



DIPLOMARBEIT

# Backtesting VaR, ES und AVaR: Ein Vergleich, verschiedene Methoden und Ansätze

Ausgeführt am  
Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von  
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch  
Stoja Stanivuk, BSc

---

Datum

---

Unterschrift

# Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Risikomaße Value-at-Risk (VaR), Expected Shortfall (ES), und der erst kürzlich eingeführte Lambda-Value-at-Risk ( $\Lambda$ VaR) verglichen. Ein Schwerpunkt ist die einheitliche Darstellung von Ergebnissen aus der überaus heterogenen neueren Forschungsliteratur zu dem Thema.

Nach einer kurzen allgemeinen Einleitung über Risikomaße und ihre Eigenschaften werden die drei betrachteten Risikomaße definiert und die Spezifikationen, Schätzung und Berechnungsmethoden für den  $\Lambda$ VaR diskutiert.

Im Hinblick auf das Backtesting (Rückvergleich) von Risikomaßen wird dann die Theorie der Elizitierbarkeit und der spektralen Risikomaße dargestellt.

Im Hauptteil der Arbeit werden die mittlerweile klassischen Tests aus dem Backtesting von VaR, mehrere Ansätze zum (umstrittenen) Backtesting von Expected Shortfall, und neue Vorschläge von Corbetta, Hitaj und Peri zum Backtesting des  $\Lambda$ VaR gegenübergestellt.

Im letzten Abschnitt enthält eine eigenständige Implementierung im R-System zur Berechnung der Risikomaße und speziell des  $\Lambda$ VaR sowie eine empirische Untersuchung für 12 Aktien aus sechs verschiedenen Ländern, in der es gelingt Resultate von Hitaj und Peri weitgehend zu reproduzieren bzw. bestätigen.

## Abstract

The present thesis compares risk measures Value-at-Risk (VaR), Expected Shortfall (ES) and the recently introduced Lambda-Value-at-Risk ( $\Lambda$ VaR). Emphasis is put on a consistent presentation of results from the rather heterogenous recent research literature of this topic.

After a short general introduction on risk measures the three relevant risk measures are defined and specification, estimation and methods for calculating the  $\Lambda$ VaR are discussed.

In view of backtesting of risk measures the theory of elicibility and spectral risk measures is then recapitulated.

The main part of this work consists of a comparison of the (by now classical) test for backtesting the VaR, several approaches for the (disputed) backtesting of expected shortfall, and new suggestions of Corbetta, Hitaj and Peri for backtesting  $\Lambda$ VaR.

The last part of the thesis contains an independent implementation for calculating risk measures and in particular  $\Lambda$ VaR using the R system, and an empirical investigation involving 12 stocks from six countries that essentially confirms recent results of Hitaj and Peri.

## Danksagung

Ein herzliches Dankeschön möchte ich hiermit allen aussprechen, die mich während meines Studiums und bei der Anfertigung meiner Masterarbeit unterstützt haben.

Ganz besonders möchte ich mich zunächst bei meinem Betreuer Friedrich Hubalek bedanken, zum einen für den Themenvorschlag dieser Masterarbeit und zum anderen für seine Zeit und seine Betreuung sowie die Korrekturlesung meiner Arbeit.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht und finanziert haben, und mich in all meinen Entscheidungen unterstützt haben.

Abschließend danke ich allen meinen lieben Freunden für die Ausdauer, Ruhe und Geduld, womit sie mir stets zur Seite standen und mich immer wieder aufgemuntert haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
1.1. Risikomaße	1
1.2. Value at Risk	3
1.3. Expected Shortfall	7
1.4. Lambda Value at Risk	8
1.4.1. Definition und Eigenschaften	8
1.4.2. $\Lambda$ VaR Spezifikation und Schätzung	9
1.4.3. $\Lambda$ VaR: mathematische Beschreibung und Berechnung	11
<b>2. Elizitierbarkeit</b>	<b>14</b>
2.1. Einführung	14
2.2. Theorie der Elizitierbarkeit	14
2.3. Stochastische Ordnung auf $\mathcal{X}$	16
2.4. Eigenschaften	18
2.5. Expektile	25
2.6. Bedingte Elizitierbarkeit	28
<b>3. Spektrale Risikomaße</b>	<b>29</b>
3.1. Value at Risk und spektrales Risikomaß	29
3.2. Anwendung auf Expected Shortfall	35
<b>4. Backtesting</b>	<b>37</b>
4.1. Backtesting VaR	38
4.1.1. Test von Kupiec	39
4.1.2. Unabhängigkeitstest	40
4.1.3. Test von Christoffersen	42
4.2. Backtesting Expected Shortfall	45
4.2.1. Ansatz von Acerbi & Szekely	45
4.2.2. Ansatz von Constanzino & Curran	48
4.2.3. Ansatz von Wong	50
4.3. Backtesting $\Lambda$ VaR	53
4.3.1. 1. Ansatz: Testabdeckung	53
4.3.2. 2. Ansatz: asymptotische Testabdeckung	54
4.3.3. 3. Ansatz: genaue Abschätzung	56
4.4. Behauptung von Gneiting	58
<b>5. Empirische Analyse</b>	<b>59</b>
5.1. Daten	59
5.2. $\Lambda$ VaR & VaR-Vergleich	62
5.3. Backtesting Resultate	69
<b>Anhang</b>	<b>71</b>

<b>A. Beispiel Lambda VaR berechnen.R</b>	<b>71</b>
<b>B. Reaktivität von Riskomaßen</b>	<b>72</b>
B.1. Microsoft.R . . . . .	72
B.2. RoyalBank.R . . . . .	75
B.3. Enel.R . . . . .	78
<b>C. Beschreibende Statistik.R</b>	<b>81</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>85</b>

# 1. Einführung

## 1.1. Risikomaße

In diesem Kapitel folgen wir der Darstellung und Notation des Lehrbuchs von Föllmer und Schied [13, Kapitel 4.1].

Sei  $\Omega$  eine Menge von Szenarios für finanzielle Entwicklungen. Wir beschreiben Finanzpositionen durch Abbildungen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei ist  $X(\omega)$  der diskontierte Wert der Finanzposition am Ende des betrachteten Zeitintervalls, wenn das Szenario  $\omega$  eintritt.

Zunächst nehmen wir nicht an, dass auf  $\Omega$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert ist. Später werden wir Finanzpositionen als Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  modellieren.

Sei  $\mathcal{X}$  ein gegebener linearer Raum, der alle zur Verfügung stehende Finanzpositionen und alle konstanten Abbildungen (die wir mit den Zahlen  $m \in \mathbb{R}$  identifizieren) enthält.

Ein Risikomaß ist eine Abbildung  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $\rho(m) < \infty$ . Die Zahl  $\rho(X)$  quantifiziert also das Risiko einer Finanzposition  $X \in \mathcal{X}$ .

### Eigenschaften eines Risikomaßes

(M) Monotonie:  $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$ .

(T) Translationsinvarianz / Cash-Invarianz:  $\rho(X + m) = \rho(X) - m$

(C) Konvexität:  $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$

(S) Subadditivität:  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

(PH) positive Homogenität:  $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ .

### **Definition (Risikomaße)**

1) Erfüllt die Abbildung  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  die Axiome (M) und (T), so heißt das Risikomaß  $\rho$  monetär.

2) Gelten die Axiome (M), (T) und (C), dann heißt  $\rho$  ein konvexes Risikomaß.

3) Gelten die Axiome (M), (T), (S) und (PH), dann heißt  $\rho$  ein kohärentes Risikomaß.

### **Definition**

Sei  $\rho$  ein monetäres Risikomaß. Die entsprechende Akzeptanzmenge ist wie folgt definiert:  $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0\}$ .

Sei umgekehrt eine nichtleere Menge  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$  gegeben. Dann kann man ein entsprechendes Risikomaß  $\rho_{\mathcal{A}}$  durch  $\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\}$  für  $X \in \mathcal{X}$  definieren.

### Satz

Für ein monetäres Risikomaß  $\rho$  und seine Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}$  gilt:

- (1)  $\rho$  ist konvex  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  ist konvex.
- (2)  $\rho$  ist positiv homogen  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  ist ein Kegel, d.h.  $X \in \mathcal{A}, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda X \in \mathcal{A}$ .
- (3)  $\rho$  ist kohärent  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  ist ein konvexer Kegel.

### BEWEIS

(1) Sei  $\rho$  konvex. Seien  $X, Y \in \mathcal{A}, \lambda \in [0, 1]$ .

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \leq 0.$$

Da  $\rho(X) \leq 0$  und  $\rho(Y) \leq 0 \Rightarrow \lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{A}$ .

Sei  $\mathcal{A}$  konvex,  $X, Y \in \mathcal{A}, \lambda \in [0, 1]$ .

$\Rightarrow X + \rho(X), Y + \rho(Y) \in \mathcal{A}$  und damit  $\lambda(X + \rho(X)) + (1 - \lambda)(Y + \rho(Y)) \in \mathcal{A}$ .

Wegen der Translationsinvarianz gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \rho\left(\lambda(X + \rho(X)) + (1 - \lambda)(Y + \rho(Y))\right) \\ &= \rho\left(\lambda X + (1 - \lambda)Y + (\lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y))\right) \\ &= \rho\left((\lambda X + (1 - \lambda)Y) - (\lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y))\right) \end{aligned}$$

Also gilt:  $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \Rightarrow \rho$  ist konvex.

(2)

„ $\Rightarrow$ “

Sei  $\rho$  positiv homogen. Sei  $X \in \mathcal{A}, \lambda \geq 0$ . Dann gilt:  $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \leq 0$  und daher  $\lambda X \in \mathcal{A}$ .

„ $\Leftarrow$ “

Sei  $\mathcal{A}$  ein Kegel,  $X \in \mathcal{X}, \lambda \geq 0$ . Dann ist  $X + \rho(X) \in \mathcal{A}$  und wegen der Kegeleigenschaft ist  $\lambda(X + \rho(X)) = \lambda X + \lambda\rho(X) \in \mathcal{A}$ .

Daher folgt mit der Translationsinvarianz  $\rho(\lambda X + \lambda\rho(X)) = \rho(\lambda X) - \lambda\rho(X) \leq 0$ .

$\Rightarrow \rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X)$ .

Sei  $X \in \mathcal{X}, \epsilon > 0, \lambda > 0$ . Dann ist  $\rho(X) > \rho(X) - \epsilon$  und wegen der Translationsinvarianz gilt:  $0 < \rho(X) - (\rho(X) - \epsilon) = \rho(X + \rho(X) - \epsilon)$ .



Daher ist  $X + (\rho(X) - \epsilon) \notin \mathcal{A}$ .

Aufgrund der Kegeleigenschaft ist  $\lambda(X + (\rho(X) - \epsilon)) \notin \mathcal{A}$ . Daher ist

$$0 < \rho(\lambda(X + (\rho(X) - \epsilon))) = \rho(\lambda X) - \lambda(\rho(X) - \epsilon) \Rightarrow \rho(\lambda X) > \lambda(\rho(X) - \epsilon).$$

Für  $\epsilon \downarrow 0$  folgt die Behauptung.

**(3)**

„ $\Rightarrow$ “

Sei  $\rho$  kohärent, das heißt konvex ( $\Rightarrow \mathcal{A}$  konvex) und positiv homogen ( $\Rightarrow \mathcal{A}$  Kegel). Daraus folgt  $\mathcal{A}$  ist ein konvexer Kegel.

„ $\Leftarrow$ “

Folgt analog wie oben.

□

Eines der verbreitetsten Risikomaße ist Value at Risk zum Konfidenzniveau  $\alpha \in (0, 1)$ .

## 1.2. Value at Risk

In diesem Abschnitt modellieren die Zufallsvariablen  $X$  Verluste.

Der VaR ist das am häufigsten verwendete Risikomaß in Finanzinstituten. Er hat eine herausragende Rolle im Basler Ausschuss für Bankenaufsicht und ist auch sehr einflussreich in Solvency II.

Wir betrachten ein Portfolio von riskanten Anlagen, einen festen Zeitrahmen  $\Delta t$  und bezeichnen durch  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  die Verteilungsfunktion des entsprechenden Verlustes. Wir wollen eine Statistik auf  $F_X$  definieren, die die Schwere des Risikos der Portfoliobestände über den Zeitrahmen  $\Delta t$  misst. Eine offensichtliche Möglichkeit ist den maximal möglichen Verlust zu betrachten, der durch  $\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 1\}$  beschrieben wird. Doch ist für unbeschränkte Finanzpositionen der maximale Verlust unendlich. Darüber hinaus wird durch den maximalen Verlust jede Wahrscheinlichkeitsinformation in  $F_X$  vernachlässigt. Die Idee hinter der Definition vom VaR ist, „den maximalen Verlust“ durch „den maximalen Verlust, der nicht mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit überschritten wird“ zu ersetzen.

Der Value at Risk oder der Wert im Risiko ist ein Risikomaß für eine Finanzposition, beispielsweise ein Portfolio von Wertpapieren. Der Value at Risk gibt an, welchen Wert der Verlust einer bestimmten Risikoposition mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit innerhalb einer gegebenen Zeitspanne nicht überschreitet.

Die Wertveränderung des Portfolios über den betrachteten Zeitraum werde mit der Zufallsvariablen  $X$  beschrieben, mit Verteilungsfunktion  $F_X$ . Der Value at Risk zu einem gegebenen Konfidenzniveau  $\alpha$  ist dann über die verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion wie folgt definiert:

**Definition (Value at Risk)**

Sei  $\alpha \in (0, 1)$  ein Konfidenzniveau. Der Value at Risk eines Portfolios mit einem Verlust  $X$  zum Konfidenzniveau  $\alpha$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha &= \text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X > x) \leq 1 - \alpha\} = \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

Der VaR ist die reelle Zahl, bei der die Verteilungsfunktion  $F_X$  den Wert  $\alpha$  erreicht oder überschreitet.

Der VaR ist einfach ein Quantil der Verlustverteilung. Typische Werte für  $\alpha$  sind  $\alpha = 0,95$  oder  $\alpha = 0,99$ . Im Marktrisiko beträgt der Zeitrahmen  $\Delta t$  meistens einen Tag oder 10 Tage, wobei  $\Delta t$  im Kreditrisiko oder bei operationellen Risiken meistens ein Jahr beträgt. Zu beachten ist auch, dass der VaR zum Konfidenzniveau  $\alpha$  keine Information über das Ausmaß der Schäden gibt, die mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit als  $1 - \alpha$  auftreten. Dies ist eindeutig ein Nachteil vom VaR als Risikomaß.

**Definition - Verallgemeinerte Inverse und Quantilfunktion**

(1) Gegeben sei eine wachsende Funktion  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; Die *verallgemeinerte Inverse* von  $T$  ist durch:  $T^{\leftarrow}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\}$  definiert.

Wir verwenden die Konvention, dass das Infimum der leeren Menge  $\infty$  ist.

(2) Sei  $F$  eine Verteilungsfunktion. Die verallgemeinerte Inverse  $F^{\leftarrow}$  wird Quantilfunktion von  $F$  genannt. Für  $\alpha \in (0, 1)$  ist das  $\alpha$ -Quantil von  $F$  durch:

$$q_\alpha(F) := F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$$

gegeben.

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F$  wird auch die Notation  $q_\alpha(X) := q_\alpha(F)$  verwendet. Wenn  $F$  stetig und strikt wachsend ist, hat man einfach  $q_\alpha(F) = F^{-1}(\alpha)$ , wobei  $F^{-1}$  die inverse Funktion von  $F$  ist.

Der Value at Risk zum Konfidenzniveau  $\alpha$  ist ein  $\alpha$ -Quantil der Verteilung der Wertveränderung einer Risikoposition über die Haltedauer. Er ist ein Downside-Risikomaß, das nur der Messung potenzieller Verluste dient, das heißt nur „das negative Ende“ der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird betrachtet.

**Bemerkung**

Man kann auch schreiben:  $\text{VaR}_\alpha(X) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq \alpha\}$ . In diesem Fall ist der VaR zum Konfidenzniveau  $\alpha$  einer Finanzposition  $X$  als ein  $\alpha$ -rechts-Quantil definiert.

**Bemerkung**

$\text{VaR}_\alpha(X)$  existiert als reelle Zahl für alle  $X$  und alle  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Satz**

Der Value at Risk ist monoton, translationsinvariant und positiv homogen, aber im Allgemeinen nicht subadditiv.

**BEWEIS**

**(M) Monotonie**

Für  $X, Y$  mit  $X \leq Y$  folgt:

$$\text{VaR}_\alpha(Y) = -\sup\{y \mid \mathbb{P}(Y \leq y) \leq \alpha\} \leq -\sup\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x) \leq \alpha\} = \text{VaR}_\alpha(X)$$

**(T) Translationsinvarianz**

Hier wird zu einer Risikoposition  $X$  ein sicherer Betrag  $a$  hinzugefügt: Für die resultierende Risikoposition erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X + a) &= -\sup\{x \mid \mathbb{P}(X + a \leq x) \leq \alpha\} \\ &= -\sup\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x - a) \leq \alpha\} \\ &= -\sup\{x + a \mid \mathbb{P}(X \leq x) \leq \alpha\} \\ &= -\sup\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x) \leq \alpha\} + a \\ &= \text{VaR}_\alpha(X) + a \end{aligned}$$

**(PH) Positive Homogenität**

Wir multiplizieren ein  $\lambda \geq 0$  mit einer Risikoposition  $X$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{VaR}_\alpha(\lambda X) &= -\sup\{x \mid \mathbb{P}(\lambda X \leq x) \leq \alpha\} \\
&= -\sup\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x\lambda^{-1}) \leq \alpha\} \\
&= -\sup\{\lambda x \mid \mathbb{P}(X \leq x) \leq \alpha\} \\
&= -\lambda \sup\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x) \leq \alpha\} \\
&= \lambda \text{VaR}_\alpha(X)
\end{aligned}$$

### (S) Subadditivität

Es lässt sich durch ein Gegenbeispiel zeigen, dass der VaR im Allgemeinen nicht subadditiv ist.

Seien  $X, Y$  zwei unabhängige Risikopositionen mit einem identischen Auszahlungsprofil. Beide Risikopositionen mögen mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% einen Wert von 0 bzw. mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% einen Verlust von 100 aufweisen. Es gilt also:

$$\text{VaR}_{0,95}(X) = \text{VaR}_{0,95}(Y) = \text{VaR}_{0,95}(X) + \text{VaR}_{0,95}(Y) = 0.$$

Die Zufallsvariable  $X + Y$  ist damit wie folgt verteilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y = 0) &= 0,96^2 = 0,9219, \\
\mathbb{P}(X + Y = 100) &= 2 \cdot 0,004 \cdot 0,96 = 0,0768, \\
\mathbb{P}(X + Y = 200) &= 0,04^2 = 0,0016.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{VaR}_{0,95}(X + Y) = 100 > 0 = \text{VaR}_{0,95}(X) + \text{VaR}_{0,95}(Y),$$

und damit ist die Bedingung der Subadditivität verletzt. □

Man beachte: Ein konvexes Risikomaß, das positiv homogen ist, ist auch kohärent. Die Gegenrichtung gilt auch: Jedes kohärente Risikomaß ist konvex.

### Beispiel

Der VaR ist nicht kohärent, weil er nicht subadditiv ist.

Er erfüllt  $(M)$ ,  $(T)$  und  $(PH) \Rightarrow$  der VaR ist im Allgemeinen nicht konvex. Er berücksichtigt nicht: HOW BAD IS BAD.

Wir haben gesehen, dass der VaR die Eigenschaft der Subadditivität nicht erfüllt. Darüber hinaus erfasst der VaR keine „Tail Risks“, d.h. er erkennt keine Verluste, die größer als seine Verlusthöhe sind. Das Portfoliorisiko in Bezug auf den VaR kann größer sein als die Summe der Risiken seiner Komponenten.

### 1.3. Expected Shortfall

#### Definition

Für eine Zufallsvariable  $X$  und ein  $\alpha \in (0, 1)$  ist die Conditional Tail Expectation definiert durch:

$$\text{CTE}_\alpha = -\mathbb{E}[X \mid X \leq -\text{VaR}_\alpha(X)].$$

#### Bemerkung

Es gilt auch:  $\text{CTE}_\alpha = \text{VaR}_\alpha(X) + \mathbb{E}[X - \text{VaR}_\alpha(X) \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]$ .

Die CTE entspricht dem Erwartungswert einer risikobehafteten Größe, die oberhalb des  $\alpha$  Quantils liegt. Die CTE gibt an, welche Abweichung bei einem Extremfall, d.h. bei Überschreitung des VaRs, zu erwarten ist. Die CTE berücksichtigt somit nicht nur die Wahrscheinlichkeit einer „großen“ Abweichung (Extremwerte), sondern auch die Höhe der darüber hinausgehenden Abweichung.

Falls die Zufallsvariable  $X$  eine stetige Verteilung besitzt, ist der Expected Shortfall (auch Conditional VaR genannt) monoton, subadditiv, positiv homogen und translationsinvariant, also kohärent.

#### Definition

Seien  $X$  eine Finanzposition mit  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$  und  $F_X$  eine Verteilungsfunktion. Der Expected Shortfall zum Konfidenzniveau  $\alpha \in (0, 1)$  ist wie folgt definiert:

$$\text{ES}_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_u(F_X) du,$$

wobei  $-q_u(F_X) = F_X^{\leftarrow}(u)$  die Quantilfunktion von  $F_X$  ist.

Also  $\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{\leftarrow}(\alpha)$  und falls  $F_X(x)$  in  $\text{VaR}_\alpha(X) = x$  stetig

$$\Rightarrow F_X(\text{VaR}_\alpha(X)) = \alpha.$$

In den meisten Fällen (Zufallsgrößen mit stetigen Dichten) sind der ES und die CTE identisch. Der ES ist eine sprungstellenfreie Variante der CTE.

Sie unterscheiden sich voneinander nur in der Menge  $\{\alpha \mid F_X(\text{VaR}(\alpha)) < \alpha\}$ .

$$\text{Insgesamt: } \text{VaR}_\alpha(X) \leq \text{ES}_\alpha(X) \leq \text{CTE}_\alpha(X).$$

Der Expected Shortfall steht im Zusammenhang mit dem Value at Risk:

$$\text{ES}_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_u(X) du.$$

Offensichtlich hängt der Expected Shortfall nur von der Verteilung der Finanzposition  $X$  ab und es gilt:  $\text{ES}_\alpha \geq \text{VaR}_\alpha$ .

