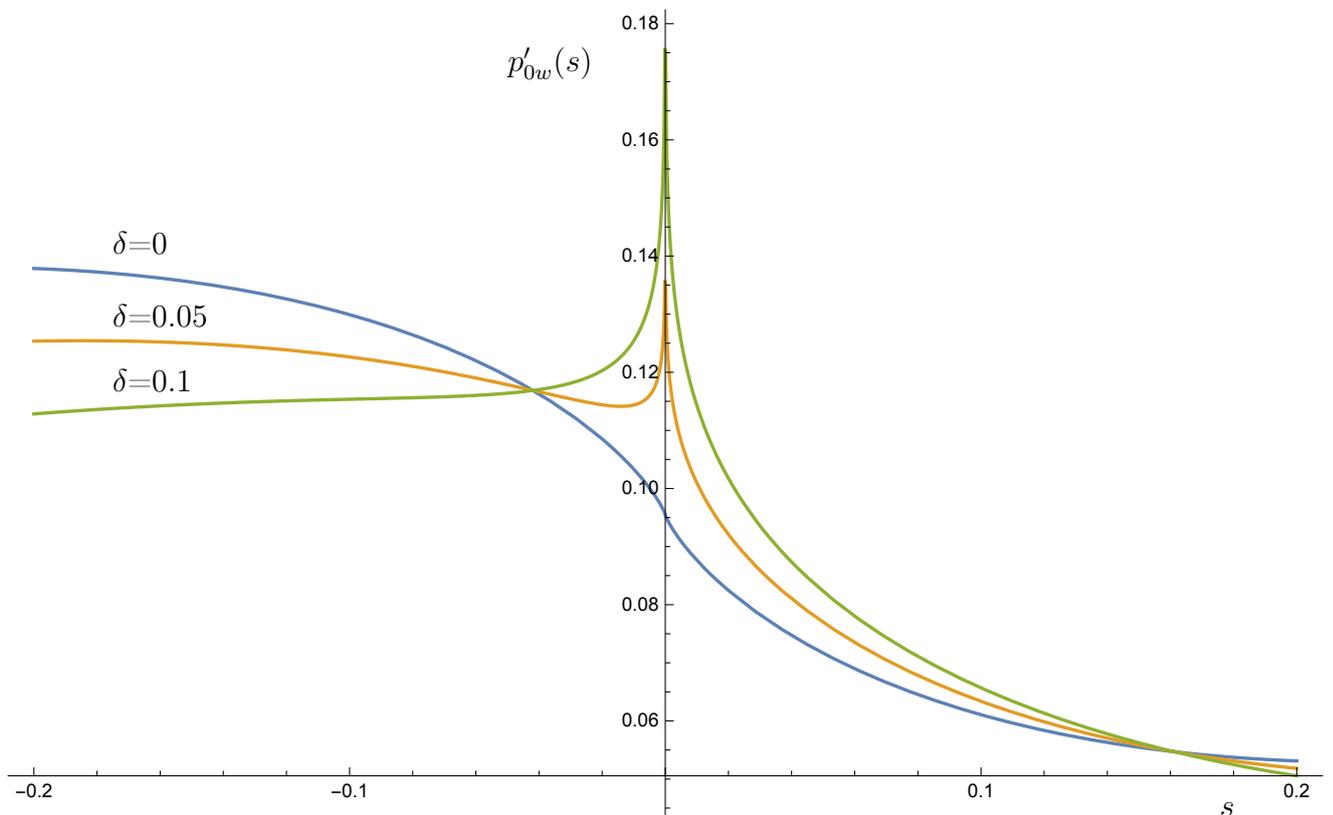


Abbildung 5: aufgeprägter Druckgradient

Man erkennt deutlich, dass der Druckgradient nur für $\delta = 0$ bzw. $\varepsilon = 1$ ein kontinuierliches Verhalten aufweist und der auf die Grenzschicht aufgeprägte Druckgradient selbst bei einem kleinen Krümmungssprung singulär wird. Für $s \rightarrow 0$ nimmt der Druckgradient in führender Ordnung die Form

$$p'_{0w} = -\tau \frac{4 \ln(|s|)}{\pi} \delta \quad (5.4)$$

an. Vergleicht man Gleichung (5.4) mit (4.19)

$$\frac{dP_1(s)}{ds} = \frac{2\tau_0}{\pi} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \cdot \ln(-s) + \dots, \quad s \rightarrow 0-,$$

setzt $\varepsilon = 1 - \delta$ ein und entwickelt nach kleinen δ erhält man

$$\frac{dP_1(s)}{ds} = -\frac{4\tau_0}{\pi} \delta \ln(-s) + \dots, \quad s \rightarrow 0-. \quad (5.5)$$