## 1.4. Lambda Value at Risk

### 1.4.1. Definition und Eigenschaften

Das neue Risikomaß Lambda Value at Risk wurde aus theoretischer Sicht von Frittelli et al. (2014, [14]) eingeführt. Der Lambda Value at Risk ist eine Verallgemeinerung vom VaR zum Konfidenzniveau  $\alpha$ . Um den  $\Lambda\text{VaR}$  zu charakterisieren, betrachten wir eine monotone Funktion  $\Lambda$ , wobei  $F$  eine Verteilungsfunktion ist. Formal, definieren wir für

$$\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1) :$$

$$\Lambda \text{VaR}_\alpha(F) = -\sup\{m \in \mathbb{R} \mid F(x) \leq \Lambda(x), \forall x \leq m\}.$$

### Eigenschaften von $\Lambda\text{VaR}$

1)  **$\Lambda\text{VaR}$  ist verteilungs-invariant:** Falls zwei Finanzpositionen die gleiche Verteilung besitzen, dann haben sie auch das gleiche Risikoniveau bezüglich  $\Lambda\text{VaR}$ . Formal:

$$X \stackrel{d}{=} Y \Leftrightarrow \Lambda \text{VaR}_\alpha(X) = \Lambda \text{VaR}_\alpha(Y).$$

2)  $\Lambda \text{VaR}$  ist monoton in Verteilung:

$$F_X \leq F_Y \Leftrightarrow \Lambda \text{VaR}_\alpha(F_X) \leq \Lambda \text{VaR}_\alpha(F_Y).$$

3)  $\Lambda \text{VaR}$  ist quasi-konvex in Verteilung:

Seien  $F_X$  und  $F_Y, \forall \lambda \in [0, 1]$  gilt:

$$\Lambda \text{VaR}_\alpha(\lambda F_X + (1 - \lambda)F_Y) \leq \max(\Lambda \text{VaR}_\alpha(F_X), \Lambda \text{VaR}_\alpha(F_Y)).$$

4)  $\Lambda \text{VaR}$  ist  $\Lambda$ -Cash additiv:

Für jeden Barbetrag  $\beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\Lambda \text{VaR}_\alpha(F_{X+\beta}) = \Lambda^\beta \text{VaR}_\alpha(F_X) - \beta,$$

wobei  $\Lambda^\beta = \Lambda(x + \beta)$ .

5)  $\Lambda \text{VaR}$  ist elizitierbar.

Elizitierbarkeit wird ausführlich im Kapitel 2 behandelt.

### 1.4.2. $\Lambda \text{VaR}$ Spezifikation und Schätzung

Die Flexibilität vom  $\Lambda \text{VaR}$  beruht auf der Möglichkeit der relativ freien Wahl der Funktion  $\Lambda$ . Die Funktion  $\Lambda$  ist stetig auf ihrem Bildintervall  $[\lambda^m, \lambda^M]$  mit  $0 < \lambda^m \leq \lambda^M < 1$ , wobei  $\Lambda$  sowohl wachsend als auch fallend sein kann. Die Bestimmung der  $\Lambda$  Funktion erfolgt durch folgende vier Schritte:

1) **Bestimmung der Bildmenge  $[\lambda^m, \lambda^M]$ :**

Wir wählen  $\lambda^m$  als Minimumwert in der Nähe des Punktes 0. Genauer fixieren wir  $\lambda^m = 0,001$ . Gemäß dem Basler Ausschuss sollte das Konfidenzniveau  $\alpha$  für das neue Risikomaß unter 1% liegen; also,  $\lambda^M = 0,01$ .

## 2) Bestimmung der Richtung der Funktion $\Lambda$ (wachsend oder fallend):

Wir treffen diese Entscheidung bezüglich der Konjunkturentwicklungen. Im Falle von negativen Marktentwicklungen, sollte die wachsende  $\Lambda$  Funktion es ermöglichen, Negativszenarien zu erkennen. Im Gegensatz dazu ist die fallende  $\Lambda$  Funktion für eine Wachstumsphase geeignet. Sie erlaubt die Freisetzung des Kapitals und die Förderung von Investitionen.

## 3) Suche die Form der Funktion $\Lambda$ :

Hier erhalten wir die  $\Lambda$  Funktion durch lineare Interpolation. Für  $\pi_i$  und  $\lambda_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$ , unterscheiden wir zwei Fälle.

**1. Fall:** Die Funktion  $\Lambda$  ist wachsend.

Für jeden Betrag  $x$  gilt:

$$\begin{aligned} x < \pi_1 : \Lambda(x) &= \lambda_1 = \lambda^m, \\ x \geq \pi_n : \Lambda(x) &= \lambda_n = \lambda^M \\ \pi_1 \leq x < \pi_n : \Lambda(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} 1_{[\pi_i, \pi_{i+1})} \left( (x - \pi_i) \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\pi_{i+1} - \pi_i} + \lambda_i \right) \end{aligned}$$

**2. Fall:** Die Funktion  $\Lambda$  ist fallend.

Hier erhalten wir bessere Resultate durch die Wahl der  $\Lambda$ -Funktion als Arkustangens- oder Potenzfunktion. Für jeden Betrag  $x$  gilt:

$$\begin{aligned} x < \pi_1 : \Lambda(x) &= \lambda^M, \\ x \geq \pi_n : \Lambda(x) &= \lambda^m, \\ \pi_1 \leq x < \pi_n : \Lambda(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} 1_{[\pi_i, \pi_{i+1})} \left( (x - \pi_i) \frac{\lambda_{n-i} - \lambda_{n-i+1}}{\pi_{i+1} - \pi_i} + \lambda_{n-i+1} \right) \end{aligned}$$

Arctan-Funktion

$$\Lambda(x) = \frac{\lambda^M}{\arctan(\pi_1)} \arctan(x)$$



Potenzfunktion

$$\Lambda(x) = \frac{\lambda^M}{(\pi_1^2)} x^2.$$

#### 4) Parameterschätzung für $\Lambda$ :

Im letzten Schritt berechnen wir die Parameter  $\lambda_i$  und  $\pi_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Wir setzen  $\lambda_1 = \lambda^m = 0,001$  als minimalen  $\lambda_i$  - Wert und  $\lambda_n = \lambda^M = 0,01$  als maximalen  $\lambda_i$  - Wert.

Die restlichen Glieder bestimmen wir durch eine Teilung des Intervalls  $(0, \lambda^M]$ . Genauer:

$$\lambda_i = \frac{\lambda^M(i-1)}{(n-1)}$$

mit  $i = 2, \dots, n-1$ .

Zum Schluss sind noch die Stellen von  $\pi_i$  durch Verwendung vom dynamischen Benchmark-Ansatz zu bestimmen. Die Idee ist, die Tails einer Verteilung mit der  $\Lambda$  Funktion zu vergleichen.

Mit  $r_{ij}$  bezeichnen wir die Log>Returns, wobei  $i = 1, \dots, N$  die Anzahl aller Tage in einem bestimmten Zeitraum und  $j = 1, \dots, B$  ein bestimmter Aktienindex ist.

Wir wenden die Stellen  $\pi_i$  auf  $n$  Ordnungsstatistiken an. Für  $n = 4$  ordnen wir der Stelle  $\pi_1$  die kleinste Ordnungsstatistik zu, also  $\pi_1 = \min(r_{\min 1}, \dots, r_{\min j}, \dots, r_{\min B})$ . Dabei bezeichnet  $r_{\min j}$  das Minimum der  $j$ -ten Benchmark.

#### **Annahme**

Sei  $t = 250$ , die Anzahl der Handelstage in einem Jahr. Für  $i$  lässt sich noch schreiben:  $i = t - 249, \dots, t$ .

Daraus erhalten wir:

$$r_{\min j} = \min\{r_{ij} \mid i = t - 249, \dots, t\}, \text{ für } j = 1, \dots, B.$$

Zum Schluss setzen wir  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  und  $\pi_4$  gleich dem Maximum, dem Mittelwert und dem Minimum von ihren historischen  $\lambda\%$  - VaR. Für  $\lambda$  wählen wir z.B.  $\lambda = 1\%$  oder  $\lambda = 5\%$ . Die Wahl des Konfidenzintervalls  $\lambda$  für den VaR hängt von der Risikofreudigkeit ab.

#### **1.4.3. $\Lambda$ VaR: mathematische Beschreibung und Berechnung**

Das folgende Beispiel illustriert die Berechnung von  $\Lambda$ VaR. Der Code ist im **Anhang A** unter dem Namen

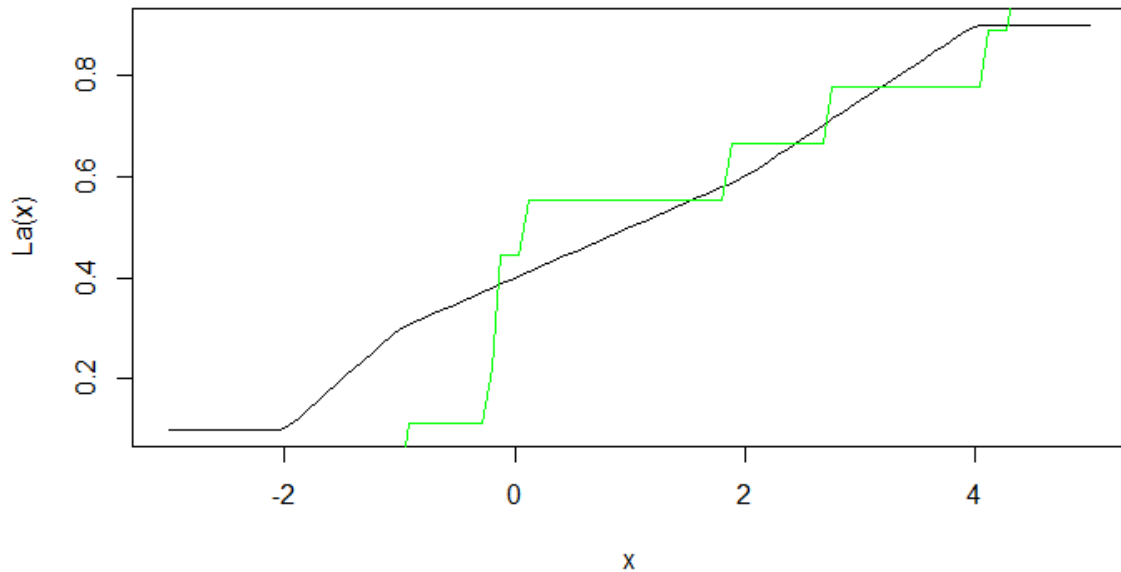


Abbildung 1: Lambda VaR-Berechnung

Beispiel Lambda VaR berechnen.R

zu finden.

Wir konstruieren eine steigende stückweise lineare  $\Lambda$ -Funktion mit Variablen  $\pi_i$  (Wir schreiben im R Code  $z$  statt  $\pi$ ) und  $\lambda_i$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  und wenden die lineare Interpolation an. Danach generieren wir die Zufallsdaten  $X$  und definieren eine empirische Verteilungsfunktion  $F$ . Schließlich betrachten wir an welcher Stelle die Funktion  $F$  die  $\Lambda$ -Funktion überschreitet. Die obere Grafik illustriert dies genauer, wobei die Funktion  $F$  grün eingezeichnet ist.

### Mathematische Beschreibung für die Reaktivität von Risikomaßen:

Die Werte von Log>Returns  $r_{ij}$  weisen wir einer Variable  $R$  zu und betrachten die Daten im Zeitraum vom Jahr 2005 bis zum einschließlich 2006. Des Weiteren berechnen wir die Werte vom VaR und vom ES. Um den Wert vom  $\Lambda$ VaR zu berechnen, benötigen wir eine wachsende stückweise lineare  $\Lambda$ -Funktion mit Werten  $\pi_i$  und  $\lambda_i$  für  $i = 1, 2, 3, 4$ . Die Wahrscheinlichkeiten  $\lambda_i$  bestimmen wir wie im Abschnitt 1.4.2. Das heißt, wir fixieren den kleinsten Wert auf  $\lambda_1 = 0,001$  und den höchsten auf  $\lambda_4 = 0,02$ . Die restlichen zwei

Glieder  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  werden nach der Formel

$$\lambda_i = \frac{\lambda^M(i-1)}{(n-1)}$$

mit  $i = 2, \dots, n-1$  berechnet.

Die Werte von  $\pi_j$  werden durch den Benchmark-Ansatz bestimmt. Mit  $r_j$  bezeichnen wir die Benchmark von einem bestimmten Aktienindex  $j = 1, 2, 3$  und betrachten dabei die Indizes GSCP, FTSE und STOXX50E.

Weiter verwenden wir die lineare Interpolation und berechnen die Funktion  $\Lambda$ .

$$\Lambda(z) = \begin{cases} \lambda_1 & , z < z_1 \\ \lambda_i & , z_i \leq z < z_{i+1} \\ \lambda_n & , z \geq z_n \end{cases}$$

für  $i = 2, \dots, n-1$ . Wir definieren noch eine empirische Verteilungsfunktion  $F(x)$ . Für  $\Lambda$ VaR ergibt sich

$$\Lambda \text{ VaR} = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > \Lambda(x)\}.$$

Abschließend sortieren wir die Daten  $X_i$  gemäß  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ . So heißt  $(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$  eine geordnete Statistik. Die sortierten Daten  $X_i$  werden einem Wert  $y$  zugeordnet. Schließlich erhalten wir

$$\Lambda \text{ VaR} = -\inf \{y[k] : F(y[k]) > \Lambda(y[k]), k = 1, \dots, n\}.$$

Die erste Stelle, an der Funktion  $F$  die Funktion  $\Lambda$  überschreitet, wird ausgegeben.

## 2. Elizitierbarkeit

### 2.1. Einführung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Theorie und Eigenschaften der Elizitierbarkeit. Wir beziehen uns dabei auf folgende wissenschaftliche Publikationen: Bellini, Bignozzi (2014, [6]): *Elicitable risk measures*, Emmer, Kratz, Tasche (2015, [12]): *What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures* und Ziegel (2014, [26]): *Coherence and elicibility*.

Ein Risikomaß  $\rho$  auf einer Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mathcal{P}$  ist elizitierbar, wenn es als ein Minimierer einer geeigneten Scoring-Funktion definiert werden kann. Mittelwerte und Quantile sind solche elizitierbaren Funktionen.

Im Backtesting-Verfahren ist es üblich Vorhersagen zu machen, die auf der Idee der Minimierung der Scoring- oder Fehlerfunktion basieren. Also, wenn man einen quadratischen Fehler minimieren will, verwendet man den Mittelwert einer Verteilung; Um einen absoluten Vorhersagefehler zu minimieren, benötigen wir den Median der Verteilung.

Der Mittelwert und der Median einer Verteilung sind bekannt als elizitierbare Funktionen, weil sie die optimalen Prognosen unter bestimmten Scoring-Funktion ergeben.

### 2.2. Theorie der Elizitierbarkeit

#### Definition (Scoring-Funktion)

Eine Scoring- bzw. Verlustfunktion ist definiert durch:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto L(x, y) \end{aligned}$$

Die Variable  $x$  bezeichnet die Punktprognose und  $y$  die Beobachtungen.

Meist werden weitere Eigenschaften von  $L$  gefordert (siehe Abschnitt 2.4).

Im Kapitel 1 haben wir Risikomaße als Abbildung  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. In diesem Kapitel interessieren wir uns für Risikomaße, die nur von der Verteilung der betrachteten Zufallsvariablen abhängen. Darüber hinaus betrachtet man in der Theorie der Elizitierbarkeit (möglicherweise) mengenwertige Funktionale.

Daher definieren wir in diesem Kapitel Risikomaße als Abbildung  $\rho : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ , wobei  $\mathcal{P}$  eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathbb{R}$  ist und  $2^{\mathbb{R}}$  die Potenzmenge von  $\mathbb{R}$  bezeichnet.

### Definition

Sei  $\rho$  ein Funktional auf der Menge  $\mathcal{P}$ . Somit ist  $\rho$  durch

$$\begin{aligned}\rho &: \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}, \\ P &\mapsto \rho(P) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

definiert.

### Definition [15, Gneiting]

Die Verlustfunktion  $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  ist **konsistent** zum Funktional  $\rho$  bezüglich der Menge  $\mathcal{P}$  dann und nur dann, wenn  $\forall P \in \mathcal{P}, t \in \rho(P)$  und  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int L(t, y) dP(y) \leq \int L(x, y) dP(y).$$

### Definition

Ist eine Verlustfunktion  $L$  konsistent und erfüllt sie die folgende Eigenschaft, so wird  $L$  auch als **streng konsistent** bezüglich der Menge  $\mathcal{P}$  bezeichnet. Es gilt  $\forall t \in \rho(P)$ :

$$\int L(t, y) dP(y) = \int L(x, y) dP(y) \Rightarrow x \in \rho(P).$$

### Definition

Die Funktion  $\rho : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  heißt elizitierbar genau dann, wenn eine Scoring- bzw. Verlustfunktion  $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, welche bezüglich der Menge  $\mathcal{P}$  streng konsistent ist.

### Wichtige Scoring-Funktionen sind die folgenden:

1) Die quadratische Differenz

$$L(x, y) = (x - y)^2,$$

2) der gewichtete quadratische Fehler

$$L(x, y) = (\mathbb{1}_{\{x \geq y\}} - \alpha)(x - y)^2 \operatorname{sgn}(x - y),$$

wobei  $0 < \alpha < 1$  ein Parameter ist,

3) der absolute Fehler

$$L(x, y) = |x - y|,$$

4) der gewichtete absolute Fehler

$$L(x, y) = (\mathbb{1}_{\{x \geq y\}} - \alpha)(x - y),$$

wobei  $0 < \alpha < 1$  wieder ein Parameter ist.

Diese Funktionen sind streng konsistente Verlustfunktionen; Der Mittelwert ist elizitierbar durch den quadratischen Fehler, die Expektile sind elizitierbar durch den gewichteten quadratischen Fehler, der Median durch den absoluten Fehler und die Quantile durch den gewichteten absoluten Fehler. (vgl. Newey, Powell 1987, [25], 819-847).

Die Elizitierbarkeit ist ein hilfreiches Kriterium für die Abschätzung der optimalen Punktvorhersage: Die Klasse der (streng) konsistenten Scoring-Funktionen zum Funktional  $\rho$  ist identisch mit der Klasse von Funktionen, unter denen (nur) das Funktional  $\rho$  eine optimale Punktprognose ist. Wenn wir eine streng konsistente Verlustfunktion zum Risikomaß  $\rho$  gefunden haben, können wir die optimale Prognose  $\hat{x}$  für  $\rho(P)$  durch

$$\hat{x} = \arg \min_x \mathbb{E}_P[L(x, X)]$$

bestimmen.

### 2.3. Stochastische Ordnung auf $\mathcal{X}$

Eigenschaften eines Risikomaßes sind Monotonie, Translationsinvarianz, Konvexität, Subadditivität und positive Homogenität, die wir im Kapitel 1 definiert haben. Manche Risikomaße besitzen noch die Eigenschaft schwach-verteilungs-invariant.

Sie besagt, wenn zwei Finanzpositionen gleiche Verteilung besitzen, haben sie auch die gleiche Niveaumenge.

Bellini und Bigozzi [6] definieren Risikomaße für Finanzpositionen als Abbildungen  $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , also für eine (essentiell) beschränkte Zufallsvariable  $X \in L^\infty$ . Dann kann man verteilungsinvariante Risikomaße als Funktionale auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mathcal{P}$  mit **kompaktem Träger**  $\mathcal{X}_{1,c}(\mathbb{R})$  definieren.

Sei  $\mathcal{X}_1(\mathbb{R})$  eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathbb{R}$ . Jedes  $\mu \in \mathcal{X}_1(\mathbb{R})$  kann durch seine Verteilungsfunktion  $F(x) = \mu(-\infty, x]$  charakterisiert werden.  $\mathcal{X}_1(\mathbb{R})$  ist mit einer gewöhnlichen stochastischen Ordnung  $\leq_{st}$  ausgestattet, bekannt als *stochastische Dominanz erster Ordnung*. Für jedes  $F, G \in \mathcal{X}_1(\mathbb{R})$  gilt:

$$F \leq G \quad \text{genau dann, wenn} \quad F(x) \geq G(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ein Funktional ist definiert als eine Abbildung  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_1(\mathbb{R})$ . Wir

nehmen an, dass  $\mathcal{X}$  *m-konvex* ist (d.h. konvex bezüglich den Mischungen), also gilt für jedes  $\lambda \in [0, 1]$ :

$$F, G \in \mathcal{X} \Rightarrow \lambda F + (1 - \lambda)G \in \mathcal{X}.$$

**Weitere relevante Eigenschaften für  $\rho$ :**

**(M) Monotonie:** für  $F, G \in \mathcal{X}$ :  $F \leq_{st} G \Rightarrow \rho(F) \leq \rho(G)$

**(T) Translationsinvarianz:** für jedes  $m \in \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(F_m) = \rho(F) + m$ , wobei für  $F_m$ :  $F_m(x) := F(x - m)$  gilt.

**(mC) m-Konvexität:** für  $F, G \in \mathcal{X}$  und  $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \rho(\lambda F + (1 - \lambda)G) \leq \lambda \rho(F) + (1 - \lambda)\rho(G)$ .

Es ist wichtig, zwischen m-Konvexität, welche bezüglich Mischungen definiert ist, und der gewöhnlichen Konvexität zu unterscheiden. Die zwei Notationen der Konvexität sind nicht verwandt und haben verschiedene Interpretationen.

Man sagt,  $\rho$  ist *m-quasi konvex*, wenn für jedes  $\gamma \in \mathbb{R}$  seine Subniveaumengen

$$\{\rho \leq \gamma\} := \{F \in \mathcal{X} \mid \rho(F) \leq \gamma\}$$

konvex sind. Also, für jedes  $\lambda \in [0, 1]$  und  $F, G \in \mathcal{X}$  gilt:

$$F, G \in \{\rho \leq \gamma\} \Rightarrow \lambda F + (1 - \lambda)G \in \{\rho \leq \gamma\}.$$

Das Funktional  $\rho$  ist genau dann *m-quasi konkav*, wenn es m-quasi konvex ist.

Ein Funktional, das beide Bedingungen erfüllt, m-quasi konvex und m-quasi konkav, heißt *m-quasi linear*. Darüber hinaus besitzt  $\rho$  eine **konvexe Niveaumenge**. Für jedes  $\gamma \in \mathbb{R}$ , ist die Niveaumenge

$$\{\rho = \gamma\} := \{F \in \mathcal{X} \mid \rho(F) = \gamma\}$$

konvex, wenn jedes  $\lambda \in [0, 1]$  und  $F, G \in \mathcal{X}$  Folgendes erfüllen

$$\rho(F) = \rho(G) = \gamma \Rightarrow \rho(\lambda F + (1 - \lambda)G) = \gamma.$$

Solange  $\{\rho = \gamma\} = \{\rho \leq \gamma\} \cap \{\rho \geq \gamma\}$  gilt, hat ein m-quasi lineares Funktional  $\rho$  eine konvexe Niveaumenge. Die Umkehrung ist nicht unbedingt erfüllt, wie das nächste Beispiel zeigt.

## Beispiel

Sei  $\mathcal{X}_1^1(\mathbb{R})$  eine Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit endlichem Erwartungswert. Die Abbildung  $\rho : \mathcal{X}_1^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch:

$$\rho(F) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbb{E}(F) = 0 \\ -1 & \text{für } \mathbb{E}(F) > 0 \\ 0 & \text{für } \mathbb{E}(F) < 0. \end{cases}$$

Es ist klar, dass die Niveaumengen von  $\rho$  m-konvex sind, also

$$\{\rho \leq 0\} = \{F \in \mathcal{X}_1^1(\mathbb{R}) \mid \mathbb{E}[F] \neq 0\}$$

nicht konvex ist.

## 2.4. Eigenschaften

Der Begriff Elizitierbarkeit wurde von Lambert et al. (2008, [20]) eingeführt. Es gilt, ein Funktional sei elizitierbar, wenn eine Verlust- bzw. Scoring - Funktion existiert, die strikt mit dem Funktional konsistent ist.

Formal betrachten wir ein Risikomaß  $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen,  $\rho$  ist elizitierbar wenn eine Verlustfunktion  $L$  existiert, also  $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die als Minimierer des Erwartungswertes der Verlustfunktion geschrieben werden kann.

Manche Autoren fordern folgende Eigenschaften für eine Verlustfunktion:

- 1)  $L(x, y) \geq 0$  genau dann, wenn  $x = y$ ;
- 2)  $L(x, y)$  ist stetig in  $x$ ;
- 3)  $L(x, y)$  ist wachsend für  $x > y$  und fallend für  $x < y$ ;
- 4)  $\frac{\partial L(x, y)}{\partial x}$  stetig in  $x$  für  $x \neq y$ .

Die angegebene Definition der Elizitierbarkeit von Gneiting (2011, [15]) erfordert grundsätzlich keine zusätzliche Bedingung an die Scoring-Funktion  $L$ . Die meisten der in der



Praxis verwendeten Scoring-Funktionen (für Median, Quantile, Expektile,..) erfüllen die Eigenschaften 1) und 2) und besitzen partielle Ableitungen  $\frac{\partial L(x,y)}{\partial x}$ , welche stetig in  $x$  sind, wenn  $x \neq y$ . Aus diesem Grund sind unsere Annahmen praktisch keine wesentliche Einschränkungen.

Wir werden zeigen, dass die zusätzliche Bedingung 3) notwendig ist, um sicherzustellen, dass  $L$  auch fehlerfrei erreicht werden kann.

### Definition

Ein reellwertiges statistisches Funktional  $\rho$  definiert auf einer Menge  $\mathcal{X}$  von Verteilungsfunktionen, ist elizitierbar auf  $\mathcal{X}_\rho \subseteq \mathcal{X}$ , wenn es eine Scoring-Funktion  $L$  gibt, so dass für jedes  $F \in \mathcal{X}_\rho$  gilt,

$$\int_{\mathbb{R}} L(x, y) dF(y) < \infty, \forall y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$\rho(F) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} L(x, y) dF(y). \quad (2)$$

Die Verlustfunktion  $L$  ist streng konsistent mit  $\rho$ , wenn die Gleichung (2) erfüllt ist und man sagt,  $\rho$  ist elizitierbar.

Anders als in der Arbeit von Gneiting (2011, [15]), sagt man, dass  $\rho$  elizitierbar auf der Teilmenge seines Definitionsbereiches ist. Die maximale Teilmenge  $\mathcal{X}_\rho$  von  $\mathcal{X}$ , auf welcher die Gleichungen (1) und (2) gelten, nennen wir *Definitionsbereich der Elizitierbarkeit* von  $\rho$ . Die obige Definition ist nicht ganz erfüllt, solange der typische Definitionsbereich der Elizitierbarkeit von  $\rho$  kleiner als sein idealer Bereich ist. Zum Beispiel, der Erwartungswert ist elizitierbar durch die Verlustfunktion  $L(x, y) = (x - y)^2$ , aber sein idealer Definitionsbereich ist  $\mathcal{X}_1^1(\mathbb{R})$ . Für die Lösung dieses Problems verallgemeinern wir die obige Definition wie folgt:

### Definition

Ein Funktional  $\rho$  ist elizitierbar auf  $\mathcal{X}_\rho \subseteq \mathcal{X}$ , wenn eine Verlustfunktion  $L$  existiert, so dass für jedes  $F \in \mathcal{X}_\rho$  gilt:

$$f_F(x_1, x_2) := \int [L(x_2, y) - L(x_1, y)] dF(y) \quad \text{ist wohldefiniert für } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$f_F(\rho(F), x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \rho(F).$$

Laut Gneiting (2011, [15]) und Ziegel (2014, [26]) besitzen elizitierbare Funktionen eine konvexe Niveaumenge. Wir übernehmen das folgende Lemma und den dazugehörigen Beweis von Bellini und Bigozzi (2014, [6]).

**Lemma** [6, S. 8]

Sei  $\rho$  ein Funktional auf der Menge  $\mathcal{P}$  mit kompaktem Träger  $\mathcal{X}_{1,c}(\mathbb{R})$ . Falls  $\rho$  elizitierbar ist, dann gilt:

- a)  $\rho(F) \in [\text{ess inf}(F), \text{ess sup}(F)]$ . Insbesondere gilt  $\rho(\delta_x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ ,
- b)  $\rho$  besitzt eine konvexe Niveaumenge,
- c)  $\rho$  ist m-quasi linear,
- d) Jede Verlustfunktion  $L$ , welche zu  $\rho$  gehört, ist genauigkeitsbelohnend (accuracy rewarding).

## BEWEIS

a) Aus der Definition der Verlustfunktion  $L$  wissen wir, dass  $g_F(x) = \int L(x, y)dF(y)$  für  $x \leq \text{ess inf}(F)$  fallend und für  $x \geq \text{ess sup}(F)$  steigend ist. Daraus folgt  $\rho(F) \in [\text{ess inf}(F), \text{ess sup}(F)]$ . Der zweite Teil folgt direkt aus der Definition der  $\delta_x$ -Funktion, die für  $x \in \mathbb{R}$  Dirac-messbar ist.

b) Wir wissen:  $F, G \in \mathcal{X}_{1,c}, \lambda \in [0, 1]$ . Für  $\rho(F) = \rho(G) = \gamma$ , haben wir

$$\rho(\lambda F + (1 - \lambda)G) = \arg \min_x \left\{ \lambda \int L(x, y)dF(y) + (1 - \lambda) \int L(x, y)dG(y) \right\} = \gamma.$$

c) Seien  $F, G$  und  $\lambda$  wie oben und

$$f_{F,G}(x, \lambda) := \lambda \int L(x, y)dF(y) + (1 - \lambda) \int L(x, y)dG(y) < +\infty.$$

Wir behaupten, dass  $f_{F,G}(x, \lambda)$  stetig in  $x$  und  $\lambda$  ist. Allgemein, für  $(x, \lambda) \in [\hat{x} - \epsilon, \hat{x} + \epsilon] \times [0, 1]$  haben wir

$$\lambda L(x, y) \leq L(x, y) \leq \max\{L(\hat{x} - \epsilon, y), L(\hat{x} + \epsilon, y)\},$$

aus der Bedingung (1) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\lambda_n \int L(x, y) dF(y) \rightarrow \lambda \int L(x, y) dF(y)$$

sobald  $(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x, \lambda)$ .

Ein ähnliches Argument impliziert  $(1 - \lambda) \int L(x, y) dG(y)$ , so dass die Stetigkeit von  $f_{F,G}(x, \lambda)$  gezeigt ist. Es folgt, dass das Minimierungsproblem

$$\min_x f_{F,G}(x, \lambda)$$

eine stetige Lösungsfunktion hat und laut a) kann die Funktion auf dem kompakten Intervall definiert werden. Abschließend behaupten wir:

$$\arg \min_x f_{F,G}(x, \lambda) \text{ ist stetig in } \lambda,$$

das entspricht der Stetigkeit der multivariaten Funktion  $\rho$ .

d) Solange  $\rho$  eine konvexe Menge besitzt und stetig ist, so folgt, dass  $\rho$  m-quasi linear ist.

e) Das Resultat folgt aus der Stetigkeit von  $L$  und aus der Proposition 2 von Lambert (2013, [21, S. 23]).

□

### Definition

Eine Scoring- bzw. Verlustfunktion  $L$  ist genauigkeitsbelohnend, wenn  $\forall x_1, x_2$  und  $F \in \mathcal{P}$  gilt:

$$\rho(F) < x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1 < \rho(F) \Rightarrow \int L(x_1, y) dF(y) \leq \int L(x_2, y) dF(y).$$

### Lemma [6, Bellini]

Die Eigenschaft, dass  $\rho$  eine konvexe Niveaumenge besitzt, ist eine notwendige Bedingung, damit die Funktion  $L$  genauigkeitsbelohnend wird.

Der Beweis von diesem Lemma kann in [6, S. 10] nachgelesen werden.

Wie erwartet ist der VaR elizitierbar und damit auch rückvergleichbar. Formal, der VaR, der durch den Schätzer  $q_\lambda^+(F)$  gegeben ist und auf der Menge der stetigen und

strikt wachenden Verteilungsfunktionen definiert ist, ist elizitierbar mit folgender Verlustfunktion:

$$L(x, y) = \lambda(y - x)^+ + (1 - \lambda)(y - x)^-. \quad (3)$$

Ein Spezialfall der Verlustfunktion, die den  $\Lambda$  VaR elizitierbar macht, wobei  $\Lambda$  stetig und fallend ist, ist gegeben durch:

$$L(x, y) = (y - x)^- - \int_y^x \Lambda(t) dt. \quad (4)$$

Diese Gleichung ist eine Verallgemeinerung der Gleichung (3). Es genügt, die Funktion  $\Lambda$  in der Gleichung (4) durch ein  $\lambda$  zu substituieren um die VaR Verlustfunktion in der Gleichung (3) zu erhalten.

Damit ist das beste Risikomodell zwischen VaR und  $\Lambda$  VaR, das mit dem kleinsten durchschnittlichen Verlust oder Score  $\bar{L}$  über  $N$  Beobachtungen, also

$$\bar{L} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N L(x_t, y_t),$$

wobei  $x_t$  die Realisation zum Zeitpunkt  $t - 1$ , um das Risiko zwischen  $t - 1$  und  $t$  abzudecken, und  $y_t$  die ex-post Realisation zum Zeitpunkt  $t$  ist.

Der Verlust  $L$  für den VaR entspricht dem Verlust in der Gleichung (3) und der Verlust  $L$  für den  $\Lambda$  VaR dem in der Gleichung (4).

Wir wollen noch beweisen, dass der  $\Lambda$  VaR mit stetiger  $\Lambda$ -Funktion elizitierbar ist.

Das Funktional  $\rho$ , das durch  $\rho(F) := \{x : F(x) \geq \Lambda(x)\}$  definiert ist, erfüllt die Eigenschaft der Elizitierbarkeit mit Verteilungsfunktion wie in der Gleichung (4).

Die nächste Proposition übernehmen wir von Hitaj und Peri (2015, [17, S. 31]).

**Proposition**

Für jede monotone und stetige Funktion  $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ , ist das Risikomaß  $\rho$  definiert durch:

$$\rho(F) := \inf\{x : F(x) \geq \Lambda(x)\}.$$

Damit ist das Funktional  $\rho$  elizitierbar mit  $\Lambda$ -Funktion wie in der Gleichung (4).

**BEWEIS**

Zu zeigen ist, dass der Verlust  $L$  in der Gleichung (4) dem Risikomaß  $\rho$  wie in der Gleichung (2) entspricht und die drei Eigenschaften für eine Verlustfunktion erfüllt.

Betrachte:

$$\frac{d^+}{dx} \int L(x, y) dF(y) \geq 0,$$

$$\frac{d^-}{dx} \int L(x, y) dF(y) \leq 0.$$

Setze  $L(x, y)$  aus der Gleichung (4) in die obere Ungleichung ein, also

$$\begin{aligned} \frac{d^-}{dx} \int (x, y) dF(y) &= \frac{d^-}{dx} \int \left( (y - x)^- - \int_y^x \Lambda(t) dt \right) dF(y) = \\ &= -\frac{d^-}{dx} \int \int_y^x \Lambda(t) dt dF(y) = -\frac{d^-}{dx} \int_y^x \int \Lambda(t) dF(y) dt = \\ &= -\frac{d^-}{dx} \int_y^x \Lambda(t) \left( \int dF(y) \right) dt = -\frac{d^-}{dx} \int_y^x \Lambda(t) dt = -\Lambda(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Nun betrachte:

$$\begin{aligned}
\frac{d^+}{dx} \int L(x, y) dF(y) &= \frac{d^+}{dx} \int \left( (y-x)^- - \int_y^x \Lambda(t) dt \right) dF(y) \geq 0 \\
&= \int \left( \frac{d^+}{dx} (y-x)^- \right) dF(y) - \frac{d^+}{dx} \int \int_y^x \Lambda(t) dt dF(y) \geq 0 \\
&= \int 1_{\{y \leq x\}}(y) dF(y) - \frac{d^+}{dx} \int_y^x \int \Lambda(t) dF(y) dt \geq 0 \\
&= F(x) - \Lambda(y) \geq 0.
\end{aligned}$$

Man sieht, dass der Verlust  $L$  die zweite und die dritte Eigenschaft der Verlustfunktion erfüllt. Im nächsten Schritt zeigt man noch die Positivität von  $L$ :

1. Fall  $y \leq x$ :

$$\begin{aligned}
(y-x)^- - \int_y^x \Lambda(t) dt &\geq (y-x)^- - (x-y) \\
&= (x-y)^+ - [(x-y)^+ - (x-y)^-] \\
&= (x-y)^- \geq 0
\end{aligned}$$

für  $0 < \Lambda < 1$ .

2. Fall  $y \geq x$ :

$$\begin{aligned}
(y-x)^- - \int_y^x \Lambda(t) dt &= - \int_y^x \Lambda(t) dt \\
&= \int_x^y \Lambda(t) dt \geq 0
\end{aligned}$$

für  $\Lambda > 0$ . □

### Lemma

Der Expected Shortfall ist nicht elizitierbar.

### BEWEIS

Wir zeigen hier, dass der Expected Shortfall keine konvexen Niveaumengen besitzt, und somit nicht elizitierbar ist.

Seien  $a, b, c, d$  Konstanten aus  $\mathbb{R}$ , so dass  $a < b < c < \frac{1}{2}(b+d)$ . Für  $F_1, F_2 \in \mathcal{P}$  be-

trachten wir:

$$F_1 = \alpha\delta_\alpha + \frac{1}{2}(1 - \alpha)(\delta_b + \delta_b),$$

$$F_2 = \alpha\delta_c + (1 - \alpha)\delta_{\frac{b+d}{2}},$$

wobei  $\delta_\alpha$  das Punktmaß in  $x \in \mathbb{R}$  bezeichnet.

Für  $a \leq \frac{1}{3}$  haben wir

$$\text{ES}_{F_1}^\alpha(X) = \text{ES}_{F_2}^\alpha = \frac{b+d}{2}.$$

Des Weiteren gilt:

$$\text{ES}_{\frac{F_1+F_2}{2}}^\alpha(X) = \frac{1}{4}(b+c+2d) > \frac{b+d}{2}.$$

Das Resultat folgt aus der Tatsache, dass in diesem Fall der Expected Shortfall keine konvexen Mengen besitzt und damit ist er nicht elizitierbar. □

## 2.5. Expektile

Gneiting (2011, [15]) hat gezeigt, dass der Expected Shortfall nicht elizitierbar ist. Später wurden Expektile als kohärente und elizitierbare Funktionen eingeführt (Bellini et al. 2014, [6]; Ziegel 2014, [26]). Im Folgenden definieren wir Expektile als eine Verallgemeinerung vom Expected Shortfall.

### Definition

Für  $0 < \tau < 1$  und eine quadratisch integrierbare Funktion  $L$  ist das  $\tau$ -Expektil  $e_\tau(L)$  definiert als

$$e_\tau(L) = \arg \min_{l \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\tau \max(L - l, 0)^2 + (1 - \tau) \max(l - L, 0)^2].$$

Da der Value at Risk nicht kohärent ist und der Expected Shortfall keine Eigenschaft der Elizitierbarkeit erfüllt, versucht man ein Risikomaß zu finden, das sowohl kohärent als auch elizitierbar ist. Mögliche Kandidaten dafür sind oben definierte Expektile. Das folgende Lemma von Newey, Powell (1987, [25]) und Bellini et al. (2014, [6]) beschreibt die Expektile genauer.

**Lemma**

Für eine integrierbare Zufallsvariable  $L$  ist  $l$  eine eindeutige Lösung von

$$\tau \mathbb{E}[\max(L - l, 0)] = (1 - \tau) \mathbb{E}[\max(l - L, 0)],$$

wobei  $e_\tau(L)$  Folgendes erfüllt:

$$e_\tau(L) = \frac{\tau \mathbb{E}[L \mathbb{1}_{\{L \geq e_\tau(L)\}}] + (1 - \tau) \mathbb{E}[L \mathbb{1}_{\{L < e_\tau(L)\}}]}{\tau \mathbb{P}[L \geq e_\tau(L)] + (1 - \tau) \mathbb{P}[L < e_\tau(L)]}.$$

**Theorem** (Gneiting 2011, [15])

Sei  $\mathcal{P}$  die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ . Für  $\tau \in (0, 1)$  gilt:

- a) Ein  $\tau$ -Expektil ist elizitierbar bezüglich  $\mathcal{P}$ .
- b) Sei  $L$  die Verlustfunktion auf  $I \times I$ . Die Funktion  $L$  ist konsistent zum  $\tau$ -Expektil bezüglich der Menge  $\mathcal{X}_{1,c}$  auf  $I$  genau dann, wenn  $L$  folgende Gestalt hat

$$L(x, y) = |\mathbb{1}_{(x \geq y)} - \tau| (\phi(y) - \phi(x) - \phi'(x)(y - x)),$$

wobei  $\phi$  eine konvexe Funktion ist mit  $\phi'$  auf  $I$ .

- c) Wenn  $\phi$  strikt konvex ist, dann ist die obige  $L$  Funktion strikt konsistent für das  $\tau$ -Expektil bezüglich  $\mathcal{P}$  auf  $I$ , für die beide Erwartungswerte  $\mathbb{E}Y$  und  $\mathbb{E}\phi(Y)$  existieren und endlich sind.

**Proposition** (Bellini et al. 2014, [6])

Die Expektile erfüllen folgende Eigenschaften:

- a) Für  $0 < \tau < 1$  ist  $e_\tau$  homogen und schwach-invariant. Daraus ergibt sich, dass die Expektile für jede lineare abhängige Zufallsvariable additiv sind, nämlich

$$\text{Corr}[L_1, L_2] = 1 \Rightarrow e_\tau(L_1 + L_2) = e_\tau(L_1) + e_\tau(L_2).$$

- b) Für  $\frac{1}{2} \leq \tau < 1$  ist  $e_\tau$  subadditiv und damit auch kohärent, wobei für  $\frac{1}{2} \geq \tau > 0$  das Expektil  $e_\tau$  superadditiv ist.



Ziegel (2014, [26], S. 10) hat schon bewiesen, dass Expektile die einzigen schwach-invariant und kohärenten elizitierbaren Risikomaße sind.

Mit dem Lemma von Newey, Powell (1987, [25]) und der obigen Proposition von Bellini et al. (2014, [6]) sind Expektile sehr hilfreich um die Schwächen vom Value at Risk und vom Expected Shortfall zu beheben.

## 2.6. Bedingte Elizitierbarkeit

Bis jetzt haben wir zwischen elizitierbaren und nicht-elizitierbaren Funktionalen unterschieden. Es stellt sich heraus, dass manche Risikomaße nicht elizitierbar sind, aber der Elizitierbarkeit der „2. Ordnung“ genügen.

Diese Eigenschaft ist nützlich zum Vorausschätzen der Risikomaße, welche nicht elizitierbar sind.

### Definition (Bedingte Elizitierbarkeit)

Ein Funktional  $\rho$  auf  $\mathcal{P}$  heißt **bedingt elizitierbar**, wenn die Funktionale  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  existieren mit  $\gamma : \mathcal{D} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P} \times 2^{\mathbb{R}}$ , so dass

- i)  $\tilde{\gamma}$  ist elizitierbar bezüglich  $\mathcal{P}$ ,
- ii)  $(P, \tilde{\gamma}(P)) \in \mathcal{D}$ ,  $\forall P \in \mathcal{P}$ ,
- iii)  $\forall c \in \tilde{\gamma}(P)$ : Das Funktional  $\gamma_c : \mathcal{P}_c \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  mit  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P} \times 2^{\mathbb{R}}$  ist elizitierbar bezüglich  $\mathcal{P}_c = \{P \in \mathcal{P} : (P, c) \in \mathcal{D}\}$ ,
- iv)  $\rho(P) = \gamma(P, \tilde{\gamma}(P))$  für alle  $P \in \mathcal{P}$ .

Manchmal sind  $c$  und  $\gamma(P, c)$  einwertig. In diesem Fall identifizieren wir die einelementigen Mengen  $c$  und  $\gamma(P, c)$  mit ihren eindeutigen Elementen.

### Bemerkung

Jedes elizitierbare Funktional ist bedingt elizitierbar.

### 3. Spektrale Risikomaße

Dieses Kapitel basiert auf dem Paper von Nick Costanzino und Mike Curran (2015, [9]) über *Backtesting general spectral risk measures with application to Expected Shortfall*.

Eine Klasse von kohärenten Risikomaßen sind spektrale Risikomaße, welche bei der VaR-Bewertung durch ein Spektrum  $\phi$  mit bestimmten Eigenschaften charakterisiert werden können.

**Definition** (Zulässiges Risikospektrum)

$\phi \in L^1([0, 1])$  ist ein zulässiges Risikospektrum wenn:

- 1)  $\phi$  nicht-negativ,
- 2)  $\phi$  nicht-wachsend und
- 3)  $\|\phi\|_1 = 1$  ist.

**Definition**

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit kumulativer Verteilungsfunktion  $F_X$  ist  $\phi$  ein zulässiges Risikospektrum. Wir sagen, dass  $\mathcal{M}_\phi$ , definiert als

$$\mathcal{M}_\phi := \int_0^1 \phi(u) \text{VaR}(u) du,$$

ein spektrales Risikomaß mit Risikospektrum  $\phi$  ist.

**Bemerkung**

$\mathcal{M}_\phi$  ist von der Verteilung von  $X$  abhängig.

#### 3.1. Value at Risk und spektrales Risikomaß

Zur Wiederholung:

$$\begin{aligned} \text{VaR} &= \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\}, \\ \text{ES}_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}(u) du. \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Erlaubt man im Integral für  $\mathcal{M}_\phi$  die sogenannte *Diracsche Deltafunktion* im Punkt  $\alpha$  als  $\phi$ , so ergibt sich  $\mathcal{M}_\phi = \text{VaR}(\alpha)$ . Allerdings ist die Deltafunktion trotz ihres Namens keine Funktion, sondern eine verallgemeinerte Funktion (Distribution). Daher ist die Definition eines spektralen Risikomaßes nicht anwendbar und  $\text{VaR}(\alpha)$  ist kein spektrales Risikomaß.  $\text{VaR}(\alpha)$  lässt sich trivialerweise darstellen als

$$\text{VaR}(\alpha) = \int_0^1 \text{VaR}(u) \delta_\alpha(du),$$

wobei  $\delta_\alpha$  das *Dirac*-Maß in  $\alpha$  bezeichnet.

Im nächsten Schritt definieren wir die Ausfallrate  $h_{SR}^{(i)}$  von  $\mathcal{M}_\phi$ , die hier als Teststatistik von den spektralen Risikomaßen dient.