Daraus folgt, dass solange s klein ist p'_{0w} vergleichbar mit $\gamma P'_1$ aus Abschnitt 4 ist. Nimmt man (4.16), ändert den Druck in der Form

$$p(x, y, Re) = P_0(x, Y) + \gamma P_1(x, Y)$$

und setzt dies in die x-Bewegungsgleichung (2.4a) ein, erhält man in führender Ordnung (γ^0) die Grenzschichtgleichung

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial s} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial Y} = -\frac{\partial P_0}{\partial s} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2}. \quad (5.6)$$

An dieser Stelle gilt: $\frac{\partial P_0}{\partial s} = p'_{0w}(s)$. Es ist wichtig anzumerken, dass aufgrund des veränderten Ansatzes P_1 und dementsprechend P'_1 nicht mit den entsprechenden Werten aus Abschnitt 4 vergleichbar sind.

Führt man die Stromfunktion Ψ_0 mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial s} = -V_0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} = U_0 \quad (5.7)$$

ein, siehe (4.27), und setzt diese in die Grenzschichtgleichung (5.6) ein, erhält man

$$\Psi_{0Y} \Psi_{0Ys} - \Psi_{0s} \Psi_{0YY} = -\frac{\partial P_0}{\partial s} + \Psi_{0YYY}. \quad (5.8)$$

Als nächsten Schritt muss für $\Psi_0(s, \xi)$ ein Ansatz gewählt werden, der in (5.8) die s-Abhängigkeit der einzelnen Terme eliminiert. Es wird der allgemeine Ansatz

$$\Psi_0(s, \xi) = g(s) f(\xi), \quad \xi = Y/h(s) \quad (5.9)$$

gewählt.

Einsetzen von (5.9) und (5.4) in (5.8) führt auf die Differentialgleichung

$$[g'(s)h(s) - g(s)h'(s)]f'^2(\xi) - g'(s)h(s)f(\xi)f''(\xi) = -\ln(|s|)\frac{h^3(s)}{g(s)} + f'''(\xi). \quad (5.10)$$

Damit die s -Abhängigkeit dieser Gleichung verschwindet müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$g'(s)h(s) - g(s)h'(s) = c_1 \quad (5.11a)$$

$$g'(s)h(s) = c_2 \quad (5.11b)$$

$$\frac{h^3(s)}{g(s)} \ln(|s|) = c_3 \quad (5.11c)$$

c_1 , c_2 und c_3 sind Konstanten. Setzt man (5.11b) in (5.11c) ein, erhält man

$$\frac{\ln(|s|)}{g(s)g^3(s)} = \text{konst.} \quad (5.12)$$

Als nächstes muss eine Lösung für $g(s)$ in Gleichung (5.12) gefunden werden. Obwohl $g(s)$ Gleichung (5.12) nicht exakt sondern nur asymptotisch erfüllen muss, erweist es sich als äußerst schwierig eine entsprechende Lösung für $g(s)$ zu finden. Es ist möglich, dass der in Gleichung (5.9) gewählte Ansatz nicht allgemein genug ist und eine neue Variable ζ eingeführt werden muss. Der neue Ansatz⁵ für Ψ_0 lautet dann

$$\Psi_0(s, \xi) = g(s)f(\xi, \zeta), \quad \zeta = \zeta(s). \quad (5.13)$$

Dieser neue allgemeinere Ansatz könnte es ermöglichen eine Lösung für die Frage, ab welchem Parameter ε , bzw. k Strömungsablösung auftritt, zu finden. An dieser Stelle werde ich die Arbeit abschließen. Für den Fall, dass sich in Zukunft eine andere Person an diesem Problem versucht, sollte die vorliegende Arbeit als gute Anleitung dienen, die dann hoffentlich zur Lösung führt.

⁵Vgl. Hocking L. M., Stewartson K., Stuart J. T., *A nonlinear instability burst in plane parallel flow*, J. Fluid Mech.(1972), vol.51, part 4, pp. 705-735.

Literatur

- [1] Vodinská J., *Classical Boundary Layer Behavior in the Vicinity of a Curvature Jump of the Wall Contour*, Master thesis, TU Wien, 2014.
- [2] Kuhlmann H. C., Kluwick A., *Strömungsmechanik 2*, Vorlesungsskriptum, Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung, TU Wien 2014.
- [3] Ruban A. I. , *Fluid Dynamics, Part 2: Asympotic Problems of Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 2015.
- [4] Ruban A. I., *Fluid Dynamics Part, 3: Boundary Layers*, Oxford University Press, 2018.
- [5] Braun S. , *Boundary Layer Theory*, Vorlesungsskriptum, Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung, 2017.