*Ableitung der Teststatistik und Testabdeckung***Definition** (Ausfallrate)

Für ein zulässiges Risikospektrum  $\phi$  und jeden einzelnen Handelstag  $i = 1, 2, \dots, T$ , ist  $h_{SR}^{(i)} \in [0, 1]$  definiert als:

$$h_{SR}^{(i)}(\phi) = \int_0^1 \phi(u) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} du. \quad (5)$$

Man sagt, dass die Ausfallrate  $h_{SR}^T \in [0, 1]$  von  $\mathcal{M}_\phi$ , für ein zulässiges Risikospektrum  $\phi$ , gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} h_{SR}^T(\phi) &:= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T h_{SR}^{(i)}(\phi) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_0^1 \phi(u) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} du. \end{aligned}$$

Um dies besser zu verstehen, können wir die Ausfallrate von  $\mathcal{M}_\phi$  noch weiter umschreiben:

$$\begin{aligned}
h_{SR}^T(\phi) &:= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_0^1 \phi(u) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} du \\
&= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_0^1 \phi(u) \mathbb{1}_{\{\text{VaR}_i^{-1}(X_i) \leq u\}} du \\
&= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_{\text{VaR}_i^{-1}(X_i)}^1 \phi(u) du \\
&= 1 - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \Phi(\text{VaR}_i^{-1}(X_i))
\end{aligned}$$

wobei  $\Phi' = \phi$ .

**Definition** (Erwartungswert und Varianz)

Sei  $h_{SR}^T \in [0, 1]$  definiert als

$$\begin{aligned}
h_{SR}^T(\phi) &:= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T h_{SR}^{(i)}(\phi) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_0^1 \phi(u) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} du.
\end{aligned}$$

Unter der Nullhypothese  $H_0$  sind der Erwartungswert und die Varianz wie folgt definiert:

$$\mu_\phi := \mathbb{E}[h_{SR}^T(\phi)] = \int_0^1 \phi(u) u du \tag{6}$$

und

$$\sigma_\phi^2 := \mathbb{V}[h_{SR}^T(\phi)] = \frac{1}{T} \left( 2 \int_0^1 \int_0^u \phi(u) \phi(v) v du dv - \left( \int_0^1 \phi(u) u du \right)^2 \right) \tag{7}$$

## BEWEIS

Zuerst wollen wir den Erwartungswert der Ausfallrate von einem einzelnen Handelstag  $i$  berechnen, also  $h_{SR}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h_{SR}^{(i)}(\phi)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \phi(u) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} du\right] \\
&= \int_0^1 \phi(u) \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}}\right] du \\
&= \int_0^1 \phi(u) \mathbb{P}\left[X_i \leq \text{VaR}_i(u)\right] du \\
&= \int_0^1 \phi(u) u du.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h_{SR}^T(\phi)] &:= \mathbb{E}\left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T h_{SR}^{(i)}(\phi)\right] \\
&= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbb{E}\left[h_{SR}^{(i)}(\phi)\right] \\
&= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_0^1 \phi(u) u du \\
&= \int_0^1 \phi(u) u du.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[h_{SR}^{(i)}(\phi)] = \mathbb{E}[h_{SR}^T(\phi)].$$

Für die Varianz betrachten wir die Ausfallrate der einzelnen Handelstage:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(h_{SR}^{(i)}(\phi))^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 \phi(u) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} du\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 \phi(u) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} du \int_0^1 \phi(v) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(v)\}} dv\right)\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^u \phi(u)\phi(v) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(v)\}} dudv\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^u \phi(u)\phi(v) \mathbb{1}_{\{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\} \cap \{X_i \leq \text{VaR}_i(v)\}\}} dudv\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^u \phi(u)\phi(v) \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(v)\}} dudv\right], \text{ unter der Annahme, dass } v \leq u \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^u \phi(u)\phi(v) \mathbb{P}[X_i \leq \text{VaR}_i(v)] dudv \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^u \phi(u)\phi(v) v dudv.
\end{aligned}$$

Des Weiteren benutzen wir die Definition des Erwartungswerts und bekommen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[h_{SR}^{(i)}(\phi)] &:= \mathbb{E}[(h_{SR}^{(i)}(\phi))^2] - \mathbb{E}[h_{SR}^{(i)}(\phi)]^2 \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^u \phi(u)\phi(v) v dudv - \left(2 \int_0^1 \phi(u) u du\right)^2.
\end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[h_{SR}^T(\phi)] &:= \mathbb{V}\left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T h_{SR}^{(i)}(\phi)\right] \\
&= \frac{1}{T^2} \left( \sum_{i=1}^T \mathbb{V}h_{SR}^{(i)}(\phi) + \sum_{i \neq j} \text{corr}(h_{SR}^{(i)}(\phi), h_{SR}^{(j)}(\phi)) \right) \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \left( 2 \int_0^1 \int_0^u \phi(u)\phi(v) v dudv - \left( \int_0^1 \phi(u) u du \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{T} \left( 2 \int_0^1 \int_0^u \phi(u)\phi(v) v dudv - \left( \int_0^1 \phi(u) u du \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

□

**Lemma**

Die Ausfallrate  $h_{SR}^T$  ist unter der Nullhypothese  $H_0$  asymptotisch normalverteilt und erlaubt damit einen  $Z$ -Test.

**BEWEIS**

Unter  $H_0$  ist die Reihe  $\{h_{SR}^{(i)}\}_{i=1}^T$  identisch gleichverteilt mit  $\mathbb{E}[h_{SR}^{(i)}] < \infty$  und die Varianz ist gegeben wie in der Gleichung (7). Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\sqrt{T}(h_{SR}^T(\phi) - \mu_\phi) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2).$$

Die linke Seite konvergiert punktweise gleichmäßig gegen die Normalverteilung mit  $\mathbb{E} = 0$  und  $\mathbb{V} = \sigma_\phi^2$ .

Somit gilt

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \mathbb{P} \left[ \sqrt{T}(h_{SR}^T(\phi) - \mu_\phi) \leq \xi \right] - \Phi(\xi/\sigma_\phi) \right\| = 0.$$

Für genügend große  $T$  ist  $h_{SR}^T$  annähernd normalverteilt und damit behält die Teststatistik  $Z$  die Nullhypothese  $H_0$  bei. □

**Theorem** (Testabdeckung für  $\mathcal{M}_\phi$ )

Seien  $\mu_\phi$  und  $\sigma_\phi^2$  der Erwartungswert und die Varianz von  $h_{SR}^T$ . Sie sind unter der Nullhypothese  $H_0$  gegeben durch:

$$\mu_\phi = \int_0^1 \phi(u) u du,$$

$$\sigma_\phi = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{2 \int_0^1 \int_0^u \phi(u) \phi(v) v du dv - \left( \int_0^1 \phi(u) u du \right)^2}.$$

Die Teststatistik  $Z_{SR}^T$  für die Ausfallrate  $h_{SR}^T$  und die Testabdeckung für  $\mathcal{M}_\phi$  ist definiert durch:

$$Z_{SR}^T(\phi) := \frac{\hat{h}_{SR}^T(\phi) - \mu_\phi}{\sigma_\phi}. \tag{8}$$



## BEWEIS

Nach dem Lemma von oben, erlaubt die Teststatistik  $Z_{SR}^T$  einen  $Z$ -Test für die Ausfallrate  $h_{SR}^T$ . Unter der Nullhypothese  $H_0$  sind der Erwartungswert und die Varianz definiert wie in den Gleichungen (6) und (7), was zur Formel (8) führt. □

### 3.2. Anwendung auf Expected Shortfall

Um die Testabdeckung für spektrale Risikomaße anwenden zu können, müssen wir den Expected Shortfall als spektrales Risikomaß mit einer geeigneten Wahl vom Spektrum  $\phi$  definieren.

#### Definition

Der Expected Shortfall ist ein Spezialfall von spektralen Risikomaßen mit einem Spektrum  $\phi$  definiert durch:

$$\phi_{ES}(u) := \frac{1}{\alpha} \mathbb{1}_{\{0 \leq u \leq \alpha\}}.$$

Damit kann man den Expected Shortfall schreiben als:

$$\mathcal{M}_{ES}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\text{VaR}(u)}{\alpha} du.$$

Solange  $\phi_{ES}$  ein zulässiges Risikospektrum ist, erfüllt  $\mathcal{M}_{ES}$  alle mathematischen Eigenschaften eines spektralen Risikomaßes.

Weiter definieren wir die Ausfallrate vom Expected Shortfall,  $h_{ES}^T$ :

$$h_{ES}^T(\alpha) := \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \mathbb{1}_{\{X_i \leq \text{VaR}_i(u)\}} du.$$

Diese Gleichung entspricht der definierenden Gleichung von  $h_{SR}^T$  mit  $\phi = \phi_{ES}$ . Nach dem Theorem über die Testabdeckung ist  $h_{ES}^T$  asymptotisch normalverteilt und erlaubt die  $Z$ -Teststatistik. Um die Funktion  $Z$  zu bestimmen, müssen wir Erwartungswert und Varianz von  $h_{ES}^T$  unter der Nullhypothese  $H_0$  ausrechnen. Wir setzen  $\phi_{ES}$  in die Glei-

chungen (6) und (7) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\mu_{ES} &= \int_0^1 \phi_{ES}(u)u du \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha u du \\ &= \frac{\alpha}{2},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma_{ES}^2(\phi) &= \frac{1}{T} \left( 2 \int_0^1 \int_0^u \phi_{ES}(u)\phi_{ES}(v)vdudv - \mu_{ES}^2 \right) \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{2}{\alpha^2} \int_0^\alpha \int_0^u vdudv - \mu_{ES}^2 \right) \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{2}{\alpha^2} \int_0^\alpha \frac{1}{2}u du - \frac{1}{4}\alpha^4 \right) \\ &= \frac{\alpha}{T} \left( \frac{4 - 3\alpha}{12} \right)\end{aligned}$$

Wir passen das Theorem für die Testabdeckung für  $\mathcal{M}_{ES}$  an.

### Korollar

$\mathcal{M}_{ES}$  erlaubt die Z-Teststatistik mit Z-Funktion

$$\begin{aligned}Z_{ES}^T(\alpha) &= \frac{\hat{h}_{ES}^T(\alpha) - \mu_{ES}(\alpha)}{\sigma_{ES}(\alpha)} \\ &= \sqrt{3T} \left( \frac{2\hat{h}_{ES}(\alpha) - \alpha}{\sqrt{\alpha(4 - 3\alpha)}} \right).\end{aligned}$$

## 4. Backtesting

Im vorhergehenden Kapitel haben wir ein paar wichtige Standardmethoden behandelt, die zur Bestimmung von  $\rho$  verwendet werden.

Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Risikomaße hängt von ihrer Fähigkeit die zukünftigen unerwarteten Verluste zu prognostizieren und abzudecken ab. Aus diesem Grund sollten Risikomaße durch die Backtesting-Methode überprüft werden. Gemäß dem Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (1996, [3]), ist Backtesting ein statistisches Verfahren um tatsächliche Gewinne und Verluste mit prognostizierten Wertveränderungen zu vergleichen.

### **Definition**

Backtesting (Rückvergleich) bezeichnet den Prozess eine Strategie oder ein Modell zu bewerten, indem die Strategie bzw. das Modell auf historische Daten angewandt wird. Ein wesentlicher Unterschied zwischen Backtesting und anderen historischen Tests ist, dass beim Backtesting berechnet wird, wie sich eine Strategie verhalten hätte, wenn sie tatsächlich ausgeführt worden wäre. Daher ist es für ein korrektes Backtesting-Ergebnis nötig, die relevanten historischen Bedingungen richtig zu replizieren.

Unter der Annahme, dass zukünftige Ereignisse eine große Ähnlichkeit zu vergangenen Ereignissen besitzen, ist Backtesting ein hilfreiches Werkzeug für Analysen und Prognosen.

### **Backtesting als Qualitätssicherung im Risikomanagement**

Backtesting wird im Risikomanagement von Banken eingesetzt, um die Qualität der Risikomaße zu überprüfen. Dabei wird verglichen, wie oft die prognostizierte Verlustgrenze überschritten wird.

Auch bei Ratingmodellen müssen Banken regelmäßige Evaluierungen durchführen. Dabei spielt das Backtesting der Ausfallwahrscheinlichkeiten eine große Rolle. Es wird kontrolliert, inwieweit die vorhergesagte Anzahl von Ausfällen mit der tatsächlich eingetretenen Anzahl von Ausfällen übereinstimmt, wobei in der Praxis dafür oft der Binomialtest verwendet wird.

## 4.1. Backtesting VaR

In diesem Kapitel betrachten wir den einheitlichen Rahmen für die Hypothesenprüfung. Im nächsten Schritt analysieren wir drei verschiedene Hypothesentests genauer:

- a) Test von Kupiec (1995);
- b) Unabhängigkeitstest;
- c) Test von Christoffersen (1998).

Bevor wir mit einer ausführlichen Analyse beginnen, legen wir unsere Rahmenbedingungen fest:

Wir betrachten die Pfade  $(y_t)_{t=1}^T$  einer Zeitreihe  $y_t$  und ein Intervall  $\{L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p)\}$  mit einer unteren ( $L_{t|t-1}(p)$ ) und einer oberen Intervallgrenze ( $U_{t|t-1}(p)$ ). Für die Realisation der Zeitreihe ist die Indikatorvariable wie folgt definiert:

### Definition

Sei eine Intervall-Prognose  $\{L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p)\}$  zum Zeitpunkt  $t - 1$  für eine beliebige Zeit  $t \forall t$  gegeben. Die Indikatorvariable  $I_t$  ist damit definiert durch:

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{für } y_t \in [L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p)], \\ 0, & \text{für } y_t \notin [L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p)], \end{cases}$$

wobei  $L_{t|t-1}(p)$  und  $U_{t|t-1}(p)$  eine untere und eine obere Schranke dieser Intervall-Prognose mit Überdeckungswahrscheinlichkeit  $p$ , sind.

In der nächsten Definition der bedingten Effizienz wird die Indikatorvariable  $I_t$  mit einer allgemeinen Informationsmenge  $\Psi_{t-1}$  kombiniert.

### Definition

Man sagt, die Zeitreihe  $I_t$  auf dem Intervall  $\{(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))\}_{t=1}^T$  ist *effizient* bezüglich  $\Psi_{t-1}$ , wenn  $\mathbb{E}[I_t | \Psi_{t-1}] = p$  gilt.

*Das operationelle Testkriterium.* Die Informationsmenge  $\Psi_{t-1}$  enthält Realisationen der Indikatorvariable aus der Vergangenheit,  $\Psi_{t-1} = \{I_{t-1}, I_{t-2}, I_{t-3}, \dots, I_1\}$ .

Das folgende Resultat ist damit einfach zu bestimmen:

### Lemma

Es gilt:  $\mathbb{E}[I_t | \Psi_{t-1}] = \mathbb{E}[I_t | I_{t-1}, I_{t-2}, I_{t-3}, \dots, I_1] = p, \forall t \Leftrightarrow \{I_t\} \sim \text{iid } \text{Ber}(p)$ .

## BEWEIS

Wenn  $\mathbb{E}[I_t | \Psi_{t-1}] = \mathbb{E}[I_t | I_{t-1}, I_{t-2}, I_{t-3}, \dots, I_1] = p$  gilt, dann ist auch  $\mathbb{E}(I_t | I_{t-1}, I_{t-2}, I_{t-3}, \dots, I_1) = p, \forall t$ .

Dies impliziert die Unabhängigkeit und  $\mathbb{E}[I_t] = p, \forall t$ .

Damit ist  $\{I_t\} \sim Ber(p), \forall t$ .

Die Umkehrung gilt auch und ist offensichtlich. □

Damit können wir Folgendes definieren:

### Definition

Die Folge  $I_t = \{(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))\}_{t=1}^T$  hat eine korrekte bedingte Überdeckung, wenn  $\{I_t\} \sim Ber(p), \forall t$  gilt.

#### 4.1.1. Test von Kupiec

(Unbedingte Testabdeckung)

Der Kupiec-Test überprüft, ob das beobachtete Quantil mit dem vorgegebenen übereinstimmt.

Sei  $(I_t)$  eine wie oben definierte Folge. Um die unbedingte Überdeckung zu testen werden die Hypothesen  $\mathbb{E}[I_t] = p$  und  $\mathbb{E}[I_t] \neq p$  gegenübergestellt.

Konkret hier:

$H_0$ : identisch verteilte Bernoullivariablen,  $Ber(p)$ ,

$H_1$ : identisch verteilte Bernoullivariablen,  $Ber(\pi)$ .

Unter der Nullhypothese ist die Likelihood-Funktion gegeben durch:

$$L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - p)^{n_0} p^{n_1},$$

mit

$$n_1 = \sum_{t=1}^T I_t$$

und

$$n_0 = T - n_1.$$

Als Alternativhypothese haben wir :

$$L(\pi; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi)^{n_0} \pi^{n_1}.$$

Zum Testen unter der unbedingten Überdeckung benutzen wir folgende Likelihood-Ratio-Statistik:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[ \frac{L(p; I_1, I_2, \dots, I_T)}{L(\hat{\pi}; I_1, I_2, \dots, I_T)} \right] \sim \chi^2(s - 1) = \chi^2(1),$$

wobei  $\hat{\pi} = n_1 / (n_0 + n_1)$  der Schätzwert von  $\pi$  und  $s = 2$  die Anzahl der möglichen Ausgänge ist.

Überschreitet der Wert der LR-Statistik einen kritischen Wert wie z.B. das 95% -Quantil der Chi-Quadrat(1)-Verteilung, wird die Nullhypothese abgelehnt, andernfalls wird sie angenommen. Die Wahl des Konfidenzniveaus basiert auf zwei Fehlertypen:

Fehlertyp I: das richtige Modell wird verworfen,  
 Fehlertyp II: das falsche Modell wird angenommen.

#### 4.1.2. Unabhängigkeitstest

Hier testen wir die Unabhängigkeit der bedingten Überdeckung.

Wir betrachten eine binäre Markovkette erster Ordnung,  $(I_t)$  mit einer Übergangsmatrix

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix},$$

wobei  $\pi_{ij} = \mathbb{P}(I_t = j \mid I_{t-1} = i)$ . Die Likelihood-Funktion für diesen Prozess sieht folgendermaßen aus:

$$L(\Pi_1; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}},$$

wobei

$$n_{ij} = \sum_{t=2}^T I_{\{I_{t-1}=i, I_t=j\}}$$

die Anzahl der Beobachtungen ist.

Es ist einfach die Likelihood-Funktion zu maximieren und zu lösen für Parameter, die Kennzahlen des entsprechenden Eintrages sind:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}} & \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \\ \frac{n_{10}}{n_{10}+n_{11}} & \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \end{bmatrix}.$$

Betrachten wir nun die Output-Folge  $I_t$ . Der Schätzer der Markovkette erster Ordnung ist  $I$  und testet die Hypothese, dass die Folge unabhängig ist. Die folgende Matrix entspricht der Unabhängigkeit:

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{bmatrix}.$$

Unter der Nullhypothese  $H_0$  ist die Likelihood-Funktion gegeben durch:

$$L(\Pi_2; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_2)^{n_{00}+n_{10}} \pi_2^{n_{01}+n_{11}}$$

und der ML-Schätzer durch

$$\hat{\Pi} = \hat{\pi}_2 = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}}.$$

Laut Hoel (1954) ist dieser Test asymptotisch  $\chi^2(1)$ -verteilt mit  $(s - 1)^2$  Freiheitsgraden für  $s = 2$ . Damit gilt:

$$LR_{ind} = -2 \ln \left[ \frac{L(\hat{\Pi}; I_1, I_2, \dots, I_T)}{L(\Pi; I_1, I_2, \dots, I_T)} \right] \sim \chi^2((s - 1)^2) = \chi^2(1).$$

wobei  $s = 2$  ist.

### 4.1.3. Test von Christoffersen

(Bedingte Testabdeckung)

Dieser Test ist eine Kombination vom Kupiec's Test und dem oben beschriebenen Unabhängigkeitstest.

Der Unabhängigkeitstest wird unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit  $\pi_{ij}$ , also der heutigen Beobachtung des Ereignisses  $j$ , bedingt auf den Zustand  $i$  von gestern, durchgeführt. Also,

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}},$$
$$\hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}},$$

wobei  $n_{ij}$  die Anzahl der Tage ist, an welchen die Bedingung  $j$  auftritt, unter der Annahme, dass die Bedingung  $i$  am Tag davor aufgetreten ist.

Solange unser Modell korrekt ist, hängen die Ausnahmen vom Zustand  $j$  ab, also von heute, nicht von den Ausnahmen des Zustandes  $i$ , die am Tag zuvor eingetroffen sind.

Damit gilt unter der Nullhypothese:

$$\hat{\pi}_{01} = \hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11} + n_{01}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}},$$

oder wie beim Unabhängigkeitstest

$$\hat{\Pi} = \hat{\pi}_2 = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}}.$$

Die Nullhypothese aus dem Kupiec-Test wird gegenüber der Alternativhypothese aus dem Unabhängigkeitstest getestet. Also, wir suchen die Verteilung von:

$$LR_{cc} = -2 \ln \left[ \frac{L(p; I_1, I_2, \dots, I_T)}{L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)} \right]$$

und erhalten das folgende Resultat.

#### **Proposition**

Die Verteilung der bedingten Testabdeckung ist asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $s(s - 1)$  Freiheitsgraden für  $s = 2$ . Wir schreiben:

$$LR_{cc} = -2 \ln \left[ \frac{L(p; I_1, I_2, \dots, I_T)}{L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)} \right] \sim \chi^2(s(s - 1)) = \chi^2(2).$$



## BEWEIS (nach Christoffersen)

Bedingt auf die erste Beobachtung, ist die Likelihood-Funktion für die Markovkette 1.Ordnung mit Zustand  $s$  gegeben durch:

$$L = \prod_{i,j}^s \pi_{ij}^{n_{ij}}.$$

Bei der Nullhypothesenprüfung gilt:  $\pi_{ij} = \pi_j$ . Der ML-Schätzer unter  $H_1$  ist  $\hat{\pi}_{ij} = n_{ij}/n_i$  mit  $n_i = \sum_{j=1}^s n_{ij}$ .

Wir suchen die Verteilung von  $-2 \ln(\lambda)$ , wobei  $\lambda = L_0(\pi_j)/L(\hat{\pi}_{ij})$ . Bartlett (1951) hat bewiesen, dass die Übergänge  $n_{ij}$  asymptotisch normalverteilt sind, so dass

$$L \sim c |A|^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} [n - \mu]' A [n - \mu]\right)$$

gilt, wobei  $[n - \mu]$  ein Vektor der linear unabhängigen Variablen  $n_{ij} - \mu_{ij}$  ist, mit  $\mu_{ij} = \mathbb{E}[n_{ij}]$ . Verwenden wir dieses Resultat, so bietet sich für  $\lambda$  das Folgende an:

$$\lambda \sim \frac{c |A^0|^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} [n - \mu^0]' A^0 [n - \mu^0]\right)}{c |\hat{A}|^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} [n - \hat{\mu}]' \hat{A} [n - \hat{\mu}]\right)}.$$

Hier werden Parameter  $A$  und  $\mu$  durch ihre ML-Schätzer ersetzt. Dies können wir umschreiben als:

$$-2 \ln(\lambda) \sim \ln\left(\frac{|\hat{A}|}{|A^0|}\right) + [n - \mu^0]' A^0 [n - \mu^0] + [n - \hat{\mu}]' \hat{A} [n - \hat{\mu}].$$

Unter der Nullhypothese  $H_0$  konvergiert  $\hat{\pi}_{ij}$  gegen  $\pi_{ij} = \pi_j$ . Damit konvergiert  $|\hat{A}|$  gegen  $|A^0|$  und wir erhalten

$$-2 \ln(\lambda) \sim [n - \mu^0]' A^0 [n - \mu^0] + [n - \hat{\mu}]' \hat{A} [n - \hat{\mu}].$$

Es kann noch gezeigt werden, dass  $\hat{\mu}_{ij} = n_{ij}$ . Somit verschwindet der zweite Term in diesem Ausdruck und es bleibt übrig:

$$-2 \ln(\lambda) \sim [n - \mu^0]' A^0 [n - \mu^0].$$

Die Elemente in  $[n - \mu^0]$  sind vom Typ  $w_{ij} = n_{ij} - \pi_i n_j$ .

Es gibt  $s - 1$  unabhängige Einschränkungen der Form  $\sum_{i=1}^s n_{ij} = n_j = \sum_{t=1}^s n_{jt}$ , und zusätzlich  $\sum_{i,j} n_{ij} = n$ . Damit gibt es  $s^2 - s = s(s - 1)$  unabhängige Variablen in quadratischer Form und wir erhalten

$$-2 \ln(\lambda) \sim \chi^2(s(s - 1)).$$

Im binären Fall, also  $s = 2$ , haben wir eine  $\chi^2(2)$ -Verteilung. □

Die gemeinsame log-Likelihood-Ratio-Statistik für die bedingte Testabdeckung ist gegeben durch:

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi_2^2.$$

Somit ist  $LR_{cc}$   $\chi^2$ -verteilt mit 2 Freiheitsgraden, wobei wir die zwei getrennten Statistiken  $LR_{uc}$  und  $LR_{ind}$ , als Teilkomponenten beibehalten.

Solange der Wert von  $LR_{cc}$  kleiner als der kritische Wert von der  $\chi^2$ -Verteilung ist, wird das Modell angenommen.

## 4.2. Backtesting Expected Shortfall

Value at Risk war bisher der beliebteste Basler Standard für Risikomessung. Jedoch besitzt der Value at Risk einige unerwünschte Eigenschaften. Eine entscheidende ist, dass er keine Verluste, die größer als VaR-Quantile sind, berücksichtigt. Einige weitere Schwächen von Value at Risk, die zu seiner Ersetzung beigetragen haben, sind seine Unfähigkeit die Tail-Risiken zu erfassen sowie die fehlende Reaktivität auf heutige Marktschwankungen. Deshalb wurde im Oktober 2013 vom Basler Ausschuss für Bankenaufsicht [5] vorgeschlagen, nach besseren Risikomaßen zu suchen, die diese Mängel beheben. Es wurde vorgeschlagen den Value at Risk durch den Expected Shortfall zu ersetzen.

In diesem Teil passen wir die Standardrahmenbedingungen für eine unbedingte Testabdeckung, analog wie beim Value at Risk, auf den Expected Shortfall an. Wir gehen davon aus, dass die Nullhypothese angenommen wird, wenn die Vorhersage korrekt ist, während die Alternativhypothese bei der Risikounterschätzung gewählt wird.

Im nächsten Schritt betrachten wir die folgenden drei Ansätze für den Rückvergleich des Expected Shortfalls.

### 4.2.1. Ansatz von Acerbi & Szekely

Acerbi und Szekely definieren drei Teststatistiken unter jeweils unterschiedlichen Annahmen. Für alle drei Fälle gilt: Die Teststatistik  $Z_i$ , für  $i = \{1, 2, 3\}$ , ist gleich.

Starte mit realisierten Statistiken  $Z_i(\vec{\varphi})$ :

1) Simuliere eine Menge von identisch gleichverteilten Zufallsvariablen  $X_t$ :

$$X_t^j \forall t = 1, \dots, T, j = 1, \dots, M \text{ und für hinreichend großes } M.$$

2) Berechne die Teststatistik durch Simulation von  $X_t^j$ :

$$Z_i^j = Z_i(X_t^j) \text{ für } i = \{1, 2, 3\}.$$

3) Schätzung der Quantile durch:

$$p = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M 1_{\{Z_i^k < (\bar{X})\}}.$$

Die *erste Teststatistik*  $Z_1$  ist gegeben durch:

$$Z_1(\vec{X}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \frac{I_t X_t}{\text{ES}_t^\alpha} + 1, \quad N > 0,$$

wobei  $I_t = 1_{\{X_t < \text{VaR}_t^\alpha\}}$  die Indikatorfunktion von VaR-Überschreitungen ist.

Die Nullhypothese  $H_0$  ist:

$$P_t^\alpha = F_t^\alpha \forall t,$$

wobei die Verteilung  $F_t^\alpha$  für  $F_t^\alpha(X_t) = \min(1, F_t(X_t)/\alpha)$ , wenn  $X_t < \text{VaR}_t^\alpha$  steht und  $P_t$  eine unbekannte Verteilung ist.

Die Alternativhypothese ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} H_1 : \text{ES}_t^{\alpha,P} &\geq \text{ES}_t^{\alpha,F} \forall t \text{ und } > \text{ für manche } t, \\ \text{VaR}_t^{\alpha,P} &= \text{VaR}_t^{\alpha,F} \forall t. \end{aligned}$$

Unter der Alternativhypothese  $H_1$  wird der Value at Risk als richtig angenommen. Der Test ist für die Variable  $T$  nicht geeignet.

*Teststatistik*  $Z_2$ :

$$Z_2(\vec{X}) = \frac{1}{T\alpha} \sum_{t=1}^T \frac{I_t X_t}{\text{ES}_t^\alpha} + 1,$$

wenn  $N > 0$ .

Die  $H_0$  Hypothese ist gleich wie die in obiger Teststatistik; Die Alternativhypothese ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} H_1 : \text{ES}_t^{\alpha,P} &\geq \text{ES}_t^{\alpha,F} \forall t > \text{ als manche } t \text{ und} \\ \text{VaR}_t^{\alpha,P} &\geq \text{VaR}_t^{\alpha,F} \forall t. \end{aligned}$$

**Bemerkung:**  $\mathbb{E}_{H_0}[N] = T\alpha$ .

Die Teststatistik  $Z_2$  lehnt die großen Werte der kleinen Größenordnung von VaR ab. Dies führt zu einem signifikanten Unterschied zu  $Z_1$ : Die Verwerfung der Nullhypothese  $H_0$  unter der  $Z_2(\vec{X})$ -Statistik impliziert, dass die Ablehnung vom  $\text{VaR}_t^{\alpha, F}$  richtig ist.

*Teststatistik  $Z_3$ :*

Es ist möglich die Tails eines Modells rückzuvergleichen, wenn die dazugehörigen Ränge  $U_t = F_t(X_t)$  univariant identisch gleichverteilt  $U(0, 1)$  sind. Wir definieren im Folgenden einen ES-Schätzer durch:

$$\widehat{\text{ES}}_{\alpha}^{(N)}(\vec{X}) = -\frac{1}{[N\alpha]} \sum_i^{[N\alpha]} X_{i:N}.$$

Hier ist  $\vec{X} = \{X_i\}$  ein Vektor von  $N$  identisch gleichverteilten Komponenten, wobei  $X_{i:N}$  die  $i$ -te Ordnungsstatistik beschreibt.

Man definiert noch die kumulative Verteilungsfunktion (CDF) als

$$\vec{F}_t^{-1} : \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}^T \text{ als } \vec{F}_t^{-1}(\vec{U}) = \{F_t(U_i)\}, \text{ für } i = 1, \dots, T.$$

Damit ist die Teststatistik gegeben durch:

$$Z_3(\vec{\varphi}) = -\frac{1}{T\alpha} \sum_{t=1}^T \frac{\widehat{\text{ES}}_T^{\alpha}(\vec{F}_t^{-1}(\vec{U}))}{\mathbb{E}_V[\widehat{\text{ES}}_T^{\alpha}(\vec{F}_t^{-1}(\vec{V}))]},$$

wobei die Einträge  $\vec{V} = \{V_t\}$  univariant identisch verteilt  $U(0, 1)$  sind.

Aufgrund der Form von  $\vec{V}$  kann der Nenner folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\mathbb{E}_V[\widehat{\text{ES}}_T^{\alpha}(\vec{F}_t^{-1}(\vec{V}))] = -\frac{T}{[T\alpha]} \int_0^1 I_{1-\nu}(T - [T\alpha], [T\alpha]) \vec{F}_t^{-1}(\nu) d\nu,$$

wobei die Funktion  $I_x(a, b)$  für eine unvollständige Regulationsfunktion  $\beta_x(a, b)$  steht, die auch eine kumulative Verteilungsfunktion der Betaverteilung  $\beta(a, b)$  ist, geschrieben

als:

$$I_x(a, b) = \int_0^x u^{a-1}(1-u)^{b-1} du.$$

Also ist in diesem Fall  $\mathbb{E}_{H_0}[Z_3] = 0$  und  $\mathbb{E}_{H_1}[Z_3] < 0$ . Die beiden Hypothesen lauten:

$$H_0 : P_t = F_t, \forall t,$$

$$H_1 : F_t \succeq P_t, \forall t \text{ and } \succ \text{ für manche } t,$$

wobei  $\succeq$  ( $\succ$ ) die stochastische Dominanz erster Ordnung beschreibt.

#### 4.2.2. Ansatz von Constanzino & Curran

In der Tat waren Emmer, Kratz und Tasche [12] die ersten, die bemerkten, dass der Expected Shortfall indirekt elizitierbar ist, solange er durch verschiedene Value at Risk-Schätzungen approximiert werden kann. Sie schlugen vor, folgende Approximation vom Expected Shortfall durchzuführen:

$$\begin{aligned} \text{ES}_t^\alpha &= \int_0^\alpha \text{VaR}_t^u du \\ &\cong \frac{1}{4}(\text{VaR}_t^{\frac{\alpha}{4}} + \text{VaR}_t^{\frac{\alpha}{2}} + \text{VaR}_t^{\frac{3\alpha}{4}} + \text{VaR}_t^\alpha), \end{aligned}$$

wobei diese Gleichung auf vier verschiedenen VaR-Konfidenzintervallen basiert. Der Ansatz von Constanzino & Curran, den wir in diesem Abschnitt besprechen, ist eine Fortsetzung von der Arbeit Emmer, Kratz und Tasche [12].

#### Proposition

Gegeben sei  $T$  mit  $\mathbb{E}[T^2] < \infty$  und mit Varianz  $|\overline{X}_t|$ ,  $\overline{X}_t^2 < \infty$ . Sei weiter  $F_t$  eine Verteilungsfunktion mit endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz. Der spektrale Expected Shortfall erlaubt die asymptotische Normalverteilung von  $Z$ , nämlich

$$Z_{ES}^T = \frac{\hat{h}_{ES}^T - \mu_{ES}}{\sigma_{ES}^T},$$

wobei

$$h_{ES}^T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha 1_{\{X_t \leq \text{VaR}_t^u\}} du,$$

$$\mu_{ES} = \frac{\alpha}{2},$$

$$(\sigma_{ES}^T)^2 = \frac{\alpha}{T} \left( \frac{4 - 3\alpha}{12} \right).$$

Der Value at Risk ist definiert als  $\text{VaR}_t^\alpha = F_t^{-1}(\alpha)$ . In anderen Worten, für jedes gegebene  $T$  und  $\alpha$  ist  $Z_c^T$  wie folgt definiert:

$$Z_{ES}^T = \sqrt{3T} \frac{2h_{ES}^T - \alpha}{\sqrt{\alpha(4 - 3\alpha)}}.$$

### BEWEIS

Siehe Abschnitt 3.2.

□

Die Nullhypothese ist definiert als:  $H_0 : \{h_{ES}^i\}_{i=1}^T$  unabhängig identisch gleichverteilt und

$$\text{VaR}_t^{u, P_t} = \text{VaR}_t^{u, F_t}, \forall u \in (0, \alpha], t = 1, \dots, T \text{ mit}$$

$$h_{ES}^T = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha 1_{\{X_t \leq \text{VaR}_t^u\}} du.$$

Hier steht  $\text{VaR}_t^{u, P_t}$  für ein Value at Risk-Risikomaß unter einer unbekanntten Verteilung  $P_t$ .

### 4.2.3. Ansatz von Wong

Dieser Ansatz basiert auf einer kleinen Stichprobe, welche die asymptotische Entwicklung für  $\mathbb{P}(\mu_X \leq \bar{X})$  angewandt auf eine Zufallsvariable  $X$  mit Stichprobenmittel  $\bar{X}$ , darstellt und bei welcher der wahre Mittelwert  $\mu_X$  ist.

Wir betrachten zuerst ein Portfolio  $\varphi$  mit Standardnormalverteilung  $\Phi$ . Definiere die Zufallsvariable  $X$  so, dass gilt:

$$\mathbb{P}_q(X \leq x) = \mathbb{P}(\varphi \leq x \mid \varphi < q) = \frac{\mathbb{P}(\varphi \leq x)}{\mathbb{P}(\varphi < q)},$$

wobei  $q = \Phi^{-1}(\alpha)$  und  $x < q$ . Das heißt,  $X$  bezieht sich auf das Portfolio  $\varphi$  bedingt auf Überschreitung des VaR-Intervalls.

Weiter betrachten wir eine Tail-Verteilung des Portfolios mit ihrer momentenerzeugenden und ihrer kumulantenerzeugenden Funktion. Die Zufallsvariable  $X$  besitzt hier Normalverteilung  $N(0, 1)$  und ist auf VaR-Konfidenzniveau  $\alpha$  angepasst:

$$\Phi_x = \begin{cases} \alpha^{-1}\Phi(X_t), & \text{wenn } X_t < q, \\ 1, & \text{wenn } X_t \geq q, \end{cases}$$

mit ihrer momentenerzeugenden Funktion und ihrer ersten und zweiten Ableitung,

$$M(t) = \alpha^{-1}e^{t^2/2}\Phi(q - t),$$

$$M'(t) = t \cdot M(t) - \alpha^{-1}e^{qt}\phi(q),$$

$$M''(t) = t \cdot M'(t) + M(t) - \alpha^{-1}e^{qt}\phi(q).$$



Die kumulantenerzeugende Funktion ist gegeben durch:

$$K(t) = \ln(M(t)),$$

$$K'(t) = \frac{M'(t)}{M(t)}, \text{ und}$$

$$K''(t) = \frac{M''(t)}{M(t)} - \left[ \frac{M'(t)}{M(t)} \right]^2.$$

**Proposition**

Seien  $X_i$  iid Zufallsvariablen, für  $i = 1, 2, \dots, N$ , mit einer Verteilung wie in der Gleichung (5). Es gilt:

$$\mathbb{P}(\mu_X < \bar{X}) = \begin{cases} \Phi(\zeta) - \phi(\zeta) \cdot \left( \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\zeta} + \mathbf{O}(N^{-\frac{3}{2}}) \right), & \text{für } \bar{X} < q, \\ 1, & \text{für } \bar{X} \geq q, \end{cases}$$

wobei

$$q = \Phi^{-1}(\alpha),$$

$$\nu = \bar{\omega} \sqrt{2N[\bar{\omega} - K(\bar{\omega})]},$$

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} -1, & \text{für } s < 0, \\ 0, & \text{für } s = 0, \\ 1, & \text{für } s > 0, \end{cases}$$

wobei  $\bar{\omega}$  eine Lösung von  $K'(\bar{\omega}) = q$  ist, und  $K()$ ,  $K'()$  und  $K''()$  die kumulantenerzeugende Funktion und ihre Ableitungen von  $\Phi_x$  bezeichnen.

**BEWEIS**

Siehe H. E. Daniels, The Probability Approximations (1987, [11]). □

Wong verwendet für die Verteilungsfunktion  $F_t$  keine Normalverteilung  $N(0, 1)$  und die

Portfolios  $\varphi_t$  sind nicht identisch gleichverteilt. Der VaR, der die Werte von  $Y_i$  überschreitet, ist transformiert auf seine Quantile durch die Verteilungsfunktion  $F_i$ :

$$X_i = \Phi^{-1}(F_i(Y_i)), i = 1, 2, \dots, N,$$
$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

Die Nullhypothese unter dem Ansatz von Wong ist gegeben durch:  $H_0 : \mu_X \leq \bar{X}$ .

Die Gleichung (6) ist dabei eine Teststatistik mit einer univariaten Verteilung  $U(0, 1)$ . Die Nullhypothese kann folgendermaßen interpretiert werden: der durchschnittliche Wert vom Value at Risk, der  $\mu_X = \mathbb{E}[X]$  überschreitet, ist kleiner als der erzielte Durchschnittswert  $\bar{X}$  vom Value at Risk.

### 4.3. Backtesting $\Lambda$ VaR

In diesem Abschnitt implementieren wir Value at Risk-Backtesting Rahmenbedingungen auf  $\Lambda$ VaR. Ein guter Kandidat für ein  $\Lambda$ VaR-Konfidenzniveau ist das Maximum der  $\Lambda$ -Funktion,  $\max(\Lambda)$ . Damit passen wir die beiden Tests – den Kupiec- und Unabhängigkeitstest – bezüglich  $\max(\Lambda)$  an.

Die Nullhypothesen für den Kupiec-Test und für den Unabhängigkeitstest von  $\Lambda$ VaR sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} H_0 &: \lambda \leq \max(\Lambda), \\ H_0 &: \hat{\lambda}_2 = \hat{\Pi}_2 \leq \max(\Lambda). \end{aligned}$$

Wir werden nun die ersten Rahmenbedingungen für das Backtesting-Verfahren vom  $\Lambda$ VaR kennenlernen. Corbetta und Peri [10] schlagen drei verschiedene Methoden vor. Die ersten zwei Methoden überprüfen, ob der  $\Lambda$ VaR eine präzise Intervallabdeckung aufweist. Hier wird geprüft, ob die Wahrscheinlichkeit der ex-post Verletzungen mit der von einem Modell vorausgesagten Wahrscheinlichkeit übereinstimmt. Der erste Test ist einseitig und zeigt die genauesten Resultate für das übliche Zeitfenster, 250 Handelstage, wobei der zweite zweiseitig ist und ein asymptotisches Resultat aufweist.

Der dritte Test wurde durch den Expected Shortfall-Test von Acerbi und Szekely (2014, [1]) inspiriert.

#### 4.3.1. 1. Ansatz: Testabdeckung

Wir legen die Null- und Alternativhypothese fest:

$$H_0 : \lambda_t = \lambda_t^0 \forall t,$$

$$H_1 : \lambda_t \neq \lambda_t^0 \text{ für manche } t.$$

Zuerst definieren wir die Teststatistik  $Z_1$  als die Summe der Verletzungen über den Zeithorizont  $T$ :

$$Z_1 := \sum_{t=1}^T I_t.$$

Die Verletzungen  $I_t$  sind unabhängig und die Summe der unabhängigen Bernoulli-Variablen besitzt eine Poisson-Binomialverteilung. Damit schreiben wir für  $H_0$ :

$$Z_1 \sim \text{Poiss.Bin}(\lambda_z^0).$$

Der Test ist bilateral und der kritische Bereich ist

$$C = \left\{ z_1 \mid z_1 < q_{z_1} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \cup \left\{ z_1 \mid z_1 \geq q_{z_1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}.$$

Der Zeithorizont  $T$  beträgt 250 Handelstage und die Wahrscheinlichkeit, dass  $Z_1 < q_{Z_1}(\frac{\alpha}{2})$ , ist 0. In der Praxis wird dieser Test als unilateral betrachtet und der kritische Bereich schaut dann wie folgt aus:

$$C_{Z_1} = \{z_1 \mid z_1 \geq q_{Z_1}(1 - \alpha)\} = \{z_1 \mid P_{Z_1}(z_1) > 1 - \alpha\},$$

wobei  $\alpha$  das Signifikanzniveau vom Test und  $q_{Z_1}$  das Quantil der Verteilung von  $Z_1$  unter  $H_0$  bezeichnet.

#### 4.3.2. 2. Ansatz: asymptotische Testabdeckung

Die zweite Methode basiert auf dem bekannten Lyapunov-Theorem aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Bei dem Theorem wird der zentrale Grenzwertsatz auf unabhängige, aber nicht identisch gleichverteilte Zufallsvariablen angewandt.

##### **Theorem** (Lyapunov)

Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige Zufallsvariable jeweils mit endlichen Erwartungswert  $\mu_t$  und endlicher Varianz  $\sigma_t^2$ . Definiere

$$s_n^2 = \sum_{t=1}^T \sigma_t^2.$$

Wenn für einige  $\delta > 0$ , die Lyapunov-Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_T^{2+\delta}} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[|X_t - \mu_t|^{2+\delta}] = 0$$

erfüllt ist, dann gilt für  $T \rightarrow \infty$  die folgende Konvergenz in Verteilung:

$$\frac{1}{s_T} \sum_{t=1}^T (X_t - \mu_t) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass die Lyapunov-Bedingung erfüllt ist, wenn

$$s_n^2 = \sum_{t=1}^T \lambda_t(1 - \lambda_t) \text{ und} \\ \mu_t = \lambda_t$$

gilt.

### Theorem

Sei  $\{I_t\}$  eine Folge von unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter  $\{\lambda_t\}_t$  und  $\inf_t \lambda_t = \lambda_m > 0$ , dann gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{s_T^{2+\delta}} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[|I_t - \lambda_t|^{2+\delta}] = 0 \text{ mit}$$
$$s_T^2 = \sum_{t=1}^T \lambda_t(1 - \lambda_t).$$

### BEWEIS

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|I_t - \lambda_t|^{2+\delta}] &= (1 - \lambda_t)\lambda_t^{2+\delta} + \lambda_t(1 - \lambda_t)^{2+\delta} \\ &= \lambda_t(1 - \lambda_t)(\lambda_t^{1+\delta} + (1 - \lambda_t)^{1+\delta}) \leq \lambda_t(1 - \lambda_t) \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$s_T^{2+\delta} = \left( \sum_{t=1}^T \lambda_t(1 - \lambda_t) \right)^{1+\frac{\delta}{2}} \geq \left( \sum_{m=1}^T \lambda_m(1 - \lambda_m) \right)^{1+\frac{\delta}{2}} = (T\lambda_m(1 - \lambda_m))^{1+\frac{\delta}{2}}.$$

Daraus können wir schließen

$$\frac{\sum_{t=1}^T \mathbb{E}[|I_t - \lambda_t|^{2+\delta}]}{s_T^{2+\delta}} \leq \frac{T}{4(T\lambda_m(1 - \lambda_m))^{1+\frac{\delta}{2}}} \rightarrow 0$$

für  $T \rightarrow \infty$ .

□

Die beiden Hypothesen sind gegeben durch:

$H_0 : \lambda_t = \lambda_t^0$  für alle  $t$  und

$H_1 : \lambda_t \neq \lambda_t^0$  für manche  $t$ .

Damit kann man unter der Nullhypothese  $H_0$  die folgende Teststatistik definieren:

$$Z_2 := \frac{\sum_{t=1}^T (I_t - \lambda_t^0)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T \lambda_t^0(1 - \lambda_t^0)}}.$$

Sie ist asymptotisch standardnormalverteilt. In förmlicher Weise schreiben wir

$$Z_2 \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Dieses Resultat folgt aus dem obigen Lemma und aus dem Lyapunov-Theorem.

Darüber hinaus wird die Hypothese  $H_0$  verworfen, wenn die Realisation  $z_2$  der Teststatistik in folgenden Bereich liegt:

$$C_{Z_2} := \left\{ z_2 \mid z_2(x) < q_{Z_2} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \cup \left\{ z_2 \mid z_2 > q_{Z_2} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}.$$

Das Signifikanzniveau vom Test wird mit  $\alpha$  bezeichnet und  $q_{Z_2}$  ist eine Quantilfunktion der Standardnormalverteilung.

### 4.3.3. 3. Ansatz: genaue Abschätzung

Dieser Test basiert auf dem Ansatz von Acerbi und Szekely (2014, [1]), den wir genauer im Abschnitt 1.4.2 beschrieben haben.

Das Hauptziel ist zu überprüfen, dass der  $\Lambda$ VaR eine genaue Risikoabdeckung sichert, solange er unter den richtigen Annahmen geschätzt werden kann.

Corbetta und Peri [10] verwenden folgende Hypothesen:

$$H_0 : \Lambda \text{VaR}(F_t) = \Lambda \text{VaR}(P_t) \forall t,$$

$$H_1 : \Lambda \text{VaR}(F_t) > \Lambda \text{VaR}(P_t) \text{ für manche } t, \text{ sonst gleich.}$$

Unter der Nullhypothese sollte die Verteilung von  $X_t$  gleich der  $P_t$  sein. Damit lauten die Hypothesen:

$$H'_0 : F_t = P_t \forall t,$$

$$H'_1 : F_t > P_t \text{ für manche } t, \text{ sonst gleich.}$$

Weiter definieren wir die Teststatistik unter der Nullhypothese  $H_0$ :

$$Z_3 := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\lambda_t^0 - I_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \lambda_t^0 - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_t.$$

Für  $\Lambda$  VaR unter  $H_0$  gilt :  $\mathbb{E}[Z_3(X)] = 0$  und unter der Alternativhypothese:  
 $H_1$ :  $\mathbb{E}[Z_3(X)] < 0$ .

Der realisierte Wert  $Z_3(x)$  sollte also 0 sein und ein negativer Wert ist für die Risikoabdeckung nicht erlaubt.

### Proposition

Unter den Testhypothesen  $H'_0$  und  $H'_1$  haben wir

$$1. \mathbb{E}_{H'_0}[Z_3] = 0,$$

$$2. \mathbb{E}_{H'_1}[Z_3] < 0.$$

### BEWEIS

Es genügt unter  $H'_0$  zu schreiben:

$$I_t \sim Ber(\lambda_t^0),$$

so dass  $\mathbb{E}_{H'_0}[I_t - \lambda_t^0] = 0$ .

Dies impliziert:

$$\mathbb{E}_{H'_0}[Z_3] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{H'_0}[\lambda_t^0 - I_t] = 0.$$

Analog verfahren wir für  $H'_1$ .

Solange  $I_t \sim Ber(\lambda_t)$  mit  $\lambda_t > \lambda_t^0$  erhalten wir

$$\mathbb{E}_{H'_1}[Z_3] < 0.$$

□

#### 4.4. Behauptung von Gneiting

Ein weiteres Verfahren von Gneiting (2011, [15]) ist das Verlustfunktion-Backtesting-Verfahren mit der Fähigkeit die Vorhersagequalität zu bewerten. Gneiting behauptet, es sei nicht immer möglich eine Verteilungsfunktion zu finden, die mit den vorhergesagten Werten übereinstimmt. Schließlich erfüllt ein Funktional, welches aussagekräftige Prognosen ermöglicht, die Eigenschaft der „Elizitierbarkeit“. Jede Art von Vergleichen oder Backtesting-Methoden für nicht-elizitierbare Funktionale sind schwierig oder sogar unmöglich. Allgemein ist es in der Literatur anerkannt, wenn ein Risikomaß elizitierbar ist, dann ist es auch rückvergleichbar. Ein wichtiges Beispiel dafür sind Quantile; Damit ist der Value at Risk elizitierbar. Gneiting (2011, [15]) hat schon bewiesen, dass der Expected Shortfall nicht elizitierbar ist und hat behauptet, dass dieses Resultat die Verwendung vom Expected Shortfall als prädikatives Risikomaß verhindert.



## 5. Empirische Analyse

### 5.1. Daten

In diesem Abschnitt führen wir eine empirische Untersuchung mit einer eigenen Implementierung zur Berechnung des  $\Delta VaR$  durch: Wir folgen der Arbeit von Hitaj und Peri [17] und versuchen deren Ergebnisse unabhängig zu reproduzieren.

Wir betrachten wir 12 Aktien aus sechs verschiedenen Ländern (Deutschland, Frankreich, Spanien, Italien, Vereinigtes Königreich und USA), die von der Finanzkrise betroffen wurden und auch ein Teil vom Aktienmarkt sind. Die Aktienindizes, die wir betrachten sind GSCP, FTSE und STOXX50.

Um das Verhalten eines Risikomaßes besser zu verstehen, wählen wir die Aktien aus unterschiedlichen Branchen, zum Beispiel aus dem Finanzsektor, der Versorgungsindustrie, der Kommunikation, der Informationstechnologie, der Konsumgüterindustrie und der Energiewirtschaft. Dabei handelt es sich um die Aktienwerte von folgenden Unternehmen:

- *Citigroup Inc., Microsoft Corporation* aus den USA,
- *Royal Bank of Scotland Group PLC, Unilever PLC* aus dem Vereinigten Königreich,
- *Volkswagen AG, Deutsche Bank AG* aus Deutschland,
- *Total SA, BNP Paribas SA* aus Frankreich,
- *Santander Bank SA, Telefonica SA* aus Spanien,
- *Intesa Sanpaolo SPA, Enel SPA* aus Italien.

Die Daten beziehen sich auf die Periode von Januar 2006 bis Dezember 2011.

Der jährliche Durchschnittswert variiert durch die beobachtete Periode; Im Jahr 2006 waren alle Werte positiv, also von 4,01% für die Total SA bis 81,58% für die Volkswagen AG. Wie wir von den Daten aus der unteren Aktienstatistik sehen können, ist die jährliche Standardabweichung ziemlich klein; Den kleinsten Wert von 12,25% weist die Enel SPA auf, wobei der maximale Wert von 138,13% von der Intesa Sanpaolo SPA stammt. Die US - Hypothekenkrise im Jahr 2007, durch die weltweit die Börsen abstürzten, war auch ein Verursacher für den Rückgang der jährlichen Renditen der ausgewählten Unternehmen. Das stärkste Krisenjahr 2008 umfasst den Rückgang von allen genannten Aktienwerten. Den größten Einbruch erlebten die Deutsche Bank AG mit -95,47% und die Intesa Sanpaolo SPA mit -79,18%. Im nächsten Jahr, 2009, erholten sich die meisten Aktienwerte, aber ein paar wiesen noch einen negativen Wert auf. Den größten Verlust von -66,39% hatte die Citigroup Inc. gefolgt von der Royal Bank of Scotland mit -35,11%

2006									
log returns	min daily return	max daily return	annual mean	annual std	skewness	kurtosis	JB	H	p-value
SPC Index	-0.0185	0.0213	0.1272	0.0998	0.1028	4.1554	14.4029	1	0.0007
EUSX Index	-0.0341	0.0264	0.1306	0.1452	-0.4145	4.0305	18.2935	1	0.0001
FTSE Index	-0.0296	0.0260	0.1046	0.1255	-0.4023	4.5137	30.7322	1	0.0000
SAN SQ	-0.0354	0.0340	0.2836	0.1722	-0.363	3.7959	12.1609	1	0.0023
BNP FP	-0.0441	0.0511	0.2667	0.2205	0.0441	3.6707	4.7853	1	0.0914
C UN	-0.0481	0.0367	0.1780	0.1432	-0.1852	6.8876	159.4970	1	0.0000
DBK GY	-0.0482	0.0416	0.2440	0.2036	-0.3676	3.9008	14.1409	1	0.0008
ENEL IM	-0.0264	0.0327	0.2421	0.1225	0.1832	4.4823	24.3834	1	0.0000
ISP IM	-1.0810	0.4553	-0.6617	1.3813	-6.5922	99.7715	99757.3498	1	0.0000
MSFT UW	-0.1208	0.0475	0.1464	0.2098	-2.6677	30.7811	8369.3398	1	0.0000
RBS LN	-0.0334	0.0400	0.0964	0.1556	0.3197	4.4843	27.3163	1	0.0000
TEF SQ	-0.0404	0.0362	0.2409	0.1507	-0.2337	4.8672	38.7453	1	0.0000
FP FP	-0.0388	0.0334	0.0401	0.1759	-0.3188	3.5651	7.5930	1	0.0224
ULVR LN	-0.0599	0.0453	0.1132	0.1710	-0.4961	7.4960	221.7038	1	0.0000
VOW GY	-0.0630	0.0744	0.8158	0.3386	0.0906	3.3826	1.8736	1	0.3919
2007									
log returns	min daily return	max daily return	annual mean	annual std	skewness	kurtosis	JB	H	p-value
SPC Index	-0.0353	0.0288	0.0369	0.1595	-0.4967	4.4588	32.5792	1	0.0000
EUSX Index	-0.0293	0.0289	0.0576	0.1553	-0.2144	3.4404	3.9513	1	0.1387
FTSE Index	-0.0419	0.0344	0.0297	0.1744	-0.3584	4.5152	29.3863	1	0.0000
SAN SQ	-0.0450	0.0407	0.0697	0.2060	-0.0655	3.9736	10.0932	1	0.0064
BNP FP	-0.0446	0.0501	-0.1232	0.2471	0.1112	3.7319	6.1195	1	0.0469
C UN	-0.0714	0.0671	-0.5992	0.2871	0.0007	5.8167	82.9747	1	0.0000
DBK GY	-0.0528	0.0419	-0.1072	0.2258	0.0362	4.0751	12.1428	1	0.0023
ENEL IM	-0.0269	0.0239	0.1131	0.1392	-0.2513	3.7127	7.9538	1	0.0187
ISP IM	-0.2306	0.1651	-0.6335	0.5493	-0.8316	13.3473	1148.6810	1	0.0000
MSFT UW	-0.0422	0.0908	0.1990	0.2258	0.9525	8.8528	396.2043	1	0.0000
RBS LN	-0.4096	0.0879	-0.8325	0.5014	-8.3287	108.8485	120076.0883	1	0.0000
TEF SQ	-0.0375	0.0675	0.3657	0.1970	0.4213	6.2651	118.9196	1	0.0000
FP FP	-0.0434	0.0458	0.0904	0.2070	0.1677	3.6817	6.0362	1	0.0489
ULVR LN	-0.0347	0.0568	0.2858	0.1990	0.5585	4.8858	50.2411	1	0.0000
VOW GY	-0.0736	0.0994	0.0839	0.4363	0.0250	3.3846	1.5728	1	0.4555
2008									
log returns	min daily return	max daily return	annual mean	annual std	skewness	kurtosis	JB	H	p-value
SPC Index	-0.0947	0.1096	-0.5288	0.4090	-0.0164	6.6936	142.6888	1	0e+00
EUSX Index	-0.0821	0.1044	-0.5751	0.3920	0.2566	6.5997	138.2740	1	0.0000
FTSE Index	-0.0926	0.0938	-0.3820	0.3738	0.1271	6.3916	120.9771	1	0.0000
SAN SQ	-0.1272	0.1339	-0.5166	0.4712	0.1529	8.1339	276.6275	1	0.0000
BNP FP	-0.1110	0.1613	-0.1746	0.5070	0.4368	6.3704	126.7838	1	0.0000
C UN	-0.3066	0.4563	-1.4129	1.1303	0.5688	11.8907	840.2146	1	0.0000
DBK GY	-0.1754	0.2125	-0.9547	0.7029	0.2874	8.3356	301.1889	1	0.0000
ENEL IM	-0.0994	0.1686	-0.2961	0.3839	0.8873	14.6813	1459.9957	1	0.0000
ISP IM	-0.1100	0.1992	-0.7918	0.5387	0.9012	8.8325	389.7539	1	0.0000
MSFT UW	-0.0913	0.1706	-0.6086	0.4797	0.7177	7.7731	259.8179	1	0.0000
RBS LN	-0.4981	0.2773	-1.6215	0.9661	-2.0984	22.8285	4296.1105	1	0.0000
TEF SQ	-0.0954	0.1022	-0.3988	0.3583	-0.0336	7.5290	214.5629	1	0.0000
FP FP	-0.0964	0.1279	-0.2947	0.4142	0.4301	8.2629	297.4149	1	0.0000
ULVR LN	-0.0842	0.0687	-0.1551	0.3631	-0.2528	4.7494	34.6799	1	0.0000
VOW GY	-0.0593	0.0836	0.2500	0.3297	0.3061	4.0315	15.0481	1	0.0005

2009									
log returns	min daily return	max daily return	annual mean	annual std	skewness	kurtosis	JB	H	p-value
SPC Index	-0.0543	0.0684	0.2577	0.2733	-0.0808	4.7678	32.9556	1	0.0000
EUSX Index	-0.0524	0.0588	0.1524	0.2819	-0.0642	3.7521	6.0889	1	0.0476
FTSE Index	-0.0548	0.0476	0.2090	0.2347	-0.1926	4.3474	20.5387	1	0.0000
SAN SQ	-0.1052	0.1257	0.3474	0.5219	0.0706	4.8544	36.1737	1	0.0000
BNP FP	-0.1893	0.1887	0.0061	0.7186	0.2380	6.6353	140.5850	1	0.0000
C UN	-0.4947	0.3228	-0.6639	1.2730	-0.6686	10.7363	644.6344	1	0.0000
DBK GY	-0.1269	0.1986	0.7425	0.6971	0.3486	5.3271	61.7209	1	0.0000
ENEL IM	-0.1007	0.0768	-0.0269	0.3713	-0.4415	5.2777	62.4095	1	0.0000
ISP IM	-0.1440	0.2742	-0.1944	0.6353	1.6263	13.5439	1273.3265	1	0.0000
MSFT UW	-0.1246	0.1000	0.4903	0.3715	-0.3917	8.1616	285.0522	1	0.0000
RBS LN	-1.0957	0.3050	-0.3511	1.4874	-6.1175	74.8962	55625.2807	1	0.0000
TEF SQ	-0.0563	0.0666	0.2714	0.2291	0.2436	5.6241	74.4954	1	0.0000
FP FP	-0.0929	0.1174	0.0499	0.3826	0.4098	7.3561	205.4810	1	0.0000
ULVR LN	-0.0605	0.0936	0.2422	0.3008	0.5521	5.6925	88.5682	1	0.0000
VOW GY	-0.0722	0.0404	0.1593	0.2427	-0.3612	5.0801	50.7115	1	0.0000
2010									
log returns	min daily return	max daily return	annual mean	annual std	skewness	kurtosis	JB	H	p-value
SPC Index	-0.0398	0.0430	0.1124	0.1805	-0.2056	4.9099	39.9167	1	0.0000
EUSX Index	-0.0482	0.0985	-0.0612	0.2351	0.7195	10.5984	625.4776	1	0.0000
FTSE Index	-0.0319	0.0503	0.0984	0.1763	0.0318	4.7498	32.0642	1	0.0000
SAN SQ	0.0987	0.2088	-0.1489	0.4299	1.4162	17.0563	2150.2429	1	0.0000
BNP FP	-0.0770	0.1313	-0.0342	0.3929	0.2661	6.0516	100.3555	1	0.0000
C UN	-0.0699	0.0705	0.3188	0.3807	-0.1099	3.3874	2.0748	1	0.3544
DBK GY	-0.0755	0.1210	-0.0442	0.3485	0.3605	6.3161	120.4374	1	0.0000
ENEL IM	-0.0574	0.0767	-0.0251	0.2218	0.1447	6.9480	163.8842	1	0.0000
ISP IM	-0.3015	0.2612	-0.8752	0.7527	0.1856	13.5832	1172.8279	1	0.0000
MSFT UW	-0.0420	0.0515	-0.0721	0.2203	-0.0676	4.2842	17.4380	1	0.0002
RBS LN	-0.1955	0.1200	0.0262	0.5538	-0.3523	7.1759	187.5685	1	0.0000
TEF SQ	-0.0568	0.1131	0.0400	0.2497	0.9691	13.5404	1201.2157	1	0.0000
FP FP	-0.0427	0.0496	-0.0509	0.2223	-0.0483	3.7429	5.8692	1	0.0532
ULVR LN	-0.0828	0.0378	0.0333	0.2077	-1.2051	9.7788	541.3369	1	0.0000
VOW GY	-0.0674	0.0483	-0.1033	0.1909	-0.4124	7.0599	179.5012	1	0.0000
2011									
log returns	min daily return	max daily return	annual mean	annual std	skewness	kurtosis	JB	H	p-value
SPC Index	0.0690	0.0463	-0.0228	0.2301	-0.5472	6.0614	110.5474	1	0.0000
EUSX Index	-0.063	2 0.0590	-0.2035	0.2745	-0.2654	4.5916	29.4394	1	0.0000
FTSE Index	-0.0478	0.0394	-0.0435	0.2093	-0.2419	4.3655	21.9485	1	0.0000
SAN SQ	-0.0870	0.0913	-0.3407	0.3693	0.2064	4.4178	22.8051	1	0.0000
BNP FP	-0.1558	0.1592	-0.5428	0.4685	0.1616	10.7148	623.5576	1	0.0000
C UN	-0.1793	0.1297	-0.5919	0.5247	-0.5282	7.2675	202.1374	1	0.0000
DBK GY	-0.0928	0.1428	-0.2083	0.4410	0.5591	7.7968	253.7192	1	0.0000
ENEL IM	-0.0659	0.0703	-0.1084	0.2638	-0.4410	5.5182	74.4537	1	0.0000
ISP IM	-0.1245	0.2823	-1.0038	0.6101	2.0704	15.9417	1930.9569	1	0.0000
MSFT UW	-0.0555	0.0440	-0.0611	0.2319	-0.1852	4.2185	16.9627	1	0.0002
RBS LN	-0.1315	0.0894	-0.7706	0.4663	-0.3084	4.8669	40.4281	1	0.0000
TEF SQ	-0.0586	0.0420	-0.1826	0.2355	-0.3029	4.6574	32.5671	1	0.0000
FP FP	-0.0585	0.0476	-0.0813	0.2208	-0.3349	4.6213	32.1835	1	0.0000
ULVR LN	-0.0272	0.0611	0.1161	0.1785	0.6184	6.1243	118.0888	1	0.0000
VOW GY	-0.2209	0.0572	-0.4524	0.4265	-3.8099	31.6108	9168.1649	1	0.0000

Tabelle 1: Beschreibende Statistik für Aktien und Indizes im Zeitraum 2006-2011. Für jede Aktie und jeden Index betrachten wir die minimale und die maximale tägliche Rendite, den jährlichen Mittelwert und die jährliche Standardabweichung, die Schiefe, die Wölbung, sowie den Jarque-Bera-Test für das Vorliegen einer Normalverteilung mit seiner Hypothese H ( $H = 1$  wenn die Hypothese angenommen wird und  $H = 0$  andernfalls).

und von der Intesa Sanpaolo SPA mit -19,44% bis auf die Enel SPA mit -2,69%. Im Jahr 2010 wiesen die Citigroup Inc., die Royal Bank of Scotland, die Telefonica SA und die Unilever PLC einen positiven Wert auf, wobei sich die Krise im ganzen Euro-Raum fortsetzte.

Im **Anhang C** befindet sich der R-Code für die beschreibende Statistik.

## 5.2. $\Delta$ VaR & VaR-Vergleich

In diesem Abschnitt überprüfen wir unsere Methode zur Berechnung von  $\Delta$ VaR, mit Hilfe des sogenannten dynamischen Benchmark-Ansatz. Hier beobachten wir eine empirische Anwendung von  $\Delta$ VaR, sowie diverse Kalibrierungen und deren Umsetzung unter verschiedenen Verteilungsannahmen. Wir vergleichen die  $\Delta$ VaR-Schätzungen mit denen von Value at Risk und Expected Shortfall und führen das Backtesting-Verfahren entlang der verschiedenen Zeitpunkten der Finanzkrise durch.

Unser Ziel ist es, die Fähigkeit des  $\Delta$ VaR ein bestimmtes Risiko abzudecken, vor allem bei Extremszenarien, zu bewerten. Für eine ausführliche Analyse nehmen wir die Konfidenzintervalle von 1%, 2% und 3%. Gemäß dem Basler Ausschuss (2013, [5]) verwenden wir für den Expected Shortfall das 2,5% Konfidenzniveau.

### **Genauere Beschreibung:**

Wir berechnen VaR, ES und das neue Maß  $\Delta$ VaR auf täglicher Basis mit einem effektiven historischen Beobachtungszeitraum von einem Jahr (250 Handelstage) für die oben genannten 12 Stammaktien. Die Daten beziehen sich auf die Periode von Januar 2005 bis Dezember 2011. Insbesondere teilen wir unsere Analyse in sechs Zeitfenster ein; wir nehmen 250 Handelstage für die Risikomessung und ein Jahr für das Backtesting-Verfahren.

In den folgenden Grafiken sehen wir wie die Risikomaße von ausgewählten Unternehmen auf Marktschwankungen reagieren. Das erste grundlegende Ergebnis auf historischer Basis ergibt, dass der  $\Delta$ VaR sehr vorsichtig und reaktionsfreudig ist gegenüber den Marktbedingungen. Im Krisenjahr 2008 reagiert der  $\Delta$ VaR schneller auf ungünstige Marktereignisse gegenüber den anderen Risikomaßen. In der Nachkrisenzeit bleibt das neue Maß sorgfältig und somit garantiert er die höchste Reaktionsfreudigkeit auf unerwartete Marktrisiken. Das Backtesting-Verfahren zeigt das zweite fundamentale Ergebnis: Der  $\Delta$ VaR weist die höchste Genauigkeit auf.

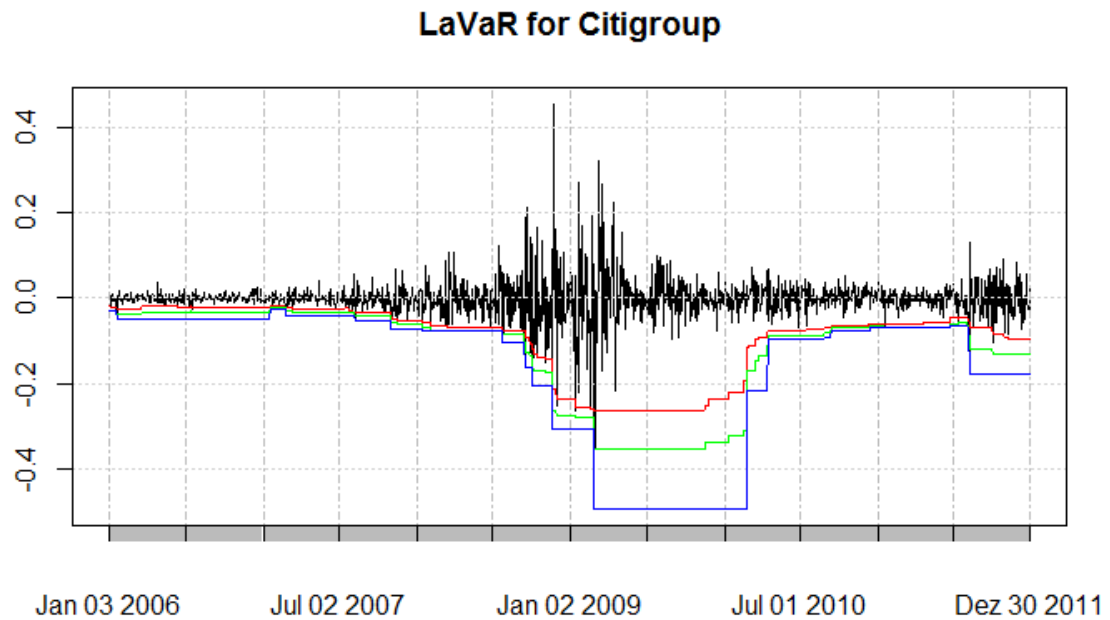
Im **Anhang B** befinden sich die entsprechenden Codes für die Reaktivität von Risikomaßen von drei Unternehmen aus unterschiedlichen Branchen und mit verschiedenen Benchmarks (Microsoft mit GSCP, Royal Bank of Scotland mit FTSE und Enel SPA mit STOXX50) unter den Namen

LaVaR Microsoft.R

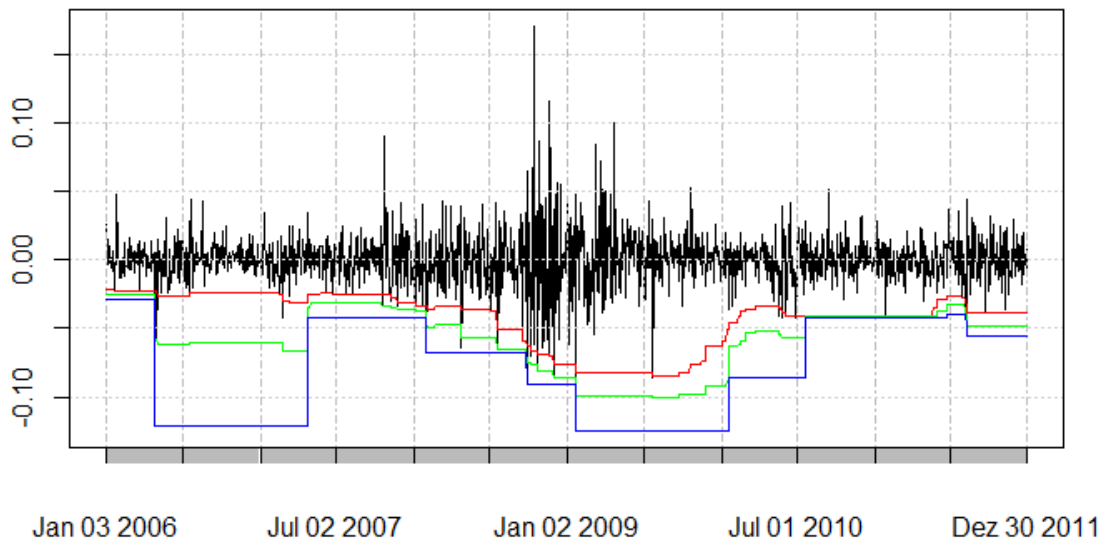
LaVar RoyalBank.R

## LaVaR Enel.R

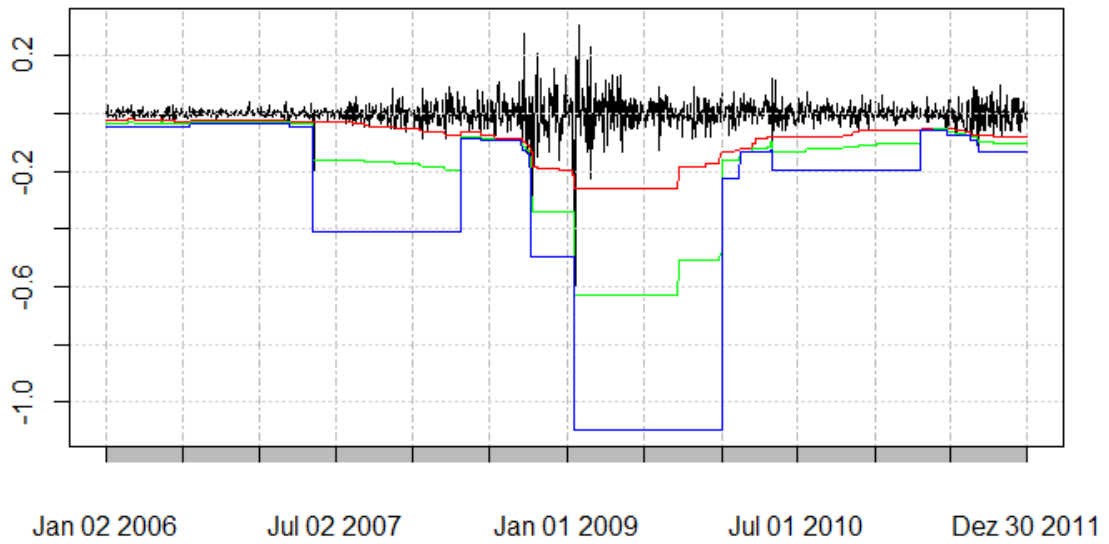
In den Grafiken ist der VaR rot, der ES grün und der  $\Delta$ VaR blau gezeichnet. Für die restlichen Unternehmen können wir die Codes analog schreiben.



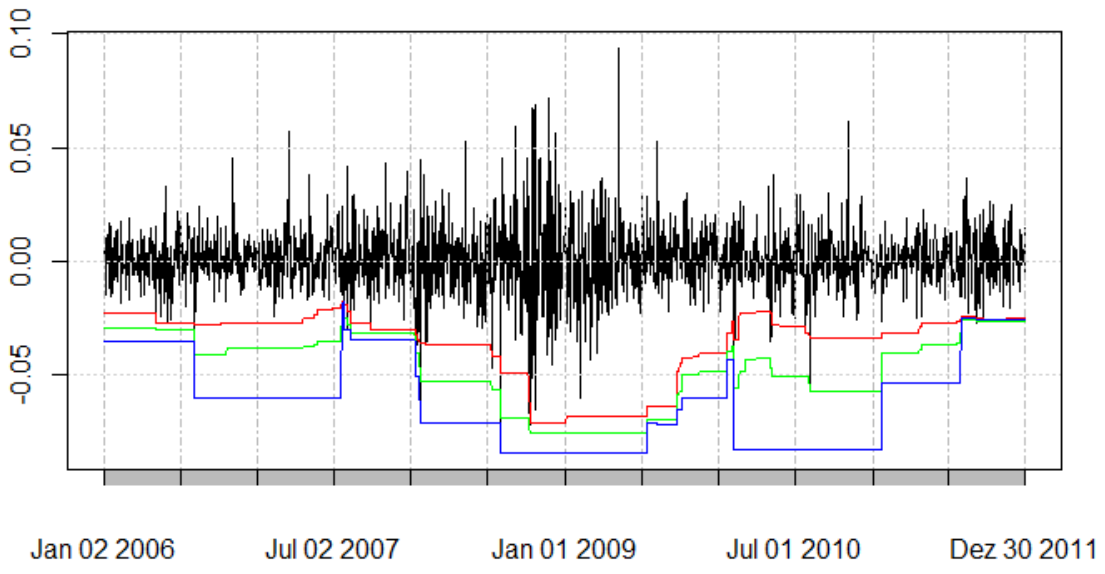
### LaVaR for Microsoft Corporation



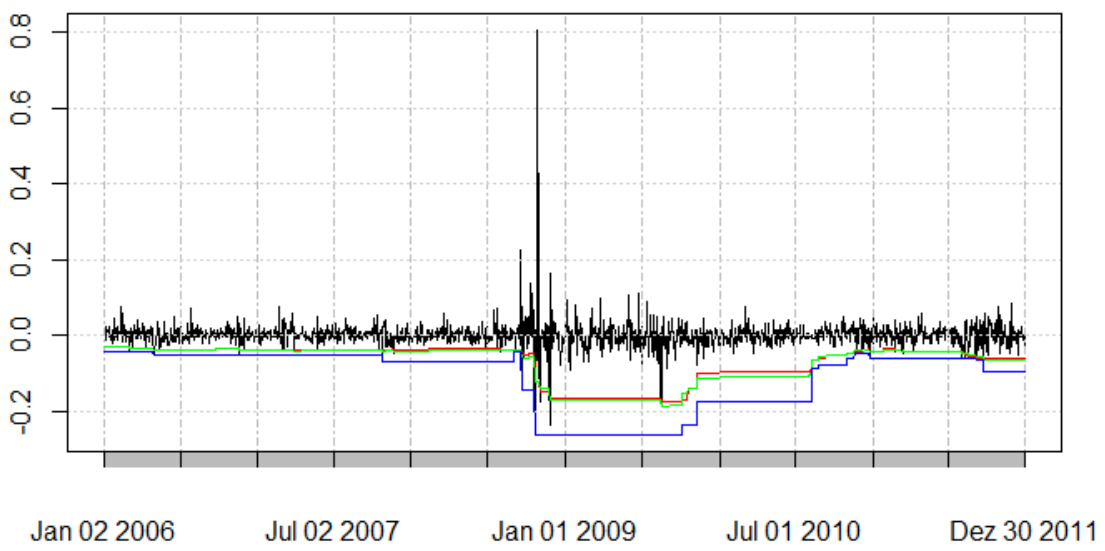
### LaVaR for Royal Bank of Scotland Group PLC



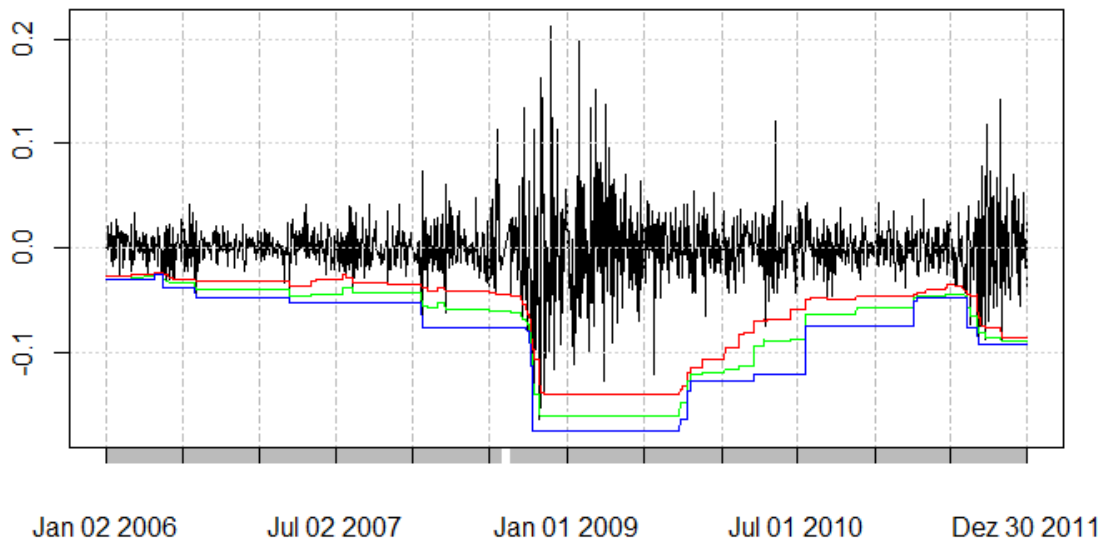
### LaVaR for Unilever PLC



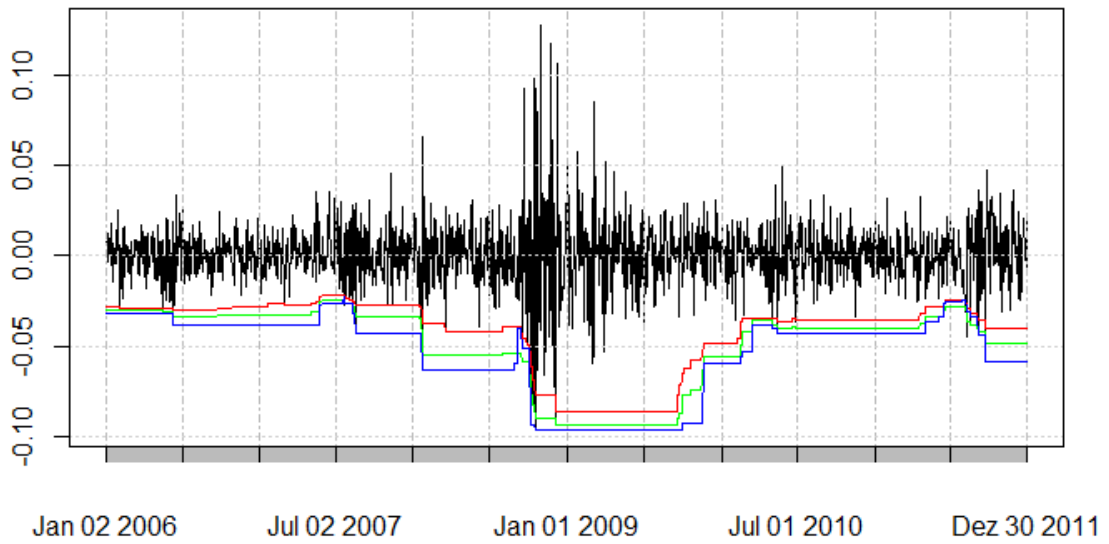
### LaVaR for Volkswagen



### LaVaR for Deutsche Bank AG

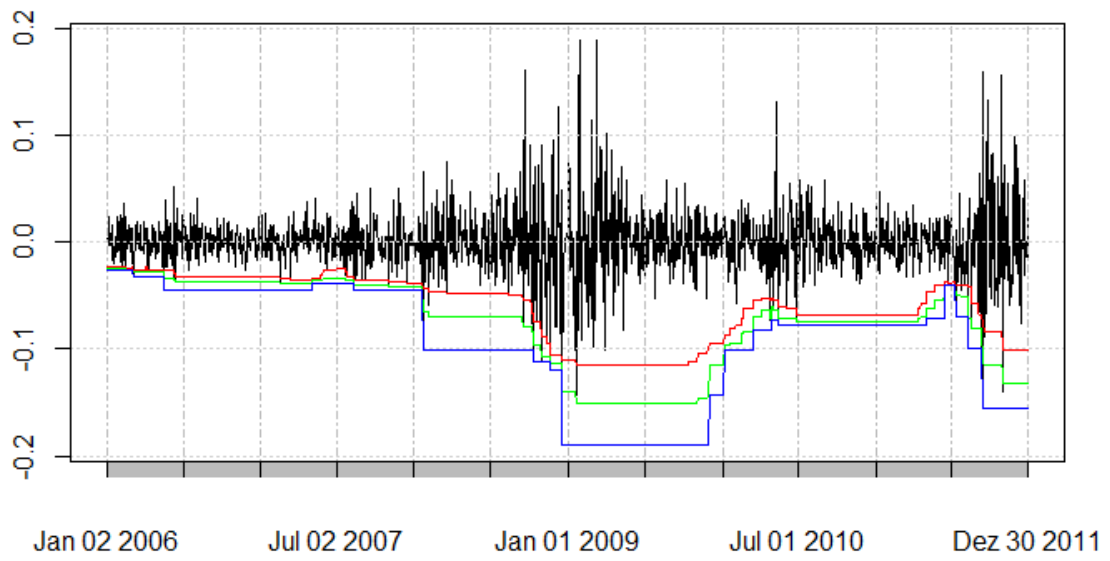


### LaVaR for Total SA

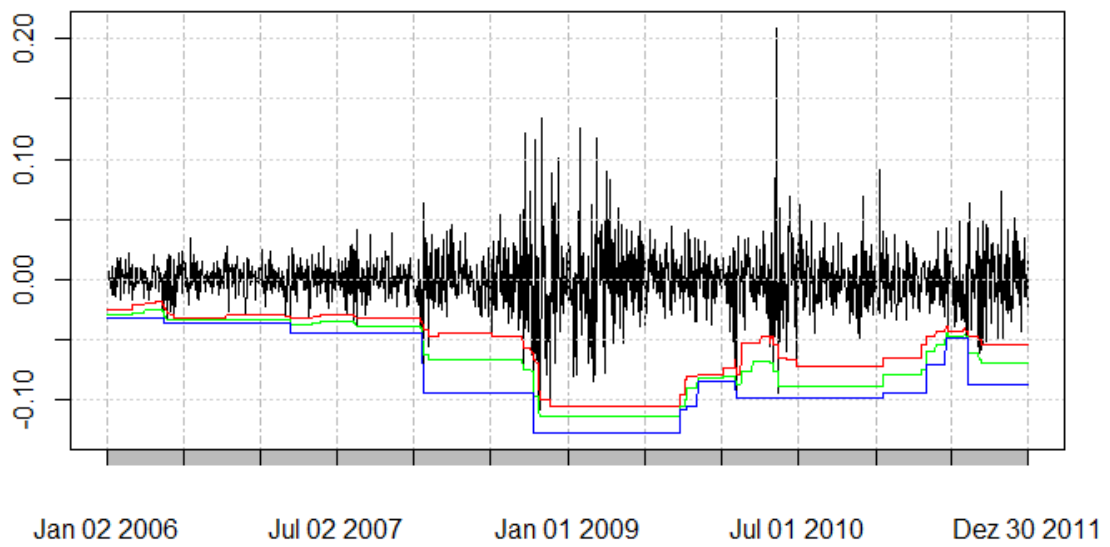




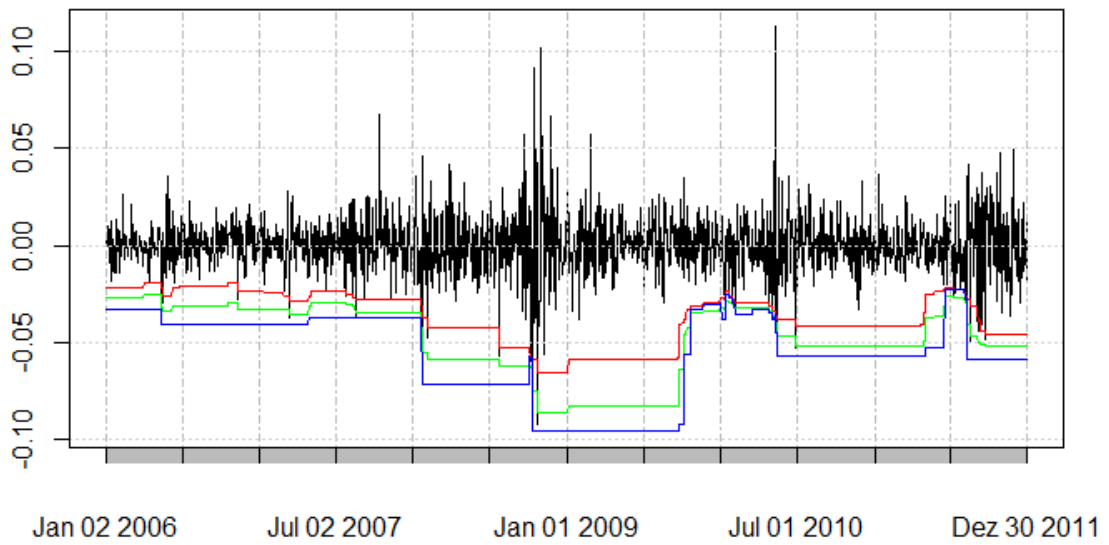
### LaVaR for BNP Paribas SA



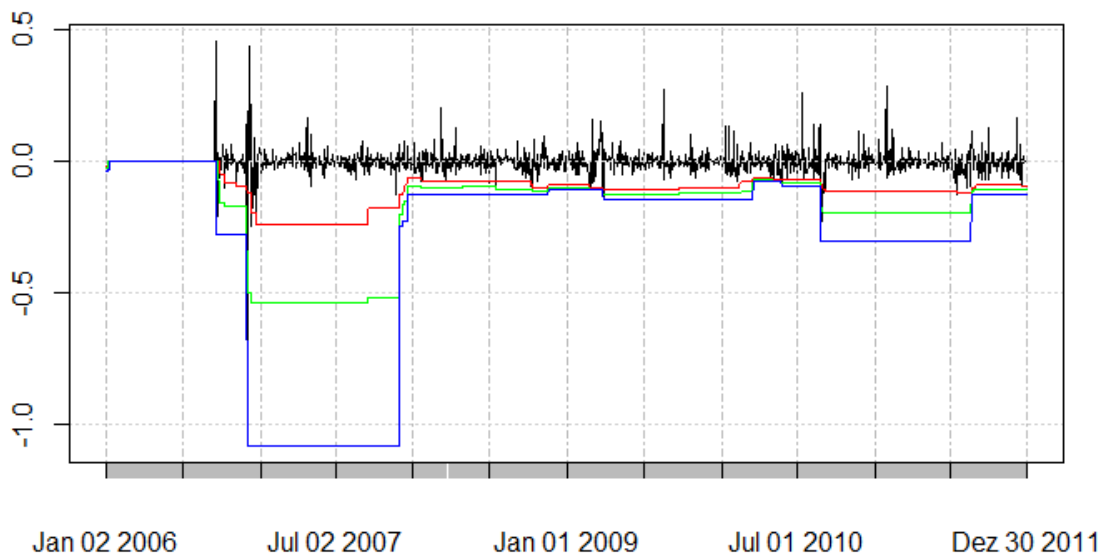
### LaVaR for Banco Santander SA



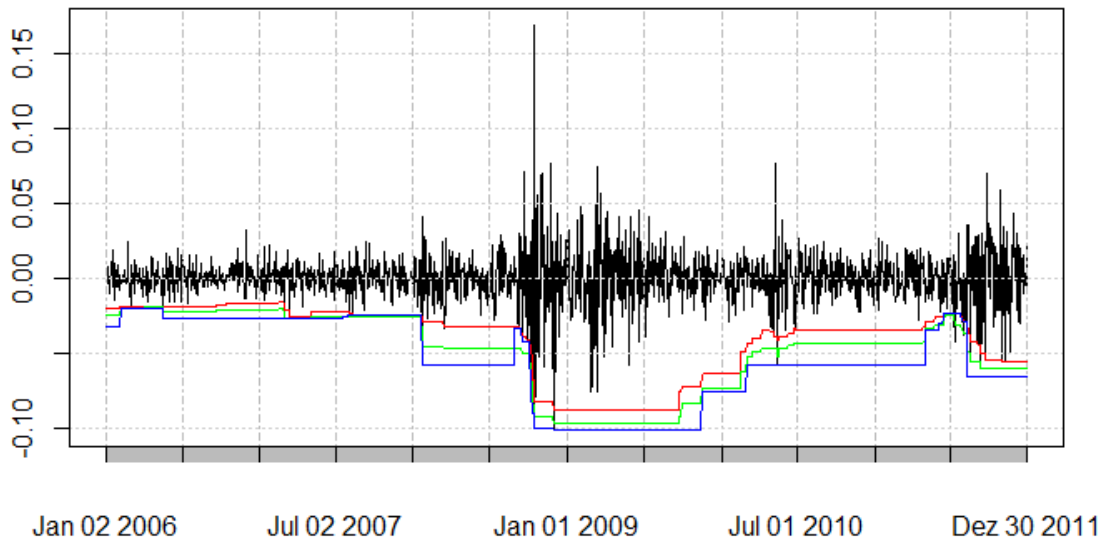
### LaVaR for Telefonica SA



### LaVaR for Intesa Sanpaolo SPA



## LaVaR for Enel SPA



### 5.3. Backtesting Resultate

Im Jahr 2006 wird für den VaR zum Konfidenzniveau 1% und 2% die Nullhypothese angenommen. Das gleiche passiert für alle  $\Delta$ VaR Modelle. Die Genauigkeit des VaR hängt also von dem Konfidenzintervall ab, d.h. je kleiner das Intervall wird, desto präziser ist der VaR.

Während der US-Immobilienkrise 2007 bemerkt man einen wesentlichen Rückgang der Annahmequote; von 97% auf 72% für den VaR und von 100% auf 83% für den durchschnittlichen  $\Delta$ VaR. Im Gegensatz dazu, behalten die steigenden  $\Delta$ VaR Modelle den Annahmeprozentsatz von 100 bei.

Im Jahr 2008 waren die Auswirkungen der Krise auf die Annahmequoten das besondere Highlight. Auf der Abbildung 3 sind verschiedene VaR Risikounterschätzungen mit Annahmequoten von 0% zu sehen. Hingegen bleiben alle steigenden  $\Delta$ VaR Modelle bei 100%. Die fallenden  $\Delta$ VaR Modelle waren während der Krise etwas ungenau; also von 60% auf 52%. Obwohl das 1%-VaR Modell die größte Genauigkeit aufweist, zeigt es die durchschnittliche Erhöhung der Anzahl der Verletzungen von 3,42 auf 11,58.

Im Laufe des Jahres 2009 erreichte der 1%-VaR wieder den Annahmeprozentsatz von 100, wobei hingegen der VaR zum Konfidenzniveau 2% und 3% anhaltend das Risiko unterbewertete. Der fallende  $\Delta$ VaR erhöhte seine Quote auf 98%, während der steigende, das beste Modell, unabhängig vom Konfidenzintervall, in der Krise war.

Im Jahr 2010 gibt es nur Änderungen beim VaR; die Annahmequote steigt auf 89%.

Der wirtschaftliche Abschwung im Jahr 2011 bestätigt die Beobachtungen vor 2008, nämlich eine positive Reaktionsfähigkeit der steigenden  $\Delta$ VaR Modelle im Vergleich zu fallenden, wobei die letzteren besser auf Marktschwankungen als der VaR reagieren.

# Anhang

## A. Beispiel Lambda VaR berechnen.R

```
rm(list=ls())

# Construct an increasing piecewise linear Lambda function
# with points (z[i], la[i])
z<- c(-2,-1,2,4)
la<- c(0.1,0.3,0.6,0.9)
La<- approxfun(z, la,yleft=0.1,yright=0.9)
curve(La,from=-3,to=5)

# Generate some data X and construct the empirical
# distribution function F
set.seed(2016)
X<- runif(9,min=-1,max=5)
F<- ecdf(X)
curve(F,from=-3,to=5,col="green",add=TRUE)

# sort the data X into y
y<- sort(X)

# check the first position where F jumps over Lambda
k<- which(F(y)>La(y))[1]
LaVaR<- -y[k]
```

## B. Reaktivität von Riskomaßen

### B.1. Microsoft.R

```
# clear everything
rm(list=ls())

# load librarys
library("xts")

# Load data for Microsoft (MSFT from Yahoo)
load("Microsoft.Data")

#load benchmark data
load("spc.Data")
load("eusx.Data")
load("ftse.Data")

# Compute log returns
LogRet<- diff(log(Microsoft$AdjClose))
LogRetR1<- diff(log(spc$AdjClose))
LogRetR2<- diff(log(eusx$AdjClose))
LogRetR3<- diff(log(ftse$AdjClose))

# simple arrays
D<- time(LogRet)
X<- as.numeric(coredata(LogRet))
R1<- as.numeric(coredata(LogRetR1))
R2<- as.numeric(coredata(LogRetR2))
R3<- as.numeric(coredata(LogRetR3))

# Now let us find the index of the first day in 2006
a<- length(LogRet["/2005"])+1

# Now let us find the index of the last day in 2011
b<- length(LogRet["/2011"])

# Use 250 days for computation of the risk measures
n<- 250

# A function to compute the VaR
CalcVaR<- function(X, al){
  as.numeric(quantile(X, al, na.rm=TRUE))
}
```

```

# A function to compute the ES
CalcES<- function(X, al){
  VaR<- as.numeric(quantile(X, al, na.rm=TRUE))
  mean(X[X<=VaR])
}

# Compute LaVaR, linear increasing
CalcLaVaR<- function(lamin, lamax, laben, X, R1, R2, R3){
  # lamin = minimal lambda
  # lamax = maximal lambda
  # laben = benchmark lambda for z calculation
  # Compute lambda
  la1<- lamin
  la2<- lamax*1/3
  la3<- lamax*2/3
  la4<- lamax
  la<- c(la1, la2, la3, la4)
  # compute z
  z1<- min(R1, R2, R3, na.rm=TRUE)
  v1<- CalcVaR(R1, laben)
  v2<- CalcVaR(R2, laben)
  v3<- CalcVaR(R3, laben)
  v<- c(v1, v2, v3)
  z2<- min(v, na.rm=TRUE)
  z3<- mean(v, na.rm=TRUE)
  z4<- max(v, na.rm=TRUE)
  z<- c(z1, z2, z3, z4)
  # define Lambda function
  La<- approxfun(z, la, yleft=la1, yright=la4)
  # Calculate LaVaR
  F<- ecdf(X)
  y<- sort(X)
  k<- which(F(y)>La(y))[1]
  LaVaR<- y[k]
  return(LaVaR)
}

# Compute VaR ES, LaVaR for all days in 2006–2011
VaR<- numeric(length=length(X))
ES<- numeric(length=length(X))
LaVaR<- numeric(length=length(X))
for(t in a:b){
  VaR[t]<- CalcVaR(X[(t-n+1):t], 0.01)
  ES[t]<- CalcES(X[(t-n+1):t], 0.01)
}

```

```

    LaVaR[t] <- CalcLaVaR(0.001, 0.01, 0.01, X[(t-n+1):t], R1[(t-n+1):t],
    R2[(t-n+1):t], R3[(t-n+1):t])
}

# Plot the results
plot(D[a:b], X[a:b], type="l", col="black")
lines(D[a:b], VaR[a:b], col="red")
lines(D[a:b], ES[a:b], col="green")
lines(D[a:b], LaVaR[a:b], col="blue")

LaVaRMicrosoft <- xts(cbind(X[a:b], VaR[a:b], ES[a:b], LaVaR[a:b]),
order.by=as.Date(D[a:b]))
colnames(LaVaRMicrosoft) <- c("X", "VaR", "ES", "LaVaR")
plot(LaVaRMicrosoft[, "X"], main="LaVaR for Microsoft Corporation")
lines(LaVaRMicrosoft[, "VaR"], col="red")
lines(LaVaRMicrosoft[, "ES"], col="green")
lines(LaVaRMicrosoft[, "LaVaR"], col="blue")

```



## B.2. RoyalBank.R

```
# clear everything
rm(list=ls())

# load librarys
library("xts")

# Load data for RoyalBank (RBS.L from Yahoo)
load("RoyalBank.Data")

#load benchmark data
load("spc.Data")
load("eusx.Data")
load("ftse.Data")

# Compute log returns
LogRet<- diff(log(RoyalBank$AdjClose))
LogRetR1<- diff(log(spc$AdjClose))
LogRetR2<- diff(log(eusx$AdjClose))
LogRetR3<- diff(log(ftse$AdjClose))

# simple arrays
D<- time(LogRet)
X<- as.numeric(coredata(LogRet))
R1<- as.numeric(coredata(LogRetR1))
R2<- as.numeric(coredata(LogRetR2))
R3<- as.numeric(coredata(LogRetR3))

# Now let us find the index of the first day in 2006
a<- length(LogRet["/2005"])+1

# Now let us find the index of the last day in 2011
b<- length(LogRet["/2011"])

# Use 250 days for computation of the risk measures
n<- 250

# A function to compute the VaR
CalcVaR<- function(X, al){
  as.numeric(quantile(X, al, na.rm=TRUE))
}

# A function to compute the ES
```

```

CalcES<- function(X, al){
  VaR<- as.numeric(quantile(X, al, na.rm=TRUE))
  mean(X[X<=VaR])
}
# Compute LaVaR, linear increasing
CalcLaVaR<- function(lamin, lamax, laben, X, R1, R2, R3){
  # lamin = minimal lambda
  # lamax = maximal lambda
  # laben = benchmark lambda for z calculation
  # Compute lambda
  la1<- lamin
  la2<- lamax*1/3
  la3<- lamax*2/3
  la4<- lamax
  la<- c(la1, la2, la3, la4)
  # compute z
  z1<- min(R1, R2, R3, na.rm=TRUE)
  v1<- CalcVaR(R1, laben)
  v2<- CalcVaR(R2, laben)
  v3<- CalcVaR(R3, laben)
  v<- c(v1, v2, v3)
  z2<- min(v, na.rm=TRUE)
  z3<- mean(v, na.rm=TRUE)
  z4<- max(v, na.rm=TRUE)
  z<- c(z1, z2, z3, z4)
  # define Lambda function
  La<- approxfun(z, la, yleft=la1, yright=la4)
  # Calculate LaVaR
  F<- ecdf(X)
  y<- sort(X)
  k<- which(F(y)>La(y))[1]
  LaVaR<- y[k]
  return(LaVaR)
}
# Compute VaR ES, LaVaR for all days in 2006–2011
VaR<- numeric(length=length(X))
ES<- numeric(length=length(X))
LaVaR<- numeric(length=length(X))
for(t in a:b){
  VaR[t]<- CalcVaR(X[(t-n+1):t], 0.01)
  ES[t]<- CalcES(X[(t-n+1):t], 0.01)
  LaVaR[t]<- CalcLaVaR(0.001, 0.01, 0.01, X[(t-n+1):t], R1[(t-n+1):t],
  R2[(t-n+1):t], R3[(t-n+1):t])
}

```

```

# Plot the results
plot(D[a:b],X[a:b],type="l",col="black")
lines(D[a:b],VaR[a:b],col="red")
lines(D[a:b],ES[a:b],col="green")
lines(D[a:b],LaVaR[a:b],col="blue")

LaVaRRoyalBank<- xts(cbind(X[a:b],VaR[a:b],ES[a:b],LaVaR[a:b]),
order.by=as.Date(D[a:b]))
colnames(LaVaRRoyalBank)<- c("X","VaR","ES","LaVaR")
plot(LaVaRRoyalBank[, "X"],main="LaVaR for Royal Bank of Scotland
Group PLC")
lines(LaVaRRoyalBank[, "VaR"],col="red")
lines(LaVaRRoyalBank[, "ES"],col="green")
lines(LaVaRRoyalBank[, "LaVaR"],col="blue")

```

### B.3. Enel.R

```
# clear everything
rm(list=ls())

# load librarys
library("xts")

# Load data for Enel SPA (ENEL.MI from Yahoo)
load("Enel.Data")

#load benchmark data
load("spc.Data")
load("eusx.Data")
load("ftse.Data")

# Compute log returns
LogRet<- diff(log(Enel$AdjClose))
LogRetR1<- diff(log(spc$AdjClose))
LogRetR2<- diff(log(eusx$AdjClose))
LogRetR3<- diff(log(ftse$AdjClose))

# simple arrays
D<- time(LogRet)
X<- as.numeric(coredata(LogRet))
R1<- as.numeric(coredata(LogRetR1))
R2<- as.numeric(coredata(LogRetR2))
R3<- as.numeric(coredata(LogRetR3))

# Now let us find the index of the first day in 2006
a<- length(LogRet["/2005"])+1

# Now let us find the index of the last day in 2011
b<- length(LogRet["/2011"])

# Use 250 days for computation of the risk measures
n<- 250

# A function to compute the VaR
CalcVaR<- function(X, al){
  as.numeric(quantile(X, al, na.rm=TRUE))
}
# A function to compute the ES
CalcES<- function(X, al){
```

```

    VaR<- as.numeric(quantile(X, al, na.rm=TRUE))
    mean(X[X<=VaR])
}
# Compute LaVaR, linear increasing
CalcLaVaR<- function(lamin, lamax, laben, X, R1, R2, R3){
  # lamin = minimal lambda
  # lamax = maximal lambda
  # laben = benchmark lambda for z calculation
  # Compute lambda
  la1<- lamin
  la2<- lamax*1/3
  la3<- lamax*2/3
  la4<- lamax
  la<- c(la1, la2, la3, la4)
  # compute z
  z1<- min(R1, R2, R3, na.rm=TRUE)
  v1<- CalcVaR(R1, laben)
  v2<- CalcVaR(R2, laben)
  v3<- CalcVaR(R3, laben)
  v<- c(v1, v2, v3)
  z2<- min(v, na.rm=TRUE)
  z3<- mean(v, na.rm=TRUE)
  z4<- max(v, na.rm=TRUE)
  z<- c(z1, z2, z3, z4)
  # define Lambda function
  La<- approxfun(z, la, yleft=la1, yright=la4)
  # Calculate LaVaR
  F<- ecdf(X)
  y<- sort(X)
  k<- which(F(y)>La(y))[1]
  LaVaR<- y[k]
  return(LaVaR)
}
# Compute VaR ES, LaVaR for all days in 2006–2011
VaR<- numeric(length=length(X))
ES<- numeric(length=length(X))
LaVaR<- numeric(length=length(X))
for(t in a:b){
  VaR[t]<- CalcVaR(X[(t-n+1):t], 0.01)
  ES[t]<- CalcES(X[(t-n+1):t], 0.01)
  LaVaR[t]<- CalcLaVaR(0.001, 0.01, 0.01, X[(t-n+1):t], R1[(t-n+1):t],
  R2[(t-n+1):t], R3[(t-n+1):t])
}

```

```

# Plot the results
plot(D[a:b],X[a:b],type="l",col="black")
lines(D[a:b],VaR[a:b],col="red")
lines(D[a:b],ES[a:b],col="green")
lines(D[a:b],LaVaR[a:b],col="blue")

LaVaREnel<- xts(cbind(X[a:b],VaR[a:b],ES[a:b],LaVaR[a:b]),
order.by=as.Date(D[a:b]))
colnames(LaVaREnel)<- c("X","VaR","ES","LaVaR")
plot(LaVaREnel[, "X"],main="LaVaR for Enel SPA")
lines(LaVaREnel[, "VaR"],col="red")
lines(LaVaREnel[, "ES"],col="green")
lines(LaVaREnel[, "LaVaR"],col="blue")

```

## C. Beschreibende Statistik.R

```
rm(list=ls())

library("tseries")
library("xts")
library("moments")
library("normtest")

#load benchmark data
load("spc.Data")
load("eusx.Data")
load("ftse.Data")

# Load data for Stocks
load("BancoSantander.Data")
load("Paribas.Data")
load("Citigroup.Data")
load("DeutscheBank.Data")
load("Enel.Data")
load("Intesa.Data")
load("Microsoft.Data")
load("RoyalBank.Data")
load("Telefonica.Data")
load("Total.Data")
load("Unilever.Data")
load("Volkswagen.Data")

# Compute log returns
LogRetR1<- diff(log(spc$AdjClose))
LogRetR2<- diff(log(eusx$AdjClose))
LogRetR3<- diff(log(ftse$AdjClose))
LogRetR4<- diff(log(BancoSantander$AdjClose))
LogRetR5 <- diff(log(Paribas$AdjClose))
LogRetR6 <- diff(log(citg$AdjClose))
LogRetR7 <- diff(log(DeutscheBank$AdjClose))
LogRetR8 <- diff(log(enel$AdjClose))
LogRetR9 <- diff(log(Intesa$AdjClose))
LogRetR10 <- diff(log(Microsoft$AdjClose))
LogRetR11 <- diff(log(RoyalBank$AdjClose))
LogRetR12 <- diff(log(Telefonica$AdjClose))
LogRetR13 <- diff(log(Total$AdjClose))
LogRetR14 <- diff(log(ulvr$AdjClose))
```

```

LogRetR15 <- diff(log(Volkswagen$AdjClose))

# simple arrays
M<-matrix(list(), 1, 15)
M[[1,1]] <- as.numeric(coredata(LogRetR1))
M[[1,2]] <- as.numeric(coredata(LogRetR2))
M[[1,3]] <- as.numeric(coredata(LogRetR3))
M[[1,4]] <- as.numeric(coredata(LogRetR4))
M[[1,5]] <- as.numeric(coredata(LogRetR5))
M[[1,6]] <- as.numeric(coredata(LogRetR6))
M[[1,7]] <- as.numeric(coredata(LogRetR7))
M[[1,8]] <- as.numeric(coredata(LogRetR8))
M[[1,9]] <- as.numeric(coredata(LogRetR9))
M[[1,10]] <- as.numeric(coredata(LogRetR10))
M[[1,11]] <- as.numeric(coredata(LogRetR11))
M[[1,12]] <- as.numeric(coredata(LogRetR12))
M[[1,13]] <- as.numeric(coredata(LogRetR13))
M[[1,14]] <- as.numeric(coredata(LogRetR14))
M[[1,15]] <- as.numeric(coredata(LogRetR15))

# The index of the first day in 2006
a<- dim(citg["/2005"])[1]+1
a1<- as.numeric(dim(citg["/2006-09-15"])[1])+2

# The index of the last day in 2006
b<- dim(citg["/2006"])[1]

Xmin <- array(dim = c(6,15))
Xmax <- array(dim = c(6,15))
Xmean <- array(dim = c(6,15))
Xsd <- array(dim = c(6,15))
Xskew <- array(dim = c(6,15))
Xkurt <- array(dim = c(6,15))
XJB <- array(dim = c(6,15))
Xpval <- array(dim = c(6,15))
XH <- array(dim = c(6,15))

for (j in 1:15){
  Xfull <- M[[1, j]]
  for(t in 1:6){
    X <- Xfull[(a+(t-1)*250):(b+(t-1)*250)]
    Xmin[t, j] <- min(X)
    Xmax[t, j] <- max(X)
    Xmean[t, j] <- 250*mean(X)
  }
}

```



```

Xsd[t,j] <- sqrt(250)*sd(X)
Xskew[t,j] <- as.numeric(skewness(X))
Xkurt[t,j] <- as.numeric(kurtosis(X))
jbt <- jarque.test(X)
XJB[t,j] <- as.numeric(jbt$statistic)
Xpval[t,j] <- as.numeric(jbt$p.value)
XH[t,j] <- as.numeric(XJB[t,j] > Xpval[t,j])
}
}

Table1 <- array(dim=c(6,15,9))
for (k in 1:6){
  Table1[k,,] <-
    round(cbind(Xmin[k,], Xmax[k,], Xmean[k,], Xsd[k,], Xskew[k,],
      Xkurt[k,], XJB[k,], XH[k,], Xpval[k,]),4)
  print(Table1[k,,])
}

```



## Literatur

- [1] Acerbi, C., Szekely, B. (2014), *Backtesting Expected Shortfall*, Risk 27(11), 1-6.
- [2] Bartlett, M. S. (1951)  
*The Frequency Goodness of Fit Test for Probability Chains*, Proceeding of the Cambridge Philosophical Society 47, 86-95.
- [3] Basler Committee on Banking Supervision (1996a)  
*Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Bank for International Settlements.
- [4] Basler Committee on Banking Supervision (1996b)  
*Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the International Models Approach to Market Risk Capital Requirements*, Bank for International Settlements.
- [5] Basler Committee on Banking Supervision (2013)  
*Fundamental review of the trading book, second consultative document*, Bank for International Settlements.
- [6] Bellini, F., Bignozzi, V. (2014)  
*On elicitable risk measures*, Quantitative Finance, 15(5), 725-733.
- [7] Christoffersen, P. (1998)  
*Evaluating Interval Forecasts*, International Economic Review 39, 841-862.
- [8] Clift, S. S., Costanzino, N., Curran, M. (2016)  
*Empirical Performance of Backtesting Methods for Expected Shortfall*, nachzulesen auf <https://ssrn.com/abstract=2618345>.
- [9] Constanzino, N., Curran, M. (2015)  
*Backtesting General Spectral Risk Measures with Application to Expected Shortfall*, The Journal of risk model validation, Volume 9(1), 21-31.
- [10] Corbetta, J., Peri, I. (2017)  
*Backtesting Lambda Value at Risk*, q-fin.RM, Statistical Finance, Working paper, 13.02.2017, nachzulesen auf <https://arxiv.org/pdf/1602.07599.pdf>.
- [11] Daniels, H. E. (1987)  
*Tail Probability Approximations*, Statistical Laboratory, Cambridge, International Statistical Review, Volume 55(1), 37-48.
- [12] Emmer, S., Kratz, M., Tasche, D. (2015)  
*What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures*, Journal of Risk 18(2), 31-60.

- [13] Föllmer, H., Schied, A. (2004)  
*Stochastic Finance – an introduction in discrete time*, De Gruyter Verlag, 2. Auflage.
- [14] Frittelli, M., Maggis, M., Peri, I. (2014)  
*Risk measures on  $P(\mathbb{R})$  and Value at Risk with Probability/Loss function*, Mathematical Finance 24, 442-463.
- [15] Gneiting, T. (2011)  
*Making and Evaluating Point Forecasts*, Journal of the American Statistical Association 106, 746-762.
- [16] Hitaj, A., Mateus, C., Peri, I. (2016)  
*Lambda Value at Risk and regulatory capital: a dynamic approach to tail risk*, Working paper.
- [17] Hitaj, A., Peri, I. (2015)  
*Lambda value at risk: a new backtestable alternative to VaR*, Working paper, DOI:10.2139/SSRN 2542542.
- [18] Hoel, P. G. (1954)  
*A Test for Markov Chains*, Biometrika 41, 430-433.
- [19] Kupiec, P. (1995)  
*Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*, Journal of Derivatives 3, 73-84.
- [20] Lambert, N. S., Pennock, D. M., Shoham, Y. (2008)  
*Eliciting properties of probability distributions*, In Proceedings of the 9th ACM Conference on Electronic Commerce, 129-138, Association of Computing Machinery.
- [21] Lambert, N. S. (2013)  
*Elicitation and evaluation of statistical forecast*, Working Paper, Stanford University, nachzulesen auf <https://web.stanford.edu/~nlambert/papers/elicitatation.pdf>.
- [22] Lyapunov, A. M. (1954), *Collected works*, Vol 1.
- [23] McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2005)  
*Quantitative Risk Management, Concepts, Techniques, Tools*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- [24] Miemiec, A., Schuster N., Wächter, H. P. (2015)  
*Expected Shortfall: Elicitability and Backtesting*, Zeitschrift Risiko Manager, Band 8, Seiten 1 und 7.
- [25] Newey, W., Powell, J. (1987)  
*Asymmetric least squares estimation and testing*, Econometrica 55(4), 819-847.
- [26] Ziegel, J. (2014)  
*Coherency and elicibility*, Mathematical Finance, 26(4), 901-918.